Aritmética

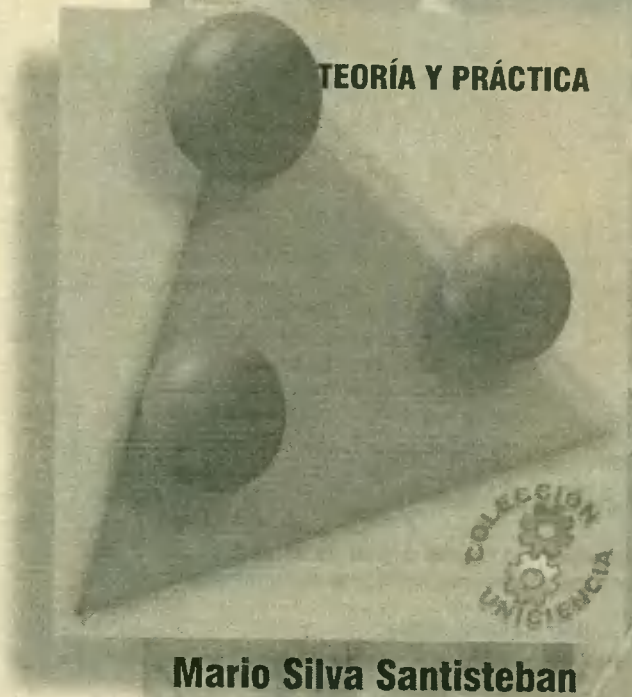
Mario Silva Santisteban

SAN MARCOS

Ingresa al tercer milenio con la más sólida preparación

Aritmética

TEORÍA Y PRÁCTICA



COLECCIÓN UNICIENCIA

Mario Silva Santisteban

EDITORIAL SAN MARCOS

AÑO 2000

Hecho el depósito legal, Ley N° 26905.

REG. N° 15013298-1084

Prohibida la reproducción parcial o total de la obra,
sin la previa autorización escrita del Editor de la misma.

© Aníbal Jesús Paredes Galván - Editor
Jr. Natalio Sánchez 220 - Ofic. 304 - Jesús María

Impreso en Perú Printed in Peru

Composición, diagramación y montaje:
Editorial San Marcos
RUC. 11029221

Dedicado a:

La Memoria de mi madre:
Graciela Espinoza Lazo.

A mi querida esposa:
Mirtha.

A mis hijas:
Karim y Tessalim, que son el norte de mi vida.

El Autor.

ARTITMETICA ESTRUCTURADA

Introducción 9

CAPITULO 1

- Introducción a la Lógica - Matemática 21
  - Problemas Resueltos sobre Lógica - Matemática 22
  - Problemas Propuestos 40
  - CLAVE 43

CAPITULO 2

- Teoría de Conjuntos 45
  - Problemas Resueltos sobre Teoría de Conjuntos 68
  - Problemas Propuestos 76
  - CLAVE 84

CAPITULO 3

- Relaciones y sus Propiedades 85
  - Problemas Resueltos sobre Relaciones 99
  - Problemas Propuestos 103
  - CLAVE 105

CAPITULO 4

- Función 107
  - Problemas Resueltos sobre Funciones 118
  - Problemas Propuestos 122
  - CLAVE 127

CAPITULO 5

- Numeración 129
  - Problemas Resueltos 158
  - Problemas 170
  - Resolver los siguientes ejercicios 171
  - Problemas Resueltos sobre Conteo de Cifras 174
  - Problemas Propuestos 182
  - Problemas Resueltos sobre Series Numéricas 183
  - Problemas Resueltos sobre Método Combinatorio 187
  - Problemas Propuestos 192
  - CLAVE 193

CAPITULO 6

- Las 4 Operaciones en IN 195
  - . Problemas Resueltos sobre Adición 198
  - . Problemas Propuestos 201
  - . Problemas Resueltos sobre Sustracción 206
  - . Problemas Propuestos 212
  - . Problemas Resueltos sobre Multiplicación 215
  - . Problemas Propuestos (con clave) 221
  - . Problemas Resueltos sobre División 231
  - . Problemas Propuestos (con clave) 243
  - - CLAVE 250

CAPITULO 7

- Propiedades de los Números Naturales 251
  - . Problemas de Divisibilidad que se resuelven aplicando los principales criterios de divisibilidad 265
  - . Problemas de Divisibilidad que se resuelven aplicando teoría de conjuntos 278
  - . Problemas de Divisibilidad que se resuelven aplicando criterios de ecuaciones Diofánticas y rectas potenciales 286
  - . Problemas Propuestos sobre Divisibilidad 294
  - - CLAVE 306

CAPITULO 8

- Teoría de los Números Primos 309
  - . Problemas Resueltos sobre Números Primos 320
  - . Problemas Propuestos 331
  - - CLAVE 334

CAPITULO 9

- Máximo Común Divisor 335

CAPITULO 10

- Mínimo Común Múltiplo 347
  - . Problemas Propuestos 360
  - - CLAVE 368

CAPITULO 11

- Números Racionales (Fracciones Ordinarias) 369
  - . Problemas Resueltos 378
  - . Problemas Propuestos sobre Números Racionales 400
  - - CLAVE 409

- Problemas sobre Relojes 410
. Problemas Propuestos sobre el Reloj 420
- Números Decimales 422
. Problemas Propuestos sobre fracciones decimales 434
- CLAVE 438

CAPITULO 12

- Potenciación 439
. Problemas Resueltos sobre Potenciación (cuadrado perfecto K^2) 444
. Problemas Resueltos sobre Potenciación (cubo perfecto: K^3) .. 455
. Problemas Propuestos sobre Potenciación (cuadrados perfectos) 460
- CLAVE 464

CAPITULO 13

- Radicación 465
. Problemas Resueltos sobre Radicación (Raíz cuadrada) 476
. Problemas Resueltos sobre Radicación (Raíz cúbica) 489
. Problemas Propuestos 495
- CLAVE 498

CAPITULO 14

- Sistema de Medidas 499
. Problemas Resueltos sobre Sistemas de Medidas 515
. Problemas Propuestos 521
- CLAVE 524

CAPITULO 15

- Razones y Proporciones 525
. Problemas Resueltos sobre Teoría de Conjuntos 536
. Problemas Propuestos 544
- CLAVE 554

CAPITULO 16

- Promedios 555
. Problemas Resueltos sobre Promedios 561
. Problemas Propuestos 567
- CLAVE 569

CAPITULO 17

- Proporcionalidad 571
. Problemas Resueltos sobre Proporcionalidad 574
. Problemas Propuestos 580
- CLAVE 583

CAPITULO 18

- Proporcionalidad o Prorrateo y Regla de Compañía 585
  - Problemas Resueltos sobre Reparto Proporcional 587
  - Problemas Propuestos 600
  - CLAVE 606

CAPITULO 19

- Regla de Tres Simple y Compuesta 609
  - Problemas Resueltos sobre Reparto Proporcional 611
  - Problemas Propuestos 617
  - CLAVE 622

CAPITULO 20

- Regla de Porcentaje 623
  - Problemas Resueltos sobre Porcentajes 625
  - Problemas Propuestos 633
  - CLAVE 637

CAPITULO 21

- Regla de Interés Simple 639
  - Problemas Resueltos sobre Interés Simple 642
  - Problemas Propuestos 646
  - CLAVE 650

CAPITULO 22

- Descuento Comercial 651
  - Problemas Resueltos sobre Descuento Comercial 652
  - Problemas Propuestos 662
  - CLAVE 666

CAPITULO 23

- Regla de Mezcla o Aligación 667
  - Problemas Resueltos sobre Regla de Mezcla y Aligación 670
  - Problemas Propuestos 681
  - CLAVE 683

CAPITULO 24

- Aleación 685
  - Problemas Resueltos sobre Aleación 687
  - Problemas Propuestos 694
  - CLAVE 696

CAPITULO 25

- Introducción a la Estadística 697
  - Ejercicios Resueltos 707
  - Ejercicios Propuestos 710

Introducción

El gato no cuenta los ratones que ha capturado, ni el cerdo las bellotas que ha comido. Los animales buscan el alimento mientras tienen hambre; cuando estan saciados reposan, juegan o duermen, hasta que el hambre se haga sentir de nuevo, en una existencia de este tipo, entre comer todo lo que se pueda y dormir hasta que se despierte el hambre, no hay ninguna necesidad de contar; pero tampoco existe posibilidad alguna de eludir los mecanismos biológicos ni asumir el control de las situaciones, nada garantiza que se alcance puntualmente la saciedad y con ella el reposo; la vida se desarrolla en un nivel establecido por el equilibrio entre las posibilidades de la especie y las del ambiente, y tal equilibrio acompaña a todas las perturbaciones, inerme ante las carestías, las epidemias y las variaciones climáticas accidentales. Ni tan siquiera la fabulosa previsión de la hormiga serviría de mucho para afrontar perturbaciones que se apartan del normal alternarse de las estaciones. Para defenderse y afianzarase, las especies animales no tienen otro recurso que el de adaptase al ambiente a través del lento mecanismo de la evolución; no puede adaptar a ellos el ambiente. Es muy posible que la existencia del hombre ha sido totalmente similar a ésta durante milenios.

Pero en un cierto momento se produjo, distinguiendo al hombre de los demás seres vivientes, el esfuerzo para liberarse de la presión de esta necesidad sin tregua. Entonces se plantearon entre otros problemas como estos; si la caza de ayer fue suficiente, ¿lo será también la de hoy?; o bién, ¿bastará esta simiente para una buena cosecha?.

Para responder con seguridad, es necesario comparar entre sí, de modo preciso e independiente de las apreciaciones personales, determinados grupos de objetos, como los animales objetos de caza y las vasijas de simientes.

La operación que permite compararlos en el CONTAR..-

Puede suponerse que un día, al volver de caza se haya tratado de poner en un montón una piedra por cada pieza cobrada. De esta manera el montón terminará por respresentar el botín de caza, y poder constituir una muestra con la que comparar cazas futuras. Acoplando por parejas un animal y una piedra, o como se dice también poniéndolos en correspondencia biunívoca, puede decirse los dos grupos contienen el mismo número de objetos, y si no, cuál es el mayor. Puede empezarse aquellos menos en parte, a responder a la pregunta: ¿cuánta comida tenemos? Aquel día, si pudiera saberse cuando se produjo, sería el nacimiento de las matemáticas.

Sin embargo un montoncito de piedras no se puede decir toåavía en cuánto un grupo es mayor que otro; para responder a esta pregunta que constituye el verdadero problema del contar, se necesita otra

operación; es necesario constituir una serie ordenada de montoncitos de muestra, obtenidos cada uno del precedente con la adición de un nuevo elemento. Bastará para ello colocar las piedras una después de otra en vez de hacerlo en un montón desordenado en una serie de casillas con una contraseña; éste es el principio del ábaco, el más antiguo elemento del cálculo. Como una serie de muestra puede servir cualquier sucesión de elementos que pueden ser asociados a los objetos que se cuentan en un orden establecido de una vez por todas sin equívocos: partes del cuerpo, o signos como las letras del alfabeto, o palabras como los nombres de los números.

La matemática, como todas las ciencias tuvo un origen exclusivamente experimental. Las primeras adquisiciones matemáticas de los antíguos Egipcios y Caldeos y de los comerciantes Fenicios, tuvieron un carácter práctico, reduciéndose a un conjunto de reglas inconexas sobre hechos aritméticos o geométricos observados, todos de utilidad inmediata.

Varios siglos después estos conocimientos dispersos pasan a los Griegos quienes agregaban otros muchos, producto de su propia observación y terminarán por sistematizarlos racionalmente en forma científica, en una de las más características manifestaciones del genio Heleno: "Los elementos de Euclides".

Como ha dicho Picard, a los Griegos corresponde el honor de haber creado la ciencia racional y desinteresada.

La matemática parece difícil porque si no se la comprende no deja juego libre a la imaginación. No es posible distraerse con relatos de experiencias o exploraciones, ni con fotografías pintorescas, ni burdas analogías.

Montesquieu, dijo sabiamente: "No soy una de las veinte personas que saben esas ciencias en París, ni una de las cincuenta mil que creen saberlas".

Constituyendo la aritmética la parte más genuina y característica de la mateñática, es necesario que quien pretenda aprender matemática, empiece por la parte más elemental -y fundamental- de este co-

nocimiento, ésto es, por artimética; dentro de este contexto, las cuatro operaciones fundamentales, constituyen la parte medular del conocimiento aritmético; cabe destacar que el enfoque, moderno del conocimiento matemático, nos lleva a desarollar conceptos de lógica, conjuntos, relaciones y funciones.Trabajaremos con el conjunto de los números naturales, incluyendo el cero.

Gran parte de los fracasos que sufren los alumnos en los primeros años de las carreras científicas y técnicas de nivel universitario, son atribuibles a falta de preparación matemática sólida al nivel intermedio.

Al publicar esta obra pretendemos poner a disposición de profesores y alumnos un texto que sirva de enlace entre la matemática elemental de los institutos y centros preuniversitarios y las matemáticas superiores que se cursan en las universidades.

El objeto de este texto es revisar y complementar conceptos básicos sobre las operaciones aritméticas elementales, buscando que el lector comprenda los enunciados y a partir de ellos resuelva razonada y ordenadamente los problemas

EL AUTOR

Aritmética, la Ciencia del Contar

RESEÑA HISTORICA

Los contables chinos continúan aficionados al Abaco, el instrumento con el que la humanidad ha aprendido a contar.

1. CRONOLOGIA DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO

(Basicamente aritmético)

Desde los comienzos hasta el siglo VI a.c.

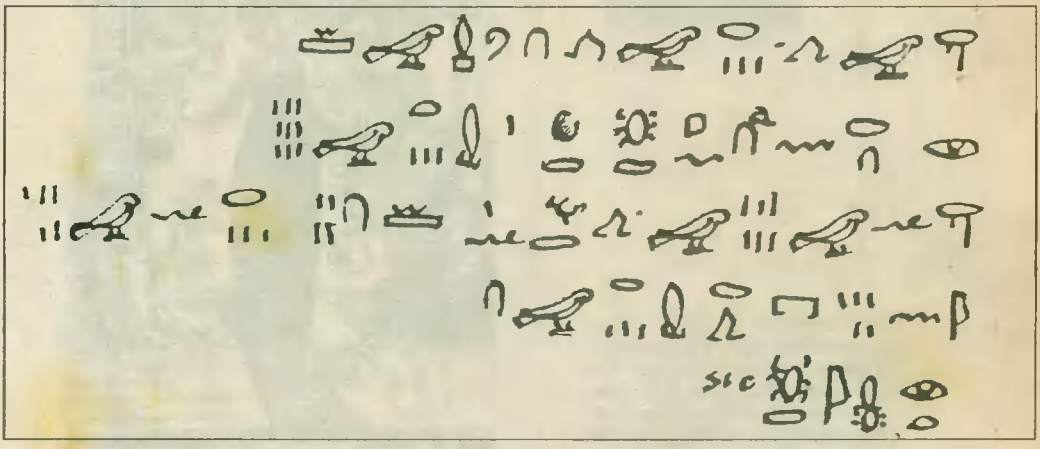
3 200-3 000. Círculos trazados con mucha precisión sobre huesos y arcilla, atestiguan el uso de compases en el Asia anterior.

Hacia 2 000. La adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones son conocidas en Egipto.

Hacia 1 800 tablillas babilónicas muestran series completas de tablas de cuadrados hasta el número 3 600 y de cubos hasta 32 768; tablas para la suma de cuadrados y potencias enésimas de un número.

Hacia 1 800 - 1 500, es conocida por los babilonios la solución de numerosos problemas geométricos, como el cálculo de áreas y volumenes elementales y el cálculo de la raíz cuadrada de 2 ó de 3 por medio de un método similar al del Teorema de Pitágoras.

Hacia 1 650, el papiro de Rhind, encontrado en Luxor (probablemente una copia del texto de 1 850 redactado por el escriba Amos), contiene reglas prácticas para facilitar los cálculos de la administración pública, es decir, fórmulas para calcular el área de cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios, círculos y volúmenes de algunos sólidos, y la descripción de operaciones con fracciones.



Fragmento del Papiro de Rhind, que fue hallado en 1858, por un joven anticuario escosés, Henry Rhind, en las ruinas de un edificio en Tebas. A su muerte lo compró British Museum, el documento estaba roto y le faltaba algunos fragmentos que luego aparecieron en los archivos de la Historic Society, de Nueva York).

Hacia 1 100, según el libro sagrado de la Aritmética, de desconocido autor chino, se desprende que el teorema de geometría, llamado de Pitágoras, era ya conocido por los chinos, un milenio a.c.

La ciencia griega clásica (600 - 150 a.c.).-

Hacia el siglo VI, Pitágoras de Samos (572? - 500?) funda en Crotón una escuela matemática en la que el estudio de la aritmética se eleva por encima de la práctica comercial común y adquiere autonomía de ciencia.

Pitágoras utiliza el ábaco para realizar sus cálculos.De éste instrumento realizaremos un análisis especial:

Comienzos s.V. Teodoro de Cirene Pitagorico, maestro de matemáticas de Platón demuestra la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números del 3 al 17 que no sean cuadrados perfectos.

Hacia 400, Arquistas de Tarento encuentra la solución del problema geométrico de duplicar el cubo, uno de los más famosos problemas de la antigüedad.

Siglos III y IV. Los mayas inventan un sistema de numeración posicional de base vigesimal que comprende el concepto y el uso del cero.

Comienzos s.III. Euclides (320 - 275), compone Los Elementos, que contienen la exposición sistemática de las proporciones geométricas elementales y de la teoría de los números, patrimonio de la cultura matemática Griega de la época.

Mientras Boecio - izquierda- calcula mediante signos numéricos, Pitágoras - derecha- lo hace valiéndose de un ábaco. Ambos representan las corrientes alge-rítmicas y abacistas, respectivamente. Reproducción de un antiguo grabado de la Margarita Philosophica.

Desde la Conquista Romana de Grecia hasta el nacimiento de la cultura Arabe (150 a.c. - 750 d.c.).-

Siglo I. Nicómaco de Gerasa (50 - 110) estudia en su obra *Aritmética*, las propiedades de los números y sus relaciones.

1ra. mitad del siglo III. El matemático chino Sun-Tsu conoce el modo de resolver ecuaciones indeterminadas de primer grado; usa el sistema de numeración decimal.

2da mitad del siglo IV. Teón de Alejandría expone un sistema de extracción de la raíz cuadrada, muy similar al actual.

Año 550. En el *Tratado de Aritmética* de Han-Yang, chino, los problemas planteados se resuelven con operaciones aritméticas que llegan hasta la extracción de raíz cuadrada.

2da. mitad del siglo VII. La primera alusión a los nueve numerales indios, fuera de la India; se debe al filósofo y científico Severo Sebokht de Nisibe, el cual aprecia plenamente su valor.

La Ciencia Arabe (750 - 1 100)

Siglo IX. Al Khwariznní (? - hacia 850), árabe, compone el tratado titulado: *Al-gebr wa'l mukabala* (del que deriva el nombre de Algebra), con el que se introduce en Occidente el sistema arábigo-indio de numeración decimal.

1 247. En las nuevas secciones de matemáticas, el astrónomo chino Chin-Chiu Shao representa el número cero con un circulito, (La notación se encuentra en algunos textos del siglo IX).

Hacia el siglo XIII. En algunos manuscritos franceses de Aritmética aparece el signo (.) para indicar la multiplicación de dos números.

2da. mitad s.XIII. La difusión en Occidente del sistema de numeración arábiga es gradual, pero lenta, y, a veces, incluso obstaculizada; se sabe que su uso fue prohibido en Padua y en Florencia.

1 341. El bizantino Nicolás Artavasde, en su *Epístola Aritmética*, expone reglas para realizar las operaciones aritméticas, hasta la extracción de la raíz cuadrada.

1 343. Jean de Meurs, matemático y músico francés, explicando un modo de extraer la raíz cuadrada de 2, y después de haber dado el resultado en números sexagesimales 1°24´´50", añade que si se dice que 1 414 es la raíz cuadrada de 2, debe considerarse la primera unidad como entero, el 4 siguiente como décimas y así sucesivamente. Esta es la más clara anticipación de la idea de fracciones decimales hasta la de Stevin, aproximadamente dos siglos y medio más tarde.

1 410. Prosdocimo de Baldomandi, compone un tratado de aritmética en la que aparece la suma de una progresión *geométrica*.

1 484. La más antigua notación del signo de las raíces cuadradas y cúbicas con el índice que las determina, aparece en el tratado de Nicolas Chuquet (1 445 - 1 500) francés titulado *Le Triparty en la Scierice des riombres*. Aparece también la primera idea del logaritmo como confrontación.

2. Comienzos de la ciencia moderna (S. XVI - XVII)

1 527. El triángulo aritmético de los coeficientes de las potencias del binomio se halla impreso en la portada de la primera edición de una *Aritmética* del matemático alemán Petrus Apianus.

1 539. Girolamo Cardamo, en la *Practica Arithmetical*, estudia las operaciones con números enteros, fraccionarios e irracionales.

1 544. El alemán Michael Stifel (1 487 - 1 567) en su *Aritmética Integra*, introduce la denominación de exponente, adopta símbolos para más números generales y sus potencias e indica el cálculo logarítmico fundado en la confrontación entre dos progresiones, una

aritmética y otra geométrica; construye también una tabla de coeficientes binomiales, hasta el 17° orden y expone las reglas para elevar a potencia un binomio.

1 556. Las dos primeras partes del *Tratado general de números y medidas* de Nicolo Tartaglia, se publican en Venecia. Contienen el triángulo aritmético de Tartaglia para calcular las segundas potencias del binomio.

1557. En el Tratado de Aritmética *The Whetstone of Witte* el inglés Robert Recorde (1 510 - 58) introduce el uso del signo (=) para indicar la igualdad de dos cantidades "ya que nunca dos cosas pueden ser más iguales que dos paralelas".

1 575. Francisco Maurolico (1 495 - 1 575), en el *Arithmeticorian libri duo*, aplica por primera vez el principio de inducción matemática, demostrando que la suma de los primeros *n* números impares es igual al cuadrado de *n*.

1 592. Galileo Galilei abandona la cátedra de matemáticas de Pisa ante la hostilidad de sus colegas y su escasa retribución. Es nombrado profesor de Matemáticas en la Universidad de Padua, donde pasará 18 años, los más felices y fecundos de su vida.

1 612. Claude Bachét de Meziriac (1 581 - 1 638), francés, describe en un tratado de aritmética el método para resolver el problema de los restos, o sea, de determinar un número conociendo los restos que se obtienen de su división por otros números dados.

1 631. En la obra *Artis analyticae praxis*, Thomas Harriot (1 560 - 1 621), inglés, introduce los signos > y < para indicar mayor y menor. Los signos $\neq$, , , $\geq$, $\leq$, etc., son modificaciones anteriores introducidas ulteriormente.

1 642. Blaise Pascal construye la primera máquina para realizar mecánicamente cálculos aritméticos, basada en el sistema de ruedas dentadas unidas entre sí. Con esta máquina podían obtenerse totales hasta las centenas de millar.

1 652. Samuel Morland inventa una máquina calculadora, capaz de sumar y restar.

1 670. En la *Matheis biceps vetus et nova*, Juan Caramuel (1 608 - 82), español, afirma la posibilidad de los sistemas de numeración con base diferente de 10 e ilustra su desarrollo tomando como base otros números.

1 675. Wilhelm Leibniz inventa y hace construir la primera máquina de cálculo capaz de realizar las cuatro operaciones fundamentales.

1 684. En una memoria publicada en *Acta eruditorium*, Wilhelm Leibniz usa el signo (:) para indicar la división.

1 692. Por obra de Leibniz se introduce en matemáticas la palabra FUNCION en su sentido moderno.

3. La Ciencia de la Ilustración (S. XVIII)

1 720. El francés Caze construye una máquina de sumar graduada de modo que puede efectuar sumas hasta mil millones.

1 728. Bernard Le Boyer de Fontanelle (1 657 - 1757), estudia el concepto de un número realmente infinito indicando con el signo ∞ , con el que puede operarse como si fuere un número ordinario.

1 742. El alemán Christian Goldbach (1 690 - 1 764) propone a Euler demostrar que todo número par es la suma de dos números primos, enunciado que en la teoría de los números quedará como "hipótesis de Goldbach".

1 749. Leonard Euler establece la célebre relación que une entre sí los números más famosos de las matemáticas: e ,π , -1 y la unidad imaginaria (Fórmula de Euler).

1 776. En las *Meditationes analyliticae*, Edward Warning formula el teorema sobre la descomposición de todo número entero positivo en la suma de no más de cuatro cuadrados, de no más de nueve cubos, y de no más de diecinueve cuartas potencias, teorema que no se demostrará hasta 1909 por Hilbert.

1 791. Karl Friedrich Gauss (1 777 - 1 855) de catorce años, alemán, sugiere la fórmula de la distribución asintótica de los números primos.

1 797. Karl Friedrich Gauss, demuestra rigurosamente, en su tesis de doctorado, el Teorema Fundamental del Algebra.

1 798. Adrien Marie Legendre, en el Ensayo de la Teoría de los números, formula en el campo de la aritmética superior el **teorema de la reciprocidad cuadrática**, definido por Gauss como "La joya de la aritmética".

SIGLO XIX:

1 801. Karl Friedrich Gauss expone en las *Disquisitiones arithmeticae* sus primitivos estudios sobre la "teoría de los números", relativos a las congruencias, a las raíces de la unidad y la posibilidad de dividir un círculo en *n* partes iguales.

1 808. En una serie de trabajos, Karl F. Gauss desarrolla la teoría de las funciones doblemente periódicas, de las que determina sus propiedades.

1 813. Augustín Cauchy demuestra en *La Démostration du Theoréme de Fermat sus les nombres poligoniales*, la descomponibilidad de cualquier número poligonal, determinando sus características.

1 820. El francés Xavier Thomas de Colmar pone a punto al aritmómetro, máquina calculadora basada en el principio de la multiplicadora de Leibniz.

1 837. En un trabajo aparecido en *Berlin Abhande*, Gustav Lejeune Dirichlet demuestra la existencia de infinitos números primos en cualquier progresión aritmética, en la que el primer término y la razón sean números primos entre sí.

1 844. Joseph Liouville demuestra que existen infinitos números trascendentes, o sea, que no son raíces de ninguna ecuación algebráica.

1 847. **En la lógica formal o cálculo de la deducción,** el inglés Augustus De Morgan (1 806 - 71) pone de relieve la analogía existente entre las operaciones lógicas y las operaciones con números enteros, fundando la moderna "Lógica matemática".

1 850. En el campo de la *Teoría de los números*, Ernest Eduard Kummer, enuncia la ley de reciprocidad de los residuos de las potencias.

1863. En la obra póstuma sobre la Teoría de los números, Peter Gustave Dirichlet enuncia el teorema sobre la existencia de infinitos números primos en toda progresión aritmética en la que sean primos entre sí el primer término y la diferencia.

1 868. En los *Proceedings de la Royal Society*, John Smith estudia los teoremas relativos a la representación de los números mediante cuatro cuadrados y otras formas cuadráticas.

1 872. En la obra *Continuidad y números irracionales*, el alemán Richard Dedekind (1 831 - 1 916) sistematiza vigorosa y definitivamente la teoría de los números irracionales.

1 872. En la memoria *Sobre los elementos de la teoría de las funciones*, Georg Cantor habla de la teoría de los números irracionales.

1 873. Georg Cantor define los conceptos de numerabilidad y potencia de un conjunto.

1 877. En la memoria titulada *Contribución a la teoría del múltiplo*, Georg Cantor demuestra que un segmento contiene tantos puntos como un cuadrado o cubo, definiendo el concepto de **potencia de lo continuo**.

1882. Georg Cantor define los números transfinitos de modo independiente de la teoría de los conjuntos, en cuyo contexto habían sido introducidos por él.

1 884. En un intento para reducir la aritmética a lógica, el alemán Gott lob Frege (1 848 - 1 925), en sus *Fundamentos de Aritmética*, formula un sistema de notaciones ideográficas, encaminado al análisis de las nociones fundamentales de la teoría de los conjuntos y de los números.

1 889. En la obra *Aritméticas Principia*, Guisepe Peano formula una serie de axiomas aritméticos , de los que deduce la aritmética conocida.

1 895. En una memoria aparecida en los Matematischen Annalen, Georg Cantor expone en forma completa y exacta la *"Teoría de los conjuntos"*.

1 895. Leon Bollée, francés, construye el aritmógrafo, aparato basado en la regla de Neper que permite ejecutar las cuatro operaciones casi automáticamente.

1 897. La llamada paradoja de Burali-Forti, enunciada por Cesare Burali-Forti (1 861 - 1 931), evidencia dificultades en la formulación de la teoría de los conjuntos.

1 900. El alemán Kurt Hensel (1 861 - 1 941) estudia la *"Teoría de los números"* y demuestra que todo número primo puede representarse por una serie de potencias positivas integrales.

1 902. El francés Henri Lebesgue (1 875 - 1 941) introduce una nueva integral que lleva su nombre, más extendida que la Riemann y fundada en la teoría de conjuntos.

1 904. El alemán Zermelo (1 874 - 1 953) formula el conocido y discutido postulado, "El postulado de Zermelo", que admite la posibilidad de elegir sucesivamente infinitos elementos de un conjunto infinito, sin fijar a priori la regla de la elección.

1 905. Diksore, formula los postulados de la "Teoría del sistema de números hipercomplejos", en la cual las coordenadas son números racionales.

1 909. Maurice Frechet, francés, extiende la "Teoría de los conjuntos" a la geometría, introduciendo el concepto de espacio abstracto como un conjunto de elementos de la misma naturaleza, asimilados a los puntos del espacio ordinario.

1 910. En la obra *Principia Mathematica*, Beltrand Russell y Alfred Nort Whitehed estudian los fundamentos de la lógica matemática y enuncian los postulados de la lógica de los enunciados y de la teoría de los tipos.

1 937. El ruso Igor M. Vinogradov demuestra que todo número impar, además de un cierto valor, es la suma de tres números impares aproximándose a la demostración de la hipótesis de Goldbach enunciada en 1 742.

1 938. El francés Louis Couffignal obtiene una patente para una calculadora electrónica de sistema binario de numeración.

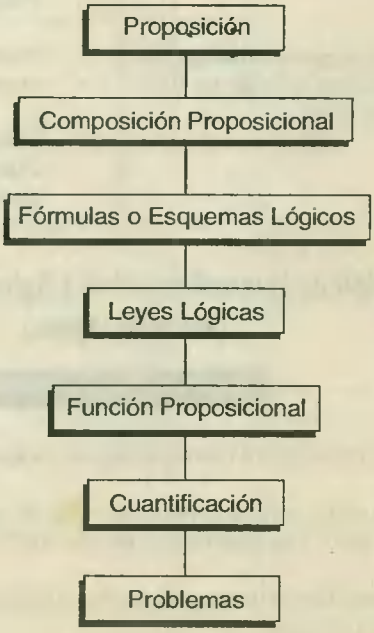
1 939. Bajo el seudónimo colectivo de Nicolás Bourbaki, un grupo de matemáticos franceses publica *Elementos de matemáticas*, con la intención de presentar todo el edificio matemático con rigor absoluto, poniendo en evidencia los elementos simples y las estructuras comunes a las más diversas teorías matemáticas, mediante un método axiomático y abstracto que va desde la generalidad al detalle.

1 951. Los Ingleses Turing y Williams construyen un robot electrónico capaz de resolver en poquísimo tiempo, complicados problemas matemáticos.

Capítulo 1

INTRODUCCION A LA LOGICA MATEMATICA

Flujo del contenido de este capítulo



Nociones de Lógica Proposicional

Objetivo General

Interpretar y utilizar correctamente el lenguaje simbólico de las proposiciones, conectivos y cuantificadores, y relacionar estas nociones con la matemática.

Objetivos Específicos	Contenidos
1. Reconocer y diferenciar las proposiciones simples y compuestas	1. Proposición 2. Tipos: simple y compuestas. variable proposicional.
2. Utilizar correctamente los diferentes conectivos lógicos en la estructuración de las proposiciones compuestas y manejar con soltura las tablas de verdad.	1. Composición proposicional, conectivos lógicos. 2. Tablas de verdad.
3. Evaluar correctamente las fórmulas lógicas y reconocer los esquemas tautológicos, contradictorios y contingentes.	1. Fórmulas o esquemas lógicas. Evaluación de fórmulas. Tautologías, contradicción y contingencia. Fórmulas lógicamente equivalentes. 2. Principales leyes lógicas.
4. Utilizar los cuantificadores en la formación de proposiciones a partir de funciones proposicionales.	1. Función Proposicional o enunciado abierto. 2. Cuantificadores: Universal y existencial. Cuantificación de funciones proposicionales y su negación.

Problemas Resueltos sobre Lógica - Matemática

(Ver leyes lógicas)

Observaciones previas

Para resolver los problemas sobre fórmulas lógicas, debemos conocer las principales leyes lógicas.
En muchos casos, no es necesario conocer el valor de verdad de todas las proposiciones (variables proposicionales) que intervienen en una fórmula lógica.

Debemos conocer, la operación de cuantificación; negación de una proposición cuantificada de modo existencial o universal.

1. Determinar las características de los siguientes enunciados indicando cuales son: proposiciones, enunciados abiertos o funciones proposicionales, no son ni proposiciones ni funciones proposicionales:

I. Recoge ese papel
II. $6 + 4 < 18$
III. $x - y = 5$
IV. Hace mucho calor

Solución

I. "Recoge ese papel", es un mandato que no tiene valor de verdad, luego, no es proposición ni función proposicional.
II. "$6 + 4 < 18$" es una proposición cuyo valor de verdad es **V**
III. "$x - y = 5$", es una función proposicional, porque contiene variables (x, y).
IV. "Hace mucho calor", es una oración que no tiene un valor de verdad, luego, no es una proposición ni función proposicional.

2. Si se sabe que: $p \wedge q$ es falso; $q \Rightarrow t$ es falso. Determinar los valores de verdad de p y q.

Solución

$q \Rightarrow t \equiv F$, entonces $V(q) \equiv V$; $V(t) \equiv F$ Por definición de condicional.

Rpta. $\therefore$ $V(q) \equiv V$ $V(t) \equiv F$

3. Si se sabe que: $s \Leftrightarrow t$ es verdadero; $r \wedge s$ es falso; $p \Rightarrow q$ es falso y $q \vee r$ es verdadero. Determinar los valores de verdad de: p, q, r, s y t.

Solución

$s \Leftrightarrow t \equiv V$ entonces s y t tienen el mismo valor de verdad
$p \Rightarrow q \equiv F$ entonces $V(p) \equiv V$ y $V(q) \equiv F$
$q \vee r \equiv V$ como $V(q) \equiv F$, el $V(r) \equiv V$
$r \wedge s \equiv F$ como $V(r) \equiv V$, entonces $V(s) \equiv F$

además como s y t tienen el mismo valor de verdad, entonces $V(t) \equiv F$

Rpta. $V(p) \equiv V$; $V(q) \equiv F$; $V(r) \equiv V$; $V(s) \equiv F$; $V(t) \equiv F$

4. Si: $x \Leftrightarrow y$ es falso; $x \Rightarrow y$ es verdadero; determinar los valores de verdad "x" e "y"

Solución

$x \Leftrightarrow y \equiv F$, ello indica que x é y tienen distinto valor de verdad.
$x \Rightarrow y \equiv V$, como tienen distinto valor de verdad, sólo cumple:
Rpta. $V(x) \equiv V$ $V(y) \equiv F$

5. Determinar el tipo de fórmula proposicional en las siguientes proposiciones compuestas o moleculares:

I. $\{[P \Rightarrow (\sim p \wedge q)] \wedge r\} \Leftrightarrow \sim (r \Rightarrow p)$

II. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow [\sim (\sim q \vee r) \wedge \sim p]$

III. $\sim (p \Rightarrow q) \wedge \sim (q \Rightarrow \sim r)$

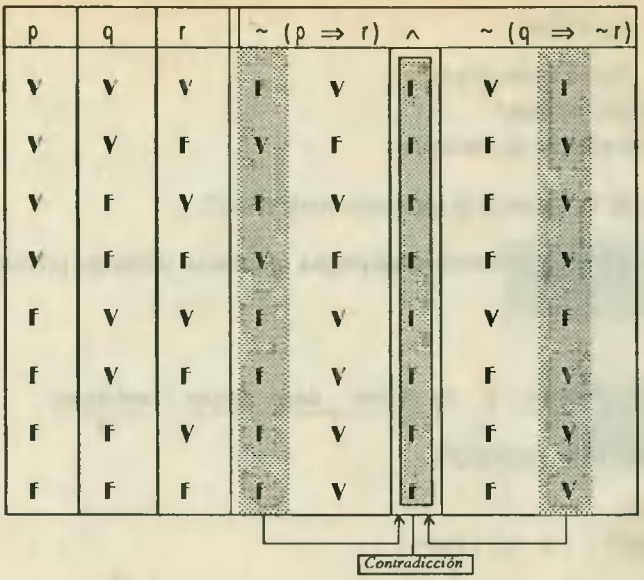
Solución

p	q	r	{ [p	⇒	(	~ p	∧	q)]	∧	r }	⇔	~	(r	⇒ p)
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V

Tautología

p	q	r	~p	⇒	~ q)	⇔	[~	(~ q	∨	r)	∧	~ p]
V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V

Contingencia



Rpta. I. Tautología II. Contigencia III. Contradicción

6. De las proposiciones:

p: "Mario es comerciante"
q: "Mario es un próspero industrial"
r: "Mario es ingeniero"

Dar como respuesta (simbolizando) ,el enunciado: "Si no es el caso que Mario sea un comerciante y un próspero industrial ,entonces es ingeniero o no es un comerciante ".

Solución

La proposición: "no es el caso que Mario sea un comerciante y próspero industrial" se simboliza:

$\sim (p \wedge q)$.

La proposición: "Mario es ingeniero o no es comerciante", se simboliza:

$(r \vee \sim p)$

Uniendo estos dos esquemas con el conectivo "⇒" (entonces) se tiene:

Rpta. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \sim p)$

7. Dadas las proposiciones siguientes:

t: "Algunos profesores tienen casa propia"

u: "Algunos profesores son solteros"

r: "Algunos profesores no ejercen la docencia"

¿Cuál es la simbolización de la siguiente proposición compuesta?:

"Algunos profesores son solteros y no tienen casa propia, entonces todos los profesores ejercen la docencia".

Solución

"Algunos profesores son solteros (u) y ∧ no tienen casa propia (~ t) , entonces ⇒ todos los profesores ejercen la docencia ~ r".

Rpta. La simbolización será : $(u \wedge \sim t) \Rightarrow \sim r$

8. "Juan que nunca miente, ha confesado a su amigo Pedro lo siguiente:

"Amo a María o a Isabel", pero no a ambas. Además, si amase a María , amaría también a Isabel". Decir (simbolizando) a quién ama Juan".

Solución

Consideremos que sea:

p: "Juan ama a María" q: "Juan ama a Isabel"

Simbolizando:

"Amo a María (p) o ∨ a Isabel (q) ", pero ∧ , no a ambas. ~ (p ∧ q) además ∧ si amase a María (p) , amaría también a Isabel (q) ".
⇒

p	q	[(p ∨ q)	∧	~ (p ∧ q)]	∧	(p ⇒ q)
V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V

Rpta. El enunciado sólo es verdadero si Juan ama a Isabel.

9. Demostar que P y Q son lógicamente equivalentes, si:

P: ~ (p ∧ q)
Q: ~ p ∨ ~ q

Solución

Se sabe que dos fórmulas son lógicamente equivalentes, si al unirlas con el conectivo ⇔, resulta una tautología. En efecto:

p	q	~ (p ∧ q)	⇔	~ p	∨	~ q
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	V		
F	V	V	V	V		
F	F	V	V	V		

Rpta. ∴ Como el resultado es una Tautología, entonces P y Q, son lógicamente equivalentes.

10. Si es verdadera la negación del esquema:

(p ∧ q) → (s ∨ t)

Hallar el valor de verdad de los esquemas:

i) ~ [(t → x) ∧ ~ (p ∧ q ∧ s)]

ii) ~ {~ [~ (q → t) → (s ∧ w)]}

iii) ~ [(p ∧ q) → t] ↔ (x ∨ ~ x)

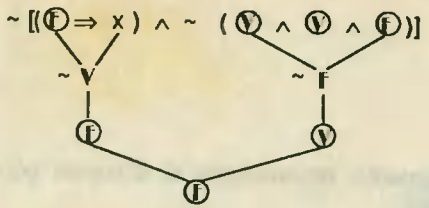
Solución

Podemos establecer:

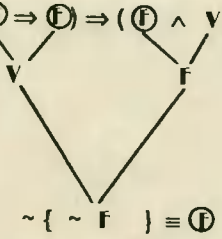
~ [(p ∧ q) ⇒ (s ∨ t)] ≡ V (verdadero)

Significa que la expresión mostrada dentro del corchete es falsa, y como esta expresión es una implicación, el **antecedente** (p ∧ q) debe ser verdadero (entonces v (p) ≡ V y v (q) ≡ V) y el consecuente (s ∨ t) debe ser falso (entonces v (s) ≡ F y v (t) ≡ F).

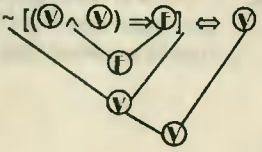
De: i)



De: ii) ~{~ [~(V ⇒ F) ⇒ (F ∧ V)]}



De: iii) ~ [(V ∧ V) ⇒ F] ⇔ V



Rpta. i) F ii) F iii) V

11. Si: $[(p \vee \sim q) \rightarrow r] \vee [(q \rightarrow r) \wedge \sim r]$ es falsa.

determinar el valor de verdad de:

i) $[p \rightarrow \sim (q \vee r)] \wedge q$

ii) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim r$.

Solución

La disyunción de dos proposiciones es falsa cuando ambas son falsas. Significa entonces que:

$(p \vee \sim q) \rightarrow r$ **es falsa** [la implicación es falsa cundo el antecedente es verdadero y el consecuente falso.]

por lo tanto r es falso y ($p \vee \sim q$) es verdadero .....(1)

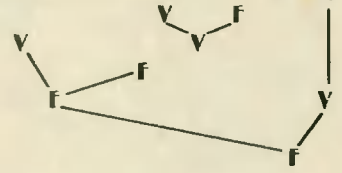
se deduce también que :

$q \rightarrow r$ es falsa

$\therefore$ q es **verdadera** en (1)

También se deduce que "p" **debe ser verdadero** para que (p ∨ ~ q) lo sea. Entonces de:

i) [p → ~ (q ∨ r)] ∧ q ≡ Falso



ii) (p ∧ q) ↔ ~ r ≡ Verdadero

Rpta. i) Ⓕ ii) Ⓥ

12. Si: (p ∧ q) ⇒ (~ q ∨ r) es falsa. Hallar el valor de verdad de:

i) (p ∧ q) ∨ r

ii) (p ↔ q) ∧ (r → s)

iii) [r ∧ (p ∨ s ∨ t)] ∧ [~ (r ∨ s)]

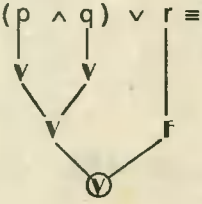
Solución

Como : (p ∧ q) ⇒ (~ q ∨ r) ≡Ⓕ ∴ (p ∧ q) ≡Ⓥ ; (~ q ∨ r) ≡Ⓕ
V V F F

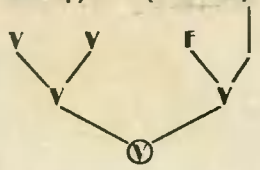
entonces: ∨ (p) ≡ V ∨ (q) ≡ V , tambien: ∨ (q) ≡ V ∨ (r) ≡ F

por lo tanto:

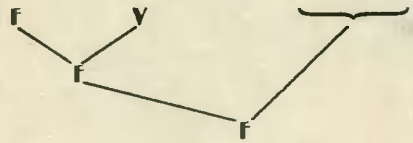
i) (p ∧ q) ∨ r ≡Ⓥ



ii) $(p \leftrightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \equiv V$



iii) $[r \wedge (p \vee s \vee t)] \wedge [\sim (r \vee s)] \equiv F$



(*) No interesa el valor de verdad de $(r \vee s)$ ya que el antecedente de la conjunción final es falso y por lo tanto el resultado será falso.

Rpta. i) V ii) V iii) F

13. Si se sabe que:

I. $(w \Leftrightarrow v) \equiv$ falso

II. $\sim (s \Rightarrow t) \equiv$ falso

III. $\sim p \wedge \sim q \equiv$ falso

Determinar el valor de verdad de :

$$\sim \{[(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge \sim t)] \vee (v \Leftrightarrow w)\}$$

Solución

De I: Se deduce que w y v tiene distinto valor de verdad.

De II: Aplicando ley del condicional y negación:

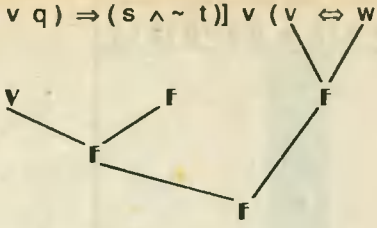
$\sim (s \Rightarrow t) \equiv \sim (\sim s \vee t) \equiv s \wedge \sim t \equiv F$ .....(1)

De III: Aplicando Ley de Morgan:

$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q) \equiv F$ (datos) $\therefore p \vee q \equiv V$ .....(2)

(1) y (2) en la expresión propuesta:

$\sim \{[(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge \sim t)] \vee (v \Leftrightarrow w)\}$



$\sim \{F\} \equiv V$

Rpta. El valor de verdad de la expresión es **V**.

14. Si: $\sim p * q \equiv p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ y

$p \odot q \equiv \sim p \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

Entonces evaluar:

$\{ a * [b \odot \sim (a * b) \} \Leftrightarrow [(a \vee b) \wedge c]$ determinando las tablas de verdad de $p * q$ y $p \odot q$

Solución

$\sim p * q \equiv p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

$p * q \equiv \sim p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, entonces:

p	q	$\sim p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	$p * q$	$p \odot q$
V	V		V	F
V	F		V	F
F	V		F	F
F	F		V	V

a	b	c	$\{a * [b \odot \sim(a * b)]\} \Leftrightarrow [(a \vee b) \wedge c]$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Rpta.

15. Si se sabe que:

$p * q \equiv (p \Rightarrow \sim q)$

$p \# q \equiv \sim p \wedge \sim q$

Evaluar la siguiente fórmula:

$(p \Rightarrow r) \# (q * r)$

Solución

Construyendo la tabla de valores de verdad de los conectivos propuestos:

p	q	$p * q \equiv (p \Rightarrow \sim q)$	
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	$p \# q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Evaluando la fórmula propuesta:

p	q	r	(p ⇒ r)	#	(q * r)
V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Rpta. El resultado es una **contradicción.**

16. Si se sabe que:

$p * q \equiv (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

$p \perp q \equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

p	q	p ⊗ q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Evaluar cada una de las siguientes fórmulas

i) $\sim(\sim p \otimes q) * \sim(\sim q \perp r)$

ii) $(p \wedge q \wedge \sim r) \perp \sim \{(p * r) \Rightarrow (\sim q \otimes r)\}$

Solución:

p	q	(p ∧q) ⇔ (~ p∨q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p	q	(~ p ⇒ q) ∧ (p ⇔ q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Entonces, las tablas de los conectivos ∗ , ⊗ y ⊥ serán:

p	q	p ⊗ q	p ∗ q	p ⊥ q
V	V	V	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

I

p	q	r	~ (~p ⊗ q) ∗ ~ (~ q ⊥ r)
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Rpta.

ii)

p	q	r	(p ∧ q ∧ ~ r)	⊥	~ [(p ∗ r) ⇒ (~ q ⊗ r)]
V	V	V	F	F	V V F F
V	V	F	V	F	V V F F
V	F	V	F	F	F V V V
V	F	F	F	F	F V V V
F	V	V	F	F	F F V F
F	V	F	F	F	F F V F
F	F	V	F	F	F F V V
F	F	F	F	F	F F V V

Rpta.

17. Dadas las siguientes equivalencias lógicas:

i. $p \circledast q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$.

ii. $p * q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$

iii. $p \# q \equiv (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$.

Evaluar la fórmula: $(p \Rightarrow r) \circledast [(r \# q) * \sim p]$

Solución

i) $p \circledast q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

$p * q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv p \vee q$

$p \# q \equiv (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim (p \Leftrightarrow q) \vee (p \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv p \vee q$

Entonces:

p	q	⊛	∗	#
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

Por lo tanto, en la fórmula:

p	q	r	(p ⇒ r)	⊛	[(r # q)	*	~ p]
V	V	V	V	V	V	V	
V	V	F	F	F	V	V	
V	F	V	V	V	V	V	
V	F	F	F	V	F	F	
F	V	V	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	V	V	
F	F	V	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	F	V	

Rpta. contingencia

18. Si: $p * q \equiv \sim p \wedge \sim q$ Simplificar en términos de $*$ la siguiente expresión:

$\{[\sim q \Rightarrow \sim p] \Rightarrow [\sim p \Rightarrow \sim q]\} \wedge [\sim(p \wedge q)]$

Solución

Aplicando la ley del condicional obtendremos

$\{[\sim (\sim q) \vee \sim p] \Rightarrow [\sim (\sim p) \vee \sim q]\} \wedge [\sim (p \wedge q)]$

$\equiv [(q \vee \sim p) \Rightarrow (p \vee \sim q)] \wedge [\sim (p \wedge q)]$ .....ley de la doble negación

$\equiv \{\sim (q \vee \sim p) \vee (p \vee \sim q)\} \wedge [\sim (p \wedge q)]$ .....ley del condicional

$\equiv \{(\sim q \wedge p) \vee (p \vee \sim q)\} \wedge [\sim (p \wedge q)]$.....ley de morgan

$\equiv \{p \vee \sim q\} \wedge [\sim (p \wedge q)]$ .....ley asociativa y ley de absorsión

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge [\sim (p \wedge q)]$

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$.....ley de morgan

$\equiv (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$

$\equiv \sim q \vee (p \wedge \sim p)$.....ley destributiva

$\equiv \sim q \vee F$ .....ley de complemento

$\equiv \sim q$

$\equiv \sim q \wedge \sim q \equiv q * q$ —— **Rpta.**

19. Si se sabe que : $\sim p \wedge q$ es falsa , $\sim r \Rightarrow \sim t$ es verdadera y que
Si: $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$

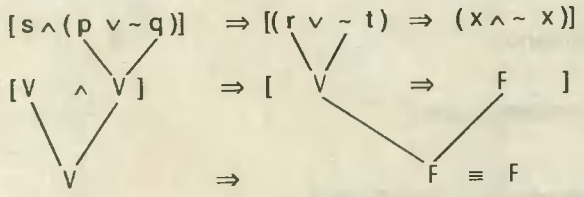
Hallar el valor de verdad de :

$$[s \wedge (p \vee \sim q)] \Rightarrow [(r \vee \sim t) \Rightarrow (x \wedge \sim x)]$$

Solución:

Si: $\sim p \wedge q \equiv F$ entonces la negación es verdadera esto es :
$\sim(\sim p \wedge q) \equiv V$ equivale a : $p \vee \sim q \equiv V$
$\sim r \Rightarrow \sim t \equiv V$ pero : $\sim r \Rightarrow \sim t \equiv r \vee \sim t \equiv V$ .....ley del condicional
$s \equiv V$ (x es una fracción propia ,que elevada al cuadrado dará siempre una fracción menor que la original)

Reemplazando:



Rpta. El valor de verdad es falso.

20. Hallar el valor de verdad de:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(q \Leftrightarrow r) \wedge (p \vee \sim q)]$$

si:

p: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$ F

q: $\forall x \in \mathbb{R} : x^0 = 1$ F

r: $\exists x \in \mathbb{R} : X! = 6$ V

Solución:

$$\underbrace{[(p \Rightarrow q)}\ \wedge (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(q \Leftrightarrow r) \wedge (p \vee \sim q)]$$

$$= \underbrace{[(F \Rightarrow F)}\ \wedge \underbrace{(F \wedge F)}] \Leftrightarrow \underbrace{[(F \Leftrightarrow V)}\ \wedge (F \vee V)]$$

$= [\ \underbrace{V \wedge F}\ ]\ \Leftrightarrow\ [\ \underbrace{F \wedge V}\ ]$

$= \quad F \quad \underbrace{\Leftrightarrow}\quad F$

$= \quad V$

Rpta. ∴ Es verdadera

21. Se tiene : M = { Los Peruanos} y los enunciados abiertos:

p (x) : "x es Piurano"

q (x) : "x es Latinoamericano"

Determinar:

(a) Simbolizar los cuantificadores y hallar sus valores:

W: Todos los Peruanos son Piuranos

Z: Algunos Peruanos son Latinoamericanos"

(b) Negar los anteriores cuantificadores y simbolizarlos.

Solución

a): w : ∀ x de M; p (x)
Z : ∃ x de M ; q (x)

(b): ~ w: ~ [∀ x de M; p (x)]; o sea : ~ w : ∃ x de M; ~ p (x).....V

~ Z: ~ [∃ x de M; q (x)]; o sea : ~ Z : ∀ x de M; ~ q (x).....F

Rpta. (a) V
(b) F

LEYES LOGICAS

Ley de Idempotencia

$p \vee p \equiv p$ $\qquad$ $p \cup p = p$

$p \wedge p \equiv p$ $\qquad$ $p \cap p = p$

Ley Conmutativa

$p \vee q \equiv q \vee p$ $\qquad$ $p \cup Q = Q \cup P$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\qquad$ $p \cap Q = Q \cap P$

Ley Asociativa

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $\qquad$ $(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $\qquad$ $(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$

Ley Distributiva

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\qquad$ $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$

Ley de Morgan

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ $\qquad$ $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$

$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ $\qquad$ $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

Ley del Condicional

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Ley del bicondicional

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

Ley de Absorción

$(p \vee q) \wedge p \equiv p$

$(p \wedge q) \vee p \equiv p$

$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $\qquad$ $P \cap (P' \cup Q) = P \cap Q$

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

Ley del Complemento

$\sim F \equiv V$

$\sim V \equiv F$

$P \vee \sim P \equiv V$ $\quad P \cup P' \equiv U$

$P \wedge \sim P \equiv F$ $\quad P \cap P' \equiv \phi$

$P \vee F \equiv P$ $\quad P \cup \phi \equiv P$

$P \wedge V \equiv V$ $\quad P \cap U \equiv U$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre Lógica Matemática (con Clave)

1. De las siguientes expresiones, ¿cuáles son proposiciones?

I) 5 es un número par
II) El auto nuevo
III) $x + 3 = 5$

a) Todas b) Sólo I y III c) Sólo I y II d) Sólo I e) Sólo II

2. Colocar en los paréntesis de la derecha el número que corresponda:

I) Si 8 es impar, entonces es divisible por 5

( ) Proposición Simple
( ) Disyunción
( ) Conjunción
( ) Implicación

II) $5 \geq 3$
III) Todos los humanos son mortales
IV) No es cierto que $2 = 1 + 3$
V) El caballo blanco
VI) El cuadrado es equiángulo y equilátero

3. Se se sabe que la negación de $p \Rightarrow (\sim q \vee r)$ es verdadera, entonces el valor de verdad de $(q \wedge r) \Rightarrow \{ (q \Rightarrow r) \wedge t \}$ es

a) V b) F c) V ó F

4. Simbolizar cada una de las siguientes proposiciones en los espacios en blanco, utilizando variables proporcionales y conectivos lógicos siendo:

p : $5 + 3 > 7$
q : $5 + 3 = 7$
r : $5 = 4$

I) $5 + 3 \geq 7$ _____
II) $5 + 3 > 7$, pero $5 + 3 = 7$ _____
III) $5 + 3 = 7$, si y sólo si $5 = 4$ _____
IV) Si $5 + 3 = 7$ y $5 = 4$, entonces $5 + 3 > 7$ _____

5. Los valores de verdad de las proposiciones I, II, III y IV de la pregunta anterior son respectivamente:

a) V V V F b) V F V V c) F V V V d) V F F V e) F F V V

6. Evaluar las siguientes fórmulas:

I) $\{(p \Rightarrow (q \vee \sim)\} \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
II) $\sim (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \sim r)$
III) $\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge \sim r)$

7. Respecto de la pregunta anterior podemos afirmar que:

a) Las fórmulas I y II son tautologías
b) Las fórmulas I y III son tautologías
c) Ninguna de las tres es contradicción
d) Sólo la fórmula II es contingencia
e) Todas son contingencia

8. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son equivalentes a $\sim r \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

I) $p \Rightarrow (q \vee r)$
II) $\sim p \wedge (q \vee r)$
III) $\sim p \Rightarrow (\sim p \vee r)$

a) Sólo I b) Ninguna c) Sólo II y III d) Sólo I y III e) Todas

9. Si definimos un nuevo conectivo "Δ" como $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ entonces la fórmula $(p \Delta \sim q) \Delta p$ equivale a:

a) $p \Rightarrow q$ b) $\sim p \wedge \sim q$ c) $\sim p \Leftrightarrow q$ d) $\sim q$

10. Escribir una fórmula de dos variables proporcionales cuyo resultado final en la Tabla de Verdad son:

F
F
V
F

11. Si "p ? q" sólo es verdadero cuando p y q son ambos falsos, hallar el valor de verdad de $(\sim p \ ? \ q) \ ? \ (q \ ? \ \sim r)$

si: p : 2 es un número impar
q : $\forall x \in \{1, 2, 3\}, \ x + 1 > 1$
r : $\exists x \in \{2, 4, 6\}, \ x^2 = 9$

a) V b) F c) V ó F d) No se puede determinar

12. El enunciado recíproco de la condicional "Si un número entero es divisible por 6, entonces es múltiplo de 3", es:

a) Si un número entero no es divisible por 6, entoces no es múltiplo de 3.
b) Si un número es múltiplo de 3, entonces es divisible por 6.
c) Si un número no es múltiplo de 3, entoces no es divisible por 6.

13. De las siguientes expresiones, ¿Cuáles son funciones proposicionales?

I) x es un número par
II) $(x^2 - 3x + 2) - (5x + 2)$
III) Todos los gatos son negros

a) Sólo I y II b) Todas c) Sólo I d) Sólo III e) Sólo II y III

14. Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones (en ese orden):

p : $\exists\, x \in A / 2x + 1 = 5,\ A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
q : $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 3 n es divisible por 3
r : $\exists\, x \in P / x^2 + 5 < 0$
s : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 \geq x$

a) VFFV b) VFVV c) VVFF d) FFFV e) FVFF

15. Si $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, Halla el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones

P : $\forall\, x \in P,\ x + 3 > 2 \wedge x + 1 < 7$
q : $\exists\, x \in P / x + 1 = 5 \Rightarrow x - 2 = 1$
r : $\forall\, x \in P,\ x + 2 = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

a) VFF b) VVF c) VVV d) FVF e) FFF

16. Dadas las proposiciones:

P : $\sim \{\forall\, x \in \mathbb{Q},\ x + 2 > 0\}$
q : $\exists\, x \in \mathbb{N} / 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$
r : $\forall\, x \in \mathbb{Z}\ x/x = 1$

Halla el valor de verdad de $(p \wedge q) \Rightarrow r$

a) V b) F c) Tautología d) Contradicción e) Vó F

17. Simboliza utilizando cuantificadores y notación de conjuntos numéricos la siguiente proposición: "Para todo número real x, existe un número entero n, tal que $x^n = x$".

Simbolización:

_____

18. Niega la proposición de la pregunta anterior

Negación: _____

Clave

1. d) 2. (III) (II) (VI) (I) 3. b) 4. I) $p \vee q$ II) $p \wedge q$ III) $q \Leftrightarrow r$ IV) $(q \wedge r) \Rightarrow p$ 5. b)

6. I)

p	q	$\{p \Rightarrow (q \vee \sim p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	V V V V V
V	F	V F F V F
F	V	F V V V V
F	F	F V V V V
		① ② ③ ③ ①

II)

p	q	r	$\sim (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \sim r)$
V	V	V	F V V V
V	V	F	V F V V
V	F	V	F V V F
V	F	F	V F V V
F	V	V	V F V V
F	V	F	V F V V
F	F	V	V F F F
F	F	F	V F V V
			② ① ③ ①

III)

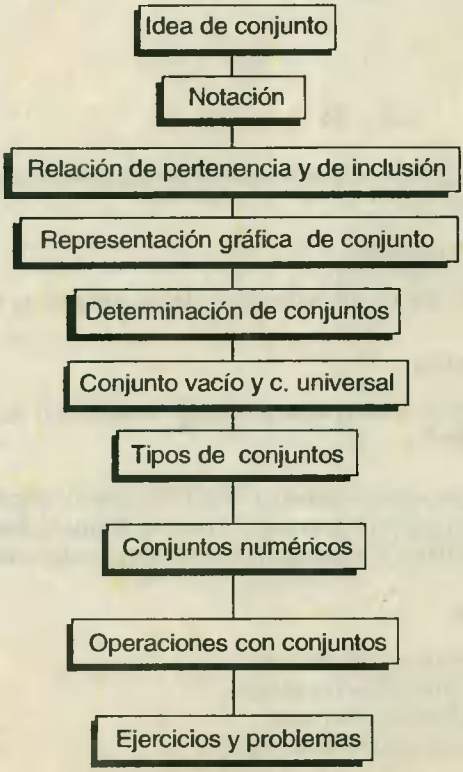
p	q	r	$\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \wedge (q \wedge \sim r)$
V	V	V	V V V F F
V	V	F	V F F F V
V	F	V	F F V F F
V	F	F	F F V F V
F	V	V	V V V F F
F	V	F	V F F F F
F	F	V	V V V F F
F	F	F	V V V F F
			① ② ① ③ ①

7. d) 8. d) 9. d) 10. $\sim (q \Rightarrow p)$ u otro equivalente 11. a)
12. b) 13. c) 14. c) 15. c) 16. b) 17. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}; x^n = x$
18. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}; x^n \neq x$

Capítulo 2

TEORIA DE CONJUNTOS

Flujo del contenido de este capítulo



1. IDEA DE CONJUNTO

El concepto **conjunto,** es una noción primitiva intuitiva y por consiguiente, no se puede En la vida diaria usamos palabras tales como colección, grupo, conjunto:

- Una colección de libros
- Un conjunto de sillas
- Un grupo de muchachos

Estas palabras son usadas intuitiva y libremente sin ninguna idea de definirlas. Se usan como sinónimos. Es con esta actitud que los matemáticos usan la palabra **"conjunto"**. La palabra debe ser usada para indicar una colección de objetos que llamamos elementos del conjunto.

Notación
Es convenio denotar los conjuntos con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas u otros símbolos. Para representar los conjuntos simbólicamente, se escriben sus elementos entre llaves y separados por comas o por un punto y coma.

Ejemplos

(1) A = { a;e; i; o; u } que se lee:

"el conjunto A cuyos elementos son: a, e, i ,o, u".

(2) B = { 𝄞 ,✻ , # , ≠ }

(3) C = { O , △ , ▭ , □ }

También usamos la siguiente notación que se podría denominar "generador de conjunto" para indicar conjuntos:

A = { x/x tiene cierta propiedad}

Que leemos: "A es el conjunto de todas las x tales que x tiene cierta propiedad".

1.1 Relación de pertenencia.-

El símbolo ∈ recuerda la letra griega, inicial del verbo λ"(el) es" utilizado en el silogismo "Sócrates es un hombre", s ∈ H.

La letra minúscula representa el elemento, la mayúsculas el conjunto. Pasar de un elemento al conjunto al que pertenece es elevarse en la **escala de tipos**. Cada uno de los tipos es sólo relativo, pues un conjunto puede ser también un elemento de un conjunto de tipo superior.

En la famosa paradoja:

Soy el hombre más hermoso de mi cuarto,
Mi cuarto es el más hermoso de mi colegio,
Mi colegio es el más hermoso de París,
París es la más hermosa ciudad de Francia,

Francia es el País más hermoso del mundo.
Luego, yo soy el hombre más hermoso del mundo.

Todo es lógicamente correcto, salvo la conclusión: el cuarto es considerado como un conjunto de estudiantes, un colegio como un conjunto de cuartos, París como un conjunto de colegios; el mundo como un conjunto de países. Pero precisamente el mundo no es aquí considerado como un conjunto de estudiantes: la palabra "hermoso" a cambiado de sentido en cada cambio de tipo. Esto nos señala ya la necesidad de un estudio correcto de la teoría de conjuntos para la comprensión de los silogismos.

En la relación de pertenencia, si "a" es un elemento del conjunto A, se denota $a \in A$ y se lee el elemento "a" pertenece al conjunto A.

La relación de pertenencia se da sólo entre elemento y conjunto.

La negación de "$a \in A$" es "$a \notin A$" y se lee: "el elemento a no pertenece al conjunto A"

1.2 Relación de Inclusión.-

Si todos los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B, entonces el conjunto A está incluido en el conjunto B; también se dice que A es subconjunto de B y se denota: $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

La expresión "$A \subset B$" puede leerse:

"El conjunto A es el subconjunto del conjunto B"
"El conjunto B incluye el conjunto A".

Ejemplo

$A = \{x \in Z / x = \dot{2}\}$ $\quad B = \{x \in Z / x = \dot{4}\}$

$B \subset A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$
$A \not\subset B \Leftrightarrow 2 \in A \Rightarrow 2 \notin B$

Propiedades:

Reflexiva

$A \subset A \quad \vee$ conjunto A
$p: x \in A \quad p \Rightarrow p$

Transitiva

$[(A \subset B) \wedge (B \subset D)] \Rightarrow (A \subset D)$

$p: x \in A \quad q: x \in B \quad r: x \in C$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (Ley de silogismo hipotético)

1.3 Subconjuntos Propios.-

Sea el conjunto A = {1; 2 ;3 }, los subconjuntos propios de A serán: {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, no son subconjuntos propios de A : ϕ y {1,2,3}

La relación de inclusión, se da solamente entre conjuntos:

Conjunto		Conjunto		
A	$\subset$	B	ó	"A está incluido en B" / "A es subconjunto de B"
B	$\supset$	A		"B incluye a A"
A	$\not\subset$	W		"A no está incluido en W" / "A no es subconjunto de W"
W	$\not\supset$	A		"W no incluye a A"

1.4 Representación Gráfica de un conjunto (Diagrama de Venn-Euler)[1].-

Para representar graficamente los conjuntos se utilizan diversas figuras geométricas, pudiendo ser estas, óvalos, circunferencias, rectángulos, rectas, segmentos, etc.

Los símbolos que representan los conjuntos pueden colocarse dentro o fuera del gráfico.

Dentro de la representación gráfica pueden colocarse pequeñas marcas y las notaciones que representan a los elementos siempre que sea necesario.

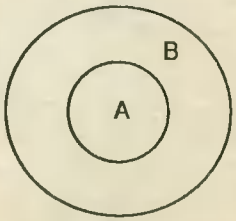
Los gráficos permiten expresar también relaciones de inclusión entre conjuntos, ya sea por Venn - Euler ó por los diagramas lineales.

En los diagramas lineales o sagitales como $B \Rightarrow A$ significa que A incluye a B.o:

Obsérvese los siguientes diagramas de Venn - Euler:

Diagramas de Venn - Euler

I.



$A \subset B$

Observemos los siguientes diagramas lineales que representan las mismas relaciones dadas en los diagramas de Venn - Euler.

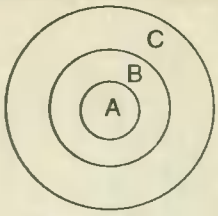
Diagramas Lineales o sagitales

I.

$A \subset B$

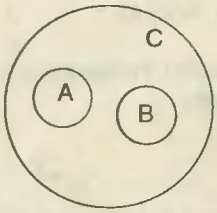
(Diagramas de Venn - Euler)

ii.



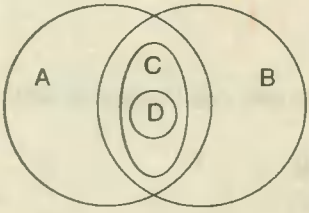
$A \subset B \subset C$

iii.



$A \subset C$ y $B \subset C$

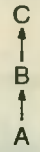
iv.



$D \subset C$ y $C \subset A$.
$C \subset B$.

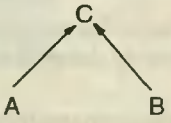
(Diagramas Lineales o sagitales)

ii.



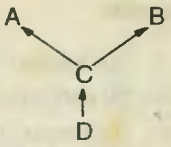
$A \subset B$ y $B \subset C$

iii.



$A \subset C$ y $B \subset C$

iv.



(1) Nota: Los diagramas fueron usados sistemáticamente por el lógico inglés John Venn (1834 - 1923) en la teoría del silogismo, pero ya L. Euler (1707 - 1783) los usaba en 1770 "para que todo salte a la vista", también los emplea el francés J. Díaz Gergonne (1771 - 1859), precursor del principio de dualidad y la geometría proyectiva.

2. DETERMINACION DE CONJUNTOS

Existen dos formas de determinar un conjunto (algunos autores utilizan "definir un conjunto" como sinónimo de "determinar un conjunto").

a) Por Extensión o Forma Tabular (lista)
b) Por Comprensión o Forma Constructiva (propiedad).

2.1 Forma tabular o por Extensión.-

Un conjunto queda determinado **por extensión** cuando se presenta una lista completa de todos y cada uno de sus elementos.

Ejemplos

A = {lunes, martes, jueves, viernes, sábado}

B = {a, e, i, o, u}

C = {Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno}

D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Nota: Es evidente que el orden en el cual son listados los elementos o miembros de un conjunto, no afecta el hecho de que pertenezcan a él. De este modo, el conjunto de dígitos que hay en el año 1896 lo escribimos así {1, 8, 9, 6} o bien {1, 9, 8, 6}.
¡Ambas formas son correctas! De ahí que {1, 8, 9, 6} = {1, 9, 8, 6}.

No todos los conjuntos pueden ser determinados por extensión, entonces se recurre a otra forma de determinación: la determinación **por comprensión.**

2.2 Forma construtiva o por comprensión.-

Un conjunto queda determinado por comprensión cuando se enuncia una propiedad que caracteriza a todos los elementos del conjunto, de tal manera que cada objeto que goza de la propiedad pertenece al conjunto y todo elemento del conjunto goza de la propiedad mencionada.

Ejemplos

A = {x/x es un mes del año}.

Se lee "El conjunto A está formado por todas las x, tal que x es un mes del año".

B = {x/x es un número primo}.

C = {x/x es un alumno de la Universidad de Lima}.

D = {x/x es un miembro del Cuerpo de Bomberos}.
(x/x se lee "todas las x tal que x").

3. CONJUNTOS ESPECIALES

3.1 Conjunto nulo o vacío.-

Es el conjunto que carece de elementos. Se representa $\varnothing$ ó { }.

Ejemplo

$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} / 2 < x < 3\}$ es $A = B = \varnothing$?

Para decir si se cumple $A = B = \varnothing$, empezaremos:

Suponiendo: $A \neq B$

Entonces un x, tal que $x \in A \ \wedge \ x \notin B$, pero esto es falso.

F ↑ V
F

Luego: $A = B = \varnothing$

* El conjunto nulo o vacío es único ($\varnothing$).

* El conjunto nulo o vacío es considerado subconjunto de todos los conjuntos, es decir:
$\varnothing \subset A, \quad \forall$ conjunto A.

3.2 Conjunto Universal.-

En nuestras conversaciones diarias por lo general tomamos en cuenta un universo de la discusión; es decir el conjunto de cosas acerca de las que hablamos. En lo referente a conjuntos, dicho universo recibe el nombre de **Conjunto Universal**. Así el conjunto universal se define como:

"El conjunto de todos los elementos que habrá de analizarse en la discusión".

Es muy útil, cuando se piensa y se habla acerca de conjuntos, saber que los miembros de un conjunto dado pertenecen a alguna **población** determinada. Por ejemplo, si deseamos hablar de conjuntos de alumnos es útil tener como referencia una población general de alumnos; los miembros de esta población son elegidos como miembros de nuestro conjunto. Quizá hayamos fijado nuestra atención en los alumnos de una escuela particular determinada o en todos los alumnos del tercer grado de esa escuela, o en todos los alumnos de las escuelas del Perú.

Si especificamos un conjunto particular de alumnos al que nos limitamos para encontrar miembros para otros conjuntos que intervengan en la discusión o en el problema que se esté tratando, entonces este conjunto específico se llama conjunto universal, o simplemente el universo de nuestra discusión o problema; entonces en una discusión particular cualquiera que implique conjuntos, todo conjunto de esta discusión es un subconjunto del conjunto universal.

Designamos el conjunto universal por el símbolo **U**.

4. TIPOS DE CONJUNTOS

Conjuntos iguales, disjuntos, comparables, finitos e infinitos

4.1 Conjuntos iguales.-

Dos conjuntos son iguales, cuando tienen los mismos elementos es decir:

$$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$$

Ejemplo 1

$$A = \{ a \} \qquad B = \{ a, a \} \qquad A = B$$

Ejemplo 2

$$\text{Si: } A = \{ 3n + 2 / n \in \mathbb{Z} \} \text{ y } B = \{ 3k - 1 / k \in \mathbb{Z} \}$$

entonces: A y B son iguales?

Para decir si se cumple: A = B debemos demostrar que:

$A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A$

$x \in A \Rightarrow x = 3n + 2$

$\Rightarrow x = 3n + 2 + 1 - 1$

$\Rightarrow x = 3(\underbrace{n + 1}_{k}) - 1$

Luego: $A \subset B$

$x \in B \Rightarrow x = 3k - 1$

$\Rightarrow x = 3k - 1 + 2 - 2$

$\Rightarrow x = 3(\underbrace{k - 1}_{n}) + 2$

Luego: $B \subset A$

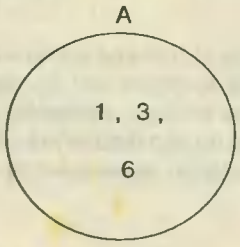
entonces: A = B.

4.2 Conjuntos disjuntos o ajenos (1).-

Dos conjuntos C y D, que no tengan elementos en común son disjuntos o ajenos.

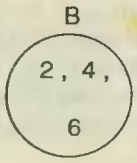
Ejemplo

$A = \{ 1, 3, 5 \}$



disjunto

$B = \{ 2, 4, 6 \}$



Lo contrario a conjuntos ajenos o disjuntos, son los conjuntos que se **"traslapan"** es decir que tienen algún o algunos elementos comunes.

(1) Nota: También se dice que dos conjuntos son disjuntos cuando su intersección es nula o vacía.

4.3 Conjunto comparables.-

Dados los conjuntos A y B diremos que estos conjuntos son comparables si uno de ellos es subconjunto del otro.

Ejemplo

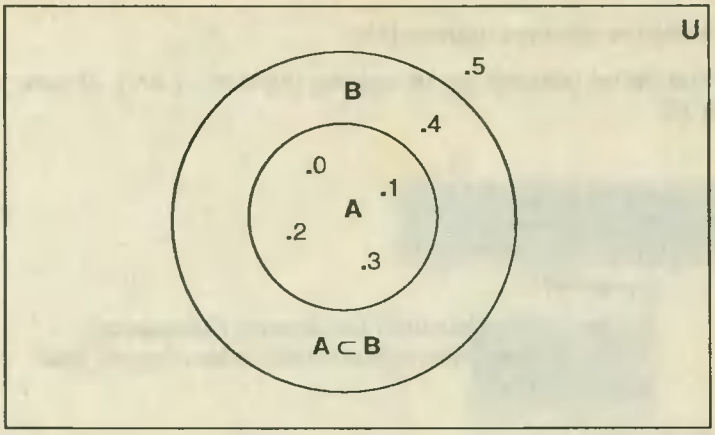
Si U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

A = { 0, 1, 2, 3 }

B = { 0, 1, 2, 3, 4 }

→ A y B son comparables ya que $A \subset B$.

Gráficamente:



4.4 Conjuntos finitos y conjuntos infinitos.-

Si al contar el número de elementos que tiene el conjunto el conteo termina, se dice que el conjunto es finito; si el conteo no termina se dice que el conjunto es infinito.

Ejemplos

A	=	$\{ x / x \in \mathbb{N} \}$	conjunto infinito
B	=	$\{ x / x \in \mathbb{Z} \}$	conjunto infinito
C	=	$\{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$	conjunto finito
D	=	$\{ x \in \mathbb{N} / 0 < x < 1 \}$	conjunto finito
E	=	$\{ x \in \mathbb{N} / 0 < x < 5 \}$	conjunto finito
F	=	$\{ x \in \mathbb{R} / 0 < x < 5 \}$	conjunto infinito.

5. CONJUNTO NUMERICOS

Los conjuntos numéricos más importantes son:

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$)
El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)
El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)
El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$)
El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)
El conjunto de los números imaginarios puros ($\mathbb{I}_m$)
El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

5.1 El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$).-

Está formado por todos aquellos números que utilizamos en el proceso de contar, es decir por los números enteros positivos (incluyendo el cero). Este conjunto es infinito.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; .....\}$

5.2 El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$):

Está formado por el conjunto de los enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), el cero y los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$)

$$\mathbb{Z} = \underbrace{\{....-3; -2; -1;}_{\mathbb{Z}^-} \; 0 \; ; \underbrace{1; 2; 3; .....\}}_{\mathbb{Z}^+}$$

$$\mathbb{Z}^- \cup \underbrace{\{0\} \cup}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}^+$$

$\mathbb{N}$ (El conjunto de los números naturales es subconjunto del conjunto de los números enteros).

5.3 El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).-

Esta formado por todos aquellos números que pueden expresarse como una fracción, tal que el numerador y el denominador de la fracción sean números enteros, siendo el denominador diferente de cero.

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \Big/ \, m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

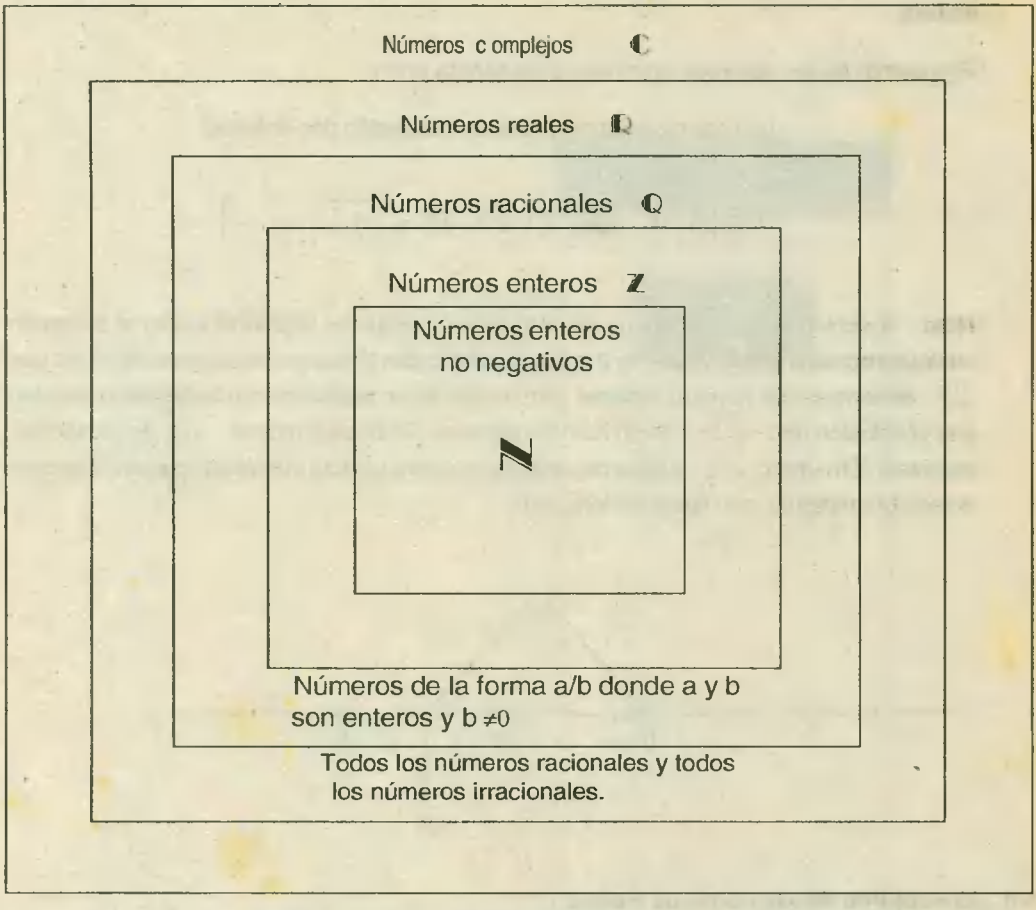
Ejemplos

2	ya que puede expresarse como	2/1
-5	ya que puede expresarse como	-5/1
0.5	ya que puede expresarse como	1/2
0.3	ya que puede expresarse como	3/10
0.333...	ya que puede expresarse como	1/3
0.21	ya que puede expresarse como	7/33
0	ya que puede expresarse como	0/n.

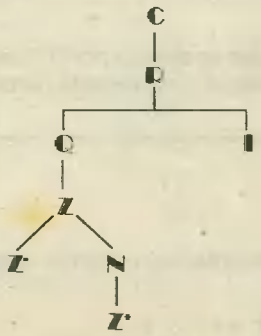
El conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Entonces: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

El siguiente esquema te permitirá visualizar la ubicación de cada conjunto numérico y la relación entre ellos.



A continuación se presenta el diagrama lineal que es otra forma de visualizar los conjuntos numéricos y sus relaciones.



5.4 El conjunto de los Números irracionales.-

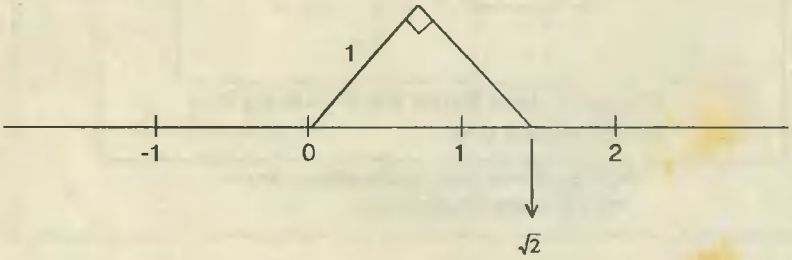
Está formado por todos aquellos números que tienen representación decimal infinita no periódica y, por otra parte, no pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros.

El conjunto de los números irracionales se denota por I

$$I = \{ x/x \text{ no se puede obtener dividiendo dos enteros} \}$$

$$I = \{\pi,\ e,\ \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7+1} \ldots\ldots\}$$

Nota: Es obvio que $\sqrt{2}$ no es un número entero porque es imposible elevar al cuadrado cualquier número entero y obtener 2 como resultado. Sin embargo los pitagóricos creían que $\sqrt{2}$ debería ser un número racional, pero luego de un razonamiento sistemático llegaron a la conclusión que $\sqrt{2}$ no es un número racional. En otras palabras, $\sqrt{2}$ es un número irracional. El número $\sqrt{2}$ puede representarse sobre la recta numérica colocando encima de ella un triángulo con lados de longitud l.



5.5 El conjunto de los Números Reales.-

Está formado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

El conjunto de los números reales se denota por R y se representa gráficamente por una recta llamada recta numérica real, o simplemente recta numérica.

Sobre ella se puede representar los números reales, sean estos naturales, enteros, racionales e irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

5.6 El conjunto de los Números Complejos.-

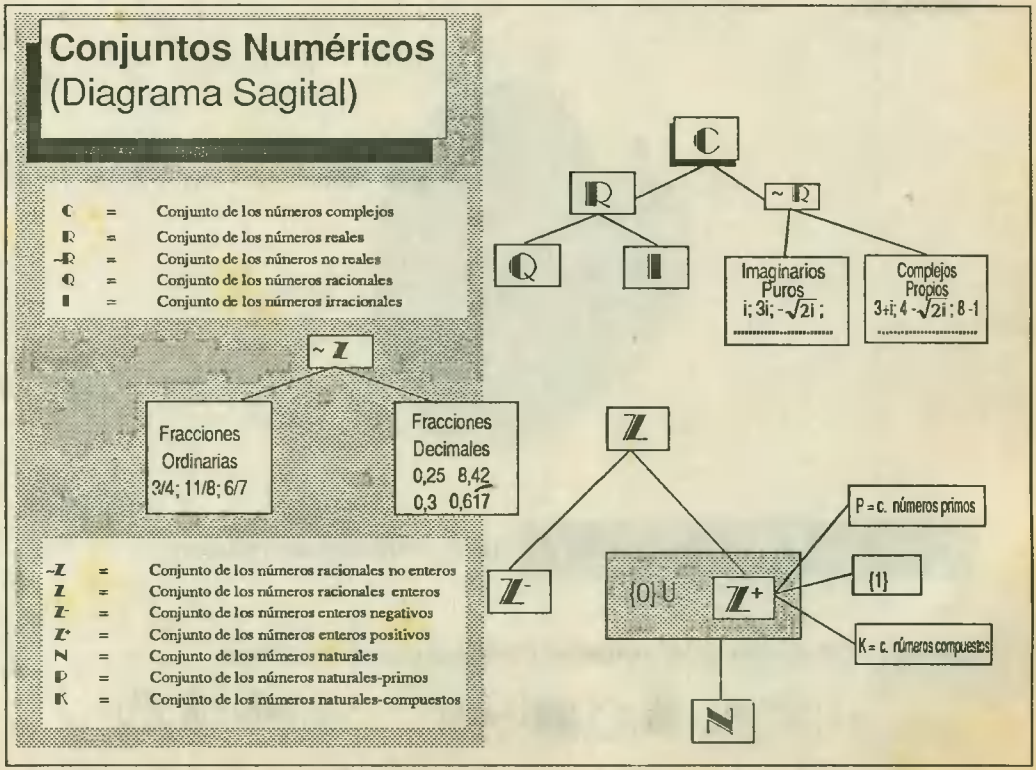
Está formado por todos aquellos números de la forma **a + bi**, en la que a y b son números reales e "i" representa a la raíz cuadrada de -1.

El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Entonces: $C = \{ a + bi / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \}$

Ejemplos

0	es un número complejo ya que es	0+0i
2	es un número complejo ya que es	2+0i
-3	es un número complejo ya que es	-3+0i
$1+\sqrt{-1}$	es un número complejo ya que es	1+i
$\pi+\sqrt{-4}$	es un número complejo ya que es	π+2i
$1/2+\sqrt{-9}$	es un número complejo ya que es	1/2+3i
$3/4-\sqrt{-16}$	es un número complejo ya que es	3/4-4i
$\frac{2+\sqrt{3}i}{2}$	es un número complejo ya que es	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\frac{5-\pi i}{6}$	es un número complejo ya que es	$\frac{5}{6}-\frac{\pi}{6}i$



6. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las principales operaciones entre conjuntos son: unión o reunión; intersección, diferencia; diferencia simétrica; complementación; potencia de un conjunto y producto (cartesiano).

6.1. Unión o Reunión (suma conjuntista: U).-

Se llama unión de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos que están en A o en B o en ambos:

Definición

$$A \cup B = \{ x / x \in A \ v \ x \in B \}$$

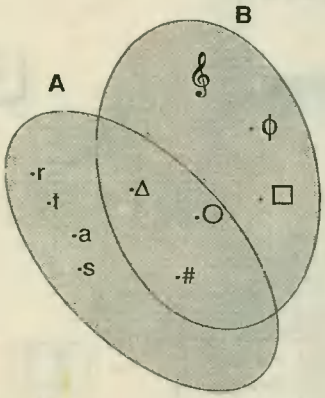
"Se lee: A unión B está formado por todos los elementos x, tal que, x pertenece a A o x pertenece a B o bien x pertenece a los dos conjuntos."(observar que v es el uso inclusivo de "o").

Ejemplo

Consideremos los siguientes conjuntos que se traslapan

$A = \{ a; t; r; s; \Delta; O; \# \}$ $B = \{ \square, \phi, \Delta, O, \#, \text{𝄞} \}$ $\therefore A \cup B = \{ a; t; r; s; \Delta; \#, \square, \phi, O, \text{𝄞} \}$

Graficando:



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ (si los conjuntos se traslapan)

Ejemplo: Consideremos los siguientes conjuntos disjuntos o ajenos:

$A = \{$; ; ; ; ; $\}$ $B = \{$; ; $\}$

$A \cup B = \{$ $\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ (si los conjuntos son disjuntos o ajenos)

Consideremos los siguientes conjuntos disjuntos o ajenos:
En general:

i. $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$

ii. Para 3 conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Propiedades de la unión:

i. Idempotencia ..... $A \cup A = A$
ii. Conmutatividad....$A \cup B = B \cup A$
iii. Asociatividad ..... $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
iv. Distributividad.....$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
v. Absorción ..... $A \cup (A \cap B) = A$

6.2. Intersección.-

Se lee: " R intersección con S es el conjunto formado por todos los elementos x tal que x pertenece a R y x pertenece a S".

Definición

$$R \cap S = \{ x / x \in R \wedge x \in S \}$$

Se lee: R intersección con S es el conjunto formado por todos los elementos x tal que x pertenece a R y x pertenece a S.

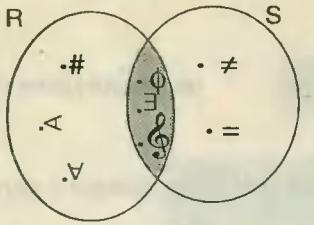
Ejemplo

Consideremos los conjuntos que se traslapan:

$$R = \{ \#\ ;\ \text{𝄞}\ ;\ \phi;\ \prec\ ;\ \forall; \exists \} \qquad S = \{ \neq;\ \phi;\ \exists;=;\ \text{𝄞} \}$$

Graficando:

En general:



$R \cap S = \{\phi; \exists; \text{𝄞}\}$

Ejemplo

Consideremos los siguientes conjuntos disjuntos o ajenos

$R = \{$ $\}$ $\qquad S = \{ K; o; i; t \}$

$\therefore \quad R \cap S = \phi$

En general: $x \in (R \cap S) \Leftrightarrow x \in R \wedge x \in S$

Propiedades de la intersección:

i. Idempotencia ..... $A \cap A = A$
ii. Conmutatividad ..... $A \cap B = B \cap A$
iii. Asociatividad ..... $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
iv. Distributividad ..... $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
v. Absorción ..... $A \cap (A \cup B) = A$
vi. Leyes de Morgan

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

6.3. Diferencia.-

Se llama diferencia entre un conjunto A y otro conjunto B, al conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

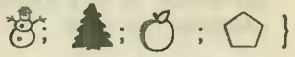
Definición

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \}$$

Se lee: "A diferencia con B es el conjunto de las x, tal que x pertenece al conjunto A y x no pertenece al conjunto B."

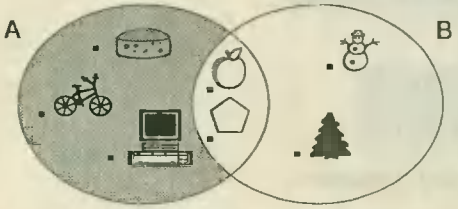
Ejemplo

Consideremos los conjuntos que se traslapan:

A = { } B = {  }

A - B = { }

Graficamente:



Ejemplo

Consideremos los conjuntos disjuntos o ajenos:

$R = \{\alpha ; \beta ; \delta ; \phi\}$ $S = \{6; 16; 26; 36\}$

$\therefore$ $R - S = R$

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \wedge x \in B'$

$x \in (A \cap B')$

$\therefore x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B')$

Propiedades de la diferencia:

i. $(A - B)$ $\exists$ y es única.
ii. $(A - \phi) = A$
iii. $\phi - A = \phi$
iv. $A - A = \phi$
v. La diferencia de conjuntos no es asociativa: $(A - B) - C \neq A - (B - C)$
vi. La diferencia de conjuntos no es conmutativa: $A - B \neq B - A$.
vii. $(A - B) \subset A$
viii. $(A \subset B) \Leftrightarrow A - B = \phi$
ix. $A - (A - B) = A \cap B$
x. Ley de paso al complementario: $A - B = A \cap B'$
xi. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
xii. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

6.4. Diferencias Simétricas: Δ

Se llama diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por todos los elementos de A y todos los de B, excepto los que están en la intersección de ambos conjuntos, es decir:

Definición:

$A \Delta B = \{x / x \in A \vee x \in B \wedge x \notin (A \cap B)\}$, que es equivalente a:
$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$, es decir:
$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
También:
$A \Delta B = (A \cap B)'$

Ejemplo:

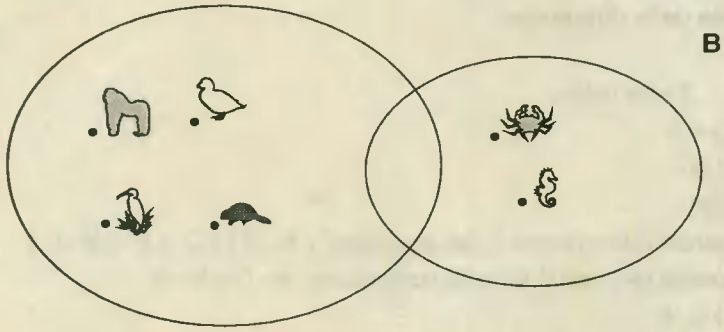
Sean los conjuntos que se traslapan:

A = { }

B = { }

A Δ B = { }

Gráficamente



Nota:
Si los conjuntos son disjuntos o ajenos, se cumple:

$$A \Delta B \equiv A \cup B$$

Propiedades de la diferencia simétrica Δ (delta):

i. Conmutativa ..... $A \Delta B = B \Delta A$

ii. Asociativa ..... $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

iii. No cumple idempotencia ..... $A \Delta A = \phi$

iv. $A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

v. $A \Delta \phi = A$

vi. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

vii. $A \Delta B = \phi \Leftrightarrow A = B$

viii. $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

6.5. Complementación.-

Sea $A \subset U$, donde U es el conjunto universal. Se llama complemento de A al conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A. El complemento de A, se denota:

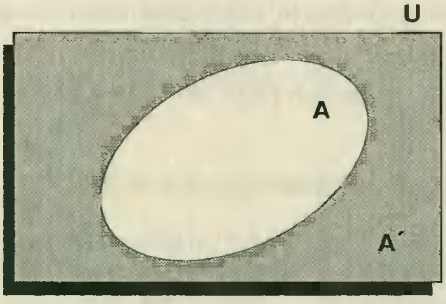
$$C A,\ A^c,\ \overline{A},\ A'$$

Definición

$$A' = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\} \text{ luego}$$

$$x \in A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A.$$

Gráficamente:



Clases de Complemento:

i. Complemento relativo:

$$\text{Si : } A \subset B \Rightarrow C_B^A = B - A$$

ii. Complemento absoluto: (con respecto al universo)

$$C_U^A = U - A = A'$$

Propiedades de la complementación:

i. Relación con la lógica:

En lógica:	En conjuntos:
Proposición verdadera:	V ≡ U (Universo)
Proporción falsa:	F ≡ ϕ
"y":	∧ ≡ ∩ (intersección)
"o":	∨ ≡ U (unión o reunión)
Negación:	~ ≡ / (complemento)
Implicación:	.⇒. ≡ A^{I} U B
De la Tautología:	V ≡ U ⇒(p ∧v ≡ p) ≡ (A ∩ U ≡ A)

ii. A^{I}, ∃ y es única

iii. $U^{I} \equiv \phi$

iv. $\phi^{I} \equiv U$

v. $A \cup A^{I} \equiv U$

vi. $A \cap A^{I} \equiv \phi$

vii. $(A^{I})^{I} \equiv A$

Leyes de Morgan

viii. $(A \cup B)^{I} \equiv A^{I} \cap B^{I}$

ix. $(A \cap B)^{I} \equiv A^{I} \cup B^{I}$

6.6. Potencia de un conjunto.-

Dado un conjunto A, llamaremos potencia del conjunto A, al conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A. Se representa P(A).

Definición

$$P(A) = \{x / x \subset A\} \text{ es decir } x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A.$$

Si el número de elementos de A es m, entonces el número de elementos de P (A) está dado por 2^{m} , ésto es:

$$\text{Si: } n(A) = m \Rightarrow n[P(A)] = 2^{m}$$

Ejemplo

Sea el conjunto A = { 1; 2; 3 } los subconjuntos de A:

{ 1 }; { 2 }; { 3 }; { 1, 2 }; { 1,3} ; { 2,3 }; { 1,2,3 }; ϕ (ocho subconjuntos) si estos subconjuntoslos encerramos entre dos llaves, se habrá formado un nuevo conjunto potencia de A:

$$P(A) = \{ \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}; \phi \}$$

$$n[P(A)] = 2^{3} = 8$$

Nota: De los expuesto se deduce que el número de subconjuntos de un conjunto A es igual al número de elementos del conjunto potencia de A.

Propiedades:

i. ∀ conjunto A, P (A) ∃ y es única.

ii. $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$

iii. $\phi \in P(A)$; $A \in P(A)$

iv. $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$

v. $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

vi. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

vii. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

6.7 Producto Cartesiano.-

Conjuntos ordenados:

Al dar un conjunto por extensión se señala cada uno de sus elementos. Esto debe hacerse por fuerza en orden, pero cualquiera sea el orden elegido para señalar los elementos, el conjunto es el mismo. Así:

$$\{1, \alpha\} = \{\alpha, 1\}$$

Es decir los símbolos $\{1, \alpha\}$ y $\{\alpha, 1\}$ representan el mismo conjunto. Pero a veces interesa el orden en que se consideran los elementos de un conjunto. En tal caso, decimos que se tiene un conjunto ordenado. Un tal conjunto se indica encerrando sus elementos entre paréntesis y anotándolos en su orden. Así $(1, \alpha, \beta)$ es un conjunto ordenado de primer elemento 1, segundo elemento α , y tercer elemento β.

Un conjunto ordenado de dos elementos se llama par ordenado. Con mayor precisión:

"Se llama par ordenado a un conjunto formado por dos elementos (que pueden ser iguales) y un criterio de ordenación que establece cuál es el primer elemento y cuál el segundo".

Consideremos los pares ordenados:

$(1, 2)$ de primer elemento 1 y segundo elemento 2.

$(2, 1)$ de primer elemento 2 y segundo elemento 1.

Estos pares ordenados no son, pues, el mismo, esto es, son diferentes o no iguales, lo que se indica:

$$(1,2) \neq (2,1)$$

El par ordenado (a,b), es igual al par ordenado (c,d), si los primeros elementos (a y c) son iguales entre sí, y los segundos elementos (b y d) son iguales entre sí:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplo

$$(a,b) = (5,11) \Leftrightarrow a = 5 \text{ y } b = 11$$

Producto Cartesiano:

Si "A" y "B" son dos conjuntos, entonces el producto cartesiano de A x B es el conjunto de todos los pares ordenados, con el primer componente perteneciente a A y el segundo componente perteneciente a B.

Como todo conjunto, el producto cartesiano A x B , se puede representar por extensión y por comprensión. Así:

$A \times B = \{ (a,b) / a \in A \text{ y } b \in B \}$

Consideremos los conjuntos: A = { a,b,c } y B = { 1,2 }, entonces:

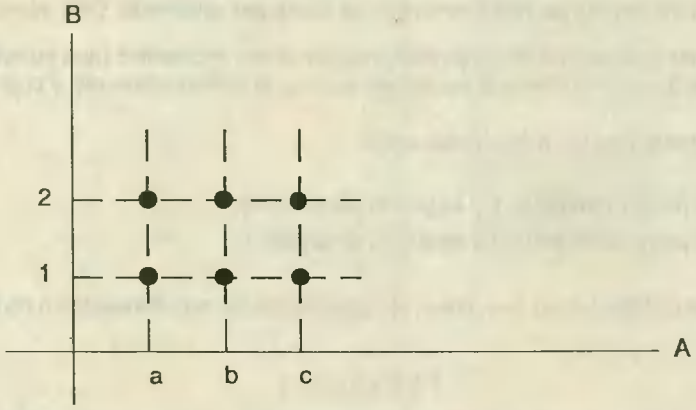
$A \times B = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \}$
$B \times A = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (2,c), (1,c) \}$

Se deduce:

i. $A \times B \neq B \times A$
ii. $n(A) = 3$
iii. $n(B) = 2$
iv. $n(A \times B)$ y $n(B \times A) = 6$

Representación gráfica del producto cartesiano:

$A \times B = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \}$



6.8 Propiedades del Producto Cartesiano.-

i) Recordemos que el producto de dos números es cero sí y solo si por lo menos uno de estos números es cero:

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Para el producto cartesiano vale una propiedad análoga con referencia al conjunto vacio:

"El producto cartesiano A x B es vacío si y solo si, uno al menos de sus factores es vacio:

$$A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \text{ ó } B = \phi$$

ii) El producto A x A se indica también A^2 y se lee "A al cuadrado" o " cuadrado cartesiano de A".

iii) Se llama producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots \times A_n$; de todos los conjuntos A_1, A_2, A_3,....., A_n, tomados en ese orden, al conjunto de todas las n uplas ordenadas $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n)$ tales que: $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$,.....,$a_n \in A_n$ esto es:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n) / a_i \in A_i \text{ para } 1 \leq i \leq n \}$$

Este producto se indica también:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

i, que se lee "producto desde i = 1 hasta n de los conjuntos A_i.

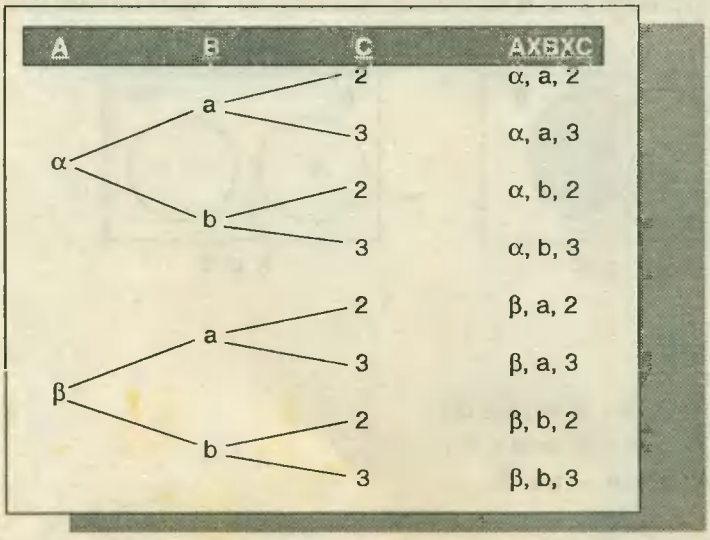
El concepto producto cartesiano se puede extender a 3 o más conjuntos:

$$A \times B \times C = \{ (x,y,z) / x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C \}$$

Ejemplo

Si: $A = \{ \alpha, \beta \}$, $B = \{ a, b \}$, $C = \{ 2, 3 \}$

Los elementos de A x B x C se obtienen mediante el diagrama del árbol siguiente:



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE TEORIA DE CONJUNTOS

Observaciones Previas

* La relación de pertenencia y la relación de inclusión, son conceptos básicos para poder resolver los problemas relativos a este capítulo.
* El manejo de los diagramas de Venn y los diagramas sagitales nos permitirán un mejor panorama al plantear los problemas.
* Antes de resolver los problemas sobre conjuntos numéricos, debemos conocer todos estos conjuntos, y dado un número cualquiera, poder indicar a quéconjunto corresponde.
* En los problemas sobre operaciones con conjuntos, al graficar es aconsejable colocar los datos en el gráfico, empezando por el último dato e ir retrocediendo, hasta el primero.
  También es muy útil la fórmula (para tres conjuntos A, B y C):

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

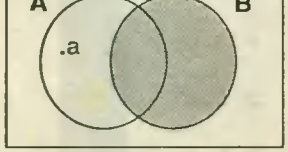
1. Si: $A = \{\phi, 0, \{5\}\}$ y $P(A)$ es el conjunto potencia de A.
Decir si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

i. $\{\phi\} \in P(A)$
ii. $\{\{\phi\}\} \in P(A)$
iii. $\phi \subset P(A)$
iv. $\phi \in P(A)$
v. $\{\phi\} \subset P(A)$

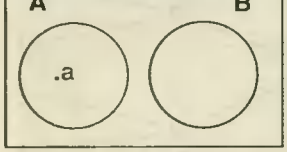
Solución

i. $\{\phi\} \in P(A)$ Verdadero, porque $\{\phi\}$ es subconjunto de A.
ii. $\{\{\phi\}\} \in P(A)$ Falso, porque $\{\{\phi\}\}$ no es subconjunto de A.
iii. $\phi \subset P(A)$ Verdadero, porque ϕ es subconjunto de todo conjunto.
iv. $\phi \in P(A)$ Verdadero, porque ϕ es subconjunto de A.
v. $\{\phi\} \subset P(A)$ Verdadero, porque ϕ es elemento de $P(A)$.
Rpta. V F V V V

2. Demostrar que la proporción $A \not\subset B$ es equivalente a decir que "existe un elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$.



$A \not\subset B$



$A \not\subset B$

Demostración:

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\equiv \sim(A \subset B) \\ &\equiv \sim(\forall a \in A, a \in A \Rightarrow a \in B) \\ &\equiv \exists a \in A / \sim(a \in A \Rightarrow a \in B) \\ &\equiv \exists a \in A / a \in A \wedge a \notin B. \end{aligned}$$

LQQD.

3. Demostrar la propiedad transitiva de la inclusión de conjuntos:

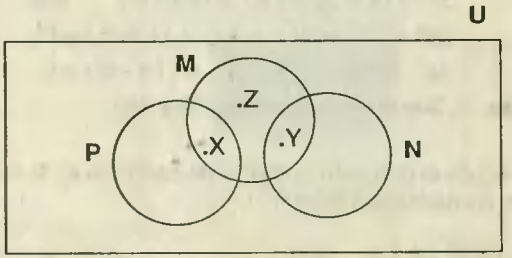
$A \subset B \quad y \quad B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Demostración:

Demostraremos que $\forall\ x \in A,\ x \in A \Rightarrow x \in C$
$\forall\ x \in A,\ x \in A \Rightarrow x \in B$ (porque $A \subset B$) y $x \in B \Rightarrow x \in C$ (porque $B \subset C$)
entonces, $x \in A \Rightarrow x \in C$ por la ley transitiva de las proposiciones lógicas: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

LQQD.

4. Si se tiene:



I) $\{x\} \subset \overline{M \cup N} \cap \overline{P}$

II) $y \in \overline{M \cap P} \cup \overline{N}$

III) $\{X, Z\} \subset M \cap \overline{P \cup N}$

¿Cuántas son falsas?:

Solución

$x \in \overline{P} \rightarrow \{x\} \not\subset M \cup N \cap P \rightarrow$ (I) es falsa.
$y \in \overline{P} \rightarrow y \in \overline{M \cap P} \cup N \rightarrow$ (II) no se puede precisar.
$x \notin \overline{P}$ y $z \notin \overline{N} \rightarrow \{x, z\} \not\subset M \cap \overline{P \cup N} \rightarrow$ (III) sí.

Rpta. Es falsa al menos una.

5. Sea el conjunto unitario:

$A = \{ m + n, 8, 2n - 2m + 4 \}$ y los conjuntos:
$B = \{ x / x = nk,\ k \in \mathbb{Z}+ \}$
$C = \{ x / x = mk,\ k \in \mathbb{Z}+ \}$. Hallar $B \cap C$.

Solución

Podemos establecer:

$m + n = 8$ .....(1)
$2n - 2m + 4 = 8$ .....(2)
De (2): $n - m = 2$ .....(3)
De (1) y (3): $n = 5 \wedge m = 3$

$\therefore B = \{ x / x = 5k,\ k \in Z^+ \} = \{ 5, 10, \boxed{15}, 20, 25, \boxed{30}, ... \}$
$C = \{ x/x = 3k,\ k \in Z^+ \} = \{ 3, 6, 9, 12, \boxed{15}, ..., \boxed{30}, ... \}$

Rpta. $B \cap C = \{ x / x = 15k,\ k \in Z^+ \}$

6. Sean los subconjuntos de los enteros:

$A = \{ x / x (11 - x) = 30 \}$

$B = \{ x / 5 (x^2 + 4) = 29x \}$

$C = \{ x / 3x^2 - 22x + 24 = 0 \}$ y las alternativas:

I) $A = B \cup C$ II) $B = A \cup C$ III) $C = A \cup B$ IV) $B = A - C$ V) $C = A \cap B$

¿Cuántas alternativas son verdaderas?

Solución

$A : x^2 - 11x + 30 = (x - 5) (x - 6) = 0 \rightarrow A = \{ 5,6 \}$

$B : 5x^2 - 29x + 20 = (5x - 4) (x - 5) = 0 \rightarrow B = \{ 5 \}$

$C : 3x^2 - 22x + 24 = (3x - 4) (x - 6) = 0 \rightarrow C = \{ 6 \}$

Rpta. ∴ Son verdaderas dos: (I) y (IV)

7. P(A) es el conjunto potencia de conjunto A, si $A \neq \phi$. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

$\{ A \} \in P (A)$

$\{ A \} \subset P (A)$

$\phi \subset P (A)$

$\phi \in P (A)$

$\{ \phi \} \in P (A)$

$\{ \phi \} \subset P (A)$

Solución

Si:

$\{ A \} \in P(A)$ = falso

$\{ A \} \subset P (A)$ = verdadero

$\phi \subset P (A)$ = falso

$\phi \in P(A)$ = verdadero

$\{ \phi \} \in P(A)$ = falso

$\{ \phi \} \subset P (A)$ = verdadero

8. Se define la operación: "Diferencia simétrica" de dos conjuntos A y B asi:

$A \Delta B = \{ x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \}$

Si $U = \{ x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 10 \}$ (Recuerde que le cero es natural)

$A = \{ x / x = 2n + 1 \wedge n \in U \}$

B = { x / x es número primo } (Recuérdese que 1 no es primo).

Determinar el número cardinal del complemento de: $A \Delta B$

Solución

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$A = \{ 6, 7, 8, 9 \}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cap B = \{7, 9\} \rightarrow (A \cap B)' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

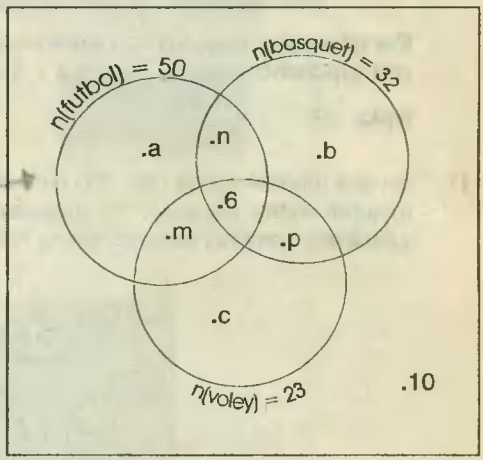
$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow (A \cup B)' = \{0, 2, 4\}$

$(A \cap B)' - (A \cup B)' = \{1, 3, 5, 6, 8\}$

$n[(A \cap B)' - (A \cup B)'] = 5$

9. El club "Dannon" consta de 80 miembros. De ellos 50 juegan fútbol, 32 básquet y 23 vóley. Además 6 juegan en los tres deportes y 10 no practican ningún deporte. Si "z" es el total de personas que practican exactamente dos deportes y "x" un solo deporte. Hallar $x - z$.

Solución



Podemos establecer:

$a + b + c = x \quad (1)$

$m + n + p = z \quad (2)$

$x + z + 6 = 70 \Rightarrow x + z = 64 \quad (3)$

También:

$$\left.\begin{array}{l} a + m + n = 44 \\ b + n + p = 26 \\ c + m + p = 17 \end{array}\right\}$$

$(a + b + c) + 2(m + n + p) = 87 \Rightarrow x + 2z = 87$

$\underbrace{x + z}_{64} + z = 87 \Rightarrow z = 23 \wedge x = 41$

Rpta. $\therefore x - z = 18$

10. Se conoce que un grupo de 60 señoritas tienen las siguientes características: Flaquitas, ojiverdes, altas, con experiencia, simpáticas, pelirrojas y además se sabe que: 15 son ojiverdes simpáticas, solamente; 10 son pelirrojas altas solamente; 7 son pelirrojas, altas, ojiverdes simpáticas, pero no flaquitas con experiencia; 6 son ojiverdes simpáticas flaquitas con experiencia pero no pelirrojas altas; 5 son pelirrojas altas flaquitas con experiencia pero no ojiverdes simpáticas; 4 son flaquitas, ojiverdes altas, con experiencia, simpáticas, pelirrojas.

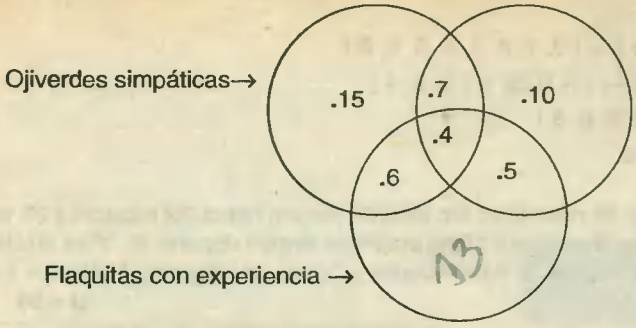
¿Cuántas flaquitas con experiencia hay en el grupo?

Solución

Las siguientes características van emparejadas:

- Ojiverdes simpáticas
- Pelirrojas altas
- Flaquitas con experiencia.

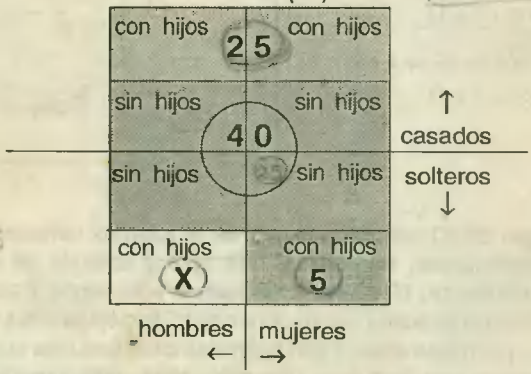
Aplicando diagramas de Venn y de acuerdo a datos:



Por diferencia, flaquitas con experiencia solamente: 60 - 47 = 13. El conjunto de flaquitas con experiencia tiene: 13 + 6 + 4 + 5 = 28 elementos.

Rpta. 28.

11. En una reunión donde hay 100 personas se sabe que 40 tienen hijos, 60 son hombres, 10 mujeres están casadas; 25 personas casadas tienen hijos; hay 25 madres solteras. ¿Cuántos hombres solteros tienen hijos?

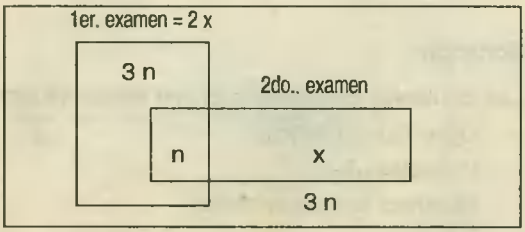


Del gráfico: x = 30

12. De un grupo de 1800 estudiantes; el número de los que sólo rindieron el 2do. exámen, es la mitad de los que rindieron el 1ro.. El número de los que rindieron sólo el 1er. examen es el triple de los que rindieron ambos exámenes e igual al de los que no rindieron ningún exámen. ¿Cuántos rindieron al menos un exámen.?

Solución

x = 2 n
3 n + n + x + 3 n = 1 800
9 n = 1 800
n = 200
Al menos rindieron un examen:
180 - 3 n = 1 200



Rpta. 1 200

13. A una reunión donde asisten 50 personas: n (U) = 100

- 5 mujeres tienen 17 años
- 14 mujeres no tienen 18 años.
- 16 mujeres no tienen 17 años.
- 10 varones no tienen ni 17 ni 18 años.

¿Cuántos varones no tienen 17 o 18 años?

Rpta. 19

19		10	↑ hombres
5	7	9	mujeres ↓
tienen 17 años	tienen 18 años	no tienen ni 17 ni 18	

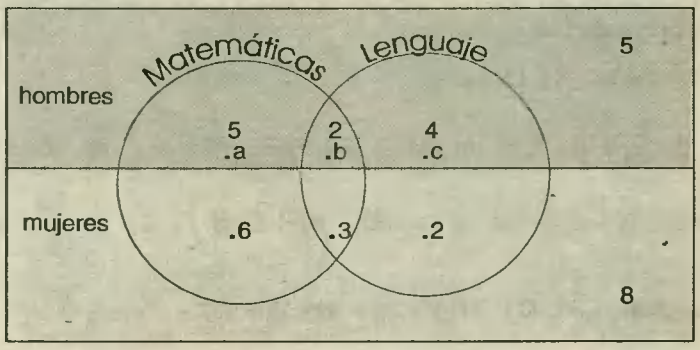
14. Una sección de nuestra Universidad está formada por 35 alumnos entre hombres y mujeres, se sabe que:

- 7 hombres aprobaron Matemáticas I.
- 6 hombres aprobaron Lenguaje.
- 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ninguno de los dos cursos.
- 5 aprobaron los 2 cursos.
- 11 aprobaron sólo Maternáticas I.
- 16 hombres hay en la sección.

¿Cuántas mujeres aprobaron sólo Lenguaje?

Solución

a + b = 7
b + c = 6
a + b + c = 11



Rpta. 2

15. En una clase el 50% de los alumnos aprobaron aritmética, el 40% aprobó álgebra y el 30% aprobó geometría; el 20% de los que aprobaron aritmética también aprobaron geometría, el 20 % de los que aprobaron geometría también aprobaron álgebra y el 40% de los queaprobaron aritmética y geometría también aprobaron álgebra y el 20% de los que aprobaron aritmética también aprobaron algebra pero no geometría. ¿Qué % de la clase no aprobó ninguno de los tres cursos?

Solución

Considerando que en la clase hay 100 alumnos:

$n(A) = 50$, $n(B) = 40$; $n(C) = 30$

$n(A \cap C) = \frac{1}{5} \times 50 = 10$; $n(B \cap C) = \frac{1}{5} \times 30 = 6$

$n(A \cap B \cap C) = \frac{40}{100} \times 10 = 4$, $n(A \cap B) - n(A \cap B) - (A \cap B \cap C) = \frac{1}{5} \times 50 = 10$

$n(A \cap B) = 14$

Por fórmula:

$n(A \cup B \cup C) = 50 + 40 + 30 - 14 - 10 - 6 + 4 = 94$

Luego: No aprobaron ninguno de los tres cursos:

$n[(A \cup B \cup C)'] = 100 - 94 = 6\%$

Rpta. 6 %

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$

16. Entre los varones que llegaron a un avión internacional: 40 eran peruanos y 60 eran comerciantes. De los peruanos el 75% tenían bigotes y la mitad de los peruanos eran comerciantes, 5 de cada 6 comerciantes tenían bigotes. De los peruanos con bigotes la mitad eran comerciantes. Determinar el número de peruanos o comerciantes con bigote.

Solución

De los datos: Si P es el conjunto de peruanos, C el conjunto de comerciantes y B elconjunto de personas con bigote:

$n(P) = 40$; $n(C) = 60$

$n(P \cap B) = 75\%$ de $40 = 30$; $n(P \cap C) = \frac{1}{2}$ de $40 = 20$

$n(C \cap B) = \frac{5}{6}$ de $60 = 50$; $n(P \cap B \cap C) = \frac{30}{2} = 15$

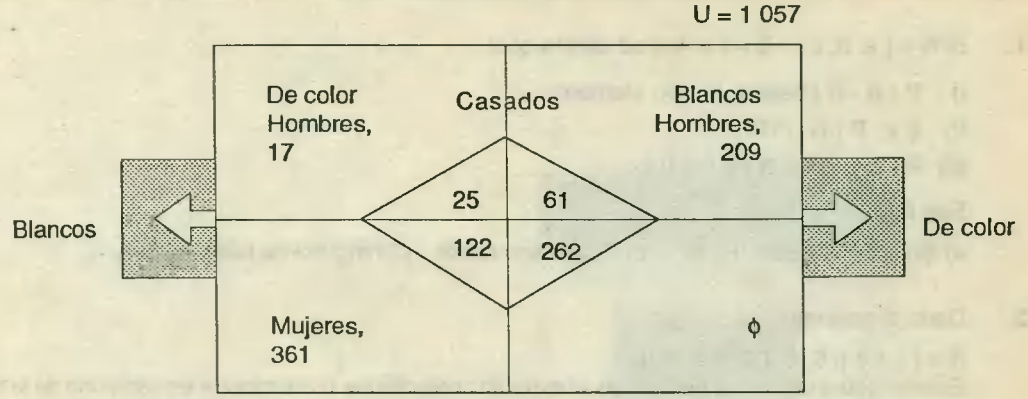
Luego: $n[(P \cup C) \cap B] = 30 + 50 - 15 = 65$

Rpta. 65

17. Ciertos datos obtenidos del estudio de un grupo de 1057 empleados en una fábrica textil, atendiendo a su raza, sexo, estado civil son como sigue:

525 individuos de color; 312 hombres; 470 casados; 42 hombres de color; 147 individuos casados de color; 86 hombres casados; 25 hombres de color casados. ¿Cuántos son sólo hombres casados y cuántas son mujeres de color solteras?

Solución



Rpta. Sólo hombres casados: 86
mujeres de color solteras: 361.

18. Si: $A = \{ x \in \mathbb{Z} / -12 < x + 6 < 20 \}$ y:
$B = \{ x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 < 400 \}$. ¿Cuántos elementos tiene A x B ?

Solución

A: $-12 < x + 6 < 20 \Rightarrow -18 < x < 14$ ⟶ $x = -17, -16, -15, ...0, 1, 2, ..., 13$

31 valores.

$\therefore n(A) = 31$

B: $10 < x^2 < 400 + 3a/b < x < +20$ ⟶ $x = 4, ..., 19$

16 valores.

$-20 < x < -3a/b$ ⟶ $x = -19, -18, -17, ..., -4$

16 valores.

$\therefore n(B) = 32$

Rpta. Entonces $n(A \times B) = n(A) \times (B) = 31 \times 32 = 992$.

1. Si A = { a, b, c }, B = { a, b }; se afirma que:

I) P (A - B) tienen un sólo elemento.

II) $\phi \in P(A \cap B)$

III) $P(A) \cap P(B) = P(B)$

Son falsas:

a) Sólo I b) Sólo II y III c) Todos son falsos d) ninguna es falsa e) N.A.

2. Dado el conjunto:

A = { { 4,3 }, 5, 8, { 8, { a, b }}}.

Escribir sobre las líneas punteadas el símbolo correcto que corresponde en cada una de las siguientes proporciones para ser verdadera:

1. "5 ..∈... A"
2. "6 ..∉... A"
3. "{ 4,3 } ..∈... A"
4. "{ 8, { a,b } ..∈... A"
5. "8 ..∈... { 8, { a,b } }"
6. "{{ 4,3 }} ..⊂... A"
7. "{ { 4,3 } ..∈... P (A)"
8. "{ { 4,3 }, 5 } ..⊂... A"
9. "{ { 4,3 }, 5 } ..∈... P (A)"
10. "{ { 4,3 }, 6 } ..∉... P (A)"

3. Sea el conjunto: A = { a, 1, { 2 } }

¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

I) $\{a, \{1\}\} \in P(A)$

II) $P(A) - A = \{\{1, \{2\}\}\}$

III) $\{\{1\}, \{\{2\}\}\} \subset P(A)$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) Sólo I y III e) Sólo III y II.

4. Dados los conjuntos:

$A = \{0, \{\phi\}\}$ $B = \{0, \phi, \{\phi\}, \{0\}\}$ $C = P(A \cap B)$ $D = P(B - A)$

Entonces, el conjunto (C ∩ D) es igual a:

a) $\{\phi\}$ b) $\{\{0, \{\phi\}\}, \phi\}$ c) $\{\{\phi\}, \{\{0\}\}\}$ d) $\{\{\phi, \{0\}\}\}$ e) N.A

5. Dado el conjunto: A = { 0, 1, 2, ϕ, { 0 }, { 1,2 }, 3 }

Determine la verdad o falsedad de:

I) $0 \in A$
II) $\phi \subset A$
III) $\phi \in A$
IV) $\{\phi\} \subset A$
V) $\{\phi\} \in A$
VI) $\{1,2,3\} \in A$
VII) $\{1,2,3\} \subset A$
VIII) $\{0,2\} \subset A$

El número de verdaderas es:

a) 7 b) 4 c) 5 d) 6 e) 2.

6. Si: $A = \{0, 5\}$ y $P(A)$ es el conjunto potencia de A. Decir cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

$\phi \in P(A)$	A)	FFVFV
$\{0\} \subset P(A)$	B)	VFVFV
$\phi \subset P(A)$	C)	VFFVF
$A \subset P(A)$	D)	FFFVV
$\{\phi\} \subset P(A)$	E)	VVVFF

7. Indicar cuáles son las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I) Si $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$ entonces: $A \cap B = \phi$

II) Si: $A - B = \phi$ entonces $A \subset B$

III) Si: $A = \{3, 5\}$ entonces $3 \subset A$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) Sólo I y II e) Todas

8. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I) Si: $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$

II) Si: $F = \{1,2\}$ entonces $2 \subset F$

III) Si: $P = \{4,7\}$ entonces $\{4\} \in P$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo I y II d) Sólo III e) Todas.

9. Si A, B y C son conjuntos tales que $A \subset B \subset C$, simplificar:

$[(A \cap C) \cup (B - C)] \cup [(A \cup B \cup C) \cap (B - A)]$

a) A b) B c) C d) ϕ e) U

10. Se tienen las siguientes afirmaciones:

I) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

II) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$

III) $A \subset B = B \subset A$

IV) $(B - A) \cup A = A \cup B$

Son falsas:

a) I y II b) II y IV c) III d) II e) I, III y IV.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es equivalente a $(A \cup B) - (A \cap B)$?

a) $(A \cap B)' - (A \cup B)$ b) $(A \cup B)' \cup (A \cap B)$

c) $(A - B) \cup (B - A)$ d) $(B \cup A) - (A - B)$

e) $(A \cap B) \cup (B - A)$.

12. En la siguiente figura; que representa la parte sombreada?

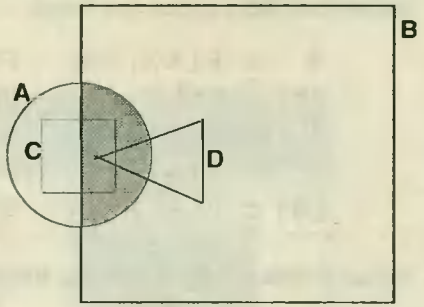
a) $(A \cup B) - C$

b) $(A \cup B) - (C \cup D)$

c) $(A \cap B) - (C \cap D)$

d) $(A \cap B) - (C \cup D)$

e) $(A \cup B) - D$.



13. Que representa la figura sombreada:

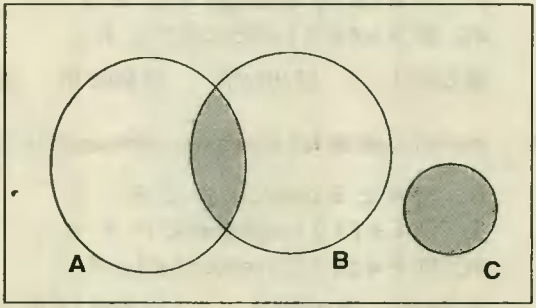
a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(A \cup \overline{C}) \cap (B \cup \overline{C})$

c) $\overline{(A - B)} \cap C$

d) $(A - \overline{B}) \cup C$

e) $(C - A) \cup B$



14. Dados:

I) $\{y, z\} \subset \{M \cup N \cup Q\} - (M \cap N)$

II) $x \in \overline{\overline{M} \cup \overline{N} \cup \overline{Q}}$

III) $\{Z\} \subset N - \overline{M \cup Q}$

Son falsas:

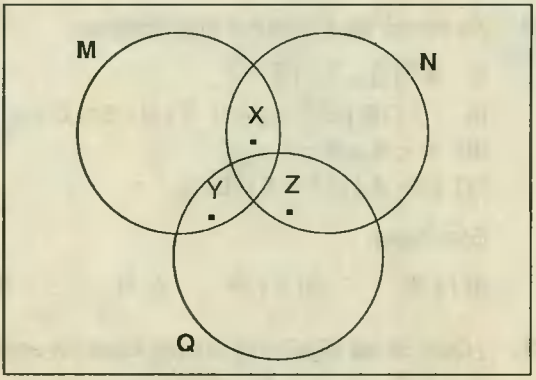
a) I y II

b) Por lo menos I

c) I y III

d) Por lo menos II

e) III.

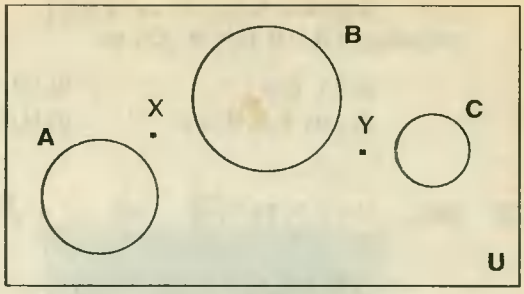


15. Si se dan:

I) $x \in \overline{A} - \overline{B}$

II) $y \in \overline{A - B - C}$

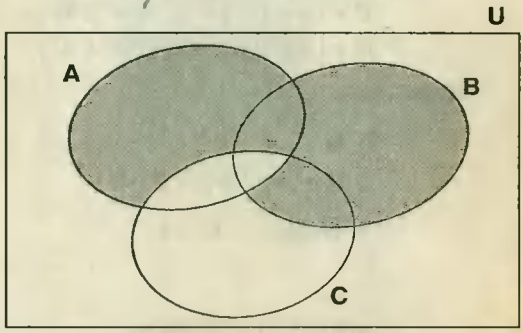
III) $\{x, y\} \subset \overline{A \cup B} \cup \overline{C}$



Se cumplen:

a) Sólo III b) I c) Sólo II
d) I y III e) II y III

16. La región sombreada está representada por:



A) $(A - C) \cup (B - C)$
B) $(C - B)$
C) $(A \cup B) - C$
D) $(A - C) \cup (B - A)$
E) $[(A \cap B) \cup B] - C$.

17. Sean los conjuntos: $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A = \{-1, 0, 1\}$ $M = \{x \in U / x \notin A \rightarrow x \in B\}$
$B = \{2, 3, 4\}$ $N = \{x \in U / x \in A \leftrightarrow x \notin B\}$

entonces $M \cap N$ es:

a) ϕ b) A c) B d) U e) N.A.

18. Sea: $U = \{\phi, 2, 2/3, 5\}$ y

$A = \{x \in U / x$ es par $\vee$ x es primo$\}$
$B = \{x \in U / x \neq \phi \wedge x$ no es entero $\}$
$C = \{x \in U / x$ es un número $\vee\ x = \phi\}$

Hallar por extensión: $(A \cup B) - (B \cap C)$

a) $\{1\}$ b) $\{\phi\}$ c) $\{2, 5, \phi\}$ d) $\{2/5\}$ e) N.A.

19. Sean los conjuntos: $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A = \{x \in U /\ x$ es par $\wedge\ x \in Q\}$
$B = \{x \in U / x \neq 0 \vee x$ es primo $\}$

$C = \{ x \in A / x = 2 \leftrightarrow x < 3 \}$

entonces: $(A \cap B) \cup (B - C)$ es:

a) $\{1, 2, 4\}$ b) $\{0, 1, 2\}$ c) $\{1, 2, 3, 4\}$

d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e) N.A.

20. Sea: $U = \{-2i, 1 + \sqrt{-3}, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}, 3/5, -2, 1\}$

$A = \{ x \in U / x \in \mathbb{I} \vee x \in \mathbb{Q} \}$

$B = \{ x \in U / x \in \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N} \}$

$C = \{ x \in U / x \in \mathbb{C} \rightarrow x \in \mathbb{Q}' \}$

$D = \{ x \in U / x \in \mathbb{N} \leftrightarrow x \in \mathbb{R} \}$

Hallar por extensión:

i) $M = (A \cap B) - (B - D)$

ii) $N = (A \cup B) - (C - D)$

* **Nota:** $\mathbb{Q}' = \mathbb{I}$

a) $\{-2\}; \{1+\sqrt{3}, 3/5\}$ b) $\{-2\}; \phi$ c) ϕ ; ϕ

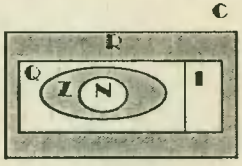
d) $\{-2i\}; \{-2\}$ e) N.A.

21. En el diagrama de conjuntos numéricos, sombrear la región correspondiente al conjunto:

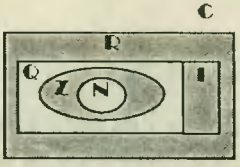
$A = \{ x \in \mathbb{C} / x \in (\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}) \leftrightarrow x \notin (\mathbb{R} \wedge \mathbb{Z}) \}$

Entonces, se obtiene:

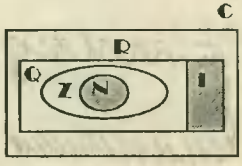
a)



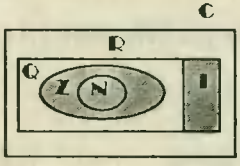
b)



c)



d)



e) Ninguna anterior

22. En la tabla de los números primos absolutos (criba de Erotóstenes), se tienen los conjuntos:

A = { x/ x está contenido desde 11 hasta 58 }
B = { x/ x tiene sus 2 cifras consecutivas }
C = { x/ x tiene una sola cifra }

Hallar: $n[(A \Delta B) \cup C]$

a) 18 b) 17 c) 15 d) 14 e) 16

23. Sean:

$A = \{ x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3 \}$
$B = \{ x \in A / -1 < x \leq 1 \}$
$C = \{ x \in A / -1 < x < 1 \}$

Hallar: $P[(A - B) \cap C]$

a) $\{\phi\}$ b) 0 c) $\{\{o\}, \phi\}$ d) N.A. e) { 1 }

24. Dados los conjuntos:

$\mathbb{U} = \{ -1, 1, 3, 7, 8, 9 \}$
$A = \{ x \in \mathbb{U} / x \geq 7 \Rightarrow x = 7 \}$
$B = \{ x \in \mathbb{U} / x > 1 \wedge x \leq 3 \}$

Determinar: A - B

a) { 1, 1 } b) { 1, 3, 7 } c) { -1, 1, 3 } d) { -1, 1, 7 }
e) { -1, 1, 3, 7 }

25. Dado el conjunto: $\mathbb{U} = \{ -5, 0, 3, 1/5, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \pi, \sqrt{-3}, 1 + i, 1 \}$

Hallar por extensión:

$A = \{ x \in \mathbb{U} / x \in \mathbb{N} \cup x \in \mathbb{R} \}$
$B = \{ x \in \mathbb{U} / x \notin \mathbb{Z} \cap x \in \mathbb{I} \}$
$F = \{ x \in \mathbb{U} / x \in \mathbb{Q} \cup x \notin \mathbb{N} \}$ y dar como respuesta $n[A \cap E]$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) N.A.

26. Dado el conjunto: $\mathbb{U} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{\sqrt{5}}, 3.1416, 2i, 3p, 0.\widehat{3} \right\}$

Determinar el diagrama de Venn de c/u de los conjuntos:

$A = \{ x \in \mathbb{U} / x \notin \mathbb{I} \cup x \in \mathbb{Q} \}$
$B = \{ x \in \mathbb{U} / x \notin \mathbb{Z} \cap x \notin \mathbb{R} \}$.

Hallar $n(A - B)$

a) 3 b) 4 c) 7 d) 5 e) N.A.

27. Dado el conjunto: $U = \left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 3.1416,\ 2i,\ 3\pi,\ 0.\hat{3}\right\}$

Halla la unión de los conjuntos A, B y C, sabiendo que:

$A = \{x \in \mathbb{U} / x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x \in \mathbb{U} / x \notin \mathbb{C}\}$
$C = \{x \in \mathbb{U} / x \in \mathbb{I}\}$

a) U b) ϕ c) $\left\{3,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 3\pi\right\}$ d) $\{-1,\ 3,\ 3\pi\}$ e) N.A.

28. En una reunión de 500 personas las 3/4 partes de las mujeres presentes usan sombrero y también lo hacen la mitad de los hombres presentes. Por otro lado la mitad de las mujeres y la totalidad de los hombres usan pantalones. Si 260 personas usan sombrero y 20 mujeres usan pantalones y sombrero. ¿Cuántas mujeres no usan ni pantalón ni sombrero?

a) 20 b) 40 c) 25 d) 10 e) 15

29. En un colegio 100 alumnos han rendido 3 exámenes: de ellos 30 aprobaron el primero, 39 el segundo y 48 el tercero; 15 no aprobaron ninguno, 15 aprobaron los 2 primeros, 11 aprobaron el segundo y el tercero y 12 aprobaron el primero y el tercero.
¿Cuántos aprobaron los 3 cursos?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

30. Un grupo de 63 niños dieron 3 exámenes para ser admitidos en un colegio y se sabe que: 25 aprobaron el primer exámen, 23 el segundo y 31 el tercero; 10 aprobaron el primero y el segundo; 5 el primero y el tercero; 8 el segundo y el tercero y 4 no aprobaron ningún exámen. Cuántos niños fueron admitidos al C.E. si sólo necesitan aprobar 2 exámenes.

a) 18 b) 19 c) 16 d) 15 e) 17

31. De un salón de clases de la academia Kartess, se encontró que: 40 alumnos tenían un libro de aritmética, 30 tenían un libro de algebra y 30 tenían un libro de geometría.
Ocho tenían un libro de aritmética y un libro de algebra pero no de geometría; seis tenían un libro de algebra y un libro de geometría pero no de aritmética; doce tenían un libro de aritmética y uno de geometría pero no de algebra. Si cinco tenían los tres libros y seis no tenían ningún libro. Averiguar cuántos alumnos tenía el salón?

a) 70 b) 65 c) 82 d) 75 e) 60

32. En una investigación efectuada a 370 personas, se determinó que:

20 personas leen solamente la revista A
10 personas leen solamente las revistas A y B
40 personas leen solamente las revistas B y C

El número de personas que leen las revistas A, B y C, es: el doble de los que leen solamente la revista B, el cuádruple de los que leen solamente la revista C y es 8 veces mayor de las que leen solamente las revistas A y C. El número de personas que solamente leen la revista C, es:

a) 290 b) 60 c) 260 d) 40 e) N.A.

33. En un colegio el 60% aprobó aritmética, el 32% aprobó algebra y los que aprobaron aritmética y algebra representan el 60% de los que no aprobaron ninguno de los dos cursos. Si 42 aprobaron aritmética y algebra. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio?

a) 380 b) 360 c) 350 d) 300 e) 280

34. En un grupo de 44 secretarias se determinó que 7 eran peruanas, simpáticas, altas, flaquitas y morenas; 24 son peruanas simpáticas, 21 son morenas, 23 son altas flaquitas, 10 son peruanas morenas simpáticas, 15 son peruanas flaquitas altas y simpáticas y 11 son morenas altas y flaquitas. ¿Cuántas de las secretarias no tienen ninguna de las 5 características mencionadas?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

35. De un total de 120 alumnos se observa lo siguiente: 45 aprobaron física, 46 química, 38 aprobaron matemáticas, 7 aprobaron física y química, 8 aprobaron química y matemática, 10 aprobaron matemática y física y 12 no aprobaron ningún curso.
¿Cuántos aprueban al menos 2 cursos?

a) 17 b) 22 c) 13 d) 24 e) 15.

36. De un total de 99 personas, 5 hablan Inglés y Español , 7 español y alemán únicamente y 8 Inglés y Alemán únicamente. Si el número de personas que hablan alemán, español e Inglés es 1, 2 y 3 veces mayor que el número de personas que hablan los tres idiomas, respectivamente. ¿Cuántas personas hablan español?

a) 34 b) 51 c) 46 d) 63 e) 71

37. En una encuesta a 1 260 personas, se determina que el número de ellas que leen "El Comercio", "La República" y "Expreso" es un octavo del que leen "El Comercio" y "Expreso"; un sétimo del que leen "La República" y "Expreso"; y un tercio del número de ellas que no leen ninguno de los 3 diarios. Si además 40, 50, 45 leen sólo "El Comercio", sólo "La República" y sólo "Expreso" respectivamente.
¿Cuántos leen "La República" y "Expreso"?

a) 360 b) 315 c) 405 d) 380 e) 325

38. De entre 450 alumnos se sabe que el número de ellos que practica básquet, futbol y voley es la mitad del número de ellos que practican sólo básquet, o sólo básquet y futbol, o sólo futbol y voley; es la tercera parte de las que sólo practican básquet y voley, o los que no practican ninguno de los 3 deportes; es la cuarta parte de los que sólo practican futbol; y es igual al número de los que sólo practican voley. ¿Cuántos practican futbol?

a) 200 b) 175 c) 225 d) 100 e) 150

39. A un grupo de 100 personas se les hicieron 3 preguntas. Si se sabe que: 8 personas contestaron bien las tres preguntas; 9 contestaron bien sólo la 1ra. y la 2da.; 11 personas contestaron bien sólo la 1ra. y la 3ra.; 14 personas contestaron bien la 2da. y la 3ra. Además se sabe que: 55 personas contestaron bien la 1ra. pregunta, 32 la 2da. y 49 la 3ra.. ¿Cuántas personas no contestaron bien ninguna pregunta?

a) 6 b) 14 c) 9 d) 10 e) 3

40. En un avión Transcontinental viajan 9 muchachos, 5 niños latinoamericanos, 9 hombres, 7 muchachos extranjeros, 14 latinoamericanos, 6 latinoamericanos hombres, 7 mujeres extranjeras.

Determinar el número de personas que viajaban en el avión.

a) 33 b) 30 c) 36 d) 27 e) 28

Clave

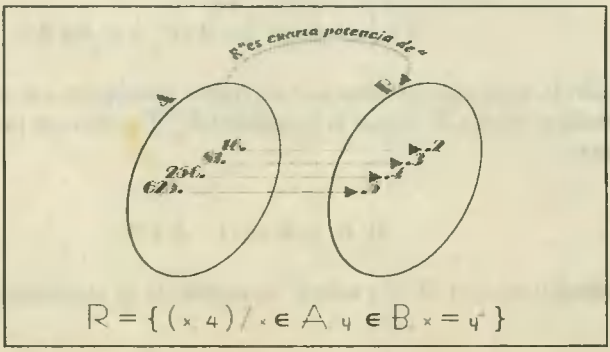
1. a	9. a	19. a	29. a	39. b
2. (1, 2, 3, 4, 5, 7) : c 6,8 : c 10 : e	10. d	20. a	30. e	40. d
	11. c	21. b	31. a	
	12. c	22. d	32. d	
3. c	13. d	23. a	33. c	
4. a	14. b	24. d	34. b	
5. d	15. a	25. d	35. a	
6. b	16. d	26. d	36. e	
7. a	17. b	27. c	37. b	
8. a	18. d	28. d	38. c	

Capítulo 3

RELACIONES
(y sus propiedades)

Flujo del contenido de este capítulo

- Idea de relación
- Dominio y Rango
- Relación interna
- Relación inversa
- Propiedades de las relaciones
- Problemas resueltos y propuestos



1. IDEA DE RELACION

Raramente los objetos y las ideas son concebidas o expresadas en forma aislada. Aparecen en el pensamiento y la palabra conjuntamente con otros objetos y otras ideas.
En nuestro lenguaje diario escuchamos proposiciones como:

"Lucho es hermano de Mario", "Ocho es menor que doce", "Mi terno es del mismo color que el tuyo", "La recta A es paralela a la recta B", etc.

Cada una de estas afirmaciones establece una relación entre dos individuos, y las expresiones:

> "es hermano de", "es menor que"; "es del mismo color que", "es divisible por", "es paralela a", son predicados que actúan como conectivos entre dos individuos. La expresión **relación** implica una asociación o correspondencia entre dos objetos de acuerdo con alguna propiedad poseída por ellos.

En Matemáticas el concepto de relación es sumamente poderoso y útil. Su poder radica en su sencillez y su utilidad se debe a su generalidad. El estudio formal de este concepto como objeto matemático es de origen reciente, a pesar de que las relaciones matemáticas han estado sometidas a una intensa investigación por largo tiempo. En particular el tratamiento de las relaciones como conjuntos de pares ordenados no han sido aún universal y ni siquiera ampliamente adoptado. No obstante, no se duda de que éste concepto sea básico y fundamental en la aritmética en particular y en la matemática en general. Si hay algo que se pueda llamar "Nueva Matemática" en un programa de estudios elementales, el concepto de relación ciertamente debe estar incluido.

1.1 Definición.-

Dada una **propiedad** (P_{xy}) se llama relación binaria de un conjunto A en un conjunto B, al conjunto de pares ordenados que satisfagan la **propiedad** (P_{xy}) y tales que el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

Toda relación (R) de A en B es un subconjunto de A x B. Si S es el conjunto solución de la relación, se cumple:

$$S \subset A \times B$$

Simbólicamente una relación se representa:

$$R = \{ (x,y) \in A \times B / P_{xy} \} \subset A \times B$$

Se lee: "relación R, conjunto formado por los pares ordenados (x, y) que pertenecen al producto cartesiano de A x B, según la propiedad P_{xy}. También se puede representar una relación R como:

$$R: A \Rightarrow B \Leftrightarrow R \subset A \times B$$

(Relación de A en B, sí y sólo si la relación R es subconjunto de A x B).

1.2 Recapitulando.-

* Toda relación, es un conjunto de pares ordenados
* Toda relación de A en B es un subconjunto de A x B.
* En toda relación interviene un enunciado abierto o propiedad P_{xy} que es verdadero o falso para todo par ordenado de A x B.

Ejemplo

Si:A = { 1,4 } y B = { 1,2 } , A x B = { (1,1), (1,2), (4,1), (4,2) }
el enunciado abierto: P_{xy} = "x es el cuadrado de y", sólo cumplen los pares(1,1), (4,2) y la relación R = { (1,1), (4,2) }.

* Establecida la relación de A en B, el conjunto A, recibe el nombre de conjunto partida y el conjunto B es el conjunto de llegada.

Consideremos los conjuntos:

A = { 4; 9; 12 } B = { 2; 3; 4 }

A x B = { (4,2), (4,3), (4,4), (9,2), (9,3), (9,4), (12,2), (12,3), (12,4) }

Consideremos la relación de A en B: R = "Es el cuadrado de"
el conjunto partida es A = { 4; 9; 12 }
el conjunto llegada es B = { 2; 3; 4 }

Para indicar que un elemento $4 \in A$ está relacionado con otro elemento $2 \in B$, se escribe:

4 R 2 y se lee 4 está relacionado con 2
Asi en nuestro ejemplo:
4 R 2
9 R 3

Para indicar que un elemento **a** no está relacionado con otro elemento **b**, se escribe: a $\not R$ b, así: 12 $\not R$ 4.

> Una relación R se puede representar gráficamente por diagramas sagitales (flechas) o por diagramas cartesianos.

Así por ejemplo:

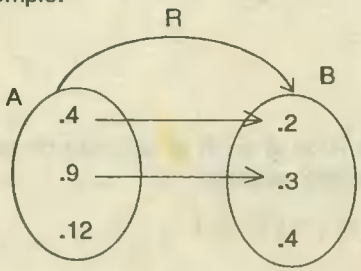


Diagrama Sagital

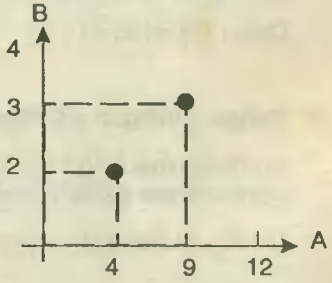


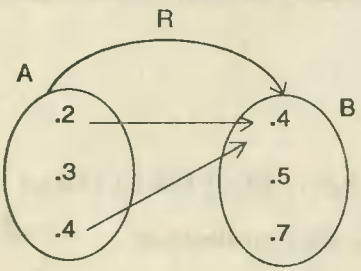
Diagrama Cartesiano

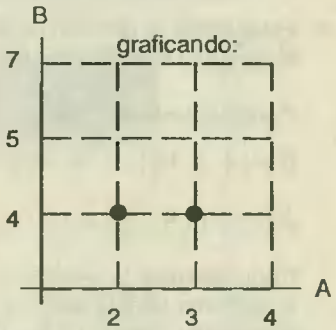
1.3 Dominio y rango (imagen) de una relación.-

Si R es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, puede ocurrir que no todos los elementos del conjunto A estén relacionados con los elementos de B e inversamente puede ocurrir que no todos los elementos de B hayan verificado la relación con los elementos de A

Sean: A en B = { 2, 3, 4 } y B = { 4, 5, 7 } y la relación (R = "es divisor de") definida d e A en B, podemos establecer:

Conjunto de partida es A = { 2; 3; 4 }
Conjunto de llegada es B = { 4; 5; 7 }





Entonces: S = { (2,4), (4,4) }

1.4 Dominio.-

Se llama dominio de una relación R de A en B, al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación, se denota Dom (R) y se simboliza:

R : A $\Rightarrow$ B, entonces Dom (R) = { x $\in$ A / $\exists$ y $\in$ B, (x,y) $\in$ R }

Es decir: x $\in$ Dom (R) $\Leftrightarrow$ $\exists$ y $\in$ B / (x,y) $\in$ R.

En el ejemplo anterior:

Dom (R) = { 2, 4 }

1.5 Rango o Imagen o Codominio.-

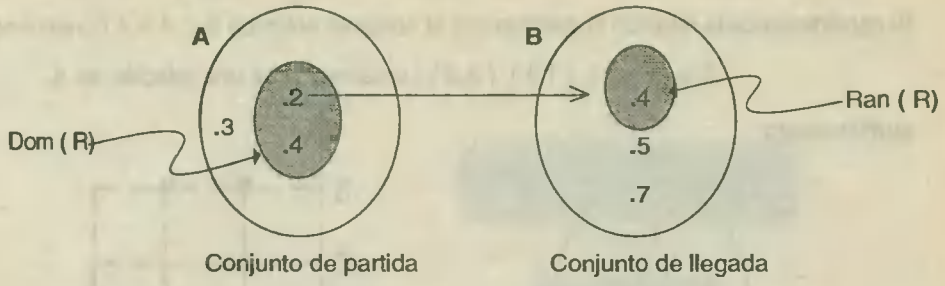
Se denomina rango de una relación R de A en B al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación.

Se denota Ran (R) = { y $\in$ B / $\exists$ x $\in$ A, (x, y) $\in$ R }

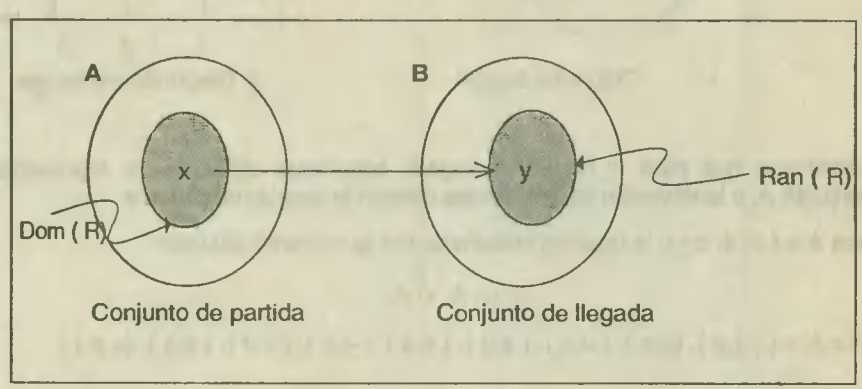
es decir:

y $\in$ Ran (R) $\Leftrightarrow$ $\exists$ x $\in$ A / (x, y) $\in$ R.

En un diagrama de Venn Euler, el dominio y rango de la relación R del ejemplo se representa:



En general:



1.6 Propiedades del dominio y rango de una relación.-

Sean R_1 y R_2 dos relaciones entre A y B, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(D_1) $\text{Dom}(R_1 \cup R_2) = \text{Dom}(R_1) \cup \text{Dom}(R_2)$
(D_2) $\text{Dom}(R_1 \cap R_2) \subset \text{Dom}(R_1) \cap \text{Dom}(R_2)$
(D_3) $\text{Dom}(R_1 - R_2) \supset \text{Dom}(R_1) - \text{Dom}(R_2)$
(R_1) $\text{Ran}(R_1 \cup R_2) = \text{Ran}(R_1) \cup \text{Ran}(R_2)$
(R_2) $\text{Ran}(R_1 \cap R_2) \subset \text{Ran}(R_1) \cap \text{Ran}(R_2)$
(R_3) $\text{Ran}(R_1 - R_2) \supset \text{Ran}(R_{1)} - \text{Ran}(R_2)$

1.7 Relación interna.-

Cuando una relación está definida entre los elementos de un mismo conjunto $A \neq \phi$ se llama relación interna.

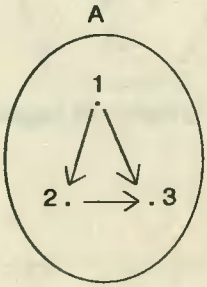
Sea A = { 1; 2; 3 }. Entonces:

$$A \times A = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$$

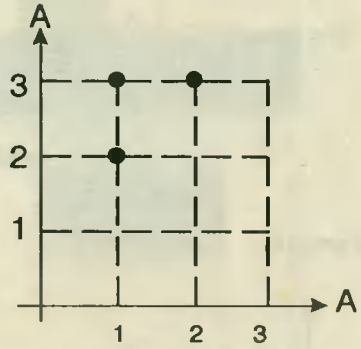
Si consideramos la relación R definida por el conjunto solución $S \subset A \times A$ constituida por:

$$S = \{ (1,2), (1,3), (2,3) \}$$ entonces R es una relación en A.

Gráficamente:



i. Diagrama sagital



ii. Diagrama cartesiano

Obsérvese que para el diagrama sagital, solamente utilizamos la representación del conjunto A, y la dirección de las flechas indican la pareja relacionada.

Sea A = { 2; 4; 6 } y la relación R definida por el conjunto solución:

$$S \subset A \times A.$$

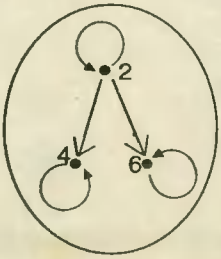
$$A \times A = \{ (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6) \}$$

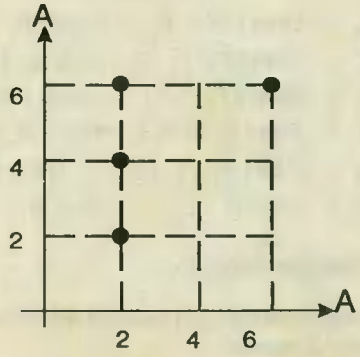
Consideramos:

$$S = \{ (2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (6,6) \}$$

Dom (R) = { 2, 4, 6 } Ran (R) = { 2, 4, 6 }.

Representación gráfica:





Nota

Para representar los pares componentes iguales en los diagramas sagitales, utilizamos un bucle, flecha cerrada o lazo

Así:

(2,2) como

(4,4) como

(6,6) como

Comentario

En general el dominio y el rango de una relación son conjuntos diferentes. Si el dominio y el rango de una relación son el mismo conjunto, se dice que la relación está definida en el conjunto por lo tanto esta relación será un subconjunto de A x A.

Considérese el conjunto A = { 1; 2; 3; 4 }. Entonces el conjunto A x A está dado por la siguiente **tabla:**

A x A

4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
	1	2	3	4

Del ejemplo A x A considérese el subconjunto formado por:

{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) }

4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
	1	2	3	4

Suponga Ud. que le dicen que estos pares fueron seleccionados porque la primera componente tiene una relación especial con la segunda, y que solamente estos pares ordenados del conjunto tienen esta relación. Seguramente usted concluirá que la relación descrita es la relación de igualdad.

1.8 Relación inversa.-

El inverso de una relación R es el conjunto de todos los pares ordenados (y,x) para el cual (x,y) $\in$ R.

Usamos la notación R^{-1} para indicar la relación inversa:

Ejemplo

Si R es la relación: "menor" (<), entonces R^{-1} es la relación inversa: "mayor" (>).

$$5 < 18 \qquad\qquad 18 > 5$$
$$\therefore (5, 18) \in R \qquad \therefore (18, 5) \in R^{-1}$$

Ejemplo

Si R es la relación "es un factor de" en el conjunto de los números naturales, entonces R^{-1} es la relación "es un múltiplo de":

16 es factor de 80, $\therefore$ (16, 80) $\in$ R
80 es factor de 16, $\therefore$ (80, 16) $\in$ R^{-1}

2. PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Estudiaremos ahora, algunas propiedades que pueden presentar las relaciones definidas en un conjunto A. Consideremos A = { a, b, c }

$$R \subset A \times A$$

2.1 Relación reflexiva.-

Ha de comprobarse si todo elemento a $\in$ A está relacionado consigo mismo. (Por ejemplo la relación definida por " padre de ", no es, obviamente, reflexiva - nadie es padre de si mismo -; pero la definida por "es múltiplo de" si es porque todo número entero es multiplo de sí mismo.

Definición

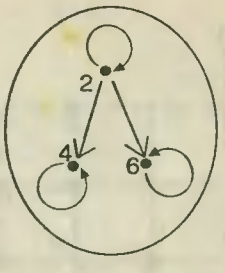
> Una relación R es un conjunto A tal que para cualquier elemento a $\in$ A se cumpla que está relacionado consigo mismo se llama relación reflexiva.
>
> Esto es: R es reflexiva si $\forall$ a $\in$ A se cumple a R a o (a,a) $\in$ S

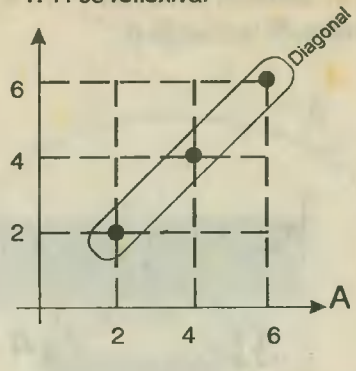
Consideremos el conjunto:

A = { 2; 4; 6 } y la relación R en A definida por el conjunto solución S $\subset$ A x A

S = { (2,2), (4,2), (4,4), (6,4), (6,6) }

Como (2,2) $\in$ S; (4,4) $\in$ S; (6,6) $\in$ S $\quad \therefore$ R es reflexiva.





2.2 Cómo reconocer una relación reflexiva.-

Si de una relación R en A conocemos el diagrama sagital, el diagrama cartesiano o el conjunto solución S, podemos reconocer si R es reflexiva, de la siguiente manera:

i. Si todos los elementos de A tienen bucle en el diagrama sagital.

En el ejemplo: .2 .4 .6

ii. Si aparecen todos los elementos de la diagonal en el diagrama cartesiano.

iii. Si aparecen todos los elementos de la forma (a,a) en el conjunto solución S.

2.3 Relación simétrica.-

Dada una relación R en un conjunto A, se dice que R es una relación simétrica en A si:

(a,b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R, si llamamos S al conjunto solución de la relación R, entonces:
(a,b) $\in$ S $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ S

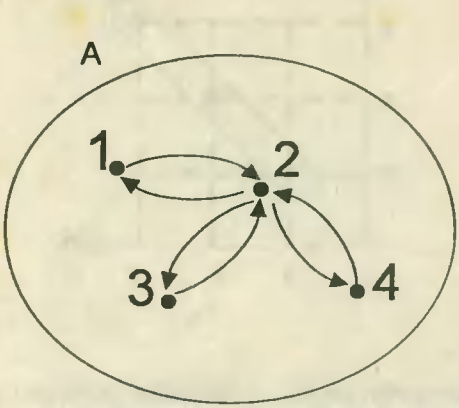
Definición

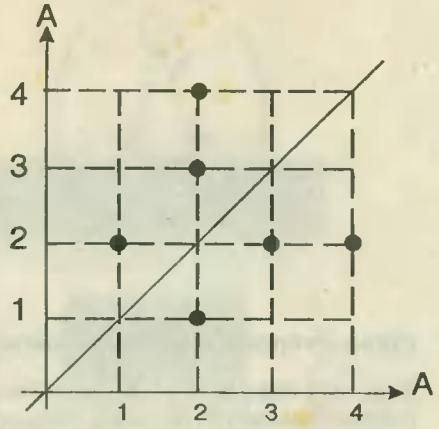
> Una relación R en un conjunto A, tal que si a R b entonces b R a, cualquiera que sea el par (a,b) $\in$ S, decimos que R es una relación simétrica, esto es:
>
> R es simétrica si (a,b) $\in$ S $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ S

Ejemplo

En el conjunto: A = { 1, 2, 3, 4 } y las relaciones en A:
R_1 = { (1,2), (2,3), (4,2), (3,2), (2,1), (2,4) }
R_2 = { (1,1), (3,3), (4,1), (2,3), (1,4) }

R_1 es simétrica en A; pero R_2 no lo es pues falta al menos el par (3,2) para ello .
Gráfico de la relación R_1:





2.4 Cómo reconocer la relación simétrica.-

i. Si en el diagrama sagital hay una flecha de *a* hacia *b*, debe haber otra de *b* hacia *a*.

ii. En el diagrama cartesiano por cada punto que esté a un lado de la diagonal, debe existir un punto al otro lado de la diagonal y equidistante de aquella.

iii. Si aparece el par (a,b) $\in$ S, también debe aparecer (b,a) $\in$ S.

2.5 Relación transitiva.-

Definición:

> "Una relación R definida en un conjunto A, se llama **transitiva**, si de la relación de **a** con **b** y de **b** con **c**, se deduce la relación de **a** con **c**".

Ejemplo

Si : A = { 3; 6; 9; 12 } y R una relación en A definida por el conjunto solución S $\subset$ A x A, tal que:

$$S = \{(3,6) ; (3, 9); (3, 12); (6,9); (6,12); (9,12)\}$$

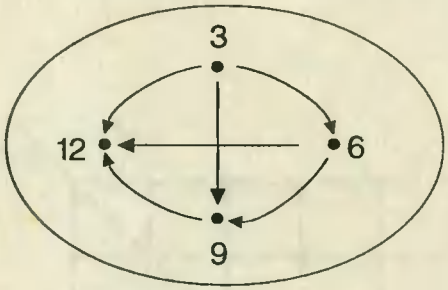
Notamos que:

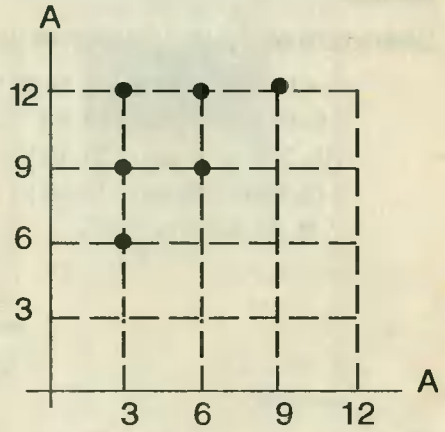
$(3,6) \in S$ y $(6,9) \in S$ $\Rightarrow (3,9) \in S$

$(6,9) \in S$ y $(9,12) \in S$ $\Rightarrow (6,12) \in S$

$(3,9) \in S$ y $(9,12) \in S$ $\Rightarrow (3,12) \in S$

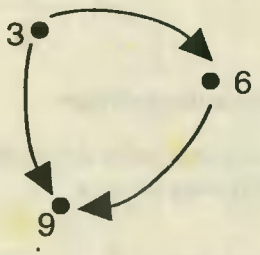
$\therefore$ R es una relación reflexiva.





2.6 Cómo reconocer una relación transitiva.-

i. Si en el diagrama sagital hay una flecha de un elemento **a** a un elemento **b** y del elemento **b** hay una flecha al elemento **c**, entonces, debe haber una flecha del elemento **a al c**. En el ejemplo anterior:



ii. Si en S aparece el par (a,b) y el par (b,c), debe aparecer el par (a, c).

2.7 Relación Antisimétrica.-

Consideremos el conjunto A formado por padres e hijos y R la relación "tiene mayor edad que".

Si p y q son padre e hijo respectivamente, es verdad que: "p tiene mayor edad que q", entonces es falso que:

"q tiene mayor edad que p". Es decir, si $(p,q) \in S \Rightarrow (q, p) \notin S$

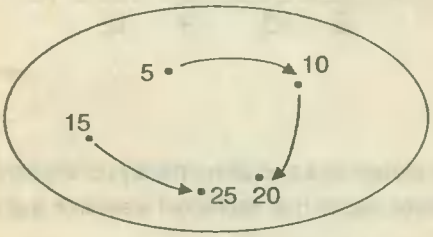
Definición

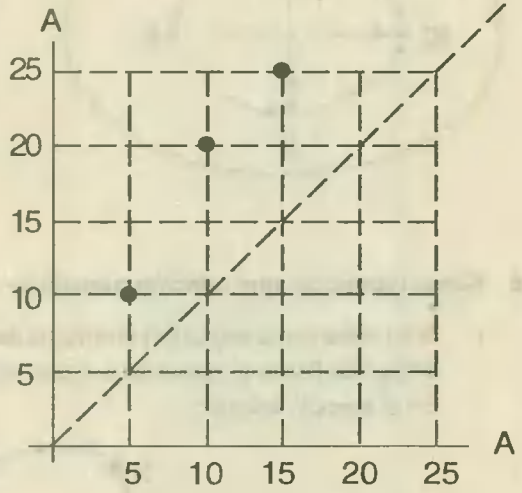
> "Una relación R en un conjunto A es antisimétrica si para cualquier par de elementos **a** y **b** de A, tal que si $a \neq b$ entonces $a \not R b$ ó $b \not R a$.

Ejemplo

Dado el conjunto A = { 5; 10; 15; 20; 25 } y la relación R en A definida por el conjunto soluciòn:

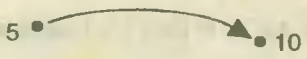
S = { (5,10), (10,20), (15,25) }, obsérvese que:
(5, 10) $\in$ S pero (10, 5) $\notin$ S
(10, 20) $\in$ S pero (20, 10) $\notin$ S
(15, 25) $\in$ S pero (25, 15) $\notin$ S
$\therefore$ R es antisimétrica.





2.8 Cómo reconocer una relación antisimétrica.-

i. Si en el diagrama sagital hay una flecha del elemento **a** a otro elemento **b**, no debe haber flecha del elemento **b** al elemento **a**



ii. Por cada punto que esté a un lado de la diagonal, en el diagrama cartesiano, no debe existir otro punto equidistante al otro lado de la diagonal.

iii. Si aparece un par (a, b) en S, no debe aparecer el par (b, a) en S, siempre que $a \neq b$.

2.9 Relación de equivalencia.-

En el conjunto de soldados de un batallón, consideramos la relación:

"tener la misma edad que"

En un conjunto cualquiera, consideremos la relación:

"ser idéntico a"

En el conjunto de camisas de colores, consideremos la relación:

"ser el mismo color que"

Podemos comprobar fácilmente que las relaciones mencionadas son reflexivas, simétricas y transitivas.Por lo tanto las relaciones:

"tener la misma edad que"
"ser idéntico a"
"ser del mismo color que" son relaciones de equivalencia.

Definición

Una relación R en un conjunto A se dice que es una relación de equivalencia en A si R es: reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación de equivalencia se indica, con la notación $\equiv$ y verifica:

i. La reflexividad $\forall a, \in A, \ a \equiv a$

ii. La simetría $[a \equiv b] \Rightarrow [b \equiv a]$

iii. La transitividad $\left\{ \begin{matrix} a \equiv b \\ b \equiv c \end{matrix} \right\} \Rightarrow [a \equiv c]$

Ejemplo

Sea A = { 1, 2, 3, 4 } y la relación en A:
R = { (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4) } es una relación de equivalencia en A, pues es:

i. reflexiva: $\forall a \in A$, (a,a) $\in$ R : (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

ii. simetría : (a,b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R : (1,2), (2,1)

iii. transitiva : (a,b) $\in$ R $\wedge$ (b,c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a,c) $\in$ R: (2,1) $\in$ R $\wedge$ (1,2) $\in$ R $\Rightarrow$ (2,2) $\in$ R

2.10 Relación de orden.-

Una relación es de orden, cuando es: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Consideremos:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ y la relación R en A definida por $a \leq b$

$R = \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3) \}$

R es reflexiva, porque cada elemento se relaciona consigo:

$(1,1), (2,2), (3,3)$.

R es antisimétrica, porque:

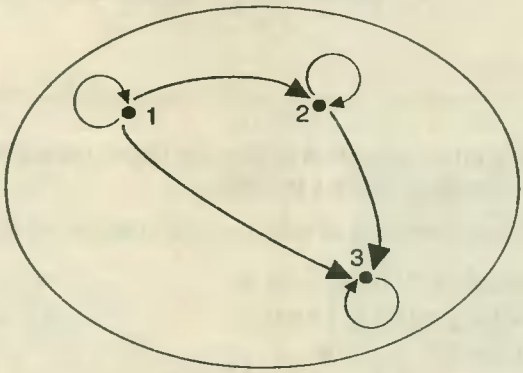
$(1,2) \in R$ pero $(2,1) \notin R$; $(1,3) \in R$

Pero:

$(3,1) \notin R$; $(2,3) \in R$ pero : $(3,2) \notin R$.

R es transitiva, porque:

$(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$,.....



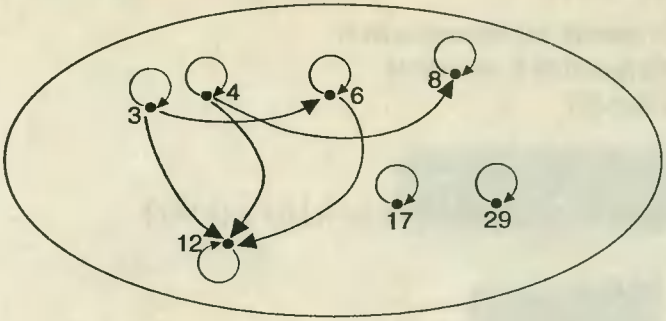
En el caso concreto de éste ejemplo, como todos los elementos de A, están relacionados entre sí, se dice que es una relación de **orden total**.

Ejemplo

A = { 3, 4, 5, 6, 8, 12, 17, 29 } y la relación R en A definida por a es divisor de b.

R = { (3,6), (3,12), (4,8), (4, 12), (6,12), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (12, 12), (17, 17), (29, 29) }

Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, luego es una relación de orden y puesto que no todos sus elementos están relacionados entre sí, es una relación de **orden parcial**.



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RELACIONES

Observaciones previas

- Para resolver problemas sobre relaciones, en primer lugar debemos recordar que una relación es un subconjunto de un producto cartesiano.
- Por lo tanto, los "elementos" del conjunto solución de una relación son pares ordenados.
- Por la naturaleza de los problemas sobre relaciones, debemos conocer a la perfección, la teoría de conjuntos numéricos; los diagramas de Venn y las operaciones entre conjuntos, toda vez que una relación genera un conjunto.
- Antes de que Ud, amigo lector, decida analizar los problemas resueltos y luego de tratar de resolver los propuestos, es necesario que domine, la teoría expuesta.

1. Se citan nueve estudiantes a rendir un exámen de matemática. Finalizado el examen, el profesor elabora la siguiente planilla de calificaciones:

alumno	calificación
a	10
b	6
c	6
d	12
e	14
f	4
g	ausente
h	4
i	10

Consideremos la relación R: "reprobó con calificación" , definida entre el conjunto A de alumnos: A = { a, b, c, d, e, f, g, h, i } y el conjunto de calificaciones C : C = { 0, 1, 2, 3, ..., 17, 18, 19, 20 }. Determinar:

i. El conjunto solución (S) de la relación R

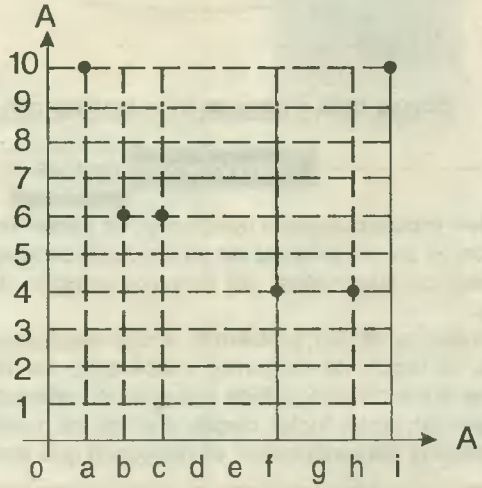
ii. El diagrama sagital de la relación R

iii. Dom (R) y Ran (R)

Solución

i. S = { (a,10), (b,6), (c,6), (f,4), (g,0), (h,4), (i,10) }

ii. Diagrama Sagital



iii. Dom (R) = { a, b, c, f, g, h, i }

Rpta. Ran (R) = { 10, 6, 4, 0 }

2. Dados los conjuntos: B = { 1, 3, 5 } y C = { 2, 4, 6 } se definen las relaciones:

$R_1 = \{ (x,y) \in B \times C / x + y = 7 \}$

$R_2 = \{ (x,y) \in B \times C / y = 6 \}$. Hallar la suma (S) de todos los elementos de Dom $(R_1 - R_2) \cup$ Ran $(R_1 - R_2)$

Solución

$R_1 = \{ (1,6), (3,4), (5,2) \}$ $R_2 = \{ (1,6), (3,6), (5,6) \}$

$R_1 - R_2 = \{ (3,4), (5,2) \} \Rightarrow$ Dom $(R_1 - R_2) = \{ 3, 5 \}$ y Ran $(R_1 - R_2) = \{ 2, 4 \}$

Rpta. Luego: S = 3 + 5 + 2 + 4 = 14.

3. Si $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ se define la relación:

$R = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (5,1), (5,4), (5,2), (4,3), (3,5) \}$
Si: $M = \{ x \in A / (x,2) \in R \}$, $N = \{ y \in A / (3, y) \in R \}$, $P = \{ x \in A / (x,5) \notin R \}$
Hallar: $(M \cup N) - P$

Solución

$M = \{ (2,2), (5,2) \}$ $N = \{ (3,3), (3,5) \}$ $P = \{ (1,5), (2,4), (4,5), (5,5) \}$
$M \cup N = \{ (2,2), (3,3), (3,5), (5,2) \}$
Rpta. $M \cup N - P = \{ (2,2), (3,3), (3,5), (5,2) \}$.

4. Hallar la intersección de las relaciones en $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}_1 = \{ (x,y) / x^2 + y^2 = 5 \}$, $\mathbb{R}_2 = \{ (x,y) / x + y = 3 \}$

Solución

$R_1 = \{ (1,2), (2,1), (-1,-2), (-2,-1), \ldots\}$
$R_2 = \{ (1,2), (2,1), (-1,4), (4,-1), \ldots\}$
Rpta. $R_1 \cap R_2 = \{ (1,2), (2,1) \}$.

5. Si: $S = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$, entonces la relación:

$R = \{ (x,y) / y$ es múltiplo de $x,\ x \neq y \} \subset S \times S$, hallar la suma de todos los elementos del Dom (R).

Solución

$R = \{ (3,6), (4,8), (3,9), (5,10) \}$ $Dom(R) = \{ 3, 4, 5 \}$
Rpta. Suma pedida: $3 + 4 + 5 = 12$.

6. Dado el universo: $U = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y las relaciones:

$R_1 = \{ (x,y) / x = y \}$, $R_2 = \{ (x,y) / y = 3 \}$, $R_3 = \{ (x,y) / x \leq y \}$
Hallar: $R_3 - (R_1 \cup R_2)$

Solución

$R_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$ $R_2 = \{ (1,3), (2,3), (3,3), (4,3) \}$
$R_3 = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \}$
Rpta. $R_3 - (R_1 \cup R_2) = \{ (1,2), (1,4), (2,4), (3,4) \}$.

7. Sea $A = Z$ (conjunto de números enteros). En A definamos la relación S por : $(x,y) \in S \Leftrightarrow x - y$ es divisible por 5. ¿ Cuáles son verdaderas?

i. $(x,y) \in S \Rightarrow (y,x) \in S$
ii. $(x, 4) \in S \Rightarrow x$ es múltiplo de 5.
iii. $(2, 17) \in S$
iv. $(7n - 8n) \in S \ \forall\ n \in \mathbb{Z}$

Solución

i. Si $x - y = \overset{\pm}{5} \Rightarrow y - x = \overset{\pm}{5}$ (verdadera) $\begin{cases} x = 18\ ,\ y = 3 \\ 18 - 3 = \overset{\pm}{5} \wedge 3 - 18 = -15 = \overset{\pm}{5} \end{cases}$

ii. Si $x - 4 = \overset{\pm}{5} \Rightarrow$ x debe terminar en 9 ó 4 $\therefore x \neq \overset{\pm}{5}$ (Falso)

iii. Si $2 - 17 = \overset{\pm}{5}$ (Verdadero)

iv. Si $7n - (-8n) = \overset{\pm}{5} \rightarrow 15n = \overset{\pm}{5}\ \forall n \in \mathbb{Z}$ (verdadero).

Rpta. V F V V

8. Se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$:

$R_1 = \{ (x,y) / (x \cdot y)^2$ es par $\}$, $R_2 = \{ (x,y) / x + y^2 = y + x^2 \}$,
$R_3 = \{ (x,y) / x \leq y \}$

De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas?:

i. R_1 y R_2 son reflexivas.
ii. R_2 es simétrica y R_3 no es simétrica
iii. R_2 es transitiva.
iv. R_3 es transitiva.

Solución

De $R_1 = \{ (x,y) / (xy)^2$ es par $\}$ si consideramos, por ejemplo, $x = 3 \in \mathbb{Z}$
entonces $(x,x) \notin R_1$, porque $(x \cdot x)^2 = x^4 = 3^4 = 81$ es impar. Por lo tanto R_1 no es reflexiva.
De $R_2 = \{ (x,y) / x + y^2 = x^2 + y \}$ si $(x, x) \in R_2\ \forall x \in \mathbb{Z}$, porque:
$x + x^2 = x^2 + x$, pese a ésto la afirmación:

i) Es falsa.

ii) $R_2 = \{ (x,y) / x + y^2 = y + x^2 \}$
sea $(x,y) \in R_2 \Rightarrow x + y^2 = y + x^2 \Rightarrow y + x^2 = x + y^2 \Rightarrow (y,x) \in R_2$ **es simétrica.**

$R_3 = \{ (x,y) / x \leq y \}$ N **no es simétrica**
si consideramos: $(3,5) \in R_3$ pero $(5,3) \notin R_2$ ya que $x \leq y$.

iii) Es transitiva, ésto es: $(x,y) \in R_2 \wedge (y,z) \in R_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} x + y^2 = y + x^2 \\ y + z^2 = y^2 + z \\ \hline x + z^2 = z + x^2 \Rightarrow (x, z) \in R_2 \end{array}$$

iv) R_3 es transitiva, por ejemplo si: $(2,4) \in R_3 \wedge (4,6) \in R_3 \Rightarrow (2,6) \in R_3$
Rpta. $(2,6) \in R_3$

9. Dado el conjunto $A = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$ y una relación R en A definida por:
$(x, y) \in R \Leftrightarrow$ x es divisor de y.

Hallar $n(R)$
$n(R)$ = número de elementos de la relación R.

Solución

$(x, y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x$ es divisor de y. Se tiene:

$(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (4,8) \in \mathbb{R}$

Rpta. $\mathbb{R} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,6), (2,8), (2,10), (4,8)\}$.

10. Se define en $\mathbb{Z}$, la relación $\mathbb{R}$ por: $a \mathbb{R} b \Leftrightarrow a - b$ es múltiplo de 3. Demostrar que:

i) $\forall a \in \mathbb{Z}, (a,a) \in \mathbb{R}$

ii) $(a,b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathbb{R}$

iii) $(a,b) \in \mathbb{R} \wedge (b,c) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathbb{R}$

Solución

Se cumple que: $a - b = \overset{+}{3}$ (múltiplo de tres) $\Leftrightarrow a - b = 3k, k \in \mathbb{Z}$

i) $\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 = 3 \times 0$, con $0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a,a) \in \mathbb{R}$.

ii) $(a,b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a - b) = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (b - a) = 3(-k), -k \in \mathbb{Z}$
porque $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}$.

iii) $(a, b) \in \mathbb{R} \wedge (b, c) \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b = 3k_1$, algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b - c = 3k_2$, algún $k_2 \in \mathbb{Z}$

sumando $\Rightarrow a - c = 3(k_1 + k_2)$

Rpta. $\therefore (a, c) \in \mathbb{R}$ ya que: $(K_1 + K_2) \in \mathbb{Z}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

(SOBRE RELACIONES)

1. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Si $R = \{(x, y) \in A \times A / x^2 + y^2 = 5\}$ Hallar Dom R - Ran R

a) f b) {0} c) {-2, -1, 1, 2} d) A e) N.A.

2. Sea R la relación definida en los números naturales por:

$R = \{(x,y) \in N^2 / x + 3y = 12\}$

Determinar:

Dom (R) - Ran (R)

a) {0, 3} b) {1, 2, 4} c) {6, 9, 12} d) {3, 6, 9} e) N.A.

3. Sea R la relación en los números enteros positivos $Z^+ = \{1, 2, ...\}$, definida por:

$R = \{(x, y) \in Z^+ \times Z^+, 2x + y = 10\}$

Hallar los elementos de:

$$\text{Dom}(R) \cap \text{Ran}(R)$$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 10 e) 20

4. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Si R_1, R_2, R_3 subconjuntos de A x A definimos:

$R_1 = \{(x, y) / x + y = 5\}$

$R_2 = \{(x, y) / x = y\}$

$R_3 = \{(x, y) / x^2 = y\}$

Entonces:

$(R_1 \cup R_2) \cap R_3$ es:

a) $\{(1,1), (0,0)\}$ b) $\{(1,1), (2,4)\}$ c) $\{(2,4), (0,0)\}$ d) ϕ e) N.A.

5. Si:

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x = 6\}$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y + x = 8\}$

Calcular el producto de los componentes de los elementos de $R_1 \cap R_2$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

6. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 8 - 2x\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = 2x^2 + 3x\}$

El número de posibles relaciones de A en B es:

a) 6 b) 8 c) 32 d) 64 e) 128

7. Sea:

$M = \{1, 2, 3, 4\}$

Se define en M, la relación: $R = \{(x,y) / 2x - y = 3\}$

Si **d** representa la suma de todos los elementos del Dom (R) y **r** a la suma de todos los elementos del rango entonces: **d + r** =

a) 4 b) 5 c) 8 d) 9 e) 11

8. Sean A y B conjuntos no vacios de 2 y 3 elementos respectivamente. Hallar el número de relaciones binarias de A en B.

a) 6 b) 32 c) 36 d) 64 e) 128

9. Sean A y B dos conjuntos tales que $n(A) = 3$ y $n(B) = 2$. Entonces, el número de relaciones de A en B es:

a) 32 b) 36 c) 64 d) Faltan datos e) N.A.

10. Sea $A = \{1, 2, 3\}$
se define en A las relaciones:

$R_1 = \{(1,2), (3,1), (2,3)\}$
$R_2 = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$
$R_3 = \{(3,3)\}$
$R_4 = \{(2,2), (3,4), (1,4)\}$

¿Cuántas relaciones son transitivas?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

11. En $A = \{2, 4, 6, 8\}$ se define:

$R = \{(x,y) \in A \times A / \text{“ x divide a y”}\}$

¿Cuántas son verdaderas?

I) R es reflexiva II) R es simétrica III) R es transitiva IV) R es equivalencia.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

12. Sea R la relación definida en los números naturales por:

$R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x + y = 12\}$

¿Cuántas son verdaderas?

I R es reflexiva
II. R es simétrica
III. R es transitiva
IV. R es de equivalencia

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) N.A.

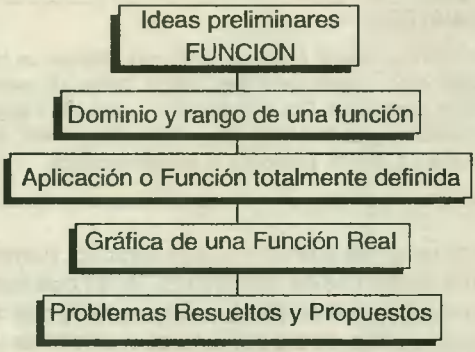
Clave

1. a	5. e	9. c
2. c	6. d	10. c
3. c	7. d	11. c
4. a	8. d	12. d

Capítulo 4

FUNCION

Flujo del contenido de este capítulo



En 1859 Karl Weierstrass (1815 - 1897), alemán, inicia en la Universidad de Berlín sus lecciones sobre la teoría de las funciones, inaugurando el punto de vista que será llamado de la **aritmetización de las matemáticas**.

1. IDEAS PRELIMINARES

En una expresión o relación o en el desarrollo de un problema determinado, se presentan dos tipos de:

CANTIDADES

CONSTANTES

Un símbolo que representa un valor fijo se llama constante. Puede ser:

VARIABLES

Un símbolo que puede representar diferentes valores, se llama variable. En el ejemplo c y r.

ABSOLUTAS

Una constante absoluta es aquella que en todos los problemas tiene siempre el mismo valor. En el ejemplo: 2 y π

EJEMPLO:

Consideremos la fórmula $C = 2\pi r$, que nos da la longitud de la circunferencia c de radio r. En esta expresión c y r pueden tomar diferentes valores (relacionados entre sí) y, por lo tanto, son variables., pero 2 y π tienen siempre el mismo valor, por lo tanto, son constantes.

PARAMETROS

Es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada pero que pueda tomar un valor diferente en otro problema o situación. Por ejemplo: $P(x) = ax + b$, x puede tomar diferentes valores, pero **a** y **b** son constantes para cada caso. Así: $2x + 5$, $a = 2$, $b = 5$; en $x - 4$, es $a = 1$, $b = -4$. Luego a y b, son parámetros.

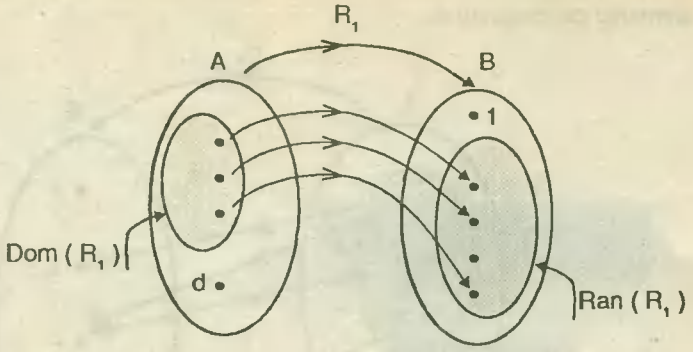
En el estudio de la matemática que venimos realizando, hemos tenido oportunidad de ocuparnos de los pares ordenados de los números (x, y) que han sido conectados por las llamadas relaciones binarias; acerca de ellas, sabemos lo que se entiende por dominio, rango y su representación gráfica. Ahora iniciaremos el estudio de una relación de singulares características a la que llamaremos **función** y que tiene significativa importancia en el desarrollo de la matemática.

Antes de llegar a la definición formal de función, analicemos previamente una clase particular de relaciones binarias en los siguientes ejemplos:

Dados los conjuntos: $A = \{ a, b, c, d \}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, consideremos las relaciones de A en B (subconjuntos de A x B) definidas por:

$R_1 = \{ (a, 2), (b, 3), (c, 5), \}$
$R_2 = \{ (a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 2) \}$
$R_3 = \{ (a, 2), (b, 3), (c, 5), (a, 3) \}$
$R_4 = \{ (a, 4), (b, 4), (c, 4), (d, 4) \}$

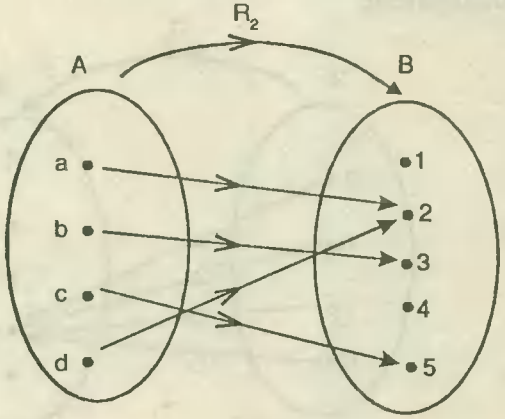
- Graficando:



I. Con respecto a esta relación, afirmamos que:

"A cada elemento del dominio de la relación le corresponde según R_1, un único elemento del conjunto B".

La afirmación dada significa también: "A un elemento del conjunto de partida A, le corresponde, según R_1, a lo más un único (solo) elemento del conjunto de llegada B".

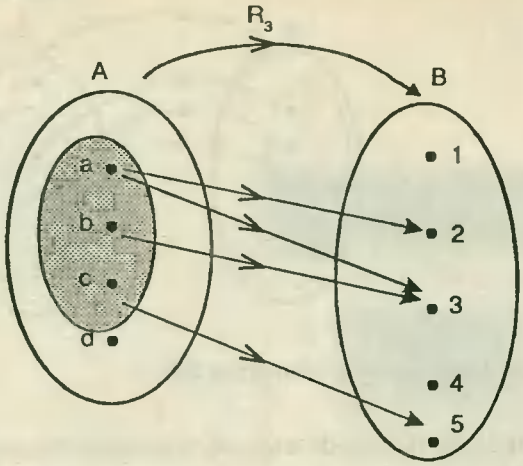


II. La afirmación hecha en (i) sigue siendo válida, porque a cada elemento de A, del dominio de la relación, le corresponde según R_2, un solo elemento de B.

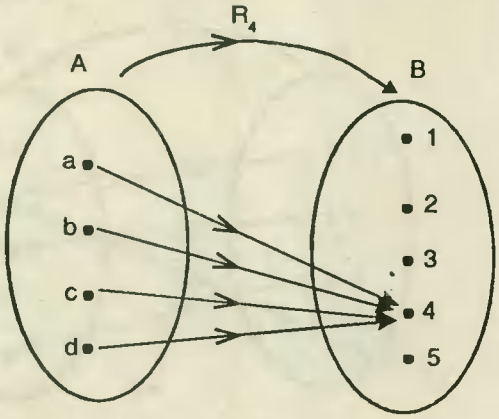
A pesar que a los elementos **a** y **d** del conjunto A, les corresponde el mismo elemento (2) del conjunto B.

III. La gráfica nos muestra que del elemento "a" parten dos flechas, formándose los pares ordenados (a, 2) y (a, 3). Este hecho invalida la afirmación dada para las relaciones

R_1 y R_2 , porque al elemento "a" del conjunto A **no** le corresponde, según R_3 un solo elemento del conjunto B.



iv. Observamos que por R_4 , a los elementos "a", "b", "c" y "d" del conjunto de partida A, les corresponde el mismo elemento (4) del conjunto de llegada B, pero este hecho no invalida la afirmación: "a cada elemento del conjunto A le corresponde, según R_4 un solo elemento del conjunto B".



Examinando los ejemplos R_1, R_2, R_3 y R_4, podemos distinguir dos tipos de relaciones:

* Las relaciones que satisfacen la afirmación; "a cada elemento del conjunto de partida, (del dominio de la relación) le corresponde un solo elemento del conjunto de llegada" (R_1, R_2 y R_4), y las relaciones que no la satisfacen (R_3).

A las relaciones de A en B, que satisfacen la afirmación se les da el nombre de funciones de A en B, en tanto a las que no la cumplen las llamaremos simplemente relaciones de A en B.

Recordemos:

- Toda relación es un subconjunto de un producto cartesiano.
- Los elementos de toda relación son parejas ordenadas (x, y).
- Toda función es una relación (Ej: R_1, R_2 y R_4) , pero no toda relación es función(R_3)

Definición 1

"Se llama aplicación o función de un conjunto A en un conjunto B, a toda relación R de A en B que cumple la condición: para cada elemento $x \in A$, existe un elemento $y \in B$ y sólo uno tal que x R y"

Si R es una relación de A en B que es una función, se representa por:

f: A $\rightarrow$ B ó también, $A \xrightarrow{f} B$ (f es una función de A en B)

Definición 2

Si dos variables $x \in A$, $y \in B$, están relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de x, (dentro de su dominio), le corresponden uno o más valores de "y"; se dice que "y" es una función de "x" y se representa:

f (x) = y, así por ejemplo:
y = 2x + 5 nos expresa a "y" como función de "x".
f (x) = 2x + 5 ya que para cada valor que se asigne a "x" queda determinado un valor correspondiente para "y".

Para esta función particular se puede obtener fácilmente varios pares de valores correspondientes como los datos de la tabla siguiente :

x	0	1	2	-1	-2	-3	...
y	5	7	9	3	1	-1	...

Observamos que se puede asignar a "x" los valores que se deseen, pero que los valores resultantes de "y" dependen de los valores dados a "x". Por esta razón "x" recibe el nombre de variable independiente e "y" el de variable dependiente.

El concepto función implica dependencia, de una cantidad con respecto a otra, tales relaciones se presentan en una gran cantidad de casos.

Por ejemplo en una fórmula C = 2 p r, la longitud de la circunferencia C, es función de su radio r, es decir, la longitud de la circunferencia depende del valor de su radio.

En nuestra **definición (2) de función**, mencionamos los valores adimisibles asignados a "*x*". La razón por la cual se usa la palabra admisible, es que en una relación funcional propuesta, la variable independiente no puede tomar cualquier valor. Así por ejemplo en la función $f(x) = x / x - 1$, "*x*" puede tomar cualquier valor excepto 1, pues la división entre cero no está definida (es una operación imposible).

Si la **relación** es $y = \sqrt{x}$, limitamos los valores de "y" a los números reales, entonces no podemos asignar a "x" valores negativos, se dice que $f(x) = \sqrt{x}$ está definida para un valor particular de "x" (siempre que tenga un valor numérico determinado para ese valor de x. En los ejemplos anteriores $f(x) = x/x - 1$, no está definida para x = 1, asimismo para valores reales de "y", la función $\sqrt{x}$ sólo está definida para los valores no negativos de x.

2. Notación de las funciones

Por conveniencia hemos estado utilizando la letra "y" para representar una función de x; Por ejemplo, en y = 2x + 5, sin embargo, también podemos usar el símbolo f (x) en lugar de y, escribiendo:

$$y = f(x) = 2x + 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En donde $f(x)$, se lee "función *f* de *x*" o simplemente "*f* de x".Pero este símbolo tiene otro uso muy importante. Si deseamos expresar el valor de esta función cuando la variable independiente x tiene un valor particular, digamos "a", entonces, simplemente sustituimos *x* por "*a*". Por ejemplo, para la función dada por la relación (1) tenemos:

$$f(a) = 2a + 5.$$

Análogamente para la misma función tenemos:

$$f(o) = 2(o) + 5 = 5 \; ; \; f(-1) = 2(-1) + 5 = 3 \text{ , etc.}$$

A continuación complementamos la definición establecida para la función presentando algunos conceptos que se destacan en las siguientes observaciones:

i. Si f es una función de A en B, se escribe: $f: A \to B$ ó $A \xrightarrow{f} B$, se lee: "f es una función de A en B" y significa que: " f lleva elementos del conjunto A a elementos del conjunto B". Así: si h es una función que lleva elementos del conjunto M a elementos del conjunto N, denotaremos:

$$h: M \to N \quad (o \; M \xrightarrow{h} N)$$

que se lee: sea h una función de M en N,

ii. Dada una función f, el par (x, y) $\in$ f, se escribe: y = f (x) y se lee: " y es igual a f de x ". En este caso se dice también que " y es la **IMAGEN** de x mediante (o por) f" o que "x es una **pre-imagen** de y mediante f:".

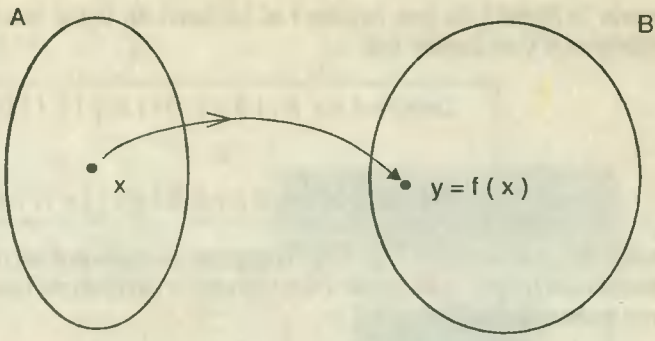
Esto es: Si f es una función y el par $(3, \sqrt{2}) \in f$, entonces:

$\sqrt{2} = f(3)$ ó $f(3) = \sqrt{2}$ y se dice que:

$\sqrt{2}$ es la imagen de 3 mediante f, ó 3 es la pre-imagen de $\sqrt{2}$ mediante f.

Si f es una función que lleva un elemento "x" del conjunto de partida (A) a un elemento "y" del conjunto de llegada (B), decimos que y = f (x) o que "y es la imagen de x mediante f".

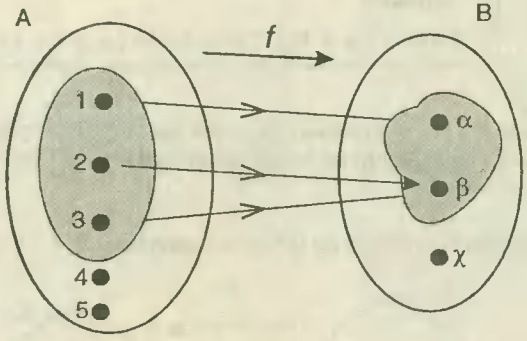
Un diagrama de correspondencia para f es:



y = f (x) ó f (x) = y (Notación de Euler)

Apreciamos que: la **pre-imagen** x es elemento del conjunto de partida y que la imagen y es un elemento del conjunto de llegada.

La imagen de un elemento mediante una función es **UNICA**, pero la pre-imagen de un elemento mediante una función **no** necesariamente es única, ya que dos o más elementos del conjunto de partida mediante una función puede tener la misma imagen.



3. Dominio y Rango (recorrido) de una función

Nuestra lectura anterior nos ha permitido formalizar el concepto función; requerimos ahora establecer claramente los conceptos de dominio y rango (o recorrido) de una función.

La determinación del dominio y el rango es de singular importancia para el estudio de las funciones, por lo que recomendamos un estudio muy cuidadoso de lo que se plantea a continuación:

Si decimos que una función de A en B es una relación en la que a cada elemento del dominio de la relación se le asocia un elemento único del conjunto de llegada, estamos

que la función queda definida para ciertos elementos del conjunto de partida, que constituyen el dominio de la función, para el cual damos la siguiente definición:

Se llama DOMINIO de una función f al conjunto de todos sus antecedentes (primeras componentes) y se denota por:

$$\text{Dom } f = \{ x \in A / [\exists y \in B / (x, y) \in f] \} \subset A$$

ó

$$\text{Dom } f = \{ x \in A / [\exists y \in B / y = f(x)] \} \subset A$$

Esto significa que el dominio de f es el conjunto formado por las primeras componentes de los elementos (pares ordenados) de f. Esto es, el dominio de f es el conjunto formado por las pre-imágenes de la función.

Se llama rango o recorrido de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, según f y se representa:

$$\text{Ran } f = \{ y \in B / [\exists x \in A / y = f(x)] \subset B$$

ó

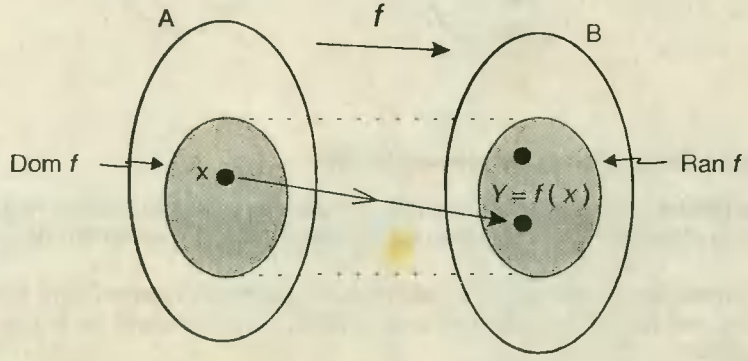
$$\text{Ran } f = \{ f(x) \in B / x \in \text{Dom } f \subset A \} \subset B$$

También:

$$\text{Ran } f = \{ y \in B / \exists x \in A \text{ con } (x, y) \in f \} \subset B$$

El rango de *f* viene a ser el conjunto de todas las segundas componentes.
El rango de *f*, que es el conjunto de todas las imágenes de *f* no necesariamente cubre a todo B.

El conjunto de llegada B también se le llama codominio de *f*.

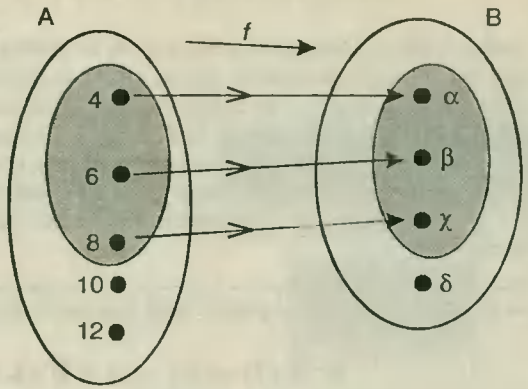


Ejemplo

Sean : A = { 4, 6, 8, 10, 12 } y B = { α, β, χ, δ }. Si:

f = { (4, α), (6, β), (8, χ) }, entonces:

Dom f = {4, 6, 8 } Ran f = { α, β, χ }



4. Aplicación o función totalmente definida

En la sección anterior hemos establecido el concepto de dominio de una función, acerca del cual hemos dicho únicamente que es un subconjunto del conjunto de partida. Como tal, es posible considerarlo como un subconjunto propio o impropio, según sea el dominio parte o todo el conjunto de partida.

Cuando ocurre que el dominio de una función está constituido por TODOS LOS ELEMENTOS DEL CONJUNTO DE PARTIDA, se dice que la función está totalmente definida o que es una APLICACION, para lo cual damos la siguiente definición:

> Si *f* es una función de A en B (f: A → B), tal que Dom f = A, entonces *f* es llamada aplicación de A en B ó función totalmente definida en A.

Ejemplo

Dados los conjuntos: A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } y B = { 0, 1, 2, 3, .., 10 }
y la función f : A → B definida por f (x) = 2x, decir si es o no una aplicación de A en B.
Por la regla de correspondencia:
f = { (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) }, donde:

Dom f = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } = A , Luego f es una aplicación de A en B.

5. Gráfica de una función real

Cuando los conjuntos de partida y de llegada A y B de una función f son conjuntos de números reales, esta función es llamada una FUNCION (de valor) REAL DE UNA VARIABLE REAL.

Así, una función real de variable real, es un conjunto de pares ordenados de números reales,

y por lo tanto tiene una representación gráfica como conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por el mismo hecho de ser f una relación en R.

$$f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \text{Dom } f, \quad y = f(x) \}$$

Antes de dedicar nuestro esfuerzo al trazado de la gráfica de una función real, debemos destacar que dicho trazo requiere de ciertas técnicas como son: la determinación de los extremos relativos de la función, las concavidades, inflexiones, que son propias del cálculo y que están fuera del alcance de este texto. Sin embargo, trazaremos la gráfica de las funciones reales de manera "intuitiva" determinando algunos de los puntos que satisfacen la ecuación que define a la función, ubicándolos en el plano Cartesiano y uniéndolos con una "curva" (si es que se puede) que siga la trayectoria que más o menos nos indican los puntos hallados.

Si: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, el gráfico de f, que se denota por Graf (f) es el conjunto:

$$\text{Graf. } (f) = \{ P(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = f(x) \}$$

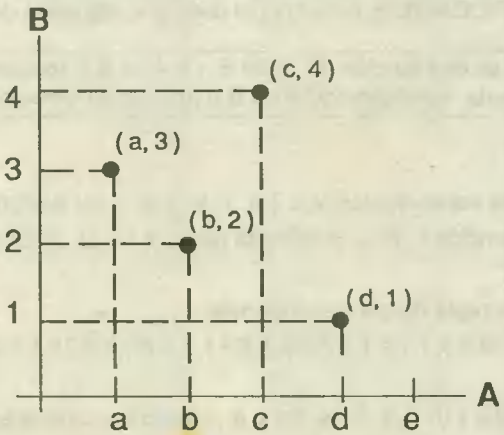
Es decir, la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es el conjunto de puntos (P (x,y)) que se determinan en el gráfico del producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ejemplo

Si: A = { a, b, c, d, e } y B = { 1, 2, 3, 4 } y la función f: A → B definida por:

f: { (a, 3), (b, 2), (c, 4), (d, 1) ,

la gráfica está dada por los puntos: (a.3), (b,2), (c,4) y (d,1) del producto A x B:



En la gráfica puede apreciarse que Dom (f) = { a, b, c, d } y como Dom f ≠ A, entonces f no es una aplicación.

Si f es una función real, el gráfico de f es: Graf (f) = { P (x,y) ∈ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ / y = f (x) } que generalmente se representa en el plano cartesiano considerando el conjunto de partida en el eje de las abscisas y el conjunto de llegada en el eje de las ordenadas.

Los ejemplos que a continuación se desarrollan con las reservas del caso, nos proporcionan algunas ideas para proyectar el trazado de la gráfica de una función real:

Ejemplo

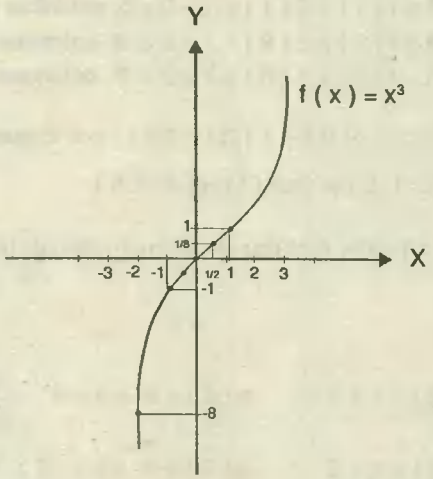
Representar gráficamente la función real $f(x) = x^3$

La construcción gráfica de la función requiere la elaboración de una Tabla de Valores. Esta tabla la obtenemos dando a x valores arbitrarios de su dominio, cercanos entre sí y preferentemente, próximos al origen. A partir de estos valores arbitrarios de x se obtienen los valores de "y", que resultan de aplicar $y = f(x) = x^3$. Así por ejemplo:

Tabulación:

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
$y = f(x) = x^3$	-8	-1	-1/8	0	1/8	1	8

Los puntos (-2,-8), (-1,-1), (-1/2, -1/8), ..etc, se ubican en el plano cartesiano (1). Se traza una curva continua (sin saltos) (2) que pasa por los puntos, tal como se muestra en la figura adjunta:



(1). Las unidades de medida que se toman sobre los ejes x e y no necesariamente deben ser iguales, por requerimientos de la gráfica puede ser una más pequeña o más grande que la otra comparadas en dichos ejes.

(2). El gráfico de toda función definida mediante polinomios:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$ con $a_i \in \mathbb{R}$ para:

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, es una curva continua (sin saltos).

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES

Observaciones Previas

* Debemos conocer bien los conjuntos numéricos.
* Recordar que raíz de índice par de un negativo nos da un número no real o imaginario.
* La definición precisa de lo que es una función, como reconocer geométricamente si una gráfica corresponde a una relación o a una función.
* El objetivo de este capítulo es que el lector se familiarice con el concepto matemático de función, ya que una mayor profundización de este conocimiento, lo desarrollamos en el curso de álgebra estructurada.

1. Dados los conjuntos: $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ y la función f definida por $f: A \to B / f(x) = 2x + 1$, hallar el dominio y rango de f.

Solución

Para hallar el dominio y rango previamente debemos determinar los elementos de f:

Como $0 \in A$ y $f(0) = 2(0) + 1 = 1 \in B$, entonces $(0,1) \in f$.
Como $1 \in A$ y $f(1) = 2(1) + 1 = 3 \in B$, entonces $(1,3) \in f$.
Como $2 \in A$ y $f(2) = 2(2) + 1 = 5 \in B$, entonces $(2,5) \in f$.
Como $3 \in A$ y $f(3) = 2(3) + 1 = 7 \notin B$, entonces $(3,7) \notin f$.

Luego f está dado por $f = \{ (0,1), (1,3), (2,5) \}$ por lo que:

Rpta. Dom $(f) = \{ 0, 1, 2 \}$ y Ran $(f) = \{ 1, 3, 5 \}$.

2. Si $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 4$. Hallar el valor numérico de la fracción: $\frac{f(2)}{g(2)}$ y del producto: $f(1).g(3)$.

Solución

$$f(2) = 2(2) + 1 = 5 \qquad g(2) = 2^2 + 4 = 8 \therefore \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{8}$$

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3 \qquad g(3) = 3^2 + 4 = 13 \therefore f(1).g(3) = 3 \times 13 = 39.$$

Rpta. 39

3. Si: $f(a) = \frac{a+1}{a-1}$ y $F(a) = \frac{a}{a+1}$, hallar: $E = \frac{f(2) + F(1)}{1 - f(2).F(1)}$

Solución:

Rpta. Podemos establecer: $\frac{f(2) + F(1)}{1 - f(2).F(1)} = \frac{\frac{2+1}{2-1} + \frac{1}{1+1}}{1 - \frac{2+1}{2-1}.\frac{1}{1+1}} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -7$

4. Sea $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Hallar $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.

Solución

$$g(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$$
$$g(2) = (2)^2 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 0$$
$$g(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$$

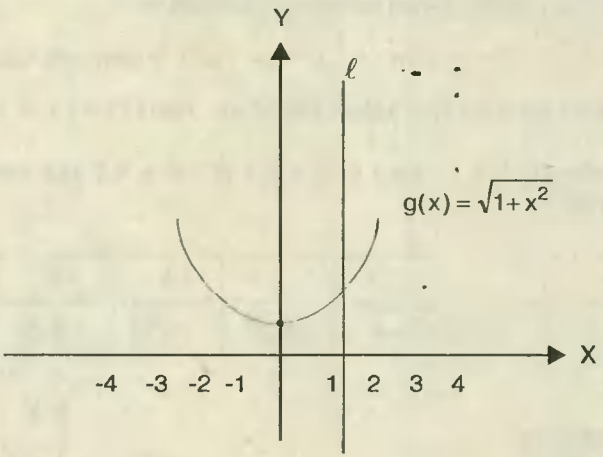
Rpta. 0, 0, 0.

5. Sea g una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sqrt{1+x^2}$. ¿Es una función?. Comprobar geométricamente.

Solución

Tabulando: (con valores arbitrarios)

x	± 4	± 3	± 2	$\pm\sqrt{3}$	± 1	0
$g(x) = \sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{2}$	1



Rpta. Sí es una función ya que puede observarse que cualquier recta vertical intersecta a la "curva" en a lo más un punto.

6. Hallar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}$

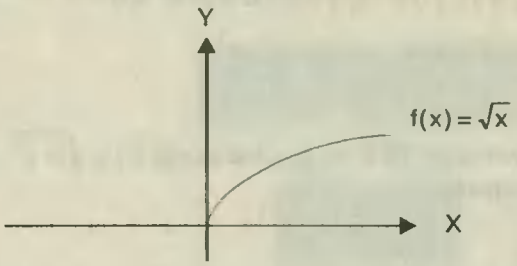
Solución

Obsérvese, que x no pude tomar valores negativos, porque $\sqrt[Par]{\text{negativo}}$ = imaginario. Entonces, los valores de $f(x) = y$ son positivos.

Tabulando:

x	0	1	2	4	5	9	16
y= f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	3	4

A partir de la tabla se construye la gráfica siguiente.



7. Hallar el valor de n para que la relación:

f = { (4,n), (2,5n), (7, $2n^2 + 1$), (4, 2k - 1) } sea una función. Hallar el rango de f.

Solución

Como no pueden existir dos pares ordenados distintos con la misma primera componente, para que f sea una función, deben ser iguales los puntos:

(4,n) = (4, 2n - 1) $\Rightarrow$ n = 2n - 1 $\Rightarrow$ n= 1 en f tenemos la función:

Rpta. f = { (4,1), (2,5), (7,3) } cuyo Rango es: Ran (f) = { 1, 3, 5 }.

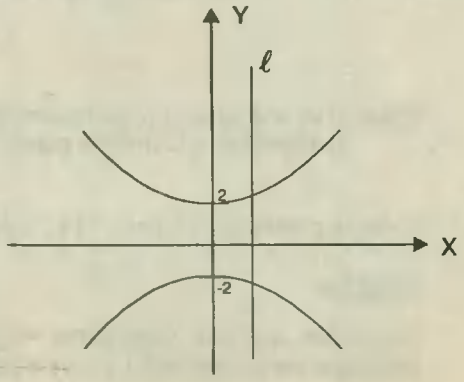
8. La siguiente relación: h = { (x,y) $\in$ $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ / $y^2 - x^2 = 4$ } ¿Es función?. Comprobar geométricamente.

Solución

Tabulando:

x	±4	±3	±2	±1	0
$Y = \pm\sqrt{x^2+4}$	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{13}$	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{5}$	±2

Se obtiene lasiguiente gráfica:



Rpta.

Notamos que es posible trazar rectas verticales que cortan a la curva en 2 puntos, por lo que la relación h, NO ES FUNCION.

9. Calculando el suficiente número de puntos, construir la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = 3x - 2$

(2) $g(x) = x^4$

(3) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

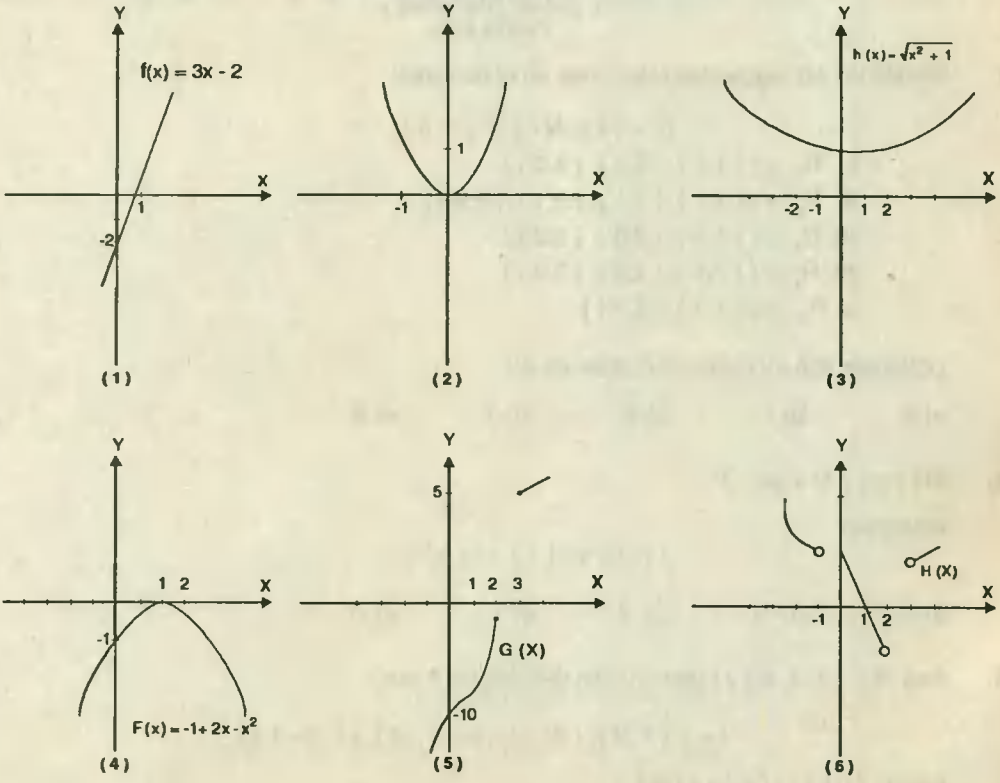
(4) $F(x) = -1 + 2x - x^2$

(5) $G(x) = \begin{cases} x^3 - 10, & \text{si } x < 2 \\ 2 + x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(6) $H(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

Solución

Tabulando, obtendremos los siguientes gráficos:



10. Dar un ejemplo de una función f (como conjunto de pares ordenados), que cumpla los siguientes cuatro requisitos:

f tiene 8 elementos,

$f(x) = x^2$, $Dom(f) \subset \mathbb{Z}$, $Ran(f) \subset B = \{ 2m / 0 \leq m \leq 36 , m \in \mathbb{Z}^+ \}$.

¿Cuántas de estas funciones existen?

Solución

$Ran(f) \subset B = \{ 0, 2, 4, 6, ..., 72 \}$

$f(x) = x^2 = \{ (x), f(x) / x \in \mathbb{Z} \} = \{ (0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4) ..... \}$

Combinando, existen 9 de estas funciones (f), y dos de ellas son:

Rpta. $f_1 = \{ (2,4), (-2,4), (4,16), (-4,16), (6,36), (-6,36), (8,64), (-8,64) \}$

$f_2 = \{ (2,4), (0,0), (4,16), (-4,16), (6,36), (-6,36), (8,64), (-8,64) \}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

(SOBRE FUNCIONES)
-CON CLAVE-

1. Se definen las siguientes relaciones en el conjunto:

$$A = \{ x \in N / 1 \leq x \leq 3 \}$$

I. $R_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

II. $R_2 = \{ (1,1), (2,1), (3,1), (3,2) \}$

III. $R_3 = \{ (1,3), (2,3), (3,3) \}$

IV. $R_4 = \{ (2,1), (2,2), (2,3) \}$

V. $R_5 = \{ (1,1), (2,3) \}$

¿Cuántas son funciones definidas en A?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

2. Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$

entonces:

$$f(-1) + f(1) - f(0) =$$

a) -7 b) -3 c) -4 d) 1 e) -1

3. Sea $A = \{ 1, 2, 4 \}$ y f una función definida en A por:

$$f = \{ (1, 3), (2, a), (a + 1, 2), (1, b - 1), \}$$

hallar: $f(1) - f(2) + f(4)$

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

4. Sea f una función y $f(x) = (x - 1)^2 + a$ entonces:

$$\frac{f(x) - f(x+2)}{x} = \text{,} \qquad x \neq 0$$

a) 4 + 2a b) -4 - 2a c) 2 d) 4 e) -4

5. Sea f una función definida en el conjunto de los números reales por la ecuación:

$f(x) = ax + b$, si se cumple
$f(1) = -1$ y $f(-3) = -13$, entonces:

$$3a - 2b =$$

a) 17 b) 18 c) 1 d) 16 e) N.A.

6. S i los pares ordenados (3, -1) y (1,3) pertenecen a la relación

$R = \{ (x,y) / y = ax + b \}$. Hallar a - b

a) 7 b) 3 c) -3 d) 5 e) -7

7. Se sabe que:

$f = \{ (a,b), (3,c), (1,3), (2b,4) \}$ y que f: $f(x) = x - 2a$

Entonces, el producto de los elementos de: Dom (f) $\cap$ Ran (f) es:

a) 3 b) -1 c) -3 d) 1 e) -2

8. Sean $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Se definen las funciones f y g con dominio en A, tales que:

$f = \{ (1, K), (2,5), (3,5), (1,3), (p,K) \}$
$g(x) = Kx + 2p$

Hallar la suma de todos los elementos del rango de g.

a) 31 b) 45 c) 54 d) 16 e) 62

9. Sean f y g dos funciones definidas en Z tales que:

$f(x) = 3x + b$
$g(x) = x - 1$

Si (2,y) pertenece a ambas funciones, hallar f(-2)

a) 11 b) -11 c) -5 d) 5 e) 1

10. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x - 2$

Hallar:

$$f(f(0)) + [f(2)]^2 - f(-1)$$

a) 3 b) 7 c) 9 d) 19 e) 13

11. Sea f una función definida por la ecuación $f(x) = 3x + 6$. Hallar

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{f[f(2)]}$$

a) h/3 b) h/6 c) h d) h/7 e) N.A.

12. Sea f una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

$$f(x) = 4x - 1$$

¿Cuántas de las afirmaciones son verdaderas?

1) $f(f(3)) = f(12) - 4$
2) f está definida para $x = 0$
3) $f(2a + 3b) = 2f(a) = 3f(b)$
4) $f(f(2)) = 27$

a) 4 b) 3 c) 2 d)1 e) N.A.

13. Si f es una función de A en B. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. Ran $f \subset B$
II. $\forall a \in A : f(a) = b \wedge f(a) = c \Rightarrow b = c$
III. Dom $f \cap$ Ran $f = \phi$

a) Sólo I b) Sólo II,III c) Sólo I,III d) Sólo I y II e) Todas

14. Sea $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $f : A \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 2(x - 1)$

Hallar $f(c)$, donde:

$$c = f(6) + f(2 + f(2)) - 12$$

a) -2 b) 2 c) 8 d) 10 e) N.A.

15. Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que, $f(x - 2) = x^2 - 4x$

Si $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) = f(x + 2)\}$ y
$B = \{x \in \mathbb{Z} / f(-x) = f(2 - x)\}$,
entonces la suma de todos los elementos de A U B es:

a) -3 b) -2 c) 0 d) 2 e) 3

16. Sean: f: $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, g: $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, dos funciones tales que:

$$f(x+1) = 3x - 1$$
$$g(x-1) = 2x + 1$$

si:

$$C = \{ x \in \mathbb{N} / f(x) < g(x) \}$$
$$\Rightarrow n(C) =$$

a) 7 b) 6 c) 8 d) 5 e) 4

17. En A = { 1, 2, 3, 4, 5 } se definen las funciones f y g mediante:

$$f = \{ (2,4), (1,5), (3,r), (2,s), (4,3), (5,t) \}$$
$$g = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / y = rx + t \}, \text{ tq:}$$
$$f(2) = g(1) ; f(1) = g(2)$$

Entonces:

$$3r + 2s + t =$$

a) 11 b) 13 c) 14 d) 16 e) 18

18. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación:

$$f(x+3) = x + 7$$

Hallar $f(\frac{3}{2})$

a) 17/2 b) 11/2 c) 15/2 d) 13/2 e) N.A.

19. Si $f(x+2) = 3x + 6$

Hallar: $f(p) - f(p-1) + f[f(0)]$

a) 4 b) 2p - 3 c) p - 3 d) p + 1 e) N.A.

20. Si f es una función definida en { 1, 2, 3, 4 } y $f(2x+5) = x^2$. Hallar la suma de los elementos del rango.

a) 5 b) 5/2 c)15/2 d) 30/2 e) N.A.

21. Si f es una función tal que:

$$f(x) = \frac{x+c}{x-1}, \quad x \neq 1, \quad c \neq -1, \text{ el valor de } f(f(x)) \text{ será:}$$

a) $c(x-1)^{-1}$ b) c c) 1 d) x e) $x(x-1)^{-1}$

22. Sean f y g dos funciones definidas en Q por:

$$f(x) = ax - 1$$
$$g(x) = 3x + b$$

tales que: $f(1) = g(-1)$
$f(-1) = g(1)$

Entonces $f(2) + g(3)$ es igual a:

a) +15 b) -15 c) -1 d) +1 e) -12

23. Si $f(x + 7) = f(x) + f(7)$; $\forall\ x \in \mathbb{Z}$

afirmamos:
I. $f(0) = 0$
II. $f(-7) = -f(7)$
III. $f(35) = f(14) + 3f(7)$

Son verdaderas:

a) Sólo I y II b) Sólo I c)Sólo II d) Todas e) Sólo I y III

24. Sea f una función tal que:

$$f(0) = 4$$
$$f(n) = 3f(n - 1) + 4 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^+$$

Hallar $f(3) =$

a) 52 b) 60 c) 45 d) 50 e) 160

25. La función f es definida en el conjunto $\mathbb{Z}$, así:

$$f(n) \begin{cases} n - 3, & n \geq 100 \\ f(f(n + 5)), & n < 100 \end{cases}$$

Hallar f(97)

a) 99 b) 98 c) 97 d) No se puede determinar e) N.A.

26. Si $f(x) = x$,

$$f(g(x) + h(x)) = 2x^2$$
$$f(g(x) - 2h(x)) = 3 - x^2 - 3x$$

Hallar $f(g(f(h(1))))$.

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 1

27. Dado el conjunto de pares ordenados:

$$f = \{ (5,7), (-1, a+b), (a^2 - b, 2b - a^2), (5, a - 2b), (-1, -2) \},$$

Calcular los valores de "a" y "b" para que f sea una función.

a) a = -3, b = 1 b) a = 2, b = -2 c) a = 1, b = -3 d) a = 1, b = 2 e) N.A.

28. Para A = { 1, 2, 3 } , B = { 3, 4, 5 }, sean f y g dos funciones de A en B tales que:

$$f = \{ (1,3), (2,4), (a,b) \} \text{ y } g(1) = 3.$$

Hallar el valor de (b -a) + (c - d)

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) 8

29. Si f es una función tal que $f(x + 5) = f(x) + f(5)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles son verdaderas?

a) $f(0) = 0$ b) $f(-5) = -f(5)$ c) $f(15) = 3f(5)$

d) Todas las anteriores e) N.A.

30. Hallar los valores de "a" y "b" para que cada uno de los conjuntos de pares ordenados sea una función:

$$(1)\ f = \{ (1,8), (2,-3), (1, a^2 + b^2), (-1, a+b), (a^2 + b, a), (b + a^2, b) \}$$
$$(2)\ g = \{ (4,3), (-5,-3), (4, a^2 - b^2), (-5, a+b), (a^2 + b, a), (a^2 + b^2, b) \}$$

a) (1): a = 1, b = 2; (2): a = 2, b = 1 b) (1): a = 2, b = 2; (2): a= -2, b = -1 c) (1): a = 3, b = 2; (2): a = -1, b = -1

d) (1): a = -1, b = 2; (2): a = 2, b = 4 e) N.A.

CLAVE

1. d	6. e	11. d	16. d	21. a	26. e
2. a	7. a	12. c	17. b	22. d	27. c
3. e	8. e	13. c	18. d	23. c	28. c
4. e	9. b	14. d	19. b	24. e	29. d
5. a	10. e	15. e	20. b	25. e	30. b

Capítulo 5

NUMERACION

Las partes del cuerpo bajo un orden establecido, constituyen un instrumento para contar, simple y portátil. Comúnmente se usan los dedos de las manos. Un pueblo de Nueva Guinea va mucho más lejos: parte de una mano, toca un brazo y un lado, utiliza los dedos de los pies y sube de nuevo por el otro lado a la otra mano., individuando así 34 posiciones distintas. Un número insólitamente elevado para una numeración asistemática, sin unidades de orden superior.

Flujo del contenido de este capítulo

- Reseña histórica - Sistemas de numeración
- Clases de sistemas de numeración
- Formación de un sistema de numeración
- Cifras mínimas.- +, -, x, + en base n ≠ 10
- Cambios de sistemas de numeración (casos especiales)
- Como contar cifras.- Método combinatorio
- Problemas

1. RESEÑA HISTÓRICA SISTEMAS DE NUMERACION

Contando con los dedos, o con piedras, no se va muy lejos; tal procedimiento, sin embargo, puede ser suficiente en condiciones de vida extremadamente primitivas, Cada civilización buscó la manera de desarrollar la numeración, impulsándola hasta donde sus exigencias lo reclamaban; el aumento de producción en la caza organizada, las cosechas copiosas de los agricultores, la contabilidad necesaria para los intercambios comerciales, tuvieron necesidad de cantidades cada vez más grandes. A esta necesidad se respondió con un sistema ingenioso: decidiendo que un grupo determinado de objetos, tomado en conjunto valiese como un solo objeto, una unidad de orden superior, desde el cual la numeración podía comenzar de nuevo, para proseguir hasta la introducción de una nueva unidad, y así sucesivamente. Se pasa de este modo a las "numeraciones sistemáticas"; la solución más simple y racional consiste en formar cada unidad con un número fijo de unidades del orden inmediatamente inferior. Tal número se denomina "base" del sistema.

La base del sistema de numeración puede elegirse como se quiera, y en el curso de la Historia las distintas civilizaciones ensayaron diversas bases. Un vestigio del sistema de numeración usado permanece en el lenguaje; para comunicar los números en los intercambios es necesario, en efecto, asociarlos a palabras especiales, los "numerales", y se necesitan precisamente tantas palabras diversas como unidades tenga la base del sistema, más otra por cada unidad de orden superior que se desee introducir. (En lugar de palabras pueden usarse gestos, como los de extender los dedos; con frecuencia el nombre de los números es precisamente el de los gestos correspondientes).

El sistema más antiguo, inventado probablemente en la historia más remota, es el sistema de base dos. Lo usaron las culturas más arcaicas de los cuatro continentes, con frecuencia de un modo rudimentario y poco distinguible de la numeración asistemática; muchas lenguas primitivas poseen solamente los numerales "uno- dos"; mas allá empieza el campo indefinido de los "muchos". Usando rigurosamente el sistema binario, otros pueblos de Australia y Nueva Guinea cuentan hasta cuatro o cinco, y algunos hasta diez. Este es un paso mucho más importante de lo que parece. Para números mayores, el sistema binario es impracticable, y por ello hubieron de buscarse bases más grandes. Las bases derivadas del 2, como 4, 6, 12, han tenido escasa difusión (un avance del sistema duodecimal sobrevive en nuestras unidades "docena" y "gruesa", limitadas de un modo extraño para contar huevos, plumillas y algunos otros objetos); el mayor éxito histórico ha correspondido a los sistemas más adaptados a contar con los dedos. El más simple el sistema quinario, que tiene por base 5, "la mano", se usó raramente en estado puro; éste no constituye todavía una mejora notable respecto al sistema binario y por ello parece ser más bien un sistema de transición, pronto superado por sistemas mixtos en los que acompañaban al cinco bases más grandes. El sistema quinario-vigesimal, que tiene como base fundamental el 20, se halla ampliamente difundido de Oceanía al Africa Occidental, de Siberia a la América ártica, de México a los Andes. Este sistema, que procede de la civilización totémico-patriacal de los cazadores del paleolítico superior, se difundió también en la Europa prehistórica: numerales como el francés quatre-vingt lo recuerdan todavía.Las mayores civilizaciones de la América precolombina dieron un grandioso impulso al sistema: los aztecas tenían un numeral especial para los 8.000, la unidad vigesimal de cuarto orden, y los mayas tenían también una palabra para su unidad de séptimo orden, esto es, 57.600.000. El mayor número que se ha leído en las inscripciones mayas correspondería en nuestro sistema al 1841.639.800. Después del trabajo de los primeros pasos, esta enorme ampliación de los confines de la numeración evidencia de un modo patente el triunfal desarrollo de la capacidad humana, preparada ya para las más complicadas elaboraciones.

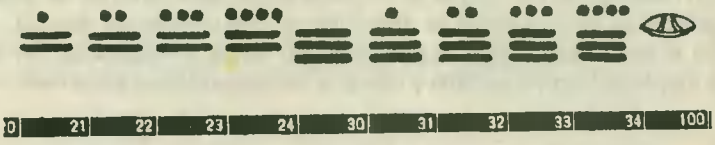
La civilización matriarcal de los más antiguos agricultores, que en los albores de la edad neolítica cultivaban con la azada, preferían otro sistema mixto para contar los productos agrícolas; éste era un sistema quinario-decimal, de base 10 ("las dos manos"). Este sistema se halla aún muy difundido entre las poblaciones africanas, en Asia meridional y central, y hasta la Melanesia. Pero este sistema no pudo resistir la competencia del sistema decimal puro obtenido con una simplificación decisiva, quitando toda posición especial a la base 5 (en cambio, el sistema quinario-vigesimal no había sido capaz de librarse del 5, porque el 20 constituía una base excesivamente grande para estar sola).

Sus primeros vestigios aparecen junto con las primeras huellas de la escritura y de nuestra historia, en el cuarto milenio a.C.. Por lo tanto, esta invención pertenece también a aquel conjunto de innovaciones profundas con las que se ha acostumbrado a hacer coincidir el comienzo de la historia. Sistemas de lectura aditiva fueron empleados por los egipcios, que tenían para los números jeroglíficos especiales, y por los griegos y los hebreos, que los representaban en cambio con letras del alfabeto (en efecto, estableciendo la lectura del alfabeto en un orden fijo, se constituye un posible sistema de numeración). También los números romanos seguían la ley aditiva; con toda probabilidad en un principio fueron simples signos convencionales, de origen etrusco, y sólo más tarde se identificaron con letras.

1.1 LA NUMERACION ESCRITA

No siempre basta con saber contar y comunicar el resultado del recuento; la palabra se desvanece apenas pronunciada, los montones de piedras no son duraderos, y puede ser necesario registrar el resultado de modo que perdure.

El montón de piedras tiene que ser sustituido por algo de mayor solidez; objetos perforados enhebrados juntos en una serie, nudos en una cuerda, muescas en un bastón o dibujos sobre piedra o papel. Este último sistema es el más eficaz ; reducidos los dibujos a su forma más simple, a cada objeto contado corresponderá un trazo o un punto, y donde se use un sistema de numeración, por cada unidad de orden superior se introducirá un nuevo signo; el número total contado se leerá sumando los valores de todos los signos escritos. Por ello, este sistema de numeración escrita se llama de "lectura aditiva".



Los sistemas aditivos responden bien a dos de los servicios exigidos a una numeración escrita: comunicar y registrar datos numéricos y resultados de cuentas efectuadas. Y para estos dos servicios exclusivamente se usaron durante toda la Antiguedad y el Medioevo. Un tercer servicio que actualmente exigimos a nuestro sistema de escritura de los números, el de prestarse a una cómoda y rápida ejecución de cálculos, y también al registro de los resultados intermedios, era confiado a instrumentos de cálculo. El más antiguo y famoso de tales instrumentos es el que los romanos llamaron *abacus*, usado desde tiempo inmemorial en toda la cuenca del Mediterráneo hasta Rusia y Extremo Oriente (los contables chinos se sirven todavía de él, y con frecuencia vencerían en rapidez a nuestros cálculos efectuados con papel y lápiz).

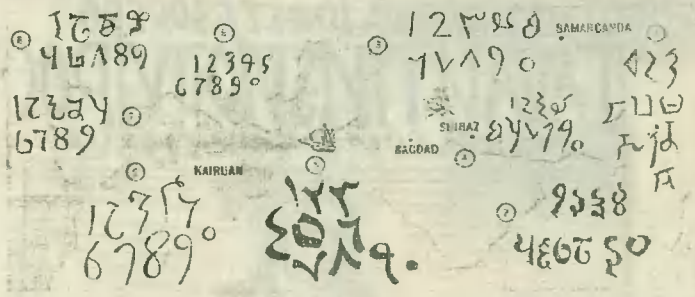
El ábaco es en esencia un montón ordenado de piedrecitas, repartidas en casillas, estipulándose que la misma piedrecita valga 1 en la primera casilla, 10 (unidad de segundo orden) en la segunda, y así sucesivamente. Las operaciones aritméticas se realizan fácilmente corriendo las piedras dentro de las casillas. La eficacia del ábaco depende de haber establecido que el mismo objeto asuma un valor diverso según la casilla en que se ha puesto, y éste es el principio de las posiciones. Aplicándolo a signos sobre el papel, en lugar de piedras en las casillas; se llega al sistema moderno de la escritura de los números.

El primer vestigio histórico seguro de nuestro sistema de escritura y de cálculo procede de la India, hacia el año 500 d.C. Se ignora el origen remoto del sistema: se remonta a la última fase de las matemáticas griegas, o directamente a la numeración babilónica, que ya contenía elementos posicionales. El principio de posición, así como las nueve cifras y el cero, se encuentran en la obra del matemático indio Brahmagupta, a mediados del siglo VII. Cien años después, en 772, una embajada la llevó a Bagdad, con algunos libros de matemáticas indios. Cien años más, y aparece en Bagdad la primera exposición sistemática de los nuevos métodos en un tratado de Al-Khuwarizmi (primera mitad del siglo IX), que en el siglo siguiente se infiltraron lentamente en Occidente. Ahora ya todo impulsaba hacia el éxito: la civilización musulmana llevaba esos conocimientos a Sicilia y España y los mercaderes árabes e italianos los adoptaron, felices de no tener que llevar consigo el incómodo ábaco. Y precisamente fue un mercader, Leonardo Pisano, quien, después de haber aprendido aquel arte de los árabes en sus viajes "por razones comerciales" por Argelia, Sicilia y Oriente, reunió todos los conocimientos de aritmética y álgebra de su tiempo en su Liber Abbaci (1202), tratado que popularizó en Europa la numeración india.

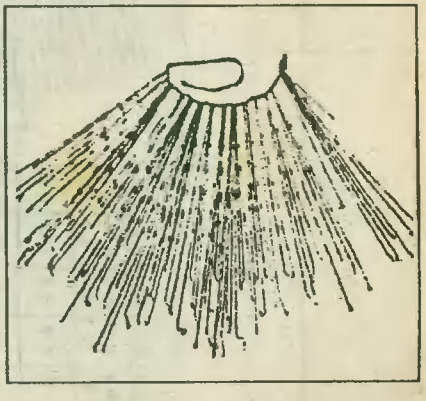
Los signos que representan los números asumieron la forma moderna entre los siglos XIV y XV; los llamamos cifras arábigas, pero su origen es incierto y no derivaron directamente de los signos árabes, ni de las cifras originarias indias, ni tampoco de las fichas medievales. Durante un cierto tiempo la utilidad de los sistemas estaba dividida; las cifras arábigas se usaron solamente para sustituir el ábaco como instrumento de cálculo, y se continuó adoptando la numeración romana para registrar datos y resultados. Pero la vía estaba abierta al triunfo del nuevo sistema y con él a las matemáticas modernas.

Nacidas probablemente en la india hacia el año 500, las "cifras arábigas" adoptaron la forma actual sólo después de la invención de la imprenta: en su historia intervinieron las cifras gubar y los ápices, sistemas de signos usados en los ábacos medievales.

1. Cifras indias (sig. Ii)
2. Cifras indias Devanagari (escritura india moderna).
3. Cifras árabes orientales (de un manuscrito en Samarcanda).
4. Cifras árabes orientales (de un manuscrito de Shiraz - sig.X).
5. Cifras árabes modernas.
6. Cifras gubar (árabes occidentales - sig. IX).
7. Cifras gubar (de un manuscrito español - 976).
8. Apices o cifras de ábaco (manuscritos franceses - sig. XI-XII).
9. Cifras italianas (de un manuscrito florentino - sig. XIV).



Piedrecillas, conchas, perlitas, nudos, muescas, han ayudado siempre al hombre a contar. En Norteamérica los indios usaban collares de conchas como números, monedas y mensajes cifrados. Todavía hoy un collar ayuda a contar las oraciones del rosario. Los *quipus*, manojos de cordeles anudados de modo variado y coloreados, contienen, para nosotros ilegibles, la contabilidad y la estadística del imperio de los incas.



En la América Precolombina, los incas practicaron la suma mediante un método sencillo y original: unían trozos de cuerdas de varios colores por medio de nudos. Cada uno de estos era un número y el conjunto se llamaba quipo.

El "quipo" aquí presentado por Felipe Huamán entre 1583 y 1613 en un manuscrito depositado actualmente en la Librería Real de Copenhague.

1.2 SISTEMAS DE NUMERACIÓN - CLASES.-

- Sistemas aditivos de numeración
- Sistemas multiplicativos de numeración.
- Sistemas de numeración de valor relativo.

Sistemas aditivos de numeración:

Los sistemas aditivos de numeración están caracterizados como aquellos que se basan fundamentalmente en el principio aditivo para obtener los números representados por un conjunto dado de símbolos. Tienen símbolos para el número uno, para la base y potencias de la base y, algunas veces, para múltiplos de potencias de la base. El *principio repetitivo*, esto es, uso repetido del mismo símbolo, se usa para representar números entre potencias de la base. El número representado por un conjunto particular de símbolos es sencillamente la suma de los números que cada símbolo del conjunto representa. Este es el principio aditivo.

Para aclarar estos principios básicos, examinemos algunos ejemplos.

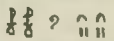
El sistema de jeroglíficos egipcios.

El sistema jeroglífico-egipcio data de 3000 años antes de Cristo y fue usado durante 2000 años aproximadamente. La tabla es una lista parcial de los símbolos usados, con las expresiones decimales equivalentes a su significado original.

Jeroglíficos egipcios

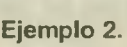
Hindú-Arábigo o decimal	Egipcio	Descripción
1		Un bastón (raya vertical)
10		Talón (arco)
100		un rollo (enrollada)
1000		Una flor de loto
10,000		Un dedo señalado
100,000		Un pescado (renacuajo)
1,000,000		Un hombre asombrado

Ejemplo 1.



Significa 1000 + 1000 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 +1 + 1, que es 2124 como numeral decimal.

Ejemplo 2.



Significa 1,000,000 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 100 + 1000 + 10, que es 1,001,116 como numeral decimal.

Ejemplo 3.

Significa 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, que es 87 como numeral decimal.

Para resumir, el sistema jeroglífico egipcio posee las siguientes propiedades. Los símbolos son jeroglíficos, y se necesitan tantos como 45 caracteres de seis símbolos diferentes para representar los números hasta el 100,000 inclusive. El principio repetitivo es usado para representar números entre uno y la base, la cual es 10, y entre potencias de la base. El principio aditivo se aplica a cualquier conjunto de símbolos para determinar el número representado.

El sistema romano

Los numerales romanos y el sistema de numeración datan de la época de los antiguos romanos. Estos numerales fueron usados generalmente en contabilidad en los países europeos hasta el siglo XVIII, no obstante que los numerales decimales ya eran amplia y generalmente conocidos desde el año 1000. la introducción de la imprenta originó un cambio rápido en los numerales decimales, aunque los numerales romanos continuaron usándose en algunas escuelas hasta aproximadamente 1600 y aún se usan un poco. Como ejemplos, tenemos los numerales en la carátula de un reloj, los numerales de los capítulos en los libros y numerales de las secciones en un escrito.

Mucho se ha escrito acerca de la notación romana. No es nuestro propósito examinar el sistema en detalle, sino simplemente examinar algunas de las características generales.

El uso actual de los numerales romanos está resumido en la tabla 2.

Numerales romanos

Decimal	1		10		100		1000
		5		50		500	
Romano	I		X		C		M
		V		L		D	

El sistema romano es, además, escencialmente un sistema aditivo de numeración en el que un número designado por un conjunto de símbolos es sencillamente la suma de los números representados por cada uno de los símbolos en el conjunto.

A diferencia del sistema egipcio, donde la disposición de los símbolos no tiene un significado especial, el sistema romano usa el concepto de orden de un modelo. Como en el sistema decimal, en cualquier conjunto de símbolos que representan un número, los numerales romanos se escriben en el símbolo para el número mayor a la izquierda. Las excepciones se indicarán posteriormente.

Un símbolo con una barra encima indica que el número representado por el símbolo debe ser multiplicado por 1000. Una doble barra significa la multiplicación por un millón ó 1,000,000. Este es un ejemplo del principio multiplicativo.

Ejemplo

MDCCCLXII = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 1 + 1.

= 1862 en el sistema decimal.

Con tan pocos símbolos en un sistema aditivo, se requiere una gran cantidad de repeticiones para expresar algunos números grandes. Por ejemplo, el numeral decimal 387 se escribe CCCLXXXVII. ¿Cuántos símbolos serían necesarios para designar el número que en los numerales decimales se escribe como 8888?

Actualmente, el uso del sistema romano también incluye el *principio sustractivo*. Este principio establece que si un símbolo de un número pequeño precede a un símbolo de un número mayor, los dos son considerados como un par. El número representado por el par es el número mayor menos el menor. Hoy, este principio está restringido a los numerales para cuatro y nueve, cuarenta y noventa, cuatrocientos y novecientos, etc.

La tabla resume esta propiedad.

Principio sustractivo en los numerales romanos

IV = IIII	XL= XXXX	CD = CCCC
IX = VIIII	XC = LXXXX	CM = DCCCC

El sistema jónico-griego

El sistema numeral jónico-griego fue un sistema de tipo aditivo, pero con un esquema más complicado que incluye mucho más símbolos. Consiste de 24 letras del alfabeto griego más otros tres símbolos fuera de uso para la digamma, sampi y koppa. Inicialmente se usaron las letras mayúsculas; posteriormente, las letras minúsculas. El sistema exigía la memorización del conjunto de símbolos dados en la tabla.

Numerales jónico-griego

1	α	alfa	10	ι	iota	100	ρ	ro
2	β	beta	20	κ	Kappa	200	σ	sigma
3	χ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	50	ν	nu	400	υ	úpsilon
5	ε	épsilon	40	μ	mu	500	φ	fi
6		digamma, fuera de uso	60	ξ	xi	600	χ	ji
7	ζ	zeta	70	ο	omicrón	700	ψ	psi
8	η	eta	60	π	pi	800	ω	omega
9	θ	teta	90		koppa, fuera de uso	900		sampi, fuera de uso.

La caracterización de este sistema incluye los siguientes hechos. Los símbolos son letras de un alfabeto griego antiguo, 27 en total, y tantas como 6 de éstas, con el principio multiplicativo, son necesarias para representar números hasta 100,000 inclusive. Este es un sistema de base 10 y en él se aplica el principio aditivo. Es notable que el uso repetido de los símbolos no es tan acentuado en el sistema griego de numeración comparado con otros, pero tiene el inconveniente de tener muchos símbolos diferentes.

Sistemas multiplicativos de numeración:

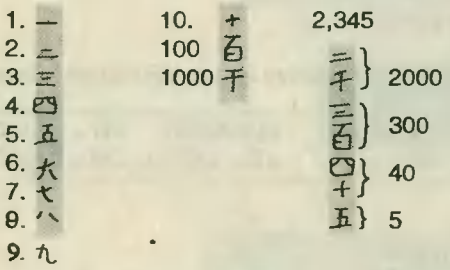
En estos sistemas los símbolos son escogidos para uno, dos, tres, etc, hasta la base, y otro conjunto se escoge para representar potencias de la base. Estos símbolos son usados con los principios multiplicativo y aditivo para representar cualquier número.

El sistema chino-japonés

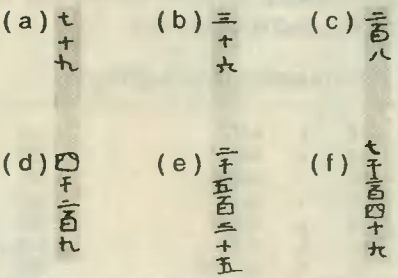
El sistema numeral tradicional chino-japonés es de este tipo. Una lista parcial de símbolos con un ejemplo aparece en esta página.

1. Exprese las siguientes decimales numerales en el sistema japonés:

(a) 42	(b) 54	(c) 36
(d) 125	(e) 246	(f) 782
(g) 2146	(h) 1984	(i) 5469



2. Exprese los siguientes numerales japoneses como numerales decimales:



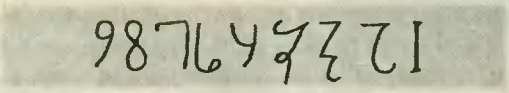
Sistemas de numeración de valor relativo:

Este es el tipo de sistema de numeración con el cual estamos más familiarizados, ya que "nuestro" sistema, el sistema decimal con los símbolos hindú-arábigo, es un sistema de valor relativo. En este tipo de sistema, se escogen símbolos para el cero, uno, dos, etc, hasta el número anterior a la base. En el sistema decimal, estos símbolos son conocidos como *dígitos*. Para un sistema de base "b" hay "b" símbolos. Entonces, cualquier número puede ser expresado en forma única como una suma de términos, cada uno de los cuales es uno de los símbolos básicos multiplicado por una *potencia* de la base. La potencia de la base por la cual se multiplica cada uno de los símbolos básicos está determinada por su lugar en relación a un punto de referencia. En el sistema decimal, éste se llama *punto decimal.*

Los símbolos hindú-arábigos

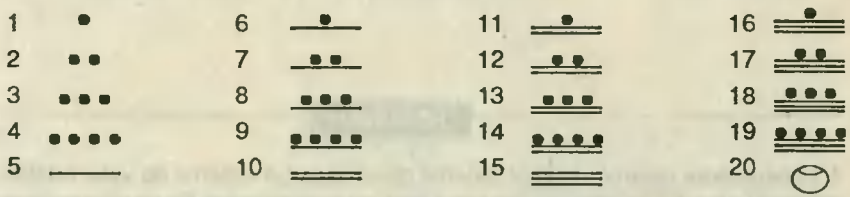
Los símbolos que usamos en la aritmética actual son designados como hindú-arábigos. Hindúes, porque probablemente fueron descubiertos por los hindúes, y arábigos porque

llegaron a Europa en la lengua árabe. Los ejemplos más antiguos que se conservan de nuestros numerales actuales han sido encontrados en algunas columnas de piedra en la India que datan, aproximadamente, de 250 años antes de Jesucristo. Otros ejemplos antiguos son las inscripciones que datan aproximadamente de 100 años antes de Jesucristo, sobre las paredes de una cueva en una colina cerca de Peona, India, y en algunas inscripciones de aproximadamente 200 años después de Jesucristo esculpidas en las cuevas de Nasik, India. Estos ejemplos antiguos no contienen al cero y no emplean valor relativo. El valor relativo, sin embargo, y también el cero, deben haber sido introducidos antes del año 800 después de Jesucristo, ya que el matemático Persa Al-Khowarizmi describe tal sistema, en un libro que data del 825 después de Jesucristo. La forma como los nuevos numerales fueron transmitidos a Europa no es clara históricamente. Probablemente fue a través de comerciantes y viajeros. Los árabes invadieron la Península Ibérica en el año 711 después de Jesucristo, y, sin duda, enseñaron los nuevos símbolos a los españoles. En el libro escrito en España, que data del año 976 después de Jesucristo, fue anotado el siguiente conjunto de símbolos:



El sistema maya

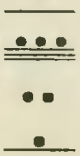
Algunos de nosotros puede haber pensado que nuestro sistema decimal es el único sistema de valor relativo que se ha usado. Esto no es cierto. es de interés el sistema usado por los mayas. Este era un sistema vigesimal (base veinte). La siguiente es una ilustración de su conjunto de símbolos.



(Por razones ajenas a esta discusión, en lugar de ser consecuentes con el uso de la base veinte, los mayas escribían: $(18)(20)$, en lugar de $(20)^2$, $(18)(20)^2$, en lugar de $(20)^2$, etc).

Los mayas, lo mismo que los chinos y japoneses, usaban la forma vertical de escritura. Un ejemplo de un numeral en su sistema es el siguiente.

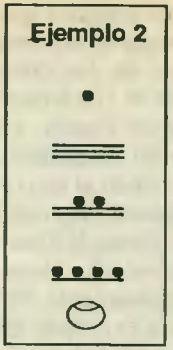
Ejemplo 1



En el sistema decimal esto es

$5[(18)(20)^2] + 18[(18)(20)] + 2(20) + 6 =$
$36{,}000 + 6480 + 40 + 6 = 42{,}526.$

Ejemplo 2



En el sistema decimal ésto es .

$1\,[(18)(20)^3] + 15[(18)(20)^2] + 12[(18)(20)] + 9(20) + 0 = 144{,}000 + 108{,}000 + 4320 + 180 = 256{,}500.$

El sistema babilónico

Los babilónicos usaban un sistema de valor relativo modificado que data de una época aún más antigua en la historia. La base de su sistema era sesenta. No era un verdadero sistema de valor relativo, porque no había símbolo para el cero, y empleaban solamente dos símbolos, un símbolo para el uno, , y un símbolo para el diez, <. Estos símbolos fueron usados repetitivamente para representar los números hasta el 60. Debido que no había símbolo para el cero, el sistema presentaba algunas ambiguedades. Un ejemplo de un número grande en este sistema es el cual, en la notación decimal, sería escrito como:

$$3(60)^3 + 22(60)^2 + 33(60)^1 + 44 = 729{,}224$$

RESUMEN

Es interesante observar que el sistema decimal es un sistema de valor relativo, pero no es el único. Es un sistema con base diez, pero no el único. Es un sistema que utiliza la propiedad aditiva, pero todos los sistemas utilizan ésta. Es un sistema que emplea exactamente diez símbolos, y esta característica, hasta donde se sabe, es única.

1. CIFRAS MINIMAS

Se llaman cifras mínimas a toda cifra que sea menor o igual a la mitad de la base del sistema de numeración .

Así por ejemplo las cifras mínimas en el sistema:

a) de base decimal son:

0, 1, 2, 3, 4, y 5.

b) de base ocho son:

0, 1, 2, 3, 4

c) de base trece son:

0 ,1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Todo número se puede expresar en cifras mínimas sin que cambie su valor.

1.1 Regla para expresar un número en cifras mínimas.-

Se resta de toda cifra mayor, un número igual a la base del sistema de numeración empezando de derecha a izquierda; efectuada esta operación a la cifra de la izquierda se le agrega una unidad y se repite sucesivamente este procedimiento; el número así obtenido estará expresado en cifras mínimas.

Ejemplo

Expresar 8726 en cifras mínimas.

Solución

Como las cifras mínimas son: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. De acuerdo con la regla:

$6 - 10 = \overline{4}$

$2 + 1 = 3$

$7 - 10 = \overline{3}$

$8 + 1 = 9 - 10 = \overline{1}$

$8726 = 1\ \overline{1}\ \overline{3}\ 3\ \overline{4}$

NOTA:
La diferencia entre una cifra mayor y la base del sistema de numeración es siempre una cantidad negativa, en este caso el resultado de la diferencia se le pone una barra horizontal en la parte superior, así en el ejemplo anterior tenemos: $6 - 10 = \overline{4}$

Ejemplo

Expresar $67654_{(8)}$ en cifras mínimas.

Solución

En base ocho a cada cifra mayor se le resta 8, además en base 8, las cifras mínimas son: 0, 1, 2, 3, y 4.

$$4 = 4$$
$$5 - 8 = \overline{3}$$
$$6 + 1 = 7 - 8 = \overline{1}$$
$$7 + 1 = 8 - 8 = 0$$
$$6 + 1 = 7 - 8 = \overline{1}$$
$$0 + 1 = 1 = 1$$
$$67654_{(8)} = 1\ \overline{1}\ 0\ \overline{1}\ \overline{3}\ 4_{(8)}$$

1.2 Las 4 operaciones fundamentales en sistemas de numeración diferentes al decimal.-

Adición.-

La adición en cualquier sistema de numeración es semejante a la que se ejecuta en el sistema decimal con la única variante de que en vez de llevar una unidad de orden inmediato superior cuando se llega a 10, se hará cuando se llegue a un número que sea igual a la base del sistema. Ejemplo: Realizar la siguiente adición: $3451_{(7)} + 12563_{(7)} + 214345_{(7)}$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 3 & 4 & 5 & 1 + \\ & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ \underline{2} & \underline{1} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 2_{(7)} \end{array}$$

Efectuaremos la adición en la siguiente forma:

-En el 1er. orden:

5 + 3 + 1 = 9; como 9 es mayor que 7 e igual a 12 en base 7 escribimos el 2 y retenemos una unidad del orden superior, es decir llevamos 1.

- En el 2do.orden:

1 + 5 + 6 + 4 = 16; 16 - 2 x 7 = 2 y quedan dos unidades que guardamos.

- En el 3er. orden:

2 + 4 + 5 + 3 = 14; 14 - 2 x 7 = 0, quedan 2 unidades que guardamos.

- En el 4to. orden:

2 + 3 + 2 + 4 = 11; 11 - 1 x 7 = 4 y queda una unidad que guardamos.

- En el 5to. orden:

1 + 1 + 1 = 3.

- En el 6to. orden:

2 = 2.

Sustracción.-

Hallar la diferencia $133573_{(12)} - 8\alpha356_{(12)}$

Lo mismo que en el sistema de base 10, cuando las cifras del sustraendo son mayores que las del minuendo se añaden 10, aquí añadiremos 12, que es la base y diremos:

- En el primer orden:

  6 al 12 + 3 = 15 quedan 9

- En el segundo orden:

  5 + 1 = 6 al 7 queda 1

- En el tercer orden:

  3 a 5 quedan 2.

- En el cuarto orden:

  10, al 12 + 3 = 15 quedan 5

- En el quinto orden:

  8 + 1 = 9 al 12 + 3 = 15 quedan 6.

- En el sexto orden: 1 al 1 queda 0

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 3\ 5\ 7\ 3_{(12)} - \\ 8\ \alpha\ 3\ 5\ 6_{(12)} \\ \hline 6\ 5\ 2\ 1\ 9_{(12)} \end{array}$$

Multiplicación.-

Efectuar el producto $12734_{(nueve)} \times 5631_{(nueve)}$

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 7\ 3\ 4\ x \\ 5\ 6\ 3\ 1 \\ \hline 1\ 2\ 7\ 3\ 4 \\ 3\ 8\ 4\ 1\ 3 \\ 7\ 7\ 8\ 2\ 6 \\ 6\ 5\ 0\ 8\ 2 \\ \hline 7\ 4\ 3\ 8\ 2\ 5\ 6\ 4_{(9)} \end{array}$$

* 1 x 4 = 4; 1 x 3 = 3; 1 x 7 = 7, 1 x 2 = 2; 1 x 1 = 1.

* 3 x 4 = 12; 12 - 1 x 9 = 3, se pone 3 y se lleva 1; 3 x 3 = 9; 9 + 1 = 10; se pone 1 y se lleva 1; 3 x 7 = 21; 21 + 1 = 22; 22 - 2 x 9 = 4 y se lleva 2; 3 x 2 = 6; 6 + 2 = 8; 3 x 1 = 3.

* 6 x 4 = 24; 24 - 2 x 9 = 6 y se llevan 2; 6 x 3 = 18; 18 + 2 = 20; 20 - 2 x 9 = 2 y se llevan 2; 6 x 7 = 42; 42 + 2 = 44; 44 - 4 x 9 = 8 y se llevan 4; 6 x 2 = 12; 12 + 4 = 16; 16 - 1 x 9 = 7 y se lleva 1; 6 x 1 = 6; 6 + 1 = 7.

* 5 x 4 = 20; 20 - 2 x 9 = 2 y se llevan 2; 5 x 3 + 2 = 17; 17 - 1 x 9 = 8 y se lleva 1; 5 x 7 + 1 = 36; 36 - 4 x 9 = 0 y se lleva 4; 5 x 2 + 4 = 14; 14 - 1 x 9 = 5 y se lleva 1; 5 x 1 + 1 = 6. La suma de los productos parciales se hace como se ha indicado anteriormente.

División.-

Efectuar la división $123542_{(ocho)} \div 24_{(ocho)}$

Lo más recomendable es formar una tabla en base 8 con todos los productos posibles del

divisor por el cociente (se sabe que las cifras del cociente varían de 0 á 7)

Tabla en base 8:

24 x 1 = 24
24 x 2 = 50
24 x 3 = 74
24 x 4 = 120
24 x 5 = 144
24 x 6 = 170
24 x 7 = 214

```
1 2 3 5 4 2 | 2 4
1 2 0       | 4 1 3 6
-----
    3 5
    2 4
-------
  1 1 4
    7 4
-------
    2 0 2
    1 7 0
-------
      1 2
```

1.3 Ordenes, clases y períodos.-

Para conocer los órdenes de la numeración decimal basta saber leer y escribir correctamente los números naturales. A continuación se presenta un cuadro de órdenes, clases y períodos de los números naturales que nos da una idea clara de lo que se trata.

Cada tres órdenes forman una **clase**: Así; los órdenes de las unidades de decenas y centenas simples forman la **clase de las unidades.** Los órdenes de unidades, decenas y centenas de millar forman la **clase de los millares,** los órdenes de las unidades, decenas y centenas de millón forman la **clase de los millones** así sucesivamente.

Cada seis órdenes (empezando por las unidades simples). Osea cada dos clases forman un **período.** Así la clase de las unidades y la de los millares forman el Primer Período, la clase de los millones y la del millar de millón forman el Segundo Período y así sucesivamente.

Para escribir números enteros:

Es preciso tener presente lo siguiente:

1.- Se escribe principiando de la izquierda, teniendo en cuenta los órdenes correspondientes y poniendo ceros en los lugares de órdenes que no tengan cifras significativas.
2.- Al decir mil, se pone una coma después de la última cifra escrita mencionada. Al decir millón, billón, trillón, etc, se pone en la parte superior y a la derecha de la penúltima cifra escrita mencionada, los números pequeños 1, 2, 3, etc respectivamente.
3.- Entre cada dos de los números pequeños mencionados, así como a la derecha del millón, debe existir seis cifras y entre uno cualquiera de estos números pequeños y la coma del mil, debe existir tres cifras.

Para escribir números decimales:

Se separa la parte entera de la parte decimal por medio de un punto, que se llama punto decimal.

Los órdenes enteros y los decimales que tienen nombres análogos están a igual distancia del lugar de las unidades, así tanto las decenas como las décimas, las centenas como las centésimas, etc. Están a igual distancia de las cifras de las unidades simples. Por ejemplo: 654 mil 321 enteros, 23 mil 456 cien milésimos, observamos que los órdenes enteros y los decimales que tienen nombres análogos están a igual distancia del lugar de las unidades.

Para escribir un número decimal, se escribe primero la parte entera. S i la hay, seguida de un punto. Cuando no hubiera parte entera, se le reemplaza por un cero, seguido del punto. Después del punto se escriben de izquierda a derecha los decimales, cuidando colocar cada cifra en el lugar correspondiente al orden que representa, y si algún orden decimal carece de unidades se escribe un cero en el lugar correspondiente a estas unidades.

Así para escribir catorce unidades novecientos catorce diez milésimas, se escribirá 14,0914, poniendo un cero para reemplazar las décimas que faltan. Para escribir trescientos cuarenta y nueve milésimas, se escribirá, poniendo un cero en el lugar de las unidades o enteros, y un punto: 0.349.

E N T E R O S	4TO. PERIODO	8va. Clase	24avo. orden 23avo. orden 22avo. orden	Centenas de millar de trillón Decenas de millar de trillón Unidades de millar de trillón
		7ma. Clase	21avo. orden 20avo. orden 19avo. orden	Centenas de trillón Decenas de trillón Unidades de trillón
	3ER. PERIODO	6ta. Clase	18avo. orden 17avo. orden 16avo. orden	Centenas de millar de billón Decenas de millar de billón Unidades de millar de billón
		5ta. Clase	15avo. orden 14avo. orden 13avo. orden	Centenas de billón Decenas de billón Unidades de billón
	2DO. PERIODO	4ta. Clase	12avo. orden 11avo. orden 10avo. orden	Centenas de millar de millón Decenas de millar de millón Unidades de millar de millón
		3ra. Clase	9no. orden 8avo. orden 7avo. orden	Centenas de millón Decenas de millón Unidades de millón
	1ER. PERIODO	2da.. Clase	6to. orden 5to. orden 4to. orden	Centenas de millar Decenas de millar Unidades de millar
		1ra. Clase	3er. orden 2do. orden 1er. orden	Centenas simples Decenas simples Unidades simples.

⊙ PUNTO DECIMAL

DECIMALES				
	1ER. PERIODO	1ra. Clase	1er. sub-orden 2do. sub-orden 3er. sub-orden	décimas centésimas milésimas
		2da. Clase	4to. sub-orden 5to. sub-orden 6to. sub-orden	diez milésimas cien milésimas mil milésimas-millonésimas
	2DO. PERIODO	3ra. Clase	7mo. sub-orden 8vo. sub-orden 9no. sub-orden	diez mil milésimas-diez millonésimas. cien mil milésimas- cien millonésimas. millón milésimas- mil millonésimas
		4ta. Clase	10mo. sub-orden 11vo. sub-orden 12vo. sub-orden	millón diez milésimas- diez mil millonésimas. millón cien milésimas- cien mil millonésimas millón millonésimas - billonésimas.
	3ER. PERIODO	5ta. Clase	13vo. sub-orden 14vo. sub-orden 15vo. sub-orden	diez billonésimas cien billonésimas mil billonésimas
		6ta. Clase	16vo. sub-orden 17vo. sub-orden 18vo. sub-orden	diez mil billonésimas cien mil billonésimas trillonésimas
	4TO. PERIODO	7ma. Clase	19vo. sub-orden 20vo. sub-orden 21vo. sub-orden	diez trillonésimas cien trillonésimas mil trillonésimas
		8va. Clase	22vo. sub-orden 23vo. sub-orden 24vo. sub-orden	diez mil trillonésimas cien mil trillonésimas cuatrillonésimas.

4. CAMBIOS DE SISTEMAS DE NUMERACION

4.1. Cambios de sistemas de numeración con números enteros y decimales.-

1er. caso:

Dado un número en cualquier sistema de numeración, representarlo en base 10 .-

Bastará con descomponer el número dado en su forma polinómica, ya que mediante este procedimiento averiguaremos cuántas unidades simples posee dicho número. Ejemplo:
Representar en el sistema decimal el número: $\overline{\alpha 11\,\beta 2_{(12)}}$

Descomponiendo el número en forma polinómica:

$\overline{\alpha 11\,\beta 2_{(12)}} = 10 \times 12^4 + 1 \times 12^3 + 1 \times 12^2 + 11 \times 12 + 2 = 209366$ unidades simples, pero con 209366 u.s. en el sistema decimal se puede escribir dicho número.

También se puede aplicar la regla práctica de Ruffini:

Regla práctica (RUFFINI).-

Para expresar en el sistema decimal un número de cualquier otro sistema, se escriben en una línea horizontal las cifras del número , de izquierda a derecha. Debajo de la primera cifra y separada por un trazo horizontal se escribe otra vez dicha cifra, se multiplica por la base y su producto se escribe debajo de la segunda cifra para sumarlo con ella, cuya suma se escribe debajo del trazo horizontal; se multiplica esta suma por la base y su producto se coloca bajo la tercera cifra, y así sucesivamente, hasta sumar la última cifra, este último resultado representará al número dado en el sistema decimal.

Tomando el ejemplo anterior: $\overline{\alpha 11\,\beta 2_{(12)}}$ a la base 10

	α	1	1	β	2
		+			
12 →		120	1452	17436	209364
	10	121	1453	17447	209366

Rpta.

2do Caso:

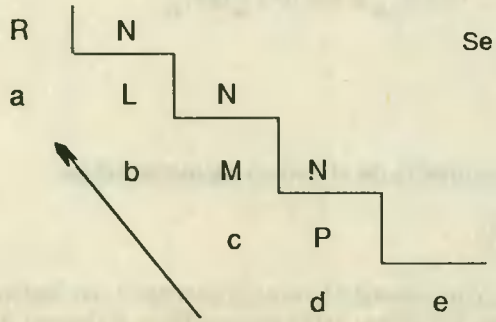
Dado un número en el sistema decimal representarlo en otro sistema de base "N".-

REGLA.-

Se divide el número dado entre el valor "N", de la base deseada, luego el cociente resultante, se divide entre el valor de la base "N" y así sucesivamente hasta obtener un último cociente cuyo valor sea menor a la base.

Luego se toma el último cociente de los residuos en el orden del más reciente al más antiguo y se forma el número en base "N". Así el número "R" se desea pasar a base "N".

Suponiendo:

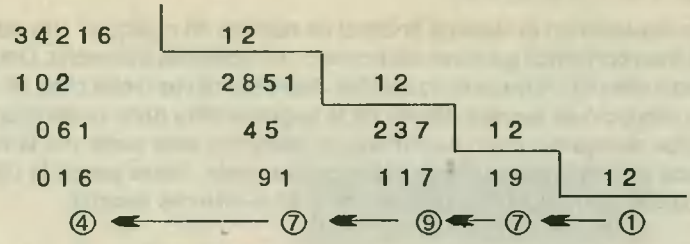


Se debe cumplir:

$e < N$

$\therefore R = \overline{edcba}_N$

Representar el número 34216 en base 12:

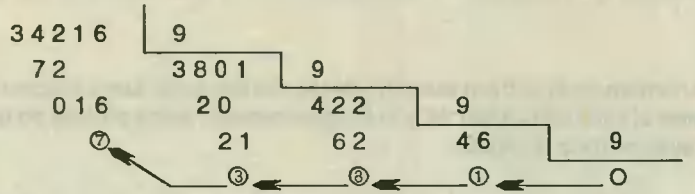


$\therefore 34216 = 17974_{(12)}$

3er. Caso:

Dado un sistema en base"N", representarlo en base "K" siendo N≠ K≠ 10.-
Para expresar un número de la base "N" a base "K",se expresa primero el número en base decimal y luego el valor resultante se envía a la base "K" requerida. Ejemplo: Representar $17974_{(12)}$ a base 9.

$17974_{(12)}$ a base 10, esto resulta $34216_{(10)}$ este número lo enviamos a base 9.



$34216 = 51837_{(9)}$

$\therefore 17974_{(12)} = 34216 = 51837_{(9)}$

Casos especiales en cambios de sistemas de numeración:

Primer caso especial

"Trasladar un número de un sistema diferente al decimal, a otro sistema, también diferente al decimal, directamente, sin utilizar como intermediario al sistema decimal".

Se presentan dos variantes:

Primera variante:

"Cuando la base del número propuesto es mayor que la base a la cual se va a trasladar".

Aplicación:

Trasladar el número $68a4_{(once)}$ a base ocho.

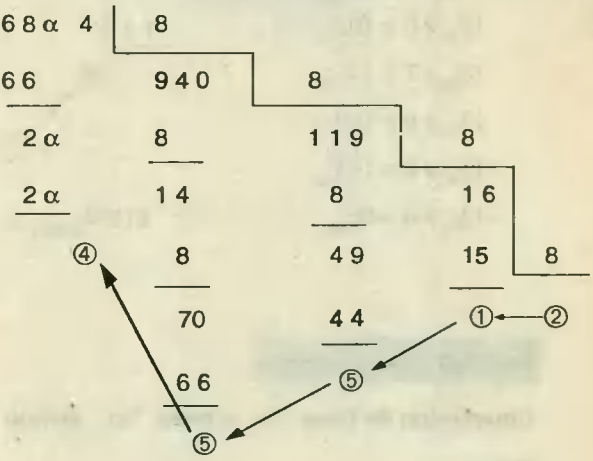
Método:

Se aplica el método de las divisiones sucesivas, efectuando todas las operaciones en el sistema del número propuesto (once).

Tabla en base once :

$8 \times 1 = 8$
$8 \times 2 = 15_{(11)}$
$8 \times 3 = 22_{(11)}$
$8 \times 4 = 2\alpha_{(11)}$
$8 \times 5 = 37_{(11)}$
$8 \times 6 = 44_{(11)}$
$8 \times 7 = 51_{(11)}$
$8 \times 8 = 59_{(11)}$
$8 \times 9 = 66_{(11)}$
$8 \times \alpha = 73_{(11)}$

Divisiones sucesivas
(Hasta que el cociente sea menor que el divisor):



$\therefore \quad 68\,\alpha 4_{(once)} = 21554_{(ocho)}$

Segunda variante:

"Cuando la base del número propuesto es menor que la base a la que se va a trasladar".

Aplicación:

Trasladar el número $21554_{(ocho)}$ a base once.

Método:

La nueva base (once), se representa en el sistema del número propuesto (ocho), y luego se procede como en el caso anterior, efectuando todas las operaciones en el sistema donde se encuentra el número propuesto (ocho).

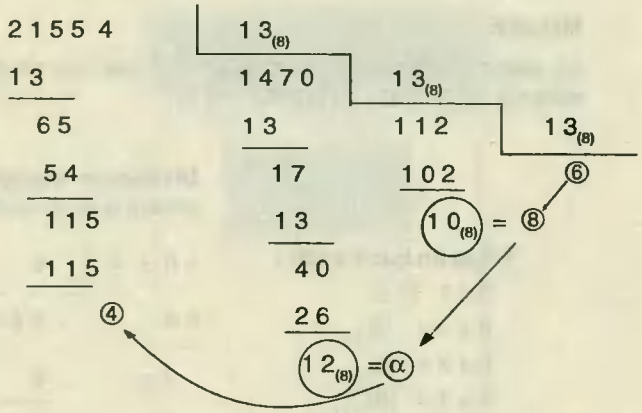
La base once se representa en base ocho:

$$10_{(once)} = 13_{(ocho)}$$

Tabla en base 8

$13_{(8)} \times 1 = 13_{(8)}$
$13_{(8)} \times 2 = 26_{(8)}$
$13_{(8)} \times 3 = 41_{(8)}$
$13_{(8)} \times 4 = 54_{(8)}$
$13_{(8)} \times 5 = 67_{(8)}$
$13_{(8)} \times 6 = 102_{(8)}$
$13_{(8)} \times 7 = 115_{(8)}$
$13_{(8)} \times 8 = 130_{(8)}$
$13_{(8)} \times 9 = 143_{(8)}$
$13_{(8)} \times \alpha = 56_{(8)}$

Divisiones sucesivas



$\therefore \quad 21554_{(ocho)} = 68\,\alpha\,4_{(once)}$

Segundo caso especial

Conversión de base "n" a base "m" siendo $m = n^k$

Método:

A partir de la derecha se separa en grupos de "k" cifras, luego cada grupo se convierte al sistema decimal; estas conversiones determinará las cifras del número en base (n^k).

Ejemplo

$2\,11\,2\,1\,210121212_{(tres)}$ a base 81 (3^4).

2 1	1 2 1 2	1 0 1 2	1 2 1 2
$2 \times 3 + 1 = 7$	$1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2 = 50 = \theta$	$1 \times 3^3 + 1 \times 3 + 2 = 32 = \lambda$	$1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2 = 50 = \theta$
⑦			

$$2\,1\,1\,2\,1\,2\,1\,0\,1\,2\,12\,1\,2_{(3)} = 7\,\theta\,\lambda\,\theta_{(81)}$$

Tercer caso especial

Conversión de base n^k a base "n"

Método:

Cada una de las cifras se convierte a base "n", teniendo cuidado de obtener períodos de "k" cifras; si algún período resultase incompleto se le cargará cero(os) al a izquierda hasta completarlo.

Ejemplo

$$2345761_{(8)} \text{ a base } 2 \;:\; 8 = 2^{3} \leftarrow \text{período}$$

2	3	4	5	7	6	1
1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0	0 0 1

$$\therefore \quad 2345761_{(8)} = 10011100101111110001_{(2)}$$

4.2. Cambios de sistemas de numeración con números fraccionarios.-

1er. Caso:

Dada una fracción exacta o limitada del sistema decimal, representará en otro sistema de numeración.-

Aplicación:

0.7 a base 8

Procedimiento:

$$0,7 = \frac{7 \;\rightarrow \text{a base } 8}{10 \;\rightarrow \text{a base } 8} \; \frac{7_{(\text{ocho})}}{12_{(\text{ocho})}}$$

Se realiza la división en el sistema de base 8

$$0,7 = \frac{7}{10} = \frac{7_{(\text{ocho})}}{12_{(\text{ocho})}} = 0.\overbrace{54631}_{(\text{ocho})}$$

Tabla en base 8:

12 x 1 = 14
12 x 2 = 30
12 x 3 = 44
12 x 4 = 60
12 x 5 = 74
12 x 6 = 90
12 x 7 = 104

Método práctico:

0.	7 x
0.	8
5.	6
	8
4.	8
	8
6.	4
	8
3.	2
	8
1.	6

Se traza una vertical en el punto de fracción del número dado.

La parte decimal se multiplica por la nueva base; del resultado, la parte entera se coloca a la izquierda de la vertical y la parte decimal se vuelve a multiplicar por la nueva base y así sucesivamente.

$0.7 = 0.\overline{54631}_{(ocho)}$

Nota:

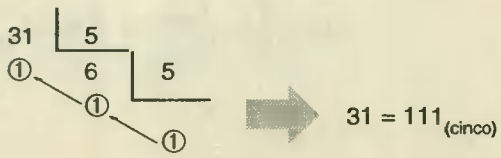
Para convertir un número que tiene parte entera y parte decimal, se trabaja por separado, trasladando primero la parte entera y luego la parte decimal y luego se suman ambos resultados.

Aplicación:

Trasladar 31.237 a base 5

Procedimiento:

1ro. Con la parte entera:



$31 = 111_{(cinco)}$

2do. con la parte decimal

0.	237	x
	5	
1.	185	
	5	
0.	925	x
	5	
4.	625	x
	5	
3.	125	x
	5	
0.	625	x
	5	
3.	125	x
	5	
0.	625	x
	5	
3.	125	

$$0.237 = 0.\overset{\frown}{10430}_{(cinco)}$$

$$\therefore 31.237 = 111.\overset{\frown}{10430}_{(cinco)}$$

2do. Caso:

Dada una fracción exacta en cualquier sistema, trasladarla al sistema decimal.-

Aplicación: $0.2_{(7)}$ a base 10.

Procedimiento:

$$0.2_{(siete)} = \frac{2 \rightarrow \text{a base 10}}{10_{(7)} \rightarrow \text{a base 10}}$$

$$0.2_{(siete)} = \frac{2}{10_{(7)}} = \frac{2}{7}$$ se ejecuta la división en el sistema decimal .

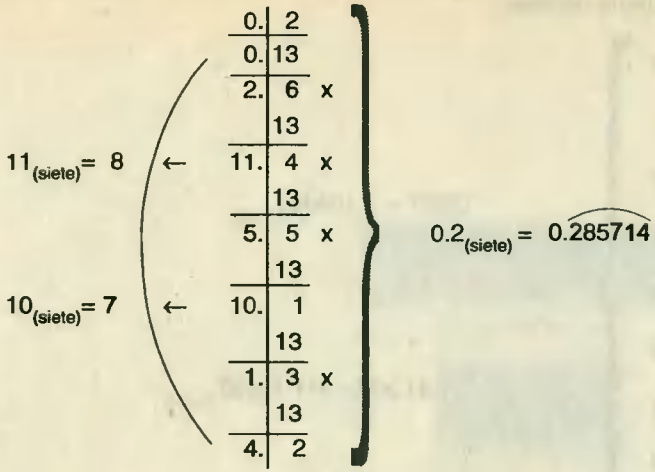
$$0.2_{(siete)} = 0.\overset{\frown}{285714}$$

Método Práctico.-

La nueva base (10), se traslada al sistema del número dado (7):

$$10 = 13_{(siete)}$$

Se multiplica la parte fraccionada por la nueva base; la parte entera se coloca a la izquierda de la vertical, la nueva parte fraccionada se vuelve a multiplicar por la nueva base, y así sucesivamente...



3er. Caso:

Transformar una fracción de un sistema no decimal a otro sistema no decimal.-

Aplicación.-

$0.5_{(ocho)}$ al sistema nonario.

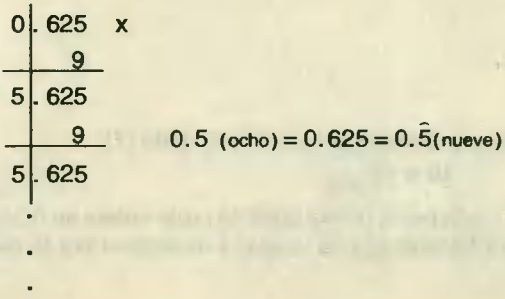
Procedimiento.-

1°. Se traslada al sistema decimal:

$$0.5_{(ocho)} = \frac{5}{10_{(ocho)}} \begin{matrix} \rightarrow \text{a base 10} \\ \rightarrow \text{a base 10} \end{matrix}$$

$$= \frac{5}{8} = 0.625$$

2°. La fracción decimal equivalente se traslada al nuevo sistema aplicando el primer caso.



4to. Caso:

Trasladar una fracción decimal inexacta a cualquier otro sistema.-

Aplicación.-

Convertir $0.\hat{7}$ a base 7.

Procedimiento:

$$0.\hat{7} = \frac{7}{9} \begin{matrix} \rightarrow \text{ a base 7} \\ \rightarrow \text{ a base 7} \end{matrix} = \frac{10_{(siete)}}{12_{(siete)}}$$

Se ejecuta la división en base 7:

$$0.\hat{7} = 53\overset{\frown}{053}_{(siete)}$$

3. PROGRESION ARITMETICA

Se denomina progresión aritmética o por diferencia a una sucesión de términos dispuestos ordenadamente tales como la diferencia entre dos términos consecutivos, es una cantidad constante llamada razón.

También se puede definir como aquella sucesión en la que cualquier término es igual al anterior aumentado en la razón.

Notación:
Toda progresión aritmética se representa mediante el símbolo ÷ colocado delante del primer término y entre término y término se coloca un punto de separación.

Ejemplo

÷ 6 . 9 . 12 . 15 . 18 ..... . 210 progresión de razón:3

Ejemplo

Sea la progresión aritmética de "n" términos:

$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n .$

$a_1 \rightarrow$ primer término ó término donde se inicia la P.A. considerada.

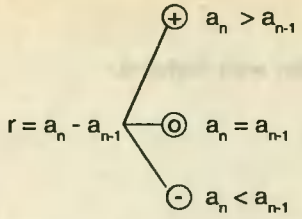
$a_n \rightarrow$ último término o n-ésimo término.

$n \rightarrow$ número de términos.

$S \rightarrow$ suma de los "n" términos.

$r \rightarrow$ razón

$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots\ldots\ldots = a_n - a_{n-1}$



P.A. creciente: ÷8 . 15 . 22 . 29 . 36 . 43 . ..
r = 15 - 8 = 7

No existe P.A.

P.A. decreciente: ÷(-8) . (-10) . (-12) . (-14)
r = -2.

Propiedad:

En toda P.A. la suma de los términos equidistantes de los extremos es una cantidad constante a través de toda progresión e igual a la suma de los extremos.
Cuando el número de términos es impar, el término central de la progresión será la media aritmética de los términos extremos.

Cuando "n" es par:

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots\ldots a_{n-3} . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots\ldots$$

Cuando "n" es impar:

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots\ldots a_c . \quad . a_{n-1} . a_n$$

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{lugar } t_c = \frac{n+1}{2}$$

Ejemplo "n" par:

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31$$

Ejemplo "n" impar:

$$\overset{t_c}{\div 3 . 8 . 13 . \textcircled{18} . 23 . 28 . 33}$$

$18 = \frac{3+33}{2}$ (media aritmética)

lugar $a_c = \frac{7+1}{2} = 4^{to.}$

Término de un lugar cualquiera (lugar "n"):

El valor de un término de lugar cualquiera es igual al primer término más tantas veces la razón como términos le anteceden a dicho término.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Sea la P.A.:

$\div a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n$

lugar	valor
1°	a_1
2°	$a_2 = a_1 + r$
3°	$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$
4°	$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
n°	$a_n . (a_1 + r) . (a_1 + 2r) . (a_1 + 3r) .$

Razón: $r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$ Nº de términos: $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$ .....(α)

Suma de los términos:

Se dan las siguiente fórmulas:

I. Formula en función de a_1, a_n, y n: $S = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) n$ .....(β)

II. Fórmula en función de a_1, n y r: $S = \left[\dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] n$ .....(χ)

Importante:

Las fórmulas que indican las expresiones (α), (β), (χ), se utilizan en la resolución de problemas sobre numeración donde intervengan series numéricas (series que sean P.A.).

Ejemplo: Cuanto suman los términos de la siguiente serie:

$$\underbrace{S = 12 + 15 + 18 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{27 \text{ términos}}$$

Solución

Primero, debemos conocer cual es el último término (a_n)

Como:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \qquad \begin{cases} a_n = \text{último término} \\ a_1 = \text{primer término} \\ r = \text{razón.} \end{cases}$$

$$a_n = 12 + 26 \times 3 = 90$$

$$\therefore S = \left(\frac{12+90}{2}\right) 27 = 1377$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Observaciones Previas

1 ✻ Si dos números enteros son iguales y están representados en distintos sistemas de numeración, el que **"aparenta"** mayor valor, tendrá **menor** base.

2 ✻ Si dos números fraccionarios (cimales) son iguales y están representados en distintos sistemas de numeración, el que **"aparenta"** mayor valor, tendrá **mayor** base.

3 ✻ Por lo general, este tipo de problemas se resuelven aplicando descomposición polinómica y recordando que en ningún sistema de numeración un número puede empezar por cero a la izquierda.

4 ✻ Debemos reiterar que las cifras de un sistema de numeración son siempre menores que la base.

1. Hallar a + b, a partir de: $\overline{1ab4}_{(n)} = \overline{n31}_{(6)}$

Solución

De acuerdo a (1✻) podemos establecer que:

$4 < n < 6 \Rightarrow \boxed{n = 5}$,

tendremos:

$\overline{1ab4}_{(5)} = \overline{531}_{(6)}$; para determinar "a" y "b" bastará con trasladar $531_{(6)}$ a base cinco y se obtendrá: 1244

Rpta. $\therefore a = 2 \wedge b = 4 \Rightarrow a + b = 6$

2. ¿En qué sistema de numeración el número que se escribe 0.1664 en base diez, está representado por 0.0404?

Solución

Sea "n" la base

De acuerdo a (2 *) podemos establecer que:

$$4 < n < 10$$

$0.1664 = 0.0404_{(n)}$ descomponiendo polinómicamente:

$$\frac{1}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{4}{10^4}=\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^4} \quad \text{.....(1)}$$

Para que la igualdad (1), se verifique, "n" sólo puede usar los factores 2 y 5, por lo que se deduce que "n" no puede ser más que 8 ó 5.

Para n = 8 no cumplirá porque: $\frac{4}{8^2} < \frac{1}{10}$

$\therefore$ n = 5 debe ser la solución. En efecto:

$$\frac{4}{25}+\frac{4}{625}=\frac{16}{100}+\frac{64}{10000}$$

$$\frac{1664}{10000}=\frac{1664}{10000}$$

Rpta. En el sistema de base 5.

3. Hallar "n" en la siguiente igualdad: $0.0102_{(n)} = 0.0432$

Solución

Podemos establecer que: $2 < n < 10$ [Por (1*)]

Además:
$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}=\frac{4}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{2}{10^4}$$

$$\frac{n^2+2}{n^4}=\frac{27}{625}$$

$625n^2 + 1250 = 27n^4$

$1250 = n^2 (27n^2 - 625)$

$2 \times 5^4 = n^2 (27n^2 - 625)$ ordenado

$2 \times 5^2 \times 5^2 = n^2 (27n^2 - 625) \Leftrightarrow \boxed{n = 5}$

Rpta. n = 5

4. Si: $\overline{abca}_{(8)} = \overline{ddbc}_{(12)}$; hallar a, b, c y d.

Solución

Se cumple que: a, b, y $c < 8 \wedge a \neq 0$

$\overline{abca}_{(8)} = \overline{ddbc}_{(12)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$$a(8^3) + b(8^2) + c(8) + a = d(12^3) + d(12^2) + b(12) + c$$

$$513a + 52b + 7c = 1872d$$

$$52b + 7c = 1872d - 513a \leq 413$$

Porque: El máximo valor de $52b + 7c$ es: $52(7) + 7(7) = 413$.

$$1 \quad 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$
$$2 \quad 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

De (α):

$$52b + 7c = 1872(1) - 513(3) = 333 \Leftrightarrow b = 6;\ c = 3$$

De (β):

$$52b + 7c = 1872(2) - 513(7) = 153 \Leftrightarrow b = 2;\ c = 7$$

Rpta.∴ $a = \begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}$ $b = \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}$ $c = \begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}$ y $d = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

5. Hallar la diferencia entre el mayor número en base 7 de la forma $\overline{a\,b\,c}$ y el menor número en base 5 de la forma $\overline{d\,e\,f}$, si a letra diferente corresponde número diferente, dando la respuesta en base 10.

Solución

El mayor número de 3 cifras en base 7 que cumpla con que sean diferentes es: $\overline{654}_{(7)}$ y el menor en base 5 de 3 cifras diferentes es: $\overline{102}_{(5)}$

$$\overline{654}_{(7)} = 4 = 5 \times 7 + 6 \times 49 = 333$$

$$\overline{102}_{(5)} = 2 = 25 = 27$$

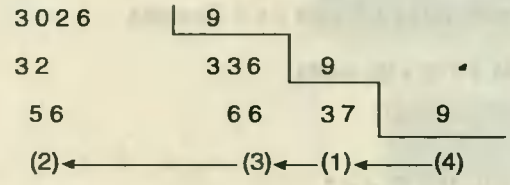
Rpta. La diferencia es 333 - 27 = 306.

6. Si en cierta zona se usa el sistema nonario para las medidas. Determinar cuántas pesas se usarán como mínimo para equilibrar un objeto que pesa 3026 kilos.

Solución

Lo que el problema pide es hallar la suma de cifras del número 3026 en base 9. Debido a que se usarán pesas de 1, 9, 81, 729, ...kgs.

Luego:



$3026 = 4132_{(9)}$ $\quad 2 + 3 + 1 + 4 = 10$

Rpta. Se usarán 10 pesas.

7. Existen 2 valores de "a" que cumplen:

$$\overline{a(a+1)\,(a+2)}_{(a+3)} = \overline{105}_{(4a)}$$

Dar su diferencia:

Solución

Aplicando la descomposición polinómica:

$$(a+2) + (a+1)(a+3) + a(a+3)^2 = 5 + 1 \times (4a)^2$$

Efectuando:

$$a + 2 + a^2 + 4a + 3 + a^3 + 6a^2 + 9a = 5 + 16a^2$$

$$14a + 7a^2 + a^3 = 16a^2 \qquad \div a$$

Ordenando:

$$a^2 - 9a + 14 = 0$$

Factorizando:

$$(a-7)(a-2) = 0$$

Rpta. Los valores de a son 7 y 2 y su diferencia es 5.

8. Si: $\overline{abc}_{(9)} + \overline{ab}_{(8)} + \overline{bc}_{(7)} = 693$

Hallar: a x b - c

Solución

Descomponiendo:

$$\overline{abc}_{(9)} + \overline{ab}_{(8)} + \overline{bc}_{(7)} = 693$$

$$c + 9b + 81a + b + 8a + c + 7b = 693$$

$$89a + 17b + 2c = 693$$

Además:

$$a < 9,\ b < 7,\ c < 7$$

Luego:

$$574 < 89a < 693 \Rightarrow a = 7$$
$$17b + 2c = 693 - 623 = 70$$
$$17b + 2c = 70 \Rightarrow \begin{matrix} a = 7 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{matrix}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$4 \quad 1$$

Luego:

Rpta. 7 x 4 - 1 = 27.

9. $\overline{ANITALAVALATINA}_{(M)}$ es el menor número capicúa posible, siendo que a letra ($\neq$) corresponde número $\neq$

Hallar: $\overline{ISLA}_{(8)}$. Dando la respuesta en base 10.

Solución

En primer lugar determinemos cuántas cifras diferentes intervienen en el capicúa. A, N, I, T, L, V, para que sea el menor posible: A = 1, N = 0, I = 2, T = 3, L = 4, V = 5, y M = 6.

Luego:

$$\overline{ISLA}_{(8)} = \overline{2S41}_{(8)} \text{ donde S sólo puede ser 7.}$$

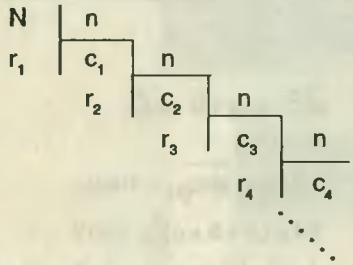
$$\overline{2741}_{(8)} = 1 + 4 \times 8 + 7 \times 8^2 + 2 \times 8^3$$

Rpta. $\overline{ISLA}_{(8)} = 1505$

10. Carlos al efectuar la transformación de un número a base n, por el método de divisiones sucesivas, por equivocación disminuyó el cuarto residuo en 5 unidades. Si el error cometido fue de 3645 unidades. Indicar cuántos valores puede tomar el residuo equivocado. (Los cocientes en todo momento fueron exactos).

Solución

Sea N el número a tranformar y r_4 es el residuo equivocado el verdadero es $r_4 + 5$



El número verdadero debió ser: $\overline{.....(r_4+5)r_3 r_2 r_{1(n)}}$

El error cometido es la diferencia y por dato

$$\overline{.....(r_4+5)r_3 r_2 r_{1(n)}} \quad - \quad \overline{.....r_3 r_2 r_{1(n)}} = 5n^3 = 3645$$

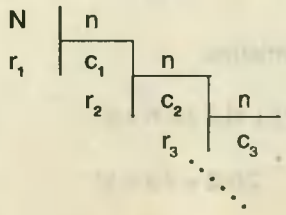
$n = 9; \; r_4 + 5 < 9 \qquad r_4 < 4 \; ; \; r_4 = 0, 1, 2, 3$

Rpta. r_4 toma 4 valores.

11. Mario, al efectuar la transformación de un número a base n, por el método de divisiones sucesivas, por equivocación disminuyó el tercer residuo en 4 unidades. Si el error cometido fue de 144 unidades, indicar la base n. (Los cocientes en todo momento fueron exactos).

Solución

Sea N el número a transformar y r los residuos r_3 es el residuo equivocado el verdadero es $r_3 + 4$



El número debió ser: $\ldots\ldots(r_3+4)\,r_2\,r_{1(n)}$

El error es la diferencia y por dato: $\overline{\ldots\ldots(r_3+4)\,r_2\,r_{1(n)}} - \overline{\ldots\ldots r_3\,r_2\,r_{1(n)}} = 4n^2 = 144$

Rpta. De donde n = 6

12. En el sistema octival. ¿Que número es igual al cubo de la suma de sus tres cifras?

Solución

Podemos establecer: $\overline{abc}_8 = (a+b+c)^3_{(8)}$

como: $100_{(8)} < \overline{abc}_{(8)} < 1000_{(8)}$

$64 < (a+b+c)^3_{(8)} < 512$

$4 < a+b+c < 8 \Rightarrow a+b+c = \begin{cases} 5 \\ 6 \\ 7 \end{cases}$

Si: $a+b+c=5 \Rightarrow 5^3 = 175_{(8)} \Rightarrow 1+7+5 = 13 \neq 5$ No!

$a+b+c=6 \Rightarrow 6^3 = 330_{(8)} \Rightarrow 3+3+0 = 6$ Si!

$a+b+c=7 \Rightarrow 7^3 = 527_{(8)} \Rightarrow 5+2+7 = 14 \neq 7$ No!

Luego: $\overline{abc}_{(8)} = 330_{(8)}$ ya que $330_{(8)} = (3+3+0)^3_{(8)}$

Rpta. $\therefore$ El número es: $330_{(8)}$

13. Hallar el valor de "x", para que $\overline{62\,x\,6}_{(7)}$, sea cubo perfecto.

Solución

Por condición del problema, podemos establecer:

$$\overline{62\,x\,6}_{(7)} = k^3 \qquad k \in \mathbb{N}$$

Descomponiendo polinómicamente:

$$6(7^3) + 2(7^2) + x(7) + 6 = k^3$$

$$2162 + 7x = k^3$$

$$x = \frac{k^3 - 2162}{7}$$

se deduce que: $k^3 > 2162 \Rightarrow k = 13, 14, \ldots$

sólo cumple: $k = 13,$

por lo tanto: $x = \frac{13^3 - 2162}{7} = 5$

Rpta. $x = 5$

14. Trasladar el número $132_{(n)}$ a base $(n + 2)$:

Solución

1° El número $132_{(n)}$ lo pasamos a base 10: (Ruffini)

	1	3	2
n		n	$(n+3)n$
	1	$(n+3)$	$\mathbf{(n+3)n+2}$

2° El número $(n + 3)n + 2$ lo pasamos a base $(n + 2)$

$$(n+3)n = 2 = n^2 + 3n + 2 = n^2 = n + 2n + 2 = n(n+1) + 2(n+1)$$

$$(n+3)n = 2 = (n+1)(n+2)$$

Aplicando divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{l|l} (n+1)(n+2) & n+2 \\ \underline{-(n+1)(n+2)} & (n+1) \\ 0 & \end{array}$$

Rpta. $\therefore 132_{(n)} = \overline{(n+1)\,0}_{(n+2)}$

15. Hallar:

i) $a + b + n$; si $\overline{11ab}_{(n)} = 79_{(n^2)}$

ii) Si un número en base 10^n tiene tres cifras; en base 10. ¿Cuántas cifras tendrá?

Solución

i)

$$\begin{array}{c|c} 1\ \ 1 & a\ \ b_{(n)} \\ \underbrace{n+1} & \underbrace{an+b} \\ 7 & 9 \end{array} \Leftrightarrow \quad n = 6, \qquad a = 1 \ \wedge \ b = 3$$

Rpta. $\therefore\ a + b + n = 10.$

ii) Sea N el número de 3 cifras en base 10^n
Se cumple:

$$(10^n)^2 \le N < (10^n)^3$$

$$10^{2n} \le N < 10^{3n}$$

$$1\underbrace{00.....0}_{\text{2n ceros}} \le N < 1\underbrace{00.....0}_{\text{3n ceros}}$$

Rpta. $\therefore$ N tendrá: de (2n + 1) a 3n cifras,

16. Cuál es la base del mayor número de 20 cifras equivalente a:

$$\underbrace{999.....999}_{\text{100 "nueves"}}$$

Solución

En general, el mayor número escrito en base "n" se representa así:

$$\overline{(n-1)(n-1)(n-1).....(n-1)}_{(n)}$$

Efectuamos una breve inducción:

Representado polinómicamente para un número de una cifra

$$\overline{n-1}_{(n)} = \ldots\ldots = n - 1$$

Para un número de dos cifras:

$$\overline{(n-1)(n-1)}_{(n)} = n(n-1) + n - 1 = n^2 - n + n - 1 \ldots\ldots = n^2 - 1$$

Para un número de tres cifras:

$$\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)} = n^2(n-1) + n(n-1) + n - 1 = n^3 - n^2 + n^2 - n + n - 1 \ldots\ldots = n^3 - 1$$

.....

.....

Para un número de 20 cifras..... $= n^{20}-1$

Por condición del problema podemos establecer:

$n^{20} - 1 = 999\ldots\ldots99 \Rightarrow n^{20} = 999\ldots\ldots99 + 1 \Rightarrow n^{20} = 1000\ldots\ldots00$

(100 nueves) (100 nueves) (100 ceros)

$\Rightarrow n^{20} = 10^{100} \Rightarrow n = 10^5$.

Rpta. La base es 10^5

17. Sabiendo que: $144_{(n)} = \overline{aa5}$, determinar a + n

Solución

$n > 4$

$144_{(n)} = \overline{aa5}$, descomponiendo polinómicamente:

$n^2 + 4n + 4 = 100a + 10a + 5$

$(n+2)^2 = \overline{\ldots\ldots5} \Rightarrow n + 2 = \overline{\ldots5} \quad \therefore n + 2 =$ { $15 \Rightarrow n = 13 \ \wedge\ a = 2$; $25 \Rightarrow n = 23$ no cumple.

Rpta. a + n = 15

18. El número $\overline{1x8}$ se escribe en base 8, pero al transcribirlo se comete un error al escribir la segunda cifra, Si al pasar el número equivocado a base 10 se obtiene 180, determinar la suma de las cifras de $\overline{1x8}$.

Solución

$180 - \overline{1x8} = \overline{ayc}_{(8)} - \overline{abc}_{(8)}$

El número equivocado { $\overline{1x8} = \overline{abc}_{(8)}$; $\overline{ayc}_{(8)} = 180$ } $\Rightarrow 180 - \overline{1x8} = 8(y - b)$

$72 - 10x = 8(y - b) \Leftrightarrow x = 4$ luego $\overline{1x8} = 148$

Rpta. $\therefore$ Suma pedida: 1 + 4 + 8 = 13

19. Hallar la suma de las cifras de "S"

"S" = $31_{(7)} + 31_{(10)} + 31_{(13)} + \ldots\ldots + 31_{(91)}$

Solución

Trasladado los sumandos al sistema decimal:

$S = (3 \times 7 + 1) + (3 \times 10 + 1) + (3 \times 13 + 1) + \ldots\ldots + (3 \times 91 + 1)$

$S = 22 + 31 + 40 + \ldots\ldots + 274$ ..... (1)

Se observa que los sumandos forman una progresión aritmética de razón 9.

$\therefore$ # de sumandos es: $\dfrac{274 - 13}{9} = 29$

28 sumandos < > 14 pares:

$S = 22 + 14 \times 305 = 4222$

Rpta. $\therefore$ suma de las cifras: $4 + 2 + 9 + 2 = 17$

20. Dar la suma de todos los números capicuas de 3 cifras que no tengan las 3 cifras iguales.

Solución

Hallando primero la suma de todos de todos los capicúas de 3 cifras y restándosele luego aquellos que tengan las 3 cifras iguales:

Los capicuas de 3 cifras ordenadas son:

101, 202, 303, ..., 909 $\Rightarrow$ suma = N

111, 212, 313, ..., 919 $\Rightarrow \Sigma = N + 90$

⋮

191, 292, 393, ..., 999 $\Rightarrow \Sigma = N + 90 \times 9$

Cada fila es de 90 unidades mayor que la precedente superior. Hallando:

$$N = 9 \times \left(\frac{101 \times 909}{2}\right)$$

N = 4545, la Σ de todos los capicuas es: 4545 + 4635 + 4725 + ... + 5445 = 49,500 y la de los de 3 cifras repetidos es:

$$\left(\frac{111 + 909}{2}\right) \times 9$$

Luego Σ pedida es:

Rpta. 49,500 - 4995 = 44,505.

21. ¿Cuántos números de 4 cifras significativas, diferentes existen en base "n" (n > 4) de tal manera que su suma de cifras sea 10?

Solución

Se podrán usar las cifras 1, 2, 3, 4, ... (n - 1). Al pedirse que la suma de cifras sea 10 y todas sean ($\neq$s) luego sólo se podrá las cifras 1, 2, 3, y 4. El problema queda restringido a formar #s. de 4 cifras $\neq$s con 1, 2, 3, y 4.

a b c d
4 x 3 x 2 1 = 24

Rpta. Se pueden formar 24 números.

22. Hallar $a + b + c$ en:

$\overline{7(b+1)9} = \overline{abcc}_{(n)}$; si tanto a como b son impares siendo:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Solución

Tratando de determinar si n es par o impar.

Como $b = \frac{a+c}{2}$ a impar $\Rightarrow$ c impar

$\overline{7(b+1)9} = c + cn + bn^2 + an^3 =$ Impar

Si n es par la suma es impar, si n es impar la suma daría un par ($\Rightarrow\Leftarrow$) como $n < 10 \Rightarrow$ $n = 8$, 6 pares $4^4 < \overline{7(b+1)9}$

Luego: $\overline{7(b+1)9} = \overline{abcc}_{(8)}$

$709 + 10(b + 1) = 512a + 64b + 8c + c$

$719 = 512a + 54b + 9c$ $\quad n = 6$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

1 3 5 no hay valores

Rpta. $a = 1,\ b = 3,\ c = 5,\ a + b + c = 9.$

23. Un número capicúa de 4 cifras es tal que la diferencia entre su cifra de millares y de decenas, es 3. Si el número se divide entre 11 la cifra de las decenas del cociente es:

Solución

El capicúa es de la forma: $\overline{(b+3)\,bb\,(b+3)}$ Podemos establecer:

$\overline{(b+3)\,bb\,(b+3)} = 11(101b + 273)$. Si se divide entre 11 el cociente es: $101b + 273 = \overline{bob} + 273$ y como $b + 3 = a < 10$ se deduce que la cifra de las decenas del resultado es 7

Rpta. 7

24. Si: $N = 18 \times 13^5 + 15 \times 13^4 + 14 \times 13^2 + 48$, al convertirlo a base trece, se obtiene un número cuya suma de sus cifras es?

Solución

$N = (5 + 13)13^5 + (2 + 13)13^4 + (1 + 13)13^2 + 3 \times 13^1 + 9$

$N = 5(13^5) + 13^6 + 2(13^4) + 13^5 + 1(13^2) + 13^3 + 3(13) + 9$

Ordenando:

$N = 13^5(1) + 13^5(5 + 1) + 13^4(2) + 13^3(1) = 13^2(1) + 13(3) + 9$

$$N = \underbrace{1 \times (13^6) + 6(13^5) + 2(13^4) + 1(13^3) + 1(13^2) + 3(13) + 9}_{\text{Forma polinómica}}$$

$N = 1621139_{(\text{trece})}$

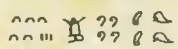
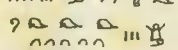
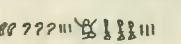
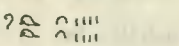
Rpta. Suma de las cifras: $1 + 6 + 2 + 1 + 1 + 3 + 9 = 23$.

PROBLEMAS

1. Exprese los números siguientes en numerales egipcios:

   (a) 77 (b) 629 (c) 90,909 (d) 2,507,916 (e) 2124
   (f) 1,001,116 (g) 808

2. Escriba el decimal equivalente a los siguientes numerales egipcios:

   (a) 
   (b) 
   (c) 
   (d) 

3. Escriba en numerales egipcios:

   (a) la suma de (a) y (b) del problema 2.
   (b) la suma de (a) y (c) del problema 2.
   (c) la suma de (b) y (a) del problema 2.

4. ¿Cuál de los números representados por los numerales del problema 2 es el mayor y cuál es el menor?

5. Exprese lo siguiente en numerales romanos:

   (a) 26 (b) 39 (c) 49
   (d) 342 (e) 431 (f) 449
   (g) 1551 (h) 1961 (i) 2409

6. Exprese cada uno de los siguientes en numerales decimales:

   (a) XXXVII (b) XLIX (c) XCIV
   (d) CCCLXII (e) CDLVII (f) DCXLIV
   (g) MCLI (h) MCMXLV (i) MMCMXMCIX

7. Establezca algunas ventajas del sistema romano sobre el sistema egipcio.

8. Para números menores que 1000, los datos de adición para el sistema romano son:

   IIIII = V VV = X
   XXXXX = L LL = C

CCCCC = D DD = M

(a) Sume: MDCCCLXII + CXLIV

(nota: Aquí es útil de escribir CXLIV como CXXXXIIII.)

(b) Sume: MDXII + DCVII

(c) Reste: MCCVI - DCLXIII

9. (a) ¿Cuál es el siguiente de MCMXLIX?
(b) ¿Cuál es el siguiente de MCM?

10. ¿Que número es mayor, MMCMXXIX o MMDCCXXIX?

11. Duplique cada número en el ejercicio 2.

En los siguientes ejercicios, use d para digamma, k para koppa y s para sampi.

12. Exprese los siguientes numerales decimales en el sistema jónico-griegos:

(a) 36	(b) 39	(c) 49
(d) 342	(e) 431	(f) 449
(g) 1551	(h) 1961	(i) 2409

13. Exprese los siguientes numerales jónico-griegos en notación decimal:

(a) μδ	(b) π ζ	(c) χ ν γ
(d) σδ	(e) ρυβ	(f) ρ ιϒ
(g) ϡ υλε	(h) θ ϡ ψκε	(i) ε Μ δ ϡ φ ξ ζ

14. Exprese algunas desventajas y ventajas, aparte de las mencionadas con anterioridad, del sistema jónico-griego comparado con los sistemas de numeración romano y egipcio.

15. ¿Qué número sigue a (a) ω π γ ? (b) φ μ β ?

16. ¿Cuáles son el mayor y el menor número en el siguiente conjunto?

{ χ ξ δ, χ π η, χ υ δ }

17. Duplique cada número en el ejercicio 2, (a), (d), (g) y escriba el resultado en numerales griegos.

RESOLVER LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1. 413212 a base 6

2. 2124467 a base 12

3. 326546 a base 7

4. 12211122 a base 13

5. 477912 a base 21

6. 549872 a base 7

7. 953785 a base 3

8. 325476 a base 2

9. 854763 a base 16

10. 151234 a base 17

11. 383945 a base 23

12. $2345321_{(6)}$ a base 10

13. $29\alpha9\beta8\chi_{(13)}$ a base 10

14. $527\alpha920_{(11)}$ a base 10

15. $121210102012_{(3)}$ a base 10

16. $3459\alpha\beta\chi\delta_{(14)}$ a base 10

17. $10100101001110_{(2)}$ a base 10

18. $275430615_{(6)}$ a base 10.

19. $523041032_{(6)}$ a base 10.

20. Escribir en base 5 los números $25_{(6)}$, $453\alpha2\beta_{(12)}$, $101011101_{(2)}$

21. Escribir en base 13 los números $1234568_{(9)}$, $12101210120_{(3)}$, $\alpha1\beta2\chi3\delta_{(14)}$

22. $3\alpha4\beta6_{(12)}$ a base 8 y comprobar efectuando el inverso.

23. $49327_{(11)}$ a base 14 y comprobar reduciendo ambos a base 3

24. $124231_{(5)}$ a base 20

25. $2\alpha\beta765_{(12)}$ a base 7

26. $10121_{(3)}$ a base 2

27.- $403201_{(5)}$ a base 7

28. $5389\alpha2\delta_{(17)}$ a base 21

29. $3217941_{(11)}$ a base 2

30. $921\alpha0\beta_{(13)}$ a base 6.

31. Escribir en numeración decimal los números 101, 1010, 1111, 110101 escritos en binario.

32. Escribir en base 5 los números 24, 25, 26, 100, 125, 250, 1000, 3124, 3129.

33. Escrito el número $3\alpha467$ en el sistema duodecimal, escribirlo en base 7.

EFECTUAR LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1. $0.213614_{(7)}$ a base 10 y comprobar con la inversa.

2. $0.19\alpha3\beta45_{(12)}$ a base 10

3. $0.\overline{1901}_{(11)}$ a base 10

4. $0.\overline{34256}_{(7)}$ a base 10

5. $0.212\overline{346}_{(6)}$ a base 10

6. $0.564\overline{217}_{(6)}$ a base 10

7. $0.234987_{(10)}$ a base 11

8. 2.6943201 a base 5

9. $0.\overline{237}$ a base 17

10. $213.214_{(5)}$ a base 7 y comprobar reduciéndolas a base 12

11. $145.\overline{12}_{(6)}$ a base 2 y comprobar reduciéndolas a base 8

12. $1010.\overline{11101}_{(2)}$ a base 12 y comprobar reduciéndolas a base 9

13. $4712.2\overline{167}_{(8)}$ a base 9 y comprobar reduciéndolas a base 10

14. $10012.2001_{(3)}$ a base 4 y comprobar reduciéndolas a base 12

15. Reducir a base 3: 5/8, 4/9, 25/37

16. Escribir en base 12: 4/13, 2/21, 7/45

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE CONTEO DE CIFRAS

Observaciones Previas

Recordar que disponemos de 2 métodos para contar cifras: El método clásico y la fórmula.

1. Hallar en qué sistema de numeración, es posible que al escribir todos los números de tres cifras que no sean capicúas se empleen 1176 cifras.

Solución

Sea "n" la base. Los números de tres cifras serán de la forma:

$\overline{a\ b\ c}_{(n)}$

valores $(n - 1)(n)(n)$

Total de números = $n^2(n - 1)$

Los capicúas

$\overline{m\ p\ m}_{(n)}$

$(n - 1)(n)$

Total de números capicúas: $n(n - 1)$

Entonces, el número de cifras empleadas en numerar los números de tres cifras, no capicuas es:

$3[n^2 (n- 1) - n(n - 1)] = 1176$

Rpta. $\Rightarrow n = 8$

2. Un número siendo escrito en el sistema de base **a**, se puede escribir en el sistema de base **b**, sin pasar por el sistema decimal?
Aplicar a un ejemplo: 25341, escrito en el sistema de base 6, debe ser escrito en el sistema de base 8.
Escribamos sobre una línea la serie natural de los números en el sistema de numeración de base **a**; es necesario de disponer de a - 1 cifras, el número **a** siendo por convención representado por 10 (1 unidad del 2do. orden y 0 unidades del 1er. orden):

I.- $\overbrace{1, 2, 3, ...\alpha, \beta}^{a-1 \text{ cifras}}, 10, 11, 12, ...1\alpha, 1\beta, 20, 21, 22, ...2\alpha, 2\beta, 30.$
Del mismo modo, escribamos la serie análoga correspondiente al sistema de base **b**:

II.- $\overbrace{1, 2, 3, ...\alpha', \beta'}^{b-1 \text{ cifras}}, 10, 11, 12...1\alpha', 1\beta', 20, 21, 22, ...2\alpha', 2\beta', 30.$, y a todo número de la serie I hagamos corresponder el número de la misma fila de la serie II . Luego, si N es un número dado de la serie I , el número N' que le corresponde en la serie II es este número N transcrito del sistema de base a en el sistema de base **b**, y recíprocamente. Se ve luego que es teóricamente posible pasar de un sistema de numeración a otro sin intermediar el sistema decimal: este paso de un sistema a otro quedaría limitado en la práctica a las series I y II.

Pero el método llegando a ser una aplicación difícil en el caso de los grandes números, conviene buscar un procedimiento más directo.

Sea Q una colección de objetos semejantes: contar estos objetos en el sistema de base **a**, es agrupar estos objetos **a** por **a**, después a^2 por a^2, etc., de tal modo que si $\overline{mnpqrs}$ en el número N de esta colección de objetos, se puede decir que N comprende s objetos, después r grupos de **a** objetos, después q grupos de a^2 objetos, etc., s, r, ...m siendo todos inferiores a **a**.

Escribir este número N en el sistema de base b, es repartir los objetos de la colección Q por grupos de b, b^2 b^3, etc., lo que se hace dividiendo N por b, después del cociente obtenido por b, etc. Como nosotros hacemos abstracción del sistema decimal, esta divisiór se hará practicamente según las reglas particulares de las cuatro operaciones en el sistema de base **a**.

Para fijar las ideas, vamos a escribir el número 25341 del sistema de base 6 en el sistema de base 8.

Formaremos previamente las tablas en el sistema de base 6.

(adición y sustracción)

0	1	2	3	4	5	10
1	2	3	4	5	10	11
2	3	4	5	10	11	12
3	4	5	10	11	12	13
4	5	10	11	12	13	14
5	10	11	12	13	14	15
10	11	12	134	14	15	20

(multiplicación y división)

	1	2	3	4	5	10
1	1	2	3	4	5	10
2	2	4	10	12	14	20
3	3	10	13	20	23	30
4	4	12	20	24	32	40
5	5	14	23	32	41	50
10	10	20	30	40	50	100

A continuación se debe hacer la división de 25341 por 8; debemos observar que en el sistema de base 6, no existe la cifra 8; este número se escribiría 12;ahora hay lugar para hacerla división de 25341 entre 12 con la ayuda de las tablas precedentes.

25341	12		
013	2111	12	
14	51	135	12
21	111	15	11
5	03	3	7

El último cociente 11 siendo más pequeño que 12, la división no puede ser continuada; más es necesario observar el número que se escribe 11 en el sistema de base 6 e escribe 7 en el sistema de base 8.Luego el número 25341 (base 6) se escribe 7335 en el sistema de base 8, lo que puede verificar fácilmente por el método ordinario.

3. ¿Cuántos números diferentes de "n" cifras existen y cuántos caracteres o cifras se necesitan para escribirlos todos?

Solución

Los números de una cifra comienzan con 1 ó 10^0, para terminar en 10, ellos son 10 - 1 = 9 y es necesario 9 cifras para escribirlos. Los números de dos cifras comienzan en 10 para terminar en 10^2 exclusive, luego hay $10^2 \cdot 10 = 100 - 10 = 90$, y es necesario por lo tanto, para escribirlos, 90 x 2 = 180 caracteres.

Los números de tres cifras comienzan en 10^2 para terminar en 10^3 exclusive; hay luego $10^3 - 10^2 = 10^2(10 - 1) = 100 \times 9 = 900$, y es necesario para escribirlos 900 x 3 2700 caracteres, etc.

De un modo general, los números de n cifras comienzan en 10^{n-1} para terminar en 10^n exclusive; ellos son luego en número de:

$10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 - 1) = 10^{n-1} \times 9$,
y es necesario para escribirlos: $10^{n-1} \times 9 \times n$ caracteres.

4. ¿Cuántos números diferentes hay hasta un número de "n" cifras a lo más y cuántas cifras ocaracteres son necesarios para escribirlos todos?

Solución

Según el razonamiento que precede, el número de los números diferentes no teniendo más de n cifras es:

$(10 - 1) + (10^2 - 10) + (10^3 - 10^2) + ... + (10^{n-1} - 10^{n-2}) + (10^n - 10^{n-1})$ ò $10^n - 1$

es decir un número constituido por la cifra 9 repetido n veces.

El número de caracteres para escribirlos es:

$(10 - 1) + (10^n - 10) + (10^n - 10^2) + ... + (10^n - 10^{n-1})$ ó
$10^n \; n - (1 + 10 + 10^2 + ...+ 10^{n-1})$,

n veces
o aún: $10^n \times n - 111.....111$

es decir un número comenzando a la izquierda por (n - 1), teniendo 9 por cifra de las unidades y todas las otras demás cifras son 8.

5. Se escriben todos los números del 1 a "n" cifras inclusive: ¿cuántas veces se encuentra la misma cifra?

Solución
El razonamiento hecho para una cifra significativa cualquiera sería evidentemente el mismo para todos; consideramos luego la cifra 1.

1° De 1 a 9, es decir para los números de una sola cifra, la cifra 1 es evidentemente escrita más que una sola vez.

2° De 10 a 99, es decir para los números de dos cifras, la cifra 1 es escrita en primer lugar 10 veces a la izquierda, en la primera decena después 1 vez a la derecha, en cada una de las nueve decenas, o sea en total 19 veces.

Por lo tanto, para los números 1 y 2 cifras reunidos, la misma cifra es escrita 1 + 19 ó 20 veces.

3° Pasemos a los números de 100 a 999, es decir a los números de 3 cifras.
La cifra 1 es escrita primeramente 100 veces, a la izquierda en la primera centena; después 10 veces a la derecha de la cifra de las centenas en cada una de las centenas, o sea 90 veces para las 9 centenas, y en fin 10 veces a la derecha de la cifra de las decenas en cada centena, o sea 90 veces para las 9 centenas.
Luego para los números de 3 cifras, la cifra 1 ha sido escrita 100 + 180 = 280 veces, y para los números de una, dos y tres cifras, la misma cifra se escribe:

$20 + 280 = 300$ veces y $300 = 3 \times 10^2$

4° Números de cuatro cifras de 1000 a 9999. La cifra 1 es escrita 1000 veces a la izquierda en el primer millón, 100 veces a la derecha de la cifra de los millones en cada millar, 1100 a 1199 de 2100 a 2199, ..., de 9100 a 9199, es decir 900 veces para los 9000; la misma cifra 1 es escrita 100 veces a la derecha de la cifra de las centenas en cada millar, 1110 a 1119, de 1210 a 1219, de 1310 a 1319, ..., de 1910 a 1919 para el primer millar, y asimismo para otros millares, o sea en total 900 veces.
En fin, 1 figura en 100 veces a la derecha de la cifra de las decenas en cada millar y por lo tanto 900 veces en el lugar de las cifras de las unidades.
En resumen para los números de cuatro cifras, se tiene que escribir la cifra 1:

$1000 + 900 \times 3 = 3700$ veces.

y para los números de 1, 2, 3 y 4 cifras, la misma cifra es escrita: $3700 + 300 = 4000$ veces y $4000 = 4 \times 3^3$
Sin seguir más adelante, se ve fácilmente que esta ley es general, y concluiremos que para los números de 1, 2, 3, 4,...., n cifras reunidas, la misma cifra es escrita:

Rpta. $n \times 10^{n-1}$ veces.

6. ¿Cuántos números de "n" cifras hay en el sistema de base "a"?

Solución

El más pequeño número de "n" cifras en cualquier sistema de numeración se escribe: $\underbrace{100.....0}_{n-1}$, es decir, 1 seguido de (n - 1) ceros y si la base es "a", este vale a^{n-1}; paralelamente el más pequeño número del sistema de base **"a"** que tiene n + 1 cifras vale a^n; entonces razonando como en el problema 4, se ve que todos los números de "n" cifras son todos los números consecutivos de la serie que comienza en a^{n-1} y termina en $a^n - 1$; su número es:

Rpta. $(a^n - 1) - a^{n-1} + 1 = a^n - a^{n-1} = a^{n-1}(a - 1)$

7. Se desea numerar un libro de 300 hojas en un determinado sistema de numeración. Sabiendo que si se aumentan 8,245 páginas más, el número total de éstas escrito en base 12 representa el número invertido de la compaginación. ¿Cuál es la base en la que se debe numerar dicho libro?

Solución

El libro tiene: 300 x 2 = 600 páginas en el sistema decimal.

Con el aumento tendrá: 600 + 8245 = 8645 = 8645 páginas; esta cantidad en base 12: $8645 = 5151_{(12)}$

Por condición podemos establecer que el número representa la compaginación en su sistema correspondiente será: $1515_{(n)}$.

Se debe cumplir que:

$$600 = 1515_{(n)} \quad n > 5 \quad n < 10$$
$$600 = n^3 + 5n^2 + n + 5$$
$$595 = n(n^2 + 5n + 1)$$
$$5 \times 7 \times 17 = n(n^2 + 5n + 1)$$

Rpta. $\Leftrightarrow n = 7$

8. Para numerar las 30 páginas centrales de un libro se emplearon 72 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos se emplearon para numerar todas las páginas del libro?

Solución

Si todas las páginas centrales fueran de dos cifras se emplearían 60 tipos, y si todas fueran de tres cifras se emplearían 90 tipos. Luego debe haber "x" páginas de 2 cifras y "30 - x " de 3 cifras.

Luego:

$$2x + 3(30 - x) = 72$$
$$x = 18,$$

Luego:

Páginas centrales: (99 - 17), ..., 99, ..., (99 + 12)

82, 83, ...,99 , 100,....., 111

Número de páginas del libro = 111 + 81 = 192

Se emplean (cantidad de "tipos"):

Rpta. 9 + 2 x 90 + 93 x 3 = 468 "tipos".

9. En la numeración de un libro, se comete el error de colocar 7 en vez de 2.Si se termina de enumerar el libro cuando se ha utilizado 419 veces el 7. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Solución:

Calcularemos el número de cifras "sietes" desde la página 1 hasta la página 700. Asimismo calcularemos el número de cifras "dos", puesto que estas son reemplazadas por sietes.

La cifra dos es empleada:

Como cifra de unidades (una vez por decena)	70 veces
Como cifra de decenas (10 veces por centena)	70 veces
Como cifra de centenas (100 veces)	100 veces
	240 veces

La cifra 7 es empleada:

Como cifra de unidades	70 veces
Como cifra de decenas	70 veces
Como cifra de centenas	1 vez
	141 veces

Entonces de 1 a 700 páginas han entrado:

240 + 141 = 381 sietes.
Faltan: 419 - 381 = 38 sietes.

Estos últimos 38 sietes se emplean:

La cifra 2:	como cifra de unidades	3	veces
	como cifra de decenas	7	veces
La cifra 7:	como cifra de unidades	2	veces
	como cifra de decenas	0	veces
	como cifra de centenas	26	veces.
		38	veces

{ En éste número termina el orden correlativo de páginas.

Rpta. Por lo tanto el número de páginas que tendrá el libro será: 726

10. Se escribe la serie natural de los números hasta que el menor número de cuatro cifras cuya suma de sus cifras sea trece. ¿Cuántas cifras uno se han escrito?

Solución

El menor número de cuatro cifras cuya suma de cifras es 13 es el 1039.
Además:
Del 1 al 999 hay 300 cifras "uno" (ya deducido)

De 1000 a 1039	en la cifra de los millares...	40
	en la cifra e las centenas ...	0
	en la cifra de las decenas...	10
	en la cifra de las unidades...	4
		54

Rpta. Se han escrito: 300 + 54 = 354 **"unos"**

11. Se escribe en forma sucesiva todos los números pares de tres cifras. ¿ Cuántas cifras de esta serie son cifras impares?

Solución

100 al 198 ⥲ en el orden de las decenas hay 25 cifras impares.

$\therefore$ 100 al 998 hay 25 x 9 = 225 cifras impares en el orden de las decenas.

En el orden de las centenas hay:

100.....198 ⥲ 50 cifras impares.

$\therefore$ En el orden de las centenas hay:

$$50 \times 5 = 250 \text{ cifras}$$

Rpta. $\therefore$ Existen 225 + 250 = 475 cifras impares.

12. Para numerar las páginas de un libro se utilizaron 768 cifras; si se malogró la cifra 6 y se tuvo que usar el 9 invertido; determinar cuántas veces se tuvo que utilizar la cifra 9.

Solución

Sea N el número de páginas del libro ("N" debe ser un número de 3 cifras)

$768 = (N + 1)3 - 111 \rightarrow N = 292$ páginas.

Número de "6" y "9" usados en las unidades:

$$6, 16, 26, 36, \ldots, 286 \text{ ⥲ \#s} = \frac{286-(-4)}{10} = \frac{290}{10} = 29$$

$$9, 19, 29, 39, \ldots 289 \text{ ⥲ \#s} = \frac{289-(-1)}{10} = \frac{290}{10} = 29$$

En las decenas:

$$\underbrace{60, 61, \ldots 69,}_{10} \quad \underbrace{160, \ldots 169,}_{10} \quad \underbrace{260, \ldots 269}_{3}$$

$$\underbrace{90, 91, \ldots 99,}_{10} \quad \underbrace{190, \ldots 199,}_{10} \quad \underbrace{290, 291, 292}_{3}$$

Rpta. Total: 29 + 29 + 30 + 23 = 111

13. Hallar en que sistema de numeración, es posible que al escribir todos los números de tres cifras que no sean capicuas se empleen 1,176 cifras.

Solución

sea $\overline{abc}_{(n)} \Rightarrow$ total de números = nxn(n - 1)

Además $\overline{dpd}_{(n)} \Rightarrow$ Total de números capicuas = n(n - 1)
entonces cifras empleadas.

$3\,[\,n^2(n-1) - n(n-1)\,] = 1176$

$(n-1)(n)(n-1) = 7 \times 8 \times 7$

Rpta. $\Rightarrow n = 8$

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE CONTEO DE CIFRAS

1. Para numerar un libro se emplean 153 cifras. ¿Cuántos tipos más se necesitarán si tuviera 50 páginas más?

a) 130 b) 132 c) 112 d) 141 e) N.A.

2. Al numerar un libro en base 8 se emplean 263 tipos. Determinar cuántos tipos se emplearían al numerarlo en base 10.

a) 171 b) 146 c) 189 d) 215 e) 122

3. Para numerar las páginas de un libro a partir de la página número 100 hasta la final se deben usar 2,764 cifras. ¿Cuántas hojas completas tiene el libro?

a) 508 b) 457 c) 507 d) 458 e) 455

4. Hallar "a" sabiendo que para escribir todos los números enteros y consecutivos desde el número $\overline{aa}$ al $\overline{aaaa}$ se han empleado 29858 cifras.

a) 7 b) 9 c) 5 d) 6 e) 8

5. ¿Cuántas cifras se emplearán para escribir todos los números capicuas de 4 cifras. Se pueden formar utilizando solamente las cifras pares?

a) 20 b) 400 c) 200 d) 80 e) 100

6. Hallar (a + b), sabiendo que para escribir todos los números enteros y consecutivos desde el número $\overline{ab}$ al $\overline{abo}$ se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras.

a) 12 b) 14 c) 9 d) 7 e) N.A.

7. Cuántas cifras se necesitan para escribir todos los números capicuas de 5 cifras que se escriben con cualquier cifra menos con el cero.

a) 3654 b) 3645 c) 2745 d) 2840 e) N.A.

8. Cuántas cifras se necesitan para escribir todos los números capicuas de 4 cifras que existen en la base 8.

a) 112 b) 224 c) 182 d) 264 e) N.A.

9. Hallar a + b sabiendo que para escribir todos los números pares desde el número $\overline{ab}$ al número $\overline{abab}$ se han empleado 13122 cifras.

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

10. ¿Cuántas cifras se emplearán al representar todas las sumas indicadas de la forma:

$\overline{a12} + \overline{bcd}$?

a) 32400 b) 24300 c) 48600 d) 16200 e) 8100

Clave

1. b	6. b
2. c	7. a
3. a	8. c
4. a	9. d
5. c	10. e

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SERIES NUMERICAS

Observaciones Previas

- Debemos recordar como contar términos de una progresión aritmética; así tambien cómo contar cifras.
- Cuando los números propuestos en una serie, están escritos en distintos sistemas de numeración, lo más recomendable es representarlos en el sistema decimal.
- Recordar como sumar términos de una progresión aritmética

1. Hallar cuántos términos existen en la siguiente serie:

$51_{(6)}, 46_{(7)}, 47_{(8)}, 51_{(9)}, 50_{(11)}, \ldots 120_{(15)}$

31, 34, 39, 46, 55, ...,255

Solución

Dándole la siguiente forma se tiene que:

$31 = 30 + 1$
$34 = 30 + 1 + 3$
$39 = 30 + 1 + 3 + 5$
$46 = 30 + 1 + 3 + 5 + 7$
$55 = 30 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Suma de los números impares

(primeras) = n^2

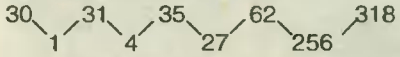
$255 = 30 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1)$
$255 = 30 + n, \Rightarrow n^2 = 255 \Rightarrow$
Rpta. $n = 15$

2. Hallar el término que sigue:

30, 31, 35, 62, 318,...

Solución

Observando la fórmula de recurrencia se observa:



que el término siguiente se obtiene sumando el término precedente un número de la forma: k^k: 1^1, 2^2, 3^3, 4^4,...

Luego el término siguiente es: $318 + 5^5 = 318 + 3125 = 3443$

Rpta. 3443

3. ¿Cuántos números hay en :

47, 22, 54, 31, 61, 40,....184, 187, 193

Solución

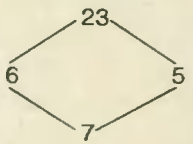
Podemos separar dos series:

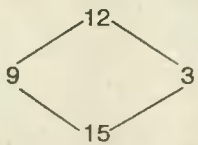
47, 54, 61,....., 187 $\rightsquigarrow$ # términos = $\frac{187 - 40}{7} = 21$

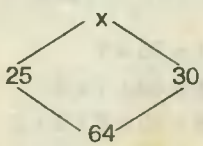
22, 31, 40, ..., 193 $\rightsquigarrow$ # términos = $\frac{193 - 13}{9} = 20$

Rpta. $\therefore$ El número de términos de la serie es: $21 + 20 = 41$

4. Determinar el valor de "x":







Solución

Como se puede observar el término superior se obtiene multiplicando los términos laterales y restándole el término inferior.

$6 \times 5 - 7 = 23$
$9 \times 3 - 15 = 12$
$25 \times 30 - 64 = x = 686.$

Rpta. 686.

5. Hallar el término que sigue: 80, 80, 40, 120, 30, 150, 25, 175,...

Solución

Observando la regla de formación:
80, 80, 40, 120, 30, 150, 25, 175

$\times 1 \div 2 \times 3 \div 4 \times 5 \div 6 \times 7$, Luego el término será: $\frac{175}{8} = 21.875$

Rpta. 21.875

6. El quinto término de una P.A. es 31 y el noveno término 59. Hallar el 12vo. término.

Solución

1°) n = 5: $31 = a_1 + 4r$ .....(1)
$59 = a_1 + 8r$ .....(2)
(2) - (1): $28 = 4r \wedge \boxed{r = 7}$ en (1):
$a_1 = 3$
$\therefore a_{12} = 3 + (12 - 1)7 = 80$.....**Rpta.**

Otro método:

a_5.....a_9.....a_{12}

31 $\quad$ $59 = 31 + 4r$ $\quad$ $31 + (12 - 5)r = 31 + 7 \times 7$

$r = 7$ $\quad$ $a_{12} = 80$.....**Rpta.**

7. Encontrar el primer término, la razón y el octavo término de una P.A. sabiendo que la suma de los "n" primeros términos está dado por la siguiente expresión:

$n(3n + 1)$

$\div a_1 . a_2 . a_3 .....a_n$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n = n(3n + 1)$
$n = 1 \quad \therefore a_1 = 1(3(1) + 1) \quad \Rightarrow a_1 = 4$
$n = 2 \quad \therefore a_1 + a_2 = 2(3x 2 + 1) \quad \Rightarrow a_1 + a_2 = 14$
$\Big\rangle \; a_1 = 4 \wedge a_2 = 10$, $r = a_2 - a_1 = 6$
$a_8 = 4 + (8 - 1)6 = 46.$

Rpta. 46

8. Dada la P.A. ÷ 5 . 10. 15.....¿Cuántos términos de esta progresión hay que tomar a partir del término del lugar 14 para que sumen tanto como los nueve primeros términos.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} r = 5 \\ n = 9 \\ a_1 = 5 \end{array}\right\} \quad Sq = \left(\frac{2x5+(9-1)5}{2}\right)9 = 225 \ \wedge \ a_{14} = 5+(14-1) = 70$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 70 \\ r = 5 \\ n = m \end{array}\right\} \quad S' = \left(\frac{2x70+(m-1)5}{2}\right)m = 225$$

$$(140 + 5m - 5)m = 450$$
$$(28 + m - 1)m = 90$$
$$28m + m^2 - m = 90$$
$$m^2 + 27m - 90 = 0$$

$$m \quad +30$$
$$m \quad -3$$

$$(m + 30)(m - 3) = 0; \quad \begin{cases} m = -30, \\ m = 3. \end{cases}$$

Rpta. $\therefore \ m = 3.$

9. Hallar la suma de los 20 primeros múltiplos de 3.

Solución

La P.A. es: ÷ 3 . 6 . 9 . 12 . .....

$a_1 = 3$

$r = 3 \qquad a_{20} = 3 + (20 - 1)3 = 60$

$a_{20} = ?$

Rpta. $\therefore \ S = \left(\frac{3+60}{2}\right)20 = 630$

10. Hallar el 1er. término de una P.A. creciente de un número par de términos sabiendo que el producto de los extremos es 238 y la suma de los 4 términos centrales es 82.

Solución La P.A. es: ÷ $a_1 . a_2 . a_3 . .....a_n$

$$\begin{cases} a_1 . a_n = 238.....(1) \\ 2(a_1 + a_n) = 82.....(2) \end{cases}$$

$$a_1 + a_n = 41$$

De (1) y (2): $u^2 - 41u + 238 = 0$ $\qquad U = \frac{41 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{41 \pm 27}{2}$

$$U = \begin{cases} 34 \\ 7 \end{cases}$$

Rpta. $\therefore \ a_1 = 7.$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE METODO COMBINATORIO

Observaciones Previas

* Cuando una letra se repite, sólo se le da valores a una de ellas.

1. En qué sistema de numeración existen 72 numerales de la forma:

$$\overline{a\left(\frac{a}{2}\right) \quad n \quad \left(\frac{n}{2}\right)_{(x)}}$$

Solución

Sea "x" la base del sistema.

i) Si "x" es par:

$$\overline{a\left(\frac{a}{2}\right) \quad n \quad \left(\frac{n}{2}\right)_{(x)}}$$

	2	0
	4	2
	.	.
	.	.
	(x-2)	(x-2)
valores	$\frac{x-2}{2}$	$\frac{x}{2}$

$$\frac{(x-2)}{2}\cdot\frac{(x)}{2} = 72 \text{ combinaciones}$$

$$x(x-2) = 288$$

$$\therefore x = 18$$

ii) Si "x" es impar:

$$\overline{a\left(\frac{a}{2}\right) \quad n \quad \left(\frac{n}{2}\right)_{(x)}}$$

	2	0
	4	2
	.	.
	.	.
	(x-1)	(x-1)
valores	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{(x+1)}{2}$

$$\frac{(x-1)}{2}\cdot\frac{(x+1)}{2} = 72 \text{ combinaciones}$$

$$(x-1)(x-1) = 288$$

$$x^2 - 1 = 289$$

$$x^2 = 289$$

$$\therefore x = 17$$

Rpta. Se cumple en los sistemas de base 17 y 18

2. Si hay $(2n^3 - 5n^2)$ números de 3 cifras en el sistema de base "n". Cuántos números de n cifras hay en el sistema de base 5?

Solución

En el sistema de base "n":

$\overline{a\ b\ c}_{(n)}$

valores: $(n-1)\ \ n\ \ n$

Existen: $(n-1)n.n = n^2(n-1)$ números de 3 cifras en base "n".

Podemos establecer:

$$n^2(n-1) = 2n^3 - 5n^2$$
$$n^2(n-1) = n(2n-5) \Rightarrow n = 4$$

$\therefore$ cantidad de números de 4 cifras en base 5:

$\overline{a\ b\ c\ d}_{(5)}$

$4\ \ 5\ \ 5\ \ 5 = 500$ números.

Rpta. 500 números.

3. Sabiendo que hay 40 números más de la forma $\overline{a\,(a+1)\,(b+1)\,b}_{(n)}$ que de la forma: $\overline{a\,(a-1)\,(b-1)\,b}_{(n)}$. Hallar "n":

Solución

$\overline{a(a-1)(b-1)b}_{(n)}$

1 2 . . $(n-1)$ — 1 2 . . $(n-1)$

valores: $(n-1)\ \ (n-1)$

$\therefore$ existen valores $(n-1)^2$ números

$\overline{a(a+1)(b+1)b}_{(n)}$

1 2 . . $(n-2)$ — 0 1 . . $(n-2)$

valores: $(n-2)\ \ (n-1)$

$\therefore$ existen $(n-2)(n-1)$ números

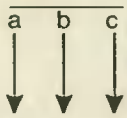
Por condición: $(n-1)^2 - (n-2)(n-1) = 40 \Rightarrow n = 41$

Rpta. $n = 41$

4. ¿Cuál es la suma de todos los números de 3 cifras múltiplos de 5, es decir, que terminan en cero o cinco?

Solución

Los números son de la forma $\overline{a\,b\,c}$ y existen:



valores: $9 \times 10 \times 2 = 180$ números

Suma S: unidades : $(0+5)90 = 45\underline{0}$ (pongo $\underline{0}$ llevo 45)

decenas : $45+18\times\frac{9\times10}{2} = 85\underline{5}$ (pongo $\underline{5}$ llevo 85)

centenas: $85+20\times\frac{9\times10}{2} = 98\underline{5}$

Rpta. $\therefore$ S = 98550

5. ¿Cuántos números de la forma $\overline{a\,(a+b)\,(\sqrt{b})\,(2a)}_{(7)}$ existen?

Solución

En base 7 se pueden usar las cifras 0, 1, 2, ..., 6

Para a:

$0 < 2a < 7 \quad a = 1, 2, 3$

Para b:

$b = k^2$ pues $\sqrt{b}$ es entero

$b = 0, 1, 4$ pero $a + b = 7$

a			b
1	2	3	0
1	2	3	1
1	2	3	4

Rpta. Hay 8 números.

6. ¿Cuántos números de 3 cifras, existen, en base 7, en las cuáles una cifra se repite 2 veces solamente?

Solución

En base siete las cifras son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Los números buscados son de la forma:

1. $\overline{abb}$ $\Rightarrow$ por cada valor de "a" hay 6 valores de "b", total: 36
2. $\overline{aba}$ $\Rightarrow$ por cada valor de "a" hay 6 valores de "b", total: 36
3. $\overline{aab}$ $\Rightarrow$ por cada valor de "b", hay 6 valores de "a", total: 36

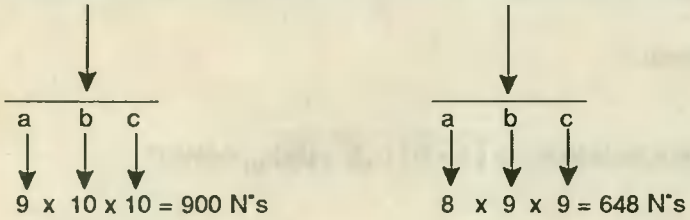
$\therefore$ Cumplen las condiciones del problema:

Rpta. 36 + 36 + 36 = 108 números.

7. En el sistema decimal. ¿Cuántos números de tres cifras alguna cifra cinco en su escritura?

Solución

(Todos los números de 3 cifras) -(Los números sin 5) = (Los números con algún 5).....(α)



Rpta. 900 - 648 = 252.

8. ¿Cuántos números de 4 cifras comienzan o terminan en 7?

Solución

$$\begin{pmatrix} \text{Nºs que comienzan} \\ \text{o terminan} \\ \text{en 7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Nºs que comienzan} \\ \text{+ Nºs que terminan} \\ \text{en 7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Nºs que comienzan} \\ \text{y terminan} \\ \text{en 7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Nºs que comienzan} \\ \text{o terminan} \\ \text{en 7} \end{pmatrix} = (1000 + 900) - 100 = 1800$$

Rpta. 1800

9. En el sistema decimal. ¿ Cuántos números de cuatro cifras tienen algún cero?

Solución

N°s que tienen algún cero = Todos los N°s de 4 cifras - los N°s que no tienen cero.....(α)

Los N°s que no tienen ningún cero, son de la forma: $\overline{abcd}$, donde:

a	b	c	d
1	1	1	1
2	2	2	2
.	.	.	.
.	.	.	.
9	9	9	9

$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$ N°s

6561 no tienen ningún cero en (α):

$\Rightarrow$ N°s que tienen algún cero = 9000 - 6561 = 2,439.

Rpta. 2,439.

10. Cuántos números de tres cifras que no tienen la cifra siete en su escritura tienen por lo menos una cifra cinco en su escritura?

Solución

Números de tres cifras que no tienen ningún 7:

a b c

$8 \times 9 \times 9$ = 648 números; de estos los que no tienen ningún 5 en su escritura son:

a b c

$7 \times 8 \times 8 = 488$ números.

$\therefore$ Tienen algún 5 en su escritura: 648 - 448 = 200 números.

Rpta. 200 números.

11. ¿Cuántos números de la forma $\overline{(3a)(\frac{a}{2})(b+2)(b-4)}_{(18)}$ existen?

Solución

En las unidades: $0 \leq b - 4 < 18 \Rightarrow 4 \leq b$

En las decenas: $b + 2 < 18 \Rightarrow b < 16$

$\therefore$ b = 4, 5, 6, 7, ..., 15

12 valores

En las centenas: $(\frac{a}{2})$ = N° entero $\Rightarrow$ "a" es par : a = 0, 2, 4, ..., 16.....(1)

En las unidades de millar: $3a < 18 \Rightarrow a < 6$ .....(2)

De (1) y (2):

$$\underbrace{a = 2 \ , \ 4}_{\text{2 valores}}$$

$\therefore$ Existen: 12 x 2 = 24 números.

Rpta. 24 números.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE METODO COMBINATORIO

1. Cuántos números de tres cifras diferentes existen en el sistema senario?

a) 100 b) 125 c) 200 d) 36 e) N.A.

2. Cuántos números capicuas de cuatro cifras no son impares (en el sistema decimal).

a) 50 b) 40 c) 45 d) 90 e) 60

3. ¿Cuántos números de tres cifras de la forma $\overline{(a-2)(a+2)(2b)}$ existen en base diez.

a) 20 b) 30 c) 25 d) 15 e) 16

4. En un determinado sistema de numeración existen 11 números de 11 cifras que empieza en cifra 3 y termina en cifra 4. ¿Cuántos números de 6 cifras en ese mismo sistema de numeración, no utiliza la cifra 3 y 4 en su escritura?

a) 6^9 b) 5×6^9 c) 8×9^5 d) 8^6 e) 9^6

5. En el sistema de base "n", existen 91 números de la forma: $\overline{ab\,(a+b)\,(n-a)}_{(n)}$
Hallar "n":

a) 8 b) 14 c) 13 d) 15 e) N.A.

6. ¿Cuántos números de cuatro cifras de por lo menos dos cifras iguales a ocho existen?

a) 450 b) 320 c) 486 d) 355 e) 495

7. En el sistema de numeración se cumple que la cantidad de números de la forma $\overline{aba}$ es igual a 4/5 del mayor número de dos cifras de dicho sistema.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) N.A.

8. ¿Cuántos números pares de 4 cifras existen tales que en sus 2 cifras de mayor orden no figura ninguna cifra impar?

a) 1000 b) 900 c) 800 d) 810 e) 960

9. Cuántos números impares de 3 cifras diferentes pueden formarse con las cifras 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7.

a) 80 b) 100 c) 120 d) 140 e) 144

10. ¿Cuántos números capicuas (de la base "n" impar) de 3 cifras de la forma $\overline{(a)\,(2a)\,(a)}$ existen tales que al convertirlo a la base n + 1 se escribe como $\overline{a00}$?

a) $\frac{n+1}{2}$ b) $\frac{n-1}{2}-1$ c) $\frac{n+1}{2}+1$ d) $\frac{n-1}{2}$ e) $\frac{n-1}{2}+1$

11. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas que terminan en 7 ó 9 hay?

a) 1088 b) 672 c) 1440 d) 784 e) N.A.

CLAVE

1. a	6. d
2. a	7. a
3. c	8. c
4. e	9. b
5. b	10. e

Capítulo 6

LAS 4 OPERACIONES FUNDAMENTALES EN ℕ

TARTAGLIA, calculista del renacimiento, utilizó la primera letra del italiano pui, que significa más, para representar la adición.

6.1 ADICION

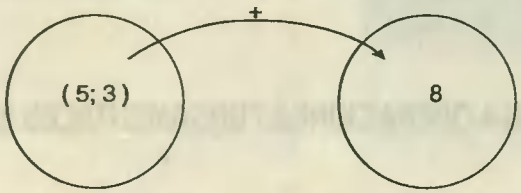
Discusión del concepto de adición:

Consideremos dos conjunto disjuntos A y B
es decir: $A \cap B = \Phi$

Consideremos además que:

$A = \{ a; e; i; o; u \}$ $\quad n(A) = 5$
$B = \{ m; n; p \}$ $\quad n(B) = 3$
$A \cup B = \{ m; n; p \}$ $\quad n(A \cup B) = 8$

Graficando en forma general:



O también:

(5; 3)	+	(5 + 3)	=	8
al par ordenado (5, 3)	la operación adición	se le asigna el número 5 + 3		el cual tiene tiene el nombre "estándar" "8"

"Adición de números naturales es la operación mediante la cual se reunen dos o más números llamados sumandos, en uno sólo llamado suma".

A + B	=	S
su mandos		suma (número) o total o suma total

La suma es el número que representa el resultado de una adición.

Leyes formales de la adición

Las principales son:

i) **Ley de Clausura:** "La suma de números naturales, es otro número natural".

$$\forall\ a, b, c, \ldots \in \mathbb{N},\ (a + b + c + \ldots) \in \mathbb{N}$$

Por lo que también se dice que el conjunto de los números naturales es un conjunto cerrado o estable con respecto a la adición.

ii) **Ley de uniformidad:** (igualdad): "Si se suman miembro a miembro dos o más igualdades, el resultado será otra igualdad".

$$\forall\ a\,.\,b\,.c\,.d \in \mathbb{N}$$

$a = b\ +$	$16 = 16\ +$
$c = d$	$14 = 14$
$a + c = b + d$	$30 = 30$

iii) **Ley Asociativa:** (Reunir): "Si se reemplazan dos o más sumandos, por su suma parcial, la suma total, no varía".

$$\forall\ a, b, c, d, \in \mathbb{N},\ \text{se cumple:}$$

$$a + b + c + d = S\ = a + (\,b + c\,) + d = S$$

iv) **Ley Conmutativa:** (Cambiar): "El orden de los sumandos, no altera la suma", esto es:

$$\forall\ a, b\ ,c, d, \in N,\ \text{se cumple:}$$

$$a + b + c + d\ = b + d + a + c$$

v) **Ley de Monotonía:** (Desigualdades). La ley de monotonía, con respecto a la adición, se divide en dos partes y un escolio:

1ra.Parte:

"Si se suman miembro a miembro, los términos de una igualdad con los de una desigualdad, el resultado será una desigualdad del mismo sentido que al anterior:

$$\forall\ a, b, \text{y}\ c \in \mathbb{N}:$$

$a\ =\ a\ +$	$8\ =8\ +$
$b\ >\ c$	$12 > 2$
$a + b > a + c$	$20 > 10$

2da.Parte:

" Si se suman miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado será otra desigualdad del mismo sentido que los anteriores:

$$\forall\ a, b, c, d, e, f, \in \mathbb{N}:\ \text{si:}$$

$a > b\ +$	$6\ > 4\ +$
$c > d$	$14 > 10$
$e > f$	$20 > 8$
$a + c + e > b + d + f$	$40 > 22$

Escolio: "Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del distinto sentido, el resultado no se puede anticipar"; esto quiere decir que se puede obtener desigualdades del 1er. sentido o desigualdad del 2do. sentido o igualdades como se ilustra con los ejemplos siguientes:

$8 < 40 +$	$4 < 6 +$	$16 > 10 +$
$56 > 40$	$60 > 14$	$10 < 16$
$64 < 80$	$64 > 20$	$26 = 26$
(desigualdad del 1er. sentido)	(desigualdad del 2do sentido)	(igualdad)

vi) **Ley Modulativa:** (módulo):

$$\forall\ a, b, \ldots\ldots \in N, \exists\ !\ x /\ \ a + x = x + a = a \Leftrightarrow x = 0$$

Se llama módulo de una operación al número que interviniendo en la operación, no altera el resultado. En el caso de la adición, el módulo es cero, llamado también elemento neutro aditivo.

Números opuestos o contrarios:

El opuesto o contrario de un número "a" es aquel número (-a) que sumado con "a" nos da el módulo cero.

Comprobación:

Sea: $a + x = 0 \Rightarrow x = 0 - a \Rightarrow x = -a$ opuesto ó contrario de "a".

$$a + (-a) = 0$$

El opuesto o contrario de 8 es -8

$$\therefore\ 8 + (-8) = 0$$

El opuesto o contrario de -8 es -(-8)

$$\therefore\ -8 + [-(-8)] = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ADICION

Observaciones Previas

* Para resolver los problemas sobre adición, aplicaremos básicamente el algorítmo de adición, recordando, sobre todo en los problemas literales, que cada letra representa una cifra y máximo valor de ésta, es una unidad menos que la base.

* En el sistema decimal, entonces, la suma de 2 cifras no pasa del 18; la suma de tres cifras no pasa de 27; etc.

* En algunos problemas literales recurriremos a la descomposición polinómica.

1. Hallar la cifra de las decenas del resultado de sumar todos los números formados por ocho "nueves" y un "siete".

Solución

799999999 +
979999999
997999999
999999997
87...77769

87...77769

* Nueve sumandos.
* Se observa que en cada columna hay 8 "nueves" y un "siete" por lo que cada columna suma: $8 \times 9 + 7 = 79$
* En la columna de unidades: $8 \times 9 + 7 = 79$ (pongo "9" llevo "7")
* En la columna de las decenas: $8 \times 9 + 7 = 86$ (pongo "6" y llevo "8")y así sucesivamente..

Rpta. 87...77769

2. Si: (Cada asterisco representa una cifra).

$$\overline{1*a3} + \overline{a6bb} = \overline{4a7*}$$

Hallar a + b.

Solución

$$\left.\begin{array}{r} \overline{1*a3}+ \\ \overline{a6bb} \\ \hline \overline{4a7*} \end{array}\right\}$$

* Analizando la cuarta columna se deduce que a = 2 ó 3
* Para a = 3 no resulta, pero si a = 2
* Completando:

$$\begin{array}{r} x \\ \overline{1*a3}+ \\ \overline{a66b} \\ \hline \overline{4a7*} \end{array} \qquad \begin{array}{l} b = 5 \\ x = 6 \\ y = 8 \end{array} \qquad \therefore\ a + b = 2 + 5 = 7$$

Rpta. a + b = 2 + 5 = 7

3. Hallar a + b + c, si:

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{cc} = \overline{dae} \quad y \quad d = c - b, \quad e = 2b$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} \overline{ab} + \\ \overline{ba} \\ \overline{cc} \\ \hline \overline{dae} \end{array}\right\}$$

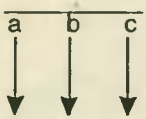
* Se deduce que:
  $b + c = 9$, $d = 1$, además $e = a - 1$
* Por dato:
  $c - b = 1 \Rightarrow c = 5$ y $b = 4$
  $e = 2b \Rightarrow e = 8$ y $a = 9$
  $\therefore \quad a + b + c = 18$

Rpta. a + b + c 18

4. Hallar la suma de todos los números de 3 cifras, que se puedan formar con las cifras: 0, 5, 7 y 8.

Solución

Se pueden formar:



3 x 4 x 4 = 48 números

* Al sumar de los 48 números:
* En las unidades:
  $12(0+5+7+8)=240$ (pongo el cero, llevo 24).
* En las decenas:
  $240 + 24 = 264$ (pongo 4, llevo 26)
* En las centenas:
  $16(5+7+8)+26=346$

$\therefore$ La suma es: 34640

Rpta. 34640

5. Hallar la cantidad de términos de:

40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 50, 52, 53, 54,.....214, 215, 216, 218, 220, 221.

Solución

Analizando la expresión propuesta, se observa que existen dos sucesiones:

* Primera: 40, 42, 44, 46,.....214, 216, 218, 220.

$\therefore$ Existen $\frac{220-38}{2} = 91$ términos

* Segunda: 41, 47, 53,.....215, 221.

$\therefore$ Existen $\frac{221-35}{6} = 31$ términos

Rpta. Total: 91 + 31 = 122 términos.

6. Hallar a + b si se sabe que la suma de los términos de la sucesión:
$\overline{1b}$, $\overline{2b}$ +.....$\overline{abb}$ es 12691

Solución

$S = \overline{1b} + \overline{2b} + ...\overline{aab} = 12691 \Rightarrow$ se cumple:

$$N^{o} \text{ de términos} = \frac{\overline{abb}-\overline{b}}{10} = \overline{ab} \quad \left(\frac{\overline{abb}+\overline{1b}}{2}\right)\overline{ab} = 12691$$

$\Rightarrow [\, 5\,(\overline{ab}) + 1\,) + b]\ \overline{ab} = 49 \times 7 \times 37 \Leftrightarrow \overline{ab} = 49 \wedge$

Rpta. $a + b = 13$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas propuestos sobre Adición

1. Hallar la cifra de las unidades de millar de la siguiente adición:

8888 ..... 8888 +
888 8888
88 8888
. .
. 85 sumandos
888
88
8

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 2

2. Hallar la cifra de las decenas de millar de la siguiente adición:

9 +
99
999
9.....
. .
. 99 sumandos
. .
999 9999
9999 9999
99999 9999

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

3. Cuál es la cifra de tercer orden en la siguiente adición:

37 cifras

2727 272
454 545
27 272
.....
. .
. .
272
45

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Más de 3.

4. Dar la suma de la cifra de las centenas, decenas y unidades del resultado de la siguiente adición:

$$\begin{array}{r} 13579+ \\ 24689 \\ 46802 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline 91357 \end{array}$$

a) 14 b) 23 c) 10 d) 6 e) 16

5. Hallar la suma de las cinco cifras de menor orden que se obtiene al sumar:

$$\underbrace{7373.....73}_{30\text{ cifras}} + \underbrace{2424.....24}_{28\text{ cifras}} + \underbrace{7373.....73}_{26\text{ cifras}} + \underbrace{2424.....24}_{24\text{ cifras.}} + ...+ 737373 + 2424$$

a) 28 b) 29 c) 30 d) 31 e) 32

6. Dar la cifra de las unidades de millar del resultado de sumar todos los números que tienen once "sietes" y un "seis" en, su escritura.

a) 3 b) 2 c) 1 d) 9 e) 8

7. Hallar la suma de las cifras del resultado de sumar:

$$6666667 + 6666676 + ...+ 7666666$$

a) 25 b) 15 c) 14 d) 49 e) 36

8. Efectuar la siguiente adición:

$$99 + 199 + 299 + ... + 1999$$

a) 21080 b) 20980 c) 19980 d) 22090 e) N.A.

9. En qué cifra termina la siguiente adición convertida a base decimal:

$$4_{(5)} + 44_{(5)} + 444_{(5)} + ...+ \overbrace{44.....44}^{(9\text{ cifras})}{}_{(5)}$$

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

6.2 SUSTRACCION

Signo de sustracción utilizado por Diofanto. El actual símbolo de resta se cree podría derivar de una barra utilizada por los comerciantes del medioevo.

Discusión del concepto de sustracción

Consideremos dos conjuntos A y B tal que B sea un subconjunto propio de A, es decir:

$$B \subset A$$

Sabemos que esta inclusión nos indica que A, contiene al menos un elemento que no pertenece a B, por lo tanto:

$$A - B \neq \Phi$$

Definición:

Dados dos números naturales "m" y "s", tales que:

$$* \; m = n(A) \quad y \quad S = n(B)$$

$$* \; B \subset A \quad y \quad A - B \neq \Phi$$

Se llama diferencia de "m" y "s", denotada por m - s, al número natural "d" tal que:

$$d = m - s = n(A - B)$$

En la expresión: d = m - s, el número natural "m" se llama minuendo, el número "s" sustraendo y "d" diferencia.

"A la operación que permite calcular la diferencia de dos números naturales se llama sustracción".

La sustracción de números naturales es la operación inversa a la adición, que se conoce la suma de los números (minuendo) y uno de ellos(sustraendo), nos piden hallar el otro sumando (diferencia).

Pero...¿existe siempre un número natural $\alpha \in \mathbb{N}$, de tal manera que:

$$\alpha + m = s \; ?$$

Los siguientes ejemplos nos llevarán a la respuesta:

a) Dado el par (80, 30) existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha + 30 = 80; \text{ evidentemente existe } \alpha \in \mathbb{N}: \; \alpha = 50$$

b) Dado el par (30, 80), existe $\alpha \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\alpha + 80 = 30; \text{ no existe tal } \alpha \in \mathbb{N}.$$

La diferencia de dos números naturales es otro número natural; siempre y cuando el minuendo (suma) sea mayor que el sustraendo (sumando); sólo bajo esta condición la

sustracción es cerrada en $\mathbb{N}$. Si no se cumple la condición aludida, la sustracción será la operación cerrada en $\mathbb{Z}$.

Leyes formales de la Sustracción

i) No existe elemento o módulo para la sustracción en $\mathbb{N}$. Podría pensarse que $0 \in \mathbb{N}$ es elemento identidad o neutro para la sustracción en $\mathbb{N}$, pero no es válido siempre, ya que:

$$a - 0 \in \mathbb{N}, \text{ pero: } 0 - a \notin \mathbb{N}$$

ii) La sustracción en N no verifica la propiedad conmutativa, es decir:

$$a - b \neq b - a$$

iii) La sustracción en N no verifica la propiedad asociativa, es decir:

$$(9 - 5) - 2 = 4 - 2 = 2, \text{ pero: } 9 - (5 - 2) = 9 - 3 = 6$$

Ejemplo que nos enseña que la sustracción no es asociativa.

iv) Ley de uniformidad: Restando miembro a miembro dos igualdades (si la resta es posible), se obtiene otra igualdad.

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a - c = b - d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 800 = 800 \\ 200 = 200 \\ \hline 600 = 600 \end{array}$$

v) Ley de monotonía: Con respecto a la sustracción presenta tres casos principales:

(I) Si a los dos miembros de una desigualdad se les resta un mismo número (siendo posible la resta), se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:

$$\text{Si: } a > b \text{ entonces: } a - c > b - c$$
$$\text{Si: } a < b \text{ entonces: } a - c < b - c$$

(II) Si a los dos miembros de una igualdad se le restan (si es posible) respectivamente los miembros de una desigualdad, se obtiene otra desigualdad pero de sentido contrario a la propuesta:

$$\begin{array}{r} a = b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 = 8 \\ 4 < 6 \\ \hline 4 > 2 \end{array}$$

(III) Si se restan miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario, se obtiene una desigualdad con el sentido de la primera (en caso en que se pueda efectuar la resta):

$$\begin{array}{r} a < b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60 < 100 \\ 20 > 10 \\ \hline 40 < 90 \end{array}$$

vi) Propiedad fundamental: "La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo:"

Como: $M - S = D \Rightarrow M = S + D$; entonces:

$$M + \underbrace{S + D}_{M} = 2M$$

COMPLEMENTO ARITMETICO (C°A) DE UN NUMERO

Se llama complemento aritmético de un número, a lo que le falta al número para valer una unidad de orden inmediato superior al de sus unidades más elevadas.

Todo $n \in \mathbb{Q}^+$ tiene complemento aritmético en todo sistema de numeración.

En el sistema decimal (en N): aplicando la definición:

C°A	de	$\overline{a}$	=	10	-	$\overline{a}$	=	10^1	-	$\overline{a}$
C°A	de	$\overline{ab}$	=	100	-	$\overline{ab}$	=	10^2	-	$\overline{ab}$
C°A	de	$\overline{abc}$	=	1000	-	$\overline{abc}$	=	10^3	-	$\overline{abc}$
.....	....	.....		.....		.....		.....		.....
.....	....	.....		.....		.....		.....		.....
.....	....	.....		.....		.....		.....		.....
C°A	de	$\overline{abc...xyz}$	=	$\underbrace{10...0}$	-	$\underbrace{\overline{abc...xyz}}$	=	10^n	-	$\underbrace{\overline{abc...xyz}}$
		"n" cifras		"n" ceros		"n" cifras				"n" cifras

De donde surge la siguiente regla: "Para calcular el C°A de un número, se resta dicho número de la unidad seguida de tantos ceros, como cifras tenga el número". Ejemplos:

C°A	de	6	=	10	-	6	=	4
C°A	de	82	=	100	-	82	=	18
C°A	de	742	=	1000	-	742	=	258

Regla Práctica:

Para calcular el C°A de un número en forma práctica se aplica la siguiente regla:

"Se resta cada cifra del número, de la cifra 9, empezando de izquierda a derecha, con excepción de la última cifra **significativa** de la derecha que se resta 10; si después de la última cifra significativa de la derecha siguen ceros, todos ellos se consideran en el C°A:

i) Hallar el C°A de $\overline{abcd}$

C°A de $\overline{abcd} = \overline{(9 - a) (9 - b) (9 - c) (10 - d)}$

ii) Hallar el C°A de $\overline{monopoo}$:

C°A de $\overline{monopoo} = \overline{(9 - m) (9 - o) (9 - n) (9 - o) (10 - p)}\ oo$

iii) Determinar el C°A de $\overline{6083000}$

C°A $\overline{608300} = \overline{(9 - 6) (9 - 0) (9 - 8) (10 - 3)}\ ooo = 3'917,000$

Propiedad Fundamental:

"Si a un número se le suma su C°A, se obtiene como resultado una unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el número. En General:

$$N + C°A \text{ de } N = 100\ldots000$$

(tantos ceros como cifras tenga N.)

Aplicaciones del C°A de un número: Transforma una sustracción en adición:

Sabemos que: M - S = D

"Si al minuendo y al sustraendo le sumamos una misma cantidad, la diferencia no varía". En virtud a esta propiedad, agregamos al minuendo, (M) y al sustraendo (S) del C°A del sustraendo, la diferencia (D) no varía.

$$M - S = (M + C°A \text{ del } S) - (S + C°A \text{ del } S) = D$$

M - S = (M + C°A del S) - (una unidad de orden inmediato superior a S) = D.

Ejemplo

6842	-	6842	+	
4228	<>	5772		(C°A de 4238)
2614		12614	-	(Una cantidad de orden inmediato superior a S)
		10000		
		2614		

Excedencia de un número: Es la diferencia entre el número propuesto y una unidad de orden más elevado.

Ejemplo

Calcular la excedencia de 6842.

$$EX° = 6842 - 1000 = 5842.$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SUSTRACCION

Observaciones Previas

* Como las reglas y definiciones se cumplen en todos los sistemas de numeración; para calcular el C°A de un número en cualquier sistema de numeración; además de aplicar la propiedad fundamental, podemos aplicar la regla práctica restando cada cifra del número propuesto de la cifra "máxima" del sistema empezando de izquierda a derecha y la última cifra significativa de la derecha se resta de la base del sistema de numeración.

* El cálculo de C°A de fracciones, se verá en el capítulo de "números racionales".

* Lo más relievante para resolver los problemas de sustracción es aplicar precisamente el algoritmo de sustracción.

1. La suma de los tres términos de una sustracción es 32510; si el sustraendo es a la diferencia como 3 es a 2. Hallar el sustraendo.

Solución

M = minuendo

S = sustraendo

D = diferencia

Por Propiedad:

$M + S + D = 2M$ .....(1)

Por dato:

$M + S + D = 32510$ .....(2)

De (1) y (2): $M = \frac{32510}{2} = 16255$, además

$\frac{S}{D} = \frac{3}{2}$ ..... (3)

$S + D = 16,255$ ..... (4)

> De (3) y (4) : S = 9753

Rpta. S = 9753

2. En la sustracción: el sustraendo es un número de 3 cifras y el minuendo 3802. Si la diferencia es 62 unidades mayor que el quíntuplo del complemento aritmético del sustraendo. Hallar la diferencia.

Solución

Si: M = minuendo, S = sustraendo, D = diferencia.

Consideremos: $S = \overline{abc}$

Por dato: $3802 - \overline{abc} = D$ ..... (1)

Como: $D - 5\,(1000 - \overline{abc}) = 62$ ..... (2)

(1) en (2): $3802 - \overline{abc} - 5\,(1000 - \overline{abc}) = 62 \Rightarrow$

$\overline{abc} = 315$, en (1):

$3802 - 315 = D = 3487$

Rpta. D = 3487

3. Usando una vez cada una de las cifras del sistema decimal formar dos números de cinco cifras cada uno, de tal manera que al restarlos, esta diferencia sea mínima. Dar como respuesta esta diferencia.

Solución

Los números serán:

$$\begin{array}{r} 50123 - \\ 49876 \\ \hline 247 \end{array}$$

Rpta. 247

4. En una resta el minuendo es $\overline{abc}$, el sustraendo es $\overline{abc}$ y la diferencia es $\overline{dc2}$.
Hallar $a + c + d - b$

Solución

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{ba6} \\ \hline \overline{dc2} \end{array}$$

* Se deduce que: $a > b$, también: $c = 8$
* En el orden de las decenas:
  $10 + b - a = c = 8,\ a - b = 2$
* En el orden de las centenas:
  $a - 1 - b = d \Rightarrow a - b - 1 = d = 1$
  (2)
* Entonces:
  $a + c + d - b = a - b + c + d = 2 + 8 + 1 = 11$

Rpta. 11

5. Si: C°A $[\ 1234_{(5)}\ ] = \overline{abcd}_{(5)}$

Hallar: $a + b + c + d$

Solución

Aplicando la definición de C°A:

C°A de $1234_{(5)}$ $= 10000_{(5)} - 1234_{(5)} = \overline{abcd}_{(5)}$

$= 3211_{(5)} = \overline{abcd}_{(5)}$

$\therefore a + b + c + d = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$

Rpta. 7

6. La suma de las cifras de la suma de dos números enteros positivos es 5 y la suma de las cifras de su diferencia es 6, si el mayor está entre 10 y 25 y el menor entre 10 y 15. Hallar la suma de las cifras del mayor de estos números.

Solución

Sean A y B los números A > B, podemos establecer:

$10 < A < 25$

$10 < B < 15$

$20 < A + B < 40$

Además: $A + B = \overline{mn}$, donde $m + n = 5$
Sólo se cumplen 23 y 32, pero:

$10 < A < 25$

$15 > B > 10$

$-5 < A - B < 15 \Rightarrow A - B = 6$

$$\therefore \quad \begin{matrix} A + B = 32 \\ A - B = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 19 \\ B = 13 \end{matrix}$$

suma pedida: 1 + 9 = 10

Rpta. 1 + 9 = 10

7. Hallar b + c , sabiendo que: $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{cd}$
y: a = c + d.

Solución

$\overline{ab} - \overline{ba} = 9 (a - b) = \overline{c\,d} = 10\,c + d \Rightarrow$

$9(c + d) - 9b = 10c + d \Rightarrow 8(d - b) = b + c$;

de aquí: $a - b = 1 \wedge b + c = 8$

Rpta. b + c = 8

8. Si: $\overline{abc} - \overline{bca} = 306$. Hallar : $\overline{abc} - \overline{cba}$

Solución

$\overline{abc} - \overline{bca} = 306 \Rightarrow 100a + 10b + c - 100b - 10c - a$

$\Rightarrow 11a - 10b - c = 34$

Se deduce que: $a - \overline{bb} = 3 \wedge a - c = 4$

$\therefore \overline{abc} - \overline{cba}\ 99\ (a - c) = 99 \times 4 = 396$

Rpta. 396.

9. La suma de las cifras de la diferencia:

$\overline{abc}_{(n)} - \overline{cba}_{(n)}$ es 30

¿Cuál es la base "n"?

Solución

$$\begin{array}{r} \overline{a\ b\ c}_{(n)} - \\ \overline{c\ b\ a}_{(n)} \\ \hline \overline{(a-1)\ (n-1)\ (n+c-a)}_{(n)} \end{array}$$

* Se deduce que a > c, entonces:

* En el primer orden': (n + c - a)

* En el segundo orden: (n + b - 1) - b = n - 1

* En el tercer orden: (a - 1 - c)

Por condición: $a - 1 - c + n - 1 + n + c - a = 30 \Rightarrow n = 16$

Rpta. 16

10. En la siguiente sustracción:
$b \geq 1$: $\overline{ab0000}_{(13)} - \overline{abab}_{(13)} = \overline{mnpqrs}_{(13)}$

Hallar m + n + p - q.

Solución

$$\begin{array}{r} \overline{ab0000}_{(13)} - \\ \overline{abab}_{(13)} \\ \hline \overline{mnp1rs}_{(13)} \end{array}$$

$S = 13 - b$

$r = 13 - (a + 1) = 12 - a$

$q = 13 - (b + 1) = 12 - b$

$p = 13 - (a = 1) = 12 - a$

$n = b - 1$

$m = a$

$\therefore m + n + p + q = a = b - 1 + 12 - a + 12 - b = 23$

Rpta. 23

11. La diferencia entre el C°A de un número y la excedencia de otro (ambos de tres cifras), es 100. Además la diferencia entre los números es 40. Determinar la suma de las cifras del número mayor.

Solución

Sean los números: $N_1 = \overline{abc}$ y $N_2 = \overline{de\ f}$, siendo N1 > N2.

Podemos establecer: C°A (N_1) = 1000 - N_1 y exed. (N_2) = N2 - 100

Por condición:

$$(100 - N_1) - (N_2 - 100) = 100 \Rightarrow$$

$$N_1 + N_2 = 1000 \quad \ldots\ldots (1)$$

Por dato:

$$N_1 - N_2 = 40 \quad \ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2), el mayor: $N_1 = 520$ $\quad \therefore\ 5 + 2 + 0 = 7$

Rpta. 7

12. Si el C°A de $\overline{(a)\ (a+1)\ (a+2)}$ es igual a 34 veces el C°A de $\overline{(2a)\ (a)}$. Hallar la suma de las cifras del C°A de: $\overline{(a-1)\ (a)\ (a+1)}$

Solución

Podemos establecer:

$$C°A\overline{(a)\ (a+1)\ (a+2)} = 34 \times C°A\overline{(2a)\ (a)}$$

$$\overline{(9-a)\ (8-a)\ (8-a)} = 34 \times \overline{(9-2a)\ (10-a)}$$

Se deduce que $0 < a \leq 4$

Fijándonos en la última cifra, para a = 1, el primer miembro terminaría en 7 y el segundo en 6, no cumple, analizando para a = 2, 3, 4 y vemos que sólo cumple para a = 4

$\therefore\ \overline{(a-1)\ (a)\ (a+1)} = 345$ y su C°A = 655

$\therefore$ Suma pedida: 6 + 5 + 5 = 16

Rpta. 16

13. Se tiene un número de 4 cifras significativas, cuya suma de sus cifras es 21. "Cuál será la suma de las cifras de su complemento aritmético?

Solución

Sea el número: $\overline{a\ b\ c\ d}$

Por dato: $a + b + c + d = 21 \quad \ldots\ldots (1)$

Su C°A será $\overline{(9-a)\ (9-b)\ (9-c)\ (10-d)}$

Suma de las cifras del C°A:

$$(9 - a) + (9 - b) + (9 - c) + (10 - d) = 37 - \underbrace{a + b + c + d}_{21} = 16$$

Rpta. 16

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE SUSTRACCION

1. La suma de los tres términos de una resta es 6858 y el sustraendo es la tercera parte del minuendo. Hallar la diferencia.

a) 2286 b) 1143 c) 5713 d) 3429 e) N.A.

2. Cuál es el valor del minuendo de una resta donde se cumple que la diferencia de los dos términos menores es 210 y que el minuendo es el triple del sustraendo.

a) 540 b) 450 c) 630 d) 360 e) 603

3. Al minuendo le sumamos 140 y le restamos el cuádruple de la suma del sustraendo más la diferencia, obteniéndose como resultado el minuendo. Hallar la diferencia original, si el sustraendo es el mayor posible y la suma de sus cifras es 3.

a) 15 b) 5 c) 11 d) 4 e) 3

4. En la operación de resta realizada en base nueve, la suma de los tres términos es $1403_{(9)}$ y si el sustraendo es la tercera parte del minuendo. Determinar la diferencia.

a) $400_{(9)}$ b) $456_{(9)}$ c) $431_{(9)}$ d) $526_{(9)}$ e) $347_{(9)}$

5. Nueve términos de tres cifras cuyos complementos aritméticos están en progresión aritmética mayor que 100, el número es $\overline{ab2}$ y el último $\overline{x\,y\,6}$. Hallar la última cifra del sexto número, sabiendo que es impar.

a) 5 b) 3 c) 1 d) 7 e) 9

6. Si: $\overline{1\,a\,a\,b} - \overline{c\,a\,1} = \overline{5\,9\,c}$ Hallar a + b + c

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

7. Si el C°A ($\overline{a\,b\,c}$) = 4a + 6b + 7c.
Hallar la suma de cifras del mayor número que cumple la condición anterior.

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

8. Se tiene un número de 3 cifras, cuyo complemento aritmético es un número de 2 cifras. Hallar dicho número sabiendo que su complemento aritmético es igual al producto de sus 3 cifras. Dar como respuesta la suma de las cifras del número de 3 cifras.

a) 12 b) 15 c) 18 d) 19 e) 22

9. Restar la suma de los complementos aritméticos de los 50 primeros números, de la suma de los 50 números siguientes, se obtiene:

a) 910 b) 885 c) 860 d) 810 e) 760

10. Hallar el menor número de 3 cifras diferentes en el cuál se cumple que: $C°A(\overline{abc}) = a \cdot c$ Dar como respuesta a + b + c.

a) 19 b) 18 c) 20 d) 17 e) N.A.

11. Si: $\overline{abcde} - \overline{edcba} = \overline{pqrst}$. Hallar el valor de: p + q + r + s + t.

a) 36 b) 27 c) 18 d) 9 e) 11

12. Si: $\overline{cdc} - \overline{aba} = 848$. Hallar: c + a

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

13. Hallar un número de 3 cifras, sabiendo que al restarle 120, se obtiene la tercera parte de su complemento aritmético. Dar como respuesta la suma de las cifras del número.

a) 10 b) 8 c) 12 d) 18 e) 7

6.3 MULTIPLICACION

Discusión del concepto de multiplicación

Se llama producto de un número "M" por un número "n" (n > 1) a la suma de "n" sumandos iguales a "M":

$$M \times n = M + M + M + \ldots\ldots + M = P \Leftarrow \text{producto}$$
$$\text{"n" sumandos}$$

El producto de los números "M" y "n" se indica intercalando entre ambos el signo x (introducido por Oughtred de 1631), o un punto (Harriot) o simplemente yuxtaponiéndolos cuando se designan por letras (Descartes):

$$M \times n \; ; \; M.n \text{ ó } Mn$$

El número "M" recibe el nombre de multiplicando y el número "n" se llama multiplicador; ambos números se dicen factores de un producto.

La operación de calcular el producto se denomina multiplicación. Evidentemente esta operación siempre es posible puesto que se reduce a una suma especial.

Leyes formales de la multiplicación

Ley de la uniformidad:

"Si se multiplican miembro a miembro dos o más igualdades, el resultado es otra igualdad".

$$
\begin{array}{ll}
a = a \ \times & 16 = 16 \ \times \\
b = b & 5 = 5 \\
\hline
. & 80 = 80 \\
. & \\
. & \\
n = n & \\
\hline
a,b,\ldots\ldots\ldots n = a,b,\ldots\ldots\ldots n &
\end{array}
$$

Ley de clausura:

"El producto "p" de dos números naturales, es otro número natural".

Si: $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow p = a \,.\, b \in \mathbb{N}$, lo cual indica que la multiplicación es cerrada en $\mathbb{N}$.

Ley distributiva:

"El producto de una suma indicada por un número, es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando cada sumando por el número. Así:

$$(a + b + c)n = an + bn + cn.$$

Ley conmutativa:

"El producto no depende del orden en que se consideren los factores. Así:

$$a \times b \times c = a \times c \times b = b \times c \times a = b \times a \times c$$

Ley asociativa:

"Si se reemplazan dos o más factores, por su producto parcial, el producto total no varía".

$$a \times b \times c \times d = (a \times b)(c \times d) = (a \times b \times c)\, d$$

Ley de monotonía:

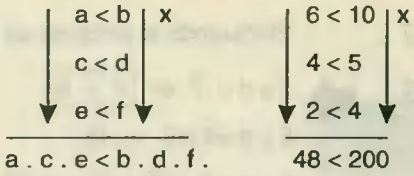
1a Parte.-

"Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número natural se obtiene otra desigualdad del mismo sentido".

$$\text{Si: } a < b \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c, \quad \forall\, c \in \mathbb{N} \text{ excepto } c = 0,$$

2da. Parte.-

Si se multiplican miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.



Ley modulativa:

$$\forall\ a \in \mathbb{Z}\text{, excepto } a = 0;\ \exists!\ x \text{ tal que:}$$
$$a.x = x.a = a \Leftrightarrow x = 1$$

El número 1 es el único que goza de la propiedad de que multiplicado por otroa > 0 da un producto igual a "a", es decir, el 1 es el módulo o elemento idéntico ó elemento neutro de la multiplicación, pues si se tiene otro número c < 1 por la ley de monotonía resulta ac < a; es decir, el producto a.c es desigual a "a".

Inverso ó recíproco de un número:

El inverso o recíproco del número "a" es otro número "x", tal que el producto de ellos nos da el módulo de la multiplicación:

$$(a.)(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

así: el inverso o recíproco de n es $\frac{1}{n}$ ó $n^{-1} \Rightarrow n \times \frac{1}{n} = n.n^{-1} = 1$

el inverso o recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$ ó $5^{-1} \Rightarrow \frac{1}{5} = 5 \times 5^{-1} = 1$

el inverso o recíproco de $\frac{1}{6} = \frac{1}{\frac{1}{6}}$ ó $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 1$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MULTIPLICACION

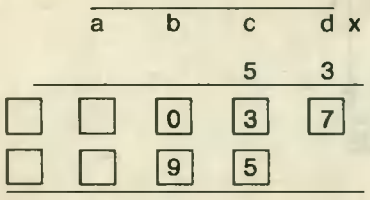
•Observaciones Previas

* Para resolver los problemas de multiplicación, fundamentalmente, recurriremos al algoritmo de multiplicación (especialmente en los problemas de reconstrucción).
* También constituyen elementos importantes para resolver este tipo de problemas, los cálculos auxiliares, como descomposición de un número en factores primos; la simplificación y la descomposición polinómica.

1. Hallar el número de cuatro cifras que multiplicado por 53 termine en 4 987.

Solución

Consideramos que sea: $\overline{abcd}$ el número buscado. Reconstruyendo la operación.



Efectuando el producto de derecha a izquierda:

$3 \times d = \overline{.7} \Leftrightarrow \boxed{d = 9}$

$5 \times d = 5 \times 9 = 45$

$3 \times c + 2 = \overline{.3} \Leftrightarrow \overline{3} \times c = \overline{.1} \Leftrightarrow \boxed{c = 7}$

$5 \times c + 4 = 39$

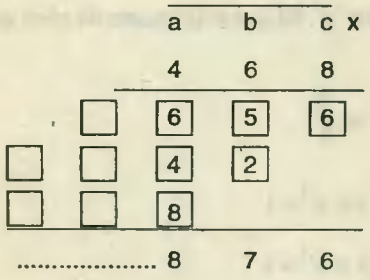
$3 \times b + 2 = \overline{.0} \Leftrightarrow \boxed{b = 6}$

$3 \times a + 2 = \overline{.1} \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$

Rpta. El número buscado es 3 679

2. Si: $\overline{abc} \times 468 = \ldots 876$; hallar las tres últimas cifras de abc x 156. Dar como respuesta, la suma de dichas cifras.

Solución



$8 \times c = \overline{.6} \Rightarrow \boxed{c = 7}$

$8b + 5 = \overline{.5} \Rightarrow \boxed{b = 5}$

$8 \times a + 4 = \overline{.6} \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$\therefore \overline{abc} = 457$

El producto pedido: $457 \times 468 = 213\ \underline{876}$

Rpta. Suma pedida: $8 + 7 + 6 = 21$

3. Hallar $x + y$ si: $\overline{xyxyxy} = 13 . x . y . \overline{xy}^2$

Solución

$\overline{xyxyxy} = 13 . x . y . \overline{xy}^2$

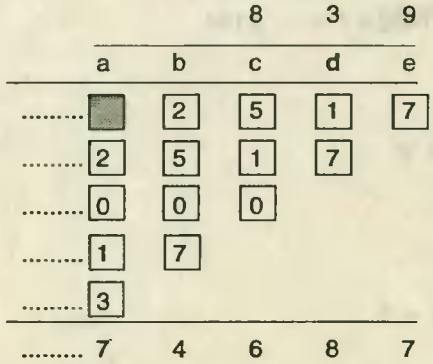
$10101 . \overline{xy} = 13 . x . y . \overline{xy}^2 \Rightarrow 777 = x . y . \overline{xy} \Rightarrow 3 \times 7 \times 37 = x . y . \overline{xy} \Rightarrow \overline{xy} = 37$

Rpta. $\therefore x = 3 \wedge y = 7 \Rightarrow x + y = 10$

4. Hallar un número de cinco cifras tal que multiplicado por 839 de un producto terminado en 74 687

Solución

Sea $\overline{abcde}$ el número buscado. Reconstruyendo la multiplicación:



$e \times 9 = .\overline{7} \Leftrightarrow \boxed{e = 3}$

$d \times 9 = .\overline{7} \Leftrightarrow \boxed{d = 3}$

$c \times 9 = .\overline{0} \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$

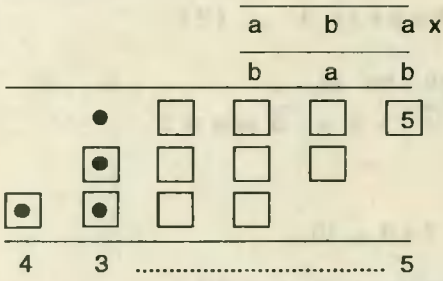
$b \times 9 = .\overline{7} \Leftrightarrow \boxed{b = 3}$

$a \times 9 = .\overline{3} \Leftrightarrow \boxed{a = 7}$

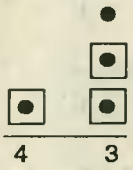
Rpta. $\therefore$ El número buscado es: 73 033

5. Si se cumple que $\overline{aba} \times \overline{bab} = 43...5$. ¿Cuál es el valor de a + b?

Solución



Se deduce que: $a \times b = .\overline{5}$; también



$\Rightarrow a \times b + n = 43$

$.\overline{5} + n = 43$

$\Rightarrow n = 8$

$\therefore a \times b = 35 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \wedge b = 7 \\ a = 7 \wedge b = 5 \end{cases}$

Rpta. $\therefore a + b = 12$

6. Si N x 6 termina en 2 356. ¿Cómo termina N x 14?

Solución

(N x 2)3 = ... 2 356. Consideremos: N x 2 = M $\Rightarrow$ M x 3 = ...2 356

Si: M = $\overline{.....abcd}$, entonces:

$$\begin{array}{cccc} \hline \ldots\ldots\ldots a & b & c & d \\ & & & 3 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 2 & 3 & 5 & 6 \end{array} \times$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3 \times d = 6 \Leftrightarrow d = 2 \\ 3 \times c = \overline{.5} \Leftrightarrow c = 5 \\ 3 \times b + 1 = \overline{.3} \Leftrightarrow = b = 4 \\ 3 \times a + 1 = \overline{.2} \Leftrightarrow = a = 7 \end{array} \Rightarrow M = \overline{\ldots 7452}$$

El producto pedido es:

$$N \times 2 \times 7 = M \times 7 = \overline{\ldots 7452} \times 7 = \ldots 2164$$

Rpta. $\therefore$ N x 14 termina en 2164

7. Si: $\overline{ao} \times \overline{bo} \times \overline{ab} = 25\,000$. Hallar el valor de "a"

Solución

$\overline{ao} \times \overline{bo} \times \overline{ab} = 25\,000$
$10 \times a \times 10 \times b \times \overline{ab} = 25\,000$
$a \times b \times \overline{ab} = 2 \times 5 \times 25 \Leftrightarrow a = 2, b = 5$

Rpta. $\therefore a = 2$

8. Hallar a + b, si $\overline{abbb} \times \overline{aa} = \ldots 641$

Solución

$$\begin{array}{cccc} \hline a & b & b & b \\ & & \overline{a} & \overline{a} \\ \hline \ldots\ldots\ldots 3 & & 3 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots 3 & & 1 & \\ \hline \ldots\ldots\ldots 6 & & 4 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$b \times a = \overline{x\ 1}$ ..... (1) pero:

$b \times a + x = \overline{.3}$ ..... (2)

① en ②, :

$\overline{x\ 1} + x = \overline{.3} \Leftrightarrow x = 2$

Rpta. $\therefore b \times a = 21 = 7 \times 3 \Rightarrow a + b = 7 + 3 = 10$

9. ¿En cuántos números de 3 cifras el producto de sus cifras es 30?

Solución

Los números buscados son de la forma:

abc, donde se debe cumplir que:

$$\overline{abc} = a \times b \times c = 30 = \underbrace{2 \times 3 \times 5}_{\text{6 combinaciones;}} = \underbrace{6 \times 5 \times 1}_{\text{6 combinaciones}}$$

235	651
253	615
352	516
325	561
523	165
532	156

Rpta. En total existen: 6 + 6 = 12 números.

10. Hallar x + y si: $\overline{b\,a\,b\,a} \times 79 = \overline{z\,x\,x\,y\,y\,7}$

Solución

$$\begin{array}{cccccc} & \overline{b} & a & b & a & \times \\ & & & 7 & 9 & \\ \hline & * & * & * & * & 7 \\ * & * & * & * & 1 & \\ \hline Z & X & X & Y & Y & 7 \end{array}$$

Reconstruyendo la operación fácilmente se comprueba que a = 3

en las decenas:

$9 \cdot b + 2 + 1 = .\overline{y}$ ..... (1)

➔ observese el siguiente artificio:

$9 \cdot b + 2 = 10\,b + (2 - b) = \overline{b\,(2-b)}$

si $b \leq 2$ ..... (2)

también:

➔$9b + 2 = 10b + 2 - b = \overline{(b-1)\,(12-b)}$ si b >2 ..... (3)

En las centenas:

$7b + 2 + 7 + b - 1 = .\overline{y}$

Sólo se cumple b = 5 $\quad \therefore 5353 \times 79 = 422887$

Rpta. $\therefore x + y = 10$

11. La suma de 2 números de dos cifras es igual al producto de sus complementos aritméticos. ¿Cuál es el valor del mayor de estos 2 números?

Solución

Sean: $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ los números. Podemos establecer:

$$\overline{ab} + \overline{cd} = (100 - \overline{ab})(100 - \overline{cd}) = 10\,000 - 100(\overline{ab} + \overline{cd}) + \overline{ab} \times \overline{cd} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 101(\overline{ab} + \overline{cd}) - \overline{ab} \times \overline{cd} = 10\,000 \Rightarrow 101 \times \overline{ab} + 101 \cdot \overline{cd} - \overline{ab} \times \overline{cd} = 10\,000$$
$$\Rightarrow \overline{ab}(101 - \overline{cd}) + 101\,\overline{cd} = 10\,000 \Rightarrow (101 - \overline{ab})(101 - \overline{cd}) = 201 = 3 \times 67$$

$101 - \overline{ab} = 3 \Rightarrow \overline{ab} = 98$
$101 - \overline{cd} = 67 \Rightarrow \overline{cd} = 34$

Rpta. El mayor es 98

12. Si se cumple que: $\overline{mcdu} \times 3 = \overline{udcm} - 391$. Hallar $m + c + d + u$

Solución

Si: $\overline{mcdu} \times 3 + 391 = \overline{udcm}$ .....α

$\therefore 3m < 10 \Rightarrow m = 1, 2, 3.$

En α cuando $m = 1 \Rightarrow u = 0$
$m = 2 \Rightarrow u = 7$ (I)
$m = 3 \Rightarrow u = 4$ (II)

De (I): $\overline{2\,c\,d\,7} \times 3 + 391 = \overline{7\,d\,c\,2}$, descomponiendo polinómicamente se encuentra la siguiente solución para $c = 3 \Rightarrow d = 4$

De (II) no hay solución

Rpta. $\therefore m + c + d + u = 2 + 3 + 4 + 7 = 16$

13. Hallar en que cifra termina Q - P si:

$$P = \underbrace{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots\ldots}_{\text{38 términos}}$$

$$Q = \underbrace{2 \times 7 \times 8 \times 9 \times 2 \times 7 \times \ldots\ldots\ldots}_{\text{54 términos}}$$

Solución

$$P = \underbrace{(3 \times 4 \times 6 \times 7)(3 \times 4 \times 67) \ldots (3 \times 4 \times 6 \times 7)}_{\text{9 bloques completos}} \times 3 \times 4$$

Cada bloque: $3 \times 4 \times 6 \times 7 = \ldots 4$

$$P = \underbrace{(\ldots 4)(\ldots 4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ldots 4)}_{\text{9 bloques}} \times 3 \times 4$$

$$P = \overline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4} \times 3 \times 4 = \overline{\ldots\ldots\ldots\ldots 8}$$

$$\therefore P = \overline{\ldots\ldots\ldots\ldots 8} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Q = \underbrace{(2 \times 7 \times 8 \times 9)(2 \times 7 \times 8 \times 9) \ldots (2 \times 7 \times 8 \times 9)}_{\text{13 bloques}} \times 2 \times 7$$

Cada bloque: $2 \times 7 \times 8 \times 9 = \overline{\ldots 8}$

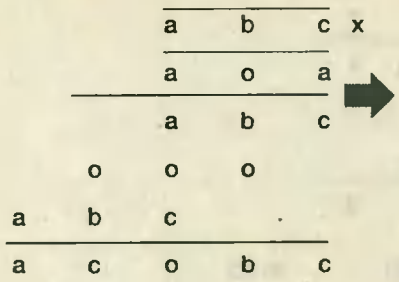
$$Q = \underbrace{(\overline{\ldots 8})(\overline{\ldots 8}) \ldots (\overline{\ldots 8})}_{\text{13 factores}} \times 2 \times 7 = \overline{\ldots 2}$$

$$\therefore Q = \overline{\ldots\ldots\ldots\ldots 2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Rpta. $Q - P = \overline{\ldots\ldots 2} - \overline{\ldots\ldots 8} = \overline{\ldots\ldots 4}$

14. Si se tiene que: $\overline{aoa} \times \overline{abc} = \overline{acobc}$. Hallar a + b + c.

Solución



De la operación: a = 1

como $a + c = 10 \Rightarrow c = 9$ y :

$b + 1 = c \Rightarrow b = 8$

Rpta. $\therefore a + b + c = 18$

15. Hallar b + c si se sabe que: $\overline{aba} \times K = \overline{aca7}$

Solución

Se deduce que a y k ó son 1 y 7 ó 3 y 9. Verificando: a = 3 y k = 9

luego: $\overline{3b3} \times 9 = \overline{3c37} \Rightarrow (303 + 10b)\,9 = 3037 + 100c$

$\Rightarrow 9b = 31 + 10c \Leftrightarrow b = 9 \wedge c = 5$

Rpta. $\therefore b + c = 14$

16. ¿Cuánto vale p + b, si: $\overline{p(p+1)(p+2)} \times \overline{4b} = \overline{3bb0b}$?

Solución

$\overline{P...} \times \overline{4.} = \overline{3...} \Rightarrow p \geq 6 \Rightarrow p + 2 \leq 9 \Rightarrow p \leq 7$

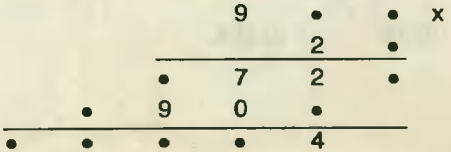
Se verifica para $p = 7 \Rightarrow 789 \times \overline{4b} = \overline{3bb0b} \Leftrightarrow b = 5$

Rpta. $\therefore p + b = 12$

PROBLEMAS PROPUESTOS

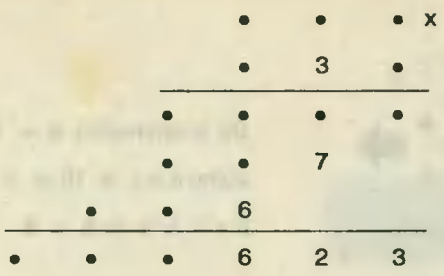
sobre multiplicación con clave

1. Hallar la suma de las cifras del resultado en la siguiente multiplicación:



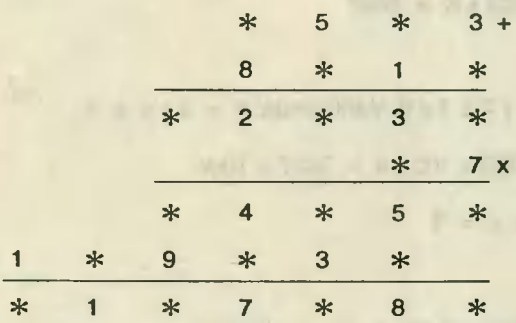
a) 16 b) 18 c) 20 d) 17 e) 15

2. Hallar la suma de las cifras del producto:



a) 12 b) 15 c) 20 d) 21 e) 23

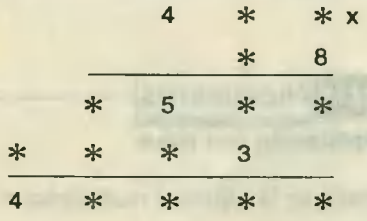
3. Reconstruir:



Dar como respuesta la suma de las cifras del resultado

a) 17 b) 35 d) 42 d) 29 e) N.A.

4. Hallar la suma de las cifras del resultado de la siguiente multiplicación.



a) 17 b) 21 c) 24 d) 19 e) N.A.

5. Si: $N \times \overline{ab} = 17\,472$
$N \times \overline{cb} = 53\,872$

Hallar N, si c - a = 5

a) 886 b) 416 c) 728 d) 736 e) 816

6. Hallar el número de 4 cifras

N = $\overline{abcd}$ y dar como respuesta la suma de sus cifras sabiendo que:

$$\overline{ab} = 4(a+b)$$
$$\overline{abc} = 19(a+b+c)$$
$$\overline{abcd} = 118(a+b+c+d)$$

a) 21 b) 20 c) 22 d) 23 e) N.A.

7. Hallar los números: N = $\overline{abcdef}$, tales que: $\overline{abcde}$ x 4 = $\overline{efabcd}$.

El número de soluciones es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 7 e) 4

8. Hallar a + b si:

$$\overline{(a-2)(a)(2b+1)} \times \overline{(b)(a+2)(a-1)} = \overline{\ldots 4}$$

a) 9 b) 7 c) 11 d) 12 e) 15

9. Si $\overline{abc}$ x 9 = $\overline{bc7b}$. Hallar $\overline{abc}$ y como respuesta a x c

a) 9 b) 27 c) 18 d) 36 e) N.A.

10. Si se cumple que:

$$\overline{abc} \times 839 = \ldots 543$$

Hallar el valor de: a + b + c

a) 15 b) 14 c) 13 d) 12 e) 9

11. Hallar un número de cuatro cifras sabiendo que al multiplicarlo por 97 da como resultado un número que termina en 1 866. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 25 b) 28 c) 19 d) 22 e) 21

12. Sabiendo que "a" es una cifra calcular el valor de c + d a partir de:

$$a \times b = \overline{cd} \text{ y } d \times a = \overline{1b}$$

a) 13 b) 11 c) 12 d) 9 e) 8

13. Se tiene 4 cifras diferentes a, b, c y d que cumplen:

$$\overline{aba} \times \overline{cdc} = \overline{eaabfb}$$

además:

$$\overline{ea} \times \overline{1fa} = \ldots 9$$

$$\overline{eb} \times \overline{1fb} = \ldots 9$$

$$\overline{ec} \times \overline{1fd} = \ldots 9$$

Se pide hallar e + f

a) 8 b) 5 c) 12 d) 6 e) 10

14. Hallar a + d si:

$$\overline{aba} \times 3 = \overline{10cd} \quad (o=cero)$$

a) 8 b) 12 c) 14 d) 16 e) N.A.

15. Indicar la suma de los valores que pueden tomar "b" si:

$$\overline{abbb} \times c = \overline{bbbc}$$

(diferentes entre sí)

a) 19 b) 10 c) 15 d) 18 e) N.A.

16. Cuántos números de 3 cifras que multiplicadas por 7 dan como resultado un capicúa de 4 cifras?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) N.A.

17. A un número de 4 cifras se le multiplica por 9 luego se le agrega cinco, veces la cifra de mayor orden obteniéndose un número de 5 cifras iguales. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 d)1

18. Si:

$$\overline{abc} \times \overline{ac} = \overline{ccc1a}$$

Hallar (a + b + c), siendo diferentes entre sí y además significativas.

a) 15 b) 19 c) 18 d) 22 e) N.A.

19. Si: $\overline{cd} \times \overline{cd} = \overline{ab40}$. Hallar $a + b + c + d$

a) 15 b) 22 c) 18 d) 25 e) 20

20. Hallar $(a + b + c)$ si:

$$\overline{ab} \times c = \overline{aaa};\ a \neq b \neq c$$

a) 15 b) 19 c) 14 d) 18 e) N.A.

21. El producto de todos los números de una o dos cifra posibles de formar con dos cifras diferentes es 109 200. Hallar la suma de las cifras.

a) 7 b) 12 c) 8 d) 11 e) N.A.

22. Al multiplicar cierto número por 73, el producto termina en 0517, pero al revisar me di cuenta, que escribí un 2 en vez de 7 en las decenas y 9 en vez de 6 en las unidades de dicho número. Hallar la cifra de las centenas del verdadero producto.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

23. Hallar: $m + c + d + n + a$. Sabiendo que al multiplicar $\overline{mcdn} \times \overline{aa}$ da como resultado un número que termina en 73195

a) 22 b) 20 c) 17 d) 25 e) 28

24. Hallar la suma de las cifras del número $\overline{abcd}$ sabiendo que el multiplicarlo por el número $\overline{pp}$ da como resultado un número que termina en 85 351.

a) 32 b) 17 c) 27 d) 25 e) 30

25. Hallar el número de 4 cifras que multiplicado por 53 termine en 4987. Dar como respuesta la menor de sus cifras.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

26. Hallar la cifra de las centenas de un número entero que al ser multiplicado por un número de 3 cifras da como producto parciales 1311, 874 y 1748.

a) 5 b) 3 c) 6 e) 4 e) 7

27. Al multiplicar 13547 por un entero se tomó por error un 2, como 8 en las centenas y así el resultado fue: 25143232. ¿Cuál será la suma de las cifras del resultado correcto?

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) N.A.

28. Si: $\overline{abc} \times a = 1071$
$\overline{abc} \times b = 1785$
$\overline{abc} \times c = 2499$

Hallar el cuadrado de $\overline{abc}$.

a)127449 b)127448 c)127459 d) 127549 e) N.A.

29. Si se corre el punto decimal de un número, un lugar hacia la derecha aumenta en: 3.051. Hallar el número:

a) 0.330 b) 0.339 c) 0.337 d) 0.338 e) N.A.

30. Si un número de tres cifras cdu es tal que $\overline{cdu} = d + c^2 + u^3$

Hallar $c + d + u$

a) 13 b) 15 c) 18 d) 17 e) 12

Clave

(1) c	(7) a	(13) b	(19) b	(25) b
(2) b	(8) a	(14) e	(20) d	(26) d
(3) a	(9) c	(15) a	(21) c	(27) c
(4) c	(10) c	(16) d	(22) a	(28) a
(5) c	(11) b	(17) d	(23) d	(29) b
(6) b	(12) b	(18) c	(24) b	(30) b

6.3 DIVISION

Discución del concepto división

Empezaremos, por desarrollar la idea de "números divisibles", "múltiplo" y "divisor":

Dos números son **divisibles** cuando el cociente de ellos es exacto y entero; por ejemplo 32 y 4 son números divisibles ya que:

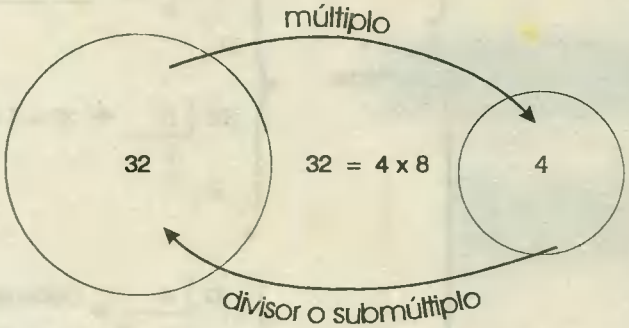
$\frac{32}{4} = 8$ — cociente exacto, cociente entero, de aquí:

$\therefore\ 32 = 4 \times 8$ ..... (1)

Propiedad:

"Si dos números son divisibles uno de ellos es múltiplo del otro".

De (1) y de acuerdo a esta propiedad se deduce que 32 es múltiplo de 4 y 4 es factor; "divisor" o submúltiplo de 32.



se utiliza la notación:

$$32 = m4; \quad 32 = \overset{\bullet}{4}; \quad \overline{\overset{\bullet}{32}} = 4$$

- ¿Por qué 32 es múltiplo de 4?
- Porque 32 es el producto de 4 por un entero (8).

- ¿Por qué 4 es divisor de 32?
- Por qué 4 está contenido exactamente un número de veces en 32 (ocho veces).

Algoritmo de la división:

A pesar de que la relación de "divide a" existe sólo entre algunos pares ordenados enteros, podemos decir algo acerca de cualquier par dado. Por ejemplo, dados dos enteros 15 y 4, podemos expresar a 15 como un múltiplo de 4 más un residuo de 3.

$$15 = 4 \times 3 + 3$$

Este principio tan obvio ilustra el algoritmo de división.

Definición:

Es la operación que tiene por objeto averiguar las veces que una cantidad llamada dividendo (D) contiene a otra llamada divisor (d); la cantidad que pone en evidencia esta relación se llama cociente (c).

DIVISION

Elementos:

D = dividendo
d = divisor
c = cociente
R = residuo

Exacta

c = # entero
R = 0

D | d → D = d . c
0 | c

32 | 4 → 32=4x8
0 | 8

Inexacta

c ≠ # entero ó
R ≠ 0

Defecto

D | d → D = dc + R
R | c

32 | 5 → 32 = 5 x 6 + 2
2 | 6

Completa

D | d → Cociente verdadero
R | c + R/2 → o completo
-R | 2
0

$C_v = C + \frac{R}{D}$

Exceso

D | d → D = d(c+1)+(-R´)
-R´ | (c+1)

32 | 5 → 32 = 5 (6+1) - 3
-35 | (6+1)
-3

Propiedades

i. $|R_d| + |R_E| = \text{divisor}$

ii. $R < \text{divisor}$

iii. R máximo = divisor -1

Determinación del cociente de dos números con una aproximación dada : $\left(\frac{a}{b}\right)$

Consideremos que sea:

D = dividendo; d =divisor; "n" el mayor número de veces que el cociente por defecto contiene a $\left(\frac{a}{b}\right)$ y sea (n + 1) el menor número de veces que el cociente por exceso contiene a $\left(\frac{a}{b}\right)$

Se cumple:

$$n.\frac{a}{b} < \frac{D}{d} < (n+1).\frac{a}{b} \Rightarrow n.\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} x \frac{D}{d} < (n+1)\frac{a}{b}$$

$$n.\frac{a}{b} < \frac{D x \frac{b}{a}}{d} < (n-1)\frac{a}{b};$$ donde se cumple que:

$n.\frac{a}{b}$ = cociente por defecto (C_d)

$(n+1)\frac{a}{b}$ = cociente por exceso (C_e)

Nota: De la expresión anterior se deduce que :

$$\text{cociente por exceso } (C_e) = C_d + \frac{a}{b}$$

Número de cifras de un producto y Número de cifras de un cociente.

Introducción:

En todo sistema de numeración, cualquier número se pude representar dentro del límite comprendido por dos potencias **consecutivas** de la base, donde el exponente del límite superior es igual a la cantidad de cifras que tiene el número propuesto. Así en el sistema decimal.

i. En el sistema decimal:

Número de una cifra $\overline{a}$: $10^0 \leq \overline{a} < 10^1$

Número de dos cifras $\overline{ab}$: $10^1 \leq \overline{ab} < 10^2$

Número de tres cifras $\overline{abc}$: $10^2 \leq abc < 10^3$

Número de "n" cifras $\overline{abc.....xyz}$: $10^{n-1} \leq \overline{abc.....xyz} < 10^n$

("n" cifras) ("n" cifras)

ii. Representar los números: $\overline{abab}_{(3)}$; $\overline{mnm}_{(9)}$; $\overline{abcd}$; $\overline{mrst}_{(12)}$ dentro del límite correspondiente a dos potencias consecutivas de sus bases:

$$10^3_{(tres)} \leq \overline{abab}_{(tres)} < 10^4_{(tres)}$$

$$10^2_{(nueve)} \leq \overline{mnm}_{(nueve)} < 10^3_{(nueve)}$$

$$10^3 \leq \overline{abcd} < 10^4$$

$$10^3_{(doce)} \leq \overline{mrst}_{(doce)} < 10^4_{(doce)}$$

Hallar entre qué límites está comprendido el número de cifras de un producto de "n" factores.

Consideremos el producto: $P = A \times B \times C \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times Z$ .....(1)

("n" factores)

Además consideremos que:

Número de cifras de A es "a" $\Rightarrow$ $10^{a-1} \leq A < 10^a$
Número de cifras de B es "b" $\Rightarrow$ $10^{b-1} \leq B < 10^b$
Número de cifras de C es "c" $\Rightarrow$ $10^{c-1} \leq C < 10^c$
.
.
.
Número de cifras de Z es "z" $\Rightarrow$ $10^{z-1} \leq Z < 10^z$

} multiplicando

$$10^{a-1+b+1+c-1+\ldots+z-1} \leq A \times B \times C \times \ldots \times Z < 10^{a+b+c+\ldots+z}$$

$$10^{a+b+c+\ldots+z-n} \leq P < 10^{a+b+c+\ldots+z}$$

Si: $a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots + z = M$, la expresión ($\alpha$) tomaría la forma:

("n" sumandos)

$$10^{M-N} \leq P < 10^M$$

$\therefore$ El producto P tendrá como mínimo (M - n + 1) cifras y como máximo M cifras.

Corolario (1): "El número de cifras del producto de dos números enteros es a lo más igual a la suma de los números de cifras de los dos factores y al menos igual a esta

suma disminuida en 1.
Si el número: N tiene "n" cifras y M tiene "m" cifras,el producto N x M tendrá n + m cifras ó n + m - 1 cifras.

Corolario (2): El cuadrado de un número que tiene "m" cifras tendrá 2m ó 2m - 1 cifras.

Número de cifras de un cociente: TEOREMA:

"Si el dividendo "D" tiene "m" cifras y el divisor "d" tiene "n" cifras y la primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor; el cociente tendrá (m - n) + 1 cifras.

"Si la primera del dividendo es menor que la primera del divisor el cociente tendrá (m - n) cifras".

"Si las primeras cifras del dividendo y divisor son iguales, se comparan las segundas cifras".

"Si la segunda del dividendo es mayor que la segunda del divisor, el cociente tiene (m - n)+1 cifras y si fuese menor de la del dividendo que la del divisor tendrá el cociente (m - n) cifras.

En conclusión el cociente tendrá como mínimo (m - n) cifras y como máximo (m - n) +1 cifras".

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DIVISION

Observaciones Previas

* Para resolver los problemas de división debemos recordar que:
  Dividiendo = divisor x cociente + residuo
* Además las propiedades básicas:
  - $|R_d| + |R_E| =$ divisor
  - R < divisor
  - R máximo = divisor - 1
  - La propiedad fundamental.
* En algunos problemas, se aplicará descomposición polinómica del número.

1. Hallar a + b si: al dividir $\overline{ab5}$ entre $\overline{b7}$ da como cociente 22 y residuo 21.

Solución

Como: (Dividendo) = (divisor) (cociente) + (residuo), podemos establecer:

$\overline{ab5} = \overline{b7} \times 22 + 21$; polinómicamente:

$100a + 10b + 5 = 220b + 154 + 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100a - 200b = 10b + 170 \Rightarrow \underbrace{10(a - 2b)}_{\text{termina en cero}} = b + 17$

$\Rightarrow b + 7 = \overline{\ldots 0} \Leftrightarrow b = 3 \wedge a = 8$

Rpta. $\therefore a + b = 11$

2. Cuántos números al ser divididos entre 138 tienen 42 de cociente y un residuo mayor que 35?

Solución

Por propiedad : residuo < divisor $\Rightarrow$ r < 138 ..... (1)
Por dato : r > 35 ..... (2)
De (1) y (2) : $35 < r < 138 \Rightarrow r = 36; 37; 38; \ldots; 137$

Rpta. $\therefore$ Existen: 137 - 35 = 102 números.

3. Si al dividendo de una división le añadimos 1000 unidades, el cociente y el residuo aumentan en 4 y 8 unidades respectivamente.
¿Cuál es el valor del divisor?

Solución

Sea la división:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline 5 & c \end{array} \Rightarrow D = dc + r \quad \ldots\ldots\ldots (1), \text{ se debe cumplir}$$

$$\begin{array}{r|l} D + 1000 & d \\ \hline (r + 8) & (c + 4) \end{array} \Rightarrow D + 1000 = d(c + 4) + (r + 8) \ldots\ldots (2)$$

Rpta. De ① y ② : $1000 = 4d + 8 \Rightarrow d = 248$

4. En una división, el dividendo termina en 21, el cociente en 91 y el residuo en 59. ¿Cómo termina el divisor?

Solución

Como D = dc + r, podemos establecer:

$$\overline{\ldots 21} = d \times \overline{\ldots 91} + \overline{\ldots 59} \Rightarrow \overline{\ldots 21} - \overline{\ldots 59} = d \times \overline{\ldots 91}$$

$$\Rightarrow \overline{\ldots 62} = d \times \overline{\ldots 91}. \text{ Si } d = \overline{\ldots ab} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \ldots\ldots & \overline{a} & \overline{b} \times \\ & 9 & 1 \\ \hline \ldots\ldots & 8 & 2 \\ \ldots\ldots & 8 & \\ \hline & 6 & 2 \end{array}$$

Rpta. $\therefore d = \overline{\ldots 62}$ .El divisor termina en 62.

5. En una división de números enteros la suma del dividendo, divisor y cociente es 984. Hallar el cociente si: residuo por defecto = 31, residuo por exceso = 21.

Solución

Se cumple: $D + d + c = 984$ .....(1), además por propiedad:

$$r + r' = d \Rightarrow 31 + 21 = 52 = d \therefore D + c = 984 - 52 = 932 \text{ .....(2)}$$

$\Rightarrow$Pero: $D = dc + r$, en (2) : $52c + r + c = 932$ pero $r = 31$

$\therefore 53c + 31 = 932 \Leftrightarrow c = 17$

Rpta. El cociente $c = 17$

6. Hallar el cociente de 57 entre 12 con un error menor que 0,1

Solución

$$C_d = \frac{1}{10}\left(\frac{57x10}{12}\right) = \frac{1}{10}x\frac{570}{12} = \frac{1}{10}x47 = 4,7$$

$$C_e = \frac{1}{10}(47+1) = 4,8$$

Rpta. $C_d = 4,7 \wedge C_e = 4,8$

7. Hallar el cociente de 173 entre 24 con un error menor que $\frac{3}{11}$

Solución

$$C_d = \frac{3}{11}x\left(\frac{173\times\frac{11}{3}}{24}\right) = \frac{3}{11}x\frac{1903}{72} = \frac{3}{11}x26 = \frac{78}{11} = 7\frac{1}{11}$$

Rpta. $7\frac{1}{11}$

8. Cuántos números enteros existen tales que al dividirlos entre 47 con error menor que $\frac{1}{10}$ de un cociente por defecto igual a 12,8?

Solución

$$12,8 < \frac{1}{10}\left(\frac{Dx10}{47}\right) < 12,9 \Rightarrow \frac{128}{10} < \frac{D}{47} < \frac{129}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{128x47}{10} < D < \frac{47x129}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{6056}{10} < D < \frac{6063}{10}$$

$$\Rightarrow 601,6 < D < 606,3$$

Rpta. $\therefore D = 602;\ 603;\ 604;\ 605$ y 606

9. En una división al residuo le falta 35 unidades para ser máximo y le sobra 29 unidades para ser mínimo. ¿Cuál es el valor del dividendo si el cociente es 23?

Solución

La división propuesta, es la de forma:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & 23 \end{array}$$

además:

$$r + 35 = d - 1$$
$$d - r = 36$$

también:

$$r - 29 = 0$$
$$\therefore\ r = 29 \wedge d = 65$$

El dividendo será:
$D = 65 \times 23 + 29 = 1\,524$

Rpta. 1 524

10. En una división al residuo por exceso le falta 12 unidades para ser igual al residuo por defecto, a éste le faltan 21 unidades para ser igual al divisor y a este 15 unidades para ser igual al cociente. ¿Cuánto le falta al cociente para ser igual al dividendo?

Solución

Se cumple:

$$r - r' = 12 \ldots\ldots (1)$$
$$r' - 21 = d \ldots\ldots (2)$$
$$c - d = 15 \ldots\ldots (3)$$

como $r + r' = d \ldots\ldots (4)$

De (1) y (2), (4) se deduce que:

$$r' = 21 \qquad r = 33 \wedge d = 21 + 33 = 54$$

De (3)

$$C = 54 + 15 = 69$$

$$\therefore D = 54 \times 69 + 33 = 3\,759$$

Entonces D - C = 3759 - 69 = 3690
Rpta. Al cociente le faltan 3 690 unidades para ser igual al dividendo.

11. Hallar el mayor número de 4 cifras que dividido entre el menor número par que tiene 14 por suma de sus cifras se obtiene un residuo que tenga 14 por suma de sus cifras

Solución

El menor número par por cuya suma de sus cifras es 14, es precisamente 68 como la suma de las cifras del residuo es 14 y éste debe ser menor que el divisor (68); el residuo será: 59

Sea N el número buscado (N es el mayor número posible de 4 cifras)

$$\begin{array}{r|l} N & 68 \\ \hline 59 & c \end{array} \quad \Rightarrow N = 68c + 59 \Rightarrow 68c + 59 < 1000 \Rightarrow c < 147$$

Rpta. $\therefore C_{máximo} = 146 \Rightarrow N = 68 \times 146 + 59 = 9\,987$

12. Se tiene 943 números consecutivos, si se divide el menor de ellos entre 78 se obtiene 29 de residuo. ¿Qué residuo se obtiene al dividir el mayor entre éste divisor?

Solución

Se cumple: último término = Primero + 942 .....(1)

Pero: primero = 78 x c + 29 en (1):

último término = 78c + 29 + 78x 12 + 6
último término = 78 (c + 12) + **35**

Rpta. $\therefore$ El nuevo residuo es: 35.

13. Al dividir A entre B se obtiene residuo máximo. Si el dividendo se disminuyera en 170, el cociente disminuiría en 3 unidades y el residuo se volvería mínimo. Hallar B.

Solución

Podemos establecer:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline C & \\ B\text{-}1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = B(C + 1) - 1 \qquad .....(1)$$

$$\begin{array}{l|l} A - 170 & B \\ \hline & (C-3) \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad A - 170 = B(C-3) + 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Rpta. De (1) y (2): $B = 43$.

14. Al dividir $\overline{abcdef}$ por 47 se obtuvieron 5 residuos máximos. Hallar $a + b + c + d + e + f$

Solución

$$\begin{array}{cccccc|l} a & b & c & d & e & f & 47 \\ \hline 4 & 7 & & & & & 19999 \\ \hline 4 & 6 & 9 & & & & \\ 4 & 2 & 3 & & & & \\ \hline & 4 & 6 & 9 & & & \\ & 4 & 2 & 3 & & & \\ \hline & & 4 & 6 & 9 & & \\ & & 4 & 2 & 3 & & \\ \hline & & & 4 & 6 & 9 & \\ & & & 4 & 2 & 3 & \\ \hline & & & & 4 & 6 & \end{array}$$

En la primera división parcial: $\overline{ab} = n \cdot 47 + 46 \Leftrightarrow n = 1 \quad \therefore \overline{ab} = 93$

En la segunda división parcial: $\overline{46c} = 47 \times 9 + 46 \Leftrightarrow c = 9$

. . . . . .

$d = a; \qquad e = 9 \quad y \quad f = 9$

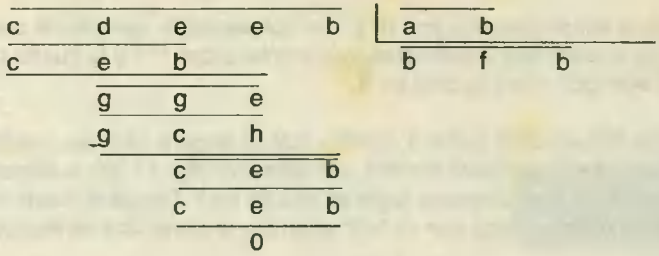
Rpta. $a + b + c + d + e + f = 48$

15. Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta los valores que pueden tomar el cociente y el divisor.

$$\begin{array}{cccccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 4 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \bullet & 4 & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & 4 & \bullet & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\ & & \bullet & 4 & \bullet & & & & & & \\ \hline & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Rpta. ∴ El problema admite cuatro soluciones: 846; 848; 943; 949 para los divisores y 1419; 1 418; 1 418 y 1 416 para los cocientes respectivos.

16. En la siguiente división, cada letra representa una cifra y letras diferentes, representan cifras diferentes; determinar a + b + c + d + e + f + g + h:



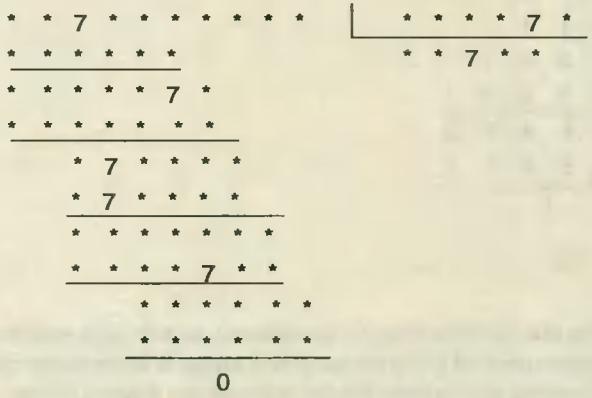
Solución

En la primera división parcial, puesto que "b" por "b" es un número que termina en "b", "b" tiene que ser igual a 1,5 ó 6; pero como $\overline{ab}$ por "b" es un número de tres cifras, b; no puede ser igual a uno por lo menos. El resultado de la sustracción "e" menos "h" es "e", luego h = 0; y ateniéndonos a esta condición, si tomamos b = 5, "f" valdría necesariamente 5. Pero, por otro lado, g - c = c, luego g = 2c; así pues "c" no puede ser mayor que 4, y por lo tanto "b" no puede ser igual a 6. Conociendo b (igual a 5), unos cuantos razonamientos similares, nos llevan al resultado siguiente: el divisor es 35 y el dividendo 19 775

∴ la suma pedida es:

Rpta. a + b + c + d + e + f + g = 3 + 5 + 1 + 9 + 7 + 6 + 2 = 33

17. Completar la siguiente división donde cada asterisco representa una cifra y dar como respuesta la suma de las cifras del dividendo:



Solución

(1) Puesto que al multiplicar el divisor por 7 se obtiene un número de 6 cifras, mientras que con la segunda y la cuarta multiplicación se obtienen números de 7 cifras, el divisor tiene que empezar por 11, 12, 13 ó 14 y las segunda y cuarta cifras del cociente serán ochos o nueves.

(2) Puesto que la segunda cifra del producto del divisor multiplicado por 7 es 7 es fácil comprobar que el divisor tiene que empezar por 111; 124; 125; 138 ó 139.

(3) El tercer resto empieza evidentemente por 10 y, por consiguiente, también el cuarto producto. Por lo tanto una de dos: o bien el divisor empieza por 111 y la cuarta cifra del cociente es 9, o bien por 125 y la cifra es 8.

(4) Pero si la cuarta cifra del cociente fuera 9; puesto que la tercera cifra del producto partiendo de la derecha es 7, el divisor tendría que empezar con 11 197 y entonces el producto por 7 tendría un 8 en segundo lugar en vez de un 7. Luego la cuarta cifra del cociente es 8 y el divisor empieza por 12 547; además, la sexta cifra es menor de 5.

(5) Como el tercer (por 7) empieza por 878, y el número inmediatamente superior no puede ser mayor que 979. . .; el cuarto resto empieza por 101; y como sabemos además que el cuarto producto empieza por 100, el último resto empieza por 1, luego la última cifra del cociente ha de ser un 1.

(6) Probando sucesivamente 4, 3, 2 y 1, como sexta cifra del divisor y realizando la división en sentido retrógrado, se encuentra que tan solo la segunda de esas cifras (el 2) satisface las condiciones todavía sin considerar. Por lo tanto, la división completa y solución del problema es la siguiente:

```
7 3 7 5 4 2 8 4 1 3   | 1 2 5 4 7 3
6 2 7 3 6 5           |-----------
-----------           | 5 8 7 8 1
1 1 0 1 7 7 8
1 0 0 3 7 8 4
-----------
    9 7 9 9 4 4
    8 7 8 3 1 1
    -----------
    1 0 1 6 3 3 1
    1 0 0 3 7 8 4
    -----------
        1 2 5 4 7 3
        1 2 5 4 7 3
        -----------
            0
```

Rpta. $1 + 2 + 5 + 4 + 7 + 3 = 22$

18. La suma de los cuatro términos de una división inexacta por defecto es 847; si la división se hubiere realizado por exceso, la suma de los 4 términos sería 901. Hallar la suma de las cifras del dividendo si se sabe que el cociente por defecto más el cociente por exceso suman 19.

Solución

Por defecto: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} R_d & c \end{array} \rightarrow D = d.c + R_d$.....(1) $\}$ $c + c + 1 = 19 \wedge \boxed{C = 9}$ .....(α)

Por dato: $D + d + c + R_d = 847$ ..... (2)

Por exceso:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline & (c+1) \\ -R_E & \end{array} \rightarrow D = d(c+1) - R_E \quad \text{..... (3)}$$

Por dato:

$$D + d + c + (c+1) + R_E = 901 \quad \text{..... (4)}$$

(α) y (3) en (4): $10d - R_E + d + 10 + R_E = 90 \wedge d = 81$ ..... (β)

(α) y (β) en (2): $81 \times 9 + R_d + 81 + 10 + R_d = 901 \wedge R_d = 14$

$$D = 81 \times 9 + 14 = 743$$

Rpta. Suma pedida: $7 + 4 + 3 = 14$

19. Cuántas cifras puede tener: $E = A^2 \times B^2 + A^2 \times B^2$ si A y B tiene 15 y 16 cifras, respectivamente.

Solución

Se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} 10^{14} \leq A < 10^{15} \Rightarrow 10^{28} \leq A^2 < 10^{30} \\ 10^{15} \leq B < 10^{16} \Rightarrow \underline{10^{30} \leq B^2 < 10^{32}} \end{array}\right\} \text{multiplicando m . a . m:}$$

$$10^{58} \leq A^2 B^2 < 10^{62} \Rightarrow 2 \times 10^{58} \leq 2A^2B^2 < 2 \times 10^{62}$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^{58} \leq E < 2 \times 10^{62}$$

Rpta. $\therefore$ E puede tener: 59; 60; 61; 62 ó 63 cifras.

20. ¿Cuántas cifras tiene $E = \dfrac{A^3 x B^2}{C}$, si A x B tiene 20 cifras y B x C tiene 15 cifras?

Solución

Podemos establecer:

$10^{19} \leq A \times B < 10^{20}$ ..... (1)

$10^{14} \leq B \times C < 10^{15}$ ..... (2)

$E = \dfrac{A^3 x B^2}{C} = \dfrac{A^3 x B^3}{BxC} = \dfrac{(AxB)^3}{BxC}$ ..... (3), pero:

De (1): $10^{57} \leq (A \times B)^3 < 10^6$
De (2): $10^{15} > B \times C \geq 10^{14}$

dividiendo miembro a miembro:

$$10^{42} \leq \frac{(AxB)^3}{BxC} < 10^{46} \quad \Rightarrow \quad 10^{42} \leq E < 10^{46}$$

Rpta. $\therefore$ E puede tener 43; 44; 45 ó 46 cifras.

21. Si: $E = \frac{AxB}{C}$ puede tener de 10 á 15 cifras. A y B tiene 8 y 10 cifras respectivamente. ¿Cuántas cifras tiene C?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} 10^7 \leq A < 10^8 \\ 10^9 \leq B < 10^{10} \end{array}\right\} \quad \text{.....(1)}$$

$$10^n \leq C < 10^m$$

$$10^9 \leq E < 10^{15} \quad \text{.....(2)}$$

De (1): $10^{16} \leq A \times B < 10^{18}$

$10^m > C \geq 10^n$

$10^{16-m} \leq E < 10^{18-n}$

como (1) = (2):

$16 - m = 19 \rightarrow m = 7 \quad \rightarrow \quad 10^3 \leq C < 10^7$

$18 - n = 15 \rightarrow n = 3$

Rpta. $\therefore$ "C" puede tener: 4, 5, 6 ó 7 cifras.

22. Entre que límites se encuentra el número de cifras que se obtiene al efectuar la expresión:

$$E = \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt{A^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt[3]{B^{\frac{18}{4}}} \cdot \sqrt[\frac{2}{3}]{c^{\frac{3}{2}}}}$$

Sabiendo que "A" tiene 13 cifras, "B" 16 y C, 19.

Solución

Eliminando los radicales internos:

$$E = \sqrt[\frac{3}{4}]{A^{\frac{3}{2x2}}.B^{\frac{18}{4x3}}.C^{\frac{\frac{3}{2}}{3}}} = \sqrt[\frac{3}{4}]{A^{\frac{3}{4}}.B^{\frac{3}{2}}.C^{\frac{9}{4}}}$$

$$E = A^{\frac{\frac{3}{4}}{3}}.B^{\frac{\frac{3}{2}}{3}}.C^{\frac{\frac{9}{4}}{3}}$$

$$E = A.B^2.C^3 \qquad \text{.....(1)}$$

como:

$$\left.\begin{array}{lll} 10^{12} \le A < 10^{13} & \rightarrow & 10^{12} \le A < 10^{13} \\ 10^{15} \le B < 10^{16} & \rightarrow & 10^{30} \le B^2 < 10^{32} \\ 10^{18} \le C < 10^{19} & \rightarrow & 10^{54} \le C^3 < 10^{57} \\ \hline & & 10^{96} \le E < 10^{102} \end{array}\right\} \text{ multiplicando}$$

Rpta. ∴ "E" podrá tener de 97 a 102 cifras.

23. El número A tiene 7 cifras y otro B posee 9 cifras. si: $A^4 . B^n$ tiene $\overline{4n}$ cifras. Hallar "n"

Solución

Como:

$$10^{\overline{4n}-1} \le A^4 . B^n < 10^{\overline{4n}} \qquad \text{..... (1)}$$

$$10^6 \le A < 10^7 \qquad \text{..... (2)}$$

elevando a la cuarta potencia la expresión (2) y escribiendo en forma conveniente:

$$10^{28} > A^4 \ge 10^{24} \qquad \text{..... (3)}$$

(1) ÷ (3)

$$10^{40+n-1-28} \leq B^n < 10^{40+n-24}$$

$$10^{11+n} \leq B^n < 10^{16+n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

por dato:

$10^8 \leq B < 10^9$, elevando al exponente "n"

$10^{8n} \leq B^n < 10^{9n}$ ó

$10^{9n} > B^n \geq 10^{8n}$ ..... (5)

(4) ÷ (5)

$$10^{11-8n} \leq 1 < 10^{16-7n}$$

$$10^{11-8n} \leq 10^0 < 10^{16-7n}$$

Se deduce que:

$$11-8n \leq 0 < 16-7n \quad \begin{cases} n \geq 1\frac{3}{8} \\ n < 2\frac{2}{7} \end{cases}$$

Rpta. ∴ El único valor entero de "n" es 2.

24. Hallar el valor de "n", si E tiene las 11 cifras; A tiene 18 y B tiene 13 cifras, siendo: $E = \sqrt[n]{A^2.B^3}$

Solución

Podemos establecer:

$$10^{10} \leq E < 10^{11} \Rightarrow 10^{10} \leq E = \sqrt[n]{A^2.B^3} < 10^{11} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

además:

$$\left.\begin{array}{l} 10^{17} \leq A < 10^{18} \Rightarrow 10^{34} \leq A^2 < 10^{36} \\ 10^{12} \leq B < 10^{13} \Rightarrow 10^{36} \leq B^3 < 10^{39} \end{array}\right\} \text{ multiplicando:}$$

$$10^{70} \leq A^2 B^2 < 10^{75} \quad \text{extraemos } \sqrt[n]{}:$$

$$10^{\frac{70}{n}} \leq \sqrt[n]{A^2B^3} < 10^{\frac{75}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dividiendo (1) ÷ (2)

$$10^{10} \leq \sqrt[n]{A^2 B^3} < 10^{11}$$

$$\frac{10^{\frac{75}{n}} > \sqrt[n]{A^2 B^3} \leq 10^{\frac{70}{n}}}{10^{10-\frac{75}{n}} \leq 1 < 10^{11-\frac{70}{n}}}$$

$$10^{10-\frac{75}{n}} \leq 10^0 < 10^{11-\frac{70}{n}},$$

de aquí se deduce que:

$$10-\frac{75}{n} \leq 0 \Rightarrow 10 \leq \frac{75}{n} \Rightarrow n \leq 7.5 \qquad \text{.....(3)}$$

también $\quad 0 < 11-\frac{70}{n} \Rightarrow \frac{70}{n} < 11 \Rightarrow n > 6\frac{4}{11}$ .....(4)

Rpta. De (3) y (4) se deduce que $n = 7$

PROBLEMAS PROPUESTOS

sobre división (con clave)

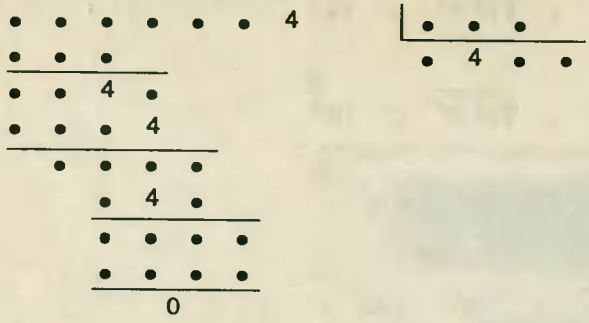
1. Efectuar la siguiente división; donde cada asterisco representa una cifra:

```
* * * * * *  | * * *
* * * *      | * * *
-------
* 0 * *
* * * *
---------
  * * * *
  * * * *
  -------
      * * *
      * * *
      -----
      * 4 *
```

Dar como respuesta, la suma de las cifras del cociente.

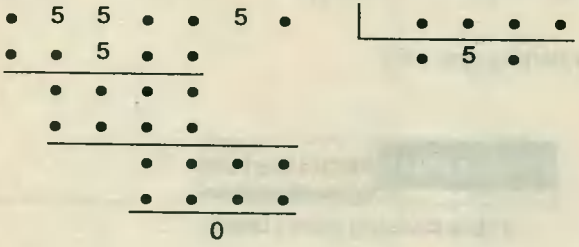
a) 18 b) 12 c) 9 d) 11 e) N.A.

2. Calcular el dividendo de la siguiente división y dar como respuesta la suma de sus cifras. (Cada punto representa una cifra).



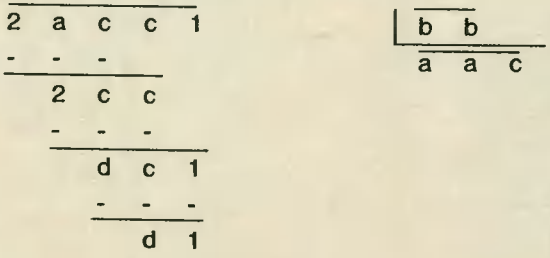
a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 11

3. Efectuar la siguiente división y dar como respuesta la suma de las siguientes cifras del divisor.



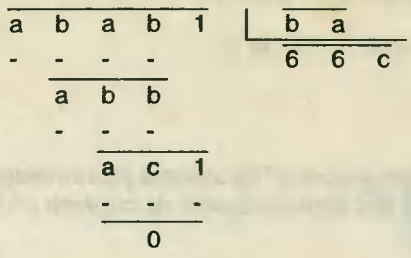
a) 18 b) 20 c) 23 d) 21 e) N.A.

4. Hallar: a + b + c + d, en la siguiente división:



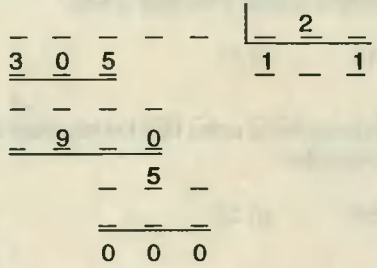
a) 16 b) 15 c) 18 d) 20 e) 21

5. Hallar: a + b + c , si se cumple:



a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 21

6. Si cada guión representa una cifra. Hallar la suma de las cifras del dividendo, si:



a) 15 b) 18 c) 17 d) 18 e) 19

7. En una división entera los residuos por defecto y por exceso son 24 y 28 respectivamente. La suma del dividendo, el divisor y el cociente es 924. Hallar la suma de las cifras del dividendo.

a) 18 b) 19 c) 16 d) 15 e) 20

8. ¿Cuál es el valor de c + d, si $\overline{5cd}$ entre $\overline{ab}$ da $\overline{ba}$ de cociente y $\overline{bb}$ de residuo?

a) 15 b) 13 c) 10 d) 11 e) 9

9. Hallar el menor número de la forma: $\overline{8ab1}$ tal que al dividirlo por 29 deja residuo máximo. Indicar la suma de las cifras del número hallado.

a) 16 b) 15 c) 18 d) 19 e) 17

10. En una división inexacta el residuo por defecto y el residuo por exceso son iguales a 48. Si el cociente por defecto es 37. Hallar el dividendo.

a) 4500 b) 4000 c) 3800 d) 3600 e) 3000

11. Cuántos números enteros existen, tales que al dividirlos entre 49 se obtenga 32 de cociente; pero si se les dividen entre 46 se obtenga 35 de cociente.

a) No se pude determ. b) 10 c) 8 d) 6 e) 5

12. Se dividen los números $\overline{mcdu}$ y $\overline{abc}$ obteniéndose 17 de cociente y 29 de residuo. Se dividen luego el C.A. de $\overline{mcdu}$ entre el C.A. de $\overline{abc}$ obteniéndose 4 de cociente y 4 de residuo.

Hallar: $\overline{abc}$.

a) 439 b) 449 c) 459 d) 469 e) 479

13. Determinar la suma de las cifras del cociente de una división entera inexacta cuyo dividendo es 529 565 y cuyo restos sucesivos obtenidos fueron 246, 222 y 542.

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

14. Teniendo en cuenta que a = b + c y que al dividir $\overline{aaaa}$ entre $\overline{bbb}$ los residuos sucesivos son $\overline{ccc}$ y "a", hallar la suma de los posibles cocientes.

a) 57 b) 75 c) 105 d) 59 e) 25

15. Cuántos números enteros existen tales que al dividirlos entre 47 con error menor que 1/10 de un cociente por defecto igual a 12,8.

a) 5 b) 8 c) 4 d) 6 e) N.A.

16. En una división inexacta, el dividendo es un número mayor que 644, el divisor es 34 y el cociente es 18. Hallar el residuo por exceso.

a) 1 b) 20 c) 5 d) 18 e) N.A.

17. Al dividir 8975 entre cierto divisor, el residuo de la división es 659. Si dividiésemos el mismo número entre un divisor 63 unidades menor, el residuo se conservaría y el cociente aumentaría en una unidad. Hallar la suma del divisor y el cociente de la división original.

a) 776 b) 695 c) 763 d) 767 e) 677

18. Hallar el número de cifras de:

$P = A^3 \times B^2 \times C$, si A x B tiene 15 cifras y A x C tiene 20 cifras.

a) 49; 50 ó 51 b) 48; 49 ó 50 c) 47; 48; 49 ó 50 d) 50 ó 51 e) 50

19. Si $E = \frac{AxB}{C}$ puede tener 10 a 15 cifras. A y B tienen 8 y 10 cifras respectivamente. Cuántas cifras tiene C?

a) 3, 4, 5 ó 6 b) 5, 6, ó 7 c) 4, 5, 6 ó 7 d) 4 ó 5 e) 6 ó 7

20. Si los números A, B y C, tienen respectivamente n, 2n, 3n cifras enteras. ¿Cuántas cifras como mínimo puede tener

$$P = A^3 \times B^4 \times C^5 \ ?$$

a) 26n b) 26n-12 c) 26n-11 d) 25n e) 25n-12

21. Si: A_1 tiene 17 cifras enteras.
A_2 tiene 20 cifras enteras.
A_3 tiene 23 cifras enteras.
.
.
.
A_n tiene 62 cifras enteras.

¿Cuántas cifras pueden tener:

$$P = A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n, \text{ como mínimo?}$$

a) 632 b) 633 c) 618 d) 617 e) N.A.

22. Si A tiene 18 cifras, B tiene de 10 a 25 cifras, C de 21 a 29 cifras, D de 30 a 35 cifras y E de 16 a 29 cifras.

Cuántas cifras podrá tener:

$$W = \frac{A^5 x B^4 x C^6}{D^5 x E^2}$$

a) De 8 a 190 cifras
b) De 9 a 189 cifras
c) De 8 a 189 cifras
d) De 9 a 190 cifras
e) De 9 a 188 cifras

23. Cuántas cifras tiene: $A^3 + (B^2 \times C)$; si A tiene 12 cifras, B tiene 10 y C tiene 15.

a) De 34 a 36 b) De 32 a 34 c) 40 d) De 28 a 32 e) N.A.

24. Cuantas cifras puede tener:

$$E = \frac{AxC}{D^2}$$, sabiendo que:

A x B puede tener 32 ó 33 cifras C x D^2 entre 18 y 20 cifras y $\frac{B}{D^2}$ de 3 a 5 cifras.

a) 8 a 10 b) 11 a 13 c) 7 a 9 d) 5 a 7 e) N.A.

25. Hallar el número de cifras que puede tener la expresión:

$E = A^2 \times B^3 \times (C - D)^4$, donde:

A = número de 5 cifras B = número de 4 cifras C = número de 6 cifras
D = número de 3 cifras

a) De 38 a 46 cifras
b) De 36 a 40 cifras
c) De 28 a 60 cifras
d) De 34 a 40 cifras
e) N.A.

26. El número de cifras de A es el doble de B y el cuádruple del C. Si D tiene 5 cifras. ¿Cuántas cifras puede tener:

$P = (A^3 \times D) \div (B^4 \times C^4)$

a) De 2 a 11 cifras
b) De 3 a 8 cifras
c) De 2 a 13 cifras
d) De 3 a 18 cifras
e) De 4 a 10 cifras

27. Dados los números A y B se sabe que: A tiene 6 cifras y que la suma de los números de cifras de las expresiones:

$M_1 = A^2 \times B^3$ y $M_2 = A^3 \times B^2$ es 87.

¿Cuántas cifras tiene B?

a) 9 ó 10 b) 10 ú 11 c) 11 ó 12 d) 12 ó 13 e) N.A.

28. El dividendo y el residuo de una división por defecto suman 814 y el cociente es igual al residuo por exceso. Hallar la suma de las cifras del dividendo, si el divisor es 47.

a) 19 b) 18 c) 22 d) 20 e) 21

29. Hallar el mayor número de 4 cifra que dividido entre el menor número par que tiene 14 por suma de sus cifras, se obtiene un residuo que tenga 14 por suma de sus cifras.

a) 9920 b) 9919 c) 9985 d) 9928 e) 9987

30. Se tiene 943 números consecutivos; si se divide el menor de ellos entre 78, se obtiene 29 de residuo. ¿Qué residuo se obtiene al dividir el mayor entre este divisor?

a) 47 b) 45 c) 71 d) 35 e) N.A.

31. En una división el residuo es 13. Si al dividendo se le multiplica por 4 y el divisor por 2, luego se dividen estos números se obtiene 16 de residuo ¿cual es el valor del primer divisor?.

a) 15 b) 12 c) 18 d) 21 e) 24

32. En una división el residuo es máximo y la suma de los cuatro términos es 49. Si al dividendo se le suma el residuo y ejecuto nuevamente la operación, el nuevo residuo es 5. Hallar el divisor.

a) 6 b) 5 c) 7 d) 9 e) 4

33. El residuo de una división inexacta es 986. Si el dividendo se hace 2 veces mayor y el divisor se hace 3 veces mayor, entonces el cociente se reduce a la mitad del cociente anterior y el residuo se hace 8 veces mayor. Hallar el dividendo de la primera división.

a) 4930 b) 7074 c) 6088 d) 6902 e) 5916

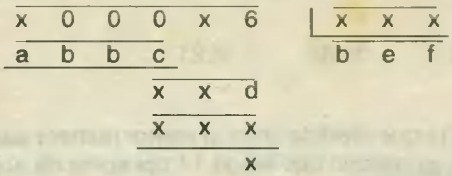
34. La suma del dividendo y el divisor de una división inexacta es 71 veces el residuo y la diferencia de los mismos es 57 veces dicho residuo. Hallar el cociente de dicho residuo.

a) 10 b) 12 c) 11 d) 14 e) 9

35. Calcular cuántos son los números que cumplen la condición de que al ser divididos entre 46 den un resto igual a quíntuplo del cociente.

a) 10 b) 11 c)7 d) 8 e) 9

36. Dada la división:



Reconstruir y hallar:

$$(a + b + c + d + e + f)$$

a) 29 b) 28 c) 27 d) 26 e) 25

37. En una división inexacta el dividendo es un número formado que termina en 65, el divisor termina en 19 y el residuo en 57. Cómo termina el cociente.

a) . . . 08 b) . . . 16 c) . . . 24 d) . . . 52 e) . . . 32

38. En una división inexacta, el divisor es menor que 50, si le restáramos 190 al dividendo y dividiéramos nuevamente el residuo aumenta 32 unidades. Hallar cuántos valores puede tomar el residuo inicial.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

39. Hallar la cifra de las unidades del menor número comprendido entre 600 y 700 tal que al dividirlo entre cierto número da como residuo por defecto 17 y residuo por exceso 12.

a) 7 b) 3 c) 2 d) 4 e) 6

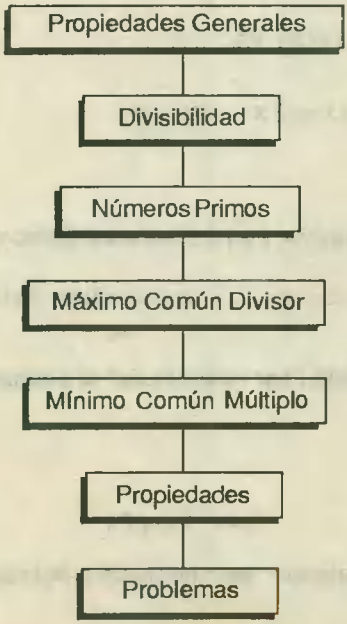
Clave

(1) d	(11) c	(21) d	(31) b
(2) e	(12) d	(22) e	(32) b
(3) a	(13) e	(23) c	(33) c
(4) b	(14) a	(24) c	(34) d
(5) c	(15) a	(25) c	(35) d
(6) c	(16) e	(26) a	(36) e
(7) d	(17) c	(27) e	(37) a
(8) e	(18) d	(28) a	(38) a
(9) e	(19) c	(29) a	(39) b
(10) b	(20) b	(30) e	

Capítulo 7

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS NATURALES

Flujo del contenido de este capítulo



i. Conjunto de los múltiplos de un número natural:

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es decir:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \ldots \ldots .\}$ y formemos un nuevo conjunto multiplicando el número $2 \in \mathbb{N}$ por cada uno de los elementos de $\mathbb{N}$. (exceptuando el cero)

El conjunto así formado lo llamaremos conjunto de los múltiplos de 2 y se denota por el símbolo:

$\{\dot{2}\}$ o también $2\mathbb{N}$. Entonces:

$\{\dot{2}\} = 2\mathbb{N} = \{2 \times 1; 2 \times 2; 2 \times 3; 2 \times 4; \ldots\}$

En adelante nos referiremos a este conjunto como el conjunto de los números pares:

$\{\dot{2}\} = 2\mathbb{N} = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$ que se puede definir por comprensión como:

$\{\dot{2}\} = \{x \in \mathbb{N} / x = 2 \times n, \forall n \in \mathbb{N}\}$

Procediendo del mismo modo, podremos formar el conjunto de los $\dot{4}; \dot{5}; \dot{6}; \ldots$:

$\{\dot{4}\} = 4\mathbb{N} = \{4; 8; 12; 16; 20; \ldots\}$

$\{\dot{4}\} = 4\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} / x = 4 \times n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\{\dot{5}\} = 5\mathbb{N} = \{5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$

$\{\dot{5}\} = 5\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} / x = 5 \times n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

En general:

Si $a \in \mathbb{N}$; entonces el conjunto: $\{\dot{a}\}$ o $a\mathbb{N}$ está definido por:

$\{\dot{a}\} = a \times \mathbb{N} = \{a; 2a; 3a; 4a; \ldots\}$ es el conjunto de los $\dot{a}$.

ii. Extensión de la relación "ser múltiplo de" al conjunto $\mathbb{N}_0$

Sabemos que:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Si deseamos extender la relación "ser múltiplo de" a $\mathbb{N}_0$ lo única que es necesario determinar es:

I. $\{\dot{0}\}$, el conjunto de los múltiplos de cero.

II. Para cuáles números a $\in \mathbb{N}_0$ se verifica que $0 \in \{\bar{a}\}$

Recordemos que $a \times 0 = 0$, si $a \in \mathbb{N}_0$ y por lo tanto que si multiplicamos **0** por cualquier elemento de $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ obtendremos **0**

$$0 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times 2 = 0 \times 3 = 0 \times 4 = \ldots\ldots\ldots 0 \times n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Concluimos entonces que:

$$\{\dot{0}\} = \{0\}$$

Consideremos ahora el caso en que $0 \in \{\dot{a}\}$ para $a \in \mathbb{N}_0$

Observemos que:

$0 \in \{\dot{1}\}$ puesto que $0 = 1 \times 0$
$0 \in \{\dot{2}\}$ puesto que $0 = 2 \times 0$
$0 \in \{\dot{3}\}$ puesto que $0 = 3 \times 0$

.
.
.
.

$0 \in \{\dot{n}\}$ puesto que $0 = n \times 0$

Entonces en $\mathbb{N}_0$ se tiene que:

$\{\dot{0}\} = \{0\}$
$\{\dot{1}\} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\} = \mathbb{N}_0$
$\{\dot{2}\} = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots\} = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = 2 \times n, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$
$\{\dot{3}\} = \{0; 3; 6; 9; \ldots\} = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = 3 \times n, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$

.
.
.

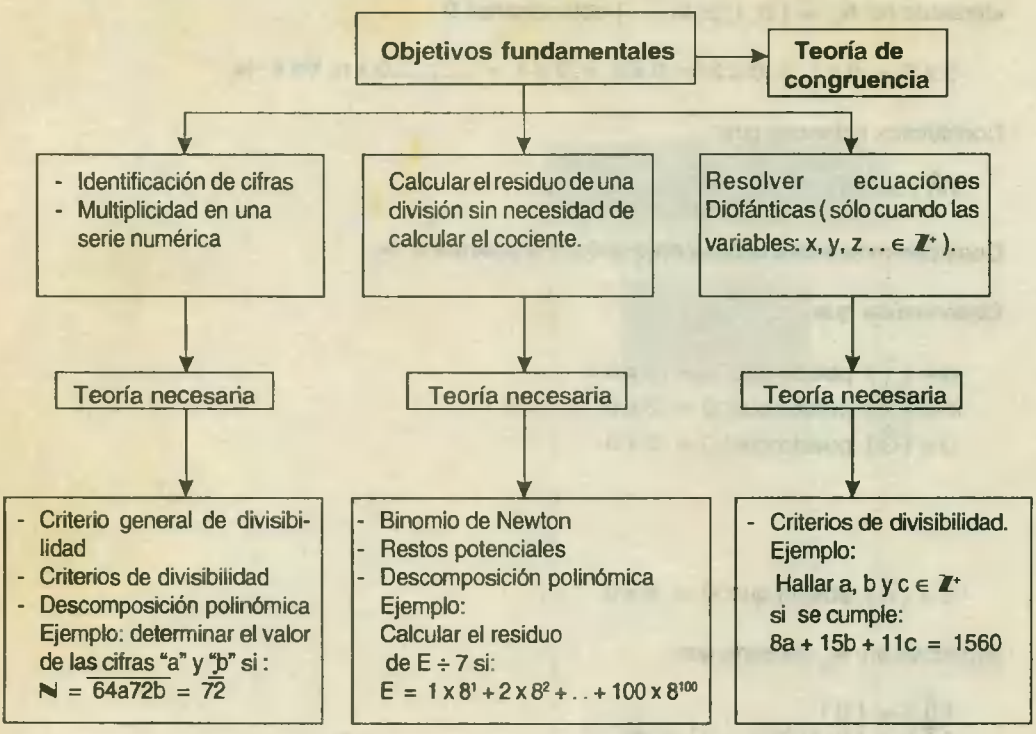
$\{\dot{a}\} = \{0; a; 2a; 3a; \ldots\} = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = a \times n, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$

NOTA: $\dot{a} \notin \{0\}$ puesto que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = 0 \times n$

Estos conceptos preliminares nos permitirán comprender con mayor facilidad las teorías más importantes de las propiedades de los números naturales como:

- Teoría de divisibilidad
- Teoría de los números primos.
- Máximo común divisor y
- Mínimo común múltiplo.

Teoría de divisibilidad



División y divisibilidad.-

Dados dos números enteros **a** y **b** llamados respectivamente dividendo y divisor, se llama cociente de **a : b** ó **a/b** a un número entero **c** si EXISTE y es UNICO, tal que da como resultado el dividendo si se lo multiplica por el divisor: **c** . b = a

Ahora bien, dados los enteros **a** y **b**, no siempre existe tal entero **c**; por ejemplo ningún entero **c**, verifica **c** . 3 = -8. En otras palabras la división: la división no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

O sea que la división no es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$ o aplicación $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ del Producto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, pues hay elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o pares ordenados de números enteros, a los cuales no corresponde un número entero como cociente a/b.

Diremos que la división es una operación parcialmente definida en $\mathbb{Z}$ porque para algunos pares ordenados (a , b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existe en $\mathbb{Z}$ el cociente a/b , y estos pares forman una

parte propia M_z de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La fig. adjunta representa una parte de este conjunto $M_z \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (que es infinito).

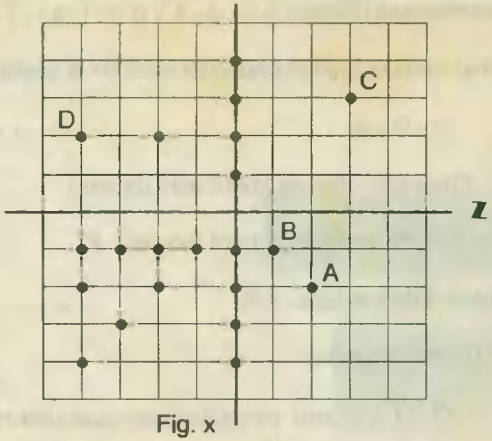


Fig. x

Por ser M_z una parte del producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es una relación en $\mathbb{Z}$, que se llama relación de múltiplo en $\mathbb{Z}$ o entre números enteros.

la pertenencia:

$$(a, b) \in M_z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

suele indicarse (en forma obviamente incorrecta) como "igualdad"

$$a = \dot{b} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

que se lee a es múltiplo de b.

Indicando con (b) el conjunto de los múltiplos enteros de b, (1) equivale a:

$$a \in (b) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Los puntos A, B, C, D (fig. x) indican respectivamente que M_z contiene los pares ordenados (2, -2), (0, -1), (3, 3). (-4, 2) o sea que:

$$2 \in (-2), \quad 0 \in (-1), \quad 3 \in (3), \quad -4 \in (2)$$

La relación inversa se llama relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ y se indica también:

$$b/a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

que se lee: "b divide a a" o "b es divisor de a". Entonces:

$$(a, b) \in M_z \Leftrightarrow a \in (b) \Leftrightarrow b/a \ldots\ldots\ldots (5)$$

(1), (3) ó (4) significan que existe $a/b = c \in \mathbb{Z}$, o sea:

existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \cdot b = a$ ..... (6)

En virtud de esta última igualdad $c \cdot b = a$, en lugar de decir "b es divisor de a" se dice también "b es factor de a". La igualdad $c \cdot b = a$ se llama factorización de a. Todo número a admite las factorizaciones triviales $a = a \cdot 1$ y $a = (-a) \cdot (-1)$

Debemos considerar con cuidado el papel del cero en la divisibilidad. De:

$$c \cdot 0 = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

se deduce $a = 0$. Entonces: cero es factor solo de cero.

Por otra parte, si $a = 0$ se verifica (7) para todo $c \in \mathbb{Z}$.

O sea: Todo número divide a cero: $c/0$ ..... (8)

$(0/c = 0)$. O lo que es lo mismo:

$O \in (c)$: cero es múltiplo de cualquier número ..... (9)

En cuanto a la división: $\frac{a}{b}$ ..... (10)

Por de pronto carece de sentido si $a \neq 0$, pues entonces ningún número (entero o no) da resultado a al ser multiplicado por 0. Convendremos en que tampoco tiene sentido el símbolo 0/0, pues todo número da 0 al ser multiplicado por 0 y entonces la operación 0/0 no queda definida, esta vez por falta de unidad en el resultado. Pero 0/0 pues existe $c \in z$ (cualquier entero) tal que $0 = c \cdot 0$

En cambio:

Para todo $a \neq 0$, $0 \times a$ ..... (11)

PRINCIPIOS RELATIVOS

a divisibilidad

1. Si un número es divisor de otros dos, será divisor de su suma, su diferencia y su producto. Es decir:

   Si $A = \dot{n}$ y $B = \dot{n}$ se cumple:

   i) $A + B = \dot{n} + \dot{n} = \dot{n}$
   ii) $A - B = \dot{n} - \dot{n} = \dot{n}$
   iii) $A \times B = \dot{n} \times \dot{n} = \dot{n}$

2. Si un número es divisor de otro lo será de todas sus potencias. Es decir:

   Si $A = \dot{n}$, entonces: $A^k = (\dot{n})^k = \dot{n}$

3. Si $A = \dot{n} + r_1$, $B = \dot{n} + r_2$, entonces:

i) $A + B = (\dot{n} + r_1) + (\dot{n} + r_2) = \dot{n} + r_1 + r_2$

ii) $A - B = (\dot{n} + r_1) - (\dot{n} + r_2) = \dot{n} + r_1 - r_2$

iii) $A \times B = (\dot{n} + r_1)(\dot{n} + r_2) = \dot{n} + r_1 \times r_2$

iv) $A^k = (\dot{n} + r_1) = \dot{n} + r_1^k$

4. Si un número primo divide al producto de dos factores, al menos debe dividir a uno de ellos. Es decir:

Si $A \times B = \dot{n}$, entonces: $A = \dot{n}$ o $B = \dot{n}$

5. Si un número divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide también al residuo.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline r & q \end{array}$$

"Si n divide a A y B, divide a r"

$A = B \times q + r$

$\dot{n} = \dot{n} \times q + r$

Luego: $r = \dot{n}$

6. **El binomio de Newton** (inducción)

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\dot{a}} = \dot{a} + \overbrace{b^2}^{\dot{b}} \quad \text{ó} \quad \dot{b} + a^2$$

$$(a+b)^3 = \underbrace{a^3 + 3ab + 3ab^2}_{\dot{a}} + \overbrace{b^3}^{\dot{b}} = \dot{a} + b^3 \quad \text{ó} \quad \dot{b} + a^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Generalizando podemos establecer que cualquier potencial del binomio es igual a un múltiplo del primer término más el segundo término elevado a un exponente igual al que señala la potencia del binomio. Esto es:

$(a+b)^n = \dot{a} + b^n \quad$ ó $\quad \dot{b} + a^n$

Caso especial:

$$(a-b)^n = \begin{cases} \dot{a} + b^n & (\text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \text{ es par}) \\ \dot{a} - b^n & (\text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \text{ es impar}) \end{cases}$$

Los número afectados de un ritmo, por ejemplo el período 5, son divisibles exactamente por 5 y constituyen sus múltiplos:

5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; ..... (1)

Desfasando el ritmo en una unidad se logra otra serie de números ya no divisibles por 5; pero con la propiedad de dar todos el mismo resto al dividirlos por 5:

6; 11; 16; 21; 26; 31; 36; 41; ..... (2)

Los números que figuran en la expresión (2), se dice que son congruentes entre sí, según el módulo 5.

Definición

> Dos números a y b, que den el mismo resto al ser divididos por otro número m, o cuya definición sea un múltiplo de m, se llaman congruentes respecto del número m. Este número recibe el nombre de módulo de la congruencia.

Para expresar abreviadamente que los números a y b son congruentes respecto del módulo m, se escribe:

$$a \equiv b \text{ (mód . m)} \qquad (*)$$

Se lee: a congruente con b según módulo m.

(*) Esta notación se debe a C.F. Gauss (1 777-1 855), quien introdujo el concepto de congruencia en su obra *Disquisitiones Arithmetical* escrita a los 24 años. A veces se escribe $a \equiv b\ (m)$ ó $a \equiv b$ simplemente cuando se propone conocido el módulo.

Los números a y b se llaman miembros de la congruencia y pueden ser positivos o negativos, pero el módulo se supone siempre positivo. Así por ejemplo, los números 48 y 30 son congruentes con el módulo 9 ya que divididos por 9, dan el mismo resto (3), se representa

$$48 \equiv 30 \text{ (mód 9)}$$

ó

$$48 \equiv 30 \text{ (9)}$$

Por el contrario, se llaman números incongruentes respecto a un módulo m a dos números que dan distinto resto al ser divididos por m y se representa:

$$p \not\equiv q \text{ (m)}$$

$$72 \not\equiv 30 \text{ (9)}$$

Propiedades de la congruencia:

i. La congruencia con respecto al módulo "m" es una relación de equivalencia, porque cumple con las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, es decir se verifica que:

i. $A \equiv A\ (m)$ ..... reflexiva
ii. Si $A \equiv B\ (m) \Rightarrow B \equiv A\ (m)$ ..... simétrica
iii. Si $A \equiv B\ (m)$ y $B \equiv C\ (m) \Rightarrow A \equiv C\ (m)$ ..... transitiva

ii. "La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto a un módulo es que su diferencia sea múltiplo del módulo"
En la congruencia:

$$a \equiv b\ (m) \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

se cumple:

$$\begin{array}{l|l} a & m \\ r & q \end{array} \Rightarrow a = mq + r \qquad a = \dot{m} + r$$

$$\begin{array}{l|l} b & m \\ r & q_1 \end{array} \Rightarrow b = mq_1 + r \qquad b = \dot{m} + r$$

$$\therefore a - b = \dot{m}$$

Para los aparatos contadores la serie de los números se cierra en un cierto punto sobre sí misma y vuelve a empezar: cuando el dispositivo llega a la máxima capacidad vuelve al 0. Si la manecilla del reloj señala las 3 pueden también ser las 15; y volverá a las 3 después de 27 horas o de 39. Los números 3, 15, 27, 39 divididos por 12 dan todos el mismo resto: 3. Se llaman números congruentes entre sí de módulo 12.

El estudio de la congruencia constituye un capítulo muy importante en la teoría de los números.

Los aparatos contadores, desde las saetas del reloj a los cuentarrevoluciones de las máquinas calculadoras, indican, no ya sólo números enteros, sino clases de números congruentes (con módulo el número máximo legible en el contador + 1).

Cada contador deberá forzosamente alcanzar un cierto número, comenzar de nuevo, transformando el contar en un proceso cíclico; el número señalado indica las vueltas pasadas, más el número entero impreciso de ciclos. Esto lo sabe muy bien el que compra un automóvil usado y se pregunta si ha recorrido 5.000 o 105.000 km (u otro número congruente con 5000 según el módulo 100.000).

Números Incongruentes

Se dice que varios números forman un sistema de números incongruentes con relación a un módulo "m" cuando todos sus restos por "m" son diferente.

Ejemplo

Los números: 10, 21, 42, 73 y 94, forman un sistema de números incongruentes con respecto al módulo 5:

$$\div \quad \frac{10}{5} \quad \frac{21}{5} \quad \frac{42}{5} \quad \frac{73}{5} \quad \frac{94}{5}$$

resto: 0 1 2 3 4

El sistema completo más sencillo de números incongruentes respecto al módulo "m" es:

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, (m-2), (m-1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se deducen las siguientes propiedades:

1º Si dos números son incongruentes, continúan siéndolo, respecto al mismo módulo, si se les suma o resta un mismo número. Pues

$$a \not\equiv b \ (m) \qquad a - b \not\equiv \dot{m}$$

Es decir, a - b no es divisible por m y tampoco lo serán (a + n) - (b + n) y (a - n) - (b - n), quedando probada la propiedad.

Como aplicación de esto, un sistema completo de números incongruentes respecto al módulo será (basta añadir a los de (1)

$$a, \quad a+1, \quad a+2, \quad a+3, \ldots, a+(m-1)$$

2º Si dos números son incongruentes, respecto al módulo m, y k es primo con m, también los productos de los números por k serán incongruentes respecto al mismo módulo.

Sea $a \not\equiv b \ (m)$; si $ak \equiv bk \ (m)$ se tendrá $a \equiv b \ (m)$, contra la hipótesis.

Como aplicación a esto, un sistema de números incongruentes respecto al módulo será: (basta multiplicar por **a** si **a** es primo con m la sucesión (1).

$$0, a, 2a, 3a, \ldots, (m-1)a$$

Restos potenciales

"Se llaman restos potenciales a un número N con respecto a otro "m", a los residuos que se obtienen al dividir la serie natural de las potencias de N entre el módulo m".

Aplicación: Hallar los restos potenciales de 10 con respecto al módulo 13.

$10^0 = 1$ $\quad 10^1 = \dot{13} - 3$ $\quad 10^2 = \dot{13} - 4$ $\quad 10^3 = \dot{13} - 1$

$10^4 = \dot{13} + 3$ $\quad 10^5 = \dot{13} + 4$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Nota: Aplicando restos potenciales, se pueden determinar los criterios de divisibilidad, en cualquier sistema de numeración.

Nota: Calculando el resto de una potencia, fácilmente se determina el resto de la siguiente potencia. Así en el ejemplo anterior:

$10^0 = 1$

$10^1 = 1 \times 10 = 13 - 3 = \overset{+}{13} - 3$ resto por exceso.

$10^2 = (\overset{+}{13} - 3)\,10 = \overset{+}{13} - 30 = \overset{+}{13} - \overset{+}{13} - 4 = \overset{+}{13} - 4$ resto por exceso.

$10^3 = (\overset{+}{13} - 4)\,10 = \overset{+}{13} - 40 = \overset{+}{13} - 39 - 1 = \overset{+}{13} - \overset{+}{13} - 1 = \overset{+}{13} - 1$ resto por exceso.

$10^4 = (\overset{+}{13} - 1)\,10 = \overset{+}{13} - 10 = \overset{+}{13} - 13 + 3 = \overset{+}{13} - \overset{+}{13} + 3 = \overset{+}{13} + 3$ resto por defecto.

$10^5 = (\overset{+}{13} + 3)\,10 = \overset{+}{13} + 30 = \overset{+}{13} + 26 + 4 = \overset{+}{13} + \overset{+}{13} + 4 = \overset{+}{13} + 4$ resto por defecto.

Nota: Cuando se calcule los restos potenciales, es aconsejable que el residuo sea menor o igual a la mitad del divisor, para lo cual se debe tomar el residuo por defecto o por exceso según convenga.

Gaussiano de un número:

"Se llama gaussiano de un número N, con respecto a un módulo m al menor exponente (g) del número N congruente con la unidad respecto al módulo m"

$N^g = 1\ (m)$ { mínima potencia de N que al dividirla por m da como resto la unidad.

> El gaussiano de un número interviene fundamentalmente en la ley de formación de los restos potenciales, cuando se trata de precisar los criterios de divisibilidad. Determina generalmente el **"período"**.

Aplicación: Hallar los restos potenciales de 10 respecto a 64.

Potencia	Resto
10^0	1
10^1	10
10^2	36
10^3	40
10^4	16
10^5	32
10^6	0

Período { Cada 6 potencias consecutivas de 10 se repiten los restos potenciales. En este caso el gaussiano es ⑥
$10^g = 10^6 \rightarrow g = 6$

Criterios de divisibilidad

Son las condiciones que debe reunir un número para ser divisible por otro. Cualquier criterio de divisibilidad se puede determinar, aplicando el: **criterio general de divisibilidad.**

Podemos decir que es la "fórmula" para determinar cualquier criterio de divisibilidad (en cualquier sistema de numeración)

Representación general de dicho criterio:

Consideremos el número: $N = \underbrace{\overline{a\,b\,c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\,y\,z}}_{\text{"n" cifras}}$ del sistema decimal

Descomponiéndolo polinómicamente:

$$\underbrace{\overline{a\,b\,c\ldots x\,y\,z}}_{\text{"n" cifras}} = z + 10^1 y + 10^2 x + \ldots + 10^{n-3} c + 10^{n-2} b + 10^{n-1} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Determinaremos las condiciones que debe reunir un número cualquiera, para ser divisible por **m**. Analicemos los restos potenciales de 10 con respecto a **m** :

$10^1 \mid m \Rightarrow 10^1 = mq_1 + r \Rightarrow 10^1 = \dot{m} + r_1$; $r_1 \quad q_1$

$10^2 \mid m \Rightarrow 10^2 = mq_2 + r_2 \Rightarrow 10^2 = \dot{m} + r_2$; $r_2 \quad q_2$

$10^3 \mid m \Rightarrow 10^3 = mq_3 + r_3 \Rightarrow 10^3 = \dot{m} + r_3$; $r_3 \quad q_3$

. .
. .
. .

$10^{n-3} \mid m \Rightarrow 10^{n-3} = mq_{n-3} + r_{n-3} \Rightarrow 10^{n-3} = \dot{m} + r_{n-3}$; $r_{n-3} \quad q_{n-3}$

$10^{n-2} \mid m \Rightarrow 10^{n-2} = mq_{n-2} + r_{n-2} \Rightarrow 10^{n-2} = \dot{m} + r_{n-2}$; $r_{n-2} \quad q_{n-2}$

$10^{n-1} \mid m \Rightarrow 10^{n-1} = mq_{n-1} + r_{n-1} \Rightarrow 10^{n-1} = \dot{m} + r_{n-1}$; $r_{n-1} \quad q_{n-1}$

Estas potencias de 10 en (1) :

$$\overline{a\,b\,c\ldots x\,y\,z} = z + (\dot{m} + r_1) y + (\dot{m} + r_2) x + \ldots + (\dot{m} + r_{n-3}) c + (\dot{m} + r_{n-2}) b + (\dot{m} + r_{n-1}) a$$

$$\overline{abc\ldots xyz} = z + \dot{m} + yr_1 + \dot{m} + xr + \ldots + \dot{m} + cr_{n-3} + \dot{m} + br_{n-2} + ar_{n-1}$$

$$\overline{abc\ldots xyz} = \dot{m} + [z + yr_1 + xr_2 + \ldots + cr_{n-3} + br_{n-2} + ar_{n-1}]$$

Para que $\overline{abc\ldots xyz}$ sea divisible por **m**, la expresión encerrada en el corchete debe ser cero ó $\dot{m}$.

Aplicación:

Hallar las condiciones para que un número de cuatro cifras sea divisible por 7.

Sea $\overline{abcd}$ el número. Polinómicamente:

$$\overline{abcd} = d + 10^1c + 10^2b + 10^3a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

restos potenciales de 10 respecto a 7

$10^1 = \dot{7} + 3 \qquad 10^2 = \dot{7} + 2 \qquad 10^3 = \dot{7} - 1$ en (1):

$$\overline{abcd} = d + (\dot{7} + 3)c + (\dot{7} + 2)b + (\dot{7} - 1)a = d + \dot{7} + 3c + \dot{7} + 2b + \dot{7} - a$$

$$\overline{abcd} = \dot{7} + \underbrace{(d + 3c + 2b - a)}_{\text{debe ser cero ó } \dot{7}}$$

Nota: Para determinar los criterios de divisibilidad, se hallan los restos potenciales, de las potencias de la base del sistema de numeración entre el módulo.

Principales criterios de divisibilidad

Consideremos el número: N = $\overline{abcdef}$, aplicando la teoría de restos potenciales podemos obtener los siguientes criterios:

Criterio 2 = (2^1) : f = $\langle {}^{0}_{\text{par}} \rangle$ Un número es divisible por 2 cuando termina en cero ó cifra par.

Criterio 4 = (2^2) : $\overline{ef}$ = $\langle {}^{00}_{\dot{4}} \rangle$ Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son ceros ó ellas forman un número $\dot{4}$.

Criterio 8 = (2^3) : $\overline{def}$ = $\langle {}^{000}_{\dot{8}} \rangle$ Para ser divisible por 8 la 3 últimas cifras debe ser ceros ó deben forman un número $\dot{8}$.

En general: un número es divisible por 2^n, cuando sus "n" últimas cifras son ceros ó ellas forman un número múltiplo de 2^n.

Criterio 5 = (5^1) : $f = \left\langle \frac{0}{\div 5} \right\rangle$ Un número es divisible por 5, cuando termina en cero ó 5.

Criterio 25 = (5^2) : $\overline{ef} = \left\langle \frac{00}{\div 25} \right\rangle$ Las 2 últimas cifras deben ser ceros ó deben formar un número $\div \overline{25}$.

Criterio 125 = (5^3) : $\overline{def} = \left\langle \frac{000}{\div 125} \right\rangle$ Las 3 últimas cifras deben ser ceros o deben formar un número $\div \overline{125}$.

En general: un número es divisible por 5^n, cuando sus "n" últimas cifras son ceros ó ellas forman un número múltiplo de 5^n.

Criterio 3 : $a + b + c + d + e + f = \div \overline{3}$ La suma de las cifras debe ser $\div \overline{3}$.

Criterio 9 : $a + b + c + d + e + f = \div \overline{9}$ La suma de las cifras debe ser $\div \overline{9}$.

Criterio 11 : $f + d + b - a - c - e = \left\langle \frac{0}{\div 11} \right\rangle$ Al multiplicar las cifras de derecha a izquierda por 1, -1, 1, -1,. . . al final la suma debe dar cero ó $\div \overline{11}$.

Criterio 7 : $f + 3e + 2d - c - 3b - 2a = \left\langle \frac{0}{\div 7} \right\rangle$ Al multiplicar las cifras de derecha a izquierda por 1, 3, 2, -1, -3, -2, y así sucesivamente,al final la suma debe ser cero ó $\div \overline{7}$.

Criterio 13 : $f - 3e - 4d - c + 3b + 4a = \left\langle \frac{0}{\div 13} \right\rangle$ Al multiplicar de derecha a izquierda por 1, -3,-4, -1, 3, 4 y así la suma debe ser cero ó $\div \overline{13}$

PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD QUE SE RESUELVEN APLICANDO LOS PRINCIPALES CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Observaciones previas

* Se deben conocer los principales criterios de divisibilidad así como el criterio general de divisibilidad.
* Debemos recordar como descomponer un número en su forma polinómica.

1. Si: $\overline{1a\,a\,1\,b\,b} = \dot{9}$. Hallar a + b, (máximo) si $a \neq b$

Solución

Aplicando el criterio de divisibilidad por 9:

$$1 + a + a + 1 + b + b = \dot{9}$$
$$2 + 2a + 2b = \dot{9}$$

$$2(1 + a + b) = \dot{9}$$
$$2(a + b + 1) = \dot{9}$$

$$\therefore\ a + b + 1 = \dot{9} \Leftrightarrow \quad a + b = \begin{cases} 8 \\ 17 \end{cases}$$

Rpta. a + b (máximo) = 17

2. Hallar (a + b) si: $\overline{aaobb(b+2)} = \dot{13}$

Solución

Aplicando el criterio de divisibilidad por 13:

$$\overline{a\ a\ o\ b\ b(b+2)} \quad \Rightarrow \quad 4a + 3a - 4b - 3b + b + 2 = \begin{cases} 0 \\ \dot{13} \end{cases}$$
$$4\ 3\ \overline{1}\ \overline{4}\ \overline{3}\ \ 1$$

$$\Rightarrow \quad 7a - 6b + 2 = \begin{cases} 0 \ \Rightarrow\ 7a + 2 = 6b \Leftrightarrow\ a = 4 \wedge b = 5 \\ \dot{13} \ \Rightarrow\ 7a - 6b = 11 \Rightarrow 7a = 6b + 11 \Leftrightarrow a = 5 \wedge b = 4 \end{cases}$$

Rpta. $\therefore$ a + b = 9

3. Si: $\overline{3mnm} = \dot{143}$. Hallar $\overline{mn}$:

Solución

$$\overline{3mnm} = \dot{143} = \begin{cases} \dot{11} \rightarrow \text{módulo 11: } 2m - (3+n) = \dot{11} \\ \dot{13} \rightarrow \text{módulo 13: } (m - 3n - 4m) - 3 = \dot{13} \end{cases}$$

de donde:

$$3(m+n+1) = \dot{13} \rightarrow m + n = 12$$

$$\rightarrow 2m - (3 + 12 - m) = 3(m-5) = \dot{11} \rightarrow m = 5 \wedge n = 7$$

Rpta. $\therefore \overline{mn} = 57$

4. Se sabe que $\overline{aob5} = \dot{91}$ y "b" es lo mayor posible. Hallar el número $\overline{ab}$

Solución

$$\overline{aob5} = \dot{91} \begin{cases} \dot{7} \text{ módulo 7: } 5 + 3b - a = \dot{7} \\ \dot{13} \text{ módulo 13: } 5 - 3b - a = \dot{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 6b = \dot{7} + \dot{13} \\ 6b = 7p + 13q \\ \text{"p" y "q" \#s enteros.} \end{array}$$

Si: $p = -q \rightarrow 6b = -7q + 13q = 6q$

$\therefore b = q = 0, 1, \ldots, 9$; como "b" es lo máximo $\rightarrow b = 9$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 + 27 - a = \dot{7} \rightarrow a - 4 = \dot{7} \\ 5 - 27 - a = \dot{13} \rightarrow a - 4 = \dot{13} \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

Rpta. $\therefore \overline{ab} = 49$

5. Hallar el mayor valor de $b + c - a$ si se tiene que $\overline{abcc} = \dot{23}$ y $a + b + c = 10$

Solución

$$\overline{abcc} = \dot{23} \rightarrow \begin{array}{lll} 1000a + 100b + 11c & = & \dot{23} \\ 11a + 8b + 11c & = & \dot{23} \\ 11(a+c) + 8b & = & 11(10-b) + 8b = \dot{23} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad 3b = \dot{\overline{23}} - 5$$
$$b = 6$$
$$\rightarrow \quad a + c = 4$$

Para lo pedido: $c = 3$ y $a = 1$

Rpta. $\therefore\ b + c - a = 6 + 3 - 1 = 8$

6. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ppqq}$ son $\dot{\overline{99}}$?

Solución

$\overline{ppqq}$ son $\dot{\overline{99}}$ $\begin{cases} \dot{9} \rightarrow \text{módulo 9: } 2(p+q) = \dot{9} \rightarrow p+q = 9 \text{ ó } 18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dot{\overline{11}} \rightarrow \text{módulo 11: } (q+p) - (q+p) = 0 \text{ para cualquier valor de "p" y "q"} \end{cases}$

De (1)

$$p + q = 9 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 1, \ldots 9 \\ \\ q = 8, \ldots 0 \end{array} \right\} \quad p + q = 18 \rightarrow p = q = 9$$

Rpta. $\therefore$ Existen: $9 + 1 = 10$ números.

9. Si $\overline{abc} = \dot{\overline{13}}$; $\overline{ab} = \dot{9}$; $\overline{ac} = \dot{7}$, determinar $a + b + c$

Solución

$\overline{ac} = \dot{7} \rightarrow$ aplicando módulo 7 $\rightarrow 3a + c = \dot{7}$ ..... (1)

$\overline{ab} = \dot{9} \rightarrow$ aplicando módulo 9 $\rightarrow a + b = \dot{9}$ ..... (2)

$\overline{abc} = \dot{\overline{13}} \rightarrow$ aplicando módulo 13 $\rightarrow -3b - 4a + c = \dot{\overline{13}}$ ..... (3)

De (2): $a + b = 9$; porque si $a + b = 18$ no cumpliría con (3).

en (3): $-3(a+b) + c - a = \dot{\overline{13}} \rightarrow c - a = 1$

en (1): $4a + 1 = \dot{7} \rightarrow a = 5;\ c = 6 \wedge b = 4$

Rpta. $\therefore\ a + b + c = 15$

10. Indicar la suma del menor y mayor número de la forma $\overline{ab888}$ que sean múltiplos de 19 más 11.

Solución

Podemos establecer:

$\overline{ab888} = \dot{19} + 11$

$\overline{ab888} = \dot{19}$ Descomponiendo polinómicamente :

$10000a + 1000b + 877 = \dot{19}$ transformando el 1er miembro en $\dot{19}$;

$\dot{19} + 6a + \dot{19} + \overline{12}b + \dot{19} + 3 = \dot{19}$

$6a + 12b + 3 = \dot{19}$

$3(2a + 4b + 1) = \dot{19} \Rightarrow 2a + 4b + 1 = \dot{19}$

Se deduce que $a_{máximo} = 9, \quad b = 0$

$a_{mínimo} = 1, \quad b = 4$

El mayor: 90888
El menor: 14888

Rpta. Suma: 105776

11. Sabiendo que $b - c = 6$ y que $\overline{abc4} = \dot{8}$. Hallar el residuo de dividir $\overline{accb}$ entre 8.

Solución

Aplicando el criterio de divisibilidad por 8:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{bc4} = \dot{8} \\ b - c = 6 \Rightarrow b = 6,\ 7,\ 8,\ 9 \\ \qquad\qquad\ \ c = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{array}\right\} \quad b = 8 \ \text{ y } c = 2$$

$\overline{accb} = \dot{8} + \overline{ccb} = \dot{8} + 228 = \dot{8} + 4$

Rpta. Residuo: 4

12. Dos números consecutivos comprendidos ente 600 y 700 son tales que el menor es $\dot{11}$ y el mayor $\dot{13}$. Hallar dichos números y dar como respuesta la cifra de decenas del menor.

Solución

Sean N y (N + 1) los números: $N = \dot{11} = 11k; \quad N + 1 = \dot{13} = 13q$

Además: $600 < N < 700$

$600 < N + 1 < 700$

Podemos establecer:

$13q - 11k = 1$ (todo en función de $\dot{11}$)

$\dot{11} + 2q - \dot{11} = 1$

$2q = \dot{11} + 1 \Rightarrow q = \dot{11} - 5 = \dot{11} + 6$

$q = \dot{11} + 6$

Pero:

$600 < 13q < 700$

$46 < q < 54$

Se deduce que:

$q = \dot{11} + 6 = 50$

$\therefore N + 1 = 13 \times 50 = 650 \wedge N = 649$

Rpta. Cifra de las decenas del menor: 4

13. Al dividir el número "N" entre 23 se observa que la diferencia entre los residuos por defecto y por exceso es 9. Si se sabe que el cociente es $\overline{a488}$; hallar el residuo de dividir N entre 8.

Solución

R_d = residuo por defecto R_E = residuo por exceso.

Por dato: $R_d - R_E = 9$

pero: $R_d + R_E = 23$

} luego: $R_d = 16$; $R_E = 7$

como: $N = d \times c + R_d$; pero: $c = \overline{a488} = \dot{8}$, $R_d = 16 = \dot{8}$

luego: $N = \dot{8} + \dot{8} = \dot{8}$

Rpta. $\therefore$ al dividir N entre 8, el residuo es cero.

14. Sabiendo que: $\overline{abc1a5} = \overline{12,375}$, hallar $a+b+c$.

Solución

$$N = \overline{abc1a5} = \overline{12375} \begin{cases} \dot{125} \\ \dot{9} \\ \dot{11} \end{cases}$$

Por ser $\dot{125}$: $\quad \overline{1a5} = \dot{125} \Rightarrow a = 2$

Por ser $\dot{9}$: $\quad 2+b+c+1+2+5 = \dot{9} \Rightarrow b+c = \dot{9} - 1 \begin{cases} 8 \\ 17\ (no) \end{cases}$

Por ser $\dot{11}$: $\quad (6+b)-(4+c) = b+2-c = \dot{11}$

Luego : $\quad 8-2c+2 = \dot{11} \Rightarrow 5-c = \dot{11} \Rightarrow c = 5, \quad b = 3$

Rpta. $\therefore a+b+c = 10$

15. Cuántos números de 5 cifras son tales que son $\dot{23} + 5$ y terminan en la cifra tres.

Solución

$N = \dot{23} + 5 = \overline{\ldots 3} = \overline{abcd3} \qquad N = 23q + 5$

luego: $\quad 10{,}000 < 23q + 5 < 100{,}000$

$434 < q < 4345$

pero: $\quad 23q + 5 = \overline{.3} \Rightarrow 23q = \overline{.8} \Rightarrow q = \overline{.6}$

$\therefore \quad q = 436, 446, \ldots\ldots\ldots\ldots 4336$

391 valores

Rpta. Existen 391 números.

16. Si $436^3 \times 58 = \overline{a80b1ab6a8}$. Determinar $b - a$.

Solución

$436^3 \times 58 = \overline{a80b1ab6a8} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Aplicando el criterio de divisibilidad por 11 a ambos miembros de (1):

$436^3 \times 58 = \dot{11} + 6$

$\therefore \ \dot{11} + 6 = \dot{11} + (8 + 6 + a + b + 8) - (a + b + 1 + a)$

$6 = -a + 10 \Rightarrow a = 4$

aplicando el criterio de divisibilidad por 9 a ambos miembros de (1):

$436^3 \times 58 = \dot{9} + 4$

$\therefore \ \dot{9} + 4 = \dot{9} + 4 + 8 + 1 + 4 + 6 + 4 + 8 + 2b$

$2b + 4 = \dot{9} \Rightarrow b = 7$

Rpta. $\therefore b - a = 7 - 4 = 3$

17. Hallar la condición necesaria y suficiente para que el número A sea divisible por 40.

$A = 3^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 1$

Solución

Haciendo: $3^n = x$, reemplazando en A:

$A = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$

además: $40 = 4 \times 10 = (9 + 1)(3 + 1) = (3^2 + 1)(3 + 1)$

Entonces:

Rpta. $(3^{2n} + 1)(3^n + 1) = \dot{40} \Leftrightarrow$ n es impar.

18. Determinar un número de 4 cifras divisible por 99 y tal que si se divide entre 4 y 25 los residuos son: 3 y 18 respectivamente. Dar como respuesta la cifra de centena del número.

Solución

Si: $\overline{abcd} = \dot{25} + 18 \Rightarrow \overline{cd}$

$$\begin{cases} 18 = \dot{4} + 2 \\ 43 = \dot{4} + 3 \\ 68 = \dot{4} \\ 93 = \dot{4} + 1 \end{cases} \Rightarrow \text{luego } \overline{cd} = 43$$

además: $\overline{ab43} = \dot{99} \Rightarrow 100 \times ab + 43 = \dot{99} \Rightarrow \overline{ab} + 43 = \dot{99}$

Rpta. $\therefore \overline{ab} = 56$ entonces: $\overline{abcd} = 5\,643$

19. ¿Cuántos números $\dot{17} + 4$ de cinco cifras terminan en la cifra 2

Solución

Los números son de la forma: $17k + 4$

por límites: $10\,000 < 17k + 4 < 100\,000$

$588 < k < 5\,882.1$

y para que: $17k + 4 = \overline{...2} \Rightarrow k = \overline{...4}$

luego: $k \in \{ 594; 604; \ldots 5\,874 \}$

Rpta. Existen $\dfrac{5\,874 - 584}{10} = 529$ números

20. Si: $\overline{ab} = \dot{7} - 3$; $\overline{cd} = \dot{7} + 2$; $\overline{ef} = \dot{7} + 1$

Calcular el residuo que se obtiene al dividir entre $\dot{7}$, el número:

$$\underbrace{\overline{abcdefabcdef.....}}_{\text{20 cifras}}$$

Solución

$$\underbrace{\overline{abcdefabcdef.....}}_{\text{20 cifras}} = \overline{ab} \times 10^{18} + \overline{cdef}\,[\,10^{12} + 10^{6} + 1\,]$$

pero: $10^6 = \dot{7} + 1 \Rightarrow 10^{12} = \dot{7} + 1 \Rightarrow 10^{18} = \dot{7} + 1$

además: $\overline{cdefab} = \overline{cd} \times 10^4 + \overline{ef} \times 10^2 + \overline{ab}$

$$\overline{cdefab} = (\dot{7} + 2)(\dot{7} - 3) + (\dot{7} + 1)(\dot{7} + 2) + \dot{7} - 3 = \dot{7}$$

luego: $\underbrace{\overline{abcdefabcdef.....}}_{\text{20 cifras}} = (\dot{7} - 3)(\dot{7} + 1) + \dot{7}(\dot{7} + 3) = \dot{7} - 3 = \dot{7} + 4.$

Rpta. Residuo 4.

21. Si: $\overline{5ab} = \dot{7} + 2$ y sabiendo que el residuo por exceso de dividir su complemento entre 11 es 7. Hallar a x b.

Solución

$\overline{5ab} = \dot{7} + 2$

$500 + 10a + b = \dot{7} + 2$

$3a + b = \dot{7} - 1$ .....(1)

$C^0A(\overline{5ab}) = 1000 - 500 - 10a - b = \dot{11} - 7$

$\dot{11} + 5 - \dot{11} + a - b = \dot{11} - 7$

$a - b = \dot{11} - 1$ .....(2)

De (2): solo cumple: $a - b = -1 \Rightarrow b - a = 1 \Rightarrow \mathbf{b = a + 1}$

De (2): $3a + a + 1 = \dot{7} - 1 \Rightarrow 4a + 1 = \dot{7} - 1 \Rightarrow 4a = \dot{7} - 2 \Rightarrow a = 3 \wedge b = 4$

Rpta. $\therefore a \times b = 12$

22. Sabiendo que: $41n + 61n = \dot{119}$ y que: $36n - 23n$ está comprendido entre 400 y 500; hallar la suma de las cifras de "n".

Solución

$41n + 61n = 102n = 17 \times 6n = 7 \times 17k$ (por ser $\dot{119}$)

Luego: $n = \dot{7}$

$36n - 23n = 13n \Rightarrow 400 < 13n < 500$

$30 < n < 40$ como $n = \dot{7}$, solo cumple: $n = 35$

Rpta. $3 + 5 = 8$

23. Encontrar los números de tres cifras múltiplos de 13 y tales que la cifra de las centenas sea igual a la cifra de las unidades. Entre las soluciones sólo hay un múltiplo de 9; explicar porqué

Solución

$\overline{aba} = \dot{13} \rightarrow 101a + 10b = \dot{13} \Rightarrow 91a + 10a + 10b = \dot{13} \Rightarrow \dot{13} + 10(a + b) = \dot{13}$

$\Rightarrow 10(a + b) = \dot{13} \Leftrightarrow a + b = 13$ $\therefore$ las soluciones posibles:

$a = 4 \wedge b = 9 \Rightarrow \overline{aba} = 494$; $a = 5 \wedge b = 8 \Rightarrow \overline{aba} = 585$

$a = 6 \wedge b = 7 \Rightarrow \overline{aba} = 676$; $a = 7 \wedge b = 6 \Rightarrow \overline{aba} = 767$

$a = 8 \wedge b = 5 \Rightarrow \overline{aba} = 858;\ a = 9 \wedge b = 4 \Rightarrow \overline{aba} = 949$

Rpta. Entre las soluciones sólo hay un múltiplo de 9 pues esta condición exige:
$a + b + a = 18 \wedge$ como $a + b = 13$ queda $a = 5 \wedge b = 8$

24. Determinar las cifras x e y de manera que el número $N = \overline{28\,x75y}$ sea divisible por 33.

Solución

$\overline{28x75y} = \overline{33} \Rightarrow$ módulo 3: $2 + 8 + x + 7 + 5 + y = \overline{3} \Rightarrow 23 + x + y = \overline{3}$.

$-1 + x + y = \overline{3}$ .....(α)

módulo 11: $(8 + 7 + y) - (2 + x + 5) =$

$0 \rightarrow 8 + y - x = 0 \Rightarrow x = 8 + y$ .....(β)

$\overline{11} \rightarrow 8 + y - x = \overline{11} \Rightarrow y - x = 3$ .....(χ)

Sumando (α) + (χ):

$1 + 2y = \overline{3} \Rightarrow y = 4$ ó 7. Si $y = 4$, $x = 1$ $\therefore N = 281\,754$

Si $y = 7$, $x = 4$ $\therefore N = 284\,757$

De (β): Se puede obtener: $y = 0, x = 8$; $y = 9$; $x = 1$; el primer par de valores no cumple la condición $1 + x + y = \overline{3}$; el segundo da la solución $N = 288\,750$

Rpta. Soluciones: 281 754
284 757
288 750

25. Cuántos números de 3 cifras múltiplos de 9 existen de tal manera que la cifra central sea igual a la suma de las laterales.

Solución

Para que un número sea $\overline{9}$ se sabe que la suma de sus cifras debe formar un número $\overline{9}$

El número es de la forma $\overline{a\,(a+b)\,b}$ donde:

$a + a + b + b = 2(a + b) = 9$

Rpta. $\therefore$ la cifra central es 9 y los números posibles son:

198
297
.....
.....
.....
891
990

} son 9 números

27. A un número de dos cifras $\dot{11} + 10$ se le multiplican por 4; luego se le suma un $\dot{26} + 9$ obteniéndose como resultado a un número $\dot{13} - 2$. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

Solución

El número: $\overline{ab}$. Se cumple:

$$\overline{ab} = \dot{11} + 10 \text{ además } 4 \times \overline{ab} + \dot{26} + 9 = \dot{13} - 2$$

$$\Rightarrow 4ab = \dot{13} - 11 \Rightarrow 4 \times ab = \dot{13} + 2 \Rightarrow \dot{13} = \#\text{ par}$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = \frac{\dot{13}+2}{4} = 20, 33, 46, 59, 72, 85, 98$$

Sólo cumple: $\overline{ab} = 98$

Rpta. $\therefore a + b = 17$

28. Cuál es el menor número $\dot{7}$ que da de resto la unidad al ser dividido por 3 ú 11?

Solución

Sea N el número. Se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} N = \dot{3} + 1 \\ N = \dot{11} + 1 \\ N = \dot{7} \end{array}\right\} \Rightarrow N = \dot{33} + 1 = 33k + 1 \quad \text{.....(1)}$$

Pero: $33k + 1 = \dot{7}$

$$\dot{7} + 5k + 1 = \dot{7}$$

$$5k + 1 = \dot{7}$$

$$\therefore K_{mínimo} = 4$$

Rpta. En (1) $\therefore N = 33(4) + 1 = 133$

29. Encontrar de cuatro cifras diferentes de cero $N = \overline{mcdu}$ tal que se tenga: $\overline{mcdu} = \dot{11}$; $\overline{md} = \dot{7}$; $m + c + d + u = u^2$

Solución

Según el enunciado el valor mínimo que pueden tener las cifras es 1, y el valor máximo 9; por lo tanto, en virtud de la ecuación $m + c + d + u = u^2$

se tiene: $4 \leq u^2 \leq 36$, luego puede tenerse $u^2 = 4; 9; 16; 25$ ó 36, de donde $u = 2; 3; 4; 5$ ó 6; pero siendo $3 \leq m + c + d \leq 27$, o sea:

$3 \leq u^2 - u \leq 27$ sólo es posible: $u = 3; 4$ ó 5 y entonces $m + c + d = 16; 12$ ó 20

La condición $\overline{mcdu} = \dot{11}$ da $m+d-c-u = \dot{11}$ y combinando con la anterior resulta:

$$2c + \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases} = \begin{cases} 6 \\ 12 \\ 20 \end{cases} + \dot{11} \quad \Rightarrow \quad 2c = \begin{cases} 3 \\ 8 \\ 4 \end{cases} + \dot{11}$$

de donde $c = 7, 4$ ó 2 cuando $u = 3; 4$ ó 5 respectivamente y se obtiene $m + d = 8$ ó 18.

Como la condición $\overline{md} = \dot{7}$ equivale a $m - 2d = \dot{7}$ la segunda posibilidad ($m + d = 18$) no conviene pues implica $m = d = 9$; y la primera da $3d = \dot{7} + 1$ de donde $d = 5$ y $m = 3$.

Rpta. La única solución del problema es: 3 454.

30. Demostrar que:

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple: $3^{2n+3} + 40n - 27 = \dot{64}$

Demostración

$$3^{2n+3} + 40n - 27 = 3^{2n} \cdot 3^3 + 40n - 27 = 27\,(9^n - 1) + 40n$$

$$= 8\left[27 \cdot \frac{9^n - 1}{9 - 1} + 5n\right] = 8\,[27\,(9^{n-1} + 9^{n-2} + 9 + 1) + 5n]$$

pero: $9 = 8 + 1 \Rightarrow 9^2 = \dot{8} + 1 = 8K_2 + 1$; también $9^3 = \dot{8} + 1 = 8k_3 + 1$; . . .

en general $9^{n-1} = \dot{8} + 1 = 8k_{n-1} + 1$; entonces:

$$= 8\,[27\,(8k_{n-1} + 1 + 8k_{n-2} + 1 + \ldots + 8K_2 + 1 + 8 + 1) + 5n]$$
$$= 8\,[27\,(\dot{8} + n - 1 + 1) + 5n]$$
$$= 8\,[27\,(\dot{8} + n) + 5n] = 8\,[27 \cdot 8k + 27n + 5n]$$
$$= 8 \cdot 27 \cdot 8k + 8 \cdot 32n$$
$$= 8 \cdot 8 \cdot 27k + 8 \cdot 8 \cdot 4n$$
$$= 64\,(27k + 4n) = \dot{64} \qquad \textbf{(l.q.q.d.)}$$

31. Hallar los números enteros de tres cifras, $N = \overline{cdu}$, que sea iguales al cuádruplo del producto de sus cifras.

Solución

Recordando que un número es $\dot{5}$, cuando termina en 0 ó 5. El número no puede ser 5, porque siendo par sería $\overline{10}$ y por lo tanto el producto de sus cifras, sería nulo, ya que u sería cero.
Los factores primos de N de una sola cifra sólo puede ser: 2, 3 ó 7
Podemos escribir:

$N = \overline{cdu} = 100c + 10d + u = 10(10c + d) + u = 4\,c\,d\,u.$

Luego: $4\,d\,c\,u - u = 10(10c + d)$

$u(4dc - 1) = 10(10c + d)$ .....(a)

Analizando esta expresión se deduce que:

$$u(4\,d\,c - 1) = \dot{\dot{5}}$$

"u" no $\longrightarrow \dot{\dot{5}}$ . . . , luego $4\,d\,c - 1 = \dot{\dot{5}}$, lo que exige que $4\,d\,c$ termine en 6, y por lo tanto que c d acabe en 4 ó en 9.

Consideremos los números terminados en 4 ó 9, a lo sumo iguales a $9 \times 9 = 81$ y que no tengan factor primo mayor que 7; estos son: 4, 14, 24, 54, 64, 9 y 49.

Para: $c,d = 4 = 2,2$ ó $1,4$ ó $4,1$, solo puede ser $\overline{cd} = 22$ ó 14 ó 41.

Para: $c,d = 14 = 2,7$ sólo puede ser: $cd = 27$ ó 72, etc.

De (a) se tiene: $u(4\,d\,c - 1) = 100c + 10d = \overline{cdo}$

$$u = \frac{\overline{cdo}}{4xdxc - 1}$$

Tanteando el valor de "u" con cada uno de los valores anteriores de cd, no se encuentra valor entero y menor que 10 más que para $\overline{cd} = 38$ lo que da $u = 4$. El número pedido es pues:

Rpta. 384.

32. Hallar el resto de la división por 81 de la expresión:

$$10^n - 9n + 2.$$

Solución

$10^n = (9 + 1)^n = \underbrace{9^n + n \cdot 9^{n-1} + \ldots \frac{n(n-1)}{2} 9^2}_{\dot{\overline{81}}} + n \cdot 9 + 1$ luego:

$10^n = \dot{\overline{81}} + 9n + 1$

Por lo tanto: $10^n - 9n + 2 = \dot{\overline{81}} + 9n + 1 - 9n + 2 = \dot{\overline{81}} + 3,$

Rpta. Es decir, el resto pedido es 3

33. Si : $M = N(N + 1)$ y $M = \overline{abcd}$, además $a - d = b - c$
hallar la suma de las cifras M, sabiendo que N expresado en base 11 no termina en la cifra cero, y que $(N + 1)$ en base siete termina en la cifra cero.

Solución

$M = N(N+1) \rightarrow M = \overline{abcd} \rightarrow a - b = b - c$, de aquí se deduce que:

$-a - c = -b - d \rightarrow -(a+c)+(b+d) = 0$ lo que permite asegurar que $M = \dot{11}$

pero $M = N(N+1)$ y como $N = \overline{.....x}_{(once)}$ $x \neq 0$ $\therefore N \neq \dot{11}$

$\rightarrow N + 1 = \dot{11}$ además:

$N+1 = \overline{.....0}_{(siete)}$ lo cual implica que $N + 1 = \dot{7}$

$$\therefore N+1 = \begin{cases} \dot{7} \\ \dot{11} \end{cases} \Rightarrow N + 1 = \dot{77} \qquad N + 1 = 77 \wedge N = 76$$

(única solución para que M tenga cuatro cifras).

$\therefore M = 76 \times 77 = 5852$

Rpta. $S_c = 5 + 8 + 5 + 2 = 20$

PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD QUE SE RESUELVEN APLICANDO TEORIA DE CONJUNTOS (Diagramas de Venn)

ANALISIS PREVIO

Debemos conocer las operaciones ante conjuntos U, $\cap$, $-$, Δ, además de la Teoría de divisibilidad.

1. Sea "y" la cantidad de números del 11 951 al 19 499 que son 37 pero no $\dot{17}$ y sea "x" la cantidad de números que son $\dot{17}$ pero no $\dot{37}$.
Hallar x - y

$\dot{37}$: $11\,951 \leq 37k \leq 19\,499 \Rightarrow 323 \leq k \leq 527$

$\therefore$ Existen: $527 - 322 = 205$ números $\dot{37}$

$\dot{17}$: $11\,951 \leq 17k \leq 19\,499 \Rightarrow 703 \leq k \leq 1\,147$

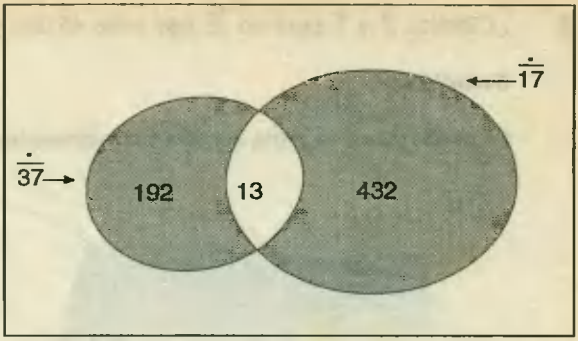
$\therefore$ Existen: $1\,147 - 702 = 445$ números $\dot{17}$

$\dot{17}$ y $\dot{37}$ o sea $\dot{17x37}$: $11\,951 \leq 17 \times 37 \,.\, k \leq 19\,499 \Rightarrow 19 \leq k \leq 31$

$\therefore$ Existen: $31 - 18 = 13$ números $\dot{17x37}$

Graficando:

$x = 445 - 13$
$y = 205 - 13$

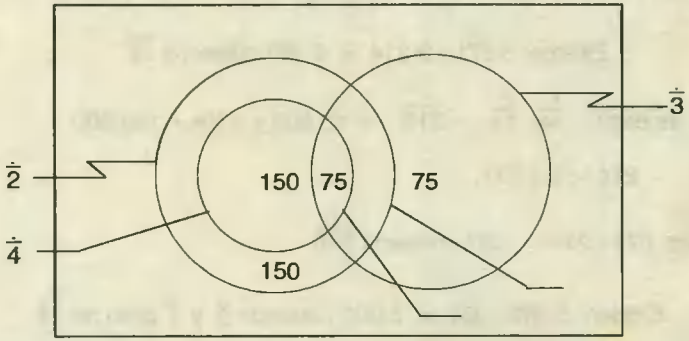


Rpta. $x = 432$
$y = 192$
$x - y = 240$

2. ¿Cuántos números de 3 cifras son múltiplos de 2 pero no múltiplos de 3 ni tampoco de 4.

Solución

En el diagrama de Venn:



$100 \leq m \times 12 < 1000 \rightarrow$ hay 75 números $\dot{12}$

$100 \leq m \times 4 < 1000 \rightarrow$ hay 225 números $\dot{4}$

$100 \leq m \times 2 < 1000 \rightarrow$ hay 450 números $\dot{2}$

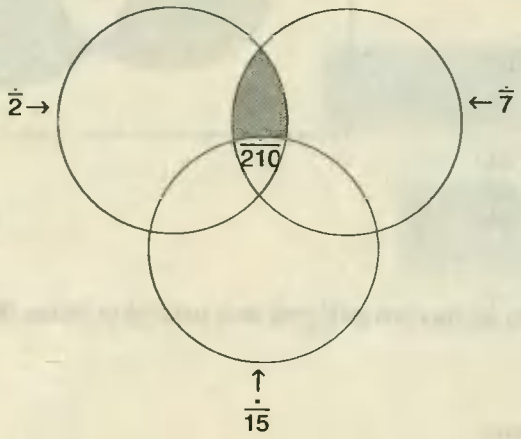
$100 \leq m \times 6 < 1000 \rightarrow$ hay 150 números $\dot{6}$

Rpta. Del diagrama: Hay 150 múltiplos de 2 pero no de 3 ni de 4.

3. ¿Cuántos $\dot{2}$ y $\dot{7}$ pero no $\dot{15}$ hay entre 45,000 y 120,000?

Solución

En el diagrama: la parte sombreada representa el conjunto solución del problema.



$\dot{2}$ y $\dot{7}$ esto es $\dot{14} \rightarrow 45000 < 14k < 120\,000 \Rightarrow 3214, < k < 8571,$

$\therefore$ Existen: 8 571 - 3 214 = 5 357 números $\dot{14}$

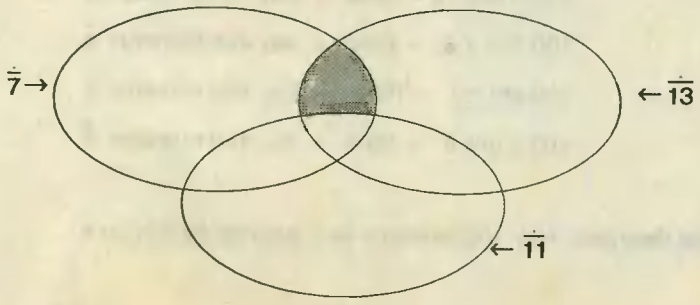
$\dot{14}$ y $\dot{15}$ es decir $\dot{14} \cdot \dot{15} = \dot{210} \rightarrow 45\,000 < 210k < 120\,000$

$214, < k < 571,$

$\therefore$ Existen: 571 - 214 = 357 números $\dot{210}$

Rpta. $\therefore$ Existen: 5 357 - 357 = 5 000 números $\dot{2}$ y $\dot{7}$ pero no $\dot{15}$

4. Hallar cuántos números entre 95,000 y 194,000 son $\dot{7}$ y $\dot{13}$ pero no $\dot{11}$.



Solución

$\dot{7}$ y $\dot{13}$ o sea $\dot{91}$:

$$95\,000 < 91k < 194\,000$$

$$1043, < k < 2\,131,$$

$\therefore$ Existen:

$$2\,131 - 1\,043 = 1\,088 \text{ números } \dot{91}$$

$\dot{7}$; $\dot{13}$; $\dot{11}$ o sea $\dot{1001}$:

$$95\,000 < 1\,001K < 194\,000$$

$$94, < k < 193,$$

Existen 99 números $\dot{1001}$

Rpta. $\therefore$ $\dot{7}$ y $\dot{13}$ pero n $\dot{11}$ son: $1088 - 99 = 999$ números

5. ¿Cuántos números entre 7,000 y 9,000 son múltiplos de 17 ó 19 ó 23 pero no múltiplos de dichos 3 números al mismo tiempo?

Solución

$\dot{17}$: $7000 < 17k < 9000$

$$911,7 < k < 5294$$

$\therefore$ Existen: 118 números $\dot{17}$

$\dot{19}$: $7000 < 19k < 9000$

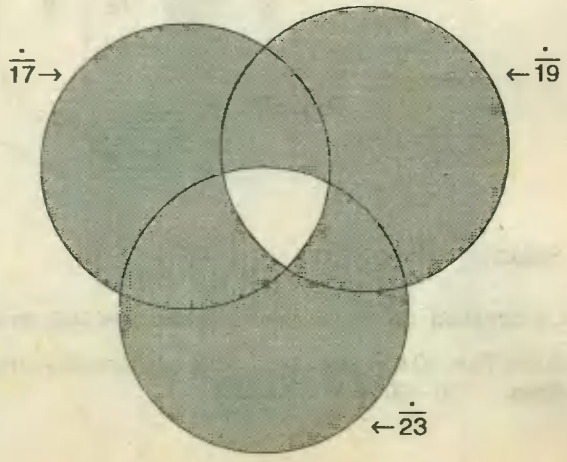
$$368,4 < k < 473,6$$

$\therefore$ Existen 105 números $\dot{19}$

$\dot{23}$: $7000 < 23k < 9000$

y así sucesivamente,

Rpta. Se obtiene 315 números.



6. En los 840 primeros números naturales. ¿ Cuántos números múltiplos de 2 existen que no sean múltiplos de 4 ni tampoco múltiplos de 7.

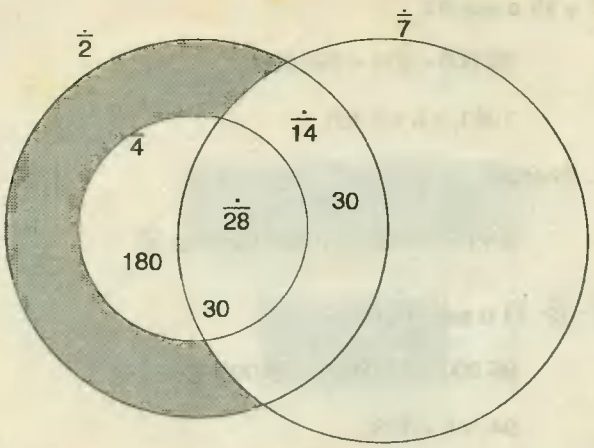
Solución

$\dot{2}$: $\frac{840}{2} = 420$

$\dot{4}$: $\frac{840}{4} = 210$

$\dot{14}$: $\frac{840}{14} = 60$

$\dot{28}$: $\frac{840}{28} = 30$

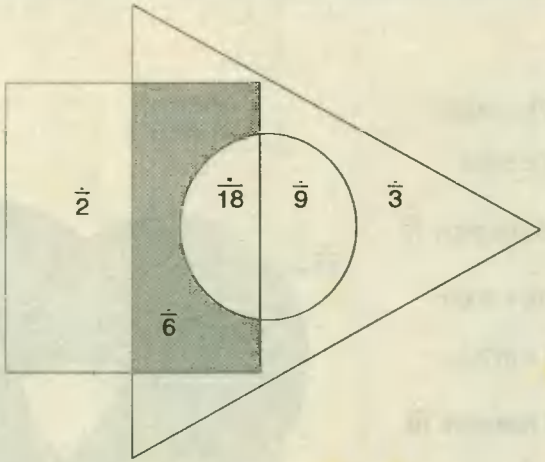


$\therefore$ $\dot{2}$ pero no $\dot{4}$ ni $\dot{7}$ son:

420 - (180 + 30 + 30) = 180 números.

Rpta. 180 números

7. ¿Cuántos números de 3 cifras existen tales que sean $\dot{6}$ pero no $\dot{9}$



Solución

La cantidad de números de tres cifras es 900; de los cuales: $900 \div 60 = 150$ son $\dot{6}$ y $900 \div 18 = 50$ son $\dot{18}$. Entonces la cantidad de números de 3 cifras que son $\dot{6}$ y no $\dot{9}$ son:
Rpta. 150 - 50 = 100 números

8. A partir de: $\underbrace{15 \times 16 \times 17 \times \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"n" factores.}} = \dot{13} - 6$. Hallar "n"

Solución

Por inducción:

$$\left.\begin{array}{l} 15 = \dot{13} + 2 \\ 16 = \dot{13} + 3 \\ 17 = \dot{13} + 4 \\ \quad\vdots \\ \underbrace{15 + (n-1)}_{\text{n-ésimo factor}} = \dot{13} + (n+1) \end{array}\right\}$$

Si: P es el producto:

$$P = \dot{13} + (n+1)! = \dot{13} - 6 = \dot{13} + 7$$

Analizando:

n	$(n+1)!$	
1	$\dot{13} + 2$	(x3)
2	$\dot{13} + 6$	(x4)
3	$\dot{13} + 11$	(x5)
4	$\dot{13} + 3$	(x6)
5	$\dot{13} + 5$	(x7)
6	$\dot{13} + 9$	(x8)
7	$\dot{13} + 7$	

Rpta. $\therefore n = 7$

9. El número:

$$\left[\left[\left[\left[17\right]^{18}\right]^{20}\right]^{22}\right]^{(18+2n)} \times \left[\left[\left[\left[17\right]^{19}\right]^{21}\right]^{23}\right]^{(19+2n)} \text{ es:}$$

I) $\dot{18}$ II) $\dot{18}-1$ III) $\dot{18}+2$ IV) $\dot{18}+1$ V) $\dot{18}-2$

Solución

$17 = \dot{18} - 1$

$$17 = (\dot{18} - 1)^n = \begin{cases} \dot{18} - 1 \ (n, \text{impar}) \\ \dot{18} + 1 \ (n, \text{par}) \end{cases}$$

El primer factor es: $\dot{18} + 1$

El segundo factor es: $\dot{18} - 1$

Rpta. $\therefore$ El producto es $\dot{18} - 1$

10. En la siguiente serie: $\underbrace{23, 31, 39, 47.....}_{200 \text{ términos}}$

¿Cuántos términos $\dot{17} + 2$ existen?

Solución

Los términos de la serie, son de la forma:

$$23 + 8q; \text{ donde } 0 \leq q < 200$$

Pero nos interesa los términos de la forma:

$$23 + 8q = \dot{17} + 2 \Rightarrow \dot{17} + 6 + 8q = \dot{17} + 2 \Rightarrow 4 + 8q = \dot{17}$$

$$\Rightarrow 4(1 + 2q) = \dot{17} \Rightarrow 1 + 2q = \dot{17} \Rightarrow q = \frac{\dot{17} - 1}{2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{\dot{17} + 16}{2} \Rightarrow q = \dot{17} + 8$$

$\therefore q = \underbrace{8, 25, 42, ..., 195}$

$$\text{Nº de términos} = \frac{195 - (-9)}{17} = 12$$

Rpta. $\therefore$ Existen 12 términos de la forma $\dot{17} + 2$.

11. ¿Cuántos términos de la serie: 94; 101; 108; . . .; 4 042 no son $\dot{11} + 7$?

Solución

Los términos son de la forma general:

$a_n = 87 + 7n; \quad n = 1; 2; \ldots; 565 \rightarrow 565$ valores

Sólo interesan los términos:

$$a_n = \dot{11} + 7 = \dot{11} - 4 = 87 + 7n + 4 - 4 = 91 + 7n - 7(13 + n) - 4$$

$$\Rightarrow \dot{11} - 4 = 7(13 + n) - 4 \Rightarrow 11k = 7(13 + n) \Rightarrow n + 13 = \dot{11}$$

$$\Rightarrow n + 13 = 11p$$

Como $1 \leq n \leq 565$

entonces $14 \leq n + 13 \leq 578$ pero $n + 13 = 11q$

$14 \leq 11q \leq 578$

$2 \leq q \leq 52$

$q = 2; 3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; 52$ (51 valores)

Rpta. $\therefore$ Existen: $565 - 51 = 514$ números.

12. ¿Cuántos $\dot{\overline{13}} + 10$ hay en la serie: 29; 37; 45; 53; . . .; 4 517?

Solución

Los términos de la serie, son de la forma general:

$a_n = 21 + 8n$ donde $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 562$

Sólo interesan los términos de la forma:

$a_n = \dot{\overline{13}} + 10 = 21 + 8n \Rightarrow a_n = \dot{\overline{13}} - 3 = 13m - 3 = 21 + 3 + 8n - 3$

$\Rightarrow a_n = 13m - 3 = 24 + 8n - 3 \Rightarrow a_n = 13m - 3 = 8(3 + n) - 3$

$\therefore 3 + n = \dot{\overline{13}} \Rightarrow n + 3 = 13q$

pero $1 \leq n \leq 562$

$4 \leq \underbrace{n + 3}_{13q} \leq 565$

$4 \leq 13q \leq 565 \Rightarrow q = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, 43$ (43 valores)

Rpta. $\therefore$ Existen 43 números.

13. Si $\dfrac{a_1}{n} = \dfrac{a_2}{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{a_{n-1}}{2} = \dfrac{a_n}{1}$

y: $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} \cdot a_n$

Se tiene las siguiente afirmaciones:

(I) $P = \dot{\overline{a}}_1$, **(II)** $P = \overline{n!}$, **(III)** $P = \dot{\overline{n}}^n$ **(IV)** $P = \dot{\overline{n}}^2$ **(V)** $P = \dot{\overline{a}}_n$

¿Cuántas afirmaciones son falsas?

Solución

$a_1 = n\, a_n$

$a_2 = (n-1)\, a_n$

$\Rightarrow \quad P = n!\ a_n^n = \dot{n!} = \dot{a}_n$

$\dot{a}_{n-1} = 2 \,.\, a_n$

$a_n = 1 \,.\, a_n$

Rpta. ∴Son falsas (I), (III) y (IV), tres afirmaciones.

14. En la siguiente serie: 14; 26; 38; 50; .....¿Cuántos números de tres cifras son $\overline{15} + 2$?

Solución

Los términos de la serie son de la forma: $2 + 12n \rightarrow n = 1; 2; 3; \ldots\ldots$

Por condición: $2 + 12n = \overline{15} + 2 \Rightarrow 12n = \overline{15} \Rightarrow 2^2 \times 3 \times n = \overline{15} \Leftrightarrow n = \dot{5}$

Además: $100 \leq 2 + 12n < 1\,000$
$8, \leq n < 83,$

Sólo cumplen: $n = 10; 15; 20; \ldots 80$ (15 valores)

Rpta. 15 números.

PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD QUE SE RESUELVEN APLICANDO CRITERIOS DE ECUACIONES DIOFANTICAS Y RESTOS POTENCIALES

ANALISIS PREVIO

* Debemos recordar los criterios de divisibilidad; descomposición polinómica , básicamente

1. Compré vacas a $ 45 000, cada una y caballos a $ 52 000 cada uno. Si en total gasté $ 939 000. Hallar la diferencia entre el número de vacas y de caballos que compré.

Solución

V = Nº de vacas c = Nº caballos $\Rightarrow$ 45 000V + 52 000 c = 939 000 transformando en $\dot{\overline{45}}$ $\Rightarrow$ 45V + 52c = 939 $\Rightarrow$ $\dot{\overline{45}}$ + 7c = $\dot{\overline{45}}$ + 39 $\Rightarrow$ 7c - 39 = $\dot{\overline{45}}$ $\Rightarrow$ c = 12

$$\therefore \quad V = \frac{939 - 52 \times 12}{4} = 7$$

Rpta. C - V = 5

2. Se compran panetones y tortas a $ 4 y $ 7 respectivamente. Si el gasto fue de $ 123 en total. Determinar la suma de los números de panetones más los de tortas, si el producto de estos números es lo máximo posible.

Solución

x = Nº de panetones y = Nº tortas.

4x + 7y = 123 aplicando módulo 4: $-y = \dot{\overline{4}} - 1 \Rightarrow y = \dot{\overline{4}} + 1$

$$\therefore \quad \begin{array}{lccccc} y = & 1, & 5, & 9, & 13, & 17 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x = & 29, & 22, & 15, & 8, & 1 \end{array}$$

Como x . y es máximo: x = 9

y = 15

x + y = 24

Rpta. 24

3. Compré vacas, cerdos y ovejas que cuestan S/.70 000, S/. 50 000, S/.30 000, respectivamente, gastando en total S/. 1 290 000. Si compré doble número de cerdos que ovejas. ¿Cuántos animales compré en total?

Solución

x = Nº de vacas y = Nº de cerdos z = Nº de ovejas. Podemos establecer.

$$70\,000x + 50\,000y + 30\,000z = 1\,290\,000 \Rightarrow 7x + 5y + 3z = 129$$

como: y = 2z

Luego: 7x + 13z = 129. Aplicando módulo 7 $\Rightarrow \dot{\overline{7}} + \dot{\overline{7}} - z = \dot{\overline{7}} + 3 \Rightarrow -z = \dot{\overline{7}} + 3$

$\Rightarrow z = \dot{\overline{7}} - 3 \Rightarrow z = 4$ única solución $\therefore x = 8,\ y = 11$

Rpta. x + y + z = 8 + 11 + 4 = 23

4. Se han comprado botellas de vino: 7 cajas de 18 botellas a S/.50 por botella, 1 caja de 13 botellas a S/.300 por botella, también por lo menos una caja de 19 botellas a

S/.100 por botella y cajas (por lo menos una) de 10 botellas a S/. 290 por botella; si por todo se pagó S/. 42 000. ¿Cuántas cajas del último grupo se compraron?

Solución

Sea n el número de cajas de 19 botellas y m el número de cajas de 10 botellas: podemos establecer:

$$7 \times 18 \times 50 + 1 \times 13 \times 300 + 19 \times 100n + 10 \times 290 \times m = 42\,000$$

$$19n + 29m = 318$$

aplicando módulo 19:

$$\dot{\overline{19}} + \dot{\overline{19}} + 10m = \dot{\overline{19}} + 14$$

$$10m = \dot{\overline{19}} - 5$$

$$5(2m + 1) = \dot{\overline{19}}$$

$$2m = \dot{\overline{19}} - 1$$

$$m = 9$$

Rpta. Nueve cajas.

5. María va al mercado con S/. 22,590, compra papayas a 770 soles cada una, naranjas a 910 soles cada una y manzanas a 1430 soles cada una. Si compra la mayor cantidad posible de manzanas, cuántas frutas compró en total, si gastó todo su dinero.

a) 17 b) 18 c) 19 d) 21 e) 20

Solución

$$770p + 910q + 1430r = 22990$$

$$\dot{\overline{7}} + \dot{\overline{7}} + \dot{\overline{7}} + 3r = \dot{\overline{7}} + 5$$

$$3r = \dot{\overline{7}} + 5 = 12, 19 .....$$

$$r = 4$$

Rpta. 4

6. Sea la fracción $\frac{2n+17}{n+1}$, donde n es un número entero

Cuál es la forma general del entero n para que los dos términos de la fracción sean:

i). Divisibles por 3

ii). Divisibles por 5

iii). Divisibles por 15

¿Cuáles son los valores enteros de n para que la fracción de un número entero?

Solución

La fracción se puede escribir como:

$\frac{2n+17}{n+1} = \frac{2(n+1)+15}{n+1}$ de está ultima expresión se deduce que:

i). Es divisible por 3 $\Leftrightarrow$ $n+1 = 3k$ ó $n = 3k-1$ $\forall k \in z^+$

ii). Es divisible por 5 $\Leftrightarrow$ $n+1 = 5k$ ó $n = 5k-1$ $\forall k \in z^+$

iii). Es divisible por 15 $\Leftrightarrow$ $n+1 = 15k$ ó $n = 15k-1$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$

Valores de n para que la fracción origine un número entero:

n + 1 debe ser divisor de 15:

Rpta. $n+1 = 3 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow f = 17$

$n+1 = 3 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow f = 7$

$n+1 = 5 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow f = 5$

$n+1 = 15 \Rightarrow n = 14 \Rightarrow f = 3$

7. Determinar el valor de x para que al dividir el número $\overline{90x1738}$ por 11 tenga el mismo resto que el número:

$\underbrace{123123123.....123}_{300 \text{ cifras}}$ dividido por 9

Solución

Aplicando el módulo 11 al primer número:

$(9+x+7+8)-(0+1+3) = 24+x-4 = 20+x = 22+x-2$

$= \dot{11}+x-2 = x-2$ (representa el residuo del número entre 11) ..... (1)

aplicando el módulo 9 al segundo número:

$100(1+2+3) = 600 = \dot{9}+6$ (6 representa el residuo) ..... (2)

Como los resultados (1) y (2) deben ser iguales:

Rpta. $x-2 = 6 \Rightarrow x = 8$

8. En que cifra termina:

$(2727)^{49} + (4753)^{21} \times (12\ 729)^{15}$ en base siete?

Solución

$(2727)^{49} = (\dot{7} + 4)^{49} = \dot{7} + 4$

$(4753)^{21} = \dot{7}$

$(12729)^{15} = \dot{7} + x$ luego:

$(\dot{7} + 4) + \dot{7}(\dot{7} + x) = \dot{7} + 4 = \overline{\ldots\ldots 4}_{(7)}$

Rpta. $\overline{\ldots\ldots 4}_{(7)}$

9. Hallar el mayor resto de dividir:

$2^{\overline{abc}} + 4^{\overline{abc}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 256^{\overline{abc}}$ entre 3.

Solución

Analicemos las potencias de 2 (módulo 3)

$2^1 = \mathring{3} - 1$
$2^2 = \mathring{3} + 1$
$2^3 = \mathring{3} - 1$
$2^4 = \mathring{3} + 1$

* Potencias Pares: resto 1

** Potencias Impares: resto 2

La serie queda así:

$$2^{\overline{abc}} + 2^{2\times\overline{abc}} + 2^{4\times\overline{abc}} + 2^{6\times\overline{abc}} + 2^{8\times\overline{abc}}$$

Para que se tenga el mayor resto $\overline{abc}$ debe ser par por lo que la expresión será $\mathring{3} + 2$

Rpta. Resto = 2

10. Si el número 25^{234} se convierte a base 9. ¿En qué cifra termina?

Solución

$(25)^{234} = (\dot{9} - 2)^{234}$ aplicando restos potenciales:

$(\dot{9} - 2)^2 = \dot{9} + 4$

$$(\dot{9} - 2)^3 = \dot{9} - 8 = \dot{9} + 1$$

luego: $(\dot{9} - 2)^{234} = [(\dot{9} - 2)^3]^{78} = \dot{9} + 1$

Rpta. Terminará en la cifra 1.

11. Sabiendo que el número $(453)^m$ expresado en base 11 termina en la cifra α, hallar el valor de m en base 2.

Solución

$453 = \dot{11} + 2 \Rightarrow (453)^m = \dot{11} + 2^m,$

Pero: $(453)^m = \ldots \alpha_{(11)} = \dot{11} + 10 = \dot{11} - 1$

Luego: $\dot{11} + 2^m = \dot{11} - 1 \Rightarrow 2^m + 1 = \dot{11}$

Rpta. $m = 5 = 101_{(2)}$

12. Hallar el residuo por exceso de dividir $(12{,}725)^{36} + 4225 \times 8{,}728$ entre 13.

Solución

$$(12725)^{36} = [(\dot{13} - 2)^6]^6 = [\dot{13} + (-2)^6]^6 = \dot{13} + 1$$

$$4225 = \dot{13}$$

Luego:

$$N = (\dot{13} + 1) + \dot{13}() = \dot{13} + 1$$

Pero si:

$$\begin{array}{c|c} N & 13 \\ \hline r & k \end{array} \rightarrow N = \dot{13} + r,$$

luego $r = 1 \wedge r_1 = 13 - 1 = 12$

Rpta. 12

13. Hallar el residuo entre 7 de la siguiente suma:

$$S = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \ldots 5^{1031}$$

Solución

Analizando los restos potenciales de 5 con respecto a 7:

$5^1 = \dot{7} + 5$

$5^2 = \dot{7} + 4$

$5^3 = \dot{7} + 6$

$5^4 = \dot{7} + 2$

$5^5 = \dot{7} + 3$

$5^6 = \dot{7} + 1$

De donde se obtiene: $5^1 + 5^2 + \ldots + 5^6 = \dot{7}$

Entonces: $1031 = 6 \times 171 + 5$

$$S = \underbrace{5^1 + 5^2 + \ldots 5^{1026}}_{171 \times 6} + 5^{1027} + \ldots 5^{1031}$$

$$\therefore S = \dot{7} + 5 + 4 + 6 + 2 + 3 \Rightarrow s = \dot{7} + 20 = \dot{7} + 6$$

Rpta. El residuo es 6.

14. Si: $\overline{ab} = \dot{7} - 3$

$\overline{cd} = \dot{7} + 2$

$\overline{ef} = \dot{7} + 1$

Luego: $\underbrace{\overline{abcdefabcdef}}_{20 \text{ cifras}}$ al dividirlo entre $\dot{7}$. ¿Cuánto dará de residuo?

Solución

$\overline{ab} = \dot{7} - 3$

$\overline{cd} = \dot{7} + 2$

$\overline{ef} = \dot{7} + 1$

$$\underbrace{\overline{abcdefabcdef.....}}_{20 \text{ cifras}} = \overline{ab} \times 10^{16} + \overline{cdefab} \times [10^{12} + 10^6 + 1]$$

Pero: $10^6 = \dot{7} + 1 \rightarrow 10^{12} = \dot{7} + 1 \rightarrow 10^{18} = \dot{7} + 1$

Además: $\overline{cdefab} = \overline{cd} \times 10^4 + \overline{ef} \times 10^2 + \overline{ab}$

$\overline{cdefab} = (\dot{7} + 2)(\dot{7} - 3) + (\dot{7} + 1)(\dot{7} + 2) + \dot{7} - 3 = \dot{7}$

Luego:

$$N = (\dot{7} - 3)(\dot{7} + 1) + 7x(\dot{7} + 3) = \dot{7} - 3 = \dot{7} + 4$$

Rpta. Residuo: 4

15. Demostrar que $2^{155} - 1$ es divisible por 31^2

Demostración

$(2^{155} - 1) \div 31^2 = k \in \mathbb{Z}^+$. Como $2^{155} = (2^5)^{31}$ y $31 = 2^5 - 1$

$$\therefore \text{ Se tendrá que: } \frac{(2^5)^{31} - 1}{(2^5 - 1)(2^5 - 1)} = K$$

Se puede notar que $(2^5)^{31} - 1$ es divisible por $2^5 - 1$, siendo entonces su cociente:

$$(2^5)^{30} + (2^5)^{29} + \ldots + 2^5 + 1$$

Para llegar a la tesis, necesitamos probar que este cociente es divisible por $2^5 - 1 = 31$. Si en cada sumando tenemos en cuenta que $2^5 = 31 + 1$ se tendrá que:

$$(2^5)^{30} + (2^5)^{29} + \ldots + 2^5 + 1 = (\overline{31} + 1)^{30} + (\overline{31} + 1)^{29} + \ldots + \overline{31} + 1 + 1 = \overline{31} + 31 \text{ veces } 1.$$

Rpta. $\therefore$ Por lo tanto probamos que $2^{155} - 1$ es divisible por 31^2

16. Probar que $2^{155} - 1$ es divisible por 31^2

Demostración

$(2^{155} - 1) \div 31^2 = k$ (entero)

$2^{155} = (2^5)^{31}$ y $31 = 2^5 - 1$

$$\therefore \text{ se tendrá que: } \frac{(2^5)^{31} - 1}{(2^5 - 1)(2^5 - 1)} = K$$

Se puede notar que $(2^5)^{31} - 1$ es divisible por $2^5 - 1$, siendo entonces por cociente:

$$(2^5)^{30} + (2^5)^{29} + \ldots 2^5 + 1$$

Para llegar a la tesis, necesitamos probar que este cociente es divisible por $2^5 - 1 = 31$ si en cada sumando tenemos en cuenta que $2^5 = 31 + 1$ se tendrá que:

$$(2^5)^{30} + (2^5)^{29} + \ldots + 2^5 + 1 = (\overline{31} + 1)^{30} + (\overline{31} + 1)^{29} + \ldots + \overline{31} + 1 + 1 = \overline{31} + 31 \text{ veces } 1.$$

$$\therefore (2^5)^{30} + (2^5)^{29} + \ldots + 2^5 + 1 = \overline{31}$$

Por lo tanto probamos que $2^{155} - 1$ es divisible por 31^2.

17. ¿Cuál es la mayor cantidad de viernes 13 que se pueden presentar en un año común (365 días)?

Solución

Se calculan los días que existen del 1º de enero al 13 de cada mes, como podemos apreciar en el siguiente gráfico:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
$=\dot{7}+6$	$=\dot{7}+2$	$=\dot{7}+2$	$=\dot{7}+5$	$=\dot{7}$	$=\dot{7}+3$	$=\dot{7}+5$	$=\dot{7}+1$	$=\dot{7}+4$	$=\dot{7}+6$	$=\dot{7}+2$	$=\dot{7}+1$

Los días transcurridos del 1º de enero al 13 de cada mes, se divide entre 7 para determinar el número de semanas transcurridas (o semanas y fracción), luego se observa cual de las multiplicidades se repite con mayor frecuencia (en este caso: $\dot{7}+2$ se repite 3 veces) y esta representará la mayor cantidad posible de viernes 13

Rpta. 13 de febrero, 13 de marzo y 13 de noviembre

18. ¿Qué día de la semana caerá el 24 de Diciembre del año 2000?

Solución

Contando los días desde el 24 de diciembre de 1992 (jueves) hasta el 24 de Diciembre de 1992 (considerando que hay 2 años bisiestos (1996 y 2000) tenemos:

$2 \times 366 + 6 \times 365 = 2922$ días

Como cada 7 días a partir del 24 de diciembre de 1992 caerá jueves:

$2922 = \dot{7}+3$ (jueves + 3 días siguientes)

Rpta. ∴ Caerá Domingo

PROBLEMAS PROPUESTOS

sobre divisibilidad

1. Hallar "a" en: $\overline{a4a4a} = \dot{8}$

   a) 2 b) 9 c) 8 d) 6 e) 10

2. Hallar en "a" en: $\overline{5a2a6} = \dot{7}$

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

3. Calcular "a" en: $\overline{4aa13} = \dot{9}$

a) 2 b) 5 c) 3 d) 4 e) 6

4. Hallar "a" en: $\overline{a17a0} = \dot{125}$

a) 3 b) 2 c) 5 d) 6 e) 7

5. Sabiendo que:

$\overline{abc} = \dot{5}$, $\overline{bca} = \dot{4}$, $\overline{cab} = \dot{7}$

Hallar: a + b + c

a) 12 b) 14 c) 16 d) 20 e) 22

6. Hallar a + b en $\overline{abc(b-6)} = \dot{44}$

a) 10 b) 11 c) 8 d) 13 e) 14

7. Si $\overline{abc} = \dot{9}$, $\overline{bac} = \dot{5}$ y $\overline{ca} = \dot{8}$. Hallar (a . b . c).

a) 0 b) 24 c) 120 d) 210 e) 240

8. Hallar a x b en: $\overline{2a42b} = \dot{72}$

a) 6 b) 8 c) 12 d) 15 e)24

9. Calcular a x b si: $\overline{a95b} = \dot{88}$

a) 10 b) 14 c) 18 d) 16 d) 12

10. Calcular b en: $\overline{7ab4a} = \dot{77}$

a) 8 b) 6 c) 4 d) 3 e) 2

11. Calcular a + b en: $\overline{89a46b} = \dot{56}$

a) 9 b) 6 c) 4 d) 5 e) 7

12. Si: $\overline{abba} = \dot{63}$, hallar a . b

a) 7 b) 9 c) 14 d) 8 e) 12

13. Hallar: $b^2 - a^2$, si: $\overline{30ab60} = \dot{99}$

a) 81 b) 9 c) 20 d) 16 e)1 5

14. Hallar a + b + c, si: $\overline{6ab98c} = \dot{504}$

a) 9 b) 10 c) 17 d) 13 e) 12

15. Cuál es el mayor número de tres cifras que es igual a 27 veces la suma de sus cifras? Dar como respuesta la cifra de las decenas de dicho número.

a) 9 b) 8 c) 7 d) 4 e) 2

16. Hallar la suma del menor y mayor número de la forma $\overline{a26b}$ que son múltiplos de 11

a) 6534 b) 9944 c) 9834 d) 9504 e) 10527

17. ¿Cuál es la máxima diferencia entre a y b si: $\overline{a4a2b} = \dot{71}$?

a) 7 b) 5 c) 8 d) 2 e) 4

18. Hallar el mayor valor de a + b si: $\overline{7a2ab} = \dot{13}$

a) 18 b) 10 c) 9 d) 14 e) 12

19 Sabiendo que b - c = 6 y que $\overline{abc4} = \dot{8}$. Hallar el residuo de dividir $\overline{accb}$ entre 8

a) 0 b) 6 c) 3 d) 4 e) 2

20 Si $C^oA\ (\overline{aaaa}) = \dot{7}$

Hallar "a"

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

21 Hallar el número de 3 cifras consecutivas crecientes que sea divisible por 7. Su cifra de decenas es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

22. Cuántos valores pueden tomar "a" si: $\overline{97a63b} = \dot{13}$

a) 4 b) 5 C) 6 d) 7 e) 8

23. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras múltiplos de 125 hay?

a) 7 b) 8 c) 4 d) 5 e) 6

24. Hallar a x b si: $\overline{34a693b} = \dot{63}$

a) 48 b) 28 c) 4 d) 0 e) 30

25. Si: $\overline{ab62} = \dot{61}$. Hallar a + b.(Dé una de las dos soluciones)

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

26. Cuántos números de la forma $\overline{9abb}$ son múltiplos de 68

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

27. Si: $\overline{aa75b} = \dot{56}$. Hallar a ÷ b

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

28. Cuál será el mayor número primero del cual es múltiplo la suma de $\overline{abcd}$, $\overline{cadc}$, $\overline{bcba}$ y $\overline{ddab}$?

a) 11 b) 91 c) 37 d) 101 e) 13

29. Teniendo en cuenta que $\overline{a0ab} = \dot{47}$. Hallar a - b

a) 1 b) 5 c) 3 d) 6 e) 2

30. ¿Cuál es la máxima diferencia entre "a" y "b" si: $\overline{a4a2b} = \dot{71}$?

a) 7 b) 8 c) 2 d) 5 e) 1

31. Hallar a x b, si: $C^0A\ \overline{(5a6b7)} = \overline{\div 77}$

a) 20 b) 16 c) 21 d) 24 e) 25

32. Hallar el menor valor que debe tomar "c" si: $\overline{95c92d} = \overline{\div 37}$

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) No existe ningún valor.

33. ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras son divisibles por 5 y por 3 a la vez.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

34. Sabiendo que $\overline{abc837} = \overline{\div 8} + 5$. ¿Cuál de los siguientes valores puede ser el residuo de dividir abc entre 36.

a) 26 b) 8 c) 7 d) 4 e) 22

35. Hallar el resto de dividir entre 13 el mayor número de la forma $\overline{1a3b4}$ sabiendo que:

$C^0A\ \overline{(1a3b4)} = \overline{\div 77}$

a) 1 b) 8 c) 9 d) 11 e) 12

36. Cuantos números de la forma $\overline{4abc4}$ son múltiplos de 19

a) 45 b) 46 c) 47 d) 48 e) 49

37. Si: $\overline{ababab} = \overline{\div x}$ ¿Cuál es el mayor valor de x sabiendo que es un módulo simple

a) 3 b) 7 c) 13 d) 37 e) 4

38. Hallar el valor de x para que $E = 364^{227^{\overline{42x}}} - x = \overline{\div 9}$. Dar la menor solución.

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

39. La suma de las cifras de un número es 75. Si este es lo menor posible, siempre será un múltiplo de:

a) 17 b) 23 c) 7 d) 9 e) 25

40. Hallar cuántos números $\dot{8} + 6$ de 3 cifras existen, que multiplicados por 13 de un $\dot{36} + 10$

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) N.A.

41. Si $N = \dot{500} + 13y$

$N^2 = \overline{(b+1)(a+1)(a+3)(b+1)aabc}$. Hallar la suma de las cifras de N

a) 16 b)18 c) 17 d) 20 e) 19

42. Determinar $\overline{xy} = \dot{7}$ si se cumple:

$\overline{6x8}^{\overline{xy}} + 7^{\overline{xy}} = \dot{42} + (x+y)$

a) 21 b) 35 c) 49 d)72 e)14

43. ¿Cuántos valores puede tomar "n" sabiendo que:

$\overline{n,oo\underbrace{.....oo}_{\text{"n" cifras}}} = \dot{11} + 6$, $n \in N$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

44. Si $\overline{xyyx} = \dot{13}$ y se sabe que $\overline{yzyzx} = \dot{15}$. Hallar la suma de los valores que puede tomar z.

a) 12 b) 10 c) 15 d) 8 e) 11

45. Si se tiene que: $\overline{xyxz} = \dot{77}$ y que $x + y = 9$, entonces $\overline{zy}$ es:

a) $\dot{11}$ b) $\dot{15}$ c) $\dot{7}$ d) $\dot{9}$ e) $\dot{13}$

46. Hallar m + n a partir de:

$$\overline{m0(2m)n} = \dot{61}$$

a) 10 b)13 c) 9 d) 11 e) 12

47. Si se tienen las siguientes proposiciones:

I) $n^3 - n = \mathring{3}$

II) $(m^2 + 3m)(m^2 + 3m + 2) = \dot{4}$

III) $p(p + 1)(2p + 1) = \dot{6}$

Se cumplen:

a) Sólo I b) I y III c) I y II d) Sólo III e) Todas.

48. Si $Q = B^2(A + C^2) - ABC + A^3BC^2$ y $A = \dot{9} + 5, B = \dot{9} - 2, C = \dot{9} + 4$, hallar que residuo se obtiene al dividir Q entre 3.

a) 0 b) 1 c) 3 d) 6 e) 2

49. Si $\overline{aba} = n(a + b)$ y $n = \dot{7} + 4$. Hallar "n" si $(a + b)$ es lo menor posible.

a) 81 b) 74 c) 88 d) 95 e) 67

50. Si: $N = \overline{1234ab} = \dot{72}$. La suma de todos los posibles valores de "a" y "b" es:

a) 13 b) 34 c) 8 d)14 e) 16

51. Hallar la suma de todos los valores de "q" en la siguiente igualdad:

$$\overline{21pqp1} = \dot{53}$$

a) 25 b) 23 c) 35 d) 28 e) 34

52. Si: $\overline{12b(a-b)a1} = \dot{23}$. Hallar el mayor valor de a + b

a) 9 b) 10 c) 14 d) 13 e) 15

53. Si $\overline{aboba} = \dot{19}$ ¿Cuántas soluciones se obtienen?

a) 1 b)2 c) 4 e) 5 e) Más de 5.

54. Hallar "b" sabiendo que $\overline{abcc} = \dot{23}$ y $c + a + b = 10$

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

55. ¿Cuántos números capicuas de 4 cifras son $\dot{37}$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 5

56. Se tiene que: $\overline{aba} = \dot{25}$ y $\overline{bab} = \dot{9}$

¿Cuál de los siguientes números primos es a + b?

a) 31 b) 19 c) 37 d) 13 e) 43

57. Si se sabe que:

$$\overline{a(ma)m} = \dot{11}$$

Entonces $\overline{xmax}$ es:

a) $\dot{11}$ b) $\dot{11}-1$ e) $\dot{11}-2$ d) $\dot{11}-4$ e) $\dot{11}-3$

58. Hallar la mayor suma a + b si: $\overline{a8ab} = \dot{63}$

a) 15 b) 14 c) 10 d) 12 e) 13

59. Si $\overline{2a2}_{(5)} = \dot{4}$ ¿Cuántos valores puede tomar "a" ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) N.A.

60. ¿Qué requisito debe cumplir el número $\overline{abcd}$ para que sea divisible por 6 ?

a) $d = \dot{2}$ b) $a+b+c+d = \dot{3}$ c) $4(a+b+c+d) = \dot{6}$

d) $4(a+b+c)+d = \dot{6}$ e) $a+b+c+d = \dot{6}$

61. Si: $\overline{388ab22} = \dot{97}$ ¿Cuál es el valor de a + b ?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

62. Se convierte 7^{8351} al sistema quinario. ¿En que cifra terminará en tal sistema?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

63. Si N = $\overline{1xxy} = \dot{59}$. Hallar la suma de los valores de N dividido entre 59.

a) 59 b) 49 c) 47 d) 79 e) Ninguna Anterior.

64. Si se tiene que: $\overline{abc} = \overline{13}$ y además que:

$$\overline{(2c)(2a)bc} = \dot{7}$$

Entonces debe cumplirse que:

a) $c = 3b + 4a$ para por lo menos 2 valores de a.

b) $a + b + c = \overline{91}$

65. Si se cumple que $\overline{97388ab22}$ es divisible entre 97. Cuál es el valor de $a + b$?

a) 7 b) 6 c) 5 d) 9 e) 10

66. El complemento aritmético de un número de 37 cifras es un $\overline{11} + 5$. El número será:

a) $\overline{11} + 7$ b) $\overline{11} + 3$ c) $\overline{11} + 5$ d) $\overline{11} + 6$ e) No se puede determinar.

67. Determinar cuántos números de 3 cifras son $\dot{5}$ pero no son $\dot{2}$ ni $\dot{3}$.

a) 120 b) 60 c) 180 d) 150 e) 80

68. En los 840 primeros números naturales ¿Cuántos números $\dot{2}$ existen que no sean $\dot{4}$ ni $\dot{7}$

a) 180 b) 360 c) 280 d) 380 e) 390

69. Cuántos números de 3 cifras son $\dot{3}$ o de $\dot{4}$ pero no $\overline{12}$.

a) 425 b) 144 c) 288 d) 375 e) 350

70. Cuántos números de 3 cifras son $\dot{2}$ y $\dot{3}$, pero no $\dot{5}$

a) 60 b) 18 c) 45 d) 36 e) N.A.

71. Determinar a x b, si: $\overline{6ab98c} = \overline{504}$

a) 18 b) 16 c) 14 d) 12 e) Ninguna anterior.

72. Determinar un número de 5 cifras, tal que sea igual al producto de sus 5 cifras por 45 (Dar como respuesta, la suma de sus cifras.

a) 20 b) 23 c) 27 d) 32 e) Ninguna anterior

73. Un depósito de licores recibió seis barriles de cerveza, cuyos contenidos eran: 15, 16, 18, 19, 20 y 31 litros. El primer día se presentaron dos clientes: uno compró dos barriles y el otro tres, con la particularidad de que el segundo compró la mitad de litros que compró el primero. Si no hubo que destapar ningún barril al momento de venderlos. ¿Cuál era la capacidad del barril que no se vendió?

a) 16 b) 18 c) 19 d) 20 d) 31

74. Hallar un número de 4 cifras divisibles por 4 y tal que si se divide entre 25, 11 y 9 los residuos son 17, 3 y 2 respectivamente. Dar como respuesta la suma de las cifras del número.

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

75. Para $a = \dot{7}$ y $b = \dot{11}$, teniendo en cuenta que $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$; la expresión:

$(a+1)(a-1) - (b+1)(b-1)$ no siempre es:

a) $\dot{49}$ b) $\dot{121}$ c) $\dot{385}$ d) $\dot{77}$ e) $\dot{25}$

76. Si: $\overline{a4a}^{\overline{a4a}} = \dot{5}+1$. ¿Cuántos valores pueden tomar "a" ?

a) 2 b) 4 c) 3 d) 5 e) 7

77. ¿Cuántos números de la forma $\overline{a3b7c1}$ son múltiplos de 9 ?

a) 990 b) 900 c) 90 d) 99 e) 100

78. Si: $\overline{7b6b3b} = \dot{13}$. ¿Cuántos valores puede tomar "b" ?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 10

79. Al número $\overline{abc}$ que es $\dot{11}+6$. ¿Cuál es el menor número de veces que tengo que sumar $\overline{cba}$ para estar seguro de obtener un $\dot{11}+2$

a) 4 b) 5 c) 6 d) 2 e) 3

80. Si C° A de $\overline{67b8}$ es $\dot{9}$. Hallar "b"

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) N.A.

81. Hallar un número de 3 cifras $\dot{7}$ que al añadirle una unidad se convierte en 8 y añadirle otra después se obtiene un 9 (Dar como respuesta la suma de las cifras del número).

a) 9 b) 7 c) 20 d) 19 e) 21

82. Si $N = \dot{7} + 3$ y $4N = \dot{15} + 13$. Hallar la suma de sus cifras del menor.

a) 13 b) 7 c) 9 d) 11 e) 5

83. Un número de la forma $\overline{a3b}$, múltiplo de 11, es tal que al invertir el orden de sus cifras disminuye en 297; luego el valor de la cifra "a" es:

a) 3 b) 9 c) 6 d) 8 e) 7

84. Un número es múltiplo de $\dot{37}$ cuando restando "n" veces la última cifra de un número formado por las cifras restantes, el resultado es $\dot{37}$. Dar el residuo de "n" entre 6.

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

85. ¿Cuántos números $N = \overline{mcdu}$ existen tales que: $\overline{du} - \overline{mc} = 39$ y que sean $\dot{31}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 6

86. Si $\overline{abcd} = \dot{19}$ y $\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 1)$. Hallar $a + b + c + d$

a) 15 b) 14 c) 13 d) 12 d) 11

87. Si $\overline{abcd} = \dot{13}$, además $\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 2)$. Hallar $a + b + c + d$

a) 18 b) 19 c) 17 d) 24 e) 23

88. Si $\overline{abcd} = \dot{17}$ y $\overline{cd} = 4x\overline{ab} + 3$. Hallar $a + b + c + d$

a) 16 b) 18 c) 12 d) 20 e) N.A.

89. Sabiendo que $\overline{2abc} = \dot{17} + 14$. ¿Cuánto se le debe sumar a $\overline{abc2}$ para que sea $\dot{17}$.

a) 6 b) 8 c) 12 d) 14 e) N.A.

90. Cuántos números de la forma $\overline{mcdu} = 23$ y además $\overline{du} = \overline{mc} + 9$ existen ?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 4

91. Si: $\overline{aboab} = \dot{22}\dot{1}$. Hallar los valores de "b" e indicar su suma.

a) 20 b) 32 c) 30 d) 25 e) Ninguna Anterior.

92. Indicar la suma de menor y mayor número de la forma $\overline{ab888}$ que sean múltiplos de 19 más 11.

a) 105,776 b) 100,125 c) 130,125 d) 105,104 e) Ninguna Anterior.

93. Hallar el resto de dividir E ÷ 8, siendo $E = 7^{100} + 7^{99} \times 3 + 7^{98} \times 3^2 + ... + 7 \times 3^{99} + 3^{100}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 4

94. Hallar el residuo de:

$$\underbrace{[848\ abc\ abc\ abc.....]^{\overline{abc}}}_{87\ cifras}$$ entre 7

a) 1 b) 2 c) 3 d)4 e) Ninguna Anterior.

95. Diga cual es el residuo al dividir la siguiente suma:

$\in = 2^{6n+3} + 9^k \times 4^4$

entre 7

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

96. Para "n" entero y positivo la expresión:

$N = 7^{2n+1} + 2 \times 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$, es múltiplo de:

a) 37 b) 41 c) 50 d) 99 e) Ninguna anterior.

97. Hallar el mínimo valor de $\overline{abc}$ si se cumple $65^{\overline{abc}} = \dot{\overline{9}} + 1$

(Dar como respuesta a x c).

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Ninguna anterior.

98. Hallar el residuo por exceso de la división de E entre 13, si:

$$E = 7 \times 298^{299} + 3 \times 999^{300} + 5$$

a) -1 b) -3 c) -8 d) -5 e) Ninguna anterior.

99. Si: $6^{\overline{aab}} = \overline{11} + 11$. Hallar "b"

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) N.A.

100. Hallar el residuo de la siguiente división $7^{(4k+1)} \div 5$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e)0

101. Hallar la suma de los valores que puede tomar "a" si: $\overline{ab54}_{(8)} = \dot{9}$

a) 18 b) 13 c) 21 d) 20 e) N.A.

102. Hallar $(a+b)$ si : $\underbrace{\overline{2ab22ab222ab.....}}_{52 \text{ cifras}} = \dot{9}$

además $a \neq b$.

a) 5 b) 8 c) 9 d) 12 e) N.A.

103. Si: $\overline{abcab} = \dot{13}$ ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir entre 7 el número anterior?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

P 83. Demostrar que: $3^{4n} + 9 = \dot{10}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 84. Demostrar que: $4^{n+1} \cdot 3^{n+2} + 8 = \dot{22}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 85. Demostrar que: $n^3 - 7n = \dot{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 86. Demostrar que: $9^{n+1} - 8n + 55 = \dot{64}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 87. Demostrar que: $9 \times 2^{n+1} + 5^{2n+1} = \dot{23}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 88. Demostrar que: $2 \times 7 \times 5^{2n} + 3 \times 2^{3n} = \dot{17}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 89. Demostrar que: $4^{n+1} + 60n + 32 = \dot{36}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 90. Demostrar que: $2 \times 16^{n+2} - 30n - 62 = \dot{450}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 91. Demostrar que: $(2n-1)^5 - (2n-1) = \dot{240}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 92. Demostrar que: $7(7^{2n} - 1) + 240n = \dot{288}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

P 93. Demostrar que: $64^n \cdot 25^n - (81 \cdot 2^5)^n = \dot{\overline{992}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 94. Demostrar que: $8120n^3 + (135497^{44^{73}} - 4)\, n = \dot{\overline{7}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 95. Demostrar que: $9^{3n} - 8^{2n} = \dot{\overline{665}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 96 Demostrar que: $2^{12n+7} - 3^{4n+3} - 1 = \dot{\overline{100}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 97 Demostrar que: $3^{2n+3} + 40n - 27 = \dot{\overline{64}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 98. Demostrar que: $2^{2n+5} + 3^n + 1 = \dot{\overline{11}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 99. Demostrar que: $2^n \cdot 3^{2n+3} + 7 = \dot{\overline{17}}, \forall n \in \mathbb{N}$

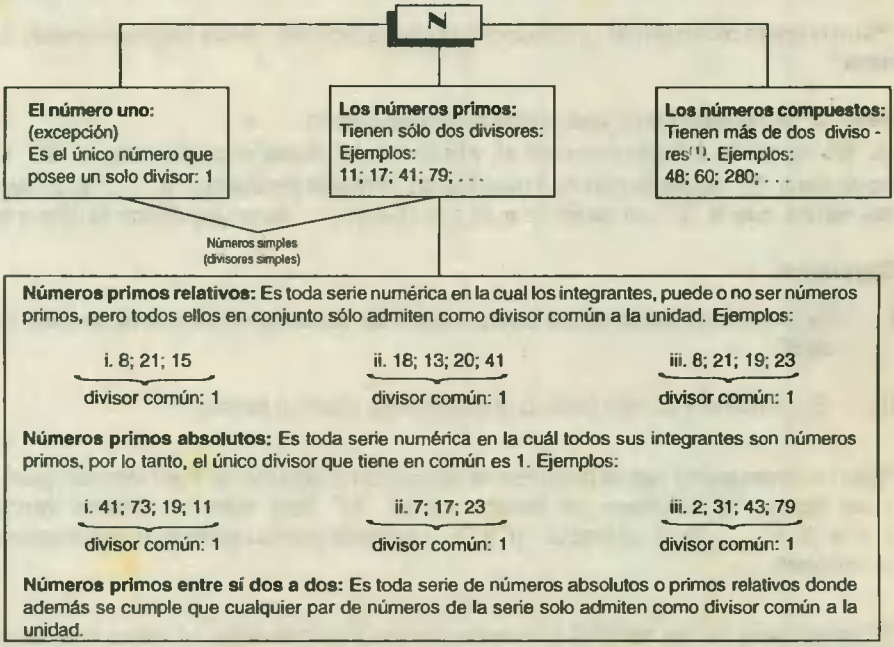
P 100. Demostrar que: $2^{2n+5} \cdot 5^n + 6 = \dot{\overline{19}}, \forall n \in \mathbb{N}$

P 101. Demostrar que: $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = \dot{\overline{9}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Capítulo 8

TEORIA DE LOS NUMEROS PRIMOS

Los números naturales (exceptuando al cero) atendiendo a la cantidad de divisiones que poseen, se clasifican en tres grupos: El número 1; los números primos y los números compuestos.



(1): Se pueden descomponer en un producto de factores primos y además, de modo único, si no se tiene en cuenta el orden de los factores.

Se llama divisor elemental de un número, a su menor divisor diferente de 1.

Propiedad de los números primos

1. "Si un número es primo absoluto, es primo relativo con todos los números que no son múltiplos suyos".
   En efecto, si "p" es primo, sus divisores son "p" y "1" ; si "q" no es divisible por "p" el único divisor común que puede tener es el 1.

   Corolario:

   "Un número simple es primo con todos los números menores que él.

2. "El divisor **elemental** de un número cualquiera es primo".

   En efecto, si el número es primo su divisor elemental es él mismo y la propiedad es evidente.

   Si es compuesto, su divisor elemental "d" es necesariamente primo, pues si admitiese el divisor "d" mayor que 1 y menor que "d", lo que es imposible ya que por definición un número no puede tener un divisor menor que su divisor elemental.

   La propiedad demostrada equivale a esta otra: " todo número tiene un divisor primo".

3. "Si un número primo divide un producto de varios factores, divide necesariamente a uno de ellos".

   Sea "p" el número primo que divide al producto abcd . . . k.
   Si "p" no divide **a** a es primo con él, y por lo tanto, divide al producto b . c . d . . k; si "p" no divide a "b" es primo con él, y por lo tanto, divide al producto c. d. ..... .k; prosiguiendo así resulta que si "p" no divide a: **a**, ni a **b**, ni a **c**, . . ., tiene que dividir al último factor k.

   Corolario:

   I. "Si un número primo divide a un producto de varios factores primos es igual a uno de ellos".

   II. "Si un número primo divide a una potencia, divide a la base".

4. "Si un número primo con el producto es primo con cada uno de sus factores" pues si "p" y un factor "b" tuviesen un divisor común "k" éste número dividiría también a n = a . b . c. ..... . h y entonces "p" y "n" no serían primos entre sí, en contradicción con la hipótesis.

5. "Si un número "n" es divisible por varios números primos entre sí dos a dos, es divisible por su producto".

Corolario:

"Si un número es divisible por varios números primos, es divisible por su producto".

6. "Todo número compuesto, se puede expresar como un producto de factores primos". Consideremos que sea "C" un número compuesto. Sea "**a**" el divisor elemental de C.

se puede escribir:

$$C = an_1 \quad \text{.....(1)}$$

si n_1 es primo la propiedad queda demostrada, pero si es compuesto se tiene a su vez:

$$n_1 = bn_2$$

siendo "b" el divisor elemental de n_1; sustituyendo en (1) resulta:

$$C = abn_2$$

y si n_2 no es primo, admite un factor primo "**c**":

$$n_2 = cn_3$$

luego:

$$C = a\,b\,c\,n_3$$

y así se continua hasta que el número n_i sea primo, lo que no puede dejar de ocurrir pues siendo los números $n_1, n_2, n_3 \ldots, n_i$ decrecientes, es decir, $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > n_i > 1$ el conjunto de ellos esta comprendido entre n_1 y la unidad y, por lo tanto, es finito, no pudiendo suceder que la operación anterior se prolongue indefinidamente.

Cuando un número se escribe en esta forma, se dice que se ha descompuesto en el producto de sus factores primos.

Pude ocurrir que algunos factores sean iguales, por lo que la expresión general de un número compuesto mediante sus factores primos es:

$$C = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\chi} \cdot \ldots\ldots \cdot h^{\lambda}$$

que también se llama forma canónica del número C, donde: $\alpha, \beta, \chi, \ldots\ldots\lambda$ son los exponentes de los factores primos: a, b, c, . . . , h.

Ejemplo

Descomponer 270 en factores primos (simples)

Como 270 es divisible por 2 se tiene:

$$270 = 2 \times 135$$

a su vez: $135 = 3 \times 45$

luego: $270 = 2 \times 3 \times 45$

y como: $45 = 3 \times 15$

se tiene: $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 15$

pero: $15 = 3 \times 5$

luego: $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

y por último: $270 = 2 \times 3^3 \times 5$, conclusión ésta, a la que se puede llegar aplicando la siguiente disposición práctica:

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

7. "Si "a" y "b" son números primos, entre sí, se cumple que (a + b) y a x b son primos entre sí"

En efecto, si (a + b) y a . b no fuesen primos entre sí, admitirían un factor primo común mayor que la unidad. Este factor primo tendría que dividir a uno de los factores del producto a x b y como también es factor de la suma (a + b), dividiría igualmente al otro factor. Así, los números "a" y "b" no sería primos entre sí, lo que es contrario a la hipótesis. Luego (a + b) y a . b son primos entre sí:

Teorema (α): Si un número no es primo, el menor divisor suyo distinto de la unidad es primo.

Consecuencia: Todo número no primo, admite por lo menos, un divisor primo.

Teorema: Si varios números no son primos entre si, admiten por lo menos un divisor primo común.
En efecto, si consideramos que A, B, C, E, no son primos entre sí, M.C.D. (A, B, C, E) = d > 1

Si d es primo, queda demostrado el teorema, y si no lo fuese, según la consecuencia anterior, d admitiría por lo menos un divisor h primo, que por dividir a d, sería divisor común de A, B, C, E que son d.

Teorema: La serie de los números primos, es ilimitada.

Debemos probar que: si p es primo, por grande que sea p, siempre existe otro número primo mayor que p.

En efecto, haciendo el producto ◧ de todos los números primos iguales o menores que p:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p = ◧$$

$\blacksquare$ es un número par superior a 2 y no es primo.

$\blacksquare + 1$, es impar y puede ocurrir que sea primo o que no lo sea. Si $\blacksquare + 1$ es primo, $\blacksquare + 1 > \blacksquare > p$; ya hay un número primo mayor que p que es $\blacksquare + 1$, y si no es primo, según consecuencia del teorema (α), admitirá un divisor primo que no puede ser ni p, ni menor que p, pues al dividir $\blacksquare$ por estos números primos que son divisores suyos, los restos de las divisiones son todos ceros, y si al dividendo $\blacksquare$ le aumentamos una unidad, los restos serán ahora todos 1, si $\blacksquare + 1$ admite un divisor primo d y éste no es ni 2, ni 3, ni 5, . . . ni p, tendrá que ser $d > p$.
Luego existe un número primo que p; o bien $\blacksquare + 1$ si es primo, o cualquier divisor primo de $\blacksquare + 1$, si $\blacksquare + 1$ no fuese primo.

Método para reconocer si un número es o no primo:

i. Se extrae la raíz cuadrada por exceso del número.
ii. Se divide el número entre todos los números primos menores o iguales que su raíz cuadrada por exceso y si ninguna de las divisiones resulta exacta, el número es primo.

Aplicación: Determinar si 97 es o no número primo.

i. $\sqrt{97} \cong 10$
ii. $97 \div \{ 2; 3; 5; 7 \}$

Como 97 no contiene exactamente a ningún número primo menor o igual que su raíz cuadrada por exceso:

Entonces 97 es número primo.

Método para determinar los números primos comprendidos en una serie natural:

Criba de Eratóstenes[2]:

Como no existe una fórmula que comprenda todos los números primos, podemos aplicar una técnica para hallar los números primos menores que un número natural $n > 1$ es la llamada Criba de Eratóstenes.

Esta técnica tiene mucha utilidad cuando el número "n" es relativamente pequeño y consiste en escribir la serie natural hasta "n" para después pasarlos a la criba (tabla) o cedazo mediante el siguiente procedimiento:

i. Se escribe la serie natural hasta "n" (consideremos $n = 100$) y construyamos la tabla del 1 al 100 (en este caso resulta práctico escribir 10 cifras como sigue):

---

[2] Eratóstenes fue un astrónomo, filósofo y matemático griego, oriundo de CIRENE. Dirigió la biblioteca de Alejandría e ideó un método para reconocer si un número es primo. También cálculo el diámetro del sol y la distancia entre este y la tierra. Murió en Alejandría en el año 194 a de c.

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	㉓	24	25	26	27	28	㉙	30
㉛	32	33	34	35	36	㊲	38	39	40
㊶	42	㊸	44	45	46	㊼	48	49	50
51	52	㊸	54	55	56	57	58	㊾	60
㊶	62	63	64	65	66	㊼	68	69	70
㊶	72	㊸	74	75	76	77	78	㊾	80
81	82	㊸	84	85	86	87	88	㊾	90
91	92	93	94	95	96	㊼	98	99	100

Criba de Eratóstenes

ii. Se tacha el número 1 porque no es primo. El primer número primo es 2.

iii. Identificado el primer primo 2, se tachan todos los $\dot{\overline{2}}$ desde 2^2 (se elimina la mitad de la serie).

Después de tachar los $\dot{\overline{2}}$, el número inmediato superior a 2 que este sin tachar es el siguiente primo, en este caso 3.

iv. Se procede a tachar los $\dot{\overline{3}}$ desde 3^2

v. El inmediato superior a 3 que esté sin tachar es el siguiente primo en este caso 5 y se repite el proceso hasta el momento en que el cuadrado del número primo sea mayor que el mayor elemento de la serie. En ese momento, se detiene el proceso y se puede asegurar que todos los números que están sin tachar son los números primos comprendidos dentro de la serie propuesta. En nuestro ejemplo se debe obtener 25 números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97;

Teorema de Arquímedes: "Si un número entero positivo divide al producto de otros dos enteros y no tiene divisores comunes con uno de ellos a parte de la unidad, entonces divide al otro".

Demostración: Si: $n \in \mathbb{Z}^+$ y "n" divide al producto $A \cdot B \Rightarrow A \cdot B = \dot{\overline{n}}$
Consideremos que A no tiene factores comunes con "n" a parte de la unidad, entonces B contiene a los divisores de "n" $\therefore B = \dot{\overline{n}}$

Ejemplos: Si: $27 \cdot N = \dot{\overline{49}} \Rightarrow N = \dot{\overline{49}}$ porque 27 y 49 no tiene factores comunes excepto la unidad.

Obtención de los divisores de un número:

Teorema: "Todo divisor debe tener factores del múltiplo con exponentes iguales o menores"

En virtud a éste teorema y considerando a $\mathbb{N}$ un número cualquiera descompuesto en factores primos:

$$\mathbb{N} = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\chi} \ldots h^{\lambda}$$

Escribamos el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & a^2 & a^3 & a^{\alpha} \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^{\beta} \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^{\chi} \\ \ldots\ldots & & & & \\ \ldots\ldots & & & & \\ 1 & h & h^2 & h^3 & h^{\lambda} \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

haciendo todos los productos que se pueden formar, de modo que entre en cada uno un elemento de cada fila, y uno solo, habremos formado todos los divisores.

REGLA PRACTICA

i. Se desarrollan todas las potencias del primer factor primo desde el exponente cero hasta el mayor (α)

$$a^{o} \quad a^{1} \quad a^2 \quad a^3 \ldots a^{\alpha} \quad \rightarrow \quad 1^{a}\text{fila}$$

Cada término de este desarrollo es un divisor de $\mathbb{N}$ y todos forman lo que llamaremos la primera fila de divisores de $\mathbb{N}$

ii. Se desarrollan todas las potencias del segundo factor, partiendo del exponente 1 hasta el mayor (β)

$$b \quad b^2 \quad b^3 \ldots \quad b^{\beta}$$

Cada término de este desarrollo se multiplica por toda la primera fila, logrando nuevas "filas" de divisores de $\mathbb{N}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc} b & ab & a^2b & a^3b & a^{\alpha}b \\ b^2 & ab^2 & a^2b^2 & a^3b^2 & a^{\alpha}b^2 \\ b^3 & ab^3 & a^2b^3 & a^3b^3 & a^{\alpha}b^3 \\ \ldots\ldots & & & & \\ \ldots\ldots & & & & \\ b^{\beta} & ab^{\beta} & a^2b^{\beta} & a^3b^{\beta} & a^{\alpha}b^{\beta} \end{array}\right] \rightarrow \text{1er grupo.}$$

Cuando se termina de trabajar con el segundo factor primo, todas las filas logradas se reunen en lo que llamaremos el primer grupo.

iii. Si el número posee un tercer factor primo, se desarrollan las potencias consecutivas desde el exponente 1 hasta el mayor exponente (χ), cada término de este desarrollo se multiplica por todo el primer grupo, logrando nuevos grupos de divisores del número $\mathbb{N}$.

Cuando se termina de trabajar con el tercer factor primo, todos los grupos que se han formado se reunen en lo que podemos llamar arbitrariamente un "Bloque"

iv. Si hubiese un cuarto factor primo, se desarrollan sus potencias del exponente 1 al mayor y cada término de este desarrollo se multiplica por el primer "Bloque" logrando nuevos "Bloques" de divisores de N y así sucesivamente.

Aplicación: Hallar todos los divisores de 2 400

$$2\,400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$$

Potencias del primer factor primo: 2^0 2^1 2^3 2^4 2^5 → 1ra. fila

Potencias del segundo factor primo: 3^1

1 2 4 8 16 32
3 6 12 24 48 96 } 1er grupo:

Potencias del tercer factor primo: 5^1 5^2

1er grupo x 5

5 10 20 40 80 160
15 30 60 120 240 480 } 2do. grupo:

1er grupo x 5^2

25 50 100 200 400 800
45 150 300 600 1200 2400 } 3er. grupo:

∴ Los divisores de 2400 serán:

1	2	4	8	16	32	} 36 divisiones
3	6	12	24	48	96	
5	10	20	40	80	160	
15	30	60	120	240	480	
25	50	100	200	400	800	
75	150	300	600	1200	2400	

Fórmula que da el número de divisores.

El número total de divisores de un número es igual al producto de los exponentes de los factores primos aumentados en 1.

Consideremos $N = a^\alpha b^\beta c^\chi \ldots l^\lambda$

Demostraremos que el número total de sus divisores es:

$$N^o\ D\ N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\chi + 1)(\lambda + 1)$$

En efecto, según hemos explicado anteriormente para hallar todos los divisores formaremos el cuadro:

$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a^{(\alpha)} \qquad (\alpha + 1)$ números
$1 \quad b \quad b^2 \quad b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b^{\beta)} \qquad (\beta + 1)$ números
$1 \quad c \quad c^2 \quad c^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c^{\chi} \qquad (\chi + 1)$ números
$1 \quad l \quad l^2 \quad l^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l^{\lambda} \qquad (\lambda + 1)$ números

Y multiplicamos los números de la primera fila por los de la segunda los resultados por los números de la tercera fila y finalmente, por los de la cuarta.

Al multiplicar los $\alpha + 1$ números de la primera fila por cada uno de los $(\beta + 1)$, números de la segunda se obtienen $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ **divisores;** al multiplicar éstos por los de la tercera el número de divisores se eleva a $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\chi + 1)$.

Por último, al hallar los productos de estos por los de la cuarta fila se obtienen $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\chi + 1)(\lambda + 1)$ divisores en total.

Aplicación: Hallar el número de divisores de 588 000

Como: $588\,000 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 7^2$

Nº D $588\,000 = (5 + 1)(1 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 144$

Suma de los divisores de un número

Si: $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\chi} l^{\lambda}$

La suma S de todos sus divisores es el valor del polinomio obtenido al efectuar el producto: $(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \ldots + b^{\beta})(1 + c + c^2 + \ldots + c^{\chi})(1 + l + l^2 + \ldots + l^{\lambda})$ pues los términos son los divisores de N. Pero las expresiones de los paréntesis son progresiones geométricas y, por consiguiente, sus sumas valen:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}, \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}, \frac{c^{\chi+1}-1}{c-1}, \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$$ respectivamente. Por lo tanto:

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\chi+1}-1}{c-1} \times \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$$

Ejemplo:

La suma de todos los divisores de 1 260 es:

$$1\,260 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

$$S = \frac{2^3-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^2-1}{5-1} \times \frac{7^2-1}{7-1} = 4\,368$$

Suma de las potencias de los divisores de un número:

Sea el número: $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\chi} l^{\lambda}$ y queremos obtener la suma de las potencias enésimas de sus divisores:

$$S = \frac{a^{n(\alpha+1)} - 1}{a^n - 1} \times \frac{b^{n(\beta+1)} - 1}{b^n - 1} \times \frac{c^{n(\chi+1)} - 1}{c^n - 1} \times \frac{l^{n(\lambda+1)}}{l^n - 1}$$

Suma de las inversas de los divisores de un número:

$$S_i = \frac{\text{Suma de todos los divisores de } N}{N}$$

Producto de los divisores de un número:

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\chi} \ldots\ldots\ldots\ldots l^{\lambda}$$

Escribamos los divisores de N en orden creciente:

$$1;\ A;\ B;\ C;\ldots\ldots;\ N \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y a continuación los divisores de N en orden decrecientes:

$$N;\ \frac{N}{A};\ \frac{N}{B};\ldots\ldots\ldots\ldots;\ A;\ 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) x (2): $[P_{(N)}]^2 = N \cdot N \cdot N \ldots N = N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\chi+1)\ldots(\lambda+1)}$

$$\therefore P_{(N)} = \sqrt{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\chi+1)\ldots\ldots\ldots(\lambda+1)}}$$

Formula que también se puede expresar como:

$$P_{(N)} = N^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\chi+1)\ldots\ldots\ldots(\lambda+1)}{2}}$$

$$P_{(N)} = N^{\frac{\text{Nº de divisores de } N}{2}}$$

Aplicación: Hallar el producto de todos los divisores de 36:

$$36 = 2^2 \times 3^2 \qquad \text{Nº } D_{36} = 3 \times 3 = 9$$

$$P_{(36)} = 36^{\frac{9}{2}} = (2^2 \times 3^2)^{\frac{9}{2}} = (6^2)^{\frac{9}{2}} = 6^9$$

Indicador (φ) de un número N

Es el número que indica la cantidad de números enteros menores que N que son primos con N ; se le designa así: φ(N)

Consideremos (N) en factores primos:

$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\chi} \ldots l^{\lambda}$, entonces:

$$\varphi_{(N)} = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\chi-1} \ldots l^{\lambda-1} (a - 1)(b - 1)(c - 1) \ldots (l - 1)$$

Cuántos números menores que 360 son primos con 360 ?

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\varphi(360) = 2^2 \times 3 \times 5^0 (2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) = 96 \text{ números}$$

Números simples: Son aquellos que no son compuestos, es decir los números primos y el número uno.

Número perfecto: Es aquel cuya suma de divisores es igual al doble de dicho número. Ejemplo: 28 es un número perfecto porque la suma de sus divisores: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 2 \times 28 = 56$

Existe una fórmula para hallar los números perfectos pares:

$$\text{Nº. perfecto par} = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

en la que es condición necesaria pero no suficiente que p sea primo, y necesaria y suficiente que lo sea $2^p - 1$

Número defectuoso: Es aquel cuya suma de divisores es menor que el doble de dicho número. Ejemplo 15 es número defectuoso ya que:

$$1 + 3 + 5 + 15 < 2 \times 15$$

Número abundante: Es aquel cuya suma de divisores es mayor que el doble de dicho número. Ejemplo el número 30 es abundante ya que:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 > 2 \times 30$$
$$72 > 60$$

Número saturado: Son los menores números enteros con el mayor número posible d divisores; es decir que un número saturado tiene más divisores que cualquier otro número menor que él.

Ejemplo: 60 es un número saturado; tiene 12 divisores y ningún número menor que 60 tiene tantos.

Números amigos: Dos números son amigos cuando cada uno es igual a la suma de los divisores del otro excepto él.

Fórmula para calcular dos números amigos:

$$N_1 = 2^x [(2^z + 1)^2 . 2^{2x-z} - 1]$$

$$N_2 = 2^x (2^x - 1 + 2^{x-z})(2^x - 1 + 2^{x+z})$$

Siendo $x < z$ y primos los tres paréntesis y en consecuencia z. para $z = 1$, $x = 2$, se obtiene $N_1 = 284$, $N_2 = 220$ que son dos números amigos.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE NUMEROS PRIMOS.

OBSERVACIONES PREVIAS

* Siempre que nos pidan calcular el valor de un exponente en un problema sobre números primos, lo más aconsejable es aplicar la fórmula que nos da el número de divisores.
* Debemos recordar que en estos problemas siempre recurriremos a la descomposición del número en producto de sus factores primos.

1. Si "m" y "n" son dos números que se diferencian en 5 y se cumple que el número $(7^m + 7^n)$ tiene 288 divisiones. Hallar el mayor entre "m" y "n".

Solución

Como: $m - n = 5$ ..... (1)
descomponiendo en factores primos al número $(7m + 7^n)$:

$$7^m + 7^n = 7^{n+5} + 7^n = 7^n (7^5 + 1) = 7^n \times 16808 = 7^n \times 2^3 \times 11 \times 191$$

$$\therefore N^o D (7^m + 7^n) = (n + 1)(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 288$$
$$n + 1 = 18$$
$$n = 17 \wedge m = 22$$

Rpta. El mayor $m = 22$

2. Se construye la tabla de divisores de un número, y se observa que es de 3 cifras por 3 columnas y que la suma de los elementos de la diagonal que contiene a 1 es 6007; hallar la suma de los divisores del número.

Solución

Sea $N = a^2 . b^2$ el número.

Sus divisores:

1	a	a^2
b	ab	a^2b
b^2	ab^2	a^2b^2

Por dato:

$a^2b^2 + ab + 1 = 6\,007$

$(a \times b)(a \times b + 1) = 6\,006$

* Cuando se tiene el producto de dos números consecutivos, la raíz cuadrada por defecto da el menor, luego:

$a . b = 77 = 7 . 11 \quad \therefore \quad N = 7^2 . 11^2$

Rpta. $\therefore \quad SD_N = (1 + 7 + 49)(1 + 11 + 121) = 7\,581$

3. Utilizando la Criba de Eratóstenes, hallar la suma de los números primos comprendidos entre 200 y 240

Solución

201	203	207	209
211	213	217	219
221	223	227	229
231	233	237	239

Rpta. $\therefore$ La suma: $S = 211 + 223 + 233 + 227 + 229 + 239 = 1\,362$

4. Se construye la Tabla de divisores de un número, que sólo tiene 2 factores primos, resulta ser una Tabla de 4 x 3 (4 filas, 3 columnas). Determinar la suma de divisores del número sabiendo que el cociente del mayor elemento de la 4º fila entre el menor elemento de la 4ta fila entre el menor de la 3ra. fila es 175.

Solución

Construyendo la tabla de divisores de N

	1	a	a^2
1	1	a	a^2
b	b	ab	a^2b
b^2	b^2	ab^2	a^2b^2
b^3	b^3	ab^3	a^2b^3

Por datos:

$$\frac{a^2 b^3}{b^2} = 175$$

$a^2 \times b = 5^2 \times 7$

$a = 5, \quad b = 7$

$N = 5^2 \times 7^3$

$$S_{div} = \frac{5^3 - 1}{b - 1} \times \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 12\,400$$

Rpta. 12,400

6. Hallar cuántos números de 3 cifras del sistema quinario son números compuestos.

Solución

El menor número de tres cifras en base cinco es: $100_{(5)} = 25$

El mayor número de tres cifras en base cinco es: $444_{(5)} = 124$

		25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99
101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123			

Existen: 124 - 24 = 100 números de 3 cifras en base 5, de los cuales 21 son primos.
Luego, existen: 100 - 21 = 79 compuestos.

Rpta. 79 compuestos.

7. Hallar cuántos divisores tienen: $60^{\frac{n}{4}} \times 126^{\frac{n}{3}} \times 70^{\frac{n}{2}}$, sabiendo que es cuadrado perfecto y que "n" es el menor número posible.

Solución

Como es cuadrado perfecto, tendrá una cantidad impar de divisores.

$$E = 60^{\frac{n}{4}} \times 126^{\frac{n}{3}} \times 70^{\frac{n}{2}}$$

$$\sqrt{E} = 60^{\frac{n}{8}} \times 126^{\frac{n}{6}} \times 70^{\frac{n}{4}} = 2^{\frac{n}{4}} \times 3^{\frac{n}{8}} \times 5^{\frac{n}{8}} \times 2^{\frac{n}{6}} \times 3^{\frac{n}{3}} \times 7^{\frac{n}{6}} \times 2^{\frac{n}{4}} \times 5^{\frac{n}{4}} \times 7^{\frac{n}{4}}$$

$$\sqrt{E} = 2^{\frac{2}{3}n} \times 3^{\frac{11}{24}n} \times 5^{\frac{3}{8}n} \times 7^{\frac{5}{12}}$$

n debe contener a 3, 24, 8 y 12 $\Rightarrow n_{mínimo} = 24$

$\therefore E = 2^{32} \times 3^{22} \times 5^{18} \times 7^{20}$

Rpta. $N^o D_E = 33 \times 23 \times 19 \times 21 = 302\,841$

8. Entre cuántos números se puede dividir 967, de manera que el residuo en todos los casos sea 67

Solución

Como: D = dc + R, podemos establecer:

$967 = dc + 67 \Rightarrow d > 67$ ..... (1)

$900 = dc \Rightarrow 900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Construyendo la tabla de divisiones de 900 y considerando (1):

1	2	4
3	6	12
9	18	36
5	10	20
15	30	60
45	90	180
.....		
.....		
.....		
225	450	900

Por lo tanto los posibles valores del divisor "d" son:

d = 900; 450; 225; 300; 150; 75; 100; 180 y 90

Rpta. 9 números.

9. Cuántos números de la forma $\overline{a(2a)(a-1)}$ son primos absolutos?

Solución

$\overline{a(2a)(a-1)}$ es primo; como $2a < 10 \Rightarrow a < 5 \therefore a = 1; 2; 3$ ó 4

Pero $a \neq 1, 3$; para que $(a - 1) \neq \overline{2}$; luego $a = \begin{cases} 2 \\ \text{ó} \\ 4 \end{cases}$

Aplicando divisibilidad por 3:

$\overline{a(2a)(a-1)} \Rightarrow \overline{3} + 4a - 1 = \overline{3} + a - 1 \quad a \neq 4 \therefore \boxed{a = 2}$

Si: $a = \Rightarrow \overline{a(2a)(a-1)} = 241$ primo absoluto.

Rpta. $\therefore$ Existe un sólo número

10. Cuántos divisores cuadrados perfectos tiene el número 1440 000

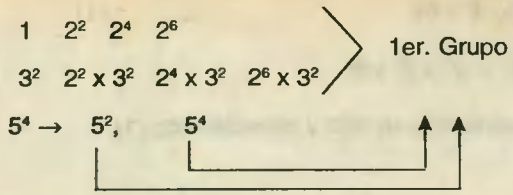
Solución

$1440\,000 = 2^6 \times 3^2 \times 5^4$

Para calcular los divisores cuadrados perfectos solo utilizaremos las potencias pares de los factores primos.

$2^6 \rightarrow 2^0; 2^4; 2^8 \rightarrow$ 1ra. fila

$3^2 \rightarrow 3^2$



Se obtendrán:

1	2^2	2^4	2^6
3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^4 \times 3^2$	$2^6 \times 3^2$
5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^4 \times 52$	$2^8 \times 5^2$
$3^2 \times 5^2$	$2^2 \times 3^2 \times 5^2$	$2^4 \times 3^2 \times 5^2$	$2^6 \times 3^2 \times 5^2$
5^4	$2^2 \times 5^4$	$2^4 \times 5^4$	$2^6 \times 5^4$
$3^2 \times 5^4$	$2^2 \times 3^2 \times 5^4$	$2^4 \times 3^2 \times 5^4$	$2^6 \times 3^2 \times 5^4$

Rpta. 24 cuadrados perfectos

11. Sabiendo que el número $N = 25^a + 25^{a-1}$ tiene $\overline{33b}$ divisores. Hallar $(a + b)$

Solución

N en factores primos:

$N = 25^{a-1}(25 + 1) = 5^{2a-2} \times 2 \times 13$

$N^o D_N = (2a - 1)(2)(2) = \overline{33b} \Rightarrow 2a - 1 = \dfrac{\overline{33b}}{4}$ como $2a - 1 \in \mathbb{N}$

Esto implica que $\overline{33b}$ debe contener a 4, para ello $b = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$

i. si $b = 2$ $\quad 2a - 1 = \dfrac{332}{4} = 83 \Rightarrow a = 42$

ii. si $b = 6$ $\quad 2a - 1 = \dfrac{336}{4} = 84 \Rightarrow a = \dfrac{85}{2}$

sólo cumplen: $a = 42 \wedge b = 2$

Rpta. $\therefore a + b = 44$

12. Cuántos divisores que no son múltiplos de 40 tiene el número 9520

Solución

$9\,520 = 2^4 \times 5 \times 17 \times 7$

$N°D_{9520} = 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$

$N°D\ \dot{\overline{40}} = ND\left(\frac{9\,520}{40}\right) = N°D\ (2x7x17)$ esto es: $2 \times 2 \times 2 = 8$

Rpta. $\therefore$ Nº de divisores que no son $\dot{\overline{40}}$: $40 - 8 = 32$

13. Cuántos divisores de 30^3 terminan en la cifra 5 ?

Solución

$N = 30^3 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$

Sólo se deben considerar los divisores que se obtienen de las potencias de 5 y los productos con las potencias de 3.

Como: $3^3 \times 5^3$ da $4 \times 4 = 16$ divisores, habrá que eliminar de ellos todos los correspondientes a las potencias de 3 ó sea: 1; 3; 9 y 27.

Rpta. $\therefore$ Terminan en 5: $16 - 4 = 12$ divisores.

14. Determinar la suma de los divisores de un número capicúa de tres cifras, tal que la suma de sus cifras sean 9; sabiendo que su número de divisores es lo mayor posible.

Solución

El número es de la forma: $N = \overline{aba} = \dot{\overline{9}}$ (porque $a + b + a = 9$)

Luego:

$2a$	$+\ b = 9$		
$\downarrow$	$\downarrow$		
1	7	$\rightarrow$	$N = 171 = 3^2 \times 19$
2	5	$\rightarrow$	$N = 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
3	3	$\rightarrow$	$N = 333 = 3^2 \times 37$
4	1	$\rightarrow$	$N = 414 = 2 \times 3^2 \times 23$

$N = 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ da el máximo número de divisores:

Rpta. $\therefore\ \Sigma D_N = \frac{2^3-1}{2-1} x \frac{3^3-1}{3-1} x \frac{7^2-1}{7-1} = 728$

15. Hallar $\alpha + \beta$ si $2^{\alpha} \times 7^{\beta}$ y $\alpha^2 \times 7^{\beta}$ tienen ambos 20 divisores

Solución

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 20 \quad \begin{cases} \alpha = 3; 4 \\ \beta = 4; 3 \end{cases}$$

Como $\alpha^2 \times 7^{\beta}$ también tiene 20 divisores $\Rightarrow \alpha = 4$ y $\beta = 3$

Rpta. $\therefore \alpha + \beta = 7$

16. La suma de los divisores de un número que tiene únicamente a 3 y a 7 como factores primos es 104. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

Solución

El número es de la forma: $N = 3^{\alpha} \times 7^{\beta}$

$$\Sigma D_N = \frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1} \times \frac{7^{\beta+1}-1}{7-1} = 104 \Rightarrow (3^{\alpha+1}-1)(7^{\beta+1}-1) = 2 \times 6 \times 104 = 2^5 \times 3 \times 13$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3^3 - 1 = 26 \\ 7^2 - 1 = 48 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

$\therefore N = 3^2 \times 7 = 63$

Rpta. $\therefore 6 + 3 = 9$

17. Cuántos divisores tiene: $7^{\alpha^{\beta}} \times 5^{\beta^{\alpha}} =$ si $\alpha^{\beta} \times \beta^{\alpha}$ tiene 35 divisores y se sabe además que: $\alpha = p^2$; para "p" y "β" primos

Solución

En factores primos: $N_1 = a^b \times b^a = (p^2)^b \times \beta^{p^2} = p^{2b} \times \beta^{p^2}$

Números de divisores: $(2\beta + 1)(p^2 + 1) = 35 = 5 \times 7 \Leftrightarrow \beta = 3 \ \wedge \ p = 2$

$\Rightarrow a = 4$

$\therefore N_2 = 7^{\alpha^{\beta}} \times 5^{\beta^{\alpha}} = 7^{4^3} \times 5^3$ tiene: $(4^3 + 1)(3^4 + 1) = 5\,330$ divisores.

Rpta. 5330 divisores.

18. El número $4^{m-1} \times 6^{m+1} \times 7^{2m}$ posee 70 divisores que son $\overline{2}$ pero no $\overline{8}$. ¿ Cuántos de sus divisores son $\overline{21}$?

Solución

$N = 4^{m-1} \times 6^{m+1} \times 7^{2m}$; N en factores primos:

$$N = 2^{3m-1} \times 3^{m+1} \times 7^{2m} = 2\,(2^{3m-2} \times 3^{3+1} \times 7^{2m})$$

divisores $\bar{2}$: $(3m-1)(m+2)(2m+1)$ ..... (1)

$$N = 2^3\,(2^{3m-4} \times 3^{m+1} \times 7^{2m})$$

divisores $\bar{8}$: $(3m-3)(m+2)(2m+1)$ ..... (2)

Por condición del problema, de (1) y (2) podemos establecer:

$$(3m-1)(m+2)(2m+1) - (3m-3)(m+2)(2m+1) = 70$$

$$(m+2)(2m+1)[3m-1-3m+3] = 70$$

$$(m+2)(2m+1) = 35 = 5 \times 7$$

$$\Leftrightarrow m = 3$$

$$\therefore N = 2^6 \times 3^4 \times 7^6$$

$$N = 3 \times 7\,(2^6 \times 3^3 \times 7^5)$$

divisores $\bar{21} = 9 \times 4 \times 6 = 216$

Rpta. 216.

19. Se sabe que un número escrito en base 3 tiene sus dos últimas cifras iguales a cero. Si se sabe además que el número tiene 14 divisores y que es mayor que 5000 y menor que 7000. Hallar la suma de las cifras del número.

Solución

El número es de la forma:

$$N = \overline{.....00}_{(3)} = \bar{3}^2 = \bar{9} \quad \text{..... (1)}$$

Como N tiene 14 divisores será de la forma:

$$N = 3^{\alpha} \times a^{\beta} \quad \text{..... (2)}$$

También: $(\alpha+1)(\beta+1) = 14 \begin{cases} 14 \times 1 \\ 7 \times 2 \end{cases}$

como $\alpha \geq 2$ [para poder cumplir con (1)]:

además: $3^{13} >> 7000$, se deduce que: $\alpha = 6 \wedge \beta = 1$

$\therefore N = 3^6 \times a^1$; por límites: $5000 < 3^6 a < 7000$

$6^{a/b} < a < 9^{m/n}$

$\therefore a = 7$

$N = 3^6 \times 7 = 5103$

Rpta. Σcifras $= 5 + 1 + 0 + 3 = 9$

20. Hallar la suma de las cifra del menor número que dentro de sus divisores sólo posea dos divisores primos y que el producto de sus divisores sea un número que tenga 65 divisores.

Solución

Sea $\mathbb{N}$ el número; en factores primos: $\mathbb{N} = p^{\alpha} \cdot q^{\beta}$ ..... (1)

$PD_{\mathbb{N}} = N^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} = p^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} \times q^{\frac{\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}$ ..... (2)

Como $PD_{\mathbb{N}}$ tiene 65 divisores y $65 = 5 \times 13$ ..... (3)

De (2) y (3)

Si: $\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2} + 1 = 5 \rightarrow \alpha(\alpha+1)(\beta+1) = 8$ ..... (4)

$\therefore \frac{\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{2} + 1 = 13 \rightarrow \beta(\alpha+1)(\beta+1) = 24$ ..... (5)

De (4) y (5) se deduce que: $\alpha = 1 \wedge \beta = 3$. Para el menor número:

$$P = 3 \wedge q = 2$$

$$\therefore N = 3 \times 2^2 = 24$$

Rpta. $2 + 4 = 6$

21. Un número N descompuesto en sus factores primos es de la forma $N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

Se suprimen 24 divisores dividiéndole por 2, 18 divisores dividiéndoles por 3 y 12 divisores dividiéndole por 5 ¿ Cuál es el número N ?

De acuerdo a la regla para determinar el número de divisores de un número, se tiene:

El número $N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ tiene $(x+1)(y+1)(z+1)$ divisores

El número $\frac{N}{2} = 2^{x-1} \cdot 3^y \cdot 5^z$ tiene $x(y+1)(z+1)$ divisores

El número $\frac{N}{3} = 2^x \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z$ tiene $(x+1)\,y\,(z+1)$ divisores

El número $\frac{N}{5} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z-1}$ tiene $(x+1)(y+1)z$ divisores

Luego, los casos en que el número de divisores disminuye en 24, 18 y 12 respectivamente, se escribirán:

$(x+1)(y+1)(z+1) - x(y+1)(z+1) = 24$ ó $(y+1)(z+1) = 24$ .....(1)
$(x+1)(y+1)(z+1) - (x+1)y(z+1) = 18$ ó $(x+1)(z+1) = 18$ .....(2)
$(x+1)(y+1)(z+1) - (x+1)(y+1)z = 12$ ó $(x+1)(y+1) = 12$ .....(3)

Resolviendo el sistema anterior de donde las incógnitas son $(x+1), (y+1), (z+1)$ tenemos:

Multiplicando (2) y (3): $(x+1)^2 \cdot [(z+1)(y+1)] = 18 \cdot 12$

Pero el valor del corchete es 24 como indica (1), luego:

$$(x+1)^2 = \frac{18 \times 32}{24} = 9\,;$$

Y como $x+1$ es positivo, se obtiene $x+1 = 3$, de donde $x = 2$. Análogamente se obtiene $y = 3, z = 3$.

Rpta. El número pedido es, por tanto, $N = 2^2 \times 3^3 \times 5^5 = 337\,500$

22. Si $N = \overline{ab1c} = \overline{187}$ y $\overline{bc} = \dot{9}$; hallar la suma de todos los divisores de N

Solución

$N = \overline{ab1c} = \overline{187}\left\langle \begin{matrix} \dot{11} \\ \dot{17} \end{matrix} \right.$; $\overline{bc} = \dot{9} \Rightarrow b + c = \dot{9}$ ..... (1)

Por ser $N = \dot{11} \Rightarrow (b+c) - (a+1) = \dot{11}$ ..... (2)

Por ser $N = \dot{17} \Rightarrow c + 10 - 2b - 3a = \dot{17}$ ..... (3)

De (1): Si: $b + c = 9$, en (2): $9 = a + 1 \Rightarrow a = 8$

En (3): $9 - b + 10 - 2b = 24 = \dot{17} \Rightarrow 3b = \dot{17} - 5 \Rightarrow b = 4 \wedge c = 5$

$N = 8415$ $\therefore$ Suma de divisores de N = 17 848

Si: $b + c = 18$; $b = c = 9$, $a = 6$, también cumple:

$N = 6919 = 11 \times 17 \times 37$ $\therefore$ Suma de divisores de N = 8 208

Rpta. Existen 2 soluciones; 17 848 y 8 208

23. Determinar un número capicúa de 4 cifras tal que dos de sus factores primos sean cifras del número. Dar como respuesta la suma de las soluciones posibles.

Solución

El número es de la forma: $N = \overline{abba}$, para que dos de sus factores primos sean cifras del número, a y b solo pueden tomar los valores: 2, 3, 5 y 7; ahora: ni "a" ni "b" pueden ser 3, sino la suma de las cifras de N sería:

$$2(a+b) = 2(3+\underset{\downarrow}{b}) \neq 3$$
$$2, 5, 7$$

Luego hay 6 posibilidades:

$$\begin{cases} a = 3, b = 5 \ (\text{No porque } N \neq \dot{5}) \\ a = 5, b = 2 \ (\text{No porque } N \neq \dot{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b; b = 7 \Rightarrow N = 2\,772 \text{ sí} \\ a = 7; b = 2 \ (\text{No porque } N \neq \dot{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5; b = 7 \Rightarrow N = 5\,775 \text{ sí} \\ a = 7; b = 5 \ (\text{No porque } N \neq \dot{5}) \end{cases}$$

Rpta. $\therefore S = 5\,775 + 2\,772 = 8\,547$

24. Sean "p" y "q" dos números primos que suman 13 y tales que, el número $p^{n^m}.q^{m^n}$ tiene 858 divisores. ¿ Cuántos divisores tiene el número $(mn)^{pq}$

Solución

Si: $p + q = 13 \Rightarrow \begin{cases} 2+11;\ 3+10;\ 5+8;\ 7+6;\ 9+4;\ 9+4;\ 11+2 \\ \therefore p = 2 \wedge q = 11 \end{cases}$

Además: $(n^m + 1)(m^n + 1) = 858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$

$\therefore$ $n^m + 1 = 3 \times 11$ $\quad n = 2$
$m^n + 1 = 2 \times 13$ $\quad m = 5 \Rightarrow N = (mn)^{pq} = (2 \times 5)^{2 \times 11} = 2^{22} \times 5^{22}$

Rpta. $\therefore$ $ND_N = 23 \times 23 = 529$

Sobre propiedades de los números ℕ
Números primos

1. Cuántos términos debe tener el siguiente producto para que el resultado sea un número que tenga 961 divisores.

$P = 36 \times 36^2 \times \ldots \times 36^n$

a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) N.A.

2. Hallar el número de la forma $\overline{aabb}$ tal que posea 21 divisores y uno de sus dos factores primos es 2; dar la suma de sus cifras.

a) 22 b) 24 c) 26 d) 28 e) 30

3. Determinar el número amigo de 2924

a) 2 620 b) 5 544 c) 4 362 d) 6 426 e) 4 356

4. Sabiendo que $10^m \times 25^n$ tiene 33 divisores, hallar m + n.

a) 5 b) 8 c) 4 d) 9 e) 6

5. Cuántos divisores primos como máximo puede tener:

$3\,551 \times a \quad (a < 10)$

a) 4 b) 32 c) 16 d) 15 e) 18

6. El número $P = 2^{21\,701} - 1$ es primo ¿ Cuál de los siguientes números contiene a un número primo mayor que P ?

a) P! b) (P-1) ! c) P^2 d) (P+1) ! e) P!! + 1

7. Determinar la suma de todos los divisores comunes a los números: 19 456; 17 408 y 13 312

a) 1 b) 4 095 c) 255 d) 2 047 e) N.A.

8. El sistema de factores primos de N es:

$N = 2^7 \times a \times b$

y la suma de sus divisores es $\frac{85}{28}$ de N. Determinar a + b

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

9. Un número tiene dos divisores primos y en total 15 divisores. Si la suma de sus divisores es 403. Determinar la suma de las inversas de todos sus divisores.

a) 1.60 b) 2.40 c) 2.60 d) 2.80 e) 3.20

10. Cuál es la mayor potencia de 11 que divide a factorial de 1000

a) 90 b) 92 c) 12 d) 98 e)99

11. Hallar cuántos divisores tiene: $N = 18^a \times 12^b \times 3^a$ SN tiene 187 divisores

a) 143 b) 154 c) 156 d) 136 e) N.A.

12. Si el número: $N = 10^a \times 5^b \times 2^c$ tiene 63 divisores $\overline{50}$. Determinar cuántos divisores $\overline{36}$ tiene.

a) 30 b) 42 c) 24 d) 28 e)36

13. Hallar la suma de los divisores que tiene el mayor capicúa de cuatro cifras que es múltiplo de siete.

a) 1288 b) 6144 c) 3072 d) 24576 e) N.A.

14. Si "m" y "n" son dos números cuya diferencia es 3. Hallar m + n si: $3^m + 3^n$ tiene 36 divisores.

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 16

15. Si el producto de los divisores de un número es $5^{18} \times 7^{12}$. Determinar la suma de las inversas de los divisores de dicho número.

a) $1\frac{2565}{6125}$ b) $2\frac{4}{5}$ c) 1 d) 1.5 e) N.A.

16. Los números: $A = 7^a \times 8^b$ y $B = \frac{5^6 \times 8^a}{16}$ (menores posibles), tienen el mismo número de divisores. Hallar (a + b) si son enteros y positivos.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) N.A.

17. Cuántos divisores tiene el número:

$$E = 15 \times 15^2 \times 15^3 \times 15^4 \times \ldots \times 15^n$$

a) $(n^2 + 1)^2$ b) $(n^2+n+1)^2$ c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) $\frac{(n^2+n+2)^2}{4}$ e) N.A.

18. La cantidad de divisores del número $N = \overline{abab}$ es 14. Hallar el valor de a + b.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

19. Si el número $N = \overline{aa55}$ tiene 20 divisores. Hallar la suma de sus divisores.

a) 2 176 b) 3 720 c) 8 712 d) 6 544 e) 5 432

20. Cuántos números de la forma $N = \overline{a(2a)(2a)a}$ tiene 24 divisores ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

21. Cuántos pares de números existen tales que su producto sea 4 050

a) 18 b) 25 c) 12 d) 15 e) 16

22. Hallar los números: $N_1 = 36 \times 63^n$ y $N_2 = 63 \times 36^n$, sabiendo que:

$$\frac{N^o D_{N_1}}{N^o D_{N2}} = \frac{5}{6}$$

Dar como respuesta "n" :

a) 6 b) 7 c) 8 d) 4 e) 3

23. Hallar la cifra de las centenas del menor número comprendido entre 500 y 1000, que tenga 24 divisores y sea $\dot{\overline{24}}$.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

24. Hallar la cifra de las centenas de un número de 15 divisores, si se sabe que los términos de la primera fila de su tabla de divisores suman 781 y los de su primera columna, 13.

a) 8 b)6 c) 4 d) 2 e) 5

25. Hallar un número de 18 divisores, sabiendo que los términos de la primera fila de su tabla de divisores suman 63 y las de la primera columna 57. Dar como respuesta la cifra de las decenas de dicho número.

a) 8 b) 6 c) 7 d) 4 e) 3

26. Hallar $\alpha - \beta$ si se sabe que el número $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tiene 2 divisores $\dot{\overline{2}}$ más que divisores $\dot{\overline{3}}$.

a) 2 b) 1 c) 5 d) 4 e) 3

27. Se sabe que $N = (24)^a \times (30)^b$ tiene 2, 392 divisores. Hallar cuántos divisores tiene el número que resulta de dividir N entre $(4320)^4$

a) 12 b) 24 c)6 d) 36 e) 48

28. Si la suma de los "n" primeros números primos absolutos es de la forma $\overline{aab}$. Hallar a + b

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) N.A.

29. "A" y "B" son dos números amigos si y sólo si:

$SD_A = SD_B = A + B$ Determinar el número amigo de 5 020

a) 6 084 b) 5 524 c) 3 384 d) 4 384 e) 5 564

30. Hallar un número "n" compuesto de los factores primos 3, 5 y 7 sabiendo que 9n, 5n y 7n tienen respectivamente 40; 15 y 12 divisores más que "n".

a) 7840445 b) 2701125 c) 6387425 d) 11426200 e) N.A.

Clave

1. c	11. a	21. a
2. d	12. c	22. c
3. a	13. b	23. a
4.a	14. d	24. d
5. c	15. b	25. a
6. b	16. c	26. b
7. d	17. c	27. c
8. a	18. a	28. e
9. e	19. d	29. d
10. b	20. b	30. b

Capítulo 9

MAXIMO COMUN DIVISOR
(o prodivisor)

Se llama común divisor (o codivisor) de varios números diferentes de cero, a cualquier número que sea divisor de todos ellos.

Así por ejemplo 3 es divisor común de 15; 18 y 45; en cambio 5 no es común divisor, pues divide a 15 y a 45 pero no a 18.

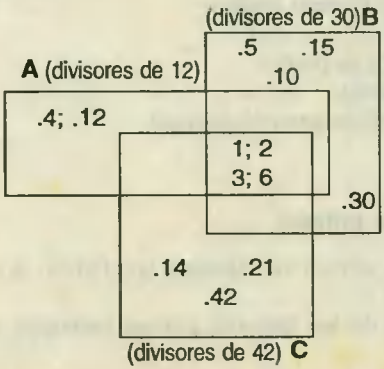
Consideramos los conjuntos:

A = { x ∈ ℕ / x = divisor de 12 } = { 1; 2; 3; 4; 6; 12 }

B = { x ∈ ℕ / x = divisor de 30 } = { 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30 }

C = { x ∈ ℕ / x = divisor de 42 } = { 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42 }

Graficando:



Se observa que: $A \cap B \cap C = \{ 1; 2; 3; 6 \}$ conjunto formado por los divisores comunes (codivisores) de los números 12; 30; 42, donde el **mayor** de los comunes divisores (prodivisor) es 6.

Definición

"Se llama máximo común divisor o prodivisor de varios números al mayor de los divisores comunes de éstos números.

Como la cantidad de divisores comunes es finita, la existencia del máximo común divisor es evidente.

Propiedad especial del M.C.D:

Una propiedad interesante y útil del M. C. D. de un par de números, a y b, es que el M. C. D (a,b) puede escribirse como la suma de un múltiplo de a y otro múltiplo de b, siendo esto también consecuencia del algoritmo de división.

Ejemplo 1

M. C. D. (7, 17) = 1

$\dot{7}$: 7; 14; 21; 28; . . .

$\dot{17}$: 17; 34; 51; 68; . . .

} M. C. D. (7, 17) = 1 = 5 (7) + (-2) (17)

Ejemplo 2

M. C. D. (6, 15) = 3

$\dot{6}$: 6; 12; 18; 24; 30; . . .

$\dot{15}$: 15; 30; 45; 60; 75; . . .

} M. C. D. (6; 15) = 3 = (1) (15) + (-2) (6)

Métodos para calcular el máximo común divisor:

I) Descomposición en factores primos.
II) Descomposición simultánea.
III) Algoritmo de Euclídes (Divisiones sucesivas)
IV) Regla de Stum.

I. Descomposición en factores primos:

Se descomponen en factores primos, los números cuyo M. C. D. se desea calcular luego:

"El M. C. D. es el producto de los factores primos comunes afectados de su menor exponente"

En efecto, este número así formado es divisor de todos ellos, pues sólo contiene factores de ellos y con exponentes iguales o menores. Cualquier otro divisor no puede contener otros factores primos, ni tenerlo con mayor exponente, en virtud del criterio general de divisibilidad; luego no hay divisor común mayor que el formado, el cual es, por lo tanto, el M. C. D.

Ejemplo:

Calcular el M. C. D (25 200; 19 800 y 27 900)

$$25\,200 = 2^4 . 3^2 . 5^2 . 7$$
$$19\,800 = 2^3 . 3^2 . 5^2 . 11$$
$$27\,900 = 2^2 . 3^2 . 5^2 . 31 \qquad \text{M. C. D} = 2^2.3^2.5^2 = 900$$

II. Descomposición simultanea: Constituye un método práctico para calcular el M. C. D y consiste en lo siguiente:

Se colocan los números en forma horizontal y a la derecha se traza una vertical; a la derecha de la vertical se colocan los factores primos comunes que contengan los números propuestos; cuando dejen de contener factores primos comunes, se detiene el proceso y el producto de los factores que están a la derecha de la vertical nos dará el M. C. D. Desarrollando el ejemplo anterior por este método:

25 200	19 800	27 900	2	
12 600	9 900	13 950	2	
6 300	4 950	6 975	3	
2 100	1 650	2 325	3	M. C. D = $2^2\,3^2\,5^2 = 900$
700	550	775	5	
140	110	155	5	
(28)	(22)	(31)		

Son los cocientes primos entre si y que se obtendrían al dividir los números entre su M. C. D.

III. Algoritmo de Euclídes (Divisiones sucesivas)

Este método ideado por Euclídes se fundamenta en la propiedad que dice "si un número divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide al residuo de dicha división".

Supóngase que estamos interesados en encontrar el M. C. D. de 58 y 16. El algoritmo de la división nos permite escribir:

$$58 = 16 \times 3 + 10, \text{ donde } 0 \leqq 10 < 16$$

Obsérvese que cualquier número que divida a 58 y a 16 debe dividir también a 10 porque podemos escribir:

$$10 = 58 - 16 \times 3$$

En particular, el M. C. D. de 58 y 16 debe dividir a 10. Esto es una consecuencia de la ley distributiva y del significado de "divide a". Esto implica que el M. C. D - que llamaremos D- es un divisor común de 16 a 10. Es más, debe ser el máximo común divisor de 16 y 10 porque si hubiera otro común divisor mayor que él, este divisor tendría que dividir también a 58, y D no sería el M. C. D. de 58 y 16. Además cualquier número que divida a 16 y 10 debe dividir también a 58.

$$\therefore \text{M. C. D. } (58; 16) = \text{M. C. D } (16; 10)$$

Ahora hemos reducido el problema a encontrar el M. C. D. de 16 y 10. aplicando el algoritmo de la división nuevamente:

$$16 = 10 \cdot 1 + 6$$

Nuevamente, cualquier número que divide a 16 y 10 debe divider también a 6, porque tenemos:

$$6 = 16 - 10$$

En particular el M. C. D. de 16 y 10 debe dividir a 6. También cualquier número que divide a 16 y a 6 debe dividir a 16, así que:

$$\text{M. C. D. } (16; 10) = \text{M. C. D. } (10; 6)$$

Aplicando el algoritmo de la división y razonando como antes tenemos:

$$\begin{aligned} & 10 = 6 \cdot 1 + 4 \\ \text{y} \quad & 6 = 4 \cdot 1 + 2 \\ \text{y} \quad & 4 = 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

El último enunciado, que identifica a D, establece que el M. C. D. (4; 2) = 2. Siguiendo la cadena de ecuaciones en orden invertido tenemos: 2/2 y 2/4, así también 2/6 y 2/4 y 2/6; por lo tanto, 2/10, 2/6 y 2/10; así que 2/6, 2/10 y 2/16; por lo tanto 2/58; 2/16 y 2/58, y a sido identificado el M. C. D. en cada paso.

$$\therefore \text{M. C. D. } (58; 16) = 2.$$

Todo el proceso descrito se reduce a la siguiente regla para calcular el M. C. D. de dos números:

"Se divide el mayor por el menor; éste por el resto de la división, el cual se divide a su vez por el nuevo resto y así sucesivamente hasta obtener una división exacta. El divisor que de el cociente exacto es el M. C.D buscado"

Disposición:

Cocientes →		3	1	1	1	2
	58	16	10	6	4	②
residuos →	10	6	4	2	0	

M. C. D. (58; 16) = 2

Regla de Sturn para hallar el máximo común divisor de varios números:

Esta regla esta basada en el teorema siguiente:

"El máximo común divisor de los números: A; B; C; D; . . . Z, el menor de los cuales es A, es igual al máximo común divisor de los números A; R_B; R_C; .... ;R_Z, siendo R_B, R_C R_D, ... , R_Z., los restos de las divisiones por A de los números B; C; D; .....; Z."
En efecto por propiedad de divisibilidad, los divisores comunes de A y B son los divisores comunes de A y R_B y recíprocamente; los divisores comunes de A y C son divisores comunes de A y R_C y recíprocamente, etc., los divisores comunes de (A, B, C, . . . Z) son, pues, los divisores comunes de (A; R_B, R_C, . . . R_Z) y, por lo tanto, ambos grupos de números tienen el mismo máximo común divisor.

Regla de Sturn:

Se divide cada uno de los números dados, por el menor de ellos; se considera entonces este divisor y los restos de las divisiones que hubiesen resultado inexactas y se dividen estos números por el menor de ellos, y así sucesivamente, prescindiendo siempre en el curso de la operación de los restos que sean nulos; el último divisor empleado será el máximo común divisor de los números dados.

Ejemplo de aplicación:

Hallar el M. C. D. de 2520; 3060; 2790 y 4545.

Dispondremos la operación como sigue:

2520	3060	2790	4545
	-2520	-2520	-2520
2520	540	270	2025
-2430	-540		-1890
90	0	270	135
		-270	-90
90		0	45
-90			
0			45 = M. C. D.

El divisor empleado en cada operación esta indicado en cada rectángulo. No se han escrito los cocientes (por ser innecesarios) pero sí los productos que deben restarse para obtener los nuevos restos.

1. Hallar (a + b), sabiendo que los cocientes sucesivos al calcular el M. C. D. por el algoritmo de Euclídes de los números $\overline{(a+1)ab}$ y $\overline{(a-2)(b+1)0}$ fueron: 1; 1; 1; 3 y 2.

Solución

Sea d el M. C. D. Completando el algoritmo de derecha a izquierda.

	1	1	1	3	2
A	B	9d	7d	2d	d
9d	7d	2d	d	0	

Además:

$B = 16d = \overline{(a-2)(b+2)0}$ ..... (1)

$A = 25d = \overline{(a-2)ab}$ ..... (2)

De (1): se deduce que $d = \overline{...5}$

De (2): $\overline{(a+1)ab} = \overline{25} \Rightarrow \overline{ab} =$ { 25 no cumple con (1); 75 }

Rpta. $\therefore \overline{ab} = 75;\ a + b = 12$

2. Hallar "B" si:

$$A^3 + B^2 = 3185 \text{ y M. C. D (A, B) + A = 21}$$

Solución

$A^3 + B^2 = 3\,185$ ..... (1)
M. C. D. (A ; B) = D
$D + A = 21$ ..... (2)

Por propiedad: $A = Dq_1$ $B = Dq_2$ ... (3) q_1 y q_2 s. p. e. si

(3) en (2)

$D (1 + q_1) = 21 = 3 \times 7$ { Si D=7 $\therefore q_1 = 2$ ..... (α); Si D=3 $\therefore q_1 = 6$ ..... (β) (no cumple) }

(α) en (1)

$$D^3q^3 + D^2q_2^2 = 3\,185 \Rightarrow 7^3 \times 2^3 + 7^2 q_2^2 = 3\,185 \Rightarrow q_2 = 3$$

Rpta. $\therefore B = 7 \times 3 = 21$

3. Hallar cuantos pares de números comprendidos entre 500 y 700 existen tales que su M. C. D. sea 32.

Solución

Los números buscados son de la forma: 32q

$A = 32q_1 \wedge B = 32q_2$ donde q_1 y q_2 son primos entre sí

$$500 < 32q < 700$$
$$15,6.. < q < 21,8$$

$\therefore q = 16; 17; 18; 19; 20$

Si:		
	$q_1 = 16$	$q_2 = 17; 19$
	$q_1 = 17$	$q_2 = 16; 18; 19; 20$
	$q_1 = 18$	$q_2 = 17; 19$
	$q_1 = 19$	$q_2 = 16; 17; 18; 20$
	$q_1 = 20$	$q_2 = 17; 19$

Rpta. $\therefore$ Existen: $2 + 4 + 2 + 4 + 2 = 14$ soluciones.

4. Hallar a x b x c, si el M. C. D. de $\overline{5bbabc}$ y $\overline{57b}$ es 26

Solución

Como los números tienen como divisor común a 26 significa que son múltiplos de 26:

$\overline{5bbabc} = \overline{26} = \langle \overline{2}, \overline{13} \rangle$ $\qquad$ $\overline{57b} = \overline{26} = \langle \overline{2}, \overline{13} \rangle$

"c" es par $\qquad$ solo cumple b = 2

$\overline{5\,2\,2\,a\,2\,c} = \overline{13}$ aplicando módulo 13:
$4\ 3\ \overline{1}\ 4\ \overline{3}\ 1$

$4.5 + 3.2 - 2 - 4a - 6 + c = \overline{13} \Rightarrow 18 - 4a + c = \overline{13} \Rightarrow 5 - 4a + c = \overline{13}$

$\Leftrightarrow$ a = 5 y c = 2

Rpta. $\therefore a.b.c = 5 \times 2 \times 2 = 20$

5. Se tiene dos números uno de dos cifras y otro de tres. Hallar el menor de ellos sabiendo que:

i. El M. C. D. de los complementos aritméticos es 21
ii. La suma de los números es 890
iii El producto de los complementos aritméticos es 9 261

Solución

Sean: $M = \overline{abc}$ y $N = \overline{mn}$ los números.
Podemos establecer:

$(100 - N) = 21_{q_1} = \overline{21}$ ..... (1)

$(1\,000 - M) = 21q_2 = \overline{\overline{21}}$ ..... (2)

q_1 y q_2 s. p.e.sí.

$M + N = 890$ ..... (3)

$(100 - N)(1\,000 - M) = 9\,261$ ..... (4)

De (1):

$100 - N = \overline{21} \Rightarrow \overline{21} - 5 - N = \overline{\overline{21}} \Rightarrow N + 5 = \overline{\overline{21}} \Rightarrow N = 16, 37, 58, 79...$ (5)

De (4):

Para que el producto termine en 1, los factores deben terminar en: 9 ó en 3 y 7 . En 9 no pueden terminar porque sino, N tendría que terminar en 1, lo cual no es posible de acuerdo a (5).

Entonces, uno de ellos terminará en 3 y el otro en 7; sólo cumple cuando $N = 37 \wedge M = 853$

Rpta. El número menor es 37.

6. La suma de dos números enteros positivos, que tiene 21 divisores comunes, es 47 ó 40. Hallar su diferencia, si es la máxima posible.

Solución

Sean: "A" y "B" los números

y sea D = M. C. D. (A, B);

Pero "D" tiene 21 divisores,

Luego: $D = a^{20}$ ó $D = a^6 . b^2$

Por propiedad:

$$\frac{A}{D} = q_1 \rightarrow A = Dq_1 \qquad A + B = D(q_1 + q_2) = 47\,040 = 2^6 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{D} = q_1 \rightarrow A = Dq_1 \\ \frac{B}{D} = q_2 \rightarrow B = Dq_2 \end{array}\right\} \text{s.p.e.sí} \Rightarrow \quad \therefore D = 2^6 \times 7^2 \wedge q_1 \cdot q_2 = 15$$

14	1
13	2
11	4
8	7

Para: $q_1 = 14$ y $q_2 = 1$ se obtendrá la diferencia máxima:

Rpta. $A - B = 2^6 \times 7^2 (14 - 1) = 40\,768$

7. Se tienen cuatro rollos grandes de alambre de 2 275; 2 548; 2 366 y 2 093 metros de longitud y se pretende sacar de estos, rollos idénticos más pequeños que ellos, cuya longitud sea lo mayor posible sin desperdiciar nada de alambre. ¿ Cuántos de estos rollos más pequeños podrán sacar en total ?

Solución

Sea "l" la longitud de rollos más pequeños; "l" debe ser divisor común de 2 275; 2 548; 2 366 y 2 093 y como debe ser lo mayor posible, será el M. C. D. de éstos.

$$\left.\begin{array}{l} 2\,275 = 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \\ 2\,548 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \\ 2\,366 = 2 \cdot 7 \cdot 13^2 \\ 2\,093 = 7 \cdot 13 \cdot 23 \end{array}\right\} \quad l = \text{M. C. D} = 7 \cdot 13 = 91\text{m (longitud de los rollos más pequeños)}$$

$\therefore$ se podrán sacar:

$$\frac{2\,093 + 2\,275 + 2\,548 + 2\,366}{91} = 102 \text{ rollos}$$

Rpta. 102 rollos.

8. Se tiene dos avenidas: una de 21 cuadras (de 120m cada cuadra) y otra de 25 cuadras (de 100m cada cuadra), se desea convertir estas avenidas en sendas alamedas plantando árboles equidistantes entre sí, de tal manera que debe haber un árbol al comienzo y al final de cada avenida. Si la plantación de cada árbol significa un gasto de S/. 2.50. Se desea gastar lo mínimo. ¿ A cuánto ascenderá ese gasto mínimo en total para convertir las dos avenidas en alamedas ?

Nota : No considerar la distancia entre cuadras y considerar que la distancia entre árboles para ambas avenidas es la misma.

Solución

$L_1 = 21 \times 120 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$L_2 = 25 \times 100 = 2^2 \cdot 5^4$

Para que el gasto sea mínimo, la separación entre árbol debe ser lo mayor posible, es decir igual al M. C. D (L_1; L_2) = $2^5 \times 5$ = 20m

$$\text{Número total de árboles} = \frac{L_1}{20} + 1 + \frac{L_2}{20} + 1 = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7}{20} + 1 + \frac{2^2 \times 5^4}{20} + 1$$

Número total de árboles = $2 \cdot 3^2 \cdot 7 + 1 + 5^3 + 1$ = 2 53

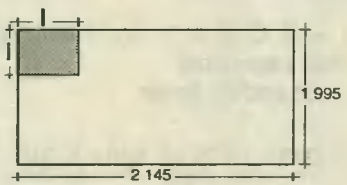
Rpta. Gastó: 2 53 x 2 50 = S/. 632 500

9. Una urbanización posee una extensión rectangular de 1 995 metros por 2 145 metros desea lotizarla en terrenos cuadrados. Se hacen estudios y se llega a determinar que la urbanizadora ganará más si la extensión de cada lote es la mayor posible; en tal caso ganará S/. 750 00 por lote vendido. En caso de vender todos sus lotes. ¿Cuánto ganará como máximo?

Solución

Sea "l" la longitud de cada lado del terreno cuadrado.

Para obtener un número exacto de lotes, l debe ser divisor común de 1 995 y 2 145 y para que cada lote sea lo mayor posible, entonces l debe ser el M. C. D. (1 995; 2 145).



l = M. C. D. (1 995; 2 145) = 15 ∴ área de c/lote : 15 x 15 m^2

$$\text{Nº de lotes} = \frac{\text{área total}}{\text{área de un lote}} = \frac{1\,995 \times 2\,145}{15 \times 15} = 1\,9\,019$$

Rpta. ∴ ganará: 19 019 x 750 000 = S/. 14,264'250 000

10. Hallar el M. C. D. de ($5^{1\,207} - 1$) y ($5^{1\,349} - 1$)

Solución

Los números propuestos admiten como divisor común el número de la forma $5^{\alpha} - 1$, para que $5^{\alpha} - 1$ sea máximo se requiere que "α" tenga el mayor valor posible, ademas α debe ser divisor común de 1 207 y 1 349. Como M. C. D. (1 207, 1 349) = 71:

Rpta. ∴ M. C. D. ($5^{1\,207} - 1$) y ($5^{1\,349} - 1$) es ($5^{71} - 1$)

11. En que cifra termina el M. C. D. de $6^{2304} - 1$ y $6^{576} + 1$

Solución

$6^{2304} - 1 = (6^{1152} + 1)(6^{576} + 1)(6^{576} - 1)$

$6^{576} + 1 = (6^{576} + 1)$

M.C.D.=$(6^{576}+1)$ que termina en la cifra 7

Rpta. Cifra 7

Capítulo 10

MINIMO COMUN MULTIPLO

Se llama común múltiplo (o comúltiplo) de varios números diferentes de cero a todo número (diferente de cero también) que sea a la vez múltiplo de todos ellos.

Así por ejemplo 48 es múltiplo común de 6; 12 y 16 porque:

$$48 = 6 \cdot 8$$

$$48 = 12 \cdot 4$$

$$48 = 16 \cdot 3$$

Consideremos los siguientes conjuntos infinitos:

$A = \{ x \in \mathbb{N}^* / x = \dot{6} \} = \{ 6; 12; 18; (24); 30; 36; 42; (48); 54; \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$B = \{ x \in \mathbb{N}^* / x = \dot{8} \} = \{ 8; 16; (24); 32; 40; (48); 56; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$C = \{ x \in \mathbb{N}^* / x = \dot{12} \} = \{ 12; (24); 36; (48); 60; 72; 84; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Entonces el conjunto infinito formado por los múltiplos comunes de 6; 8 y 12 será:

$M = \{ x \in \mathbb{N}^* / x = (\dot{6}; \dot{8}; \dot{12}) \} = \{ (24); 48; 72; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Como los múltiplos de un número no pueden ser menores que él, los múltiplos comunes a varios números no pueden ser menores que el mayor de éstos. Entre los múltiplos comunes hay, pues, uno menor que todos los demás y se llama mínimo común múltiplo de los números dados.

Definición:

"Se llama mínimo común múltiplo (o promúltiplo ó mínimo común dividendo) al menor de los múltiplos comunes de los números dados".

En el ejemplo anterior el M. C. M. (6; 8; 12) = 24

Propiedades:

i. "Todos los múltiplos comunes de varios números, son también del M. C. M. de éstos". Sea c un múltiplo común de "a" y "b". Si c no fuera múltiplo del M. C. M. (a,b) = m, se tendría, dividiendo c por m:

$$c = mq + r, \qquad 0 < r < m$$

Ahora bien, siendo los números "a" y "b" divisores de "c" y "m" lo serán también del resto de su división r, y esto es imposible porque entonces "a" y "b" tendrían un común múltiplo r menor que su mínimo común múltiplo m.

ii. "El mínimo común múltiplo m de dos números "a" y "b" es igual al producto de estos números divididos por su máximo común divisor "D".
En efecto, puesto que se puede escribir

$$\frac{a \cdot b}{D} = \frac{a}{D} \cdot b = a \cdot \frac{b}{D}$$

El cociente $\frac{a \cdot b}{D}$ es múltiplo de "a" y múltiplo de "b"; por tanto, según la propiedad anterior, sea múltiplo de m, es decir:

$$\frac{a \cdot b}{D} = m \cdot k \qquad k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$$

Pero esta igualdad se deduce, dividiendo por "b" y por "a" sucesivamente:

$$\frac{a}{D} = \frac{m \cdot k}{b}; \qquad \frac{b}{D} = \frac{m \cdot k}{a}$$

Por propiedad del máximo común divisor se sabe que los cocientes $\frac{a}{D}$ y $\frac{b}{D}$ son primos entre sí, luego k = 1

Y, por consiguiente,

$$\frac{a \cdot b}{D} = m \qquad \text{.....(1)}$$

Como se quería demostrar.

Esta propiedad (Teorema), es importante por establecer el nexo de dos números con su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

Corolario 1:

El producto de dos números es igual al producto de su máximo común divisor por su mínimo común múltiplo.

De (1): $a \cdot b = m \cdot D$

iii. "Si dos números son primos entre sí, su mínimo común múltiplo es igual al producto". Si los números "a" y "b" son primos entre sí, entonces $D = 1$ y $m = a \cdot b$

iv. "Si se divide el mínimo común múltiplo m de dos números "a" y "b" por cada uno de ellos, los cocientes que resultan son primos entre sí".

v. Si se multiplican (o dividen) los números a y b por un mismo número n su mínimo común múltiplo queda también multiplicado (o dividido) por n.

$$\text{m. c. m. } (a; b) = \frac{a \cdot b}{D} = m$$

Como el máximo común divisor de an y bn es Dn, resulta

$$\text{m. c. m. } (an; bn) = \frac{a \cdot n \cdot b \cdot n}{D \cdot n} = \frac{a \cdot b}{D} \cdot n = m \cdot n$$

Método para calcular el mínimo común múltiplo

I. El mínimo común múltiplo de varios números a; b; c; . . ; l es igual al de los números m; c; . . . ; l , siendo m el mínimo común múltiplo de "a" y "b".
Pues todo múltiplo de "a" y "b" lo es de m y recíprocamente.

Ejemplo

Calcular el mínimo común múltiplo de 120; 96; 72 y 35

aplicando $m \cdot c \cdot m \quad (a;b) = \frac{a \cdot b}{D}$

$$\text{m. c. m. } (120; 96) = \frac{120 \cdot 96}{24} = 480$$

luego: m. c. m. (120; 96; 72; 35) = m. c. m. (480; 72; 35)

$$\text{pero: m. c. m. } (480; 72) = \frac{480 \cdot 72}{24} = 1\,440$$

luego: m. c. m. (480; 72; 35) = m. c. m. (1 440; 35)

en fin: m. c. m. (1 440; 35) = $\frac{1\,440 \cdot 35}{5} = 10\,080 = 10\,080$

Por consiguiente:

m. c. m. (120; 96; 72; 35) = m. c. m. (480; 72; 35) = m. c. m. (1 440; 35) = 10 080

II. "Por descomposición en factores primos:
Se descomponen los números en el producto de sus factores primos y el m. c. m. de ellos vendrá dado por el producto de los factores primos comunes y no comunes, afectados de su mayor exponente"

Ejemplo

Hallar el m. c. m. (5 400; 18 600; 14 700)

$5\,400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$
$18\,600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 31$
$14\,700 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$

$\Rightarrow$ m.c.m.$=2^3x3^3x5^2x7^2x31$

III. Por descomposición simultánea:

Se colocan los números en forma horizontal y a la derecha se traza una vertical; a la derecha de la vertical se van colocando los factores primos, comunes y no comunes, hasta que al final quede 1

El M. C. M. será el producto de los factores primos que están a la derecha de la vertical. En el ejemplo anterior.

5 400	18 600	14 700	2
2 700	9 300	7 350	2
1 350	4 650	3 675	3
450	1 550	1 225	2
225	775	1 225	3
75	775	1 225	3
25	775	1 225	5
5	155	245	5
1	31	49	7
1	31	7	7
1	31	1	31
1	1	1	

m. c. m. $= 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 31$

1. Determinar el valor de "n" sabiendo que el M. C. M. de los números:

$A = 72^n \cdot 750$ y $B = 90^n \cdot 4$ tiene 2 944 divisores.

Solución

"A" y "B" en factores primos:

$$A = 72^n \times 750 = 2^{3n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^3$$
$$B = 90^n \times 4 = 2^{n+2} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n$$

$$\text{M. C. M. } (A, B) = P = 2^{3n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n$$

Por dato: $N^0D_p = (3n+2)(2n+2)(n+1) = 2\,944$

$$(3n+2)(n+1)^2 = 1\,472$$

- $96 \cdot 4^2$ no cumple
- $368 \cdot 2^2$ no cumple
- $23 \cdot 8^2$ cumple

Rpta. $\therefore (3n+2)(n+1)^2 = 23 \cdot 8^2 \Rightarrow n = 7$

2. Hallar "n" si se tiene que el M. C. M. de $56^{2n} \cdot 539^n$ y $56^n \cdot 539^{2n}$ tiene 34,153 divisores.

Solución

Descomponiéndolo los números en factores primos:

$$A = 56^{2n} \cdot 539^n = 2^{6n} \cdot 7^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^n = 2^{6n} \cdot 7^{4n} \cdot 11^n$$
$$B = 56^n \cdot 539^{2n} = 2^{3n} \cdot 7^n \cdot 7^{4n} \cdot 11^{2n} = 2^{3n} \cdot 7^{5n} \cdot 11^{2n}$$

$$\Rightarrow \text{M. C. M.} = 2^{6n} \cdot 7^{5n} \cdot 11^{2n}$$

$$N^0D_{M.C.M} = (6n+1)(5n+1)(2n+1) = 34\,153 = 7^2 \cdot 17 \cdot 41$$

Rpta. $\Leftrightarrow n = 8$

3. Hallar la suma de los posibles valores de A, si M. C. M. (14A; 7B) = 140; M. C. M. (4A, 14B) = 280

Solución

$$14A = 2 \cdot 7 \cdot A$$
$$7B = 7 \cdot B$$
$$\text{M. C. M.} = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$4A = 2^2 \cdot A$$
$$14B = 2 \cdot 7 \cdot B$$
$$\text{M. C. M.} = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 2^n \cdot 5^m \\ B = 2^p \cdot 5^q \end{cases}$$

$n = 0 \rightarrow p = 2$
$n = 1 \rightarrow p = 0, 1, 2$

$m = 0 \rightarrow q = 1$
$m = 1 \rightarrow q = 0, 1$

Rpta. $\therefore$ los valores de A: $2^0 \times 5 + 2^0 \times 5^0 + 2 \times 5^0 + 2 \times 5 = 18$

4. Se sabe que al dividir el producto de dos números entre su M.C.D se obtiene 1 496 y que al restar la suma de los cocientes obtenidos al dividir los dos números entre su M. C. D. de su M. C. M. resulta 1 477. Hallar la suma de los dos números.

Solución

Sean A y B los números. Consideremos que:

M. C. D. (A; B) = D $\wedge$ M. C. M. (A; B) = M Podemos establecer:

Por propiedad del M. C. D.:

$A = Dq_1$

$B = Dq_2$ ——— q_1 y q_2 s. p. e. sí $\rightarrow$ Por condición:

$$\frac{A \cdot B}{D} = M = Dq_1 q_2 = 1\,496 = 2^3 \cdot 11 \cdot 17 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

también:

$$M - (q_1 + q_2) = Dq_1q_2 = 1\,47 \rightarrow q_1 + q_2 = 19 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2): $q_1 = 8 \wedge q_2 = 11 \therefore D = 17$

Rpta. $\therefore A + B = D(q_1 + q_2) = 17 \cdot 19 = 323$

5. Dos números se dividen y su cociente exacto resulta igual a su M. C. D, si la suma de su M. C. D. y su M. C. M. es 72; hallar la diferencia entre dichos números.

Solución

Como el cociente es exacto que los números son divisibles, por lo tanto el M. C. D. de ellos es el menor y el mayor es el M. C. M., además como el cociente es el M. C. D. (el # menor); el mayor será el cuadrado del menor. Si los números son A y D, entonces $A = D^2$

$$D^2 + D = 72 \Rightarrow D = 8 \wedge D^2 = 64$$

Rpta. $A - D = D^2 - D = 64 - 8 = 56$

6. La suma de dos números es 280 y su M. C. M. es 480 . Hallar la diferencia entre dichos números.

Solución

Consideremos que sean A y B los números; además: M. C. D. (A; B) = D
y M. C. M (A; B) = M

Por propiedad del M. C. D.:

$A = Dq_1 \wedge B = Dq_2$ q_1 y q_2 s. p. e. sí

$$A + B = 280 \quad \Rightarrow D(q_1 + q_2) = 280 \Rightarrow D = \frac{280}{q_1 + q_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$M = 480 \quad \Rightarrow Dq_1q_2 = 480 \Rightarrow D = \frac{480}{q_1q_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Como $(\alpha) = (\beta)$

$$\frac{q_1q_2}{q_1+q_2} = \frac{480}{280} = \frac{12}{7} = \frac{4x3}{4+3} \quad \begin{cases} q_1 = 4 \\ q_2 = 3 \end{cases} \quad \wedge \quad D = \frac{280}{4+3} = 40$$

Rpta. $\therefore \quad A = 40 \,.\, 4 = 160$

$B = 40 \,.\, 3 = 120$

$\Rightarrow A - B = 40$

7. El M. C. M. de 2 541 y un número "N" es 99099 y se sabe que "N" tiene 24 divisores. Hallar la suma de las cifras de "N".

Solución

$2\,541 = 3 \,.\, 7 \,.\, 11^2$
N

M. C. M. $= 99099 = 3^2 \,.\, 7 \,.\, 11^2 \,.\, 13$, se deduce que "N" tiene que ser de la forma:

$N = 3^2 \,.\, 13 \,.\, q_1$ donde q_1 puede ser: $\begin{cases} 7 \\ 7 \,.\, 11 \\ 7 \,.\, 11^2 \\ 11 \\ 11^2 \end{cases}$

Además: $N^{o}D_N = 24 = 3 \,.\, 2 \,.\, 4 = 3 \,.\, 2 \,.\, (1+1)(1+1)$

Entonces: $q = 7 \,.\, 11 \quad \therefore N = 3^2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 = 9009$

Rpta. Suma pedida $9 + 0 + 0 + 9 = 18$

8. Hallar la diferencia de 2 números tales que la diferencia de los cuadrados de su M. C. M. y su M. C. D. es 9555.

Solución

Sean: "A" y "B" los números. Sea "D" el M. C. D. de ellos y M su M. C. M.

Por propiedad:

$A = Dq_1$

$B = Dq_2$

q_1 y q_2 s. p. e. sí $\rightarrow M = Dq_1q_2$

Como: $M^2 - D^2 = 9555$

$$D^2q_1^2q_2^2 - D^2 = 9555 \rightarrow D^2(q_1^2q_2^2 - 1) = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \rightarrow D = 7$$

También: $q_1^2 \cdot q_2^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \rightarrow q_1^2 \cdot q_2^2 = 196 \rightarrow q_1 \cdot q_2 = 14 = 7 \cdot 2 = 14 \times 1$

Rpta. $\therefore A - B = \begin{cases} 7(7-2) = 35 \\ (14-1) = 91 \end{cases}$

9. Se sabe que la suma del M. C. M. y del M. C. D. de dos números es 1 177. Hallar la suma de los posibles valores que puede tomar el M. C. M., si se sabe además que los números no son primos entre sí.

Solución

Los números: "A" y "B"; M. C. D = D; M. C. M = M:

$$M + D = 1\,77 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A = Dq_1 \\ B = Dq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M = Dq_1q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(2) en (1):

$D(q_1q_2 + 1) = 1\,177 = 11 \cdot 107$ como $D \neq 1 \rightarrow D = 11$

$$\rightarrow q_1q_2 = 106 \quad \begin{cases} q_1 = 2 \\ q_2 = 53 \end{cases}$$

También se puede verificar que:

$$D = 107;\ q_1q_2 = 10 \quad \begin{cases} q_1 = 2 \\ q_2 = 5 \end{cases}$$

$\therefore M = 11 \cdot 2 \cdot 23 = 1\,166$ ó $M = 107 \cdot 2 \cdot 5 = 1\,070$

Suma pedida: $1\,166 + 1\,070 = 2\,236$

Rpta. 2 236

10. Hallar la diferencia entre dos números cuyo M. C. M. es 816, y que los cocientes sucesivos que se hallaron aplicando el algoritmo de Euclídes para la determinación de su M. C. D. son: 2, 1 y 5.

Solución

Sean: A y B los números. A > B . Sea M el M. C. M. (A; B). Por condición del problema, podemos establecer:

	2	1	5	
A	B	R_1	R_2	= M. C. D. (A, B)
R_1	R_2	0		

$\therefore R_1 = 5R_2$; $B = R_1 + R_2 = 6R_2$; $A = 2B + R_1 = 17R_2$

$$\left.\begin{array}{l} A = R_2 . 17 \\ B = R_2 . 6 \end{array}\right\rangle \quad \text{.....(1)}$$

$$M = R_2 . 6 . 17 = 816 \Rightarrow R_2 = 8$$

En (1): $A = 8 . 17$

$B = 8 . 6$

$\Rightarrow A - B = 8 (17 - 6) = 88$

Rpta. 88

11. Hallar si "n" si $N_1 = 36 \times 40^n$; $N_2 = 36^n \times 40$ y si:

$$\text{M. C. D. } (N_1 , N_2) = 32 \sqrt[3]{2 \text{ M.C.M}(N_1,N_2)}$$

Solución

Descomponiendo N_1 y N_2 en factores primos:

$N_1 = 2^2 . 3^2 . 2^{3n} . 5^n = 2^{3n+2} . 3^2 . 5^n$ ⇒ M. C. D. $(N_1; N_2) = 2^{2n+3} . 3^2 . 5$

$N_2 = 2^{2n} . 3^{2n} . 2^3 . 5 = 2^{2n+3} . 3^{2n} . 5$ ⇒ M. C. D. $(N_1; N_2) = 2^{3n+2} . 3^{2n} . 5^n$

Como: M. C. D. $(N_1 ; N_2) = 32 \sqrt[3]{2 \text{ M.C.M}(N_1,N_2)}$, entonces:

$$2^{2n+3} . 3^2 . 5 = 2^5 \sqrt[3]{2 . 2^{3n+2} . 3^{2n} . 5^n}$$

$$2^{2n+3} . 3^2 . 5 = 2^5 . 2^{n+1} . 3^{2n/3} . 5^{n/3}$$

$$2^{2n+3} . 3^2 . 5 = 2^{n+6} . 3^{\frac{2n}{3}} . 5^{\frac{n}{3}} \Leftrightarrow n=3$$

Rpta. n = 3

12. El M. C. M. de dos números que se diferencian en 10 unidades es 2415, hallar la cifra de las decenas del menor de los números.

Solución

Sean: A y (A + 10) los números. Sea M. C. D. (A; B) = D y M. C. M. (A; B) = M

Por propiedad del M. C. D.:

$$\left.\begin{array}{r} A = Dq_1 \\ (A+10) = Dq_2 \end{array}\right\} q_1 \text{ y } q_2 \text{ s. p. e. sí.}$$

$$M = Dq_1q_2 = 2\,415 \Rightarrow D.\,q_1.\,q_2 = 3.5.7.23 \Leftrightarrow \begin{array}{l} D = 5 \\ q_1 = 21 \\ q_2 = 23 \end{array}$$

$$\therefore\ A = 5.21 = 105$$
$$A + 10 = 5.23 = 115$$

Rpta. La cifra de las decenas del Nº menor es **cero**

13. La media armónica de dos números es igual a la cuarta parte de su M. C. M. y la media aritmética de su M. C. M y su M. C. D. es 32. Hallar la diferencia entre dichos números.

Solución

Sean: A y B los números. Podemos establecer:

$$\frac{2A\cdot B}{A+B} = \frac{1}{4}[\ \text{M. C. M. (A; B)}\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{\text{M.C.M.(A;B)} + \text{M.C.D.(A;B)}}{2} = 32 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Consideremos:

M. C. D. (A; B) = D
M. C. M (A; B) = M

Por propiedad del M. C. D.:

$$\left.\begin{array}{r} A = Dq_1 \\ B = Dq_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \qquad \text{además: } M = Dq_1\,q_2 \ldots\ldots\ldots (4)$$

(3) y (4) en (1):

$$\frac{2Dq_1q_2D}{D(q_1+q_2)} = \frac{1}{4}M \Rightarrow q_1 + q_2 = 8 \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Si: } q_1 = 7;\ q_2 = 1 \\ \qquad q_1 = 5;\ q_2 = 3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

(3) en (2):

$$\frac{Dq_1q_2 + D}{2} = 32 \rightarrow D\,(q_1.\,q_2 + 1) = 64 \Rightarrow \frac{64}{q_1q_2+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

(5) en (6):

$$D = \frac{64}{7.1+1} = 8 \quad = 8 \text{ ó } D = \frac{64}{5.3+1} = 4 \quad \text{en (3):}$$

$A = 8 \cdot 7 = 56$ $\quad$ $A = 4 \cdot 5 = 20$

$\rightarrow A - B = 48$ $\quad$ ó $\quad$ $\rightarrow A - B = 8$

$B = 8 \cdot 8 = 8$ $\quad$ $B = 4 \cdot 3 = 12$

Rpta. Existen 2 soluciones $\begin{cases} A - B = 48 \\ \text{ó} \\ A - B = 8 \end{cases}$

14. La editorial SS publica cierta cantidad de libros y se observa que al contarlos de 10 en 10 quedan 3; de 15 en 15 quedan 3; de 12 en 12 faltan 9 para completar un número exactamente grupos. Si la cantidad de libros es mínima y mayor que 2 000, ¿Cuántos libros se publicaron?

Solución

Sea "N" el número de libros. Podemos establecer:

$$\left.\begin{array}{l} N = \dot{12} + 3 \rightarrow N - 3 = \dot{12} \\ N = \dot{10} + 3 \rightarrow N - 3 = \dot{10} \\ N = \dot{15} + 3 \rightarrow N - 3 = \dot{15} \\ N = \dot{8} + 3 \rightarrow N - 3 = \dot{8} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} N - 3 = \dot{MCM(8, 10, 12, 15)} \\ N - 3 = \dot{120} \\ N - 3 = 120K \\ N = 120k + 3; \text{ por condición:} \end{array}$$

$N > 2000$

$120k + 3 > 2000 \Rightarrow K > 16^{a/b}$ $\quad \therefore$ mínimo $= 17$

$\therefore N = 120\,(17) + 3 = 2\,043$

Rpta. Se publicaron 2 043 libros.

15. Hallar la cifra de unidades del mayor número de tres cifras que convertido a los sistemas de numeración de bases 6; 8 y 9 dan como resultados números que terminan en 5, 7 y 8 respectivamente.

Solución

Sea $\mathbb{N}$ el número.

En base 6: $\mathbb{N} = \overline{.....5}_{(seis)} \rightarrow \mathbb{N} = \dot{6} + 5$ ..... (1)

En base 8: $\mathbb{N} = \overline{.....7}_{(ocho)} \rightarrow \mathbb{N} = \dot{8} + 7$ ..... (2)

En base 9: $\mathbb{N} = \overline{.....8}_{(nueve)} \rightarrow \mathbb{N} = \dot{9} + 8$ ..... (3)

(1), (2) y (3), sumando 1 a ambos miembros se obtiene:

$N + 1 = \overline{6}; \overline{8}$ y $\overline{9} \Rightarrow N + 1 = \overline{MCM(6, 8, 9)} = \overline{72} \Rightarrow N = \overline{72} - 1$

Por condición: $N < 1000 \Rightarrow 72k - 1 < 1000 \Rightarrow k < 13,9$

$\therefore N = 72 \cdot 13 - 1 = 935$

Rpta. $\therefore$ N termina en 5.

16. Tres corredores A; B y C parten juntos desde un mismo punto de una pista circular que tiene 90 metros de circunferencia. La velocidad de A es de 9m/seg.; la de B , 5m/seg. y la de C, 3m/seg. ¿ Después de cuánto tiempo tendrá lugar del próximo encuentro de los tres?

Solución

A recorre 9 - 5 = 4m/seg. más que B; luego lo alcanza cada: 90 ÷ 4 = 22,5 seg. también A recorre: 9 - 3 = 6m/seg. más que C; luego lo alcanza cada: 90 ÷ 6 = 15 seg.

$\therefore$ Para que los tres estén juntos nuevamente, debe transcurrir un tiempo igual al M. C. M. (22, 5 ; 15) = 45 segundos.

Rpta. 45 segundos.

17. Se hacen funcionar dos relojes a las 0 horas, si uno de ellos se retrasa 10 minutos cada hora con respecto al otro. ¿ Cuánto tiempo transcurrirá hasta que ambos relojes coincidan a las 12 horas ?

Solución

Cuando uno avanza 60 minutos el otro avanza: 60 - 10 = 50 minutos, este reloj avanza 5/6 de vuelta en una hora; dará una vuelta en 6/5 de hora = 72 minutos.

$\therefore$ El primero da una vuelta en 60 minutos $\rightarrow$ 12 vueltas dará en 12 . 60 = 720 minutos

El segundo da una vuelta en 72 minutos $\rightarrow$ 12 vueltas dará en: 12 . 72 = 864 minutos.

Coincidirán cada que transcurra un tiempo igual al M. C. D. (720, 864) = 4 320 minutos $<>$ 3 días.

Rpta. 3 días.

18. Las ruedas delanteras y posteriores de una locomotora miden 250 y 425 cm. de circunferencia. ¿ Qué distancia deberá recorrer la locomotora, para que una de las ruedas de 28000 vueltas más que la otra ?

Solución

Cada que la locomotora recorre 250 cm. la rueda delantera da una vuelta y cada que recorra 425 la mayor dará una vuelta completa.
Para que las dos ruedas de un número exacto y entero de vueltas, la locomotora debe recorrer como mínimo una distancia igual al M. C. M (250, 425) = 4 250 = 42,5 m en éste recorrido:

La rueda menor da: $4\,250 \div 250 = 17$ vueltas.

La rueda mayor da: $4\,250 \div 425 = 10$ vueltas; en este lapso, la menor le saca a la mayor: $17 - 10 = 7$ vueltas de ventaja.

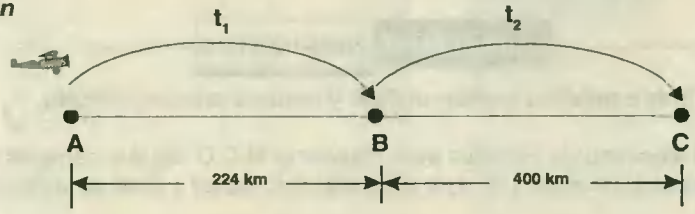
$\therefore$ Para sacar 28 000 vueltas de ventaja, la locomotora debe recorrer:

$$\frac{28\,000 \times 42{,}5}{7} = 170\,000 \text{ metros}$$

Rpta. 170 000 metros.

19. La ciudad A está a 224 Km de la ciudad B y a 624 Km. de la ciudad C. Un avión que vuela a velocidad constante hace escala en B al ir de A hacia C. Suponiendo que no tarda nada en la ciudad B y que el M. C. M. de los tiempos que demora en ir de A a B de B a C es de 700 minutos. ¿ Cuántos minutos dura el viaje de A a C ?

Solución



Sea V la velocidad del avión. Podemos establecer:

$$V = \frac{224}{t_1} = \frac{400}{t_2} \rightarrow \frac{2^5 \cdot 7}{t_1} = \frac{2^4 \cdot 5^2}{t_2}$$

Como: M. C. M. $(t_1; t_2) = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

se deduce:
$t_1 = 2^2 . 7 = 28$
$t_2 = 2 . 5^2 = 50$

Rpta. $\therefore$ El viaje de A a C dura: $28 + 50 = 78$.

20. Dos camiones transportan carga de Lima a Chiclayo y de Chiclayo a Lima. El primero de ellos puede transportar dos toneladas; el segundo 2.5 toneladas. Al empezar a trabajar, salen al mismo tiempo de la ciudad de Lima y se sabe que el primero hace el viaje de ida y vuelta en 16 días mientras que el segundo lo hace en 21 días. Además el primero descansa 2 días antes de volver a salir para Chiclayo, mientras que el segundo lo hace en 3 días. Después de haber transportado 217 toneladas entre los dos en total. ¿ Cuántas veces salieron de Lima ?

Solución

Para que salgan juntos de Lima, debe transcurrir un tiempo igual al M. C. M. C. M. (18 y 24) esto es:

M. C. M (18, 24) = 72 días.

- El primero realiza: $\frac{72}{18} = 4$ viajes (ida y vuelta)
- El segundo realiza: $\frac{72}{24} = 3$ viajes.

El primero carga: 4 x 4 = 16 toneladas
El segundo carga: 3 x 5 = 15 toneladas
} 31 toneladas

$\therefore$ Partieron juntos: $\frac{217}{31} = 7$ veces

Rpta. 7 veces.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

1. Se aplica el algoritmo de Euclídes para obtener el M.C.D. de dos números obteniéndose como cocientes sucesivos: 1; 2; 2; 3; 2. Si el M.C.D. es 30 ¿ Cuál es la diferencia de los 2 números ?

a) 280 b) 560 c) 420 d) 480 e) 240

2. Al calcular el M.C.D. de $\overline{mnmn}$ y $\overline{momo}$ mediante el algoritmo de Euclídes, los dos únicos cocientes sucesivos fueron 1 y 12. Hallar la suma de las cifras del M.C.D.

a) 12 b) 10 c) 18 d) 15 e) 16

3. Para hallar el M.C.D. de 2 números se utilizó el Algoritmo de Euclídes hallándose 2 cocientes que son números iguales. Si la suma de dichos números es 341. Hallar el menor de ellos.

a) 55 b) 93 c) 77 d) 62 e) 52

4. Al calcular el M.C.D. de los números 5529 y 6441 por divisores sucesivos. ¿ Cuál fue la suma de los cocientes ?

a) 15 b) 18 c) 21 d) 22 e) 23

5. El M.C.M. de dos números es 252888 y los cocientes obtenidos para calcular el M.C.D. de dichos números por divisiones sucesivas fueron: 3, 7, 2 y 5 respectivamente. Hallar el mayor de los números.

a) 984 b) 4,074 c) 2, 542 d) 3, 084 e) N. A.

6. Para hallar el M.C.D. de 2 números, se utilizó el algoritmo de Euclides, hallándose como residuos, 21, 7 y 0. Si el M.C.M. de dichos números es 490, hallar la suma de dichos números.

a) 119 b) 113 c) 490 d) 259 e) N. A.

7. Dados 4 números A; B; C y D se observa que:

M. C. D. (A; B; C) = 84
M. C. D. (B; C; D) = 396

¿ Cuál es el M.C.D. (A; B; C; D) ?

a) 6 b) 18 c) 12 d) 24 e) 36

8. Cuántos números de 2 cifras cumplen que el M.C.D. de dicho número y su C. A. sea 5.

a) 7 b) 8 c) 9 d) 0 e) 11

9. El M.C.D. de 3 números es 36; si se suma 4 unidades a cada uno de ellos, en ese caso su M.C.D. puede ser:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 5 e) N.A.

10. El M.C.D. de $\overline{ab}$ (a y b diferentes de cero) y 42 es (a + b). Hallar (b - a)

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

11. ¿ Cuántos números de la forma $\overline{ab}$ existen tales que el M.C.D. de $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ sea (a + b) ?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

12. Si $\overline{abc}$ - $\overline{cba} = \overline{5dn}$, qué valor debe tener la cifra b para que el M.C.D. de $\overline{abc}$ y $\overline{cba}$ sea 18.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

13. El producto de la media aritmética por la medida armónica de dos números es 119808. Si el M.C.D. de dichos números es 24. ¿ Cuál puede ser el mayor de ellos.

a) 312 b) 336 c) 360 d) 384 e) 408

14. Cuántos son los números de 2 cifras tales que el M.C.D. entre el número y su C°A es 4.

a) 8 b) 10 c) 20 d) 16 e) 32

15. El M.C.D. de 2 números A y B es 72. Si A tiene 20 divisores y B 18 divisores.
¿ Cuál es la suma de los divisores impares de A + B ?

a) 182 b) 192 c) 204 d) 341 e) 162

16. Al calcular el M.C.D de $\overline{abbc}$ y $\overline{cbba}$ por el algoritmo de Euclídes los cocientes sucesivos fueron: 1; 1; 11; 1; 2 y 6 respectivamente. Si a - c = 4. Hallar $\overline{abbc}$

a) 8334 b) 7446 c) 8446 d) 7328 e) 7443

17. Si el M.C.D. (15A, 25B) es 270 y el M.C.D (25A, 15B) es 90. Hallar el M.C.D. (2A, 2B).

a) 18 b) 20 c) 36 d) 54 e) 90

18. Si: * M.C.D (4A, 5B/3) = 27
* M.C.D (0.25A, 0.6B) = 9
Hallar el menor valor de B que cumple dicha condición

a) 810 b) 910 c) 405 d) 300 e) 270

19. Hallar dos números de tres cifras, equimúltiplos de 65 y 95, sabiendo que la diferencia de estos números invertidos es igual al séxtuplo del M.C.D. de los números que se buscan. Dar como respuesta, la suma de las cifras del menor.

a) 4 b) 10 c) 5 d) 9 e) 8

20. Hallar los dos menores que tengan su M.C.D. = 210 y sabiendo que su producto es un cubo perfecto y su cociente es igual a 10/21. Dar como respuesta, la suma de los dos números.

a) 6 160 b) 8 940 c) 3 260 d) 8 400 e) 6 510

21. Hallar cuántos divisores comunes tienen los números 1848 y 1188.

a) 12 b) 18 c) 24 d) 32 e) 36

22. Determinar cuántos pares de números cuyo M.C.D. sea 17 existen comprendidos entre 800 y 900.

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

23. Para hallar el M.C.D. de 2 números se utilizó el Algoritmo de Euclídes hallándose 2 cocientes que son números iguales. Si la suma de dichos números es 341. Hallar el menor de ellos.

a) 55 b) 93 c) 77 d) 62 e) 52

24. Al utilizar el algoritmo de Euclídes en la determinación del M.C.D. de 2 números que suman 350, se hallan 2 cocientes que son q y q + 1. Determinar la cifra de las unidades del menor número si se sabe que "q" es el mayor posible.

a) 3 b) 4 c) 9 d) 0 e) 5

25. Si M.C.M. (42A, 6B) = 8064 y M.C.D. (77A, 11B) = 88 hallar B - A.

a) 40 b) 36 c) 64 d) 24 e) F.D.

26. El cociente entre 2 números es igual a su M.C.D. y el M.C.M. de los números es 144. Hallar el menor de los números.

a) 12 b) 36 c) 48 d) 84 e) 60

27. La suma de los cuadrados de 2 números es 6,784 y su M.C.M. es 360, hallar la diferencia entre dichos números.

a) 24 b) 30 c) 32 d) 96 e) 48

28. El M.C.M. de 2 números es 336 y la suma de sus cuadrados es 5,440 hallar la diferencia de dichos números.

a) 8 b) 32 c) 64 d) 48 e) 60

29. Hallar la suma de las cifras del M.C.M. de dos números cuya suma es 793 y cuyo producto es 121 680.

a) 20 b) 15 c) 18 d) 17 e) 13

30. El M.C.M. de dos números cuyo producto es 116 909 es 5 083. Si ninguno de ellos es igual a su M.C.D, hallar su diferencia.

a) 88 b) 92 c) 82 d) 85 e) 96

31. En qué cifra termina el producto de los números que tienen a 62 468 como M.C.M. y a 28 como M.C.D ?

a) 4 b) 1 c) 6 d) 3 e) 9

32. Hallar la suma de dos números de dos cifras cada uno, sabiendo que la diferencia entre su M.C.M. y su M.C.D. es 243.

a) 110 b) 95 c) 99 d) 100 e) 105

33. Hallar los números "A" y "B" si cumplen:

i. $A^2 + B^2 = 23\,976$
ii. M.C.M (A, B) = 630

Dar como respuesta la diferencia de los números.

a) 24 b) 36 c) 32 d) 46 e) 26

34. Determinar el menor número entero que es M.C.M. de 20 números enteros diferentes.

a) 432 b) 120 c) 240 d) 220 e) N.A.

35. El producto de la media aritmética por la media armónica de dos números es: 25,200. Si el M.C.D. de los 2 números es 12. Hallar su M.C.M.

a)2100 b) 4200 c) 6300 d) 8400 e) N.A.

36. Si M.C.D. (A, B) = 22; M.C.D. (A, C) = 11; M.C.D. (B, C) = 33; M.C.M. (A, B, C) = 198 y A + B + C = 187. Calcular C.

a) 33 b) 66 c) 99 d) 132 e) 165

37. La suma de los cubos de dos números enteros es 1475712 y el M.C.M. de dichos números es 540. Determinar el menor número de los números.

a) 36 b) 40 c) 48 d) 60 e) 72

38. Dos ruedas dentadas dan respectivamente 54 RPM y 72 RPM. Si señalamos con una tiza, antes de ponerlas en marcha, los dos dientes en contacto, ¿ Cuántas vueltas más habrá dado la más pequeña que la mayor cuando los dos dientes marcados nuevamente esten en contacto ?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) N.A.

39. Tres autos salen al mismo tiempo a las 8 a.m. del martes 13 de febrero de 1990 de una estación en tres direcciones diferentes. Los de la primera línea vuelven al punto de partida pasados 390 minutos y están sólo media hora en la estación para volver a salir. Los de la segunda línea vuelven a los 304 minutos y se quedan 56 minutos y los de la tercera línea regresan a los 288 minutos y tardan en salir 12 minutos.
A que hora y de que día volverán a salir al mismo tiempo los tres autos ?

a) 8 am del 21 de febrero
b) 2 am del 21 de febrero
c) 8 am del 22 de febrero
d) 2 am del 22 de febrero
e) N.A.

40. Un cable está medido por un número entero de centímetros, también por un número entero de pulgadas inglesas y también por un número entero de pulgadas francesas.

Determinar su longitud sabiendo que no pasa de 50 metros (pulgada inglesa: 254 diez milésimas de metro; pulgada francesa: 270 diez milésima de metro).

a) 22.86mt. b) 34.29mt. c) 17.145mts d) 45.72mt. e) N.A.

41. El producto de dos números es 2,500 y el cociente de la media aritmética entre la medida geométrica de su M.C.D. y M.C.D. es 1.25 Hallar la diferencia de dichos números.

a) 50 b) 75 c) 25 d) 100 e) N.A.

42. Encontrar 3 números enteros A, B y C en base 12, si el M.C.D. (A, B) = $15_{(12)}$, el M.C.D. (B, C) = $15_{(12)}$ y M.C.D. (A, C) = $15_{(12)}$ además M.M.C. (A, B, C) = $1049_{(12)}$ y A + B + C = $193_{(12)}$

a) $13_{(12)}$ B) $9\beta_{(12)}$ c) $19_{(12)}$ d) $10_{(12)}$ e) N.A.

43. A y B son dos números divisibles por 7 tal que al dividirlos entre 2, 3, 4, 5 ó 6 se obtiene siempre 1 de residuo. Si A es el menor número y B el mayor número menor que 1000. Entonces el valor de A + B es:

a) 842 b) 902 c) 1022 d) 782 e) 1142

44. Si $A^2 - B^2 = 2160$ y M.C.M. (A, B) = 48. Hallar el mayor.

a) 48 b) 36 c) 24 d) 40 e) 12

45. Si: M.C.D (A, B) = $\frac{\overline{1ab}}{4}$

M.C.D. (A, C) = $\frac{\overline{1ab}}{3}$

M.C.D. (A, B, C) = 7

Hallar: a + b

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

46. Se tiene que:

$$\frac{MCD(A,B)}{MCM(A,B)} = \frac{1}{84.MCD(A,B)}$$

y sabiendo que el producto de: A y B es 18,144. Hallar el M.C.M.

a) 3024 b) 9172 c) 6048 d) 6006 e) 2008

47. Se sabe que la diferencia entre el M.C.M. y el M.C.D. de tres números es 2788, que la diferencia entre el mayor y el intermedio es 102 y que la diferencia entre el mayor y el menor es 136. ¿ Cuál de los siguientes números es uno de ellos, sabiendo que al dividirse los

números entre su M.C.D. se obtienen cocientes primos 2 a 2.

a) 34 b) 85 c) 68 d) 89 e) 102

48. Si dos números enteros se multiplican por 8 su M.C.M. y su M.C.D. quedan aumentados en 22,932 y 252 respectivamente, hallar el número mayor, si m son divisibles entre sí.

a) 252 b) 152 c) 145 d) 458 e) 406

49. Se tiene un terreno en forma de triangulo rectángulo y cuyos catetos miden 540mts. y 288mts. se desea cercarlo con alambre sujeto a postes equidistantes de tal manera que haya por lo menos un poste en cada lado vértice y uno de los puntos medios de los lados. ¿ Cuántos postes como mínimo se necesitarán ?.

a) 80 b) 160 c) 240 d) 96 e) N.A.

50. Tres aviones de una compañía comercial salen de un mismo aeropuerto: El 1ro. cada 8 días, el 2do. cada 15 días y el 3ero. cada 2 días. Si los aviones salieron juntos el 2.1.85. ¿ Dígase cuál será la fecha más próxima en que volverán a hacerlo juntos ?

a) 23.4.87 b) 22.4.87 c) 21.4.87 d) 25.4.87 e) 26.4.87

51. Se desea construir un patio rectangular para depositar cajones de 3 clases.

1ra. : Base 22 x 24m², Altura 15m.
2da. : Base 21 x 33m², Altura 15m.
3ra. : Base 18 x 28m², Altura 15m.

¿ Cuáles son las dimensiones mínimas que debe tener el patio para cuando se coloque cajones de una misma clase, no quede espacio libre alguno ?. Dar como respuesta el lado mayor del patio construido.

a) 168 b) 1386 c) 1748 d) 585 e) 198

52. En un pueblo se realizó un censo por 2 compañías de estadísticas diferentes, la primera contó en base 6 y la otra en base 5, y se dieron con la sorpresa de que le número de habitantes para las dos compañías terminaba en dos ceros. Hallar el número de habitantes de dicho pueblo si es un número comprendido entre 3000 y 4000. Dar como respuesta la cifra de 3er. orden de dicho número hallado.

a) 9 b) 4 c) 8 d) 3 e) 6

53. Un empleado trabaja 11 días seguidos y descansa el duodécimo. Si empezó a trabajar en lunes; hallar:

¿ Cuántos días debe transcurrir para que le toque descansar el domingo ?. ¿ Cuántos días trabajo hasta ese momento ?.

a) 84 y 76 dias b) 83 y 76 días c) 82 y 77 días d) 84 y 77 días e) 83 y 77 días.

54. Carlos manda a su empleado a la librería a comprar borradores, lapiceros y cuadernos con la condición de gastar la misma suma para cada tipo de artículo escolar y que sea la menor posible bajo pena de pagar S/.100 por cada artículo que compre demás. El empleado encontró borradores a S/. 3000 y cuadernos a S/.7500 y S/.9000 c/u de estos tomó los más baratos y tuvo que pagar una suma a su patrón ¿ Cuál fue esta suma ?.

a) S/.1200 b) S/.1600 c) S/.1700 d) S/.1800 e) S/.1900

55. Un libro tiene 256 páginas, otro tiene 160 páginas, suponiendo que los dos están formados por cuadernillos del mismo número de páginas es que este es número menor que 30 pero mayor que 10. Dígase cuántos cuadernillos tiene en total los 2 libros.

a) 13 b) 18 c) 36 d) 15 e) 26

56. Encontrar dos números conociendo su suma "S" igual a 341 y sabiendo que su M.C.M. es igual a 28 veces su M.C.D.

Dar como respuesta la suma de las cifras del número mayor.

a) 10 b) 8 c) 13 d) 12 e) 7

57. Si dos números que suman 200 se multiplican por 7 su M.C.D. y M.C.M. aumentan en 48 y 6048 respectivamente. Hallar la diferencia de dichos números.

a) 48 b) 56 c) 66 d) 72 e) 88

58. Encontrar tres números enteros a, b y c sabiendo que:

$$\text{M.C.D.}(a\,;b) = 17$$
$$\text{M.C.D.}(a\,;c) = 17$$
$$\text{M.C.D.}(b\,;c) = 17$$
$$\text{M.C.M.}(a;b;c) = 1785$$
$$a+b+c = 255$$

Dar como respuesta la suma de las cifras del menor.

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

59. Hallar la suma de 2 números, sabiendo que la suma de sus cubos es 40824 y que su M.C.D. es 6.

A) 24 b) 40 c) 48 d) 54 e) 60

60. Si $A - B = 170$ y $\text{M.C.M.}(A, B) + \text{M.C.D}(A, B) = 530$. Hallar A

a) 172 b) 176 c) 96 d) 160 E) 89

61. El M.C.M. de 2 números es 840 y la diferencia entre ellos es 36, hallar la suma de dichos números.

a) 228 b) 120 c) 144 d) 184 e) 204

62. Calcular la mínima diferencia que puede existir entre dos números cuya suma es 168 y su M.C.D. es 14.

a) 140 b) 28 c) 24 D) 36 e) 56

63. Si M.C.M. (A, B) = 2A, M.C.D. (A, B) = A/3. Hallar la suma de sus cifras de A, si A - B = 168.

a) 9 b) 8 c) 7 d) 12 e) 15

Clave

1. d	16. a	31. a	46. d	61. d
2. c	17. b	32. d	47. c	62. c
3. b	18. a	33. c	48. d	63. a
4. b	19. d	34. e	49. a	
5. c	20. c	35. d	50. e	
6. d	21. b	36. a	51. d	
7. a	22. e	37. c	52. b	
8. c	23. e	38. c	53. b	
9. b	24. d	39. b	54. c	
10. d	25. c	40. b	55. a	
11. d	26. b	41. d	56. b	
12. c	27. a	42. c	57. b	
13. b	28. c	43. a	58. d	
14. e	29. b	44. e	59. a	
15. a	30. a	45. a	60. a	

Capítulo 11

NUMEROS RACIONALES
(Fracciones Ordinarias)

Ampliación del conjunto de los números naturales:

Las operaciones con números naturales (adición, multiplicación, elevación a potencia) son siempre posibles, es decir, la suma de dos números naturales cualesquiera puede hallarse en todo caso y es otro número natural, y lo mismo sucede con el producto de dos números (que es un caso particular de la suma) o con la potencia de un número (que es un caso particular de la multiplicación).

No sucede lo propio con las operaciones inversas: sustracción, división, extracción de raíz y logaritmación, pues estas presentan frecuentemente casos de IMPOSIBILIDAD en $\mathbb{N}$; esto es, hay casos en los cuales:

$$\nexists\, x \in \mathbb{N} \;/\; x = 3 - 8; \quad x = \frac{5}{6}; \quad x = \sqrt{5}; \quad x = \log 50 \ldots\ldots (\alpha).$$

Así surgió la necesidad de introducir los números negativos y los números fraccionarios que forman la clase de NUMEROS RACIONALES [1] de los cuales en este capítulo nos referiremos a las Fracciones.

Históricamente los números racionales han sido creados para medir, esto es, para representar las cantidades de diversas magnitudes: longitudes, áreas, volúmenes, tiempos, pesos,....

Definición 1

Se llama fracción a todo par de números enteros dados en un cierto orden, de tal modo que el primero no sea múltiplo del segundo y éste sea distinto de cero:

Sea la fracción: $\frac{a}{b}$ que también se puede representar como par ordenado (a, b), donde **a** recibe el nombre de numerador y **b** denominador.

Generalizando:

$$(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{o\}) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \wedge b \in (\mathbb{Z} - \{o\})$$

Decimos que **b** pertenece al conjunto de enteros excluido el CERO, porque la división entre cero no está definida.

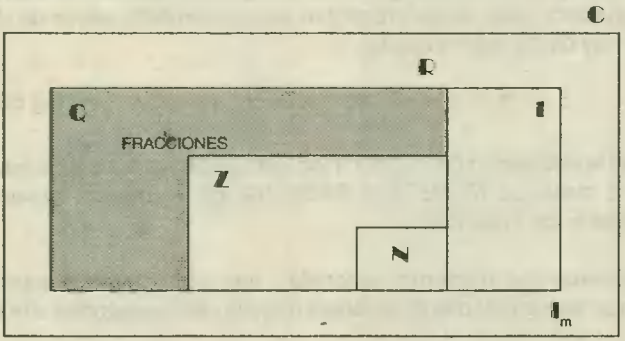
Definición 2

Una fracción es una manera de expresar que una cantidad ha sido dividida en cierto número de partes. El numerador indica el número de partes consideradas y el denominador el número de partes en que se ha dividido la cantidad en cuestión. Así 3/10 significa que se están considerando 3 de las 10 partes en que se ha dividido la cantidad.

Nota: Con frecuencia, en la práctica, a la cantidad que se divide se le considera como un **todo** y se la representa con el número 1.

Definición 3

Números fraccionarios o fracción, es uno o el conjunto de varias partes alícuotas del módulo o unidad que no constituyan un número natural de unidades.



(1) Este conjunto numérico no permite resolver todas las situaciones propuestas en (α) ya que subsiste en general la imposibilidad para otras operaciones inversas: extracción de raíces y logaritmación que requieren de una nueva ampliación de estos conjuntos numéricos.

Lectura de los números fraccionarios:

Se representa una fracción escribiendo el numerador encima del denominador separados por un trazo horizontal.

Se nombra una fracción escrita, nombrando primero el numerador y después el denominador seguido, en general, de la denominación **"avos"**, y por excepción con las denominaciones medio, tercio, cuarto o décimas, centésimas, etc.

Si los términos vinieran expresados por letras, por ejemplo, la fracción $\frac{a}{b}$ se leería "a" betésimas o simplemente "a" PARTIDO por "b".

$\frac{5}{7}$ → cinco séptimos

$\frac{300}{43}$ → trescientos, cuarenta y tresavos

$\frac{m}{n}$ "m" enésimas

$\frac{c}{d}$ "c" detésimas.

* la fracción que no tiene más que una parte alícuota, se llama unidad fraccionaria:

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{35};\ \frac{1}{100}$$

Fracciones inversas (1)

Dos fracciones se dice que son entre sí inversas, cuando el numerador de cada una es el denominador de la otra. Así la fracción inversa de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$ y la fracción inversa de $\frac{m}{n}$ es $\frac{n}{m}$

Corolario

El producto de dos fracciones inversas, es igual a 1. En efecto, tomando los ejemplos anteriores, tendríamos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 \qquad \frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = 1$$

(1) También se les llama fracciones recíprocas, o se dice que una de ellas es el inverso multiplicativo de la otra.

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción, es hallar otra igual a ella de términos menores. Se dice que una fracción es irreductible o que está reducida a su más simple expresión, cuando ya no puede ser simplificada esto es cuando el numerador y denominador son primos entre sí.

Ejemplo: Simplificar $\frac{42}{70}$ $\frac{42}{70} <> \frac{21}{35}$

Al pasar de la primera a la segunda se ha simplificado la fracción, pero no se ha reducido a su más simple expresión, ya que a su vez:

$$\frac{21}{35} <> \frac{3}{5}$$

Teorema fundamental de la simplificación de fracciones

"Si dos fracciones son iguales y una de ellas es irreductible, los términos de la otra son "**equimúltiplos**" de la primera.

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28} \Rightarrow \begin{cases} 12 \mid 3 \\ \quad\; ④ \\ 28 \mid 7 \\ \quad\; ④ \end{cases}$$

12 y 28 son equimúltiplos de 3 y 7 respectivamente porque los contienen el **mismo** número de veces (4)

$$\therefore \frac{3}{7} = \frac{3x4}{7x4}$$

Si: $\frac{a}{b}$ es una fracción irreductible e igual a $\frac{c}{d}$ se cumple:

$$c = ak \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$d = bk$$

$$\therefore \boxed{\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}}$$

Corolario

Para reducir una fracción a su más simple expresión o para hallar la fracción irreductible equivalente a una fracción dada, se dividen sus dos términos por su M.C.D.

Reducir: $\frac{12}{28}$ como M.C.D (12; 28) = 4 dividimos los términos de la fracción entre 4 y

se obtendrá una irreductible equivalente:

$$\frac{12}{28}=\frac{\frac{12}{4}}{\frac{28}{4}}=\boxed{\frac{3}{7}}$$

Criterios de igualdad y desigualdad de números racionales

Dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se dice que son iguales cuando tienen iguales los productos cruzados, y se dice que son desiguales cuando son diferentes los productos cruzados. Así:

i. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c;$ ⟶ $\frac{3}{4}=\frac{12}{16} \Rightarrow 3 \times 16 = 4 \times 12$

ii. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d > c.b;$ ⟶ $\frac{3}{5}>\frac{1}{8} \Rightarrow 3 \times 8 > 5 \times 1$

iii. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d < b.c;$ ⟶ $\frac{3}{7}<\frac{4}{5} \Rightarrow 3 \times 5 < 7 \times 4$

Clasificación de las fracciones ordinarias por la relación de sus términos

I. **Fracción propia:**
Es aquella en la que el numerador ES MENOR que el denominador.

Ejemplos: $\frac{1}{3}; \frac{4}{11}; \frac{35}{73}; \frac{8}{41};$ ..... ; en general: $\frac{a}{b}<1 \Rightarrow a<b$

II. **Fracción impropia:**
Es aquella en la que el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{6}{5}; \frac{11}{2}; \frac{8}{7}; \frac{41}{3};$ ..... ; en general: $\frac{m}{n}>1 \Rightarrow m>n$

III. **Fracciones homogéneas:**
Aquellas que tiene el mismo denominador.

Ejemplos: $\frac{6}{15}; \frac{8}{15}; \frac{41}{15}; \frac{11}{15};$ .....

IV. **Fracciones heterogéneas:**
Aquella que tienen distinto denominador.

Ejemplos: $\frac{1}{35}; \frac{7}{5}; \frac{8}{71}; \frac{6}{13};$ .....

V. **Fracción igual a la unidad:** Es aquella en la que el numerador y denominador son iguales. Ejemplos: $\frac{3}{3}; \frac{2}{2};$ ..... ; en general $= \frac{a}{a} = 1 \ . \ a \neq 0$

VI. Número mixto:

Es la suma de un número entero con una fracción, tal como $2+\frac{1}{3}$ que se expresa como $2\frac{1}{3}$ que se puede reducir a fracción: $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{6+1}{3}=\frac{7}{3}$

Reducción de fracciones a común denominador:

Se halla el M.C.M. de los denominadores y él será el denominador común, y se multiplica cada numerador por el cociente de dividir el referido M.C.M. por el denominador correspondiente: Dar común denominador a las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{6};\ \frac{3}{7};\ \frac{7}{12}$$

M.C.M. (6; 7; 12) = 84 entonces:

$$\frac{5}{6}=\frac{70}{84}\ ;\ \frac{3}{7}=\frac{36}{84}\ ;\ \frac{7}{12}=\frac{49}{84}$$

Operaciones con números racionales

Adición

Definición

Se llama suma de dos números racionales de igual denominador al número racional de igual denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores. Es decir, que:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$$

Validez de esta definición:

No hay contradicción con la de la suma de números naturales. Así:

$$3+8=\frac{3}{1}+\frac{8}{1}=\frac{3+8}{1}=\frac{11}{1}=11$$

Además satisface el principio de permanencia de las leyes formales.

Regla general:

Para sumar varios números racionales, se reducen al mínimo común denominador y la suma será el número racional que tiene dicho denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores. Así:

$$4+\frac{9}{7}+\frac{5}{6}+2+\frac{3}{14}=\frac{168}{42}+\frac{54}{42}+\frac{35}{42}+\frac{84}{42}+\frac{9}{42}=\frac{175}{21}$$

Si la fracción que resulta es mayor que 1, se expresa en número mixto y el resultado es

$$\frac{175}{21} = 8\frac{7}{21} = 8\frac{1}{3}$$

Sustracción

Definida la adición de dos números racionales, definiremos la sustracción como la operación inversa, diciendo que: La sustracción de dos números racionales α y β ($\alpha \geq \beta$) llamadas, respectivamente, **minuendo** y **sustraendo**, tienen por objeto hallar otro número racional γ llamada **diferencia**, tal que

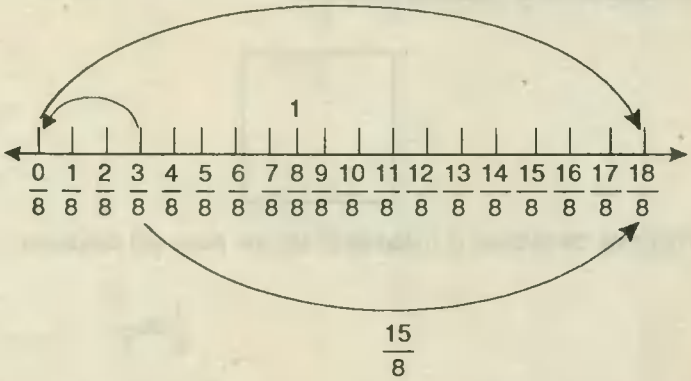
$$\beta + \gamma = \alpha$$

Regla general:

Para hallar la diferencia entre dos números racionales se reduce a un común denominador, se restan los numeradores y se pone de denominador el común. Así:

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{8} = \frac{18}{8} - \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

La operación anterior podemos representarla en la recta numérica.



Multiplicación

En los números naturales se definió esta operación , diciendo que había que formar un número compuesto de tantas partes iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador.

Esta definición no puede aplicarse cuando el multiplicador no es un número natural. Precisa, pues, para los números racionales modificar la definición de forma que comprenda también el caso en que los números que hay que multiplicar sean naturales.

Definición

La multiplicación de dos números racionales tiene por objeto, dados dos números racionales α y β, llamados respectivamente, multiplicando y multiplicador, hallar otro número racional γ que sea respecto al multiplicando α, lo que el multiplicador β es respecto a la unidad.

Con esta definición dada, no hay contradicción con la definición dada en números naturales.

i. Ejemplo

Si el multiplicador fuese fraccionario $\alpha \times \frac{3}{5} = p$, el producto tiene que ser a α, lo que $\frac{3}{5}$ es de 1, luego:

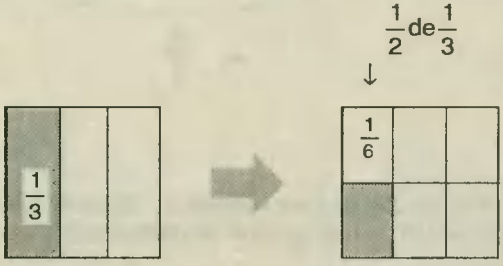
$$\frac{p}{\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{1} \Rightarrow p = \frac{3}{5} \text{ de } \alpha$$

ii. Ejemplo

Consideremos las situaciones siguientes:

Consideremos el siguiente cuadrado:

Tratemos de calcular la mitad de la tercera parte del cuadrado:



$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ se escribe $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

División

Considerada la división como operación inversa de la multiplicación, daremos la siguiente definición:

Definición

Dados DOS números racionales, α el dividendo y β el divisor, $\beta \neq 0$ y $\alpha \ncong \beta$ la división de números racionales tiene por objeto hallar otro número racional γ tal que $\beta \cdot \gamma = \alpha$

Esta definición está justificada porque no hay contradicción con la definición dada de división en números naturales y además porque satisface la ley de uniformidad.

Regla general:

Para dividir dos números racionales, se multiplica el dividendo por la inversa del divisor. Así:

$$\frac{7}{5} \div \frac{14}{9} = \frac{7}{5} \times \frac{9}{14} = \frac{9}{10}$$

Consecuencia general:

En el campo de los números racionales, exceptuando la sustracción, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, y la división cuando el divisor es cero, son siempre posibles las cuatro operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división. Por ello, estas cuatro operaciones se llaman operaciones racionales.

Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo de números racionales

Definición 1

Se llama máximo común divisor de varios números racionales, al mayor número racional divisor común de aquellos.

Corolario 1

El máximo común divisor de varios números racionales, será la fracción cuyo numerador sea el máximo común divisor de los numeradores de las fracciones irreductibles equivalentes a aquellos y por denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores de las expresadas fracciones irreductibles.

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{6}{35};\frac{9}{14};\frac{12}{7}\right) = \frac{\text{M.C.D (6;9;12)}}{\text{M.C.M (35;14;7)}} = \frac{3}{70}$$

Corolario 2

Todo número racional divisor común de varios números racionales, será divisor de su máximo común divisor.

Definición 2

Se llama mínimo común múltiplo de números racionales, al menor número racional que es múltiplo común de todos ellos.

Corolario 3

Si varios números racionales vienen expresados por fracciones irreductibles, su mínimo común múltiplo será la fracción cuyo numerador es el mínimo común múltiplo de los numeradores y el denominador el máximo común divisor de los denominadores. Así:

$$\text{M.C.M.} = \left(\frac{6}{35};\frac{9}{14};\frac{12}{7}\right) = \frac{\text{M.C.M}\,(6;9;12)}{\text{M.C.D}\,(35;14;7)} = \frac{36}{7}$$

Corolario 4

Todo número racional múltiplo común de varios números racionales, será múltiplo de su mínimo común múltiplo.

Fracción compleja

Definición

Se llama fracción compleja al cociente indicado en forma de fracción, de dos números de los cuales uno por lo menos NO es número natural.
Ejemplo

$$\frac{\left(\frac{4}{3}+1\right)+\frac{1}{7}}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{11}-\frac{1}{17}\right)}$$

Nota: para simplificar fracciones complejas y reducirlas a fracción simple, las operaciones se deben efectuar en este orden:

1º Multiplicación
2º División
3º Sumas
4º Restas
5º Potenciación y luego radicación.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar la suma de términos de la fracción equivalente a $\frac{9}{40}$ tal que la suma de los cuadrados de sus términos sea: 485 809.

Solución

Para que sea equivalente f $= \frac{9k}{40k}$; por dato: $(9k)^2 + (40k)^2 = 485\,809$

De aquí: k = 17.

Rpta. Suma de términos: 40 x 17 + 9 x 17 = 833

2. ¿ Cuál es la suma de las cifras del numerador de la fracción equivalente a $\frac{101}{171}$ sabiendo que la diferencia de sus términos está comprendida entre 9660 y 9790 ?

Solución

La fracción buscada es de la forma: $f = \frac{101k}{171k}$ y por dato:

$9660 < 171K - 101K = 70K < 9790 \rightarrow 138 < k < 139.86 \rightarrow \boxed{K = 139}$

∴ El numerador de la fracción buscada es: 101 x 139 = 14039

Rpta. Suma pedida: 1 + 4 + 0 + 3 + 9 = 17

3. Obtener la fracción irreductible equivalente a la expresión:

$$E = \frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \cdot \frac{65}{81} + 3$$

$$\frac{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} \cdot \frac{1+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

Solución:

Trabajando por partes:

i. Con el numerador:

$$\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{\left(\frac{6+2-1}{6}\right)\left(\frac{8+2-1}{8}\right)}{\left(\frac{6-2+1}{6}\right)\left(\frac{8-2+1}{8}\right)}$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 8}{6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{9}{5}$$

ii. Con el denominador:

$$\frac{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} \cdot \frac{1+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{\left(\frac{10+2-1}{10}\right)\left(\frac{12+2-1}{12}\right)}{\left(\frac{10-2+1}{10}\right)\left(\frac{12-2+1}{12}\right)} = \frac{\frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{12}}$$

$$= \frac{11 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 12}{10 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{13}{9}$$

La expresión propuesta se reduce a:

$$E = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{13}{9}} \cdot \frac{65}{81} + 3 = \frac{9 \times 9}{5 \times 13} \cdot \frac{65}{81} + 3 = 3$$

Rpta. $E = 3$

4. En una mina de carbón se venden $\frac{5}{8}$ de lo sacado por día a S/. 12 000 la tonelada; los $\frac{2}{5}$ del resto se vende como carbón escogido a S/. 13 500 la tonelada. Quedan aún 450 toneladas de polvo que se venden a S/. 10 000 la tonelada ¿ Cuánto carbón se saca de esta mina por día y cuánto vale ?

Solución

Al día:

Los $\frac{5}{8}$ del total se venden a S/. 12 000 la tonelada.

Los $\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$ del total se venden como carbón escogido.

$\therefore$ Las 450 toneladas restantes representan: $1 - \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{20}\right) = \frac{9}{40}$ del total

$\therefore$ El total de carbón que se extrae al día será: $450 \times \frac{40}{9} = 2\,000$ toneladas y su costo es:

$\frac{5}{8} \times 2\,000 = 1250$ toneladas a $12\,000 =$ S/. 15 000 000

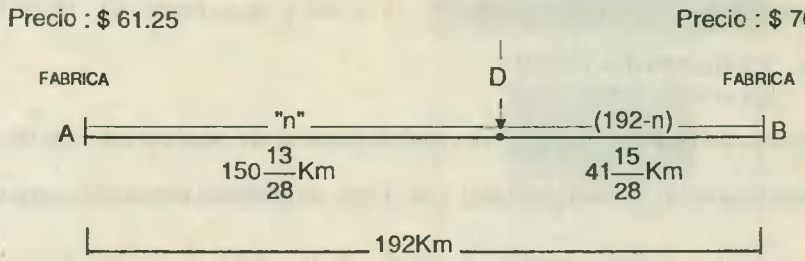
$\frac{3}{20} \times 2\,000 = 300$ toneladas a $13\,500 =$ S/. 4 050 000

450 toneladas a 10 000 = S/. 4 500 000

Rpta. Costo total: S/. 23' 550, 000

5. Una fábrica de caolín vende la tonelada a $ 61.25 y otra distante de áquella 192 Km por vía férrea, lo vende a $ 76.50. El transporte cuesta $ 0.14 por tonelada y Km. ¿ A qué distancia de la primera fábrica resulta el caolín al mismo precio que si se llevara de la otra ?

Solución



Sea "D" el punto donde tiene el mismo valor la tonelada de caolín proveniente de cualquiera de las 2 fábricas.
Sea "n" Km la distancia de la primera fábrica al punto D; entonces la distancia de la segunda fábrica (B) al punto D será: (192 - n) Km. En el punto D:

Costo de una tonelada de caolín, proveniente de la primera fábrica (A):

$$\$\ 61.25 + \frac{14}{100} \times n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Costo de una tonelada de caolín proveniente de la segunda fábrica (B):

$$\$\ 76.50 + \frac{14}{100}\ (\ 192 - n\ ) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Como los costos son iguales:

$$61.25 + \frac{14}{100} n = 76.50 + \frac{14}{100}\ (\ 192 - n\ ) \Rightarrow n = 150\frac{13}{28}\ \text{km.}$$

Rpta. a $150\ \frac{13}{28}$ km.

6. Dentro de 8 años la edad de Pedro será igual a la edad que Juan tiene ahora. Dentro de 15 años Pedro tendrá $\frac{4}{5}$ de la edad que entonces tendrá Juan. Hallar las edades de Juan y Pedro.

Solución

Se puede observar que la diferencia de edades es de 8 años. Dentro de 15 años, cuando la edad de Pedro sea $\frac{4}{5}$ de la edad que entonces tendrá Juan, la diferencia de edades (8 años) representará $\frac{1}{5}$ de la edad que entonces tendrá Juan,es decir,que Juan tendrá: $\frac{5}{1} \times 8 =$ 40 años y Pedro 32.

$\therefore$ Actualmente la edad de Juan es: 40 - 15 = 25 y la de Pedro: 32 - 15 = 17

Rpta. La edad de Juan es 25
La edad de Pedro es 17

7. Tres propietarios ribereños con un río quieren construir un canal para el riego de sus fincas. El gasto total es de S/. 5 480 000 000. Las tierras del segundo propietario son los $\frac{5}{8}$ de las del primero, y las tierras del tercero los $\frac{4}{9}$ de las del segundo. El gasto se reparte proporcionalmente a la extensión de cada finca, tocando en el reparto a S/. 2 000 000 por hectárea.

1º ¿ Qué cantidad ha de abonar cada uno ?
2º Extensión de cada finca en el complejo agrario.

Solución

Area total de las tres fincas: 5 480 000 000 ÷ 2 000 000 = 2 740 Ha. Si la superficie del 1º es como 1,la del segundo es $\frac{5}{8}$ y la del tercero: $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$

El área total representa: $1 + \frac{5}{8} + \frac{5}{18} = \frac{137}{72}$ del área total del 1º

$\therefore$ El área del 1º será: $\frac{72}{137} \times 2\,740 = 1\,440$ Ha.

El área del 2º es: $\frac{5}{8} \times 1\,440 = 900$ Ha.

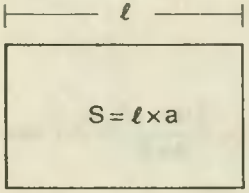
El área del 3º es: $\frac{5}{18} \times 1\,440 = 400$ Ha.

Rpta. El 1º debe pagar: 1 440 x 2 000 000 = S/. 2 880 000 000
El 2º pagará: 900 x 2 000 000 = S/. 1 800 000 000
El 3º debe abonar: 400 x 2 000 000 = S/. 800 000 000

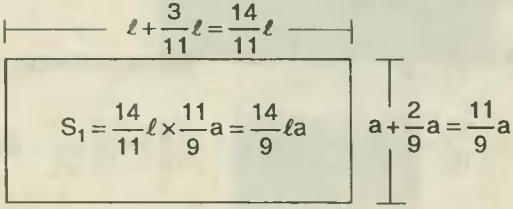
8. ¿ Cuál será en metros cuadrados, la superficie de un rectángulo sabiendo que aumentando una de sus dimensiones en sus $\frac{2}{9}$ y otra en sus $\frac{3}{11}$, la superficie del rectángulo aumenta en 1400 metros cuadrados?

Solución

antes del aumento



despues del aumento



Por condición:

$S_1 = S + 1\,400$

$\frac{14}{9}\ell \times a = \ell \times a + 1\,400$

$\frac{5}{9}\ell \times a = 1\,400$

$\ell \times a = \frac{9}{5} \times 1\,400$

$\ell \times a = 2\,520\ m^2$

La superficie es:

$S = 2\,520\ m^2$

Rpta. $S = 2\,520\ m^2$

9. Aumentando el dividendo de una división en sus $\frac{2}{5}$ y el divisor en sus $\frac{3}{10}$, el cociente aumenta en 17 unidades. ¿ Cuál era el cociente antes de aumentar sus términos.?

Solución

Sea la división: $D = dc$

La nueva división: $D + \frac{2}{5}D = \left(d + \frac{3}{10}d\right)(c + 17)$

$\frac{7}{5}D = \frac{13}{10}d\,(c+17)$ pero: $D = dc$

$\Rightarrow \frac{7}{5}dc = \frac{13}{10}d\,(c+17) \Rightarrow c = 221$

Rpta. 221

10. Una tela se encoje al ser mojada $\frac{1}{16}$ de su longitud y $\frac{1}{17}$ de su anchura. ¿ Qué longitud de la tela nueva hace falta emplear para tener 210 metros cuadrados de la tela después de mojada ? . Esta tela antes de ser mojada tenía 0. 80 m. de anchura.

Solución

Sea ℓ la longitud de la tela de 80 cm. = $\frac{4}{5}$m. de anchura que se tiene que comprar.

Después del lavado:

ancho $= \frac{16}{17} \times \frac{4}{5}$

largo $= \frac{15}{16} \times \ell$

Se debe cumplir:

$$\frac{15}{16}\ell \times \frac{16}{17} \times \frac{4}{5} = 210m^2 \Rightarrow \ell = \frac{210 \times 17}{3 \times 4} = 297.5m$$

Rpta. ℓ = 297.5 metros.

11. La edad de A es los $\frac{4}{5}$ de B y el peso de B es $\frac{8}{7}$ del de A; hallar la edad de B, si junto con su peso suma 98; además se sabe que la suma de los pesos es igual a la suma de las edades.

Solución

Consideremos: e_A= edad de A; e_B= edad de B; P_A= peso de A; P_B= peso de B

Podemos establecer:

$e_A = \frac{4}{5} e_B$ ..... (1) $\qquad P_B = \frac{8}{7} P_A$ ..... (2)

$e_B + P_B = 98$ ..... (3) $\qquad e_A + e_B = P_A + P_B$ ..... (4)

De (2): $P_A = \frac{7}{8} P_B$..... (5)

(1) y (5) en (4): $\frac{4}{5} e_B + e_B = \frac{7}{8} P_B + P_B \Rightarrow \frac{9}{5} e_B = \frac{15}{8} P_B$

$\therefore e_B = \frac{25}{24} \cdot P_B$ en (3):

$\frac{25}{24} P_B + P_B = 98 \Rightarrow \frac{49}{24} P_B = 98 \Rightarrow P_B = 48$ en (3):

$e_B + 48 = 98 \Rightarrow e_B = 50$

Rpta. Edad de B es 50 años.

12. Un tubo cuya longitud mide "L" centímetros se divide en 3 partes desiguales. La primera es menor que $\frac{1}{7}L$ y la segunda menor que $\frac{1}{6}L$. Si la tercera mide 85 centímetros y $L = \dot{\overline{61}}$. Hallar cuántos valores puede tomar L.

Solución

Sean las partes: a; b y 85 cm.

Podemos establecer: $a < \frac{1}{7}L$; $b < \frac{1}{6}L \Rightarrow a + b < \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)L$

$$a+b<\frac{13}{42}L \text{ ..... } (1)$$

Como: a + b + 85 = L; en la desigualdad (1) sumamos 85 a ambos miembros:

$$\underbrace{a+b+85}_{L} < \frac{13}{42}L + 85 \Rightarrow L - \frac{13}{42}L < 85 \Rightarrow \frac{29}{42}L < 85$$

$$L < \frac{85x42}{29} \Rightarrow L < 123\frac{3}{29} \quad \text{como } L = \dot{\overline{61}}$$

Rpta. $\therefore$ L puede tomar el valor 122

13. Al dividir un terreno en dos partes resulta que la diferencia entre los 4/5 de los 3/7 de la parte mayor menos los 7/12 de los 4/7 de la parte menor es igual a 1/7 de la parte menor. Si el terreno tiene 129 hectáreas; hallar la diferencia entre las 2 partes.

Solución

Sean x e y las superficies de los terrenos:

$$x + y = 129 \text{ ..... } (1)$$

Además

$$\frac{4}{5}\bullet\frac{3}{7}x-\frac{7}{12}\bullet\frac{4}{7}y=\frac{1}{7} \text{ y, de aquí: } \frac{12}{35}x=\frac{10}{21}y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{25}{18}$$

De (1): $\frac{25}{18}y + y = 129 \Rightarrow y = 54 \wedge x = 75$

$$\therefore x - y = 75 - 54 = 21 \text{ hectáreas.}$$

Rpta. 21 hectáreas.

14. Se tiene un depósito de agua el cual puede ser descargado mediante dos llaves "A" y "B". "A" puede descargar todo el depósito en 10 horas; mientras que "B" desaloja 10 litros por minuto. Si los dos juntos lo pueden desalojar en 6 horas. Hallar la capacidad del depósito.

Solución

Sea "x" el número de horas que emplea "B" en desalojar el depósito.
Podemos establecer:

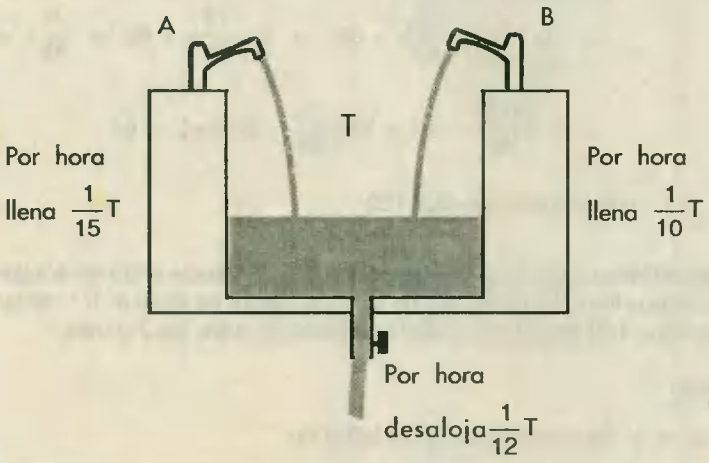
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}\rightarrow x=15 \text{ horas}$$

$\therefore$ Capacidad del depósito: 15 x 60 x 10 = 9 000 litros.

Rpta. 9 000 litros.

15. Un estanque puede ser llenado por un caño A en 15 horas, y por un caño B en 10 horas, y puede ser vaciado por una tubería C en 12 horas. Si A y B trabajan juntos 2 horas y luego se cierran y se abre C; en cuánto tiempo C vaciará el estanque.

Sea T la capacidad total del estanque:



Solución

En una hora A y B juntos llenan:

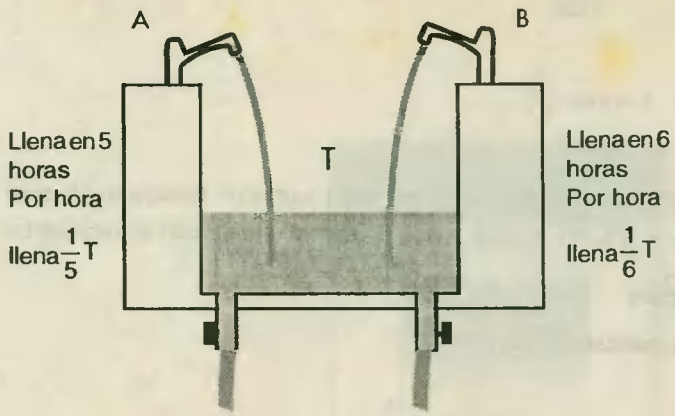
$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ del tanque. En 2 horas llenarán: $2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ del tanque.

C vacía en 1 hora: $\frac{1}{12}$ del tanque. Luego $\frac{1}{3}$ del tanque lo vaciará en $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}}$ = 4 horas.

Rpta. 4 horas.

16. Un estanque tiene 4 caños: dos que lo alimentan y dos que lo desaguan. Abierto solamente uno de los primeros, se llena el estanque en cinco horas, y abierto el otro solo, se llena en seis horas. Abierto uno de los caños de desagüe y cerrados los demás, se vacía el estanque en 8 horas, y abierto únicamente el otro caño de desagüe, se vacía en 10 horas. Cuando el estanque contiene los 2/5 de agua, se abren los cuatro caños, y se desea saber el tiempo que tendrá que transcurrir para que se llene.

Sea T la capacidad total del estanque:



Solución

Abiertos los dos caños de alimentación, en 1 hora llenan $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$ de la capacidad del estanque y abiertos los dos caños de desagüe, sale en 1 hora una cantidad de agua igual a $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{9}{40}$ de la capacidad del estanque. Abiertos los 4 caños a la vez, durante una hora, quedará en el estanque una cantidad de agua igual a $\frac{11}{30}-\frac{9}{40}=\frac{17}{120}$ de la capacidad del estanque.

Por hora se llena : $\frac{17}{120}$ de la capacidad del estanque.

Para llenar los $\frac{3}{5}$ que faltan, deben transcurrir tantas horas como veces contenga $\frac{3}{5}$ a $\frac{17}{120}$ esto es:

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{17}{120}} = \frac{360}{85} = 4 \text{ horas } \frac{4}{17}$$

Rpta. 4 horas $\frac{4}{17}$

17. Dos personas A y B podrían terminar juntos un trabajo en 10 días. B y C lo harían en 12 días y A y C en 15 días. ¿Cuánto tiempo emplearán si trabajan los tres juntos?

Solución

Al día realizan:

$$A + B = \frac{1}{10}$$

$$B + C = \frac{1}{12}$$

$$A + C = \frac{1}{15}$$

$$2(A + B + C) = \frac{1}{4} \Rightarrow A + B + C = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

Juntos al día realizan $\frac{1}{8}$ de la obra.

Rpta. ∴ Juntos terminarían en 8 días.

18. Alberto, Bernardo y Carlos pueden segar un campo en "n" días. Si cada uno hubiera segado solo la tercera parte del campo, Alberto hubiera demorado un día menos y Bernardo y Carlos se hubieran demorado dos día más cada uno. Hallar "n".

Solución

A, B y C juntos al día siegan: $\frac{1}{n}$ del campo.

Además:

A: $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ "A" siega 1/3 del campo en (n - 1) días; todo el campo lo podría segar en: 3 (n - 1) días; "A" al día siega:

$$\frac{1}{3(n-1)} \text{ del campo}$$

B: $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ "B" siega 1/3 del campo en (n + 2) días; todo el campo lo podría segar en: 3 (n + 2) días; "B" al día siega:

$$\frac{1}{3(n+2)} \text{ del campo}$$

C: $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ "C" siega 1/3 del campo en (n + 2) días; todo el campo lo puede segar en: 3 (n + 2) días; "C" al día siega:

$$\frac{1}{3(n+2)} \text{ del campo.}$$

Juntos al día siegan:

$$\frac{1}{3(n-1)}+\frac{1}{3(n+2)}+\frac{1}{3(n+2)}=\frac{1}{n} \Rightarrow n=2$$

Rpta. n = 2

19. Hallar la siguiente suma:

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1935}$$

Solución

Podemos establecer: (multiplicando ambos miembros por dos) :

$$2S=\frac{2}{1x3}+\frac{2}{3x5}+\frac{2}{5x7}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{2}{43x45}$$

$$2S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{45}\right)$$

$$2S=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45} \Rightarrow S=\frac{22}{45}$$

Rpta. $S=\frac{22}{45}$

20. El costo de almacenaje diario en una aduana es $\frac{1}{10}$ del valor de la mercadería. Un comerciante comienza a retirar, al final de cada día, $\frac{1}{5}$ de la mercadería almacenada. ¿ Cuál debe ser el valor total del almacenaje ?

Solución

1er. día: Se paga $\frac{1}{10}$ del costo; se retira $\frac{1}{5}$ de la mercadería; quedan $\frac{4}{5}$

2do. día: se paga $\frac{1}{10}x\frac{4}{5}=\frac{2}{25}$; se retira $\frac{1}{5}$ de la mercadería; queda : $\frac{3}{5}$

3er. día: se paga $\frac{1}{10}x\ \frac{3}{5}=\frac{3}{50}$; se retira $\frac{1}{5}$ de la mercadería; queda: $\frac{2}{5}$

4to. día: se paga $\frac{1}{10}x\frac{2}{5}=\frac{1}{25}$; se retira $\frac{1}{5}$ de la mercadería; queda: $\frac{1}{5}$

5to. día: se paga $\frac{1}{10}x\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$; se retira $\frac{1}{5}$ de la mercadería y con esto se termina de retirar toda la mercadería.

∴ Costo del almacenaje

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{25}+\frac{3}{50}+\frac{1}{25}+\frac{1}{50}=\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

Rpta. $\frac{3}{10}$ del costo de la mercadería.

21. Un padre deja así su fortuna:

Al primer hijo: S/. 1 000 000 y $\frac{1}{10}$ del resto.

Al segundo hijo: S/. 2 000 000 y $\frac{1}{10}$ del resto.

Al tercer hijo: S/. 3 000 000 y $\frac{1}{10}$ del resto, . . . etc.

Hecho el reparto se ve que a todos sus hijos ha correspondido igual cantidad. ¿ Cuántos eran los hijos y cuánta la herencia ?

Solución

Sea F el monto de la fortuna. Podemos establecer que:

El primero recibe: 1 000 000 + $\frac{1}{10}$ (F - 1 000 000). Queda: $\frac{9}{10}$ (F - 1 000 000)

El segundo recibe: $2\,000\,000 + \frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}(F - 1\,000\,000) - 2\,000\,000\right]$

. .
. .
. .
. .

Como todos reciben la misma cantidad, entonces:

$$1\,000\,000 + \frac{1}{10}(F - 1\,000\,000) = 2\,000\,000 + \frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}(F - 1\,000\,000) - 2\,000\,000\right]$$

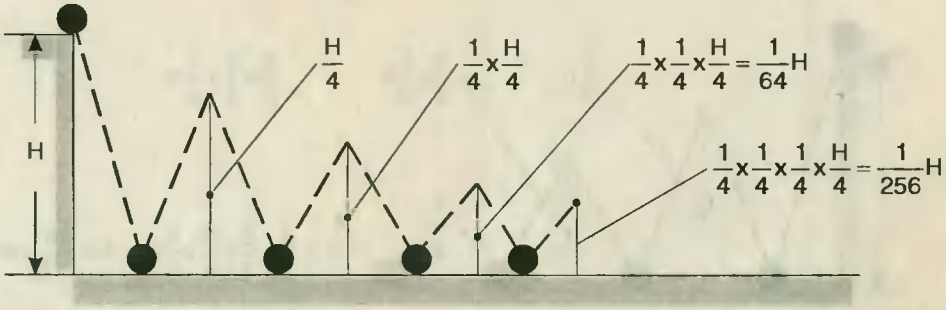
$$\therefore F = 81\,000\,000$$

Al primero le corresponde: $1\,000\,000 + \frac{1}{10}(81\,000\,000 - 1\,000\,000) = S/.\ 9\,000\,000$

Como todos reciben lo mismo:

Rpta. El número de hijos es: $81\,000\,000 \div 9\,000\,000 = 9$

22. Una bola cae desde cierta altura sobre una mesa de mármol. Cada vez que toca a la mesa rebota hasta un cuarto de la altura de donde cayó. ¿ A qué altura se elevará la bola después de haber tocado la mesa por cuarta vez ?.



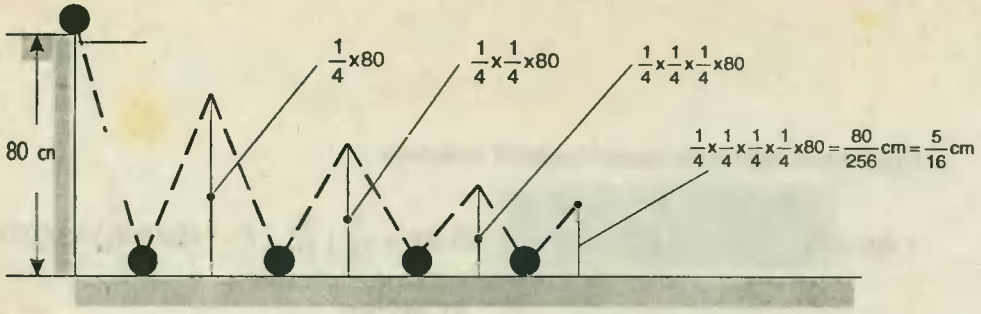
Solución

Sea H la altura de la mesa.

Rpta. Se elevará a $\frac{1}{256}$ de la altura inicial.

23. Una bola cae de una altura de 80 cm. sobre una mesa de mármol. Cada vez que toca a la mesa rebota hasta un cuarto de la altura de donde cayó. ¿ A qué altura se elevará la bola después de haber tocado la mesa por cuarta vez ?.

Solución

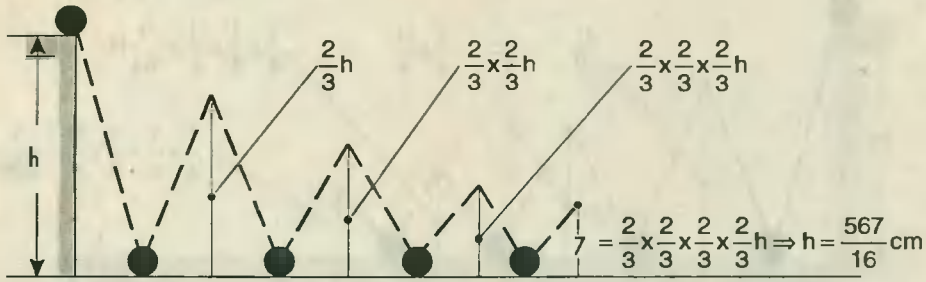


Rpta. Se elevará a $\frac{5}{16}$ cm.

24. Una bola cae desde cierta altura sobre una mesa de mármol y rebota sobre ella. Después de haber tocado cuatro veces la mesa se eleva la bola 7 cm. ¿ De qué altura cayó la primera vez, sabiendo que después de cada caída se eleva a los $\frac{2}{3}$ de la altura de que partió ?

Solución

Se h la altura inicial. Se cumple:



Rpta. $h = 35\frac{7}{16}$ cm

25. Una varilla se dilata, en un proceso de manufactura: $\frac{1}{3}$ de su longitud la primera vez; $\frac{1}{4}$ de su nueva longitud la segunda vez; $\frac{1}{5}$ la tercera; . . .y así sucesivamente. Después de 20 procesos mide 690 mm. ¿ Cuál fue su longitud original ?

Solución

Sea "L" la longitud original de la varilla

$$\frac{4}{3}x\frac{5}{4}x\frac{6}{5}x\cdots\cdots x\frac{23}{22} \quad L <> 690 \Rightarrow L = 90\ cm.$$

Rpta. 90cm

Resultado de una mezcla que se transvasa sucesivamente

Observaciones previas

Cuando se trata de sucesivas operaciones con dos líquidos determinados, es preciso obtener la ley de variación de proporción de uno de ellos con respecto al total, en función del número de experiencias.
Una vez obtenida, basta aplicarla y despejar la incógnita que se pida.

Problema general:

"Una persona tiene un depósito de vino que contiene v litros. Cada día saca "a" litros y los reemplaza por "a" litros de agua. Se desea saber la cantidad de vino puro que queda al cabo de "n" días.

Solución

	Cantidad de vino puro que había por litro	Cantidades sacadas por litro	Quedan
En la primera extracción:	1	$\frac{a}{v}$	$\left(1-\frac{a}{v}\right)^1$
En la segunda extracción:	$\left(1-\frac{a}{v}\right)$	$\left(1-\frac{a}{v}\right)\frac{a}{v}$	$\left(1-\frac{a}{v}\right)\left(1-\frac{a}{v}\right)=\left(1-\frac{a}{v}\right)^2$
.....			
.....			
.....			
En la enésima extracción:	$\left(1-\frac{a}{v}\right)^{n-1}$	$\left(1-\frac{a}{v}\right)^{n-1}\frac{a}{v}$	$\left(1-\frac{a}{v}\right)^n \ldots \oint_R$

26. De un tonel que contiene 204 litros de vino, se sacan 35 litros que se reemplazan por agua. Se hace lo mismo con la mezcla por segunda y tercera vez. ¿ Qué cantidad de vino queda en el tonel después de la tercera operación ?.

Solución

	Cantidades de vino puro que había por litro	Cantidades sacadas por litro	Quedan
En la primera extracción:	1	$\frac{35}{204}$	$\frac{169}{204}$
En la segunda extracción:	$\frac{169}{204}$	$\frac{35}{204}\times\frac{169}{204}$	$\frac{169}{204}\times\frac{169}{204}$
En la tercera extracción:	$\frac{169}{204}\times\frac{169}{204}$	$\frac{35}{204}\times\frac{169}{204}\times\frac{169}{204}$	$\frac{169}{204}\times\frac{169}{204}\times\frac{169}{204}$

Al final, cada litro de la mezcla posee: $\left(\frac{169}{204}\right)^3$ lt. de vino.

Como la mezcla posee 204 litros; la cantidad de vino será:

Rpta. $204 \times \left(\frac{169}{204}\right)^3 = 115.98$ litros.*

* **Nota:** A esta conclusión se pudo arribar directamente, aplicando la formula de $\oint_R$:

Cantidad de vino en cada litro de la mezcla final:

$$\left(1-\frac{35}{204}\right)^3$$

∴ Cantidad de vino en la mezcla final:

$$\left(1-\frac{35}{204}\right)^3 \times 204 = 115.98 \text{ litros.}$$

Rpta. 115.98

27. En una vasija de 3 litros de capacidad se ponen 2 litros de vino y un litro de agua,a continuación se eliminan $\frac{1}{3}$ de la mezcla y se llena con agua la vasija, después se elimina $\frac{1}{4}$ de la nueva mezcla y se llena de agua la vasija, por último se elimina la mitad de esa última mezcla y se llena nuevamente la vasija. ¿ Qué cantidad de vino contiene un litro de la última mezcla ?.

Solución

Al principio cada litro de la mezcla contiene $\frac{2}{3}$ de litro de vino:

	Cantidad de vino puro que había por litro	Cantidades sacadas por litro	Quedan
En la primera extracción:	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}x\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}x\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$
En la segunda extracción:	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}x\frac{4}{9}$	$\frac{3}{4}x\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$
En la tercera extracción:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}x\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}x\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Rpta. $\therefore$ Cada litro de la nueva mezcla contiene $\frac{1}{6}$ de litro de vino.

28. Un recipiente se llena con 6 litros de vino. Se consume $\frac{1}{3}$ del contenido y se vuelve a llenar con agua; luego se consume $\frac{2}{5}$ del contenido y se vuelve a llenar con agua y por último se consume los $\frac{3}{8}$ del contenido y se vuelve a llenar con agua. ¿Qué cantidad de vino contiene un litro de esta última mezcla ?.

Solución

	Cantidad de vino puro que había por litro	Cantidades sacadas por litro	Quedan
En la primera extracción:	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
En la segunda extracción:	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}x\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}x\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$
En la enésima extracción:	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}x\frac{2}{5}$	$\frac{5}{8}x\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$

Rpta. $\therefore$ En un litro de la mezcla hay $\frac{1}{4}$ de litro de vino puro.

29. Al radiador de un automóvil, lleno con 16 litros de agua, se le quitan 4 litros de agua que son reemplazados por líquido antioxidante puro. Luego se quitan 4 litros de mezcla resultante, que son reemplazados por líquidos antioxidante puro. Lo mismo se hace por tercera y cuarta vez. Hallar la parte fraccionaria de agua en la mezcla final.

Solución

Aplicando la formula de $\oint_R$:

Rpta. $\left(1-\frac{4}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}$

30. En un juego de azar un apostador gana en el primer juego los $\frac{3}{7}$ de lo que tenía; luego en el segundo juego pierde $\frac{6}{13}$ del total que tenía en ese momento y en el último juego gana $\frac{4}{9}$ de lo que le quedaba. Si sus gastos a la salida fueron S/. 6 030 y se retiró no ganando ni perdiendo. ¿ Cuánto tenía antes de entrar al casino ?.

Solución

1er juego Tiene: 1 , gana: $\frac{3}{7}$, le queda: $\frac{10}{7}$

2do juego Tiene: $\frac{10}{7}$, pierde: $\frac{6}{13}x\frac{10}{7}$, le queda: $\frac{7}{13}x\frac{10}{7}=\frac{10}{13}$

3er juego Tiene: $\frac{10}{13}$, gana: $\frac{4}{9}x\frac{10}{13}$, le queda: $\frac{13}{9}x\frac{10}{13}=\frac{10}{9}$

Al finalizar el juego, está ganando $\frac{1}{9}$ de lo que tenía al principio; pero como sus gastos a la salida fueron de S/. 6 030 y esto le permitió retirarse sin ganar ni perder, ello indica que los 6 030 representan $\frac{1}{9}$ de lo que tenía al principio, por lo tanto, antes de entrar al casino tenía:

Rpta. $\frac{9}{1}$ x 6 030 = S/. 54 270

31. Un industrial dispuso en su testamento que del capital que dejaba se diese al mayor de sus hijos una suma de "a" dólares más la enésima parte del resto; que al segundo se le diese "2a" dólares más la enésima parte del resto; al tercero "3a" dólares más la enésima parte del resto, y así sucesivamente.

Hecho el reparto, se vió que todos sus hijos habían recibido la misma herencia. ¿ Cuál era el capital que dejó, y cuántos eran sus hijos ?.

Solución

Capital = c

El 1º recibe: "a" $+\frac{1}{n}(c-a)$ Quedan: $\frac{n-1}{n}(c-a)$

El 2º recibe: $2a+\frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{n}(c-a)-2a\right]$ Queda: $\frac{n-1}{n}\left[\frac{n-1}{n}(c-a)-2a\right]$

Como todos reciben lo mismo:

$$a+\frac{1}{n}(c-a)=2a+\frac{(n-1)(c-a)}{n^2}-\frac{2a}{n}$$

$$a+\frac{c}{n}-\frac{a}{n}=\frac{2an^2+nc-na-c+a-2an}{n^2}$$

$$an^2+nc-na = 2an^2+nc-na-c+a-2an$$

$$0 = an^2-2an+a-c$$

$$c = a(n^2-2n+1)$$

$$\boxed{c = a(n-1)^2}$$

cada hijo recibe:

$$1º.- \quad a+\frac{1}{n}[a(n-1)^2-a]=\frac{an+an^2-2an+a-a}{n}=\frac{an(n-1)}{n}$$

$$\boxed{a(n-1)}$$

Rpta. $\therefore$ Nº de hijos $=\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)}=n-1$

32. Tres barras de acero de igual sección y cuyas longitudes en metros son exactamente: $\frac{1008}{385}, \frac{1848}{715}$ y $\frac{2268}{429}$ se quiere dividir si desperdiciar material, en trozos todos de igual longitud y de modo que el número de trozos sea el menor posible. Calcular en fracción irreductible, la longitud en metros de cada trozo y el número exacto de trozos que saldrán de cada barra.

Solución

Simplificando las fracciones propuestas se obtienen: $\frac{144}{55}, \frac{168}{65}$ y $\frac{756}{143}$

Se deduce que la longitud de cada trozo será igual al M.C.D. $\left(\frac{144}{55}, \frac{168}{65}, \frac{756}{143}\right) = \frac{12}{715}$ mts.

Longitud de cada trozo: $\frac{12}{175}$

De la primera barra se obtendrá : $\frac{1008}{385} \div \frac{12}{715}$ = 156 trozos

De la segunda barra se obtendrá : $\frac{1848}{715} \div \frac{12}{715}$ = 154 trozos

De la tercera barra se obtendrá : $\frac{2268}{429} \div \frac{12}{715}$ = 315 trozos

RESPUESTA.

33 Un producto es tal que puede salir en presentaciones diferentes que pesan $\frac{8}{9}$ de gramo; $\frac{2}{15}$ de gramo y $\frac{10}{21}$ de gramo.

Cuál debe ser la resistencia mínima de un envase que pueda contener una cantidad entera y exacta de cualquiera de estas representaciones.

Solución

La resistencia mínima va a ser igual al:

$$\text{M.C.M.}\left(\frac{8}{9};\frac{21}{15};\frac{10}{21}\right) = \text{M.C.M.} = \left(\frac{8}{9};\frac{7}{5};\frac{10}{21}\right) = \frac{\text{M.C.M}\,(8;7;10)}{\text{M.C.D}\,(9;5;21)} = 280 \text{ gramos}$$

Rpta. 280 gramos.

34. Con cuatro números primos absolutos se forman dos fracciones. Calculando el M.C.M. y M.C.D. de las fracciones se restan y a este valor se le multiplica por el producto de los denominadores obteniéndose 5004. Hallar la suma de los números primos.

Solución

Sean: "a"; "b"; "c" y "d" los números primos absolutos y sean: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las fracciones, podemos establecer:

$$\text{M.C.M.}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = a \cdot c$$

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{1}{b.d}$$

Además: $\left(axc-\frac{1}{b.d}\right) b \cdot d = 5\,004$

$a \times b \times c \times d - 1 = 5\,004$

$a \times b \times c \times d = 5\,005$

$a \times b \times c \times d = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

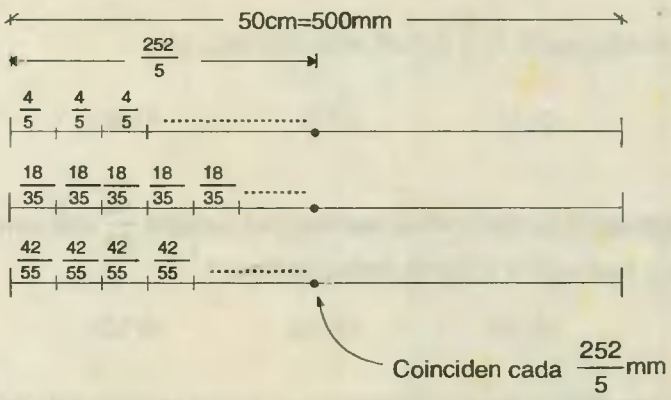
Rpta. Suma pedida: $5 + 7 + 11 + 13 = 36$

35. Tres reglas de 50 cm de longitud están graduadas uniformemente: la primera $\frac{4}{5}$ de mm; la segunda cada $\frac{18}{35}$ de mm. y la tercera cada $\frac{42}{55}$mm. Si se las hace coincidir en toda su extensión, cuántas veces coincidirán tres trazos de las reglas.

Solución

Los trazos de las tres reglas coincidirán cada vez que la longitud contenga a:

$$\text{M.C.M.}\left(\frac{4}{5};\frac{18}{35};\frac{42}{55}\right)=\frac{252}{5}\text{mm}$$



Rpta. $\therefore$ Coincidirán: $\frac{500}{\frac{252}{5}}+1 = 10$ veces

I. Fracciones ordinarias (quebrados)

1. Qué fracción de los $\frac{4}{3}$ de $\frac{9}{16}$ hay que añadirle a los $\frac{3}{7}$ de $\frac{21}{25}$ para que sea igual a 44 veces la menor fracción decimal exacta de dos cifras.

a) $\frac{12}{75}$ b) $\frac{3}{29}$ c) $\frac{8}{75}$ d) $\frac{2}{29}$ e) $\frac{1}{12}$

2. Hallar la suma de los cuatro términos de dos fracciones equivalentes a $\frac{3}{14}$ sabiendo que la suma de denominadores es igual al producto de los numeradores.

a) 126 b) 136 c) 153 d) 170 e) 164

3. Qué número se le debe añadir al numerador y al denominador de la fracción $\frac{5}{29}$ para que sea equivalente a $\frac{3}{7}$

a) 18 b) 13 c) 12 d) 11 e) No se sabe

4. Si $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$ ¿ Cuál es el valor de a x b ?

a) 10 b) 12 c) 15 d) 20 e) 25

5. El producto de los dos términos de una fracción equivale a $\frac{45}{81}$ está comprendida entre 5000 y 6 000. ¿ Cuál será la suma de dichos términos ?.

a) 168 b) 154 c) 159 d) 150 e) 140

6. Hallar la fracción tal que si se multiplica el numerador y se divide el denominador por "a" varía en $2\frac{9}{13}$ y si se multiplica el numerador y se divide el denominador por a^2, varía en $45\frac{10}{13}$

a) $\frac{7}{13}$. b) $\frac{9}{13}$ c) $\frac{21}{13}$ d) $\frac{11}{39}$ e) $\frac{7}{39}$

7. ¿ Cuál es el valor de "a" para que la fracción: $\frac{\overline{a4a}}{498}$ sea propia e irreductible.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

8. Para que valor de "a" la fracción: $\frac{\overline{41a}}{\overline{a50}}$ es propia e irreductible.

a) 7 b) 8 c) 9 d) 6 e) 5

9. A los dos términos de una fracción impropia se le suma el denominador, obteniéndose una fracción que se diferencia de la original en $\frac{3}{8}$; hallar el numerador original.

a) 3 b) 8 c) 4 d) 7 e) 5

10. Si se quiere que la fracción $\frac{N}{D}$ esté comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ cuando N = 12. ¿ Cuántos valores enteros puede tomar D ?.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 8

11. Si al numerador del número racional $\frac{A}{B}$, menor que 1, se le aumenta una unidad, el numerador aumenta en 15 unidades. Si el numerador y denominador difieren en 2 unidades, hallar el valor de A x B.

a) 180 b) 255 c) 143 d) 165 e) 195

12. Hallar el cociente entre el M.C.D. y el M.C.M. de $\frac{21}{27}$ y $\frac{28}{30}$

a) 0.3 b) $0.\bar{3}$ c) $0.0\bar{3}$ d) $0.\widehat{301}$ e) 0.03

13. El M.C.M. del numer ador y denominador de una fracción equivalente a $\frac{28}{245}$ es 1540. ¿ Cuál es la suma del numerador y denominador ?

a) 435 b) 429 c) 385 d) 379 e) N.A.

14. ¿ Cuántas fracciones propias e irreductibles tiene como denominador 80 ?

a) 35 b) 32 c) 40 d) 29 e) 41

15. Que fracción de los $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ representa los $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$

a) $\frac{63}{80}$ b) $\frac{80}{63}$ c) $\frac{31}{40}$ d) $\frac{40}{31}$ e) $\frac{1}{7}$

16. El M.C.D. y M.C.M. de dos fracciones irreductibles son $\frac{4}{105}$ y $\frac{8}{3}$ respectivamente. La menor de ellas puede ser:

a) $\frac{4}{21}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{3}{16}$

17. Cuántas fracciones equivalentes a $\frac{231}{1287}$, cumplen que la suma de sus términos está comprendida entre 800 y 10000.

a) 200 b) 199 c) 184 d) 205 e) menos de 184

18. Si el numerador y denominador de $\frac{13}{1343}$ se le multiplica y divide respectivamente, por un cuadrado se convierte en impropia. ¿ Cuántos de dichos cuadrados tienen 2 cifras ?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

19. La suma de los denominadores de dos fracciones irreductibles es 14, mientras que la diferencia de los numeradores es 3. Calcular una de las fracciones si la suma de ellas es igual a 3.

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{9}{7}$ e) $\frac{8}{3}$

20. Cuántos quintos de los $\frac{40}{5}$ de los $\frac{7}{2}$ de los $\frac{11}{4}$ de los $\frac{10}{2}$ se les debe sumar a los $\frac{13}{2}$ de los $\frac{28}{2}$ para que esta suma exceda en $\overline{1bbc}$ a los $\frac{7}{3}$ de los $\frac{54}{9}$

a) 10 b) 22 c) 12 d) 14 e) N.A.

21. Hallar la suma de los términos de una fracción tal que si se le suma su inversa da por resultado $\frac{41}{20}$

a) 5 b) 8 c) 9 d) 6 e) 10

22. Hallar (a + b + c), sabiendo que la fracción: $\frac{\overline{aab}}{\overline{bca}}$ es equivalente a $\frac{7}{5}$

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

23. El M.C.D. de dos números es 185. ¿ Como será el M.C.M. de sus inversas ?.

a) $0.\widehat{0054}$ b) $0.\widehat{0108}$ c) $0.\widehat{0162}$ d) $0.\widehat{0135}$ e) $0.\widehat{0185}$

24. Hallar el M.C.M. de dos fracciones irreductibles si sabemos que el M.C.D. de los numeradores es 4 y el M.C.M. de los denominadores es 385 y el producto de las fracciones $\frac{48}{275}$

a) $\frac{132}{5}$ b) $\frac{84}{5}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{42}{5}$ e) No existe.

25. Calcular la siguiente suma:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{4}{3}$

26. Calcular el valor de "R" en

$$R=\frac{1}{6}+\frac{2}{36}+\frac{1}{216}+\frac{2}{1296}+\ldots\ldots$$

a) $\frac{4}{35}$ b) $\frac{7}{33}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{8}{35}$ e) $\frac{11}{35}$

27. Si sumamos los períodos que se obtienen de:

$$\frac{1}{7};\frac{1}{17};\frac{1}{27};\frac{1}{37};\ \ldots\ldots\ldots\text{(216 fracciones)}$$

La cifra de las unidades de la suma será:

a) 5 b) 7 c) 2
d) 6 e) más de 2 respuestas.

28. Hallar a + b + c + d si:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2862}=0.\widehat{abcd}$$

a) 29 b) 14 c) 18 d) 22 e) 24

29. Hallar el valor de:

$$S = \frac{1}{1x4} + \frac{1}{4x7} + \frac{1}{7x10} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{28x31}$$

a) $\frac{10}{31}$ b) $\frac{12}{29}$ c) $\frac{13}{41}$ d) $\frac{15}{37}$ e) $\frac{16}{33}$

30. Hallar la suma de:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots \text{(doce sumandos)}$$

Dar el valor del numerador del resultado.

a) 4 095 b) 2 048 c) 2 047 d) 4 097 e) 4 098

31. Un grifo puede llenar un estanque en 6 horas y un desagüe puede vaciarlo en 8 horas. ¿ En qué tiempo llenaría los $\frac{3}{4}$ del estanque, si cuando se abre el grifo y el desagüe, $\frac{1}{3}$ del estanque ya está lleno de agua ?

a) 6 horas b) 8 horas c) 12 horas d) 10 horas e) N.A.

32. Un estanque puede desaguarse mediante dos llaves, la primera ubicada en el fondo y una segunda ubicada a mitad de altura del estanque. Si la primera desagua el estanque en 8 horas y la segunda desagua la cantidad de líquido que está sobre ella en 6 horas; se desea saber en que tiempo será desaguado el estanque si están abiertas las dos llaves

a) 6 h. b) 8 h. 40 min. c) 6 h. 24 min. d) 7 h. 26 min. e) N.A

33. Un depósito puede ser llenado por los conductos A y B en 70 minutos; por los conductos A y C en 84 minutos y por los conductos B y C en 140 minutos. ¿ Cuál de los tres conductos mencionados es el más lento?

a) A b) C c) B d) A ó B e) A ó C

34. Dos caños A y B pueden llenar un depósito en 10 horas; pero si B funcionara como desagüe el depósito se llenaría en 20 horas; ¿En qué tiempo el caño A podría llenar el depósito?.

a) 40 horas b) 10 horas c) 13 h. 20 min. d) 13 h. 3 min. e) N.A.

35. Un fabricante vende a un comerciante los $\frac{11}{15}$ de una pieza de género a S/. 300 el metro, con la condición de admitirle los metros que no pudiera vender. El comerciante vende en

S/.7 140 los $\frac{20}{21}$ del género que había comprado, obteniendo una ganancia de S/. 210, más el importe de los metros sobrantes que devolvió. Se desea saber los metros que tenía la pieza del género y la ganancia total obtenida por el comerciante.

a) 250 m; S/. 450 b) 315m; S/. 540 c) 300 m; S/. 600 d) 405 m; S/. 575 e) N.A.

36. Dos caños alimentan un estanque, el primero puede llenarlo en 50 horas y el segundo en 40 horas. Se deja abierto el primero durante 15 horas y después el segundo durante 16 horas. Enseguida se retiran 900 litros y se abren las dos llaves, terminando de llenarse el estanque en 10 horas más. ¿ Cuál es la capacidad del estanque ?.

a) 6 000 lt. b) 8 000 lt. c) 9 000 lt. d) 12 000 lt. e) 18 000 lt.

37. Un estanque puede ser llenado por dos caños A y B en 15 y 20 horas respectivamente y puede ser descargado por un desagüe C en 40 horas.
Si estando vacío el estanque se abren las llaves A; B y C y después de 2 horas se cierra B y después de una hora se cierra A.
¿ En cuántas horas después de cerrar A se vacía todo el estanque ?

a) 3 horas b) 31 horas c) 9 horas d) 35 horas e) 25 horas

38. Dos caños pueden llenar un depósito en 27 horas. Después de estar abiertos ambos durante 12 horas, se cierra uno y el otro llena lo que falta en 20 horas. ¿ En cuántas horas llenará el depósito el de menos caudal ?.

a) 36 b) 108 c) 27 d) 12 e) N.A.

39. Debido a que el desagüe no se había cerrado, una piscina tardó en llenarse 10 horas. Con el desagüe cerrado se hubiera llenado en 4 horas.
¿ Cuánto tiempo demorará en quedar vacía la piscina con las llaves cerradas y el desagüe abierto ?.

a) 6 h. 20 min. b) 6 h.30min. c) 6 h. 40 min. d) 6 h. 45 min. e) 6 h. 50 min.

40. Un depósito tiene dos grifos A y B para llenarlos, y un desagüe C para vaciarlo.
Vacío el depósito, cerrado C y B, A tarda doce horas en llenarlo, y cerrados C y A, B tarda en llenarlo nueve horas.
Lleno el depósito y cerrado A y B, C vacía el depósito en dieciocho horas. Supuesto vacío el depósito. ¿ Qué tiempo tardará en llenarse, si desde el principio se abren A, B y C ?

a) 7 h. 12min. b) 3 h. 48min. c) 11 h. 05min. d) 6 h. 41min. e) N.A.

41. Un grifo puede llenar un estanque en 8 horas y otro en 12 horas, mientras el tubo de desagüe lo vacia en 15 horas. Cuando el estanque está lleno hasta $\frac{1}{3}$ de altura se abren los grifos

y el tubo de desagüe durante una hora. ¿Qué fracción del depósito quedará al fin por llenar?.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{8}{11}$ d) $\frac{21}{40}$ e) N.A.

Cuatro operaciones combinadas

42. La mitad de lo que me queda de gaseosa en la botella es igual a la tercera parte de lo que ya me tome. Si me tomo la cuarta parte de lo que me queda. ¿Qué fracción de toda mi gaseosa me habré tomado ?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{11}{19}$ e) N.A.

43. Si vendo una caja de galletas a S/.30 los $\frac{2}{3}$ de kg. ganaría S/. 585; pero vendiendo a S/. 26.25 los $\frac{5}{6}$ de kg. perdería S/. 292.50. ¿ Cuántos kg. de galletas hay en la caja ?.

a) 26 b) 12 c) 11 d) 65 e) N.A.

44. En una estación ferroviaria, a las 7:53 estaban $\frac{1}{6}$ de los pasajeros. Cada minuto que pasaba, llegaban 14 pasajeros más. Si se quedaron sin viajar $\frac{1}{11}$ de los pasajeros. ¿ Cuántos pasajes habían vendido para este tren de las 8 ?

a) 434 b) 132 c) 154 d) 210 e) 385

45. Un agricultor tiene un pago importante que hacer y decide vender parte de su vino a S/. 1 280 el hectolitro. Vendiendo los $\frac{3}{4}$ le faltarían S/. 5 760 para cancelar la deuda, mientras que vendiendo los $\frac{6}{7}$, tendría la suma suficiente para lograr su objetivo. ¿ Cuántos litros de vino tiene el agricultor ?.

a) 4 200 b) 3 600 c) 7 200 d) 3 000 e) 1 842

46. En una mina trabajan cierto número de obreros; pero deseando incrementar el ritmo de su explotación, el superintendente ordena aumentar este número, primero en sus $\frac{2}{9}$ partes y después en los $\frac{7}{30}$ del último efectivo. ¿ Cuál fue el número primitivo de obreros,

si al nuevo ritmo trabajan 4 070 ?

a) 1 800 b) 2 700 c) 3 600 d) 900 e) N.A.

47. Una vagoneta llena de cal pesa 3 720 kg.; cuando contiene los $\frac{5}{8}$ de su capacidad pesa $\frac{95}{124}$ del peso anterior. Hallar el peso de la vagoneta vacía.

a) 7 000 kg. b) 1 000 kg. c) 1 400 kg. d) 2 100 kg. e) 2 400 kg.

48. Evaristo va al hipódromo con S/. 90 000 y cuando va perdiendo los $\frac{2}{3}$ de lo que no pierde, apuesta la tercera parte de lo que le quedaba duplicando su apuesta ¿ Gana o pierde ? ¿ cuánto ?

a) Gana S/. 8,500 b) Pierde S/. 5000 c) Gana S/. 18000

d) No gana ni pierde e) N.A.

49. Los $\frac{2}{3}$ de un viaje se han realizado en ferrocarril a un costo de $9\frac{1}{4}$ soles por kilómetros; el tercio restante se ha efectuado en automóvil a razón de 16 soles por kilómetro. ¿ Cuántos kilómetros se han recorrido, si el costo total ha sido de S/. 1 035 ?

a) 130 b) 120 c) 110 d) 100 e) 90

50. El costo de almacenaje diario en una aduana es $\frac{1}{10}$ del valor de la mercadería. Un comerciante comienza a retirar, al final de cada día, $\frac{1}{5}$ de la mercade ·a almaceneda. ¿ Cuál debe ser el valor total del almacenaje ?

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{4}{21}$ c) $\frac{5}{46}$ d) $\frac{3}{20}$ e) $\frac{1}{9}$

51. Un comerciante vendió la sexta parte de un lote de mercadería ganando el 7.5%; luego vendió los $\frac{2}{5}$ del resto ganando el 15%; luego la cuarta parte del resto, perdiendo el 50%. Si resultó perdiendo S/. 2 250 ¿ Cuál fue el costo del lote de mercadería ?. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 12 b) 6 c) 3 d) 8 e) N.A.

52. Se retira de un cubo los $\frac{2}{3}$ de su contenido menos 40 litros. En una segunda operación se

saca los $\frac{2}{5}$ del resto y por último los 84 litros restantes. ¿ Cuál es la capacidad del cubo ?.

a) 140 b) 112 c) 296 d) 1213 e) 300

53. Un comerciante vende los $\frac{3}{4}$ de un lote de cajas de frutas más $\frac{1}{4}$ de caja; luego vende los $\frac{3}{4}$ del resto más $\frac{1}{4}$ de caja. Luego de otras dos ventas en las mismas condiciones, el comerciante se queda sin frutas. Determinar cuántas cajas de frutas tenía el lote inicialmente.

a) 21 b) 42 c) 125 d) 85 e) 95

54. Una avenida tiene plantada en sus dos costados árboles frutales; los 2 / 9 de longitud la ocupan naranjos, la sétima parte del resto lo ocupan duraznos, los 2 / 5 del nuevo resto manzanas; los 3/12 de lo que queda lo ocupan plátanos y los 108 metros restantes lo ocupan peros. ¿ Cuántos árboles hay en dicha avenida, si se sabe que la distancia entre cada árbol es 4 metros ?

a) 91 b) 182 c) 90 d) 180 e) 192

55. Se tiene una vasija de 100 litros llena de vino; se extrae 1 / 5 de su contenido y se reemplaza por agua. Se vuelve a extraer 1 / 4 del contenido de la vasija y se vuelve a reemplazar por agua y finalmente se extrae 1 / 8 del nuevo contenido y se reemplaza por vino. ¿ Cuántos litros de vino quedaron finalmente en la vasija ?

a) 45 b) 35 c) 65 d) 70 e) N.A.

56. Una vendedora de huevos, vende $\frac{2}{5}$ de su canasto, vuelve a vender $\frac{1}{3}$ del resto y en una tercera venta, vende la mitad del nuevo resto; si añadiera 34 a los que le quedan, el número primitivo, quedaría aumentado en $\frac{1}{3}$ ¿ Cuántos huevos había en la canasta ?

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 48

57. Un recipiente se llena con 6 litros de vino, se consume 1 / 3 del contenido y se vuelve a llenar con agua. Luego se consume 2 / 5 del contenido y se vuelve a llenar con agua y por último se consume los 3 / 8 del contenido y se vuelve a llenar con agua. ¿Qué cantidad de vino contiene un litro de esta última mezcla ?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

58. Dos personas A y B podrían terminar juntos un trabajo en 10 días. B y C lo harían en 12 días y A y C en 15 días. ¿ Cuánto tiempo emplearán si trabajan los tres juntos.

a) 9 días b) 8 días c) 7 días d) 6 días e) 4 días.

59. Un obrero y su ayudante pueden hacer una obra en 24 días. Ocho días después de iniciada la obra, ambos enferman y el obrero reduce su eficiencia en $\frac{1}{3}$ y el ayudante en $\frac{1}{5}$ por lo cual entregan la obra con $6\frac{1}{2}$ días de retraso. ¿ En qué tiempo hubiera hecho el obrero toda la obra trabajando solo.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 21

60. Dos obreros A y B, trabajando juntos deben hacer una misma obra en $7\frac{1}{2}$ días; pero a los 3 días A cae enfermo, y lo mismo le ocurre a B a los 5 días, quedando hecha la mitad de la obra. ¿ Cuántos días requiere el más lento para terminar el trabajo en el supuesto que fuera el único en reincorporarse al trabajo ?.

a) 5 días b) 7 días c) 10 días d) 12 días e) 8 días.

Clave

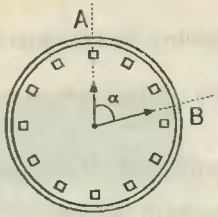
1 a	11 e	21 c	31 a	41 b	51 d
2 c	12 c	22 a	32 b	42 c	52 e
3 d	13 d	23 b	33 c	43 b	53 c
4 b	14 b	24 c	34 e	44 b	54 c
5 b	15 e	25 b	35 d	45 a	55 c
6 c	16 d	26 a	36 d	46 b	56 a
7 a	17 b	27 a	37 a	47 c	57 a
8 d	18 a	28 d	38 b	48 d	58 b
9 b	19 c	29 e	39 c	49 e	59 c
10 b	20 b	30 c	40 a	50 b	60 d

Problemas sobre relojes

Sobre este tema existe una gran variedad de problemas; pero los más notables son aquellos que relacionan las horas marcadas con los ángulos que forman las agujas, y los que se refieren a la hora aparente que marca un reloj, que se adelanta o se atrasa.

Conceptos previos

* En todo reloj las agujas forman un ángulo central porque su vértice está en el centro de la circunferencia, y su valor está dado por el arco correspondiente. Luego: $\alpha = \overset{\frown}{AB}$



* La circunferencia del reloj tiene 60 divisiones (60 minutos) y cuando transcurre una hora, el horario avanza cinco de estas divisiones, mientras que el minutero avanza las 60 divisiones, de lo cual se deduce que por cada división que avanza el horario, el minutero avanza 12. Luego:

$$\frac{\text{Espacio recorrido por el horario}}{\text{Espacio recorrido por el minutero}} = \frac{1}{12}$$

* La esfera del reloj se ha dividido en 60 partes iguales (60 divisiones), cada una de las cuales representa un minuto y en total representan 360° de la circunferencia, luego a cada minuto corresponde un ángulo de:

$$\frac{360^\circ}{60 \text{ minutos}} = 6^\circ / \text{minuto}$$

* En una hora el horario gira: $5 \times 6^\circ = 30^\circ$; mientras que el minutero gira 360° (una vuelta completa), de esto deducimos que por cada grado del horario el minutero avanza 12. Luego:

$$\frac{\text{ángulo girado por el horario}}{\text{ángulo girado por el minutero}} = \frac{1}{12}$$

* En una hora el minutero avanza 60 minutos y el horario gira un ángulo de 30° por el cual se puede afirmar que:

"El número de grados que gira el horario (30°) es **numéricamente** igual a la mitad del número de minutos $\left(\frac{60\,\text{min}}{2}\right)$, que avanza el minutero

Ejemplo:

Si el minutero avanza "M" minutos, el horario avanza $\frac{M}{2}$ grados.

Relación entre horario y el segundero

i. Relación entre minutero y segundero:

En un minuto, el minutero avanza una **"división"** y el segundero 60, luego:

$$\frac{\text{Minutero}}{\text{Segundero}} = \frac{1}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sabemos que:

$$\frac{\text{Horario}}{\text{Minutero}} = \frac{1}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Multiplicando (1) x (2):

$$\frac{\text{Minutero}}{\text{Segundero}} \times \frac{\text{Horario}}{\text{Minutero}} = \frac{1}{60} \times \frac{1}{12}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\text{Horario}}{\text{Segundero}} = \frac{1}{720}}$$

Observaciones previas

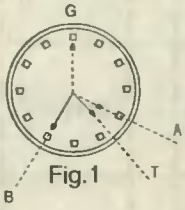


Fig.1

Para establecer la posición de las agujas. Esta se hace por referencia a una posición inicial, que está dada por el número de horas enteras inmediato anterior a la posición actual de las agujas.

Según el gráfico (Fig.1) el reloj, marca 4h. 35', luego la posición final de referencia es cuando el reloj marca las 4h. (Líneas suspensivas), luego en la fórmula H = 4, pues la posición inicial es la que define el valor de "H".

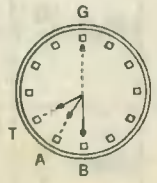


Fig.2

Ejemplos para otros casos:

HORA	POSICION INICIAL	VALOR DE "H"
5H 25'	5H	H = 5
3H 20'	3H	H = 3
12H 45'	12H	H = 0

* Si es 12H ..... Min. entonces H = 0

Procedimiento para hallar el ángulo

1º Cuando **EL MINUTERO PASO AL HORARIO** (Fig.1) el ángulo (α) que forman las agujas se obtiene por la diferencia del ángulo girado por el minutero GB, menos el ángulo que hace el horario desde las 12H a su posición actual $\overset{\frown}{GT}$

2º Cuando **EL MINUTERO NO PASO AL HORARIO** (Fig.2) el ángulo (α) que forman las agujas, se obtiene por la diferencia del ángulo que hace el horario desde las 12H. a su posición actual GT, menos el ángulo girado por el minutero GB. Luego tenemos la fórmula:

$$\alpha = \pm\frac{11M}{2} \mp 30H$$

Para los signos:

* Cuando el minutero pasó al horario (Fig.1) "M" está precedido por signo (+) y "H" por signo (-).
* Cuando el minutero no pasó al horario (Fig.2) "M" está precedido por signo (-) y "H" por signo (+).

Relaciones de las agujas del reloj

Se presentan 2 casos:

i. Cuando el minutero pasó al horario.
ii. Cuando el minutero no pasó al horario.

HORA		POSICION DE LAS AGUJAS		Avance Minutero		Avance Horario			SIGNO	G.B.	SIGNO	G.T.	
H	M			Min	Grados	Hrs.	Grados						
12	10		MINUTERO PASO AL HORARIO	10	10 x 6°	12	$\frac{10}{2}$	$\alpha =$	+	10 x 6	−	$(30x0+\frac{10}{2})$	=55°
1	20			20	20 x 6°	1	$\frac{20}{}$	$\alpha =$	+	20 x 6	−	$(30x1+\frac{20}{2})$	=80°
2	30			30	30 x 6	2	$\frac{30}{2}$	$\alpha =$	+	30 x 6	−	$(30x2+\frac{30}{2})$	=105°
H	M			M	M x 6	H	$\frac{M}{}$	$\alpha =$	+	M x 6	−	$(30xH+\frac{M}{2})$	
								$\alpha =$	+	$\frac{11}{2}M$	−	30H	

5	10		MINUTERO NO PASO AL HORARIO	10	10 x 6	5	$\frac{10}{2}$	$\alpha = - 10 \times 6 + (30 \times 5 + \frac{10}{2}) = 95°$	
6	20			20	20 x 6	6	$\frac{20}{2}$	$\alpha = - 20 \times 6 + (30 \times 6 + \frac{20}{2}) = 70°$	
7	30			30	30 x 6	7	$\frac{30}{2}$	$\alpha = - 30 \times 6 + (30 \times 7 + \frac{30}{2}) = 45°$	
H	M			M	M x 6	H	$\frac{M}{2}$	$\alpha = - M \times 6 + (30 \times H + \frac{M}{2})$ $\alpha = - \frac{11}{2}M + 30H$	

1. A qué hora entre las cuatro y las cinco las agujas de un reloj están superpuestas.

Solución

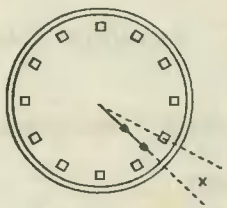
Para hallar la hora: Relación:

$$\frac{\text{ESP. REC. POR EL HORARIO}}{\text{ESP. REC. POR EL MINUTERO}} = \frac{1}{12}$$

FIGURA 1

Posición cuando es las 4 horas (inicial o de referencia)

FIGURA 2



Posición cuando están superpuestas entre las 4 y 5. (actual)

ESPACIO RECORRIDO POR HORARIO = x
ESPACIO RECORRIDO POR EL MINUTERO = 20 + x
De acuerdo a la "figura 2" la hora es:

$$4h\ (\ 20+x\ )'$$

Para hallar "x" aplicamos la relación:

$$\frac{X}{X+20}=\frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad 12x = x+20 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 11x = 20 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = {}^{20}\!/_{11} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = 1\frac{9}{11}' \quad \rightarrow$$

La hora será: $4H\ 21\frac{9}{11}'$

Aplicando la fórmula:
Posición de las agujas: el minutero no ha pasado al horario. (Fig.2)

Aplicamos:

$$\alpha = -\frac{11}{2}M+30H$$

Donde:

$$\alpha = 0;\ H = 4;\ M = ?$$

Reemplazando:

$$0 = -\frac{11}{2} \times M + 30 \times 4 \quad \rightarrow \quad \frac{11}{2}M = 120$$

$$M = \frac{240}{11} = 21.\frac{9}{11}$$

Rpta. La hora es: $4H\ \ 21\frac{9'}{11}$

2. ¿Qué ángulo forman la agujas de un reloj a las 3h. 38m.?

Solución

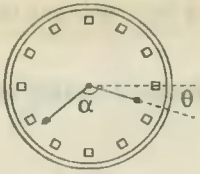
Para hallar el ángulo: Relación:

$$\frac{\text{ANG. GIRADO POR EL HORARIO}}{\text{ANG. GIRADO POR EL MINUTERO}}=\frac{1}{12}$$

FIGURA 1

Posición cuando es las 3 horas (inicial o de referencia)

FIGURA 2



Posición cuando es 3h 38' (actual)

ANG. GIRADO POR HORARIO $= \theta$
ANG. GIR. POR MINUTERO en 38' $38 \times 6^\circ = 228^\circ$

ANGULO QUE FORMAN LAS AGUJAS:

$$\alpha = 228^\circ - (90^\circ + \theta)$$

Aplicamos la relación para hallar el ángulo θ

$$\frac{\theta}{228^\circ} = \frac{1}{12} \Rightarrow \theta = 19^\circ$$

O también: Si el minutero avanza 38'. Entonces el horario giró $\frac{38}{2} = 19^\circ$

Luego:

$$\alpha = 228^\circ - (90^\circ + 19^\circ) = 119^\circ$$

Aplicando la fórmula:

Posición de las agujas: El minutero pasó al horario. (Fig.2)

Aplicamos: $\alpha = +\frac{11}{2}M - 30H$

Donde: $H = 3, M = 38; \alpha = ?$

Reemplazando:

$$\alpha = +\frac{11}{2} \times 38 - 30 \times 3$$

$$\alpha = 209 - 90$$

Rpta. $\alpha = 119^\circ$

Segundo Caso:

Cálculo de la hora aparente que marca un reloj que se adelanta o se atrasa.

3. Un reloj se adelanta 10 minutos cada hora, si son las 8 a.m.. ¿Qué hora marcará el reloj a las 2 p.m.?

Solución

(1) Hallamos el tiempo transcurrido desde las 8 a. m. hasta 2 p. m. que es 6 horas y es el tiempo real transcurrido.

(2) Hallamos cuanto se adelanta el reloj en 6 horas.

Si: 1h —— 10'
6h —— x a ó

$$x = \frac{6h \times 10'}{1h} = 60' = 1h.$$ adelanto 1 h.

(3) Luego la hora que marca es: 8 a.m. + tiempo transcurrido + adelanto real.

= 8 a.m. + 6h + 1h

Rpta. = 15 h ó 3 p.m.

4. Es las 8 a.m. y un reloj comienza adelantarse, 30 minutos cada hora. Cuando para el reloj haya transcurrido medio día. ¿ Cuál será la hora correcta ?.

Solución

(1) Si para el reloj han transcurrido 12 horas (medio día) hallamos el tiempo real transcurrido

Así:

Tiempo Real		Tiempo del Reloj.
1h	———	1.5h.
x	———	12h.

$$x = \frac{1h \times 12h}{1.5h} = 8h.$$

(2) La hora correcta será:

Rpta. 8 a.m. + 8h = 16h ó 4 p.m.

5. Un reloj se adelanta 2 horas cada día. Cuál debe ser el menor número de días que debe transcurrir para que marque la hora exacta ?.

Solución

Si se atrasa 2 horas cada día al final de cada día, se tendrá una hora real y para el reloj una hora aparente. Así:

Nº de días	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Hora real al final c/día.	12	12	12	12	12	12
Hora aparente en el reloj	10	8	6	4	2	12

En el cuadro anterior, se observa que en el sexto día la hora real y la aparente coinciden, luego el menor tiempo que debe transcurrir para que el reloj marque la hora exacta en 6 días.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente:

$$\text{Menor tiempo que debe trancurrir es} = \frac{12 \text{ horas}}{\text{Atraso o Adelanto}}$$

En el problema:

$$\text{Menor número de días es} = \frac{12 \text{ horas}}{2 \text{ horas}} = 6 \text{ días}$$

Rpta. 6 días

6. Mario el día lunes observó en un reloj oficial que eran las 12M; pero advirtió que su reloj iba 2 minutos atrasado. El miércoles a las 8 A.M. observó que su reloj estaba retrasado 1 minuto. ¿En qué momento marcó la hora exacta ?.

Solución

(1) Desde el lunes a las 12 M. hasta el miércoles a las 8 A.M. han transcurrido 44 horas, tiempo en el cual el reloj se atrasó 3 minutos, y para que marque la hora exacta sólo debe atrasarse 2 mínutos, luego calculamos que tiempo debe transcurrir para que se atrase 2 minutos.
Así:

En: 44 —— 3' atraso
x —— 2'

$$x = \frac{44x2}{3} = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3} \text{ hrs. ó } 29\text{H } 20'$$

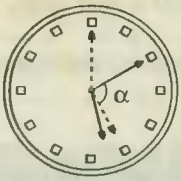
El reloj marcará la hora exacta

$$12\text{M} + 29\text{H } 20' = \underbrace{12\text{H} + 12\text{H}}_{\text{Lunes}} + \underbrace{17\text{H } 20'}_{\text{Martes}}$$

Rpta El martes a las 17H 20'

7. Entre las 5 y las 6. ¿ En qué momento las agujas de un reloj forman por primera vez un ángulo de 100° ?

Solución



El gráfico nos muestra la posición de las agujas en que el minutero no ha pasado al horario.
Luego, aplicamos la fórmula:

$$\alpha = -\frac{11}{2} M + 30H$$

Donde: $\alpha = 100°;\ H = 5;\ M = ?$

Reemplazando tenemos:

$$100 = -\frac{11}{2} M + 30 \times 5$$

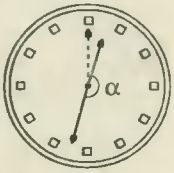
$$\frac{11}{2} M = 150 - 100$$

$$M = \frac{2x50}{11} = \frac{100}{11} = 9\frac{1'}{11}$$

Rpta. La hora será: $5\ H\ 9\frac{1'}{11}$

8. ¿ Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 12H 32 $\frac{8}{11}$ min. ?

Solución



Posición de las agujas: el minutero paso al horario:

Aplicamos la fórmula: $\alpha = \frac{11}{2} M - 30\ H \ldots (1)$

Donde: $M = 32\frac{8'}{11} = \frac{360'}{11}$

$H = 0$ (cuando es 12 H . . . min; $H = 0$)

Reemplazando en (1): $\alpha = \frac{11}{2} x \frac{360'}{11} - 30 \times 0$

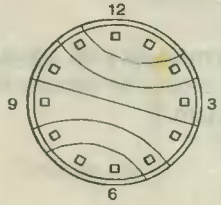
Rpta. $\alpha = 180°$

9. La esfera de un reloj es de vidrio, ésta se cae y se rompe en 6 partes, y resulta que cada parte contiene números tales que la suma en todos los casos son iguales. ¿ Cuál es esta suma ?.

Solución

La suma de los números que tiene el reloj es: $1 + 2 + 3 + ...+ 12 = 78$. Como el reloj se divide en 6 partes, cada parte tiene números que suman:
$78 \div 6 = 13$

Gráfica



10. ¿ Qué hora es cuando las agujas del reloj formen por segunda vez un ángulo recto entre las 7 y las 8 ?.

Solución

El gráfico nos muestra que cuando forman ángulo recto por segunda vez, el minutero pasó al horario. Luego aplicamos la fórmula: $\alpha = \frac{11}{2} M - 30 H$, donde:

$$\alpha = 90^{\circ};\ H = 7;\ M = ?$$

Reemplazando:

$$90^{\circ} = \frac{11}{2}M - 30 \times 7 \Rightarrow \frac{11}{2}M = 300 \Rightarrow M = 54\frac{6'}{11}$$

Transformando $\frac{6'}{11}$ a segundos:

$$\frac{6}{11} \times 60 = \frac{360''}{11} = 32\frac{8''}{11}$$

Rpta. $\therefore$ La hora es: $7\ H\ 54'\ 32\frac{8''}{11}$

Sobre el reloj

61. ¿A qué hora entre las 7 y las 8 las agujas del horario y minutero de un reloj se encuentran superpuestas?

a) 7h 39min. 10 $\frac{10}{11}$seg. b) 7h 43min. 38 $\frac{2}{11}$ seg. c) 7h 38min. 10 $\frac{10}{11}$ seg.

d) 7h 39min. 2 $\frac{2}{11}$ seg. e) N.A.

62. A las 3:30 de la tarde un reloj se malogra y las agujas de éste con la misma velocidad que normalmente llevan, comienzan a girar en sentido contrario. ¿ Cuál es la hora verdadera cuando el reloj marque las 8:20 p.m.?

a)9h.40min. b)11h.40min. c)10h.40min. d)12h e) N.A.

63. ¿Cuál es el espacio recorrido por la punta de la aguja del horario de un reloj al cabo de 3 horas, si esta mide 6 cm ?

a) 3p cm. b) 4p cm. c) 12p cm. d) 6p cm. e) N.A.

64. Son las 2 p.m., a la 1 a.m.; ¿ Cuántas veces ha pasado la aguja del minutero a la aguja del horario ?

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) 12

65. Un reloj de agujas se atrasa 10 minutos cada hora, ¿Después de cuántas horas como mínimo marcará la hora exacta ?

a) 72 b) 144 c) 36 d) 288 e) 18

66. Es las 2h 15'. ¿ Cuántos minutos debe transcurrir para que las agujas del reloj formen ángulo recto ?

a)$12\frac{3}{11}$min. b)$27\frac{3}{11}$min. c) 15 min. d) 20 min. e) N.A.

67. ¿ Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 12 h. 20' ?

a) 120° b) 115° c) 110° d) 108° e) 129°

68. ¿ Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 12h 50' ?

a) 60° b) 65° c) 80° d) 85° e) 70°

69. ¿ Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 9h 45' ?

a) 22.5° b) 45° c) 15° d) 30° e) N.A.

70. Si para que sean las 10 horas faltan, la mitad de minutos que transcurrieron desde la 7 horas; diga ¿ Qué hora es ?

a) 8h 30' b) 8h c) 9h d) 9h 30' e) N.A.

71. Luis emplea exactamente 1h en ir de su casa al colegio si sale a las 7 a.m. de su casa y para llegar al colegio le faltan 10 minutos menos de los que ya ha caminado; diga ¿ Qué hora es ?

a) 7h 30' b) 7h 40' c) 7h 35' d) 7h 50' e) 7h 10'

72. Juan empieza una tarea cuando las agujas del reloj forman un ángulo recto entre las 2 y las 3 y termina cuando las agujas están superpuestas entre las 3 y las 4. ¿ Qué tiempo duró la tarea ?.

a) 45' b) $49\frac{1}{11}$ min. c) $50'\ \frac{1}{11}$ d) 1h 30' e) N.A.

73. Un reloj se adelanta 8 minutos cada 5 horas, si es las 3:30 a.m. ¿ Qué hora marca el reloj cuando realmente transcurran 25 horas ?

a) 4:30 a.m. b) 3:50 a.m. c) 5:00 a.m. d) 5:10 a.m. e) N.A.

74. Un reloj se adelanta 4 minutos cada día, si a las 7:30 a.m. marca 7:30' 40" ¿ Qué adelanto llevará al medio día ?.

a) 75" b) 85" c) 45" d) 40" e) N.A.

75. Un reloj se adelanta y se calcula que deben transcurrir 60 días par que dé la hora exacta. ¿ Cuánto se adelanta el reloj cada día ?

a) 12' b) 10' c) 5' d) 6' e) N.A.

76. Es las tres de la tarde. ¿ Cuántos minutos deben transcurrir para que las agujas estén superpuestas ?

a) $1\frac{4}{11}$ min. b) $16\frac{4}{11}$ min. c) $15\frac{4}{11}$ min. d) 16 min. e) N.A.

77. ¿ A qué hora entre las 4 y las 5 las agujas de un reloj están superpuestas ?

a) 4h 20min. b) 4h $1\frac{9}{11}$ min. c) 4h 2min. d) 4h $21\frac{9}{11}$ min. e) N.A.

78. Es medio día, ¿A que hora las agujas de un reloj estarán opuestas ?

a) $12h\ 30\ \frac{8}{11}$ min. b) 12h 30 min. c) $12h\ 32\ \frac{8}{11}$ min. d) 12h 32 min. e) N.A.

79. En las 10 de la mañana. ¿ Cuál es el menor ángulo que forman las agujas de un reloj a las 10:30 ?

a) 135° b) 105° c) 120° d) 140° e) N.A.

80. Es las 3 de la tarde ¿A qué hora las agujas de un reloj forman un ángulo llano ?

a) $3h\ 49\frac{1}{11}$ min. b) 3h 50 min. c) 3h 46 min. d) 3h 48 min. e) N.A.

Clave

61 c	71 b
62 a	72 b
63 e	73 c
64 d	74 e
65 a	75 d
66 b	76 a
67 b	77 b
68 c	78 c
69 b	79 c
70 a	80 a

NUMEROS DECIMALES

Fracciones decimales: Se le llaman fracciones decimales aquellas cuyo denominador es una potencia de 10, es decir, la unidad seguida de ceros.

Ejemplos $\frac{157}{10}; \frac{65}{100}; \frac{8}{1000};$ .....

Así como en las aplicaciones de la aritmética de los números naturales se prefiere utilizar la numeración decimal; en las de los números racionales son las fracciones decimales las más usadas, y por esto, a pesar de que todas las proposiciones que corresponden a ellas se obtienen como caso particular de las ya estudiadas para las fracciones en general, merece un estudio especial.

Unidades decimales: Cuando el numerador de la fracción es 1, la fracción se llama unidad fraccionaria decimal. Según que el denominador sea la unidad seguida de 1, 2, 3, ...n ceros las unidades decimales se llamarán de primer orden, de segundo orden, ..., de enésimo orden o también décimas, centésimas, milésimas, ...

Clasificación de los números decimales

I. Exactas o limitadas:

Tienen una cantidad determinada de cifras decimales.

Ejemplos: 375,284; 0,325; 62,0078142

II. Ilimitadas:

Tienen una cantidad ilimitada de cifras decimales y pueden ser: ilimitadas periódicas e ilimitadas no periódicas: las ilimitadas periódicas son aquellas que tienen período o sea que tienen una o más cifras que se repiten en forma constante e ilimitada y pueden ser: **periódicas puras o periódicas mixtas**:

i. Periódicas puras:
Cuando el periodo empieza inmediatamente después de la coma decimal.

Ejemplos: 0,173173173 .....; 378,666.....

Para abreviar la escritura de un número decimal periódico, se acostumbra a colocar una ligadura que abarque todo un período; también se utiliza una barra o un corchete, así los ejemplos anteriores se pueden representar:

$$0,173173173..... = 0,\widehat{173} = 0,\overline{\overline{173}} = 0,[\,173\,]$$

$$378,666 .....= 378,\hat{6} = 378,\bar{6} = 378,[\,6\,]$$

ii. Periódica mixta:

Cuando el período empieza después de una o varias cifras, después de la coma decimal, la parte que no constituye el período se llama parte no periódica o parte exacta.

Ejemplos: $0,6717171 ..... = 0,6\widehat{71}$

$$31,00417417..... = 31,00\widehat{417}$$

III. Ilimitadas no periódicas:

Son aquellas donde las cifras salen sin guardar ningún orden y en forma ilimitada. No se pueden obtener dividiendo dos números enteros. Pueden ser: ilimitadas no periódicas irracionales y ilimitadas no periódicas trascendentes.

i. Número decimal ilimitado no periódico irracional:

Es el que resulta al extraer raíz de cualquier índice a números que no tienen raíz exacta.

Ejemplo

$$\sqrt{2} = 1,4142136.....$$

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599210.....$$

$$\sqrt{3} = 1,7320506.....$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,4422496.....$$

ii. Número decimal ilimitado no periódico trascendente:

Son ciertas constantes matemáticas como:

$$\pi = 3,1415926535897932.....$$

$$e = 2,718281.....$$

REDUCCION DE FRACCIONES ORDINARIAS A FRACCIONES DECIMALES

Se reduce el quebrado a su mínima expresión y:

1º Si el denominador del quebrado posee sólo el factor primo 2 ó 5 ó los dos a la vez dará origen a una fracción decimal EXACTA o limitada y se puede asegurar que tendrá tantas cifras decimales como indique el mayor de los exponentes de los factores primos 2 ó 5. Así:

$\frac{21}{19\ 200} = \frac{7}{6\ 400}$ como: $6\ 400 = 2^8 \times 5^2$ como el denominador posee sólo los factores primos 2 y 5, dará origen a una fracción exacta o limitada y como el mayor exponente de los factores primos es 8, la parte decimal tendrá 8 cifras, efectivamente:

$$\frac{7}{6\ 400} = 0,00109375$$

2º Si el denominador del quebrado **no** posee el factor primo 2 ni 5, dará origen a una fracción decimal periódica pura.
Para saber cuantas cifras tendrá el periódo se procede de la siguiente forma:

i. Se averigua cuál es el menor número formado por cifras nueve que sea divisible por los factores primos del denominador; la cantidad de "nueves" indica la cantidad de

cifras que tendrá el período. Para su resolución ayuda el siguiente cuadro:

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 99 &= 3^2 \times 11 \\ 999 &= 3^3 \times 37 \\ 9\,999 &= 3^2 \times 11 \times 101 \\ 99\,999 &= 3^2 \times 41 \times 271 \\ 999\,999 &= 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \\ 9\,999\,999 &= 3^2 \times 239 \times 4649 \\ 99\,999\,999 &= 3^2 \times 11 \times 101 \times 73 \times 137 \end{aligned}$$

Ejemplo $\frac{1}{33}$ ¿cuántas cifras tendrá el período? :

como: $33 = 3 \times 11$ y 99 es el menor número formado por nueves que contiene a 3 y 11 el período tendrá dos cifras.

ii. En la forma general, se descompone (después de hacerla irreductible), el denominador en sus factores primos y se averigua "cuántas cifras" nos da cada factor hallado; calculando después el M.C.M. de las cifras que nos dan los diversos factores. Cada factor da tantas "cifras" como número de nueves tenga el menor de sus múltiplos formado de sólo nueves, como se deduce en el cuadro anterior.

Ejemplo $\frac{1}{231}$ ¿ cuántas cifras tendrá el período ?

$231 = 3 \times 7 \times 11$

- como $\underline{\underline{9}}$ contiene a 3 $\Rightarrow$ 3 nos da $\underline{1}$
- como $\underline{\underline{999\ 999}}$ contiene a 7 $\Rightarrow$ 7 nos da $\underline{\underline{6}}$
- como $\underline{\underline{99}}$ contiene a 11 $\Rightarrow$ 11 nos da $\underline{\underline{2}}$

M.C.M. (1,6,2) = 6

El período tendrá 6 cifras. En efecto:

$$\frac{1}{231} = 0,\overbrace{004329}$$

iii. Si el denominador del quebrado irreductible, posee el factor primo 2 ó 5 ó los dos a la vez y además posee otro u otros factores primos, dará origen a una fracción decimal periódica mixta, donde la parte no periódica tendrá tantas cifras como lo indique el mayor de los exponentes de los factores primos 2 ó 5 (primer caso) y para determinar cuantas cifras tendrá el período se aplica el procedimiento descrito anteriomente.

.Ejemplo $\frac{629}{630}$

como: $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Para la parte no periódica (exacta): 2×5 . . . exponente mayor = 1

Para el período $\left\{ \begin{array}{ll} 3^2 & \text{nos da } \underline{\underline{1}} \\ 7 & \text{nos da } \underline{\underline{6}} \end{array} \right\}$ M.C.M. (1; 6) = 6

$\therefore$ La fracción tendrá una cifra en la parte exacta o no periódica y 6 en el período. Efectivamente:

$$\frac{629}{630} = 0,\overbrace{9984126}$$

Ejemplo: $\frac{2}{2255}$

como: $2\,255 = 5 \times 11 \times 41$

Para la parte exacta (no periódica): 5^1 . . . nos da una cifra

Para la parte periódica $\left\{ \begin{array}{l} 11 \text{ nos da dos cifras} \\ 41 \text{ nos da cinco cifras} \end{array} \right\}$ M.C.M. (2; 5) = 10

$\therefore$ La parte exacta tendrá una cifra y diez cifras el período:

Efectivamente: $\frac{2}{2255} = 0.\overbrace{00088691796}$

Propiedad:

La última cifra del período de la decimal periódica pura equivalente a una fracción irreductible cuyo denominador es primo con 10, será igual o distinta a la última de la parte entera, según respectivamente, que el numerador de la ordinaria irreductible termine o no termine en cero.

Así: $\frac{30}{7} = 4,\overbrace{285714}$ es periódica pura, como el numerador 30 termina en cero, las últimas cifras del período y de la parte entera son iguales (las dos **4**)

En cambio, $\frac{13}{7} = 1,\overbrace{857142}$ periódica pura, pero como el numerador 13 no termina en cero, las últimas cifras del periodo y de la parte entera son distintas (respectivamente 2 y 1).

REDUCCION DE FRACCION DECIMAL A ORDINARIA

Definición:

Reducir una fracción decimal a ordinaria, es hallar la fracción ordinaria que reducida a decimal, nos da la fracción decimal propuesta.

A la fracción ordinaria que da origen a una fracción decimal se le llama generatriz.

Teorema Nº 1

"La generatriz de una fracción decimal limitada, tiene por numerador el número natural que se forma prescindiendo de la coma en la fracción decimal propuesta y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción decimal".

Es una consecuencia inmediata de la definición de fracción decimal, pues si:

$E.\underbrace{abc.....\ell}_{\text{"P" cifras}} = \dfrac{\overline{Eabc.....\ell}}{10^P}$ comprendidos en este caso áquel que E sea cero y aquéllos en que E tenga más de una cifra.

Observación

La generatriz obtenida $\dfrac{\overline{Eabc.....\ell}}{2^P x 5^P}$ puede o no ser irreductible. En cualquiera de los dos casos como su denominador no tiene ningún factor distinto de 2 y 5 y al hacerla irreductible, nunca se introducen factores nuevos, se puede asegurar comprobando lo dicho por el Teorema 1. Ejemplos: Hallar las generatrices de:

$$0{,}2 \rightarrow g = \frac{2}{10}$$

$$3{,}125 \rightarrow g = \frac{3125}{1\,000}$$

$$825{,}0424 \rightarrow g = \frac{8250424}{10\,000}$$

Teorema Nº 2

La generatriz de una periódica pura tiene por numerador la diferencia que se obtiene restando la parte entera, del número natural que se forma escribiendo a la derecha de la parte entera el período, y por denominador, un número formado de tantas cifras 9 como cifras tiene el período.

Sea la fracción decimal periódica pura: $E,\underbrace{\overbrace{abc.....\ell}}_{\text{"P" cifras}}$ donde E es la parte entera; sea "g" la fracción generatriz:

(1) $g = E,\underbrace{\overbrace{abc.....l}}_{\text{"p" cifras}}$ multiplicando ambos miembros por 10^P

(2) $10^P g = \overline{E\,abc.....\ell} \cdot \overbrace{abc.....\ell}$

(2) - (1)

$10^P g - g = \overline{E\,abc.....\ell} - E$

$$g(10^p - 1) = \overline{E\,abc.....\ell} - E$$

$$g(\overbrace{999...9}^{p}) = \overline{E\,abc.....\ell} - E$$

$$g = \frac{\overline{E\,abc.....\ell} - E}{\underbrace{999.....9}_{p}}$$ lo que demuestra el teorema.

Ejemplos Hallar las generatrices de:

$$8,\widehat{252} = \frac{8252-8}{999} = \frac{8244}{999}$$

$$35,\hat{6} = \frac{356-35}{9} = \frac{321}{9}$$

$$0,\widehat{351} = \frac{351-0}{999} = \frac{351}{999}$$

Teorema Nº 3

"La generatriz de una decimal periódica mixta, tiene por numerador la diferencia entre el **número natural** que se obtiene escribiendo a la derecha de la parte entera las cifras de la parte no periódica y las del período y el número también natural que se forma escribiendo a la derecha de la parte entera la parte no periódica , y por denominador un número formado de tantas cifras 9 como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica".

Sea la fracción decimal periódica mixta: E, m.....n $\widehat{abc.....\ell}$
("q" cifras) ("p" cifras)

Sea "g" su generatriz:

$$g = E,\underbrace{m.....n}_{\text{"q" cifras}}\ \underbrace{\widehat{abc.....\ell}}_{\text{"p" cifras}} \quad .....(1)$$

Al multiplicar ambos miembros por: 10^q se obtiene:

$$10^q g = \overline{Em.....n}\,,\ \widehat{abc.....\ell} \quad .....(2)$$

La expresión (1) por 10^{p+q} :

$$10^{p+q}.g = \overline{Em....n\,abc....\ell} \cdot \widehat{abc....\ell} \quad .....(3)$$

A la expresión (3) le restamos la (2) y como tiene la misma parte decimal, ésta se elimina obteniéndose:

$$10^{p+q} g - 10^q g = \overline{Em....n\,abc....\ell} - \overline{Em....n}$$

$$10^q g\,(10^p - 1) = \overline{Em....n\,abc....\ell} - \overline{Em....n}$$

$$10^q g\,(\underbrace{99\ldots.9}_{p}) = \overline{Em....n\,abc....\ell} - \overline{Em....n}$$

$$g = \frac{\overline{Em....n\,abc....\ell} - \overline{Em....n}}{\underbrace{9999.....9}_{p}\,\underbrace{00.....00}_{q}}$$

Lo que demuestra el teorema.

Problemas

1. Hallar el valor de:

$$E = \frac{0,\hat{1}+0,\hat{2}+0,\hat{3}+.....+0,\hat{8}}{0,1\hat{3}+0,2\hat{4}+.....+0,7\hat{9}}$$

Y luego multiplicarlo por el valor del numerador de la fracción irreductible equivalente a:

$$\frac{637}{650}$$

Solución

Transformando a fracciones ordinarias:

$$E = \frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+.....+\frac{8}{9}}{\frac{12}{90}+\frac{22}{90}+.....+\frac{72}{90}} = \frac{\frac{1+2+3+.....+8}{9}}{\frac{12+22+.....+72}{90}} = \frac{\frac{36}{9}}{\frac{294}{90}}$$

$$E = \frac{36x90}{9x294} = \frac{60}{49}$$

además: $\frac{637}{650} = \frac{49}{50}$

El producto pedido:

$$\frac{60}{49} \times 49 = 60$$

Rpta. 60

2. Hallar la suma: $S = 0,\overline{037} + 0,\overline{074} + 0,\hat{1} + \ldots + 1,\overline{259}$

Solución

Transformando a quebrados los números decimales:

$$0,\overline{037} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27};\quad 0,\overline{074} = \frac{74}{999} = \frac{2}{27};\quad 0,\hat{1} = \frac{1}{9} = \frac{3}{27};\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots;\quad 1,\overline{259} = 1 + \frac{259}{999} = \frac{1258}{999} = \frac{34}{27}$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{3}{27} + \ldots\ldots + \frac{34}{27} = \frac{1+2+3+\ldots\ldots+34}{27} = \frac{595}{27} = 22,\overline{037}$$

Rpta. $S = 22,\overline{037}$

3. Si: $\frac{N}{37} = 0,\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}$. Hallar "a"

Solución

$$\frac{N}{37} = \frac{\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}}{999} \Rightarrow\ 27N = \overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a} \Rightarrow$$

$$27N = 61a + 60 \ \Rightarrow\ N = \frac{61a+60}{27} \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$$

Rpta. $a = 3$

4. Hallar "a" si: $\frac{5}{37} + \frac{a}{27} = 0,\overline{a09}$

Solución

Reduciendo a fracciones ordinarias y sumando:

$$\frac{5}{37} + \frac{a}{27} = \frac{\overline{a09}}{999} \Rightarrow \frac{135+37a}{999} = \frac{100a+9}{999} \Rightarrow$$

$$126 = 63a \ \Leftrightarrow \boxed{a = 2}$$

Rpta. $a = 2$

5. Hallar $a + b$, si: $\frac{8}{a}+\frac{a}{9} = b,(b-1)\hat{a}$

Solución

$$\frac{8}{a} + \frac{a}{9} = b + \frac{\overline{(b-1)}a - (b-1)}{90} \Rightarrow \frac{72+a^2}{9a} = \frac{b\times 90+10b-10+a-b+1}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{72+a^2}{9a} = \frac{99b+a-9}{90} \Rightarrow$$

$$720 + 10a^2 = 99ab + a^2 - 9a \Rightarrow 720 + 9a + 9a^2 =$$

$$99 \times a \times b \Rightarrow 80 + a + a^2 = 11 \times a \times b \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Se deduce que: $a^2 + a + 80 = \dot{11} \Rightarrow a^2 + a + \dot{11} + 3 = \dot{11} \Rightarrow a^2 + a = \dot{11} - 3$

$$\Leftrightarrow a^2 + a = \dot{11} - 3 \Rightarrow a(a+1) = \dot{11} - 3 = \begin{cases} 8 \\ 19 \\ 30 \end{cases} \Leftrightarrow a = 5$$

De (α): $80 + 5 + 5^2 = 11 \times 5 \times b \Rightarrow b = 2$

Rpta. $\therefore a + b = 7$

6. Si $\frac{1}{\overline{ab}} = 0,\widehat{0(a-1)b}$; hallar $(a + b)$

Solución

$$\frac{1}{\overline{ab}} = \frac{\overline{(a-1)b}}{999} \Rightarrow \overline{ab} \times \overline{(a-1)b} = 999$$

* Notese que los factores del primer miembro son 2 números que se diferencian en 10

$$\Rightarrow \overline{ab} \times \overline{(a-1)b} = 27 \times 37 \Rightarrow \overline{ab} = 37$$

Rpta. $a + b = 10$

7. Determinar el numerador de una fracción propia de denominador 37 tal que las cifras del período del decimal al que da origen son consecutivos crecientes.

Solución

$$\frac{A}{37} = 0,\widehat{a(a+1)(a+2)} \Rightarrow \frac{A}{37} = \frac{\overline{a(a+1)(a+2)}}{999} \Rightarrow 27\,A = \overline{a(a+1)(a+2)}$$

$$\Rightarrow 27A = 111a + 12 \Leftrightarrow 111a + 12 = \dot{27} \Rightarrow \dot{27} + 3a + 12 = \dot{27} \Rightarrow$$

$$3a + 12 = \dot{27} \Leftrightarrow \boxed{a = 5} \quad \therefore 27A = 567 \Rightarrow A = \frac{567}{27} = 21$$

Rpta. El numerador A = 21

8. Dados las fracciones irreductibles $\frac{M}{7}$ y $\frac{M}{13}$, hallar la relación que existe entre los períodos.

Solución

La relación entre ambos períodos es la misma que existe entre ambas fracciones, es decir:

$$\frac{\frac{M}{7}}{\frac{M}{13}} = \frac{13M}{7M} = 1,\overline{857142} \text{ ó } \frac{\frac{M}{13}}{\frac{M}{7}} = \frac{7}{13} = 0,\overline{538461}$$

Rpta. $0,\overline{538461}$

9. Hallar una fracción propia $\frac{A}{B}$ que dé una cifra de parte no periódica y cinco de período, y tal que A + B = 85

Solución

Para que el periódo tenga 5 cifras B debe contener a 41 o 271 como B < 85 ∴ B contiene a 41 y para que la parte no periódica tenga una cifra B debe contener a 2 ó 5; sólo puede contener a 2 y B = 2 x 41 = 82 ∧ A = 3

Rpta. ∴ La fracción es $\frac{3}{82}$

10. Hallar una fracción irreducible $\frac{A}{B}$ que dé una cifra de parte no periódica y cinco de período cuya suma A + B = 889.

Solución

Razonando en forma análoga al problema anterior, llegaremos a la conclusión que

B = 2 x 271 = 542 ∧ A = 347

Rpta. ∴ La fracción es: $\frac{347}{542}$

11. Los dos enteros de una fracción irreductible inferior a 1 tiene por diferencia 10 878. Hallar esta fracción sabiendo que reducida a decimal da una periódica mixta que tiene 3 cifras en

la parte no periódica y seis en la periódica.

Solución

Sea $\frac{A}{B}$ la fracción irreductible y propia; entonces A < B; por condición: B - A = 10 878

B no puede tener ningún factor de 10 878 = $2 \times 3 \times 7^2 \times 37$, porque estos factores dividirían a A, entonces A y B no serían primos entre sí; luego B no posee a los primos 2, 3, 7, 37. Ahora bien; 6 cifras en el período las dan:

7 (no puede entrar); 11x37 (no puede entrar); 11 x27 (no puede entrar); 13 (si puede entrar); luego entra necesariamente 13.

Por tener 3 cifras de parte no periódica y al no poder entrar el 2, entrará 5^3; luego se compondrá de 13×5^3
B es mayor que 10 878 por ser: B = A + 10 878, luego debe entrar en B un factor que no de más de 6 cifras en el periodo; no puede ser ni 9 ni 37 ni 7 (lo tienen 10 878); ni otro 13 (daría más de 6 cifras); luego tiene que ser el 11; y no hay otro que de 1, 2 ó 3 ó 6 solamente; luego: B = 11 x 13 x 125 = 17 875

$\therefore$ A = 17 875 - 10 878 = 6 997

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{6997}{17875} = 0,391\overset{\frown}{440559}$$

Rpta. $0,391\overset{\frown}{440559}$

12. Hallar "a" y "b" si: $\frac{a}{8} - \frac{b}{7} = 0,589\overset{\frown}{285714}$, tal que $\frac{a}{8}$ y $\frac{b}{7}$ sean propias.

Solución

Como $\frac{a}{8}$ y $\frac{b}{7}$ son propias $\Rightarrow$ a < 8 y b < 7 .....(1)

Además: $\frac{a}{8} - \frac{b}{7} = 0,589\overset{\frown}{285714} = \frac{589\ 285714 - 589}{999\ 999\ 000} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{7a - 8b}{56} = \frac{589\ 285\ 125}{999\ 999\ 000} = 33 \Rightarrow 7a - 8b = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{7a}_{\#\text{ impar}} = \underbrace{33 + 8b}_{\#\text{ impar}} \Rightarrow a \begin{cases} \text{es impar} \\ \text{es mayor que 4} \\ \text{es menor que 8} \end{cases} \quad \therefore a = \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ si a = 5 $\Rightarrow$ b $\neq$ entero;

Rpta. si a = 7 $\Rightarrow$ b = 2

13. Si la fracción: $\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ se convierte a fracción decimal ¿ Qué clase de fracción decimal origina ?

Solución

En efecto, operando se obtiene: $\frac{3n^2-1}{(n-1)n(n+1)}$

El denominador es múltiplo de 3, porque uno de los tres factores, es múltiplo de 3; el numerador no es divisible por 3, luego el denominador de la fracción irreducible igual a la propuesta contiene el factor 3.

Si n es par el denominador es divisible por 2 y el numerador es impar.
Supongamos n impar: entonces n - 1 y n + 1 son pares y el denominador es divisible por 2^2.
Pongamos $n = 2h+1$; entonces $3n^2 - 1 = 3(4h^2+4h+1) - 1 = 3\times 4h(h+1)+2$ el numerador contiene el factor 2 y no 2^2, luego después de la simplificación quedará al menos un factor 2 en el denominador. La fracción irreductible igual a la propuesta será de la forma $\frac{3}{2\times 3\times b}$ b siendo primo con 3. Luego se obtendrá una fracción periódica mixta.

Rpta. Se origina una fracción periódica mixta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre fracciones decimales

81. Efectuar:

$$E = \cfrac{1}{0,\hat{5}+\cfrac{1}{2+\cfrac{0,8\hat{1}}{1,\hat{2}}}}$$

a) 1,15 b) 1,184 c) 1,074 d) 0,985 e) 0,843

82. Si: $\frac{a}{5}+\frac{b}{7} = 0,\overline{8285714}$ Hallar a + b

a) 4 b) 5 c) 8 d) 12 e) 13

83. Si la suma de las fracciones propias: $\frac{a}{13}$ y $\frac{b}{7}$ da como resultado $1,\overline{175823}$.

Hallar $\frac{a}{b}$

a) 3/4 b) 6/5 c) 3/7 d) 11/4 e) N.A.

84. Determinar x, y, z para que se verifique:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13} = 0,\overline{946053}$$

(Dar como respuesta z)

a) 13 b) 2 c) 3 d) 4 e) N.A.

85. ¿ Cuál es la última cifra del periodo de: $\frac{1}{3^{19}}$?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

86. Cuántas fracciones impropias cuyo denominador sea 252 son menores que $\frac{234}{49}$ y contienen a $0,4\hat{3}$

a) 13 b) 11 c) 12 d) 9 e) 10

87. Hallar la suma de los términos de la mayor fracción irreductible periódica pura con 3 cifras en el periodo y en la que se cumpla que el producto de los términos es 2 970

a) 307 b) 137 c) 599 d) 487 e) 93

88. Cuántas fracciones cuyo numerador es la unidad dan un decimal exacto con 9 cifras decimales.

a) 12 b) 15 c) 19 d) 23 e) N.A.

89. El periódo de una fracción de denominador 11 es de 2 cifras que se diferencian en cinco unidades; hallar la suma de los términos de dicha fracción, si es la mayor posible.

a) 14 b) 18 c) 20 d) 17 e) 19

90. Hallar la suma de los términos de la fracción decimal irreductible equivalente a: $0,\overline{32}_{(6)}$

a) 15 b) 13 c) 11 d) 14 e) 18

91. Trasladar $0,2_{(7)}$ a base 10. ¿ Cuántas cifras tendrá el período en el sistema decimal ?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

92. La expresión: $\left(\sqrt[3]{1,74545.....} - \sqrt[3]{0,51717.....}\right)^3$

es igual a:

a) $0,\widehat{64}$ b) $0,\widehat{54}$ c) $0,\widehat{054}$ d) 0,0646 e) $0,\widehat{064}$

93. Hallar una fracción equivalente a $0,2\hat{3}$ cuya diferencia de términos sea $\dot{24}$

a) $\frac{525}{900}$ b) $\frac{168}{709}$ c) $\frac{168}{720}$ d) $\frac{285}{411}$ e) $\frac{203}{414}$

94. ¿Cuántas fracciones periódicas puras de dos cifras de periodo existen entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$?

a) 10 b) 12 c) 13 d) 14 e) 17

95. Si: $\frac{a}{7}+\frac{b}{11} = 0,\widehat{844155}$. ¿cuál es el valor de a + b ?

a) 9 b) 7 c) 6 d) 8 e) 5

96. Si la fracción generatriz $\frac{1}{\overline{ab}} = 0,\widehat{0(a-1)b}$. ¿cuál es el valor de a + b ?

a) 8 b) 12 c) 9 d) 10 e) 11

97. Hallar a x b si:

$$\frac{b+1}{b} = a,\hat{ab}$$

a) 6 b) 3 c) 12 d) 5 e) 14

98. La suma de las fracciones decimales $0,\hat{b}$ y $0,\widehat{(b+1)}$ es a su diferencia como $\overline{aa}$ es a $\overline{bb}$. Hallar a x b.

a) 3 b) 4 c) 9 d) 10 e) 8

99. Hallar el mayor valor de $\overline{ab}$ si se cumple que:

$$\frac{x}{\overline{ab}}+\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}=1 \quad y \quad \frac{4}{\overline{cd}}=0,\widehat{xyz}$$

a) 28 b) 30 c) 34 d) 48 e) 38

100. Se sabe que: $0,\widehat{a5b}=\frac{\overline{ba}}{\overline{a7}}$. Hallar a + b

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

101. El período de una fracción de denominador 11 es de 2 cifras que se diferencian en 5 unidades; hallar la suma de los términos de dicha fracción, si es la mayor posible.

a) 14 b) 18 c) 20 d) 17 e) 19

102. Con cuatro números impares consecutivos, se forman dos fracciones propias, de tal manera que la máxima diferencia entre ellos es $0,\widehat{32}$; hallar el mayor de esos números.

a) 9 b) 7 c) 5 d) 11 e) 13

103. Considerando a π; $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ con aproximación de un centésimo por defecto. Cuál será el valor de Q en:

$$Q=\left[\frac{\sqrt{1,08\hat{3}}+\sqrt{0,7\hat{2}}}{\pi}\right]^2$$

a) 45 b) 3.75 c) 2.25 d) 4.72 e) N.A.

104. Hallar el periodo de una fracción periódica pura, sabiendo que no tiene parte entera, que su generatriz tiene por denominador 37 y que cada cifra, excede en dos unidades a la que está a su izquierda en el periodo.

a) $0,\widehat{135}$ b) $0,\widehat{246}$ c) $0,\widehat{357}$ d) $0,\widehat{579}$ e) N.A.

105. Hallar el periodo de una fracción periódica pura, sabiendo que no tiene parte entera, que su generatriz tiene por denominador 111 y que cada cifra del periodo excede en tres unidades a la que está a su izquierda.

a) $0,\widehat{147}$ b) $0,\widehat{369}$ c) $0,\widehat{258}$ d) $0,\widehat{036}$ e) N.A.

Clave

81 d	91 d	101 c
82 d	92 c	102 c
83 c	93 b	103 b
84 d	94 d	104 a
85 c	95 e	105 b
86 b	96 a	106 c
87 b	97 c	
88 a	98 b	
89 c	99 a	
90 e	100 a	

Capítulo 12

POTENCIACION

Así como la adición de números todos ellos iguales se convierte en una nueva operación, la multiplicación, llamada de segunda clase, así la multiplicación de números iguales puede considerarse como una operación de tercera clase: la potenciación.

Potencia de exponente natural

La definición de potencia de un número es siempre la misma, cualquiera sea la naturaleza de este número.

Definición

Se llama potenciación a la operación que tiene por objeto hallar el producto de factores iguales. Así:

$$\underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{\text{n factores}} = \underbrace{a^{n}}_{\text{potencia}} \quad \begin{matrix} n \rightarrow \text{exponente} \\ a \rightarrow \text{base} \end{matrix}$$

Al factor que se repite se le llama base (a) y las veces que se repite (n) exponente o grado. Al producto de dos factores iguales se llama segunda potencia o cuadrado; al de tres: cubo; ....., al de "n", potencia enésima . Ejemplos:

i. $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$ ("n" factores), se dice que la potencia (a^n) es enésima o de grado "n".

ii. $\underbrace{(x^x)\,(x^x)\,(x^x) \ldots\ldots\ldots (x^x)}_{\text{x factores}} = (x^x)^x = x^{x^2}$

iii. Si se trata de fracciones:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{\text{n factores}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}^{\text{n factores}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\ldots\cdot b}_{\text{n factores}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

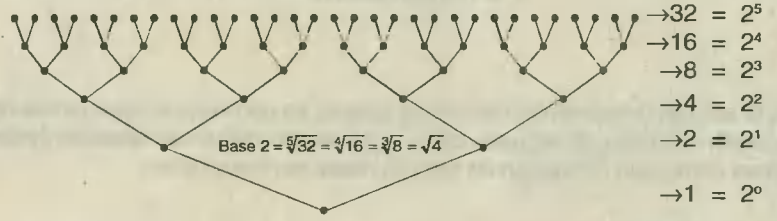
iv. Si se trata de decimales:

$$(0{,}05)^4 = (0{,}05)(0{,}05)(0{,}05)(0{,}05) = 0{,}00000625$$

v. Si el exponente es cero:

$$a^0 = 1 \quad \forall\ a \in \mathbb{N}\ , \quad a \neq 0$$

vi. Una representación gráfica de la potenciación, la podemos obtener del siguiente esquema, llamado diagrama del árbol donde se observa el desarrollo de las primeras potencias del número dos:



Arbol del 2: Cada rama se bifurca.

Comentario:

La potenciación es un sistema de contar, mediante "saltos" de amplitud creciente en que cada salto es igual al precedente repetido un número fijo de veces (este número fijo es la base de la potencia y el número de saltos realizados es el exponente). Pero este sistema de saltos desiguales constituye un nuevo elemento, y lleva consigo varias innovaciones. Por esto la potencia no es conmutativa, y en consecuencia tiene dos operaciones inversas bien distintas:

El retroceso a la base que se llama radicación, antiguo nombre indio (la potencia germina de la base como un árbol de su raíz).

-El retroceso al exponente se llama busca del logaritmo.

LEYES FORMALES DE POTENCIACION: SU PERMANENCIA

Ley de uniformidad

La potenciación es uniforme, esto es, si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una igualdad, resulta otra igualdad así:

Si: $a = b \wedge m = n \Rightarrow a^m = b^n$

En efecto:

$a^m = a \cdot a \cdot a \ldots$

$b^n = b \cdot b \cdot b \ldots$ > y por ser uniforme la multiplicación:

como $a = b \quad \therefore a \cdot a \cdot a \ldots = b \cdot b \cdot b \ldots$

Ley distributiva

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación, o sea:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

En efecto:

$$(a \cdot b)^n = a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots \text{(n veces)} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{\text{n veces}} \underbrace{\cdot b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{\text{n veces}} = a^n b^n$$

La potenciación **no** es conmutativa **ni** asociativa. Por ejemplo, si:

$* a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$ (n veces)

$* n^a = n \cdot n \cdot n \ldots$ (a veces) $\quad \therefore \quad a^n \neq n^a$

En efecto:

$$(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots = \underbrace{(\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n})(\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n}) \ldots}_{} = a^{nm}$$

$a^{n^m} = a \cdot a \cdot a \ldots$ (n^m veces) y como nm no es siempre igual a n^m, no es asociativa.

Ley de monotonía

La potenciación es monótona, significa ésto que si a los dos miembros de una desigualdad se les eleva a una misma potencia diferente de cero se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la propuesta.

Si: $\quad a < b \Rightarrow a^n < b^n \quad \forall\, a; b; n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0$

Módulo de la potenciación

El módulo de la potenciación es la unidad; esto es:

$$a^m = a \Leftrightarrow m = 1$$

Consecuencias prácticas

i. El producto de potencias de la misma base es otra potencia de igual base cuyo exponente es la suma de los exponentes:

$$a^n \cdot a^m = a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a \cdot a \cdot a \ldots . (m + n \text{ factores}) = a^{n+m}$$

ii. El resultado de elevar una potencia a otra potencia es otra de igual base cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{m potencias}} = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (nm \text{ factores}) = a^{nm}$$

De aquí se deduce que: $(a^n)^m = (a^m)^n$

A continuación procederemos a estudiar las principales características y propiedades del producto de dos factores iguales (cuadrado perfecto) y del cubo perfecto ya que con estas dos potencias se puede trabajar cualquier otra.

CUADRADO PERFECTO: k^2 (*)

Se llama así al producto de dos factores iguales; pudiendo ser los factores:

i. Enteros: $5 \times 5 = 5^2 \ \therefore 25 = k^2 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$

ii. Fracciones: $\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

iii. Decimales: $(0{,}03)(0{,}03) = (0{,}03)^2 = 0{,}0009 \ \therefore 0{,}0009 = k^2 \Rightarrow \sqrt{0{,}0009} = 0.03$

iv. Mixtos: $\left(3\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \qquad \therefore \frac{49}{4} = k^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

v. Literales: $a \times a = a^2 \qquad \therefore \ a^2 = k^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$

CARACTERES DE INCLUSION DEL CUADRADO PERFECTO: k^2

i La condición necesaria y suficiente para que un número sea cuadrado perfecto es que los exponentes de sus factores primos sean pares es decir $\dot{2}$. Así: consideremos que sea N un múmero cuadrado perfecto.
N en factores primos:

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots . \ell^{\lambda}$$

(*) Se dice "cuadrado perfecto", porque tiene raíz cuadrada exacta y se le representa:k^2 donde k es la raíz cuadrada de número cuadrado perfecto.

Se cumple que : $\alpha = \dot{2}$; $\beta = \dot{2}$; $\gamma = \dot{2}$; .....; $\lambda = \dot{2}$

Ejemplo

$$* \; 90000 = k^2 \Rightarrow \sqrt{90\,000} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5^4} = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$$

ii. Si un número termina en ceros y es cuadrado perfecto, necesariamente posee una cantidad par de ceros.

-En efecto si un número termina en n ceros, se puede representar así:

$$N \times 10^n$$

-Elevando al cuadrado:

$(N \times 10^n)^2 = N^2 \times 10^{2n} \Rightarrow$ El cuadrado termina en 2n ceros.

iii. Si un número termina en 5 y es cuadrado perfecto, necesariamente, la cifra de las decenas es 2 y la de centenas par pudiendo ser: 0; 6 y 8:

$$025 \; ; \; 625 \; ; \; 825$$

iv. Todo cuadrado perfecto es de la forma $\dot{4}$ ó $\dot{8} + 1$. En efecto; si es par sea $\dot{2}^2$ y si es impar:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4 \times \dot{2} + 1 = \dot{8} + 1$$

v. Todo número fraccionario que es K^2, se necesita y es suficiente que lo sea el producto de sus términos.

Consecuencia: Si lo es un término debe serlo el otro.

vi. La condición necesaria y suficiente para que un decimal sea cuadrado perfecto es que tomando un número par de cifras decimales y considerándolo como entero sea cuadrado perfecto.

vii. Si el cuadrado de un número termina en la cifra 6; la cifra de las decenas de este número es impar.
-La raíz cuadrada de un número termina en 6 es de una de las formas:

$$\dot{10} + 4 \quad \text{ó} \quad \dot{10} + 6.$$

se tiene:

$$(10a + 4)^2 = 10^2 . a^2 + 10 . 8a + 16 = 10^2 . a^2 + 10(8a + 1) + 6$$

y $$(10a + 6)^2 = 10^2 . a^2 + 10 . 12a + 36 = 10^2 . a^2 + 10(12a + 3) + 6$$

En ambos casos, la cifra que antecede a 6 es impar.

viii. El producto de cuatro números enteros consecutivos aumentado en 1, es un cuadrado perfecto cuya primera cifra de la derecha es 1 ó 5, pudiendo asegurar que terminará en 1 en cuatro casos sobre 5.

Sea n el número menor:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 = P \ldots (1)$$

Si: $n = \overline{a1}, \overline{a2}, \overline{a3}, \overline{a4}, \ldots\ldots, \overline{a9}$ estos valores en (1), se obtiene

$P = \dot{\overline{10}}+5, \dot{\overline{10}} + 1, \dot{\overline{10}} + 1; \dot{\overline{10}} + 1; \dot{\overline{10}} + 1; \dot{\overline{10}} + 5; \dot{\overline{10}} + 1; \dot{\overline{10}} + 1$ y $\dot{\overline{10}} + 1$

y por lo tanto P termina en dos casos en 5 y en los otros 8 casos posibles en 1.

CARACTERES DE EXCLUSION DEL CUADRADO PERFECTO

i. Si un número entero termina en 2, 3, 7 ú 8, no puede ser cuadrado perfecto. En efecto el cuadrado de un número entero termina en la cifra que corresponde al cuadrado de la cifra de las unidades y nunca el cuadrado de una cifra termina en 2, 3, 7 ú 8.

ii. Todo número que termina en 5, y cuya cifra de las decenas no es 2, no puede ser cuadrado perfecto.
Si un número entero es cuadrado perfecto y termina en 5, es necesariamente el cuadrado de un número entero que termina en 5, porque entre dígitos, sólo 5 da un cudrado que ternina en 5.
Si un número termina en 5, se le puede representar como:

$\overline{d5}$ = (10**d** + 5) unidades (d representa decenas)

Elevando al cuadrado:

$$\overline{d5}^2 = (10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = [100d \,.\, (d + 1)] + 25$$

Se observa que la expresión final termina en 25 puesto que el primer sumando encerrado en corchete termina en dos ceros por ser $\dot{\overline{100}}$.

iii. Si un número termina en una cantidad impar de ceros, no puede ser cuadrado perfecto.

iv. Si un número par no es $\dot{\overline{4}}$, no puede ser cuadrado perfecto.

v. Si un número impar no es $\dot{\overline{8}} + 1$, no puede ser cuadrado perfecto.

PROBLEMAS RESUELTOS

Sobre potenciación: (cuadrado perfecto: k^2)

1. Demostrar que la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual a la suma de dichos números o igual al doble del menor más 1.

Demostración

Sean N y (N + 1) los números. Se cumple:

$$(N+1)^2 - N^2 = N^2 + 2N + 1 - N^2 = N + (N+1) = 2N + 1$$ **L.Q.Q.D**

2. Demostrar que cuando se eleva al cuadrado el producto de dos números enteros consecutivos aumentado en 1, se obtiene la suma de tres cuadrados.

Demostración

Sean N y (N + 1) dos números enteros consecutivos. Se tiene:

$$[N(N+1)+1]^2 = [N^2 + N + 1]^2 = N^4 + N^2 + 1 + 2N^3 + \underbrace{2N^2}_{N^2+N^2} + 2N$$

Agrupando en forma conveniente:

$$[N(N+1)+1]^2 = (N^4 + 2N^3 + N^2) + (1 + N^2 + 2N) + N^2$$

$$[N(N+1)+1]^2 = (N^2 + N)^2 + (N+1)^2 + N^2$$ **L.Q.Q.D**

3. Siendo A y B dos números enteros, demostrar que el número obtenido por adición de la suma, de la diferencia, del producto y el cociente de sus cuadrados es igualmente un cuadrado perfecto.

Demostración

La expresión propuesta que se puede escribir:

$$A^2 + B^2 + A^2 - B^2 + A^2 \cdot B^2 + \frac{A^2}{B^2} = K^2$$

$$2A^2 + A^2 \cdot B^2 + \frac{A^2}{B^2} = K^2$$

$$A^2\left(2 + B^2 + \frac{1}{B^2}\right) = K^2$$

$$\frac{A^2}{B^2}(2B^2 + B^4 + 1) = K^2$$

$$\frac{A^2}{B^2}(B+1)^2 = K^2$$

$$\left[\frac{A(B+1)}{B}\right]^2 = K^2$$

L.Q.Q.D.

4. Demostrar que el cuadrado del número natural $\underbrace{\beta\beta\beta\beta\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" cifras}}\beta_{(n)}$

es siempre $\underbrace{\beta\beta\ldots\ldots\beta}_{\text{m-1 cifras}}\ \alpha\ \underbrace{00\ldots\ldots\ldots 0}_{\text{m-1 ceros}}\ 1_{(n)}$, siendo β la cifra máxima o sea:

$\beta = n - 1$ y $\alpha = \beta - 1$ ó $\alpha = n - 2$

Demostración

Efectuando operaciones en base n:

$$[\underbrace{\beta\beta\ldots\ldots\beta_{(n)}}_{\text{"m" cifras}}]^2 = [\underbrace{100\ldots\ldots 0_{(n)}}_{\text{m ceros}} - 1]^2 = [10^{m}_{(n)} - 1]^2 = 10^{2m}_{(n)} - 2 \times 10^{m}_{(n)} + 1$$

$$= \underbrace{1\,0\ldots\ldots 0_{(n)}}_{\text{2m ceros}} - \underbrace{2\,0\ldots\ldots 0_{(n)}}_{\text{m ceros}} + 1$$

$$= \underbrace{\beta\beta\ldots\ldots\beta}_{\text{m-1 cifras }\beta}\ \alpha\ \underbrace{00\ldots\ldots\ldots 0}_{\text{m-1 ceros}}\ 1_{(n)}$$ **L.Q.Q.D.**

5. ¿Cuántos cuadrados perfectos $\dot{\overline{13}} + 4$ hay entre 924 y 5 920 ?

Solución

Los cuadrados perfectos son de la forma: $N = q^2 = \dot{\overline{13}} + 4 \rightarrow q = \dot{\overline{13}} \pm 2$

$924 < q^2 < 5\,920 \Rightarrow 31 \leq q \leq 76$ y como $q = \dot{\overline{13}} + 2$ ó $\dot{\overline{13}} + 11$

$\therefore$ Los valores de q = 37; 41; 50; 54; 63; 67 y 76

Rpta. Existen 7 cuadrados perfectos.

6. Si se tiene que el número $\overline{1aba00}$ es cuadrado perfecto, múltiplo de 3 y de 7; hallar a + b.

Solución

$N = \overline{1aba00} = \dot{\overline{21}} = k^2$ se deduce que: $N = \overline{21^2} = \begin{cases} \dot{7} \\ \dot{9} \end{cases}$

Aplicando el criterio de divisibilidad por 9: $1 + 2a + b = \dot{9}$ ..... (1)

Aplicando el criterio de divisibilidad por 7: $2a - (b + 3a + 2) = \dot{7}$

$\Rightarrow a + b + 2 = \dot{7}$ .....(2)

De (1) y (2): $a = 3$ y $b = 2 \Rightarrow N = 132\,300 = \dot{21}^2$

$a = 5$ y $b = 7 \Rightarrow N = 157\,500 \neq \dot{21}^2$

Rpta. $\therefore a + b = 5$

7. Hallar la suma de los cuadrados perfectos de tres cifras que terminan en 4.

Solución

Los números son de la forma: $\overline{ab4} = k^2 \Rightarrow$ k terminan en 2 ú 8 y:

$100 \leq k^2 < 1000 \Rightarrow 10 \leq k \leq 31 \therefore k = \{12; 18; 22; 28\}$

Rpta. $\therefore$ Suma pedida $= 12^2 + 18^2 + 22^2 + 28^2 = 1\,736$

8. Se cumple que $N = \dot{500} + 13$ y sabiendo que:

$N^2 = \overline{(b+1)(a+1)(a+3)(b+1)aabc}$. Hallar la suma de las cifras de N

Solución

$N = 500k + 13$ (k = # entero)

$N^2 =$ .....0000 + ...000 + 169 $\Rightarrow N^2 = \overline{.....169} \Rightarrow \overline{abc} = 169$ y

$\therefore N^2 = 72471169 \wedge N = 8513$

Rpta. Suma de cifras: 8 + 5 + 1 + 3 = 17

9. Si "a" y "b" son cuadrados perfectos. Determinar a + b, si $\sqrt{a-b}$ es el número de múltiplos de 7 que hay entre "a" y "b"

Solución

Podemos establecer:

$a = k_1^2$; $b = k_2^2$; $\sqrt{a-b} = k_3 \Rightarrow a - b = k_3^2$. Por dato del problema podemos establecer:

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{7} = \frac{k_3^2}{7} \quad \begin{cases} \geq k_3 \text{ .....(1)} \\ \leq k_3 + 1 \text{ .....(2)} \end{cases}$$

De (1): $k_3 \geq 7$ y
De (2): $k_3 = 7$

como: $k_1^2 - k_2^2 = (k_1 + K_2)(K_1 - K_2) = k_3^2 = 49 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_2 = 49 \\ k_1 - K_2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_1 = 25 \\ k_2 = 24 \end{array}$

Rpta. $\therefore a + b = 25^2 + 24^2 = 625 + 576 = 1\,201$

10. Hallar el máximo valor de: $a + b + c + d$ si se sabe que al multiplicar el número $\overline{bcbc0}$ por $\overline{bc}$ por $\overline{adef}$ se obtiene un cuadrado perfecto.

Solución

$\overline{bcbc0} = 2 \times 5 \times 101 \times \overline{bc}$

$N = \overline{bcbc0} \times \overline{bc} \times \overline{adef} = 2 \times 5 \times 101 \times \overline{bc}^2 \times \overline{adef} = k^2$

Se deduce que $\overline{adef} = 2 \times 5 \times 101 \times k_1^2 = 1010k_1^2 \Rightarrow k_1 = 1; 2; 3$

Para lo pedido: $k = 3 \Rightarrow \overline{adef} = 9090 \wedge \overline{bc} = 99$

Rpta. $\therefore a + b + c + d = 9 + 9 + 9 + 0 = 27$

11. Determinar los cinco primeros números que contienen un solo factor primo, son múltiplos de 1 024, cuadrados perfectos y congruentes respecto al módulo 448.

Solución

Se sabe que: $1\,024 = 2^{10}$

Como: $1024 = \dot{\overline{448}} + 128 \therefore$ todo $\dot{\overline{1024}}$ y congruentes con respecto al módulo 448 serán:

$$N = 2^{10} \cdot 2^x = \dot{\overline{448}} + 128 + 128 \times 2^x \Rightarrow x = \text{\# par} \quad \ldots\ldots (1)$$

Como: $N = \dot{\overline{448}} + 128 \Rightarrow \dot{\overline{448}} + 128 \Rightarrow = \dot{\overline{448}} + 128 \times 2^x$

$\Rightarrow \quad \therefore 128(2^x - 1) = \dot{\overline{448}}$ como: $128 = 2^7 \wedge 448 = 2^6 \times 7$

$\Rightarrow \quad 2^x - 1 = \dot{7} \quad \ldots\ldots (2)$

Con (1) y (2):

$2^2 - 1 = 3$ No
$2^4 - 1 = 15$ No
$2^6 - 1 = 63 = 9 \times 7$
$2^8 - 1 = 255$ No

$2^{10} - 1 = 1\,023$ No

$2^{12} - 1 = 4\,095 = 7 \times 585$

$2^{14} - 1 = 16\,383$

$2^{16} - 1 = 65\,535$

$2^{18} - 1 = 262\,143 = 7 \times 37449$

$2^{20} - 1 = 1\,048\,575$

$2^{22} - 1 = 4\,194\,303$

$2^{24} - 1 = 16\,777\,215 = 7 \times 2396\,745$

Rpta. $\therefore$ Los números buscados son:

$2^{10} = 1\,024$

$2^{16} = 65\,536$

$2^{22} = 4\,194\,304$

$2^{28} = 268\,435\,456$

$2^{34} = 17\,179\,859\,184$

12. Hallar cuántos números $\dot{11}$ existen entre 100,000 y 1'000,000 tales que sean cuadrados perfectos y terminen en 9.

Solución

Los cuadrados perfectos buscados son de la forma:

$K^2 = 11^2P^2 = \overline{.....9} \Rightarrow k^2 = 121P^2 = \overline{.....9}$

$P = \overline{.....9}$ o $P = \overline{.....7}$

Además:

$1000\,000 < 121P^2 < 1\,000\,000$

$319, ... < 11P < 1\,000$

$29, ... < P < 90, ...$

$\therefore P = 33; 37; 43; 47; 53; 57; 63; 67; 73; 77; 83; 87$

Rpta. Existen 12 cuadrados perfectos.

13. ¿Cuál es el menor número de centenas que hay que agregarle a 1804 para que sea cuadrado perfecto ?

Solución

Sea n el mínimo número de centenas que se le debe sumar a 1804 para obtener un K^2

Como: $42^2 < 1\,804$ .....(1)

Además: $\underbrace{n \times 100 + 1\,804}_{\text{termina en 04}} = k^2$ ..... (2)

El cuadrado perfecto termina en $\overline{04}$, por lo tanto K será de la forma:

$K = \overline{a2}$ ó $k = \overline{b8}$ y de acuerdo a (1) se deduce:

$\overline{a2}$: mínimo 5 ; $\overline{b8}$: mínimo 4

En (2):

$$n \times 100 + 1\,804 = 48^2 = 2\,304$$

Rpta. $n \times 100 = 500 \Rightarrow n = 5$

14. ¿Cuántos términos debe tener la siguiente serie, por lo menos, para que su suma sea cuadrado perfecto ?

30; 60; 90; 120, . . .

Solución

Sean "n" el número de términos.

$$S = 30(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = k^2 \Rightarrow 2 \times 3 \times 5 \times \frac{n(n+1)}{2} = k^2$$

$$\Rightarrow 15n \times (n + 1) = k^2 \Rightarrow 3 \times 5 \times n(n + 1) = k^2$$

$$\Leftrightarrow n_{mínimo} = 3 \times 5 \ \wedge \ n + 1 = 16$$

Rpta. $\therefore$ Debe tener 15 términos.

15. Una persona que nació en la primera mitad del siglo 20 afirma que en el año x^2 cumplió $\frac{x}{2}$ años. Determinar la edad que tendrá en 1 992

Solución

De los datos: $\underbrace{x^2}_{\text{año considerado}} - \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{edad}} = \underbrace{19\ldots\ldots}_{\text{año en que nació}}$

Luego $x^2 > 1\,900$ $\therefore$ x debe ser aproximadamente la raíz cuadrada por exceso de 1 900

$x = 44 \ \wedge \ x^2 = 1\,936$; $\frac{x}{2} = 22$

Nació en: 1 936 - 22 = 1 914

Rpta. En 1992 cumplirá: 1 992 - 1 914 = 78 años.

16. Hallar el menor número entero sabiendo que la diferencia entre su octava y quinta parte sea un cuadrado perfecto.

Dar como respuesta la cifra de mayor orden del número.

Solución

Sea N el número buscado. N es el menor posible: Se debe cumplir:

$$\frac{N}{5}-\frac{N}{8}=k^2 \Rightarrow \frac{3N}{40}=k^2 \Rightarrow \frac{3.N}{2^3x5}=k^2$$

De esta última expresión se deduce que para obtener un k^2, N debe poseer los factores primos 3; 2^3 y 5 como mínimo, para obtener un k^2.

Rpta. $\therefore N = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ y la cifra de mayor orden es 1.

17. Si $\overline{abcd}$ es un cuadrado perfecto y $\overline{cd} = 8 \times \overline{ab}$. Hallar $a + b + c + d$

Solución

$$\overline{abcd} = k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\overline{cd} = 8 \times \overline{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1):

$100\overline{ab} + \overline{cd} = k^2$; pero: $\overline{cd} = 8 \times \overline{ab}$ entonces

$$100\,\overline{ab} + 8\,\overline{ab} = k^2 \Rightarrow 108 \times \overline{ab} = k^2 \Rightarrow 2^2 \times 3^3 \times \overline{ab} = k^2 \Leftrightarrow \overline{ab} = \dot{3}$$

$\therefore \overline{ab} = 12; 15; \ldots (3).$

De (2) y (3) se deduce:

$$\overline{ab} = 12 \wedge \qquad \overline{cd} = 8 \times 12 = 96$$

Rpta. $\therefore \overline{abcd} = 1\,296 \Rightarrow a + b + c + d = 1 + 2 + 9 + 6 = 18$

18. Hallar un número de la forma $\overline{abcd}$ que sea cuadrado perfecto y que: $\overline{ab} - \overline{cd} = 4$. Dar como respuesta: $a + b + c + d$

Solución

$$\overline{abcd} = k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\overline{ab} - \overline{cd} = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1), polinómicamente: $100\ \overline{ab} + \overline{cd} = k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

De (2): $\overline{ab} = \overline{cd} + 4$ en (3): $100\,(\overline{cd} + 4) + \overleftarrow{cd} = k^2$

$$\Rightarrow 101\ \overline{cd} + 400 = k^2 \Rightarrow 101 \times \overline{cd} = k^2 - 20^2 = (k + 20)(k - 20)$$

$$\Leftrightarrow k + 20 = 101 \Rightarrow k = 81 \ \therefore \ \overline{abcd} = 81^2 = 6561$$

Rpta. Suma pedida: $a + b + c + d = 6 + 5 + 6 + 1 = 18$

19. Hallar cuántos divisores tiene:

$60^{\overline{\frac{n}{4}}} \times 126^{\overline{\frac{n}{3}}} \times 70^{\overline{\frac{n}{2}}}$, sabiendo que es un cuadrado perfecto y que "n" es el menor número posible.

Solución

Descomponiendo en factores primos:

$$60^{\overline{\frac{n}{4}}} \times 126^{\overline{\frac{n}{3}}} \times 70^{\overline{\frac{n}{2}}} = 2^{\overline{\frac{8n}{6}}} \times 3^{\overline{\frac{11n}{12}}} \times 5^{\overline{\frac{3n}{4}}} \times 7^{\overline{\frac{5n}{6}}} = k^2$$

Para que sea cuadrado perfecto, los exponentes de los factores primos deben ser pares, para lo cual, se observa que $n = \dot{\overline{12}} \Rightarrow n = 12; 24; \ldots$; el menor valor de n que cumple con estas condiciones es: $n = 24$

$$\therefore 60^{\overline{\frac{n}{4}}} \times 126^{\overline{\frac{n}{3}}} \times 70^{\overline{\frac{n}{2}}} = 2^{32} \times 3^{22} \times 5^{18} \times 7^{20} = k^2 \text{ y tiene:}$$

Rpta. $(32 + 1)(22 + 1)(18 + 1)(20 + 1) = 302\,841$ divisores.

20. En la serie: $45(18 + 1), 45(18 + 2), 45(18 + 3), \ldots 45(18 + 1{,}000)$ cuántos números cuadrados perfectos existen

Solución

Los términos de la serie, son de la forma: 45 n, donde $n = 19; 20; 21; \ldots; 1018$

Como: $45n = 3^2 \times 5 \times n$, para que sea cuadrado perfecto, "n" debe ser de la forma: $n = 5 \times p^2$, pero:

$$19 \leq 5 \times p^2 \leq 1\,018$$

$$3.8 \leq p^2 \leq 203.6$$

$$2 \le p \le 14 \Rightarrow p = \underbrace{2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots, 14}_{13 \text{ valores}}$$

Rpta. $\therefore$ Existen 13 números cuadrados perfectos.

CUBO PERFECTO

Se llama tercera potencia o cubo al producto de tres factores iguales y se dic que es cubo perfecto, porque tiene raíz cúbica exacta, donde los factores pueden ser:

i. Enteros: $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \quad \therefore 125 = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

ii. Fracciones: $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad \therefore \frac{1}{64} = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

iii. Decimales: $(0,2)(0,2)(0,2) = (0,2)^3 = 0,000008 \therefore 0,000008 = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{0,000008} = 0,2$

iv. Mixtos: $\left(3\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{343}{8} \therefore \frac{343}{8} = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

v. Literales: $a \cdot a \cdot a = a^3 \quad \therefore a^3 = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a^3} = a$

CARACTERES DE INCLUSION DEL CUBO PERFECTO: K^3

i. La condición necesaria y suficiente para que un número sea cubo perfecto es que los exponentes de sus factores primos sean $\dot{3}$.

Si: $N = k^3$; N en factores primos:

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ell^{\lambda}$$

Se cumple: $\alpha = \dot{3}$; $\beta = \dot{3}$; $\chi = \dot{3}$; .....; $\lambda = \dot{3}$

Ejemplo

$1728 = k^3 \Rightarrow 1728 = 2^6 \times 3^3 \therefore \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 2^2 \times 3 = 12$

ii. Si un número termina en ceros y es k^3 necesariamente posee una cantidad de ceros que sea múltiplo de 3.

- En efecto si un número termina en n ceros, se puede representar así: $N \times 10^n$
- Elevado al cubo: $(N \times 10^n)^3 = N^3 \times 10^{3n} \Rightarrow$ el cubo termina en 3n ceros.

iii. Un k^3 puede terminar en cualquier cifra. Bastará analizar los cubos de los nueve primeros números naturales.

iv. Todo k^3 es de la forma $\dot{9}$ ó $\dot{9} \pm 1$. En efecto:

Si: $N = \dot{3} \Rightarrow N^3 = \dot{9}$

$N = \dot{3} \pm 1 \Rightarrow N^3 = \dot{9} + 1$

v. Todo número fraccionario para ser k^3, se necesita y es suficiente que lo sea un término por el cuadrado del otro.

Consecuencia: si un término es k^3 lo debe ser el otro.

vi. Todo número decimal para ser k^3, se necesita y es suficiente que tomando un número de cifras decimales que sea $\dot{3}$ y considerándolo como entero sea k^3.

vii. Todo número que es cuadrado perfecto y cubo perfecto, es una sexta potencia perfecta.

vii. Si un número termina en la cifra 5 y es cubo perfecto, necesariamente la cifra de las decenas es 2 ó 7.

ix. La diferencia de los cubos de dos números consecutivos termina en una de las cifras, 1; 7; 9.

CARACTERES DE EXCLUSION DEL CUBO PERFECTO: K^3

i. Todo número que termine en cero, no es cubo perfecto, si el número de ceros en que termina no es múltiplo de 3.

ii. Si un número termina en la cifra 5 y su cifra de decenas no es 2 ó 7 no podrá ser cubo perfecto.

iii. Todo número que no adopta una de estas formas:

$\dot{9}$ ó $\dot{9} \pm 1$, no puede ser cubo perfecto.

Cubo de los 10 primeros números naturales.

$(1)^3 \rightarrow 1$	$(5)^3 \rightarrow 125$	$(8)^3 \rightarrow 512$
$(2)^3 \rightarrow 8$	$(6)^3 \rightarrow 216$	$(9)^3 \rightarrow 729$
$(3)^3 \rightarrow 27$	$(7)^3 \rightarrow 343$	$(10)^3 \rightarrow 1\,000$
$(4)^3 \rightarrow 64$		

Sobre potenciación
(cubo perfecto: k^3)

1. Demostrar que la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos, es igual al triple producto de estos números aumentado en una unidad.

Demostración

Sean: N y (N + 1) los números enteros consecutivos; se cumple:

$(N+1)^3 - N^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - N^3 = 3N(N+1) + 1$ **L.Q.Q.D.**

2. Demostrar que si al producto de tres enteros consecutivos, se le agrega el número del medio, el resultado es cubo perfecto.

Demostración

$n(n+1)(n+2) + (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ **L.Q.Q.D.**

3. Hallar cuántos cubos perfectos están comprendidos entre dos números dados.

Solución

Sean A y B los dos números propuestos: A > B; sean a y b sus raíces cúbicas en menos de una unidad por defecto.

Podemos establecer:

$$a^3 \leq A < (a+1)^3 \wedge b^3 \leq B < (b+1)^3$$

Los cubos comprendidos entre A y B son luego los cubos de los números (b + 1), (b + 2), ... , (a - 1), a, y su número es:

$$a - b - 1 + 1 \text{ ó } a - b$$

Entonces, el número de los cubos perfectos comprendidos entre dos números dados es igual a la diferencia de las raíces cúbicas en menos, de una unidad por defecto de estos dos números.

4. Sabiendo que: $\overline{abc2}$ es un cubo perfecto; hallar el valor de a x b x c.

Solución

$\overline{abc2} = q^3$; luego: $q = \overline{.8}$; pero: $1000 \leq q^3 < 10\,000 \Rightarrow 10 \leq q < 21.6$

entonces: $q = 18 \Rightarrow q^3 = 5832 = \overline{abc2}$ $\therefore a \times b \times c = 5 \times 8 \times 3 = 120$

Rpta. 120

5. La diferencia entre dos cubos perfectos consecutivos es 1 141. Hallar la suma de sus raíces cúbicas.

Solución

Los cubos perfectos consecutivos, deben ser de la forma: $(k+1)^3$ y k^3
Por condición:

$$(k+1)^3 - k^3 = 1\,141 \Rightarrow 3k^2 + 3k + 1 = 1\,141$$

$$\Rightarrow k(k+1) = 380 \Rightarrow k = 19 \wedge k+1 = 20$$

Rpta. $\therefore$ La suma de las raíces cúbicas es: $19 + 20 = 39$

6. En cuántas bases de numeración menores que 50, el número $1331_{(n)}$ es cubo perfecto

Solución

$1331_{(n)} = n^3 + 3n^2 + n + 1 = (n+1)^3$ $\therefore$ el número siempre será k^3

Como $3 < n < 50$ $\therefore$ n puede tomar: $49 - 3 = 46$ valores

Rpta. Se cumple en 46 bases.

7. ¿ Cuánto se debe sumar como mínimo a 14 706 000 para que sea cubo perfecto ?

Solución

Como: $244^3 < 14\,706\,000 < 245^3$

Sea n la mínima cantidad que se debe agregar a 14 706 000 para que sea k^3

$$\therefore 14\,706\,000 + n = 245^3 = 14\,706\,125$$

Rpta. $\therefore n = 125$

8. Hallar "a" si: $\overline{(b+1)(b-1)abba}$ es k^3. y $a + b = 5$

Solución

$\mathbb{N} = \overline{(b+1)(b-1)abba} = k^3$, $a + b = 5$

Por ser cubo perfecto, la suma de las cifras de $\mathbb{N}$ debe ser $\dot{9}$ ó $\dot{9} + 1$ ..... (1)

$b + 1 + b - 1 + a + b + b = 2a + 4b = 10 + 2b$

$\downarrow$

1 No!
2 No!
3 No!
4 ✓
5 No!

Sólo se obtiene una de las formas de expresión (1) cuando $b = 4 \wedge a = 1$

$$\therefore \overline{(b+1)(b-1)abba} = 531441 = 81^3$$

Rpta. $a = 1$

9. Hallar la suma de las cifras del cubo perfecto, comprendido entre dos cuadrados perfectos, entre los cuales hay 414 números ninguno de los cuales es cuadrado perfecto.

Solución

Se deduce que los dos cuadrados perfectos son consecutivos. Sea "n" el número de términos comprendidos entre los dos cuadrados perfectos. $n = 414$

$$N^2 < n < (N+1)^2 \Rightarrow n = (N+1)^2 - N^2 = 2N \quad \text{pero } n = 414$$

$$\therefore 2N = 414 \Rightarrow N = 207 \quad \text{Luego } N^2 = 207^2 = 42849$$

y $(N+1)^2 = 43264$. Sea q^3 el cubo perfecto:

$$42849 < q^3 < 43264$$

$$34.99 < q < 35.1 \Rightarrow q = 35 \therefore q^3 = 42875$$

Rpta. Suma pedida: $4 + 2 + 8 + 7 + 5 = 26$

10. Se tiene un número de dos cifras, cuyo cuadrado es igual al cubo de la suma de sus cifras. Hallar la suma de las cifras de la diferencia del cubo y el cuadrado del número.

Solución

Sea "N" el número . $N = \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = q^6 \Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} = q^3 \\ a+b = q^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \overline{ab}^2 \geq 100 \Rightarrow (a+b)^3 \geq 100 \Rightarrow a+b \geq 5 \text{ y como } a+b \leq 18 \therefore q = 3 \text{ ó } 4$$

para $q = 3$ $\quad \begin{cases} a+b = 9 \\ \overline{ab} = 27 \end{cases} \Rightarrow N^3 - N^2 = N^2(N-1) = 27^2 \times 26 = 18\,954$

Rpta. Suma pedida: $1 + 8 + 9 + 5 + 4 = 27$

11. Hallar $a + b$ si se sabe que: $\overline{ab}^3 = \overline{2a2cbb}$

Solución

Si: $N = \overline{ab}^3 = \overline{2a2cbb} \Rightarrow b = 0; 1; 4; 5; 6; 9$. pero: $b^3 = \overline{\quad\quad b}$

además: $202\,000 \leq \mathbb{N} < 292\,999 \Rightarrow 59 \leq \overline{ab} \leq 66 \Rightarrow \overline{ab} = \{59; 60; 61; 64; 65; 66\}$

pero: $\mathbb{N} = \overline{.....bb} \Leftrightarrow \overline{ab} = 64$

Rpta. $\therefore a + b = 10$

12. Entre 728 y 17 577. ¿ Cuántos cubos perfectos existen tales que su raíz sea un número de la forma: $\dot{7} + 5$

Solución

$\mathbb{N} = q^3 \Rightarrow 728 < q^3 < 17\,577 \Rightarrow 9 \leq q \leq 26$ como $q = \dot{7} + 5$

q puede tomar los valores: 12; 19; 26

Rpta. $\therefore$ Existen 3 números.

13. Sabiendo que $N = \overline{a5bc5} = k^3$ y que $a + b = 7$; hallar la diferencia entre la mayor y la menor cifra de $\sqrt[3]{N}$

Solución

$N = \overline{a5bc5} = k^3$ como $a + b = 7 \wedge c = \begin{cases} 0 \\ 7 \end{cases}$

Si: $c = 2$ $\quad \sum$ cifras de $N = 7 + 12 = 19$..... (1)

Si: $c = 7$ $\quad \sum$ cifras de $N = 24 = \dot{3} \Rightarrow N = \dot{3}$ .....(2)

Además: $N = \dot{5}$ en los dos casos, entonces $k = \dot{5} = \overline{.5}$

Pero: $10\,000 \leq k^3 < 100\,000 \Rightarrow 21{,}6 < k < 46$,

Luego: $k = 25; 35; 45$

De (1): si $k = 45 \Rightarrow k = \dot{3} \Rightarrow N = k^3 = \dot{27}$; pero $N \neq \dot{9}$, luego no puede ser $\dot{27}$

De (2): si $k = 35 = \dot{7} \Rightarrow N = \dot{7}$ (No cumple condiciones)

$\therefore$ La única posibilidad es $k = 25$

Rpta. Diferencia pedida: $5 - 2 = 3$

14. Hallar el menor número tal que al multiplicarlo por 35 se convierte en cuadrado perfecto y que al dividirlo entre 21 se convierte en cubo perfecto. Dar como respuesta su número de divisores.

Solución

Sea N el número tal que:

$$\left.\begin{array}{l} N \times 35 = k^2 \\ \\ \dfrac{N}{21} = q^3 \end{array}\right\} \quad \text{Luego: } N = 3^{\alpha} \times 5^{\beta} \times 7^{\gamma}$$

Entonces:

$$N \times 35 = 3^{\alpha} \times 5^{\beta+1} \times 7^{\gamma+1} = k^2$$

$$\frac{N}{21} = 3^{\alpha-1} \times 5^{\beta} \times 7^{\gamma-1} = q^3$$

Se debe cumplir que:

$\alpha - 1 = \dot{3}$; $\alpha = \dot{2}$ $\quad \therefore \alpha = 4$ (mínimo)

$\beta + 1 = \dot{2}$; $\beta = \dot{3}$ $\quad \therefore \beta = 3$ (mínimo) $\Rightarrow$ Luego: $N_{mínimo} = 3^4 \times 5^3 \times 7$

$\gamma + 1 = \dot{2}$; $\gamma - 1 = \dot{3}$ $\quad \therefore \gamma = 3$ (mínimo)

Rpta. $N_{D_N} = 5 \times 4 \times 2 = 40$

15. Hallar la suma de las sextas potencias de los 111 primeros números. Dar la cifra de las unidades del resultado.

Solución

El número termina en la cifra:	Su sexta potencia termina:
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1
0	0
	45

De las 111 primeras será:

$45 \times 11 + 1 = \overline{.....6}$

Rpta. La cifra de las unidades es 6.

Sobre potenciación (cuadrados perfectos)

1. Hallar a + b + c, si:

$$\overline{aa}^2 = \overline{bbcc}$$

a) 9 b) 11 c) 15 d) 19 e) 10

2. Si se sabe que el número $\overline{(p^2)(q^2)} = k^2$ de dos cifras cuadradas perfectas, es a su vez cuadrado perfecto. Hallar p + q + k

a) 10 b) 12 c) 15 d) 18 e) 17

3. Hallar la suma de los cuadrados perfectos de la forma $\overline{abocd}$ si:

$$\overline{cd} - \overline{ab} = 1$$

a) 99 101 b) 90099 c) 98 88 d) 87956 e) 150251

4. Si el número $\overline{abcd} = k^2$; además: a + c = b + d = 9. Hallar la suma de cifras de k, siendo k el menor posible.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

5. Para el número N se cumple:

$N = [(a + 1)(a - 3)a]^2 = \overline{mnpqr5}$. Hallar m + n + p + q + r

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

6. Sabiendo que N es un cuadrado perfecto tal que su última cifra es 5, y que además la suma de sus cifras es $\dot{3}$; hallar $\sqrt[3]{N}$ sabiendo que N es lo menor posible y que tienen raíz cúbica exacta.

a) 175 b) 225 c) 45 d) 125 e) 75

7. Sabiendo que la diferencia entre dos números cuadrados perfectos consecutivos es $\dot{7}$ y que el mayor de ellos es $\dot{3}$. Hallar el valor del mayor de ellos, si los números son los menores posibles.

a) 324 b) 576 c) 289 d) 729 e) 900

8. Hallar la suma de todos los cuadrados perfectos $\dot{7}$, que tienen tres cifras.

a) 420 b) 1 421 c) 1 240 d) 2 450 e) 2 540

9. Un número de dos cifras es cuadrado perfecto y el número de dos cifras que resulta de intercalarle dos ceros puede expresarse como el producto de dos números consecutivos. Hallar la suma de las cifras del menor de los números consecutivos.

a) 16 b) 20 c) 17 d) 12 e) 19

10. ¿ Cuántos cuadrados perfectos $\dot{7} + 2$ hay entre "a" y 6 725 si "a" es el menor cuadrado perfecto de cuatro cifras cuya suma de las cifras es $\dot{9}$?

a) 13 b) 15 c) 17 d) 14 e) 12

11. Hallar cuántos números cuadrados perfectos existen entre 10 000 y 100 000 tales que sean $\dot{3}$ y terminen en la cifra 6.

a) 3 b) 5 c) 14 d) 7 e) 12

12. Hallar "a" si: $\overline{(a-2)aa(a-1)} = k^2$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 2

13. La diferencia del cuadrado de un número y el mismo es $\overline{6aa6}$. ¿ Cuál es dicho número ? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

14. Cuántos cuadrados perfectos de la forma $\overline{abcdab}$ cumplen que $\overline{cd} = 2 \times \overline{ab}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

15. Hallar (a + b + c), si: $\overline{abcabc}_{(5)}$ es un cuadrado perfecto.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

16. El producto del cuadrado de un número de 333 cifras por su complemento aritmético termina en la cifra 2. Hallar el complemento aritmético de dicho número. Dar como respuesta el residuo con respecto a cinco.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

17. Hallar un número de 3 cifras consecutivas crecientes, tal que al permutarle sus dos cifras de menor orden se obtenga un cuadrado perfecto. Dar como respuesta el producto de sus cifras.

a) 19 b) 18 c) 17 d) 16 e) 15

18. Hallar la suma de todos los números de la forma $\overline{abb5}$ que son cuadrados perfectos.

a) 10 025 b) 15 825 c) 12 675 d) 9 880 e) N.A.

19. ¿ Cuántos números de la forma $\overline{ab49}$ son cuadrados perfectos ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

20. En cuántos sistemas de numeración se cumple que: $\overline{10201}_{(n)}$ es un cuadrado perfecto menor que 10 000

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) N.A.

21. Hallar el valor de "b" si el número $\overline{abab}_{(7)}$ es un cuadrado perfecto; además "a" y "b" son diferentes entre sí.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) No existe.

22. Hallar "a" si: $\overline{aabb}_{(5)}$ es un cuadrado perfecto.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) No se puede determinar.

23. En el sistema de numeración de base 7 existen números de cuatro cifras iguales que son cuadrados perfectos. Hallar su suma.

a) 1 600 b) 2 000 c) 3 000 d) 400 e) 4 000

24. Hallar cuántos capicúas impares de tres cifras son cuadrados perfectos.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

25. Diga cual de los siguientes valores no tiene posibilidad de ser cuadrado perfecto:

a) $\dot{\dot{7}} + 4$ b) $\dot{\dot{7}} + 3$ c) $\dot{\dot{7}} + 2$ d) $\dot{\dot{7}} + 1$ e) $\dot{\dot{7}}$

26. Hallar: $M + S + E$ sabiendo que: $\overline{MSE} = K_1^2$; $\overline{*MSE} = K_2^2$ además: $k_2 = 3k_1$

a) 18 b) 16 c) 24 d) 15 e) 13

27. Hallar (a + b) si el número $\overline{527abab}$ es un cuadrado perfecto.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

28. Hallar un número de tres cifras cuadrado perfecto, sabiendo que su raíz es el doble de la suma de sus cifras. Dar como respuesta el producto de sus cifras.

a) 54 b) 24 c) 48 d) 12 e) 25

29. Hallar "a" si $\overline{aa9aa}$ es un número cuadrado perfecto.

a) 8 b) 6 c) 4 d) 5 e) 3

30. Si "p" es un número primo. ¿ Cuál es el único número cuadrado perfecto cuya diferencia con "p" es un cuadrado perfecto ?

a) $\frac{1}{4}p^2$ b) $(p+1)^2$ c) $(p-1)^2$ d) $\frac{1}{4}(p-1)^2$ e) $\frac{1}{4}(p+1)^2$

Cubos perfectos

31. Hallar (a + d) si: $\overline{abcd} = \overline{ad}^3$

a) 8 b) 15 c) 2 d) 13 e) 9

32. Hallar a + b + c si se cumple: $\overline{5abbbab} = \overline{abc}^3$

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

33. Un número de cuatro cifras cubo perfecto tiene un número impar de divisores ¿ Cuántos divisores tiene ?

a) 11 b) 13 c) 15 d) 21 e) 25

34. Entre los cubos de dos números impares consecutivos hay 301 números pares. Hallar el producto de cifras del mayor de dichos números.

a) 9 b) 10 c) 1 d) 12 e) 8

35. Cuántos números mayores que 343 y menores que 8000 son cubos perfectos de 16 divisores cada uno

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) N.A.

36. Hallar (a + b + c + d) si el número $\overline{40abcd}$ es cubo perfecto.

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

37. El cubo de un número es de la forma $\overline{41abcdef3}$. La suma de las cifras de este número es:

a) 34 b) 12 c) .18 d) 16 e) 21

38. Hallar (a + b + c + d) si el número $\overline{16abcd16}$ es un cubo perfecto.

a) 23 b) 22 c) 20 d) 24 e) 21

39. Cuántos números $\dot{9}$ + 1, menores que 100 000 son cubos perfectos.

a) 12 b) 15 c) 16 d) 14 e) 13

40. Hallar cuántos divisores tiene el menor cubo perfecto que resulta de multiplicar 84 084 por un número que posee 270 divisores.

a) 7×4^4 b) 5×4^4 c) 7×4^4 d) 4^5 e) N.A.

41. Encontrar dos números cubos perfectos de los cuales uno es de tres cifras, sabiendo además que su suma vale $\overline{(3a)0(2a)(a^3)}$. Dar como respuesta el producto de las cifras del menor número.

a) 240 b) 12 c) 36 d) 24 e) 6

42. Cuántos números de 6 cifras son cubos pero no cuadrados, perfectos.

a) 49 b) 50 c) 51 d) 52 e) 53

Clave

1 a	8 e	15 d	22 d	29 d	36 c
2 d	9 a	16 a	23 a	30 a	37 c
3 b	10 a	17 c	24 b	31 e	38 d
4 c	11 b	18 c	25 c	32 a	39 b
5 c	12 c	19 c	26 c	33 d	40 c
6 c	13 b	20 a	27 d	34 b	41 d
7 d	14 d	21 d	28 a	35 b	42 b

Capítulo 13

RADICACION

Signo utilizado en 1 220 por Leonardo de Pisa para simbolizar la raíz cuadrada. El signo proviene de la palabra latina **radix.**

Definición 1

La radicación exacta es la operación inversa a la potenciación que tiene por objeto, dada la potencia y el exponente, hallar la base; sólo que en radicación a la potencia se le llama radicando o cantidad subradical y al exponente, índice de la raíz.

$$\underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{\text{n factores}} = a^{n} = N$$

n ← exponente

N ← potencia

En radicación:

$$\sqrt[n]{N} = a \leftarrow \text{raíz} \quad \Leftrightarrow \quad a^{n} = N$$

índice de la raíz

radicando

radical

Definición 2

Si A, $r \in \mathbb{R}^{+}$ y $n \in \mathbb{N}^{+}$, diremos que r es la raíz enésima de A que se denotará por:

$$\sqrt[n]{A} = r \quad \Leftrightarrow \quad r^{n} = A$$

Las leyes de los exponentes han sido establecidas para enteros positivos, negativos o cero, ahora generalizaremos estas a exponentes racionales. Sea n un número entero y, por lo tanto $\frac{1}{n}$ una fracción. Consideremos ahora el significado de $a^{\frac{1}{n}}$ cuando $a \neq 0$. Para que la ley de exponentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

sea válida para este exponente fraccionario, deberá verificarse que:

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots\ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{\text{n factores}} = \underbrace{a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}}}_{\text{n términos}}$$

$$= a^{(\frac{1}{n})(n)}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= a$$

Esto es, $a^{\frac{1}{n}}$ tiene la propiedad de que su potencia de grado n es igual a a , osea:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

recordando que:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

entonces: $a = a$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

Si $a = 0$ la propiedad anterior sigue siendo válida de donde podemos establecer la siguiente:

Definición 3

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ($a \geq 0$ cuando n es par).

Ejemplos

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Definición 4

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, con la condición de que si **n** es par, **a** debe ser positivo

Ejemplo

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

Radicación aproximada

Se quiere calcular la raíz enésima del número natural $\sqrt[m]{N}$ para ello consideremos formada la sucesión de potencias enésimas de los números naturales:

$$1^m, 2^m, 3^m, \ldots\ldots\ldots a^m, (a+1)^m \ldots\ldots\ldots (1)$$

Para que la operación $\sqrt[m]{N}$ pueda efectuarse, es preciso que el número N coincida precisamente con uno de los números de la sucesión (1), es decir, que N sea potencia enésima perfecta. Si esto no ocurre, N estará siempre comprendido entre dos términos consecutivos de la sucesión: a^m y $(a+1)^m$:

a no es la $\sqrt[m]{N}$, pues $a^m < N \wedge \sqrt[m]{N} > a$ .....(α)

$(a+1)$ no es la $\sqrt[m]{N}$, pues $(a+1)^m > N \wedge \sqrt[m]{N} < (a+1)$ .....(β)

De (α) y (β): $a < \sqrt[m]{N} < a+1$

Si consideramos $\sqrt[m]{N} = a$ ó $\sqrt[m]{N} = a+1$, en cualquiera de los dos casos se comete un error menor que una unidad, y:

$\underline{\sqrt[m]{N}} = a$, se llamará raíz enésima por defecto de N ,por que a es el mayor número natural cuya potencia enésima esta contenida en N

$\overline{\sqrt[m]{N}} = a+1$, se llamará raíz enésima por exceso de N , porque $(a+1)$ es el menor número natural cuya potencia enésima es mayor que N

Si: $\underline{\sqrt[m]{N}} = a$, el resto por defecto: $R = N - a^m$ ..... (γ)

Si: $\overline{\sqrt[m]{N}} = (a+1)$, el resto por exceso: $R' = (a+1)^m - N$ ..... (λ)

De (γ) y (λ) se deduce la propiedad:

$$R + R' = (a+1)^m - a^m$$

Nota: El trazo horizontal en la parte inferior del radical índica raíz por defecto y colocado en la parte superior, por exceso.

Propiedades de la radicación

i. Para que la radicación sea posible, es necesario y suficiente que el número de que ha de extraerse, sea potencia perfecta del grado que indica el índice. Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que un número sea potencia perfecta de grado m, es que los exponentes de sus factores primos sean todos, múltiplo de m. Suponiendo cumplida esta condición, si el número N descompuesto en sus factores primos es:

$$N = a^{mp} . b^{mq} . c^{mr} .....k^{ms} \Rightarrow \sqrt[m]{N} = a^{p} . b^{q} . c^{r} .....k^{s}$$

pues: $(a^{p} . b^{q} . c^{r} ..... k^{s})^{m} = a^{mp} . b^{mq} . c^{mr} ..... k^{ms} = N$

ii. La radicación es uniforme por serlo la potenciación; es decir que si a los dos miembros de una igualdad se les extrae raíz del mismo índice, se obtiene otra igualdad.

iii. La radicación es monótona; si se extrae raíz del mismo índice a los dos miembros de una desigualdad, se obtiene otra del mismo sentido.

iv. La radicación es distributiva con respecto del producto y cociente porque:

$$\sqrt[m]{A} . \sqrt[m]{B} = a . b \text{ siendo } a^{m} = A \wedge b^{m} = B$$

luego: $a^{m} . b^{m} = A . B = (ab)^{m}$; luego $\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A} . \sqrt[m]{B}$

Del mismo modo se prueba respecto del cociente.

** La radicación no es conmutativa ni asociativa como su inversa.

RAIZ CUADRADA

Raíz cuadrada exacta en $\mathbb{N}$:

Definición 1

Se llama raíz cuadrada exacta de un número $A \in \mathbb{N}$, a otro $a \in \mathbb{N}$ tal que: $\sqrt{A} = a \Leftrightarrow a^{2} = A, \forall A \in \mathbb{N} , a \in \mathbb{N}$

Raíz cuadrada entera en $\mathbb{N}$: (inexacta)

Definición 2

Se llama raíz cuadrada entera, o raíz por defecto en menos de una unidad de un número, al mayor número natural cuyo cuadrado está contenido en dicho número, y se llama raíz cuadrada por exceso en menos de una unidad, al número natural que se obtiene aumentando una unidad a la raíz cuadrada entera.

Si: $a^2 < A < (a+1)^2$, se puede escribir:

$$\underline{\sqrt{A}} = a \qquad \overline{\sqrt{A}} = a+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Raíz por defecto Raíz por exceso

Al calcular la raíz cuadrada por defecto o por exceso, se encontrarán residuos que se llamarán por defecto y por exceso respectivamente.

Resto por defecto: (R) Es la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera. De (α)

$$R = A - a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Resto por exceso: (R') Es la diferencia entre el cuadrado de la raíz por exceso y el número: De (α):

$$R' = (a+1)^2 - A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

De (β) y (γ) se deducen las siguientes propiedades:

i. La suma de los restos por defecto y por exceso de una raíz cuadrada es igual a la suma de las raices por defecto y exceso o es igual al doble de la raíz por defecto más 1.

$$R + R' = A - a^2 + (a+1) - A^2$$

$$R + R' = (a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2$$

$$R + R' = a + (a+1) = 2a + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\phi)$$

ii. El resto obtenido al hallar la raíz cuadrada entera de un número, no puede exceder al doble de la raíz por defecto.

En efecto, de (ϕ) se deduce que cualquier residuo.

$$R < 2a + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\theta)$$

iii. El residuo máximo de una raíz cuadrada es igual al doble de la raíz por defecto.

De (θ) se infiere que:

$$R_{máximo} = 2a$$

iv. En la extracción de la raíz cuadrada, si el resto no es mayor que la raíz, el error de ésta es inferior a media unidad.

En efecto, si se tiene:

$$\sqrt{A} \;\big|\; a \qquad \Rightarrow \quad R = A - a^2 \leq a$$
$$R$$

Se tiene también, con mayor razón:

$A < a^2 + a + \frac{1}{4}$, puesto que $a^2 < A$, se puede escribir:

$a^2 < A < (a + \frac{1}{2})^2$ y por lo tanto:

$a < \sqrt{A} < a + \frac{1}{2}$ **L.Q.Q.D.**

El algoritmo de la raíz cuadrada

El algoritmo de la raíz cuadrada es el proceso aritmético para encontrar o aproximar la raíz cuadrada de un número. Revisemos el proceso:

Ejemplo

Encontrar $\sqrt{82\ 369}$,

Paso 1

Separar los dígitos por parejas hacia la izquierda, empezando desde la coma decimal. Cada par determinar un **lugar** en la raíz cuadrada.

$\sqrt{\ 8\ 23\ 69}$ | * * *

Paso 2

Encontrar el mayor entero cuyo cuadrado es menor o igual que el número designado por la pareja o el dígito de la izquierda:

$2^2 = 4 < 8 < 9 = 3^2$

2 será la primera cifra de la raíz. Elevar 2 al cuadrado y restar de 8. Bajar los 2 dígitos de la siguiente pareja.

$\sqrt{\ 8\ 23\ 69}$ | 2 * *

4 | ↓ 4 (*)

4 23

Paso 3

Duplicar el número 2 de la raíz y colocar a la derecha del 4 un asterisco como se indica.

Paso 4

Estimar cuántas veces 40 divide a 423. Probemos con 9. Reemplazamos el asterisco por 9 y multiplicamos 9 . 9: resulta demasiado grande. Probemos con 8. Reemplazamos el asterisco por 8 y multiplicamos por 9. Entonces 8 es la siguiente cifra de la raíz.

$\sqrt{\ 8\ 23\ 69}$ | 29 *

4 | 4 (9)x9

4 23

4 41

Paso 5

Repetir los pasos 3 y 4.

$$\therefore \quad \sqrt{8\ 23\ 69} = 287$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ 8\ 23\ 69} & 28\ * \\ \hline 4 & 4\ (8)x8 \\ \hline 4\ 23 & \\ 3\ 84 & \\ \hline 39\ 69 & \end{array}$$

Ahora consideremos lo que ocurre en cada paso. Recuérdese que el multiplicar un número por 100 mueve la coma decimal dos lugares a la derecha. Pero el multiplicar un número por 100 solamente multiplica la raíz cuadrada del número por 10. Esto se deduce del hecho de que la raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de los factores:

$$\sqrt{M \cdot N} = \sqrt{M} \cdot \sqrt{N} \quad ; \quad \sqrt{36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt{100 \cdot N} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{N} = 10\sqrt{N}$$

Esta es la razón por la que los dígitos en el número se marcan por parejas. El número de parejas determinan el número de dígitos en la raíz cuadrada.

En cada paso del algoritmo estamos interesados en encontrar el mayor entero cuyo cuadrado es menor o igual al número determinado por estos pares. En el paso 2 por ejemplo, calculamos el mayor número cuyo cuadrado es menor o igual a 8. En el siguiente paso buscamos el mayor número cuyo cuadrado es menor o igual a 823. En este punto estamos trabajando con dos pares; entonces la raíz cuadrada de 823 es un número de dos dígitos de los cuales el primero es 2. Podemos escribir esto como 20 + x . Queremos calcular el mayor entero x en la forma tal que el cuadrado del número 20 + x sea menor o igual a 823; esto es, debemos buscar el mayor valor de x que satisfaga la condición:

$$(20 + x)^2 \leqq 823 \Rightarrow 400 + 2 \cdot 20x + x^2 \leqq 823$$

$\Rightarrow (2 \cdot 20 + x)\, x \leqq 423$. Este paso corresponde a restar 4 de 8 y bajar el siguiente par de dígitos (observar este paso en el ejemplo). Ahora escribimos:

$$x\,(40 + x) \leqq 423$$

Esto explica el que se duplique el dígito de la raíz y el dejar un lugar para un dígito como está indicado por el * en el ejemplo. Hemos dividido entre 40 para obtener una estimación de x. Este procedimiento está basado en la observación de que 40 es mucho mayor que el dígito x, así que dividir entre 40 es casi lo mismo que dividir entre 40 + x. Esta es la razón por la cual frecuentemente sobreestimamos x. Vimos en el ejemplo que 9 fue demasiado grande, así que 8 es el número buscado.

El siguiente paso, es esencialmente una repetición del paso anterior. Deseamos encontrar el mayor número cuyo cuadrado sea igual o menor a 82 369. Este es un número de tres dígitos cuyos primeros dos dígitos son conocidos. Esto es, buscamos el mayor número entero x tal que:

$$(280 + x)^2 \leqq 82\,369$$
$$78\,400 + 2 \cdot 280x + x^2 \leqq 82\,369$$
$$(560 + x)\,x \leqq 3\,969$$
$$\boxed{x = 7}$$

Hemos obtenido la raíz cuadrada del cuadrado de un número natural. El algoritmo es válido $\forall \cap \in \mathbb{R}^+$ y el proceso puede ser continuado después de la coma decimal. Debemos aumentar ceros para hacer tantos pares a la derecha de la coma decimal como cifras decimales deseemos en la raíz cuadrada. Ilustraremos con el siguiente:

Ejemplo

Encontrar $\sqrt{3,4}$ con tres cifras decimales:

$\sqrt{3\,40\,00\,00}$	1,843
1	28 ×8
240	364 ×4
224	3683 ×3
1600	
1456	
14400	
11049	

Si efectuamos la operación hasta la cuarta cifra, encontramos que $\sqrt{3,4}$ está más cercano a 1,844 que a **1,843**. Este paso adicional es menos tedioso que trabajar con los "mínimos residuos absolutos". Señalamos, en cambio que podemos mejorar en gran parte la aproximación por un sencillo proceso de división el cual se expone en la siguiente sección.

Método de Newton para la aproximación de raíces cuadradas

El método de aproximación de la raíz cuadrada de un número por el proceso de "división y promedio" es un caso muy particular del "método de aproximación de Newton"

El método de Newton está básado en el cálculo infinitesimal y es un método muy eficaz para la aproximación de raíces de ecuaciones muy generales.

En el caso de la aproximación de raíces cuadradas, el método se reduce a una simple reiteración o proceso repetitivo. La naturaleza repetitiva del proceso "dividir y sacar promedio, dividir y sacar promedio, etc.", hace que éste método sea muy adecuado para las máquinas calculadoras electrónicas modernas. Otro rasgo importante del método de Newton es el hecho de que la primera "suposición" la primera vez no significa siempre que el trabajo debe ser abandonado y que se deba empezar el proceso desde el principio nuevamente; ello pude, más bien, tener como consecuencia que será necesario repetir una o dos veces el proceso para determinar una aproximación exacta. Ilustraremos el método

para encontrar una aproximación de $\sqrt{300}$. Marcaremos nuestra primera "suposición" A_1 y las aproximaciones sucesivas A_2, A_3 . . .

Ejemplo

Encontrar $\sqrt{300}$

Paso 1

Puesto que: $17^2 = 289 < 300 < 324 = 18^2$, escogemos 17 como una primera suposición razonable.

$$A_1 = 17 \text{ (primera aproximación)}$$

Paso 2

Dividimos el número N entre A_1, esto es, 300 entre 17, y al efectuar la división aproximamos hasta que haya el doble de dígitos que el de la aproximación previa, redondeando el último dígito por uno **par**. Para encontrar la segunda aproximación A_2, tomamos el promedio entre este cociente y la aproximación previa.

$$\frac{300}{17} = 17{,}64$$

Redondeando por el más próximo dígito par, obtenemos 17;64, teniendo este número el doble de dígitos que A_1 ahora escribimos:

$$A_2 = \frac{17{,}64 + 17{,}00}{2} = 17{,}32 \text{ (segunda aproximación)}$$

Observar que A_2 verifica que nuestra primera suposición fue una buena aproximación porque cuando redondeamos 17,32 por un número de dos dígitos obtenemos $A_1 = 17$. A esto llamaremos "verificar" en lo que sigue:

Repitiendo el proceso tenemos:

$$A_3 = \frac{\frac{300}{17{,}32} + 17{,}320000}{2} = \frac{17{,}321016 + 17{,}320000}{2}$$

$$A_3 = 17,\ 320508 \text{ (tercera aproximación)}$$

El hecho de que A_3 "verifique" a A_2 implica que A_2 es exacta hasta dos cifras decimales. A_3 es exacta excepto por la última cifra que puede tener un error de 1.
Para demostrar que una suposición pobre proporciona la misma fracción decimal después de algunas repeticiones más del proceso, supongamos que ponemos:

$$A_1 = 10 \Rightarrow A_2 = \frac{\frac{300}{10} + 10}{2} = 20$$

Obsérvese que A_2 no "verifica" A_1, porque A_2 redondeando a dos dígitos no es igual a A_1. Cuando la "verificación" no ocurre, efectuamos la división y aproximamos hasta que haya una cifra menos que el doble de cifras en la aproximación previa.

$$A_3 = \frac{\frac{300}{20}+20,0}{2} = 17,5 \quad ; \quad A_4 = \frac{\frac{300}{17,5}+17,5000}{2} = \frac{17,142+17,500}{2}$$

$$A_4 = 17,321 \ \wedge \ A_5 = 17,320508$$

Ejercicios

1. Encontrar $\sqrt{502,3}$ redondeando con 3 cifras decimales
2. Encontrar $\sqrt{100}$ redondeando con 4 cifras decimales
3. Encontrar $\sqrt{0,5023}$ redondeando con 4 cifras decimales
4. Encontrar $\sqrt{3}$ aproximando a 7 cifras decimales
5. Encontrar $\sqrt{3000}$ redondeando a 6 cifras decimales.
6. Encontrar $\sqrt{50}$ redondeando a 7 cifras decimales.

Respuestas

1.	22,412	4.	1,7320508
2.	31,6228	5.	54,772256
3.	0,7087	6.	7,0710678

Extracción de la raíz cuadrada de un número entero o fraccionario con una aproximación dada

I. Extraer la raíz cuadrada de un número N , entero o fraccionario, en menos de $\frac{1}{n}$

Equivale a buscar el mayor múltiplo de $\frac{1}{n}$ contenido en $\sqrt{N}$. Si representamos por

$a \cdot \frac{1}{n}$ a este mayor múltiplo, se deduce de esta definición:

$$\frac{a}{n} < \sqrt{N} < \frac{a+1}{n}$$

$$\frac{a^2}{n^2} < N < \frac{(a+1)^2}{n^2}$$

$$a^2 < Nn^2 < (a+1)^2$$

$$a < \sqrt{Nn} < a+1$$

Por lo tanto, **a** será, en menos de una unidad por defecto, la raíz cuadrada del producto Nn^2; de aqui obtenemos la siguiente regla:

> "Para extraer la raíz cuadrada de un número en menos de $\frac{1}{n}$, se multiplica el número por el cuadrado del denominador (n), se extrae en menos de una unidad la raíz cuadrada del producto, y se da al resultado por denominador, el de la aproximación".

Ejemplo

Extraer la raíz cuadrada del 3 007, con un error, por defecto, menor de $\frac{1}{8}$; se tiene: $3\,007 \times 8^2 = 192\,448$; cuya raíz cuadrada en menos de una unidad por defecto es: 438 y el resultado será:

$$\frac{438}{8} = 54\frac{6}{8} \text{ con un error por defecto menor que } \frac{1}{8}$$

ii. Para extraer la raíz cuadrada de un número N , entero o fraccionario en menos de $\frac{m}{n}$ se multiplica el número por el cuadrado: $\left(\frac{n^2}{m^2}\right)$ del inverso de la aproximación, se extrae en menos de una unidad, la raíz cuadrada de la parte entera del producto obtenido, y se multiplica esta raíz por la fracción $\frac{m}{n}$ que se expresa la aproximación.

Ejemplo

Hallar el valor de $\sqrt{432}$, con un error, por exceso, menor de 2/9

$\sqrt{432} = \frac{2}{9} \times \sqrt{\frac{81}{4} \times 432} = \frac{2}{9}\sqrt{8\,748}$ esta raíz con error, por exceso menor de una unidad es 94

$$\therefore \quad \sqrt{432} = \frac{2}{9} \times 94 = 20\,\frac{8}{9} \text{ con un error, por exceso, menor que } \frac{2}{9}$$

Sobre radicación
(Raíz cuadrada)

1. Demostrar la prueba de los nueves para comprobar la extracción de una raíz cuadrada.

Demostración

Sea N un número, A su raíz cuadrada aproximada en menos de 1 unidad y R el resto de la operación.

La prueba consistirá en averiguar si la raíz A verifica la relación fundamental

$$\boxed{N = A^2 + R}$$

Si p, q y r son los restos de la división por 9 de los números N, A y R, es evidente que:

$$A = \dot{9} + q$$

y por lo tanto

$$A^2 = \dot{9} + q^2$$

$$R = \dot{9} + r$$

Sumando

$$A^2 + R = \dot{9} + (q^2 + r)$$

$$N = \dot{9} + p.$$

Como los primeros miembros de estas dos igualdades son iguales, también lo serán los segundos; luego

$$\dot{9} + (q^2 + r) = \dot{9} + p$$

Esta relación manifiesta que p y $(q^2 + r)$ difieren en un múltiplo de 9; por lo tanto, si se les divide por 9, los restos habrán de ser iguales.

De esta demostración se desprende la regla siguiente:

> "Para hacer la prueba por 9 de una raíz cuadrada, se eleva al cuadrado el resto de la división por 9 de la raíz encontrada, y se añade al resto de la división por 9 del resto de la operación.
> Dividiendo por 9 la suma que resulta, el resto habrá de ser igual al de la división por 9 del número propuesto".

L.Q.Q.D.

2. Hallar el valor de $\sqrt{49375}$ con 1/10 de aproximación.

Solución

$$\sqrt{49375} \text{ con } \frac{1}{10} \text{ de aproximación } = \frac{1}{10}\underbrace{\sqrt{49375\times 10^2}}_{\text{parte entera}} = 222{,}2$$

Rpta. 222,2

3. ¿Cuántos números menores que 10 000 son tales que al extraer su raíz cuadrada se obtiene 48 de residuo?

Solución

Los números son de la forma:

$N = k^2 + 48 < 10\,000$ pero $R_{máximo} = 48 = 2k \Rightarrow k = 24$ (como mínimo)

luego $k^2 + 48 < 10\,000 \wedge k \geq 24 \therefore k = \underbrace{24,\ldots\ldots\ldots\ldots, 99}_{99 - 23 = 76 \text{ valores}}$

Rpta. $\therefore$ Existen: 76 números

4. Después de realizar el proceso de extracción de la raíz cuadrada de un número se nota lo siguiente: Que la diferencia del radicando menos el residuo por defecto es 729 y la diferencia del residuo por exceso menos el residuo por defecto es 5. Hallar el producto de las cifras del radicando.

Solución

Radicando: N raíz por defecto: A residuo $\begin{cases} \text{por defecto: } R_d \\ \text{por exceso: } R'_d \end{cases}$

Podemos establecer: $\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & A \\ \hline R_D & \end{array}$ además:

$N = A^2 + R$ ..... (1)
$N - R = 729$ ..... (2)
$R' - R = 5$ ..... (3)
Por propiedad:
$R' + R = 2A + 1$ .....(4)

De (1) y (2)
$A^2 = 729 \wedge A = 27$
De (3) y (4):
$2R + 5 = 2(27) + 1 \rightarrow R = 25$
$\therefore N = 27^2 + 25 = 754$

Rpta. $\therefore$ Producto pedido: $7 \times 5 \times 4 = 140$

5. Hallar la suma de los números de la forma $\overline{aba1}$, tales que su raíz cuadrada es de la forma $\overline{c1}$.

Solución:

$$N = \overline{aba1} \wedge \sqrt{N} = \overline{c1}, \text{ además: } 10^3 \leq N < 10^4$$

$\Rightarrow 32 \leq \sqrt{N} \leq 99$ ó $32 \leq \overline{c1} \leq 99 \Rightarrow c = 4; 5; \ldots\ldots ; 9$ para que la segunda y cuarta cifras de N sean iguales:

$$c = 8 \rightarrow 81^2 = 6561$$
$$c = 9 \rightarrow 91^2 = 8281$$

Rpta. $\therefore$ suma pedida = 6 561 + 8 281 = 14 842

6. Hallar un número entero "N" tal que al extraerle su raíz cuadrada se obtiene por resto 13 y tal que si se le aumentan 98 unidades a "N" su raíz cuadrada aumenta en una unidad y es exacta.

Solución

Podemos establecer: $N = k^2 + 13$ y $N + 98 = (k + 1)^2$. De aquí $2k + 1 = 98 + 13 \Rightarrow k = 55$

$\therefore N = 55^2 + 13 = 3\,038$

Rpta. N = 3 038

7. Sabiendo que $\overline{2a0b5}$ tiene raíz cuadrada exacta; hallar el valor de esta.

Solución

$\overline{2a0b5} = k^2 \Rightarrow b = 2$ (por propiedad); luego: $N = \overline{2a025}$; pero

$k = \overline{1m5} \Rightarrow \overline{2a025} = \overline{1m5}^2 \Rightarrow 20025 + 1000a = 11025 + 2100\,m + 100\,m^2$

$\Rightarrow 9\,000 + 1\,000a = 2100\,m + 100\,m^2 \Rightarrow 1000\,(9+a) = 100\,m\,(21 + m)$

$\Leftrightarrow m = 4$

$\therefore \overline{2a0b5} = 21025 = 145^2$

Rpta. Raíz = 145

8. La diferencia de las raíces cuadradas aproximadas por exceso y por defecto de 10 es 0.1; hallar la suma de dichas raíces.

Solución

Se cumple: $\sqrt{10} = \frac{a}{b}\underbrace{\sqrt{10x\left(\frac{a}{b}\right)^2}}_{n} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{a}{b}(n)$ raíz por defecto

$$\therefore \sqrt{10} = \frac{a}{b}(n+1) \text{ raíz por exceso}$$

Por dato: $\frac{a}{b}(n+1) - \frac{a}{b}(n) = \frac{a}{b} = 0.1 = \frac{1}{10}$

Luego: $\sqrt{10} = \frac{1}{10}\sqrt{10x10^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1000}}{10}$ $\Rightarrow$ $= \frac{31}{10} = 3,1$; $= \frac{32}{10} = 3,2$

Rpta. $\therefore 3,1 + 3,2 = 6,3$

9. ¿Cuántos números enteros menores que 100 000 al extraerles su raíz cuadrada se obtiene 221 de residuo por exceso.

Solución

Los números son de la forma: $N = q^2 + R$
$N = (q + 1)^2 - R'$

Por propiedad: $2q + 1 > R' \rightarrow 2q + 1 > 221 \rightarrow q \geq 110$

Por condición: $q^2 - R' < 100\,000 \rightarrow q^2 < 100\,221 \rightarrow q \leq 316$

$$\therefore q = \underbrace{110; 111; 112; 113; + ...; 316}_{\text{Total} = 316 - 109 = 207}$$

Rpta. $\therefore$ Existen 207 números.

10. Hallar cuántos números menores que 10,000 existen tales que al extraerle su raíz cuadrada esta termine en 4 y dé un residuo igual a 28.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Solución

Sea N el número. Podemos establecer:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & A \\ \hline 28 & \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} N < 10\,000 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ N = A^2 + 28 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ A = \overline{\ldots\ldots 4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}$$

(2) en (1) :

$$A^2 + 28 < 10\,000 \Rightarrow A < 99, \ldots\ldots\ldots$$

pero: $A = \overline{\ldots\ldots 4}$ $\therefore$ A puede tomar los valores:

4; 14; 24; ...; 94 (10 valores)

Rpta. $\therefore$ Existen 10 números.

11. ¿Cuántos números de 4 cifras existen tales que al extraer su raíz cuadrada se obtiene por raíz y por residuo el mismo número?

Solución

Sea N el número:

$1\,000 \leq N < 10\,000$ (1) además : $\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & A \\ \hline A & \end{array} \Rightarrow N = A^2 + A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$32 \leq \sqrt{N} < 99, \ldots \Rightarrow \quad A = 32; 33; \ldots; 99$ (68 valores)

Rpta. Existen 68 números

* Otra forma: (2) en (1)

$$1\,000 \leq A^2 + A < 10\,000$$

$$1\,000 \leq \underset{\downarrow}{A}\ \underset{\downarrow}{(A+1)} < 10\,000$$

$$\left.\begin{array}{cc} 32 & 33 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 99 & 100 \end{array}\right\} \text{68 valores.}$$

12. Hallar "a" sabiendo que al extraer la raíz cuadrada al número: $\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)}$ se obtiene por raíz: $\overline{aa}$ y por residuo $\overline{(a+2)(a+2)}$. Hallar cuántos divisores tiene el número: $\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)}$.

Solución

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)}} & \overline{aa} \\ \hline \overline{(a+2)(a+2)} & \end{array}$$

$$\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)} = \overline{aa}^2 + \overline{(a+2)(a+2)} \quad \begin{cases} a > 2 \\ a \leq 7 \end{cases}$$

$$1111a - 2222 = 121a^2 + 11a + 22 \Rightarrow 1\,100a - 121a^2 = 2\,244$$

$$\Rightarrow 11a(100 - 11a) = 2244 \Rightarrow a(100 - 11a) = 204 = 2^2 \times 3 \times 17$$

Se deduce que: $100 - 11a = \dot{17} \Rightarrow \dot{17} - 2 - 11a = \dot{17}$

$$\Rightarrow 11a + 2 = \dot{17} \Leftrightarrow a = 6$$

Rpta. $a = 6$

13. Hallar un número entero sabiendo que al extraerle su raíz cuadrada por defecto y por exceso, se obtiene como suma de sus raíces 47 y por diferencia de sus residuos 7. Dar como respuesta la suma de las cifras del número, si este es el mayor posible.

Solución

Podemos establecer:

Defecto: $\sqrt{\begin{array}{c|l} N & A \\ R & \end{array}} \rightarrow N = A^2 + R \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Exceso: $\sqrt{\begin{array}{c|l} N & A+1 \\ R' & \end{array}} \rightarrow N = (A+1)^2 - R' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Por propiedad: $R + R' = A + A + 1 = 47$

Por dato: $R - R' = 7$

$\Rightarrow R = 27$, $A = 23$

$\therefore N = 23^2 + 27 = 556$ Suma pedida: $5 + 5 + 6 = 16$

Rpta. 16

14. Hallar la raíz cuadrada de $143.\hat{3}$ con $\frac{1}{10}$ de aproximación.

Solución

$$\frac{1}{10}\sqrt{143{,}333\ldots\ldots \times \frac{10^2}{1}} = \frac{1}{10}\sqrt{143333} = \frac{1}{10} \times 119 = 11{,}9$$

Rpta. 11,9

15. La raíz cuadrada por exceso de un número es 27 y el residuo por defecto es el mayor posible; hallar dicho número.

Solución

N = El número buscado.

$N = 27^2 - 2 \times 26 = 677$

Rpta. 677

16. Poner una V cuando la proposición sea verdadera y una F cuando sea falsa:

i) Un número que tiene 2n divisores puede ser cuadrado perfecto ($n \neq 0$ $n \in N$)

ii) El producto del M.C.D. y M.C.M. de tres números puede ser igual al producto de dichos números.

iii) La suma de los residuos por exceso y por defecto de una raíz cuadrada es igual a la raíz por defecto.

a) FVF b) VFV c) FFV d) FFV e) VVV

Teoría
Rpta. A

17. Poner una V cuando la proposición sea verdadera y F cuando sea falsa:

i) Un cubo perfecto no puede terminar en 75.

ii) El M.C.M. de tres números consecutivos puede ser igual al producto de dichos números.

iii) La raíz cuadrada del producto de dos números que difieren en 2 unidades, es el menor de ellos.

a) FFF b) FVF c) FVV d) VFF e) VVF

Teoría
Rpta. C

18. Los residuos por defecto y por exceso de extraer la raíz cuadrada de un número están en la relación de 5 es a 2 y suman 21. Hallar el número.

Solución

Sea N el número:

$$\left.\begin{array}{l} N = q^2 + R \\ N = (q+1)^2 - R' \end{array}\right\} \quad \text{Por condición: } \frac{R}{R'} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{R}{R+R'} = \frac{5}{7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por propiedad y por dato: $R + R' = q + (q + 1) = 21 \rightarrow q = 10$ en (1)

$$R = \frac{5}{7} \times 21 = 15 \wedge R' = 6 \quad \therefore \; N = 10^2 + 15 = 11^2 - 6 = 115$$

Rpta. 115

19. La raíz cuadrada de un cierto número es $\dot{4}$. Si dicho número es $\dot{7} - 3$ y $\dot{5} - 1$; hallar la suma de las cifras del mínimo valor que puede tomar diho número.

Solución

Sea N el número. Para que sea lo menor posible, N debe tener raíz exacta, es decir que $R = 0$

Por condiciones:

$$\begin{array}{lll} N = \dot{7} - 3 & & N = \dot{7} + 4 \\ N = \dot{5} - 1 \Rightarrow & \text{También} & N = \dot{5} + 4 \Rightarrow \\ \sqrt{N} = A = \dot{4} & & N = \dot{4} \end{array} \qquad \begin{array}{l} N - 4 = \dot{7} \\ N - 4 = \dot{5} \\ N - 4 = \dot{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow \therefore N - 4 = \overline{M.C.M(5;\ 4;\ 7)} = \overline{\dot{140}}$$

$$N = \overline{\dot{140}} + 4$$

$$\therefore N_{mínimo} = 144 \qquad \text{S pedida: } 1 + 4 + 4 = 9$$

Rpta. 9

20. ¿Cuántos términos de la sucesión: 13; 16; 19; 22; ...; 613, resultan tener raíz cuadrada exacta al sumárseles 2?

Solución

Los términos de la serie son de la forma:

$13 + 3n$ ..... $n = 0; 1; 2;$ .....; 200 ..... (1)

Para cumplir la condición del problema:

$13 + 3n + 2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad 15 + 3n = k^2 \quad \Rightarrow \quad 3(5 + n) = k^2$

$\Leftrightarrow 5 + n = 3p^2 \Rightarrow n = 3p^2 - 5 \Rightarrow p \geq 2$ ..... (2)

De (1) y (2): $3p^2 - 5 \leq 200 \quad \Rightarrow \quad p^2 \leq \frac{205}{3}$

$$\Rightarrow p^2 \leq 68\frac{1}{3} \Rightarrow p \leq 8;...$$

$$\therefore p = \underbrace{2; 3; .....; 8}_{7 \text{ valores}}$$

Rpta. Existen 7 números

21. Los residuos por defecto y por exceso de extraer la raíz cuadrada de un número están en la relación de 5 es a 2 y suman 21. Hallar el número.

Solución

$$\frac{R}{R'} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{R}{R+R'} = \frac{5}{7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$R + R' = 2q + 1 = 21 \rightarrow q = 10$

y en (1):

$$R = \frac{5}{7}(21) = 15 \text{ y } R' = 6$$

Luego:

$$N = q^2 + R = 10^2 + 15$$

Rpta. $N = 115$

22. Hallar la suma de los números de la forma $\overline{aba1}$ tales que su raíz cuadrada es de la forma $\overline{c1}$.

Solución

$$N = \overline{aba1} \qquad \sqrt{N} = \overline{c1}$$

$$10^3 \leq N < 10^4$$

$$\rightarrow 32 \leq \sqrt{N} \leq 99 \rightarrow c = 4; ...; 9$$

Para que la 2ª y 4ª cifras de N sean iguales:

$$c = 8 \rightarrow 81^2 = 6561$$

$$c = 9 \rightarrow 91^2 = \overline{8281}$$

Rpta. $\therefore S = 6561 + 8281 = 14842$

Extracción de la raíz cúbica de un número entero o fraccionario con una aproximación dada.

i. Extraer la raíz cúbica de un número N, entero o fraccionario en menos de $\frac{1}{n}$.

Extraer la raíz cúbica de un número N en menos de $\frac{1}{n}$ es buscar el mayor múltiplo de $\frac{1}{n}$ contenido en $\sqrt[3]{N}$.

Si representamos por a x $\frac{1}{n}$ este mayor múltiplo, tendremos por definición:

$$\frac{a}{n} < \sqrt[3]{N} < \frac{a+1}{n}$$

Elevando al cubo:

$$\frac{a^3}{n^3} < N < \frac{(a+1)^3}{n^3}$$

y multiplicando por n^3:

$$a^3 < N \times n^3 < (a+1)^3$$

de donde deducimos:

$$a < \sqrt[3]{N \times n^3} < a + 1,$$

Por lo tanto, *a* será, en menos de una unidad por defecto, la raíz cúbica del producto $N \times n^3$, de lo que se deduce la siguiente regla:

> "Para extraer la raíz cúbica de un número en menos de $\frac{1}{n}$ se multiplica dicho número por el cubo del denominador n, se extrae en menos de una unidad la raíz cúbica del producto y se da al resultado por denominador el de la aproximación."

Ejemplo

Extraer la $\sqrt[3]{3}$ en menos de $\frac{1}{10}$.

º Se tendrá: $3 \times 10^3 = 3\,000$. La raíz cúbica en menos de una unidad de 3 000 es 14 ó 15; por lo tanto $\frac{14}{10}$ y $\frac{15}{10}$ serán las raíces cúbicas por defecto y por exceso respectivamente en menos de $\frac{1}{10}$.

ii. Extraer la raíz cúbica de un número N, entero o fraccionario, en menos de $\frac{m}{n}$.

Extraer la raíz cúbica de N en menos de $\frac{m}{n}$ es buscar el mayor múltiplo de $\frac{m}{n}$ contenido en $\sqrt[3]{N}$

Según esta definición, si a x $\frac{m}{n}$ es el mayor múltiplo, se tendrá:

$$a \times \frac{m}{n} < \sqrt[3]{N} < (a+1) \times \frac{m}{n}$$

Elevando al cubo:

$$a^3 \times \frac{m^3}{n^3} < N < (a+1)^3 \times \frac{m^3}{n^3}$$

y multiplicando $\frac{m^3}{n^3}$, resultará:

$$a^2 < N \times \frac{m^3}{n^3} < (a+1)^3 \text{ o sea:}$$

$$a < \sqrt[3]{\frac{Nxn^3}{m^3}} < a+1$$

Por lo tanto, a será la raíz cúbica, en menos de una unidad, del número $\frac{Nxn^3}{m^3}$ y ésta se obtendrá sacando la raíz cúbica de la parte entera en menos de una unidad.

> "Para extraer la raíz cúbica de un número en menos de $\frac{m}{n}$ se le multiplica por el cubo $\frac{n^3}{m^3}$ del inverso de la aproximación, se extrae la raíz cúbica de la parte entera del producto en menos de una unidad y se multiplica la raíz obtenida por el quebrado $\frac{m}{n}$ que expresa la aproximación."

Ejemplo

Extraer la raíz cúbica de $\frac{22}{7}$ en menos de $\frac{2}{7}$.

Se tendrá $\frac{22}{7} \times \frac{7^3}{2^3} = 134\frac{6}{8}$, la raíz cúbica de 134 en menos de una unidad es 5, luego

$$\sqrt[3]{\frac{22}{7}} = \frac{5}{7} \quad \text{ó} \quad \overline{\sqrt[3]{\frac{22}{7}}} = \frac{6}{7}$$

RAIZ CUBICA

Raíz cúbica exacta en $\mathbb{N}$.

Definición 1

Se llama raíz cúbica exacta de un número $A \in \mathbb{N}$, a otro $a \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sqrt[3]{A} = a \Leftrightarrow a^3 = A, \quad \forall A \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{N}$$

Raíz cúbica entera en $\mathbb{N}$: (inexacta)

Definición 2

Se llama raíz cúbica entera, o raíz por defecto en menos de una unidad, de un número, al mayor número natural cuyo cubo está contenido en dicho número, y se llama raíz cúbica por exceso en menos de una unidad, al número natural que se obtiene aumentando una unidad a la raíz cúbica entera.

Si: $a^3 < A < (a + 1)^3$ se puede escribir:

$$\underline{\sqrt[3]{A}} = a \qquad \overline{\sqrt[3]{A}} = a + 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Resto por defecto (R): Es la diferencia entre el número y el cubo de su raíz cúbica entera o por defecto. De (α):

$$R = A - a^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Resto por exceso (R'): Es la diferencia entre el cubo de la raíz por exceso y el número. De (α):

$$R' = (a + 1)^3 - A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\chi)$$

De (β) y (γ) se deducen las siguientes propiedades:

i La suma de los restos por defecto y por exceso de una raíz cúbica es igual al triple del producto de las raíces por defecto y por exceso más 1.

$$R + R' = A - a^3 + (a + 1)^3 - A$$

$$R + R' = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3$$

$$R + R' = 3a\,(a + 1) + 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\phi)$$

ii El resto obtenido al hallar la raíz cúbica entera de un número no puede exceder al triple producto de las raíces por defecto y por exceso más 1.

En efecto, de (ϕ) se deduce que cualquier residuo:

$$R < 3a(a+1)+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\theta)$$

iii El residuo máximo de una raíz cúbica es igual al triple del producto de las raíces por defecto y por exceso.

De (θ) se infiere:

$$R_{máximo} = 3a(a+1)$$

El algoritmo de la raíz cúbica

El algoritmo de la raíz cúbica es el proceso aritmético para encontrar o aproximar la raíz cúbica de un número. Revisemos el proceso:

Ejemplo 1

Hallar $\sqrt[3]{40\ 001\ 688}$,

Paso 1.

Separar los dígitos en **grupos** de tres hacia la izquierda, empezando de la coma decimal. Cada grupo determina un lugar en la raíz cúbica (El último grupo de la izquierda puede estar incompleto, es decir que puede tener 1 ó 2 cifras como en este caso).

$\sqrt[3]{40'001'688}$ — ***

Paso 2.

Encontrar el mayor entero cuyo cubos es menor o igual que el número designado en el primer grupo de la izquierda.

$$3^3 = 27 < 40 < 64 = 4^3$$

3 será la primera cifra de la raíz. Elevar 3 al cubo y restar de 40.

$\sqrt[3]{40\ 001\ 688}$ — 3**

27

13

Paso 3.

Obtenida la diferencia, se procede a "bajar" el siguiente grupo; el número que se forma (13 001), se divide ÷ 100 y la parte entera (130) se divide entre el triple del cuadrado de la raíz hallada hasta

$\sqrt[3]{40\ 001\ 688}$ — 3**

27

130.01

130 ⌊ 3(3²) = 4

el momento; esto para "aproximar" la siguiente cifra de la raíz (en este caso 4).

El cociente hallado puede ser la siguiente cifra de la raíz (en este caso 4); para comprobar, se eleva al cubo la raíz lograda hasta el momento (34) y se debe obtener un número menor o igual que el formado por los dos primeros grupos.

Como $34^3 = 39\,304 < 40\,001$ recién podemos asegurar que 4 es la siguiente cifra de la raíz; si no se hubiera comprobado esta relación se hubiera tenido que analizar con valores menores que el cociente de la división (nunca una cifra puede sobrepasar al cociente calculado, en todo caso puede ser menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{40\,001\,688} & 34\ * \\ 39\,304 & \overline{130+(3\times3^2)=4} \\ \overline{697} & \end{array}$$

Paso 4.

El cubo de la raíz hallada hasta el momento se resta del número formado por los 2 primeros grupos y obtenida la diferencia se baja el tercer grupo y se repite el paso 2, es decir el número formado (697 688) se divide ÷100 y la parte entera se divide entre el triple del cuadrado de la raíz parcial, para aproximar la siguiente cifra de la raíz (en este caso 2).

Se eleva al cubo la raíz y se debe obtener un número menor o igual que el radicando.

Como $342^3 = 40\,001\,688$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{40\,001\,688} & 342 \\ 39\,304 & \overline{130+3(3)^2=4} \\ 697\,688 & \overline{6976+3(34)^2=2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{40\,001\,688} & 342 \\ -40\,001\,688 & \\ \overline{0} & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{40\,001\,688} = 342$$

Nota: El proceso puede ser continuado después de la coma decimal, para ello se agregan tantos grupos formados por 3 ceros como cifras decimales se quieran calcular.

PROBLEMAS RESUELTOS

Sobre radicación (raíz cúbica)

1. Demostrar la prueba de los nueves para comprobar a extracción de una raíz cúbica.

Demostración:

Sea N un número, A su raíz cúbica en menos de una unidad y R es resto de la operación.
Podemos establecer que: $N = A^3 + R$
La prueba radica en verificar esta igualdad.
Consideremos que sean: p, q y r los restos de la división por 9 de los números N, A y R respectivamente. Entonces:

$$A = \dot{9} + q \Rightarrow A^3 = \dot{9} + q^3 \text{.....(1)}$$

$$R = \dot{9} + r \text{ .....(2)}$$

$$N = \dot{9} + p \text{ .....(3)}$$

(1) + (2) = (3):

$$\dot{9} + q^3 + \dot{9} + r = \dot{9} + p \Rightarrow \dot{9} + p = \dot{9} + (q^3 + r)$$

La diferencia p - (q^3 + r) debe ser $\dot{9}$, y si se dividen por este número los restos deben ser iguales.

2. Hallar la diferencia entre la raíz cúbica aproximada por defecto y la raíz cuadrada aproximada por exceso de 20 con un error menor que 0,2 para ambos casos.

Solución

$$0{,}2 = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[3]{20} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{20x5^3} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{2\ 500} = \frac{13}{5} \quad \text{(defecto)}$$

$$\sqrt{20} = \frac{1}{5}\sqrt{20x5^2} = \frac{1}{5}\sqrt{500} = \frac{23}{5} \quad \text{(exceso)}$$

Nos piden: $\frac{23}{5} - \frac{13}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Rpta. 2

3. El producto de dos números compuestos tiene raíz cúbica exacta e igual a 21. Si el cociente de ellos es un número entero; hallar su diferencia.

Solución

Sean "a" y "b" los números compuestos.

$$\sqrt[3]{a.b} = 21 \rightarrow a \times b = 3^3 \times 7^3 \text{ como } \frac{a}{b} = n \text{ (entero)}$$

$$\therefore a = 3^2 \times 7^2 \wedge b = 3 \times 7 \qquad \therefore a - b = 3 \times 7\,(3 \times 7 - 1) = 420$$

Rpta. 420

4. El residuo por exceso al extraer la raíz cúbica de un número es una unidad mayor que el residuo por defecto. Si ambos residuos suman 1 801; hallar la raíz cúbica por exceso de dicho número.

Solución

Por dato:

$$\sqrt[3]{\begin{array}{|c} N \\ \hline R \end{array}}\ q \quad \Rightarrow N = q^3 + R$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} R' + R = 1\,081 \\ R' - R = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} R' = 901 \\ R = 900 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\begin{array}{|c} N \\ \hline R' \end{array}}\ q+1 \Rightarrow N = (q+1)^3 - R'$$

Por propiedad: $R' + R = 3q(q+1) + 1 = 1\,801 \Rightarrow q(q+1) = 600 = 24 \times 25$

Rpta. $\therefore q = 24 \wedge q + 1 = 25$ (raíz por exceso)

5. ¿Cuántos números existen, tales que al extraerles su raíz cúbica resulte inexacta y se obtiene por residuo; su residuo máximo, siendo este menor que 1 518?

Solución

Sea "q" la raíz cúbica por defecto y (q + 1) la raíz por exceso.

Por propiedad: $R_{máximo} = 3q(q+1)$

Por dato: $3q(q+1) < 1\,518 \Rightarrow 3q(q+1) - 15\,18 < 0$

$3(q+23)(q-22) < 0$

$\Leftrightarrow q < 22$

Rpta. $\therefore q = 1; 2; \ldots\ldots\ldots; 21$. Existen 21 números

6. Hallar el valor de N si sabemos que al extraerle su raíz cúbica se obtiene un residuo máximo y si extraemos la raíz cúbica de N aumentado en 1 801; obtendremos nuevamente un residuo máximo.

Solución

Por condición: $N = k_1^3 - 1 \wedge N + 1\,801 = k_2^3 - 1$. Si añadimos una unidad a los dos números, la diferencia entre ellos va a seguir siendo 1 801 y los dos serán cubos perfectos:

$\therefore\ k_2^3 - k_1^3 = 1\,801$. Si $k_2 = k_1 + a$ tendríamos:

$$(k_1 + a)^3 - k_1^3 = 3a^2k_1 + 3a\,k_1^2 + a^3 = a(3ak_1 + 3\,k_1^2 + a^2) = 1\,801$$

$$= a\left[\underbrace{3k_1(a + k_1) + a^2}\right] = 1\,801 \times 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{luego}: 3k_1(k_1 + 1) + 1 = 1\,801 \Rightarrow k_1(k_1 + 1) = 600 = 24 \times 25 \begin{cases} k_1 = 24 \\ \underbrace{k_1 + 1}_{k_2} = 25 \end{cases}$$

Rpta. $\therefore N = 24^3 - 1 = 13\,823$

7. ¿Cuántos números enteros existen tales que al extraerles su raíz cúbica, ésta resulte inexacta y se obtenga por residuo, su residuo máximo, siendo este menor que 2 466.

Solución

Por condición de residuo máximo:

$\sqrt[3]{N}$ | A

$3A(A+1)$

$3A(A + 1) < 2\,466$

$N = A^3 + 3A(A + 1)$

$A(A + 1) < 822$ $\qquad \sqrt{822} \cong 28$

1	2
2	3
.	.
.	.
.	.
28	29

N tomará tantos valores como valores pueda tomar A, pues A puede tomar 28 valores.

Rpta. $\therefore$ Existen 28 números

8. Si un número es $\overset{\div}{7} + a$. Hallar el valor de "a", sabiendo que al extraerle la raíz cúbica del número, se obtiene por raíz un $\overset{\div}{7} + 5$ y por residuo un $\overset{\div}{7} + 6$.

Solución

$\sqrt[3]{N}$ | A

R

$N = \overset{\div}{7} + a \qquad A = \overset{\div}{7} + 5 \qquad R = \overset{\div}{7} + 6$

Como:

$N = A^3 + R$

$$\dot{\overline{7}} + a = (\dot{\overline{7}} + 5)^3 + \dot{\overline{7}} + 6$$
$$\dot{\overline{7}} + a = \dot{\overline{7}} + 125 + \dot{\overline{7}} + 6$$
$$\dot{\overline{7}} + a = \dot{\overline{7}} + 5 \Leftrightarrow a = 5$$

Rpta. $a = 5$

9. La suma de los residuos por defecto y por exceso de una raíz cúbica es 5167 y el primero excede al segundo en 267. Hallar el número e indicar su residuo entre 5.

Solución

Sea N el número. $\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & A \\ \hline R & \end{array} \Rightarrow N = A^3 + R$.....(1)

Por dato: $R - R' = 267$

Por dato y prop.: $R + R' = 5\,167 = 3(A)(A + 1) + 1$

$\therefore\ R = 2\,717; \quad A = 41$

$\therefore\ N = 41^3 + 2\,717 = 71\,638 = \dot{\overline{5}} + 3$

Rpta. Residuo: 3

10. Hallar cuántos números comprendidos entre 1 000 y un millón existen tales que su raíz cúbica terminen en 6 y su residuo sea 845.

Solución

$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & A \\ \hline 845 & \end{array} \rightarrow \quad N = A^3 + 845 \wedge A = \overline{.....6}$

$1\,000 < N < 1\,000\,000$

También: $1\,000 < A^3 + 845 < 1\,000\,000$

$155 < A^3 < 999\,155$

$5, ... < A < 99, ...$

Como $A = \overline{.....6}$, sólo puede tomar los valores:

6; 16; 26; ...; 96 (10 valores)

Rpta. $\therefore$ Existen 10 números

11. El residuo por exceso al extraer la raíz cúbica de un número mayor es una unidad mayor que el residuo por defecto. Si ambos residuos suman 1801, hallar la raíz cúbica por exceso de dicho número.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} R' - R = 1 \\ R + R' = 1\,801 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = 900 \\ R' = 901 \end{array}\right.$$

Además:

$$R + R' = 3q\,(q + 1) + 1 = 1\,801$$

$$q\,(q + 1) = 600 = 24 \times 25$$

$$q = 24$$

$$N = q^3 + R = (q + 1)^3 - R'$$

Raíz por exceso:

Rpta. $\therefore q + 1 = 25$

12. El producto de 2 números compuestos tiene raíz cúbica exacta e igual a 21. Si el cociente de ellos es un número entero, hallar su diferencia.

Solución

$$\sqrt[3]{\overline{axb}} = 21$$

$$\rightarrow a \times b = 3^3 \times 7^3$$

$$y \ \frac{a}{b} = n \text{ (entero)}$$

como: a y b compuestos:

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3^2 \times 7^2 \\ b = 3 \times 7 \end{array}\right.$$

$$a - b = 3 \times 7\,(3 \times 7 - 1) = 21 \times 20$$

Rpta. $a - b = 420$

13. Hallar el número $\overline{\text{NORMA 1}}$, si se sabe que al extraerle su raíz cúbica se obtuvo $\overline{AN}$ de raíz y $\overline{AN7}$ de residuo. Dar como respuesta N + O + R + M + A.

Solución

$\overline{\text{NORMA 1}} = \overline{\text{AN}}^3 + \text{A}\overline{\text{N7}}$

Para que el resultado termine en 1 $\quad \overline{\text{AN}}^3 = \overline{\ldots\ldots 4} \Leftrightarrow \underline{\text{N} = 4}$

Luego: $\sqrt[3]{\overline{\text{NOR}}} = \text{A} \Rightarrow \sqrt[3]{\overline{4\text{OR}}} = \text{A} \Leftrightarrow \underline{\text{A} = 7}$

$\therefore \overline{\text{NORMA 1}} = 74^3 + 747 = 405\,971$

Rpta. $\text{N} + \text{O} + \text{R} + \text{M} + \text{A} + 1 = 4 + 0 + 5 + 9 + 7 + 1 = 26$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre radicación
Raíz cuadrada

1. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 350 en menos de 2/9?

a) $18\frac{1}{9}$ b) $18\frac{2}{9}$ c) $18\frac{1}{3}$ d) $18\frac{4}{9}$ e) $18\frac{2}{3}$

2. Hallar e valor de $\sqrt{432}$, con error, por exceso, menor de 2/9.

a) $19\frac{6}{7}$ b) 20 c) $20\frac{1}{2}$ d) $20\frac{3}{4}$ e) $20\frac{8}{9}$

3. Extraer la raíz cuadrada de 3 007, con un error, por defecto, menor de $\frac{1}{8}$.

a) $54\frac{6}{8}$ b) $53\frac{1}{8}$ c) $54\frac{3}{11}$ d) 54 e) $53\frac{3}{8}$

4. Hallar la raíz cuadrada de 3 078, con un error, por defecto, menor que 5/12.

a) $55\frac{1}{3}$ b) $55\frac{5}{12}$ c) $55\frac{7}{11}$ d) 55 e) N.A.

5. Hallar el valor de $\sqrt{\frac{51}{73}}$ con un error, por defecto, menor que $\frac{1}{11}$.

a) $\frac{7}{11}$ b) $\frac{8}{11}$ c) $\frac{9}{11}$ d) $\frac{10}{11}$ e) N.A.

6. ¿Cuántos números pares al extraerles su raíz cuadrada por defecto con 1/5 de aproximación se obtiene 12,4.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 4 e) 3

7. Hallar un número entero sabiendo que al extraer su raíz cuadrada por defecto y por exceso: se obtiene como suma de sus raíces 47 y por diferencia de sus residuos 7. Dar como respuesta la suma de las cifras del número, si este es el mayor posible.

a) 12 b) 16 c) 17 d) 20 e) 8

8. Hallar la raíz cuadrada de la siguiente expresión:

$$E = 12321_{(30)} + 2320_{(30)}$$

a) 961 b) 900 c) 343 d) 1444 e) 121

9. Hallar a x b si :

$$\overline{ab} = \sqrt{(a+b)^3}$$

a) 8 b) 14 c) 24 d) 15 e) 24

10. Hallar el valor de:

$$E = \sqrt{1\underbrace{000.....00}_{\text{"n" ceros}}\ 4\underbrace{00.....004}_{\text{"n" ceros}}}$$

Dar como respuesta, la suma de sus cifras.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11. Si al extraer la raíz cuadrada de $\overline{abca}$ por defecto, se obtiene como raíz $\overline{d1}$ y como residuo $\overline{a2}$. Hallar (a + b + c + d).

a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

12. ¿Cuántos números de cuatro cifras existen tales que al extraer su raíz cuadrada se obtiene por raíz y por residuo un mismo número?

a) 66 b) 67 c) 68 d) 69 e) 70

13. Hallar "a" sabiendo que al extraer la raíz cuadrada al número: $\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)}$ se obtiene por raíz: $\overline{aa}$ y por residuo: $\overline{(a+2)(a+2)}$. Hallar cuántos divisores tiene el número: $\overline{(a-2)(a-2)(a-2)(a-2)}$

a) 6 b) 2 c) 8 d) 16 e) 4

14. En el proceso de extracción de la raíz cuadrada de un número que es $\dot{7} + 6$, se obtuvo una raíz por defecto que es $\dot{7}$ y un residuo por defecto que es de la forma $\overline{aa}$. Hallar "a".

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Raíz cúbica:

15. Los siguientes números son cubos perfectos: 9 7336; 314 432; 551 368. Determinar la suma de las raíces cúbicas de estos números.

a) 186 b) 204 c) 146 d) 174 e) 196

16. ¿Cuál es la raíz cúbica de 3 520 en menos de 2/7?

a) $\frac{101}{7}$ b) $\frac{106}{7}$ c) $\frac{104}{7}$ d) $\frac{93}{7}$ e) N.A.

17. Hallar la raíz cúbica de: $\overline{16\gamma 8}_{(n)}$. Dar la respuesta en base "n".

a) 10 b) 11 c) 21 d) 12 e) El número no tiene raíz cúbica exacta

18. Sabiendo que el número: $\overline{aa(a+1)(a-1)(a+1)(a+1)}$ tiene raíz cúbica exacta. Hallar la suma de la raíz cúbica más "a".

a) 98 b) 99 c) 100 d) 101 e) 102

19. Si: $\overline{a3b}^{3} = \overline{40p5q349}$. Hallar a + b.

a) 13 b) 17 c) 15 d) 14 e) 16

20. Si $\overline{ab}$ es la raíz cúbica del cubo perfecto $\overline{abcd8}$, hallar a + b + c + d.

a) 17 b) 18 c) 15 d) 21 e) 11

21. Extraer la raíz cúbica y la raíz cuadrada del número: $N = \overline{a(a+2)(a+2)(a+1)(a+2)}$ si son exactas. Dar como respuesta la suma de dichas raíces.

a) 218 b) 205 c) 252 d) 260 e) 180

Clave

1. c	12. b
2. b	13. b
3. b	14. c
4. a	15. b
5. c	16. a
6. d	17. a
7. d	18. c
8. a	19. d
9. c	20. e
10. b	21. e
11. c	

Capítulo 14

Patrones primarios en los que se funda la validez universal de todas la medidas mecánicas: el metro, distancia a 0°C entre dos trazos paralelos marcados sobre la barra de platino-iridio conservada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sévres (París); el kilogramo-masa, masa del bloque de platino indio conservado en el mismo lugar, el segundo solar medio, 86.400ª del día solar medio, que es 1/365 242 del año trópico, intervalo entre dos equinoccios de primavera, o sea la 86.164ª parte del día sedéreo, intervalo entre dos pasos de una misma estrella por un meridiano determinado

SISTEMAS DE MEDIDAS

Definida una operación de medida, se dispone de una serie de órdenes, las divisiones de una escala y de un método para asignar cada resultado a un orden, sin ambigüedad. La física bebe de esta fuente las informaciones básicas, punto de partida y de llegada de su misión.

El nombre de las magnitudes físicas -como masa, longitud y tiempo- son nombres propios de otras tantas operaciones de medida. Usando instrumentos establecidos, siguiendo un rígido protocolo y refiriéndose a un patrón al que se ha llegado por acuerdo Universal, se obtienen mediante las medidas resultados válidos para todos, porque son comprobables por cualquiera; no porque se repitan exactamente, sino porque su alejamiento de un valor central depende solamente del accidente fortuito. No se han abolido los errores, ni siquiera en las medidas más precisas, pero el riesgo de cometerlos es constante y previsible.

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DEL PERU

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene la intención de proporcionar a los estudiantes del Centro Pre Universitario los conocimientos básicos en relación a los cambios que se establece en el SI (SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES).

Dado que nuestro país, por LEY 23560[1], ha aceptado este sistema, se hace necesario poner cuidado para asegurar que se use la terminología correcta y que se apliquen prácticas uniformes, para eliminar errores y facilitar el intercambio de conocimientos y mediciones.

El propósito básico, pues, de este capítulo, es hacer conocer el SI a nuestro estudiantado, tarea que le será facilitada por el hecho de haber ya estudiado el SISTEMA METRICO DECIMAL, lo que permitirá poner en relieve las diferencias entre ellos.

Antes de empezar la explicación de las diferentes normas que constituyen la forma de utilización del SI, debemos tratar de contestar la siguiente interrogante:

¿PORQUE LA COMA (,) COMO MARCADOR DECIMAL?[2]

Las razones por las cuales se escogió la COMA (,) como signo para separar en un número la parte entera de la decimal pueden considerarse, en cierta forma, como un cúmulo de razones sencillas y hasta un tanto humildes en su concepción individual.

Sin embargo, todas ellas en conjunto explican porque la coma fue escogida como signo ortográfico en la escritura de números:

01. La coma es reconocida por la ORGANIZACION INTERNACIONAL DE NORMALIZACION - ISO - (esto es, por alrededor de 90 países de todo el mundo) como único signo ortográfico en la escritura de números.

02. La importancia de la coma para separar la parte entera de la decimal, es enorme. Esto se debe a la esencia misma del Sistema Métrico Decimal; por ello debe ser visible, no debiéndose perder durante el proceso de ampliación o reducción de documentos.

03. La grafía de la coma se identifica y distingue mucho más fácilmente que la del punto.

---

(1) LEY N°23560

Establécese, por la presente Ley, el SISTEMA LEGAL DE MEDIDA DEL PERU, cosntituido por:

A. Las unidades del SISTEMA INTERNACIONAL (SI), compuesto por unidades básicas, suplementarias y derivades.
B Los múltiplos y submúltiplos decimales del mencionado Sistema.

A partir del **PRIMERO DE ENERO DE 1985** será obligatoria la enseñanza del SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DEL PERU en todos los centros y niveles del Sistema Educativo.

(2) Texto tomado de la GUIA PARA LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI), editado por el Instituto de Investigación Tecnológica Industrial y de Normas Técnicas (ITINTEC).

04. La coma es una grafía que, por tener forma propia, demanda del escritor la intención de escribirla; el punto puede ser accidental o producto de un descuido.

05. El punto facilita el fraude; puede ser transformado en coma, pero no viceversa.

06. En Matemática, Física y, en general en los campos de la Ciencia y de la Ingeniería, el punto es empleado como signo operacional de multiplicación.

Esto podría llevar a error o causar confusión; no es recomendable usar un mismo signo ortográfico para dos propósitos diferentes.

07. En nuestro lenguaje común, la coma separa dos partes de una misma frase, mientras que el punto detalla una frase completa.

Por consiguiente y teniendo esto en cuenta, es más lógico usar la coma para separar la parte entera de la parte decimal de una misma cantidad.

08. Es una regla estricta que el marcador decimal debe tener siempre, por lo menos, una cifra a su izquierda y a su derecha. Sin embargo, en países donde se usa el punto como marcador decimal, se escribe, muy a menudo, expresiones como:

.25 en vez de lo correcto 0.25

Esta forma incorrecta de escribir números decimales puede tener consecuencias muy graves, por ejemplo:

Si un doctor prescribe .25 mg. en una receta y no marca claramente el punto, la enfermera o el farmacéutico puede fácilmente leer 25 mg. y como consecuencia puede preparar para el paciente una dosis cien veces mayor de la medicina recetada, lo cual podría ocasionarle, inclusive, la muerte. Si el doctor hubiera escrito 0.25 mg. esto no pasaría; aún en el caso de no haber escrito con claridad el punto, se leería 0 25 mg. grafía que inmediatamente y por su misma naturaleza hace comprender que el marcador decimal no se ha escrito.

En los países métricos donde se usa la coma como separador decimal, el caso anteriormente descrito es prácticamente imposible que se de ya que la coma es una grafía mucho más visible y fácil de identificar.

09. Una de las más importantes razones para aceptar el Sistema Internacional de Unidades -SI-, que no es otra cosa que el Sistema Métrico Decimal modernizado, es el de facilitar el comercio y el intercambio de conocimientos e informes en un mundo métrico.

La coma se usa como marcador decimal en toda Europa continental y en casi toda Sud-América.

Al adoptar la coma, pues, se adopta una práctica aceptada mundialmente, lo que nos permite usufructuar, sin confusiones ni dudas, el intercambio mundial de ciencia y experiencia.

10. Por último y como razón anecdótica, no nos olvidemos de las moscas ... el " recuerdo " que ellas dejan de su paso es y ha sido siempre un punto: no conocemos ningún caso(desde que la humanidad conoció la escritura) en que la señal de su paso haya sido una coma.

VENTAJAS DE LA UTILIZACION DEL SI Y SLUP[3]

Las ventajas de la utilización del SI se mencionan a continuación:

- ❑ Racionaliza, sistematiza y simplifica el proceso de educación, porque es más fácil de enseñar, aprender y recordar que cualquier otro sistema de unidades de medida.
- ❑ Racionaliza la inscripción de ecuaciones y fórmulas.
- ❑ Incrementa la utilización internacional de textos, material didáctico y educativo.
- ❑ Facilita la investigación y el desarrollo armónico de la ciencia y la técnica.
- ❑ Perfecciona los métodos y medios de medición.
- ❑ Facilita el intercambio de información científica y técnica.
- ❑ Posibilita una mayor standarización y normalización internacional de productos en general, maquinarias, equipos y medios de medición.
- ❑ Facilita el manejo de datos a través del computador.
- ❑ Facilita la contabilidad y el control, produciéndose así una reducción en el desperdicio de los recursos.
- ❑ La adopción del SLUP facilitará el ingreso de los productos peruanos en los mercados de exportación.

Todas las ventajas del SI (que también son del SLUP, se pueden resumir en la siguiente frase:

> El SI es un sistema sencillo, práctico y coherente.

MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS DECIMALES EN EL SI

Para escribir los números decimales los cuales pertenecen a medidas que sean múltiplos o submúltiplos de otras medidas, se agrupan en grupos de tres (3).

Ejemplo

763 km	763 000 m
$5{,}87 \times 10^{-7}$m	0,000 000 587 m

[3] Texto tomado de la GUIA PARA LA UTILIZACION DEL SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DE MEDIDA DEL PERU (SLUP), editado por el ITINTEC (Servicio Nacional de Metrología - DAL -).

En el siguiente cuadro se detalla los prefijos que se utilizan preferentemente en el SI:

	PREFIJO	FACTOR	SIMBOLO	VALOR NUMERICO
Para formar múltiplos decimales de las unidades de medida del SI	exa	10^{18}	E	1 000 000 000 000 000 000
	peta	10^{15}	P	1 000 000 000 000 000
	tera	10^{12}	T	1 000 000 000 000
	giga	10^{9}	G	1 000 000 000
	mega	10^{6}	M	1 000 000
	kilo	10^{3}	K	1 000
Para formar submúltiplos decimales de las unidades de medida SI	mili	10^{-3}	m	0,001
	micro	10^{-6}	m	0,000 001
	nano	10^{-9}	n	0,000 000 001
	pico	10^{-12}	p	0,000 000 000 001
	femto	10^{-15}	f	0,000 000 000 000 001
	atto	10^{-18}	a	0,000 000 000 000 000 001

Otros prefijos SI

	PREFIJO	FACTOR	SIMBOLO	VALOR NUMERICO
Para formar múltiplos decimales de las unidades de medida del SI	hecto	10^{2}	H	100
	deca	10^{1}	D	10
Para formar submúltiplos decimales de las unidades de medida SI	deci	10^{-1}	d	0,1
	centi	10^{-2}	c	0,01

MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS

Los múltiplos y submúltiplos de una unidad principal se forman anteponiendo al nombre de la unidad principal, los siguientes prefijos:

MEDIDAS DE LONGITUD

SUBMULTIPLOS DEL METRO

Decímetro	d	$10^{-1} = 0.1$
Centímetro	c	$10^{-2} = 0.01$
Milímetro	mm	$10^{-3} = 0.001$
Decimilímetro	dmm	$10^{-4} = 0.0001$
Centimilímetro	cmm	$10^{-5} = 0.00001$

micrometro	μ	10^{-6} = 0.000001
nanometro	η	10^{-9} = 0.000000001
picometro	ρ	10^{-12} = 0.000000000001
femtomentro	f	10^{-15} = 0.000000000000001
attometro	a	10^{-18} = 0.000000000000000001

1 metro = 1'650,763.73 λ Kr_{86}

MULTIPLOS DEL METRO

Decámetro	D	10^{1} = 10 metros
Hectómetro	H	10^{2} = 100 metros
Kilómetro	K	10^{3} = 1000 metros
Miriámetro	M	10^{4} = 10000 metros
Hecto-Kilómetro	HK	10^{5} = 100000 metros
Mega-metro	M	10^{6} = 1000000 metros
Giga-metro	G	10^{9} = 1000000000 metros
Tera-metro	T	10^{12} = 1000000000000 metros

MEDIDAS DE SUPERFICIE

1 Miriámetro cuadrado	$(Mm)^2$	=	100'000,000 metros cuadrados
1 Kilómetro cuadrado	$(Km)^2$	=	1 000,000 metros cuadrados
1 Hectómetro cuadrado	$(Hm)^2$	=	10,000 metros cuadrados
1 Decámetro cuadrado	$(Dm)^2$	=	100 metros cuadrados
1 Metro cuadrado	$(m)^2$	=	1 metro cuadrado
1 decímetro cuadrado	$(dm)^2$	=	0.01
1 centímetro cuadrado	$(cm)^2$	=	0.0001
1 milímetro cuadrado	$(mm)^2$	=	0.000001

Se tienen además las medidas agrarias empleadas en las mediciones de campos.

1 área	= a	=	100 m^2
Múltiplos - Hectárea	= Ha	=	10,000 m^2
Submúltiplo - Centiárea	= Ca	=	1 m^2

MEDIDAS DE VOLUMEN

No se utilizan múltiplos

1 Metro cúbico	= m^3	= 1	de metros cúb.
1 decímetro cúbico	= dm^3	= 0.001	" "
1 centímetro cúbico	= cm^3	= 0.000001	" "
1 milímetro cúbico	= mm^3	= 0.000000001	" "

MEDIDAS DE CAPACIDAD

1 Mirialitro	=	Ml	=	10000	litros
1 Kilolitro	=	Kl	=	1000	litros
1 Hectolitro	=	Hl	=	100	litros
1 Decalitro	=	Dl	=	10	litros
1 litro	=	l	=	1	litros
1 decilitro	=	dl	=	0.1	litros
1 centilitro	=	cl	=	0.01	litros
1 mililitro	=	ml	=	0.001	litros

MEDIDAS DE PESO

1 Tonelada métrica	=	1'000,000 de gramo
1 Quintal métrico	=	100,000 de gramo
1 Miriagrmo	=	10,000 de gramo
1 Kilogramo	=	1,000 de gramo

HUSOS HORARIOS:

Un HUSO HORARIO es una porción de superficie terrestre limitada por dos meridianos, cuyas longitudes difieren en 15°. El primer huso de extiende desde el meridiano de longitud 7°30'(o) al meridiano de longitud 7°30'(E).

Este mecanismo de la hora internacional que regula las diferentes horas en los distintos países y ciudades del mundo. Está en relación directa con el movimiento astronómico de rotación de nuestro planeta.

El conocimiento y estudio de los husos horarios es importante y útil, a la vez que fácil, pues sólo hay que disponer de un mapamundi para establecerlos. Sin embargo es recomendable tener mapas con la distribución de las horas, en razón de que algunos países han establecido modificaciones en sus respectivas zonas horarias.

Como se sabe, el tiempo que permanece la mitad del globo terrestre iluminado por el sol de llama día y el tiempo que permanece en tinieblas la otra mitad se llama noche.

Días y noches se van sucediendo incesantemente por la rotación, pues aunque la Tierra nos parece inerte, en realidad gira a razón de 465 metros por segundo en el Ecuador, y en su movimiento de traslación alrededor del sol avanza más de 29,000 metros por segundo. Sin embargo, a causa de sus gigantescas dimensiones nosotros no sentimos estas grandes velocidades.

Se sabe que longitud angular es la distancia de cualquier punto al meridiano de Greenwich y latitud, es la distancia angular de cualquier punto al Ecuador.

En 24 horas la tierra da una vuelta completa alrededor de su eje, lo que permite establecer las siguientes relaciones entre longitud angular y tiempo.

Tiempo		Longitud
24 horas	<>	360°
1 hora	<>	15°
1 hora	<>	60'min.
60 min.	<>	15 x 60'
1 min.	<>	15'
1 seg.	<>	15"

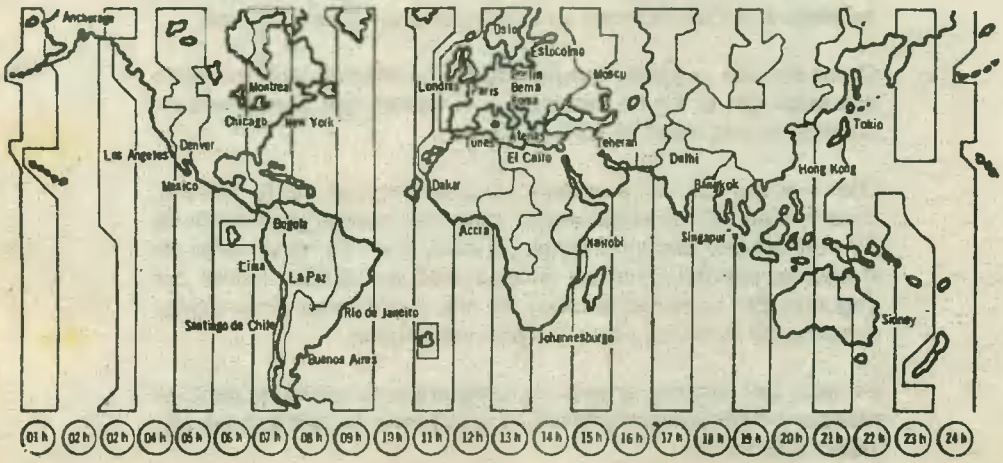
En el mismo hemisferio

$$\text{diferencia de horas} = \frac{\text{diferencia de longitudes}}{15}$$

En distinto hemisferio

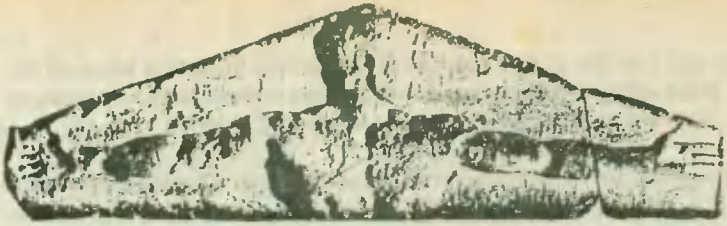
$$\text{diferencia de horas} = \frac{\text{suma de longitudes}}{15}$$

DIFERENCIA DE HORARIO



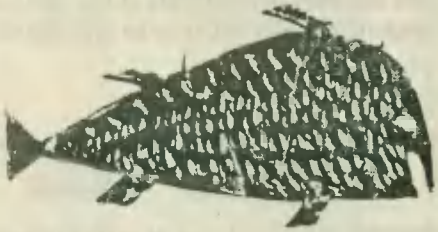
El Creador midiendo el mundo,
miniatura.
De una biblia francesa
de mediados del Siglo XIII,
conservada en la Biblioteca
Nacional de Viena.

En el juicio del muerto que tiene lugar ante Osiris y los jueces, se pone el corazón del difunto en un plato de la balanza: en el otro plato, como unidad de medida se encuentra la pluma, o sea el jeroglífico de la diosa de la Rectitud. Si el corazón está cargado de pecados hará pender la balanza de su lado. Entre otros, asisten a la operación el dios Horus, con cabeza de halcón, el cual trata de aligerar el plato donde descansa el corazón, y el dios Anubi, con cabeza de chacal, el cual rectifica la puesta a punto de la balanza controlando mediante una plomada que el fiel de ésta quede rigurosamente derecho. Esta escena representada en un papiro del Libro de los Muertos (año 700 a.C.), se halla en todos los ejemplares de este texto desde comienzos del Imperio Nuevo (1550 a.C.).

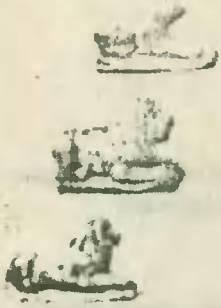


Las unidades de longitud más antiguas se referían a la dimensiones de determinadas partes del cuerpo humano (dedo, codo, brazo y pie); para dar a las medidas un valor universal, éstas se debían fijar en objetos patrones. Este relieve griego del año 460-450 a.C. es precisamente un patrón de longitud; representa el brazo, o mejor dicho un doble brazo (longitud equivalente a 2,13 m.), y el pie, esculpido en la parte superior izquierda

Pesa de bronce en forma de pececillo usado en la Costa de Oro por los Ashanti.



Pesas asirias de bronce en forma de león del siglo VIII a.C.



Unidades de tiempo:

Las unidades naturales son el año y el día. El año solar es el tiempo que invierte la tierra en dar una vuelta alrededor del sol; y el día **solar** es el tiempo que invierte el sol en pasar en su movimiento aparente, dos veces consecutivas por el meridiano visible de un mismo lugar.

Como los días solares son desiguales, se ha adptado como día solar medio el promedio de todos los días del año, de manera que se imagina un sol ficticio, el cual es el que sirve para medir el tiempo.

Para grandes intervalos de tiempo se toma por unidad el año y sus múltiplos: el lustro o quinquenio (5 años), el siglo (100 años) y otros menos usados.

Para pequeños intervalos de tiempo se fracciona el día en 24 partes, llamadas horas; la hora se divide en 60 minutos, y e minuto en 60 segundos. Las fracciones de segundo se aprecian en décimas y centésimas. Para distinguir estos minutos y segundos de tiempo de los de arcos se designan con sus iniciales, así como las horas, de modo que un intervalo de tiempo de 6 horas 8 minutos, 20 segundos y tres décimas se representará así: $6^h8^m20^s,3$.

Calendarios:

La razón del año solar al día medio no es entera, sino que vale:

365,2422...

y por eso se consigna el año civil, que es un período compuesto de 365 días [año ordinario o de 366 días (año bisiesto)], que se distribuyen en meses, en la forma, de todos conocida.

Tomando todos los años de 365 días, al cabo de 4 años se tendrá un error de 4 x 0,2422... = 0,9688, y por eso, par compensar este error se tomó en el Calendario Juliano, cada cuatro años un año bisiesto, es decir un día más, que se añade al mes más corto, o sea febrero; pero la compensación es excesiva en 0,0311 de modo que al cabo de 400 años se cometería un error de 3,11 días; para evitarlo, basta suprimir tres bisiestos cada cuatrocientos años.

Esta es la reforma **GREGORIANA**, que suprimió como bisiestos todos los finales de siglo; es decir, los que tienen un número exacto de centenas, excepto cuando ese número de centenas es múltiplo de 4; por lo tanto, de los finales de siglo fue bisiesto el 1600, y lo será 2000, pero no lo han sido 1700; 1800; 1900.

ORIGEN DE LOS NOMBRES DE LOS MESES

Enero:

Del latín **ienarius**, por **ianuarius**, o sea, **Jano**, el dios de las dos caras, una adelante y la otra atrás, encargado de vigilar las puertas del tiempo, ya que podría ver el pasado y el porvenir.

Febrero:

Del latín **februarius**, de **februare**, purificar por alusión a las fiestas en que los sacerdotes romanos golpeaban con correas (februum) las espaldas de las mujeres para purificarlas. Estaba consagrado a Neptuno.

Marzo:

Del latín **martius**, en honor de Marte, dios de la guerra, a quien Rómulo, al fundar la ciudad de Roma, consagró este mes, que era el primero del año en el antiguo calendario romano de diez meses.

Abril:

Del latín **aprilis**, según Ovidio, derivado de **aprire**, abrir, porque es la época en que comienzan a abrir las plantas. Según otros, deriva del nombre griego de la diosa Venus -Afrodita- a la que lo habían consagrado los romanos.

Mayo:

Del latín **maius**, en honor de Maya, hija de Atlas, a la que los romanos lo habían consagrado.

Junio:

Del latín **iunius**, de **Juno**, la esposa de Júpiter, rey de todos los dioses, a la que los romanos lo consagraron.

Julio:

En el antiguo calendario romano de diez meses se llamaba **quintilius**, por que era el quinto mes del año y estaba consagrado a Júpiter, pero el reformar el calendario Julio César, quiso dar su nombre al mes, consagrado, precisamente al dios de los dioses, y le llamó **iulius**, julio.

Agosto:

Era en el antiguo calendario el sexto mes del año. En la reforma de Julio César quedó con treinta días, conservando su nombre de **sextius**, pero al suceder a Julio César el emperador Octavio, a quien se llamó Augusto, no quiso ser menos que su predecesor y escogió, y le dio su nombre, **augustus**. Y para no ser menos que César le puso treinta y un días, restándole uno a febrero.

Septiembre, octubre, noviembre y diciembre:

Conservaron sus antiguos nombres derivados de **september, october, november y december**, séptimo, octavo, noveno y décimo mes del antiguo calendario romano.

Unidades náuticas

Las medidas de longitud usadas en náutica están muy relacionadas con la división de la circunferencia, cosa natural, por ser arcos de circunferencia terrestre las longitudes que se pueden medir indirectamente al navegar, mediante la observación de los astros y la medida del tiempo.

LA MILLA MARINA:

Es la longitud de un arco de meridiano de amplitud un minuto sexagesimal, de modo que cada grado del meridiano tiene 60 millas y el cuadradante de la circunferencia terrestre mide: 60 x 90 = 5 400 millas.

Puesto que el cuadrante terrestre mide, aproximadamente 10 000 000 m., un grado del meridiano tendrá: 10 000 000 ÷ 90; es decir aproximadamente 111 111 m. y un minuto tendrá: 111 111 m. ÷ 60; es decir aproximadamente 1 852m., de modo que éste es el valor aproximado de la milla marina.

Se emplea con frecuencia un múltiplo de la milla: la legua marina = 3 millas marinas.

En el grado terrestre habrá, pues, 20 leguas, por eso se dice también: legua 20 al grado. También se usa el nudo, submúltiplo de la milla: 120 nudos = 1 milla. La longitud en metros del nudo será, pues, de 1852 ÷120, o sea arpoximadmente unos 15 metros cada medio minuto.

SISTEMA INGLES DE MEDIDAS

Longitud

1 yarda imperial = 3 pies = 0,914m. = 914mm.
1 pie = 12 pulgadas = 30,48cm. = 0,3048m.

Medidas itinerarias

1 Milla terrestre = Statute mille = s.m = 1 609m.

Superficie

1 yarda cuadrada = square - yard = (sq-yd) = 0,83616m^2
1 pie cuadrado = square - foot = (sq-ft) = 0,09290m^2
1 pulgada cuadrada = square - inch = (sq-in) = 0,0006452m^2

$1m^2$ = 1550 (sq-in) = 10,7639 (sq-ft) = 1,19599 sq-yd

Volumen

1 yarda cúbica = cubic. - yard = (cu-yd) = 0,764559m^3
1 pie cúbico = cubic. - foot = (cu-ft) = 0,028317m^3
1 pulgada cúbica = cubic. - inch = (cu-in) = 0, 000016387m^3

$1m^3$ = 81023 (cu-in) = 35,31 (cu-ft) = 1,308 (cu-yd).

El circular mil.

Para medir el área de la sección transversal de un alambre de electricidad se usa una unidad llamada "circular mil". Se llama "circular mil" al área de un círculo cuyo diámetro es una milésima de pulgada.

Un circular mil = 1 cir-mil = 0.000 5067 mm^2

Circular inch

Es el área de un círculo cuyo diámetro es una pulgada.

1 circular inch = 1000000 cir-mils = 506.7 mm^2

El acre

Medida de superficie en los países anglosajones, que es igual a 4 047 m^2. Por tanto, una hectárea equivale a 2.47 acres. Esta medida fue adoptada en tiempos remotos para representar la superficie de tierra que un arado podía roturar en un día de labor. De esta voz derivan el acre-pie, que es la cantidad de agua que puede cubrir un acre hasta alcanzar la altura de un pie, y el acre-pulgada, que es la masa de dicho líquido necesaria para llegar al nivel de una pulgada.

1 acre = 43560 (sq-ft) = 4047 m^2

Medidas de capacidad: el galón americano y el galón inglés.

En EE.UU

1 gallón	=	4 Quarts	=	3.785	litros
1 quart	=	2 pints	=	0.946	litros
1 pint	=	4 Gills	=	0.473	litros
1 gill	=	4 Ounces	=	0.118	litros
		1 Ounce	=	0.029	litros

1 litro = 0.264 galones
1 cubic-foot = 7.4805 galones. USA

En Inglaterra

El galón usado en Inglaterra tiene mayor capacidad que el de EE.UU. Los submúltiplos son los mismos.

1 gallón inglés = 4.546 litros

1 gallón inglés = 1.2 galones americanos.

Medida de peso.

Los americanos e ingleses usan tres sistemas para medidas de peso: el sistema "avoir dupois", el sistema "troy" y el sistema "apothecaries". En los tres sistemas la unidad común fundamental es el grano (grain).

1 grano = 0.0648 gramos

1 gramo = 15.432 granos

El sistema "avoir dupois"

El sistema "avoir dupois" es el más utilizado y se le emplea para todo los artículos y mercaderías. El sistema "troy" es usado para metales nobles. El sistema "apothecaries" es usado en farmacia.

Sistema "avoir dupois"

1 tonelada larga	=	long ton	=	2240 lb.	=	1016.05 kgr.
1 tonelada corta	=	short ton	=	2000 lb.	=	907.185 Kgr.
1 quintal	=	cental	=	100 lb	=	45.359 Kgr.
1 libra	=	pound	=	16oz.	=	453.592 gramos.
1 onza	=	ounce	=	16 dr.	=	28.35 gramos.
1 dracma	=	dram	=	27.3 gr.	=	1.769 gramos
1 grano	=	grain	=	1 gr.	=	0.0648 gramos.

Nota: En Inglaterra el Sistema avoir dupois tiene las siguientes variantes:

1 long ton = 20 hundreweight = 20 (cwt) = 2240 lb. = 1.016.05 kgr.
1 hundreweight - 4 quartes = 112 lb. = 50.802 Kgr.
1 quarter = 2 stone = 28 lb. = 12.700 Kgr.
1 stone = 14 pound = 6.350 Kgr.
1 pound = 453.59 gr.

Sistema Troy

1 pound = 1 lb. = 12 ounces = 373.248 gramos
1 ounce = 1 oz. = 20 pennyweight = 31.104 gramos
1 pennyweight = 1 dwt = 24 grains = 1.555 gramos
1 grain = 0.0648 gramos

Sistema Apothecaries

1 libra	=	1 pound	=	12 onzas	=	373.248 gramos
1 onza	=	1 ounce	=	8 dracmas	=	31.104 gramos
1 dracma	=	1 dram	=	3 escrupulos	=	3.888 gramos
1 escrupulo	=	1 scrupule	=	20 granos	=	1.296 gramos
				1 grano	=	0.0648 gramos

Nota fundamental:-

En la mecánica para pedir fuerzas se usa como unidad la libra "avoir dupois". Se debe entonces tener muy presente que:

1 libra = 0.454 Kgr.
1 Kgr. = 2.205 libras

Medida de la madera:

Se utiliza el "foot-board-meausure" llamado impropiamente **"pie cuadrado"**
El "foot-board-meausure: ϕ " es una medida cúbica:

ϕ = porción de madera de 1 pie de largo, 1 pie de ancho y 1 pulgada de espesor.

ϕ = 1foot x 1 foot x 1 inch

ϕ = 12 pulg. x 12 pulg. x 1 pulg.

ϕ = 144 pulg^3

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SISTEMAS DE MEDIDAS

Observaciones Previas

* Evidentemente, lo primero para poder resolver los problemas relativos a este Capítulo, es conocer las distintas unidades de medida y sus respectivas equivalencias.

* Dominar la conversión de unidades.

1. ¿Cuántos días hay desde el 25 de Febrero de 1898 hasta el 15 de marzo de 1926 (contando inclusive los extremos).

Solución

En 1898 28 - 24 + (365 - 31 - 28) = 310. En 1899 - 1925 = 365 x 27 = 9855. Año bisiesto: 1904 - 1924 $\Rightarrow$ 6
En 1926: 31 + 28 + 15 = 74 $\Rightarrow$ habrán transcurrido: 310 + 9855 + 6 + 74 = # total = 10 , 245 días.

Rpta. 10 245 días.

2. Si contamos 5,163 días a partir de las 12 horas del día 13 de Enero de 1954, el último día terminará a las 12 horas de un día.

Solución

5163 = 14 años + 53 días .
Pero 56 - 60 - 64 son los bisiestos
$\therefore$ Habrán transcurrido: 14 años + (53 - 3) días.

13 de En + 50 ds. = $\overbrace{13}^{\text{En}} + (\overbrace{18}^{\text{Feb}} + \overbrace{29}^{\text{Mar}} + 3)$

Rpta. El últ. día será a las 12 h. del 3 de marzo de 1968.

3. Ciento quince acres ¿a cuántos km. cuadrados equivale?

Solución

1 acre = 4,046m^2

115 acres = 465,290m^2 = 0.465 km^2

4. Decir cuantas proposiciones son verdaderas:

a) Un acre es menor que un área.
b) Si la ma. de un grupo de números es mayor que la m.a. de otro grupo entonces cualquier número del 1er. conjunto es mayor que cualquiera del 2do.
c) Si de un grupo de números quitáramos uno cualquiera la ma. del grupo siempre disminuye.
d) El año 2,500 será un año bisiesto.

Solución

F F F F

Rpta. N.A

5. Un bloque de madera pesa 60 libras, hallar su volumen expresado en pies cuadrados si el peso específico de la madera es de 120 lb./pies^3

Solución

$$V = \frac{M}{r} = \frac{60lb}{120lb/pie^3} = \frac{1}{2}pie^3 = p$$

1 pie cuadrado <> 144 pulg^3

$$\#\ pies\ \frac{1}{2}\cdot\frac{12^3 pulg.^3}{144 pulg.^3} = 6$$

Rpta. 6

6. Un barco recorre cierta distancia a una velocidad de 231.5 metros/minuto a la ida, y regresa a 277.8 mts/min. Hallar cuál es su velocidad media en nudos.

Solución

277.8 m/m = 9 nudos

231.5 m/min = 7.5 nudos

$$V = \frac{e}{t} \qquad t = \frac{R}{v}$$

$$V\ media = \frac{e+e}{\frac{e}{9}+\frac{e}{7,5}}$$

Rpta. 8.18 nudos.

7. Los lados de un paralelepípedo miden 45.72 cm., 38.1 cm y 22.86 cm., si se incrementa cada lado en 7.62cm. Hallar en cuántos pies cúbicos aumenta su volumen aproximadamente.

Solución

47.52cm. = 3/2 pies
38.1 cm. = 5/4 pie
22.86cm. = 3/4 pie 7.62cm. = 1/4 pie

$$\text{V inicial} = \frac{3}{2} x \frac{5}{4} x \frac{3}{4} = \frac{45}{32} \text{pie}^3$$

$$\text{V final} = \left(\frac{3}{3}+\frac{1}{4}\right) x \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right) x \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{8}$$

$$\text{Aumenta:} = \frac{21}{8} - \frac{45}{32} = 1{,}22 \text{ pie}^3$$

8. A cuánto equivale 0.867 km. cuadrados de superficie en medidas agrarias.

Solución

$0.867 \text{ km}^2 = 0.867 \times (10^3 \text{m})^2 = 867.000 \text{m}^2 = 86$ Ha 70 áreas

Rpta. 86 Ha 70 áreas.

9. Si un tanque lleno de agua pesa 0.81828 Tn. métricas hallar su volumen expresado en galones ingleses.

Solución

$$V = \frac{M}{P} = \frac{818 \cdot 28 \text{kg}}{1 \text{kg/lt}} = 818.28 \text{ lts.}$$

pero: 1 galón Ingles <> 4, 546 litros $\quad \frac{818,\ 28}{4,\ 546} = 180$

Rpta. 818.28 lt. = 180 gal. ingleses.

10. Decir cuantas proposiciones son verdaderas:

a) Un acre es menor que un área.
b) Si la ma. de un grupo de números es mayor que la ma. de otro grupo de números entonces cualquier número del 1er. conjunto es mayor que cualquiera del 2do.
c) Si de un grupo de números quitamos uno cualquiera, la ma. del grupo siempre disminuye.
d) El año 2,500 será un año bisiesto

Solución

F F F F

11. Se compra una tela a S/.20,900 la vara, ¿a cuánto se deberá vender el metro, si se desea ganar S/.4,570 por yarda?

Solución

S/.20,900 _____ 836mm. $x = \frac{20900 \times 1000}{836} = S/.25\ 000$

x _____ 1000 mm = 1m

Costo de 1 metro = S/.25,000

Ganancia:

S/.4,570 _____ 1 yarda (914mm) $x = \frac{4570000}{914} = S/:5,000$

x _____ 1 metro (1000mm)

∴ Precio de venta del metro :

Rpta. 25 000 + 5 000 = S/:30,000

12. Convertir a número no denominado:

$3.\widehat{4}$ km, $10,\widehat{12}$ Hm., $120.\widehat{8}$ Dm. y $34,\widehat{54}$ m.

Solución

3 000m +
1 000m
1 200m
34m

$= \frac{4000}{9} + \frac{1200}{99} + \frac{80}{9} + \frac{54}{99} = 466$

5 234

Rpta. Total = 5234 + 466 = 5 700 mts.

13. Una ciudad A se encuentra situada a 64°25'26" (O) y otra B a 87°19'34" (E) a que hora deberá salir una persona de A si quiere llegar a las 8h 25m. del día siguiente a B, si sabe que el avión demora 9h 35m. en ir de A hacia B.

Solución

$$\begin{array}{lrrr} & 64^{\circ} & 25' & 26'' \; + \\ \text{Dif. de longitud} & 87^{\circ} & 19' & 34'' \\ \hline & 151^{\circ} & 45' & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrr|l} \text{Dif. de horas} & 151^{\circ} & 45' & 15 \\ \cline{4-4} & & & 10h\ 7m \end{array}$$

Sea x la hora que sale

$$x + (10h\ 7m) + (9h\ 35m) = 24h + (8h\ 25m)$$

Rpta. $x = 12h\ 43m$

14. Un avión parte de Lima a las 8h 40min. 30,seg. hacia una ciudad de Europa, que nos lleva 6h 45m. de adelanto. Si el avión recorre 1° de longitud en 10 minutos hallar que hora del día siguiente será en la ciudad Europea cuando el avión llegue, (el avión recorre la menor distancia).

Solución

Dif. de longitud : $6 \times 15^{\circ} + 45 \times 15^{\circ}$

$$101^{\circ}15' = 101.25^{\circ}$$

$$\begin{array}{rcl} 1^{\circ} & \text{———} & 10 \text{ min} \\ 101.25^{\circ} & \text{———} & x \end{array}$$

$x = 1012.5$ min.

$x = 16$ hs. 52 min. 30 seg.

∴ El avión llega:

$$\begin{array}{rrr} 8\ h & 40 \text{ min.} & 30 \text{ seg.} \\ 16\ h & 52 \text{ min.} & 30 \text{ seg.} \\ 6\ h & 45 \text{ min.} & \\ \hline \underbrace{32\ h} & 18 \text{ min.} & \\ 1 \text{ día } 8 \text{ hs.} & 18 \text{ min.} & \end{array}$$

Rpta. 8 hs. 18 min.

15. Una ciudad A se encuentra situada a 49°44' (O) y otra B a 143°14' (O), a que hora debe salir una persona de A si quiere llegar a B a las 12 horas sabiendo que el avión demora 8hs. 27 min.

Solución

B_____A
Dif. hrs.

143°14' -
49° 44'

93° 30'

Dif. longitud

93º 30' | 15
---
6 h. 14 min.

B está más temprano

Sea X la hr. que sale X - (6h 14m) + 8h 27m = 12h

X = 9h 47m.

Rpta. 47 m.

16. Un punto de la Tierra es tal que su distancia al polo norte es inferior en 5000 kilómetros que su distancia al polo sur. Si las distancias están medidas sobre el mismo meridiano, determinar la longitud de ese punto.

Solución

Por definición de metro: Distancia del polo norte al polo sur: 20,000kms.

Luego, distancia al polo norte: $\frac{20000-5000}{2}$ = 7 500 kms.

∴ El punto está en el hemisferio norte. Distancia al ecuador:

10000 - 7500 = 2500kms.

∴ Latitud = $\frac{360º \times 2500}{40000}$ = 22°30' (N)

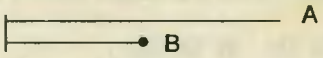
17. La longitud de A es 30° (E), la de B, 5° (E). Si un avión parte de A a las 8a.m. llega a B a las 7hs.30min. a.m. hora de B. ¿Qué tiempo duró el viaje?

Solución

Diferencia de longitudes :

30° - 5° = 25°

Diferencia de horas = 25°÷ 15 = 1 hora 40 min.



En B es más temprano: 8 - 1h 40min = 6hs 20min.

Como llegó a las 7hs 30min., se demoró: 7h 30min. - 6hs 20min = 1h 10min.

Rpta: 1h. 10 min.

PROBLEMAS PROPUESTOS

sobre sistema de medidas
(con clave)

1. ¿Cuántos decimilímetros contiene un decámetro?

a) 10000 b) 1000 c) 1'000,000 d) 100,000 e) 10^8

2. ¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene un galón americano?

a) 200 b) 210 c) 220 d) 230 e) 240

3. Un cable está medido por un número entero de centímetros, también por un número entero de pulgadas inglesas y también por un número entero de pulgadas francesas.
Determinar su longitud sabiendo que no pasa de 50 metros (pulgada inglesa: 254 diez milésimas de metro; pulgada francesa: 270 diez milésima de metro).

a) 22.86mt. b) 34.29mt. c) 17.145mt. d) 45.72mt. e) N.A.

4. Un HUSO HORARIO es una porción de superficie terrestre limitada por dos meridianos, cuyas longitudes difieren en 15°. El primer huso se extiende desde el meridiano de longitud 7°30' (O) al meridiano de longitud 7°30' (e).
La HORA LEGAL de un territorio es la hora del meridiano que pasa por el centro del huso horario donde se encuentra.
Si la longitud goegráfica de dos puntos A y B son: 40°48'35" (O) y 25°17'34" (E) respectivamente; ¿Cuál será la hora legal de A cuando en B son las 2h 45m. p.m.?

a) 9h 45m. a.m.
b) 10h 45m. a.m.
c) 7h 45m. p.m.
d) 8h 45m. p.m.
e) 6h 45m. p.m.

5. Una ciudad A está situada a 86°55'35" (E) y otra B a 24°23'25" (O), un avión demora 4h 30m, en ir de A a B, a qué hora debe salir una persona de A si quiere llegar a B a las 13 horas.

a) 10h 05m. b) 16h 05m. c) 16h 55m. d) 15h 55m. e) 10h 55m.

6. Los lados de un rectángulo miden 1 yarda 1 pie 4 pulg. y 1 yarda 2 pies 6 pulg. Si se incrementa en 1 pulgada el menor de los lados y se disminuye el mayor en una pulg. ¿En cuántas pulgadas cuadradas varía su área?

a) 7 b) 13 c) 15 d) 8 e) 11

7. Un bloque de madera tiene 2 pies 8 pulg. de ancho 6 pulg. alto y 2 yardas 1 pie de largo. Hallar cuantas libras pesa, si el peso específico de la madera es de 120 lb./pie^3.

a) 840 b) 560 c) 760 d) 1,048 e) 1,120

8. En un terreno de 11 Hm^2 32 Dm^2 y 88 m^2. ¿Cuántos acres hay?

a) 28 b) 32 c) 24.4 d) 11.33 e) 1131.88

9. El cuadrado de la mg. de 2 números excede en 2 unidades al quintuplo de su ma., hallar la diferencia entre dichos números sabiendo que la mh. es 16/3.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

10. Si el 6 de Agosto de este año cae Domingo. ¿Qué día caerá el 15 de Marzo del año 2,000?

a) Sábado b) Domingo c) Lunes d) Martes e) Miércoles

11. Las longitudes de A y B son: 8°36'28" (E) y 42°06'40" (E) respectivamente. Un avión sale de "A" a las 15 horas 50 min. el 10 de octubre y emplea 44 hrs. 20 min. para llegar a B. ¿Qué hora es en B cuando llega el avión?

a) 12h 24min.10seg.
b) 10h 24min.12seg.
c) 12h 20min.15seg.
d) 12h 26min.12/18seg.
e) 14h 24min.12/15seg.

12. ¿Cuántas toneladas de agua han caído en Madrid durante una lluvia de 20 litros por m^2, si Madrid tiene 5.000 ha.? ¿Cuántas gotas, si el volumen medio de cada gota es de 50 mm^3?

13. Sabiendo que el gasto de 8 mecheros quemando cinco horas diarias durante treinta días ha sido de 84 pesetas, averiguar cuántos céntimos cuesta el m^3 de gas, si cada mechero consume 140 litros por hora?

14. Calcular el volumen de un pie cúbico (inglés), sabiendo que 1 pie = 305 mm.

15. ¿Cuánto pesaría el agua contenida en el cubo del ejemplo anterior?

16. El pie cuadrado con que se tasan todavía los solares en Madrid, es un cuadrado que tiene un pie castellano de lado. Sabiendo que 3 pies lineales hacen una vara y que ésta vale 0,836 m., calcular cuántos pies cuadrados tiene un metro cuadrado.

17. Sabiendo que un terreno se vende a 1,65 ptas. el pie^2, calcular el precio de una finca de 3 hectáreas y 18 áreas.

18. Sabiendo que una cántara tiene 8 azumbres y cada azumbre 4 cuartillos, aproximadamente iguales a medio litro, calcular a cuánto hay que comprar 5 cántaras de aceite para que resulte el litro a 3,80 pesetas.

19. *Fernel* (médico de Enrique II, rey de Francia, siglo XVI) midió en la carretera de París a Amiens el arco de un grado de meridiano, obteniendo 57099 toesas. Sabiendo que las mediciones posteriores, más exactas, dieron como medida del cuadrante de meridiano 5130700 toesas, calcular: 1°. La longitud de la toesa en metros 2°. La longitud en kilómetros de la medida de Fernel. (comparándola con la longitud efectiva del grado terrestre se aprecia la gran aproximación obtenida por Fernel a pesar de lo rudimentario de su procedimiento, consistente en contar las vueltas de las ruedas de su coche).

20. Un carrete de hilo tiene 150 yardas. ¿Cuántos metros tiene, sabiendo la equivalencia de 1 Yd. = 0,9144 m.?

21. ¿Cuántas yardas tiene la milla inglesa, cuya longitud es 1609,3149 m.?

22. Una pulgada cuadrada = 6,45 cm^2. ¿Cuántos cm^2 tiene un área de 11 pulgadas cuadradas? ¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene una página de este libro?

23. Se sospecha que una estatuilla de bronce está hueca. Sabiendo que su peso es 7,565 kg. y que completamente sumergida en el agua ha desplazado 1,25 dm^3, averiguar si es cierta la sospecha y calcular el volumen hueco. (Densidad del bronce, 8,9; es decir, el bronce pesa 8,9 veces lo que igual al volumen del agua.)

24. Si las ruedas del coche de Fernel tenían 20 pies de perímetro, ¿cuántas vueltas dieron en el recorrido de un grado terrestre?

25. Una libra inglesa de peso vale 0,454 kg. Exprésese en kgs. 54,2 libras; exprésese en libras 28,75 kgs.

26. Una mercadería que pesa 2500 libras, ¿cuántos kilos pesa? Una persona de 72 kg. 400 g., ¿cuántas libras pesa?

27. Un kg. de carbón da 7800 calorías (unidad de calor), un kg. de leña da 3500 calorías. Sabiendo que una tonelada de carbón ha costado 285 pesetas y que 40 kg. de leña han

costado 9 ptas., calcular que calefacción resulta más ventajosa, y cuántas veces más económica.

28. Sabiendo que un vapor va a la velocidad de 22 nudos (significa 22 millas marinas por hora), calcular los metros que avanza por segundo. ¿Cuánto tiempo tardaría en llegar del Ecuador al polo en trayecto navegable?

29. Se han almacenado doce toneladas de carbón en un sótano de dimensiones 3,55 m x 4,20 m. Calcular la altura, suponiendo el carbón distribuido por igual y sabiendo que un m^3 de carbón pesa 810 kgs.

30. Sabiendo que 157 kgs. de harina se convierten en 204 kgs. de pan, calcular los centilitros de agua que contiene un panecillo de 125 gr.

31. Un barril de aceite que pesa 81 kg. y vacío 7 kg. 800 gr., pesa lleno de agua 87,800 kg. Calcular el peso específico del aceite, es decir, el peso de un litro.

32. Después de haber pesado kilo a kilo una mercancía, se comprueba que al peso del kg. patrón le faltan 29 gr. Si se han comprobado mercancías por valor de 520 ptas. a 8 ptas. el kg., calcular cuánto tiene que devolver el vendedor.

33. Con un metro corto en 4 mm. se ha medido las tres dimensiones de un depósito obtenido 3,45 m., 2,60 m. y 1,68. Calcular el error con que se ha obtenido el volumen.

34. Un campo rectangular de 420 m. en un sentido y 125 m. en el otro está sembrado de trigo. Si cada hectárea produce 19 Hl. de trigo y el Hl. pesa 80 kg., hallar el precio total de la cosecha de trigo a 48,50 pesetas el quintal métrico.

35. El hombre efectúa unas 18 respiraciones por minuto; en cada respiración completa se renueva 0,5 litros de aire. Por cada litro de aire respirado se combinan 5 centilitros de oxígeno en nuestro organismo, que los devuelve de anhidrido carbónico. Un litro de oxígeno pesa 1,4 g., y uno de anhidrido carbónico 1,99 g. ¿Cuánto perdemos de peso cada día por la respiración?

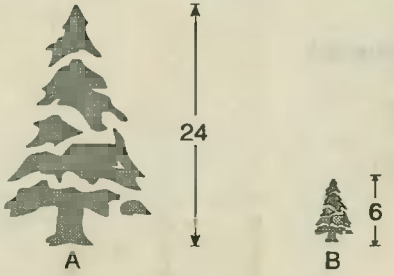
Clave

1. d	4. c	7. c	10. b
2. b	5. a	8. d	11. d
3. a	6. d	9. b	

Capítulo 15

RAZONES Y PROPORCIONES

Introducción



Nos piden **"comparar"** la altura de los árboles con un cálculo muy simple podemos establecer que la altura del primero (A), sobrepasa a la del segundo (B) en:

$$24 - 6 = 18 \quad \ldots\ldots(1)$$

Pero también podemos afirmar que la altura del primero es:

$$\frac{24}{6} = 4 \quad \ldots\ldots(2)$$

cuatro veces, la del segundo.

En ambos casos estamos **comparando** dos cantidades, en (1) mediante una resta y en (2) mediante una división.

> "En matemática, al resultado de comparar dos cantidades se llama razón"

Al resultado de comparar 2 cantidades mediante una resta, se llama razón aritmética o por diferencia y sus términos son:

$$\underset{\text{antecedente}}{\underset{1º}{A}} - \underset{\text{consecuente}}{\underset{2º}{B}} = \alpha \leftarrow \text{valor de la razón o resultado de la comparación}$$

Cuando se comparan 2 cantidades por división, el resultado se llama razón geométrica o por división y sus términos son:

$$\begin{matrix}\text{antecedente } 1º \rightarrow \\ \text{consecuente } 2º \rightarrow\end{matrix} \quad \frac{A}{B} = K \leftarrow \text{valor de la razón.}$$

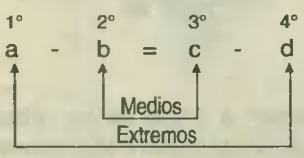
Proporción

Dados cuatro números distintos de cero, en un cierto orden, constituyen una proporción, si la razón de los dos primeros es igual a la razón de los dos segundos. La proporción puede ser aritmética o geométrica, según que las razones sean aritméticas o geométricas respectivamente.

Proporción aritmética (equidiferencia)

Si: $a - b = \alpha \wedge c - d = \alpha$

$\therefore$ Habrá proporción, ya que:



Si $a \neq b \neq c \neq d$ la proporción se llama discreta y cualquiera de sus cuatro términos, cuarta diferencial.

Propiedad básica:

$$\text{Suma de medios} = \text{Suma de extremos}$$
$$b + c = a + d$$

Proporción continua:

Aquella en la que los medios son iguales.

$$a - b = b - c$$

b = media diferencial o media aritmética.
a y c = tercia diferencial

Por propiedad básica:

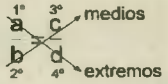
$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Proporción geométrica (equicociente)

Si: $\frac{a}{b} = K \wedge \frac{c}{d} = K$ $\therefore$ habrá proporción

$a : b :: c : d$ ó



Si $a \neq b \neq c \neq d$, la proporción es discreta y cualquiera de sus términos: cuarta proporcional.

Propiedad básica

Producto de medios = Producto de extremos
$(b)(c) = (a)(d)$

Proporción continua:

Aquella en la que los medios son iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

b = media proporcional o media geométrica
a y c, tercera proporcional.

Por propiedad básica:

$$b^2 = a \cdot c$$

$$b = \sqrt{a.c}$$

Propiedades de las proporciones:

I. Toda proporción se puede escribir de 8 maneras diferentes:

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ una proporción: Se puede escribir:

i. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ cambiando medios:

ii. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ invirtiendo i y ii

iii. $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

iv. $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ permutando términos a i, ii, iii, iv:

v. $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$

vi. $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$

vii. $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

viii. $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

2da.Propiedad.-

"En toda proporción se cumple que la suma o diferencia de los primeros términos es a la suma o diferencia de los segundos, como los antecedentes son entre sí y como los consecuentes son también entre sí".

HIPOTESIS

Sea: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ una proporción.

S.p.d.q.: $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Demostración

Sabemos que: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ..... (1)

De la expresión (1):

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$$

Efectuando:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Cambiando medios a (2):

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De (1) cambiando medios:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

sustituyendo en (3):

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \textbf{L.q.q.d}$$

3ra.Propiedad.-

"En toda proporción se cumple que la suma de los primeros términos es a su diferencia como la suma de los segundos es también a su diferencia".

HIPOTESIS

Sea $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ una proporción.

S.p.d.q.: $\frac{m+n}{m-n} = \frac{p+q}{p-q}$

Demostración

Sabemos que: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ..... (1)

Aplicando a (1) la segunda propiedad (desdoblada):

a) Criterio suma: $\frac{m+n}{p+q} = \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \frac{m-n}{p-q} \ldots\ldots \quad (2)$$

b) Criterio diferencia: $\frac{m-n}{p-q}=\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$

Cambiando medios a (2): $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$ **L.q.q.d.**

4ta.Propiedad

"En toda proporción se cumple que la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente".

HIPOTESIS

Sea $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ una proporción.

S.p.d.q.: $\frac{p\pm r}{q\pm s}=\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$

Demostración

Sabemos que: $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ ..... (1)

Cambiando medios a (1): $\frac{p}{r}=\frac{q}{s}$ ..... (2)

En (2) por la 2da.Propiedad: $\frac{p\pm r}{q\pm s}=\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ **L.q.q.d.**

5ta.Propiedad.-

"En toda proporción se cumple que la suma de antecedentes es a su diferencia como la suma de consecuentes es también a su diferencia".

HIPOTESIS

Sea: $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ una proporción.

S.p.d.q.: $\frac{p+r}{p-r}=\frac{q+s}{q-s}$

Demostración

Sabemos que: $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ ..... (1)

En (1) aplicando 4ta. propiedad (desdoblada):

Criterio suma: $\frac{p+r}{q+s}=\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$

$\frac{p+r}{q+s}=\frac{p-r}{q-s}$ ..... (2)

Criterio resta: $\frac{p-r}{q-s}=\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$

Cambiando medios a (2): $\frac{p+r}{q-s}=\frac{q+s}{q-s}$ **L.q.q.d.**

6ta. Propiedad

"Si a ambos términos de una se le eleva a un mismo exponente o se les extrae raíz del mismo índice, se obtiene siempre una proporción".

HIPOTESIS

Sea: $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ una propiedad.

1°. $\frac{p^n}{q^n}=\frac{r^n}{s^n}$ S.p.d.q.:

2°. $\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}=\frac{\sqrt[n]{r}}{\sqrt[n]{s}}$

Demostración

Sabemos que: $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ ..... (1)

elevando (1) a la potencia "n":

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n=\left(\frac{r}{s}\right)^n \qquad \frac{p^n}{q^n}=\frac{r^n}{s^n}$$

$$p^n s^n = q^n \times r^n$$

$$(p \times s)^n = (q \times r)^n$$

Extrayendo la raíz "n" a (1):

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{\frac{r}{s}} \qquad \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} = \frac{\sqrt[n]{r}}{\sqrt[n]{s}} \qquad \textbf{L.q.q.d.}$$

SERIE DE RAZONES IGUALES

Se llama así al conjunto de más de dos razones iguales. Así en las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = k\,;\quad \frac{c}{d} = k\,;\quad \frac{e}{f} = k\,;\quad \frac{g}{h} = k\,:$$

Notamos que todas las razones tienen el mismo valor (k), por lo tanto, podemos expresar:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$$ constante de proporcionalidad o valor de cada razón.

Serie de razones iguales.

De lo expuesto se deduce que: "La condición necesaria y suficiente para obtener una serie de razones iguales es que todas las razones tengan el mismo valor".

Ejemplos

1°. $\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{9}{45} = \frac{127}{635} = 0.2$ constante de proporcionalidad o valor de cada razón.

2°. $\frac{1}{7} = \frac{3}{21} = \frac{7}{49} = \frac{11}{77} = 0.14287$

TEOREMAS RELATIVOS A LA SERIE DE RAZONES IGUALES

TEOREMA 1

"En toda serie de razones iguales se cumple que la suma de antecedentes y la suma de consecuentes forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas".

HIPOTESIS

Consideremos la serie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

Tesis.-

S.p.d.q.:

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=k$$

Demostración

De la hipótesis se deduce:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{a}{b}=k & a=bk \\ \frac{c}{d}=k & c=dk \\ \frac{e}{f}=k & e=fk \end{array}\right\} \text{Sumando ordenadamente:}$$

$$\frac{g}{h}=k \qquad g=hk$$

$$a+c+e+g = bk+dk+fk+hk$$

$$a+c+e+g = k(b+d+f+h)$$

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$ **L.q.q.d.**

TEOREMA 2

"El producto de los antecedentes y el producto de los consecuentes forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas, elevada a un exponente igual al número de razones que intervienen en la serie."

HIPOTESIS

Sea la serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ S.p.d.q.:

$$\frac{axcxe}{bxdxf}=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{c}{d}\right)^3=\left(\frac{e}{f}\right)^3$$

Demostración

De la hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = k \rightarrow a = bk \\ \frac{c}{d} = k \rightarrow c = dk \\ \frac{e}{f} = k \rightarrow e = fk \end{array}\right\} \text{ multiplicando ordenadamente:}$$

$$a \times c \times e = b \times d \times f \times k^3$$

$$\frac{axcxe}{bxdxf} = k^3$$

Luego: $$\frac{axbxc}{bxdxf} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{e}{f}\right)^3$$ **L.q.q.d.**

TEOREMA 3

"La raíz enésima del producto de antecedentes y la raíz enésima del producto de los consecuentes de "n" razones iguales, forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas".

HIPOTESIS

Sea la serie: $$\underbrace{\frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{y}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a}{b}}_{\text{"n" razones}} = k = \ldots\ldots = k$$

S.p.d.q.: $$\frac{\sqrt[n]{rxpxyx\ldots\ldots xa}}{\sqrt[n]{sxqxzx\ldots\ldots xb}} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{y}{z} = \ldots\ldots = \frac{a}{b}$$

Demostración

Por teorema anterior:

$$\frac{rxpxyx\ldots\ldots xa}{sxqxzx\ldots\ldots xb} = k^n$$

Extrayendo la raíz "n":

$$\frac{\sqrt[n]{rxpxyx.....xa}}{\sqrt[n]{sxqxzx.....xb}} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{y}{z} = ... = \frac{a}{b}$$ **L.q.q.d.**

TEOREMA 4

"La raíz "n" de la suma de antecedentes elevados a la potencia "n", y la raíz "n", de la suma de los consecuentes elevados a la potencia "n" de "n" razones iguales, forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas".

HIPOTESIS

Sea la serie:

$$\underbrace{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{z}}_{\text{"n" razones iguales}} = k$$

S.p.d.q.: $$\frac{\sqrt[n]{(a^n + c^n + e^n ..... + x^n)}}{\sqrt[n]{(b^n + d^n + f^n ..... + z^n)}} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{z}$$

Demostración

Elevando cada razón de la hipótesis al exponente "n" se tiene:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = ... = \frac{x^n}{z^n} = k^n = k^n$$

Aplicando el primer teorema:

$$\frac{(a^n + c^n + e^n ..... + x^n)}{(b^n + d^n + f^n ..... + z^n)} = k^n$$

Extrayendo la raíz "n" a ambos términos:

$$\frac{\sqrt[n]{(a^n + c^n + e^n ..... + x^n)}}{\sqrt[n]{(b^n + d^n + f^n ..... + z^n)}} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... \frac{x}{2}$$ **L.q.q.d.**

($^*_1$) Proposición armónica:

Cuatro términos forman una proporción armónica cuando la diferencia de los dos primeros es a la de los dos últimos como el primero es al último, es decir:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d} \qquad (*_1)$$

i) Un término extremo de esta proporción es:

$$\frac{a-b}{c-x}=\frac{a}{x}, \text{ de donde } \quad x=\frac{ac}{2a-b}$$

ii) Para un medio, se obtiene:

$$\frac{a-b}{x-d}=\frac{a}{d}, \text{ de donde } \quad x=\frac{b(2a-b)}{a}$$

Medio anarmónico

Cuatro términos están en proporción anarmónica cuando formándose la primera razón como se ha dicho en $(*_1)$, la segunda está invertida, así:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{d}{a}$$

Un medio anarmónico (x), se calcula análogamente:

$$\frac{a-b}{x-d}=\frac{d}{a}, \text{ de donde } \quad x=\frac{a(a-b)+d^2}{d}$$

Media anarmónica

Es una media proporcional anarmónica y es de la forma:

$$\frac{a-x}{x-d}=\frac{d}{a}, \text{ de donde } \quad x=\frac{a^2+d^2}{a+d}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE TEORIA DE CONJUNTOS
sobre proporciones y serie de razones iguales

Observaciones Previas

* Los problemas sobre razones y proporciones, si presentan una sola variable, se pueden resolver aplicando: "Producto de medios = Producto de extremos".
* Si presentan dos o más variables se puede manejar el problema (aun en el caso de serie de razones iguales) colocando a los antecedentes en función de los consecuentes. Ejemplo:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow a = bk, \; c = dk$$

* Por cierto que estas sugerencias, para el caso en que se trabaje proporciones o serie de razones iguales geométricas.

1. En un salón de clase, antes del recreo el número de hombres es al número de mujeres como 9 es a 5. Si después del recreo, hay 8 hombres y 4 mujeres menos, con lo cual la razón de hombres a mujeres es 7/4, hallar cuántas mujeres había antes del recreo.

Solución

$$\frac{H}{M}=\frac{9}{5}\text{.....(1)} \qquad \frac{H-8}{M-4}=\frac{7}{4}\text{.....(2)}$$

De (2) $\quad 4H - 32 = 7M - 28$

De (1) $\quad 4\left(\frac{9}{5}M\right) - 32 = 7M - 28$

$$\frac{36}{5}M - 7M = 32 - 28$$

$$\frac{M}{5} = 4 \qquad \therefore\ M = 20$$

Rpta. 20 mujeres.

2. En una serie de 3 razones geométricas iguales se sabe que la suma de los dos primeros antecedentes es igual al 2do. consecuente, siendo éste el, doble del 1er. consecuente, hallar el último antecedente, si su respectivo consecuente es 24.

Solución

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{24}=k \qquad a+c = d$$

$$d = 2b$$

$$\frac{a+c}{b+d}=k \rightarrow k=\frac{d}{b+d} \rightarrow k=\frac{2b}{2b+b}=\frac{2}{3}$$

$$e=\frac{2}{3}x24=16$$

Rpta. $e = 16$

3. En una serie de 3 razones geométricas iguales se sabe que el producto de los dos primeros antecedentes, el producto de los dos últimos antecedentes y el producto de los dos primeros consecuentes son:
48,432 y 6912 respectivamente. Hallar el producto del 2do. consecuente por el último antecedente.

Solución

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \rightarrow ac = 48 ; ce = 432$$

$$bd = 6912$$

$$\frac{ac}{bd}=k^2=\frac{48}{6912} \rightarrow k^2=\frac{1}{144} \rightarrow k=\frac{1}{12}$$

$$c = dk$$
$$ce = dek$$
$$432 = de\ 1/12 \rightarrow de = 5184$$

Rpta. de = 5184

4. En una serie de 4 razones geométricas iguales se sabe que la suma de cuadrados de los consecuentes menos la suma de cuadrados de los antecedentes es 1296 y que la suma de las 2 últimas razones es 10/7. Determinar la suma de cuadrados de los antecedentes.

Solución

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=k \qquad \frac{e}{f}+\frac{g}{h}=\frac{10}{7}=2k \qquad k=\frac{5}{7}$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{g^2}{h^2}=\frac{25}{49}$$

$$\frac{a^2+c^2+e^2+g^2}{b^2+d^2+f^2+h^2-(a^2+c^2+e^2+g^2)}=\frac{25}{49-25}$$

$$a^2 + c^2 + e^2 + g^2 = 1296\left(\frac{25}{24}\right)$$

Rpta. 1350

5. En una serie de 4 razones geométricas continuas e iguales, el primer antecedente es el último antecedente como 1 es a 27. Hallar la suma de todos los consecuentes si se sabe que la suma de los términos de la última razón es 540.

Solución

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como $\frac{a}{d}=\frac{1}{27}$ y $d+e=540$

De (1) .....

$$\frac{axbxc}{bxcxd}=k^3=\frac{a}{d}=\frac{1}{27}\rightarrow k=\frac{1}{3}$$

De (1) ....

$$\frac{d}{e}=k\rightarrow=\frac{d+e}{e}=k+1\rightarrow\frac{540}{e}=\frac{1}{3}+1$$

$$e = 405$$

$$d = 135$$

De (1) .....

$$c = 45$$

$$b = 15$$

Rpta. $b+c+d+e = 600$

7. Si:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{4}{5};\ y\ cd-ab=1100$$
$$y\ d-b=25$$

Hallar $d+b$

Solución

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{4}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \qquad cd - ab = 1100\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$d - b = 25 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) en (2) .....

$$\frac{4}{5}d^2-\frac{4}{5}b^2=1100$$

$$d^2 - b^2 = 1375$$

$$(d - b)(d + b) = 1375$$

De (3) .....

$$d + b = \frac{1375}{25}$$

$$d + b = 55$$

Rpta. $d + b = 55$

7. La suma de los cuadrados de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es igual a 7,225. Calcular la media proporcional si la diferencia de extremos es 75.

Solución

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Del dato: $a^2 + 2b^2 + c^2 = 7225$

Pero: $b^2 = ac \rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = (85)^2$

$$\text{Como} \quad \begin{matrix} (a + c) = 85 \\ (a - c) = 75 \end{matrix} \Bigg\} \quad \begin{matrix} a = 80 \\ c = 5 \end{matrix}$$

$\therefore b^2 = 80 \times 5 = 400 \rightarrow b = 20$

Rpta. 20

8. Si las razones aritméticas, de los términos de la 1ra. y 2da. razón de una proporción geométrica, son 8 y 32 respectivamente, hallar en que relación estarían la suma y diferencia de los consecuentes de dicha proporción.

Solución

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a - b = 8; \quad c - d = 32$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \rightarrow \frac{8}{b} = \frac{32}{d}$$

$$\frac{8}{32} = \frac{b}{d} \rightarrow \frac{b}{d} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{b+d}{d-b} = \frac{4+1}{4-1} = \frac{5}{3}$$

Rpta. $\frac{b+d}{d-b} = \frac{5}{3}$

9. Se duplicaron los 4 términos de una proporción geométrica y, a estos productos se les sumó el mismo número, obteniéndose 100, 130, 196 y 258. Indicar la suma de las cifras de uno de los términos.

Solución

$$\frac{\frac{100-x}{2}}{\frac{130-x}{2}} = \frac{\frac{196-x}{2}}{\frac{258-x}{2}}$$

Los términos serán
45, 60, 93, 124
9, 6, **12**, 7

Rpta. $x = 10$

10. Si: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k = k$; $a > b > c > k$, los términos y la razón son enteros y la suma de los extremos menos la suma de los medios es 450. Hallar el máximo valor que puede tomar "a".

Solución

Del dato: $a + c - 2b = 450$; pero: $a = ck^2$; $b = ck$

Entonces: $a + c - 2b = ck^2 + c - 2ck = 450 \Rightarrow c(k-1)^2 = 450 = 25 \times 9 \times 2$

Como "a" es máximo posible: $(k-1)^2 = 1 \Rightarrow k = 2 \wedge c = 450$

$a = ck^2 = 450 \times 4 = 1\,800$

Rpta. 1 800

11. Hallar $\frac{a}{b}$ si se cumple: $\frac{11a+5b}{5a-b} = \frac{3k+2}{2-3k}$

Solución

Suma entre diferencia: $\frac{(11a+5b)+(5a-b)}{(11a+5b)-(5a-b)} = \frac{(3k+2)+(2-3k)}{(3k+2)-(2-3k)}$

De donde: $\frac{4a+b}{a+b} = \frac{1}{k} \Rightarrow 4 \times k \times a + b \times k = a + b$

$\Rightarrow a(1-4k) = b(k-1) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{k-1}{1-4k}$

Rpta. $\frac{k-1}{1-4k}$

12. Si en: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r$; se cumple: $a - d = 15$

$b - c = 3$

Con "r" par < 5.
Hallar el menor de los términos.

Solución

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r$; $a = rb$; $c = rd$

Se sabe: $d - a = -15 \rightarrow d - rb = -15$..... (1)

$c - b = -3 \rightarrow rd - b = -3$ ..... (2)

(1) + (2) : .....$(r + 1)(b - d) = 18$

r par < 5 $\Rightarrow r = 2$

Pues: $(r + 1)(b -) = 3 \times 6$

Reemp.: $d - 2b = -15$

$\Rightarrow b = 9, d = 3$

$2d - b = -3$

Rpta. El menor es "d" y es igual a 3.

13. En una proporción geométrica discreta el producto de extremos es 70 y la suma de los cuadrados de los extremos es 149. Si uno de los antecedentes es 5 veces el otro, hallar la diferencia de los medios de la proporción.

Solución

Proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Pero $\begin{cases} a*d = 70..... & (1) \\ a^2 + d^2 = 149..... & (2) \end{cases}$

Luego: $a^2 + d^2 + 2ad = 149 + 2 \times 70$

$a^2 + d^2 - 2ad = 149 - 2 \times 70$

$\begin{cases} (a + d)^2 = 289 ; a + d = 17 \\ (a - d)^2 = 9 ; a - d = 3 \end{cases}$

$a = 10, d = 7$

$\frac{10}{b}=\frac{c}{7}$ si c = 5 x 10 (no sirve pues b = 1.4)

Luego: $\frac{7}{b}=\frac{c}{10}$; c = 35, b = 2

14. Si : $\frac{(3b-2a)(3b+2a)}{(3\sqrt{2}b+2a)(3\sqrt{2}b-2a)}=\frac{45}{94}$

Hallar : $\frac{a+b}{a-b}$

Solución

$$\frac{(3b-2a)(3b+2a)}{(3\sqrt{2}b+2a)(3\sqrt{2}b-2a)}=\frac{45}{94}\rightarrow\frac{9b^2-4a^2}{18b^2-4a^2}=\frac{45}{94}$$

$846b^2 - 376a^2 = 810b^2 - 180a^2$

$36b^2 = 196a^2$

$$6b = 14a \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{3+7}{3-7}=\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$$

15. Hallar la cuarta proporcional de 50, x y 3x; sabiendo que "x" es la tercera proporcional entre la media proporcional de 4 y 16, y la cuarta proporcional de a, 4a y 10.

Solución

La media proporcionl de 4 y 16 es: $\sqrt{4x16} = 8$

La cuarta proporcional de a, 4a y 10 sea "y"

Entonces: $\frac{a}{4a}=\frac{10}{y}\Rightarrow y = 40$

Luego: $\frac{8}{40}=\frac{4}{x}\Rightarrow x = 20$, nos piden la cuarta proporcional:

$$\frac{50}{20}=\frac{60}{z}\Rightarrow z = 24$$

Rpta. 24

16. Si $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$, siendo la razón un número entero y se cumple:

$A^2 + B^2 = 245$ y $a^2 + b^2 + B^2 = 201$. Hallar $A/a + B$.

Solución

Haciendo $B/b = k$ un número entero $B = bk$ y $A/a = k$; $A = ak$

Reemplazando: $a^2k^2 + b^2k^2 = 245$

$$(a^2 + b^2)k^2 = 245 \quad \text{..... (I)}$$

$$a^2 + b^2 = 202 - B^2 \quad \text{..... (II)}$$

Dividiendo (I) ÷ (2):

$$k^2 = \frac{245}{201 - B^2} \; ; \; k^2(201 - B^2) = 245$$

$$k^2(201 - B^2) = 7^2 \cdot 5 \qquad k^2 = 7^2 \; ; \; k = 7$$

$$201 - B^2 = 5 \; ; \; B = 14$$

$$\frac{A}{a} + B = k + B = 7 + 14 = 21$$

Rpta. 21

PROBLEMAS PROPUESTOS
sobre razones y proporciones

1. Si: $\frac{3a^2 - b^2}{8a^2 - 2b^2} = \frac{3}{14}$

Hallar: $\frac{a+b}{5a-3b}$

a) 8 b) 9 c) 3 d) 4 e) 5

2. ¿Cuál es la diferencia de los extremos de una proporción continua si la suma de sus 4 términos es 45 y la razón entre la suma y la diferencia de los primeros términos es 3?

a) 15 b) 14 c) 16 d) 17 e) 18

3. Si: $\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}=\frac{1}{3026}$

Sabiendo que la media proporcional de a y b es 35. Hallar a + b.

a) 74 b) 75 c) 76 d) 77 e) 78

4. En: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se cumple que: $a^3 + d^3 = 65$ y $ad(a + d) = 20$

Hallar bc.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

5. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ y: $(a + c - d)(a + c - b) = (b + d)^2$

Hallar la razón de: $\frac{(b+d)^2}{bxd}$

a) $\frac{1}{1+k+k^2}$ b) $\frac{1}{1+k-k^2}$ c) $\frac{1}{k}$ d) $\frac{1}{k^2}$ e) $\frac{1}{k^2+1}$

6. En una proporción geométrica continua, se sabe que la suma de todos sus términos es 180. Hallar uno de los términos, si se sabe que la razón es entera y mayor que 2.

a) 25 b) 20 c) 35 d) 45 e) 15

7. La suma y el producto de los 4 términos de una proporción continua son respectivamente 192 y 194, 481. Calcular la diferencia de los extremos.

a) 75 b) 150 c) 104 d) 80 e) 144

8. Si la cuarta parte de la suma de dos números es a los dos quintos de su diferencia como 25 es a 32, hallar en que relación se encuentra la suma de los cubos con la diferencia de los cubos de los números.

a) 425/419 b) 27/19 c) 741/740 d) 365/364 e) 301/299

9. En una proporción geométrica continua el producto de sus cuatro términos es 50,625; y uno de los extremos es 25 veces el otro. Hallar la suma de los términos de la proporción.

a) 84 b) 210 c) 150 d) 108 e) 165

10. La relación entre la quinta parte de un número y los dos séptimos de otro número es la misma que guardan 63 y 80. Si la diferencia de los números es 43, hallar su suma.

a) 417 b) 517 c) 731 d) 963 e) 148

11. Los términos extremos de una proporción geométrica son iguales, siendo su valor igual a la cuarta proporcional de 4, 10 y 8. Si uno de los términos medios es 10, ¿cuánto vale el otro medio?

a) 20 b) 2 c) 30 d) 40 e) 36

12. Calcular la media proporcional entre "a" y "b"; sabiendo que "a" es la cuarta proporcional de 5/6 , 1/4 y 2/3 y "b" es la tercia proporcional de 1/5 y 6.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

13. En cierta proporción geométrica la suma de los extremos más un medio es igual al otro medio. Si el producto de los 4 términos es 36, determinar la diferencia entre los medios.

a) 5 b) 4 c) 3 d) 6 e) 2

14. Se sabe que 8 es cuarta proporcional entre a, b y c. Si: $a + b + c = 25$, y si c es impar, determinar "a".

a) 8 b) 3 c) 16 d) 9 e) 6

15. En cierta proporción geométrica se cumple que los términos (en el mismo orden) están en proporción aritmética. Luego siempre se cumple que:

I Todos sus términos son iguales.

II Todos sus términos menos uno son iguales.

III La proporción es continua.

a) VFV b) FFF c) VVV d) FVV e) FFV

16. Al quitar 18 a cada uno de dos números la razón entre los mismos sería como 5 es a 7. Si la razón inicial de los mismos era como 7 es a 9. Hallar el número mayor.

a) 63 b) 72 c) 81 d) 90 e) 108

17. Es una proporción geométrica continua, la suma de los cubos de los 4 términos de la proporción es 10125. Hallar la suma de los extremos.

a) 20 b) 30 c) 25 d) 18 e) 24

18. Si hace diez años la edad de Carmen era a la de Julia como 2 es a 3, y dentro de 6 años la nueva razón será 6 y 7. Determinar la suma de estas edades.

a) 22 b) 35 c) 40 d) 48 e) 28

19. Armando manda preparar a su doméstica vino mezclado con agua en la proporción de 15 a 1. Ella por equivocación mezcla el vino con el agua en la proporción el 5 a 1 hasta obtener 75 litros de la mezcla. Determinar la cantidad de vino puro que habrá que agregar a esta mezcla para obtener la preparación deseada.

a) 120 lt b) 125 lt c) 75 lt d) 225 lt e) 150 lt.

20. En una proporción : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se sabe que :

$$\begin{aligned} c-b &= 8 \\ c+d &= 60 \\ a+c &= 28 \end{aligned}$$

Luego a x b es :

a) 65 b) 91 c) 72 d) 50 e) 80

21. Si : $\frac{a}{80}=\frac{80}{c}$

Hallar c si : $\frac{a}{80}=\frac{70}{c-5}$

a) 20 b) 30 c) 40 d) 80 e) 60

22. Sabiendo que b es media proporcional entre a y c, y que a + b + c = 93 y que :

$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{1}{25}$$

Determinar a . b

a) 55 b) 25 c) 225 d) 75 e) 45

23. La suma de dos números es a su diferencia como 6 es a 1. Si el producto de los dos números es 5040. Indicar la diferencia de los mismos.

a) 20 b) 16 c) 24 d) 12 e) 8

24. Se construye una proporción geométrica en la que el producto de sus términos es 8,100 y su suma 40. Determinar la suma del mayor más el menor término de la proporción.

a) 33 b) 23 c) 18 d) 21 e) 17

25. En una proporción geométrica continua la suma de los cubos de sus términos diferentes es 1971, y el producto de las dos razones es 4. Hallar la suma de la suma de los antecedentes y el producto de los consecuentes.

a) 36 b) 18 c) 42 d) 6 e) N.A.

26. En una proporción geométrica continua, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos como 6 es a 2. La suma de los cuadrados de los 4 términos es 400. Hallar la media proporcional.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 2 e) 12

27. Cuántas proporciones geométricas continuas existen tal que uno de sus extremos sea igual a 1 y que la suma de sus términos sea un cuadrado perfecto.

a) 1 b) 5 c) 9 d) Infinitos e) Indeterminado.

28. Si el lado de un hexágono aumentase en sus 2/9 , el área crecería en 2040 cm^2. Hallar el área original del hexágono en cm^2.

a) 3891 b) 4131 c) 3321 d) 3621 e) Ninguna anterior.

29. En una proporción geométrica, la suma de los cuadrados de los antecedentes es 225 y la suma de los términos de la primera razón es los 3/4 de la suma de los términos de la segunda razón. Hallar el producto de los antecedentes.

a) 108 b) 45 c) 20 d) 8 e) 12

30. Si : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a^3-c^3}{b^3-d^3}=\frac{8}{27}$ y $a \times c = 140$

determinar $b + d$ si todos los términos son mayores que 6.

a) 30 b) 36 c) 24 d) 52 e) 48

31. En la proporción geométrica continua el doble del producto de los extremos es 200, y la diferencia entre la suma de los extremos menos la suma de los medios es 5, luego la suma de los términos de la proporción es :

a) 60 b) 50 c) 35 d) 40 e) 45

Serie de razones iguales

1. Si : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{3}{4}$ y $b^2d^2 - a^2c^2 = 11\,200$

hallar : ac + bd

a) 240 b) 200 c) 150 d) 360 e) 820

2. Se da la siguiente serie de razones iguales:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{4}=\frac{c}{8}=\frac{d}{9}$$

Si : a x b + c x d = 14 400

Hallar la suma de los antecedentes.

a) 336 b) 252 c) 280 d) 560 e) 672

3. En una serie geométrica de 4 razones iguales, cuya razón geométrica es 1/4 , se sabe que el producto de los antecedentes es 810, determinar, la suma de las cifras del producto de los consecuentes.

a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

4. Si : $\frac{3}{a}=\frac{a}{n}=\frac{2}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{16}$

hallar: (a + b + c + n)

a) 30 b) 42 c) 28 d) 36 e) 24

5. Si : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$ y la diferencia entre el último consecuente y el primer antecedente es 480 y la suma de las 4 razones es 4/3. Hallar b + c + d.

a) 396 b) 156 c) 224 d) 386 e) 234

6. En una serie de razones geométricas iguales, los consecuentes son 3, 7, 8 y 11 y el producto de los antecedentes es 29568.

Hallar la suma de los cuadrados de los antecedentes.

a) 2187 b) 58 c) 116 d) 972 e) 486

7. En una serie de tres razones geométricas iguales, el producto de los términos de cada razón es 15, 60 y 135 y además la suma de los cuadrados de los consecuentes es 350. Hallar la razón.

a) 1.6 b) 1.7 c) 0.6 d) 2.7 e) 0.8

8. Si se cumple:

$$\frac{A\sqrt{a}}{a\sqrt{A}} = \frac{B\sqrt{b}}{b\sqrt{B}} = \frac{C\sqrt{c}}{c\sqrt{C}} = k$$

Hallar: $\sqrt{\dfrac{(A+a)(B+b)(C+c)}{axbxc}}$

a) $\sqrt{\sqrt{k}+1}$ b) $\sqrt{k^3+1}$ c) 1 d) $\sqrt{(k^2+1)^3}$ e) N.A.

9. Si: $\dfrac{9a}{c} = \dfrac{3d}{8b} = \dfrac{c}{2d} = \dfrac{3b}{a}$

Hallar: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{d}{b} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{b}{a}$

a) $\frac{3}{2}$ b) 6 c) $\frac{23}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{9}{4}$

10. En: $\dfrac{A}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{A} = k$

Hallar:

$$E = \frac{2A^3 + 3b^3}{4a^3}$$

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

11. Sabiendo que : $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{C}{c}$; además :

$$(A + a)(B + b)(C + c) = M^3$$

Calcular: $C\sqrt[3]{\dfrac{AxB}{C^2}} + c\sqrt[3]{\dfrac{axb}{c^2}}$

a) M b) $\sqrt[3]{M}$ c) $\sqrt[3]{\frac{M}{2}}$ d) M^3 e) M^2

12. Si en la siguiente serie:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{f}{g}$$

El producto de b x g = 250 y de a x f = 160.

Hallar d si se cumple que: e - c = 45

a) 100 b) 225 c) 125 d) 270 e) 75

13. Los cuadrados de 1/2, 1/4 y 1/8 son proporcionales a otros 3 números que suman 147/576. Uno de los números será:

a) 5/44 b) 7/144 c) 8/21 d) 7/176 e) 7/12

14. Si se cumple:

$$\frac{\overline{a0a0}}{\overline{b0b0}} = \frac{\overline{b0b0}}{\overline{c0c0}} = \frac{\overline{c0c0}}{\overline{d0d0}} = e$$

Hallar:

$$\underbrace{\overline{aa.....a}}_{e^2\ cif.} + \underbrace{\overline{bba.....b}}_{e^2\ cif.} + \underbrace{\overline{cc.....c}}_{e^2\ cif.} + \underbrace{\overline{dd.....d}}_{e^2\ cif.}$$

Si además $a \neq b \neq c \neq d$

a) 35298 b) 99999 c) 16665 d) 22800 e) 19998

15. En la siguiente serie de razones geométricas el producto de antecedentes entre el producto de consecuentes es, 2,520.

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{c} = \frac{3c}{d} = \frac{4d}{e} \ldots\ldots\ldots \frac{py}{z} = k$$

y además: $0.1 < \frac{a}{z} < 1$

Calcular: $k^p \div (p - 2)p$

a) 72 b) 7 c) 360 d) 1 e) 8

16. Un perro dóberman parte de A en dirección AB, al mismo tiempo que 2 personas parten de B en sentidos contrarios. El perro encuentra al 1° en M y al 2do. en N. Calcular la distancia de A a B si de M a N hay "d" km. y se sabe que las personas marchan con la misma velocidad y la velocidad del perro es x veces la de las personas.

a) $\frac{d(x^2-1)}{2x}$ b) $\frac{x^2-1}{d-1}$ c) $\frac{dx^2}{x^2-1}$ d) $\frac{(x+1)d}{x}$ e) $\frac{dx^2}{x+1}$

17. Si se tiene la siguiente serie de razones aritméticas iguales:

$$X - Y = 2X - 3Y = 9Y - 4X$$

Hallar :

$$E = \frac{X^2 - 2XY}{Y - X}$$

a) 1 b) 0 c) X d) -1 e) Y

18. Se tiene la doble igualdad :

$$\frac{M}{n} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p}$$

Si :

$$\frac{M^2m + N^2n + P^2p}{\frac{M^4}{m} + \frac{N^4}{n} + \frac{P^4}{p}} = \frac{1}{36^2}$$

Hallar :

$$\frac{\sqrt{Mn} + \sqrt{Nn} + \sqrt{Pp}}{m + n + p}$$

a) 9 b) 12 c) 6 d) 2 e) 4

19. Se tiene la siguiente serie :

$$\frac{72}{a} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{84}{d}$$

Se sabe que :

$$a + b + c + d = 91$$

Hallar: $c - d$

a) 4 b) 7 c) 3 d) 6 e) 8

20. Si: $\frac{x}{4} = \frac{m}{x} = \frac{y}{m}$

y $\frac{x^4}{16} + xy = 288$. Hallar el valor de "m".

a) 12 b) 8 c) 6 d) 9 e) 18

21. Se tiene que : $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ y $\frac{23ab}{3a + 2b + c} = 48$;

Hallar 2b - c

a) 6 b) 8 c) 3 d) 4 e) 2

22. Si : $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\frac{R}{s}$ y $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{R}{s}=8.25$

Hallar : $\frac{sq+ps}{Rq}$

a) 1.5 b) 2.5 c) 2 d) 1.25 e) 1.2

23. Si : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a^3-b^3}{b^3-c^3}=8$

Hallar el valor de "E" :

$$E=\frac{axb+bxc+cxd}{(a+b+c)(b+c+d)}$$

a) 0.5 b) $\frac{3}{49}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{3}{7}$ e) 8

24. Si $\frac{A+S}{A}=\frac{A+M}{M}=\frac{M+S}{S}$

Hallar el valor de:

$$E=\frac{\sqrt[3]{AxMxS}}{A+M+S}$$

a) 2 b) 2/3 c) 3 d) 1/3 e) 1/2

25. En una serie de razones geométricas iguales de razón 3, los antecedentes son 3 números consecutivos. Hallar la suma de los consecuentes, sabiendo que su producto es 18,960.

a) 15 b) 80 c) 7.5 d) 46 e) N.A.

26. En una serie de 4 razones geométricas iguales, la diferencia entre la suma de antecedentes menos la suma de consecuentes dio 22. Determinar el término mayor de la serie si uno de los consecuentes es 1, si todos los consecuentes son diferentes y si también sólo dos de los términos, de la serie de razones, son pares.

a) 12 b) 36 c) 18 d) 24 e) 15

27. Si $\frac{\overline{aaa}}{\overline{bbb}} = \frac{\overline{bbb}}{\overline{ccc}} = \frac{\overline{ccc}}{\overline{ddd}} = 10 - a$ y $d = \frac{c}{2}$. Hallar $a + b + c + d$

a) 6 b) 13 c) 15 d) 24 e) 36

28. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números 5, 3 y 40.
Hallar el mayor.

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 100

Clave

1. e	11. b	21. c
2. a	12. b	22. e
3. c	13. a	23. c
4. d	14. c	24. a
5. a	15. b	25. d
6. c	16. d	26. b
7. e	17. a	27. b
8. d	18. c	28. c
9. b	19. b	29. a
10. c	20. b	30. b
		31. e

SERIE DE RAZONES

Clave

1. b	8. d	15. a	22. a
2. a	9. c	16. a	23. c
3. c	10. c	17. c	24. a
4. a	11. a	18. b	25. b
5. e	12. a	19. c	26. a
6. d	13. b	20. d	27. d
7. c	14. c	21. b	28. a

Capítulo 16

PROMEDIOS

En una serie numérica, se llama promedio o cantidad media a todo número mayor que el menor integrante de la serie y menor que el mayor.

En la serie monótona ascendente:

$$a < b < c < d < ... < z$$

Si **x** es un promedio de la serie:

$$\therefore\ a < x < z$$

Entonces **x** puede tomar una cantidad ilimitada de valores; este análisis nos indica que en cualquier serie numérica existe una cantidad indeterminada de promedios. Los principales promedios o promedios notables son:

Promedio aritmético, geométrico y armónico.

Antes de definir estos promedios analicemos los:

"Teoremas referentes a la serie de fracciones desiguales"

T.1. La fracción formada por la suma de numeradores, dividida por la suma de denominadores está comprendida entre la mayor y la menor.

Si: $$q = \frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1} < \frac{c}{c_1} < ..... < \frac{\ell}{\ell_1} = p ..... \quad (1)$$

Dq.: $$\frac{a}{a_1} < \frac{a+b+c+.....\ell}{a_1+b_1+c_1+.....\ell_1} < \frac{\ell}{\ell_1} \quad ..... \quad (2)$$

Demostración:

De 1: $a = a_1 q \; ; \; b > b_1 q > ... \; \ell > \ell_1 q$

Sumando: $a + b + dc + ... + \ell > (a_1 + b_1 + c_1 + ... + \ell_1)q$

$$\frac{a+b+c+.....\ell}{a_1+b_1+c_1+.....\ell_1} > q \qquad \left(q = \frac{a}{a_1}\right)$$

$$\frac{a+b+c+.....\ell}{a_1+b_1+c_1+.....\ell_1} > \frac{a}{a_1} \quad ..... \quad (3)$$

De 1: $a < a_1 p \quad b < b_1 p \quad c < c_1 p \; , \; ..... \; \ell = \ell_1 p$

Sumando: $a + b + c + ... + \ell < (a_1 + b_1 + c_1 + ... + \ell_1)p$

$$\frac{a+b+c+.....\ell}{a_1+b_1+c_1+.....\ell_1} < \frac{\ell}{\ell_1} \quad ..... \quad (4)$$

De 3 y 4 : $$\frac{a}{a_1} < \frac{a+b+c+.....\ell}{a_1+b_1+c_1+.....\ell_1} < p = \frac{\ell}{\ell_1}$$ **L.q.q.d.**

T.2. "Si las fracciones desiguales son todas positivas, la fracción formada por la raíz enésima del producto de los numeradores y por la raíz n de los productos de los n denominadores está comprendida entre la mayor y la menor".

$$q = \frac{a^{\downarrow n}}{a_1} < \frac{b}{b_1} < ..... < \frac{\ell^{\downarrow}}{\ell_1} = p$$

$$\frac{a}{a_1} < \frac{\sqrt[n]{ab...\ell}}{\sqrt[n]{a_1 b_1 ... \ell_1}} < \frac{\ell}{\ell_1}$$

$$a = a_1 q \quad + b > + b_1 q \; ..... + \ell > + \ell_1 q$$

Multiplicando:

$$+ ab.....\ell > + a_1 b_1 \; .....\ell_1 q^n$$

$$\sqrt[n]{ab...\ell} > + \sqrt[n]{a_1 b_1 ... \ell_1}\; q$$

$$\frac{\sqrt[n]{ab...\ell}}{\sqrt[n]{a_1 b_1 ... \ell_1}} > \frac{a}{a_1} \quad ..... \quad (1)$$

$+ a < a_1 p \qquad b < b_1 p \ldots\ldots\ldots\ell = \ell_1 p$

$+ ab\ldots\ldots\ldots\ell < a_1 b_1 \ldots\ldots\ldots \ell_1 p^n$

$\sqrt[n]{ab\ldots\ell} < \sqrt[n]{a_1 b_1 \ldots \ell_1}\, p$

$$\frac{\sqrt[n]{ab\ldots\ell}}{\sqrt[n]{a_1 b_1 \ldots \ell_1}} < \frac{\ell}{\ell_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ De 1 y 2:

$$\frac{a}{a_1} < \frac{\sqrt[n]{ab\ldots\ell}}{\sqrt[n]{a_1 b_1 \ldots \ell_1}} < \frac{\ell}{\ell_1}$$

T.3. La fracción formada por la suma de productos de numeradores por variables distintas, dividida por la suma de productos de denominadores por las respectivas variables, está comprendida entre la mayor y la menor.

$$\frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1} < \frac{c}{c_1} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{\ell}{\ell_1}$$

$$\frac{ax}{a_1 x} < \frac{by}{b_1 y} < \frac{cz}{c_1 z} < \ldots\ldots\ldots < \frac{\ell t}{\ell_1 t}$$

Por T.1: $$\frac{a}{a_1} < \frac{ax + by + cz + \ldots\ldots + \ell t}{a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + \ell_1 t} < \frac{\ell}{\ell_1}$$

Promedio aritmético (media aritmética : $\overline{Ma}$.)

Es el promedio que se obtiene al dividir la suma de todos los términos entre el número de términos.

$$\overline{Ma}\ (8;\ 12;\ 30;\ 50) = \frac{8 + 12 + 30 + 50}{4} = 25$$

Promedio ponderado (media ponderada: $\overline{Mp}$.)

Es un caso especial de la media aritmética donde alguna (s) de las cantidades se repiten; a las veces que se repite una cantidad se le llama frecuencia o peso:

Hallar el promedio ponderado de las siguientes cantidades:

Cantidades	Frecuencia
8	5
12	10
20	4

$$\overline{Mp} = \frac{8x5+12x10+20x4}{5+10+4} = \frac{240}{19} \cong 12.6$$

$$\overline{Mp} = \frac{\text{Suma de cantidades x frecuencia}}{\text{Número de frecuencias}}$$

Promedio geométrico (media goemétrica : $\overline{Mg}$.)

Es el promedio que se obtiene al extraer la raíz enésima del producto de "n" cantidades.

$$\overline{Mg} = \sqrt[n]{axbxcx.....xz}$$
$$\text{——"n" cantidades——}$$

$$\overline{Mg}\ (1, 2, 32) = \sqrt[3]{1x2x32} = 4$$

Promedio armónico (Media armónica : Mh.)

En la serie : $a_1 < a_2 < ... < a_n$

Se cumple: $\frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2} > ..... > \frac{1}{a_n}$

$$\frac{\frac{1}{a_1}}{1} > \frac{\frac{1}{a_2}}{1} > ..... > \frac{\frac{1}{a_n}}{1}$$

Por Teorema N°1 : $\frac{1}{a_1} > \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}.+.....+\frac{1}{a_n}}{n} > \frac{1}{a_n}$

$$a_1 < \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}.+.....+\frac{1}{a_n}} < a_n$$

$$Mh. = \frac{n}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_2}+.....+\frac{1}{a_n}}$$

Media armónica es el promedio que se obtiene al dividir el número de términos entre la suma de las inversas de todos los términos.

PROPIEDADES

1. Para dos números positivos se cumple que su media aritmética es mayor o igual que su media geométrica.

Sean "a" y "b" los números: $a > b$

Otra forma : $a \geq b$

Dq.: $Ma. > Mg.$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0$$

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} > 0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0$$

Lo que demuestra la propiedad

$$a \geq b$$

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$\therefore Ma. \geq Mg.$

2. Para dos números positivos se cumple que su media geométrica está comprendida entre su media armónica y su media aritmética.

Sean "a" y "b" los números: $a > b$

Dq.: $Mh\,(a,b) < Mg\,(a,b) < Ma.\,(a,b)$

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

1°Parte:

$$Mg\,(a,b) < Ma\,(a,b)$$

Demostrado (P.1)

2da.Parte:

$$Mg_{(a,b)} > Mh_{(a,b)}$$

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} > 0$$

$$(a+b)\sqrt{ab} - 2ab > 0$$

$$\sqrt{ab}\left[a+b-2\sqrt{ab}\right] > 0$$

$$\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0 \qquad \textbf{L.q.q.d.}$$

3. La media geométrica de dos cantidades positivas es media proporcional entre la media aritmética y la media armónica.

Sean: "a" y "b" los números a > b.

Dq.: $Mg^2_{(a,,b)} = Ma_{\cdot(a,b)} \times Mh_{(a,b)}$

$$Mh_{(a,b)} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{Mg^2_{(a,b)}}{Ma_{(a,b)}}$$

$$Mh_{(a,b)} \times Ma_{(a,b)} = Mg^2_{(a,b)}$$

Otra forma:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = ab.$$

$$Ma_{(a,b)} \times Mh_{(a,b)} = Mg^2_{(a,b)} \qquad \textbf{L.q.q.d.}$$

4. La media aritmética de toda progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos equidistantes de los extremos o igual al término central si hubiera.

Fórmula que da el error que se comete a tomar la Ma. por la Mg.

Sea $a > b$ $\qquad a = b + d$ ("d" es la diferencia de los números "a" y "b")

luego: $Ma = \frac{a+b}{2} = b + \frac{d}{2}$ ..... (1)

$$Mg = \sqrt{ab} = \sqrt{b^2 + bd}$$ ..... (2)

(1) y (2) al cuadrado:

$$Ma^2 = b^2 + bd + \frac{d^2}{4}$$

restando:

$$Mg^2 = b^2 + bd$$

$$Ma^2 - Mg^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{Ma - Mg = \frac{d^2}{4(Ma + Mg.)}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE PROMEDIOS

Observaciones Previas

- Debemos recordar propiedades de las proporciones y de los promedios.
- Recordemos que para dos números la $\overline{Ma}$, es mayor que la $\overline{Mg}$ y ésta mayor que la Mh.

1. La diferencia de dos números y la diferencia entre su media aritmética (Ma.) y su media geométrica (Mg.) están en la misma relación que 9 a 2.
Hallar la relación en que se encuentran los números.

Solución

Sean "a" y "b" los números. a > b. Podemos establecer:

$$\frac{a-b}{\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}}=\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}}=\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{9}{4}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{9+4}{9-4}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{13}{5}$$

Rpta. $\frac{a}{b}=\frac{169}{25}$

2. La media aritmética de siete números pares consecutivos es 118. Hallar la media geométrica entre el menor y el mayor.

Solución

Sea "n" el número menor, la media aritmética será:

$$\frac{n+(n+2)+(n+4)+.....+(n+12)}{7}=118$$

$\Rightarrow 7n + (2 + 4 + 6 + ... + 12) = 826 \Rightarrow n = 112$ (menor) $\wedge$ $n + 12 = 124$ (mayor)

$\therefore$ La media geométrica pedida $= \sqrt{112x124} = 8\sqrt{217}$

Rpta. $8\sqrt{217}$

3. Si la media geométrica de "M" cantidades es "N" y además ninguna de ellas es menor que (N - P). ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar una de las cantidades?

Solución

Para que una de las cantidades sea lo mayor posible, las otras deben ser iguales a (N - P). Sea Z la cantidad mayor, tendríamos que:

$$Mg = \sqrt[M]{(N-P)^{M-1} x Z} = N \Rightarrow Z = \frac{N^M}{(N-P)^{M-1}}$$

Rpta. $\dfrac{N^M}{(N-P)^{M-1}}$

4. El promedio de 30 números consecutivos es 62.5 y el promedio de otros 20 números consecutivos es 81.5. ¿Cuál es el promedio de los 10 mayores del primer grupo y los 10 mayores del segundo grupo?

Solución

Primer grupo: a, (a+1), (a +2), ..., (a+29) $\therefore$ Ma $= \dfrac{30a + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 29}{30} = 62.5$

$\therefore$ a = 48

Segundo grupo: b, (b+1), (b+2), ..., (b+19) $\therefore$ Ma $= \dfrac{20b + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 19}{20} = 81.5$

$\therefore$ b = 72

Los 10 mayores del primer grupo: 77, 76, 75, ..., 68

Los 10 mayores del segundo grupo: 91, 90, 89, ..., 82

} Promedio de estos dos grupos = 79.5

Rpta. 79.5

5. Sabiendo que la media aritmética de tres números y de los productos, formados por todos los pares posibles de estos números, son 285 y 73,500, hallar la media aritmética de los cuadrados de dichos números.

Solución

Sean: "a", "b" y "c" los números. Productos posibles (al tomar pares de números):

ab, ac, bc

Podemos establecer: $\dfrac{a+b+c}{3} = 285 \rightarrow a + b + c = 855$ ..... (1)

También: $\frac{axb+axc+bxc}{3} = 73{,}500 \Rightarrow axb + bxc + axc = 220{,}500$ ..... (2)

Como: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + ac + bc)$ ..... (3)

(1) y (2) en (3): $(855)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 220{,}500 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 290{,}025$

$\therefore Ma_{(a^2,b^2,c^2)} = \frac{29005}{3} = 96{,}675$

Rpta. 96,675

6. El cociente de dos números es 4, siendo la diferencia entre su Ma. y su Mg. la unidad. Determinar su Mh.

Solución

Sean: "a" y "b" los números; según datos, podemos establecer:

$\frac{a}{b} = 4 \rightarrow a = 4b$ Además: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1$ reemplazo "a" por 4b

$\Rightarrow 2.5b - \sqrt{4b^2} = 1 \Rightarrow 0.5b = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 8$

$\therefore Mh_{(a,b)} = \frac{2x2x8}{2+8} = 3.2$

Rpta. 3.2

7. Si la Ma. de dos números enteros es a la Mh. de los mismos como 25 es a 21. Hallar el menor par de ellos que satisface esta relación, indicando su diferencia.

Solución

Sean: "a" y "b" los números: Del enunciado podemos establecer:

$\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2ab}{a+b}} = \frac{25}{21} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{25}{21} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{10^2}{21} = \frac{(7+3)^2}{7x3}$, los menores números que cumplen son 7 y 3, siendo su diferencia 4.

Rpta. Diferencia 4.

8. Después que han sido tomados los exámenes parciales de los seis cursos; un alumno tiene 16 como Ma. de sus notas parciales; $6\sqrt{20}$ como Mg. en tres cursos (Algebra, Trigonometría

y Física) y 16 como Mh. de dos cursos (Química y Geometría), si se sabe que no ha tenido menos de 15 ni más de 18 en sus notas. Determinar cuál fue la nota parcial en el curso de Aritmética, si todas las notas son números enteros.

Solución

Consideremos: Aritmética = A; Algebra = X, Trig. = T; Geom. = G; Fís. = F; Quím. = Q.

Por dato: $\frac{A+X+T+G+F+Q}{6} = 16 \Rightarrow A + X + T + G + F + Q = 96$ ..... (1)

También: $\sqrt[3]{XxTxF} = 6\sqrt[3]{20} \Rightarrow XxTxF = 6^3 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$. De aquí como no ha sacado menos de 15 ni más de 18 se deduce que:

$X \times T \times F = 18 \times 15 \times 16$ en (1):

$A + G + Q + (18 + 15 + 16) = 96 \rightarrow A + G + Q = 47$ ..... (2)

Además: $Mh_{(G,Q)} = 16 = \frac{2GxQ}{G+Q}$, por condición se infiere que G = 16, Q = 16 estos valores en (2):

$A + 16 + 16 = 47 \Rightarrow A = 15$

Rpta. A = 15

9. La diferencia entre dos números es 7 y la suma de su media aritmética y su media geométrica es 24.5. Hallar el error que se comete al tomar la media geométrica como media aritmética.

Solución

Sean: "a" y "b" los números:

$a - b = 7$..... (1)

$Ma + Mg = 24.5$..... (2)

De (2):

$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 24.5$

$a + b + 2\sqrt{ab} = 49$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 7$..... (3)

De (1):

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 7$..(4)

Podemos establecer otro método:

(aplicando fórmula)

d = diferencia de los números = 7

Como:

$Ma - Mg = \frac{d^2}{4(Ma. + Mg.)}$

$Ma - Mg = \frac{7^2}{4(24.5)} = 0.5$

Rpta. error cometido es 0.5

De (3) y (4):

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De (3) y (5):

$$\sqrt{a} = 4 \rightarrow a = 16$$

$$\sqrt{b} = 3 \rightarrow b = 9$$

$$Ma = \frac{16+9}{2} = 12.5; \quad Mg = \sqrt{16x9} = 12$$

error: Ma - Mg = 0.5

Rpta. 0.5

10. La media geométrica de la progresión geométrica de las cifras del número: $N = \overline{abc}$ es 4. Hallar N.

Solución

Por condición: la Mg . (a, b, c) = $\sqrt[3]{axbxc} = 4$ ..... (1)

como a, b y c están en progresión geométrica, podemos establecer:

$a = a$; $b = aq$ y $c = aq^2$ ..... (2)

(2) en (1): $\sqrt[3]{axaqxaq^2} = 4$, elevando al cubo:

$a \times aq \times aq^2 = 4^3 = 2^6 = 2 \times 2^2 \times 2^3$; de aquí se deduce:

$a = 2$ $b = aq = 4$ $c = aq^2 = 8$

$\therefore N = \overline{abc} = 248$

Rpta. 248

11. Si Mg (a,b) = 12 y Mg (a + 7, b + 9) = 20. Luego b - a es : (Siendo a y b enteros y b mayor que a)

Solución

Por dato: $\begin{cases} ab = 12^2 = 144 \\ (a+7)(b+9) = 20^2 = 400 \end{cases}$

$$ab + 7b + 9a + 63 = 400 \rightarrow \begin{cases} 7b + 9a = 163 \ldots\ldots\ldots & (1) \\ ab = 144 \ldots\ldots\ldots & (2) \end{cases}$$

De (1) despejando b:

$$b = \frac{193-9a}{7} = (27 - 2a) + \frac{4+5a}{7}$$

Como b es entero: $\frac{4+5a}{7}$ debe serlo :

a = 2 , a = 9 (a debe ser menor que 12 pues b es mayor que a)

El único que cumple es a = 9, entonces :

Rpta. b = 16 , b - a = 7

12. Hallar n si la media armónica de :
1, 1/2, 1/3.....1/n es 1/19.

Solución

$$MH = \frac{n}{1+2+3+.....+n} = \frac{n}{\frac{(n)(n+1)}{2}} = \frac{1}{19} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{2}{n+1} \rightarrow \frac{2}{n+1} = \frac{1}{19} \rightarrow n = 37$$

Rpta. n = 37

13. La Media aritmética de dos números enteros es los 5/4 de su media geométrica. Hallar la razón de dichos números.

Solución

Sean A y B los números.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{AB} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{2\sqrt{AB}} = \frac{5}{4} = \frac{\left[a+b+2\sqrt{AB}\right]}{\left[a+b-2\sqrt{AB}\right]} = \frac{9}{1}$$

(Se aplicó la propiedad: "suma de primeros términos es a su diferencia como la suma de los segundos términos es a su diferencia".)

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = 9 \rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = 3$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 2 \rightarrow \frac{a}{b} = 4$$

Rpta. 4

14. En la sgte. serie: 1, 3, 2, 6, 3, 9, 4, 12, 5, 15, ... 3n ¿Cuál debe ser el valor de n para que la media aritmética sea mayor que 119.5 y menor que 120.6

Solución

En la serie hay dos series intercaladas que debemos identificar:
1, 2, 3, 4, 5, ... n y 3, 6, 9, 12, ... 3n
La media aritmética (M.A.)

$$\text{M.A.} = \frac{(1+2+3+4+.....n)+3(1+2+3+4+.....n)}{2n}$$

$$\text{M.A.} = \frac{4(n)(n+1)}{4n} = n+1$$

Por dato $119.5 < \text{M.A.} < 120.6$

Rpta. $n = 119$

15. La Mg de dos números es 6 y la diferencia entre su Ma. y su Mh. es 6.4, luego la diferencia entre Ma. y su Mg. es :

Solución

$$(Mg)^2 = Ma \times Mh \quad 36 = Ma\,(Ma - 6.4)$$

$$360 = Ma(10\,Ma - 64) = 10 \times 36 \rightarrow Ma = 10$$

Como la Ma. es mayor que la Mh. , entonces:

$$Ma - Mh = 6.4$$

Luego: $Ma - Mg = 10 - 6 = 4$

Rpta. 4

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre promedios
(Con Clave)

1. Si para 2 números enteros se cumple que :

$$(\overline{mg}.)^2 = 5 \times mh$$

Hallar la suma de las mh. de las 4 soluciones de números diferentes que tiene este problema.

a) 10 b) 19 c) 20 d) 95 e) 14

2. El cuadrado de la Ma. de 2 números excede en 1 al cuadrado de su Mg. Hallar el mayor de dichos números si su Mh. es 4.8.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 5 e) 10

3. Decir cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas:

I. La Suma de los numeradores entre la suma de los denominadores de varios quebrados distintos es un promedio de dichos quebrados.

II. La inversa de la media armónica de ciertas cantidades es la inversa de la media aritmética de las inversas a dichas cantidades.

III. La media geométrica de dos cantidades es media geométrica entre la media aritmética y armónica de dichas cantidades.

a) I y II b) II y III c) Sólo III d) Al menos II e) I y III

4. La ma. de 30 números es 20, si se quita 2 de ellos cuya ma. es 48, en cuanto disminuye la ma. de los restantes.

a) 1 b) 1.5 c) 2 d) 2.5 e) 3

5. La ma. de 3 números es 14, su mh. es 32/7 y su mg. es igual a uno de los números. Hallar el menor de los números.

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10 e) 12

6. La Ma. de los cubos de tres números enteros y consecutivos es igual a la Mg. de los cubos aumentada en 63; entonces la Mh. de los tres números está comprendida entre:

a) 20 y 20.5 b) 21 y 22 c) 21.5 y 22.5 d) 20.5 y 21 e) 19.5 y 20

7. Se dan cuatro enteros positivos; seleccione tres enteros, halle su media aritmética y sume este resultado al cuarto número. Estos cálculos dan respectivamente: 29, 23, 21 y 17. Determinar la media aritmética del mayor y del menor de los números.

a) 12.5 b) 9.0 c) 12.0 d) 13.5 e) 14.0

8. La media geométrica de cuatro enteros distintos es $5\sqrt{5}$. ¿Cuál es la media aritmética de estos números?

a) 36 b) 39 c) 42 d) 45 e) 48

9. La media armónica de 3, 15, 35, ..., 1023 es:

a) 31 b) 33 c) 37 d) 39 e) 41

10. La media aritmética de la sucesión 123, 321, 234, 432, 345, ... es:

a) 688.9 b) 777 c) 450 d) 555 e) 818.1

11. Las edades de cinco personas son: 19, 28, 33, 37 y 43 años respectivamente. ¿Cuántos años deben transcurrir para que el promedio de edades sea 39 años?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

12. La media armónica de 3 números es 24/5 . Si uno de los números es 6 y la media geométrica de los otros dos es $2\sqrt{6}$.
Calcular el mayor de los números.

a) 12 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

13. Al hallar la media aritmética de los siguientes números: 5, 10, 15, 20, ..., 5n se determinó que era mayor que 252 y menor que 253. Hallar n.

a) 100 b) 95 c) 90 d) 85 e) 80

Clave

1. e	5. a	9. d	13. a
2. b	6. e	10. c	
3. e	7. a	11. b	
4. c	8. a	12. d	

Capítulo 17

He aquí una gráfica y artística representación de proporcionalidad.

PROPORCIONALIDAD

* "El valor de una mercancía varía con el peso".

* "La cantidad de agua que vierte un grifo, varía con el tiempo que está abierto".

* "El tiempo que emplea un automóvil en cubrir una distancia (constante) varía con la velocidad".

En los ejemplos señalados podemos apreciar que dos magnitudes se están comparando, de tal manera que los valores de una de ellas depende de los valores que se le asignen a la otra; se trata de una función lineal.

Al comparar dos magnitudes estas pueden ser directa o inversamente proporcional.

Magnitudes directamente proporcionales: (D.P.): (α)

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al hacerse los valores de una de ellas 2, 3, 4, 5, ..., n veces mayor o menor, los valores correspondientes de la otra, se hacen respectivamente mayores o menores el mismo número de veces.

Ejemplo:

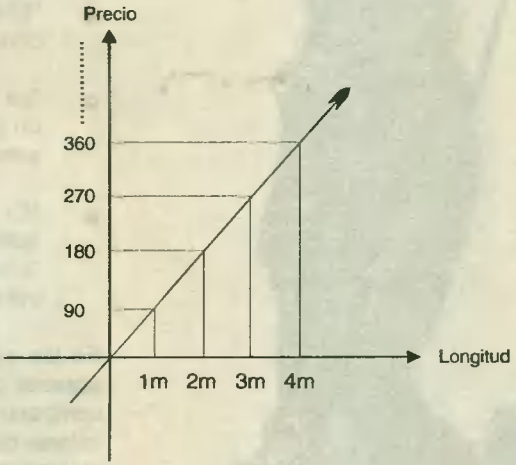
Magnitudes	valores correspondientes				
	Longitud:	1m	2m	3m	4m .....
	Precio:	S/90	S/180	S/270	S/360 ...

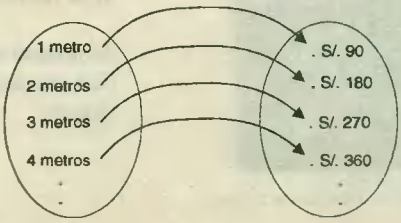
Se cumple: $\frac{1}{90} = \frac{2}{180} = \frac{3}{270} = \frac{4}{360} = \ldots\ldots\ldots\ldots = k = \left(\frac{1}{90}\right)$ se infiere:

1° Si dos magnitudes son D.P. se cumple que el cociente de sus valores correspondientes, nos da una cantidad constante.

2° Los valores correspondientes aumentan o disminuyen en la misma proporción.

Como se trata de una función lineal, de la forma f(x) = kx podemos graficar:





Magnitudes inversamente proporcionales: IP (←)

Definición:

Dos magnitudes son I.P. cuando al hacerse los valores de una de ellas, 2, 3, 4, 5, ..., n veces **mayores** o **menores**, los valores correspondientes de la otra se hacen 2, 3, 4, 5, ..., n veces **menores** o **mayores** respectivamente.

Ejemplo

Obreros y tiempo que emplean en realizar una obra.

		Valores correspondientes		
Magnitudes <	OBREROS	15	5	1
	TIEMPO	120hs	360 hs	1800 hs.

Se cumple:

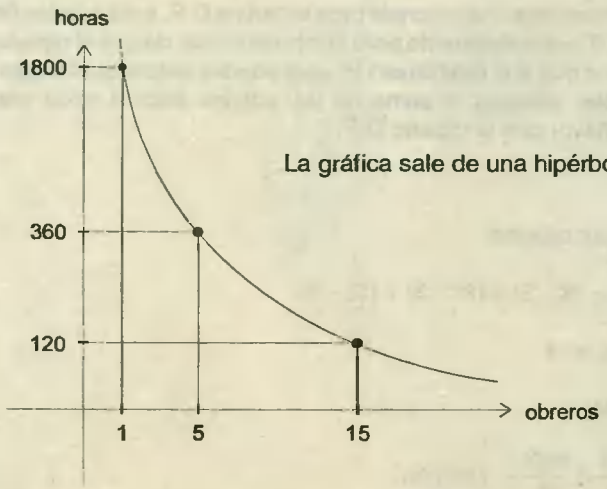
1° Que el producto de sus valores correspondientes, da una Cantidad constante:

$$15 \times 120 = 5 \times 360 = 1 \times 1800 = k$$

2° Mientras que los valores de una de las magnitudes, van aumentando, los valores correspondientes de la otra, van disminuyendo en la misma proporción.

Se trata de una función lineal de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$

Se puede graficar:



La gráfica sale de una hipérbola equilátera.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE PROPORCIONALIDAD

Análisis Previo

* Debemos recordar que si dos magnitudes A y B son D.P. se cumple que el cociente de sus valores correspondientes, nos da una cantidad constante; es decir: $\frac{A}{B} = k \Rightarrow A = Bk.$

* Si las magnitudes C y D son I.P. el producto de sus valores correspondientes, nos da una cantidad constante; es decir:

$$C \times D = K \text{ (cte)}$$

1. Si A es D.P. a B e I.P. a la $\sqrt{C}$. En un determinado momento A vale 720. ¿Qué valor tomará A si B aumenta en un 80% y C disminuye en un 36%.

Solución

$$\frac{A\sqrt{C}}{B} = K$$

$$\frac{720x\sqrt{C}}{B} = \frac{Ax\sqrt{0.64C}}{1.8\,B}$$

$$A = 1,620$$

Rpta. 1,620

2. Un millonario al morir deja una herencia para repartirla D.P. a las edades de sus 3 nietos que son como 2, 4 y 10 respectivamente pero con la condición de que el reparto se hiciese luego de 4 años. Se sabe que si el reparto es I.P. a las edades entonces el menor sale beneficiado con 700,000 soles, además la suma de las edades hace 2 años era 26. ¿Cuánto le corresponde al mayor con el reparto D.P.?

Solución

Sean k, 2k y 5k las edades:

$$26 = (k - 2) + (2k - 2) + (5k - 2)$$

$$\Rightarrow K = 4$$

Sea H la herencia:

$$\frac{Hx8}{44} = \frac{Hx3}{16} = 700,000$$

$\Rightarrow$ H = 2'200,000

Al mayor le corresponde:

$$\frac{2'200,000 \times 24}{44} = 1'200,000$$

Rpta. 1'200,000

3. Se sabe que A.D.P. a 1/B y es inversamente proporcional al cubo de 1/C. Cuándo A = 12, B = 18, C vale 2. ¿Qué valor toma C si A es 36 y B es 48?

Solución

$$\begin{matrix} \text{ADP } \frac{1}{B} \\ \text{AIP}\left(\frac{1}{C}\right)^3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{A\left(\frac{1}{C}\right)^3}{\frac{1}{B}} = K \Rightarrow \frac{AB}{C^3} = K, \text{ luego}$$

$$\frac{12 \times 18}{2^3} = \frac{36 \times 48}{C^3}$$

Rpta. C = 4

4. Se tiene que A D.P. a 1/D , B D.P. a C y DIP 1/C . Luego afirmamos:

Solución

$$\frac{A}{\frac{1}{D}} = K \rightarrow AD = K$$

$$\frac{D}{C} = K_1 \rightarrow \frac{C}{D} = K_1$$

$$\frac{B}{C} = K_2 \rightarrow \frac{B}{C} = K_2$$

$$AB = \text{cte.}$$

Rpta. AIPB

5. LLenar con un cierto líquido un cierto envase esférico de radio 20cm. demora 5 minutos. ¿ Cuántos minutos demora llenar un envase de radio 25 cm.?

Solución

$$t = K_1 V = KR^3$$

Luego:

$$\frac{t_1}{t} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^3 \rightarrow \frac{t_1}{5} = \left(\frac{25}{20}\right)^3$$

$$t_1 = 5\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{625}{64} = 9.77 \text{ min.}$$

Rpta.: 9.77 min.

6. Si se tiene la siguiente tabla de valores para dos magnitudes A y B:

A	36	144	324	9	4
B	6	3	2	12	18

Entonces:

a) $A \alpha B$ b) $A \alpha \frac{1}{B}$ c) $A \alpha B^2$ d) $A \alpha \frac{1}{B^2}$ e) $A \alpha B^3$

Solución

Notaremos que cuando B se divide entre 2, A se multiplica por 4, cuando B se divide entre 3, A se multiplica por 9.

$\therefore$ A es I.P. a B^2 o sea:

$$A \alpha \frac{1}{B^2}$$

Rpta. : D

7. La diferencia de A y B es D.P. a C^2 e I.P. a D. Cuando A es el triple de B y C vale 2 entonces D es igual a 8.
¿A cuánto será igual D cuando A sea el doble de B y C valga 3?

Solución

$$\frac{(A-B)D}{C^2}=K$$

$$\frac{(3B-B)x8}{2^2}=\frac{(2B-B)xD}{3^2} \Rightarrow \frac{2B \times 8}{4}=\frac{B \times D}{9} \Leftrightarrow D = 36$$

Rpta. D = 36

8. La magnitud "A" es D.P. al cuadrado de la magnitud B más 3 unidades y la magnitud B es I.P. al cubo de la magnitud C. Si cuando C = 2, B = 8. ¿En qué relación está el valor de A cuando C = 4 con respecto a su valor cuando C = 2?

Solución

Podemos establecer:

$$A = k(B^2 + 3); \quad B = k_1 \frac{1}{C^3} \Rightarrow C = 2;\ B = 8;\ k_1 = 64$$

luego: $A = k(8^2 + 3) = 67k$

Para: $C = 4 \Rightarrow B = 64x\frac{1}{64} = 1;\ A_1 = k(1^2 + 3) = 4k$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A}=\frac{4K}{67K}=\frac{4}{67}$$

Rpta. $\frac{4}{67}$

9. Tres magnitudes cuyo producto es constante son tales que si se duplica la mayor y triplica la intermedia, la menor se reduce en 5. Así mismo al elevar al cuadrado la mayor la intermedia disminuye a un octavo de su valor inicial. Si para los procesos descritos las tres magnitudes tenían valores enteros consecutivos, se pide determinar su producto.

Solución

Sean: A; B y C las magnitudes tales que: A > B > C

Se cumple que:

$$A \cdot B \cdot C = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Inicialmente:

$$(2a)\,(3b)\,(C-5) = k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$A \cdot B \cdot C = 6 \cdot A \cdot B\,(C-5) \Rightarrow C = 6, \text{ luego: } A \cdot B = \frac{K}{6}$$

ULTIMO PROCESO

Después: $A^2 \cdot \frac{B}{8} = \frac{K}{6}$ $\qquad A.B = \frac{A^2.B}{8} \Rightarrow A = 8;$ luego $B = 7$

Rpta. $\therefore A \cdot B \cdot C = 336$

10. Si el peso de un elefante blanco es D.P. a sus años. Si un elefante tuviera 360 kg., entonces su edad sería 32 años. ¿Cuántos años tendrá sabiendo que pesa 324 kg.?

Solución

$$\text{Peso } \alpha \text{ Años} \Rightarrow \frac{\text{Peso}}{\text{años}} = k \Rightarrow \text{Peso} = k.\ \text{años}$$

Reemplazando :

$$360 = k \times 32 \Rightarrow k = \frac{45}{4}$$

Pero:

$$\text{Años} = \frac{\text{peso}}{\frac{45}{4}} \Rightarrow \text{años} = \frac{324}{\frac{45}{4}} = 28.8$$

$$= 28 \text{ años} + 0.8 \text{ años} \times \frac{365}{1 \text{ año}} = 28.8$$

Rpta. 28 años 292 días

DP

11. La presión que ejerce un gas sobre el recipiente que lo contiene varía en razón inversa al volumen que ocupa. Calcular la presión ejercida por un gas en un recipiente esférico,

sabiendo que la misma cantidad de gas en otro recipiente, cuyo radio es al del anterior como 3 es a 2, la presión sería de 162 cmHg.

(Volumen de la esfera $= \frac{4}{3}\ \pi R^3$)

Solución

Se sabe: $\frac{\text{Radio del 1º}}{\text{Radio del 2º}} = \frac{2}{3}$

Pero: Volumen del 1ero. $= \frac{4}{3}\pi R_1^3$

Volumen del 2do. $= \frac{4}{3}\pi R_2^3$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{8}{27} = V_1 = \frac{8}{27}V_2$$

$PV = RT$

Por otra parte:

$$\text{Presión} = \frac{\text{Constante}}{\text{Volumen}} = P_1V_1 = P_2V_2$$

$$P_1 \times \frac{8}{27}V_2 = 162 \times V_2 = 162 \times V_2$$

Por lo tanto:

$$P_1 = \frac{162 \times 27}{8} = 546.75 \text{ cmHg}$$

Rpta. $P_1 = 546.75$ cmHg

12. Si la presión es D.P. a la profundidad en un cilindro de 15cm² de área de la base, la presión a 7 cm. de altura es 32.64 $\vec{gr}/cm^2$. Calcular la presión ejercida en el mismo recipiente de 141 cm³ de capacidad a 3.5 cm. de profundidad.

Solución

Sea: p = presión

h = profundidad

$= p = kh = 32.64$ ..... (1)

Volumen = base x altura = $15\ cm^2 \times (h + 7)cm = 141cm^3$

$\Leftrightarrow h = 2.4$ cm.

En (1):

$k(2 \cdot 4) = 32.64 \rightarrow k = 13.6\ gr/cm^3$

$\therefore p = (13.6) \times 3.5 = 47.6\ gr/cm^2$

Rpta. $47.6\ gr/cm^2$

13. El precio de un televisor a color varía en forma D.P. al cuadrado de su tamaño e I.P. a la raíz cuadrada de la energía que consume. Si cuando su tamaño es de T pulg. y consume x energía su precio es de 360 dólares. ¿Cuánto costará un televisor cuyo tamaño es al del anterior como 3 es a 2 y consume x/4 de energía?

Solución

$$P = \frac{KT^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{P_1\sqrt{x}}{T^2} = K$$

$$\frac{P_2\sqrt{\frac{x}{4}}}{\left(\frac{3}{2}T\right)^2} = k$$

$$\Rightarrow \frac{360\sqrt{x}}{T^2} = \frac{P_2\sqrt{x}.22}{3^2T^2\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{360 \times 9 \times 2}{2^2} = 1{,}620$$

Rpta. Costará 1,620 dólares.

PROBLEMAS PROPUESTOS

sobre proporcionalidad (con clave)

1. Dada la siguiente tabla esperimental donde los valores de una misma vertical son correspondientes. (por ejemplo cuando A = 1, B = 4, C = 1/2), indicar cuales son verdaderas.

A	1	8	1/8
B	4	256	1/16
C	1/2	1	1/4

I) A^2 es directamente proporcional a B (cuando C permanece constante.)

II) A es directamente proporcional a C^3. (cuando B permanece constante).

III) C es inversamente proporcional a B (cuando A permanece constante).

a) VVV b) VFV c) FVF d) FFV e) VVF

2. Decir si es V o F

I) Si A es directamente proporcional a $\sqrt[3]{C}$, A^3 es inversamente proporcional a C.

II) Si B es inversamente proporcional a $(1/\sqrt{C})$, B^2 es directamente proporcional a C.

III) Si A es directamente proporcional a C y C es directamente proporcional a B. Luego A es inversamente proporcional a B.

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) FFV

3. Se sabe que b es media proporcional y media aritmética entre a y c, determinar cual de las siguientes es verdadera si A es directamente proporcional a la inversa de la raíz cúbica de C elevada al cuadrado; y cuando A vale 1/4, C vale 8.

a) Si A vale 1/4, C vale $\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^3$

b) Si A vale 1/9, C vale $\left(\frac{3a}{b+c}\right)^3$

c) Si A vale 16, A vale $\frac{b}{4(b+c)}$

d) Si A = a, C vale b . c

e) Ninguna Anterior.

4. Un señor afirma que ha descubierto 2 magnitudes A y C tales que son directamente proporcionales con constante de proporcionalidad $\frac{K_1}{K_2}$ y también: $(A-k_1)$ y $(C+K_2)$ son inversamente proporcionales. Se afirma que:

a) Lo que afirma el señor es falso.

b) Puede ser cierto según como sea la relación entre K_1 y K_2.

c) Siempre es cierto esto.

d) Si $k_1 = k_2 = 1$ se cumple.

e) Ninguna Anterior.

5. A y B son magnitudes D.P., y C es D.P. a A - B. Si cuando A aumenta 5 unidades C aumenta 2 unidades, determinar el valor de C cuando A = 50.

a) 8 b) 5 c) 30 d) 20 e) 10

6. Se sabe que las magnitudes A y B son D.P. para valores de B menores o iguales que 4, y son I.P. para valores mayores o iguales que 4, si cuando B = 3, A = 3, luego cuando B = 8. A + B es:

a) 14 b) 9 c) 10 d) 16 e) 12

7. Se ha obtenido la siguiente tabla de valores para las magnitudes : A, B y C, que sólo pueden tomar valores enteros.

A	B	C
2	4	8
a	b	27

Si A es I.P. a B y D.P. a^3C y b - a = 1, determinar a + b.

a) 7 b) 9 c) 8 d) 10 e) 5

8. A es inversamente proporcional a la suma de B y C, y directamente proporcional a C^2. Si A = 12, y C = 2 entonces B = 10. Hallar B, cuando A = 9 y C = 3.

a) 21 b) 33 c) 22 d) 13 e) 17

9. Un estudiante de talento como 4, que dedica 8 horas de estudios al día, que tiene un equilibrio emocional como de 0.2 y 2.8 de habilidad manual mecánica logra en sus exámenes un promedio de 16. ¿Qué promedio obtendrá otro estudiante de talento 7, que dedica 4 horas de estudio diario, de equilibrio emocional 0.18 y de habilidad manual-mecánica 3.2?

a) 14.4 b) 16.8 c) 4 d) 15.6 e) Ninguna anterior.

10. Los goles que marca un equipo en un partido es una cantidad directamente proporcional al número de goles que marcó en el partido anterior más uno. Si en el primer partido marcó 1 gol y en el segundo 2 goles, determinar cuántos marcó hasta el quinto partido (inclusive).

a) 12 b) 15 c) 13 d) 14 e) 18

11. Se quiere construir un observatorio que tiene la forma de un cilindro (cuyo radio de la base es R) cubierto por una semi-esfera (de radio R); se sabe que las áreas exteriores de cilindro y la semi-esfera son proporcionales a R y R^2 respectivamente (con la misma constante de proporcionalidad) y que el costo de la construcción de la superficie exterior es proporcional al área.

Inicialmente se pensó hacerle con un radio de 10mts. pero posteriormente se aumentó dicho radio, motivo por el cual el costo aumentó en 23/55 de su costo inicial.
Determinar en cuánto aumentó el radio.

a) 2.18 mts. b) 0.17 mts. c) 0.50 mts d) 2 mts. e) 1 mt.

Nota: $2\pi R^2$ = área de la semiesfera.
$2\pi Rg$ = área exterior de un cilindro.

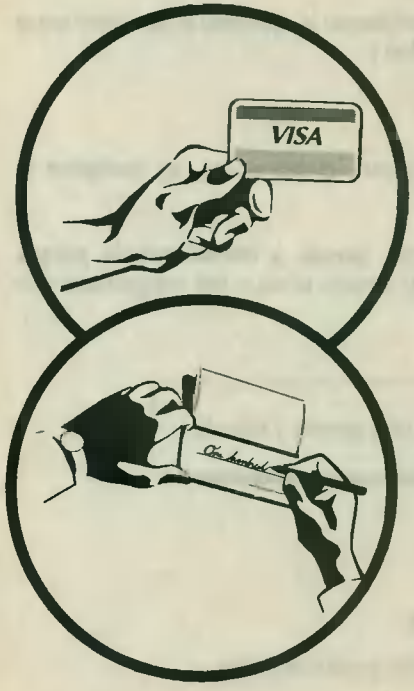
Clave

1.	e	7.	a
2.	d	8.	
3.		9.	a
4.		10.	
5.	e	11.	e
6.	c		

Capítulo 18

REGLA DE REPARTO

PROPORCIONAL O PRORRATEO
Y
REGLA DE COMPAÑIA



Otro de los importantes temas que se resuelven aplicando proporcionalidad proporciones y serie de razones iguales es el repartir una cantidad en forma directa o inversamente proporcional a otras.

Reparto Simple o Directo:

Supongamos que debemos resolver el siguiente problema:

Dos personas invirtieron S/.2 000 y S/.3 000 respectivamente en un negocio, en el que obtuvieron una ganancia neta de S/.1 000. ¿Cómo repartir la ganancia?

Es fácil deducir que quién más dinero colocó, más ganancia debe obtener. Pero el problema consiste en determinar cuanto gana cada uno. Lo que corresponde a la primera persona lo designaremos con X y lo que corresponde a la segunda con Y. Además se sabe que:

$$X + Y = 1\,000 \quad \ldots\ldots(1)$$

Para repartir proporcionalmente a lo que colocó cada uno, se procede así:

$$\frac{x}{1000} = \frac{y}{3000}$$

Considerando la proporción formada como una serie de razones iguales, aplicamos la propiedad: "La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente:

$$\frac{x+y}{2000+3000}=\frac{x}{100} \rightarrow \frac{1000}{5000}=\frac{x}{2000} \Rightarrow x = S/.\ 400$$

$$\frac{x+y}{2000+3000}=\frac{y}{3000} \rightarrow \frac{1000}{5000}=\frac{y}{3000} \Rightarrow y = S/.\ 600$$

La primera persona gana S/.400
La segunda persona gana S/.600

Método práctico

reciben:

$$1\,000 \begin{cases} 2\,000 \rightarrow X = 2\,000 \times K = 2\,000 \times \dfrac{1000}{5000} = 400 \\ 3\,000 \rightarrow Y = 3\,000 \times K = 2\,000 \times \dfrac{1000}{5000} = 600 \end{cases}$$

$$\rightarrow 5\,000$$

$k = \dfrac{1000}{5000}$ [la constante de reparto, se obtiene dividiendo la cantidad a repartirse entre la suma de los números proporcionales.]

Regla

Para determinar cuanto le corresponde a cada número proporcional, se multiplica la constante de reparto por cada número proporcional.

Este reparto descrito, se llama reparto proporcional, simple y directo simple porque intervienen sólo 2 magnitudes (ganancia y capital) y directo porque las magnitudes son directamente proporcionales.

> Todo reparto proporcional, se reduce a uno simple y directo.

Reparto simple e inverso

Simple: porque intervienen sólo dos magnitudes.

Inverso: porque las magnitudes son inversamente proporcionales.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

Observaciones Previas

* Una de las aplicaciones más directas de la teoría de proporcionalidad, la constituye el reparto proporcional.
* Debemos recordar (porque se utiliza mucho en la resolución de problemas) que el reparto no se altera, si a todos los números proporcionales, se les multiplica o divide por un mismo número.

1. Liquidada una sociedad resultó con pérdidas y sus socios, que eran 3, recibieron (descontadas las pérdidas).
1° $ 18,000 ; 2° = $ 27,000
3° $ 45,000. Se sabe también que la pérdida total fue la mitad del capital del primero. Determinar la pérdida del 3° si aporta un capital igual al del 1° y 2° juntos y si además se sabe el 1° recibiría $ 20,000 de ganancia si ganaban $ 100,000 en total.

Solución

Sean los aportes: a_1, a_2, a_3. Por dato : $\frac{20000}{100000} = \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} = \frac{1}{5}$

y además: $a_3 = a_1 + a_2$, Luego: $\frac{a_1}{2a_3} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{a_1}{a_3} = \frac{2}{5}$

$\frac{a_1}{2a_1+2a_2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a_1}{2a_3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$, Luego: $P_1 = \frac{2}{5}P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{5}{2}P_1$

$P_2 = \frac{3}{2}P_1$

$\Rightarrow P_1+P_2+P_3 = \frac{a_1}{2}$ Pero: $a_1 - P_1 = 18\ 000 \Rightarrow 5P_1 = \frac{18\ 000+P_1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1 = S/.\ 2\ 000 \qquad P_3 = S/.\ 5\ 000$

Rpta. $P_3 = S/.\ 5\ 000$

2. Se reparte $ 2,800 en forma D.P. a A y B. Si lo correspondiente a A es una cantidad entera determinar lo correspondiente a B si A - B = 7.

Solución

$A - B = 7 \Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = 7 = 1 \times 7$ Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{A}+\sqrt{B}=7\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\sqrt{A}=4\\ \sqrt{B}=3\end{array}\Rightarrow \frac{2\ 800}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{2\ 800}{7}=400$$

$\therefore$ A B le corresponde: 400 x 3 = S/ 1 200

Rpta. S/ 1 200

3. Se reparten 850 caramelos entre niños y niñas de manera que cada niño recibe el cuádruplo de caramelos que recibe cada niña. El número de caramelos repartido a cada grupo fue directamente proporcional al cuadrado del número de sus integrantes. Determinar cuántos caramelos recibe cada niño, si las niñas reciben un número entero de caramelos y el número de niñas es máximo.

Solución

Sea: H $\rightarrow$ número de niños N $\rightarrow$ número de niñas

Cada niño recibe: $\dfrac{\dfrac{850}{H^2+N^2}xH^2}{H}=\dfrac{850H}{H^2+N^2}$ caramelos

Cada niña recibe: $\dfrac{850N}{H^2+N^2}$ caramelos.

Por condición:

$$4.\ \frac{850N}{H^2+N^2}=\frac{850H}{H^2+N^2}\Rightarrow \begin{array}{l}H=4N\\ H^2=16N^2\end{array}\Rightarrow \frac{850N}{17N^2}=\frac{50}{N}=K\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ 50 = KN $\Rightarrow$ Si: K = 1

N = 50 (máximo)

$\therefore$ Cada niño recibe: 4.1 = 4 caramelos

Rpta. 4 caramelos

4. Se reparte cierta suma proporcionalmente a los números 7, 14, 21, ..., 350 (50 números). Lo que le corresponde al que recibe la treintava cantidad menor se divide entre 3 y se obtiene una cantidad entera. Determinar la 45ava. cantidad mayor recibida si ésta es la menor posible.

Solución

Se reparte D.P. a: 7, 14, 21, ..., 350 < > 7 (1, 2, 3, ..., 50).

Es equivalente a repartir D.P. a: 1, 2, 3, ..., 50

Sea N la cantidad a repartir: $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 51 \times 25 = 1\,275$

N	DP
	1
	2
	3
	.
	.
	50
	1 275

Sea K la constante de reparto:

$K = \frac{N}{1275}$

La treintava cantidad menor es la veinteava mayor.
Esto es:

$\frac{20K}{3} = E$ (N°entero mínimo) $\Rightarrow E = 1$

$k = \frac{3}{20}$

$\therefore R = \frac{3}{20} \times 45 \Rightarrow R = 6.75$

Rpta. $R = 6.75$

5. Se reparte: $N = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + c\right)$ en partes directamente proporcionales a : a, 1/a y 1; e inversamente proporcional a : bxc , b/c y axc/b respectivamente. La menor de las partes es (c - 2.5), hallarla numéricamente sabiendo que es la segunda.

Solución

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + c\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c} \begin{cases} \overset{D.P.}{a} \times \overset{D.P.}{\frac{1}{bc}} = \frac{a}{bc} \\ \frac{1}{a} \times \frac{c}{b} = \frac{c}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 1 \times \frac{b}{ac} = \frac{b}{ac} \end{cases}$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} = \frac{a^2 + c^2 + b^2}{abc}$$

$$\therefore K = \frac{\frac{a^2+c^2+b^2}{2c}}{\frac{a^2+c^2+b^2}{abc}} = \frac{ab}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por condición del problema: (De 1 y 2):

$$\frac{c}{ab} x \frac{ab}{2} = (c - 2.5) \quad \wedge \quad \frac{c}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Rpta. 2.5

6. Se compran 3 telas de superficies directamente proporcionales a 2, 3 y 4 y precios inversamente proporcionales a 3, 4 y 5. Se decide ganar en total 20% sobre el costo total y se ponen precios de venta que son directamenta proporcionales al precio de compra y a la superficie de cada tela.
Si por las 3 telas se ganó S/.12,000. ¿Cuánto se ganó por la 2da.?

Solución

Superficies = 2, 3, 4

Precios de compra $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \rightarrow 20, 15, 12$

El reparto es D.P. a superficies y precios de compra:

O sea $\overline{D.P.}$ a $\underset{40}{2 \times 20}, \underset{45}{3 \times 15}, \underset{48}{4 \times 12}$

Sea costo total = C Por dato I/.12,000 = 0.2 C

C = I/.60,000

En la 2° se gana.

$$D \cdot V_2 - P \cdot C_2 = \frac{45}{133} \times 1.2\,C - \frac{15}{47} \times C$$

$$= \frac{543}{133 \times 47} \times 60{,}000 = I/.5{,}212$$

Rpta. S/.5,212

7. Hallar el menor número entero que al repartirlo I.P. a 5,6 y 9 se obtienen tres partes enteras. Dar como respuesta el 25% del 30% del 40% de dicho número sabiendo que este resultado es también un número entero.

Solución

$$25\% \text{ del } 30\% \text{ del } 40\% = \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{3}{100} = 3\%$$

El 3% de N es un número entero.
Luego N se puede dividir exactamente entre 100.

I.P. 5 ; 6 ; 9

D.P. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9} \Rightarrow$ D.P a 18, 15, 10

Luego: $\frac{N}{43} = K_1$ (entera)

y $\frac{N}{100} = K_2$ (entera)

N $\rightarrow$ mínimo, luego N = 4,3000

$$R = \frac{3}{100}\ 4{,}300 = 129$$

Rpta. R = 129

8. Se reparte S/.175 en forma D.P. a $\sqrt{A}$ y $\sqrt{B}$ y luego en forma D.P. a A y B. Si A obtuvo S/.12 menos en el segundo reparto; hallar B^2.

Solución

En el 1er. reparto A obtuvo : $\frac{175}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \times \sqrt{A}$

En el 2do. reparto A obtuvo : $\frac{175}{A+B} \times A$

Por dato : $\frac{175}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \times \sqrt{A} - \frac{175}{A+B} \times A = 12$

$$\frac{175 \times \sqrt{AB}\left(\sqrt{B}-\sqrt{A}\right)}{(A+B)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)} = 12$$

Si llamamos : $\sqrt{A} = x,\ \sqrt{B} = y$. y $\begin{cases} \sqrt{B} > \sqrt{A} \\ y > x \end{cases}$

$$\frac{175xy(y-x)}{(x^2+y^2)(x+y)} = 12$$

Todas las respuestas son números que tienen raíz cuadrada exacta, luego x e y son números enteros.

Además : $\frac{175}{x^2+y^2} = K_1$ $\frac{175}{x+y} = K_2$

$y : K_1 < K_2$ $y : xy\,(y - x) = 12\,K_3$

Si : $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 4\,,\, x = 3\ (y > x) \\ K_3 = 1 \end{array}$

Esto es porque : 175 es dividido exactamente por : 1, 5, 7, 25, 35, 175

$x + y > 1\ ;\ x^2 + y^2 > x + y$

Luego : $x + y = 5$ ó 7

$x^2 + y^2 = 25$ ó 35

El único que cumple es el que se da:

Luego : $y = 4\ ;\quad B^2 = y^2 = 16$

Rpta. 16

9. Una distancia de N kilómetros es cubierta por 3 móviles., cada una lleva una velocidad de 40 Km/h, 60Km/h y 96 Km/h.
En total, los tres han empleado un tiempo de 50 horas. Encontrar la suma de las cifras que forman el número N.

Solución

VIEK $\quad N = VxT$

$$50 \left\{\begin{array}{lll} & IP & DP \\ 140 \times 120 & 3 & 12 \\ 1/60 \times 120 & 2 & 8 \\ 1/96 \times 120 & 5/4 & \frac{5}{25} \end{array}\right. \qquad \frac{8}{25} \times 50 = 16$$

Luego $N = 16h \times 60Km/h = 960$ Km.

Rpta. 960 Km.

10. Se reparte una suma de dinero entre 4 personas directamente proporcional a 1, 2, 3, y 4. Al efectuar el reparto hubo una equivocación de 2 unidades en la suma, por lo que al último le tocó S/.80 menos.
Hallar la suma que se repartió.

Solución

$$S \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \hline 10\ (+2) \end{cases} \qquad 4x\frac{S}{10} = \frac{4x5}{12} + 80 = S = 1200$$

Rpta. S = 1200

5. Dividir 2340 en 3 partes I.P. a 0.75, 0.5 y 0.375. Indicar la suma de las cifras de la parte mayor.

Solución

	IP	DP	DP	
2340	3/4	4/3	4	2
	1/2	2	6	3
	3/8	8/3	8	$\frac{4}{9} \rightarrow 4/9 \times 2340$

Parte mayor: 1040 $\quad 1 + 4 = 5$

Rpta. 5

12. Un capital se ha repartido directamente proporcional a: $\frac{1}{a}$; b; $\frac{1}{d}$; I.P. a: $\frac{3}{4a}$; $\frac{1}{ad}$; $\frac{1}{b}$ y D.P. a: bd; $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{d^2}$ respectivamente. Hallar este capital si la menor parte es S/.13 104.

Solución

	DP	DP	DP <> DP		
A	$\frac{1}{a}$	$\frac{4}{3}a$	bd	$\frac{4}{3}bd = \frac{4}{3} \times 6$	8
B	b	ad	$\frac{1}{a}$	$bd = 1 \times 6$	6
C	$\frac{1}{d}$	b	$\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{2}bd = \frac{1}{2} \times 6$	3
					17

Sean las partes A, B y C y el capital igual a x la menor parte es: $\frac{3x}{17} = 13,104$

Rpta. $x = S/.74\ 256$

13. El número $\overline{a(2a)76}$ en tres partes enteras D.P. a $\overline{cd}, \overline{dc}$ y $\overline{dd}$. Hallar el valor de a x c x d.

Solución

$\overline{a(2a)76} = k(\overline{cd} + \overline{dc} + \overline{dd})$

$\overline{a(2a)76} = k \times 11 \times (2d + c)$

$2a + 6 - (a + 7) = \overset{\circ}{11}$

$a - 1 = \overset{\circ}{11}$; $a = 1$

$1276 = k \times 11(2d + c)$

$116 = k(2d + c)$

$4 \times 29 = k(2d + c)$; $a \times d \times c = 2$

$d = 1$; $c = 2$

Rpta. 2

14. Un millonario dejó 638 000 millones de soles a sus 4 hijos: Paco, Javier, Adán y Eduardo para repartirlos en forma I.P. a las raíces cuadradas de los números: 80, 125, 180 y 245 respectivamente. ¿Cuál fue la herencia que recibió Adán?

Solución

Multiplicando cada fracción por el M.C.M. de los denominadores:

638 000 millones

$$\text{Paco} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{80}} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times 420 = 105$$

$$\text{Javier} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{125}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times 420 = 84$$

$$\text{Adán} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times 420 = 70$$

$$\text{Eduardo} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{245}} = \frac{1}{7\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times 420 = 60$$

$$319$$

$$K = \frac{638\ 000 \text{ millones}}{319} = 2\ 000 \text{ millones}$$

$\therefore$ Adán recibió : $70 \times 2\ 000 = 140\ 000$ millones de soles.

Rpta. 140 000 millones de soles.

15. Un cilindro de 60 litros de capacidad fue llenado completamente por cuatro recipientes, donde el volumen del primero es al del segundo como el del tercero es al del cuarto como 2 es a 1. Hallar la suma de los volúmenes del segundo y el cuarto recipiente.

Solución

$$60 \text{ lt.} \begin{cases} 1º \rightarrow V_1 = 2V_2 \\ 2º \rightarrow V_2 \\ 3º \rightarrow V_3 = 2V_4 \\ 4º \rightarrow V_4 \\ \hline 3(V_2 + V_4) \end{cases}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2V_2 \quad y \quad V_3 = 2V_4$$

$$\therefore (V_2 + V_4) \times \left[\frac{60 \text{ lt.}}{3(V_2 + V_4)}\right] = 20 \text{ lt.}$$

Rpta. 20 lt.

16. Los señores "A", "B", "C" y "D" se asocian para formar una empresa siendo sus capitales de 130, 110, 70 y 40 dólares respectivamente, y los tiempos de imposición 4, 3, 5 y 6 años respectivamente. Al final obtuvieron $7,200 de ganacia, pero D fallece y los otros se reparten su ganancia proporcionalmente. Se desea saber cuanto de más recibió "B".

Solución

$$7{,}200 \begin{cases} A \quad 130 \times 4 = 52 \\ B \quad 110 \times 3 = 33 \\ C \quad 70 \times 5 = 35 \\ D \quad 40 \times 6 = 24 \\ \hline 144 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{7\ 200}{144} = 50$$ el dinero de "D" es 24 x 50; D = 1,200

$$1{,}200 \begin{cases} A \rightarrow 52 \\ B \rightarrow 53 \\ C \rightarrow 35 \end{cases}$$

$$120 \quad \Rightarrow \frac{1\ 200}{120} = 10$$

B recibe de más 33 x 10 = 330 dólares.

Rpta. 330 dólares.

17. En cuántas partes se reparte una cantidad "x", si el reparto se hacen en forma D.P. a los #s.: 9, 10, 11, 12, ... y en promedio cada uno recibió S/.1'100,000 y la diferencia entre 2 partes consecutivas es S/.100,000 en todos los casos.

Solución

Se reparte C en forma D.P. a 9, 10... en n partes.

$$C \begin{cases} 9 \\ 10 \\ 11 \\ . \\ . \\ . \\ n+8 \end{cases} \qquad \frac{n^2+17n}{2}$$

La suma es: $\frac{(n-8)(n-9)}{2} - \frac{8x9}{2}$

La diferencia entre 2 partes cualesquiera es:

$$C \times \frac{k+1-k}{\frac{n^2+17n}{2}} = \frac{2 \times c}{n^2+17n} = 100{,}000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como en promedio cada uno recibió:

$\Rightarrow$ C = 1'100,000 x n.....(2)

De (1) y (2) = n = 5

Rpta. n = 5

18. Se han repartido 6,000 soles entre 10 personas. Si a cualquiera de las 5 primeras le toca 1/5 que a cualquiera de las otras 5. ¿Cuánto le tocó a la 1era. y a la última?

Solución

$$6{,}000 \quad \begin{cases} 5 \text{ primeros} \rightarrow 1 \\ 5 \text{ últimas} \rightarrow \dfrac{5}{6} \end{cases} \qquad \frac{6000}{6} = 1000$$

A cada una de las 5 primeras le tocó:

$$\frac{1000}{5} = 200$$

A cada una de las 5 últimas le tocó

$$\frac{5000}{5} = 1{,}000$$

Rpta. A la primera le tocó : 200, a la última le tocó : 1,000

19. Un millonario dejó un herencia de $ 14'400,000 dólares, para repartirla proporcionalmente a las edades de sus hijos: Mario, Francisco y Abel. Si la edad de Abel es el doble de la de Mario y a Francisco le tocó S/.4'200,000, y además la suma de las 3 edades es 72 años. ¿Cuál es la edad de Mario?

Solución

Sea "F" la edad de Francisco, "M" la de Mario y Abel tendrá "2M" años.

$$\frac{14'400{,}000}{72} = x\,F = 4'200{,}000 \Rightarrow F = 21 \text{ años}$$

La suma de la edad de Mario y Abel es :

$$M + 2M = 72 - 21 \Rightarrow M = 17$$

Rpta. La edad de Mario es 17 años.

20. Tres vecinos quieren pintar las fachadas de sus casas siendo el costo total 1,369 soles. La extensión de la fachada del 1ero. es los 3/5 de la del 3ero., y la del 2do. es los 7/2 de la del 1ero. Si el gasto se reparte en forma D.P. a la extensión de las fachadas. ¿Cuánto les tocó abonar al 1ero. y 2do. vecino?

Solución

$$\left.\begin{array}{llll} \text{1ero.} & 3 & 2 & 6 \\ \text{2do.} & 3 & 7 & 21 \\ \text{3ero.} & 5 & 2 & 10 \\ & & & \overline{37} \end{array}\right\} \quad 1{,}396 \Rightarrow \frac{1{,}369}{37} = 37$$

Rpta. Al 1ero. le toca abonar 6 x 37 = 222 soles, al 2do. le toca abonar 21 x 37 = 777 soles

21. Repartir el número $\overline{50b}$ en tres partes enteras directamente proporcionales a $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ca}$. ¿En cuánto se diferencian las dos menores? (c es menor que a)

Solución

$\overline{50b} = k \times (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca})$

$\overline{50b} = k \times 11 \times (a + b + c)$

$\overline{50b} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow b = 6$

Luego:

$506 = k \times 11 \times (a + 6 + c)$

$46 = k(a + 6 + c)$

$a + c = 17 ; \quad k = 2$

$c = 8 ; \qquad a = 9$

Rpta. $2 \times (89 - 68) = 42$

22. Un terreno es repartido entre tres personas cuyas edades suman 71 años. Si al menor, que tiene 17 años le ha tocado 13 005m². Deteminar cuánto le ha tocado al mayor de ellos, si el terreno de éste es al de la persona de edad intermedia como 5 es a 4.

Solución

Para la menor de 17 le tocó 13 005m², Sea T el área total del terreno.

$$\frac{T}{71} \times 17 = 13\,005 \Rightarrow \frac{T}{71} = 765$$

La suma de las otras edades (a y b) es:

$71 - 17 = 54 = (a + b)$..... (1)

Si la relación de ellos es: $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$ ..... (2)

De (1) y (2) : $a = 30$ y $b = 24$

Al mayor le tocó: $\frac{T}{71} \times 30 = 765 \times 30 = 22{,}950m^2$

Rpta. 22,950m²

23. Al repartir la cantidad 1 360 680 en cuatro partes se observa que: la primera es a la segunda como 5 es a 2; la segunda es a la tercera como 3 es a 4 y la tercera es a la cuarta como 8 es a 5. Hallar la segunda.

1°	2°	3°	4°
9 x 5	2		
6 x	3	4	
3 x		8	5
45	18	24	15

$$k = \frac{1\,360\,680}{45+18+24+15} = 13\,340$$

La 2da. es: 13 340 x 18 = 240 120

Rpta. 240 120

24. Se reparten S/.61 000 en 3 partes que son D.P. a los números 2/17, 5/38 y 4/65 y además son I.P. a 19/34, 3/4 y 57/13 respectivamente. ¿Cuál es la suma de las cifras de la mayor de las partes?

Solución

61 000

primera: $\frac{2}{17} \times \frac{34}{19} = 30$

segunda: $\frac{5}{38} \times \frac{4}{3} = 25$

tercera: $\frac{4}{65} \quad \frac{13}{57} = \frac{6}{61}$

Las partes son: $\frac{61\,000}{61} \times 30 = 30\,000$

$$\frac{61\,000}{61} \times 25 = 25\,000$$

$$\frac{61\,000}{61} \times 6 = 6\,000$$

Rpta. ∴ La suma de las cifras del mayor es 3.

25. Se reparten S/.2 210 en cuatro partes, tales que: la segunda es a la tercera como 7 es a 11, la tercera es a la cuarta como 4 es a "m" y la primera es a la segunda como 3 es a 5. Si a la cuarta le tocó S/.1 100. ¿Cuál es el valor de "m"?

Solución

Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
3	5		
	7	11	
		4	m
3 x 4 x 7	5 x 4 x 7	11 x 5 x 4	m x 11 x 5
↓	↓	↓	↓
84	140	220	55m

k = constante de reparto $\quad K = \dfrac{2\ 210}{84+140+220+55m}$

Como la cuarta recibió S/.1 100, podemos establecer:

$$\frac{2\ 210}{444+55m} \times (55m) = 1\ 100 \Rightarrow m = 8$$

Rpta. m = 8

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre reparto proporcional y regla de compañía (con clave)

1. Dividir el número 1705 en 3 partes I.P. a 0,375, 1/3 y 2/7. Indicar la suma de las cifras de una de las partes.

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

2. Un padre de familia deja S/.38'480,000 a su esposa, 3 hijos y 2 hijas; advirtiendo que la parte de cada hijo debe ser los 3/2 de la parte de su esposa y la de cada hija los 5/4 de lo de un hijo. Averiguar cuánto le toca a un hijo.

a) 6'240,000 soles
b) 6'420,000 soles
c) 4'260,000 soles
d) 4'620,000 soles
e) 264,000 soles

3. Tres hermanos convienen en repartirse S/.3'240,000 en partes proporcionales a 34^3, 136^2 y 68^2 respectivamente. ¿A cuánto equivale la menor de las partes?

a) S/.120,000 b) S/.240,000 c) S/.360,000 d) S/.480,000 e) S/.300,000

4. Repartir el número 1407 en 3 partes D.P. a 3, 4, 7; I.P. 1,2 y 2; I.P. a 4,1 y 2; y D.P. a 5, 3 y 4. Hallar la diferencia de las dos menores.

a) 189 b) 105 c) 84 d) 210 e) 280

5. Se divide una cantidad en 3 partes tales que: la suma de las dos primeras es a la tercera como 3 es a 2 y la suma de las dos últimas es a la primera como 3 es a 1.
Si la segunda parte excede a la primera en 440 y hallar la cantidad que se repartió.

a) 2400 b) 4400 c) 2200 d) 5400 e) 2640

6. Un señor reparte 468 caramelos entre sus hijos de 5, 7, 11 y 13 años en forma D.P. a sus edades. Si esa misma cantidad de caramelos la hubiese repartido de igual manera entre sus hijos hace 6 años.
¿Cuántos caramelos más le hubiese tocado al mayor de ellos?

a) 83 b) 74 c) 65 d) 88 e) 52

7. Se reparte S/.1,500 en forma directamente proporcional a 3 números consecutivos y luego a los 3 anteriores. Determinar la mayor cantidad repartida en cualquiera de los 2 repartos si la menor fue S/.250.

a) S/.500 b) S/.250 c) S/.400 d) S/.300 e) S/.600

8. Se desea repartir S/.7,000 entre 2 personas en partes que sean proporcionales a 3 y C. Si el reparto se hace directo o inverso se observa que a cada uno le corresponde una diferencia de S/.1,000 entre ambos cálculos.
Hallar el valor de "C" (entero) que hace posible este reparto.

a) 2 b) 4 c) 11 d) 7 e) 5

9. Tres obreros A, B y C se reparten una obra en razón directa a sus años de experiencia que son 1, 4 y 5 años respectivamente. A y C cumplieron, pero como el obrero B hizo sólo la mitad de su parte, la otra mitad fue hecha por A y C en proporción a su experiencia. Si cobraran 75,000 por toda la obra. ¿Cuánto recibió B?

a) 15,000 b) 5,000 c) 18,000 d) 25,000 e) 4,800

10. Un padre reparte su fortuna a sus 3 hijos en razón inversa a las raíces cuadradas de sus edades que son: 5 años 1 mes 20 días, 7 años 4 meses 25 días y 20 años 6 meses 20 días. Si el menor recibió 6 millones, ¿Cuánto recibió el mayor?

a) 3' b) 12' c) 2.5' d) 4' e) 2'

11. Si A x C es directamente proporcional a B, cuando C aumenta 1/3 de su valor y B disminuye 1/3 de su valor, entonces A:

a) Se multiplica por 3.
b) Se divide entre 3.
c) Aumenta 1/3.
d) Se duplica.
e) Se divide entre 2.

12. "n" socios forman una empresa y al cabo de cierto tiempo se reparten 155 millones de utilidad. Sabiendo que cada socio aportó el doble del anterior y que el primer socio recibió por todo 7 millones, incluído su capital, siendo su utilidad 2.5 veces el capital que aportó. Calcular el número de socios.

a) 6 b) 5 c) 7 d) 8 e) 15

13. Las 3 partes de un cierto reparto son directamente proporcionales a 3, 9 y 27 e, inversamente proporcionales a 16, 4 y 1; la diferencia entre la 1ra. y 3ra. partes es de 7293. Hallar la 2da. parte.

a) 816 b) 612 c) 1088 d) 952 e) 476

14. x e y no tienen factor común y se reparte una cantidad en 2 partes directamente proporcionales a x y x^2, e inversamente proporcionales a y e y^2 siendo una de las partes los 21/39 de la otra y 3738 menor. Hallar la cantidad repartida.

a) 14,500 b) 15,620 c) 10,840 d) 12,460 e) 14,240

15. Tres números son proporcionales a 3, 5 y 7. El cuadrado del producto de los mayores es 1'587,600. Halle el menor e indique su residuo respecto a 5.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

16. Se repartió una cantidad proporcionalmente a cinco números: la primera parte es a la segunda como 1 es a 2, la segunda a la tercera como 3 a 4, la tercera a la cuarta como 5 a 6 y la cuarta a la quinta como 7 a 8; si la última es 3840, halle cuál es la primera.

a) 2300 b) 1500 c) 1520 d) 1050 e) 1000

17. Al repartir una cierta cantidad en 4 partes, la 1ra. es a la 2da. como la 4ta. y la 2da. separadamente son a la 3ra. Además, la 1ra. es a la 3ra. como 49 es a 36. A la mayor de las partes le corresponde S/.5733. ¿Cuánto se repartió?

a) S/.23,068.50 b) S/.26,913.25 c) S/.24,000 d) S/.18,000 e) S/.19,773

18. Dividir el número 1806 en 4 partes D.P. a 16.2, 12.8, 33.8 y 28.8. Indicar la suma de las 2 menores partes.

a) 731 b) 1008 c) 1050 d) 860 e) 903

19. Si se reparte el número 145,800 en partes directamente proporcionales a todos los números pares de 2 cifras. ¿Cuánto le corresponde al número 68?

a) 2040 b) 4080 c) 9160 d) 3960 e) 6800

20. Tres números son proporcionales a 3, 5 y 7. El cuadrado del producto de los mayores es 1'587,600. Hallar el manor e indique su residuo respecto a 5.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21. El número de focos eléctricos que existen en un salón varía en forma directa a la iluminación que hay, y la iluminación varía en forma directa al tamaño del salón y al número de watt de cada uno de los focos. Para un salón de cierto tamaño se requiere 8 focos de 25 watt cada uno. ¿Cuántos focos de 100 watt se necesitarán para un salón cuyo tamaño es 50% mayor que el anterior?

a) 56 b) 48 c) 54 d) 36 e) 27

22. Se enlocetan 2 superficies de forma cuadrada cuyos lados son proporcionales a 200 y 300, en la primera superficie se ha gastado el 50% más que en la segunda superficie en adquirir las locetas que son de diferente clase. El número de locetas que se han utilizado en cada una de las superficies varía en forma directamente proporcional al cuadrado de sus lados, e inversamente proporcional a las superficies de las locetas que son 120 cm^2 y 90 cm^2. ¿Cuál es el precio utilitario de una de las dos clases de locetas que se han utilizado sabiendo que su suma vale 121?

a) 33 b) 11 c) 40.3 d) 99 e) N.A

23. Al repartir cierta cantidad Q en razón inversa a los números a, a^2, a^3, ..., a^n, la enésima parte será:

a) $\frac{Q(a^n-1)}{a}$ b) $\frac{Q(a-1)}{a^n-1}$ c) $\frac{Qa}{a^n-1}$ d) $\frac{Q}{a^n-1}$ e) $\frac{Qa^n(a-1)}{a^n-1}$

24. $P^2 + Q^2$ es directamente proporcional a $P^2 - Q^2$, siendo la constante de proporcionalidad 5/4, sabiendo que P es directamente proporcional a Q, hallar su constante de proporcionalidad.

a) 3 b) 4 c) 0.8 d) 0.64 e) 1.25

25. Se repartió una cantidad proporcionalmente a cinco números: la primera parte es a la segunda como 1 a 2, la segunda a la tercera como 3 a 4, la tercera a la cuarta como 5 a 6 y la cuarta a la quinta como 7 a 8; si la última es 3840, halle cuál es la primera?

a) 2300 b) 1500 c) 1520 d) 1050 e) 1000

26. Un Industrial funda una empresa imponiendo un Capital de 400,000. Al año y 4 meses acepta un socio con una aportación de 300,000; 1 año 2 meses después admite otro socio con un capital de 600,000. Luego, de 8 meses los dos primeros socios incrementan cada uno su capital en 200,000.
¿Cuánto gana el Industrial, si al cabo de 6 años de actividades se obtuvo una ganancia de: S/.1'688,000.

a) 340000 b) 680000 c) 472000 d) 236000 e) N.A.

27. Dos magnitudes A^2 y B son universamente proporcionales. Cuando B toma el valor de 2, A^2 toma el valor de 8. ¿Qué valor tomará 1/A cuando B tome el de 64?

a) 2 b) 1/2 c) 1/4 d) 4 e)1/8

28. Un Juez decide que cierta herencia se reparte en forma directamente proporcional al número de años que cada hijo pasó con su padre. Si ninguno se fue antes de los 20 años y ninguno se quedó después de los 32; determinar los años que se quedó el segundo más beneficiado, si la herencia es de S/.240,000, el que menos obtuvo recibió S/.60,000 y la diferencia de lo recibido por los otros es un número que se puede dividir entre 4,000 en forma exacta.

a) 25 años b) 29 años c) 26 años d) 28 años e) 27 años

29. Una empresa obtiene S/.480,000 anuales de beneficios. Sólo hay 3 socios y reciben ganancias que forman una proporción aritmética continua. Determinar que porcentaje del capital inicial, aportó el primero si recibe la tercera parte que el tercero.

a) 16.6% b) 33.3% c) 25% d) 40% e) 15%

30. Al iniciarse una compañía dos socios aportan capitales que están en relación de 3 a 4, a los 5 meses el 1ero. incrementa su capital en 1/3 y el 2do. retira 1/4 del suyo, tres más tarde se reparten las ganancias tocándole a uno S/.1,000 más que al otro.
Hallar a cuánto ascendía la ganacia total.

a) S/.24,000 b) S/.25,000 c) S/.28,000 d) S/.32,000 e) Ninguna anterior.

31. Dos personas se asocian a principios de Junio aportando medio millón y ochocientos mil soles respectivamente, luego a principios de Setiembre entra otro socio aportando S/ .900,000. Si a fin de año se reparten el dividendo que asciende a S/.266,700. Hallar cuánto recibe el que aportó menor capital.

a) S/.76,200 b) S/.75,600 c) S/.73,500 d) S/.68,500 e) Ninguna anterior

32. Repartir el número 329 en 3 cantidades directamente proporcionales a 3, 7 y 5 e inversamente proporcionales a 4, 3 y 6 respectivamente. Dar como respuesta la cifra de la decenas de la menor cantidad.
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

33. ¿Cuántos caramelos de 8 por 5 soles de deben mezclar con 154 caramelos de 7 por 4 soles para que se puedan vender a 5 por 3 soles.?

a) 185 b) 176 c) 143 d) 288 e) 184

34. Juan, Lucho y Ricardo se asocian. Juan aporta S/.280,000 durante 7 meses; Lucho S/.40,000 más que Juan por un tiempo de 9 meses y Ricardo impone una suma de S/.250,000 durante 5 meses. Si Juan ganó S/.55,200 menos que Lucho. ¿A cuánto asciende la ganancia?

a) 384,400 b) 290,400 c) 365,400 d) 428,000 e) 299,600

35. Dividir 1116 en tres partes, tales que la 1ra. y 3ra. sean D.P. a 4 y 5, la 2da. y 3ra. sean D.P. a 6 y 7.
Dar como respuesta la mayor de dichas partes.

a) 336 b) 480 c) 360 d) 420 e) 400

36. Hallar un número entero sabiendo que si se le reparte en forma inversamente proporcional a todos los divisores de 800 se obtiene una diferencia de 3995 entre la mayor y la menor de las partes.

a) 1953 b) 19,530 c) 9765 d) 3255 e) 6510

37. Dos personas se asocian aportando S/.250,000 y S/.350,000 a los 4 meses se retira la 2da. y entra una 3ra. con S/.300,000,seis meses más tarde se reparten las ganacias tocándole a la 2da. persona S/.28,000. Hallar cuánto más le tocó al 3ro.respecto al 2do.socio.

a) S/.6,000 b) S/.4,000 c) S/.8,000 d) S/.36,000 e) Ninguna anterior.

38. Se reparte S/.1,428 proporcionalmente a 5 números pares consecutivos. La mayor diferencia entre las 5 partes es S/.190.40. De las 5 partes ¿Cuál es la intermedia?

a) S/.204 b) S/.178.50 c) S/.238 d) S/.142.80 e) S/.285.60

39. Se reparte una cantidad en partes directamente proporcionales a 3 números consecutivos. ¿Cuál fue la cantidad que se repartió?

a) 450 b) 540 c) 600 d) 720 e) 900

40. Al formar una compañía 2 socios aportan capitales proporcionales como 4 es a 5, 7 meses más tarde el 1ero. aumenta su capital en S/.40,000 y el 2do. en S/.60,000, al cabo de 3 meses existe una pérdida de S/.85,500. Hallar cuánto aportó el 2do. inicialmente, si la diferencia entre la pérdidas de los socios es de S/.9,900.

a) S/.180,000 b) S/.240,000 c) S/.280,000 d) S/.300,000 e) Ninguna anterior.

41. El señor Alva inició una actividad económica con un capital de 300,000. A los 8 meses admite

un socio que aporta S/.200,000; a los 7 meses admite otro socio con un capital de S/.400,000. Luego de 5 meses, el Sr. Alva retira 100,000. Al cabo de 5 años, se liquidó la Sociedad obteniéndose una ganancia de S/.593,600. ¿Cuánto ganó el Sr. Alvarez?

a) 204,000 b) 196,000 c) 238,000 d) 138,000 e) 242,000

42. Dos hermanos forman una compañía con S/.500,000 cada uno, a los 6 meses el mayor incrementa su capital en un 20% y el menor retira el 25% del suyo, 4 meses más tarde se reparten una ganancia de S/.132,000. Determinar la diferencia de ganancias entre los hermanos.

a) S/.8,000 b) S/:9,000 c) S/.10,000 d) S/.11,000 e) S/.12,000

43. Dos personas aportan S/.100,000 y S/.150,000 en una compañía, a los 4 meses hay una pérdida de S/.25,000 por lo que el 2do. retira lo que le queda de capital y entra un 3ero. con S/.120,000 mientras que el 1ero. sigue con lo que le queda, seis meses más tarde se reparten una ganancia, si el 1ero. recibe S/.6,600. Hallar cuánto le toca al 3ero.

a) S/.7,200 b) S/.7,920 c) S/.8,400 d) S/.8,800 e) Ninguna anterior.

Clave

1. b	11. c	21. b	31. b	41. c
2. c	12. a	22. a	32. e	42. b
3. d	13. c	23. c	33. c	43. c
4. e	14. a	24. a	34. c	44. b
5. a	15. d	25. b	35. c	45. a
6. b	16. e	26. e	36. d	46. c
7. b	17. b	27. c	37. a	
8. c	18. e	28. a	38. e	
9. d	19. b	29. c	39. a	
10. b	20. a	30. a	40. b	

REGLA DE COMPAÑIA

1. Liquidada una empresa sus tres socios reciben entre aportes y pérdidas: 4,500 soles, 7,000 soles y 8,500 soles, si la pérdida total fue de 2,000 soles. Determinar cuánto aportó el segundo. (Redondear la cantidad).

Solución

$$2000 \left\{ \begin{array}{r} 4500 \\ 7000 \\ 8500 \\ \hline 20000 \end{array} \right. \qquad k = \frac{1}{10}$$

El 2do. perdió: $\frac{1}{10} \times 7000 = 700$

El 2do. aportó: $7000 - 700 = 6300$

Rpta. 6300

2. Edward emprende un negocio con 17,000 soles a los 2 años se asocia Tommy con 21,000 soles y después de 4 años se asoció Nelson aportando 32,000 soles quien estuvo 6 años en el negocio. Si la ganacia fue de 80,800 soles. ¿Cuánto le corresponde a Nelson?

Solución

$$80{,}800 \begin{cases} 17{,}000 \times 12 \text{ años} = 17 \times 2 = 34 \\ 21{,}000 \times 10 \text{ años} = 7 \times 5 = 35 \\ 32{,}000 \times 6 \text{ años} = 32 \times 1 = 32 \end{cases}$$

$$101$$

$$\frac{80{,}800}{101} = 800$$

Rpta. A Nelson le tocó: 32 x 800 = 25,600

3. La empresa "Cáriga" inició una actividad económica con un capital de 300,000 soles. A los 8 meses admiten un socio que aporta 200,000 soles, a los 7 meses admiten otro socio con un capital de 400,000 soles. Luego de 5 meses, la empresa "Cáriga" retira 100,000 soles. Al cabo de 5 años, se liquidó la sociedad obteniéndose una ganancia de 593,600 soles. ¿Cuánto ganó la empresa "Cáriga"?

Solución

Efectuando el reparto se obtiene que la empresa ganó S/. 299 600

Rpta. S/. 299 600

4. Un empresario inició un negocio con un capital de 25'000,000 y al cabo de tres años se asoció con otro que aportó 20'000,000 más del capital con que se inició el negocio; éste último trabajo 7 años, hasta la liquidación, donde el capital total de la sociedad eran 63'672,000 soles. ¿Cuánto más que el empresario original perdió el nuevo?

Solución

Capital: 25'000,000 + 45'000,000 = S/. 70'000,000

Perdida: 70'000,000 - 63'672,000 = 6'328,000

Efectuando el reparto:

$$6'328{,}000 \begin{cases} 25' \times 10 = 250 \\ 45' \times 7 = 315 \end{cases}$$

$$565$$

El nuevo perdió:	3'920 000
El 1º perdió:	2'408 000
El nuevo perdió:	1'512 000

Rpta. Perdió 1'512 000

Sobre regla de compañía

1. Un industrial funda una empresa imponiendo un capital de 400,000. Al año y 4 meses acepta un socio con una aportación de 300,000; 1 año 2 meses después admite otro socio con un capital de 600,000. Luego de 8 meses los dos primeros socios incrementan cada uno su capital en 200,000. ¿Cuánto gana el Industrial, si al cabo de 6 años de actividades se obtuvo una ganancia de: 1'688,000?

   a) 340,000 b) 680,000 c) 472,000 d) 236,000 e) N.A.

2. Al formar una compañía 2 socios aportan capitales proporcionales como 4 es a 5, 7 meses más tarde el 1ero. aumenta su capital en 40,000 soles y el 2do. en 60,000 soles al cabo de 3 meses existe una pérdida de 85,500 soles. Hallar cuánto aportó el 2do. inicialmente, si la diferencia entre las pérdidas de los socios es de 9,900 soles.

   a) 180,000 b) 240,000 c) 280,000 d) 300,000 e) 1'000,000

3. Juan, José y Alberto son 3 operarios de una zapatería. Entre los 3 han hecho 462 zapatos. Juan es 20% más eficiente que José y éste es un 50% menos rendidor que Alberto. ¿Cuántos zapatos ha hecho José?

   a) 121 b) 99 c) 110 d) 209 e) 220

4. Un padre dejó: S/.480,000 para repartir entre sus hijos, en partes proporcionales al orden de su nacimiento. Dejó además S/.160,000 para el mayor, con lo que este recibe una cantidad igual a la del menor. Determinar el número de hijos, sabiendo que es máximo.

   a) 6 b) 7 c) 5 d) 3 e) 2

5. Un señor reparte su fortuna D.P. a 2, 3 y 5 y luego I.P. a los mismos números. Al final la reparte D.P. a la suma de las partes que le corresponden a c/u en el reparto directo e nverso. Si al que más recibe le dan S/.301, hallar la fortuna.

   a) 704 b) 608 c) 868 d) 902 e) N.A

Clave

1. b
2. e
3. c
4. d
5. c

Capítulo 19

REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

La regla de tres simple, es el procedimiento de cálculo que permite hallar un cuarto valor, cuando se conocen tres valores correspondientes a dos magnitudes.

La regla de tres simple, puede ser directa o inversa, según que las magnitudes sean directa o inversamente proporcionales.

Método práctico para resolver una regla de tres simple:

Directa	Inversa
OBRA OBREROS (Diagonal) $a_1 \rightarrow b_1$ $a_2 \rightarrow x$	OBREROS TIEMPO (Horizontal) $n_1 \Rightarrow t_1$ $n_2 \rightarrow x$
$x = \frac{a_2 . b_1}{a_1}$	$x = \frac{n_1 . t_1}{n_2}$

* Cuando es directa se multiplican los valores que están en la misma diagonal y se divide este producto entre la tercera cantidad.

* Cuando es I.P. se multiplican los valores que están en la misma horizontal y el resultado se divide entre la tercera.

Método práctico para resolver una regla de tres compuesta.

Apreciaremos éste método a través de la resolución del siguiente problema de Aplicación:

> "Una compañía poseé 3 máquinas de 70% de rendimiento para producir 1 600 envases cada 6 días de 8 horas diarias de trabajo. Si se desea producir 3 600 envases en 4 días, trabajando 7 horas diarias. ¿Cuántas máquinas de 90% de rendimiento se requieren?"

Se trata de un problema de regla de tres compuesta, porque posee todas las características como son: 1º más de dos magnitudes y dos series de valores:

Características

			máquinas	rendimiento	envases	días	hrs-día.
1°.	Más de dos magnitudes ⇒						
2°.	Dos series de valores	1ª serie:	3	70	1 600	6	8
		2ª serie:	x	90	3 600	4	7

En la primera serie se asigna un valor para cada magnitud.

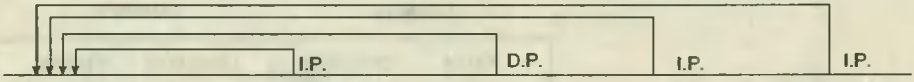
En la segunda serie, se vuelve a asignar un valor para cada magnitud, excepto para una de ellas; precisamente el valor que hace falta para completar la segunda serie, es la incógnita del problema.

Método:

Aplicaremos el método de las fracciones, para ello, se traza una horizontal entre los valores correspondientes de cada magnitud, transformándolos en quebrados.

El valor de la incógnita vendrá dado por el valor numérico que está escrito sobre ella, multiplicado por todas las fracciones que se han logrado, estas fracciones se deben escribir en forma adecuada, para saber cuál es la forma adecuada de escribir las fracciones, se compara por separado cada magnitud que interviene en el problema, con aquella donde está la incógnita para saber si son D.P. o I.P.

Si son D.P. el quebrado se invierte.
Si son I.P. el quebrado se escribe igual:



máquinas	rendimiento	envases	días	horas/días
$\frac{3}{x}$	$\frac{70}{90}$	$\frac{1600}{3600}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{8}{7}$

Nota:

D.P.(se invierte el quebrado)
I.P. (=)

$$x = 3 \times \frac{70}{90} \times \frac{3600}{1600} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{7} = 9 \text{ máquinas}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

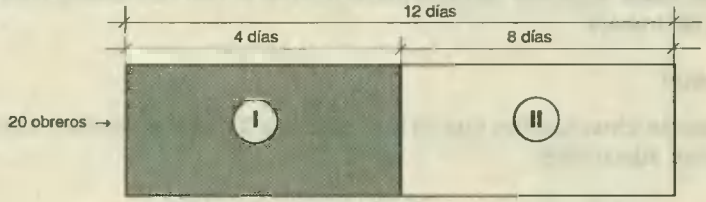
Observaciones Previas

* Cuando en un problema de regla de tres, nos den como magnitudes, dimensiones, es aconsejable, trabajar con el producto de ellas por ejemplo, si nos dan largo y ancho, trabajaremos con área; si nos dan tres dimensiones, trabajaremos con volumen.

1. Un trabajo puede ser hecho por 20 hombres en 12 días. Luego de 4 días se enferman varios hombres, sin embargo los restantes aumentan su eficiencia en un porcentaje tal que terminan el trabajo en la fecha fijada. Si el porcentaje que aumentó la eficiencia fue un número entero menor que 100 determinar cuantos hombres se enfermaron.

Solución

Consideremos que el rectángulo representa el trabajo a realizar.



Sea: "x" el número de obreros que se enfermaron y sea b% el aumento de eficiencia.

De la II parte:

$$\begin{array}{c} \text{obreros} \leftarrow \text{eficiencia} \\ 20 \text{ ——— } 100 \\ (20 - x) \text{ —— } (100 + b) \end{array}$$

$$\underbrace{(20 - x)}_{16}\ \underbrace{(100 + b)}_{125} = 2\,000 = 2^4 \times 5^3$$

Como el porcentaje de aumento de eficiencia es menor que 100, **x** debe ser mayor que 10 y menor que 20 y debe dividir exactamente a 2 000, entonces:

$$x = 16 \quad \wedge \quad b = 25$$

$\therefore$ Se enfermaron: $20 - 16 = 4$ hombres

Rpta. 4 hombres

2. Una persona por cada 100 huevos que compra, se le rompen 10 y por cada 100 que vende da 10 de regalo. Si vendió 1 800 huevos. ¿Cuántos huevos ha comprado?

Solución

En la venta se tiene:

Cuando vende 100 ——— entrega 110

Cuando vende 1 800 ——— entrega x

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1800 \times 110}{100} = 1980 \text{ huevos}$$

En la compra se tiene:

Cuando compra 100 ——— recibe 90

Cuando compra x ——— recibe 1 980

$$\Rightarrow \quad x = \frac{100 \times 1980}{90} = 2200 \text{ huevos}$$

Rpta ∴ Compró 2 200 huevos

3. Cuatro tractores deben arar un campo en 5 días trabajando 10 horas diarias, si al cabo de dos días de trabajo se decide hacer 3/4 del trabajo que falta en 5/4 de día trabajando 8 horas diarias; hallar entonces cuantos tractores más serían necesarios para poder realizar esa parte del trabajo.

Solución

Realmente consideremos que de los 5 días hay 3 días para realizar cierto trabajo. x = # de tractores adecuados.

# Tractores	# días	# h/d	área
4	3	10	1
4 + x	5/4	8	3/4

$$4 + x = 4 \times \frac{3}{\frac{5}{4}} \times \frac{10}{8} \times \frac{\frac{3}{4}}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Rpta. x = 5

4. Sabiendo que 20 obreros, trabajando 6 horas diarias pueden hacer una obra en 10 días; determinar en cuántos días 30 obreros, trabajando 8 horas diarias pueden hacer una obra cuya dificultad es dos veces la anterior.

# obreros	# días	# h/días	dif.
20	10	6	1
30	x	8	2

$$x = 10 \times \frac{20}{30} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{1} \Rightarrow x = 10 \text{ días}$$

Rpta. 10 días

5. Veinte obreros y 5 aprendices pueden cavar una zanja de 9m. x 9m. x 9m. en 27 días, a razón de 12 horas diarias siendo la habilidad de los obreros como 5 y de los aprendices como 3. ¿En qué tiempo 10 obreros y 10 aprendices cavarán una zanja de 12 x 3 x 48 si trabajan 9 horas diarias, y se esfuerzan sólo los 2/3 que los primeros?

Solución

Si la habilidad de los obreros es como 5 y la de los aprendices como 3, luego 3 obreros son equivalentes a 5 aprendices, e inicialmente se tendría como:

$20 + 3 = 23$ obreros, y al final:
$10 + 2 \times 3 = 16$ obreros.

Obreros	Volumen	días	esfuerzo	horas/día
23	9^3	27	3	12
16	12 x 3 x 48	x	2	9
(I)	(d)		(I)	(I)

$$x = 27 \times \frac{23}{16} \times \frac{12x3x48}{9x9x9} \times \frac{3}{2} \times \frac{12}{9} = 184 \text{ días}$$

Rpta. 184 días

6. Doce costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3 horas diarias. Después de 5 días se retiran 2 costureras, y 6 días después de esto se contratan "x" costureras adicionales para terminar a tiempo. Hallar "x".

Solución

Horas de trabajo:

$12 \times 23 \times 3 = 828$ horas.

en 5 días han hecho:

$12 \times 5 \times 3 = 180$ horas

y en 6 días $10 \times 6 \times 3 = 180$
en 11 días han trabajado 360 horas, les falta por hacer $(828 - 360) = 468$

$\Rightarrow$ 828 hr. 23 días 12 cost.

468 hr. 12 días x cost.

$$x = 12 \times \frac{468}{828} \times \frac{23}{12} = 13 \text{ días}$$

$\Rightarrow 13 - 10 = 3$ costureras

Rpta. 3 costureras

7. Una obra que tiene una dificultad que es como 7 se puede hacer con 7 máquinas de un rendimiento del 45% en 20 días de 11 horas de trabajo. ¿En cuántos días de 10 horas de trabajo se hará una obra que es el volumen como 15/9 de la obra anterior con una dificultad que es como 8 harán 12 máquinas con un rendimiento del 55%?

Solución

Máquinas	Rend.	Días	h/d	Obra	Dif.
7	45%	20	11	1	7
12	55%	x	10	15/9	8

$$x = 20x\frac{7}{12}x\frac{45\%}{55\%}x\frac{11}{10}x\frac{15}{9}x\frac{8}{7} = 20 \text{ días}$$

Rpta. 20 días

8. Si por un agujero circular de radio = 6 escapan 15 litros de agua por segundo. ¿Cuántos litros escaparán por otro agujero de sección cuadrada, cuya área es igual a la de un agujero circular = 3, en dos segundos.

Solución

Como la cantidad de líquido que escapa es proporcional tanto al tiempo, como al área del agujero:

$$\text{Area del círculo} = \pi r^2$$

AREA	TIEMPO	LITROS
36π	1	15
9π	2	x

$$x = 15x\frac{2}{1}x\frac{9\pi}{36\pi} = 7.5 \text{ litros}$$

Rpta. 7.5 litros

9. Veinticuatro obreros se comprometen a cavar una zanja de 50 m. de largo, 8 m. de ancho y 2 m. de profundidad en 10 días. A los 5 días se deciden aumentar todas las dimensiones en un 50%. ¿Cuántos obreros nuevos se necesitan para terminar el contrato en el plazo fijado si los nuevos son 50% más eficientes que los antiguos?.

Solución

Volumen original : $V_0 = 50 \times 8 \times 2 = 800 \text{ m}^3$.

Volumen final : $V_f = \left(\frac{150}{100}\right)^3 x800 = 2{,}700 \text{ m}^3$.

Como el trabajo se realiza en el plazo estipulado, los nuevos deben realizar:

$$(2{,}700 - 800) = 1\,900\ m^3.\ \text{en 5 días.}$$

Volumen	hombres	eficiencia	días
800 m^3	24	100	10
1 900m^3	x	150	5

$$x = 24x\frac{1900}{800}x\frac{100}{150}x\frac{10}{5} = 76$$

$\therefore$ Se necesitan 76 nuevos hombres.

Rpta. 76

10. Un fabricante de paraguas vende 6,000 de ellos a S/.2,800 c/u durante la temporada de lluvias que dura 4 meses. Determinar cuántos vende en un mes en el verano si la demanda por paraguas es la quinta parte de la de época de lluvias y si ha rebajado el precio a S/.2,400. Se sabe además que cuando se disminuye el precio aumenta la venta.

Solución

Demanda	Precio	Período	Cantidad
1	S/.2,800	4 mes.	6,000
1/5	S/.2,400	1 mes	x

$$x = 6000x\frac{1}{4}x\frac{2800}{2400}x\frac{\frac{1}{5}}{1} = 350$$

Rpta. 350

11. Dos cuadrillas de 34 obreros cada una hacen un tramo de carretera en partes iguales , luego de 72 días de comenzada la obra se observa que mientras los primeros les falta 3/5 de obra los otros han hecho 4/5. Si se quiere que la 1era. parte de la obra esté terminada en 140 días. ¿Cuántos obreros del 2do. grupo deberán pasar al 1er. grupo?

Solución

	Días	α	Obra
Los del 1er. grupo	72		2/5
	140		x

$$x = \frac{140x\frac{2}{5}}{72} = \frac{7}{9}\ \text{falta}\ \frac{2}{9}$$

En el 2do.grupo: Sea x el # de obreros que deben pasar el 1er. grupo.

Obreros	Días	Obra
34	72	4/5
x	68	2/9

$$x = 34 \times \frac{72}{68} \times \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{5}} = 10$$

Rpta. 10

12. Para pintar la fachada de una casa de 250m² se han empleado 8 personas que demoraron 30 días de 5 horas de trabajo. ¿Cuántas horas de trabajo diarias habrán que aumentar para qué 16 personas 50% menos hábiles respecto de los primeros pinten una fachada de 400m² en 20 días?

Solución

área	Personas	Días	h/d	Habilidad
250	8	30	5	100%
400	15	20	5+x	50%

$$5 + x = 5 \times \frac{10}{20} \times \frac{8}{16} \times \frac{400}{250} \times \frac{100\%}{50\%} = 12$$

Rpta. $x = 12 - 5 = 7$

13. 81 obreros han hecho una zanja de 15mt. de largo 12 de ancho y 4 de profundidad trabajando durante 24 días, 5 horas diarias. ¿Cuántos obreros más se necesitarán para hacer una zanja de 5mt. de largo, 16 de ancho y 8 de profundidad en 10 días trabajando 8 horas diarias?

Solución

81 Ob.	15 x 12 x 4	24 días x 5 h/d
81 + x	5 x 16 x 8	10 días x 4 h/d

$$81 + x = 81 \times \frac{24 \times 5}{10 \times 8} \times \frac{5 \times 16 \times 8}{15 \times 12 \times 4} = 108$$

Rpta. 108

14. 40 obreros trabajando con un rendimiento del 76% pueden terminar una obra en 50 días de 7 horas de trabajo, pero luego de 5 días de trabajo se retiran 5 obreros y piden terminar la obra 7 días antes. ¿Con qué rendimiento deberán trabajar los restantes esta segunda parte si aumentan 2 horas más de trabajo por día?

Solución

Obreros	Rendimiento	Días	h/d	Obra.
40	76%	5	7	1/10
35	x%	38	9	9/10

$$x = \frac{40}{35} \times 76 \times \frac{5}{38} \times \frac{7}{9} \times \frac{9}{1} = 80$$

Rpta. 80% de rendimiento

15. Con una carretilla puede transportar un desmonte en 6 días haciendo cierto número de viajes diarios pero lo haría en dos días menos si hiciera 6 viajes más por día. ¿Cuántos viajes en total tendrá que hacer para transportar el desmonte en x días?

Solución

Días	Viajes/día
6	x
4	x + 6

$$x + 6 = x \times \frac{6}{4} = 12$$

Rpta. Si en 6 días hace 12 viajes, en total siempre tendrá que hacer 72 viajes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre regla de tres simple y compuesta (con clave)

1. 70 albañiles pueden construir un edificio de 30 pisos, de 3.0 metros cada piso, en un tiempo de un año y 30 días, trabajando 9 horas al día. Al terminarse el 18vo. piso se decide rebajar en 60cm. la altura de los pisos restantes, disminuyéndose en una hora el trabajo por día. Teniéndose que entregar el edificio justo al año, se decide contratar más obreros. ¿Cuántos obreros más se contrataron? (1 mes = 30 días)

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

2. Dos sastres confeccionan 5 ternos en 2 semanas (5 días por semana) trabajando 6 horas diarias. Si tres sastres confeccionan 7 ternos en (10 + x) días trabajando x horas diarias. ¿Cuántos días tardaron 4 sastres en hacer 6 ternos trabajando (x + 2) horas diarias?

a) 6 días b) 10 c) 12 d) 9 e) 7

3. Un barco parte del Callao con 600 personas, rumbo a España en un viaje de 65 días. se sabe que tiene un depósito de agua, el cual alcanzaría para todo el viaje con una ración diaria por persona de 5 lts. Pero a los 20 días, en Panamá suben 300 personas y el viaje se modifica hasta Francia con 5 días más de viaje. Si no se reabastecen de agua. ¿Cuál debe ser la nueva ración diaria por persona para que alcanze el agua?

a) 2.5 lts. b) 3 lts. c) 3.5 lts. d) 4 lts. e) 4.5 lts.

4. Al construir 2 tramos de una carretera de igual longitud y dificultad, se observa que a los 50 días, 80 obreros han hecho 3/8 de la obra y en el 2do. tramo otros 80 obreros han hecho 5/7 de la obra, si se quiere terminar el 1er. tramo a los 120 días de haber comenzado, ¿Cuántos obreros del 2do. tramo deberán pasar al 1ero.?

a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

5. Poner una V cuando la proposición sea verdadera y una F cuando sea falsa.

I) El área de un cuadrado es D.P. a su perímetro.

II) Si A y B son dos magnitudes I.P., entonces su cociente es constante.

III) Si A, B, C son D.P. a E, F, G respectivamente y E, F, G son D.P. a H, I, J, entonces A, B, C son D.P. a H, I, J respectivamente.

a) VFF b) FVF c) VVV d) FFV e) VFV

6. Dos muchachos demoran en empastar 80 libros, trabajando 8 horas diarias, un cierto número de días, y se sabe que otros 3 muchachos trabajando 6 horas diarias demoran 5 días más que los anteriores en empastar 135 libros. Determinar cuántos días demoran los 2 primeros muchachos?

a) 8 b) 10 c) 13 d) 15 e) 18

7. El número de obreros de una contrata se aumenta en los 2/5, la jornada de trabajo se disminuye en 1/3 y la dificultad de la obra es los 2/5 de lo normal; entonces el tiempo requerido.

a) Aumenta 1/3
b) Disminuye 4/7
c) Es los 2/3
d) Es los 4/7
e) No varía.

8. Un trabajo puede ser hecho por 13 personas en 28 días a razón de 6 horas diarias. Si 5 de ellas aumentaron su rendimiento en 20%. ¿Cuánto tiempo tardarán si trabajan 8 horas diarias?

a) 20 días b) 19 días 4 h. c) 19 días 12 h. d) 18 días 3 h. e) 17 días 5 h.

9. Quince obreros pueden terminar una obra trabajando 8 horas diarias en 26 días, al cabo de 10 días se despiden 5 obreros, pasados seis días se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se habrán de contratar para terminar la obra en el tiempo fijado?

a) 3 b) 4 c) 9 d) 8 e) 12

10. Un Inspector Municipal llega a visitar 60 establecimientos en una semana invirtiendo 8 horas cada día. ¿Cuántos establecimientos podrán visitar 3 inspectores en 2 semanas si emplean 6 horas al día?

a) 135 b) 270 c) 540 d) 405 e) 315

11. Se sabe que 30 albañiles, trabajando 9 h/d, durante 18 días pueden construir 3 casas. ¿Cuántos albañiles podrán construir 4 casas, trabajando a un ritmo de 8 h/d durante 15 días?

a) 24 b) 42 c) 60 d) 54 e) 72

12. Un barco petrolero de 36000 ton. puede transportar en 8 meses 45 millones de barriles de petróleo. Cuatro barcos petroleros de 52000 toneladas. ¿Cuántos barriles de petróleo podrán transportar en un año, sabiendo que son un 10% más veloces que el primero?

a) 410 millones b) 520 millones c) 429 millones d) 390 millones e) 351 millones

13. En una fábrica donde todos los obreros tienen la misma eficiencia, 50 de ellos ensamblaron 20 autos en 25 días. ¿Cuántas camionetas ensamblaron 25 obreros en 30 días si se sabe que los tiempos de ensamblaje de un auto y una camioneta son entre si como 2 es a 3 ?

a) 10 b) 9 c) 6 d) 8 e) 5

14. 21 hombres se comprometen hacer una obra en 25 días de 4 horas diarias, al cabo de 10 días sólo han hecho 2/7 de la obra, con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el plazo fijado trabajando 5 horas diarias.

a) 7 b) 5 c) 4 d) 2 e) 10

15. Seis obreros se comprometieron a terminar una obra en 6 días trabajando 6 horas diarias. Si después de 2 días se retiran 2 obreros. ¿Cuántos días después de los ofrecidos estarán entregando la obra los restantes?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

16. Doce hombres se comprometen a hacer una obra en 8 días. Luego de trabajar 3 días juntos se retiran 3 hombres. ¿Con cuántos días de retraso terminan la obra?

a) 1 1/4 días b) 1 2/3 días c) 2 1/3 días d) 1 día e) 2 días

17. 18 obreros pueden hacer cierta obra en 20 días, al cabo de 8 días de labor se retiran 8 obreros y después de 6 días, se contratan "a" obreros más para terminar la obra sin retraso. Hallar "a" sabiendo que estos obreros son el doble de hábiles que los que se retiraron y que la jornada diaria no se alteró.

a) 6 b) 8 c) 16 d) 4 e) 32

18. Si 4 ovejas saltan sobre una cerca en 4 minutos. ¿Cuántas ovejas saltarán sobre la cerca en 1 hora?

a) 50 b) 60 c) 45 d) 46 e) 49

19. Un sastre pensó hacer un terno en una semana, pero tardó 4 días más por trabajar 4 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

a) 11 b) 14 c) 7 d) 8 e) 22

20. 32 obreros pueden hacer en 50 días trabajando 8 horas diarias 1 600 metros de una obra. Luego de 32 días de trabajo el ingeniero se entera que la obra debe ser de tan sólo 1 375 metros, por lo que despide a 5 obreros y días después rebaja en 2 horas el trabajo diario. Si la obra es terminada a los 46 días de iniciado el trabajo, indicar ¿Cuántos días se trabajó con la jornada de trabajo rebajada?

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 6

21. En el tiempo del Incanato, 9 hatunrunas hacían 50 aríbalos en 3 semanas trabajando 8 horas al día. ¿Cuántos hatunrunas eran necesarios para fabricar 84 aríbalos en 18 días si trabajan 7 horas diarias? (Resp. correctamente aproximada)

a) 14 b) 18 c) 21 d) 24 e) 28

22. En una embotelladora de bebidas se trabaja 10 horas diarias con 5 máquinas durante 20 días embotellándose 2 400 bebidas y teniéndose una eficacia del 80% por máquina. ¿Cuántas bebidas se podrán embotellar con 7 máquinas de una eficacia del 75%, si trabaja 24 días a razón de 9 horas diarias?

a) 3 402 b) 3 600 c) 3 024 d) 3 200 e) 2 800

23. Un sastre de categoría A puede hacer 32 ternos en 18 días trabajando 4 horas al día y un sastre de categoría B confecciona 24 ternos en 12 días trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos ternos harán 6 sastres de categoría A y 9 sastres de categoría B trabajando 8 horas por día en 15 días?

a) 736 b) 816 c) 616 d) 680 e) N.A.

24. Veinte obreros trabajan una obra 5 horas al día y deben terminarla en 15 días. Al cabo de 10 días han hecho sólo la mitad y para cumplir con el plazo fijado se contratan 5 obreros y todo el personal cambia el número de horas de trabajo diarias. ¿Cuántas son éstas?

a) 5 b) 8 c) 10 d) 7 e) 9

25. Una cabra sujeta a una estaca por medio de una cuerda de 3 metros demora media hora en comer el pasto que está a su alcance. ¿Cuánto demoraría si la cuerda fuese de 5 metros?

a) 50 min. b) 18 min. c) 1 hora
d) 1 h.23 min.20 seg. e) 1 h.25min.30seg.

26. Veinticuatro carpinteros pensaban hacer 100 carpetas en "t" días, pero a los 9 días, 10 de ellos se resfrían por lo que bajaron su rendimiento, cada enfermo, en un 30% terminando las carpetas con 3 días de retraso. Hallar el valor de "t".

a) 30 b) 37 c) 28 d) 35 e) 23

27. Sabiendo que 20 obreros pueden hacer una zanja de 400 m. de largo, 2 de ancho y 2 de profundidad, trabajando 30 días a 8 horas diarias. Determinar cuantos obreros serán necesarios con una eficacia 25% mayor que la de los anteriores para hacer una obra de 600 m. de largo 4 de ancho y 2.5 de profundidad trabajando 9 horas diarias durante 20 días.

a) 40 b) 50 c) 60 d) 80 e) 64

28. Tres personas pueden terminar una obra en 2,5 y 6 días respectivamente. Si cada uno aumentara su rendimiento en 10%, 20% y 50% respectivamente. ¿En qué porcentaje disminuirá el tiempo en que emplean en hacer la obra los 3 trabajando juntos?

a) 15% b) 22% c) $16\frac{2}{3}\%$ d) $18\frac{1}{5}\%$ e) $20\frac{1}{4}\%$

29. 8 hombres construyen 8 casas en un tiempo de 8 años trabajando con un cierto esfuerzo. ¿Cuántos hombres de la misma habilidad que los anteriores pero que trabajen con el doble de esfuerzo se necesitarán para construir el doble de casas en un tiempo 50% menor al anterior?

a) 32 b) 16 c) 64 d) 8 e) N.A.

30. 5 hombres trasladan 48 ladrillos de forma rectangular cuya base mide $5m^2$ con un esfuerzo representado por 2. ¿Cuántos ladrillos de $8m^2$. de base pueden ser trasladados por 18 hombres con un esfuerzo representado por 3, sabiendo además que los últimos ladrillos tienen el doble de altura?

a) 81 b) 27 c) 14 d) 9 e) 18

31. La depreciación de una máquina después de 5 años de uso fue de S/.120,000, sabiendo que se le ha usado 6 horas diarias y su mantenimiento ha sido como 3. Determinar el valor de la máquina a los 12 años si nueva costó S/.600,000 y después de los 5 años de le comenzó a usar 8 horas diarias y su mantenimiento sólo fue como 2.

a) S/.216,000 b) S/.320,000 c) S/.275,000 d) S/.456,000 e) S/.144,000

32. Se sabe que 30 albañiles, trabajando 9 horas diarias, durante 18 días pueden construir 3 casas. ¿Cuántos albañiles podrán construir 4 casas, trabajando a un ritmo de 8 horas diarias durante 15 días?

a) 24 b) 42 c) 40 d) 54 e) 72

33. En una construcción, 35 obreros cavan 4 zanjas en 72 horas. ¿En cuántas horas menos cavarán 3 zanjas, 45 obreros?

a) 42 b) 50 c) 52 d) 60 e) N.A

34. Un burro ha transportado 32 sacos de papas en 8 días trabajando 8 horas al día. ¿En cuántos días transportará 50 sacos de doble peso que los anteriores, reduciendo la distancia en un 20% y trabajando dos horas más?

a) 24 b)20 c) 12 d)16 e) 10

35. Una cuadrilla de 12 obreros pueden acabar un trabajo en 15 días, trabajando 10 hrs/día. Después de trabajar 7 días; 5 obreros se dan de baja y no son reemplazados. Al cabo de 3 días, ¿Cuántos obreros habrán de tomarse para poder acabar el trabajo en la fecha prevista?

a) 4 b) 2 c) 3 d) 6 e) N.A

36. Una obra puede ser terminada por 27 obreros en cierto tiempo. ¿Cuántos obreros 50% más eficientes son necesarios aumentar para hacer la tercera parte de la obra en un tiempo $\frac{3}{7}$ del anterior, trabajando la mitad de horas diarias?

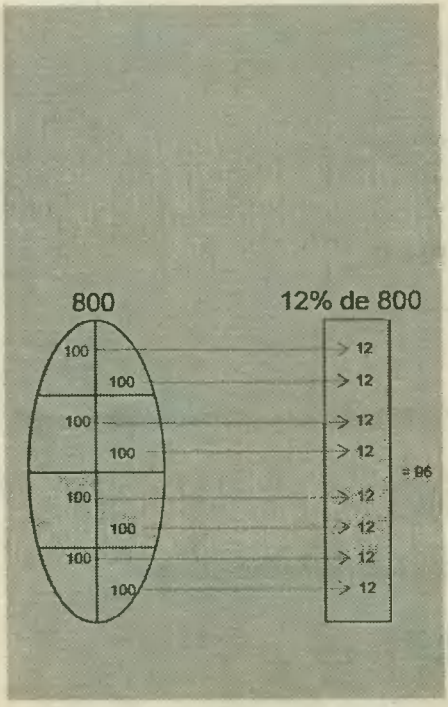
a) 16 b) 14 c) 31 d) 8 e) N.A

Clave

1. c	11. d	21. d	31. b
2. a	12. a	22. e	32. b
3. e	13. d	23. d	33. a
4. e	14. a	24. c	34. d
5. d	15. d	25. b	35. c
6. b	16. b	26. a	36. e
7. e	17. a	27. a	
8. c	18. b	28. c	
9. a	19. c	29. b	
10. d	20. a	30. c	

Capítulo 20

REGLA DE PORCENTAJE



La regla de porcentaje, nos permite resolver los problemas sobre tanto por ciento.

Se llama tanto por ciento, al número de unidades que se consideran de cada 100.

El porcentaje se puede calcular aplicando una regla de tres simple y directa o aplicando una fórmula que se deduce del siguiente problema general.

Hallar el n% de S.

$$\begin{array}{ll} 100 & \text{——} \quad n \\ S & \text{——} \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{n}{100} \times S$$

El % es un quebrado cuyo denominador es 100. Así para calcular el 12% de 800

$$x = \frac{12}{100} \times 800 = 96$$

El % como fracción

El 5% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 10% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 20% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 25% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 50% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 75% de $N = \frac{5}{100} N = \frac{1}{20} N$

El 100% de $N = \frac{5}{100} N = N$ (al todo en % se le representa como el 100%)

La fracción como %

Para transformar una fracción a % se le multiplica por 100%. Así:

$\frac{1}{5}$ de N en % : $\frac{1}{5} N \times 100\% = 20\%$ de N

$\frac{3}{4}$ de N en % : $\frac{3}{4} N \times 100\% = 75\%$ de N

Nota

Para transacciones comerciales:

Pv = precio de venta.
Pc = precio de costo
G = ganancia

⇒ $Pv = Pc + G$

Descuentos sucesivos

Para dos descuentos sucesivos del a% más el b%. El descuento único equivalente será:

$$D_{único} = \left[(a+b) - \frac{a.b}{100}\right]$$

Así dos descuentos sucesivos del 20% más el 20%, equivalen a uno solo de:

$$D_u = \left[(20+20) - \frac{20x20}{100}\right] = 36\%$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE PORCENTAJES

Observaciones Previas

* Debemos recordar que el cálculo del porcentaje, en sí, no es más que una regla de tres simple y directa, pero, por lo general los problemas van acompañados de una serie de situaciones que exigen razonamiento riguroso.

1. Si el 4% del 6% del 3% de una cantidad es 2.52, entonces dicha cantidad: ¿qué % representa del 7% de 3 000 000?

Solución

Sea C la cantidad desconocida. Se cumple:

$$\frac{4}{100} \times \frac{6}{100} \times \frac{3}{100} \times C = 2.52 \Rightarrow C = 35.000$$

$$7\% \text{ de } 3000\,000 = \frac{7}{100} \times 3000000 = 210000$$

$$\frac{x}{100} \times 210000 = 35000 \Rightarrow x = 16\,\tfrac{2}{3}\%$$

Rpta. $x = 16\,\frac{2}{3}\%$

2. Al precio de un objeto se le hacen tres descuentos sucesivos del 5%, 10% y 20%. ¿Cuál es el descuento único que equivale a estos tres descuentos sucesivos?

Solución

Suponiendo precio = 100

1er. descuento: 5 queda 95

2do. descuento: 10% (95) = 9.50 queda 85.50

3er. descuento: 20% (85.5) = 17.10

Descuento único: 5 + 9.5 + 17.10 = 31.60

Rpta. 31.60%

3. Pagando 2 750 soles por un cierto artículo que se está pagando el 10% de su costo en recargo. ¿A como debería de venderse para ganar el 38.5% del precio de costo?

Solución

Pv = Pc + G
2 750 = Pc + 10% Pc ⇒ Pc = S/.2 500
Pv = Pc + 38.5% Pc
Pv = 183.5% (2 500)

Rpta. Pv = S/.3 462.5

4. Un artículo se vende con un recargo del 15%. Inicialmente se pensaba ganar el 20% del precio de costo más el 25% del precio de venta. Al final se gana S/.25,200. Hallar el importe por el recargo impuesto.

Solución

$$Pv = Pc + 20\%\ Pc + 25\%\ Pv$$

Luego:

$$Pv - 25\%\ Pv = 120\%\ Pc$$

$$75\%\ Pv = 120\%\ Pc$$

$$Pv = 160\%\ Pc$$

Con el recargo:

Se paga : 15% más del Pv

$$\begin{array}{rcl} Pv & \text{———} & 160\ \%\ Pc \\ 15\ \%\ Pv & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = 24\ \%\ Pc$$

Luego:

$$Gan = 60\% + 24\%$$

$$Gan = 84\%\ Pc$$

$$\begin{array}{rcl} Pc & & \\ 84\ \% & \text{———} & 25\,200 \\ 24\ \% & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = 7200$$

Rpta. $x = 7{,}200$

5. El precio de un artículo aumenta mensualmente en un 10% sobre el precio del mes anterior. Si después de 4 meses el precio de un artículo es S/.292,820, hallar el precio inicial del artículo.

Solución

Sea P el precio inicial. Después del primer mes el precio será : $110\%\ P = \frac{110}{100} P = 1{,}1\ P.$

Después del segundo mes, el precio será:

$$110\%\ (1{,}1\ P) = \frac{110}{100}\ (1{,}1\%\ P) = 1{,}21\ P$$

Después del tercer mes será:

$$110\%\ (1{,}21\%\ P) = 1{,}331\ P$$

Por lo que después del cuarto mes será:

$$110\%\ (1{,}331\ P) = 1{,}4641\ P.$$

Rpta. $1{,}4641\ P = 292\,800, \quad P = S/.200\,000$

6. Un arquitecto por haber cierto número de planos gana, adicionalmente, ese número en % de su sueldo. En cambio su compañero, ganando el mismo sueldo, por hacer el mismo número de planos recibe adicionalmente, el doble de ese número en % de su sueldo, si

después de un mes ambos han recibido S/.432,000 y S/.504,000 respectivamente. Hallar cuantos planos hacen mensualmente los 2 arquitectos juntos.

Solución

Sean A y B los arquitectos. x = # de planos y S = sueldo.

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow S + x\%S = 432{,}000 \\ B \Rightarrow S + 2x\%S = 504{,}000 \end{array}\right\} \quad (-) = 72{,}000$$

Esos 72,000 representan lo que recibe adicional A por los x planos, y B recibiría 2(72,000) por los x planos.

$$\Rightarrow 432{,}000 - 72{,}000 = 360{,}000 = \text{sueldo mensual.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 360{,}000 \text{ ——— } 100\% \\ \quad 72{,}000 \text{ ——— } x\% \end{array}\right\} \quad x = 20 = \text{Nº de planos}$$

Se han hecho en total: 20 + 20 = 40

Rpta. 20 + 20 = 40 planos.

7. Para vender un artículo a S/.2 346 se ha tenido que hacer tres descuentos sucesivos de 20%, 15% y 8% sobre su precio de lista. Hallar este precio de lista.

Solución

Para los descuentos sucesivos; sea PL el precio de lista. Se tiene que:

$$\frac{80}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{92}{100} PL = 2346$$

Rpta. PL = S/.3 750

8. A un objeto que costó S/.120,000 se le desea fijar un precio de lista, de tal modo que haciéndole dos descuentos sucesivos del 10% y 20% aún se gane el 20% del precio costo, Hallar dicho precio de lista.

Solución

Sea: PL = precio lista. Al hacerle dos descuentos sucesivos del 10% y 20% el descuento único equivalente es 28%, luego:

Precio de venta = PL - 28% PL = 72% PL, pero:

Precio de venta = 120% (120 000) = 144 000

Rpta. PL = S/.200 000 . Luego 144 000 = 72% PL

9. Un fabricante elabora 60,000 juguetes a un costo unitario de 2,500. Si el 2% le resultan fallados, por lo que realiza una mejora en la calidad, logrando que todos salgan buenos, y en dicha mejora gasta el 0.5% del precio de venta de todo el lote, y con todo ahorra 2'700,000; hallar la ganancia que obtiene por cada artículo si no varía los precios.

Solución

En el primer lugar hallaremos lo que perdería por el 2% de los artículos fallados, vendiéndolos a un precio "P" desconocido.

$$\text{Perdería} \quad \frac{60{,}000 \times 2}{100} \times P$$

Si hace la mejora :

$$\text{Gastaría en ella} \quad \frac{60{,}000 \times 0.5}{100} \times P$$

Luego por dato: el ahorro es la diferencia de gastos extra sobre el proceso de fabricación.

$$2'700{,}000 = 60{,}000 \frac{P}{100} - \frac{0.5}{100} P = 1.5 \times P \times 600$$

$$\Rightarrow P = 3{,}000$$

Rpta. Luego ganancia = 3,000 - 2,500 = 500

10. Un comerciante vende cierto artículo a S/.131,000 obteniendo una ganancia líquida de S/.20,200 siendo el impuesto a la venta de 16% de la ganancia bruta y los otros gastos ascienden a S/.5,000. Determinar ¿Qué porcentaje del precio de fábrica es la ganancia neta?

Solución

GN = ganancia neta GB = ganancia bruta

$G_N = G_B - G_{Gastos} = 20{,}200$

Pero los gastos son: $16\% \, G_B + 5{,}000$

Entonces: $G_B - (16\% \, G_B + 5{,}000) = 20{,}200$

De donde: G_B = S/. 30,000

Como el precio de venta es S/.131,000
El precio de fábrica será S/.101,000
El porcentaje que representa la G_N es

$$\frac{20{,}200 \times 100}{101{,}000} = 20\%$$

Rpta. 20%

11. Si las dimensiones de una caja rectangular son: largo = 3x, ancho = 2x, alto = x; ¿en qué % debe disminuir su alto para que el volumen no se altere, sabiendo que el largo aumenta en 50% y el ancho en 40%?

Solución

Volumen inicial = $(3x)(2x)(x) = 6x^3$

Largo final = $150\%\,(3x) = \frac{150}{100}(3x) = 4.5x$

Ancho final = $140\%\,(2x) = \frac{140}{100}(2x) = 2.8x$

Altura final = Y , luego :
Volumen final = $(4.5x)(2.8x)\,Y$, pero :
Volumen final = Volumen inicial

$(4.5x)(2.8x)\,Y = 6x^3 \Rightarrow Y = \frac{1}{2.1}(x)$

$\therefore Y = \frac{1}{2.1} \times 100\% \qquad x = \frac{1}{2.1}\frac{(100x)}{100} = 47.62\%$

Rpta. Disminución = 100 - 47.62 = 52.38%

12. Un comerciante compra cierta mercadería y vende 1/3 ganando el 14%, la mitad ganando el 13% y para que la ganancia total sea el 14.5% vende el resto a S/.2,800. ¿Cuánto le costó la mercadería?

Solución

Tenemos: Ganancia

$\frac{1}{3}P_c \rightarrow 14\%\frac{P_c}{3}$

$\frac{1}{2}P_c \rightarrow 13\%\frac{P_c}{2}$

$\frac{1}{6}P_c \rightarrow x\%\frac{P_c}{6} \Rightarrow 2{,}800 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Sumando: $14\%\frac{P_c}{3} + 13\%\frac{P_c}{2} + x\%\frac{P_c}{6} = 14.5\%\,P_c$

$\Rightarrow x = 20$

De (1) tenemos: $120\%\frac{P_c}{6} = S/.2{,}800$

Rpta. Por lo tanto: P_c = S/.14,000

13. Un objeto cuesta S/.17 280. ¿Qué precio se fijó para su venta al público, sabiendo que si al venderlo se hace dos descuentos sucesivos del 10% y 20%, todavía se está ganando el 10% del 20%, del precio de costo?

Solución

Consideremos que:
P_v = precio que se fijó para su venta al público.
P_c = precio de costo = S/.17 280

Descuento: $(10 + 20) - \frac{10x20}{100} = 28\% P_v$

G = ganancia $= \frac{10}{100} x \frac{20}{100} x\ 17\ 280 =$ S/.345.60

Precio de venta efectivo = P_v - descuento = P_v - 28% = 72% P_v
Podemos establecer:
72% P_v = 17 280 + 345.6 $\rightarrow$ P_v = S/.24 480

Rpta. Precio que se fijó para su venta al público: S/24 480

14. El jornal de un obrero se le aumentó el 12% sobre los primeros S/.60 y el 9% del resto; si de esta manera en una semana gana S/.607.74. ¿Cuál era el jornal antes de recibir el aumento?

Solución

Jornal antes del aumento: x

aumento: $\frac{12}{100} x\ 60 + \frac{9}{100} (x - 60)$

Jornal actual: $x + \frac{12}{100} x\ 60 + \frac{9}{100} (x - 60) = \frac{607,74}{7} = 86,82$

$\therefore x = 78$

Rpta. Jornal, antes del aumento:S/.78

15. Un señor compra un artículo por 59,400 pero el vendedor le dice que si compra 3 le hacen una rebaja, por lo que paga S/.88,506 más. ¿Qué porcentaje del precio real representa la rebaja?

Solución

Los 3 le costarían 59,400 x 3 = 178,200 pero paga 59,400 + 88,506 = 147,906. La rebaja es 30,294. Por lo tanto el porcentaje que representa será:

$$\frac{30,294x100}{178,200} = 17$$

Rpta. 17 %

16. Tengo cierta cantidad de dinero si el 1er. día gastó el 43%. ¿Qué porcentaje de lo que me queda debo gastar el 2do. día para que me quede el 28.5% del dinero original?

Solución

Sea S/.100 el dinero:

	Tengo	Gastó	Me queda
1er. día	S/.100	43	57
2do. día	S/.57	x% 57	28.5

$\rightarrow$ x% S/:57 = 28.5 $\Rightarrow$ x = 50%

Rpta. x = 50%

17. El 2 por 375 de cierta cantidad se aumenta en 169 unidades de modo que resulta igual a la diferencia entre el 40% del 5% de dicha cantidad y el 20% del 3% de la misma. Luego dicha cantidad aumentada en el 20% del 50% de su 40% será:

Solución

$$40\% \text{ del } 5\% = \frac{40}{100} x \frac{5}{100} = 2\%$$

$$20\% \text{ del } 3\% = \frac{2}{100} x \frac{3}{100} = 0.6\%$$

Si "c" es la cantidad:

$$\frac{2}{375}c + 169 = 2\% \text{ de } c - 0.6\% \text{ de } c.$$

$$\frac{2}{375}c + 169 = \frac{20}{1000}C - \frac{6}{1000} \quad C = \frac{14}{1000}C$$

$$169 = \left(\frac{14}{1000} - \frac{2}{375}\right)C = \frac{169}{19{,}500}C$$

c = S/.19,500

$$\frac{20}{100} x \frac{50}{100} x \frac{40}{100} = 4\% = 4\%$$

Luego:

Rpta. 19,500 x 1.04 = S/.20,280

18. Un ambulante posee un lote de camisas vende la tercera parte de ellas ganando el 15% del precio de costo y el resto del lote ganando el 20% del precio de venta. Determinar que porcentaje del precio de costo representa la diferencia del precio de venta menos el de costo, si al final ganó tanto como si hubiese ganado el 5% del precio de venta.

Solución

Sean:

L = Lote total.
P.C. = Precio de costo.
P.V. = Precio de venta.

Luego:

$$\frac{L}{3} \times 1.15\ P.C. + \frac{2}{3}\ L \times 1.2\ P.V. = L \times 1.05\ P.V.$$

$$1.15\ P.C. + 2.4\ P.V. = 3.15\ P.V$$

$$\rightarrow \frac{P.C.}{P.V.} = \frac{0.75}{0.15}$$

Queremos:

$$\frac{P.V. - P.C.}{P.C.} \times 100\%$$

Luego:

$$\frac{P.C.}{P.V. - P.C.} = \frac{0.75}{1.15 - 0.75} = \frac{0.75}{0.40} = \frac{15}{8}$$

Luego:

$$\frac{P.V. - P.C.}{P.C.} \times 100\% = \frac{8}{15} \times 100\% = \ ? \ 100\% = 53.3\%$$

Rpta. 53.3%

19. Un comerciante compra cierta cantidad de papel y vende la tercera parte ganando el 12%; el resto lo da a un comisionista que lo vende ganando el 15%, quedándose éste con el 7% y le entrega al comerciante 8%; de esta manera el comerciante logra una ganancia total de S/.28,700. ¿Cuánto costó esa cantidad de papel?

Solución

Sea Pc el precio de costo del papel. Podemos establecer:

Primera venta:

Vendió $\frac{1}{3}$ del papel $\begin{cases} \text{costo: } \frac{1}{3} P_c \\ \text{gana: } \frac{12}{100} \times \frac{1}{3} P_c = \frac{1}{25} P_c \end{cases}$

Segunda venta:

Vendió $\frac{2}{3}$ del papel $\begin{cases} \text{costo: } \frac{2}{3}P_c \\ \text{gana: } \frac{8}{100} \times \frac{2}{3}P_c = \frac{4}{75}P_c \end{cases}$

Por condición:

$$\frac{1}{25}P_c + \frac{4}{75}P_c = S/.28\,700 \rightarrow P_c = S/.307\,500$$

Rpta. Costó: S/.307 500

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre porcentajes (con clave)

1. El 25% del 20% de un número más el 28% del mismo es igual al 82.5% del inverso del 10% del número. Hallar el número.

   a) 6 b) 5 c) 4 d) 26.4 e) 8

2. Se tiene que: S = a + b y que b es el S% de a y el a% de S es 5. Hallar el (S + a)% de b.

   a) 2 b) 2.5 c) 2.25 d) 3.5 e) 2.75

3. ¿Cuál es el tanto por mil de 8,970 que excede en un 15% al 20% de 17,940?

   a) 500% b) 250% c) 230% d) 275% e) 460%

4. Hallar x + y sabiendo que el x% del y% de 400 es 2x y el x% de 500 es 2y.

   a) 50 b) 90 c) 80 d) 60 e) 70

5. Se tiene 2 productos cuyo costo es de S/.6,600 cada uno. Uno se vende perdiendo el 32% del precio de venta., mientras que en el otro se gana; de tal manera que al final se obtiene una ganancia promedio de S/.400 por producto. ¿A cómo se vendió el producto con el que se ganó?

   a) 9,000 b) 8,800 c) 8,400 d) 9,512 e) 9,215

6. Un triángulo isósceles de papel se corta paralelamente a la base y se obtiene otro triángulo cuya área es el 64% de la anterior. ¿Qué % representa la nueva altura de la altura original?

a) 80% b) 120% c) 150% d) 60% e) 36%

7. Cada mes una moneda A se devalúa el 20% respecto a otra moneda B y ésta el 30% de C. Después de dos meses, ¿Cuánto se devaluó A respecto a C?

a) 35.6% b) 68.64% c) 70% d) 56% e) 82.3%

8. ¿En qué % se debe disminuir una cantidad para que equivalga al 60% del 25%, del 80%, del 50% de los 10/3 de su valor original?

a) 80% b) 70% c) 60% d) 50% e) 40%

9. 4 alumnos se reparten S/.9,488 y se obtuvo el siguiente resultado: Al primero le tocó el 30% más que el segundo, 75% más que el tercero y 80% más que el cuarto. ¿Cuánto le tocó al tercero? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 11 b) 18 c) 9 d) 14 e) 29

10. En la venta de un libro gano el 20% del precio de venta, si comprara el libro en S/.100 menos y lo vendiera al mismo precio ganaría el 36% del precio de venta. Hallar cuánto me cuesta un libro?

a) S/.625 b) S/.600 c) S/.480 d) S/.500 e) S/.400

11. El precio de costo de un par de zapatos es S/.2,500; se vende a un precio con el cual se pierde el 20% del precio de venta. Si este precio de venta fuese un 50% mayor que el actual, se ganaría 1.5 veces la pérdida. ¿Cuál sería esta ganancia?

a) 1 000 b) 200 c) 500 d) 625 e) 250

12. A un objeto de S/.10 000 se le descuenta el M% y luego M soles pagándose S/.7,980. ¿Cuánto se pagará si descontamos primero M soles y luego el M%?

a) 7,900 b) 7,984 c) 7,960 d) 7,650 e) 7,950

13. Al precio de venta de un artículo se fija en S/.126 más que su precio de costo. Al momento de venderlo se rebajó el 10%. Si se ganó el 8% del precio costo. Hallar el precio de venta.

a) 825 b) 630 c) 780 d) 672 e) 756

14. En la edición de un Libro, el costo del papel representa el 35% del costo del libro, el pago de la mano de obra representa el 25%, el costo de fabricación el 30% y la ganancia se estima en el 10%. ¿En cuánto será preciso aumentar el costo de dicho libro si el papel, aumenta en el 60%, la mano de obra en el 50%, el costo de fabricación en el 45% y la utilidad en el 15%.

a) 32.5% b) 42.5% c) 48.5% d) 52.5% e) 58.5%

15. Un señor vende su reloj ganando el 20% presta lo que recibe en dicha venta por un año al 10% anual ganando con esta última operación S/.1 560. ¿Cuánto le costó el reloj?

a) 12 500 b) 13 000 c) 13 500 d) 1 300 e) 1 350

16. Un televisor en Agosto costaba S/.72,000 y se pensaba vender ganando un 25%. Si cada mes sufre un recargo de un 20% en su precio de venta. ¿A cuánto se vende, ahora en Noviembre?

a) 144,000 b) 155,520 c) 129,600 d) 108,000 e) Ninguna anterior.

17. Al vender un libro se hace descuento del 12% con lo que se ganó S/.47.6. Hallar el precio de costo de dicho libro si se sabe que al fijar inicialmente el precio de venta se fija en el precio de costo incrementado en un 20%.

a) S/.850 b) S/.900 c) S/.750 d) S/.1,000 e) S/.600

18. En la venta de un radio se fijó el precio de venta en 200 más que el precio de costo, pero al venderlo con un descuento del 20% se perdió 100 en la venta, hallar a que precio se vendió dicho radio.

a) S/.1,400 b) S/.1,700 c) S/.1,500 d) S/.1,300 e) S/.1,200

19. Vendí un artículo en S/.6,800. Si lo hubiese comprado en S/.1,000 más ganando lo mismo que la vez anterior, al venderlo la ganancia resultaría el 20% del precio costo. ¿Cuánto gané?

a) S/1 133 b) S/.1 560 c) S/.1 300 d) S/.1 375 e) S/.1 800

20. La altura de un cilindro disminuye en su cuarta parte, y el radio de su base aumenta en un quinto de su valor inicial. ¿En qué porcentaje ha aumentado su volumen?

a) En un 5% b) En un 4% c) En un 8% d) En un 2% e) En un 6%

21. El fabricante de un producto gana el 10%, el mayorista el 20% y el minorista gana el 30%. Si el consumidor adquiere el producto a S/.858 averiguar el precio de costo de este.

a) 450 b) 348 c) 530 d) 500 e) 610

22. Una de las dimensiones de la base de una pirámide rectangular disminuye en un 1/10 de su magnitud, la otra aumenta en 1/5 de su valor. Si la altura aumenta en 15% de su valor. ¿En qué porcentaje aumenta el volumen de la pirámide?

a) 24.2 b) 31.2 c) 1.2 d) 17.2 e) N.A.

23. Si el 27% de la diferencia entre la cuarta parte y la sétima parte de un número es 24,300. Hallar dicho número.

a) 840,000 b) 420,000 c) 42,000 d) 210,000 e) 120,000

24. De los dos libros de Aritmética que me quedaban, uno le vendí con un 20% de descuento y el otro con un 30% de descuento, obteniéndose así S/.450 en total. ¿A qué precio estaban los libros?

a) S/.150 b) S/.200 c) S/.240 d) S/.300 e) S/.320

25. El precio de un artículo se aumenta en un 9% y el nuevo precio se disminuye en un (100 - q)%; cuál es el valor de q si el precio final es 96% del inicial.

a) 20 b) 40 c) 60 d) 30 e) 50

26. Cierta casa comercial ofrece 2 tipos de descuentos. Uno escalonado: 4% por los primeros S/.5,000 de compra; 8% por los siguientes, S/.5,000, 12% por los S/.5,000 siguientes y 16% por el resto. El otro descuento es del 10% sobre el total de la compra. ¿A partir de que cantidad conviene el primer descuento más que el segundo?

a) S/.24,000 b) S/.20,000 c) S/.30,000 d) S/.25,000 e) S/.16,000

27. Un artículo se está vendiendo perdiendo el 18% del precio de venta. Un cliente compra un artículo con un recargo final del 20% del precio costo por lo que se llega a ganar S/.3 080. ¿A cuánto asciende el valor del precio de costo del artículo?

a) 64 900 b) 129 800 c) 32 450 d) 70 800 e) 20 000

28. Se mezcla azúcar de S/.75 con azúcar S/.65 en cierta proporción y la Tonelada se vende en S/.75,900 ganando un 10%. Luego se dan cuenta que por error la proporción de mezcla se había invertido. ¿Cuál es el porcentaje real de ganancia?

a) 12% b) 6.90% c) 8.72% c) 29% d) 5%

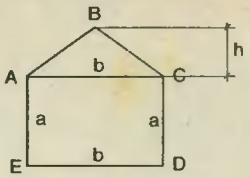
29. Si este mes pierdo el 15% de mi capital y el próximo mes gano el 20% de lo que me quedó, ganaré S/.3,000. ¿Cuánto tengo?

a) S/.60,000 b) S/.120,000 c) S/.150,000 d) S/.240,000 e) S/.300,000

30. Al vender un artículo se ha fijado un precio de venta, si al venderlo se hiciera un descuento del 19% perdería 10% del precio de costo y si lo aumentara en un 5% ganaría S/.45. Hallar el precio de venta.

a) 270 b) 300 c) 315 d) 400 e) 350

31. Se tiene la siguiente figura:



Si b aumenta en un 75%, permaneciendo a y h iguales.

¿En cuánto aumentará el área de ABCDE?

a) 75% b) 25% c) 100% d) 50% e) 12.5%

32. Se tiene 3 artículos de igual valor (precios de costo). El primero se vende perdiendo el 25% del precio de venta y el Segundo ganando un 20% del precio costo. ¿Qué porcentaje del precio de venta debe ganar en el tercero a fin de obtener una ganancia total del 10% del costo?

a) 23.08% b) 30% c) 24.56% d) 28.57% e) N.A..

33. En una compañía el 60% del personal son obreros, el 30% son empleados y el 10% son funcionarios. Un obrero gana el 63% de lo que gana un empleado y un empleado gana el 55% de lo que gana un funcionario. El personal de la compañía es de 200 personas y mensualmente se desembolsa en remuneraciones 5'201,900. ¿Cuánto gana un obrero?

a) 16 600 b) 14 000 c) 19 057.5 d) 7 623 e) 16405.5

34. El cuadrado de un número disminuido en su 25% es igual al 810% de mismo número. Hallar e 500% del número.

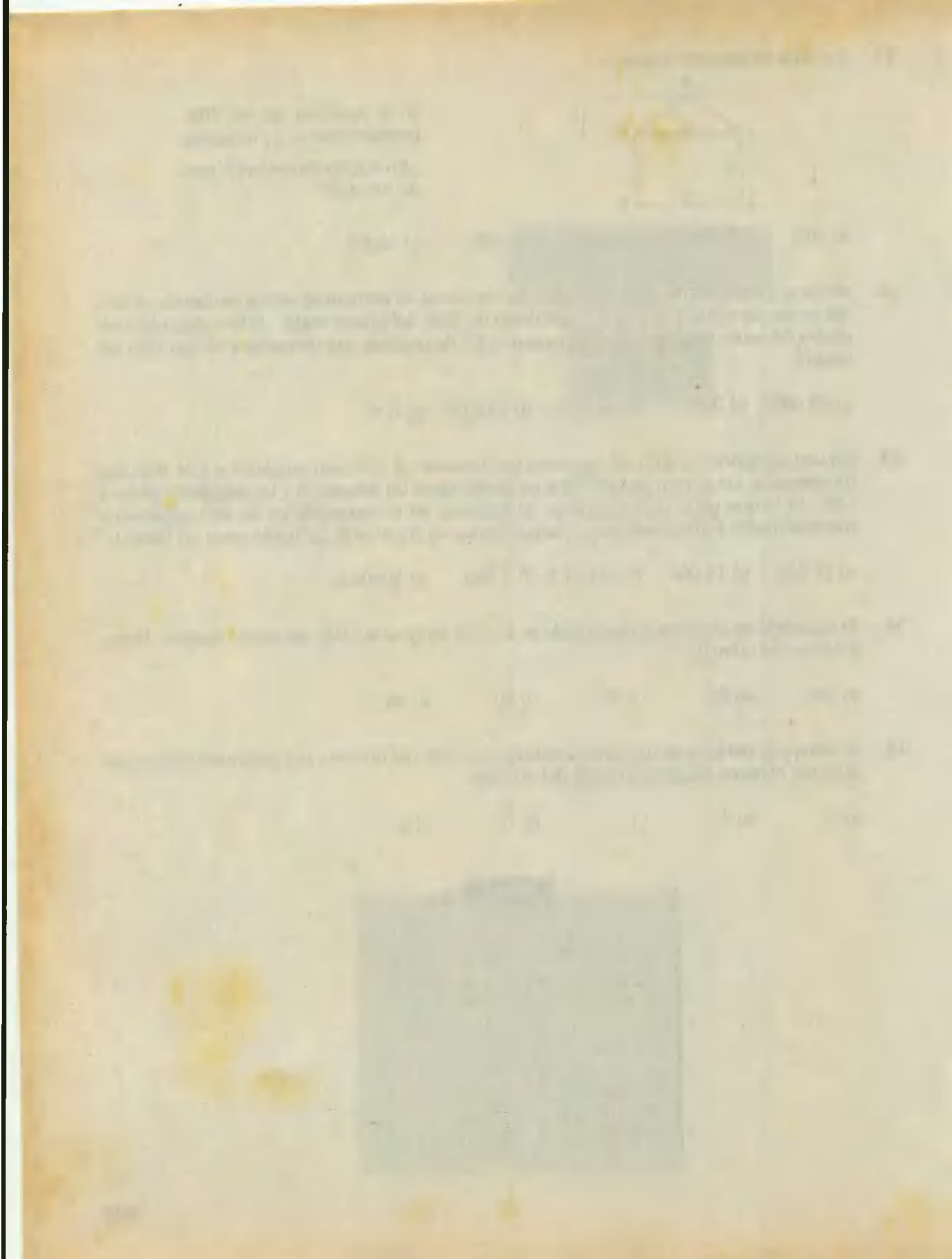
a) 540 b) 60 c) 72 d) 80 e) 96

35. El cuadrado del 60% de un número equivale al (20% del número) por ciento del inverso del 20% del número. Hallar el inverso del número.

a) 8 b) 4 c) 5 d) 12 e) 6

Clave

1. d	11. e	21. d	31. d
2. a	12. a	22. e	32. a
3. c	13. a	23. c	33. b
4. c	14. e	24. a	34. c
5. d	15. e	25. c	35. b
6. e	16. d	26. d	
7. a	17. c	27. d	
8. b	18. e	28. a	
9. c	19. a	29. d	
10. d	20. a	30. c	



Capítulo 21

REGLA DE INTERES SIMPLE

El préstamo a interés, imagen representada en la *Aritmética* de Johann Widman, publicada en Pforzheim en 1500 (la editio princeps data de 1489, en Leipzig). Fue el primer tratado práctico para comerciantes usado en Alemania.

Una persona puede tomar de otra, a préstamo, una cantidad de dinero y comprometerse, a cambio, a pagarle una indemnización o alquiler del capital colocado. Esta indemnización se llama INTERES. El interés varía, evidentemente, con la importancia del capital y la duración o tiempo que está colocado. Existe la convención de admitir que el interés es directamente proporcional al capital y a la duración de su colocación.

Se da el nombre de **rédito** al interés que producen 100 soles al año.

La persona que otorga el préstamo se llama PRESTAMISTA, y la que lo recibe PRESTATARIO. A la suma del capital con su interés se le llama MONTO.

El interés puede ser simple o compuesto.

INTERES SIMPLE

Cuando se retira tan pronto como se produce, permaneciendo el capital constante, durante el tiempo que dure su imposición; al interés simple se le determina aritméticamente.

INTERES COMPUESTO

Cuando el interés no se retira, sino que pasa a formar parte del capital; se dice que los intereses se capitalizan; los problemas de interés compuesto son de cálculo logarítmico, por lo que su solución es algebraica.

CALCULO DEL INTERES SIMPLE

Los problemas de interés, se resuelven ya sea aplicando regla de tres o por medio de fracciones.

Resolveremos el problema general del cálculo del interés, que se reduce al siguiente enunciado:

"Sabiendo que un capital de 100 soles, prestados durante un año, produce "R" soles; hallar el interés de un capital "C" al cabo de "a" años-

CAPITAL	TIEMPO	INTERES
100	1	R
C	a	I

El interés es directamente proporcional al capital y al tiempo de colocación, luego:

$$I = \frac{C}{100} \times \frac{a}{1} \times R,$$

de donde tenemos la fórmula del interés:

$$I = \frac{C \times R \times a}{100} \quad \text{.....(1)}$$

Si el tiempo a = 1, la fórmula siguiente de la ganancia anual o renta del capital:

$$\boxed{I = \frac{C \times R}{100}}$$

Puede ocurrir que el tiempo esté expresado en meses o días. En este cado, precisa modificar la fórmula (1), recordando que el año comercial tiene 360 días y el mes 30. Designemos por "d" el número de días y "m" el número de meses:

$$a = \frac{d}{360} \quad , \quad a = \frac{m}{12}$$

que al reemplazar en (1) se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\boxed{I = \frac{C \times R \times m}{1200}} \qquad \boxed{I = \frac{C \times R \times d}{36000}}$$

Como, monto (M), es la suma del capital impuesto, más los intereses que éste ha generado, se puede calcular el capital ó el interés conociendo el monto.

CALCULO DEL CAPITAL "C", CONOCIENDO EL MONTO "M".-

$$M = C + I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) en (2):

$$M = C + \frac{C \times R \times a}{100}$$

$$\boxed{C = \frac{100M}{100 + R \times a}}$$

* Obsérvese que esta fórmula se ha deducido considerando el tiempo en años, si estuviera dado en meses o días, tendríamos:

$$\boxed{C = \frac{1200M}{1200 + R \times m}} \qquad \boxed{C = \frac{36000M}{36000 + R \times d}}$$

CALCULO DEL INTERES "I", CONOCIENDO EL MONTO "M".-

$$M = C + I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

De (1), despejamos el capital:

$$C = \frac{100\,I}{R \times a}$$

este valor en (3):

$$M = \frac{100\,I}{R \times a} + I$$

$$\therefore \quad \boxed{I = \frac{M \times R \times a}{100 + R \times a}}$$

$$\boxed{I = \frac{M \times R \times m}{1200 + R \times m}} \qquad \boxed{I = \frac{M \times R \times d}{36000 + R \times d}}$$

Como todas estas magnitudes se consideran proporcionales, éstas fórmulas generales permiten calcular el interés y también calcular una cualquiera de las cantidades C, R, d, a, m, cuando se conocen las otras.

NOTA

En todas las fórmulas el % = R, debe estar dado en forma anual, en caso contrario, se aplicarán las siguientes conversiones:

Si : % (mensual) ..... x 12 = % (anual)
Si : % (bimensual) ..... x 6 = % (anual)
Si : % (trimestral) ..... x 4 = % (anual)
Si : % (cuatrimestral) ..... x 3 = % (anual)
Si : % (semestral) ..... x 2 = % (anual)

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE INTERES SIMPLE

Observaciones previas

Debemos recordar que los problemas de interés simple, son en la práctica, reglas de tres compuesta.
Sólo tenemos que recordar que el interés es directamente proporcional al capital, al tiempo y a la tasa de imposición.

1. ¿Cuántos meses debe prestarle el Banco S/.10,000 a un cliente si desea obtener de ganancia de S/.2,000 cobrándole el 32% de Interés anual?

Solución

C = S/.10 000

I = 2 000

R = 32%

m = meses = ?

Como $I = \frac{C \times R \times m}{1200}$ $\rightarrow$ $m = \frac{1200 \times I}{C \times R}$

$\rightarrow$ $m = \frac{1200 \times 2000}{10000 \times 32} = 7{,}5$ meses

Rpta. 7,5 meses

2. Un capitalista invierte S/.1'500,000 como sigue los 3/5 al 6% de interés anual, la mitad de lo que queda al 8% anual. ¿A qué tasa de interés anual debe invertirse el resto para obtener una ganancia anual de S/.108,000?

Solución

$C_1 = \frac{3}{5} \times 1\,500\,000 = S/.900\,000$ R = 6% a = 1 I_1

$C_2 = \frac{1}{2} \times 600\,000 = S/.300\,000$ R = 8% a = 1 I_2

$C_3 = \frac{1}{2} \times 600\,000 = S/.300\,000$ R = x = ? a = 1 I_3

Interés Total = S/.108 000

$$108\,000 = I_1 + I_2 + I_3$$

$$108\,000 = \frac{900000 \times 6}{100} + \frac{300000 \times 8}{100} + \frac{300000 \times (x)}{100}$$

Rpta. $x = 10\%$

3. El 40% de un Capital se impone al 8% anual. Si para el mismo tiempo el resto se impone al x% semestral produce un interés que es el 75% del anterior. Hallar X.

Solución

Sea C el capital: I = interés:

$$40\%\,C = \frac{40}{100}C = \frac{2}{5}C \rightarrow R = 8\% \quad I_1$$

$$60\%\,C = \frac{60}{100}C = \frac{3}{5}C \rightarrow R = 2x\% \quad I_2 = 75\%\ I_1$$

$$I_1 = \frac{\frac{2}{5}C \times 8}{100} = \frac{16}{500}C$$

$$I_2 = \frac{\frac{3}{5}C \times 2x}{100} = \frac{6x}{500}C$$

$$\frac{6x}{500}C = \frac{75}{100} \times \frac{16}{500}C$$

$$6xc = 12c$$

$$x = 2$$

Rpta. $x = 2$

4. ¿Cuál es el capital que impuesto al 12% trimetral ha producido en 5 meses 1,770 soles menos que si el capital fuera impuesto al 18% cuatrimestral durante 160 días?

Solución

12% Trimestral ≅ 48% anual

18% Cuatrimestral ≅ 54% anual

Entonces:

$$\frac{C \times 48 \times 5}{1200} = \frac{C \times 54 \times 160}{36000} - 1770$$

$$\Rightarrow C = 25 \times 1{,}770 = 44{,}250$$

Rpta. 44, 250

5. ¿Qué interés producirá un capital de 22,500 soles al cabo de cierto tiempo impuesto al 4%? Si se sabe que impuesto al 7% produce 12,960 soles más que impuesto al 5%.

Solución

$$7\% - 5\% = 2\% \rightarrow 12{,}960$$

$$4\% \rightarrow 25{,}920$$

Rpta. 25,920

6. Un capital se ha dividido en otros tres que son como 3, 5 y 7. Al 1ero. se le aumenta en su 10%, al 2do. en su 20% y al 3ero. en su 35%. ¿Qué porcentaje del nuevo total representa el nuevo capital menor?

Solución

Sean los capitales:

	1ero.	2do.	3ero.
primero	30	50	70
después	33	60	94.5

Nuevo total = 187.5

El porcentaje que representa el menor capital es:

$$\frac{33 \times 100}{187.5} = 17.6\%$$

Rpta. 17.6%

7. Dos capitales son como 4 es a 7. El 1ero. se colocó al 30 por 75 durante 10 meses y el 2do. al 35 por 70 durante 6 meses si el monto fue 338,000. ¿Cuál fue el capital inicial total?

Solución

Tenemos : $\frac{C_1}{4} = \frac{C_2}{7} = k$ .....(1)

$$I_1 = \frac{4k \times (30/75 \times 100) \times 10}{1200} = \frac{4k}{3}$$

$$I_2 = \frac{7k \times (30/70 \times 100) \times 6}{1200} = \frac{7k}{4}$$

Monto: $\frac{4k}{3} + \frac{7k}{4} + 4k + 7k = \frac{169k}{12}$

$$338{,}000 = \frac{169k}{12} \Rightarrow k = 24{,}000$$

$\therefore$ De (1) : $C_T = 11k = 264{,}000$

Rpta. 264,000

8. Dos socios se reparten los beneficios obtenidos en un negocio correspondiéndole al 1ero. S/.42,000 incluido el 30% de la ganancia por ser Gerente de la empresa y al 2do. le tocó S/.28,000. Si se sabe que la ganancia total representa el 40% del capital social. Calcular el capital inicial del 2do.

Solución

$$\begin{array}{rl} \text{GAN} = & 42{,}000 + \\ & \underline{28{,}000} \\ & 70{,}000 \end{array}$$

Al 1° 30% de 70,000 21,000

Luego:

$$49{,}000 \begin{cases} \text{El 1°} \ 21{,}000 \\ \text{El 2°} \ 28{,}000 \end{cases}$$

Capitales como 3, como 4.

Luego capital del segundo:

$$70{,}000 \times \frac{100}{40} \times \frac{4}{7} = 100{,}000$$

Rpta. 100,000

9. Un capital impuesto durante 15 meses produce un interés igual al 36% del monto. Calcular el rédito al que ha estado colocado.

Solución

Por dato del problema:

$$\frac{C \times 15 \times R}{1200} = 36\%M$$

Pero: $M = C + I$

Entonces:

$$\frac{C \times R}{80} = 36\% \left(C + \frac{C \times R}{80} \right)$$

Rpta. R = 45%

1. Una persona impuso el 40% de su capital al 25% semestral de interés simple y el resto al 45% anual obteniendo una renta anual de 9'400,000 soles. Hallar la parte impuesta a mayor tasa.

   a) S/.8'000,000
   b) S/.12'000,000
   c) S/.14'000,000
   d) S/.16'000,000
   e) S/.18'000,000

2. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital para que se convierta en el 175% de si mismo, si la tasa es 12.5% trimestral de interés simple?

   a) 17 meses b) 18 meses c) 19 meses d) 20 meses e) 21 meses

3. Tres capitales cuya suma es: S/.20'930,000 se impusieron al 100%, 90% y 110% anual de interés simple generando la misma renta. ¿Cuál es el capital impuesto al 100%?

   a) S/.7'400,000
   b) S/.5'700,000
   c) S/.6,300,000
   d) S/.7'700,000
   e) S/.6'930,000

4. Una persona depositó parte de su capital al 45%, otra al 50% y el resto al 55%. La primera parte es 5/7 de la segunda y la tercera es igual a la suma de las otras dos. Si al cabo de un año el monto será de: S/.7'270,000. ¿Cuál es la mayor de las partes?

   a) S/.2'400,000
   b) S/.2'300,000
   c) S/.1'400,000
   d) S/.1'000,000
   e) S/. 800,000

5. Un capital impuesto al 51% anual y otro al 85% anual, una suma es S/.2'000,000, generó un interés que es el interés cuádruple anual producido por el segundo capital como 5 es a 4, ¿Cuál es el menor de los capitales?

   a)S/.350,000 b)S/.250,000 c)S/.400,000 d)S/.200,000 e)S/.300,000

6. El 30% de un capital se presta al 20% anual, el 45% del capital al 30% anual. ¿A qué porcentaje se debe imponer el resto para que todo el capital produzca en 1 año una ganancia igual a la que se obtendría si dicho capital se impusiera al 25% anual?

   a) 21% b) 22% c) 23% d) 24% e) Ninguna anterior

7. Durante cuánto tiempo un capital impuesto al 10% anual produce un interés igual a 1/5 del monto.

a) 9 meses b)1 año 3 m. c)1 1/2 año d)2 1/2 años e) 2 años

8. Un capital impuesto al 9% anual durante un año y un segundo capital al 12% anual durante 3 años. La suma de dichos capitales es 87,000. Si el interés del primero es al del segundo como 6 es a 5. ¿Cuál es el menor capital?

a) 15,000 b) 12,000 c) 9,000 d) 18,000 e) 21,000

9. Qué tanto por ciento trimestral de interés simple, debe ganar un capital para que en 5 años se quintuplique.

a) 10 b) 26.7 c) 15 d) 30 e) 20

10. El monto producido por un capital durante 6 meses, a interés simple, es S/.50,000; pero luego de 8 meses más sería S/.55,000. ¿Cuál fue el rédito?

a) 12% b) 15.2% c) 20.4% d) 23.2% e) 16.2%

11. Se tiene un capital, el cual se divide en tres partes, que luego se prestan por un año de la siguiente manera:
1°) El 30% del capital al 6% trimestral.

2°) El 25% del capital al 4% bimestral.

3°) El resto al 3% cuatrimestral.
Si de los 3 intereses que se producen el mayor es S/.14,400, ¿cuál es el capital inicial?

a) 120,000 b) 200,000 c) 160,000 d) 240,000 e) 300,000

12. Los 2/7 de un capital se imponen al 12%, la tercera parte del resto al 16% y el resto al 18% de interés simple. Si la renta anual producida por todo el capital fue 8 300 soles.
¿Cuál fue el valor original del capital en soles. (Dar como respuesta la suma de sus cifras)

a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 21

13. Un señor hereda S/.2'490,000 sobre los cuales paga el 25% de gastos. Coloca el resto en un Banco al 5%. Al cabo de 16 meses retira el Capital y los intereses e invierte toda la suma en una sociedad que le da trimestralmente S/.39,840 de intereses. ¿A qué porcentaje colocó el dinero en la sociedad?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

14. Una persona deposita de Enero a Diciembre S/.3,000 cada fin de mes y el 31 de Diciembre acumuló S/.39,960. Calcular la Tasa de Interés Mensual.

a) 36% b) 24% c) 3% d) 1.5% e) 2%

15. El 10% del capital que tengo representa S/.426 menos que el 12% del doble del capital de Freddy. Si entre los dos tenemos S/.3,900. ¿Quién tiene más y cuánto más que el otro?

a) Tú; S/.1,500
b) Freddy S/.1,200
c) Freddy S/.900
d) Tú S/.900
e) Freddy S/1,500

16. Después de n años de haber depositado un capital, al 36% anual de interés simple, el monto es S/.12,600 y un año más tarde será S/.14,220. Hallar n.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

17. A comienzos de año coloco mis ahorros en el banco, el cual me paga 6% de interés anual. A los cuatro meses incrementa en un 18% la tasa de interés y 3 meses más tarde lo incrementa de nuevo en un 12% más (es decir asciende a un 36%). Si al final del año tengo intereses que suman S/.3 450. Inicialmente ¿Qué cantidad puse al banco?

a) 12,000 b) 15,000 c) 18,000 d) 24,000 e) 20,000

18. Un determinado capital C se impuso a un interés del i% anual durante t años obteniéndose un interés I. Se pretende aumentar la tasa de interés en un $\Delta i\%$ anual de modo que se obtenga el mismo interés I sin variar el capital C impuesto, con el objeto de obtenerlo en menor tiempo. Si Δt es el tiempo ahorrado en meses de acuerdo a la 2° modalidad, hallar dicho Δt.

a) $\frac{1200\ I}{C \times i}$ b) $\frac{1200\ I}{C \times (i + \Delta i)}$ c) $\frac{12 \times i \times t}{i + \Delta i}$

d) $\frac{12 \times (i - \Delta i) \times t}{i + \Delta i}$ e) $\frac{12 \times t \times \Delta i}{i + \Delta i}$

19. Un capital se divide en 2 partes y éstas se colocan a un interés del 5% anual, la 1° de ellas por 2 años y la otra por 4 años; a pesar de ello esta segunda parte produjo un interés que es los 2/3 del interés de la 1°. Si la suma de los intereses producidos por las dos partes es S/.25,000. ¿A cuánto ascendió el capital?

a) S/.150,000 b) S/.250,000 c) S/.225,000 d) S/.200,000 e) S/.175,000

20. Un inversionista gastó los 2/7 de su capital en un departamento, los 3/5 en la compra de tierras y el resto en acciones. Se sabe que anualmente el departamento le reporta un interés del 10% las tierras del 8% y las acciones del 30%. Si su renta anual es de S/.232,800 ¿Cuánto le reportan anualmente sus acciones?

a) S/.48,000 b) S/.81,000 c) S/.72,000 d) S/.84,000 e) S/.54,000

21. Un capital se coloca durante el 1er. año a un interés anual del i_1%, luego el monto a un interés anual del i_2% durante el 2do. año. Todo esto equivale a colocar durante los dos años el capital original a una tasa de interés anual del:

a) $\frac{(100+i_2)}{100} i_1$ b) $\left(\frac{i_1+i_2}{100}\right)\%$ c) $\frac{(100+i_2)}{200} i_1$ %

d) $\left(\frac{2i_1+i_2}{100}\right)\%$ e) $\frac{(100+i_1)}{200} i_2$ %

22. El 55% de un capital se impone a una tasa del 9% semestral durante 28 meses. ¿A qué tasa de rédito trimestral habrá que poner el resto del capital para que en 22 meses produzca el mismo interés.

a) 6% b) 7% c) 8% d) 6.5% e) 7.5%

23. El monto de un capital que está durante cierto tiempo al 15% es de 3,850, si en ese tiempo hubiera estado bajo una tasa del 27% anual, el monto sería de 4,130. Hallar dicho capital.

a) S/.3,300 b) S/.3,600 c) S/.3,200 d) S/.3,400 e) S/.3,500

24. Si el 35% de S/.52,000 se impone durante dos años al 4% de interés. ¿A cuánto debe imponerse el resto durante un año, para que la ganancia total de estos dos negocios sea de S/.1 950 ?

a) 1.5% b) $\frac{4}{3}$% c) $\frac{8}{7}$% d) $\frac{19}{13}$% e) 1%

25. A comienzos de año coloco mis ahorros en el banco, el cual me paga 6% de interés anual. A los cuatro meses incrementa en un 18% la tasa de interés y 3 meses más tarde lo incrementa de nuevo en un 12% más (es decir asciende a un 36%). Si al final del año tengo intereses que suman S/.3 450. Inicialmente ¿Qué cantidad puse al banco?

a) 12,000 b) 15,000 c) 18,000 d) 24,000 e) 20,000

26. Un capital se divide en tres partes iguales que se imponen al 28%, 34% y 38% anual respectivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá duplicado el capital?

a) 1 año b) 8 meses c)2 años 1m. d) 3 años e) 5 años

27. Dos capitales que se diferencian en S/.1,500 se ponen bajo distinta tasa de rédito, una al 7% y la otra al 15%, si luego de 2 años ambos capitales son iguales. Hallar el menor de los capitales originales.

a) S/.9,000 b) S/.10,500 c) S/.12,000 d) S/.13,500 e) S/.15,000

28. Los 8/13 de un capital colocado al 4% anual da S/.100.80 más en 1 año que el resto colocado al 6% ¿Cuál es dicho capital?

a) S/.78,480 b) S/.61,200 c) S/.66,600 d) S/.50,400 e) S/.65,520

29. El monto producido por un capital durante 6 meses, a interés simple, es S/.50,000; pero luego de 8 meses más sería S/.55,000. ¿Cuál fue el rédito?

a) 12% b) 15.2% c) 20.4% d) 23.2% e) 16.2%

30. Un negociante recibe anualmente una ganancia de S/.16,000 que proviene de dos de sus negocios que le producen interés como 1 es a 3. Si las tasas de interés son 8 y 5% respectivamente, hallar la diferencia de los capitales empleados en cada negocio.

a) S/.240,000 b) S/.190,000 c) S/.200,000 d) S/.50,000 e) S/.150,000

Clave

1. d	11. a	21. c
2. a	12. a	22. b
3. d	13. c	23. d
4. e	14. d	24. c
5. c	15. e	25. a
6. b	16. c	26. d
7. c	17. d	27. e
8. d	18. d	28. c
9. d	19. d	29. c
10. a	20. e	30. e

Capítulo 22

DESCUENTO COMERCIAL

El descuento comercial

El tenedor de un *efecto comercial* (letra o pagaré) a cobrar en cierta fecha (llamada *vencimiento*), que desea hacerlos efectivos antes de esa fecha, puede efectuarlo cediéndolos a un Banco, quien le anticipará el importe, cobrando los intereses por ese préstamo.

Tales intereses los cobra por anticipado, de modo que al tenedor del documento le entrega el importe del mismo o *valor nominal*, menos los intereses que ese valor produciría en el plazo anticipado. Esta cantidad en que se disminuye el valor nominal se llama *descuento* comercial; la cantidad entregada se llama *valor efectivo*, y la operación se llama *descontar* el documento.

El cálculo del descuento es, pues, un cálculo de interés simple, con las fórmulas dadas en las lecciones anteriores.

Ejemplo

Descontar al 6%, el día 3 de marzo, un pagaré de 3,245 pesetas que vence el 17 de abril. Número de días 45.

$$D = \frac{3\ 245 \times 6 \times 45}{36\ 000} = \frac{3\ 245{,}3}{400} = \frac{9\ 735}{400} = 24{,}33$$

El valor efectivo del documento, es decir, la suma recibida por su tenedor, es, por tanto, 3245 - 24,34 = 3220,65.

Todo lo dicho en la lección anterior acerca del cálculo práctico de intereses puede aplicarse al cálculo práctico de descuento. En particular, es muy frecuente el descuento simultáneo de varias letras, para lo cual el método de los divisores fijos proporciona una gran rapidez.

Ejemplo1°

¿Cuánto se cobrará por una letra de 5,400 pesetas a 25 días, descontada al 4,5%? Divisor fijo, 8 000. En 80 días el interés es, pues, de 54 pesetas.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DESCUENTO COMERCIAL Y VENCIMIENTO COMUN

Observaciones Previas

* Se trata de un caso especial de interés simple, por lo que seguiremos los mismos lineamientos del capítulo anterior.

  Vn = Valor nominal Va = Valor actual Dc = Descuento comercial
  Dr = Descuento racional (Teórico justo, es lo que deberían cobrar por la suma que prestan)
  Va = Vn - Dc (Va es lo que recibe al descontar la letra).

$$D_C = \frac{Vn \times R \times a}{100} \qquad D_R = \frac{Va \times R \times a}{100}$$ *

* Fórmulas deducidas considerando el tiempo en años.

1. El señor Vargas debe S/.12,300 que debe pagar en 8 meses; se libera pagando S/.1,035 y firmando dos letras, una de S/.6,720 pagadera dentro de 5 meses y otra pagadera en un año. ¿Por cuánto firmó la segunda letra, si todo se hizo al 5% de descuento anual ?

Solución

$$V_a' = 12300\left(1 - \frac{8 \times 5}{1200}\right) = 11890 \quad \text{(inicialmente)}$$

$$V_a = 11{,}890 - 1{,}035 = 10{,}855$$

$$V_{a_1} = 6{,}720\left(1 - \frac{5 \times 5}{1200}\right) = 6{,}580 \rightarrow V_{a_2} = 10{,}855$$

$$V_{a_2} = 10{,}855 - 6{,}580 = 4{,}275$$

$$4275 = V_{n_2}\left(1-\frac{1\times 5}{100}\right) = \frac{95}{100}V_{n_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{95}{100}V_{n_2} = 4275 \rightarrow V_{n_2} = 4500$$

Rpta. 4500

2. La suma de los valores nominales de dos pagarés es S/.8,400. El primero se descuenta por 2 meses y el segundo por 3 meses, ambos al 6% ; resultando de esto que se obtiene S/.8,280 del pago ambos. Hallar la diferencia de sus valores nominales.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} V_{n_1} + V_{n_2} = 8{,}499 \rightarrow (1) \\ V_{a_1} + V_{a_2} = 8{,}280 \end{array}\right\} \quad D = 8{,}400 - 8{,}280 = 120$$

Pero: $$D = \frac{V_{n_1}\times 2\times 6}{1200} + \frac{V_{n_2}\times 3\times 6}{1200} = 120$$

De donde: $2V_{n_1} + 3V_{n_2} = 24{,}000 \rightarrow (2)$

De (1) y (2):

$V_{n_1} = 7{,}200$

$V_{n_2} = 1{,}200$

$\therefore V_{n_2} - V_{n_1} = 6{,}000$

Rpta. 6,000

3. Una letra firmada por S/.9,500 debía pagarse en Octubre y se descontó en Junio del mismo año al 7.5%. Si el banco donde se paga cobra una comisión de 0.1% sobre el valor nominal. Hallar cuánto debió pagarse por la letra al momento de ser descontada.

Solución

V_n = S/.9 500

Jun. - Oct. = 4 meses

$$\left.\begin{array}{l} D_C = \dfrac{V_{n_1}\times \%\times t}{1200} = \dfrac{9500\times 7{,}5\times 4}{1200} = 237{,}5 \\ \text{Comisión } 0.1\% \ (9\ 500) = 9.50 \end{array}\right\} (-)$$

Descuento real: S/.288

Debió pagarse: 9 500 - 228 = S/.9 272

Rpta. S/.9 272

4. Si el descuento comercial y el racional de un documento son como 7 es a 5. ¿Qué parte del valor nominal del documento es su descuento comercial?

Solución

$$\frac{D_C}{D_R}=\frac{7}{5} \qquad \frac{D_C-D_R}{D_C}=\frac{7-5}{7}=\frac{2}{7}$$

y como: $V_n=\frac{D_C\times D_R}{D_C-D_R}=\frac{D_C}{\left(\frac{2}{7}D_C\right)}\times\frac{5}{7}D_C=\frac{5}{2}D_C$

Rpta. $\therefore \frac{D_C}{V_n}=\frac{2}{5}$

5. Una letra de S/.2 000 fue negociada a 40 días de su vencimiento y por ella se obtuvo S/.980. Determinar el %.

Solución

$$R=\frac{36000\times D_C}{V_n\times d}$$

$$R=\frac{36000\times 20}{2000\times 40}=18\%$$

Rpta. 18%

6. Hallar el V_n de una letra, sabiendo que su D_C es de S/.388.85 y su D_R es de S/.385.

Solución

Existe una fórmula: $\boxed{V_n=\frac{DC\times DR}{DC-DR}}$

$$V_n=\frac{388,85\times 385}{3,85}=S/.38,885$$

Rpta. Vn = S/. 38,885

7. Hallar el V_n de una letra, sabiendo que la diferencia entre su D_C y D_R es S/.2 al ser descontada al 5% a 4 meses de su vencimiento.

Solución

$$2=\frac{D_R\times 5\times 4}{1200} \qquad D_R = 120$$

$D_C = 122$

$$V_n = \frac{122 \times 120}{2} = S/.7{,}320$$

8. Se ha recibido una suma de S/.2,014 por una letra negociada con 12% de descuento a 5 meses de su vencimiento. Calcular el valor nominal.

Solución

$V_n = ?$

$V_a = S/.\ 2\ 014$

$m = 5$

$R = 12\%$

Consideremos un V_n en las condiciones del problema:

$V_n = 1200$

$$D_C = \frac{1200 \times 12 \times 5}{1200} = S/.60$$

$V_a = 1140$

Podemos establecer:

$$\begin{array}{ccc} \underline{V_a} & \alpha & \underline{V_n} \\ 1140 & \text{——} & 1200 \\ 2014 & \text{——} & x \end{array}$$

$$x = \frac{2014 \times 1200}{1140} = S/.2\ 120$$

Rpta. S/. 2 120

$V_n = x$

$$D_C = \frac{x(12)5}{1\ 200} = \frac{x}{20}$$

$$Va = x - \frac{x}{20} = 2\ 014$$

$19x = 2\ 014 \times 20$

$x = 106 \times 20$

$x = 2{,}120$

Rpta. $x = 2{,}120$

9. Un comerciante aceptó el día 1° de Abril de 1979, 4 letras: La 1ra. por S/.80,000 que vence el 10 de Agosto, la 2da. por S/.160,000 que vence el 3 de Setiembre, la 3ra. por S/.240,000 que vence el 13 de Octubre y la cuarta por S/.320,000 que vence el 8 de Nov. Todas estas fechas de 1979. Si luego decide cancelar su deuda con un solo pago de S/.800,000. ¿En qué fecha vencerá?

Solución

Considerando como fecha de referencias 10 de Agosto :

V_n	Vence	t
80,000	10 Agosto	0
160,000	3 Sept.	24
240,000	13 Octub.	64
320,000	8 Noviem.	90

Por fórmula :

$$t_{medio} = \frac{0+48+192+360}{10}$$

t_{medio} = 60 días después del 10 de Agosto.

Fecha de Vencimiento : 9 de Octubre

Rpta. 9 de Octubre

10. La diferencia de los descuentos de una letra, descontada al 80% anual durante 5 meses, es 200 Intis. Determinar el valor nominal de esta letra.

Solución

Fórmula: $\boxed{DC - DR = \frac{DR \times R \times a}{100}}$

$$D_C - D_R = 200 = \frac{D_R \times 80 \times 5}{1200}$$

D_R = 600 Intis ; D_C = 800 Intis

$$V_n = \frac{D_C \times D_R}{D_C - D_R}$$

$$V_n = \frac{800 \times 600}{200} = 2400 \text{ Intis}$$

Rpta. 2400 Intis

11. Cuánto se recibirá por una letra pagadera a los 2 años, cuyo valor nominal es 9 570 soles, descontada al 5% anual. Considerar el descuento racional.

Solución

Como: $D_n = \frac{V_n \times r \times t}{100 + r \times t}$

$$D_n = \frac{9570 \times 5 \times 2}{100 + 5 \times 2}$$

$D_R = 870$ Intis.

$V_{a_n} = V_n - D_r$

$V_{a_n} = 9\,570 - 870 = 8{,}700$ Soles.

Rpta. 8,700 Soles.

12. Si el valor nominal de una letra, cuyo descuento racional es el 80% del descuento comercial, es 1 250 soles, determinar el valor actual racional de dicha letra.

Solución

$$V_n = \frac{D_C \times D_R}{D_C - D_R};\quad D_R = \frac{80}{100} D_C \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\rightarrow D_C = \frac{5}{4} D_R$$

$$V_n = \frac{\frac{5}{4} D_R \times D_R}{\frac{5}{4} D_R - D_R} \Rightarrow V_n = 5D_R$$

Como: $V_n = 1\,250 - 250 = 5\,D_r$

$\therefore\ D_R = 250$ soles.

$V_{a_n} = 1\,250 - 250$

$V_{a_n} = 1\,000$ soles.

Rpta. 1 000 soles.

VENCIMIENTO COMUN

Se tienen varias letras a distintos plazos y diferentes valores nominales, pero sujetas, todas, a la misma tasa de descuento. Se desean reemplazar por una **UNICA** letra. El plazo (x) de ésta **única** será:

$$\boxed{x = \frac{\sum V_n \times \text{tiempo}}{\sum V_n}} \quad \text{ó} \quad x = \frac{V_{n_1} d_1 + V_{n_2} d_2 + V_n d_n}{V_{n_1} + V_{n_2} + V_n}$$

13. ¿Cuál sería el tiempo de vencimiento de una letra que reemplaza a otras tres cuyos valores nominales y tiempo de vencimiento son: 30,000 intis, 20,000 intis y 15,000 intis y 60 días, 50 días y 20 días respectivamente?

Solución

Capital	Tiempo	Capital x Tiempo (Simplificando)
30,000	60	30,ØØØ x 6Ø = 60 x 6
20,000	50	20,ØØØ x 5Ø = 50 x 4
15,000	20	15,ØØØ x 2Ø = 20 x 3

Plazo de la única o tiempo de vencimiento:

$$t_{vencimiento} = \frac{60\times 6+50\times 4+20\times 3}{6+4+3}$$

$$t_V = \frac{360+200+60}{6+4+3} = \frac{620}{13}$$

$$t_V = 47.69 \Rightarrow t_V = 48 \text{ días}$$

Rpta.: 48 días

14. Félix posee una letra firmada por S/.5 700 para ser cancelada el 31 de Julio al 2% anual, mientras que Ernesto posee una letra de S/.6,300 para ser cancelada el 30 de Setiembre del mismo año al 9% anual. Si el 30 de Abril del mismo año Félix y Ernesto intercambian sus letras. ¿Cuánto le debe dar uno de ellos al otro para que nadie resulte perjudicado?

Nota
Resolver el problema trabajando en *meses*.

Solución

$$Va_1 = 5\,700 - \frac{5700\times 2\times 3}{1200} = \text{S/.5 671.50}$$

$$Va_2 = 6\,300 - \frac{6300\times 9\times 5}{1200} = \text{S/.6 063.75}$$

Saldo: $Va_2 - Va_1$ = S/.392.25

Rpta.: S/.392.25

15. Un equipo que cuesta S/.367,500 debe pagarse a lo largo de un año en idénticas cuotas mensuales. La persona que adquirió el equipo paga normalmente hasta el 6° mes y al término del 7° paga lo restante ¿Cuánto dinero ahorró si el descuento es del 8% ?

Solución

Ahorró: $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$

D_1: por letra del 8° mes (y así sucesivamente)

$$D = \left(\frac{367500}{12}\right)\times\frac{8}{1200}(5+4+3+2+1) = \frac{3675}{12}\times\frac{8}{12}\times 15$$

D = S/.3 062.50

Rpta.: S/.3 062.50

16. Se debe pagar dos letras de igual valor nominal y la 1ª debe cancelarse 4 meses antes que la 2da. Se pagan ambas al mismo tiempo antes de la fecha de cancelación, descontándose la primera al 8% y la segunda al 7% ahorrando el total S/.46,802.50. Si la primera letra fuera descontada al 7% y la segunda al 8%, el ahorro total sería S/.47,772.50. Hallar el valor nominal de c/u de las letras.

Solución

$$\frac{V_n \times 8 \times t}{1200} + \frac{V_n \times 7(t+4)}{1200} = 46{,}802.50 \quad (1)$$

$$\frac{V_n \times 7 \times t}{1200} + \frac{V_n \times 8(t+4)}{1200} = 47{,}772.50 \quad (2)$$

$$(2) - (1): \quad \frac{4}{1200} \times V_n(8 - 7) = 47{,}772.50 - 46{,}802.50$$

$$\therefore V_n = S/.291{,}000$$

Rpta. S/.291,000

17. Una letra cuyo valor nominal es 72,000 soles fue descontada comercialmente faltando t días para el vencimiento. Determinar cuánto se recibió por ella sabiendo que el descuento racional a la misma tasa hubiera sido el 90% del descuento comercial?

Solución

Del dato: $D_R = \frac{9}{10} \times D_C$

Por fórmula: $V_n = \dfrac{D_C \times \frac{9}{10} \times D_C}{\frac{1}{10} \times D_C} = 72000$

$$D_C = 8{,}000$$

Se recibió : $V_a = 72{,}000 - 8{,}000 = 64{,}000$

Rpta. 64,000

18. Un comerciante vende un televisor recibiendo una cuota inicial de S/.35,000 y 6 letras mensuales de S/.30,000 cada una. Si el banco le compra las letras con un descuento comercial del 40% anual. ¿A cómo debería vender el televisor si el pago fuera al contado?

Solución

$$V_a = 35{,}000 + 6 \times 30{,}000 = \frac{30000 \times 40 \times 21}{100 \times 12}$$

Rpta. $V_a = 194{,}000$

19. Un comerciante debe 3 letras a un mismo acreedor: La primera por S/.12,000 que vence el 20 de Julio, la segunda que vence el 4 de Agosto y la tercera que vence el 18 de Setiembre. Si luego reemplaza estas tres letras por una sola de S/.48,000 cuyo valor nominal es la suma de los valores nominales de las letras reemplazadas y que vence e 19 de Agosto. Determinar la diferencia entre los valores nominales de la segunda y tercera letra.

Solución

Escogiendo: 4 Agost. como referencia.

12 000	20 Julio	-15
x	4 Agos.	0
y	18 Sep.	45
48 000	19 Agos.	15

Por fórmula del vencimiento común:

$$t = \frac{12000\times(-15)+0+45y}{48000} = 15$$

De donde $y = 20{,}000$

y $x = 16{,}000$

Rpta. Diferencia: 4,000

20. Se tiene una letra que ha sido descontada racionalmente 40 meses antes de su vencimiento. Hallar el porcentaje de descuento sabiendo que su valor actual es los 5/6 de su valor nominal.

Solución

$r = ?$ Del enunciado

$T = 40$ meses ; $\frac{6}{5}V_a = V_n$ .....(1)

$V_n = V_a + D$ .....(2)

(1) en (2):

$$\frac{V_a}{5} = \frac{V_a\times 40\times r}{1200} = 6\%$$

Rpta. 6%

21. Al comprar un televisor de S/.4'171,000 al crédito, se han firmado 5 letras mensuales, cuyos valores nominales se van incrementando en S/.24,000 mensualmente. Hallar el valor nominal de la última letra suponiendo un descuento comercial del 10% anual.

Solución

$$-Va_1 + Va_2 + Va_3 + Va_4 + Va_5 = 4\,171{,}000 \qquad r = 10\%$$

$$(V_{n_1} - D_{C_1}) + (V_{n_2} - D_{C_2}) + \ldots + (V_{n_5} - D_{C_5}) = 4\,171{,}000$$

$$5V_{n_1} + 24\,000(1+2+3+4) - \frac{V_{n_1} r \times 1}{1200} + \frac{V_{n_2} r \times 2}{1200} + \ldots\ldots\ldots \frac{V_{n_5} n \times 5}{1200} = 4\,171{,}000$$

$$5V_{n_1} + 240{,}000 - \frac{V_{n_1} r \times 1}{1200} + \frac{(V_{n_1} r + 24000) \times r \times 2}{1200} + \ldots\ldots\ldots = 4\,171{,}000$$

$$5V_{n_1} - \frac{V_{n_1} r}{1200}(1+2+3+4) + \frac{24000}{1200} \times r(2+2 \times 3+3 \times 4+4 \times 5) = 3'931{,}000$$

$$5V_{n_1} = \frac{V_{n_1}}{8} = 3'931{,}000 + 8{,}000\,; \quad \frac{39V_{n_1}}{8} = 3'939{,}000 \Rightarrow Vn_1 = 808{,}000$$

$$\Rightarrow V_{n_5} = V_{n_1} + 4(24{,}000) = 904{,}000$$

Rpta. S/. 904,000

22. Cual sería el descuento racional que se obtendría en una letra, cuyo valor nominal es S/.1 305 850, descontada al 20% anual por 20 días. Dar como respuesta el valor actual racional.

Solución

Como: $$D_R = \frac{V_n \times \% \times t}{36000 + \% t} \Rightarrow D_R = \frac{1\,305\,850 \times 20 \times 20}{36\,000 + 20 \times 20} = S/.14\,350$$

$$\therefore Va_{RACIONAL} = 1\,305\,850 - 14\,350 = S/.1\,291\,500$$

Rpta. S/.1 291 500

23. En qué fecha debe descontarse una letra de S/.1 800 000, al 20 % anual, que fue aceptada el 21 de setiembre y pagadera a los 50 días, para que se reciba por ésta S/.1 768 000.

Solución

Como: $$D_C = \frac{V_n \times R \times t}{36\,000} \Rightarrow D_C = 1\,800\,000 - 1\,768\,000 = 32\,000$$

$$\Rightarrow \quad D_C = \frac{1\,800\,000 \times 20 \times t}{36\,000} = 32\,000 \Rightarrow t = 32 \text{ días faltan para su vencimiento;}$$

han transcurrido 50 - 32 = 18 días a partir del 21 de setiembre.

Rpta. ∴ Fecha de descuento el 9 de Octubre

24. El valor actual racional de una letra es S/.540,000 y su descuento racional es el 90% de su descuento comercial. Hallar el valor nominal de dicha letra.

Solución

$$D_R = 90\% \; ; \quad D_C = \frac{9}{10} D_C$$

Luego: $D_C = \frac{10}{9} D_R$

Además: $V_n = \frac{D_C \times D_R}{D_C - D_R} = \frac{\frac{10}{9} D_R \times D_R}{\frac{1}{9} D_R} = 10 D_R$

El dato es $V_{a_r} = 540{,}000$

Pero: $V_{a_r} = V_n - D_R$

$$540{,}000 = 9D_R \rightarrow D_R = 60{,}000$$

$$V_n = V_{a_r} + D_R = 540{,}000 + 60{,}000 = 600{,}000$$

Rpta. 600,000

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre descuento comercial y vencimiento común (con clave)

1. Si una letra se cancela 4 meses antes del vencimiento se le descuenta el 5%, pero si se paga 3 meses antes, se obtiene S/.900 de descuento. Hallar el valor nominal.

a) 20,000 b) 22,000 c) 23,000 d) 24,000 e) 25,000

2. Un señor firma una letra pagadera dentro de 18 meses, pero a los 6 meses la cancela, con un descuento del 12% semestral, si se sabe que si la hubiera pagado el mismo día que la firmó se hubiera ahorrado S/.960. Hallar el Vn de la letra.

a) S/.8,000 b) S/.7,200 c) S/.6,000 d) S/.10,000 e) S/.9,000

3. En que día de Octubre vencerá una letra que reemplaza a una letra de S/.8,400 que vence el 2 de Octubre, una de S/.6,700 que vence el 5 de Setiembre y una de S/.9,600 que vence el 13 de Noviembre, sabiendo que el Vn, de esta letra es igual a la suma de los Vns de las letras reemplazadas.

a) 6 b) 9 c) 11 d) 12 e) 17

4. Se tiene una letra de S/.12,000 que vence el 20 de Set. con una tasa de descuento del 25% y la otra de S/.12,500 al 36% de descuento que vence el 20 de Octubre, En que día de Agosto dichas letras serán equivalentes?

a) 11 b) 15 c) 18 d) 21 e) 25

5. Se tiene una letra de S/13,000 que vence el 15 de Julio, una de S/.12,000 que vence el 19 de Agosto, y otra de S/.20,000, si las 3 letras se pueden reemplazar por una de 45,000 que vence el 24 de Agosto. Hallar en que día de Setiembre vence la tercera letra.

a) 16 b) 17 c) 14 d) 28 e) 22

6. Se tiene una letra de S/.10,000 que vence el 21 de Junio, con una tasa de desc. del 18% y se cambia por una letra que vence el 11 de Julio al 24%; el 12 de Abril. Cuál debe ser el Vn. de dicha letra si ni se gana ni pierde en dicho cambio.

a) S/.10,266 b) S/.10,052 c) S/.10,280 d) S/.10,286 e) N.A.

7. Hallar el Vn. de una letra pagadera dentro de 200 días con una tasa de descuento del 6% bimestral, si la diferencia entre su descuento racional y comercial es de S/.400.

a) S/.3,600 b) S/.16,000 c) S/.18,000 d) S/.8,000 e) S/.12,000

8. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que se vencía dentro de 15 días al descontarla comercialmente al 33% anual se ha recibido S/.15,780 ?

a) S/.16,000 b) S/.16,500 c) S/.17,000 d) S/.18,000 e) S/.20,000

9. Se tiene 3 letras: la primera de S/.14,000 que vence el 16 de Octubre, la 2da. de 18,000 que vence el 21 de Noviembre y la 3ra., de S/.20,000 que vence el 15 de Noviembre, si se reemplaza las 3 letras por una sola en que día de noviembre vencería dicha letra?

a) 6 b) 9 c) 12 d) 22 e) 18

10. La suma, la diferencia y el producto del descuento comercial y el descuento racional de una letra están en la relación de 199.5, 0.5 y 9 950. Hallar el valor nominal de la letra.

a) S/.4,975 b) S/.9,950 c) S/.19,900 d) S/.19,950 e) S/.39,900

11. La diferencia entre los valores actuales, comercial y racional de una letra, pagadera en 5 meses y descontable al 40%, es S/.500. ¿Cuál es su valor nominal?

a) S/.21,000 b) S/.32,000 c) S/.42,500 d) S/.60,000 e) S/.32,050

12. El descuento comercial de una letra es S/.54,000 y su descuento racional es S/.50,000. ¿Cuál hubiera sido el valor actual comercial de dicha letra si se hubiera descontado por el mismo tiempo pero a doble tasa de descuento?

a) 650,000 b) 567,000 c) 490,000 d) 725,000 e) 543,000

13. Se tiene 3 letras: una de 18,000 que vence el 27 de julio, otra de 24,000 que vence el 11 de agosto, otra de 30,000 cuya fecha de vencimiento se desea averiguar, sabiendo que la fecha de vencimiento de la letra única que reemplaza a las tres es el 6 de agosto.

a) 15 de agosto b) 13 de agosto c) 5 de agosto

d) 7 de agosto. e) 8 de agosto

14. Se tiene una letra que vence el 2 de marzo de 1980. ¿En qué fecha se descontó dicha letra si se recibió un valor actual igual a los 17/18 de su valor nominal? Considerar que el porcentaje de descuento fue del 25% anual.

a)12 Dic. b) 11 Dic. c) 13 Dic. d) 14 Dic. e) 10 Dic.

15. Se tiene una letra, al cual se le calcula, para un mismo tiempo y un mismo porcentaje, su descuento comercial y racional. Si el descuento comercial y racional es el 20% del valor nominal de la letra ¿Qué porcentaje del valor nominal de dicha letra es el descuento comercial?

a) 22% b) 22.5% c) 25% d) 27% e) 30%

16. Juan le debe pagar a Pedro una letra de 60 000 pagadera dentro de 15 meses. Si Juan desea reemplazar dicha letra por otra cuya fecha de vencimiento sea dentro de 20 meses ¿Cuál sería el valor nominal de dicha letra, sabiendo que el porcentaje de descuento es del 24% anual?

a) 64,000 b) 65,000 c) 70,000 d) 73,000 e) 75,000

17. La diferencia de los descuentos que sufre una letra al 10% y durante 5 años es I/.3 500. Entonces el valor nominal más el valor actual es:

a) I/.24 500 b) I/.30 500 c) I/.28 700 d) I/.25 400 e) I/.32 300

18. La diferencia entre el descuento comercial y el descuento racional al 10% que sufriría una letra pagadera a los 3 meses es : 40 soles. Deteminar el valor nominal de la letra.

a) 16 400 b) 164 000 c) 65 600

d) 656 000 e)Ninguna anterior.

19. La suma de los valores nominales de 2 letras es de S/.16,800, habiéndose recibido 16,560 soles por ambas descontadas al 6%, la primera por 2 meses y la segunda por 3 meses. ¿Cuál es el valor de la letra de mayor precio?

a) 11,000 b) 12,400 c) 13,000 d) 14,000 e) 15,000

20. Una letra al ser descontada comercialmente disminuye en 935 soles en su valor nominal. Se sabe que el interés que hubiese generado el descuento racional en el tiempo de descuento es de S/.85. Hallar el valor nominal de la letra.

a) 8 500 b) 9 350 c) 9 670 d) 8 850 e) 9 250

21. Si la relación entre el descuento racional y el descuento comercial es 3/5. ¿Cuál es la relación entre el valor actual y el valor nominal del mismo documento?

a) 1/2 b) 1/3 c) 2/5 d) 3/5 e) 4/5

22. Un señor posee una letra pagadera al año y medio, la cual la cancela 8 meses antes, descontándose el 4% anual. Si hubiera cancelado al instante habría ahorrado S/.300. Hallar el valor nominal de dicha letra.

a) 9 000 b) 9 600 c) 9 450 d) 10 350 e) 9 750

23. Una persona ha depositado S/.39,000 a 40% de interés simple y al mismo tiempo ha firmado una letra por S/.80,000 pagadera a los 2 años. Al cabo de cuantos meses, con sus ahorros podrá pagar exactamente el valor de la letra? (Considerar que el porcentaje de desc. fue el 30% anual.)

a) 10 b) 15 c) 18 d) 22 e) 8

24. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento de una letra sabiendo que al descontarla se obtiene un valor actual que es los 23/24 de su valor nominal. Supóngase un descuento del 10% anual.

a) 150 días b) 180 días c) 100 días d) 80 días e) 90 días

25. Se dispone de dos letras, por 36,000 dólares cada una. ¿Cuál es la diferencia de sus valores efectivos si hoy se descontaran una y mañana la otra, ambas al 50% anual?

a) 80 dólares b) 70 dólares c) 60 dólares d) 50 dólares e) 40 dólares

26. El valor nominal de una letra es el 60% del valor nominal de otra. Si se descontaran 3 y 5 meses antes de su vencimiento al 20% trimestral el descuento de la primera sería S/.288,000. ¿Cuál sería el descuento de la segunda?

a) S/.600,000 b) S/.700,000 c) S/.800,000

d) S/.900 000 e) S/.1'000,000

27. Una persona que debe S/.1'800,000 a saldar en tres partes iguales, la primera dentro de 3 meses, la segunda después y la tercera luego de 3 meses de abonar la anterior. Si pagara inmediatamente al contar con una tasa de 40% semestral. ¿Cuánto tendría que abonar?

a) S/.1 160,000 b) S/.1'610,000 c) S/.1'120,000

d) S/.1'210,000 e) S/.1'320,000

28. Se tiene 3 pagarés: uno de 2,000 soles que vence el 2 de diciembre, otro de S/.3,000 que vence el 1° de febrero del año siguiente y otro de S/.4,000 pagadero el 9 de febrero. Se desea reemplazar estos 3 pagarés por uno sólo. ¿Cuál será el día de su vencimiento?

a) 20 de Enero. b) 21 de Enero. c) 22 de Enero.

d) 23 de Enero. e) 19 de Enero.

29. Se tiene 3 letras: una que vence el 22 de agosto de 1983; otra de S/.90,000 que vence el 1° de octubre de 1983 y una última de S/.60,000 que vence el 20 de diciembre de 1983. Si la letra que las reemplaza a las 3, en vencimiento común, vence el 27 de setiembre de 1983. Hallar el valor nominal de la 1ra. letra.

a) 120,000 b) 100,000 c) 150,000 d) 180,000 e) 160,000

Clave

1. d	8. c	15. a	22. a	29. b
2. c	9. d	16. c	23. d	
3. e	10. a	17. a	24. b	
4. a	11. c	18. b	25. c	
5. b	12. d	19. b	26. d	
6. b	13. b	20. a	27. e	
7. c	14. a	21. e	28. d	

Capítulo 23

REGLA DE MEZCLA O ALIGACION

La regla de aligación nos permite resolver los problemas sobre mezclas.

Esta regla nace para satisfacer una necesidad eminentemente comercial y se le atribuye a los Fenicios y Cartaginenses su invención.

Se llama **mezcla** a la unión de dos o más sustancias susceptibles de unirse en proporciones cualquiera conservando su propia naturaleza. Cuando la mezcla se obtiene fundiendo dos o más metales se denomina **aleación** y cualquier fragmento de la pasta de metal obtenido en forma de barra se denomina lingote.

Tanto en las mezclas como en las aleaciones, como las sustancias mezcladas o metales aleados, conservan su propia naturaleza se deduce el siguiente principio:

> "La cantidad de mezcla y el peso de la aleación son respectivamente, iguales a la suma de las cantidades mezcladas y a los pesos de los metales aleados".

Este principio es el que sirve para establecer las ecuaciones fundamentales de la llamada REGLA DE ALIGACION.

Definición

"La regla de mezcla es el procedimiento de cálculo que da a conocer los artificios aritméticos utilizados en la resolución de problemas relativos a mezclas y aleaciones".

Esta regla tiene su fundamentación en el hecho de que en el comercio se acostumbra a "mezclar" diversas clases de mercaderías de distintos precios para poder venderla a un precio intermedio.

Precio: Costo de cada unidad de una mercancía.
Valor: Costo total de la mercancía.

Se presentan dos casos generales; llamados el problema directo y el problema inverso.

El problema directo de mezclas
(Para calcular el precio medio o precio de costo de la mezcla)

Cuando se mezclan sustancias de precios diversos, en cantidades iguales o desiguales, interesa calcular el precio a que resulta la mezcla, es decir el valor de cada unidad de mezcla obtenida. Para ello basta calcular el costo de cada cantidad de las que entran en la mezcla, y se obtiene así el costo total; por otra parte se tiene la cantidad total de sustancia y el precio es el cociente de ambas.

Por ejemplo, si mezclan:

120 litros de vino a S/.165 el litro, cuyo importe es:	S/.19 800
80 litros de vino a S/.150 el litro, cuyo importe es:	S/.12 000
60 litros de vino a S/.135 el litro, cuyo importe es:	S/. 8 100
El importe total es:	S/.39 900

y como el número total de litros es: 120 + 80 + 60 = 260,
el precio a que resulta cada litro es 39 900 ÷ 260 = S/.153.4... (precio medio que está comprendido entre el mayor y menor precio de los ingredientes).

En general el precio medio o precio de costo, se calcula con la fórmula:

$$\text{Precio medio} = \frac{\text{costo total de la mezcla}}{\text{número de unidades de la mezcla}} \quad \text{..... (1)}$$

El problema inverso:

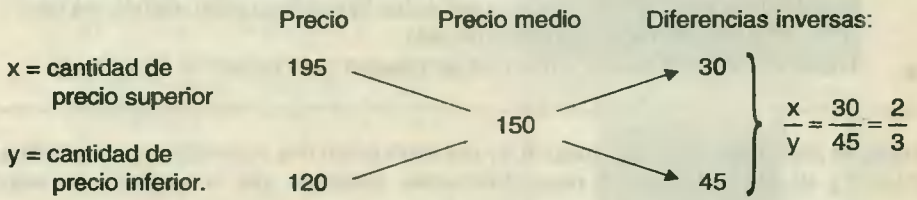
Permite calcular la proporción en que deben mezclarse sustancias de precios conocidos, para que la mezcla resulte a un precio dado comprendido entre ambos.

Supongamos, para fijar las ideas, que se trata de mezclar vinos de S/.120 y de S/.195, para obtener un vino de S/.150.

Cada litro de vino de S/.195 que entre en la mezcla representa una pérdida de S/.45, y cada litro de S/.120 da una ganancia de S/.30 respecto al precio de la mezcla (S/.150).

Para que se compense la ganancia con la pérdida, es preciso que las cantidades estén en la relación $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ es decir, por cada dos litros de vino de S/.195 (que dan una pérdida de S/.90) deben entrar tres litros de vino de S/.120 (que dan una ganancia igual de S/.90).

Podemos disponer así:



Las cantidades que deben entrar son proporcionales a estos dos números, o sea, simplificando, su razón es 2/3.

Como el razonamiento es general, válido para todos los problemas análogos, resulta la siguiente:

REGLA

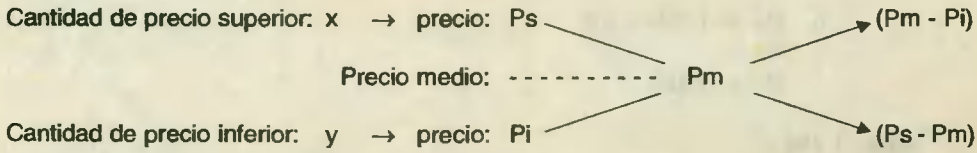
> "Las cantidades que deben mezclarse para obtener una mezcla de precio prefijado, son inversamente proporcionales a la diferencia entre sus precios y el precio intermedio prefijado".

De esta regla surge el método práctico llamado aspa simple:

Aspa simple

Se aplica cuando intervienen dos ingredientes y se trata de precisar la relación en la que intervienen los ingredientes en la mezcla; para ello se traza un aspa, al centro se coloca el precio medio en los extremos de la izquierda se colocan los precios de los ingredientes; se restan las cantidades que están en la misma diagonal, los resultados obtenidos indican la relación en la que intervienen cuyos precios están en la misma horizontal que los valores obtenidos en las diferencias anteriores.

Esquema general del aspa.



Nota
La relación que se obtiene en el aspa, no se altera si a todos los precios se les multiplica o divide por un mismo número.

$$\frac{x}{y} = \frac{P_m - P_i}{P_s - P_m}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REGLA DE MEZCLA O ALIGACION

i. Mezclas simples

Observaciones Previas

* La fórmula de mezcla inversa (aspa) se ha deducido cuando en la mezcla intervienen dos ingredientes; si intervienen más de dos ingredientes, el aspa se aplicará más de una vez.
* Para que un problema sobre mezcla (inverso) sea determinado, se debe poder calcular la relación en la que los ingredientes intervienen en la mezcla, en caso contrario el problema sería indeterminado.
* Todos los problemas sobre mezclas se pueden resolver con la fórmula (1).

1. Hallar el precio medio de una mezcla donde intervienen dos sustancias cuyos precios son S/.212 y S/.424 el kilogramo respectivamente; sabiendo que la cantidad del segundo ingrediente es igual al 6% del primer ingrediente.

Solución

Por datos se deduce que por cada 100 kilogramos de la primera sustancia intervienen 6 kilogramos de la segunda.

Como: $\text{Precio medio} = \dfrac{\text{Costo total de la mezcla}}{\text{Número de unidades de la mezcla}}$

$$\text{Precio medio} = \frac{100(212)+6(424)}{100+6} = 224$$

Rpta. ∴ Precio medio : S/.224

2. Se mezcla 30kg. de arroz de S/.1,200 el kilo con 40kg. de arroz de S/.1,480 el kilo. ¿A cómo hay que vender un kilo de mezcla para ganar un 10% del costo?

Solución

$$P_C = \frac{1200\times 30+1480\times 40}{30+40} = 1\,360 \quad \text{como } P_V = P_C + \text{Ganancia}$$

Ganancia = 10 % de 1360 = S/. 136

$\therefore \quad P_V = 1\,360 + 136$

$P_V = 1\,496$

Rpta. 1 496

3. Se mezclan dos tipos de vino en volúmenes que sean como 3 es a 2 y luego se vende con 20% de ganancia, se obtendría lo mismo si lo mezclaremos en proporción de 2 a 3 y lo

vendiéramos con 30% de ganancia. Hallar la relación de los precios de las dos clases de vino.

Solución

P_1 y P_2 : los precios

$$120\%\left(\frac{3P_1+2P_2}{5}\right)=130\%\left(\frac{2P_1+3P_2}{5}\right)$$

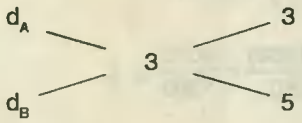
$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{3}{2}$$

Rpta. 3 a 2

4. En un mezcla de dos sustancias A y B, se encontró que sus volúmenes eran como 3 es a 5. Siendo 3 la densidad de la mezcla. Hallar la densidad de la sustancia A, si ambos pesan iguales.

Solución

Del enunciado:



$$\frac{3-d_B}{d_A-3}=\frac{3}{5}$$

Por dato: $W_A = W_B$; $3d_A = 5d_B$; $d_A = 4$

Rpta. $d_A=4$

5. Se realiza una mezcla de N litros de vinos de S/.30, S/.40 y S/.52 el litro. Si la cantidad que existe del primer ingrediente es el 50% del que existe en el segundo ingrediente y lo que hay de este es igual al 25% de la cantidad del tercer ingrediente. ¿A cómo debe venderse el litro de mezcla para obtener una ganancia del 20% del precio de venta?

Solución

	Cantidad	Precio
Del enunciado:	X	S/. 30
	Y	S/. 41
	Z	S/. 52

G = 20% Pv Por dato: $\frac{X}{Y}=\frac{1}{2}$ $\frac{Y}{Z}=\frac{1}{4}$

X	Y	Z	
1	2		
	1	4	x 2
1	2	8	

$$Pm = \frac{30+82+416}{11} = 48 \; ; \quad 48 = \frac{80}{100} Pv \; ; \quad Pv = S/.\ 60$$

Rpta. Cada litro se debe vender a S/. 60

6. Se mezclan cantidades (que son números enteros) de vino de S/.680 y S/.750 el litro en una relación de 2 es a x respectivamente. Se vende la mezcla perdiendo el 5% a 693.50 el litro. Si del primer vino (de S/.680 el litro) se mezcla 40lts. ¿Qué cantidad entra del otro?.

Solución

$2(680) = S/.\ 1\,360$
$x(750) = S/.\ 750x$

$$Pm = \frac{1360+750x}{2+x} \quad \text{Como:}$$

$95\%\ Pm = S/.\ 693.50$

$$\Rightarrow \frac{95}{100}\left(\frac{1360+750x}{2+x}\right) = 693.50$$

$$x = \frac{2(69350)-95(1360)}{95(750)-69350} = \frac{9500}{1900} = 5$$

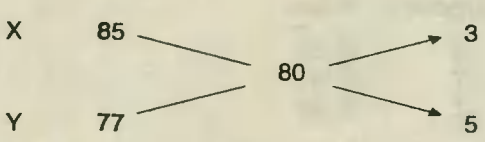
Relación: 2 : 5

De S/.680 el litro entra: $\frac{5}{2}(40) = 100$ lts.

Rpta. Entra 100 lts.

7. Se ha mezclado 2 tipos de arroz de S/.77 y S/.85 el kilo y se obtuvo 45 toneladas de arroz que valen 3 millones 600 mil soles. ¿Cuánto cuesta todo el arroz de S/.77 el kilo que se ha mezclado?

Solución



$$\frac{X}{Y} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{X+Y}{Y} = \frac{8}{5}$$

$$Y = \frac{5}{8} \times 45 \text{ Ton.}$$

Todo el arroz de S/.77 vale:

$$\left(\frac{5}{8}x45\right) 1\,000 \times 77 = 2'165{,}625$$

Rpta. Cuesta S/. 2'165,625

8. Un comerciante tiene vinos de S/.55 y S/.37 lt. y los mezcla de tal forma que por 11 partes del 1ro. pone 13 partes del 2do. ¿A cómo debe vender el litro si quiere ganar el 40%?

Solución

1er. vino : 11 V
2do. vino : 13 V

$$\text{Precio} = \frac{11V \times 55 + 13V \times 37}{24V} = 45.25$$

Como ganar el 40%
P venta = 140% (45.25) = 63.35

Rpta. S/. 63.35

9. Se mezclan dos tipos de vino en volúmenes que sean como 3 es a 2 y luego se vende con 20% de ganancia, se obtendría lo mismo si lo mezclaremos en proporción de 2 a 3 y lo venderíamos con 30% de ganancia. Hallar la relación de los precios de las dos clases de vino.

Solución

P_1 y P_2 : los precios

$$120\% \frac{(3P_1 + 2P_2)}{5} = 130\% \frac{(2P_1 + 3P_2)}{5}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}$$

Rpta. 3 a 2

10. De una mezcla de tres clases de maíz: 20 kilos de maíz de S/.142.50 el kilo con maíz de S/.145 el kilo y 50 kilos de maíz de S/.140 el kilo se sabe que se ganó el 7% vendiendo el kilo de mezcla a S/.151.94. ¿Cuántos kilos de maíz de S/.145 el kilo hay en la mezcla ?

Solución

1°	20	x 142.50	=	2 850
2°	a	x 145	=	145 a
3°	50	x 140	=	7 000

$$\text{Pm} = \frac{9850 + 145a}{70 + a},$$

Por dato: $\frac{107}{100}\text{Pm} = 151.94$, de donde:

$$107\,(9\,850) + 145\,a) = 15\,194\,(70 + a)$$

$$a = \frac{107 \times 9850 - 15194 \times 70}{15194 - 107 \times 145}$$

Rpta. a = 30 kilos

11. Un comerciante mezcla 2 tipos de trigo de 80 y 50 soles el kilo, poniendo 15kgs. más de un tipo que del otro vende todo a 70 soles el kilo y de esta forma gana 8 soles por kilo. Hallar cual es la ganancia de vender todo el trigo.

Solución

Precio ped. = 70 - 8 = 62

P = 1º trigo

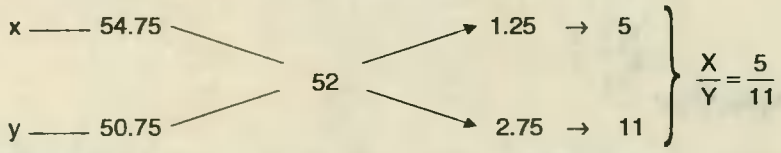
P + 15 = 2º trigo

$$62 = \frac{80P + 50(P+15)}{2P+15} \Rightarrow P = 30$$

Rpta. Ganancia = 8x (60 + 15) = S/.600

12. Se tiene papa de S/.54.75 el kilo y papa de S/.50.75 el kilo. Si de una de ellas se tiene 90 kilos más que de la otra, ¿Cuántos kilos de mezcla se obtienen a un precio medio de S/.52 el kilo?

Solución



$$\frac{X+Y}{Y-X} = \frac{5+11}{11-5} \rightarrow X + Y = 90 \times \frac{16}{6}$$

Rpta. x + y = 240 kilos

13. Un comerciante compra 36 litros de un tipo de vino y 24 litros de otro, y paga S/.4,320 en total. Hallar a cuanto debe vender el litro de la mezcla si al final quiere ganar S/.780.

Solución

24 + 36 = 60 litros

precio prom. = 4 320/60 = S/72 lt.

si gana S/.780 ⇒ en cada litro gana 780 ÷ 60 = S/. 13

debe vender el lt. a 72 + 13 = S/.85.

Rpta. S/.85.

14. Un comerciante tiene 2 tipos de arroz de 30 y 40 soles el kilo. Si se malogra 10 kilos del 2do. entonces el precio medio de la mezcla sería 32 soles y para no perder tendría que vender el resto a S/.40 el kilo. ¿Hallar cuántos kilos de arroz de S/.40/kilo había en la mezcla?

Solución

x = arroz del 1ro. $\quad$ y = arroz del 2do.

Dinero = $30x + 40y\ (x + (y - 10))$

x = 40 kg.

Pero:

$$32 = \frac{30\times 40 + 40(y-10)}{40+(y-10)} \quad ; \quad y - 10 = 10\text{kg.}$$

Rpta. 20kg.

15. Se tiene 100 litros de vino de S/.81 lt. Si se desea obtener 180 lts. de vino de S/.75.00 agregando vino de S/.90 y S/.60 el litro. ¿Cuántos litros de vino de S/.90 se tiene que añadir?

Solución

V : volumen de 90 soles

$$\frac{81\times 100 + 90\times V + 60(80-V)}{180} = 75$$

Rpta. V = 20 lts.

16. ¿Cuánto debe costar el litro de vino si se pretende ganar el 15% de la venta de una mezcla de vino de 4 calidades: 200, 350, 250 y 400 galones de vino de S/.200, S/.350, S/.250 y S/.400 el litro respectivamente?

Solución

$$P_{cm} = \frac{200^2 + 350^2 + 250^2 400^2}{200+350+250+400} = \frac{385000}{1200} = \text{S/. } 320.83$$

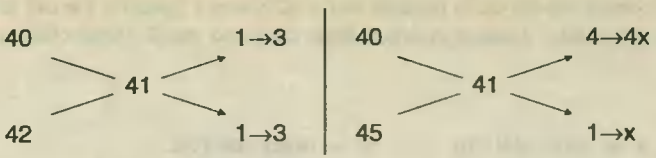
$$P_{vm} = P_{cm} + 15\%\ P_{vm} \Rightarrow 85\ \%\ P_{vm} = P_{cm}$$

$$P_{vm} = \frac{100}{85}(320.83) = \text{S/.}377{,}45$$

Rpta. S/.377.45

17. Se mezcló 3 toneladas de papa de S/.42 el kilo con 13 toneladas de una mezcla de papa de S/.40 con papa de S/.45. Si el precio medio de la mezcla es de S/.41 el kilo. ¿Cuántas toneladas más de papa de menor calidad que de papa de mayor calidad había en aquella mezcla?

Solución



Por dato: $3 + 4x + x = 13 \Rightarrow x = 2$

Luego hay papa de:

S/.40 kilo $\rightarrow 3 + 4(2) = 11$

S/:45 kilo $\rightarrow 2$

$\Big\}\ 11 - 2 = 9$

Rpta. 9

PROBLEMAS RESUELTOS
ii. Mezclas con grado de alcohólico.

Observaciones Previas

- Debemos recordar que el grado o porcentaje alcohólico actúa como el precio en los problemas sobre mezclas.
- Grado alcohólico

  ó Porcentaje alcohólico $= \dfrac{\text{cantidad de alcohol puro}}{\text{cantidad de la mezcla}} \times 100\%$
- **Densidad:** Es la relación existente entre masa y volumen

  Así: $D = \dfrac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \dfrac{M}{V}$

  Densidad media = D_m: densidad de la mezcla resultante:

$$D_m = \frac{D_1V_1 + D_2V_2 + \ldots\ldots + D_nV_n}{V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n}$$

1. Se mezclan volúmenes de alcohol de 60°, 30° y 40° obteniéndose un volumen de alcohol de 37.5°. Si se sabe que el volumen de alcohol de 37.5°. Si se sabe que el volumen del alcohol de 60° es la tercera parte del volumen del alcohol de 40°. Hallar que % representa el volumen del alcohol de 30° del volumen total de la mezcla.

Solución

Volumen total : V

Volumen de alcohol de 60° : x

Volumen de alcohol de 40° : 3x

Volumen de alcohol de 30° : (V - 4x)

Aplicando la fórmula de grado alcohólico:

$$37.5 = \frac{60(x) + 40(3x) + 30(v - 4x)}{v}$$

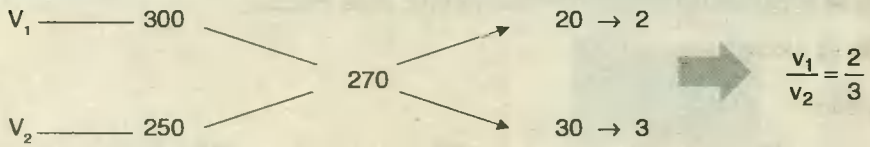
$x = 12{,}5\%\ V$

$\therefore$ Volumen de alcohol de 30°: $V - 4(12{,}5\%\ V) = V - 50\%V = 50\%$

Rpta. 50%

2. ¿Cuál es el grado alcohólico de una mezcla de alcohol puro de S/.300 el litro con alcohol de 90° de S/.250 el litro, la cual tiene un precio medio de S/.270 el litro?

Solución

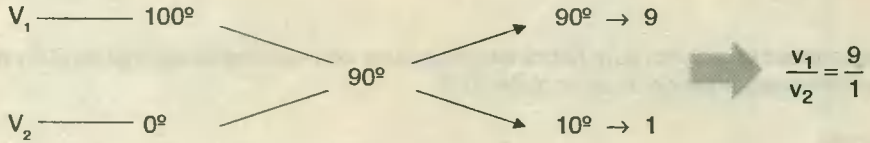


$$g° = \frac{2(100º) + 3(90º)}{2+3} = \frac{470}{5} = 94º$$

Rpta. 94º

3. ¿Cuál es la densidad en gr/cm³ de una mezcla alcohólica de 90° si se sabe que 1 y 1.25 gr/cm³ son las densidades del agua y del alcohol puro respectivamente.

Solución



$$d_m = \frac{9(1.25) + 1(1)}{9+1} = 1.225$$

Rpta. 1.225

4. Se tiene alcohol de 25°. Si se le extrae la mitad de la cantidad de agua que tiene. ¿De cuántos grados es la nueva mezcla?

Solución

Del enunciado:

25 alcohol
75 agua
} condiciones iniciales

25 alcohol } condiciones
37.5 agua } finales

$$g = \frac{25}{62,5} \times 100 = 40\%$$

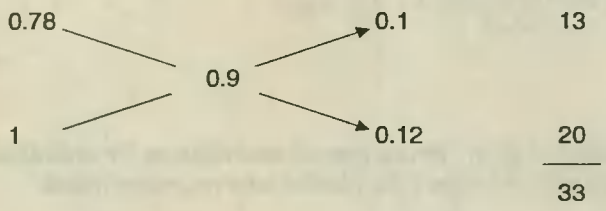
Rpta. 40%

5. Se mezcla alcohol puro con un volumen de agua, si se obtuvo una mezcla de densidad 0.9. ¿Cuál es el porcentaje en peso del alcohol puro en la mezcla?

NOTA: (d Alcohol puro = 0.78)

Solución

(d) = densidad (V) = velocidad (W) = peso



Rpta. $\frac{13}{33} \times 100 = 39.39\%$

6. ¿Qué cantidad de alcohol puro habrá que mezclarse con 40 litros de alcohol de 60° y agua para obtenerse 200 litros de alcohol de 70°?

Solución

Cantidad de alcohol puro x ——— grado : 100

40 lt. —— grado : 60

y = 200 - (40 + x) lt agua : 0°

$$70 = \frac{100x + 40(60) + 0}{200}$$

Rpta. x = 116 litros.

7. Se tiene 40 lts. de alcohol de 60° y 50 lts. de 80°, se mezclan los dos volúmenes y se añade cierta cantidad de agua resultando en la mezcla que los volúmenes de alcohol y agua son como 16 es a 11. Hallar cuántos litros de agua hay que agregar.

Solución

V : volumen del agua.

$$\frac{\text{alcohol}}{\text{agua}} = \frac{40\times0,6+50\times0,8}{40\times0,4+50\times0,2+V} = \frac{16}{11}$$

Rpta. V = 18 lts.

8. Se mezclan volúmenes de alcohol de 60°, 30° y 40° obteniéndose un volumen de alcohol de 37.5°. Si se sabe que el volumen del alcohol de 60° es la tercera parte del volumen del alcohol de 40°. Hallar que % representa el volumen del alcohol de 30° del volumen total de la mezcla.

Solución

V : volumen

X = vol 60° ; 3x = volumen 40°

$$\frac{(v-4x)30^{\circ}+60^{\circ}x+40^{\circ}-3x}{v} = 37.5^{\circ}$$

X = 12.5% de V ∴ El V de 30° es el 50%

Rpta. 50%

9. ¿Cuántos litros de Alcohol puro se debe agregar a 40 litros de alcohol de 70° para obtener alcohol de 80°.

Solución

x ——— 100%

40 ——— 70

$$80 = \frac{100x+70}{40+x}.\ 40 = 20$$

Rpta. 20

10. Hallar que volumen de alcohol de 95° se debe agregar a una mezcla de 40 litros de 80°, para convertirlo en alcohol de 89°. Dar la respuesta en decalitros.

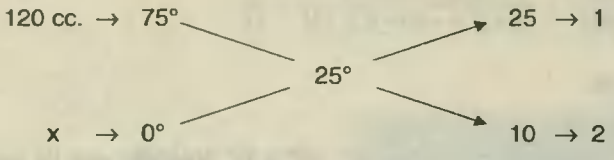
Solución

$$\frac{89}{100} = \frac{40\times0,8+v\times0,95}{40+v}$$

Rpta. V = 60 lts. = 6 Decalitros.

11. ¿Cuánto de agua habrá que añadir a una mezcla de 120 cc. de alcohol de 75° para que la proporción de mezcla de alcohol y agua se invierta?

Solución



1 ——— 120 cc.
2 ——— x

Rpta. x = 240 cc.

12. Con alcohol de 60°, 15° y 18° se quiere obtener 60 litros de alcohol de 31.5°. Si en la mezcla han de entrar 20 litros de 60°. ¿Cuántos litros habrá que poner de los otros ingredientes? Dar como respuesta uno de ellos.

Solución

Alcohol de 60° : 20 lts.
Alcohol de 15° : x lt.
Alcohol de 18° : 60 - (20 + x) = (40 -) lt.
Grado medio : 31,5.

$$31{,}5 = \frac{60(20)+15x+18(40-x)}{60}$$

Rpta. x = 10 lts.

13. ¿Qué parte del volumen de alcohol debe ser de agua en una mezcla de alcohol con agua de 80° de grado alcohólico si las densidades del alcohol y agua son 1.25 y 1gr/cm³ respectivamente.

Solución

$$\text{Volumen de alcohol} = \frac{\text{Peso}}{\text{Densidad}} \rightarrow \quad \text{Peso de alcohol} = \text{Volumen x densidad.}$$

Peso de alcohol = 80 x 1,25 = 100 gr.

Peso de agua = 20 x 1 = 20 gr.

$$\frac{\text{V agua}}{\text{V alcohol}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

Rpta. $\frac{1}{4}$

1. Si se mezclan x kilos de arroz de S/.(x - 1) el kilo con x kilos de arroz de S/.(x + 1) el kilo, el precio de 1 kilo de la mezcla resulta S/.60. Si se mezclase el doble de la cantidad inicial del 1er. arroz con el triple de la cantidad inicial del 2do. arroz. ¿Cuál sería el precio de un kilo de dicha mezcla?

   a) S/.60 b) S/.65 c) S/.60.20 d) S/.62.50 e) S/.59.80

2. Si se mezclan dos tipos de arroz en pesos proporcionales como 3 es a 4 y se vende con el 25% de ganancia se obtiene el mismo precio por kilo que si se hubiera mezclado en proporciones de 2 a 5 y vendido con una ganancia del 35%. Hallar la relación de precios entre los tipos de arroz.

   a) 5 a 3 b) 4 a 5 c) 3 a 4 d) 5 a 7 e) N.A.

3. Se tiene frejoles de S/.125 y S/.138/kg., cuántos kilos del segundo tipo de frejol se debe usar para obtener 325 kilos de frejoles de S/.131/kilo?

   a) 175 b) 200 c) 150 d) 125 e) 160

4. Se mezcla alcohol de 55° y 76° con alcohol puro, obteniéndose 120 lts. de alcohol de 73°. Hallar cuantos litros de alcohol puro utilizó, sabiendo que los volúmenes de alcohol de 55° y 76° están en proporción como 2 es a 3 respectivamente.

   a) 24 b) 18 c) 25 d) 20 e) 30

5. El azúcar de S/.64 el kilo resultó de la mezcla de azúcar de S/.61.50 y de azúcar de S/.65.50 el kilo. Si se emplearon en total 40 toneladas de azúcar en la mezcla. ¿Qué clase de azúcar, la más cara o la más barata, se empleó en mayor cantidad y decir cuántas toneladas más se empleó?

   a) 8tn. de la más cara.
   b) 12tn. de la más barata.
   c) 10tn. de la más cara.
   d) 10tn. de la más barata.
   e) 12tn. de la más cara.

6. Se ha mezclado 2 tipos de arroz de S/.77 y S/.85 el kilo y se obtuvo 45 toneladas de arroz que valen 3 millones 600 mil soles. ¿Cuánto cuesta todo el arroz de S/.77 el kilo que se ha mezclado?

   a) S/.2'651,625 b) S/.2'165,625 c) S/.1'498,375 d) S/.1.434,735 e) S/.948,375

7. Se mezclan cantidades (que son números enteros) de vino de S/.680 y S/.750 el litro en una relación de 2 es a x respectivamente. Se vende la mezcla perdiendo el 5% a 693.50 el litro. Si del primer vino (de S/.680 el litro) se mezcla 40lts. Que cantidad entra del otro.

a) 100 b) 120 c) 140 d) 180 e) 200

8. Si se quiere ganar S/.440 en la venta de 80 kilos de arroz formados al mezclar 20 kilos de arroz de S/.40/kg. con 40 kls. de arroz de S/.37/kg. y el resto de arroz de S/.44/kg. ¿A como debe vender el kilo de la mezcla?

a) S/.44 b) S/.45 c) S/.43.5 d) S/.42.5 e) S/.45.5

9. ¿Cuántos litros de vino de S/.12 el litro hay que mezclar con 30 litros de vino de S/.6 el litro y 45 litros de vino de S/.18 el litro para obtener vino de 13 soles el litro?

a) 25 b) 15 c) 35 d) 20 e) N.A.

10. Se mezclan vinos de S/.220 y S/.250/lt. obteniéndose 420 lts. de vino S/.290/lt. en donde con dicho precio se gana el 25% del precio de costo. Hallar cuántos litros del 2do. tipo de vino se utilizó.

a) 168 b) 200 c) 220 d) 252 e) 300

11. Se mezcla salmuera de S/.12/lt. con 18 lts. de S/.9/lt. y 15 lts. de agua. ¿Qué cantidad se debe emplear de la primera para que la mezcla valga S/.12.30 cada 2 litros.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

12. Se tiene cierto tipo de alcohol y se sabe que si se le agregara 30 litros de alcohol puro aumentaría en 9° y si en vez se le agregara 90 lts. de agua, la mezcla bajaría en 32°. Hallar el volumen del alcohol mencionado.

a) 70 lt. b) 75 lt. c) 60 lt. d) 80 lt. e) 90 lt.

13. Se mezcló leche de S/.40 el litro con leche de S/.48 el litro. Se vendió ganando el 20% ; obteniéndose S/.2,592 en 50 litros de mezcla. ¿Cuántos litros menos de leche más cara que de leche más barata se utilizó en la mezcla?

a) 30 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

14. ¿Cuál es la densidad en gr/cm^3 de una mezcla alcohólica de 90° si se sabe que 1 y 1.25 gr/cm^3 son las densidades del agua y del alcohol puro respectivamente.

a) 1,225 b) 1.350 c) 1.250 d) 1.245 e) 1.240

15. Se mezclan 2 tipos de vino en volúmenes que sean como 3 es a 2 y luego se vende con 20% de ganancia. Se obtendría lo mismo si lo mezclaremos en proporción de 2 a 3 y lo vendiera con 30% de ganancia. Hallar la relación de los precios de las dos clases de vino.

a) 3 a 2 b) 3 a 4 c) 5 a 4 d) 2 a 1 e) 13 a 12

16. Se mezclan volúmenes de alcohol de 60° y 40° obteniéndose un volumen de alcohol de 37.5°. Si se sabe que el volumen del alcohol de 60° es la 3ra. parte del volumen de 40. Hallar, que % representa el volumen de alcohol de 30° del volumen total de la mezcla.

a) 60% b) 40% c) 50% d) 37.5% e) 62.5%

17. Se mezclan alcohol de 40°, y 64° con agua, obteniéndose 160 litros de alcohol de 32°. Si los volúmenes de alcohol de 64° y agua son como 3 es a 5, hallar cuántos litros de alcohol de 40° se utilizó.

a) 35 b) 40 c) 60 d) 75 e) 80

18. Producir un kilo de galletas cuesta S/.300, embolsarlo S/.50 y transportarlo S/.20. En el embolsado se pierde el 10% y en el transporte se pierde 5%. ¿Cuál debe ser el precio de venta del kilo de galletas si la utilidad debe ser el 25% del costo (Redondee decimales)

a) 528 b) 529 c) 530 d) 531 e) 421

19. ¿Qué porcentaje se ganó al vender una mezcla de tres tipos de café: 50 kilos de café de S/.420 el kilo, 60 kilos de café de S/.430 el kilo y 20 kilos de café de S/.480 el kilo, si en total se obtuvo S/.63,732?

a) 12% b) 10% c) 11% d) 13% e) 15%

Clave

1. e	11. a
2. a	12. d
3. c	13. c
4. c	14. b
5. b	15. c
6. a	16. c
7. d	17. b
8. c	18. a
9. b	19. b
10. a	

Capítulo 24

ALEACION

EL LABORATORIO DE UN ALQUIMISTA. Los alquimistas medievales, considerados como los precursores de los químicos actuales, creyeron que era posible convertir un elemento en otro. En su vano esfuerzo de convertir el plomo en oro trabajaron con toda clase de materiales y emplearon procedimientos tales como la destilación, rectificación, sublimación, calcinación y descubrieron algunos elementos.

Toda mezcla en la cual los ingredientes son metales se llama aleación.

Estudiaremos las aleaciones donde intervengan metales preciosos: oro, plata, platino, ..., fundidos con metales vastos u ordinarios como: cobre, niquel, ... etc.

Ley de una aleación

Se llama así a la relación (cociente) que existe entre el peso del metal fino puro con el peso total de la aleación. Si:

L = ley
F = peso del metal fino puro.
P = peso total de la aleación, se tienen las siguientes fórmulas:

$$L = \frac{F}{P} \qquad F = L \times P \qquad P = \frac{F}{L}$$

generalmente la ley se expresa en milésimos. Así cuando se dice que una medalla es de plata 8(milésimos fino, nos indica que de

cada 1000 partes iguales, 800 son de plata pura y las 200 partes restantes son de liga, metal vasto u ordinario.

La ley de una aleación es adimensional, pues resulta solamente un número.
La ley de una aleación es menor o igual a 1 (Sólo será igual a uno cuando el peso del metal fino puro sea igual al peso total de la aleación.

Ley de Kilates

La ley sobre todo del oro, suele expresarse en kilates. En este caso, cada kilate representa 1/24 del peso total. Así, si una sortija de oro es de 18 kilates, significa que del peso total la sortija 18/24 son de oro puro y 6/24 son de liga.
Ley en kilates, para expresarla en milésimos, basta con dividir el número de kilates entre 24.

$$L = \frac{\text{Nº de Kilates}}{24}$$

Se presentan como en las mezclas simples, el problema directo y el problema inverso.

Problema directo de aleaciones

Problema análogo se presenta en las aleaciones de metales. El oro, el platino y la plata se usan aleados con estaño, cobre, etc., y se llama *ley* de esta aleación a la cantidad de metal fino que contiene cada unidad de peso. Decir que la *ley* es 900 milésimos o sea 0,900 es lo mismo que decir: cada kg. contiene 900 gramos de metal fino.
La ley de una aleación se calcula como indica este ejemplo:

Ejemplo
Cuando la ley de una aleación obtenida fundiendo 4 kg. de oro cuya ley es de 0,850, con 3 kg. cuya ley es de 0,900.

La cantidad de oro puro total es:

$$\begin{aligned} 4 \times 0{,}850 &= 3{,}400 \\ 3 \times 0{,}900 &= 2{,}700 \\ &\overline{\quad\quad} \\ &6{,}100 \text{ kg.} \end{aligned}$$

y como el peso de la aleación obtenida es 7 kg., su ley es de 6,100 : 7 = 0,871

Fórmula:

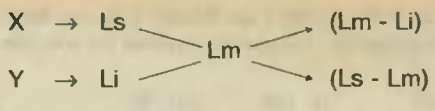
$$\text{ley} = \frac{\text{Peso del metal fino puro}}{\text{Peso total de la aleación}}$$

El problema inverso

Se puede aplicar la misma fórmula de mezcla inversa o el método del aspa, sólo que en vez de trabajar con precios, aquí se trabaja con leyes.

L_s = ley superior L_m = ley media L_i = ley inferior, además:

X = peso de ley superior ; Y = peso de ley inferior.



$$\begin{array}{lllll} X \rightarrow Ls & & & & (Lm - Li) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Lm & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ Y \rightarrow Li & & & & (Ls - Lm) \end{array}$$

Relación de pesos:

$$\boxed{\frac{X}{Y} = \frac{L_m - L_i}{L_s - L_m}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ALEACION

Observaciones Previas

* Al aplicar el método del aspa, conviene recordar que sólo tienen ley las aleaciones que contengan metal precioso.
* Si el metal es no precioso (vasto, ordinario, liga) su ley es cero.
* Si multiplicamos las leyes que intervienen en un problema, por un mismo número, el resultado a determinar, no varía.

1. Se tiene 40, 40 y x gramos de oro de 12k., 15k. y 16k. Hallar x si se obtiene al alear los 3 pesos de oro, una aleación de 14k.

Solución

$$14 = \frac{40 \times 12 + 40 \times 15 + x.16}{80 + x}$$

Rpta. $x = 20$ gr.

2. Un metal fino A y un metal de liga B tienen 19.5 y 18.5 de peso específico respectivamente. ¿Cuál será la ley de una aleación de los metales A y B que tengan 19.2 de peso específico?

Solución

Nota: Los pesos específicos actuan como ley, al aplicar el método del aspa se encontrará, relación entre volúmenes.

$$\left.\begin{array}{lll} W_A\text{: peso de A} & V_A: 19.5 & \searrow \quad \nearrow 0.7 \\ & & 19.2 \\ W_B\text{: peso de B} & V_B: 18.5 & \nearrow \quad \searrow 0.3 \end{array}\right\} \frac{V_A}{V_B} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{W_A}{W_B} = \frac{19.5 \times 7}{18.5 \times 3} = \frac{455}{185}$$

Como: Peso = volumen x densidad

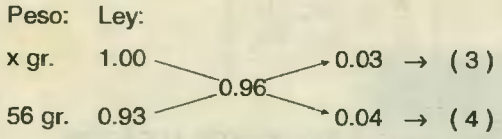
$$\therefore \quad L = \frac{W_A}{W_A + W_B} = \frac{455}{455 + 185} = \frac{91}{128} = 0.711$$

Rpta. $L = 0.711$

3. Se tiene 56 gramos de oro de 0.93 de ley y se desea mejorar ésta en 0.03 mezclándola con oro puro. Al final de este proceso. ¿Cuántos gramos de mezcla se tendrá?

a) 98 b) 78 c) 89 d) 108 e) 79

Solución



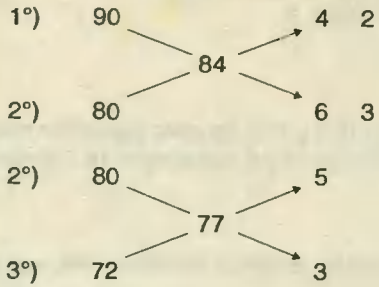
$$\therefore \quad \frac{x}{56} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = 42 \text{ gr.}$$

$\therefore$ La mezcla pesará $= 42 + 56 = 98$gr.

Rpta.: A

4. Las leyes de 3 lingotes de plata son: 0.9; 0.8 y 0.72. Si se fundieran el primero y el segundo se obtendría un lingote de 0.84 de ley y si se fundieran el segundo y el tercero se obtendría un lingote de 0.77 de ley.
Deteminar el peso del segundo lingote si se sabe que la suma de los pesos de los 3 lingotes es: 10.2 kg.

Solución



$$\frac{1º}{2º} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2º}{3º} = \frac{5}{3}$$

Los pesos son como :

1°) $2 \rightarrow 10 \times 0.3 = 3$ kg.

2°) $3 \rightarrow 15 \times 0.3 = 4.5$ kg.

3°) $\frac{9}{5} \rightarrow \frac{9}{34} \times 0.3 = 2.7$ kg.

$$\frac{10.2}{34} = 0.3$$

5. Determinar el número de kilates de una sortija de oro y cobre que pesa en el aire 24 gramos y sumergida en agua pesa sólo 22.5 gramos.
(Peso específico del oro: 19.5 y peso específico del cobre: 9)

Solución

Por principio de Arquímides:

$\text{Empuje} = 24 - 22.5 = 1.5\text{gr.} = 1\text{gr./cm}^3 \times V_{\text{sortija}}$

V = volumen.

P = peso.

$V_{\text{sortija}} = 1.5\ \text{cm}^3$

$P_{\text{sortija}} = \dfrac{24}{1.5} = 16$

Por regla del aspa:

oro : 19.5 — 7 — 16 — (2) × 19.5 → (13)

cobre : 9 — 3.5 — 16 — (1) × 9 → (3)

$\text{ley} = \dfrac{13}{16}$

de kilates: $\dfrac{13}{16} \times 24 = 19.5$ kilates.

Rpta. # kilates = 19.5

6. Se tiene 2 lingotes: "x" gr. de uno de ellos de ley "l_1" e "y" gr. del otro de "l_2" de ley. ¿Cuál es la ley de la aleación de los lingotes si se sabe que "x" es a "y" como "l_2" es a "l_1"?

Solución

$$l_m = \frac{xl_1 + yl_2}{x+y}$$

Pero: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{l_2}{l_1}$

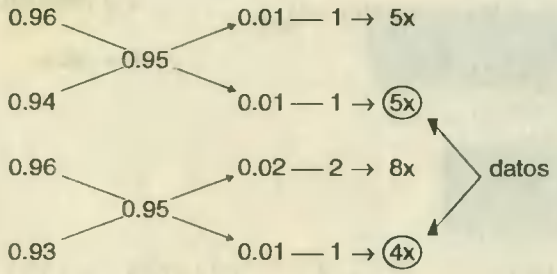
$$l_m = \frac{\frac{x}{y}l_1 + l_2}{\frac{x}{y} + 1} = \frac{\frac{l_2}{l_1}\cdot l_1 + l_2}{\frac{l_2}{l_1} + 1} = \frac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2} \Rightarrow l_m = \frac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

Rpta. $l_m = \dfrac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2}$

7. 0.96, 0.94 y 0.93 son las leyes de tres aleaciones de oro que se fundirán para formar otra de 0.95 ley. Se utilizaron 260gr. de la 1° y el peso de la 2° es al de la 3° como 5 es a 4. ¿Cuánto pesará la aleación final?

Solución

Como son 2 mezclas:



$$13x = 260 \wedge x = 20$$

$$W_T = 5x + 5x + 8x + 4x = 22(20)$$

Rpta. $W_T = 440$ gr.

8. Se mezcla inicialmente plata de 0.99 de ley con aluminio en proporciones en peso de 2 es a 3. ¿Cuánto debe aumentarse respecto de la cantidad inicial el aluminio a fundir para obtener una ley, 5/7 la ley inicial.

Solución

Sea x la proporción pedida:

$$I = (0.99)(2) + (0)(3) = \frac{2}{5}(0.99)$$

$$I' = \frac{5}{7}I = \frac{2}{7}(0.99) = \frac{(0.99)(2) + (0)(3x)}{2 + 3x}$$

De aquí: $7 = 2 + 3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Rpta. Debe aumentarse $\frac{5}{3}$

9. Una señora deja donde un joyero su anillo de 16 kilates y le encarga que lo funda y le haga una pulsera de 18 kilates. El joyero hace sus cálculos y le responde que empleará 20 gr. de oro puro adicional. ¿Cuánto pesa el anillo?

Solución

Sea x el peso del anillo. Podemos establecer:

$$\frac{x\left(\frac{16}{24}\right) + 20\left(\frac{24}{24}\right)}{x + 20} = \frac{18}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{16x + 20(24)}{x + 20} = 18$$

$$20(24 - 18) = (18 - 16)x \quad \Rightarrow \quad x = 60\text{gr.}$$

Rpta. 60 gr.

10. ¿Cuál es el peso específico de una aleación de oro con cobre de 19.3 y 9 de peso específico respectivamente, si la ley de la aleación es 0.76?

Solución

Pesos:

$W_1 \rightarrow 1$ — 0.76 → 0.76

$W_2 \rightarrow 0$ — 0.76 → 0.24

$$P_m = \frac{W_1 + W_2}{V_1 + V_2} = \frac{0.76 + 0.24}{\frac{0.76}{19.3} + \frac{0.24}{9}} = \frac{1}{0.04 + 0.03} = 15.1$$

Rpta. Peso específico resultante $P_m = 15.1$

11. Se funden 2 lingotes : el primero tiene 300 gr. de oro puro y de ley 0.375, el segundo de ley 0.25. Hallar la cantidad de oro puro que hay en este último lingote si la ley del lingote resultante es de 0.35.

Solución

Primer lingote:

fino puro : F = 300 gr.

ley : 0,375

Peso total : P = ?

$$P = \frac{F}{L}$$

$$P = \frac{300}{0,375} = 800\text{gr.}$$

Segundo lingote:

ley = 0,250 x = 800

fino puro = ? y

375 — 350 → 100 → 4

250 — 350 → 25 → 1

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{1} \rightarrow \frac{800}{y} = \frac{4}{1} \rightarrow y = 200\text{gr. peso total del 2º lingote}$$

$\therefore$ Cantidad de fino puro del 2° lingote:

$F = 0{,}250 \times 200 = 50$ gramos

Rpta. 50 gramos

12. Se hace una aleación con 2 barras de plata de 18kg. y 0.820 de Ley y 12kg. y 0.720 de Ley. Encontrar la Ley de una tercera barra sabiendo que tiene 9 kgrs. de plata y que al ligarse con la aleación anterior da una barra de 0.675 de Ley.

Solución

En la primera aleación:

Total de fino puro: $18(0{,}82) + 12(0{,}72) = 23{,}40$ kg.
Peso total: $18 + 12 = 30$ kg.

En la nueva aleación:

Total fino puro: $23{,}40 + 9 = 32{,}40$ kg.
Peso total: $30 + x$ (x = peso total de la tercera barra)

$$\text{ley} = 0.675 = \frac{32{,}40}{30 + x} \rightarrow 675(30 + x) = 32\,400$$

$$x = 18 \text{ kg.}$$

$\therefore$ ley de la tercera barra: $\frac{9}{18} = 0{,}500$

Rpta. 0,500

ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE EL PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

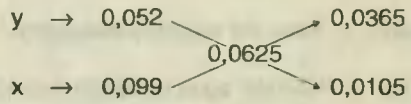
Observaciones Previas

* **El principio de Arquímedes:** Arquímedes fue uno de los más significativos físicos matemáticos de la antigüedad. Su famoso principio: **"Un sólido sumergido en un líquido recibe un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen de líquido que desaloja"**; no sólo permite explicar el porque de la flotabilidad de ciertos cuerpos, como buques construidos de materiales más densos que el agua, sino que su aplicación ha sido básica en todo el campo de la hidrostática.
Utilizaremos en alguna medida este importante principio para resolver problemas.

13. El rey Hieron encargó una corona, entregando para tal objeto 10 libras de oro. Sospechando que en las 10 libras que pesaba la corona el artífice hubiese mezclado plata, encargó el análisis a Arquímedes, sin deteriorarla. Esta sabía que el oro sumergido en agua pierde 0,052 libras de peso por cada libra, y cada libra de plata pierde 0,099; al sumergir la corona en agua vio que la disminución de peso era de 10 onzas, o sea una onza por libra, o sea 1/16 = 0,0625, lo que reveló el fraude.
¿Qué cantidad de oro y qué cantidad de plata contenían las 10 libras de la corona?

Solución

Las mismas fórmulas del problema inverso de aligación permiten resolver éste. Si x es la cantidad de plata y p = 0,099 el empuje del agua por unidad (que aquí es, como antes, el precio o la ley), el producto x . 0,099 es el empuje sufrido por la cantidad de plata; y si y es la cantidad de oro, es empuje que sufre es y. . 0.052; el empuje total es conocido e igual a 0,0625; luego la resolución será como antes:



$$\frac{x}{y} = \frac{0{,}0105}{0{,}0365} = \frac{105}{365}$$

Las cantidades de plata y de oro están, pues, en la razón de 105 a 365, o sea, simplificando, 21 a 73; es decir, en 94 partes hay 73 de oro y 21 de plata; y como el peso de la corona era de 10 libras, las cantidades de oro y plata eran, respectivamente,

$$x = \frac{730}{94} \qquad y = \frac{210}{94}$$

que reducidas dan:

Rpta. $x = 7$ libras y $12\,{}^{12}/_{47}$ onzas, $y = 2$ libras y $3\,{}^{35}/_{47}$ onzas

14. Según Viturbe, la corona del rey de Siracusa, pesaba 7465 gramos y perdía al sumergirla en el agua 467 gramos. Se sabe que el oro pierde en el agua los 0,052 de su peso y que la plata pierde 0,095. Determinar las cantidades de oro y plata que contenía la corona.

Solución

Es una variante del problema anterior.

W_{oro} = peso del oro. Como se pierde $\frac{52}{1000}\ W_{oro}$, quedan $\frac{948}{1000}\ W_{oro}$

W_{plata} = peso de la plata. Como se pierde $\frac{95}{1000}\ W_{plata}$, queda: $\frac{905}{1000}\ W_{plata}$

Podemos establecer: $W_{oro} + W_{plata} = 7465$ ..... (1)

Peso de la corona sumergida: 7465 - 467 = 6998 ..... (2)

ó también: $\frac{948}{1000}\ W_{oro} + \frac{905}{1000}\ W_{plata} = 6998$

$$948\ W_{oro} + 905\ W_{plata} = 6\ 998\ 000 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

De (1) y (3) se obtiene:

Rpta. $W_{oro} = 5\ 631\frac{42}{43}$ gramos

$W_{plata} = 1\ 833\ \frac{1}{43}$ gramos.

15. De cuántos kilates es una sortija de oro y cobre que pesa 20 gramos y sumergida en agua destilada pesa 18,75 gramos.
(Peso específico del oro: 19 y Peso específico del cobre: 9)

Solución

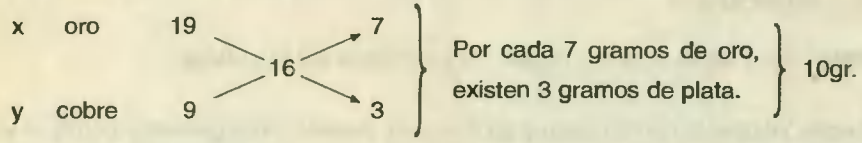
Por principio de Arquímides: "Pérdida de peso = Peso del volumen desalojado"

- Pérdida de peso: 20 - 18,75 = 1,25 gramos = Peso del agua destilada desalojada.

$\therefore$ Volumen desalojado 1,25 cc. = Volumen de la sortija

Peso específico de la sortija $= \frac{20}{1,25} = 16$

Relación de pesos en la aleación



$\therefore$ ley $= \frac{7}{10} = 0,700$ en kilates: $\frac{7}{10} \times 24 = 16,8$

Rpta. 16,8

PROBLEMAS PROPUESTOS

Sobre aleación (con clave)

1. Se desea obtener un lingote de 500 gramos de 0.999 de ley; para esto se mezclan de 500gr. de plata pura y 50gr. de metal de liga. ¿Cuántos gramos más de plata que de metal de liga se debe utlizar?

a) 499 b) 495 c) 450 d) 490 e) 485

2. Se tiene una barra de plata de 0.85 de ley. ¿En qué relación en peso deben quitarse cantidades de plata y cobre de la barra para que la ley se conserve?

a) 17/2 b) 15 c) 20/17 d) 15/2 e) 17/3

3. Se fundió dos barras de oro de 12 y 20 kilates respectivamente. Obteniéndose 48 gramos de 15k. ¿Qué peso de metal corriente tenía la segunda barra?

a) 5 gr. b) 3 gr. c) 12 gr. d) 2 gr. e) 1 gr.

4. Se sabe que un gramo de oro cuesta S/.500 y el cobre S/.40, si una sortija de 16 gramos cuesta S/. 4,780, hallar de cuántos kilates es dicha sortija.

a) 13.5k b) 18k c) 15k d) 16.5k e) 16k

5. Se mezclan 3 cantidades de oro de 18, 16 y 12 kilates obteniéndose una aleación de 15.2k., si se sabe que el oro de 16k. es el 40% de la mezcla, hallar en que relación se encuentran los pesos de oro de 18 y 12 kilates.

a) 4 a 5 b) 6 a 5 c) 3 a 2 d) 2 a 1 e) 1 a 1

6. Hallar la relación aproximada de volúmenes de oro y plata que entran en una aleación de ambos de 0.65 de ley respecto del oro, sabiendo que los pesos específicos del oro y de la plata son 19.3 y 10.5 respectivamente.

a) 2 : 3 b) 1 : 2 c) 1 : 1 d) 3 : 2 e) 2 : 1

7. Se fundió dos barras de oro de 12 y 20 kilates respectivamente. Obteniéndose 48 gramos de 15k. ¿Qué peso de metal corriente tenía la segunda barra?

a) 5 gr. b) 3 gr. c) 12 gr. d) 2 gr. e) 1 gr.

8. La ley de una aleación de plata y cobre es 0.7. Si el peso específico de la plata y el cobre es 10.5 y 9 respectivamente. ¿Cuál es el peso específico de la aleación?

a) 10 b) 10.2 c) 10.3 d) 9.8 e) 9.7

9. Se hace una vasija de oro de 16k. mezclando 50 grs. de oro de 12k. con 2 cantidades de oro de 15 y 20k., se sabe que la diferencia de pesos entre dichas cantidades es de 20 grs. Hallar el peso de la vasija sabiendo que es el menor posible.

a) 216.6 b) 100 c) 180 d) 150 e) 166.6

10. Se mezclan 3 cantidades de plata de leyes 0.8, 0.35 y 0.95, obteniéndose una aleación de Ley 0.825, si el peso de plata de 0.95 representa el 50% de la aleación. Hallar en que relación se mezclaron las cantidades de plata de 0.7 y 0.35.

a) 3 a 2 b) 4 a 1 c) 7 a 2 d) 5 a 3 e) 5 a 2

11. Una aleación de plata de 0.8 de ley cuesta S/.102/gr. si se sabe que el gramo de níquel puro cuesta S/.30.00. Hallar cuanto cuesta el gramo de una aleación de plata de 0.9 de ley.

a) S/.111 b) S/.114 c) S/.120 d) S/.117 e) S/.118

12. Una aleación pesa 72 grs. y contiene 5 partes de cobre por 3 partes de zinc.
Con que peso de cobre se debe fundir para que la aleación resultante tenga 9 partes de zinc.

a) 3.6 gr. b) 4.5 gr. c) 2.8 gr. d) 4 gr. e) 3 gr.

13. Una muestra de plata de 0.9 de ley se funde con 30gr. de plata pura y 100gr. de cobre puro obteniéndose plata de 0.75 de ley. ¿Cuánto pesaba la muestra original?

a) 540 gr. b) 450 gr. c) 420 gr. d) 500 gr. e) 480 gr.

14. Se tiene 3 aleaciones de oro de 36,45 y 39 gr.; contienen respectivamente 6, 5 y 13 gr. de oro puro. Si se cambia la tercera aleación por otra de igual peso pero que contiene 3 gr. más de oro puro. ¿En qué porcentaje habrá aumentado la ley de aleación luego de mezclar los 3 lingotes?

a) 25% b) 20% c) 10% d) 12.5% e) 17.5%

15. Se tiene 118.5 gr. de una aleación de oro y plata. (con el oro como metal fino). Si las densidades del oro, la plata y aleación son como los números: 11, 6 y 9. Hallar cuántos gramos de plata se emplearon en la aleación.

a) 36.1 b) 40.1 c) 30.1 d) 31.6 e) 35.6

16. Se alea un metal fino A con otro metal B. Si se sabe que los pesos específicos del metal A, de la aleación y del metal B son como 19, 16 y 12 respectivamente. ¿Cuántos gramos de metal fino A hay en una aleación de 560 gr.?

a) 390 b) 350 c) 370 d) 380 e) 360

17. Se alea oro de 19.3 de peso específico con plata de 10.5 de peso específico resultando una aleación de 17.9 de peso específico. ¿Qué ley tiene la aleación resultante?

a) 0.911 b) 0.907 c) 0.915 d) 0.905 e) 0.909

18. Se hace un trofeo de 13.5k. mezclando 80grs. de oro de 18k., con oro puro y cobre puro, siendo la diferencia entre estos dos últimos de 20 gr. Hallar el peso de dicho trofeo si es el menor posible.

a) 200 gr. b) 480 gr. c) 440 gr. d) 400 gr. e) 160 gr.

Clave

1. c	10. c
2. a	11. b
3. b	12. b
4. a	13. d
5. d	14. a
6. e	15. c
7. a	16. d
8. c	17. c
9. b	18. b

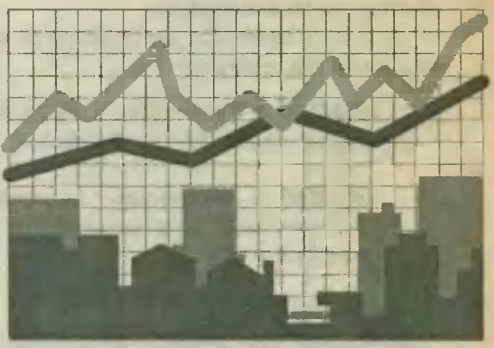
Capítulo 25

INTRODUCCION A LA ESTADISTICA

I CONCEPTOS BASICOS

1. **Breve definición de Estadística**

Estadística es la ciencia que nos proporciona un conjunto de métodos y procedimientos que permiten recopilar, clasificar, presentar y describir datos en forma adecuada para tomar decisiones frente a la incertidumbre o predecir o afirmar algo acerca de la población a partir de los datos extraídos de la misma.



2. **Población**

Es el conjunto mayor de personas u objetos acerca de los cuales deseamos obtener información.

Los elementos de este conjunto se denominan **datos u observaciones**. Aquellas observaciones que son medibles reciben el nombre de **observaciones cuantitativas.** Así: la estatura y edad de las personas, vida útil de una bombilla de luz, distancias, etc. son observaciones cuantitativas. Por el contrario, hay observaciones como: color de cabello o de ojos, sexo, estado civil, marca de productos, etc. que sólo pueden describirse mas no medirse. A este tipo de observaciones se denomina **observaciones cualitativas.**

> Una población es un conjunto de observaciones cuantitativas o cualitativas.

La población puede ser infinita, siendo imposible tener una información completa sobre ella; también puede ser muy numerosa siendo difícil estudiar todos sus elementos. En estos casos es necesario recurrir a la **muestra.**

3. **Muestra**
Es la parte representativa finita de una población. En términos matemáticos: Población es el universo de la teoría de conjuntos y muestra es un subconjunto finito propio de la población.

4. **Parámetro**
Cantidad numérica que describe alguna característica de toda la población, siendo necesario, para determinar su valor, utilizar la información poblacional completa. A tráves de los parámetros se tomarán decisiones con certidumbre total.

5. **Estadígrafo**
Cantidad numérica que se obtiene a partir de los datos proporcionados por la muestra y describe alguna característica de la muestra. A través de las estadígrafos se tomarán decisiones con un grado de incertidumbre (ya que la información obtenida no es de toda la población, sino de parte de ella).

Población	→	Parámetro
Muestra	→	Estadígrafo

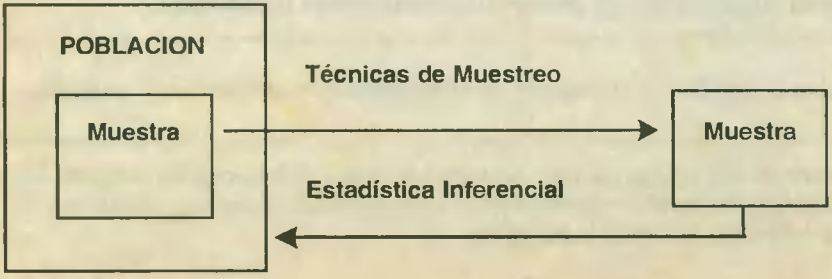
6. **Ramas de la Estadística**
A partir de la definición mencionada en el acápite inicial se deriva que son dos las ramas de la Estadística, estas son:

* **Estadística Descriptiva.–** Trata de la recopilación, clasificación, presentación y descripción de los datos obtenidos de una población o muestra.

* **Estadística Inferencial.–** Nos proporciona la teoría necesaria para realizar alguna afirmación acerca de la población o tomar decisiones generales a partir de los datos recogidos y estudiados.

7. **Técnicas de Muestreo**
Proceso que nos permite obtener una información completa de la población mediante la extracción de muestras representativas de dicha población.

A partir de la información obtenida de los datos muestrales se afirma algo acerca de la población total o se toman decisiones generales confiables con ayuda de la Estadística Inferencial.



8. Variables

Variable es la representación matemática de los datos obtenidos a través de las técnicas de muestreo. Puede ser de dos tipos: continua y discreta.

* **Variable Continua:** Cuando puede tomar cualquier valor real. Por ejemplo si la variable representara la estatura de los estudiantes, tomará cualquier valor real entre 0m y 2,20 m.

* **Variable Discreta:** Cuando toma valores de un conjunto contable (es decir numerable o finito). Por ejemplo número de alumnos aprobados en matemática de un determinado salón de clases.

(II) ORGANIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE LOS DATOS

1. Recopilación de Datos

Los datos pueden recopilarse de dos maneras fundamentales:

* **Censo:** Cuando se consideran todos los elementos de la población y se registran sus características.

* **Muestreo:** Cuando se consideran algunos elementos, seleccionados de una población. Si la recopilación de los elementos muestrales se efectúa al azar se dice que el **muestreo es aleatorio** y la muestra se denomina **muestra aleatoria.**

> La información total o parcial puede recopilarse mediante encuestas o el registro de resultados de trabajos experimentales.

2. Presentación de Datos

Una vez recolectados los datos es necesario presentarlos en forma tal que se facilite su comprensión y su posterior análisis. Para tal fin se presentan en cuadros numéricos denominados **Tablas de Frecuencia**, estas tablas a su vez son representadas en **gráficas** (gráfica de barras, histogramas, sectores circulares, ojivas, polígonos de frecuencia, etc.).

Mediante un ejemplo proporcionaremos las definiciones más importantes, así como procedimientos para la organización y representación de datos.

A continuación presentamos los calificativos obtenidos en el curso de Aritmética en el que se han evaluado 56 personas, siendo la escala de evaluación de 0 a 100.

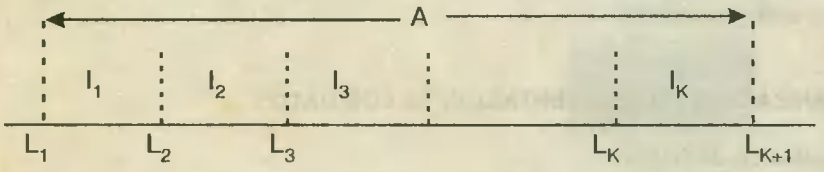
73	50	61	77	59	30	82
75	95	69	52	74	72	65
58	81	38	87	68	87	38
43	66	59	53	55	63	82
48	89	44	70	39	47	63
63	59	76	75	79	75	63
67	52	73	69	84	62	53
75	72	64	84	36	95	43

a) **Alcance (A)**: Es el intervalo definido por los datos de mayor y menor valor. En nuestro ejemplo: A [30,95]

b) **Intervalos de Clase (l_i) y Límites de Clase (L_i)**

Los intervalos de clase son grupos de datos que presentan relaciones comunes; mediante dicha agrupación se busca facilitar el análisis respectivo.

Cada l_i viene a ser una partición de A. Podemos graficar a los intervalos de la siguiente manera.



$$l_i = [\, L_1, L_{1+1} \rangle \ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots K$$

Los l_i son intervalos semiabiertos (abiertos por la derecha), pudiendo ser cerrado el intervalo l_K.

Los L_i, i = 1,2,3,...,k+1 se denominan **Límites de Clase** y se definen como el mayor y menor valor de cada intervalo de clase.

Para determinar el valor de k(número de intervalos de clase) se recomienda utilizar la Regla de Sturges.

$$k = 1+3{,}3 \log n$$

donde n es el número total de datos disponibles. En nuestro caso n = 56

Por lo tanto:
$$\begin{aligned} k &= 1+3{,}3 \log 56 \\ &= 1+3{,}3(1{,}478) \\ &= 1+5{,}8 \\ k &= 6{,}8 \end{aligned}$$

Esta fórmula nos da una idea de cuántos intervalos usar, pero en la práctica el número de intervalos que se utiliza es un poco mayor. Por esta razón redondearemos el valor encontrado al siguiente entero mayor:

$$k = 7$$

c) **Ancho de Clase (W_i)**: Está determinado por la longitud de un intervalo de clase

$$W_i = \ell(l_i) = | L_{i+1} - L_i |$$

Se utiliza la siguiente relación:

$$W = \frac{\ell(A)}{k}$$

donde: $\ell(A)$ = longitud del alcance

k = número de intervalos de clase

En nuestro caso: $W = \frac{95 - 30 + 1}{7} = \frac{66}{7} = 9{,}43$

Redondearemos a 10.

d) Frecuencia Absoluta (n_i): Nos indica el número de datos contenidos en cada clase. Tiene las siguientes propiedades:

* $0 \leq n_i \leq n$
* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$; n_i = frecuencia absoluta de la i–ésima clase.

3. Elaboración de la Tabla de Frecuencia

* Antes de realizar el desarrollo de la tabla, procedemos a determinar cada intervalo. Por ello observamos que:

Alcance inicial = 95 – 30 + 1 = 66

Alcance final = kxW = 7 x 10 = 70 ⇒ Exceso: 4

Para buscar la simetría de la distribución de datos, debemos repartir este exceso a los dos extremos del alcance inicial, mitad para cada lado:

95 + 2 = 97
30 – 2 = 28

Por lo tanto, los intervalos de clase serían:

Intervalos de Clase
[28 – 38 ⟩
[38 – 48 ⟩
[48 – 58 ⟩
[58 – 68 ⟩
[68 – 78 ⟩
[78 – 88 ⟩
[88 – 98 ⟩

* Ahora sí, procedemos a construir la tabla.

Calificativos Intervalos de Clase (l_i)	Conteo	Número de calificativos por clase Frecuencia Absoluta (n_i)
[28, 38 ⟩	II	2
[38 ,48 ⟩	𝍸 II	7
[48, 58 ⟩	𝍸 II	7
[58, 68 ⟩	𝍸 𝍸 IIII	14
[68, 78 ⟩	𝍸 𝍸 𝍸	15
[78 ,88 ⟩	𝍸 III	8
[88, 98 ⟩	III	3
Total		n = 56

e) **Marcas de Clase (X_i)**: Son los puntos medios de los intervalos de clase

$$X_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2} \; ; \quad i = 1,2,3,4,...,7$$

Por ejemplo: $X_4 = \frac{58 + 68}{2} = 63$

La marca de clase del cuarto intervalo de clase es 63.

f) **Frecuencia Relativa (h_i)**: Se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de clase entre el número total de datos.

$$h_i = \frac{n_i}{n} \; ; i = 1,2,3,4,...,k$$

Por ejemplo: $h_3 = \frac{7}{56} = 0,125$

La frecuencia relativa del tercer intervalo de clase es 0,125.
h_i tiene las siguientes propiedades

* $0 \le h_i \le 1$, $i = 1,2,3,...,k$
* $\sum_{i=1}^{k} h_i = 1$ (la suma de las frecuencias relativas es igual a 1).

g) **Frecuencia Relativa Porcentual (h_i%)**: Es la frecuencia relativa expresada en porcentaje. Nos permite contestar preguntas del siguiente tipo: ¿Qué porcentaje de alumnos tiene calificativos entre 48 y 58? Respuesta: 12,5%

h) Frecuencia Absoluta Acumulada (N_i)

Se define de la siguiente manera:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k \quad ; \quad n_i \leq Ni \leq n$$

Consiste en la suma de las frecuencias absolutas desde el primer intervalo hasta el intervalo indicado. Por ejemplo:

$$N_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 7 + 7 + 14 = 30$$

Se lee: la frecuencia absoluta acumulada hasta la cuarta clase es 30.

i) Frecuencia Relativa Acumulada (H_i):

Se define:

$$H_i = \sum_{j=1}^{i=1} h_j \quad \text{o} \quad H_i = \frac{N_i}{n} \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots,k$$

Consiste en la suma de frecuencias relativas desde el primer intervalo de clase hasta el intervalo indicado, por ejemplo:

$$H_3 = h_1 + h_2 + h_3 = 0,036 + 0,125 + 0,125 = 0,286$$

j) Frecuencia Relativa Acumulada Porcentual (H_i%): Es la frecuencia relativa acumulada expresada en porcentaje. Nos permite responder preguntas del siguiente tipo. ¿Qué porcentaje de alumnos han obtenido calificativos menores de 58? Respuesta: 28,6%

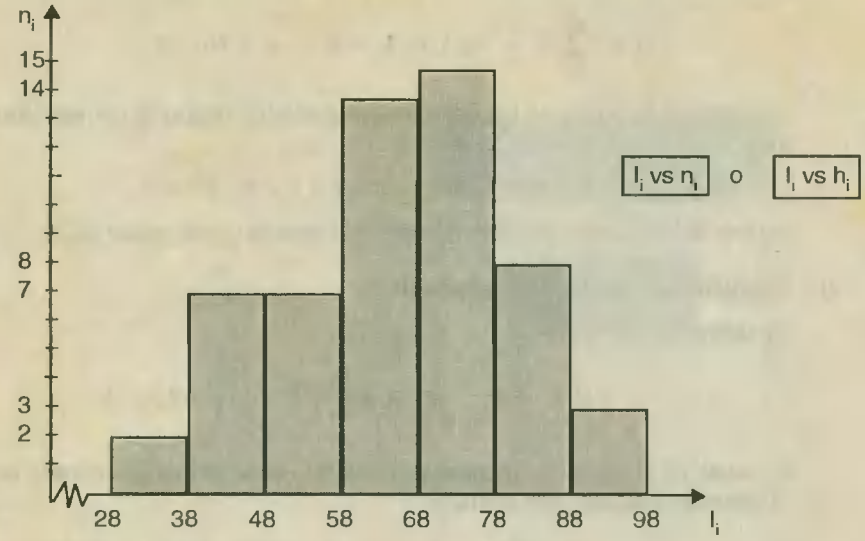
k. Tabla de Frecuencias

Intervalos de Clase	Marca de Clase (X_i)	Frecuencia A	Frecuencia Relativa	F. Relativa Porcentual	F. Absoluta Acumulada	F. Relativa Acumulada	F. Relativa Porcentual
[28 – 38 ⟩	33	2	0,036	3,6	2	0,036	3,6
[38 – 48 ⟩	43	7	0,125	12,5	9	0,161	16,1
[48 – 58 ⟩	53	7	0,125	12,5	16	0,286	28,6
[58 – 68 ⟩	63	14	0,250	25,0	30	0,536	53,6
[68 – 78 ⟩	73	15	0,268	26,8	45	0,804	80,4
[78 – 88 ⟩	83	8	0,143	14,3	53	0,947	94,7
[88 – 98 ⟩	93	3	0,053	5,3	56	1	100
		56	1	100%			

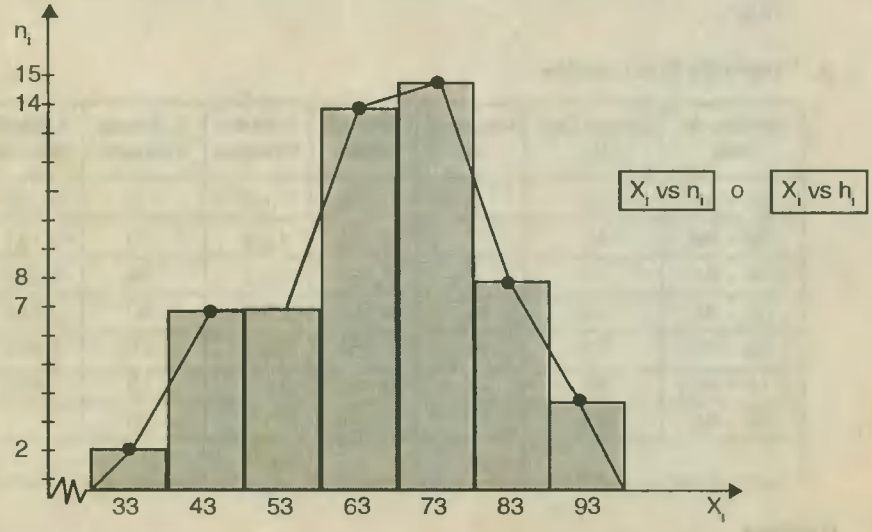
4. Gráficas

Las distribuciones de frecuencias pueden ser representadas gráficamente mediante: Histogramas, Polígonos de frecuencias, Ojivas y Diagramas escalonados.

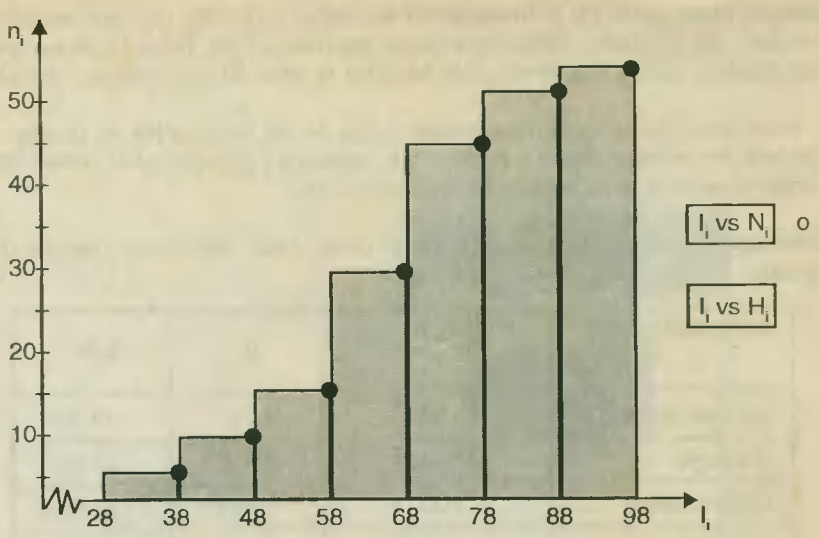
* Histogramas: son gráficos de barras (rectángulos), siendo las bases representadas por los intervalos de clase y las alturas por las frecuencias absolutas o relativas.



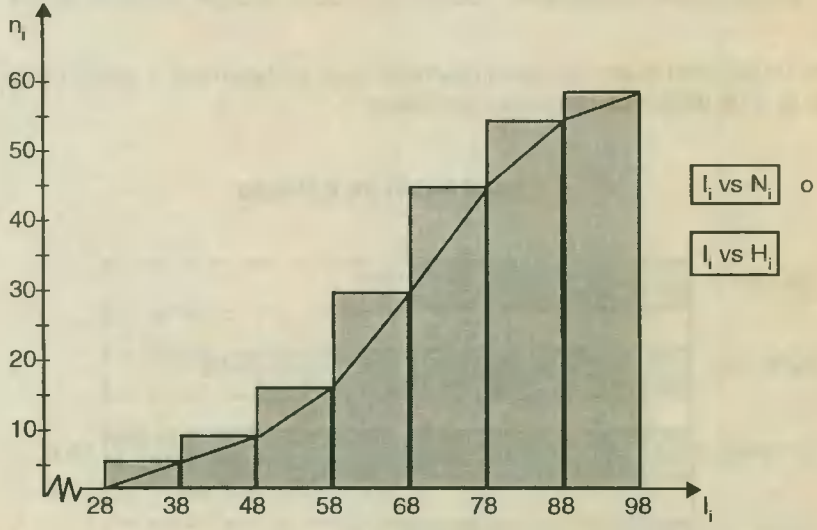
* **Polígonos de Frecuencias**.– Son poligonales construidas uniendo los puntos (X_i,n_i) o (X_i,h_i) mediante segmentos de recta, o uniendo los puntos medios de los «techos» de los rectángulos del histograma.



* **Diagrama Escalonado.**– Son gráficas de barras o rectángulos cuyas bases representan los intervalos de clase y las alturas las frecuencias absolutas o relativas acumuladas.



* **Ojivas:** Son poligonales asociadas a distribuciones de frecuencias absolutas o relativas acumuladas, así:



5. Distribución de Frecuencias Cualitativas

Las tablas de distribución de frecuencias y sus respectivas observaciones gráficas hasta ahora tratadas corresponden a observaciones que son medibles (observaciones cuantitativas). Cuando las observaciones no pueden ser medibles (cualitativas) no es posible determinar cuantitativamente el alcance; en este caso bastará indicar las distintas categorías o atributos y las frecuencias respectivas.

Ejemplo ilustrativo: En la Universidad del Saber hay 6000 alumnos matriculados para el año 2000, de los cuales 1000 van a seguir Ingeniería Civil; 1500, Medicina; Derecho, 2000; Contabilidad, 1000 y Economía.500. Realizar la tabla de frecuencias y graficar.

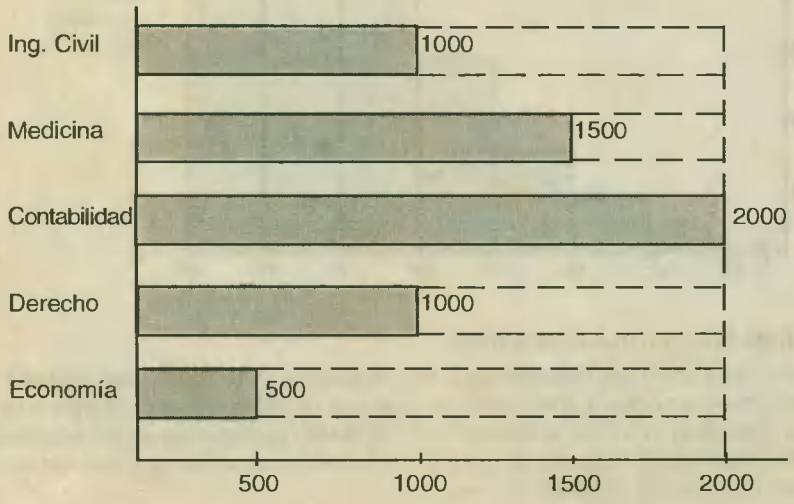
En este caso, los campos de especialización de los estudiantes no pueden ser medidos; sólo pueden ser descritos a través de sus nombres y determinar el número de estudiantes que pertenecen a cada campo de especialización.

Podemos elaborar nuestra tabla de frecuencias y sus respectivos gráficos de la siguiente manera.

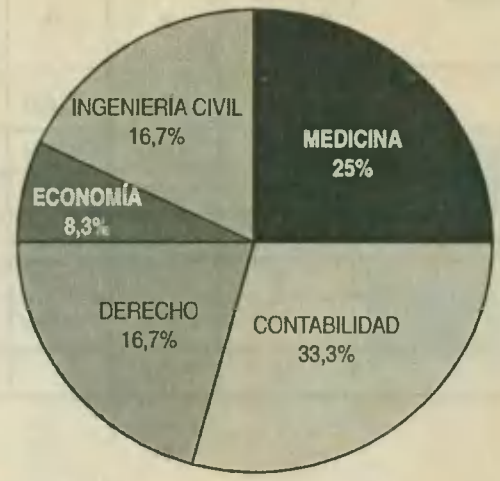
ESPECIALIZACIÓN	N° DE ALUMNOS n_i	h_i	h_i%
Ingeniería Civil	1000	0,167	16,7%
Medicina	1500	0,250	25,0%
Contabilidad	2000	0,333	33,3%
Derecho	1000	0,167	16,7%
Economía	500	0,083	8,3%
Total	6000	1	100%

Una distribución cualitativa puede representarse gráficamente a través de un diagrama de barras o un gráfico de secciones circulares:

DIAGRAMA DE BARRAS



SECTORES CIRCULARES



(III) EJERCICIOS RESUELTOS

1. Los siguientes datos constituyen las vidas útiles, en horas, de una muestra aleatoria de 60 bombillas de luz de 100 watts:

807	811	620	650	817	732	747	823	844	907
660	753	1050	918	857	867	675	880	878	890
881	872	869	841	847	833	829	827	822	811
766	787	923	792	803	933	947	717	817	753
1056	1076	958	970	776	828	831	781	1088	1082
832	863	852	788	980	889	1030	897	755	891

   a) Constrúyase una distribución de frecuencias con anchos de clases iguales.
   b) Trácese el polígono de frecuencias sobre un Histograma de intervalos de clases vs frecuencias absolutas.
   c) Trácese la ojiva asociada a la función escalonada representando intervalos de clave vs frecuencias relativas acumuladas.

Solución

a) $A = [620,1088]$, $\ell(A) = |1088 - 620| = 468$

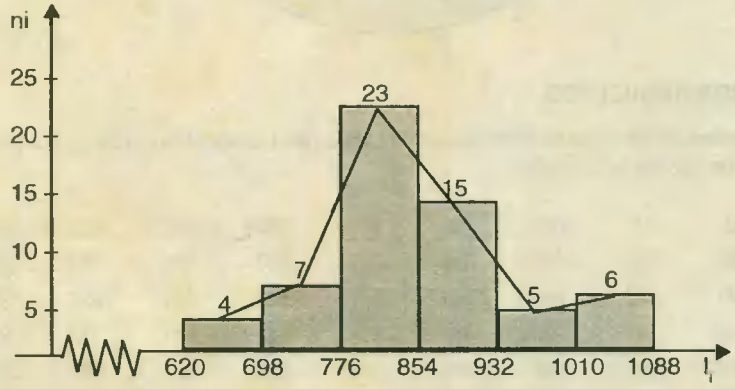
$k = 1+3.3 \log 60 = 6,868$, podemos tomar:

$k = 6$ ó 7

Sea $k = 6$, entonces $W = \dfrac{468}{6} = 78$

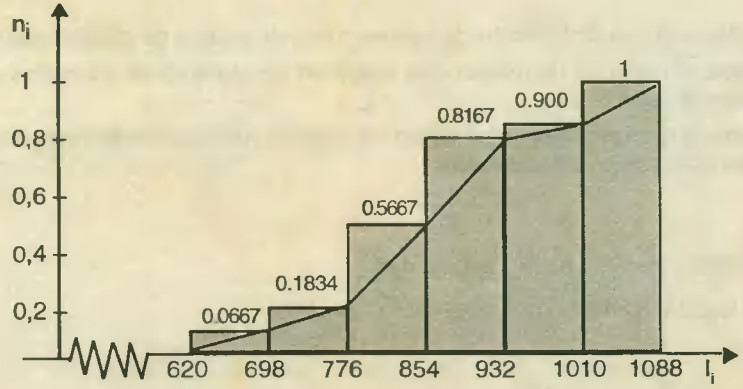
Intervalos de clase Vida útil en h: l_i	Conteo	Número de bombillas n_i	h_i	H_i	h_i%	H_i%
[620, 698 ⟩	////	4	0,0667	0,0667	6,6%	6,67%
[698, 776 ⟩	𝍸 //	7	0,1167	0,1834	11,67%	18,34%
[776, 854 ⟩	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ///	23	0,3833	0,5667	38,33%	56,67%
[854, 932 ⟩	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,2500	0,8167	25,00%	81,67%
[932, 1010 ⟩	𝍸	5	0,0833	0,9000	8,33%	90,00%
[1010, 1088 ⟩	𝍸 /	6	0,1000	1,0000	10,00%	100%
TOTALES		60	1,0000		100,00%	

b)



Vida útil en horas

c)



Vida útil en horas.

2. Los siguientes datos proporcionan el número de estudiantes del sexo femenino, por sección, de una muestra aleatoria de 50 secciones de la Universidad del Saber.

2	0	4	4	1	4	0	3	2	0
0	1	1	1	0	1	2	4	0	1
1	5	2	2	5	3	4	0	4	0
0	0	3	0	1	4	2	1	2	0
3	1	3	1	2	0	5	6	3	2

a) Agrupe estos datos en una tabla de frecuencias.

b) ¿Qué porcentaje de secciones no tienen estudiantes del sexo femenino? ¿Qué porcentaje de secciones cuentan con 1 ó 2 alumnas?

c) Diseñe una gráfica de sectores circulares y dibuje el histograma.

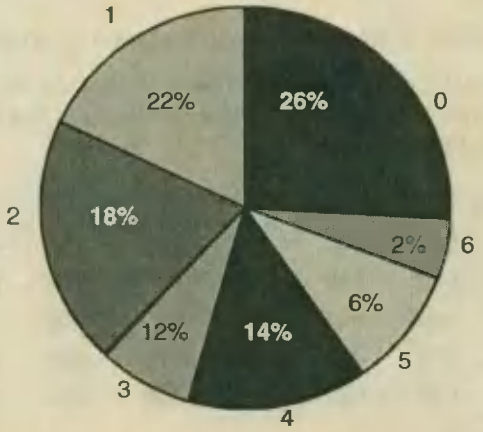
Solución

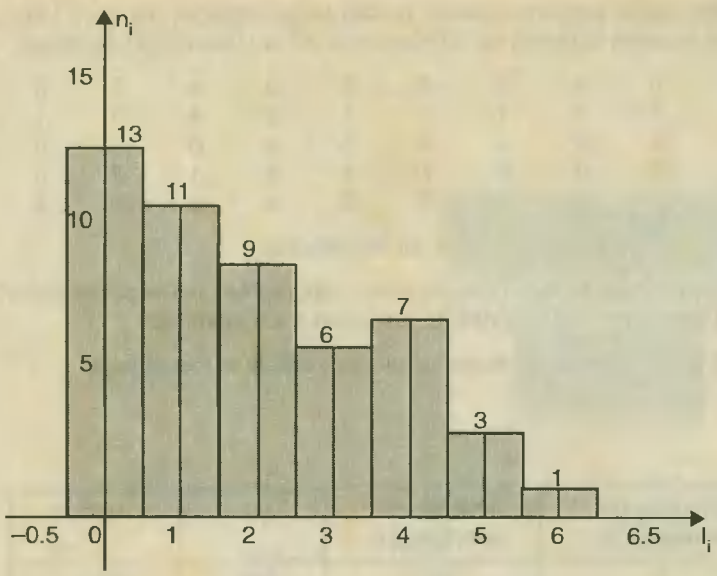
a) TABLA

Número de alumnas X_i	Número de secciones n_i	h_i	$100h_i\%$
0	13	0,26	26%
1	11	0,22	22%
2	9	0,18	18%
3	6	0,12	12%
4	7	0,14	14%
5	3	0,06	6%
6	1	0,02	2%

b) i) El 26% de secciones no tienen estudiantes del sexo femenino, y
ii) El 40% de las secciones cuentan con 1 o 2 alumnas.

c)





(IV) EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De los siguientes enunciados, ¿cuál probablemente exija el empleo de la Estadística Descriptiva y cuál de la Estadística Inferencial.

   a) En un campeonato de fútbol se desea establecer el promedio de goles de los equipos participantes (goal average).

   b) Un profesor emplea diferentes métodos con cada uno de los dos cursos a su cargo. Al final del desarrollo del curso, compara las calificaciones obtenidas por sus alumnos con el fin de establecer cuál método es más eficiente.

   c) Un médico estudia la relación entre el consumo de cigarrillo y las enfermedades del corazón.

   d) Un economista registra el crecimiento de la población en un área determinada.

   e) Un postulante examina la distribución de calificaciones de un examen de admisión a una Universidad para calcular el número de compañeros que obtuvieron una calificación inferior a la suya.

2. Las vías útiles en horas de 40 bombillas eléctricas de 100 watts son:

807	811	620	650	817	732	747	823
660	753	1050	918	857	867	675	880
881	872	869	841	847	833	766	787
923	792	803	933	1056	1076	958	970
776	828	832	863	852	788	980	889

a) Construya las siguientes tablas de frecuencias:

I) l_i vs n_i (Tabla de frecuencias absolutas)

II) l_i vs H_i (Tabla de frecuencias relativas acumuladas)

III) X_i vs h_i

b) Diseñe las gráficas correspondientes.

3. Los siguientes datos son las velocidades (en km/h) de 40 carros que pasaron por un punto de control de velocidad:

60	30	31	60
35	20	40	54
40	55	45	60
30	40	46	105
80	35	28	60
70	60	31	65
65	80	25	70
40	75	43	85
65	72	46	62
100	55	50	63

Clasifique estos datos convenientemente, y:

a) Muestre el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

b) Diseñe la función escalonada y la ojiva respectiva.

c) Los carros con velocidades mayores a 80 km/h, son multados por exceso de velocidad. ¿Qué porcentaje serán multados?

4. La siguiente distribución muestra el peso en gramos de 30 paquetes de un determinado producto.

g	10–15,5	14,5–19,5	19,5–24,5	24,5–29,5	29,5–35
h_i	k/2	0,17	2k	k	0,13

a) Trazar una ojiva

b) ¿Cuántos paquetes tienen pesos comprendidos entre 12 y 16 gramos?

c) ¿Cuántos paquetes tienen por lo menos 24,5 gramos?

d) ¿Cuántos paquetes tienen a lo sumo 29,5 gramos?

5.– La siguiente distribución muestra las frecuencias relativas de 200 alumnos.

Edades:	16	19	22	25	28	31
H_i:	1,00	0,97	0,78	0,36	0,15	0,04

a) Muestre los límites inferiores de la 2da y 4ta clases.

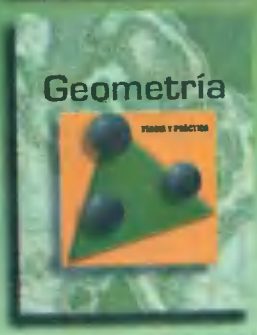
b) ¿Qué tanto por ciento de los estudiantes tienen edades entre 18 y 26 años?

Impreso en los talleres gráficos de
Editorial San Marcos
Av. Las Lomas Cdra. 16 intersección con
Jr. Mamacona – Mangomarca Alta – S.J.L.
RUC 11029221

PEDIDOS:

Av. Garcilaso de la Vega 911
Oficina 404 - Lima
Teléfono: 332-2380 - Telefax: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220 - Ofic. 304
Jesús María
(Alt. Cuadra 5 de Av. Arenales)
Teléfonos: 330-8553 - 332-0153
Telefax 433-7542

Ingresa al tercer milenio con la más sólida preparación



Editorial San Marcos

Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304. Jesús María
(Alt. cdra. 5 de Av. Arenales)
☎ 330-8553 / 332-0153 Telefax: 433-7542
Av. Garcilaso de la Vega 911 Of. 404 - Lima.
☎ 332-2380 Telefax: 424-6563