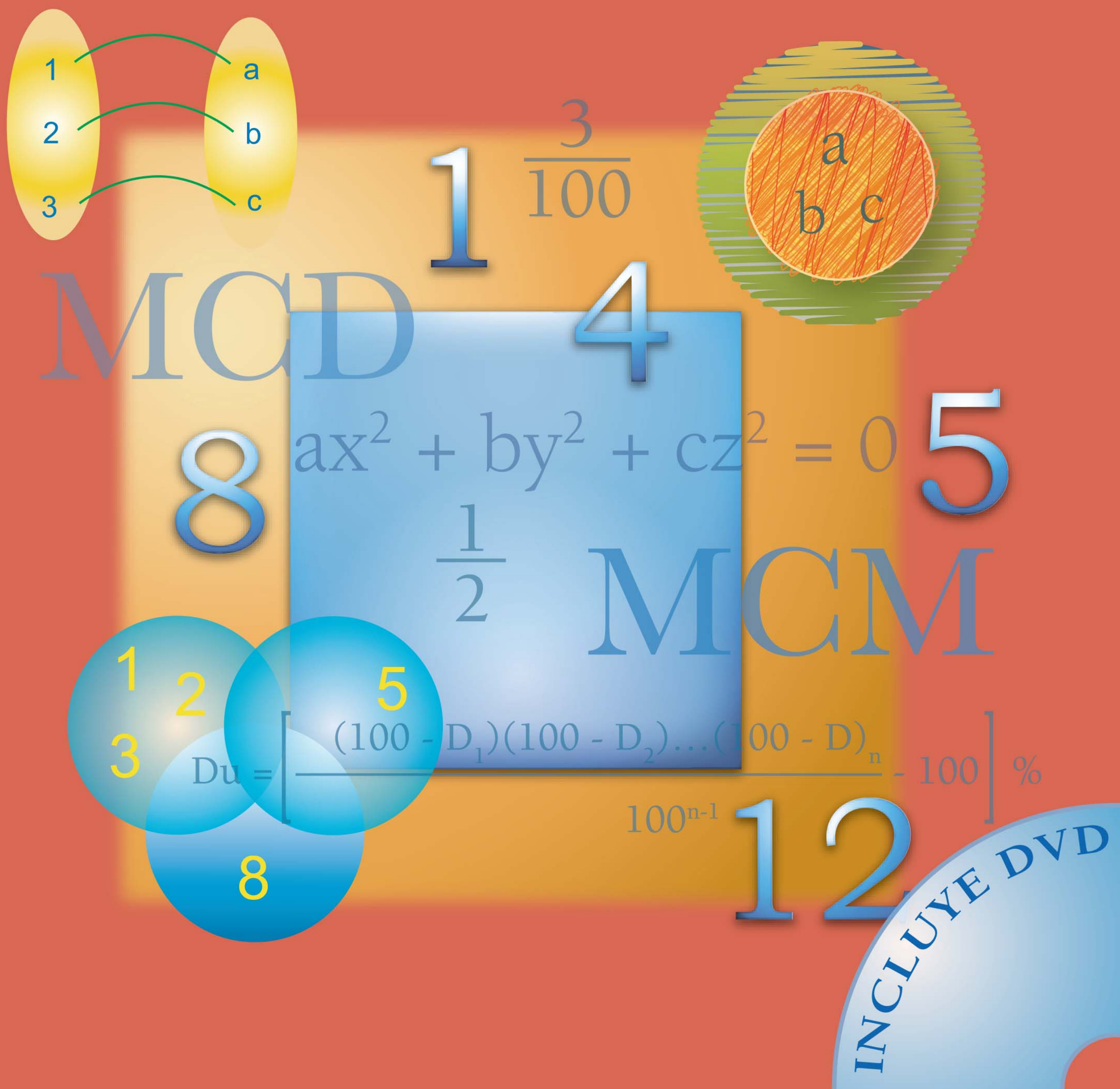
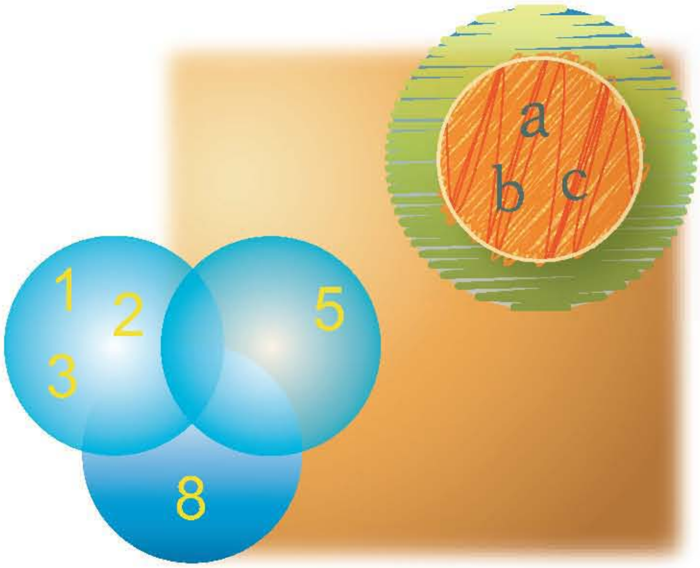
MANUAL DE PREPARACIÓN PRE-UNIVERSITARIA

ARITMÉTICA

TEORÍA, CONCEPTOS, EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS



ARITMÉTICA



LEXUS

ARITMÉTICA MANUAL DE PREPARACIÓN PRE-UNIVERSITARIA

IDEA, DISEÑO Y REALIZACIÓN
Departamento de Creación Editorial de Lexus Editores

Av. Del Ejército 305 Miraflores, Lima-Perú
www.lexuseditores.com

Primera edición, febrero 2008

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca
Nacional del Perú: 2008-01601

ISBN: 978-9972-209-45-1

EDICIÓN 2008

PRESENTACIÓN

Si usted, estimado lector, considera que la matemática es una de las materias de mayor complejidad en los planes de estudio escolar, pre-universitario y superior, o desea profundizar y repasar temas y ejercicios que le permitirán el dominio progresivo y la maestría avanzada en el tema, ha abierto el libro apropiado.

Desde siempre Lexus Editores ha desarrollado recursos metodológicos tendientes a mejorar la articulación teórica y práctica entre el nivel secundario y la universidad. Esta vez, ha deseado crear un manual educativo que sirva como herramienta de auto-evaluación para los alumnos que se encuentran en etapa pre-universitaria. De esta manera, ellos mismos serán capaces de juzgar sus capacidades con vista a iniciar sus estudios superiores.

Se ha tenido el especial cuidado de seleccionar un grupo altamente calificado para la redacción de esta obra, conformado por estudiantes universitarios y docentes especializados, a fin de lograr un manual de preparación pre-universitaria en Aritmética en la que se destaca el desarrollo de complejos ejercicios, usando métodos apropiados, fáciles y amigables.

Este manual conduce al lector de una manera didáctica a lo largo de la asignatura, pasando de lo más sencillo a lo más complejo, con numerosos ejercicios resueltos y propuestos, brindándole de esta manera una base muy sólida para que destaque durante su paso por las aulas universitarias, al ostentar adecuado conocimiento y dominio de la materia.

Un DVD, producido con la más alta tecnología digital e infográfica, acompaña esta obra, para demostrar al estudiante que lo dificultoso puede verse siempre en términos entendibles y amenos. Es prácticamente como tener un profesor en casa a tiempo completo.

Los Editores

SUMARIO

Pag.

NOCIONES DE TEORÍA DE CONJUNTOS

BREVE HISTORIA DE GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR

Descendiente de judíos, Georg Cantor fue hijo mayor del próspero comerciante Georg Waldemar Cantor y de María Bohm.

El padre había nacido en Copenhague, Dinamarca, pero emigró siendo joven a San Petersburgo, Rusia, donde nació el matemático Georg Cantor, el 3 de marzo de 1845. Una enfermedad pulmonar fue causa de que el padre se trasladara, en 1856, a Francfort, Alemania, donde vivió en un cómodo retiro hasta su muerte, en 1863. Debido a esta curiosa mezcla de nacionalidades, diversos países reclaman a Cantor como hijo. Cantor se inclinó hacia Alemania, pero no puede decirse que Alemania le haya acogido muy cordialmente.

Los primeros estudios de Cantor fueron semejantes a los de la mayor parte de los matemáticos eminentes. Su gran talento y su interés absorbente por los estudios matemáticos fueron reconocidos precozmente (antes de cumplir los 15 años).

Su primera educación fue confiada a un preceptor particular, y después siguió un curso en la escuela elemental de San Petersburgo.

Cuando la familia se trasladó a Alemania, Cantor asistió a algunas escuelas privadas de Francfort y de Damstadt, ingresando luego en el Instituto de Wiesbaden en 1860, cuando tenía 15 años.

Comenzó sus estudios universitarios en Zurich, en 1862, pero al siguiente año, después de la muerte de su padre, pasó a la Universidad de Berlín. En Berlín se especializó en Matemática, Filosofía y Física.

Dividió su interés entre las dos primeras, y jamás tuvo una verdadera afición por la Física. En Matemática, sus profesores fueron: Kummer, Weierstrass y su futuro enemigo, Kronecker. Siguiendo la costumbre alemana, Cantor pasó breve tiempo en otra universidad y, de esta manera, cursó el semestre de 1866 en Gottingen.

Con Kummer y Kronecker en Berlín, la atmósfera matemática estaba altamente cargada de Aritmética. Cantor hizo un profundo estudio de las "Disquisiciones Arithmeticae" de Gauss, y en 1867 escribió, su disertación, que fue aceptada para aspirar al título de Doctor y versó sobre un punto difícil que Gauss había dejado a un lado, respecto a la solución en números enteros x, y, z de la ecuación determinada siguiente:

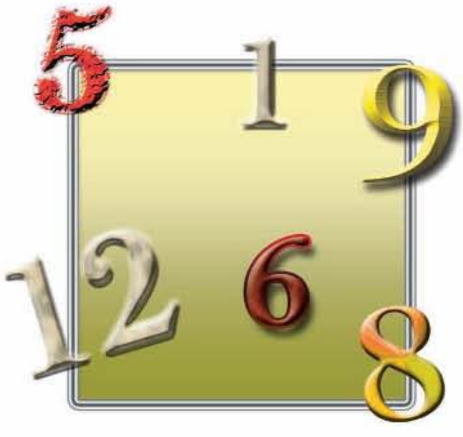
$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 = 0}$$

donde a, b, c son números enteros. Era un excelente trabajo, pero puede afirmarse que ningún matemático que lo leyera podría vaticinar que el autor, de 22 años, llegaría a ser uno de los más originales creadores de la historia de la matemática. No hay duda de que el talento se refleja en este primer ensayo pero no se ve el genio. No hay un solo indicio de gran creador en esta disertación, rigurosamente clásica. Lo mismo puede decirse de todas las obras publicadas por Cantor antes de los 29 años.

Eran excelentes pero podrían haber sido hechas por cualquier hombre brillante que hubiera comprendido totalmente, como Cantor lo hizo, el concepto de las demostraciones rigurosas de Gauss y Weierstrass.

En 1874, apareció el primer trabajo revolucionario de Cantor, sobre la TEORIA DE CONJUNTOS. El estudio de los infinitos, por parte de Cantor, fue considerado por Kronecker como una locura matemática. Creyendo que la matemática sería llevada al manicomio bajo la dirección de Cantor, Kronecker lo atacó vigorosamente con todas las armas que tuvo en su mano, con el trágico resultado de que no fue la teoría de conjuntos la que cayó en el manicomio, sino el propio Cantor.

Él murió en Halle, el 6 de enero de 1918, a los 73 años de edad. Ya le había sido concedidos múltiples honores y también su obra había logrado ser reconocida.



SIMBOLOGÍA Y TERMINOLOGÍA

SÍMBOLO	SE LEE
$a \in A$	El elemento a "pertenece" al conjunto A
$a \notin A$	El elemento a "no pertenece" al conjunto A
$\varnothing$	Conjunto Vacío
$A = B$	El conjunto A es "igual" al conjunto B
$A \neq B$	El conjunto A es "diferente" al conjunto B
$B \subset A$	El conjunto B "está incluido" en el conjunto A
$B \subseteq A$	El conjunto B "está incluido estrictamente" en el conjunto A
$B \not\subset A$	El conjunto B "no está incluido" en el conjunto A
$A \supset B$	El conjunto A "incluye" al conjunto B
$A \cup B$	A "unión" B (Reunión de dos conjuntos)
$A \cap B$	A "intersección" B (Intersección de dos conjuntos)
$/$	"Tal que"
$\sim$	"Es coordinable"
$\nsim$	"No es coordinable"
$\mathbb{U}$	"Conjunto Universal"
$A \Delta B$	"Diferencia simétrica" de los conjuntos A y B
$A \times B$	"Producto cartesiano" de los conjuntos A y B
$\forall x$	"Para todo x" (Cuantificador Universal)
$\exists x$	"Existe x" (Cuantificador existencial)

SÍMBOLO	SE LEE
$\exists x!$	"Existe un x y sólo un x" (Cuantificador de unidad)
$\exists, \nexists$	"Existe", "No existe"
$n(A)$	"Cardinal del conjunto A "ó" Número de elementos del conjunto A"
$\Rightarrow$	"Implica que", "Entonces si", "Es suficiente para", etc.
$\Leftrightarrow$	"Sí y sólo si" (Doble implicación)
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto de las partes del conjunto A
$P(A)$	Potencia del conjunto A
$A \barwedge B$	El conjunto A "es coordinable con" el conjunto B
$\wedge$	"y" (Conectivo lógico de conjunción)
$\vee$	"o" (Conectivo lógico de disyunción inclusiva)
Δ	"o… o …" (Conectivo lógico de disyunción exclusiva)
A', $\mathcal{C}\,A$	"Complemento del conjunto A con respecto al conjunto universal U
$<$	"Es menor que"
$<<$	"Es mucho menor que"
$>$	"Es mayor que"
$>>$	"Es mucho mayor que"
$\leq$	"Es menor o igual que"
$\geq$	"Es mayor o igual que"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

A lo largo del tiempo, el hombre ha inventado conjuntos de números que le han permitido realizar diferentes operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc.) y resolver diferentes problemas. Estos conjuntos son:

$\mathbb{N}$ = conjunto de los números naturales.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z}^*$= conjunto de los números enteros no nulos.

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = conjunto de los números racionales.

$\mathbb{Q} = \{x / x = \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$

Ejemplos:

$\frac{5}{7}; -\frac{8}{3}; -43$

$\mathbb{I}$ = conjunto de los números irracionales

$\mathbb{I} = \{x / x \text{ es un número no racional}\}$

$\mathbb{I}$ = {números decimles ilimitados no periódicos}

Ejemplos:

$\sqrt{2} ; \sqrt{3} ; \sqrt[3]{7} ; \pi ; e$

$\mathbb{R}$ = conjunto de los números reales.

$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\}$

Ejemplos:

$\frac{5}{7} ; \frac{2}{3} ; -7 ; \sqrt{3} ; -5\sqrt{11}$

$\mathbb{C}$ = conjunto de los números complejos.

$\mathbb{C} = \{x / x = a + bi \text{ donde } a \in R, b \in R \wedge i = \sqrt{-1}\}$

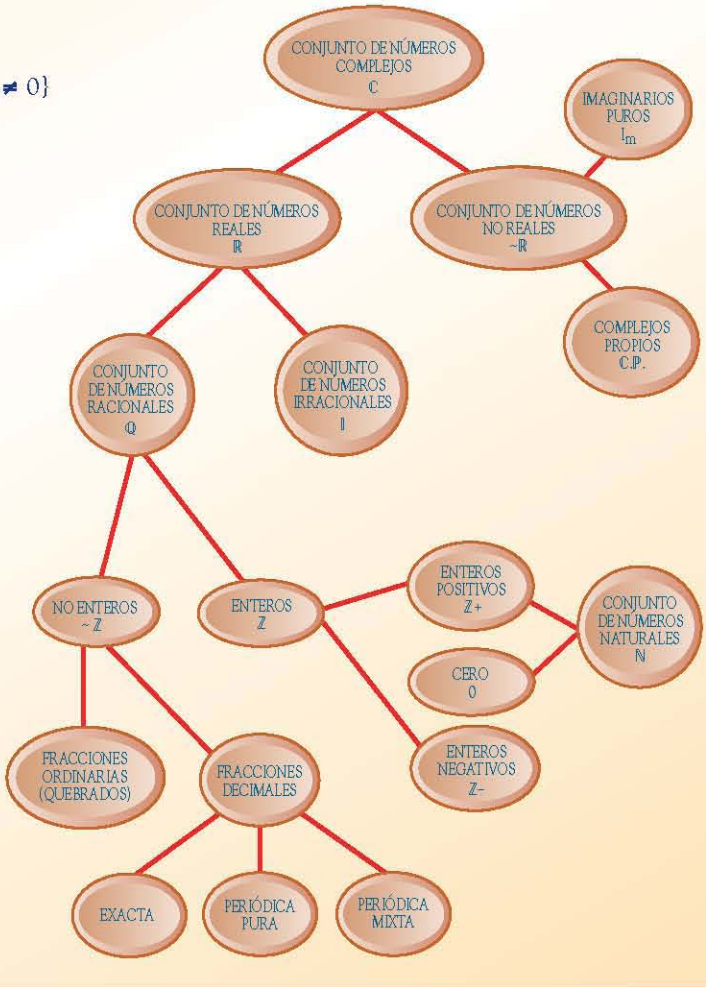
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, el número es complejo real.

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, el número es imaginario puro.

Ejemplo:

$5 + 2i ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{2} ; 8; \sqrt{7} ; -2\sqrt{3}$

DIAGRAMA DE CONJUNTOS NUMÉRICOS



CONJUNTOS

La noción simple de una colección o conjunto de objetos es fundamental en la estructura básica de la matemática. Fue Georg Cantor, por los años de 1870, quien primero llamó la atención de los matemáticos a este respecto.

Se entiende por "conjunto" la reunión, agrupación o colección de objetos o entidades de cualquier naturaleza, pero claramente diferenciados entre sí, a los que se denomina "elementos".

Son ejemplos de conjuntos:

1) Los alumnos de un aula

2) Las 5 vocales

3) Los números impares

4) Tu lapicero, este libro, un cuaderno

Los conjuntos se denota con letras mayúsculas: A, B, C, ...; mientras que los elementos del conjunto, con letras minúsculas: a, b, c, ..., encerrados dentro de llaves: { }

Ejemplo:

A = {a, b, c, d, e}

Que se lee: "A es un conjunto cuyos elementos son a, b, c, d, e".

FORMAS DE EXPRESAR UN CONJUNTO

I. Por extensión o forma constructiva.

Se declara individualmente todos los elementos del conjunto.

Ejemplos:

A = {a, b, c, d}

M = {2; 4; 6; 8}

II. Por comprensión o forma simbólica.

Se declara una propiedad que caracteriza a todos los elementos del conjunto.

Ejemplo:

V = {las vocales}

En esta expresión se comprende que es un conjunto cuyos elementos son todas las vocales. Este mismo ejemplo se puede escribir así:

V = {x/x es una vocal}

Se lee: "V es el conjunto de los elementos x, tal que x es una vocal".

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Conjunto Finito: Aquel conjunto que consta de cierto número de elementos distintos cuyo proceso de conteo tiene término.

Ejemplo:

M = {x/x = es un río del Perú}

Que se lee como: "M es el conjunto de los x, tal que x es un río del Perú". M es un conjunto finito porque sí es posible contar todos los ríos del Perú.

Conjunto Infinito: Un conjunto es infinito cuando el número de sus elementos es infinito. Su proceso de conteo nunca acaba.

B = {y/y = una estrella en el cielo}

Que se lee como: "B es el conjunto de las y, tal que y es una estrella en el cielo". B es un conjunto infinito porque el número de estrellas en el cielo no se termina nunca de contar, es infinito.

NOCIÓN DE PERTENENCIA

Cada uno de los elementos de un conjunto *pertenece* a dicho conjunto. Para indicar la *pertenencia* del elemento al conjunto se usa el símbolo "∈" que se lee "pertenece". Para indicar que un elemento no pertenece al conjunto se usa el símbolo "∉" que se lee "no pertenece".

Ejemplos:

Sean los conjuntos siguientes:

X = {x, y, u, w}

$x \in X$; se lee: "x pertenece al conjunto X"

$m \notin X$; se lee: "m no pertenece al conjunto X"

A = {conjunto de números pares}

$2 \in A$; se lee: "2 pertenece al conjunto A"

$5 \notin A$; se lee: "5 no pertenece al conjunto A"

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos, aunque no estén dispuestos en el mismo orden.

Ejemplos:

A = {a, m, r, q}; B = {m, a, q, r}

entonces: A = B

Se lee: "El conjunto A es igual al conjunto B".

CONJUNTOS DISJUNTOS

Conjuntos disjuntos son conjuntos que no tienen NINGUN elemento común entre ellos.

Ejemplos:

i) A = { a, b, c } y B = { 3, 8, 10 }

A y B son disjuntos, porque no tienen ningún elemento en común.

ii) M = { O, p, q, r } y T = { s, t, u, r }

M y T no son disjuntos, porque tienen el elemento común "r".

CONJUNTO VACÍO

Es un conjunto que carece de elementos. También, se llama conjunto nulo. Se le denota por el símbolo ø.

A = ø ó A = { }

Se lee: "A es un conjunto vacío "o" A es un conjunto nulo".

Ejemplos:

i) A = {mujeres mayores de 400 años} = ø

ii) B = {x/x = presidentes vivos del siglo XIX} = ø

iii) C = { y/y = 8 $\wedge$ y = impar } = ø

CONJUNTO UNITARIO O SINGLETON

Es el conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplos:

i) A = {Los días de la semana cuyo nombre empieza con L} = { Lunes }

ii) B = { x / 3x = 12 } = { 4 }

iii) C = { x / 5x + 4 = 9 } = { 1 }

iv) D = { números impares entre 1 y 5 } = { 3 }

CONJUNTO UNIVERSAL

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de otros conjuntos. Se llama también conjunto referencial. Se denota usualmente con la letra "$\mathbb{U}$".

Ejemplos:

i) C = {todos los números}

Este es un conjunto universal porque contiene todos los números de los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$, ~$\mathbb{Z}$, Im, ~$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

ii) Sean los conjuntos universales:

A = {Los Incas del Perú}

B = {Los ingenieros que trabajan en Lima}

C = {Los presidentes de los países del mundo}

A su vez, el conjunto universal de estos conjuntos es: $\mathbb{U}$ = { personas }

iii) Sean los conjuntos:

A = {a, e}

B = {a, i, u}

C = {a, e, o}

⇒ $\mathbb{U}$ = {vocales} o $\mathbb{U}$ = {a, e, i, o, u}

iv) Si el universo es el colegio San José, ¿cuáles serían los conjuntos que lo forman?

A = {alumnos}

B = {profesores}

C = {carpetas}

⇒ $\mathbb{U}$ = {colegio San José}

SUBCONJUNTO

Es aquel conjunto incluido en otro. De esta manera, si todos los elementos del conjunto A están incluidos en el conjunto B, entonces A es un subconjunto de B. Se denota con el símbolo "⊂", que se lee: "está incluido en".

Ejemplo:

$A = \{ x, y, z \}$; $B = \{ x, y, z, u, w \}$

entonces: $A \subset B$

Se lee: "A está incluido en B" ó
"A es un subconjunto de B".

Alternativamente, en lugar de escribir $A \subset B$, que indica que A está incluido en B, se puede escribir:

$B \supset A$, que se lee: "B incluye a A"

También puede escribirse: $B = \{ A, u, w\}$. Como se ve, el conjunto A está incluido en el conjunto B.

Pero, si A no está incluido totalmente en B, A no es un subconjunto de B, lo cual se denota así: $A \not\subset B$, y se lee: "A no está incluido en B" ó "A no es un subconjunto de B".

Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$

entonces $A \not\subset B$

NOTA:

1) Si $A = B \Leftrightarrow B \subset A \wedge A \subset B$.
Es decir, los conjuntos A y B son iguales si y solamente si B está incluido en A y A está incluido en B.

2) El conjunto vacío "ø" se considera subconjunto de todo conjunto.

3) Si A no es subconjunto de B ($A \not\subset B$) entonces hay por lo menos un elemento de A que no pertenece a B.

SUBCONJUNTO PROPIO

Dado $A \subset B$, entonces el subconjunto A es subconjunto propio del conjunto B, si por lo menos un elemento del conjunto B no es elemento del conjunto A. Pero si todos los elementos de A son iguales a los elementos de B, ya no es un subconjunto, en este caso los conjuntos son iguales.

Ejemplo:

$A = \{ p, q, r \}$

$B = \{ m, n, o, p, q, r, s \}$

$\Rightarrow$ A es subconjunto propio de B.

CONJUNTO DE CONJUNTOS O CONJUNTO DE PARTES

Es aquel conjunto integrado por la totalidad de subconjuntos que se puede formar a partir de un conjunto dado. Se denota $\mathcal{P}_{(A)}$ y se lee: "conjunto de partes de A".

Ejemplo:

Sea el conjunto:

$A = \{ a, b, c \}$

Los subconjuntos de A que se puede formar son:

ø ; {a}; {b}; {c}; {a, b}; {a, c}; {b, c} y {a, b, c}

Por consiguiente el conjunto de partes del conjunto A se denota:

$\mathcal{P}_{(A)} = \{ø,\{a\},\{b\},\{c\},\{a, c\},\{b, c\}, \{a,b\},\{a,b,c\}\}$

CONJUNTO POTENCIA "P(A)"

El conjunto potencia de un conjunto A está formado por la familia de todos los subconjuntos del conjunto A. Tienen la misma connotación del conjunto de conjuntos. Por lo tanto, el conjunto potencia es el número de subconjuntos que se puede formar con elementos del conjunto, incluyendo el vacío. Se calcula y se denota así:

$$P(A) = 2^n$$

Donde: n = número de elementos del conjunto A, o "cardinal el conjunto A".

Ejemplo:

Calcular el número de subconjuntos o conjunto potencia del conjunto A, del ejemplo anterior.

$A = \{ a, b, c \}$

Aquí: $n = 3$; por consiguiente:

$$P(A) = 2^3 = 8$$

Efectivamente, el número de conjuntos que se puede formar con los elementos que tiene el conjunto de conjuntos de A es 8. O, el número de subconjuntos de A es 8. O, el conjunto potencia de A es 8. O, el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es 8.

DIAGRAMACIÓN DE CONJUNTOS

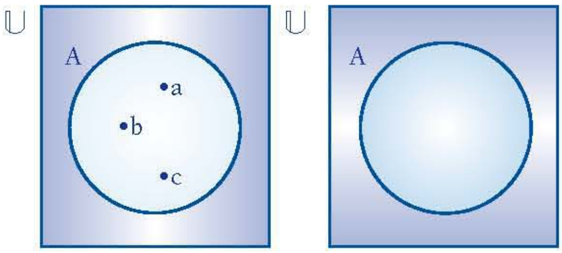
DIAGRAMA DE VENN

Para un mejor entendimiento de la teoría de conjuntos, especialmente para relacionar los conjuntos y sus elementos de una manera muy sencilla se usa diagramas planos para representar conjuntos. Los diagramas son una poderosa herramienta para resolver problemas. Se les llama Diagramas de Venn en honor a su creador.

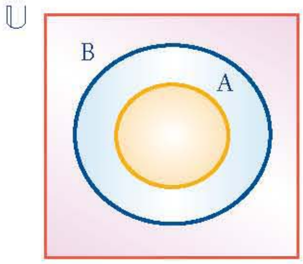
El conjunto Universo es representado por un rectángulo, y contiene los conjuntos, representados a su vez por círculos o elipses. Opcionalmente, puede indicarse o representarse los elementos del conjunto.

Ejemplos:

i) Representación del conjunto A = { a, b, c }, mediante un Diagrama de Venn:

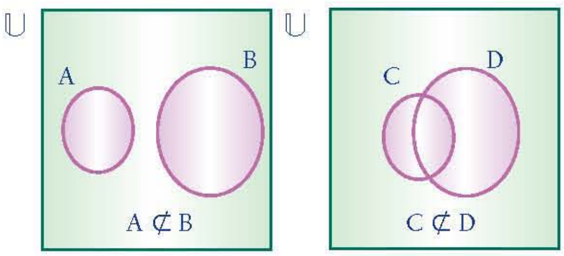


ii) La inclusión del conjunto A en el conjunto B:



"A está incluida en B" ó "A es un subconjunto de B". En este caso, A es subconjunto propio de B.

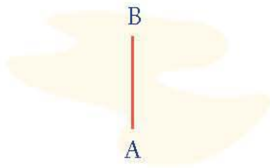
iii) La no inclusión de un conjunto en otro:



"A y B son conjuntos disjuntos. C no está incluido en D".

DIAGRAMAS LINEALES

Es otra manera útil de presentar relaciones entre conjuntos. Si A ⊂ B, se ubica a B más arriba que A; unidos ambos por un segmento.



A ⊂ B

"A está incluido en B"

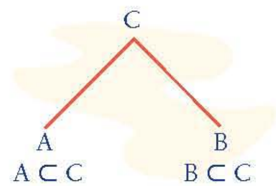
Ejemplos:

i) Sean los conjuntos:

A = {x, y}

B = {a, b, c}

C = {a, b, c, x, y}



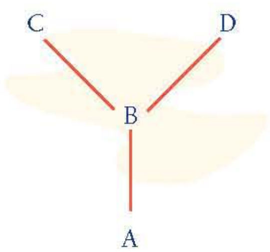
ii) Trazar el diagrama de inclusión lineal de A, B, C y D.

A = {a}

B = {a, b}

C = {a, b, c}

D = {a, b, d}



A ⊂ B ; B ⊂ C ; B ⊂ D

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Mientras que en aritmética se realiza operaciones de suma, resta y multiplicación, en el caso de conjuntos se realiza operaciones de unión intersección y diferencia de conjuntos, con un comportamiento similar al de la aritmética.

UNIÓN O REUNIÓN DE CONJUNTOS

La unión o reunión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A, al conjunto B o a ambos conjuntos. El símbolo de la unión es "∪" y se lee "unión" o "reunión". Se denota $A \cup B$.

Simbólicamente se escribe así:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Que se lee así: "A unión B es igual al conjunto de los x tal que x pertenece a A o x pertenece a B".

La unión de conjuntos se puede escribir también como A + B y se llama suma de conjuntos.

Para la solución de problemas es muy recomendable el diagrama de Venn.

Ejemplos:

i) Hallar $A \cup B$, si:

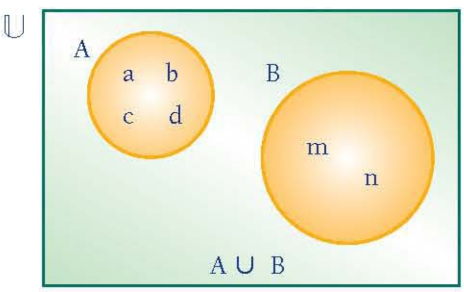
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$;

Solución: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

> **NOTA:**
> En la unión de conjuntos no se repite los elementos que pertenecen a ambos conjuntos; en este caso, el 4.

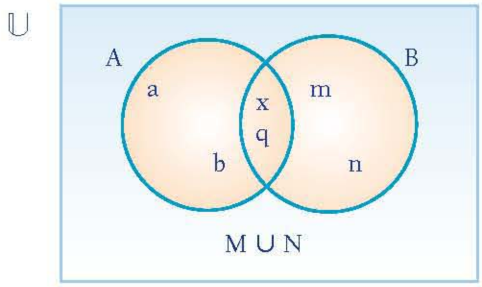
ii) Si: $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, n\}$;

entonces: $A \cup B = \{a, b, c, d, m, n\}$



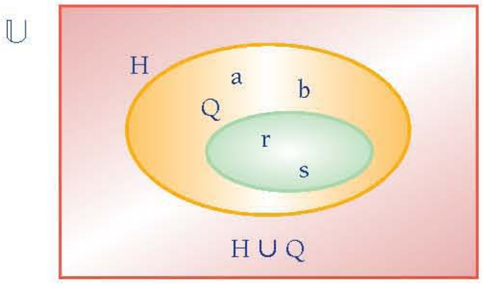
iii) Si: $M = \{a, b, x, q\}$ y $N = \{x, q, m, n\}$;

$M \cup N = \{a, b, x, q, m, n\}$



iv) Si: $H = \{a, b, r, s\}$ y $Q = \{r, s\}$;

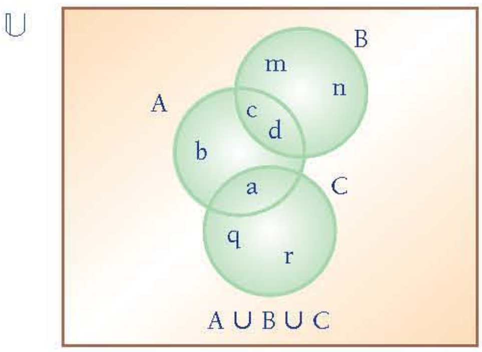
$H \cup Q = \{a, b, r, s\} = H$



UNIÓN DE VARIOS CONJUNTOS

v) Si $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{c, d, m, n\}$ y $C = \{a, q, r\}$:

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, m, n, q, r\}$



PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

I) **La unión de conjuntos es conmutativa.-** Es decir, el orden de los conjuntos no altera la unión.

$$A \cup B = B \cup A$$

II) La unión de conjuntos es asociativa.- Si son más de dos conjuntos los que se unen, pueden asociarse de manera libre, así:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

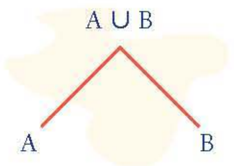
Al resolver una asociación de conjuntos, es recomendable operar primero con el conjunto que está entre paréntesis.

Representación de la Unión de conjuntos mediante un diagrama lineal:

Sean los conjuntos:

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, n\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, m, n\}$



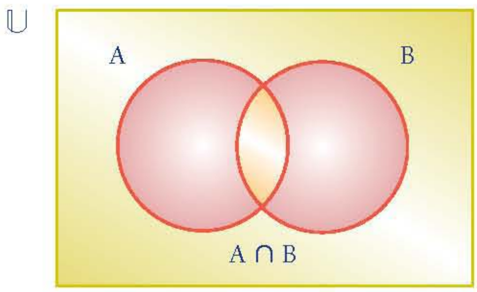
$A \subset (A \cup B) \wedge B \subset (A \cup B)$

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes a A y B.

Se denota: $A \cap B$; que se lee: "A intersección B".

Su representación mediante el diagrama de Venn es la siguiente:



La parte sombreada (región anaranjada) es la parte donde están los elementos comunes a A y B.

En forma simbólica: $A \cap B = \{ x/x \in A \wedge x \in B\}$

que se lee: "A intersección B es igual al conjunto de las x, tal que x pertenece al conjunto A y x pertenece al conjunto B".

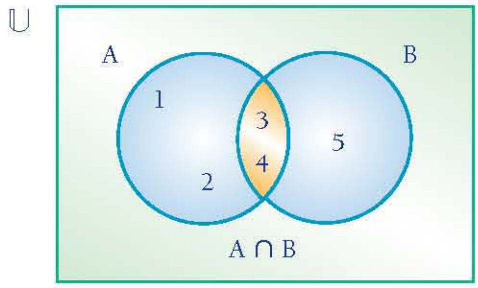
La intersección se puede denotar también como: AB

Ejemplo:

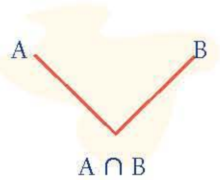
Sean los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{3, 4\}$



También se puede representar la intersección de conjuntos, mediante el diagrama lineal, así:



$(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

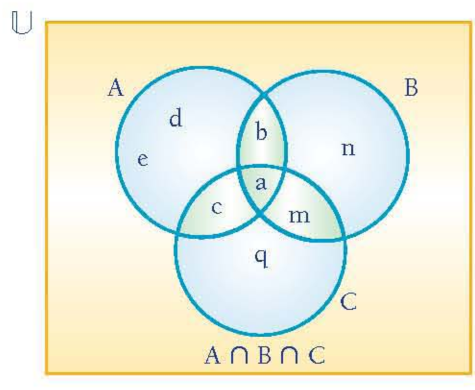
INTERSECCIÓN DE VARIOS CONJUNTOS

Ejemplo:

Si $A = \{a,b,c,d,e\}$; $B = \{a,b,m,n\}$ y $C = \{a, c, m, q\}$; entonces $A \cap B \cap C = \{a\}$

El único elemento común a los tres conjuntos es a.

Representando en el diagrama de Venn:



PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

I) **La intersección de conjuntos es conmutativa.** Esto es, el orden de los conjuntos no altera la intersección.

$$A \cap B = B \cap A$$

II) **La intersección de conjuntos es asociativa.** Es posible cambiar el orden de asociación y no se altera el resultado.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia del conjunto A menos el conjunto B, es el conjunto formado por elementos del conjunto A que no son elementos del conjunto B.

En forma simbólica:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

La diferencia A - B, también se denota:

$$A / B \text{ ó } A \sim B$$

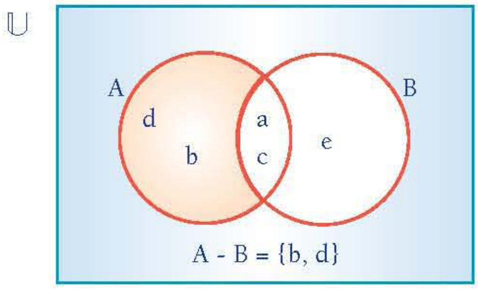
Ejemplo:

Sean los conjuntos:

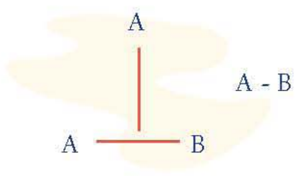
$A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, c\}$;

$\Rightarrow A - B = \{b, d\}$

Usando el diagrama de Venn:



Usando el diagrama lineal, la diferencia de conjuntos se representa como:



> **NOTA:**
> Los conjuntos $(A - B)$; $(A \cap B)$ y $(B - A)$ son mutuamente disjuntos.

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sea un conjunto A y el conjunto universal $\mathbb{U}$, se define como complemento del conjunto A, al conjunto de elementos de $\mathbb{U}$ que no pertenecen al conjunto A. Se denota como A'.

$A' = \mathbb{U} - A$; se lee: complemento de A"

Ejemplo:

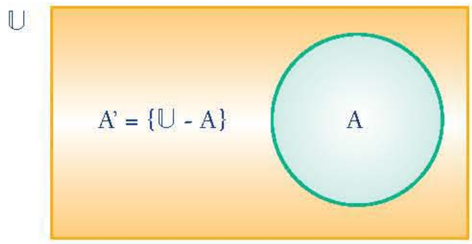
Sean los conjuntos:

$\mathbb{U} = \{m, n, o, p, q, r\}$ y $A = \{p, q, r\}$

entonces:

$$A' = \{\mathbb{U} - A\} \Rightarrow A' = \{m, n, o\}$$

Con el diagrama de Venn, A' se grafica así:



El complemento de A es A': En el gráfico, se muestra en color anarnajado.

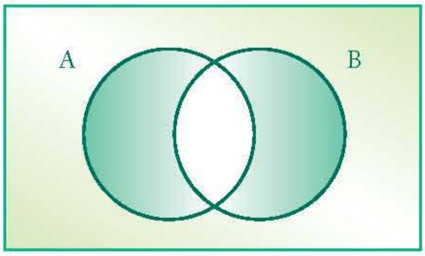
En forma simbólica:

$$A' = \{ x/x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A \} = \{ x/x \notin A \}$$

> **NOTAS:**
> - $A \cup A' = \mathbb{U}$
> - A y A' son disjuntos
> - El complemento del conjunto universal es vacío y viceversa: $\mathbb{U}' = \emptyset$; $\emptyset' = \mathbb{U}$
> - El complemento del complemento de un conjunto A es el mismo conjunto A: $(A')' = A$
> - Una diferencia de conjuntos, se puede expresar como:
>
> $A - B = \{ x/x \in A \wedge x \notin B \}$,o también como
>
> $A - B = \{ x/x \in A \wedge x \in B' \}$

DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ)

Para dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica es lo que queda de ambos conjuntos después de eliminar los elementos de su intersección.



$A \, \Delta \, B = \{ x / x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B \}$

$A \, \Delta \, B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \, \Delta \, B =$ zona en color verde

PRODUCTO CARTESIANO O PRODUCTO

PAR ORDENADO

Dados dos conjuntos un par ordenado está formado por dos elementos, uno por cada conjunto, guardando un orden estricto tal que esten claramente señalados, uno como el PRIMERO y el otro como el SEGUNDO componente.

El par ordenado se escribe entre paréntesis, separado por una coma: (a, b).

Ejemplos:

i) (a, b) *ii)* (x, y)

iii) $(\sqrt{3}\ , 8)$ *iv)* (Juan, Teresa)

Los elementos: a, x, $\sqrt{3}$, Juan, son los "primeros componentes".

Los elementos: b, y, 8, Teresa, son los "segundos componentes".

IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

Dos pares ordenados son iguales si y solamente si sus primeros componentes son iguales y sus segundos componentes también son iguales.

Simbólicamente se expresa así:

$$(x, y) = (m, n) \Leftrightarrow [x = m \wedge y = n]$$

Ejemplo:

Determinar el valor numérico de los pares ordenados iguales:

$$(3x + 2y \ ; \ -5) = (11 \ ; \ 3x \ -2)$$

Para que estos pares sean iguales, los primeros componentes y los segundos componentes deben ser respectivamente iguales entre sí; en otros términos:

$$3x + 2y = 11 \quad \wedge \quad -5 = 3x - 2y$$

Resolviendo el sistema: $x = 1$; $y = 4$

Luego, se sustituye estos valores en cada par ordenado para verificar la igualdad:

1) $(3x + 2y \ ; -5) = (3{,}1 + 2{,}4 \ ; -5) = (11; -5)$

2) $(11 \ ; 3x - 2y) = (11 \ ; \ 3{,}1 - 2{,}4) = (11; -5)$

CÁLCULO DEL PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos M y N no vacíos, se llama producto cartesiano o conjunto producto M . N, al conjunto de pares ordenados, formados por todos los elementos de M, como primeros componentes, asociados a los elementos de N, como segundos componentes.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$M = \{2, 4, 6\} \ \text{ y } \ N = \{\alpha, \beta, \gamma, \varnothing\}$$

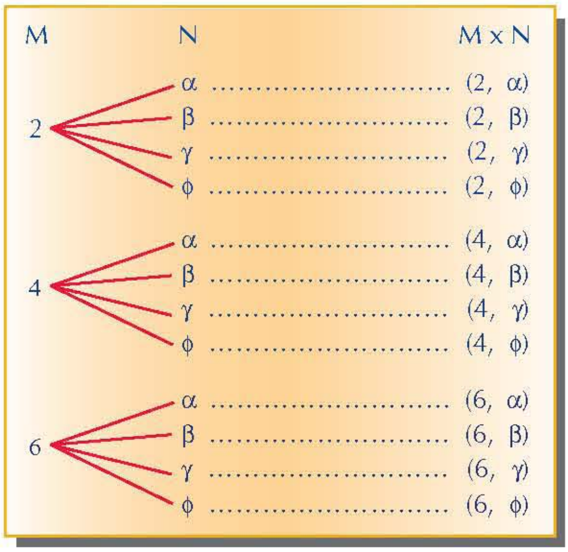
Entonces:

$$\begin{aligned} M \, . \, N = \{&(2, \alpha); \ (2, \beta); \ (2, \gamma); \ (2, \varnothing); \\ &(4, \alpha); \ (4, \beta); \ (4, \gamma); \ (4, \varnothing); \\ &(6, \alpha); \ (6, \beta); \ (6, \gamma); \ (6, \varnothing)\} \end{aligned}$$

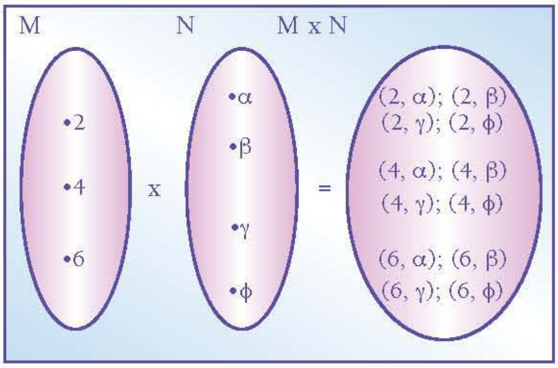
Simbólicamente:

$$M \, . \, N = \{(x, y) \, / \, x \in M \wedge y \in N\}$$

Se puede representar también mediante un "diagrama de árbol":

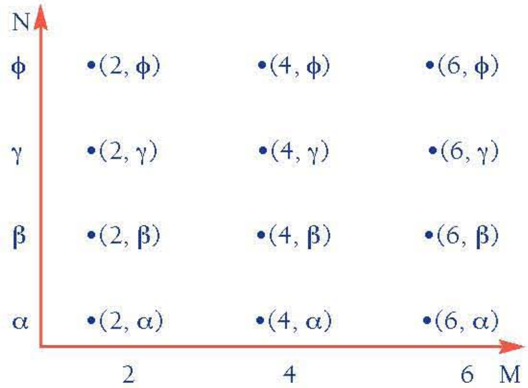


O, mediante un diagrama de Venn:

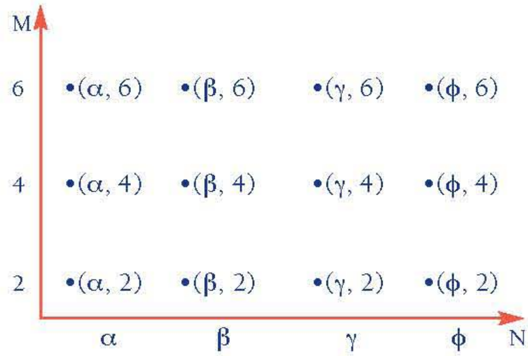


Por último, también se puede representar en un papel cuadriculado: en la línea horizontal, los elementos del conjunto M; y en la vertical, los elementos del conjunto N. Así:

$$M = \{2, 4, 6\} \quad N = \{\alpha, \beta, \gamma, \phi\}$$



Notar, sin embargo que si el producto fuese N . M, se tendría:



IMPORTANTE: Observar que $N . M \neq M . N$

NOTA:

El producto cartesiano de UN CONJUNTO está dado por el conjunto de los pares ordenados de los elementos del mismo conjunto.

Ejemplos:

i) Sea el conjunto $A = \{ a, b, c \}$

Su producto cartesiano es:

$A . A = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$

ii) Sea el conjunto $A = \{ 2, 4, 6 \}$

Su producto cartesiano es:

$A . B = \{(2, 2); (2, 4); (2, 6); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2) (6, 4); (6, 6)\}$

Al producto cartesiano de A . A también se le representa como A^2.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

I. El producto cartesiano no es conmutativo. En general si A y B son 2 conjuntos no vacíos:

$$A . B \neq B . A, \text{ Salvo en el caso en que: } A = B$$

II. El producto cartesiano es nulo o vacío, si y sólo si A es vacío o B es vacío.

$$A . B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

III. El producto cartesiano es asociativo. Así:

$$A . (B . C) = (A . B) . C$$

IV. Si $A \subset M \wedge B \subset N \Rightarrow A . B \subset M . N$

Transitividad parcial

V. El producto cartesiano es distributivo con respecto a la unión y la intersección.

a) $A . (B \cup C) = (A . B) \cup (A . C)$

b) $A . (B \cap C) = (A . B) \cap (A . C)$

NOTA:

Si $n(A) = X ; n(B) = Y \Rightarrow n(A \times B) = XY$

Que se lee: "Cardinal de A x B = X . Y"

Ejemplo: Si el conjunto A tiene 3 elementos, y el conjunto B, 4; el producto cartesiano A . B tendrá: 3 . 4 = 12 elementos. Sean A y B los siguientes conjuntos:

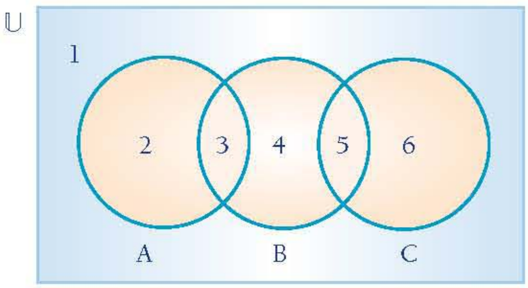
$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \varnothing\}$

$A \,.\, B = \{(1, \alpha); (1, \beta); (1, \gamma); (1, \varnothing);$
$(2, \alpha); (2, \beta); (2, \gamma); (2, \varnothing);$
$(3, \alpha); (3, \beta); (3, \gamma); (3, \varnothing)\}$

n(A . B) = 12; que se lee: "el cardinal de A . B es igual a 12".

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- En el gráfico hallar A', B, (A' ∩ B)', 𝕌, C y C'.



Solución:

$\mathbb{U} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A = \{2; 3\}$; $A' = \{1; 4; 5; 6\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

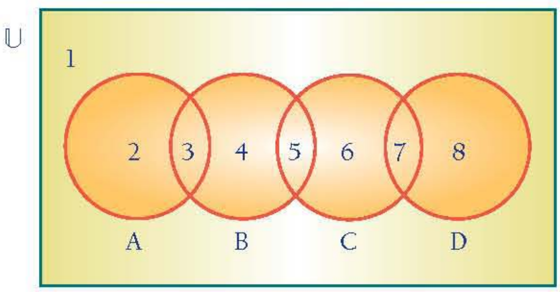
$\therefore\ (A' \cap B)' = \{1; 2; 3; 6\}$

Por otro lado: $C = \{5; 6\}$

$\therefore\ C' = \{1; 2; 3; 4\}$

2.- En el siguiente diagrama hallar:

$$\{[(A' \cap B)' \cap (A - B')] \cap D\}$$



Solución:

$A = \{2; 3\} \Rightarrow A' = \{1; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$B = \{3, 4, 5\} \Rightarrow B' = \{1; 2; 6; 7; 8\}$

$A' \cap B = \{4; 5\}$

$(A' \cap B)' = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$

Por otra parte: $A - B' = \{3\}$

$D = \{7; 8\}$

Finalmente:

$(A' \cap B)' \cap (A - B') \cap D = \{3\} \cap D = \varnothing$

3.- Indicar si es falsa o verdadera cada una de las siguientes expresiones:

a) $\varnothing \in \mathbb{R}$

Esta expresión es falsa porque el signo "∈" significa "pertenencia" y el símbolo "ø" significa "vacío" en la teoría conjuntista y los números "reales" no tienen "vacío".

b) $A \subset A$

Esta es una expresión verdadera, ya que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

c) $\varnothing = \{\varnothing\}$

Esta es una expresión falsa porque "ø" significa "conjunto vacío" y { ø } es un "conjunto unitario".

d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Esta es una expresión verdadera porque todo número entero es posible ser ubicado, dentro del conjunto de números racionales (ver "Conjunto Numérico" en página cinco).

e) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Esta es una expresión verdadera porque el conjunto de números reales es un subconjunto de los números complejos (ver en pagina 5).

f) $\varnothing \subset B$

Esta es una expresión verdadera porque el conjunto vacío siempre es subconjunto de todo conjunto.

4.- Dados los conjuntos:

$M = \{x \,/\, x < 10 \;;\; x \in \mathbb{N}\}$

$A = \{x \in M \,/\, x \text{ es un número par}\}$

$B = \{x \in M \,/\, x \text{ es múltiplo de } 3 \wedge x \neq 9\}$

$C = \{x \in M \,/\, 4 \leq x \leq 8 \vee x = 1\}$

Calcular: $(A' - B) \cap (C - B')$

Solución:

M = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {0, 2, 4, 6, 8} $\Rightarrow$ A' = {1, 3, 5, 7, 9}

B = {0, 3, 6} $\Rightarrow$ B' = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}

C = {1, 4, 5, 6, 7, 8}

De esta manera A' - B = {1, 5, 7, 9}; C - B' = {6}

$\therefore$ (A' - B) $\cap$ (C - B') = $\emptyset$

5.- Dados los conjuntos:

M = {0, 2, 4, 6}

A = {x $\in$ M / x $\neq$ 0}

B = {x $\in$ M / x $\neq$ 2 $\wedge$ x < 4}

C = {x $\in$ M / x + 6 = 6 v 2x - 1 = 3}

Calcular: (A $\cup$ B) $\cap$ (A' $\cap$ B) - (B - C)

Solución:

A = {2, 4, 6} $\Rightarrow$ A' = {0}

B = {0} $\Rightarrow$ B' = {2, 4, 6}

C = {0, 2}

A $\cup$ B = {0, 2, 4, 6}

A' $\cap$ B = {0} ; B - C = $\emptyset$

Finalmente:

(A $\cup$ B) $\cap$ (A' $\cap$ B) - (B - C) = {0}

6.- Dados los conjuntos:

A = {x/x es número natural divisor de 12}

B = {x/x es número natural divisor de 18}

C = {x/x es número natural divisor de 16}

Calcular:

a) (A - B) $\cap$ (B - C)

b) (A - B) $\cup$ (B - C)

c) Mostrar en un diagrama de Venn los conjuntos A, B y C.

Solución:

En primer lugar, vamos a definir por extensión los conjuntos dados.

Así se tendrá:

A = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }

B = { 1, 2, 3, 6, 18 }

C = { 1, 2, 4, 8, 16 }

Procedamos ahora, a calcular las diferencias:

A - B = {4, 12}

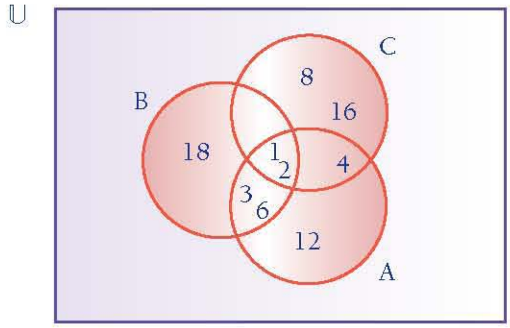
B - C = {3, 6, 18}

Finalmente, lo solicitado:

a) (A - B) $\cap$ (B - C) = $\emptyset$

b) (A - B) $\cup$ (B - C) = {3, 4, 6, 12, 18}

c) En un diagrama de Venn, se tendrá:



7.- Dados los conjuntos:

A = {1, 3, 2, 4}

B = {5, 3, 2, 7}

C = {8, 4, 1, 6}

𝕌 = {x $\in$ ℕ / x $\leq$ 8}

Calcular:

a) A $\cup$ B ; A $\cap$ B ; (A $\cup$ B) $\cap$ C

b) (A - B)' respecto a 𝕌

c) [C - (A $\cup$ B)]' respecto a 𝕌

Solución:

a) A $\cup$ B = {1, 2, 3, 4, 5, 7}

A $\cap$ B = {2, 3}

(A $\cup$ B) $\cap$ C = {1, 4}

b) (A - B) = {1, 4}

Como, 𝕌 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Entonces: (A - B)' = {2, 3, 5, 6, 7, 8}

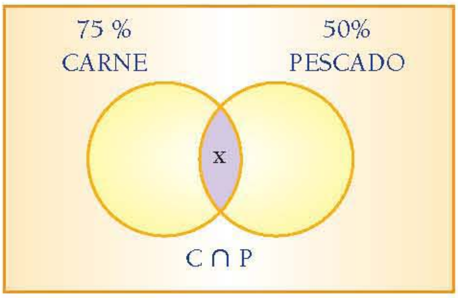
c) C - (A $\cup$ B) = {8, 6}

Entonces: [C - (A $\cup$ B)]' = {1, 2, 3, 4, 5, 7}

8.- En una ciudad, al 75% de la población le gusta la carne; y al 50%, el pescado. Hallar el porcentaje de gente a la cual le gusta la carne y el pescado.

Solución:

Se traza el diagrama de Venn y se marcan los datos:



Sabemos que: $C = 75\%$, $P = 50\%$

$\Rightarrow C + P = 125\%$

Una inspección del diagrama de Venn nos permite deducir que:

$$\Rightarrow C + P = (C \cup P) + (C \cap P)$$

Por definición: $C \cup P = 100\%$

$$\Rightarrow 125\% = 100\% + (C \cap P)$$

$\therefore\ C \cap P = 25\%$

Rpta.: Gustan carne y pescado el 25 % de la población.

9.- De 65 familias encuestadas, 38 tienen televisión y 40, radio. ¿Cuántas familias tienen un solo artefacto?

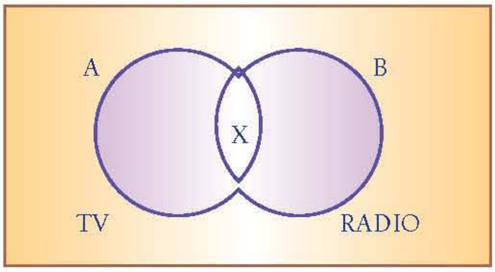
Solución:

El universo está constituido por 65 familias, es decir:

$$\mathbb{U} = 65$$

Se traza el diagrama de Venn:

$\mathbb{U}$



X = número de personas que tienen los dos tipos de artefactos.

La zona en azul representa el conjunto de personas que tiene un solo artefacto; entonces:

Zona azul = $(A - B) \cup (B - A)$ (1)

Zona azul = $65 - X$ (2)

Como (1) = (2): $(A - B) \cup (B - A) = 65 - X$

que se puede escribir así:

$$(38 - X) + (40 - X) = 65 - X$$
$$X = 13$$

$\therefore$ Zona azul $= 65 - 13 = 52$

Rpta.: 52 personas tienen un solo artefacto.

10.- El director de un instituto ha reportado los siguientes datos estadísticos acerca de un grupo de 30 estudiantes de dicho instituto: 19 llevan Matemática, 17 llevan Música, 11 llevan Historia, 12 Matemática y Música, 7 Historia y Matemática, 2 Matemática, Historia y Música, y 2 sólo y exclusivamente Música. ¿Cuántos alumnos llevan Historia y Música?

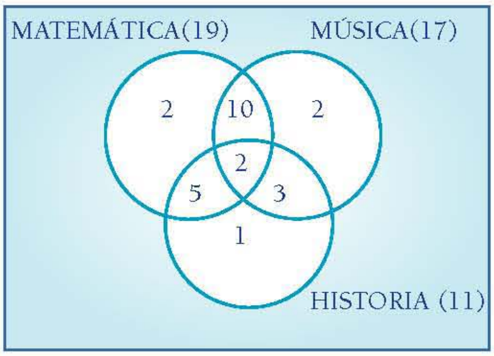
Solución:

Repasemos los datos:

19	Matemática
17	Música
11	Historia
12	Matemática y Música
7	Historia y Matemática
2	Matemática, Historia y Música
2	Sólo Música

1° Tracemos el diagrama de Venn.

$\mathbb{U}$



2° En este tipo de problemas de intersección de conjuntos, se coloca los datos en el gráfico, pero empezando del último al primero: como 2 estudiantes llevan los tres cursos, este valor se coloca en la intersección de los 3 conjuntos; 2 llevan sólo música, este valor se coloca en el área correspondiente; 7 llevan Historia y Matemática, éste será el valor de la intersección de dichos conjuntos, pero como en dicha intersección ya figura el valor 2, el resto lo completamos con 5; del mismo modo como 12 llevan Matemática y Música, completaremos dicha intersección con 10. Finalmente como 17 llevan Música se completa ese conjunto con 3 y así sucesivamente.

Rpta.: Por lo tanto, observamos que Historia y Música llevan 2 + 3 = 5 estudiantes. Notar que hay 5 estudiantes que no llevan ninguno de los 3 cursos mencionados.

11.- En una encuesta realizada para analizar la preferencia del público por los productos A, B y C, se obtuvo los siguientes resultados:

60 prefieren A

59 prefieren B

50 prefieren C

38 prefieren A y B

25 prefieren B y C

22 prefieren A y C

10 prefieren A, B y C

Se pregunta:

1.- ¿Cuántas personas prefieren sólo dos productos?

2.- ¿Cuántas personas prefieren los productos A y B, pero no C?

3.- ¿Cuántas personas prefieren los productos B y C, pero no A?

4.- ¿Cuántas personas prefieren los productos A y C, pero no B?

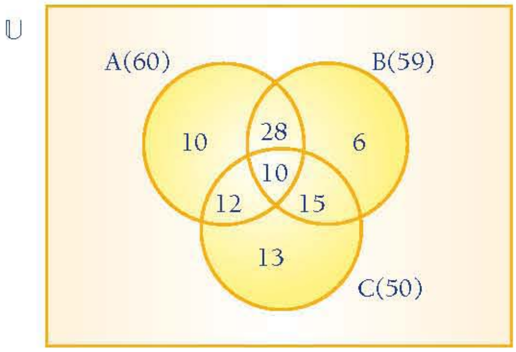
5.- Si el número total de personas encuestadas es 100, ¿cuántas personas no prefieren ninguno de los productos?

6.- ¿Cuántas personas prefieren sólo A, sólo B o sólo C?

Solución:

El Universo es de 100 personas. Procediendo en forma similar al problema anterior, poniendo primero a los 10 que prefieren los tres productos y que es el área donde se intersectan A, B y C.

Luego, se completa los otros datos en el diagrama.



1) Prefieren sólo 2 productos:

28 + 12 + 15 = 55 personas

2) Prefieren A y B, pero no C:

38 - 10 = 28 personas

3) Prefieren B y C, pero no A:

25 - 10 = 15 personas

4) Prefieren A y C, pero no B:

22 - 10 = 12 personas

5) No prefieren ninguno de los tres productos:

100 - (60 + 6 + 15 + 13) = 6

6) Sólo A, 10; sólo B, 6; sólo C, 13.

12.- En un barrio donde hay 31 personas, 16 compran en el mercado, 15 en la bodega y 18 en el supermercado; 5, en los dos últimos sitios; únicamente 6, en los dos primeros; y 7, en el primero y último.

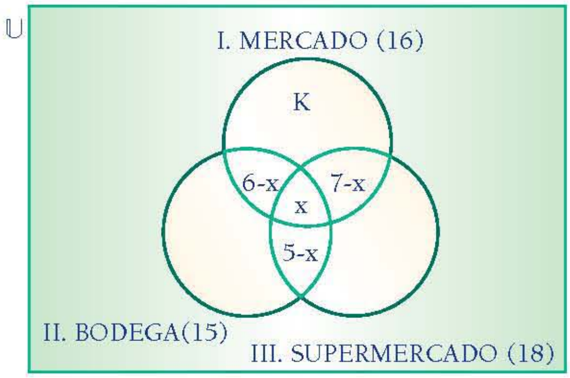
¿Cuál es el menor número de personas que podrían comprar solamente en el mercado?

Solución:

Partamos por considerar que sean "x": las que compran en los 3 lugares. De acuerdo a los datos, "6 - x" compran en el mercado y en la bodega; " 7- x" compran en el mercado y en el supermercado.

Consideremos además que:

"K" representa al número de personas que compran solamente en el mercado:



$$K = 16 - [(6 - x) + x + (7 - x)]$$
$$K = 16 - 13 + x$$
$$K = 3 + x$$

De aquí se deduce que para que "K" sea mínimo:

$$x = 0$$

$\therefore\ K = 3$

Rpta.: 3 personas.

13.- En la confección de un libro, se ha detectado 120 libros con fallas, tales como:

1° fallas en el papel

2° fallas de impresión, y

3° fallas de compaginación.

Si se sabe que:

68 libros tienen la primera falla, al menos.

32 libros tienen la segunda falla, al menos.

40 libros la primera falla solamente.

5 libros tienen la primera y segunda fallas, pero la tercera no.

17 libros tienen las fallas segunda y tercera, pero no la primera.

4 libros tienen las tres fallas.

Se quiere saber lo siguiente:

a) ¿Cuántos libros tienen sólo la tercera falla?

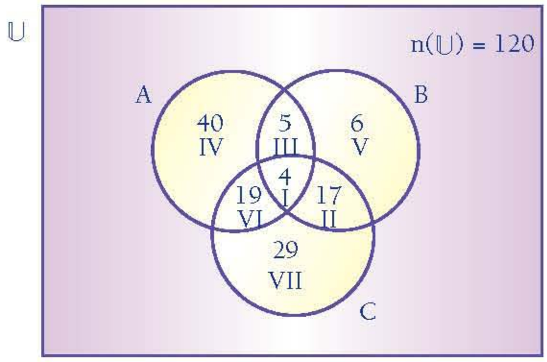
b) ¿Cuántos la tercera falla al menos?

Solución: Se dibuja el diagrama de Venn, tomando en cuenta lo siguiente:

A = {Libros que tienen la primera falla}

B = {Libros que tienen la segunda falla}

C = {Libros que tienen la tercera falla}



Se empieza a rellenar el diagrama empezando con el último dato y terminando con el primero, así:

I. 4 libros tienen las tres fallas A, B, C.

II. 17 libros sólo tienen fallas B y C.

III. 5 libros tienen sólo fallas A y B.

IV. 40 libros tienen sólo fallas A.

V. 32 libros tienen por lo menos la falla B. Ya están colocados 17, 4 y 5; es decir, 26. Faltan 6.

VI. 68 libros tienen la falla A por lo menos. Como ya están colocados 5, 4 y 40; es decir, 49, la diferencia es 19.

A continuación se busca las respuestas:

a) Los que tienen la tercera falla solamente:

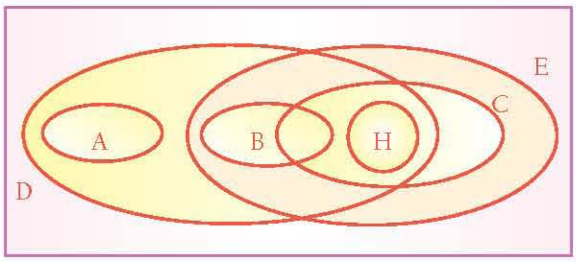
Como el universo U = 120, se tiene:

VII. = 120 - (40 + 4 + 5 + 19 + 6 + 17)

VIII. = 29 libros

b) Los que tienen la tercera falla al menos, son:
C = 19 + 4 + 17 + 29 = 69 libros

14.- Hacer el diagrama lineal correspondiente al siguiente diagrama de Venn:



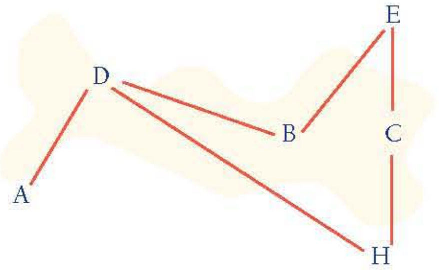
Solución:

Del Diagrama de Venn se cumple que:

$A \subset D$, $B \subset D$, $B \subset E$, $H \subset D$,

$H \subset C$, $H \subset E$, $C \subset E$

Por lo tanto, el diagrama lineal es el siguiente:



15.- Una agencia de turismo realiza una encuesta a 6 000 personas para analizar las preferencias sobre los viajes a Cusco, Iquitos y Trujillo. De acuerdo con los resultados, 2 400 personas desean viajar por lo menos al Cusco, 3 000 por lo menos a Trujillo, 2 100 por lo menos a Iquitos, 1 000 a Trujillo e Iquitos, 800 al Cusco e Iquitos, 1 500 a Trujillo y al Cusco y 500 están dispuestas a realizar las tres excursiones.

En referencia a los lugares mencionados:

a) ¿Cuántos desean hacer una sola excursión, siempre que ninguna de ellas sea al Cusco?

b) ¿Cuántas desean hacer sólo dos excursiones?

c) ¿Cuántas personas quisieran ir sólo al Cusco e Iquitos, o sólo a Trujillo?

d) ¿Cuántos no quisieran ir por lo menos a Trujillo o Iquitos?

Solución:

Este es uno de los problemas más sencillos sobre teoría de conjuntos. Lo más aconsejable para su solución es graficar el problema (diagrama de Venn) y luego colocar los datos empezando por el último:

$n(C \cap T \cap Y) = 500$ (I)

$n(C \cap T) = 1\,500$ (I y II)

$n(C \cap Y) = 800$ (I y III)

$n(T \cap Y) = 1\,000$ (I y IV)

Con estos datos completamos el gráfico:

Sólo al Cusco:

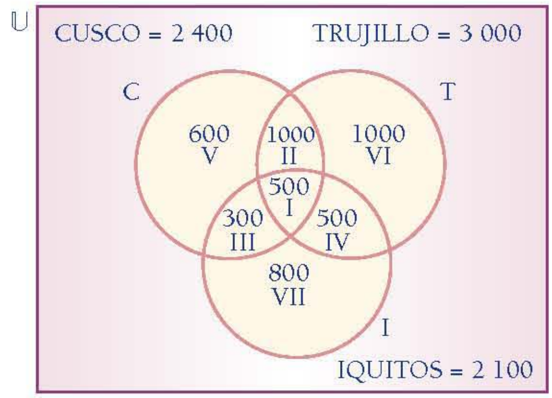
$2\,400 - [1\,000 + 500 + 300] = 600$ (V)

Sólo a Trujillo:

$3\,000 - [1\,000 + 500 + 500] = 1\,000$ (VI)

Sólo a Iquitos:

$2\,100 - [300 + 500 + 500] = 800$ (VII)



Rpta.: a) $1\,000 + 800 = 1\,800$

b) $300 + 1\,000 + 500 = 1\,800$

c) $300 + 1\,000 = 1300$

d) 600

16.- De una muestra recogida a 200 turistas se determinó:

64 eran Norteamericanos

86 eran Europeos

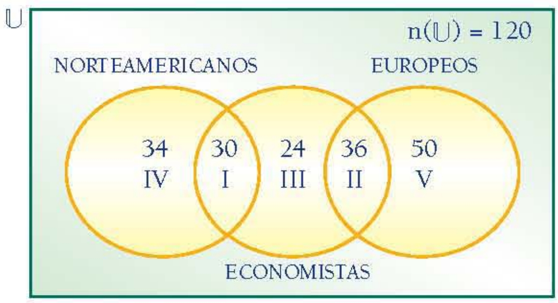
90 era Economistas

De estos últimos, 30 eran Norteamericanos y 36 Europeos.

¿Cuántos de los que no eran Europeos, tampoco eran Norteamericanos ni Economistas?

Solución:

Graficando las condiciones del problema:



Llevando los datos al gráfico:

Existen 30 Economistas Norteamericanos (I)

Existen 36 Europeos Economistas (II)

$\therefore$ Como son 90 los Economistas, se deduce que:

90 - (30 + 36) = 24 Economistas no son Norteamericanos ni Europeos (III)

Además, de los 64 Norteamericanos:
64 - 30 = 34 no son Economistas (IV)

De los 86 Europeos:
86 - 36 = 50 no son Economistas (V)

Rpta.: 200 - (34 + 30 + 24 + 36 + 50) = 26 no son Norteamericanos, ni Economistas ni Europeos.

17.- De 500 postulantes que se presentaron a las Universidades A o B, 300 se presentaron a la Universidad A, igual número a la Universidad B; el número total de ingresantes fue la mitad del número total de postulantes.

Los no ingresantes se presentaron a la Universidad C; de ellos 90, no se presentaron a A y 130 no se presentaron a B. ¿Cuántos postulantes ingresaron a A y a B?

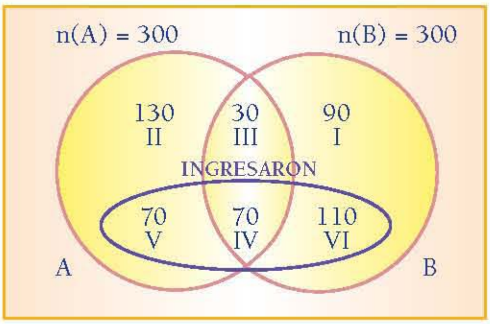
Solución:

Se tiene: $n(A \cup B) = 500$; pero:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$500 = 300 + 300 - n(A \cap B)$$

$\therefore\ n(A \cap B) = 100$

De acuerdo a los datos no ingresaron 500 ÷ 2 = 250 alumnos; de los cuales 90 no se presentaron a la Universidad A, pero sí se presentaron a B (zona I); 130 no se presentaron a B, pero sí se presentaron a A solamente (zona II), de este análisis se deduce que 30 se presentaron a A y B (zona III).



Los que ingresaron:

Como $n(A \cap B) = 100$, de los cuales 30 están en la zona III, se deduce que ingresaron a A y B:

70 alumnos (zona IV)

∴ Ingresaron sólo a A:

300 - (130 + 30 + 70) = 70 (zona V)

Ingresaron sólo a B:

300 - (30 + 90 + 70) = 110 (zona VI)

Rpta.: Ingresaron a A y B: 70 alumnos

18.- A un partido de Básquet de la Universidad del Pacífico (U.P.) asistieron 30 personas. Sobre los asistentes se tiene la siguiente información:

1) De los alumnos de la facultad de economía de la U.P., se sabe que el número de alumnos que no practica deporte es el triple del número de alumnos que sí lo hace.

2) El número de alumnos de la U.P. es el cuádruple del número de alumnos que estudia economía en dicha universidad.

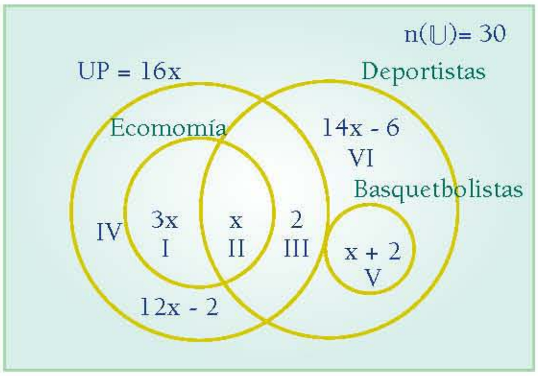
3) Hay dos deportistas que no estudian economía y hay tantos basquetbolistas como alumnos deportistas en la U.P.

4) El número de alumnos de la U.P. que no son deportistas excede en 2 al número de deportistas que no son basquetbolistas.

5) Ningún alumno de la U.P. es basquetbolista.

6) 3alumnos de la U.P. practican deporte. ¿Cuántos no son deportistas ni alumnos de la U.P. ?

Solución:



De (1): Se deduce que el conjunto de alumnos que estudia economía está incluido dentro del conjunto de alumnos de la U.P. y estos conjuntos se intersectan con el conjunto de deportistas; además, el número de alumnos de economía que no practica deporte es el triple del número x de alumnos que si lo hace (I y II en el gráfico).

De (2): Como el número de alumnos de la U.P. es el cuádruple del número de alumnos que estudia economía (4x), entonces:

Número de alumnos de la U.P. = 4 (4 x) = 16 x

De (3): 2 deportistas no estudian economía (zona III); entonces, los que estudian en la U.P. pero no estudian economía ni son deportistas:

$$16x - [3x + x + 2] = 12x - 2 \text{ (zona IV)}$$

Además, el número de basquetbolistas es igual al número de deportistas de la U.P., ésto es:

$$x + 2 \text{ (zona V)}$$

De (4) y (5):

Los basquetbolistas no estudian en la U.P.

Alumnos de la U.P. que no son deportistas: 15x - 2

Por lo tanto, deportistas que no son basquetbolistas:

$$(15x - 2) - 2 = 15x - 4 \qquad (\alpha)$$

Se observa también que el número de alumnos que son deportistas:

$$x + 2 \qquad (\beta)$$

De (α) y (β) se deduce que:

El número de deportistas que no estudian en la U.P. y que no son basquetbolistas es:

$$(15x - 4) - (x + 2) = 14x - 6 \qquad (\gamma)$$
(zona VI)

$\therefore$ No son deportistas, ni alumnos de la U.P.:

$$30 - [16x + 14x - 6 + x + 2] = 34 - 31x \quad (\phi)$$

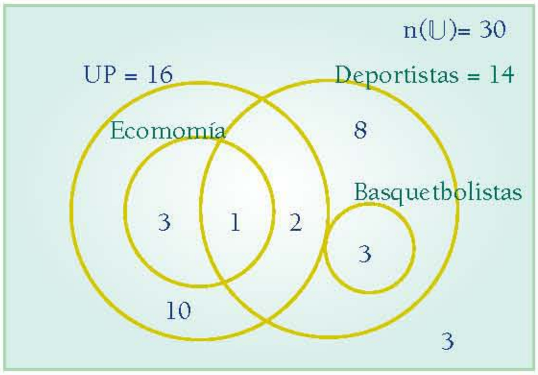
De (6):

Como 3 alumnos de la U.P. practican deporte se deduce que:

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

Rpta.: De (ϕ) : No son deportistas ni alumno de la U.P.: 34 - 31 (1) = 3 personas.

$\therefore$ El gráfico que representa la solución es:



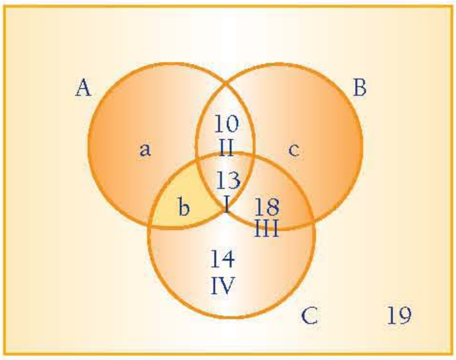
19.- Si A, B, C son subconjuntos de 𝕌 y se sabe que:

$$n(A \cap B \cap C) = 13$$
$$n(A \,\Delta\, B) = 61$$
$$n(A \cap B \cap C') = 10$$
$$n(B \,\Delta\, C) = 52$$
$$n(B \cap C \cap A') = 18$$
$$n(A) = 50$$
$$n(A' \cap B' \cap C) = 14$$
$$n(\mathbb{U}) = 117$$

Hallar: $n\,[(A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C')]$

Solución:

Graficando y colocando los datos aproximadamente, tenemos:



$n(A \cap B \cap C) = 13$ (I)

$n(A \cap B \cap C') = 10$ (II)

$n(B \cap C \cap A') = 18$ (III)

$n(A' \cap B' \cap C) = 14$ (IV)

$n(A \Delta B) = 61 = \{a, b, c, III\}$

$n(B \Delta C) = 52 = \{II, c, b, IV\}$

Dado que $n(A) = 50$, entonces:

$$a + b = 50 - (10 + 13) = 27$$

También: $b + c + 10 + 14 = 52$

luego: $b + c = 52 - (10 + 14) = 28$

Pero: $a + c + b + 18 = 61$

$a + c + b = 43$

como: $a + b = 27 \Rightarrow c = 16$

Sabemos que: $b + c = 28$

como: $c = 16 \Rightarrow b = 12$

Además $n(A \cup B \cup C) = 50 + 16 + 18 + 14 = 98$

$$\therefore\ n(A' \cap B' \cap C') = n(\mathbb{U}) - n(A \cup B \cup C) = 117 - 98 = 19$$

Por otro lado, también vemos que:

$$n(A \cap C \cap B') = \{b\} = 12$$

Rpta.:

$$n[(A \cap C \cap B') \cup (A' \cap B' \cap C')] = 12 + 19 = 31$$

Gráficamente, corresponde al área de color amarillo.

20.- Se define:

$$\otimes = \frac{6x - 5}{3x}\ ; \text{ si } x \in \mathbb{Q}$$

$\otimes = 2x^2$; si $x \notin \mathbb{Q}$

Además: $\boxtimes = \sqrt{x^2 + 16}$

Sean los conjuntos:

$A = \{\otimes / x = \boxed{K}, K \in \mathbb{N}, 2 < K < 5\}$

$B = \{x / 3x \in \mathbb{Z}, 4 \leq 3x < 7\}$

Encontrar:

$$[(A \Delta B) - (B' \Delta A)] \Delta [(B' \Delta A') - (B' - A')]$$

Solución:

En primer lugar, busquemos la forma de expresión por extención, para mostrar los elementos del conjunto A:

$$K = 3; 4$$

Si $K = 3$:

$x = \boxed{3} = \sqrt{3^2 + 16} = 5$; $x = 5 \in \mathbb{Q}$

$$\therefore\ 5 = \frac{6(5) - 5}{3(5)} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

Si $K = 4$:

$x = \boxed{4} = \sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{32} \notin \mathbb{Q}$

$$\therefore \sqrt{32} = 2\,(\sqrt{32})^2 = 64$$

Por lo tanto: $A = \{5/3\ ;\ 64\}$

Para el conjunto B:

$4 \leq 3x < 7 \Rightarrow 3x = 4$ ó 5 ó $6 \Rightarrow x = 4/3$ ó $5/3$ ó 2

$B = \{4/3; 5/3; 2\}$

$B' = \{64\} \wedge A' = \{4/3; 2\}$

De esta manera:

$$[(A \Delta B) - (B' \Delta A)] \Delta [(B' \Delta A') - (B' - A')]$$

$$[\{4/3; 2; 64\} - \{5/3\}] \Delta [\{4/3; 2; 64\} - \{64\}]$$

$$\{4/3; 2; 64\} \Delta \{4/3; 2\}$$

Rpta.: $\{64\}$

21.- Téngase en cuenta las siguientes premisas:

1) Algunos limeños son viudos.

2) Todos los futbolistas no son limeños.

3) Todos los viudos tienen hijos.

4) Ninguno de los que tienen hijos es futbolista.

Además, se conoce los siguientes datos de un grupo de 56 personas:

5) 8 personas no son limeñas ni viudas, pero tienen hijos.

6) Hay 11 futbolistas y el mismo número de viudos.

7) De los 22 limeños, 13 tienen hijos.

8) 5 viudos no son limeños.

Se pide calcular:

a) ¿Cuántos son viudos o tienen hijos?

b) ¿Cuántos no tienen hijos?

c) ¿Cuántos no son limeños y no tienen hijos?

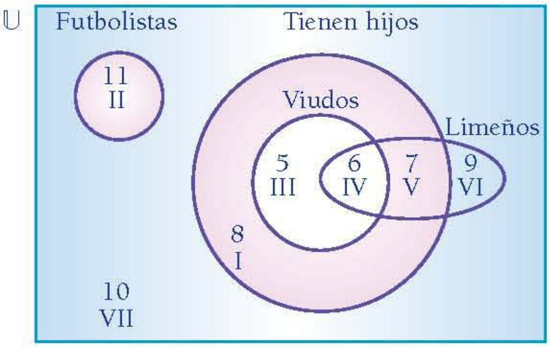
Solución:

Análisis de las premisas:

De las premisas 1 y 2, se deduce que el conjunto de futbolistas y el conjunto de limeños son dos conjuntos disjuntos (no se intersectan).

De las premisas 3 y 4, se deduce que los futbolistas no tienen hijos, ni son viudos; es decir que el conjunto de futbolistas y el conjunto de viudos son disjuntos.

Como todos los viudos tienen hijos; el conjunto formado por los viudos está incluido dentro del conjunto de los que tienen hijos. Con estas conclusiones se puede trazar un diagrama de Venn.



Por otra parte:

i) 8 personas no son limeñas ni viudas, pero tienen hijos (zona I).

ii) Hay 11 futbolistas (zona II) y n(viudos) = 11

iii) 5 viudos no son limeños (zona III)

∴ 6 viudos son limeños (zona IV)

iv) Como 13 limeños tienen hijos,

∴ 7 limeños tienen hijos pero no son viudos (zona V); también, que 9 limeños no tienen hijos (zona VI) y 10 personas no están incluidas en ninguno de los conjuntos (zona VII).

Rpta.:

a) Son viudos o tienen hijos: 5 + 6 + 7 + 8 = 26

b) No tienen hijos: 11 + 9 + 10 = 30

c) No son limeños y no tienen hijos:11 + 10 = 21

22. Todo hincha de un equipo, es simpatizante del mismo; pero lo contrario, no es necesariamente cierto. Además de hecho, el hincha de un equipo ya no puede simpatizar con otro equipo.

En un aula de la Universidad del Pacífico, hay 35 alumnos. Hay más hinchas de Sporting Cristal (SC) que de Alianza Lima (AL), y más de este último equipo que de Municipal (M). Asimismo se sabe que:

12 no simpatizan con ninguno de los mencionados equipos. Hay 2 que simpatizan con los tres equipos; 4, con "AL" y "SC"; 3, con el "M" y "SC".

No hay alumnos que simpaticen solamenete con el "M" y "AL".

De los que no son hinchas, 4 simpatizan con el "M", pero no con el "AL"; 6 con el "M" o "AL", pero no con "SC", y 3 con "SC" pero no con el "M" o "AL".

El número de hinchas del "SC" es menor que el número de alumnos que simpatizan con, por lo menos, dos de los mencionados equipos.

¿Cuántos simpatizan con "AL" o "SC" pero no con el "M"?

Solución:

Se deduce que el conjunto de hinchas de un equipo está incluido dentro del conjunto de simpatizantes del dicho equipo.

También, podemos deducir de la primera parte, que el conjunto de los hinchas de un equipo es disjunto con los conjuntos de simpatizantes de los otros equipos. Con esta información, ya se puede esbozar un diagrama de Venn.

- 12 no simpatizan con los mencionados equipos (zona I).
- Quedan 35-12=23 que son hinchas o simpatizantes.
- 2 simpatizan con los tres equipos (zona II).
- 4 simpatizan con "AL y "SC" (zonas II y III).
- 3 simpatizan con el "M" y "SC" (zonas II y IV).
- Como no hay alumnos que simpaticen solamente con el "M" y "A"; entonces este subconjunto es vacío (zona V).
- De los que no son hinchas: 4 simpatizan con el "M" pero no con "AL" (zonas IV y VI). Además, 6 simpatizan con "AL" o "M" pero no con "SC" (zonas V, VI, VII); y, 3 simpatizan con "SC" pero no con el "M" o "AL" (zona VIII).

Del Universo (35 alumnos), ya se ha ubicado en el gráfico:

12 + 3 + 0 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 = 26 elementos
Falta ubicar: 35 - 26 = 9 elementos.

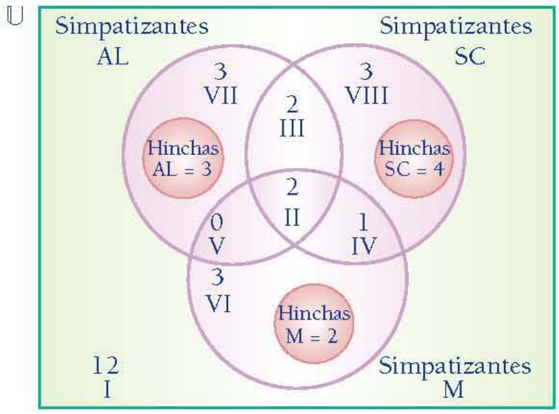
- Los que simpatizan por lo menos con dos equipos son: (2 + 2 + 1 + 0 = 5) (zonas II a V).

  Por lo tanto, los hinchas de "SC" < 5. Como falta ubicar 9 elementos y dado que:

  Hincha "SC" > Hinchas "AL" > Hinchas "M", se deduce que:

  N° de hinchas de "SC" = 4
  N° de hinchas de "AL" = 3
  N° de hinchas de "M" = 2
  Total = 9

n(𝕌) = 35



Rpta.: Del gráfico, podemos inferir que:
3 + 3 + 2 + 4 + 3 = 15 alumnos simpatizan con "AL" o "SC", pero no con el "M".

23.- A una fiesta asistieron 200 personas, de las cuales 60 calzaban zapatos; y el resto, zapatillas. Se observó que algunas tomaban cerveza, pero curiosamente todas las que tomaban cerveza calzaban zapatillas y ninguna mujer tomaba cerveza.

Si 8 tomaban cerveza y el número de hombres que calzaba zapatillas fue el triple del número de mujeres que calzaba zapatillas. ¿Cuántos de los que no tomaban cerveza eran hombres y calzaban con zapatillas?

Solución:

- De la primera parte del enunciado, se deduce que calzaban zapatillas:

  200 - 60 = 140 personas

  ⇒ N° de hombres en zapatillas + N° de mujeres en zapatillas = 140...... (1)

- Sólo hombres tomaban cerveza (todos con zapatillas)
- Por otro lado:

  N° de hombres en zapatillas = 3 (N° de mujeres en zapatillas).........(2)

  De (1) y (2):

  4 (N° de mujeres en zapatillas) = 140

  ⇒ N° de mujeres en zapatillas = 35

∴ N° de hombres en zapatillas = 3 (35) = 105

- Como 8 hombres en zapatillas toman cerveza entonces : 105 - 8 = 97 hombres en zapatillas no toman cerveza.

	Hombres	Mujeres
Calzaban zapatos	60 personas	
Calzaban zapatillas	Toman cerveza 8 No toman cerveza 97	35

n(𝕌) = 200

Rpta.: 97 hombres fueron en zapatillas y no tomaron cerveza.

24.- Una señora sale a pasear todos los días con 2 ó más de sus perritos. Con mucho cuidado procura llevar cada día a un grupo diferente. Si en total tiene 10 perritos, ¿al cabo de cuántos días tendrá que llevar necesariamente a un grupo repetido?

Solución:

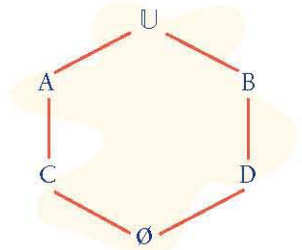
Basta con calcular cuántos subconjuntos se puede forman con 10 elementos unitarios y el nulo o vacío.(conjunto Potencia).

n (subconjuntos de A) = P(A) = 2^{10} = 1 024
De este total, se resta los 10 conjuntos unitarios y el conjunto vacío porque la señora sale con 2 perros o más, nunca con 1.

Por lo que, puede formar 1024 - (10 + 1) = 1 013 grupos.

Rpta.: Llevará un grupo repetido, después de 1 013 días.

25. Dado el siguiente diagrama lineal:



Se verifica además que:

$P(C \cap D) = 1$

$P(A \cap D) = 32$

$n[C \cap B] = 12$

$P(A \cup B)' = 256$

$n[\mathbb{U}] = 48$

Hallar:

a) $n(A \cup B)$

b) $P[(A \cap D) \cap (A - C)]$

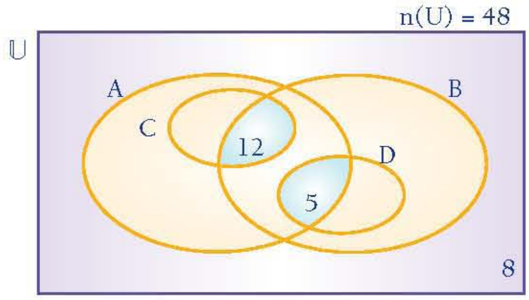
Solución: Como:

$P(C \cap D) = 1 \quad = 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad n(C \cap D) = 0$

$P(A \cap D) = 32 \quad = 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad n(A \cap D) = 5$

$P(A \cup B)' = 256 \quad = 2^8 \quad \Leftrightarrow \quad n(A \cup B)' = 8$

Grafiquemos un diagrama de Venn, en base al diagrama lineal e incluyamos los datos hallados:



Además, podemos establecer que:

$$n(A \cup B) = 48 - 8 = 40$$

y que: $(A \cap D) \cap (A - C) = (A \cap D)$

$\therefore \quad P[(A \cap D) \cap (A - C)] = P(A \cap D) = 32$

Rpta.: a) 40 b) 32

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En una clase de ciencias de 30 alumnos seleccionados, 20 obtuvieron "A" en Matemáticas, 23 obtuvieron "A" en Química, 18 obtuvieron "A" en Física, 15 obtuvieron "A" en Matemática y Química, 12 obtuvieron "A" en Matemática y Física, y 14 obtuvieron "A" en Química y Física. No hubo ninguno sin "A". ¿Cuántos de ellos obtuvieron "A" en los tres cursos?

   Rpta.: 10 alumnos.

2. El resultado de una encuesta sobre preferencia de jugos de frutas de manzana, fresa y piña, es el siguiente: 60% gustan manzana, 50% gustan fresa, 40% gustan piña, 30% gustan manzana y fresa, 20% gustan fresa y piña,15% gustan manzana y piña 5% gustan de los tres.

   ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas no gusta de los jugos de fruta mencionados?

   Rpta.: 10%

3. Una persona come huevos o tocinos en el desayuno cada mañana durante el mes de enero. Si come tocino 25 mañanas y huevos 18 mañanas, ¿cuántas mañanas come huevos y tocino?

   Nota: Las mañanas que come sólo huevos o sólo tocinos o ambos, suman 31.

   Rpta.: 12 mañanas.

4. Cierto número de medallas de oro, plata y bronce es distribuido entre 100 atletas en un festival deportivo. Se sabe que 45 atletas reciben medallas de oro, 45 reciben medallas de plata, 60 atletas reciben medallas de bronce, 15 tanto de oro como de plata, 25 atletas reciben medallas de plata y bronce, 20 reciben medallas de oro y bronce, y 5 reciben medallas de oro, plata y bronce. ¿Cuántos atletas no han recibido ninguna medalla?

   Rpta.: 5

5. En una encuesta de 50 amas de casa, 35 tenían aparato de televisión, 20 tenían recipientes eléctricos para eliminación de desperdicios, 15 tenían radios de alta fidelidad, y 15 tenían simultáneamente aparatos de televisión y recipientes eléctricos para la eliminación de desperdicios, 10 tenían aparato de televisión y radios de alta fidelidad y 12 tenían recipientes eléctricos eliminadores de desperdicios y radios de alta fidelidad. Finalmente, 8 amas de casa tenían los 3 aparatos.

   ¿Cuántas de ellas no tenían ninguno de estos aparatos?

   Rpta.: 9

6. Ciertos datos obtenidos en el estudio de un grupo de 1 000 empleados de una fábrica de algodón referentes a la raza, sexo y estado civil arrojaron los siguientes resultados no oficiales: 322 hombres; 470 casados; 252 personas de color; 42 varones de color; 147 personas de color casadas; 86 varones casados; 25 hombres de color casados. Determinar cuántas personas no son hombres, casados o de color(mujeres blancas solteras).

   Rpta.: 206

7. Supongamos que la clase del primer año de una universidad está formada por 100 estudiantes; de éstos, 40 son mujeres; 73, estudian Historia y 12, son mujeres que no estudian Historia. ¿Cuántos hombres no estudian Historia?

   Rpta.: 15

8. En una reunión de 500 jóvenes, un grupo de 127 está formado por los que hablan español y quechua; y, otro grupo de 29, formado por los que hablan inglés y quechua. Si 140 del total hablan quechua, y 270 hablan, español e ingles aunque no quechua ¿cuántos hablan los 3 idiomas juntos (español-inglés-quechua) si los que hablan quechua, también hablan español e inglés pero nadie habla exclusivamente ingles? Además, ¿cuántos hablan inglés? ¿cuántos solamente español?

   Nota: considerar a los que hablan sólo quechua o solo inglés como subconjuntos nulos(ningún elemento).

   Rpta.: 16; 299; 90

9. En una encuesta a la población se encontró que:

   - El 25% lee el diario "Excelsior"
   - El 18% lee el diario "Imparcial"
   - El 15% lee el diario "Gráfico"
   - El 9% los diarios "Excelsior" e "Imparcial"
   - El 3% los diarios "Excelsior" y "Gráfico"
   - El 8% los diarios "Imparcial" y "Gráfico"
   - El 3% los diarios "Excelsior", "Imparcial" y "Gráfico"

   ¿Cuántos encuestados no leen ningún diario y cuántos encuestados un solo diario?

   Rpta.: 59%; 27%

10. En una encuesta realizada se observa que el 72% son matemáticos; el 52%, físicos; 37%, químicos; 32%, físico-matemáticos; 12%, físico-químicos; 22%, matemático-químicos.

    ¿Qué porcentaje de los encuestados tienen otras carreras si el porcentaje de los que tienen tres carreras(físico-químico-matemáticos)es el 10% de los químicos-matemáticos que no son físicos?

    Rpta.: 3%

11. En una investigación se determina que: 68 se portan bien; 160 son habladores; 138 son inteligentes; 55 son habladores y se portan bien solamente; 48 se portan bien y son inteligentes solamente; 120 son habladores e inteligentes solamente; y, 40 son habladores, inteligentes y se portan bien.

    ¿Cuántos son inteligentes solamente?

    Rpta.: 10

12. A un paseo, en las afueras de la ciudad de Lima, fueron 92 personas; de las cuales:

    - 47 personas llevan sandwich de fiambre
    - 38 de queso

- 42 de jamón
- 28 de queso y fiambre
- 31 de fiambre y jamón
- 26 de queso y jamón
- 25 personas llevan los 3 tipos de sandwich

¿Cuántos llevaron empanadas, si se sabe que varios llevaron empanadas pero ninigun otro tipo de sandwich más?

Rpta.: 25

13. El director de un instituto ha reportado los siguientes datos estadísticos acerca de un grupo de 30 estudiantes:

- 18 toman el curso de matemática
- 17 toman el curso de música
- 11 toman el curso de historia
- 12 toman los cursos de matemática y música
- 7 toman los cursos de matemática e historia
- 5 toman los cursos de música e historia
- 2 toman los cursos de matemática, historia y música.

¿Cuántos estudiantes toman historia pero no toman matemática?¿Cuántos no estudian ninguno de los tres cursos mencionados?

Rpta.: 4 y 6

14. En un edificio de departamentos se sabe que en el 1er. piso vive el 20% de las familias, de las cuales la mitad tiene refrigeradora. En el 2do piso vive el 40% de las familias y la mitad tiene refrigeradora. En el 3er. piso vive el 30% de las familias y la tercera parte tiene refrigeradora; y, en el 4to. piso vive el 10%, de las cuales ninguna tiene refrigeradora. Se pregunta:

a) Entre familias con refrigeradora, ¿qué porcentaje vive en el 2do. piso?

b) Si se sabe que en dicho edificio viven 60 familias, ¿cuántas de las que viven en el 2do. piso tienen refrigeradora?

c) En todo el edificio, ¿cuántas familias cuentan con refrigeradora?

Rpta.: a) 50% b) 12 c) 24

15. En una encuesta realizada en un grupo de 100 estudiantes de un instituto de idiomas, se obtuvo el siguiente resultado:

- 28 estudiaban español
- 30 estudiaban alemán
- 42 estudiaban francés
- 8 estudiaban español y alemán
- 10 estudiaban español y francés
- 6 estudiaban alemán y francés
- 3 estudiaban alemán, francés y español

Se pregunta:

a) ¿Cuántos estudiaban francés como único idioma?

b) ¿Cuántos no estudiaban ninguno de los tres idiomas: alemán, francés o español?

Rpta.: a) 29 b) 21

16. En una biblioteca había 17 personas, de las cuales: 6 leyeron la revista "A"; 9, la revista "B"; y, 6 leyeron ambas revistas, ¿cuántos no leyeron ninguna revista?

Rpta.: 8

17. En un grupo de 100 alumnos, 49 no llevan el curso de sociología y 53 no siguen el curso de filosofía. Si 27 alumnos no siguen filosofía ni sociología, ¿cuántos estudian exactamente uno de tales cursos?

Rpta.: 48

18. En una encuesta a un pueblo de 5 000 habitantes se comprobó que:

- 2 000 personas fuman cigarrillos "Norton"
- 1 200 personas fuman cigarrillos "LM"

- 200 personas fuman cigarrillos "Arizona" y "LM"
- 500 personas fuman cigarrillos "Norton" y "Arizona"
- 100 personas fuman cigarrillos "Norton", "Arizona" y "LM"

¿Cuántas personas no fuman ninguna de las 3 marcas de cigarrillos?

Rpta.: Informción insuficiente

19. Dados los siguientes operadores:

$$\otimes = \begin{cases} 2x + 3, \text{ si x es par} \\ x + 2, \text{ si x es impar} \end{cases}$$

$$\boxtimes = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, \text{ si x es impar} \\ 2x, \text{ si x es par} \end{cases}$$

Sea:

$$A = \left\{ 2x / x = \boxed{K}, K \in \mathbb{N}, K < 7 \right\}$$

$$B = \left\{ \boxtimes . (2x + 1)/x = \boxed{K}, K \in \mathbb{N}, K < 6 \right\}$$

Hallar: (A' Δ B'), (A Δ B), ¿qué se puede afirmar de ambos resultados?

Nota: Observar que, para A, K va de 0 a 6; mientras que para B, K va de 0 a 5.

De esta forma:

A = {7, 11, 15, 23, 31}

B = {7, 22, 45, 115}

Rpta.: {11, 15, 22, 23, 31, 45, 115}, son iguales.

20. Se entrevistó a un grupo de personas acerca de su preferencia por las marcas de cigarrillos A, B o C; obteniéndose los siguientes resultados:

- 2 no fuman ni A, ni B, ni C
- 2 fuman A, B y C
- 7 sólo fuman C
- 5 sólo fuman B
- 16 fuman B o C pero no A
- 14 fuma A o B pero no C
- 10 fuman A y C
- 3 fuman A y B pero no C

Según los datos anteriores y respecto a las marcas mencionadas:

a) ¿Cuántos fuman 1 sola marca de cigarrillos?

b) ¿Cuántos fuman 2 marcas o más?

c) ¿Cuántos no fuman A o B?

d) ¿Cuántos fuman A y B ?

e) ¿Cuántos de los que fuman A o C no fuman A y C?

Rpta.: a) 18 b) 17 c) 9 d) 5 e) 20

21. En una clase de 40 alumnos, se tomó cuatro pruebas. Los cursos fueron: aritmética, historia, álgebra y lenguaje. Todos los que aprobaron aritmética, historia y álgebra, también aprobaron lenguaje.

- 10 alumnos aprobaron los 4 cursos.
- 2 alumnos aprobaron sólo historia y lenguaje.
- 3 alumnos aprobaron álgebra y lenguaje pero no aritmética ni historia.
- 4 aprobaron lenguaje y aritmética pero no historia ni álgebra.
- 10 aprobaron lenguaje pero no álgebra.
- 8 aprobaron lenguaje pero no aritmética.
- 2 aprobaron aritmética y álgebra pero no lenguaje.
- Un alumno aprobó aritmética e historia pero no lenguaje.
- 15 aprobaron historia y álgebra.
- 6 no aprobaron ninguno de los exámenes.
- Ningún alumno aprobó lenguaje solamente.

¿Cuántos aprobaron lenguaje?

Rpta.: 26

22. Sean los siguientes conjuntos:

$A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

$B = \{x/x \in \mathbb{N}, 2 < x < 6\}$

$C = \{x/x \in \mathbb{N}, 3 < x < 8\}$

$\mathbb{U} = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 11\}$

Donde $\mathbb{U}$ es el conjunto universal.

Además, se define los operadores * y $\Leftrightarrow$, válidos para 3 conjuntos cualesquiera, verificando que:

$M*N*P = (M'- P) \cup (N' - M) \cup (P' - N)$

$M \Leftrightarrow N \Leftrightarrow P = (M \cap N) \cup (N \cap P) \cup (P \cap M)$

Siendo M, N, P tres conjuntos cualesquiera se le pide obtener:

$(A*B*C) \cup (A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C)$

Rpta.: $\mathbb{U} = \{4, 5\}$

23. Si $\boxed{n} = n^2 - n$; $\otimes = \begin{cases} x \ ; \ \text{si } x \le 0 \\ x - 1; \text{si } x > 0 \end{cases}$

Se define los conjuntos:

$A = \{ x - 2 / x \in \mathbb{N}, x \le 2 \}$

$B = \{\otimes / x \in \mathbb{Z}, -4 \le x < -2 \vee 2 \le x < 4\}$

$C = \{\otimes / x = \boxtimes , x \in \mathbb{Z}, x < 5 \wedge x > -5\}$

$\mathbb{U} = \{x / x \in \mathbb{Z}, -4 \le x \le 20\}$

Además, se define los operadores * y Δ, válidos para tres conjuntos cualquiera. Así, se verifica que:

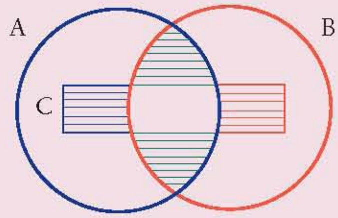
$M * N * P = (M' \cap P) \cup (N' \cap M) \cup (P' \cap N)$

$M \Delta N \Delta P = (M \cap N)' \cap (N \cap P)' \cap (P \cap M)'$

Obtener: $(A * B * C) \cap (A \Delta B \Delta C)$

Rpta.: $\{-4, -3, -2, -1, 2, 5, 11, 19\}$

24. Si:



Si:

$(A \cup B)' = \emptyset$

$n(A) = 10$

$n(B) = 12$

$n(C) = 9$

$n(A \cup B) = 18$

$n(A \cap B \cap C) = 2$

Determinar el número de elementos del área sombreada.

Rpta.: 9

25. A un evento deportivo asistieron, entre el público, 31 hinchas del equipo local. Se constató además que, entre el público, habiá 40 zurdos; y, entre los hinchas, 10 zurdos.

El precio de cada boleto para entrar era de S/. 10.

Sin embargo, estaban vigentes los siguientes descuentos: S/. 5 para los zurdos hinchas del equipo local, S/. 2 para aquellos zurdos que no eran hinchas, y S/. 7 para diestros que sí eran hinchas. Los diestros no hinchas no tenían descuentos.

Si se recaudó S/.403, en total.

¿cuántos diestros que no eran hinchas del equipo local asistieron?

Rpta.: 5

RELACIONES BINARIAS

INTRODUCCIÓN

Cuando decimos:

"3 + 7 es igual a 10"
"π es menor que 9"
"28 es divisible por 7"
"4 es la raíz cuadrada de 16"

Estamos señalando o expresando RELACIONES de comparación, entre los elementos de un conjunto de números.

Cada caso es un par ordenado que obedece ciertas condiciones. Las condiciones que debe cumplirse para relacionar dos elementos deben ser muy claras y precisas. Sin par ordenado no existe relación.

Ejemplos:

i) Sean los conjuntos A y B:

$A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$

El producto cartesiano de estos conjuntos es:

$A \,.\, B = \{(3; 1), (3; 3), (3; 5), (3; 7), (4; 1), (4; 3), (4; 5), (4; 7), (5; 1), (5; 3), (5; 5), (5; 7)\}$

Establezcamos condiciones para relacionar pares de este conjunto. Se formará subconjuntos con las características precisas siguientes:

Caso 1:

Que los primeros elementos sean iguales a los segundos. De este modo: (3; 3) y (5; 5) son dos pares ordenados que configuran una relación "$\Re$" de pares ordenados cuyos elementos son iguales y están incluidos en el producto A . B; es decir, forman un subconjunto del producto A . B. Luego, $\Re = \{(3; 3), (5; 5)\}$ es una relación de A en B.

Caso2:

Que los primeros elementos sean mayores que los segundos. De la misma forma: (3; 1), (4; 1), (4; 3), (5; 1), (5; 3) son 5 pares ordenados que cumplen o configuran otra relación "$\Re$", con las características señaladas: primer elemento es mayor que el segundo y están incluidos en el producto cartesiano A . B, formando el subconjunto:

$\Re = \{(3; 1), (4; 1), (4; 3), (5; 1), (5; 3)\}$
que es una relación de A en B.

Caso3:

Que los primeros elementos sean menores que los segundos lo cual cumplen: (3; 5), (3; 7), (4; 5), (4; 7), (5; 7) que son 5 pares ordenados, también configuran una relación "$\Re$" y forman un subconjunto que está incluido en el conjunto del producto cartesiano A . B

$\Re = \{(3; 5), (3; 7), (4; 5), (4; 7), (5; 7)\}$
que es una relación de A en B.

ii) Un estudiante de Biología, a fin de investigar la RELACIÓN entre el aumento de peso y la edad de los pavos, pesa un pavo cada mes, desde el momento en que nace hasta que adquiere un máximo desarrollo.

La tabla que sigue indica las edades, en meses, y los pesos aproximados correspondientes a esas edades, expresado en kilogramos.

Edad en Meses	recién nacido	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Peso en Kg.	0,1	0,6	2,1	4,0	6,2	8,4	10,6	12,7	14,6	14,8

La tabla indica un conjunto de "parejas ordenadas" de números, el primero de los cuales es la edad y el segundo el peso; habiéndose formado una relación ordenada entre los dos números de cada pareja.

DEFINICIÓN DE RELACIÓN

Se llama RELACIÓN a cualquier subconjunto de parejas ordenadas formadas por los elementos de dos conjuntos A y B. También: se llama RELACIÓN de A en B a todo subconjunto del producto cartesiano A . B.

NOTACIÓN

Dados dos conjuntos A y B, la relación de un elemento "a" del conjunto A con un elemento "b" del conjunto B, se denota así:

$$a \, \Re \, b \quad ó \quad (a, b) \in \Re$$

Que se lee: "a está relacionada con b".

Puesto que las relaciones vinculan elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B, formando pares ordenados, la RELACIÓN también puede escribirse simbólicamente de la siguiente manera:

$$\Re \text{ es una relación de A en B} \Leftrightarrow \Re \subset A \, . \, B$$

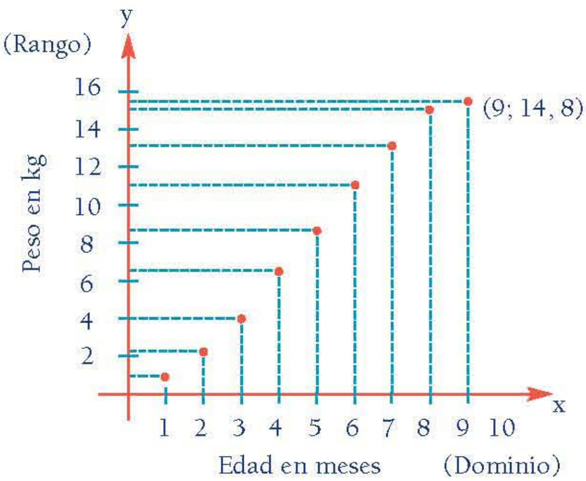
Es decir "$\Re$ es una relación de A en B, si y solamente si la relación $\Re$ es un subconjunto de A . B"

Nótese que si $\Re$ es una relación de A en A, se dice que $\Re$ está definida en A.

El experimento del estudiante de Biología, visto anteriormente, consta de 10 pares ordenados, representando la relación $\Re$ contenida en el conjunto: A (edad) . B (peso):

$$\Re = \{(0; 0{,}1); (1; 0{,}6); (2; 2{,}1); (3; 4{,}0); (4; 6{,}2); (5; 8{,}4); (6; 10{,}6); (7; 12{,}7); (8; 14{,}6), (9; 14{,}8)\}$$

Este conjunto de pares ordenados* se puede graficar en un Sistema de Ejes Coordenados; de esta manera, se representa en la línea horizontal las edades (elementos del conjunto A) y en la línea vertical los pesos (elementos del conjunto B). Cada una de las parejas es un punto en el gráfico y un par ordenado, al mismo tiempo.



También se usa el punto y coma (;) para separar los elementos del par ordenado y evitar confusión con la coma decimal.

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO es el conjunto formado por los primeros componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$ y se denota: Dom ($\Re$).

En el ejemplo sobre el estudiante de Biología:

$$\text{Dom } (\Re) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

RANGO es el conjunto formado por los segundos componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$, y se denota: Ran ($\Re$).

En el ejemplo del estudiante de Biología:

$$\text{Ran } (\Re) = \{0{,}1; 0{,}6; 2{,}1; 4{,}0; 6{,}2; 8{,}4; 10{,}6; 12{,}7; 14{,}6; 14{,}8\}$$

Ejemplo: Dados los conjuntos:

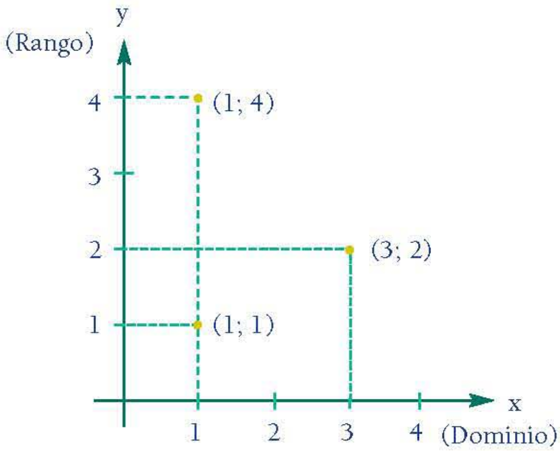
$$A = \{1; 2; 3\} \quad y \quad B = \{1; 2; 3; 4\}$$

Graficar en un sistema de ejes coordenados los pares (1; 1), (3; 2) y (1; 4), pertenecientes a A . B, y hallar su dominio y rango.

Solución:

Se trata de la relación: $\Re = \{(1; 1), (3; 2), (1; 4)\}$

El gráfico es el siguiente:



El dominio es el conjunto de los primeros elementos de cada par, y el rango es el conjunto de los segundos elementos de cada par en la relación $\Re$. Por lo tanto:

$$\text{Dom } (\Re) = \{1; 3\}$$

$$\text{Ran } (\Re) = \{1; 2; 4\}$$

DIAGRAMA SAGITAL

Es una representación de la relación $\Re$ en el diagrama de Venn, uniendo los pares ordenados mediante flechas.

Ejemplos:

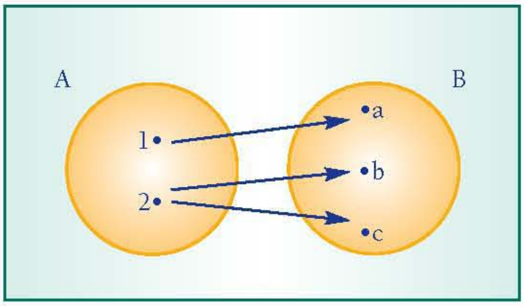
i) Sean los conjuntos:

$$A = \{1; 2\} \quad y \quad B = \{a, b, c\}$$

Considerando una relación de A en B, tal como:

$$\Re = \{(1, a); (2, b); (2, c)\}$$

Su diagrama sagital será:



Donde: Dom = {1; 2} y Ran = {a,b,c}

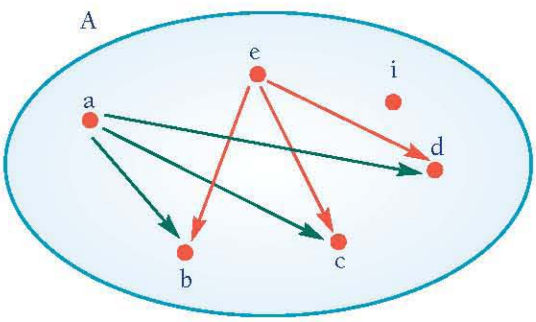
ii) Sea el conjunto:

$$A = \{a, e, i, b, c, d\}$$

Si se define en el conjunto A, la relación: " El primer componente una vocal fuerte y el segundo componente una consonante", entonces:

$$\Re = \{(a,b), (a,c), (a,d), (e,b), (e,c), (e,d)\}$$

El diagrama sagital correspondiente es, simplemente:



PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE ELEMENTOS EN UN CONJUNTO

Hay cuatro tipos de relación entre los elementos de un mismo conjunto: Reflexiva, Simétrica, Transitiva y de Equivalencia (ésta última engloba a las anteriores).

PROPIEDAD REFLEXIVA

"$\Re$ es un relación reflexiva si todos los elementos del conjunto A están relacionados consigo mismo, a través de $\Re$".

Simbólicamente, se denota así:

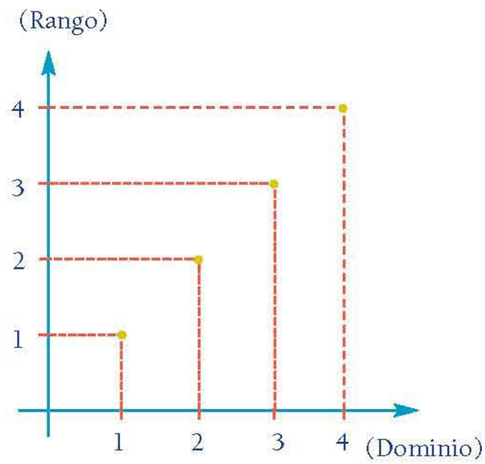
$$\Re \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow (a, a) \in \Re \ \forall \ a \in A$$

Ejemplos:

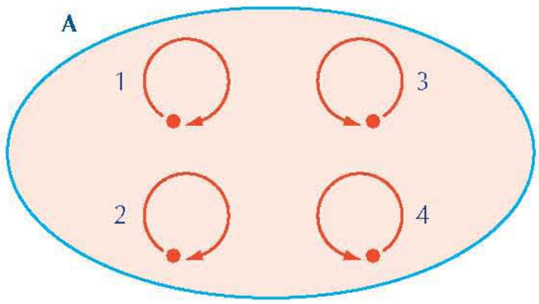
i) Sea el conjunto: A = {1; 2; 3; 4}

Si la relación está expresada por:

$$\Re = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$$

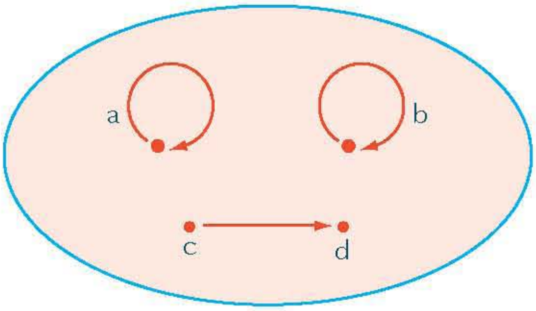


El diagrama sagital correspondiente es:



ii) Decir si la relación $\Re$ es o no reflexiva.

$$\Re = \{(a, a); (b, b); (c, d)\}$$



Esta relación no es reflexiva, porque el par ordenado (c,d) no cumple la relación: "consigo mismo".

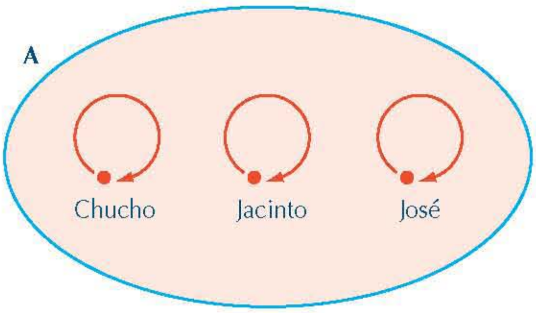
iii) Sea el conjunto:

$$A = \{ \text{Chucho, Jacinto y José} \}$$

y una relación en A, definida por "le gusta jugar consigo mismo". Entonces, la relación corresponde al siguiente conjunto:

$\Re$ = {(Chucho, Chucho), (Jacinto, Jacinto), (José, José)}

Que se puede graficar en un diagrama sagital como sigue:



PROPIEDAD SIMÉTRICA

"$\Re$ es una relación Simétrica si siempre que un elemento del conjunto A está relacionado con otro del mismo conjunto a través de $\Re$, este último, a su vez, está relacionado con el primero a través de $\Re$".

Simbólicamente se denota así:

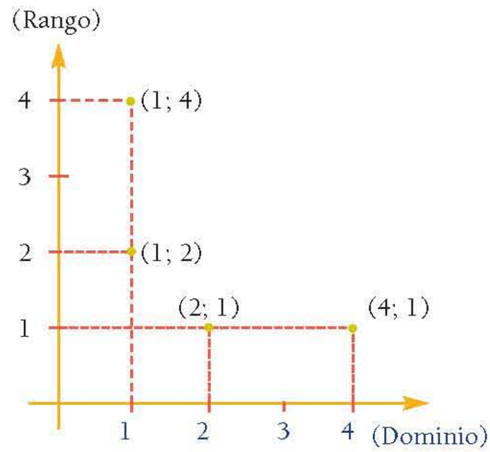
$$\Re \text{ es simétrica} \Leftrightarrow (a, b) \in \Re \wedge (b, a) \in \Re$$

Ejemplos:

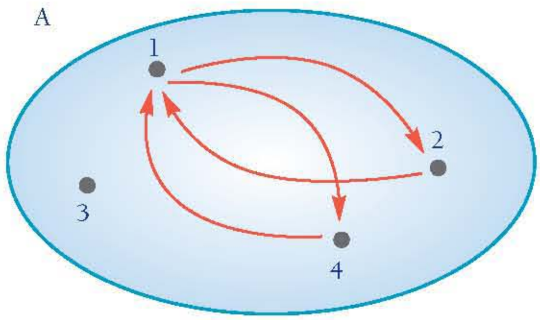
i) Sea el conjunto: $A = \{ 1; 2; 3; 4 \}$ y la siguiente relación simétrica:

$$\Re = \{(1; 2), (2; 1), (1; 4), (4; 1)\}$$

Que puede ser representada en el plano de ejes coordenados como sigue:

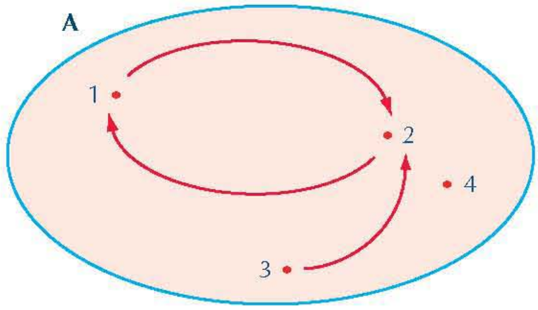


La relación R también se puede graficar sagitalmente como:



Por otro lado la relación:

$$\Re = \{(1; 2),\ (2; 1),\ (3; 2)\}$$



No es simétrica porque: $(3; 2) \in \Re$ pero $(2; 3) \notin \Re$.

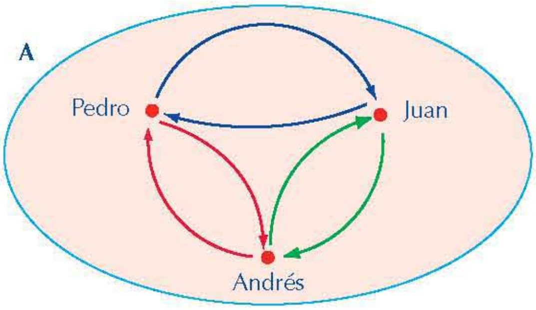
ii) Sea el conjunto: A = {Pedro, Juan, Andrés}

Se ha establecido una relación de simetría $\Re_1$ en A, definida por "viven en el mismo barrio".

$\Re_1$ = {(Pedro, Juan), (Juan, Pedro), (Pedro, Andrés), (Andrés, Pedro), (Juan, Andrés), (Andrés, Juan)}

Es decir, Pedro "vive en el mismo barrio que" Juan, entonces Juan "vive en el mismo barrio que" Pedro; Pedro "vive en el mismo barrio que" Andrés, luego Andrés "vive en el mismo barrio que" Pedro; Juan vive en el mismo barrio que" Andrés, luego Andrés "vive en el mismo barrio que" Juan.

En un diagrama sagital:



PROPIEDAD TRANSITIVA

"$\Re$ es una relación transitiva cuando siempre que un elemento del conjunto A está a su vez relacionado con otro, y éste está relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero, a través de $\Re$".

Simbólicamente, se denota así:

$$\text{Si } (a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re \Rightarrow (a, c) \in \Re$$

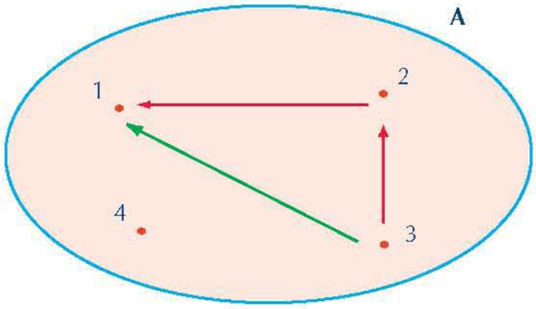
Ejemplos:

i) Sea el conjunto A = {1; 2; 3; 4}

Y una relación en A definida como: "es mayor que". Entonces:

$$\Re_1 = \{(3; 2), (2; 1), (3; 1)\}$$

En el diagrama sagital:



Nótese que el elemento "3" está relacionado con el elemento "1" de dos maneras; una directa y otra, indirecta.

Sin embargo la relación:

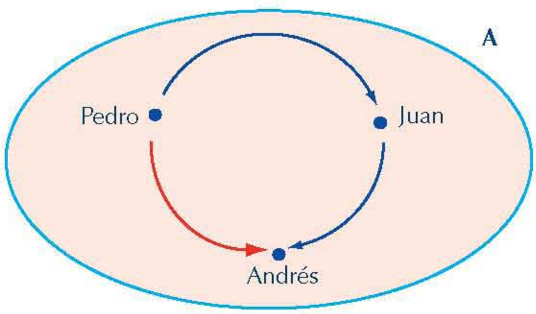
$$\Re_2 = \{(4; 2), (2; 1), (4; 1), (3; 4)\}$$

No es transitiva, porque el par ordenado $(3; 4) \in \Re_2$, $(4; 2) \in \Re_2$, pero $(3; 2) \notin \Re_2$.

ii) Sea el conjunto: A = {Pedro, Juan, Andrés}
Y, una relación transitiva en A, definida como: "juega por el mismo equipo que".

$\Re$ = {(Pedro, Juan), (Juan, Andrés), (Pedro, Andrés)}

Que, en el diagrama sagital se grafica como sigue:



RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

"$\Re$ de A en A es una relación de Equivalencia, cuando es reflexiva, simétrica y transitiva simultáneamente".

Ejemplo:

Sea: $\Re$ = {Pedro, Juan, Andrés}; pasajeros de un avión. Se cumple que $\Re$:

1) Es reflexiva porque cada uno paga su pasaje.

2) Es simétrica porque "Pedro"viaja en el mismo avión que "Juan" y "Juan" viaja en el mismo avión que "Pedro".

3) Es transitiva, porque si Pedro viaja con Juan y Juan viaja con Andrés; entonces, Pedro viaja con Andrés.

NOTA

- La igualdad de números naturales cumple una relación de equivalencia.
- La congruencia de triángulos mantiene una relación de equivalencia.
- La relación "menor" para números naturales no tiene una relación de equivalencia; no es reflexiva ni simétrica.
- La relación "amigo de" no tiene una relación de equivalencia; no es "rigurosamente" transitiva (Los amigos de mis amigos no necesariamente son mis amigos).

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el dominio y rango de las relaciones en A:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$
$$\Re_1 = \{(x, y) \in A . A \,/\, x + y = 7\}$$
$$\Re_2 = \{(x, y) \in A . A \,/\, x + y \leq 4\}$$

Solución:

$\Re_1 = \{(2; 5), (3; 4), (5; 2), (4; 3)\}$

$\Re_2 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1) ((2; 2), (3; 1)\}$

Rpta.:

Dom ($\Re_1$) = {2; 3; 4; 5} y Ran ($\Re_1$) = { 2; 3; 4; 5}

Dom ($\Re_2$) = {1; 2; 3} y Ran ($\Re_2$) = {1; 2; 3}

2.- Dado el conjunto:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

y las relaciones:

$\Re_1 = \{(1; 1), (1; 2), (4; 3), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2)\}$

$\Re_2 = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 3), (1; 2), (1; 3)\}$

Establecer si son o no transitivas.

Solución:

En $\Re_1$ tenemos:

$(1; 1) \in \Re_1 \wedge (1; 2) \in \Re_1 \Rightarrow (1; 2) \in \Re_1$

$(1; 2) \in \Re_1 \wedge (2; 2) \in \Re_1 \Rightarrow (1; 2) \in \Re_1$

$(4; 3) \in \Re_1 \wedge (3; 1) \in \Re_1 \Rightarrow (4; 1) \in \Re_1$

$(3; 1) \in \Re_1 \wedge (1; 1) \in \Re_1 \Rightarrow (3; 1) \in \Re_1$

$(3; 1) \in \Re_1 \wedge (1; 2) \in \Re_1 \Rightarrow (3; 2) \in \Re_1$

$(4; 1) \in \Re_1 \wedge (1; 1) \in \Re_1 \Rightarrow (4; 1) \in \Re_1$

$(4; 1) \in \Re_1 \wedge (1; 2) \in \Re_1 \Rightarrow (4; 2) \in \Re_1$

$(4; 2) \in R_1 \wedge (2; 2) \in R_1 \Rightarrow (4; 2) \in R_1$

$(3; 2) \in \Re_1 \wedge (2; 2) \in \Re_1 \Rightarrow (3; 2) \in \Re_1$

Rpta.: $\Re_1$ es transitiva.

En $\Re_2$ tenemos:

$(2, 1) \in \Re_2 \wedge (1; 3) \in \Re_2$, pero $(2; 3) \notin \Re_2$, por lo que no se cumple la propiedad transitiva.

Rpta.: $\Re_2$ no es transitiva.

3.- Para el conjunto: A = {1; 3; 5}

definimos la relación:

$$\Re = \{(1;1), (3;3), (5;5), (1;3), (3;1)\}$$

verificar si es de equivalencia.

Solución:

En $\Re$ notamos que:

a) Tiene entre sus elementos a todos los pares de la forma (x, x), donde $x \in A$. Por lo tanto $\Re$ es REFLEXIVA.

b) Tiene como elementos dos pares de la forma (x, y), (y, x); donde $x \in A \wedge y \in A$. Por lo tanto, $\Re$ es SIMÉTRICA.

c) $\Re$ también es TRANSITIVA, dado que:

$(1; 1) \in \Re \wedge (1; 3) \in \Re \Rightarrow (1; 3) \in \Re$

$(3; 3) \in \Re \wedge (3; 1) \in \Re \Rightarrow (3; 1) \in \Re$

$(1; 3) \in \Re \wedge (3; 1) \in \Re \Rightarrow (1; 1) \in \Re$

$(3; 1) \in \Re \wedge (1; 1) \in \Re \Rightarrow (3; 1) \in \Re$

$(3; 1) \in \Re \wedge (1; 3) \in \Re \Rightarrow (3; 3) \in \Re$

$\therefore$ $\Re$ es una relación de equivalencia.

4.- Sea $B = \{1; 2; 3; 4\}$ y las relaciones:

$$\Re_1 = \{(x,y) \in B . B / y = x\}$$
$$\Re_2 = \{(x,y) \in B . B / y < x\}$$
$$\Re_3 = \{(x,y) \in B . B / x < y\}$$

Hallar: $n(\Re_3) + n(\Re_2) - n(\Re_1)$

Solución:

Conviene escribir todas las relaciones por extensión, con la finalidad de averiguar su cardinal:

$\Re_1 = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$
$\Rightarrow \quad n(\Re_1) = 4$

$\Re_2 = \{(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$
$\Rightarrow \quad n(\Re_2) = 6$

$\Re_3 = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$
$\Rightarrow \quad n(\Re_3) = 6$

$\therefore\ n(\Re_3) + n(\Re_2) - n(\Re_1) = 6 + 6 - 4 = 8$

Rpta.: 8

5.- Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 9\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 / y = x^2\}$$
$$S = \{(x, y) \in A^2 / y = 2x\}$$
$$T = \{(x, y) \in A^2 / x < 4 \wedge y > 7\}$$

Hallar $n(R) + n(S) + n(T)$

Solución:

Por conveniencia, expresamos los conjuntos por extensión:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Si $y = x^2$:

$R = \{(0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)\}$
$\Rightarrow n(R) = 4$

Si $y = 2x$:

$S = \{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$
$\Rightarrow n(S) = 5$

Si $x < 4 \wedge y > 7$:

$T = \{(0; 8), (1; 8), (2; 8), (3; 8), (0; 9), (1; 9), (2; 9), (3; 9)\}$
$\Rightarrow n(T) = 8$

$\therefore\ n(R) + n(S) + n(T) = 4 + 5 + 8 = 17$

Rpta.: 17

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\Re = \{(x,y) \in \mathbb{N} . \mathbb{N} / x + y = 6\}$

Hallar el número de elementos del rango de la relación $\Re$.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

2. Dada la relación:

$$\Re = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x + y = 5\}$$

Hallar: Dom $(\Re) \cap$ Ran $(\Re)$

a) $\{2; 3; 4\}$ b) $\{1; 2; 3; 4\}$

c) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ d) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

e) $\{1; 4\}$

3. Sea la relación $\Re$ definida en los números naturales por:

$$\Re = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / x + 3y = 12\}$$

Determinar:

$$\text{Ran}(\Re) - \text{Dom}(\Re)$$

a) $\{6; 9; 12\}$ b) $\{2; 3; 4\}$

c) $\{2; 4\}$ d) $\{1; 2; 4\}$

e) $\{3; 6; 9\}$

4. Si $\Re = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x + 5y = 15\}$

Hallar el número de elementos de

Ran ($\Re$) $\cap$ Dom ($\Re$).

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

5. Sea A = {-2; -1; 0; 1; 2}

Si $\Re = \{(x,y) \in A^2 / x^2 + y^2 = 5\}$

Hallar: Dom ($\Re$) - Ran ($\Re$)

a) A b) {-1; 2} c) $\varnothing$

d) {0} e) {-2; 1, -1; 2}

6. Si: $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 = x\}$

$\Re = \{(x; y) \in A^2 / y^2 = x^2\}$

Entonces, n ($\Re$) es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

7. Si $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 1\}$

¿Cuántas relaciones diferentes de A en B existen?

a) 2 b) 6 c) 36

d) 64 e) Ninguna de las anteriores

8. Si el número de elementos del conjunto A es 9 y el número de elementos del conjunto B es 10. ¿Cuál es el número de elementos del conjunto potencia de A . B?

a) 90 b) 90^2 c) 2^{90}

d) 2^{19} e) Ninguna de las anteriores

9. Sea B = {1; 2; 3; 4} y las relaciones:

$\Re_1 = \{(x, y) \in B . B / y = x\}$

$\Re_2 = \{(x, y) \in B . B / y < x\}$

$\Re_3 = \{(x, y) \in B . B / x < y\}$

Hallar: $n(\Re_3) + n(\Re_2) - n(\Re_1)$

a) 12 b) 6 c) 4 d) 8 e) 10

10. Sea: $A = \{x \in \mathbb{N} / -4 \leq x < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 2\}$

Se define la relación $\Re$ siguiente:

$\Re = \{(x, y) \in B . A / 2x < y\}$

Hallar n ($\Re$).

a) 0 b) 9 c) 8

d) 7 e) N. A.

11. Se define las relaciones:

$\Re_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (3, d), (4, d)\}$

$\Re_2 = \{(a, 2), (c, 3), (c, 4), (d, 1)\}$

$(x, y) \in \Re_3 \Leftrightarrow (x, z) \in \Re_1 \wedge (z, y) \in \Re_2$

Hallar: Ran ($\Re_3$) - Dom ($\Re_3$)

a) {1; 2} b) {2} c) {1; 2; 3}

d) {1; 2; 3; 4} e) $\varnothing$

12. ¿Cuáles de las relaciones siguientes son de equivalencia?

I. La relación de igualdad para conjuntos.

II. La relación de perpendicularidad para rectas en el plano.

III. La relación menor para números naturales.

a) Todas b) Sólo I c) Sólo I y II

d) Sólo I y II e) Sólo III

13. Sea $\Re = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x, y \text{ es par}\}$

Se afirma lo siguiente:

I. $\Re$ es reflexiva

II. $\Re$ es simétrica

III. $\Re$ es transitiva

¿Qué afirmaciones son verdaderas?

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III

d) II y III e) I, II y III

14. Consideramos las siguientes relaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$\Re = \{(2; 3), (4; 6), (9; 3), (5; 13), (8; 9)\}$

$S = \{(2; 4), (4; 6), (8; 9), (6; 4), (5; 12)\}$

¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. $(2; 3) \in (\Re \cap S)$

II. $(4; 6) \notin (\Re \cap S)$

III. $(5; 13) \in (\Re - S)$

IV. $S \subset (\Re \cup S)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

15. Sea el conjunto $T = \{2; 3; 4\}$

Si: $\Re_1 = \{(x, y) \in T^2 / y \leq x\}$

$\Re_2 = \{(x, y) \in T^2 / y = x\}$

$\Re_3 = \{(x, y) \in T^2 / y - x - 1 = 0\}$

Hallar el valor de:

$$n(\Re_1) + n(\Re_2) - n(\Re_3)$$

a) 11 b) 9 c) 8 d) 7 e) 4

16. Sea $\Re_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - 2x = y \wedge 0 < x < 5\}$

Si p es la suma de los elementos del dominio de $\Re_1$, y q la suma de los elementos del dominio de $\Re_2$, donde:

$$\Re_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / (y, x) \in \Re_1\}$$

Hallar el valor de: $22\dfrac{p}{q}$

a) 22 b) $\dfrac{78}{5}$ c) 15

d) 20 e) N. A.

17. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 \leq 16, x \neq 0\}$

Se define la relación:

$$\Re = \{(x,y) \in A^2 / x = y \ \text{v} \ x + y = 3\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. $\Re$ es reflexiva

II. $\Re$ es simétrica

III. $\Re$ es transitiva

a) Sólo I y II b) Sólo I y III c) Todas

d) Sólo I e) N. A.

18. Sea $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$\Re_1 = \{(x, y) \in A^2 / y - x - 2 = 0\}$

$\Re_2 = \{(x, y) \in A^2 / y - x^2 = 0\}$

Hallar la suma de todos los elementos de los pares ordenados comunes a $\Re_1$ y $\Re_2$

a) 6 b) 4 c) 0

d) 3 e) N. A.

19. Si $A = \{2; 3; 5; 8; 10; 12\}$

$\Re_1 = \{(x,y) \in A \,.\, A / x$ es número par $\wedge\ x = y\}$

$\Re_2 = \{(x,y) \in A \,.\, A / x = 2y + 2\}$

¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son falsas?

I. $\Re_1$ tiene 9 elementos.

II. $\Re_2$ tiene 4 elementos.

III. $\Re_1 \cap \Re_2 = \varnothing$

IV. $\Re_1$ no es simétrica

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

20. Se define los conjuntos A, B y C de la siguiente manera:

$A = \{x \in \Re / 2x - 1 = x^2\}$

$B = \varnothing$

$C = \{x \in \mathbb{Z} / x \quad 1\}$

Determinar: $(A \cup B) \cap C$

a) B b) A' c) $A \cap B$

d) $A' \cap B$ e) A

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) D	3) D	4) D	5) C
6) D	7) D	8) C	9) D	10) C
11) B	12) B	13) E	14) B	15) D
16) D	17) C	18) C	19) D	20) E

FUNCIONES

Todas las ciencias utilizan la matemática, esencialmente para estudiar relaciones. Los físicos, ingenieros, biólogos y, cada vez más, los economistas, los psicólogos y otros especialistas, buscan discernir las conexiones entre los diversos elementos de su campo para llegar a esclarecer y comprender por qué esos elementos tienen determinado comportamiento.

En el capítulo anterior se estudió las relaciones binarias de conjuntos en términos generales; en este capítulo,estudiaremos una relación especial denominada FUNCIÓN.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

"Una función de A en B es una **relación** que asocia a TODO elemento del conjunto A con UN SOLO ELEMENTO del conjunto B". Se denota del siguiente modo:

$$f : A \Rightarrow B$$

Y, se lee: "f es una función de A en B".

Ejemplo:

Sea un conjunto A de animales y un conjunto B, de coberturas.

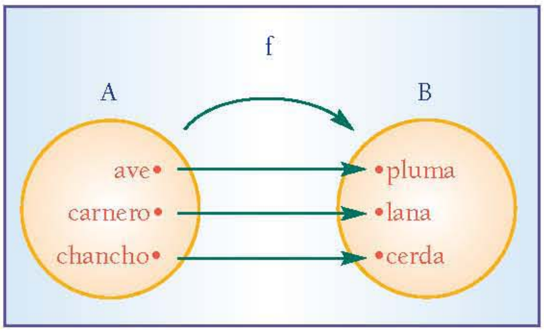
A = {ave, carnero, chancho}

B = {pluma, lana, cerda}

La siguiente es una relación de pares ordenadas que forman una función:

f = {(a, p), (c, l), (ch, c)}

Cuya representación en un diagrama sagital es como sigue:



Como se ve, esta relación asocia a cada animal del conjunto A con un único elemento del conjunto B.

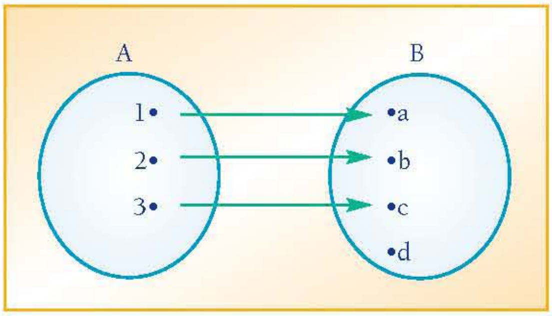
Es lógico que no se podría relacionar, por ejemplo, aves con lana.

No toda relación es una función, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

Sean los conjuntos:

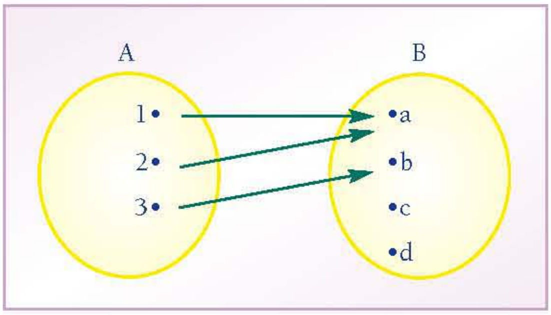
A = {1; 2; 3}   B = { a, b, c, d}

i) f = {(1, a), (2, b), (3, c)}



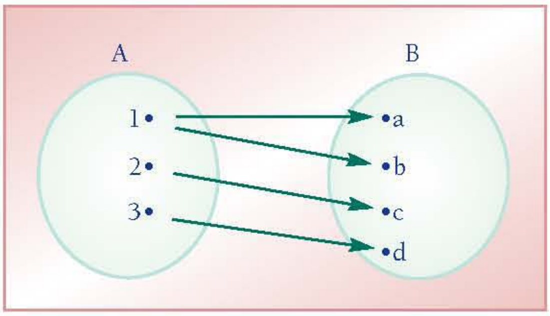
SÍ ES UNA FUNCIÓN: nótese que B (rango) tiene un elemento que ha quedado sin relacionar, lo cual no invalida la función.

ii) f = {(1, a), (2, a), (3, b)}



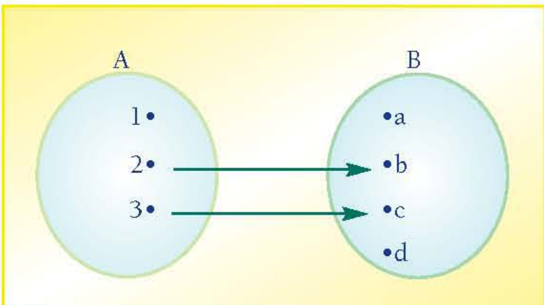
SÍ ES UNA FUNCIÓN: pues se cumple los requisitos de una función, aún cuando a ∈ B se ha relacionado con 2 elementos de A al mismo tiempo.

iii)



NO ES UNA FUNCIÓN: porque no cumple con: "asociar a todo elemento de A con UN SOLO elemento e B". Aquí un elemento de A, el "1", está asociado con DOS elementos de B.

iv)



NO ES UNA FUNCIÓN: porque no cumple con: "asociar a TODO elemento del conjunto A ...", puesto que "1" no está asociado con ninguno de B.

Regla correspondiente

Tomando como referencia el ejemplo (*i*) se encuentra que:

A 1 le corresponde **a**, se denota f (1) = a, y se lee " f de 1 igual a".

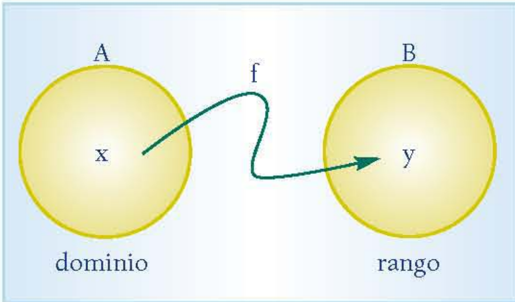
A 2 le corresponde b, se denota f (2) = b, y se lee "f de 2 igual b".

Del mismo modo: f (3) = c

En general se escribe: f (x) = y

donde "x" es cualquier elemento del conjunto A; mientras que "y" o "f" (x), es el elemento correspondiente del conjunto B. Es decir:

En términos gráficos:



x ∈ A ; f (x) ∈ B

DOMINIO Y RANGO

En toda función de A en B : se llama DOMINIO, o conjunto de partida, al conjunto de todas las primeras componentes; y se llama RANGO, o conjunto de llegada o imagen, al conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función f.

Ejemplos:

i) En la función: f = {(1, a), (2, b), (3, c)}, determinar el Dominio y el Rango.

Solución:

El DOMINIO de f es: A = {1; 2; 3}

Se denota: Dom (f) = A = {1, 2, 3}

o: DOMINIO(f) = {x/x ∈ A}

El RANGO de f es: B = {a, b, c}

Se denota: Ran (f) = B = { a, b, c }

o, también se denota así:

Ran (f) = {y/y = f(x) ∈ B, x ∈ A}

ii) Sea g: $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$, una función definida por la ecuación: g (x) = x + 3. Encontrar su dominio y su rango.

> NOTA
>
> g (x) = x + 3, es lo mismo que: y = x + 3

Solución:

Recuérdese que $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales; es decir:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$

Por lo tanto:

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{N}$$

Tabulemos algunos valores para intentar ver cuál es el rango. Reemplazando sucesivamente "x" en la ecuación g(x) = x + 3, se tendrá sucesivamente.

$g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(2) = 5$, $g(3) = 6$, $g(4) = 7$, ...

Advertimos que:

$\text{Ran}(g) = \{3; 4; 5; 6; 7; ...,\} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 3\}$

iii) Hallar el dominio y rango de la función $h : \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$, definida por la ecuación: $h(x) = x^2$, o, simplemente: $y = x^2$

Solución:

Recuerde que $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de números enteros, incluyendo los negativos. A manera de descubrir un patrón, tabulemos para:

$x = -3$; $x = -2$; $x = -1$;
$x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$

lo cual nos da el siguiente resultado:

$h(-3) = 9$; $h(-2) = 4$; $h(-1) = 1$; $h(0) = 0$;

$h(1) = 1$; $h(2) = 4$; $h(3) = 9$

Por lo tanto:

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{Z} \text{ y } \text{Ran}(h) = \{0; 1; 4; 9; ... \};$$

o, simbólicamente:

$$\text{Ran}(h) = \{x^2 \,/\, x \in \mathbb{N}\}$$

iv) Sea $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por la ecuación $f(x - 1) = 3x + 6$. Hallar f (p).

Solución:

Para resolver este problema empleamos un artificio que se usa mucho en matemática; es el cambio de variable. En este caso, llamamos:

$$x - 1 = p \qquad \therefore \qquad x = p + 1$$

Hacemos el cambio de variable y obtenemos:

$$f(p) = 3(p + 1) + 6$$

$$f(p) = 3p + 9$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Sea $f: \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ definida por la ecuación:

$$f(x) = mx + b; \text{ si } f(1) = 2, \; f(-1) = 0$$

Hallar m y b.

Solución:

Si $f(1) = 2 \Rightarrow m + b = 2$ (1)

Si $f(-1) = 0 \Rightarrow -m + b = 0$ (2)

Rpta.: Resolviendo (1) y (2), encontramos que: $m = 1$; $b = 1$.

2.- Si $f(x) = 21x - 7$

$$g(x) = 3x^2 - 2$$

Hallar: $E = f(-2) + g(4)$

Solución:

$$f(-2) = 21(-2) - 7 = -49$$

$$g(4) = 3(4)^2 - 2 = 46$$

$\therefore$ $E = f(-2) + g(4)$

$E = -49 + 46$

Rpta.: $E = -3$

3.- Si : $f(a; b) = \sqrt{2\sqrt[3]{(ab)^5(a^4b)}}$,

Hallar f (2; 3).

Solución:

$$f(2; 3) = \sqrt{2\sqrt[3]{(2 \,.\, 3)^5 \, (2^4 \,.\, 3)}}$$

$$f(2; 3) = \sqrt{2\sqrt[3]{2^9 \,.\, 3^6}} = \sqrt{2 \,.\, 2^3 \,.\, 3^2}$$

$$f(2; 3) = 2^2 \,.\, 3 = 12$$

Rpta.: $f(2; 3) = 12$

4.- Sea f una función lineal, tal que:

$$f(x) = mx + b$$

Se cumple que:

$\{(a;\ 2a - 1),(-a;\ -2a - 1)\} \subset f$

Hallar f (2).

Solución:

Como el conjunto de pares ordenados está incluido en "f"; entonces, calculemos los valores de m y b, reemplazando los pares ordenados en la función. Así:

para x = a, x = -a

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = 2a - 1 = ma + b \\ f(-a) = -2a - 1 = -ma + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = -1 \\ m = 2 \end{array}$$

Por lo tanto, la función queda definida como:

$$f(x) = mx + b$$

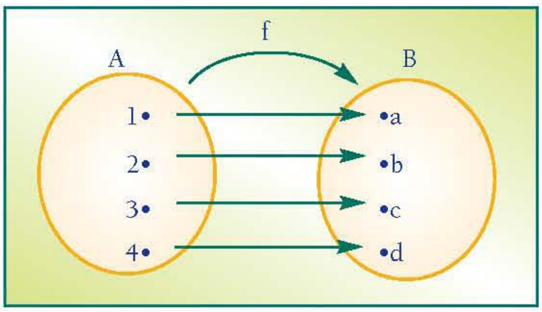
$$f(x) = 2x - 1$$

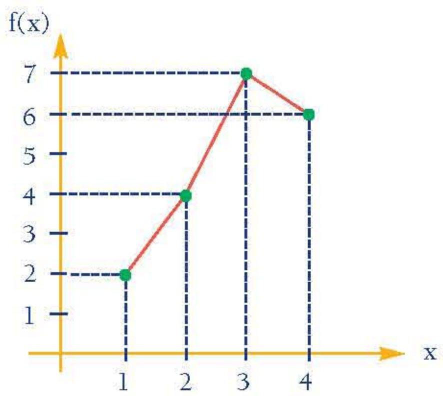
para x = 2

$$f(2) = 4 - 1 = 3$$

Rpta.: f(2) = 3

5.- Analizar los gráficos mostrados a continuación y hallar Dom (f) ∩ Ran (f).



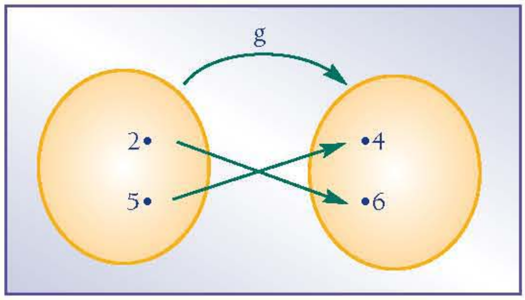


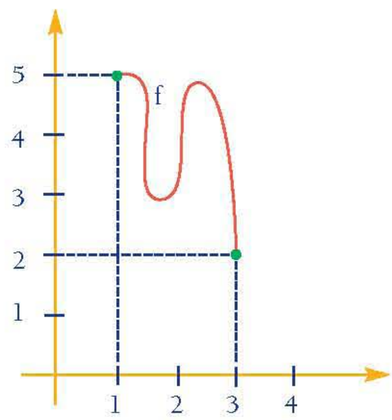
Solución:

De los gráficos, deducimos que: a = 2, b = 4,
y que: Dom(f) = {1; 2; 3; 4}; Ran(f) = { 2; 4; 6; 7}

$\therefore$ Dom(f) ∩ Ran(f) = {2; 4}

6.- Revisar los gráficos siguientes:





Calcular el valor de:

$$E = \frac{f\,(1) + g\,(f\,(1))}{f\,(3) + g\,(f\,(3))}$$

Solución:

De los gráficos:

$$f(1) = 5;\ \ g\,(5) = 4$$

$$f(3) = 2;\ \ g\,(2) = 6$$

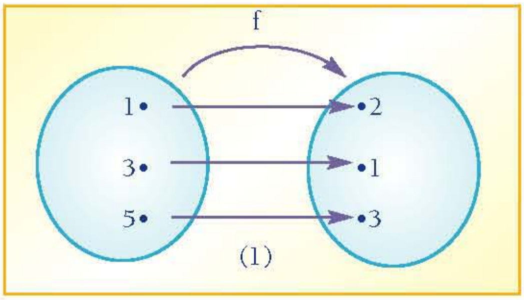
Por lo tanto:

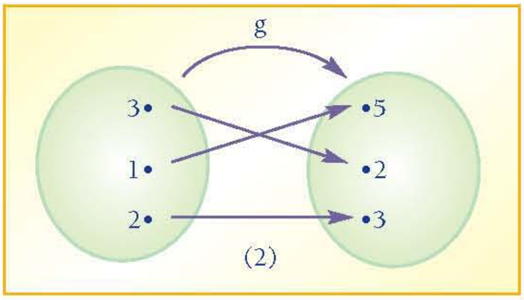
$$E = \frac{5 + g(5)}{2 + g\,(2)} = \frac{5 + 4}{2 + 6} = 9/8$$

Rpta.: 9/8

7.- Dadas las funciones f y g definidas en los diagramas mostrados a continuación. Hallar el valor de:

$$E = \frac{f(1) + g(3)}{f(g(1)) + f(g(2))}$$





Resolución:

Del gráfico (1):	Del gráfico (2):
f (1) = 2	g (1) = 5
f (3) = 1	g (2) = 3
f (5) = 3	g (3) = 2

Dado que:

f (g(1)) = f(5) = 3

f (g(2)) = f(3) = 1

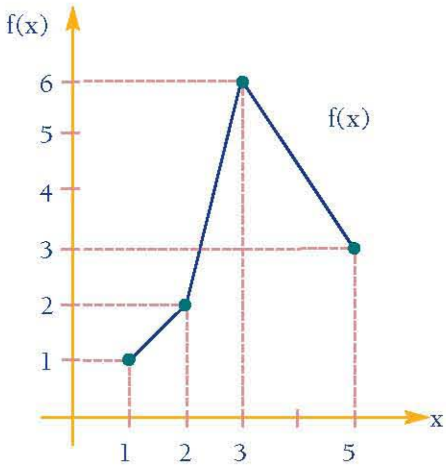
Reemplazamos en E:

$$E = \frac{2 + 2}{3 + 1} = 1$$

Rpta.: = 1

8.- En la figura mostrada a continuación, hallar el valor de:

$$E = \frac{f(5) + f(1)}{f(2) + f(3)}$$



Solución:

Del gráfico:

f(5) = 3 f(2) = 2

f(1) = 1 f(3) = 6

$$E = \frac{3 + 1}{2 + 6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Rpta.: 1/2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$, entonces:

$f(-1) + f(1) - f(0) = ?$

a) -7 b) -3 c) -4 d) 1 e) -1

2. Si $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, función definida por la ecuación: $f(x) = mx + b,\ m \neq 0$.

Si $f(1) = 2$ y $f(2) = 5$. Hallar: $3m - 2b = ?$

a) 7 b) 9 c) 8 d) 11 e) 10

3. Sea f una función definida por la ecuación:

$$f(x) = 3x + 6$$

Hallar: $f(1) + f(f(0))$

a) 30 b) 31 c)33 d) 32 e) 28

4. Sea $f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$

$f(x) = y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{N}$

Si: $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$, $f(a) = 4$; hallar $a + b$.

es decir; tanto el dominio como el rango éstan definidos como números enteros.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 3 e) 2

5. Sea f una función definida por la ecuación: $f(x) = 2x + 5$, hallar:

$$\frac{f(x + 2h) - f(x)}{4h};\ h \neq 0$$

a) 1/2 b) h/2 c) h

d) 1 e) N.A.

6. Si $g(x) = 2x + 6$, evaluar:

$$\frac{g(x + h) - g(x - h)}{2h};\ h \neq 0$$

a) 2 b) 2h c) 2/h d) 4/h e) 4

7. Hallar los valores de a y b, si:

$A = \{(2; 5), (-1; 3), (2; 2a-b); (-1; b - a), (a + b^2; a)\}$

a) (0; 1) b) (1; 3) c) (2; 1)

d) (6; 7) e) (8; 11)

8. En el problema anterior, calcular Rango(A).

a) {1; 2} b) {-3; 5; 2} c) $\varnothing$

d) {-3; 1; 2} e) {3; 5; 8}

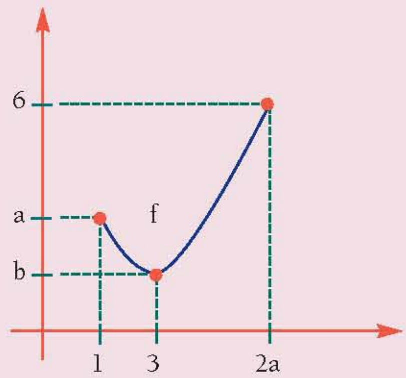
9. Calcular el valor de

$$E = \frac{f(2b + 1) + f(2b - 1)}{f(2a - 3) + f(2a - 5)}$$

Considerando que:

$f(f(1)) = b$

$f(a + 3) = 4b + 2$



a) 1 b) 36 c) 0

d) 16 e) N.A.

10. Si: $f(x) = x$

y: $f(g(x) + h(x)) = 3x + 4$

$f(g(x) - h(x)) = x - 2$

Calcular: $g(h(1))$

a) 4 b) 8 c) 9 d) 6 e) 3

11. Sea $A = \{1; 2; 4\}$ y f una función definida en A por:

$f = \{(1; 3), (2; a), (a + 1; 2), (1; b - 1)\}$

Hallar: f (1) - f (2) + f (4)

a) 6　b) 5　c) 4　d) 3　e) 2

12. Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} se define las siguientes funciones:

f = {(1; 4), (a; 2), (4; 1), (3; 7), (2; 3)}

g = {(1; 2), (3; 3), (4; 3), (5; 5), (2; 5), (1; a - c)}

Hallar: 3a - 2c

a) 0　b) 15　c) 10

d) 20　e) 9

13. Se define en $\mathbb{R}$ la función f según:

$$f(x+1) = 2x + 1$$

Hallar: $\dfrac{f(f(-2))}{f(0)}$

a) -11　b) 2　c) -11/2

d) 11　e) N.A.

14. Si $f(x+2) = 3x + 7$

Hallar: $\dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}$, $h \neq 0$

a) h　b) 3　c) 3h

d) $\dfrac{3h + 18}{h}$　e) N.A.

15. Sea una función definida por la ecuación

$$f(1 - x) = x + 2; \text{ hallar } f(f(-x))$$

a) -x　b) -x + 6　c) 6

d) x - 6　e) N.A.

16. Dada la función: $f(m) = \sqrt[3]{8^m}$

Hallar f reducida a su mínima expresión.

a) 3^m　b) -8^m　c) 2^m

d) -2^m　e) N.A.

17. Dado $f_n(x) = nx + b$; $n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, si se sabe que:

$$f_n(f_n(0)) = bn$$

El valor de $f_4(f_2(1))$ es:

a) 2　b) 6　c) 8　d) 4　e) 0

18. Sea f una función tal que:

$$f_o(x) = \frac{1}{1 - x}$$

Si $f_n(x) = f_o(f_{n-1}(x))$, $n \in \mathbb{N}^+$

Entonces hallar $f_5(31)$.

a) 26　b) 31　c) 29　d) 27　e) 35

19. Sea $f(n) = 2f(n-1) - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Hallar: f (f (40)), si f (0) = 1

a) 0　b) -1　c) 40

d) 1　e) N.A.

20. $f(x) = ax^2 + b$

$$f(f(x)) = 8x^4 + 24x^2 + c$$

Hallar: c - (a + b)

a) 26　b) 16　c) 30　d) 22　e) 31

CLAVE DE RESPUESTAS

1) E	2) D	3) C	4) E	5) D
6) A	7) E	8) B	9) A	10) C
11) E	12) E	13) D	14) B	15) A
16) C	17) C	18) B	19) D	20) B

SISTEMA DE NUMERACIÓN

La Numeración es la parte de la Aritmética que estudia las leyes y convenciones sobre la representación de los números.

En particular, la numeración escrita, a diferencia de la numeración hablada, nos enseña a representar los números mediante símbolos, propios de cada sistema de numeración.

¿QUÉ ES UN SISTEMA?

"Un sistema es un conjunto de reglas o principios sobre una materia, enlazados entre sí".

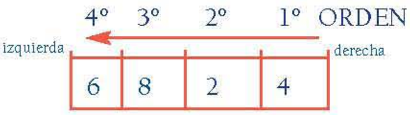
¿QUÉ ES UN SISTEMA DE NUMERACIÓN?

Es el conjunto de leyes y convenciones que se utiliza para representar a los números. De esta manera, un sistema de numeración define aspectos tales como la base numérica y la posición u orden de los dígitos.

Orden.- Se llama orden al lugar que ocupa cada cifra dentro de un número. En todo sistema la numeración se efectúa de derecha a izquierda. A la primera cifra de la derecha que ocupa el primer orden, se le llama cifra de las unidades simples.

Ejemplo:

El número 6 824. La unidad de orden simple es el 4, y la de 4º orden es el 6.



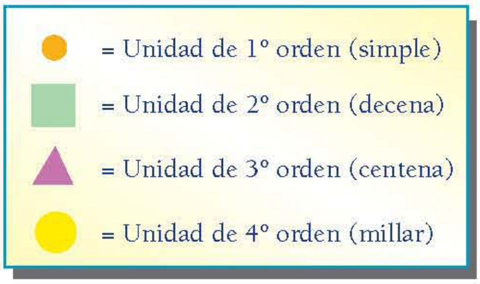
En cualquier sistema de numeración las cifras tienen 2 valores: un valor absoluto, que corresponde a su valor nominal como cifra independiente; y, un valor posicional, que depende de posición u orden que tenga dentro del número.

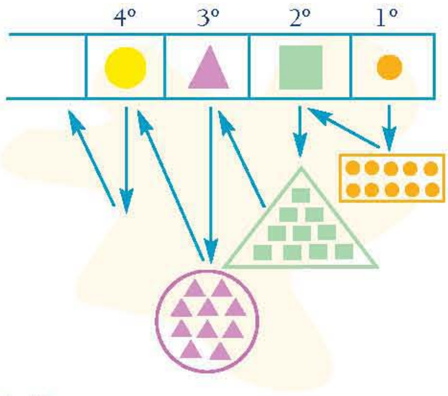
Ejemplo:

El número 111. La cifra "1" del extremo izquierdo con valor absoluto igual a "1" representa también, por su valor posicional "una centena" en el sistema de numeración decimal.

BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el número de símbolos o cifras distintas entre sí, usados en el sistema. Este número además indica la cantidad de unidades de un orden cualquiera que se requiere para formar una unidad de orden inmediato superior; así, nuestro sistema se llama DECIMAL o de base 10, porque con 10 unidades de 1º orden se logra una unidad de 2º orden; con 10 unidades de 2º orden se logra 10 unidades del 3º orden y así sucesivamente. Del mismo modo, en el sistema octal la base es 8, porque con ocho unidades de un orden cualquiera, se logra formar una unidad de orden inmediato superior.



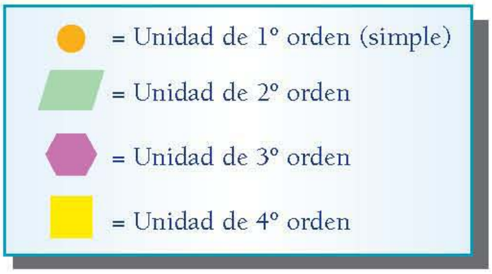


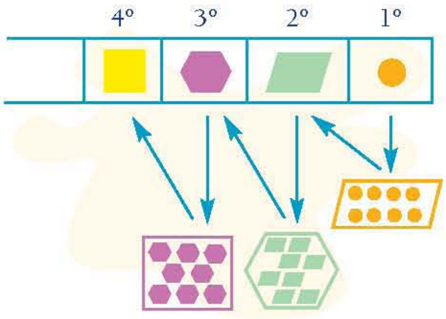
BASE 10

En el sistema decimal, de acuerdo al orden que ocupa una cifra, toma el nombre de unidad simple, decena, centena, millar, etc. Emplea cifras del 0 al 9(diez cifras).

BASE 8

También denominado sistema octal. Emplea cifras del 0 al 7(ocho cifras).





Aquí, 8 unidades de 1° orden hacen una unidad de 2° orden; 8 unidades de segundo orden hacen una unidad de 3° orden y así sucesivamente.

FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Principio Básico

"En un sistema de base N, toda cifra escrita un lugar a la izquierda de otra tiene un valor mayor de acuerdo al orden que representa la cifra de la derecha".

REGLAS FUNDAMENTALES

1° En todo sistema de numeración existe la cifra no significativa "cero".

2° En todo sistema de numeración, sólo existen tantas cifras diferentes entre sí como lo indique la base y con ellas se podrá representar cualquier valor numérico. Por ejemplo; en el sistema decimal, cuya base es 10, se usa sólo 10 cifras para escribir cualquier número. Estas cifras son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3° En todo sistema de numeración, el máximo valor absoluto de una cifra es una unidad menos que la base.

NOTA

La base en que está expresada un número debe anotarse a la derecha de éste, en modo suscrito. La única excepción permitida, es para números en sistema decimal o base 10.

Ejemplos:

278_9 base 9

1420_6 base 6

10101001_2 base 2

925 base 10

TEOREMA

En todo sistema de numeración, el número es igual a la suma de los valores relativos de sus cifras.

Ejemplo:

583 = 5 centenas + 8 decenas + 3 unidades simples

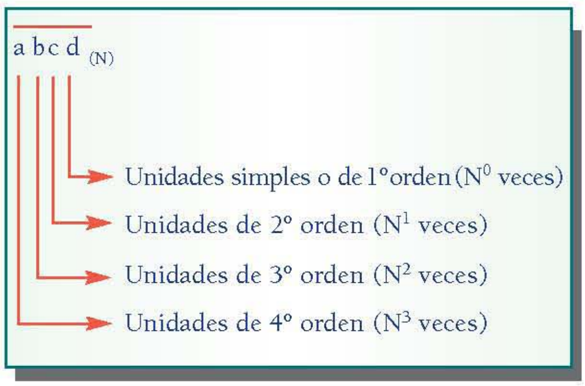
583 = 500 + 80 + 3

583 = 583

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

Es el procedimiento de cálculo que permite determinar la cantidad de unidades simples que posee un número y con ello su valor real. Consideremos el número $abcd_{(N)}$

En todo sistema de numeración diferente al decimal, los números se leen cifra por cifra de izquierda a derecha.



Entonces los valores relativos de las cifras serán: d; c.N; b.N^2 y a.N^3; y el número será igual a la suma de los valores relativos de sus cifras:

$$\overline{abcd}_{(N)} = \underbrace{a.N^3 + b.N^2 + c.N + d}_{\text{descomposición polinómica}}$$

La expresión $\overline{abcd}_{(N)}$ se llama forma polinómica del número.

Ejemplos:

i) Descomponer en su forma polinómica, el número 368 de base 10:

$368 = 3 . 10^2 + 6 . 10 + 8$

$368 = 3 . 100 + 6 . 10 + 8$

$368 = 300 + 60 + 8$

$368 = 368$

ii) Descomponer polinómicamente, el número 265 de base 7:

$265_7 = 2 . 7^2 + 6 . 7 + 5$

$265_7 = 2 . 49 + 6 . 7 + 5$

$265_7 = 98 + 42 + 5$

$265_7 = 145$

Características de la forma polinómica de un número

1) Todos los términos son positivos.
2) El polinomio es ordenado respecto de la serie de potencias de la base.
3) La descomposición de un número en su forma polinómica nos permite determinar el número de unidades simples que posee dicho número.

Generalización del método práctico para descomponer un número en su forma polinómica

En general para descomponer un número en su forma polinómica, la regla práctica dice lo siguiente: "Se toma la primera cifra de la izquierda y se multiplica por la base del sistema elevado a un exponente igual al número de cifras que le siguen a la cifra tomada, a este resultado se le suma el producto de la segunda cifra multiplicada por la base del sistema elevada a un exponente igual al número de cifras que le siguen y así sucesivamente".

En general, descompondremos el número $abc \ldots xyz_{(N)}$ de la siguiente manera:

$$\underbrace{\overline{abc \ldots xyz}}_{\text{"m" cifras}}{}_{(N)} = a . N^{m-1} + b . N^{m-2} + c . N^{m-3} + \ldots + x . N^2 + y . N + z$$

Ejemplo:

Descomponer polinómicamente $\overline{abc}$ de base n

$$abc_n = a . n^2 + b . n + c$$

PRINCIPALES SISTEMAS DE NUMERACIÓN

SISTEMA BINARIO

El sistema de base 2, es el más simple de los sistemas de numeración. Lo usaron los pueblos más primitivos y lo usan hoy las más modernas máquinas de calcular. El sistema no se presta para representar números elevados. Pero, ésto no fue inconveniente para los pueblos primitivos, que raramente tenían necesidad de contar más allá de 5; ni tampoco para las máquinas de calcular electrónicas, que compensan lo pequeño de los números binarios con la grandísima velocidad de su conteo. Con este sistema, las operaciones aritméticas, son de una simplicidad extraordinaria pues sólo se utiliza las cifras 0 y 1.

Ejemplo: 5 lapiceros en sistema binario: $101_{(2)}$, que se lee: "2 pares y 1 lapicero"

SISTEMA QUINARIO

Es el que directamente deriva del contar con los dedos; su base es 5, o sea "una mano entera". En este sistema se cuenta: uno, dos, tres, cuatro, una mano, una mano y uno, una mano y dos, una mano y tres, y así sucesivamente. Se utiliza sólo los numerales: 0, 1, 2, 3 y 4.

Ejemplo: 1 mano y 3 tizas = 8 tizas;
2 manos de plátanos = 10 plátanos.

SISTEMA VIGESIMAL

O tetraquinario, derivado del sistema quinario, y por lo tanto es un sistema mixto; considera como base el número 20 (dos manos y dos pies, "un hombre entero," como llaman al 20 muchos pueblos que usan este sistema).

Ejemplo: 1 hombre entero y 1/4 de hombre entero de libros = 25 libros.

Dentro de cada veintena sin embargo, continúa válido el sistema quinario; por lo tanto se cuenta: uno, dos, hasta cinco, cinco y uno, cinco y dos, etc hasta veinte.

SISTEMA DECIMAL

Ultimo descendiente del sistema quinario, ha sido adoptado por todas las grandes civilizaciones del mundo Occidental, y es aún hoy nuestro sistema. Lo estudiaremos más adelante, en forma exhaustiva.

OTROS SISTEMAS

Ternario, Cuaternario, Senario, Nonario, Undecimal, Hexadecimal, Sexagesimal, son sistemas cuyas bases, respectivamente son: 3, 4, 6, 9, 11, 16, 60.

Otros sistemas de los cuales aún quedan rezagos son los sistemas derivados del sistema binario, como los de base 4, 8, 12. De este último sistema aún están en vigencia algunas unidades como "la docena" o "la gruesa", que se utiliza para contar huevos, globos, plumillas y algunos otros objetos. 1 docena equivale a 12 unidades y 1 gruesa equivale a 12 docenas = 144 unidades.

Convención

Cuando se trabaje en sistemas cuyas bases sean iguales o mayores que 10 y los números 10, 11, 12, etc. sean cifras, se utiliza la siguiente convención para representarlos con un solo símbolo:

$\alpha = 10$ $\beta = 11$ $\gamma = 12$ $\& = 13, \ldots$

o, también:

$a = 10$ $b = 11$ $c = 12$ $d = 13, \ldots$

NUMERACIÓN DECIMAL

Dentro de los diferentes sistemas de numeración, los más usados históricamente, han sido aquellos sistemas mejor adaptados al conteo con los dedos. Entre ellos destacan: el sistema quinario, quinario-vigesimal y decimal. El que indudablemente ha tenido mayor éxito es el sistema decimal, llamado así porque su base es 10.

El sistema decimal puro se desarrolló probablemente en la Era Neolítica, entre los pastores nómadas que vagaban con sus rebaños desde el Asia Central al Océano Atlántico. Adoptado luego por los pueblos semitas e indoeuropeos, se trasmitió desde éstos hasta nuestra civilización. Pero la victoria del sistema decimal no es definitiva: la tecnología electrónica actual prefiere el sistema binario y para muchos matemáticos 12 sería una base más racional que 10 (por tener mayor número de divisores).

Convenciones fundamentales del sistema decimal

a) Toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior. De esta manera, la primera cifra a la derecha, representa unidades simples; la segunda cifra, decenas; la tercera cifra, centenas; etc.

b) Más concretamente, diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad de orden inmediata superior. Así, se denomina:

- Unidad de primer orden a una unidad simple (1).
- Unidad de segundo orden a una decena, que vale 10 unidades simples (10).
- Unidad de tercer orden a una centena, que vale 10 decenas o 100 unidades simples (100).
- Unidad de cuarto orden a una unidad de millar, que vale 10 centenas o 100 decenas o 1 000 unidades simples (1 000). Y, así sucesivamente.

c) Para restringir el número de palabras que designan los órdenes se agrupan éstos en clases: se llama clase a la reunión de 3 órdenes. A la reunión de 2 clases (6 órdenes), se llama período.

d) El Cero señala el lugar de las unidades que no tienen valor.

Irregularidades

El uso del sistema decimal ha introducido algunas modificaciones favorables en la denominación de los números usuales. En vez de "dos-diez" se dice veinte; en vez de "tres-diez", treinta; en lugar de "diez-uno", once; y, doce para no decir "diez-dos".

CLASIFICACIÓN DE LA NUMERACIÓN DECIMAL

2º PERIODO						1º PERIODO					
MILLONES						UNIDADES					
4º Clase			3º Clase			2º Clase			1º Clase		
Millar de Millón			Millón			Millares			Unidades		
12º Orden	11º Orden	10º Orden	9º Orden	8º Orden	7º Orden	6º Orden	5º Orden	4º Orden	3º Orden	2º Orden	1º Orden
Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad

CIFRAS MÍNIMAS

Se llama cifra mínima a toda cifra que sea menor o igual a la mitad de la base de numeración del número dado.

Ejemplos las cifras mínimas en el sistema:

i) De base decimal son: 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

ii) De base ocho son: 0, 1, 2, 3 y 4.

iii) De base trece son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Todo número puede expresarse en cifras mínimas sin que varíe su valor.

Regla para expresar un número en cifras mínimas

A toda cifra mayor que la *mínima* se resta un número igual a la *base* de numeración empezando por la derecha. Efectuada esta primera operación, a la cifra de la izquierda se le agrega una unidad; si este resultado es mayor que la cifra mínima se le resta el número base y se repite sucesivamente este procedimiento; si la cifra es igual o menor a la mínima, se mantiene. Además, se considera el cero como una cifra a la izquierda del número. El número así obtenido estará expresado en cifras mínimas.

Ejemplos:

i) Expresar 8726 en cifras mínimas.

Solución:
Como las cifras mínimas del sistema decimal son: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. De acuerdo con la regla establecida:

$$6 - 10 = \overline{4}$$

$$2 + 1 = 3 \longrightarrow 3 = 3$$

$$7 + 1 = 8 \longrightarrow 8 - 10 = \overline{2}$$

$$8 + 1 = 9 \longrightarrow 9 - 10 = \overline{1}$$

$$0 + 1 = 1 \longrightarrow 1 = 1$$

La barra horizontal expresa una cantidad negativa.

$\therefore\ 8726 = 1\overline{1}\,\overline{2}\,3\,\overline{4}$

ii) Expresar $67\,654_{(8)}$ en cifras mínimas.

Solución:

A cada cifra mayor que la mínima se le resta 8. Las cifras mínimas de base 8 son: 0, 1, 2, 3 y 4.

$$4 = 4$$

$$5 + 1 = 6 \longrightarrow 6 - 8 = \overline{2}$$

$$6 + 1 = 7 \longrightarrow 7 - 8 = \overline{1}$$

$$7 + 1 = 8 \longrightarrow 8 - 8 = \overline{0}$$

$$6 + 1 = 7 \longrightarrow 7 - 8 = \overline{1}$$

$$0 + 1 = \longrightarrow 1 = 1$$

$$67\,654_{(8)} = 1\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,4_{(8)}$$

OPERACIONES FUNDAMENTALES EN SISTEMAS DE NUMERACIÓN DIFERENTES AL DECIMAL

ADICIÓN

La adición, en cualquier sistema de numeración, es semejante a la que se ejecuta en el sistema decimal, con la precaución de que en vez de llevar una unidad de orden inmediato superior cuando se llega a 10, se hará cuando se llegue a un número que sea igual a la base del sistema.

Ejemplo:

Realizar la siguiente adición:

$3\,451_{(7)} + 12\,563_{(7)} + 214\,345_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 3\,4\,5\,1 \;+ \\ 1\,2\,5\,6\,3 \\ 2\,1\,4\,3\,4\,5 \\ \hline 2\,3\,4\,0\,2\,2_{(7)} \end{array}$$

Explicación del procedimiento:

En el 1er orden: 1 + 3 + 5 = 9; como 9 es mayor que 7 (9 = 7 + 2) escribimos el 2 y llevamos el 7 como una *unidad* convertida al orden superior; es decir, llevamos 1 para sumar al 2º orden.

En el 2do orden: (1) + 5 + 6 + 4 = 16;
16 - (2 . 7) = 2 y quedan 2 unidades (2 veces 7) que guardamos para sumar al 3º orden.

En el 3er orden: (2) + 4 + 5 + 3 = 14;
14 = 2 . 7, escribimos "cero" y quedan 2 unidades (2 veces 7) que guardamos para sumar al 4º orden.

En el 4to orden: (2) + 3 + 2 + 4 = 11;
11 - (1 . 7) = 4 y queda una unidad (un 7) que guardamos para sumar al 5º orden.

En el 5to orden: (1) + 1 + 1 = 3, ponemos el 3 y no llevamos nada.

En el 6to orden: 2 = 2.

SUSTRACCIÓN

Hallar la diferencia $133\ 573_{(12)} - 8\alpha356_{(12)}$

Lo mismo que en el sistema de base 10, cuando las cifras del sustraendo son mayores que la del minuendo se añaden 10 a las cifras de este último, aquí añadiremos 12, que es la base.

Explicación del procedimiento:

En el primer orden: 6 es mayor que 3, entonces se suma 3 + 12 = 15, ahora el minuendo es mayor: 6 al 15 = 9, se pone 9 y se lleva 1 al siguiente orden.

En el segundo orden: 5 + (1) = 6 ; 6 al 7 = 1, se pone 1 y se lleva 0.

En el tercer orden: 3 a 5 = 2; se pone 2 y se lleva 0.

En el cuarto orden: 10, al 12 + 3 = 15; se pone 5 y se lleva 1.

En el quinto orden: 8 + (1) = 9 al 12 + 3 = 15 se pone 6 y se lleva 1.

En el sexto orden: 1 al 1; se pone 0.

Luego:
$$\begin{array}{r} 13\ 3573_{(12)} - \\ 8\ \alpha356_{(12)} \\ \hline 6\ 5219_{(12)} \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN

Efectuar el producto $12\ 7334_{(9)}\ .\ 5\ 631_{(9)}$

$$\begin{array}{r} 12734\ \times \\ 5631 \\ \hline 12734 \\ 38413 \\ 77826 \\ 65082 \\ \hline 74382564_{(9)} \end{array}$$

Explicación del procedimiento:

- 1 . 4 = 4; 1 . 3 = 3; 1 . 7 = 7; 1 . 2 = 2; 1 . 1 = 1
- 3 . 4 = 12; (12 - 1 . 9 = 3), se pone 3 y se lleva 1;
  3 . 3 = 9; 9 + 1 = 10; se pone 1 y se lleva 1;
  3 . 7 = 21; 21 + 1 = 22; (22 - 2 . 9 = 4); se pone 4 y se lleva 2; 3 . 2 = 6; 6 + 2 = 8; 3 . 1 = 3.
- 6 . 4 = 24; (24 - 2 . 9 = 6); se pone 6 y se lleva 2; 6 . 3 = 18; 18 + 2 = 20; (20 - 2 . 9 = 2); se pone 2 y se lleva 2; 6 . 7 = 42; 42 + 2 = 44; (44 - 4 . 9 = 8); se pone 8 y se lleva 4; 6 . 2 = 12; 12 + 4 = 16; (16 - 1 . 9 = 7); se pone 7 y se lleva 1; 6 . 1 = 6; 6 + 1 = 7
- 5 . 4 = 20; (20 - 2 . 9 = 2); se pone 2 y se lleva 2; 5 . 3 + 2 = 17; (17 - 1 . 9 = 8); se pone 8 y se lleva 1; 5 . 7 + 1 = 36; (36 - 4 . 9 = 0); se pone 0 y se lleva 4; 5 . 2 + 4 = 14; (14 - 1 . 9 = 5); se pone 5 y se lleva 1; 5 . 1 + 1 = 6, se pone el 6.

La suma de los productos parciales se hace como se ha indicado anteriormente.

DIVISIÓN

Efectuar la división $123745_{(8)} \div 34_{(8)}$. Lo más aconsejable es formar una tabla en base a 8 con todos los productos posibles del divisor por cociente (se sabe que las cifras del cociente oscilan desde cero hasta 7):

Procedimiento:

Tabla en base 8		
34 . 1	=	34
34 . 2	=	70
34 . 3	=	124
34 . 4	=	160
34 . 5	=	214
34 . 6	=	250
34 . 7	=	304

$$\begin{array}{l|l} 123745 & 34 \\ \cline{2-2} \underline{\ 10\ } & 2\ 777 \\ \underline{\ 337} & \\ \underline{\ 304\ \ } & \\ \quad 334 & \\ \quad \underline{304\ \ } & \\ \qquad 305 & \\ \qquad \underline{304} & \\ \qquad\ \ 1 & \end{array}$$

CAMBIOS DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1er caso: Dado un número en cualquier base de numeración, representarlo en base 10.

Bastará con descomponer el número dado en su forma polinómica, ya que mediante este procedimiento averiguaremos cuántas unidades simples (u.s.) posee dicho número.

Ejemplo:

Representar en el sistema decimal el número:
$\overline{\alpha 11\beta 2}_{(12)}$

Descomponiendo el número en forma polinómica: (Recordando que: $\alpha = 10$; $\beta = 11$)

$\overline{\alpha 11\beta 2}_{(12)} = 10.12^4 + 1.12^3 + 1.12^2 + 11.12 + 2$
$= 209\ 366$ u.s.
$= 209\ 366$

Como se sabe, no es necesario indicar el subíndice para números en el sistema decimal.

También se puede aplicar la siguiente:

Regla práctica de Ruffini

Procedimiento:

Para expresar en el sistema decimal un número de cualquier otro sistema se dibuja una abscisa y una ordenada, generándose 4 cuadrantes (ver ejemplo). En el cuadrante superior izquierdo se anota la base (12). En el cuadrante superior derecho se escribe las cifras del número. La cifra del extremo izquierdo (a = 10) se repite en el cuadrante inferior derecho y se multiplica por la base. El resultado (120) se anota arriba y se suma a la siguiente cifra (1), cuyo nuevo resultado (121) se anota en el cuadrante inferior, y éste se multiplica por la base. Su resultado se anota arriba y se suma a la tercera cifra (1), obteniéndose una nueva cantidad (1453) que se anota en el cuadrante inferior y así sucesivamente, hasta sumar la última cifra. Este último resultado representará al número en el sistema decimal.

Tomando el ejemplo anterior:
$\alpha 11\beta 2_{(12)}$ a base 10

	α	1	1	β	2
		+	11		
12		120	1 452	17 436	209 364
	10	121	1 453	17 447	209 366

Rpta.: 209 366.

2do. caso: Dado un número de base 10, representarlo en otra base "N".

Se divide el número dado entre el valor "N" de la base deseada, dando un cociente; luego el cociente resultante se divide entre el valor de la base "N" y así sucesivamente hasta obtener un último cociente cuyo valor sea menor a la base.

Luego se toma el último cociente y los residuos, del más reciente al más antiguo, formándose el número en base "N".

Ejemplo:

Representar el número 34 216 de base decimal en base 12.

34216	12			
102	2 851	12		
061	45	237	12	
016	91	117	19	12
4	7	9	7	1

$\therefore\ 34\ 216 = 17\ 974_{(12)}$

3er caso: Dado un número de base "N" representarlo en base (N ≠ 1).

Para expresar un número de base "N" (N ≠ 1) en base "K" (K ≠ 10), se expresa primero el número en base decimal y luego el valor resultante se envía a la base "K".

Ejemplo:

Representar $17\ 974_{(12)}$ en base 9.

se convierte $17\ 974_{(12)}$ a base 10, descomponiendo polinómicamente, así:

$1 . 12^4 + 7 . 12^3 + 9 . 12^2 + 7 . 12 + 4 = 34\ 216_{(10)}$

Este número lo enviamos a base 9, así:

34 216	9			
72	3 801	9		
016	20	422	9	
7	21	62	46	9
	3	8	1	5

$34\ 216 = 51\ 837_{(9)}$

$\therefore\ 17\ 974_{(12)} = 34\ 216 = 51\ 837_{(9)}$

CASOS ESPECIALES AL CAMBIAR DE SISTEMA DE NUMERACIÓN

1º Trasladar un número de un sistema no decimal a otro sistema no decimal, sin utilizar como intermediario al sistema decimal.

Se presenta dos casos:

a) Cuando la base del número dado es mayor que la base a la que se va a trasladar:

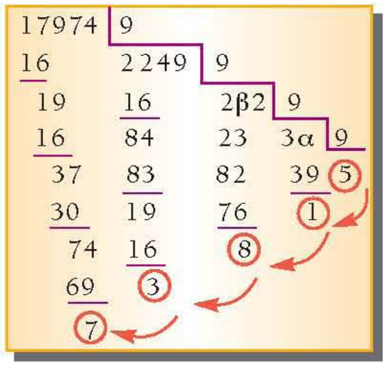
Ejemplo:

Trasladar el número $17\ 974_{(12)}$ a base 9.

Procedimiento:

Se aplica el método de las divisiones sucesivas, del número dado (dividendo) entre la nueva base (divisor) efectuando todas las operaciones en el sistema del número dado (12).

Tabla en base 12	
9 . 1 =	9
9 . 2 =	16
9 . 3 =	23
9 . 4 =	30
9 . 5 =	39
9 . 6 =	46
9 . 7 =	53
9 . 8 =	60
9 . 9 =	69
9 . α =	76
9 . β =	83



$17\,974_{(12)} = 51\,837_{(9)}$

b) Cuando la base del número dado es menor que la base ala que se va a trasladar.

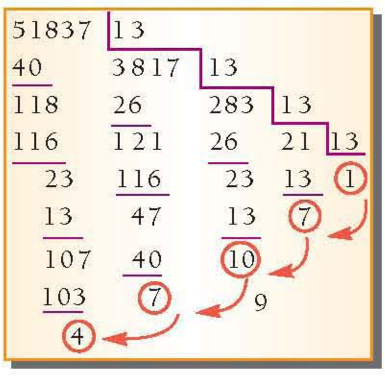
Ejemplo:

Trasladar $51837_{(9)}$ a base 12.

Procedimiento:

La nueva base (12) se traslada al sistema de número dado (9) y luego se procede como en el caso anterior, efectuando siempre todas las operaciones en el sistema (12) donde se encuentra el número dado: $12 = 10_{(12)} = 13_{(9)}$

Tabla en base 9	
13 . 1 =	13
13 . 2 =	26
13 . 3 =	40
13 . 4 =	53
13 . 5 =	66
13 . 6 =	80
13 . 7 =	103
13 . 8 =	116
13 . 9 =	130



Nótese que este residuo está en base 9, donde hay que considerar:

$$10_{(9)} = 9_{(12)}$$

$$\therefore\ 51837_{(9)} = 17974_{(12)}$$

2º Trasladar un número de base "N" a base "N^k"

Ejemplo:

Trasladar: $10011100101111110001_{(2)}$ a base 8

Esto equivale a trasladar de base 2 a base 2^3; es decir, N = 2, k = 3.

Procedimiento:

Derecha a izquierda, se separa el número dado en grupos de "K" cifras; luego cada grupo se convierte al sistema decimal (por descomposición polinómica). Cada una de estas conversiones determinará una cifra del número en base N^k.

$$\overset{10}{\underbrace{1.2}_{2}} \quad \overset{011}{\underbrace{1.2+1}_{3}} \quad \overset{100}{\underbrace{1.2^2}_{4}} \quad \overset{101}{\underbrace{1.2^2+1}_{5}}$$

$$\overset{111}{\underbrace{1.2^2 + 1.2+1}_{7}} \quad \overset{110}{\underbrace{1.2^2 + 1.2}_{6}} \quad \overset{001}{\underbrace{\quad}_{1}}$$

$$\therefore\ 10011100101111110001_{(2)} = 2345761_{(8)}$$

3º Trasladar un número de base "N^k" a base "N"

Ejemplo:

Trasladar $2345761_{(8)}$ a base dos.

Notar que; $8 = 2^3 \Rightarrow N = 2,\ k = 3$

Procedimiento:

Cada una de las cifras del número dado, se convierte a base N (aplicando divisiones sucesivas). Teniendo cuidado de obtener en cada caso períodos de K cifras. Si algún período resultase incompleto se le colocará ceros a la izquierda hasta completarlo.

2	3	4	5	7	6	1
10	011	100	101	111	110	001

$2345761_{(8)} = 10011100101111110001_{(2)}$

CAMBIOS DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN PARA NÚMEROS FRACCIONARIOS

1er. Caso: Dada una fracción exacta o limitada del sistema decimal, representarla en otro sistema de numeración.

Ejemplos:

i) Trasladar 0,7 a base 8

Procedimiento:

$$0{,}7 = \frac{7 \text{ a base } 8 \rightarrow 7_{(8)}}{10 \text{ a base } 8 \rightarrow 12_{(8)}}$$

Tabla en base 8				
12	.	1	=	12
12	.	2	=	24
12	.	3	=	36
12	.	4	=	50
12	.	5	=	62
12	.	6	=	74
12	.	7	=	106

Se realiza la división en el sistema de base 8:

$$0{,}7 = \frac{7}{10} = \frac{7_{(8)}}{12_{(8)}} = 0{,}54631_{(8)}$$

Método práctico:

Se traza una vertical en la coma de fracción del número dado. La parte decimal se multiplica por la nueva base; del resultado, la parte entera se coloca a la izquierda de la vertical y la parte decimal se vuelve a multiplicar por la nueva base y así sucesivamente. En el ejemplo, se obtuvo 5 decimales.

0,	7 x
	8
5,	6
	8
4,	8
	8
6,	4
	8
3,	2
	8
1,	6

$0{,}7 = 0{,}54631_{(8)}$

NOTA

Para convertir un número que tiene parte entera y parte decimal, se trabaja por separado trasladando primero la parte entera y luego la parte decimal; finalmente, se suma ambos resultados.

ii) Trasladar 31,237 a base 5.

Procedimiento: Empecemos con la parte entera:

```
31 |5
 1   6 |5
     1   1
```

$31 = 111_{(5)}$

En segundo lugar con la parte decimal:

0,	237 x
	5
1,	185 x
	5
0,	925 x
	5
4,	625 x
	5
3,	125 x
	5
0,	625 x

$0{,}237 = 0{,}10430_{(5)}$

∴ Se reune la parte entera con la decimal

$$\begin{array}{rcl} 31 & = & 111_{(5)} \quad + \\ 0{,}237 & = & 0{,}10430_{(5)} \\ \hline 31{,}237 & = & 111{,}10430_{(5)} \end{array}$$

2do. Caso: Dada una fracción exacta en cualquier sistema trasladarla al sistema decimal.

Ejemplo: Trasladar $0{,}2_{(7)}$ al sistema decimal.

Procedimiento:

$$0{,}2_{(7)} = \frac{2_{(7)} \rightarrow \text{a base } 10}{10_{(7)} \rightarrow \text{a base } 10}$$

Y, luego, se ejecuta la división en el sistema decimal:

$$0{,}2_{(7)} = \frac{2_{(7)}}{10_{(7)}} = \frac{2}{7} = 0{,}285714$$

Método Práctico:

Para el mismo ejercicio $0{,}2_{(7)}$, la nueva base (10) se traslada al sistema del número dado (7):

$$10 = 13_{(7)}$$

A continuación, se multiplica esta nueva base por la parte fraccionaria; la parte entera (expresada en el sistema decimal) se coloca a la izquierda de la vertical, la nueva parte fraccionaria se vuelve a multiplicar por la nueva base y así sucesivamente hasta hallar la cantidad de decimales requerida.

Tabla en base 7
13 . 1 = 13
13 . 2 = 26
13 . 3 = 42
13 . 4 = 55
13 . 5 = 101
13 . 6 = 114
13 . 7 = 130
13 . 8 = 143

$$\begin{array}{r|l} 0, & 2\ x \\ & 13 \\ \hline 2, & 6\ x \\ & 13 \\ \hline 8, & 4\ x \\ & 13 \\ \hline 5, & 5\ x \\ & 13 \\ \hline 7, & 1\ x \\ & 13 \\ \hline 1, & 3\ x \\ & 13 \\ \hline 4, & 2 \end{array}$$

$$\therefore\ 0{,}2_{(7)} = 0{,}285714$$

3er Caso: Transformar una fracción de un sistema no decimal a otro sistema no decimal.

Ejemplo: Trasladar $0{,}5_{(8)}$ al sistema nonario.

Procedimiento:

1º Se traslada al sistema decimal:

$$0{,}5_{(8)} = \frac{5_{(8)}}{10_{(8)}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{a base } 10 \\ \rightarrow \text{a base } 10 \end{array}$$

$$= \frac{5}{8} = 0{,}625$$

2º La fracción decimal equivalente, se traslada al nuevo sistema aplicando el primer caso:

$$\begin{array}{r|l} 0, & 625\ x \\ & 9 \\ \hline 5, & 625\ x \\ & 9 \\ \hline 5, & 625 \\ & \vdots \end{array}$$

$$\therefore\ 0{,}5_{(8)} = 0{,}625 = 0{,}\overset{\frown}{5}_{(9)}$$

4to Caso: Trasladar una fracción decimal inexacta a cualquier otro sistema.

Ejemplo: Convertir $0{,}\overline{7}$ a base 7.

Procedimiento:

Como $0{,}\overline{7}$ es periódica, primero se propone como equivalente a $\frac{7}{9}$, y se procede aplicando el 1º caso:

$$0{,}\overline{7} = \frac{7}{9} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{a base 7} \\ \rightarrow \text{a base 7} \end{array} \quad \frac{10_{(7)}}{12_{(7)}}$$

Y, ejecutando la división en base 7:

$$0{,}\overline{7} = \overline{0{,}5305}_{(7)} = 0{,}\overset{\frown}{530}_{(7)}$$

CONTEO DE CIFRAS Y NÚMEROS DE UNA SERIE

CÓMO CONTAR CIFRAS AL ESCRIBIR LA SERIE NATURAL

Antes de revisar la fórmula, ilustremos la naturaleza del problema con un ejemplo:

¿Cuántas cifras se ha utilizado al escribir la serie natural, hasta 9 999?

Procedimiento:

Escribimos la serie natural 1; 2; 3; .... y contamos las cifras utilizadas:

$$\underbrace{\overbrace{1,\ldots 9,}^{9\text{ números}}}_{\substack{9\,.\,1\,=\,9\\ \text{cifras}}} \quad \underbrace{\overbrace{10,\ldots,99}^{90\text{ números}}}_{\substack{90\,.\,2\,=\,180\\ \text{cifras}}} \quad \underbrace{\overbrace{100,\ldots,999}^{900\text{ números}}}_{\substack{900\,.\,3\,=\,2700\\ \text{cifras}}} \quad \underbrace{\overbrace{1000,\ldots,9999}^{9000\text{ números}}}_{\substack{9000\,.\,4\,=\,36000\\ \text{cifras}}}$$

Total= 9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889 cifras utilizadas

También puede aplicarse la siguiente fórmula:

Número de cifras = (número mayor + 1) (Cantidad de cifras del número mayor)

$$-\underbrace{11\ldots\ldots\ldots111}_{\text{Tantos “unos” como cifras tenga el número mayor}}$$

> **NOTA**
>
> Esta fórmula se puede aplicar para cualquier sistema de numeración. La operación indicada debe efectuarse en dicho sistema.

Aplicando el ejemplo anterior:

Número de cifras = (9 999 + 1)(4) - 1 111 = 38 889.

Alternativamente, se puede utilizar la siguiente fórmula para determinar cuántas cifras se ha utilizado para escribir la serie natural de los números de base "n" hasta el último número de "K" cifras.

$$\text{Número de cifras} = \left[Kn^k - \frac{n^k - 1}{n - 1}\right] \text{cifras}$$

Ejemplos:

i) Se escribe la serie natural hasta el número 99. ¿Cuántas cifras se ha utilizado?

$K = 2 \qquad n = 10$

$$\text{N° de cifras} = \left[2 \,.\, 10^2 - \frac{10^2 - 1}{10 - 1}\right] = 200 - \frac{99}{9} = 189$$

Rpta.: Se ha utilizado 189 cifras.

ii) Se escribe la serie natural hasta el número $44_{(5)}$ ¿Cuántas cifras se ha utilizado?

$K = 2 \qquad n = 5$

$$\text{N° de cifras} = \left[2 \,.\, 5^2 - \frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right] = 50 - \frac{24}{4} = 44$$

Rpta.: Se ha utilizado 44 cifras.

iii) ¿Cuántas cifras o tipos de imprenta se requiere para escribir la serie natural en el sistema nonario, hasta el último número de 3 cifras?

$K = 3 \qquad n = 9$

$$\text{N° de cifras} = \left[3 \,.\, 9^3 - \frac{9^3 - 1}{9 - 1}\right] = 2\,187 - \frac{728}{8}$$

$$= 2\,187 - 91 = 2\,096$$

Rpta.: Se requiere 2 096 cifras.

MÉTODO COMBINATORIO

Sirve para determinar cuántos números de "n" cifras existen en base "A".

Procedimiento:

Se halla para cada cifra, el número de valores que puede asumir en el sistema dado "n"; el producto de estos valores nos da el número de combinaciones.

Ejemplos:

i) ¿Cuántos números de 3 cifras existen en base 4?

Base 4 : 0, 1, 2, 3,

Estas son las únicas cifras individuales en un sistema de base 4. Si el número es de la forma $\overline{abc}$, ***a*** no puede ser cero, sólo puede ser 1, 2, ó 3; es decir, puede tener 3 valores; ***b*** sí puede ser 0, 1, 2, 3; es decir, 4 valores, lo mismo que ***c***. Entonces :

$$\overline{\begin{matrix} a & b & c \end{matrix}}$$
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

Cantidad de valores posibles = 3 . 4 . 4 = existen 48 números de 3 cifras en base 4

ii) ¿Cuántos números en base 10 serán de la forma abcd?

Las cifras usadas para números en base 10 son 10; éstas son : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Entonces, si el número dado es de la forma $\overline{abcd}$, los valores posibles son:

a	b	c	d
	↓	↓	↓
	0	0	0
1	1	1	1
2	2	.	.
3	3	.	.
4	4	.	.
5	5	.	.
6	6	.	.
7	7	.	.
8	8	.	.
9	9	9	9

9 . 10 . 10 . 10 = 9 000 números

iii) ¿Cuántos números de la forma $\overline{abb}$ existen en base 12?

Observación:

Cuando una letra se repite dentro de la representación literal del número, sólo se le da valor a una de ellas.

Solución:

$\overline{a \quad b \quad b}$

$\downarrow \quad \downarrow$

11 . 12 = existen 132 números

Fórmula generica para determinar cuantos números de “n” cifras existen en base “A”.

Cantidad de números = (A - 1)(A)(n - 1)

No válida cuando una letra se repite en la representanción literal (ver observación de ejemplo anterior).

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos números de 3 cifras no tienen ninguna cifra dos?

Solución:

Los números son de la forma $\overline{abc}$, donde “a” tomará 8 valores (no puede ser cero ni 2), “b” y “c” tomarán 9 valores (de 0 a 9, pero no 2); aplicando el método combinatorio, tendremos:

$\overline{a \quad b \quad b}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

8 . 9 . 9 = 648

Rpta: Existen 648 números

2.- ¿Cuantos números de cuatro cifras que terminan en cinco, tiene sus demás cifras pares?

Solución:

Los números son de la forma $\overline{abc5}$, donde:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overline{a \quad b \quad b \quad 5}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & \\ 2 & 2 & 2 & \\ 4 & 4 & 4 & \\ 6 & 6 & 6 & \\ 8 & 8 & 8 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\2\\4\\6\\8\end{array}}\right\} \text{valores posibles}$$

4 . 5 . 5 . 1 = 100

Rpta.: 100 números

3.- ¿Cuántos números de 3 cifras comienzan y terminan en cifra impar?

Solución:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overline{a \quad b \quad c}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & \ldots & 5 \\ 7 & \ldots & 7 \\ 9 & 9 & 9 \\ \hline \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\3\\5\\7\\9\end{array}}\right\} \text{valores posibles}$$

5 . 10 . 5 = 250

Rpta.: 250 números

4.- ¿Cuántos números de 3 cifras tiene la cifra 5?

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{números}\\ \text{de 3 cifras}\end{pmatrix}}_{900} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Los}\\ \text{números}\\ \text{sin 5}\end{pmatrix}}_{648} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Numeros}\\ \text{que tienen}\\ \text{la cifra5}\end{pmatrix}}_{252}$$

Rpta.: 252 números

5.- Si $\overline{aaa} = 4210_{(a)}$. Hallar “a”

Solución:

Descomponiendo ambos números polinómicamente:

$$a \,.\, 10^2 + a \,.\, 10 + a = 4a^3 + 2a^2 + a + 0$$

$$110a = 2a^2\,(2a + 1)$$

$$55 = a(2a + 1)$$

$$5 \,.\, 11 = a(2a + 1) \Leftrightarrow a = 5$$

Rpta.: a = 5

6.- Si $\overline{aba}_{(8)} = 1106_{(n)}$. Hallar a + b

Solución:

Debido a la presencia del número 6 en el lado derecho, y dado que el lado derecho tiene mayor cantidad de cifras podemos establecer que:

$$6 < n < 8 \Leftrightarrow n = 7$$

Por lo tanto, bastará con trasladar el número $1106_{(7)}$ a base 8; es decir: $1106_{(7)} = 616_{(8)}$.

$$\Rightarrow \overline{aba}_{(8)} = 616_{(8)}$$

$\therefore\ a + b = 6 + 1 = 7$

Rpta.: 7

7.- Hallar a + b, si:

$$\overline{aba}_{(5)} = \overline{\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)a}$$

Solución:

Observando la condición, podemos establecer que:

1) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

2) $a < 5 \wedge b < 5$

3) b es par

Descomponiendo polinómicamente ambos números se tiene:

$$\overline{aba}_{(5)} = \overline{\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)a}$$

$$a \,.\, 5^2 + b \,.\, 5 + a = \left(\frac{b}{2}\right) .\, 10^2 + \left(\frac{b}{2}\right).\ 10 + a$$

$$26a + 5b = 55b + a$$

$$25a = 50b$$

$$a = 2b \Leftrightarrow a = 4 \ \wedge \ b = 2$$

$\therefore\ a + b = 6$

Rpta.: 6

8.- El mayor número de 3 cifras del sistema de base "n" se escribe en el sistema senario como $2211_{(6)}$. ¿Cuánto vale "n" ?

Solución:

Podemos establecer :

$$\overline{(n - 1)\ (n - 1)\ (n - 1)}_{(n)} = 2\,211_{(6)}$$

Escribiendo ambos en forma polinómica para pasarlos a base 10:

$$(n - 1)\ n^2 + (n - 1)\ n + n - 1 = 511$$

$$n^3 - n^2 + n^2 - n + n - 1 = 511$$

$$n^3 = 512 \Leftrightarrow n = 8$$

Rpta.: 8

9.- Sabiendo que : $\overline{a\,(2b)\,a} = \overline{bbaa}_{(7)}$, calcular el valor de a + b

Solución :

Si $\overline{a\,(2b)\,a} = \overline{bbaa}_{(7)}$

Se deduce que: $2b < 10 \Rightarrow b < 5$

y además que: $a < 7$

Escribiendo los dos números en forma polinómica y simplificando:

$$101a + 20b = 392b + 8a$$

$$93a = 372b$$

$$a = 4b \Leftrightarrow a = 4 \ \wedge \ b = 1$$

$\therefore\ a + b = 5$

Rpta.: 5

10.- Si : $\overline{abab}_{(5)} = \overline{bcb}$; hallar: (a + b + c).

Observemos que:

1) $0 < a \leq 4$

2) $b \leq 4$

3) $c \leq 9$

Solución:

$\overline{abab}_{(5)} = \overline{bcb}$

Expresando en forma polinómica:

$$a \,.\, 5^3 + b \,.\, 5^2 + a \,.\, 5 + b = b \,.\, 10^2 + c \,.\, 10 + b$$

Simplificando:

$$130a = 75b + 10c$$

$$26a = 15b + 2c$$

$$b = \frac{2\,(13a - c)}{15} \Leftrightarrow a = 3,\quad c = 9,\ b = 4$$

$\therefore\ a + b + c = 16$

Rpta.: 16

11.- Hallar "a" y "b" si:

$$\overline{(2a)\ ba}_{(6)} = \overline{bab}_{(7)}$$

Solución:

Podemos observar que:

1) $2a < 6 \;\Rightarrow\; a < 3$

2) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

3) $b < 6$

Escribiendo polinómicamente:

$$\overline{(2a)\,ba}_{(6)} = \overline{bab}_{(7)}$$

$$2a \cdot 6^2 + 6.b + a = b.7^2 + a.7 + b$$

$$72a + 6b + a = 49b + 7a + b$$

$$66a = 44b$$

$$3a = 2b \Rightarrow a = 2 \;\wedge\; b = 3$$

Rpta.: $a = 2$; $b = 3$

12.- Si $\overline{aab}_{(5)} = \overline{bbb}_{(b+1)}$

Hallar: $(b - a)$, siendo $a \neq b$.

Solución:

Escribiendo polinómicamente y simplificando :

$$30a + b = b(b+1)^2 + b(b+1) + b$$

$$30a = b\,(b+1)\,[(b+1)+1]$$

$$2.3.5a = b\,(b+1)\,(b+2)$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad \wedge \quad b = 3$$

$\therefore\; b - a = 1$

Rpta.: 1

13.- Si $\overline{a33}_{(9)} = \overline{b00}_{(8)}$ ¿cuánto vale $(a + b)$?

Solución:

$$\overline{a33}_{(9)} = \overline{b00}_{(8)}$$

$$81a + 30 = 64b$$

$$3\,(27a + 10) = 64 \cdot b \;\Rightarrow\; b = 3 \,,\, a = 2$$

$\therefore\; a + b = 5$

Rpta.: 5

14.- ¿Cuántos números "capicúa" de 7 cifras, cuyas sumas de cifras sea impar, existen en base 10?

Solución:

Recordemos que se llama *capicúa* a aquel número cuyas cifras equidistantes de los extremos son iguales. En otras palabras, es igual leerlos de izquierda a derecha que viceversa.

Los números son de la forma:

capicúa de 7 cifras: $\overline{a\,b\,c\,d\,c\,b\,a}$

Para que la suma de sus cifras sea impar, "d" sólo puede tomar 5 valores: 1, 3, 5, 7, 9. Entonces:

$$\text{Número de cifras} = (a + b + c) + d$$

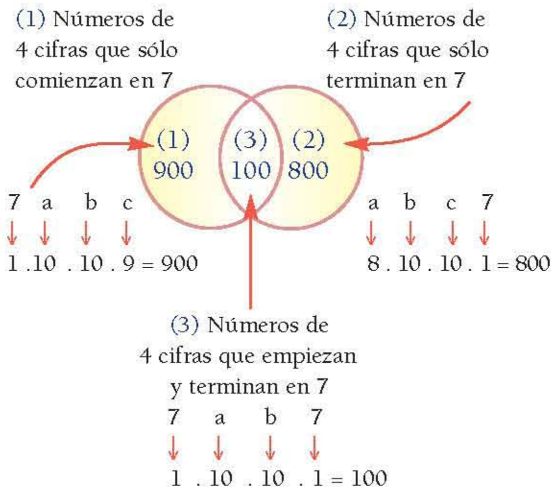
$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45 \cdot 10^2$$

$$= 4\,500$$

Rpta.: Existen 4 500 números.

15.- ¿Cuántos números de 4 cifras comienzan o terminan en 7?

Solución:



$\therefore$ Número de 4 cifras que empiezan o terminan en 7 = 900 + 100 + 800 = 1 800

Rpta.: 1 800 números.

16.- Escribiendo un cero a la izquierda de un número entero, se ha aumentado este número en 15 552. ¿Cuál es este número?.

Solución:

Sea "N" el número buscado, escribiendo un cero a su derecha, el resultado sería : 10 N.

Luego, el número ha aumentado en 9 N. Entonces:

$$9\,N = 15\,552$$

$\therefore\; N = 1\,728$

Rpta.: El número buscado es 1 728

17.- ¿Cuántos valores puede tomar "m", si se cumple que?

$$nn_{(11)} + nm_{(12)} + (n+1)c_{(13)} < 282$$

Solución:

Descomponiendo los sumandos en forma polinómica:

$$11n + n + 12n + m + 13n + 13 + c < 282$$
$$37n + 13 + m + c < 282$$
$$37n + m + c < 269 \qquad (1)$$

Analizando esta expresión, se deduce que:

$$m + c \leq 11 + 12$$

(ya que m y c son cifras de los sistemas de base 12 y 13, y sabemos que las cifras son menores que la base).

También se infiere que:

$$37n < 269 - 23$$
$$37n < 246$$

Deduciendo valores:

$n < 7$, si usamos $n = 6$ en (1):

$m + c < 47$, "m" puede tomar los valores: 0, 1, 2, ..., 11.

Rpta.: "m" puede tomar 11 valores como máximo, y 1 valor como mínimo.

18.- Efectuar la multiplicación en el sistema de base 7: 43 2235 . 1 235 y comprobar con la prueba de los seis.

Solución:

$$\begin{array}{r} 432235 \times \\ 1235 \\ \hline 3124544 \\ 1630041 \\ 1164503 \\ 432235 \\ \hline 604443554 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 5 & \times & 5 \\ & 5 & \end{array}$$

19.- Hallar la diferencia de los números $\overline{1\alpha30}$ y $\overline{68\beta}$ en base duodecimal.

Solución:

$$\begin{array}{r} \overline{1\alpha30} - \\ \overline{68\beta} \\ \hline 1361 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 11 \end{array}$$

En el 1er. orden: 11 a 12, 1; pongo 1 y llevo 1.

En el 2do. orden:

8 + 1 = 9; 9 a 15, 6; pongo 6 y llevo 1.

En el 3er orden:

6 + 1 = 7; 7 a 10, 3; pongo 3, no llevo nada.

En el 4to. orden: Bajo el 1.

Rpta. : $1361_{(12)}$

20.- El mayor número de 3 cifras diferentes en cierto sistema de numeración convertido a base 6 es $313_{(6)}$. Hallar la base de aquel sistema.

Solución:

Sea "n" la base buscada. El mayor número de 3 cifras diferentes que se puede escribir en base "n" es:

$$\overline{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}_{(n)}$$

y, según datos:

$$313_{(6)} = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)_{(n)} \qquad (1)$$

Descomponiendo polinómicamente ambos miembros:

$$3\,.\,6^2 + 1\,.\,6 + 3 = (n-1)\,n^2 + (n-2)\,n + (n-3)$$
$$117 = n^3 - n - 3$$
$$120 = n^3 - n$$
$$120 = n\,(n^2 - 1)$$

pero: $(n^2 - 1) = (n+1)\,(n-1)$

$\therefore\ 120 = n\,(n+1)\,(n-1)$

dado que: $120 = 4\,.\,5\,.\,6$

$\therefore\ 4\,.\,5\,.\,6 = n\,(n+1)\,(n-1)$

Ordenando de una manera conveniente:

$$4\,.\,5\,.\,6 = (n-1)\,n\,(n+1)$$

De donde se deduce que : n = 5

Rpta.: La base es 5.

21.- ¿En qué sistema de numeración los números 123, 140 y 156 forman una progresión aritmética?

Solución:

Sea “n” la base del sistema; se cumple, por propiedad de una progresión aritmética, que:

$$156_{(n)} - 140_{(n)} = 140_{(n)} - 123_{(n)}$$

Descomponiendo polinómicamente se concluye que: n = 9

Rpta.: En el sistema nonario.

22.- ¿En qué sistema de numeración el número 16000 se escribe 1003000 ?

Solución:

Sea “n” la base del sistema:

$$16\,000 = 1\,003\,000_{(n)}$$

Descomponiendo 16 000 en sus factores primos y $1\,003\,000_{(n)}$ en forma polinómica:

$$2^7 . 5^3 = n^6 + 3n^3$$

$$2^7 . 5^3 = n^3 (n^3 + 3) \Rightarrow \quad n = 5$$

Rpta.: En el sistema quinario.

23.- Un número escrito en el sistema binario tiene ocho cifras, ¿cuántas puede tener en el sistema duodecimal?

Solución:

Recordemos que cualquier número puede representarse dentro del límite comprendido por dos potencias consecutivas de su base, donde el exponente del límite superior es igual al número de cifras que tenga el número.

Observemos la siguiente inducción en el sistema decimal:

$$\begin{array}{ccccc} 10^0 & \leq & \overline{a} & < & 10^1 \\ 10^1 & \leq & \overline{ab} & < & 10^2 \\ 10^2 & \leq & \overline{abc} & < & 10^3 \\ & & \vdots & & \\ 10^{n-1} & \leq & \overline{abc \ldots xyz} & < & 10^n \end{array}$$

Entonces, si N tiene 8 cifras en el sistema binario, tenemos:

$$2^7 \leq N < 2^8$$

Por otra parte:

$$12^1 < 2^7 < 12^2 \wedge 12^2 < 2^8 < 12^3$$

Por lo tanto N está comprendido entre 12^1 y 12^2 o entre 12^2 y 12^3. Según ésto, N tiene dos o tres cifras en el sistema duodecimal.

Rpta.: Tendrá 2 ó 3 cifras.

24.- Para numerar un libro inicialmente se necesita 801 tipos de imprenta (tipos son las letras o cifra individuales). Pero finalmente, se divide el libro en tres capítulos; siendo la diferencia de páginas entre dos capítulos sucesivos de 18 páginas. si la numeración de cada capítulo empieza en 1, ¿cuántos tipos menos que el primer caso se emplearán en esta nueva numeración?

Solución:

Averigüemos cuántas páginas tiene el libro si se usa 801 tipos, como indica el primer caso:

$$\underbrace{\underbrace{1, 2 \ldots, 9,}_{9 \text{ tipos}} \quad \underbrace{10, 11, \ldots, 99,}_{180 \text{ tipos}}}_{99 \text{ páginas}} \quad \underbrace{\underbrace{100, 101 \ldots}_{612 \text{ tipos}}}_{204 \text{ páginas}}$$

Quedan: 801 - (9 + 180) = 612 tipos, y con ellos se puede escribir: 612 3 = 204 números de 3 cifras.

El libro posee: 99 + 204 = 303 páginas; la última página será la 303.

- Se divide en 3 capítulos: si “n” es el número de páginas del primer capítulo:

$$\overbrace{n}^{\substack{\text{I} \\ \text{Capítulo}}} + \overbrace{(n + 18)}^{\substack{\text{II} \\ \text{Capítulo}}} + \overbrace{(n + 36)}^{\substack{\text{III} \\ \text{Capítulo}}} = 303 \rightarrow n = 83$$

Lo que quiere decir que el capítulo I tiene 83 págs., el cap. II tiene 83 + 18 = 101 págs., etc. Como todos los capítulos empezarán con la pág. 1, se tiene:

- Capítulo I de 83 páginas; # de tipos utilizados:

$$\underbrace{1, 2, \ldots, 9,}_{9 \text{ tipos}} \quad \underbrace{10, 11, \ldots, 83}_{148 \text{ tipos}} = 157 \text{ tipos}$$

- Capítulo II de 83 + 18 = 101 páginas, número de tipos utilizados:

$$\underbrace{1, 2, \ldots, 9,}_{9 \text{ tipos}} \quad \underbrace{10, 11, \ldots, 99,}_{180 \text{ tipos}} \quad \underbrace{100\ 101}_{6 \text{ tipos}} = 195 \text{ tipos}$$

- Capítulo III de 83 + 36 = 119 páginas, número de tipos utilizados:

$$\underbrace{1,2,\ldots,9,}_{9 \text{ tipos}} \quad \underbrace{10,11,\ldots,99,}_{180 \text{ tipos}} \quad \underbrace{100,\ldots,119}_{60 \text{ tipos}} = 249 \text{ tipos}$$

Total de tipos empleados en esta forma de numeración:

$$157 + 195 + 249 = 601$$

$\therefore$ 801 - 601 = 200

Rpta.: Se empleó 200 tipos menos.

25.- Hallar "x" si se cumple:

$$0{,}1664 = 0{,}0404_{(x)}$$

Solución:

Descomponiendo ambos miembros polinómicamente:

$$\frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1\,000} + \frac{4}{1\,000} = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4}$$

Se deduce que x < 10 y como 4 es una cifra del sistema de base x, x > 4; como x es entero, solamente podrá tener como factores primos a 2 ó 5. Por lo tanto, a priori "x" no puede ser más que 8 ó 5; 8 es visiblemente muy grande, porque:

$$\frac{4}{8^2} < \frac{1}{10}$$

Si "x" existe, no puede ser más que 5.
En efecto:

$$\frac{4}{25} + \frac{4}{625} = \frac{16}{100} + \frac{64}{10\,000} = \frac{1\,664}{10\,000}$$

Rpta.: x = 5

26.- ¿Cuántos números capicúas o polindrómicos de 7 cifras existen cuya suma de sus cifras sea impar?

Solución:

Los números capicúas son de la forma:

$$\overline{a\,b\,c\,d\,c\,b\,a}$$

Además, se debe cumplir que:

a + b + c + d + c + b + a = número impar

2a + 2b + 2c + d = número impar

Para que esta suma sea impar, entonces d tiene que ser impar.

$$\therefore \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & c & b & a \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 9\ . & 10\ . & 10\ . & 5 & = & 4\,500 & \end{array}$$

Rpta.: Existen 4 500 números impares de 7cifras.

27.- Un libro se empieza a numerar desde su primera página y se nota que 58 números empiezan con la cifra 7. ¿Cuántos números escritos terminan en 7?

Solución:

Por dato, los que empiezan en 7 son 58 números:

$$7 \rightarrow 1 \text{ número}$$

$$70, \ldots, 79 \rightarrow 10 \text{ números.}$$

$$700, \ldots, \overline{7ab} \rightarrow 47 \text{ números}$$

$$\Leftrightarrow \overline{7ab} = 746$$

Entonces, los números terminados en 7, hasta el 746, son:

Del	hasta		
1	99	10 números	
100	199	10 números	
200	299	10 números	70 números
	.		
	.		
	.		
600	699	10 números	

además, los siguientes números

707, 717, 727, 737 → 4 números

$\therefore$ Existen: 70 + 4 = 74 números que terminan en la cifra 7.

Rpta.: 74 números.

28.- ¿Cuántos números capicúas de 10 cifras tienen a un número par como producto de sus cifras?

Solución:

El total de números capicúas:

$$\begin{array}{cccccccccc} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \overline{e} & \overline{e} & \overline{d} & \overline{c} & \overline{b} & \overline{a} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ 9 & .10 & .10 & .10 & .10 & = & \multicolumn{4}{l}{90\,000 \text{ números}} \end{array}$$

De los cuales el producto de sus cifras será impar sólo cuando todas sus cifras sean impares; es decir:

$$\begin{array}{cccccccccc} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \overline{e} & \overline{e} & \overline{d} & \overline{c} & \overline{b} & \overline{a} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ 5 & .\,5 & .\,5 & .\,5 & .\,5 & = & \multicolumn{4}{l}{3\,125 \text{ números.}} \end{array}$$

∴ El Producto de sus cifras será par en todos los demás casos:

$$90\,000 - 3\,125 = 86\,875 \text{ números.}$$

Rpta.: 86 875

29.- ¿Cuántos números de 4 cifras tienen como suma de sus dígitos un número menor o igual a 33?

Solución:

Los números son de la forma:

$$\begin{array}{ccccl} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \text{donde } \; a + b + c + d \le 33 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 9 & .\,10 & .\,10 & .\,10 & = 9\,000 \text{ números en total} \end{array}$$

De los cuales, aquellos cuya suma de cifras da 36 son:

$a + b + c + d = 36$ (4 nueves; 1 sólo caso)

$9 + 9 + 9 + 9$

Aquellos cuya suma de cifras es igual a 35 son:

9 998, 9 989, 9 899, 8 999
(3 nueves y 1 ocho; 4 casos)

Los que la suma de sus cifras da 34 son:

8 899, 9 889, 9 988, 8 989, 9 898, 8 998
(2 ochos y 2 nueves 6 casos)

7 999, 9 799, 9 979, 9 997
(1 siete y 3 nueves; 4 casos).

∴ Los números de 4 cifras cuya suma de cifras es menor o igual a 33 son:

$$9\,000 - (1 + 4 + 6 + 4) = 8\,985$$

Rpta.: Hay 8 985 números.

30.- Hallar cuántos números de la forma:

$$\overline{a\,(3a)\,(c+2)\,c\,b(2b)}$$

son mayores que 234 567.

Solución:

Dado que:

$\overline{a\,(3a)\,(c+2)\,c\,b\,(2b)} > 234\,567$

Se deduce que:

$a \ge 2$

Si $3a \le 9 \Rightarrow a = 2 \;\; \vee \;\; a = 3$ (2 valores)

También:

$c + 2 \ge 9 \Rightarrow c = 0,1,2,\ldots,7$ (8 valores)

$2b \le 9 \Rightarrow b = 0,1,2,3,4$ (5 valores)

Podemos establecer que:

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{\overline{a\,(3a)\,(c+2)\,c\,b\,(2b)}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ 2 & & 1 & & 1 & & \\ 3 & & . & & . & & \\ & & . & & 4 & & \\ & & . & & & & \\ & & 7 & & & & \\ \hline 2 & . & 8 & . & 5 & = & 80 \text{ valores} \end{array}$$

Rpta.: Existen 80 números.

31.-Hallar un número de 4 cifras tal que sumado con el doble de la suma de sus cifras se obtenga un nuevo número formado por 5 unidades del cuarto orden, 4 decenas de decenas, 5 milésimas de unidad del quinto orden y una unidad simple.

Solución:

Nota previa:

1 Unidad del quinto orden < > 10 000

∴ 1 milésima de unidad del quinto orden < > 10, por consiguiente:

5 unidades de milésimas del quinto orden < > 50.
Regresando al problema:

Sea $\overline{abcd}$ el número. Podemos establecer que:

$\overline{abcd} + 2(a + b + c + d) = 5\,000 + 400 + 50 + 1$

Polinómicamente se obtiene:

$1\,002 \cdot a + 102 \cdot b + 12 \cdot c + 3 \cdot d = 5\,451$

$\Rightarrow$ a = 5, porque lo máximo que podrían sumar los tres últimos términos sería:

$(102 + 12 + 3)\,9 = 1\,053$; entonces:

$1\,002\,(5) + 102 \cdot b + 12 \cdot c + 3 \cdot d = 5\,451$

$\Rightarrow b = 3 \quad \vee \quad b = 4$

$102b + 12c + 3d = 441$

Si $b = 3 : 12c + 3d = 441 - 3\,(102) = 135$

$\Rightarrow$ $c = 9 \wedge d = 9$ (de aquí un número)

Si $b = 4 : 12c + 3\,d = 441 - 4\,(102) = 33$

$\Rightarrow$ $c = 1 \vee c = 2$ y $d = 3 \vee d = 7$ (de aquí dos números)

Conclusión:

$\therefore$ los números son: 5 399, 5 417, 5 423

Rpta.: 5 399, 5 417, 5 423

32.- Para numerar la primera mitad de las páginas de un libro se utilizó 147 "tipos" o cifras. ¿Cuántos tipos se utilizará para numerar el total de páginas?

Solución:

En la primera mitad se debió utilizar 147 cifras, es decir:

De la pag.	A la pag.	cifras utilizadas
1	9	9(1) = 9 cifras
10	19	10(2) = 20 cifras
20	29	10(2) = 20 cifras
30	39	10(2) = 20 cifras
40	49	10(2) = 20 cifras
50	59	10(2) = 20 cifras
60	69	10(2) = 20 cifras
70	78	9(2) = 18 cifras
		Total = 147 cifras

Con 147 cifras se llega hasta la página 78.

$\therefore$ El libro tiene $78 \cdot 2 = 156$ páginas.

Calculemos el número de cifras utilizadas en la segunda mitad del libro:

79	99	21(2)	=	42 cifras
100	156	57(3)	=	171 cifras
		Total	=	213 cifras

$\therefore$ Para numerar el total de páginas se utilizó

147 + 213 = 360 cifras o "tipos"

Rpta.: 360

33.- ¿Cuántos números de 5 cifras que comienzan con 23 tienen alguna cifra "cero" en su escritura?

Solución:

Calculemos previamente

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & a & b & c \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 9 & 9 & 9 \\ \hline 1 & . \ 1 & . \ 10 & . \ 10 & . \ 10 \end{array} = 1\,000 \text{ números}$$

De los cuales no utilizan cero:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & a & b & c \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 9 & 9 & 9 \\ \hline 1 & . \ 1 & . \ 9 & . \ 9 & . \ 9 \end{array} = 729 \text{ números}$$

$\therefore$ Utilizan alguna cifra cero en su escritura:

1 000 - 729 = 271 números

Rpta.: 271

34.- ¿Cuántos números pares de cuatro cifras menores que 5 000 tienen al menos dos cifras pares?

Solución:

Los números, son de la forma:

$\overline{abcd} < 5\,000$

a	d
1	0
2	2
3	4
4	6
	8

1° Tienen dos cifras pares y son números pares:

$\overline{abcd}$

I I P P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250 números.
I P I P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250 números.
P I I P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250 números.

Total = 750 números (1)

2° Tienen tres cifras pares y son números pares:

$\overline{abcd}$

I P P P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250
P P I P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250
P I P P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250

Total = 750 números (2)

3° Tienen cuatro cifras pares:

$\overline{abcd}$

P P P P ⇒ 2 . 5 . 5 . 5 = 250 números (3)

Sumando (1) + (2) + (3):

Existen 750 + 750 + 250 = 1 750 números

Rpta.: 1 750

35.- ¿Cuántos números capicúas de siete cifras emplean sólo dos cifras "cinco"?

Solución:

$\overline{abcdcba}$

Si a = 5: 1 . 9 . 9 . 9 = 729 números
Si b = 5: 8 . 1 . 9 . 9 = 648 números
Si c = 5: 8 . 9 . 1 . 9 = 648 números

Total = 2 025 números

Rpta.: Existen 2 025 números.

36.- ¿Cuántos números de tres cifras tiene algún 5 en su escritura?

Solución:

$\overline{abc}$

Si a = 5 1 . 9 . 9 = 81 números
Si b = 5 8 . 1 . 9 = 72 números
Si c = 5 8 . 9 . 1 = 72 números
Si a = 5 y b = 5 1 . 1 . 9 = 9 números
Si a = 5 y c = 5 1 . 9 . 1 = 9 números
Si b = 5 y c = 5 8 . 1 . 1 = 8 números
Si a = 5, b = 5 y c = 5 1 . 1 . 1 = 1 número

252 números

Rpta.: Existen 252 números.

37.- Para enumerar las páginas de un libro se usó 768 cifras, si se malogró la cifra 6 y se tuvo que usar el 9 invertido, determinar cuántas veces se tuvo que usar la cifra 9.

Solución:

En primer lugar, se hallará el número de páginas del libro. De las 768 cifras, se usó 9 en las unidades; 90 . 2 = 180 en las cifras del 10 al 99 y el resto, en numerar del 100 al N.

$\Rightarrow \; 768 = 9 + 180 + 3\,(N - 99) \Rightarrow N = 292$

Entonces el libro tiene 292 páginas.

Por otra parte:

Números 6 y 9 usados en el orden de las unidades:

$6, 16, 26, \ldots, 286 \rightarrow \dfrac{286 - 6}{10} + 1 = 29$

$9, 19, 29, \ldots, 289 \rightarrow = \dfrac{289 - 9}{10} + 1 = 29$

En el orden de las decenas:

$\underbrace{60, 61, \ldots, 69}_{10} + \underbrace{160, \ldots, 169,}_{10} + \underbrace{260, \ldots, 269,}_{10} = 30$

$\underbrace{90, \ldots, 99}_{10} + \underbrace{190, \ldots, 199}_{10} = 20$

290, 291, 292; hay 3 cifras que usan el 9.

$\therefore$ Total : 29 + 29 + 30 + 20 + 3 = 111

Rpta.: 111

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se escribe todos los números de 4 cifras a continuación uno de otro y en orden creciente. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 1 425?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

2. En un libro de 960 páginas, ¿cuántos tipos se emplea en la numeración de las páginas impares?

a) 1 128 b) 1 272 c) 1 312 d) 1 385

3. Para numerar las 22 últimas páginas de un libro se utilizó 71 tipos. ¿Cuántos tipos se empleó en total?

a) 2 889 b) 2 943 c) 2 909 d) 2 924 e) 2 902

4. En un libro de 2 340 páginas se arranca todas las que terminan en 2. ¿Cuántas páginas quedan?

a) 2 000 b) 2 106 c) 2 100 d) 1 875 e) 1 872

5. Para colocar la numeración en los casilleros de una oficina de correos se empleó 316 unos. ¿Cuántas casillas postales como mínimo hay en esta oficina si la numeración es correlativa y empieza en 1?

a) 1 018 b) 916 c) 387 d) 1 011 e) 1 425

6. En un libro, si tuviera una hoja más, se hubiera utilizado 10 tipos más; si tuviera 1 hoja menos, se hubiera utilizado 9 tipos menos. ¿Cuántas páginas terminan en 5?

a) 1 000 b) 908 c) 675 d) 555

7. Si escribimos la serie natural de los números del 1 al 400. ¿Cuántas veces marcamos la cifra cero?

a) 71 b) 62 c) 80 d) 81 e) 69

8. Si $\overline{a0}_{(8)} \cdot \overline{bb}_{(8)} \cdot \overline{ba}_{(8)} = 12\,430_{(8)}$

Hallar (a + b).

a) 10 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

9. ¿Cuántos números de 3 cifras existen en base 7, en los cuales una cifra se repite 2 veces solamente?

a) 108 b) 102 c) 17 d) 600 e) 699

10. Al imprimir un libro se emplea 810 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos se usaría para numerar el mismo libro en base 8?

a) 820 b) 758 c) 112 d) 848 e) 810

11. Si en la base decimal se elimina todos los números pares y los que comienzan con cifra impar. ¿Cuántos números de 4 cifras quedan?

a) 2 000 b) 2 500 c) 3 600 d) 4 500 e) 7 000

12. ¿Cuál de los siguientes números es mayor?

1° $\overline{6n3}_{(7)}$ 2° $\overline{5m3}_{(3)}$ 3° $\overline{6m3}_{(7)}$ 4° $\overline{nm3}_{(7)}$ 5° $\overline{4m7}_{(8)}$

NOTA: m y n tienen los mismos valores en los 5 casos.

a) 1° b) 2° c) 3° d) 4° e) 5°

13. Si al sumar: $\overline{xyyz}_{(11)} + \overline{zyxy}_{(11)}$ se obtiene 13 064 en el sistema decimal. Hallar (x + y + z).

a) 17 b) 13 c) 15 d) 28 e) 18

14. ¿Cuántas páginas tiene un libro que en sus 100 últimas páginas se utilizó 236 tipos?

a) 135 b) 164 c) 165 d) 136 e) 134

15. ¿Cuántos números de 4 cifras que poseen cero existen?

a) 1 825 b) 1 824 c) 2 438 d) 2 439 e) 1 999

16. A un número de 4 cifras en base 5, se le resta el doble de la suma de sus cifras y se obtiene $3\,341_{(5)}$. ¿Cuál es la suma máxima de las cifras en base 5?

a) $13_{(5)}$ b) $23_{(5)}$ c) $21_{(5)}$ d) $22_{(5)}$ e) $10_{(5)}$

17. ¿Cuántos números capicúa de 5 cifras, que terminan en cifra impar existen en base doce?

a) 864 b) 720 c) 39 400 d) 40 000

e) 32 000

18. ¿Cuántas cifras son necesarias para escribir todos los números de 3 cifras del sistema de base 5 en base 10?

a) 297 b) 300 c) 225 d) 1 032 e) 228

19. ¿En qué sistema de numeración $40\,404_{(5)}$ se escribe con 3 cifras iguales?

a) 8 b) 10 c) 30 d) 15 e) 25

20. Si a 234 le falta 76 para ser 321. ¿Cuánto le falta a 45 para ser 123?

a) 78 b) 68 c) 67 d) 88 e) 82

21. Si: $331 = 1311_{(n)}$. Hallar "n"

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 13

22. Hallar el resultado en base 8:

$$S= 312_{(6)} + 122_{(12)} + 121_{(4)}$$

a) $S= 311_{(8)}$ b) $S= 467_{(8)}$ c) $S=735_{(8)}$

d) $S=520_{(8)}$ e) $S= 382_{(8)}$

23. ¿Cuántos números hay entre $231_{(7)}$ y $646_{(7)}$?

a) 211 b) 209 c) 308 d) 311 e) 207

24. ¿Cómo se escribe en base 8 el mayor capicúa de cuatro cifras en base 5?

a) $2\,143_{(8)}$ b) $1\,000_{(8)}$ c) $1\,160_{(8)}$

d) $500_{(8)}$ e) $342_{(8)}$

25. Al escribir del 1 al $100_{(n)}$ se emplean 122 cifras. Hallar "n".

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n > 8

26. Halle Ud. la siguiente suma y dé su respuesta en base 11.

$$42_{(6)} + 42_{(7)} + 42_{(8)} + \ldots + 42_{(80)}$$

a) $13\,050_{(11)}$ b) $9\,894_{(11)}$ c) $4\,02_{(11)}$

d) $9\,872_{(11)}$ e) $13\,078_{(11)}$

27. Al escribir los números naturales, desde el $\overline{ab}$ hasta el $\overline{40b}$, se ha utilizado 1 083 cifras. Hallar a + b.

a) 2 b) 3 c) 1 d) 5 e) 6

28. Si se escribe el mayor número de 3 cifras diferentes de la base 12 en base 11. ¿En qué cifra termina?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 5 e) 2

29. Si $\overline{abab}_{(5)} = \overline{bcb}$; hallar (a + b + c).

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) N. A.

30. Hallar a + b + c, si: $1\,011_{(4)} = \overline{abc}_{(5)}$

a) 10 b) 5 c) 8 d) 9 e) 6

31. El mayor número de tres cifras del sistema de base n se escribe en el sistema senario como 2 211. ¿Cuánto vale n?

a) 6 b) 9 c) 7 d) 8 e) 5

32. Si el número $\overline{nnn}$ se escribe en base "n" como 4 210. ¿Cuántas cifras significativas se usa en base n?

a) 4 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

33. Hallar "a" y "b", si: $\overline{(2a)\,ba}_{(6)} = \overline{bab}_{(7)}$

a) a = 2, b= 3 b) a = 3, b = 2 c) a = 1, b = 4

d) a = 4, b = 1 e) N.A.

34. Sabiendo que: $\overline{a(2b)a} = \overline{bbaa}_{(7)}$ calcular el valor de a + b.

a) 8 b) 5 c) 9 d) 4 e) 6

35. Hallar m + n + r + s, sabiendo que:

$$\overline{mnrs}_{(11)} = \alpha\beta\alpha_{(13)}$$

a) 12 b) 10 c) 9 d) 13 e) 18

36. Hallar a + b, si $\overline{a4b}_{(8)} = \overline{ba2}_{(13)}$

a) 8 b) 7 c) 6 d) 9 e) N. A.

37. Hallar en base diez el menor número $\overline{abc}_{(5)}$, si $\overline{3bc}_{(7)} = \overline{221a}_{(4)}$

a) 34 b) 39 c) 33 d) 22 e) 29

38. ¿Cuántas cifras se emplea para escribir todos los números capicúa de 5 cifras, que se puede formar usando solamente las cifras pares?

a) 400 b) 500 c) 2 500 d) 12 500

e) 100

39. Hallar: a + b, si: $\overline{ab}_{(9)} + \overline{ba}_{(8)} = \overline{aaa}_{(8)}$

a) 5 b) 12 c) 15 d) 7 e) 8

40. Hallar "n", si: $1\,331_{(n+1)} = 2\,000_{(8)}$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

41. Calcular: (3a - 2b - 3c + 5d), sabiendo que: $\overline{ab}_{(5)} + \overline{cb}_{(5)}$ es igual a $\overline{ad}_{(6)}$ donde a,b,c y d, son cifras diferentes.

a) 26 b) 30 c) 35 d) 29 e) 32

42. Hallar en base doce el número que se representa en base cuatro como $\overline{2220c}$.

a) No se puede determinar b) $\overline{48c}_{(12)}$

c) $\overline{120c}$ d) $\overline{160c}$ e) Ninguna anterior.

43. Hallar a + b si: $\overline{a5b} - \overline{ba(a+1)} = \overline{2a(a-1)}$

a) 13 b) 5 c) 11 d) 10 e) N. A.

44. Hallar a + b + c + d (todos diferentes entre sí), si: $\overline{ab}_{(9)} = \overline{cd}_{(8)}$. Además $\overline{ab}$ es m8 y $\overline{cd}$ es m9.

a) 23 b) 20 c) 21 d) 19 e) N. A.

45. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes existen en la base 12?

a) 10 980 b) 9 000 c) 12 100

d) 10 890 e) Ninguna anterior

46. ¿Cuántas cifras posee el número $1\alpha98_{(15)}$ en el sistema de base tres?

a) 6 b) 8 c) 7 d) 9 e) 10

47. Encontrar el menor número de 4 cifras de base 10, tal que la suma de sus cifras sea 12. Si lo convertimos a la base 12, se escribe como:

a) $6\alpha9_{(12)}$ b) $719_{(12)}$ c) $6\alpha\alpha_{(12)}$

d) $7\alpha\beta_{(12)}$ e) $7\alpha\alpha_{(12)}$

48. ¿En qué sistema de numeración el número 171 se escribe como un número de 3 cifras iguales?

a) 5 b) 7 c) 8 d) 9 e) 6

49. ¿Cuántos números impares de 3 cifras no poseen ninguna cifra cero en su escritura?

a) 228 b) 125 c) 100 d) 405 e) 360

50. Si $251_{(n)} \cdot 42_{(n)} = \overline{xyz2}_{(n)}$. Determinar (x + y + z).

Dar la respuesta en base diez.

a) 32 b) 46 c) 28 d) 26 e) 24

51. Si: $\overline{abc}_{(8)} - \overline{cba}_{(8)} = \overline{3xy}_{(8)}$. Determinar "b" sabiendo que es igual a la tercera parte de la suma de a + c.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

52. Hallar la suma de las cifras del complemento aritmético de un número de 3 cifras. La suma de estas 3 cifras es 10.

a) 15 b) 16 c) 18 d) 19 e) 20

53. Para escribir los números enteros y consecutivos desde el número $\overline{ab}$ hasta el número $\overline{abc}$ se ha empleado 883 cifras. Hallar (a + b).

a) 8 b) 6 c) 10 d) 11 e) 12

54. ¿Cuántas páginas tiene un libro sabiendo que en la numeración de sus últimas 5 hojas se ha utilizado 33 tipos de imprenta? Dar como respuesta la suma de las cifras de la última página.

a) 3 b) 4 c) 8 d) 12 e) 6

55. Se escribe en forma sucesiva todos los números de 3 cifras que comienzan con 7. ¿Cuántas cifras no son cifras "siete"?

a) 180 b) 120 c) 179 d) 121 e) N. A.

56. Hallar "a" si: $\overline{2aa}_{(3a)} = \overline{a6a}_{(7)}$

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4 e) 6

57. Si $\overline{AMS}_{(8)} + 77_{(8)} = \overline{SMA}_{(8)}$. Determinar el valor máximo de (A + M + S). Respuesta en base diez.

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 20

58. Con las cifras 1; 2; 3; 6; 8 y 9, ¿cuántos números pares de 4 cifras diferentes se puede formar?

a)120 b) 160 c) 100 d) 180 e) 60

59. ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema eptal, al pasarse a base 6, tienen también 3 cifras? Respuesta en base diez.

a)215 b) 156 c) 161 d) 167 e) 172

60. Hallar el 60° término en la siguiente sucesión: 7; 11; 19; 31; 47; ...

a) 1 777 b) 7 837 c) 3 547 d) 3 667

e) 7 087

61. Determinar la suma de los siguientes números impares consecutivos:

$$S = 23_{(n)} + 30_{(n)} + 32_{(n)} + \ldots + 311_{(n)}$$

Respuesta en base diez.

a) 3 290 b) 1 692 c) 1 645 d) 875

e) 1 875

62. Hallar el valor de: $\dfrac{0{,}2_{(4)}}{0{,}6_{(8)}}$

a) $0,\widehat{6}$ b) $0{,}6_{(4)}$ c) 0,36 d) 0,1

e) N. A.

63. ¿Cuántos números capicúa de 4 y 5 cifras, que terminan en cifra par existen en base 8, si éstos en el sistema decimal son menores que 8 026 ?

a) 40 b) 34 c) 39 d) 24 e) N. A.

64. ¿Cuántos caracteres se necesita para paginar un diccionario de 1 152 páginas?

a) 4 028 b) 3 501 c) 6 373 d) 5 104

e) 4 008

65. Se escribe la serie natural de los números sin separar las cifras. ¿Cuál es, en esta serie, la cifra que ocupa el lugar 435?

a) 4 b) 3 c) 1 d) 7 e) 8

66. Hallar las bases n y k, sabiendo que: $1\,186_{(n)} = 2\,406_{(k)}$.

a) 4;5 b) 9;7 c) 8;10 d) 4;12 e) N. A.

67. En cuántos sistemas cuyas bases son menores que 10, se cumple que un número de la forma $\overline{abc}$ tiene por complemento aritmético $\overline{bca}$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9

68. ¿Cuántos números de 7 cifras con sólo 5 cifras 6 existen en base 8?

a) 972 b) 987 c) 952 d) 937 e) 976

69. Calcular cuántos números capicúas impares cuya suma de sus cifras es par existen entre 5 y 10 022 002.

a) 3 003　b) 1 424　c) 2 888

d) 3 333　e) N. A.

70. Se empieza a enumerar en forma descendente desde el número 2 340, si se dispone de 8 094 cifras, ¿cuál será la suma de las cifras del último número escrito?

a) 4　b) 7　c) 8　d) 11　e) 13

71. En los 3 082 números de la serie: 29, 33, 37, ... ¿Cuántas cifras se ha empleado?

a) 11 6632　b) 14 728　c) 12 656

d) 17 9920　e) N. A.

72. ¿Cuántos números no capicúa hay en la serie: 242, 244, 246, ..., 206 856 ?

a) 206 267　b) 318 000　c)121 400

d) 211 211　e) 102 825

73. ¿Cuántos números capicúa de 5 cifras tienen sólo 3 cifras iguales?

a) 162　b) 728　c) 316　d) 491　e) N. A.

74. ¿Cuántos números capicúas de 7 cifras están comprendidos entre cuatro y ocho millones?

a) 3 920　b) 4 000　c) 5 080

d) 6 148　e) N. A.

75. Cuántas cifras "cinco" serán necesarias para escribir la serie de los números naturales desde 455 hasta 5 000?

a) 2 001　b) 1 111　c) 1 411

d) 2 011　e) 3 011

76. Cuántos números capicúa impares menores que 900 000 poseen exactamente 2 cifras pares.

a) 775　b) 350　c) 555　d) 445　e) 375

77. ¿Cuántos números de 3 a 5 cifras tienen a lo más 2 cifras iguales?

a) 72 000　b) 64 800　c) 81 891

d) 94 601　e) 92 664

78. Cuántos números capicúa de 5 cifras se puede leer también "de cabeza" y emplean sólo 2 cifras diferentes?

a) 64　b) 32　c) 48　d) 90　e) N. A.

79. Si $\overline{abc}_{(6)} \cdot 15_{(6)} = 1\,551_{(6)}$ hallar $\overline{abc}_{(6)} \cdot 13_{(6)}$, en sistema decimal.

a) 1 197　b) 1 233　c) 1 193

d) 1 208　e) 1 185

80. Si a un número de dos cifras lo multiplicamos por 6, se obtiene el menor número de tres cifras. Si al final de este número de 3 cifras le colocamos un 2, aumenta en 2 000 unidades. Hallar el número de 2 cifras.

a) 29　b) 17　c) 42　d) 6　e) 5

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) D	3) C	4) D	5) D	6) A	7) A	8) C	9) A	10) D	11) A	12) A
13) B	14) A	15) D	16) B	17) A	18) C	19) D	20) C	21) A	22) B	23) B	24) C
25) D	26) B	27) C	28) B	29) B	30) D	31) D	32) A	33) A	34) B	35) D	36) A
37) B	38) B	39) E	40) B	41) B	42) B	43) C	44) D	45) D	46) B	47) B	48) B
49) D	50) B	51) B	52) E	53) A	54) A	55) A	56) A	57) E	58) D	59) D	60) E
61) B	62) A	63) D	64) B	65) C	66) C	67) C	68) B	69) D	70) E	71) C	72) E
73) A	74) B	75) D	76) B	77) E	78) C	79) B	80) B				

LAS 4 OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

ADICIÓN

Es una operación que tiene por objeto reunir varias cantidades de una misma especie, denominados sumandos, en una sola, llamada suma o suma total.

$$A + B + C + \ldots + N = S$$

cantidades o sumandos

Donde: S = suma total

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

1ra. propiedad.- Sí a un sumando se le agrega un número, la suma total queda aumentada en dicho número.

Sea la suma: $A + B + C = S$

Si al sumando "B" le agregamos el número "m", la suma total "S" queda aumentada en "m".

En efecto:

$$A + (B + m) + C = A + B + m + C = \overbrace{A + B + C}^{S} + m$$

luego:

$$A + (B + m) + C = S + m$$

2da. propiedad.- Si a un número se le quita un número, la suma total queda disminuída en dicho número.

Sea la suma: $M + N + P = Q$

Si al sumando "M" le quítamos el número "a", la suma total "Q", queda disminuida en "a".

En efecto:

$$(M - a) + N + P = M - a + N + P = \overbrace{M + N + P}^{Q} - a = Q - a$$

3ra. propiedad.- Si a un sumando se le quita un número y a otro sumando se le agrega el mismo número, la suma total no varía.

Sea la suma: $A + B + C = S$

$$(A - m) + B + (C + m) = S$$

En efecto :

$$(A - m) + B +(C + m) = A - m + B + C + m$$

$$\Rightarrow \overbrace{A + B + C}^{S} - m + m = S$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar la suma de las 4 últimas cifras del resultado de sumar:

$$\begin{array}{r} \overbrace{353535 \ldots 5353}^{25\text{ cifras}} \\ 2828 \ldots 8282 \\ \ldots \\ \ldots \\ 282 \\ 3 \end{array}$$

Solución:

Se puede advertir que hay 13 sumandos, 7 de ellos terminan en 3 y 6 terminan en 2, entonces: En las unidades: $7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 33$, ponemos 3, llevamos 3.

En las decenas: se puede advertir que 6 de ellos tienen 5; y 6 de ellos tienen 8, entonces:

$3 + 6\,(5 + 8) = 81$, ponemos 1, llevamos 8.

En las centenas: $8 + 6\,(2 + 3) = 38$, ponemos 8, llevamos 3.

En las unidades de millar: $3 + 5(6) + 8(5) = 73$, ponemos 3, llevamos 7.

Las 4 últimas cifras son: 3 183 y la suma de las mismas, 15.

Rpta.: 15

2.- Se suma todas las permutaciones cíclicas de un número de 4 cifras pares distintas. ¿Cuál es la suma de las cifras de la suma total?

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrl} & 2 & 4 & 6 & 8 & + \\ & 8 & 2 & 4 & 6 & \\ & 6 & 8 & 2 & 4 & \\ & 4 & 6 & 8 & 2 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

La suma de las cifras de la suma total será:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 0 = 8$$

Rpta.: 8

3.- Hallar las 5 últimas cifras de:

$$\underbrace{111\ldots11}_{\overline{1n}\text{ cifras}} + \underbrace{111\ldots11}_{\overline{1(n-1)}\text{ cifras}} + \ldots + 11 + 1,$$

donde: $5 \leqslant n < 9$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} \overbrace{1\,1\,1\ldots1\,1\,1\,1}^{\overline{1n}\text{ cifras}} \\ 1\,1\ldots1\,1\,1\,1 \\ 1\ldots1\,1\,1\,1 \\ \vdots\;\;\vdots\;\;\vdots \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1 \\ 1 \end{array}\right\}\overline{1n}\text{ números}$$

Sumemos en las unidades:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{\overline{1n}\text{ unos}} = \overline{1n},$$

ponemos "n", llevamos 1

En las decenas:

$$1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\overline{1(n-1)}\text{ unos}} = \overline{1n}$$

ponemos "n", llevamos 1.

En las centenas:

$$1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\overline{1(n-2)}\text{ unos}} = \overline{1\,(n-1)}$$

ponemos (n - 1), llevamos 1.

En las unidades de millar:

$$1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\overline{1(n-3)}\text{ unos}} = \overline{1\,(n-2)}$$

ponemos (n - 2), llevamos 1.

En las decenas de millar:

$$1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\overline{1(n-4)}\text{ unos}} = \overline{1\,(n-3)},$$

ponemos (n - 3), llevamos 1.

Las 5 últimas cifras son:

Rpta.: (n -3) (n - 2) (n -1) nn.

4.- Hallar un número de 4 cifras, sabiendo:

1° Que la suma de sus cifras es 25.

2° Que la cifra de los millares, sumada con la cifra de las decenas es igual a la cifra de las unidades.

3° Que aumenta 8 082 al invertir el orden de sus cifras.

Solución:

Sea $\overline{abcd}$ el número buscado, se debe cumplir.

$$a + b + c + d = 25 \qquad (1)$$

$$a + c = d \qquad (2)$$

Finalmente se debe cumplir que:

$$\overline{dcba} - \overline{abcd} = 8\,082 \qquad (3)$$

descomponiendo este último número polinómicamente:

$$1000d + 100c + 10b + a - 1000a - 100b - 10c - d = 8\,082$$

$$999(d - a) + 90(c - b) = 8\,082$$

simplificando:

$$111\underbrace{(d - a)}_{1\text{dígito}} + 10\underbrace{(c - b)}_{1\text{dígito}} = 898$$

como se indica, (d - a) y (c - b) deben ser dígitos, de otra manera la suma sería un número de más de tres cifras.

Se deduce:

1º $111(d - a) = 888$

$\therefore \quad d - a = 8 \qquad (\alpha)$

2º $10(c - b) = 10$

$\therefore \quad c - b = 1 \qquad (\beta)$

De (α) se deduce que:

$$d = 9, \quad a = 1$$

Sustituyendo estos valores en (2):

$$c = 8$$

De (β) se deduce: $b = 7$

El número buscado es $\overline{abcd}$, o sea: 1 789

Rpta.: 1 789

5.- Al sumar 89 capicúas diferentes de tres cifras se obtiene 48 753. Hallar la suma de las cifras del capicúa no considerado.

Solución:

Sumemos todos los capicúas de 3 cifras, descomponiendolo cada sumando,asi:

$$(100 + 1) + (100 + 10 + 1) + (100 + 20 + 1) + \ldots$$
$$\ldots + (100 + 80 + 1) + (100 + 90 + 1)$$

$$= 10 \,.\, 100 + 10 \,.\, 1 + 10\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 9)$$

$$= 1\,000 + 10 + 10 \,.\, 45 = 1\,000 + 10 + 450$$

Del mismo modo:

$$(200 + 2) + (200 + 10 + 2) + (200 + 20 + 2) + \ldots$$
$$\ldots + (200 + 80 + 2) + (200 + 90 + 2)$$

$$= 10 \,.\, 200 + 10 \,.\, 2 + 10\,(1+2+3+ \ldots + 9)$$

$$= 2\,000 + 20 + 10 \,.\, 45 = 2\,000 + 20 + 450$$

Análogamente, con los otros sumandos:

$$303 + 313 + 323 + 333 + \ldots + 393 = 3\,000 + 30 + 450$$

$$404 + 414 + 424 + 434 + \ldots + 494 = 4\,000 + 40 + 450$$

$$505 + 515 + \ldots = 5\,000 + 50 + 450$$

$$606 + 616 + \ldots = 6\,000 + 60 + 450$$

$$707 + 717 + \ldots = 7\,000 + 70 + 450$$

$$808 + 818 + \ldots = 8\,000 + 80 + 450$$

$$909 + 919 + \ldots = 9\,000 + 90 + 450$$

Suma total = 1 000 (45) + 10 (45) + 90 (45)

$$= 45\,(1100) = 49500 = S_t$$

St - S = 49 500 - 48 753 = 747

Rpta.: 7 + 4 + 7 = 18

6.- Un estudiante demuestra que:

DAME + MAS = AMOR

Si la palabra AMOR toma su máximo valor, hallar este valor.

Nota: "O"de amor es cero y cada letra representa un valor diferente.

Solución:

$$\begin{array}{r} D\ A\ M\ E\ + \\ M\ A\ S \\ \hline A\ M\ O\ R \end{array}$$

En las unidades puede ser:

$$10 < E + S \leqslant 18$$

ó $E + S$ puede ser < 10.

Si: $E + S > 10$ pero menor que 18, al sumar las decenas se tendrá por dato:

$$1 + M + A = 10 \qquad (1)$$

$$M + A = 9 \qquad (2)$$

Al sumar las centenas:

$$1 + A + M = M \qquad (3)$$

De (1) y (2) se deduce: M = O; ésto es falso, porque la letra O de la palabra amor representa al cero, M no puede ser cero porque cada letra representa un valor diferente.

Por otro lado, si: $E + S < 10$

En las unidades:

$$E + S = R \text{ (No se lleva nada)}$$

Al sumar las decenas:

$$M + A = 10$$

Al sumar las centenas:

$$1 + M + A = M \text{ (se escribe M y se lleva 1)}$$

$$\Rightarrow M = 1 \ ; \ A = 9$$

Al sumar los millares:

$1 + D = A$ pero $A = 9 \Rightarrow D = 8$

Como la palabra AMOR debe tomar su máximo valor: $R = 7$

Rpta.: A M O R = 9 107

7.- Un estudiante conviene con su padre en telegrafiar con clave, representando cada cifra numérica con una letra distinta y procurando para comprobación que el número representante de la última palabra fuese la suma de los anteriores.

Se desea descubrir la clave sabiendo que el estudiante telegrafió lo siguiente:

SEND + MORE = MONEY

Nota: La letra O es cero.

Solución:

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D\ + \\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

Al tener SEND y MORE 4 cifras y MONEY cinco, debe ser $M = 1$, pues la suma de dos dígitos $(S + M)$ no puede ser mayor de 18, y como en nuestro caso los sumandos $M + S$, para los millares deben ser distintos, a lo sumo vale: $9 + 8 = 17$.

Al ser $M = 1$ y $S + M = O \Rightarrow S = 9$

E no puede valer ni "0", ni 1, por haber sido utilizados ya.

Lomás lógico es suponer:

$$(1) + E + 0 = N \qquad (a)$$

para que $E \neq N$, por lo tanto:

$$2 \leq E \leq 7$$

$$3 \leq N \leq 8$$

Dado que la suma de las centenas, E + O, recibe un "1" que se lleva de la suma de las decenas, entonces:

$$(1) + N + R = \overline{1E} \qquad (b)$$

reemplazamos (a) en esta ecuación:

$$(1) + (1 + E) + R = \overline{1E}$$

$$2 + E + R = \overline{1E}$$

$$2 + R = \overline{1E} - E$$

$$2 + R = 10$$

$$R = 8$$

Nótese que (b) supone que $D + E = \overline{1y}$ (c)

De otro modo, no sería consistente con (a).

Además, $\overline{1y} \notin \{10, 11, 18\}$ por que los números 0,1 y 8 ya estan asignados.

En base a las ecuaciones (a) y (c) y verificando que ahora $3 \leq N \leq 7$, podemos elaborar la siguiente tabla de valores:

N	E	D	Obseraciones
3	2	8,9	Pero D + E = 8 + 2 = 10 v D + E = 9 + 2 = 11 valores no permitidos para $\overline{1y}$
4	3	7	Idem
5	4	6,7	Idem
6	5	5,6,7	Idem para 5 y 6. D = 7 es válido si N = 6, E = 5
7	6	4,5,6,7	No son validos D = 6, D = 7, si N = 7, E = 6, por que las cifras deben de ser diferentes entré sí.

Por lo tanto:

O = 0 E = 5
M = 1 N = 6
S = 9 D = 7
R = 8 Y = 2

Rpta.:

$$\begin{array}{r} 9\,567 + \\ 1\,085 \\ \hline 10\,652 \end{array}$$

8.- Un estudiante demuestra que:

TEN + TEN + FORTY = SIXTY

Si cada palabra es un número y cada letra es una cifra diferente, diga: ¿Cuál es el valor de FORTY y SIXTY?

Solución:

$$\begin{array}{r} T\,E\,N\,+ \\ T\,E\,N \\ F\,O\,R\,T\,Y \\ \hline S\,I\,X\,T\,Y \end{array}$$

1° $N + N + Y = \ldots \overline{Y}$

Se tiene las siguientes alternativas:

$$N + N = \begin{cases} 10 \Rightarrow N = 5 \\ 0 \Rightarrow N = 0 \end{cases}$$

Si: N = 5 (al sumar se pone 0 y se lleva uno)

$$1 + E + E + T = T$$

Se tiene las siguientes alternativas:

Se deduce: $1 + E + E \begin{cases} E = 4\ ,\ 5 \\ E = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Luego N no puede ser 5; por lo tanto:

N = cero (no se lleva nada) | N = 0

2° $E + E + T = T$

Se tiene las siguientes alternativas:

$$E + E \begin{cases} E = 5 \\ E = 0 \end{cases}$$

$E \neq 0$ porque ya $N = 0$

3° $F \neq S$

$$1 + F = S \qquad \text{(a)}$$

4° Si "z" es lo que llevamos de la suma T + T + R, se cumple:

$$z + \text{"O"} = I + 10$$

de aquí se deduce:

Si z = 1, O = nueve

I = 0 (cero), pero $I \neq 0$ porque N = 0

Si z = 2, O = nueve,

$2 + 9 = 1 + 10$, I = 1

$\therefore$ I = 1, O = 9, N = 0, E = 5

para las demás cifras quedan los valores: 2; 3; 4; 6; 7 y 8.

5° Como z = 2, se tiene:

$$1 + T + T + R = X + 20$$

$$2T + R = X + 19 \qquad \text{(b)}$$

Si T = 8, reemplazando en (b):

$16 + R = X + 19$ $\qquad R = X + 3$ $\qquad$ (c)

Si X = 3:

R = 6, inconsistente con (a)

Si X =4:

$$R = 7, \text{ cumple } \begin{cases} F = 2 \\ S = 3 \\ X = 4 \\ Y = 6 \end{cases}$$

Rpta.:

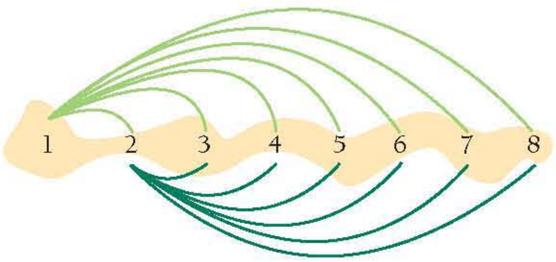
FORTY = 29 786

SIXTY = 31 486

9.- En el torneo por la "Copa Perú" participan 8 equipos. Si se ha de jugar 2 ruedas y todos juegan contra todos, se pregunta: ¿cuántos partidos se va a jugar en total y cuánto durará el torneo, sabiendo que cada semana se juega 4 partidos y se descansa una semana?

Solución:

Llamemos: 1, 2, ..., 8 a los equipos. Equipo 1 juega con 2, con 3, con 4, etc. Equipo 2, juega con 3, con 4, con 5, etc. Entonces el equipo 1 juega 7 partidos, el equipo 2 juega 6 partidos, el equipo 3 juega 4 partidos, etc. Entonces :



EQUIPO	Nº DE PARTIDOS
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

Número de partidos:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

En 2 ruedas juegan:

28 . 2 = 56 partidos

Tiempo: $\frac{56}{4} + 1 = 15$ semanas

Rpta.: 56 partidos, 15 semanas.

10.- El campeonato de fútbol de la Liga de Balnearios va a durar 39 semanas. Si cada semana se jugará cuatro partidos, ¿cuántos equipos participan, sabiendo que van a jugar en 2 ruedas?

Solución:

Como se juegan 4 partidos por semana, en total se jugará:

39 . 4 = 156 partidos en 2 ruedas

En 1 rueda se jugará:

156 : 2 = 78 partidos por rueda.

Consideremos que hay N equipos, que juegan de dos en dos. Por lo tanto:

$$\binom{N}{2} = 78 = \frac{N!}{2!\,(N-2)!}$$

De donde:

$$N^2 - N - 156 = 0$$
$$N = 13$$

Rpta.: Participan 13 equipos.

11.- En una recepción hubo 820 apretones de mano. Sabiendo que cada persona saludó 1 sola vez a cada una de las demás, se pregunta: ¿Cuántas personas asistieron a la recepción?

Solución:

Consideremos que hay N personas, entonces, el número de apretones de mano es una combinación de las N personas, tomadas de 2 en 2:

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!}$$

Personas	N° de apretones de mano
1	0
2	1
3	3
4	6
...	...
N	(N - 1) N/2

entonces:

$$820 = \frac{(N-1)\,N}{2}$$

$$N = 41$$

Rpta.: Asistieron 41 personas.

12.- Se tiene un número de 2 cifras. El duplo de la cifra de las decenas restado de la cifra de las unidades es mayor que 5; y, la diferencia entre 14 veces la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es menor que 112. ¿Cuál es el número?

Solución:

Sea $\overline{ab}$ el número buscado. Por condición del problema se debe cumplir que:

$$b - 2a > 5 \qquad \text{(I)}$$

$$14b - a < 112 \qquad \text{(II)}$$

Sistema cuya solución es: $a = 1{,}55$; $b = 8$

Pero debe ser entero. La única posibilidad es que $a = 1$, entonces:

$$b = 8 \quad \text{ó} \quad b = 9$$

Si $b = 8$, en la expresión (II) se tiene:

$$14 \cdot 8 - 1 < 112$$

$$111 < 112 \text{ (cumple)}$$

Si $b = 9$, en la expresión (II), se tiene:

$$14 \cdot 9 - 1 < 112$$

$$125 < 112 \text{ (no cumple)}$$

$$\therefore \quad b = 8 \quad \text{y} \quad a = 1$$

Rpta.: ab = 18

13.- Para terminar la construcción del piso de un campo deportivo, con 40 obreros, se dispuso de una gratificación de 36 000 soles que repartirían a razón de S/ 2,00 por cada metro cuadrado de construcción. Abandonaron la obra unos cuantos obreros y entonces se retiró de la gratificación la mitad de los que a éstos hubiera correspondido al terminar la obra y se repartió el resto por igual entre los que terminaron la obra correspondiendo a cada uno de ellos S/ 1 050,00. Determinar la superficie del piso del campo deportivo y el número de obreros que se retiró de la obra.

Solución:

Si los 40 obreros hubieran trabajado hasta el final, cada obrero hubiera recibido:

36 000 : 40 = 900 soles de gratificación

Superficie del piso del campo deportivo:

$$900 : 2 = 450 \text{ m}^2$$

Pero en el proceso de la obra se retiraron algunos obreros.

Número de obreros que se retiraron:

De los 900 soles que corresponde a cada obrero que abandonó el trabajo, la mitad (S/. 450) se retiró y la otra mitad ha de ser repartida entre los que terminaron la obra. De acuerdo al problema, por este reparto correspondió a cada obrero que terminó la obra un monto adicional de:

1 050 - 900 = 150 soles

Lo correspondiente a cada obrero que abandonó, sirvió para beneficiar a 450 :150 = 3 obreros que terminaron.

Por lo tanto, de cada 4 obreros, uno abandonó; como en total eran 40 obreros, entonces abandonaron: 40 : 4 = 10 obreros.

Rpta.:

Superficie = 450 m^2

Se retiraron 10 obreros

14.- Seis operarios están preparando concreto a razón de 4 m^3 por día, 2 días después empieza a trabajar otra cuadrilla compuesta por 8 operarios que pueden mezclar 3,5 metros cúbicos por día. Suponiendo que la primera cuadrilla descansa dos días por semana y la segunda uno, dígase cuántos días de trabajo debe desarrollar cada cuadrilla para llegar a tener igual volumen de concreto.

Solución:

Cuando empezó a trabajar la segunda cuadrilla, la primera llevaba hechos:

$$4 \,.\, 2 = 8 \text{ m}^3$$

Según el enunciado, mientras que una cuadrilla trabaja 5 días a la semana, la otra trabaja 6 días.

En 5 días, la primera hace:

$$4 \,.\, 5 = 20 \text{ m}^3 \text{ (por semana)}$$

En 6 días, la segunda hace:

$$6 \,.\, 3{,}5 = 21 \text{ m}^3 \text{ (por semana)}$$

Es decir que cada semana, la segunda le descuenta a la primera:

$$21 \text{ m}^3 - 20 \text{ m}^3 = 1 \text{ m}^3$$

Para descontarle 8 metros cúbicos, la segunda cuadrilla necesita 8 semanas (de 6 días de trabajo):

$$6 \,.\, 8 = 48 \text{ días}$$

y la primera habrá trabajado en total:

$$2 \text{ días} + 5 \text{ días} \,.\, 8 \text{ semanas} = 42 \text{ días}$$

Rpta.: Para tener igual volumen de concreto necesitan trabajar:

1ra. cuadrilla: 42 días

2da. cuadrilla: 48 días

SUSTRACCIÓN

Es una operación aritmética opuesta a la suma, definida para dos cantidades, llamadas minuendo y sustraendo; tiene por objeto determinar cuántas unidades más posee la primera con respecto a la segunda.

$$M - S = D \iff \text{condición: } M > S$$

D = diferencia o resta o sustracción.

PROPIEDADES DE LA RESTA O SUSTRACCIÓN

1ra. Propiedad.- Si al minuendo se le agrega una cantidad cualquiera, la diferencia queda aumentada en la misma cantidad.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Agregando K al minuendo, se tiene:

$$(M + K) - S$$

que se puede escribir así:

$$M - S + K \text{ ; entonces:}$$

$$(M + K) - S = M - S + K \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$(M + K) - S = D + K$$

2da. Propiedad.- Si al minuendo se le quita una cantidad, la diferencia queda disminuida en dicha cantidad.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

quitamos K al minuendo, se tiene: $(M - K) - S$ que se puede escribir así: $M - S - K$; entonces:

$$(M - K) - S = M - S - K \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$(M - K) - S = D - K$$

3ra. Propiedad.- Si al sustraendo se le agrega una cantidad, la diferencia queda disminuida en dicha cantidad.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Agregando K al sustraendo y se obtiene:

$$M - (S + K)$$

que se puede escribir así: (M - S) - K; entonces:

$$M - (S + K) = (M - S) - K \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$M - (S + K) = D - K$$

4ta. Propiedad.- Si al sustraendo se le quita una cantidad, la diferencia queda aumentada en dicha cantidad.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Quitando K al sustraendo, se obtiene M - (S - K) que se puede escribir así: M - S + K

Entonces:

$$M - (S - K) = (M - S) + K \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$M - (S - K) = D + K$$

5ta. Propiedad.- Si al minuendo y al sustraendo se les agrega una misma cantidad, la diferencia no varía.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Si agregamos K al minuendo y K al sustraendo, la expresión se convierte en:

$$(M + K) - (S + K)$$

que puede escribirse así:

$$M - S + K - K = D \qquad (2)$$

Se observa que la expresión (2) es idéntica a (1), ya que K - K es cero. Con lo cual se ha verificado la propiedad.

6ta. Propiedad.- Si al minuendo y al sustraendo se le quita una misma cantidad, la diferencia no varía.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Quitando K al minuendo y K al sustraendo, se obtiene: (M - K) - (S - K), que se puede escribir así:

$$M - S - K + K = D \qquad (2)$$

Comparando se observa que la expresión (2) es idéntica a la (1), ya que - K + K es igual a cero. Con lo cual queda verificada la propiedad.

7ma. Propiedad.- (Principal). Si al minuendo se le quita una cantidad y al sustraendo se le agrega otra cantidad, la diferencia disminuye en la suma de dichas cantidades.

Sea la diferencia:

$$M - S = D \qquad (1)$$

Quitando "m" al minuendo y aumentando "p" al sustraendo se tiene: (M - m) - (S + p), que se puede escribir así:

M - m - S - p ; entonces:

$$\begin{aligned}(M - m) - (S + p) &= M - m - S - p \\ &= M - S - m - p \\ &= M - S - (m + p) \\ &= D - (m + p)\end{aligned}$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO DE UN NÚMERO (C°A)

Se llama así a la cantidad que le falta a un número para llegar a ser una unidad de orden inmediato superior.

Por ejemplo, al número 4 le falta 6 para llegar a ser 10, entonces el complemento aritmético (C°A) de 4 es 6. Se escribe así:

$$C°A \ \ 4 = 6$$

Del mismo modo, el complemento aritmético de 385 es 615, porque a 385 le falta 615 para sumar 1 000.

El complemento aritmético de 76 es 24, porque: 76 + 24 = 100.

$$C°A \ \ 385 = 1\,000 - 385 = 615$$

$$C°A \ \ 76 = 100 - 76 = 24$$

Regla Práctica

Para hallar el C° A de un número cualquiera, se resta dicho número de la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el número.

Ejemplo:

C° A de 628 → 1 000 - 628 = 372

C° A de 78 → 100 - 78 = 22

C° A de 625 → 1 000 - 625 = 375

C° A de 1 072 → 10 000 - 1 072 = 8 928

Se deduce que: un número más su complemento aritmético es igual a la unidad inmediata superior del número, así:

C° A 78 + 78 = 22 + 78 = 100

C° A 625 + 625 = 375 + 625 = 1 000

C° A 1 072 + 1 072 = 8 928 + 1 072 = 10 000

NOTA

Obsérvese alternativamente que para hallar el "C° A" de un número, se resta mentalmente de 9, empezando por la izquierda, todas las cifras, excepto la última cifra significativa de la derecha, que se resta de 10. Se agrega los ceros que sigan a la última cifra significativa.

Así:

C° A 628300:

$$\begin{array}{r} 9\;9\;9\;(1\;0) \\ \underline{6\;2\;8\;3\;0\;0} \\ 3\;7\;1\;7\;0\;0 \end{array}$$

C° A 628300: 3 7 1 7 0 0

APLICACIÓN DEL C° A

Transforma una resta en suma.
Sabemos que: M - S = D

Agreguemos al minuendo M y al sustraendo S el C°A del sustraendo, la diferencia D no varía:

M - S = (M + C° A de S) - (S + C° A de S)

M - S = (M + C° A de S) - (unidad de orden inmediata superior de S).

Ejemplo: Restar los números: 7 329 - 3 641

Se procede así:

$$\begin{array}{r} 7\,329\ - \\ \underline{3\,641} \\ 3\,688 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 7\,329\ + \\ \underline{6\,359} \\ 13\,688\ - \\ \underline{10\,000} \\ 3\,688 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{C° A de 3 641} \\ \\ \leftarrow \text{unidad de orden} \\ \quad \text{inmediato superior de S} \end{array}$$

EXCEDENCIA. Se llama excedencia de un número a la diferencia entre el número dado y una unidad de su orden más inmediato inferior.

Así la excedencia de 826 será:

826 - 100 = 726

La excedencia de 23 será : 23 - 10 = 13

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Conociendo la suma S de dos números y su diferencia D, determinar dichos números.

Solución:

Sean a y b los números, consideremos que a > b, se tiene:

$$a + b = S \qquad (1)$$

$$a - b = D \qquad (2)$$

Sumando (1) + (2):

$$2a = S + D \Rightarrow a = \frac{S + D}{2}$$

El número mayor es: $a = \frac{S + D}{2}$

Restando (1) - (2):

$$2b = S - D \Rightarrow b = \frac{S - D}{2}$$

Rpta.: El número menor es : $b = \frac{S - D}{2}$

2.- Hallar "a" si:

$$C°\ A\ (\overline{1\ a}) + C°\ A(\overline{2\ a}) + \ldots + C°\ A(\overline{9\ a}) = 396$$

Solución:

Reemplazando por el complemento aritmético de cada sumando:

$(100 - \overline{1a}) + (100 - \overline{2a}) + \ldots + (100 - \overline{9a}) = 396$

$900 - (\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + \ldots + \overline{9a}) = 396$

Descomponiendo polinómicamente:

$900 - (10 + a + 20 + a + 30 + a + \ldots + 90 + a) = 396$

$900 - 450 - 9 \,.\, a = 396$

$9 \,.\, a = 54$

Rpta.: $a = 6$

3.- Hallar $\overline{abcd}$, si C° A de $\overline{abcd} = a + b + c + d$

Solución:

El C° A de $\overline{abcd} = \overline{(9 - a)(9 - b)(9 - c)(10 - d)}$

Ahora, por condición del problema:

$\overline{(9 - a)(9 - b)(9 - c)(10 - d)} = a + b + c + d \quad (1)$

Entonces como cada cifra del número $\overline{abcd}$ es menor que nueve por ser dígito, es decir:
$a \leq 9$; $b \leq 9$; $c \leq 9$; $d \leq 9$.

Se tiene:

$$a + b + c + d \leq 36$$

o:

$$\overline{(9 - a)(9 - b)(9 - c)(10 - d)} \leq 36 \quad (2)$$

Si el primer miembro es menor que 36, eso quiere decir que el número en (2) a lo más tiene 2 cifras; entonces:

$9 - a = 0 \Rightarrow a = 9$; $9 - b = 0 \Rightarrow b = 9$

De este modo:

$\overline{(9 - c)(10 - d)} = 9 + 9 + c + d$

Descomponiendo polinómicamente el primer miembro:

$(9 - c) \,.\, 10 + (10 - d) = 18 + c + d$

Agrupando convenientemente:

$$\underbrace{82}_{\text{par}} = \underbrace{11c}_{\substack{\text{debe ser} \\ \text{par}}} + \underbrace{2d}_{\text{par}}$$

Entonces "c" y "d" pueden tener los siguientes valores:

$$c = \begin{cases} 8 \rightarrow \text{no cumple} \\ 6 \rightarrow \text{cumple; } d = 8 \\ \left.\begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right\} \text{no cumplen} \end{cases}$$

Rpta.: $\overline{abcd} = 9\,968$

4.- Transformar la resta de 43 714 - 810 en una suma, usando el complemento aritmético.

Solución:

Sabemos que:

$$C° A\ 810 = 1\,000 - 810 = 190$$

la resta se convierte en suma, sumando:
43 714 + 190 y a este resultado quitando al resultado una unidad de los millares, o sea:

$$\begin{array}{r} 43\,714\ + \\ 190 \\ \hline 43\,904\ - \\ 1\,000 \\ \hline 42\,904 \end{array}$$

Rpta.: 42 904

5.- A un número de 3 cifras se le resta el doble de su C°A y se obtiene el mayor cuadrado perfecto de 2 cifras y de raíz par. Hallar dicho número de 3 cifras.

Solución:

Sea N el número buscado y su complemento aritmético:

$$C° A\ N = 10^3 - N$$

ahora por condición del problema:

$$N - 2\,(10^3 - N) = 64$$

(64 es el mayor cuadrado perfecto de 2 cifras y de raíz par)

Efectuando operaciones:

$$N - 2\,000 + 2N = 64$$
$$3\,N = 2\,064$$
$$N = 688$$

Rpta.: 688

6.- Un alumno, al tratar de calcular dos números, conociendo la suma y la diferencia, comete el error de quitarle16 unidades a la suma. Se encontró por número mayor 51 y la diferencia de los números está comprendida entre 20 y 40 y la suma de las cifras de la diferencia es 12. Calcular la suma de los verdaderos números.

Solución:

Lo que el alumno hizo fue:

$$\frac{(S - 16) + D}{2} = 51$$

de donde: $D = 118 - S$

o también: $S = 118 - D \ldots (1)$

Por otro lado:

Como: $20 < D < 40$, "D" será de la forma $\overline{mn}$, donde $m + n = 12$.

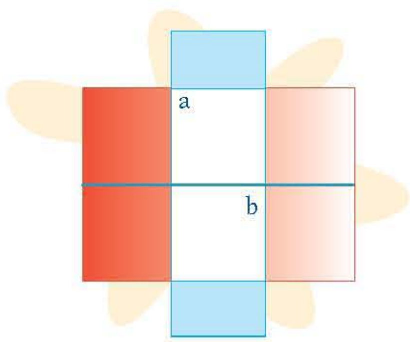
Ambas condiciones las cumple sólo $\overline{mn} = 39$

Sustituyendo este valor en (1):

$$S = 118 - 39 = 79$$

Rpta.: $S = 79$

7.- En la siguiente figura, poner en cada cuadrado una cifra del 1 al 8, de tal manera que una cifra en cualquier posición no debe tener a su alrededor ninguna otra cifra consecutiva con ella. Hallar la suma (a + b).



Solución:

En la figura se observa que **a** tiene 6 cifras **a** su alrededor, **b** también tiene 6 cifras a su alrededor.

Debe haber 6 cifras no consecutivas con a. Debe haber 6 cifras no consecutivas con b.

Con los números: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; se ve que los únicos que tienen 6 cifras no consecutivas son 1 y 8.

$\therefore\ a + b = 8 + 1 = 9$

Rpta.: $a + b = 9$

8.- En un salón donde hay 40 alumnos, el profesor de matemática suma los años de nacimiento de todos ellos; luego suma las edades de los 40 alumnos. A continuación, suma los 2 resultados obteniéndose finalmente 79 828. Si la suma se hizo ayer, ¿cuántos cumplieron años ya este año? (considerar a 1 996 como año presente)

Solución:

Si todos hubieron cumplido años en 1 996,la operación sería:

$$40(\overline{19xy}) + 40(1\,996 - \overline{19xy}) = 79\,840$$

Por otra parte si ninguno hubiera cumplido años todavía este año, la suma sería 40. 1 995 = 79 800.

Por cada uno que ya cumplió años este año, la suma aumenta en 1.

Hay: 79 828 - 79 800 = 28 que ya cumplieron años.

Rpta.: 28

9.- Se tiene 2 toneles de vino; del primer tonel se echa al segundo tantos litros de vino como litros había en el segundo tonel. Luego, del segundo tonel se echa al primero, tantos litros como litros habían quedado en éste, después de la primera operación. Por último, del primero se echa al segundo tantos litros, como litros habían en el segundo tonel después de la segunda operación. Si al final; cada uno de los 2 toneles tiene 72 litros, ¿cuánto tenía cada uno al principio?

Solución:

En realidad, lo que se hace es duplicar la cantidad de vino en cada operación.

En este tipo de problemas, conviene empezar a resolver, partiendo desde la última operación hacia la primera, restando la mitad sucesivamente:

	1º tonel	2º tonel	
4º	99	45	al principio
3º	54	90	después de la 1ra. operación
2º	108	36	después de la 2da. operación
1º	72	72	al final

Rpta.: Al principio cada tonel tenía 99 y 45 litros respectivamente.

10.- Ayer, 2 amigos, Germán y Pío hicieron lo siguiente: Germán sumó a su año de nacimiento la edad de Pío, y Pío sumó a su año de nacimiento, la edad de Germán.Al sumas después ambos resultados, se obtiene 3 980, detectando que Germán se ha equivocado al sumar (obtuvo 1 987). Si Germán ya cumplió años (este año 1 996) y Pío aún no.

¿Cuál es la diferencia entre las edades de Germán y Pío?

Solución:

Suma Total Verdadera (S. T. V.) = año en que nació Germán + edad de Pío + año en que nació Pío + edad de Germán (1)

Ordenando:

S. T. V. = año que nació Germán + edad de Germán (1 996, pues ya cumplió años este año) + año que nació Pío + edad de Pío (1 995, pues no ha cumplido años este año).

S.T.V. = 1 996 + 1 995 = 3 991

pero ellos obtuvieron como suma total 3 980.

Hay un error de : 3 991 - 3 980 = 11 años; ésto se debe a que Germán sumó mal; él debió obtener: 1 987 + 11 = 1 998; o sea:

año en que nació Germán
+ edad de Pío = 1 998 ...(α)

año en que nació Germán
+ edad de Germán = 1996 ... (β)

(α) - (β): edad de Pío - edad de Germán = 2 años.

Rpta.: La diferencia de las edades de Pío y Germán es 2 años.

11.- Hay 10 barcos que navegan entre Liverpool y Dublín. ¿De cuántas maneras puede un hombre ir de Liverpool a Dublín y regresar en un barco diferente?

Solución:

Hay 10 maneras de hacer la primera travesía y con cada una de éstas hay 9 maneras de regresar (ya que el hombre no puede regresar en el mismo barco); por consiguiente, el número de maneras de hacer los 2 viajes es: 10 . 9 = 90

Rpta.: De 90 maneras.

12.- Tres viajeros llegan a una ciudad en la que hay 4 hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ocupar sus hoteles debiendo estar cada uno en un hotel diferente?

Solución:

El primer viajero puede elegir uno de los 4 hoteles y cuando ha seleccionado su hotel, el segundo viajero puede escoger uno de los 3 que quedan, por lo tanto los primeros 2 viajeros pueden hacer su selección de 4 . 3 maneras y con cualquiera de estas selecciones, el tercer viajero puede escoger su hotel de 2 maneras; en consecuencia, el número de maneras como pueden ocupar sus cuartos es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Rpta.: 24 maneras.

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es una operación que tiene por objeto hallar una tercera cantidad llamada producto que contenga al multiplicando el mismo número de veses que el multiplicador contiene a la unidad positiva.

$$M \cdot m = P$$

Entre otros términos:

$$\frac{m}{1} = \frac{P}{M}$$

De acuerdo con la definición:

Si m = 1 se tiene P = M

Si m > 1 se tiene P > M

Si m < 1 se tiene P < M

Si m = 0 se tiene P = 0, M ≠0

DESARROLLO DE LA MULTIPLICACIÓN

Si: a . b = P, se cumple:

$$a \,.\, b = P = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{b veces}};$$

y

$$a \,.\, b = P = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{a veces}};$$

Ejemplo: 24 . 5 = 120, se cumple:

$$24 \,.\, 5 = 120 = \underbrace{5 + 5 + 5 + \ldots + 5}_{\text{24 veces}};$$

y

$$24 \,.\, 5 = 120 = \underbrace{24 + 24 + \ldots + 24}_{\text{5 veces}};$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

1ra.Propiedad: Ley distributiva con respecto a la suma: Para multiplicar un número por una suma indicada, basta multiplicar dicho número por cada uno de los sumandos y sumar los productos parciales.

Sea N un número cualquiera y (a + b + c) una suma indicada.

$$N\,(a + b + c) = N \,.\, a + N \,.\, b + N \,.\, c$$

En efecto; consideremos que:

(a + b + c) = S, entonces:

$$N\,(a + b + c) = N \,.\, S = \underbrace{S + S + S + \ldots + S}_{\text{N veces}};$$

y ademas:

$$N\,(a + b + c) =$$

$$= \underbrace{(a + b + c) + (a + b + c) + \ldots + (a + b + c)}_{\text{N veces}}$$

$$= \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{\text{N veces}} + \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{\text{N veces}} + \underbrace{(c + c + \ldots + c)}_{\text{N veces}}$$

por lo tanto:

$$N\,(a + b + c) = N \,.\, a + N \,.\, b + N \,.\, c$$

2da. Propiedad: Ley distributiva con respecto a la resta: Para multiplicar un número por una diferencia indicada, basta con multiplicar dicho número por cada uno de los términos de la diferencia y restar los productos parciales.

Sea N un número cualquiera y (P - Q) una diferencia indicada.

$$N\,(P - Q) = NP - NQ$$

En efecto, podemos decir que:

$$N\,(P - Q) = \underbrace{(P - Q) + (P - Q) + \ldots + (P - Q)}_{\text{N veces}}$$

$$N\,(P - Q) = \underbrace{(P + P + \ldots + P)}_{\text{N veces}} - \underbrace{(Q + Q + \ldots + Q)}_{\text{N veces}}$$

$$N\,(P - Q) = NP - NQ$$

3ra. Propiedad: Para multiplicar 2 sumas indicadas, basta multiplicar cada uno de los sumandos de una de ellas, por todos los de la otra y sumar los productos parciales .

Sean:

(a + b + c) y (d + f) dos sumas indicadas.

$$(a + b + c)\,(d + f) = ad + af + bd + bf + cd + cf$$

En efecto, notamos que:

$$(a + b + c)\,(d + f) = a(d + f)$$
$$+ b\,(d + f) + c\,(d + f)$$

Luego:

$$(a + b + c)\,(d + f) = ad + af + bd + bf + cd + cf$$

4ta. Propiedad: Para multiplicar una suma indicada por una diferencia indicada basta multiplicar cada uno de los sumandos por el minuendo y quitarle a este resultado el producto de cada uno de los sumandos por el sustraendo.

Sea: (a + b + c) , una suma indicada y (d - f) una diferencia indicada.

$$(a + b + c)\ (d - f) = a\,.\,d + b\,.\,d + c\,.\,d - a\,.\,f - b\,.\,f - c\,.\,f$$

En efecto, sabemos que:

$$(a + b + c)\ (d - f) = (a + b + c)\ d - (a + b + c)\ f$$

Efectuando:

$$(a + b + c)(d - f) = a\,.\,d + b\,.\,d + c\,.\,d - a\,.\,f - b\,.\,f - c\,.\,f$$

5ta. Propiedad: Para multiplicar 2 restas indicadas, se multiplica cada término de la segunda resta por todos los términos de la primera y se suman o se restan los productos parciales.

Sean: (a - b) y (c - d) dos restas indicadas.

$$(a - b)\ (c - d) = a\,.\,c - b\,.\,c - a\,.\,d + b\,.\,d$$

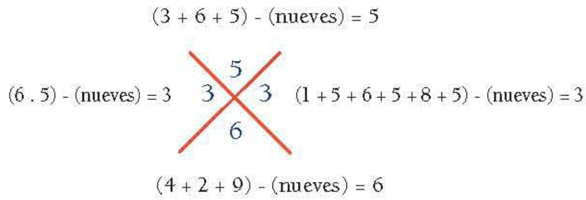
En efecto:

$$\begin{aligned}(a - b)\ (c - d) &= (a - b)\ c - (a - b)\ d \\ &= a\,.\,c - b\,.\,c - a\,.\,d + b\,.\,d\end{aligned}$$

PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN (POR LOS NUEVES)

Se suma las cifras del multiplicando, se le quita los nueves y el resultado se pone en la parte superior de un aspa; se suma las cifras del multiplicador, se quita los nueves y el resultado se pone en la parte inferior del aspa; se multiplica estos números, se quita los nueves y el resultado se pone a la izquierda del aspa. Se suman las cifras del producto, se quita los nueves y si este resultado es igual al número de la izquierda del aspa, la operación está correcta.

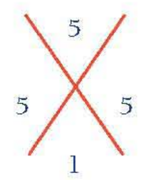
```
   365 x
   429
  ----
  3285
  730
 1460
------
156585
```



MULTIPLICACIÓN DE 2 NÚMEROS DECIMALES

Se multiplica como si fueran enteros y en el producto se separa de derecha a izquierda tantas cifras decimales como cifras decimales tengan multiplicando y multiplicador juntos.

```
  4,28 x
   6,4
  ----
  1712
 2568
------
27,392
```



Para probar por los nueves, se procede exactamente igual que en la multiplicación de los enteros.

Justificación: Al prescindir del punto decimal en el multiplicando, lo hemos multiplicado por 100 y el producto habrá quedado multiplicado por 100. Al considerar el multiplicador como entero, lo hemos multiplicado por 10 y por lo tanto el producto ha quedado multiplicado por 10.

En concreto, el producto habrá quedado multiplicado por 100 y por 10; es decir, por 1 000.

Por esta razón el producto obtenido 27 392 lo dividimos por 1 000, siendo el producto verdadero 27,392.

CASOS ESPECIALES DE SIMPLIFICACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN

1° Multiplicar dos números que terminan en CERO.

Para multiplicar dos números que terminan ambos o uno solo de ellos, en cero se prescinde de los ceros finales, se multiplica los números con digitos significativos y a la derecha del producto se escribe tanto ceros como ceros en total tienen los factores.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 473\ 000 \cdot 28\ 000 &= (473 \cdot 1\ 000)\ (28 \cdot 1\ 000) \\ &= 473 \cdot 1\ 000 \cdot 28 \cdot 1\ 000 \\ &= 473 \cdot 28 \cdot 1\ 000 \cdot 1\ 000 \\ &= 473 \cdot 28 \cdot 1\ 000\ 000 \end{aligned}$$

lo que indica que hay que realizar el producto 473 . 28 y a su derecha añadir 6 ceros.

en este caso: 473 . 28 = 13 244

Resultado: 13 244 000 000

2º Uno de los factores es un número formado exclusivamente por cifras 9.

Para multiplicar un número por otro cuyas cifras son todas 9, se agrega al primero tantos ceros como nueves tiene el segundo número y del número así obtenido se resta el primer número.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 758 \cdot 9\ 999 &= 758\ (10\ 000 - 1) \\ &= 7\ 580\ 000 - 758 \end{aligned}$$

Observese que la operación indicada, es más rápido, que el producto corriente. Finalmente:

$$\begin{array}{r} 7\ 580\ 000\ - \\ \underline{758} \end{array}$$

$$758 \cdot 9\ 999 = 7\ 579\ 242$$

3º Multiplicar 2 números que terminan en 5.

Para multiplicar 2 números terminados en 5, se escribe el producto de los números prescindiendo, en ambos de la cifra 5, y a dicho producto se le añade dos ceros. Debajo se escribe el quíntuplo de la suma de los números que se multiplicá seguidos de un cero, y debajo se escribe el número 25. La suma de los tres números será el producto pedido.

Ejemplo: Efectuar 75 . 35.

De acuerdo a la regla enunciada:

Regla Práctica

$$\overline{a5} \cdot \overline{b5}$$

$$= (a \cdot b + 5)25 - 50[10 \cdot (a + b)]$$

$$\begin{array}{rr} 7 \cdot 3 \cdot 100 = & 2\ 100 \\ 5(7 + 3) \cdot 10 = & 500 \\ & \underline{25} \\ & 2\ 625 \end{array}$$

$$75 \cdot 35 = 2\ 625$$

4º Hallar el cuadrado de un número terminado en 5.

Para elevar al cuadrado un número que termina en 5, se prescinde del 5; el número que queda se multiplica por el siguiente de la sucesión natural de números y a la derecha del producto se escribe 25.

Aplicando esta regla, pueden obtenerse mentalmente los cuadrados de los números de 2 cifras que terminan en 5. Así, para calcular 75^2 se opera mentalmente del siguiente modo: 7 . 8 = 56, se añade a su derecha 25 y se obtiene:

Ejemplo:

i) $75^2 = 5\ 625$

ii) $1\ 05^2 = 11\ 025$

iii) $115^2 = 13\ 225$

5º Hallar el cuadrado de un número formado exclusivamente por la cifra 1.

Los números de esta forma dan como cuadrado siempre una capicúa, cuyo término central es un número igual a la cantidad de cifras del número dado. Esta regla se cumple sólo hasta el cuadrado de un número formado por nueve cifras uno.

$$\begin{aligned} 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1111^2 &= 1234321 \end{aligned}$$

DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE CIFRAS DE UN PRODUCTO DE 2 FACTORES

Si se trata de los factores M y N de m y n cifras tales que:

$$10^{m-1} \leq M < 10^{m}$$

$$10^{n-1} \leq N < 10^{n}$$

multiplicando ordenadamente estos intervalos se obtiene:

$$10^{m+n-2} \leq M \cdot N < 10^{m+n}$$

analizando esta expresión final, se determina que el número de cifras del producto de dos números es igual a la suma del número de cifras de los dos factores, o a esta suma disminuida en una unidad.

NÚMERO DE CIFRAS DE UN PRODUCTO DE VARIOS FACTORES Y DE UNA POTENCIA

TEOREMA.- Si en un producto de "n" factores la suma del número de cifras de todos los factores es S, el número de cifras del producto será por lo menos:

S - n + 1, y a lo más valdrá S.

Demostración: Sea P el producto de los "n" factores:

$$A . B . C \dots Z = P$$

donde:

A posee "a" cifras
B posee "b" cifras
C " "c" "
. . . .
. . . .
. . . .
Z " "z" "

$$a + b + c + \dots\dots\dots\dots + z = S$$

se cumple para cada factor que:

$$10^{a-1} \leq A < 10^{a}$$
$$10^{b-1} \leq B < 10^{b}$$
$$10^{c-1} \leq C < 10^{c}$$
. . .
. . .
. . .
$$10^{z-1} \leq Z < 10^{z}$$

multiplicando miembro a miembro estos intervalos obtendremos:

$$10^{a+b+c+\dots+z-n} \leq A . B . C \dots Z < 10^{a+b+c+\dots+z}$$

o sea: $10^{S-n} \leq P < 10^{S}$

10^{S-n} es el menor número de S - n + 1 cifras y 10^{S} es el menor número de S + 1 cifras. Luego P podrá tener S - n + 1, pero no llegará nunca a tener S + 1, y llamando k al número de cifras de P. Mínimo de: k = S - n + 1. Máximo de: k = S.

COROLARIO Nº 1

El número de cifras de la potencia enésima de un número que tiene "a" cifras, es a lo más n . a, y por lo menos n (a - 1) + 1.

Sea A^n, A tiene "a" cifras. Entonces:

$$A^n = \overbrace{A . A . \dots\dots\dots\dots . A}^{n}$$

y

$$S = \overbrace{a + a + \dots\dots\dots\dots + a}^{n} = n . a$$

COROLARIO Nº2

El número de cifras de un producto de 2 factores que tienen respectivámente "a" y "b" cifras, es (a + b) ó (a + b - 1).Es a + b cuando el producto de las cifras de orden más elevado tiene dos cifras.

Según el Teorema anterior el máximo del número de cifras del producto es a + b y el mínimo:

$$a + b - 2 + 1 = a + b - 1$$

Ejemplos:

i) Si los factores son 7 347 y 231 como 7 . 2 = 14 tiene dos cifras, el producto tendrá seguramente 4 + 3 = 7 cifras, pues :

$$A = 7\,347 \Rightarrow 7 . 10^3 \leq A < 10^4$$

$$B = 231 \Rightarrow 2 . 10^2 < B < 10^3$$

$$\Rightarrow 14 . 10^5 < A . B < 10^7$$

y como $14 . 10^5$ tiene 7 cifras y 10^7 es el menor número de 8 cifras, A . B tiene seguramente 7 cifras.

En cambio, si el producto de las 2 primeras cifras no llega a 10, no puede decirse si el número de cifras será a + b, ó a + b - 1.

ii) 636 . 38

El producto de las dos primeras cifras tiene 2 cifras (6 . 3 = 18), luego el producto tendrá a + b cifras, es decir 3 + 2 = 5 cifras.

iii) 254 . 415; el producto de las 2 primeras cifras tiene una sola cifra (2 . 4 = 8), entonces el producto tendrá posiblemente a + b - 1 cifras o a + b cifras (no puede predeterminarse).

COROLARIO Nº 3

El cuadrado de un número que tiene "a" cifras tendrá 2a ó 2a - 1 cifras, pudiendo asegurarse que tiene 2a cuando la primera cifra del número es mayor que 3.

Este corolario es consecuencia inmediata del Corolario Nº 2.

Ejemplo:

i) $(281)^2$ tendrá 2 . 3 - 1 = 6 - 1 = 5 cifras

ii) $(513)^2$ tendrá 2 . 3 = 6 cifras

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- El número entero A tiene 16 cifras y el número entero B tienen 26 cifras. Si N es el número de cifras que tiene el producto:

$$P = A^5 . B^8$$

¿Entre qué límites varía el valor de N?

Solución:

Los números dados estarán dentro de los siguientes intervalos

$$10^{15} \leq A < 10^{16} \rightarrow 10^{75} \leq A^5 < 10^{80} \qquad (a)$$

$$10^{25} \leq B < 10^{26} \rightarrow 10^{200} \leq B^8 < 10^{208} \qquad (b)$$

Multiplicando (a) y (b) se obtiene:

$$10^{275} \leq A^5 . B^8 < 10^{288}$$

De esta expresión, se deduce que:

$$276 \leq N < 288$$

Rpta.: $276 \leq N < 288$

2.- ¿Cuántas cifras puede tener:

$$E = \frac{A . C}{D^2}$$

sabiendo que:

A . B puede tener 32 ó 33 cifras

C . D^2 entre 18 y 20 cifras, y B/C^2 de 3 a 5 cifras.

Solución:

Podemos establecer de acuerdo al enunciado que:

$$10^{31} \leq A . B < 10^{33} \qquad (1)$$

$$10^{17} \leq C . D^2 < 10^{20} \qquad (2)$$

$$10^2 \leq \frac{B}{C^2} < 10^5 \qquad (3)$$

Se deduce que la expresión por calcular se obtiene así:

$$E = \frac{(1)}{(2) . (3)} \qquad (4)$$

Efectivamente, reemplazando sus equivalentes:

(2) . (3):

$$10^{19} \leq \frac{B . D^2}{C} < 10^{25} \qquad (5)$$

(1) y (5) en (4):

$$E = \frac{10^{31} \leq A . B < 10^{33}}{10^{25} > \frac{B . D^2}{C} \geq 10^{19}}$$

Simplificando convenientemente:

$$10^6 \leq \frac{A . C}{D^2} < 10^{14}$$

Reemplazando el valor de E:

$$10^6 \leq E < 10^{14}$$

Rpta.: E tendrá entre 7 y 14 cifras.

3.- ¿Entre qué límites se encuentra el número de cifras que se obtiene al efectuar la expresión:

$$E = \sqrt[3/4]{\sqrt{A^{3/2}}\ \sqrt[3]{B^{18/4}}\ \sqrt[2/3]{C^{3/2}}}$$

Sabiendo que A tiene 13 cifras; B tiene 16 y C tiene 19?

Solución:

Se puede escribir así:

$$E = \sqrt[3/4]{A^{3/4} . B^{18/12} . C^{9/4}}$$

$\Rightarrow$ $E = A . B^2 . C^3$, pero:

$$10^{12} \leq A < 10^{13}$$

$$10^{31} \leq B^2 < 10^{32}$$

$$10^{55} \leq C^3 < 10^{57}$$

Multiplicando: $10^{98} \leq E < 10^{102}$

Rpta.: E tendrá entre 98 y 102 cifras.

4.- Hallar un número de 2 cifras que sea igual a 8 veces la suma de sus cifras.

Solución:

Sea $\overline{ab}$ el número buscado. Por condición del problema:

$$\overline{ab} = 8\ (a + b)$$

$$10 . a + b = 8 . a + 8 . b$$

$$2 . a = 7 . b$$

como a y b son dígitos esta igualdad sólo se verifica cuando a = 7 y b = 2.

Luego:

$$\overline{ab} = 72$$

Rpta.: 72

5.- Hallar la última cifra del producto:

$$P = 2\ (2 + 1)\ (2^2 + 1)\ \ldots\ldots\ (2^n + 1)$$

donde:

$$n = 1\ 628$$

Solución:

Sea el producto dado:

$$P = 2\ (2 + 1)\ (2^2 + 1) \ldots\ (2^n + 1)\ \ldots\ (I)$$

Llamando:

$$P' = (2 + 1)\ (2^2 + 1)\ \ldots\ (2^n + 1)$$

$$P' = (\ 3\ )\ (\ 5\ )\ (\ 9\ )\ \ldots\ (2^n + 1)$$

Termina en 5 porque hay un factor 5 y todos los factores son impares, luego:

$$P' = \overline{\ldots\ldots 5}$$

Sustituyendo en (I)

$$P = 2\ (\overline{\ldots\ldots 5}) = \overline{\ldots 0}$$

Rpta.: La última cifra es cero.

6.- El producto de un número por 8 termina en 496 y el producto del mismo número por 26 termina en 862, hallar la suma de las tres últimas cifras del producto de dicho número por 3 418.

Solución:

Sea N el número:

$$N . 8 = \overline{\ldots 496} \qquad (1)$$

$$26 . N = \overline{\ldots 862} \qquad (2)$$

(1) + (2):

$$34\ N = \overline{\ldots 358} \qquad (3)$$

(3) . 100:

$$3\ 400N = \overline{\ldots 800} \qquad (4)$$

(2) - (1):

$$18\ N = \overline{\ldots 366} \qquad (5)$$

(4) + (5):

$$3\ 418\ N = \overline{\ldots 166}$$

Rpta.: Suma de las 3 últimas cifras del producto: 1 + 6 + 6 = 13.

7.- Hallar N, sabiendo que tiene 2 cifras y que los productos terminan así:

$$N \cdot A = \overline{\ldots 66} \qquad (1)$$

$$N \cdot B = \overline{\ldots 25} \qquad (2)$$

$$N(3B - 2A - 1) = \overline{\ldots 06} \qquad (3)$$

Solución:

Sea $N = \overline{ab}$ el número.

Multiplicando (2) por 3; (1) por 2, las dos últimas cifras de los productos son:

$$N \cdot 3B = \overline{\ldots 75} \qquad (4)$$

$$N \cdot 2A = \overline{\ldots 32} \qquad (5)$$

Sabemos que:

$$N = \overline{ab} \qquad (6)$$

Restando miembro a miembro estas tres últimas igualdades:

$$N(3B - 2A - 1) = \overline{\ldots.75} - \overline{\ldots.32} - \overline{ab}$$

$$N(3B - 2A - 1) = \overline{\ldots.43} - \overline{ab}$$

Reemplazando por (3):

$$\overline{\ldots 06} = \overline{\ldots 43} - \overline{ab}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{ab} = 37$$

Rpta.: N = 37

8.- Calcular $\overline{abcd} \cdot \overline{moon}$, sabiendo que:

1º $\overline{abcd} \cdot m = 1\,416$

y

2º $\overline{abcd} \cdot n = 2\,848$

Nota: "o" = cero.

Solución:

De acuerdo a las condiciones del problema se puede establecer:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \;\times \\ \overline{moon} \\ \hline 2848 \\ 1416 \\ \hline 1418848 \end{array}$$

Rpta.: $\overline{abcd} \cdot \overline{moon} = 1\,418\,848$

9.- Hallar un número tal que multiplicado por 2; 8; 6; 11; 5 y 7 dé como producto los números $\overline{abcdef}$, $\overline{fabcde}$, $\overline{efabcd}$, $\overline{defabc}$; $\overline{cdefab}$ y $\overline{bcdefa}$, respectivamente. Tomar en cuenta que:

$$a + b + c + d + e + f = 27$$

Solución:

Sea "N" el número buscado. Por condición del problema.

$$\begin{array}{ccccl} N & . & 2 & = & \overline{abcdef} \; + \\ N & . & 8 & = & \overline{fabcde} \\ N & . & 6 & = & \overline{efabcd} \\ N & . & 11 & = & \overline{defabc} \\ N & . & 5 & = & \overline{cdefab} \\ N & . & 7 & = & \overline{bcdefa} \\ \hline N & . & 39 & = & 2\,999\,997 \end{array}$$

La suma total se obtiene observando que en todas las columnas la suma es 27 (por dato: a + b + c + d + e + f = 27). Así, en las unidades se pone 7 y se lleva 2; en las decenas la suma será 27 + 2 = 29, ponemos 9 y se "lleva" 2; en las centenas la suma es 27 + 2 = 29, ponemos 9 y llevamos 2, y así sucesivamente, hasta terminar la suma. Despejando N:

$$N = 2\,999\,997 : 39 = 76\,923$$

Rpta.: N = 76 923

10.- Hallar en qué cifra termina el producto:

$$P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^3 + 1) \ldots\ldots (2^n + 1)$$

donde: n = 1 628

Solución:

$$P = (3)(5)(9) \ldots (2n + 1)$$

Todos los factores son impares y como uno de ellos es 5, se sabe, por propiedad, que el producto de factores impares es impar, y que todo número impar multiplicado por 5 termina en 5.

Rpta.: P termina en 5

11.- Una persona nació el 6 de octubre de $\overline{19\,ab}$.

Hallar la edad que tenía el 2 de julio de $\overline{19\,ba}$ sabiendo que:

$$\overline{19ab} \cdot 2 = \overline{\ldots(2n)\,6} \qquad (1)$$

$$\overline{ab91} \cdot 3 = \overline{10\ldots} \qquad (2)$$

Solución:

De : (1):

$$\begin{array}{r} \overline{19ab}\ \times \\ 2 \\ \hline \overline{\ldots(2n)\,6} \end{array}$$

Si 2 . b = 6,

Entonces puede ser: b = 3 ó b = 8

Si: b = 3 Si: b = 8

$$\underbrace{2 \cdot a}_{\text{par}} = \underbrace{\overline{\ldots(2n)}}_{\text{par}} \qquad \underbrace{2 \cdot a + 1}_{\text{impar}} = \underbrace{\overline{\ldots(2n)}}_{\text{par}}$$

cumple no cumple

$\Rightarrow$ b = 3

Para calcular a: de (2) y Sabiendo que b = 3

$$\overline{ab91} \cdot 3 = \overline{10\ldots} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot a + 1 = 10$$

$$\Rightarrow \quad a = 3$$

Luego, nació el 6 de Octubre de 1933. Por lo tanto, el 2 de Julio de 1933 todavía no había nacido.

Rpta.: El 2 de Julio de $\overline{19ba}$ todavía no había nacido.

12.- Hallar un número $x = \overline{abcdef}$, tal que sus productos sucesivos por 5; 4; 6; 2 y 3 sean respectivamente iguales a los números obtenidos permutando circularmente sus cifras:

$$\overline{fabcde}, \overline{efabcd}, \text{etc.}$$

Solución:

Se debe cumplir según el enunciado que:

$x = \overline{abcdef}$; $5x = \overline{fabcde}$;

$4x = \overline{efabcd}$; $6x = \overline{defabc}$;

$2x = \overline{cdefab}$; $3x = \overline{bcdefa}$

La cifra "a" tiene que ser 1, porque si fuese mayor, 5x y 6x darían productos de más de seis cifras.

Si, $3x = \overline{bcdefa} \Rightarrow 3 \cdot f = a$, lo que exige que f = 7

Por lo que:

$2f = 2 \cdot 7 = 14$	$\Rightarrow$	$b = 4$
$6f = 6 \cdot 7 = 42$	$\Rightarrow$	$c = 2$
$4 \cdot f = 4 \cdot 7 = 28$	$\Rightarrow$	$d = 8$
$5 \cdot f = 5 \cdot 7 = 35$	$\Rightarrow$	$e = 5$

Rpta.: $x = \overline{abcdef} = 142\,857$.

13.- Hallar los números enteros de tres cifras, $N = \overline{cdu}$, que sean iguales al cuádruple del producto de sus cifras.

Solución:

Recordando que un número es m5 (múltiplo de cinco) cuando termina en 0 ó 5. el número que buscamos no puede ser m5, porque siendo par sería m10 y por lo tanto el producto de sus cifras sería nulo, ya que "u" sería cero.

Los factores primos de N de una sola cifra sólo pueden ser: 2; 3 ó 7.

Podemos escribir:

$$N = \overline{cdu} = 100 \cdot c + 10 \cdot d + u = 10\,(10 \cdot c + d) + u$$

Sabemos que el cuádruple del producto de sus cifras es:

$$N = 4 \cdot c \cdot d \cdot u$$

Luego por enunciado:

$$4 \cdot d \cdot c \cdot u = 10\,(10 \cdot c + d) + u$$

$$4 \cdot d \cdot c \cdot u - u = 10\,(10 \cdot c + d)$$

$$u\,(4 \cdot d \cdot c - 1) = 10\,(10 \cdot c + d) \qquad (a)$$

Analizando esta expresión se deduce que:

$$u\,(4 \cdot d \cdot c - 1) = m5$$

"u" no es m5 $\Rightarrow$ 4 . d . c - 1= m5,

lo que exige que 4 . d . c termine en 6, y por lo tanto que c . d acabe en 4 ó en 9.

Consideremos los números terminados en 4 ó 9, a lo sumo iguales a 9 . 9 = 81 y que no tengan factor primo mayor que 7; éstos son: 4, 14; 24; 54; 64; 9 y 49.

Para:

$$c \cdot d = 4 = 2 \cdot 2 \text{ ó } 1 \cdot 4 \text{ ó } 4 \cdot 1$$

Sólo puede ser $\overline{cd}$ = 22 ó 14 ó 41.

Para:

$$c \cdot d = 14 = 2 \cdot 7$$

sólo puede ser: cd = 27 ó 72, etc.

De (a) se tiene:

$$u\,(4 \cdot d \cdot c - 1) = 100c + 10d = \overline{cd0}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\overline{cd0}}{4 \cdot d \cdot c - 1}$$

Provando diversos valores de "u" con cada uno de los valores anteriores de $\overline{cd}$, no se encuentra un número entero y menor a 10 más que para $\overline{cd}$ = 38 lo que da u = 4. El número pedido es, por lo tanto: 384

Rpta.: N = 384

DIVISIÓN

Es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas dividendo "D" y divisor "d", hallar una tercera llamada cociente "c", que indica las veces que el dividendo contiene al divisor.

DIVISIÓN EXACTA.- Es quella en la que el cociente es un número entero y cuya expresión general es:

$$\boxed{D = d \cdot c}$$

DIVISIÓN INEXACTA.- Es aquella en la que el cociente no es un número entero, y cuya expresión general es:

$$\boxed{D = d \cdot c + r}$$

D = dividendo c = cociente

d = divisor r = residuo

El cociente exacto o verdadero de la división es por consiguiente:

$$\boxed{C_v = c + \frac{r}{d}}$$

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN EXACTA

1ra. Propiedad.- Si al dividendo se le multiplica por un número, el cociente queda multiplicado por dicho número.

Sea $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & c \end{array}$ una división, entonces:

$$\frac{D \cdot n}{d} = c \cdot n$$

En efecto, sabemos que:

$$D = d \cdot c \qquad (1)$$

multiplicando la expresión (1) por n:

$$D \cdot n = d \cdot c \cdot n$$

y, dividiendo ambos términos por d:

$$\frac{D \cdot n}{d} = c \cdot n$$

2da. Propiedad.- Si al dividendo se le divide por un número, el cociente queda dividido por dicho número.

Sea: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & c \end{array}$ una división, entonces:

$$\frac{\frac{D}{n}}{d} = \frac{c}{n}$$

En efecto, sabemos que:

$$D = d \cdot c \qquad (1)$$

Dividiendo la expresión (1) por n:

$$\frac{D}{n} = \frac{d \cdot c}{n}$$

y dividiendo ambos terminos por d:

$$\frac{\frac{D}{n}}{d} = \frac{c}{n}$$

3ra. Propiedad.- Si al divisor se le multiplica por un número, el cociente queda dividido por dicho número.

Sea: $D \,\underline{|\,d}$ una división, entonces:
$\qquad\quad c$

$$\frac{D}{d\,.\,n} = c\,.\,n$$

En efecto sabemos que:

$$D = d\,.\,c \qquad (1)$$

la expresión (1) no varía, si la representamos así:

$$D = (d\,.\,n)\left(\frac{c}{n}\right) \qquad (2)$$

Formando de esta manera el cociente:

$$\frac{D}{d\,.\,n} = \frac{c}{n}$$

4ta. Propiedad.- Si al divisor se le divide entre un número, el cociente queda multiplicado por dicho número.

Sea: $D \,\underline{|\,d}$ una división, entonces:
$\qquad\quad c$

$$\frac{D}{\frac{d}{n}} = c\,.\,n$$

En efecto sabemos que:

$$D = d\,.\,c \qquad (1)$$

la expresión (1) no varia, si la representamos así:

$$D = \frac{d}{n}\,.\,(c\,.\,n)$$

Formando finalmente el cociente:

$$\frac{D}{\frac{d}{n}} = c\,.\,n$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA DIVISIÓN

Si al dividendo y al divisor de una división cualquiera se le multiplica o divide por un mismo número, el cociente no varía, pero el residuo, según el caso, queda respectivamente multiplicado o dividido por dicho número.

Sea: $D \,\underline{|\,d}$ una división cualquiera, entonces:
$\quad r \quad c$

$$D\,.\,n = (d\,.\,n)\,c + r\,.\,n$$

En efecto, sabemos que:

$$D = d\,.\,c + r \qquad (1)$$

multiplicando la expresión (1) por "n", el nuevo dividendo será:

$$D\,.\,n = (d\,.\,c + r)\,n$$

Efectuando:

$$D\,.\,n = d\,.\,c\,.\,n + r\,.\,n$$

ordenando en forma conveniente:

$$D\,.\,n = (d\,.\,n)\,c + r\,.\,n$$

En forma similar se puede verificar que:

$$\frac{D}{n} = \left(\frac{d}{n}\right)c + \frac{r}{n}$$

DIVISIÓN DE NUMEROS DECIMALES

Para dividir números decimales, se multiplica al dividendo y al divisor (para hacerlos enteros) por una misma potencia de 10, ejecutándose la división como si fuesen números enteros y teniendo en cuenta la propiedad fundamental de la división.

Ejemplo:

Hallar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir 0,8907 por 0,019.

$D = 0,8907 \qquad c = ?$

$d = 0,019 \qquad r = ?$

Se multiplica dividendo y divisor por 10^4, así:

$$0,8907\,.\,10^4 = 8907$$

$$0,019\,.\,10^4 = 190$$

Ahora se procede a la división:

$$\begin{array}{r|l} 8\,907 & \underline{190} \\ 1\,307 & 46 \\ 167 & \end{array}$$

Alternativamente, también puede multiplicarse por 10^3, así:

$$0{,}8907 \cdot 10^3 = 890{,}7$$

$$0{,}019 \cdot 10^3 = 19$$

ahora se procede a la multiplicación:

$$\begin{array}{l|l} 890{,}7 & 19 \\ \cline{2-2} 130 & 46 \\ \ \ 16{,}7 & \end{array}$$

Entonces se tendrá por cada caso:

$$c_1 = 46 \ \text{ y } \ r_1 = \frac{167}{190} = 0{,}87895$$

$$c_2 = 46 \ \text{ y } \ r_2 = \frac{16{,}7}{19} = 0{,}87895$$

DETERMINACIÓN A PRIORI DEL NÚMERO DE CIFRAS ENTERAS DE UN COCIENTE

TEOREMA.- El número de cifras enteras del cociente de una división de dos números enteros es igual a la diferencia entre el número de cifras del dividendo y del divisor, o esta diferencia aumentada en uno.

Hipótesis.- Sean A y B dos números que poseen "a" y "b" cifras enteras, respectivamente.

Tesis.- $\frac{A}{B}$ puede tener:

como mínimo (a - b) cifras

como máximo (a - b + 1) cifras

Demostración.- Podemos establecer:

$$10^{a-1} \leq A < 10^a \qquad (1)$$

$$10^{b-1} \leq B < 10^b \qquad (2)$$

la expresión (2) se puede escribir:

$$10^b > B \geq 10^{b-1} \qquad (3)$$

Dividiendo (1) por (3);

$$\frac{10^{a-1}}{10^b} \leq \frac{A}{B} < \frac{10^a}{10^{b-1}} \Rightarrow 10^{a-b-1} \leq \frac{A}{B} < 10^{a-b+1}$$

Como 10^{a-b-1} es el menor número de (a - b) cifras y, 10^{a-b+1} es el menor número de (a - b + 2) cifras se deduce que A/B puede tener (a-b) cifras, pero no podrá tener (a - b + 2) cifras.

PROBLEMAS GENERALES

PROBLEMA GENERAL 1.- Dada la suma "S" de dos números y el cociente "C" de dichos números, determinar los números:

Solución:

Sean A y B los números buscados, establezcamos que: A > B

Por enunciado del problema:

$$A + B = S \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B} = C \qquad (2)$$

De la expresión (2):

$$A = B \cdot C \text{ ; sumando B}$$

$$A + B = B \cdot C + B$$

$$A + B = B\,(C + 1)$$

Pero: $A + B = S$

$$\Rightarrow S = B\,(C + 1) \Rightarrow B = \frac{S}{C+1}$$

El número menor : $B = \frac{S}{C+1}$

El número mayor : $A = S - B$

NOTA:

Este problema general también se puede aplicar en el caso de una división inexacta. En ese caso tendríamos como datos: suma (S), cociente (C) y residuo (R) y:

El número menor $B = \frac{S - r}{C + 1}$

El número mayor $A = S - B$

Problema de Aplicación.- Tres personas gastan 5 225 soles; el gasto de las dos primeras es la cuarta parte del gasto de la tercera y el de ésta es superior en S/. 3 500 al de la segunda. ¿Cuál es el gasto de cada una?

Solución:

Según el enunciado del problema:

$$\frac{\text{gasto de la tercera}}{\text{gasto de las otras 2}} = 4 \qquad (1)$$

gasto de la tercera + gasto de las otras 2 = 5 225 (2)

gasto de la tercera - gasto de la segunda = 3 500 (3)

De (1) y (2) : cociente = 4 ; suma = 5 225 ;

Como las primeras han gastado la 4ª parte de la 3ª, quiere decir que han gastado la 5ª parte del total, ésto es:

gasto de las otras 2 primeras: S/. $\frac{5\,225}{5} = 1\,045$

gasto de la tercera: S/. 5 225 - S/. 1 045 = S/. 4 180

de (3):

gasto de la segunda: S/. 4 180 - S/. 3 500 = S/. 680

gasto de la primera: S/. 1 0 45 - S/. 680 = S/. 365

PROBLEMA GENERAL 2.- Dada la diferencia "D" de dos números y su cociente "C", determinar dichos números.

Solución:

Sean M y N los números, donde : M > N

Por datos del problema:

$$M - N = D \qquad (1)$$

$$\frac{M}{N} = C \qquad (2)$$

De la expresión (2) :

$$M \,\underline{|\,N\,}\; \Rightarrow \; M - N \,\underline{|\,N\,}$$
$$\quad C \qquad\qquad\quad C - 1$$

$\Rightarrow M - N = N (C - 1) \quad \Rightarrow \quad D = N (C - 1)$

El número menor N:

$$N = \frac{D}{C - 1}$$

Reemplazando en (1):

$$M = \frac{D\;.\;C}{C - 1}$$

NOTA:

Si la división es inexacta los datos serían: diferencia (D), cociente (C) y residuo (r).

El número menor: $N = \dfrac{D - r}{C - 1}$

El número menor: $M = \dfrac{DC - r}{C - 1}$

Ejemplo:

Dos personas tienen cierta cantidad de dinero. La primera tiene S/. 30 más que la segunda y el cociente de lo que ellas poseen es 3; calcular cuánto tiene cada una y cuánto es el capital total.

Solución:

Sea:

M capital de la primera y N capital de la segunda

Por dato: M - N = 30

$$y \quad \frac{M}{N} = 3$$

$$M = \frac{D\;.\;C}{C - 1} = \frac{30\;.\;3}{3 - 1} = 45$$

$$N = \frac{D}{C - 1} = \frac{30}{3 - 1} = 15$$

Capital total: S/. 45 + S/. 15 = S/. 60

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- La suma de dos números es 341, el cociente 16 y el residuo, el mayor posible. Hallar estos números.

Solución:

Sean A y B los números buscados. Según el enunciado del problema:

$$A + B = 341 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} r & 16 \end{array} \qquad (2)$$

donde "r" es máximo.

De la expresión (2):

$$A = 16 \cdot B + r \text{ máximo} \qquad (3)$$

Pero "r" máximo = B - 1, reemplazando este valor en (3):

$$A = 16 \cdot B + B - 1 = 17 \cdot B - 1$$

Sustituyendo. este valor en (1):

$$17 \cdot B - 1 + B = 341 \quad \Rightarrow \quad B = 19$$

$$\therefore\ A = 17 \cdot 19 - 1 = 322$$

Rpta.: 322 y 19

2.- Dos personas tienen respectivamente S/. 368 000 Y S/. 256 000; ambas gastan la misma suma de dinero en la compra de terrenos cuyos precios por m^2 son S/. 400 y S/. 320 respectivamente, quedándole al final de esta operación, al primero de ellos, el triple de lo que le quedaba al segundo. Hallar el área de los terrenos.

Solución:

Sea:

Capital de la primera: C_1 = S/. 368 000

Capital de la segunda: C_2 = S/. 256 000

Sea "S" la suma que gasta cada una en la compra del terreno.

Sea P_1 el precio del m^2 de terreno que compra la primera .... P_1 = S/. 400

Sea P_2 el precio del m^2 de terreno que compra la segunda .... P_2 = S/. 320

Sean "a" y "b" las cantidades de dinero que le queda a cada una después de la compra del terreno. Entonces:

$$a = 3 \cdot b$$

$$\frac{a}{b} = 3 \qquad (1)$$

Además: $a = C_1 - S$

$b = C_2 - S$

Restando: $a - b = C_1 - C_2$

$$a - b = 368\,000 - 256\,000$$

$$a - b = 112\,000 \qquad (2)$$

De (1) y (2) (cociente y diferencia):

$$b = \frac{112\,000}{3 - 1} = \text{S/. } 56\,000 \qquad (3)$$

Por consiguiente el gasto de la segunda persona fue:

$$256\,000 - 56\,000 = \text{S/. } 200\,000$$

Luego cada persona gastó S/. 200 000 en la compra de terreno.

Area de los terrenos:

La primera persona compró:

$$\frac{200\,000}{400} = 500 \text{ m}^2$$

La segunda persona compró:

$$\frac{200\,000}{320} = 625 \text{ m}^2$$

Rpta.: 500 m^2 y 625 m^2, respectivamente.

3.- Se ha dividido el número A por 647, y se ha obtenido 97 de cociente y 432 de residuo. Se suma a A el número 6 950. Hallar, sin calcular el valor de A, el cociente y el residuo del nuevo dividendo por el divisor primitivo.

Solución:

Según el enunciado:

$$\begin{array}{l|l} A & 647 \\ \cline{2-2} 432 & 97 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 647 \cdot 97 + 432 \qquad (1)$$

Sumemos 6 950 a los dos miembros de la igualdad:

$$A + 6\,950 = 647 \cdot 97 + 432 + 6\,950$$

$$A + 6\,950 = 647 \cdot 97 + 7382 \qquad (2)$$

Pero: $7\,382 = 647 \cdot 11 + 265$, en (2):

$$A + 6\,950 = 647 \cdot 97 + 647 \cdot 11 + 265$$

$$A + 6\,950 = 647\,(97 + 11) + 265 \qquad (3)$$

Nuevo residuo: 265 (4)

Analizando, (3) y (4) indican que la división del nuevo dividendo (A + 6 950): 647 dará por cociente:

97 + 11 = 108 y por residuo: 265

Rpta.:

cociente = 108

residuo = 265

4.- En la división de $\overline{abc0}$ entre $\overline{cba}$ se obtiene 4,1 de cociente y como restos parciales 27 y 114. Hallar (a + b + c).

Solución:

Efectuando la división con los datos indicados en el enunciado:

$$\begin{array}{l|l} \overline{abc0} & \overline{cba} \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & 4,1 \\ \hline 270 & \\ 156 & \\ \hline 114 & \end{array}$$

se deduce dado que : 270 - 114 = 156

que: $\overline{cba} = 156$

$\Rightarrow a + b + c = 12$

Rpta.: 12

5.- Al dividir un número de 3 cifras entre su C°A que tiene 2 cifras, se obtiene 12 de cociente y como residuo un número igual al formado por las dos últimas cifras del número dado. ¿Cuál es la suma de las cifras del número dado?

Solución:

Sea $\overline{abc}$ el número. Su C°A = $(10^3 - \overline{abc})$; por condición del problema, el C° A es un número de 2 cifras, es decir:

$10^3 - \overline{abc} < 100 \Rightarrow \overline{abc} > 900 \Rightarrow a = 9$

Además, según enunciado:

$$\begin{array}{l|l} \overline{abc} & 10^3 - \overline{abc} \\ \cline{2-2} \overline{bc} & 12 \end{array} \Rightarrow \overline{abc} = 12(1\,000 - \overline{abc}) + \overline{bc}$$

$\Rightarrow \overline{abc} - \overline{bc} = 12\ (1\,000 - \overline{abc})$

Evidentemente que $\overline{abc} - \overline{bc} = \overline{a00}$,

$\Rightarrow \overline{a00} = 12\ (1\,000 - \overline{abc})$, pero $a = 9$

Por lo tanto:

$900 = 12\ (1\,000 - \overline{abc})$

Dividiendo entre 12:

$75 = 1\,000 - \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} = 925$

Luego: a = 9, b = 2 , c = 5

Rpta.: $\therefore a + b + c = 16$

6.- Hallar: a + b + c, si se cumple la siguiente operación:

$$\begin{array}{l|l} \overline{ababl} & \overline{ba} \\ \cline{2-2} - - - & 66c \\ \hline \quad \overline{abb} & \\ \quad - - - & \\ \hline \quad\ \ \overline{acl} & \\ \quad\ \ - - - & \\ \hline \quad\quad\ 0 & \end{array}$$

Solución:

En la primera división parcial:

$\overline{aba} = 6 \,.\, \overline{ba} + \overline{ab}$

$10\,\overline{ab} + a = 6 \,.\, \overline{ba} + \overline{ab}$

Pasando $\overline{ab}$ al primer miembro y descomponiendo polinómicamente:

$9\,\overline{ab} + a = 60b + 6a$

$90a + 9b + a = 60b + 6a$

$85a = 51b$

$5a = 3b$

$\Rightarrow a = 3 \wedge b = 5$

y al terminar de efectuar la división, se verifica que c = 7

Rpta.: a + b + c = 15

7.- Hallar a + b + c + d, en la siguiente división:

$$\begin{array}{l|l} \overline{2accl} & \overline{bb} \\ \cline{2-2} - - - & \overline{aac} \\ \hline \quad \overline{2cc} & \\ \quad - - - & \\ \hline \quad\ \ \overline{dcl} & \\ \quad\ \ - - - & \\ \hline \quad\ \ 131 & \end{array}$$

Solución:

En la primera división parcial:

$$\overline{2ac} = \overline{bb} \cdot a + \overline{2c}$$

$$200 + 10a + c = 11 \cdot b \cdot a + 20 + c$$

$$10\,(18 + a) = 11 \cdot a \cdot b$$

$$\Rightarrow a = 4 \wedge b = 5$$

terminando de efectuar la división se verifica que: $c = 6,\ d = 4$

Rpta.: $a + b + c + d = 19$

8.- Demostrar que en toda división el residuo es siempre inferior a la mitad del dividendo.

Solución:

Sea la división $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$

En toda división se cumple: $r < d$

con mayor razón: $r < d \cdot c$

Sumando los dos miembros de esta desigualdad:

$r + r < d \cdot c + r \Rightarrow 2r < D$

$\therefore \quad r < \dfrac{D}{2}$

9.- Dados dos números A y B, se sabe que: A tiene 6 cifras y que la suma de las cifras de los números de las expresiones:

$E_1 = A^2 \cdot B^3$ y $E_2 = A^3 \cdot B^2$ es 87

¿Cuántas cifras tiene B?

Solución:

Considerando:

$E_1 \rightarrow$ n cifras

$E_2 \rightarrow$ m cifras

$m + n = 87$

Entonces:

$$10^{n-1} \leq A^2 \cdot B^3 < 10^n \qquad (1)$$

$$10^{m-1} \leq A^3 \cdot B^2 < 10^m \qquad (2)$$

Multiplicando ordenadamente (1) y (2):

$$10^{n+m-2} \leq A^5 \cdot B^5 < 10^{m+n}$$

Pero $m + n = 87$, luego

$$10^{87-2} \leq (A \cdot B)^5 < 10^{87}$$

Extrayendo la raíz quinta :

$$10^{17} \leq A \cdot B < 10^{17,4} \qquad (3)$$

Como A tiene 6 cifras:

$$10^{6-1} \leq A < 10^6$$

Cambiando el orden:

$$10^6 > A \geq 10^5 \qquad (4)$$

Dividiendo (3) entre (4):

$$\frac{10^{17} \leq A \cdot B < 10^{17,4}}{10^6 > A \geq 10^5} \Rightarrow 10^{11} \geq B < 10^{12,4}$$

Rpta.: B tiene 12 ó 13 cifras.

10.- Un número A tiene 7 cifras y otro, B, posee 9 cifras. Si $A^4 \cdot B^n$ tiene 10n cifras. Hallar "n".

Solución:

Si: $10^{24} \leq A^4 < 10^{28}$

$10^{8n} \leq B^n < 10^{9n}$

entonces:

$$10^{24+8n} \leq A^4 \cdot B^n < 10^{28+9n} \qquad (1)$$

Por otra parte, según enunciado del problema:

$$10^{10n-1} \leq A^4 \cdot B^n < 10^{10n} \qquad (2)$$

Comparando sólo los términos del lado derecho de (1) y (2):

$$28 + 9n = 10n$$

$$n = 28$$

Rpta.: $n = 28$

11.- Hallar los números que divididos por 23 dan como residuo el doble del cociente. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

Solución:

Sea N el número.

$$\begin{array}{l|l} N & 23 \\ \hline 2c & c \end{array} \Rightarrow N = 25\,c \qquad (1)$$

Por propiedad $r < d$

Es decir $2c < 23 \Rightarrow c < 11{,}5$

Luego, c puede ser 1; 2; 3; ... ; 11 en (1)

N puede ser 25; 50; 75; 100; ... ; 275

Rpta.: 11 números.

12.- El cociente de una división es tres veces el divisor; el residuo por defecto es 1/3 del residuo máximo; si el residuo por exceso es 27, hallar la suma de las cifras del dividendo.

Solución:

Llamando a D = dividendo; d = divisor;

c = cociente; r_d, r_e = residuos

según enunciado del problema:

$$c = 3d \qquad (1)$$

Si el residuo máximo es d - 1:

$$r_d = \frac{1}{3}(d - 1) \qquad (2)$$

$$\text{y}: \quad r_e = 27 \qquad (3)$$

Por propiedad: $r_d + r_e = d$, tenemos; de (2) y (3):

$$\frac{1}{3}(d - 1) + 27 = d \Rightarrow d = 40$$

$\therefore \quad r_d = 13$

En (1): $c = 3 \,.\, 40 = 120$

$\therefore \quad D = 40 \,.\, 120 + 13 = 4\,813$

La suma de las cifras del dividendo será:

$$4 + 8 + 1 + 3 = 16$$

Rpta.: 16

13.- Completar la siguiente división donde cada asterisco representa una cifra y dar como respuesta el dividendo, divisor y cociente.

```
**7*******  | ****7*
******      |-------
--------      **7**
*****7*
*******
--------
  *7****
  *7****
  -------
  *******
  ****7**
  --------
    ******
    ******
    ------
         0
```

Solución:

Este original problema que ilustra perfectamente el poder de una aritmética razonada muy elemental, fue propuesto y resuelto por W.E.H. Berwick en 1906 y publicado ese mismo año en la revista The School World.

1º Al multiplicar el divisor por 7 se obtiene un número de 6 cifras, mientras que con la segunda y cuarta multiplicación se obtiene números de 7 cifras. El divisor tiene que empezar por 11; 12; 13 ó 14, y la segunda y cuarta cifras del cociente serán ochos o nueves.

2º Puesto que la segunda cifra del producto del divisor multiplicado por 7 es 7, es fácil comprobar que el divisor tiene que empezar por 111; 124; 125; 138 ó 139.

3º El tercer resto empieza evidentemente por 10, y por consiguiente, también el cuarto producto. Por lo tanto, una de dos: o bien el divisor empieza por 111 y la cuarta cifra del cociente es 9, o bien por 125 y la cifra es 8.

4º Pero, si la cuarta cifra del cociente fuera 9, puesto que la tercera cifra del producto partiendo de la derecha es 7, el divisor tendría que empezar con 11 197 y entonces el producto por 7 tendría un 8 en segundo lugar en vez de un 7. Luego, la cuarta cifra del cociente es 8 y el divisor empieza por 12 547; además, la sexta cifra es menor de 5.

5º Como el tercer producto (por 7) empieza por 878, y el número inmediatamente superior no puede ser mayor que 979 ..., el cuarto residuo empieza por 101; y como sabemos además que el cuarto producto empieza por 100, el último resto empieza por 1; luego, la última cifra del cociente ha de ser un 1.

6º Probando sucesivamente 4; 3; 2; 1; como sexta cifra en el divisor y realizando la división en sentido regresivo se encuentra que tan sólo la segunda de esas cifras (el 3) satisface las condiciones todavía sin considerar; por lo tanto, la división completa es:

```
7375428413 | 125473
627365       58781
1101778
1003784
  979944
  878311
 1016331
 1003784
   125473
   125473
        0
```

Rpta: D = 7 375 428 413

d = 125 473

c = 58 781

PROBLEMAS SOBRE LAS CUATRO OPERACIONES

MÉTODOS DE FALSA SUPOSICIÓN Y DEL ROMBO

Hay problemas que presentan características especiales, que una vez identificadas permiten soluciones concretas con métodos pre-establecidos.

Características:

I. El problema tiene 2 incógnitas.

II. Presenta como datos, dos cantidades totales.

III. Se conoce un valor producido por una de las cantidades totales.

IV. Se tiene un valor unitario de cada incógnita.

Métodos de Solución:

I. Aplicando falsa suposición.

II. Aplicando el método práctico o rombo.

1. En una hacienda donde existen gallinas y carneros, se contó 120 cabezas y 300 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos carneros hay en la hacienda?

Solución:

I. Aplicando falsa suposición, se procede de la siguiente manera:

- Supuesto: Supongamos que todos los animales son carneros.

- Recaudación: El número de patas sería:

$$120 \,.\, 4 = 480$$

- Cálculo del error: Por haber supuesto que todos eran carneros (4 patas), se ha cometido un error con el número de patas.

error: 480 - 300 = 180 (error por exceso)

- Eliminar el error: Para que el supuesto sea verdadero, se debe eliminar el exceso; para ello recurrimos al siguiente gráfico:

Gráfico del supuesto:

Al sacar 1 carnero y cambiarlo por una gallina, el número total de animales no varía, pero sí el número de patas. En cada "cambio" se elimina:

4 - 2 = "patas"

Entonces, se debe efectuar:

180 : 2 = 90 "cambios"

$\therefore$ # de gallinas: 90 . 1 = 90

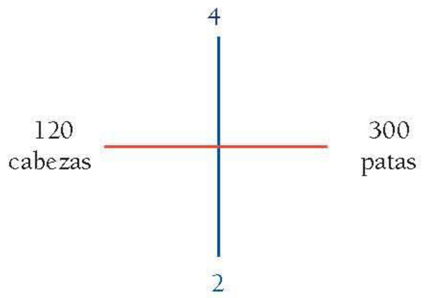
de carneros: 120 - 90 = 30

II. Aplicando el método rombo:

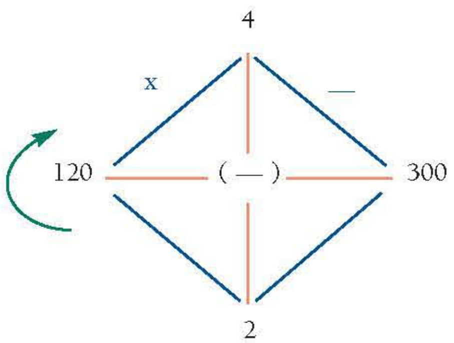
- Trazo una horizontal y en los extremos se escribe los 2 totales.

120 ———————— 300

- Se traza por el centro de la horizontal, una vertical y en los extremos se coloca los valores unitarios de las incógnitas (4 "patas" y 2 "patas").



Se completa el rombo de la siguiente manera:



Se opera en sentido horario, como muestra el gráfico. Se multiplica las 2 primeras cantidades (120 . 4) y al resultado se le resta la tercera cantidad (300); éste resultado se divide entre la diferencia de los valores que están en la misma vertical (4 - 2); y el resultado dará el valor de la incógnita cuyo valor unitario está en la parte inferior(2).

Entonces:

$$\text{Número de gallinas} = \frac{120 \,.\, 4 - 300}{4 - 2} = 90$$

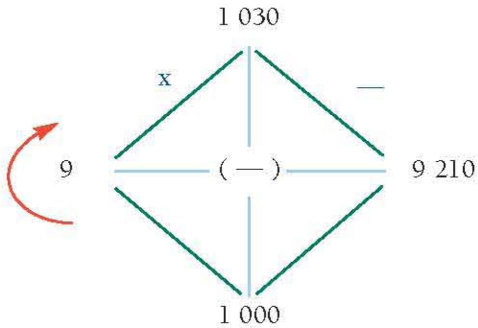
Número de carneros = 120 - 90 = 30

Rpta.: 90 gallinas y 30 carneros.

2.- Un litro de leche pura, pesa 1 030 gramos. Se compra 9 litros de leche que pesan 9 210 gramos. ¿Está adulterada la leche?, de ser así, ¿cuántos litros de agua posee?

Solución:

Aplicando el rombo y recordando que 1 l . de agua pesa 1 000 gramos:



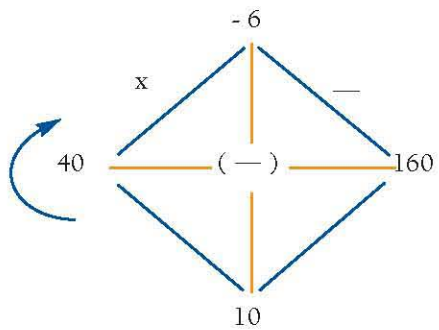
$$\text{l de agua} = \frac{9 \,.\, 1\,030 - 9\,210}{1\,030 - 1\,000} = \frac{60}{30} = 2$$

Rpta.: Sí, la leche está adulterada y contiene 2 litros de agua.

3.- Un examen consta de 40 preguntas. Cada pregunta bien contestada vale 10 puntos y cada pregunta no contestada o mal resuelta descuenta 6 puntos. Si un alumno obtuvo una nota de 160 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó bien?

Solución:

Aplicando el método del rombo:



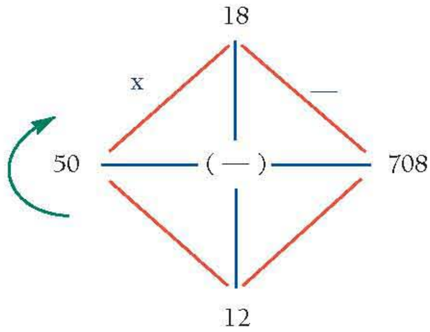
$$\text{Contestó bien} = \frac{40(-6) - 160}{-6 - 10} = \frac{-400}{-16} = 25$$

Rpta.: 25 preguntas.

4.- Por 50 libros (unos de Aritmética y otros de Álgebra) se ha pagado S/. 708. Sabiendo que cada libro de Aritmética cuesta S/. 18 y cada libro de Algebra S/. 12, ¿cuántos libros de Álgebra se compró?

Solución:

Aplicando el método del rombo:



Número de libros de Álgebra $= \dfrac{50\ .\ 18 - 708}{18 - 12}$

$= \dfrac{192}{6} = 32$

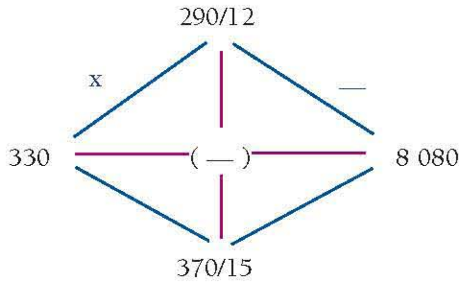
Rpta.: 32 libros de Álgebra.

5.- Se compra 330 lapiceros por S/. 8 080 pagando por algunos S/. 290 la docena, y por otros S/. 370 la quincena, ¿cuántos lapiceros más se compró de una clase que de la otra?

Solución:

Precio de un lapicero de la primera clase: $\dfrac{290}{12}$

Precio de un lapicero de la segunda clase: $\dfrac{370}{15}$



Número de lapiceros de la segunda clase:

$$= \frac{330 \cdot \dfrac{290}{12} - 8\ 080}{\dfrac{290}{12} - \dfrac{370}{15}} = \frac{-105}{\dfrac{-1}{2}} = 210$$

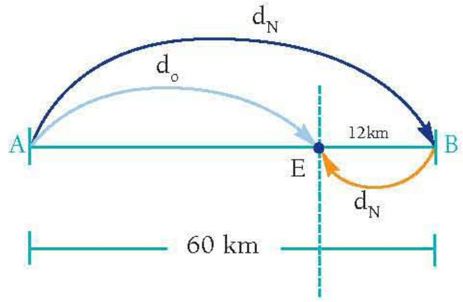
Rpta: 210 lapiceros de segunda clase y 120 lapiceros de primera clase.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MOVILES

1.- Dos corredores Obdulio y Napoleón parten simultáneamente en viaje de una ciudad A a otra B distante 60 km. La velocidad de Obdulio es 4 km/h menor que la de Napoleón. Luego de llegar a la segunda ciudad, Napoleón emprende el regreso y encuentra a Obdulio a 12 km. Determinar ambas velocidades.

Solución:

Por dato: Vn - Vo = 4



Al producirse el encuentro en el punto E, los tiempos empleados por ambas personas (t_E) son iguales.

En el tiempo t_E , la distancia recorrida por Napoleón (d_N) es:

$$d_N = 60 + 12 = 72 \text{ km}$$

La distancia recorrida por Obdulio (d_O):

$$d_O = 60 - 12 = 48 \text{ km}$$

$$\therefore \qquad d_N - d_O = 72 - 48 = 24$$

Dado que la distancia recorrida por un móvil es igual a velocidad por tiempo, entonces:

$$V_N\ .\ t_E - V_O\ .\ t_E = 24$$

$$t_E \underbrace{(V_N - V_O)}_{4} = 24 \Rightarrow t_E = 6 \text{ horas}$$

$$\Rightarrow V_N = \frac{d_N}{t_E} = \frac{72}{6} = 12 \text{ km/h.}$$

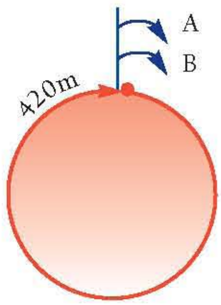
$$\Rightarrow V_O = \frac{d_O}{t_E} = \frac{48}{6} = 8 \text{ km/h.}$$

Rpta.: 12 km/h y 8 km/h

2.- Se tiene un circuito cerrado de 420m. Dos corredores parten de un mismo punto en el mismo sentido y al mismo tiempo; al cabo de 30 min uno de ellos le saca 2 vueltas de ventaja al otro, pero si parten en sentidos contrarios, a los 10 min se cruzan por segunda vez. Hallar ambas velocidades.

Solución:

a) Cuando parten en el mismo sentido



15 minutos $\Rightarrow$ 1 vuelta de ventaja (la velocidad es uniforme)

$$\Rightarrow \text{distancia}_A - \text{distancia}_B = d$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$V_A \cdot 15 - V_B \cdot 15 = 420$$

$$V_A - V_B = 28 \qquad (1)$$

b) Cuando parten en sentido contrario:

$$\text{distancia}_A + \text{distancia}_B = d$$

$$V_A \cdot 5 + V_B \cdot 5 = 420$$

$$V_A + V_B = 84 \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$V_A = \frac{28 + 84}{2} \Rightarrow V_A = 56 \text{ km/h}$$

$$V_B = \frac{84 - 28}{2} \Rightarrow V_B = 28 \text{ km/h}$$

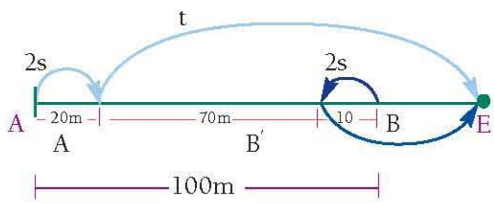
Rpta.: 56km/h y 28km/h.

3.- Dos autos "A" y "B":, que están separados una distancia de 100m, parten simultáneamente uno hacia el otro, con velocidades de 10 m/s y 5 m/s, respectivamente. Si luego de 2 segundos el auto "B" da vuelta y se dirige de regreso. ¿Cuánto tiempo le tomó al auto "A" alcanzar al auto "B"?

Solución:

En el punto E, el auto A alcanza al auto B.

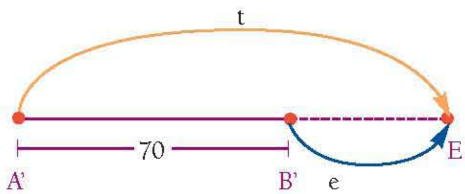
$V_A = 10$m/s
$V_B = 5$m/s



A los 2 segundos, A recorrió 20 m y B recorrió 10 m. Entonces: al cambiar "el sentido" de su recorrido, el auto "B" le lleva a "A" solo 70 m. de ventaja.

Para que "A" logre darle alcance a "B" debe descontarle los 70 m. de ventaja que éste le lleva.

A le dará alcance, al cabo del tiempo "t", adicional a los 2 segundos ya recorridos,ésto es:



$$(70 + e) = V_A \cdot t \qquad (1)$$

$$e = V_B \cdot t \qquad (2)$$

Restando (1) - (2):

$$70 = (V_A - V_B)\, t$$

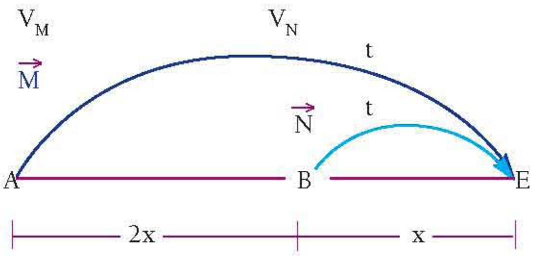
$$\Rightarrow t = \frac{70}{V_A - V_B} = \frac{70}{10 - 5} = 14$$

t = 14 seg.

Rpta: Al móvil “A” le tomó: 14 seg + 2 seg = 16 seg en dar alcance a “B”.

4.- Dos móviles “M” y “N” parten en el mismo sentido de los puntos “A” y “B”, respectivamente. Si “M” viaja al alcance de “N”. ¿Cuál debe ser la relación entre las velocidades de M y de N (V_M/V_N) para que cuando se encuentren, la distancia del “punto de encuentro” al punto “B” sea la mitad de la distancia entre los puntos A y B?

Solución:



Como: espacio = velocidad x tiempo

En el tiempo t (hasta E):

Espacio recorrido por M: 3x

Espacio recorrido por N: x

velocidad de M : $V_M = \dfrac{3x}{t}$ $\qquad (\alpha)$

velocidad de N : $V_N = \dfrac{x}{t}$ $\qquad (\beta)$

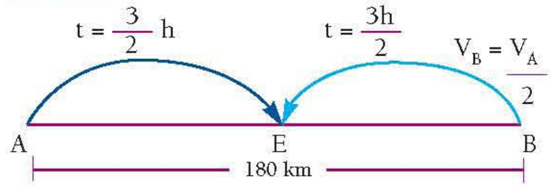
Si dividimos (α) por (β)

$$\frac{V_M}{V_N} = \frac{\frac{3x}{t}}{\frac{x}{t}} = \frac{3}{1}$$

Rpta: Relación de 3 a 1.

5.- Dos automóviles están separados por una distancia de 180 km. Si viajando en sentidos opuestos se encuentran luego de hora y media. ¿Qué velocidad tenía uno de los móviles si se sabe que iba a la mitad de la velocidad del otro?

Solución:



$\overline{AE} = V_A \cdot \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $EB = \dfrac{V_A}{2} \cdot \dfrac{3}{2}$

pero: $\overline{AE} + \overline{EB} = 180$ km

$$\frac{3V_A}{2} + \frac{3V_A}{4} = 180$$

Rpta.: $V_A = 80$ km/h

$V_B = 40$ km/h

PROBLEMAS SOBRE EDADES

Debemos recordar:

i) Que la diferencia entre las edades de dos personas es constante a través del tiempo.

ii) Que si al año en que nacimos le sumamos la edad que tenemos, el resultado nos dará el año en el cual estamos.

1.- Un padre le dice a su hijo: Hace 12 años mi edad era el cuádruple de la edad que tú tenías; pero dentro de 12 años será únicamente el doble. ¿Cuál es la edad actual del padre y del hijo?

Solución:

Sean P = edad del padre

H = edad del hijo

Para este tipo de problemas siempre se aconseja diseñar un cuadro, así por ejemplo:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
	Hace 12 años	Actualmente	Dentro de 12 años
Edad del Padre	P - 12	P	P + 12
Edad del Hijo	H - 12	H	H + 12

Por condición del problema hace 12 años:
edad del Padre = 4 (edad del hijo)

o sea: $P - 12 = 4\ (H - 12)$

$$P = 4\ H - 36 \qquad (1)$$

Dentro de 12 años:

edad del Padre = 2 (edad del hijo)

o sea: $P + 12 = 2\ (H + 12)$

$$P = 2\ H + 12 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que: $P = 60$ y $H = 24$

Rpta.: Edad actual del Padre: 60 años.

Edad actual del Hijo: 24 años.

2.- Karim le dice a Gessalim: "yo tengo 5 años más de la edad que tú tenías, cuando yo tenía 3 años menos de la edad que tú tienes, y cuanto tengas el doble de la edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 49 años. ¿Qué edad tiene Karim?

Solución:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Karin	$y - 3$	$x + 5$	$x+5+2(x+5)-y$
Gessalim	x	y	$2(x + 5)$

Se cumple que nuestras edades sumarán 49 años:

$$2x + 10 + x + 5 + 2\ (x + 5) - y = 49 \qquad (1)$$

También se cumple que:

$$y - 3 - x = x + 5 - y$$

$$2y = 2x + 8 \Rightarrow y = x + 4$$

reemplazando en (1)

$$5x + 25 - x - 4 = 49 \Rightarrow x = 7$$

x en y:

$\Rightarrow$ $y = 7 + 4 = 11$ (Edad de Gessalim)

Karim tiene: $7 + 5 = 12$ años

Rpta.: 12 años.

3.- Nancy le dice a María: "Cuando yo tenga la edad que tú tienes, tu edad será dos veces la edad que yo tengo; y cuando yo tenía 10 años, tú tenías la edad que tengo".¿Cúanto suman las edades actuales de Nancy y María?

Solución:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Nancy	10	y	x
María	y	x	$2y$

Como ha pasado la misma cantidad de tiempo para Nancy como para María entre "pasado" y "presente":

$$y - 10 = x - y \qquad (1)$$

Del mismo modo, entre "presente" y "futuro":

$$2y - x = x - y \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$x = 30$ años (María)

$y = 20$ años (Nancy)

Rpta.: 50 años.

4.- La edad actual de un hijo es los 4/9 de la edad de su padre; si dentro de 5 años, la mitad de la edad del padre sería igual a la del hijo. ¿Cuál es la edad del Padre?

Solución:

De los datos finales del problema, se deduce que dentro de 5 años, la edad del padre será el doble de la edad del hijo.

	PRESENTE	FUTURO
Padre	$9k$	$9k + 5$
Hijo	$4k$	$4k + 5$

En el futuro (dentro de 5 años), se cumplirá:

$$9\ k + 5 = 2\ (4k + 5)$$

$$9\ k + 5 = 8\ k + 10$$

$$k = 5$$

$\therefore$ Edad actual del Padre:

$$9\ .\ 5 = 45 \text{ años}$$

Rpta.: 45 años.

5.- Al dividir la suma de las edades de A y B en 1965 y 1950, respectivamente, se obtuvo un cociente de 5 y un residuo por defecto de 2. Si A nació 3 años antes que B. Calcular sus edades en el año en que su suma sea igual a 9 veces la suma de sus edades en 1950.

Solución:
Planteamos los nacimientos:

	1 950	1 965
A	x	x + 15
B	x - 3	x + 12

Suma de edades en 1 950: 2x - 3
Suma de edades en 1 965: 2x + 27

Por enunciado del problema:

$$\begin{array}{r|l} 2x + 27 & 2x - 3 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

Luego:

$$2x + 27 = 5\,(2x - 3) + 2$$

$$2x + 27 = 10x - 13$$

$$8x = 40$$

$$\Rightarrow\ x = 5$$

$\Rightarrow$ suma de edades en 1 950:

$$2x - 3 = 2 \,.\, 5 - 3 = 7$$

y, 9 veces la suma de las edades en 1950:

$$9 \,.\, 7 = 63 \text{ años}$$

Cuando la suma de las edades sea 63; como la diferencia de edades es 3, entonces:

A tendrá: 33 años y B tendrá: 30 años

Rpta.: 33 años y 30 años, en el año 1 978

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un concurso: 12 glotones comen 12 plátanos en 12 segundos; si todos los glotones necesitaron 5 minutos para comer todos los plátanos, ¿cuántos eran los glotones?

   Rpta.: Eran 300 los glotones.

2. Un ganadero vendió su ganado compuesto de 60 cabezas, entre vacas y terneros por la suma de S/. 21 600, pero como necesitaba S/. 25 000 debe efectuar una venta suplementaria a los mismos precios. Calcular que si vende 8 vacas le sobrarían 200 soles y si vende 20 terneros le faltarían S/. 400. ¿Cuántos terneros vendió en la primera venta?

   Rpta.: 18 terneros.

3. Lucho, Carlos y Jorge se encuentran jugando a los dados. Lucho tiene S/. 1 820, Carlos S/. 1 420 y Jorge S/. 1 200. Al cabo de una hora de juego se retira Carlos, pues ya sólo le queda S/. 120. Siguen jugando Lucho y Jorge, terminando Lucho con S/. 820 de ganancia más que Jorge. ¿Cuánto dinero tiene Jorge al final?

   Rpta.: Jorge tiene al final S/. 1 440.

4. Un caballo puede jalar una carreta que contiene un peso de 1 500 kilos, su velocidad es de 6 km/h, y se emplea 12 minutos para cargar la carreta, e igual tiempo para descargarla. El precio de la jornada de 10 horas es de S/. 50. Calcular el precio del transporte de 2 500 m^3 de tierra a una distancia de 900 m, sabiendo que 1 m^3 de tierra pesa 1 200 kg.

   Rpta.: S/. 7 000.

5. Un pescador compró menos de medio millar de pescados de distintas variedades.

   Compró $\overline{ab0}$ "bonitos", $\overline{bc}$ "lomas", $\overline{a0c}$ "cojinovas" y $\overline{c}$ "lenguados".

   ¿Cuánto gastó el pescador, sabiendo que en total compró $\overline{bbc}$ pescados, y que por cada "bonito" pagó S/. 5; por "cojinova", S/. 7; por "lorna", S/. 4 y por "lenguado", S/. 3?

Rpta.: 1 450 soles.

6. En un pueblo hay $\overline{abc}$ vehículos, de los cuales $\overline{a0c}$ son automóviles, $\overline{ab}$ camiones y $\overline{c}$, ómnibus. Si el número de vehículos está comprendido entre 150 y 300. ¿Cuántos automóviles hay en el pueblo?

Rpta.: Hay 207 automóviles.

7. Se tienen 48 manzanas repartidas en 3 montones diferentes. Del primer montón se pasó al segundo tantas manzanas como hay en éste; luego del segundo se pasó al tercero tantas manzanas como hay en este tercero y por último del tercero se pasó al primero tantas como aún quedaban en ese primero. Si los tres tienen ahora igual número. ¿Cuántas había al principio en cada montón?

Rpta.: 22; 14 y 12 manzanas.

8. Un fabricante de helados quiere obtener 10 millones de soles de ganancias en 3 meses de verano intenso. Si transcurrido los dos primeros meses, sólo ha logrado la mitad de lo que se propuso, haciendo trabajar a 25 carretilleros que distribuyen helados durante 8 horas diarias. ¿Cuántos carretilleros nuevos precisa si ahora los va a hacer trabajar 10 horas diarias?

Rpta.: Precisa 15 nuevos carretilleros.

9. Un contratista, al efectuar las obras del Trébol del 2 de Mayo, se había comprometido a terminar cierto tramo de la misma en 30 días, empleando 20 obreros, trabajando 9 horas diarias. Al cabo de 10 días de trabajo, se le informó que la obra debía terminarse 5 días antes de lo estipulado. Averiguar el número adicional de obreros que se contrató, si el número de horas de trabajo diario se aumentó a 10.

Rpta.: Se contrató 4 obreros adicionalmente.

10. En una competencia de glotones, por equipos, se observa que 10 de ellos, de iguales características, pueden comerse un pollo a la brasa en 24 minutos. ¿Cuántos glotones de características análogas, podrían comerse 8 pollos en un tiempo 5 veces menor?

Rpta.: 400 glotones.

11. Un barco que tiene entre tripulantes y pasajeros a 1 500 personas, socorre a los náufragos de otro barco que suman 500. Si al principio se tenían alimentos para 15 días. ¿Cuántos días pueden navegar en las nuevas condiciones, si se asigna a cada persona las 3/4 partes de una ración normal?

Rpta.: Pueden navegar 14 días.

12. Un granjero tiene 1500 animales para los cuales tiene alimento para 30 días. Debido a dificultades económicas, decide vender cierto número de ellos y aún a los restantes proporcionar los 3/5 de ración. Para que los alimentos duren 4 meses, ¿cuántos animales tendrá que ser vendidos?

Rpta.: 975 animales.

13. Con 10 kg de pintura se puede pintar un muro de 32 metros de largo por 0,80 metros de altura. ¿Cuál será la longitud de otro muro que tiene 0,56 metros de altura y en el cual se utilizó 175 kg de pintura?

Rpta.: 800 m de longitud.

14. Una familia consume 1,5 kg de carne por día y dispone de S/. 518,40 para efectuar este consumo en 1 mes de 30 días. Sabiendo que durante los 12 últimos días pagó el kg. a S/. 0,80 más que en los primeros. Determinar el precio de 1 kg. de carne en el primer período.

Rpta.: S/. 11,20

15. El automóvil de Carla recorre 36 km por galón de gasolina. Por encontrarse el auto en reparación, una compañera de trabajo la recoge en la mañana y la regresa a su casa en las tardes. Calcula que semanalmente, de Lunes a Viernes, ahorra S/. 18 en gasolina. Si el galón de gasolina cuesta S/. 9, calcule la distancia de la casa al trabajo de Carla en km.

Rpta.: 1,2 km.

16. En el último torneo por el Campeonato Mundial de Ajedrez, se jugó en total 524 partidas. Sabiendo que hubo2 ruedas, tales que en la primera jugaron todos contra todos y en la segunda sólo jugaron los 8 primeros, determinar cuántos jugadores participaron.

Rpta.: 32

17. En un campeonato de fútbol, participaron 10 equipos; cada uno tiene que jugar un partido con los demás equipos. Si en cada fecha se juega 2 partidos. ¿En cuántas fechas se concluirá el campeonato, sabiendo que uno de los equipos se retiró del campeonato después de haber jugado 4 partidos?

Rpta.: En 20 fechas.

18. Un comerciante compró 2 500 botellas a S/. 200 el ciento. En el camino se rompieron 190 botellas y después regaló 5 botellas por cada 100 que vendía. Determinar a cómo vendió el ciento, si en total ganó S/. 1 160.

Rpta.: 280 soles.

19. Calcular el valor de la siguiente suma:

$408 + 418 + 428 + 438 + \ldots\ldots + 2\,008$

Rpta.: 194 488

20. ¿Cuánto suman las cifras del resultado de restar:

$$\underbrace{9999\ldots\ldots9}_{300\text{ cifras}} - \underbrace{656565\ldots\ldots65}_{260\text{ cifras}} \qquad ?$$

Rpta.: 1 270

21. Si en la siguiente suma:

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D\ + \\
E & F & G & H \\
I & J & K & L \\
M & N & O & P \\
\hline
 & S & &
\end{array}$$

se cumple que:

$\overline{AB} + \overline{EF} + \overline{IJ} + \overline{MN} = 347$

$\overline{CD} + \overline{GH} + \overline{KL} + \overline{OP} = 305$

Hallar el valor de la suma S.

Rpta.: S = 35 005

22. Hallar el valor de "m" y de (a+b+c), si se cumple:

$\overline{m1m} + \overline{m2m} + \overline{m3m} + \ldots\ldots + \overline{m9m} = \overline{abc4}$

Rpta.: m = 6 ; (a + b + c) = 14

23. Con S/. 428,80 se han comprado dos piezas de tocuyo: una de 23,20 metros y la otra de 42,80 metros. Determinar el precio de 1 metro de cada pieza, sabiendo que un metro de la segunda cuesta S/. 2 más que un metro de la primera.

Rpta.: S/. 5,20 y S/. 7,20

24. Jorge y Francisco se encuentran resolviendo problemas aritméticos. Jorge comenzó a resolver los problemas a las 8 horas 30 minutos a razón de 5 problemas por cada media hora; trabaja dos medias horas seguidas y descansa la siguiente media hora, mientras que Francisco comienza a resolver problemas a las 10 a.m., a razón de 4 problemas cada media hora, ininterrumpidamente. Determinar a qué hora del día Francisco y Jorge habrán desarrollado el mismo número de problemas.

Rpta.: 5 y 30 p.m.

25. Actualmente la suma de la edad del padre con las edades de sus 2 hijos es 75 años, si hace 5 años la edad del padre era el triple de la suma de las edades que tenían sus 2 hijos. Hallar la edad actual del padre.

Rpta.: Actualmente el padre tiene 50 años.

26. Un padre tiene 40 años y su hijo 12. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era 5 veces la del hijo?

Rpta.: Hace 5 años.

27. La edad de una persona es doble de la de otra, hace 7 años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuáles son actualmente, las edades de las dos personas?

Rpta.: 28 y 14 años

28. Un comerciante compró 1 800 metros de soga, de dos tipos soga N° 1 y soga N° 2; se sabe que en total canceló S/. 60 480 y que 3 metros de soga N° 2 valen tanto como 2 metros de la soga N° 1, además la longitud de la soga N° 1 es 4 veces la longitud de la soga N° 2.

Hallar el precio de 1 m de soga N° 1.

Rpta.: S/. 36

29. La diferencia de dos números de tres cifras significativas es 291 y su suma es el triple de 291. ¿Cuál será la diferencia de ambos números con el orden de sus cifras invertido?

Rpta.: 93

30. Hallar el número de dos cifras cuya suma sea 14, y tal que si se invierte el orden de las cifras, el número aumenta en 18.

Rpta.: 68

31. La diferencia entre dos números es 42. Se les aumenta a cada uno 8; el mayor resulta entonces cuádruple del menor. ¿Cuáles son estos números?

Rpta.: 48 y 6

32. Hallar la suma de todos los números positivos de 2 cifras menores que 100 que sean menores que sus respectivos complementos aritméticos.

Rpta.: 1 180

33. Si: $\overline{abcd} \cdot \overline{bd} = 43\,904$

$\overline{bc} \cdot bd = 1\,184$

Hallar: $a + b + c + d$.

Rpta.: 13

34. Si: $N \cdot 73 = \ldots\ldots 349$

$N \cdot 86 = \ldots\ldots 918$

Hallar la suma de las 3 últimas cifras del producto: $N \cdot 756$

Rpta.: 16

35. Si al multiplicando $\overline{abc}$ se le agrega 8 unidades y al multiplicador $\overline{de}$ se le disminuye 3, el producto aumenta en 228. Hallar el multiplicando si es el menor posible y $a + b + c = d + e = 9$.

Rpta.: 108

36. ¿Cuánto suman las 66 cifras de menor orden del producto:

$$\underbrace{555\ldots\ldots\ldots55}_{130\text{ cifras}} \cdot \underbrace{333\ldots\ldots\ldots\ldots33}_{80\text{ cifras}}$$

Rpta.: 287

37. Un escolar ha multiplicado 1 número entero por 467 y halló como producto 1 925 817. Un compañero le corrige indicándole como inexactas, las cifras 9 y 7. ¿Cuáles son las cifras correctas y cuál es el número que ha sido multiplicado por 467?

Rpta.: Las cifras son: 3 en vez de 9 y 7. El número es: 2 839.

38. ¿Cuántas cifras tiene:

$$A^3 + (B^2 \cdot C);$$

Si A tiene 12 cifras, B tiene 10 y C tiene 15?

Rpta.: de 34 a 36 cifras.

39. Si A tiene 5 cifras, B tiene 6 y C tiene 9. Hallar el número de cifras de:

$$A^2 \cdot (B^3 \cdot C^2)$$

Rpta.: De 40 a 46 cifras.

40. Al dividir el número $\overline{xy51}$ entre $\overline{ab}$, se obtuvo como residuos sucesivos los números 15, 15 y 11 respectivamente. Determinar el número ab.

Rpta.: $\overline{ab}$ puede tomar los valores: 70; 35; 28 o 20.

41. ¿Cuál es el mayor número entero, por el que debemos de multiplicar al dividendo de una divi-

sión en la cual el divisor es 535 y el residuo 17, si deseamos que el cociente, quede multiplicado por el mismo número entero?

Rpta.: 31

42. ¿Cuántos números menores que 400 pueden ser dividendos de una división cuyo cociente es 12 y cuyo residuo es 14?

Rpta.: 18 números

43. Al dividir un número de 3 cifras entre otro de 2 cifras se obtiene 12 de cociente y un cierto residuo; al dividir el C°A del dividendo entre el C°A del divisor se obtiene 9 de cociente y de residuo el C°A del anterior residuo. Hallar el divisor.

Rpta.: divisor = 30

44. Encontrar el divisor y el cociente de una división, sabiendo que el dividendo es 258 728 y que los restos sucesivos obtenidos en la determinación del cociente (por defecto en una unidad), son 379, 480 y 392.

Rpta.: Divisor: 552
Cociente: 468

45. Si "D" se divide entre "d" se obtiene "r" de residuo. D + r entre "d", se obtiene 24 de residuo. D + d entre "d", se obtiene 41 de residuo. ¿Cuál es el valor de "d"?

Rpta.: 29

46. Si se suma 1 000 unidades al dividendo de una división de divisor 29, el nuevo residuo va a ser 10. ¿Cuál era el residuo primitivo?

Rpta.: r = 25

47. El cociente de la división del número "D" por el número entero "d" es 4 y el resto es 30. Si se suma el dividendo, el divisor, el cociente, y el resto, la suma obtenida es 574. Hallar el dividendo y el divisor.

Rpta.: D = 438
d = 102

48. Reconstruir la siguiente división donde cada punto es una cifra:

```
* * * * * * *     |**
* * *             |-------
-----              ** 8 **
   * *
   * *
   -----
    * * *
    * * *
    -----
        1
```

Rpta.: D = 1 089709
d = 12
c = 90 809

49. Hallar el número de cuatro cifras cuya suma sea igual a 25, además que la suma de las cifras de las centenas y los millares es igual a la cifra de las decenas y que la suma de las cifra de las decenas y de los millares es igual a la cifra de las unidades. Si se invierte el número él aumenta en 8082.

Rpta.: 1 789

50. El dividendo, el divisor y el residuo de una división tiene por suma 1609. El cociente es 30. Determinar el dividendo, el divisor y el residuo de la división.

Rpta.: D = 1 544, d = 51 y r = 14
D = 1 515, d = 49 y r = 45

51. Al residuo de una cierta división le faltan 8 unidades para ser máximo, si se suma 6416 al dividendo, el cociente aumenta en 89 y el residuo se vuelve máximo. ¿Cuál es el divisor?

Rpta.: el divisor es 72.

52. Dos depósitos de agua: uno de 220 L de capacidad, pero vacio y otro actualmente lleno, de 535 L están unidos por una tubería que lleva agua del segunso al primer depósito, a razón de 5 L/min. ¿Al cabo de cuánto tiempo uno tendrá el triple de litros que el otro?

Rpta.: 26' 45"

53. Si pronuncio 36 palabras me faltarían 6 segundos; pero si pronuncio solamente 32 palabras me sobrarían 2 segundos. En 1 minuto, ¿cuántas palabras puedo pronunciar?

Rpta.: 30 palabras

54. Una persona dispara 45 balas en 75 segundos. En 2 minutos. ¿Cuántas balas disparará?

Rpta. 72

55. Un comerciante compró 1 800 vasos de S/. 6,50 cada uno. Rompe varios de ellos y vende los restantes a S/. 8,50 cada uno, logrando un beneficio de S/. 3 251,50. ¿Cuántos vasos rompió?

Rpta. : 41

56. Si entre los números A y B hay 35 números enteros. ¿Cuántos hay entre 2A y 2B?

Rpta. : 71

57. Si $C > A$; $C - D < 0$; $B - A > 0$; $A - E > 0$, ¿Cuál de estos valores es el menor?

Rpta.: El menor es E.

58. En una división inexacta, se obtiene como resto por defecto (73); y como resto por exceso (65). Se pide calcular el dividendo, sabiendo que el cociente por exceso es el triple del divisor. Dar como solución los 3/4 del dividendo.

Rpta.: 42 800,25

59. Reconstruir la siguiente división: dar como respuesta el cociente.

```
2 * * *  | * 3
* *      |------
 3 *
 * 3
 -----
 * * 9
 * * *
 -----
     4
```

Rpta.: c = 115

60. Si un número $\overline{a\,b\,c\,d\,e}$, se divide entre 73 se obtiene 4 residuos sucesivos que son: 21, 69, 34 y 50. ¿Cuál es la suma de a + b + c + d?

Rpta.: 21

61. Si $A^3 . B^2 . C$ tiene entre 35 y 40 cifras. ¿Cuántas tiene A? Si A . B tiene 8 cifras y B . C tiene 10 cifras.

Rpta.: de 9 a 12 cifras.

62. ¿Cuál es el mayor número que se puede sumar al dividendo 389 de una división para que su cociente 19 aumente en 8 unidades?

Rpta.: 170

63. En una división, para que el residuo sea 32 hay que sumarle 62 o restarle 9 unidades al dividendo. Si el cociente es un número igualmente distante del divisor que del residuo. ¿Cuál es el valor del dividendo?

Rpta.: 4 017

64. Si en una división el residuo es el complemento aritmético del dividendo de 3 cifras y el cociente es el complemento aritmético del divisor de 2 cifras. ¿Cuál es el valor del divisor más el residuo?

Rpta.: 109

65. ¿Cuál es el menor número que se le puede restar al dividendo de una división para que el cociente disminuya 7 unidades, si sabemos que: Residuo por defecto = 32; residuo por exceso = 72

Rpta.: 728

66. Al dividir un número entre otro se obtiene 4 de cociente y 2 de residuo; pero si a cada uno de dichos números se le disminuye en 3 unidades, su producto disminuye en 282. Hallar el número menor.

Rpta.: 19

67. p = A . B tiene 42 cifras, si A se multiplica por un número de 4 cifras y a B se le añade 5 cifras.

¿Cuál será el nuevo número de cifras de P?

Rpta.: Entre 49 y 51 cifras.

68. Un número de 4 cifras es de la forma N = $\overline{mcdu}$ tal que se verifica: $5.\overline{mc} + u = \overline{du}$, y además es igual al producto de dos números enteros consecutivos. Hallar dicho número.

Rpta.: Existen 3 números de la forma $\overline{mcdu}$; son: 1056; 1 260 y 1 892

69. Dados dos números A y B, se sabe que: A tiene 6 cifras y que la suma de los números de cifras de las expresiones:

$M_1 = A^2 . B^3$ y $M_2 = A^3 . B^3$

es 87. ¿Cuántas cifras tiene B?

Rpta.: B tiene 10 cifras.

70. Hallar el valor de n, si E tiene 11 cifras; A tiene 18; y B, 13 cifras siendo:

$$E = \sqrt[n]{A^2 . B^3}$$

Rpta.: n = 7

71. Hallar el número de cifras que puede tener la expresión:

$$E = A^2 . B^3 . (C - D)^4$$

Donde:

A = número de 5 cifras

B = número de 4 cifras

C = número de 6 cifras

D = número de 3 cifras

Rpta.: E puede tener de 38 a 46 cifras

72. El número de cifras A es el doble del de B, y el cuádruple del de C. Si D tiene 5 cifras. ¿Cuántas cifras puede tener:

$$E = (A^3 . D) : (B^4 . C^4) ?$$

Rpta.: E puede tener de 2 a 13 cifras

73. En una pista circular de 3000 m., dos velocistas parten juntos en sentidos contrarios y se cruzan al cabo de 20 minutos. Después de 5 minutos llega el más veloz al punto de partida. ¿Cuál es la velocidad del otro?

Rpta.: 30m/min.

74. A las 8 a.m. salen de "x", 2 ciclistas A y B, al encuentro de otros dos ciclistas, C y D, que vienen de "y" a una velocidad de 600 m/min, pero que salieron con 5 minutos de diferencia entre ellos. A las 8 y 15 se encuentra A con C y 3 minutos después con D. Luego, B se encuentra con C y 4 minutos después se encuentra con D. ¿Cuál es la distancia que separa a A y B a las 9 a.m.?

Rpta.: 15 km.

75. Una diligencia sale de un punto A por una cierta ruta con una velocidad de 11 km/h. Poco tiempo después un ciclista que recorre 297 metros/minuto sale del mismo punto y por la misma ruta en su persecución. Determinar la diferencia de horas entre las partidas, si el encuentro se produjo a las 2 horas 27 minutos, después de la partida del ciclista.

Rpta.: 1 h 31 min 8,4 s

76. Un peatón partió de A con dirección a B con velocidad de 6 km/hora. Después de haber recorrido 4 km fue alcanzado por un vehículo que salió de A, 30 minutos más tarde. Después de haber recorrido el peatón 8 km más, encontró por 2da. vez al vehículo que regresaba de B, donde descansó 15 minutos. Calcular la distancia AB.

Rpta.: 21 km

77. Dos ciudades A y B están unidas por un ferrocarril de 500 km de longitud. El pasaje completo de A a B cuesta S/. 120 y de B a A cuesta S/. 115. Además, por cada kilómetro de recorrido se paga S/. 0,50 por persona. Una persona que viene de A y otra de B bajan en una ciudad intermedia C y cancelan la misma cantidad por viaje. ¿Cuál era esta cantidad?

Rpta.: S/. 183.74

78. Un móvil se desplaza entre 2 puntos, A y B. Sale de A a las 6 a.m. y llega a B a las 2 p.m., despla-

zándose a 5 km/h, habiendo pasado por un punto C. Al día siguiente con la misma marcha, salió de D a las 6 a.m. para volver a A, observando que pasó por C a la misma hora que el anterior día. ¿A qué hora pasó por C?

Rpta.: A las 10 a.m.

79. Dos ciclistas parten desde un mismo punto en un círculo de 6000 m en direcciones opuestas. Si cuando el primero ha completado una vuelta al cabo de 20 minutos, se cruzan por tercera vez. ¿Cuál es la velocidad del más rápido?

Rpta.: 600 m/min.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si 10 personas comen 30 kg de arroz en 30 días. ¿Cuántos kg comerá 1 persona en un día?

a) 0,1 kg b) 0,8 kg c) 0,5 kg

f) 1 kg e) 0,6 kg

2. Dos toneles completamente llenos tienen en total 364 litros de vino. Determinar la capacidad del menor, sabiendo que, cuando se retiran 16 litros de uno, y 108 litros del otro, a los 2 les queda el mismo volumen.

a) 108 L b) 136L c) 142L

d) 146L e) 154L.

3. Un hacendado compra 5 vacas, 7 caballos y 9 cerdos. Una vaca cuesta S/. 1 200 más que un caballo y 10 cerdos cuestan tanto como 3 caballos. Si por todo se pagó S/. 32 460, hallar el precio de cada cerdo.

a) S/. 324,60; b) S/. 540; c) S/. 587,50;

d) S/. 362,40 e) S/. 275,50

4. Un agricultor dio 7 sacos de papas de 50 kg cada uno y 130 soles en efectivo por 3 metros de casimir; si hubiera dado 10 sacos en vez de los 7, habría recibido 4 metros de casimir. Dígase el precio de 1 metro de casimir.

a) 189 soles b) 126, 50 soles c) 195 soles

d) 98 soles e) 145 soles

5. Dos hermanos heredan cierto capital, al primero le correspondió: S/. 10 000 más que al segundo. Durante 12 años ahorraron cada uno cierta cantidad por año, se sabe que el primero ahorró por año: S/. 2 000 más que el segundo. Determinar el capital de cada hermano al final del doceavo año, si entre los dos tenían S/. 126 000.

a) S/. 100 000 S/. 26 000

b) S/. 92 000 S/. 34 000

c) S/. 98 000 S/. 28 000

d) S/. 80 000 S/. 46 000

e) N.A.

6. Una persona compra 5 kg de café y 3 kg de azúcar por S/. 101,40. Si un kg de café cuesta tanto como 15 kg de azúcar. Determinar, ¿cuánto se debe pagar por la compra de medio kilo de café y un kilo de azúcar?

a) S/. 19,50 b) S/. 8,75

c) S/. 11,05 d) S/. 14

e) S/. 18,65

7. 7 kilos de café y 6 de té cuestan S/. 480; 9 kilos de té y 8 de café cuestan S/. 645. ¿Cuánto vale un kilo de café y medio kilo de té?

a) S/. 17,80 b) S/. 52,50

c) S/. 36,50 d) S/. 41,20

e) N. A.

8. Un labrador lleva consigo S/. 450 cuando recibe el importe de 7 sacos de trigo; luego, usa el 75% del dinero que tiene para pagar los impuestos y el arriendo de fincas. Por fin vende 5 sacos de trigo más al mismo precio que antes, hallándose entonces con S/. 477. ¿A cómo vendió el saco de trigo?

a) S/. 28 b) S/. 62 c) S/. 46

d) S/. 83 e) S/. 54

9. Un heladero gana diariamente S/. 50 y gasta por término medio S/. 32,50 al día, pero cuando no trabaja gasta S/. 8 más. Al cabo de 60 días, está debiendo S/. 110. ¿Cuántos días no trabajó?

a) 20 b) 30 c) 15 d) 35 e) 40

10. Con billetes de S/. 10 y S/. 5, se pagó una cuenta de S/. 280, se sabe que el número de billetes de 5 soles excede en 8 al número de billetes de 10 soles. Hallar el número total de billetes.

a) 24 b) 16 c) 40 d) 8 e) 32

11. Un señor va al hipódromo con S/. 630 y cuando ve que estaba perdiendo el doble de lo que no perdía, apuesta todo, logrando triplicar ese dinero. ¿Cuánto ganó ese señor?

a) S/. 120 b) Nada c) S/. 420

d) S/. 630 e) S/. 105

12. Un negociante compra 815 pavos por S/. 48 900. Vende una parte en S/. 20 475 ganando S/. 5 en cada uno y otra parte en S/. 5 500 perdiendo S/. 5 en cada uno. ¿A cómo vendió los restantes, si en total perdió S/. 2,925?

a) S/. 40 b) S/. 45 c) S/. 50

d) S/. 38 e) S/. 42

13. Una frutera tiene 90 naranjas de dos calidades diferentes, las que piensa vender a S/. 0,45 el par. Si hubiera vendido las de primera calidad a S/. 0,30 cada una y las de segunda calidad a S/. 0,20, hubiera perdido S/. 1,25 sobre el total que planea obtener. ¿Cuántas naranjas tiene de segunda calidad?

a) 60 b) 10 c) 80 d) 40 e) 20

14. La diferencia entre la cifra de las unidades y la cifra de las decenas de un número es 4, si el número se suma con el número que resulta de invertir sus cifras, la suma es 66. Hallar el número.

a) 14 b) 62 c) 40 d) 26 e) 15

15. Tres cazadores A, B y C, tienen más de 8 perros. B piensa adquirir 4 perros más, con lo cual tendrá más perros que A y C juntos. Se sabe que B tiene menos perros que C y los que éste tiene no llegan a 5. ¿Cuántos perros tiene A?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

16. Una rueda A de 90 dientes engrana con otra B de 18 dientes. Fija al eje de ésta va montada una rueda C de 114 dientes, que engrana con otra D de 19 dientes. ¿Cuántos revoluciones habrá dado la rueda D, cuando la rueda A haya dado 245?

a) 7 350 b) 8 000 c) 4 850

d) 7 410 e) 11 585

17. Un comerciante vende 1 metro de tela A en 16 soles y 1 metro de tela B en 7 soles. Obtiene así 6094 soles como producto de la venta; siendo la diferencia entre el producto de la venta de A y el producto de la venta de B igual a 326 soles. ¿Cuántos metros de tela se vendió?

a) 160 m b) 412 m c) 412, 625 m

d) 612,625 m e) 480 m

18. Una persona paga S/. 37 620 por cierto número de ovejas y comienza vendiendo parte de ellas en S/. 15 980 a S/. 170 cada una, perdiendo en cada una S/. 20. ¿A cómo deberá vender cada una de las restantes para ganar S/. 4 360 en todas las ovejas?

a) S/. 200 c/u b) S/. 230 c/u c) S/. 300 c/u

d) S/. 220 c/u e) S/. 250 c/u.

19. Se vendió 468 huevos; unos a S/. 14,40 la docena y otras a S/. 12 la docena. Determinar cuántos huevos del primer precio se vendió, sabiendo

que por cada 2 docenas vendidas se regalaba una, y que por todo se recibió S/. 350,4.

a) 180 b) 175 c) 275

d) 315 e) 288

20. Calcular el valor de:

$4 + 5 + 7 + 3 + 6 + 5 + 9 + 3 + \ldots. + 90$

a) 1 395 b) 1 342 c) 1 403

d) 1 364 e) 1 686

21. Dos trenes A y B marchan en sentido contrario a 25 y 35 km/h respectivamente, un pasajero del tren A, ve pasar al B en 6 segundos. ¿Cuál es la longitud del tren B?

a) 80 m b) 90 m c) 100 m

d) 130 m e) 145 m

22. Un ciclista razonaba de la siguiente manera: "si voy a 10 km/h llegaré a mi destino a las 3 p.m., pero si marcho a 15 km/h llegaría a la 1 p.m. ¿Qué velocidad deberá llevar para llegar a las 2 p.m.?"

a) 11 km/h b) 12km/h c) 13 km/h

d) 12,5 km/h e) 13,5 km/h

23. Hallar la cifra de las decenas de miles de N:

$N = \underbrace{241 + 247 + 253 + 259 + \ldots}_{31\ \text{sumandos}}$

a) 11 b) 9 c) 7

d) 1 e) 0

24. Entre 12 personas deben pagar cierta cantidad de dinero, pero resulta que 4 de ellos sólo pueden pagar la mitad de lo que les corresponde, obligando de esta manera a que cada uno de los restantes diese 100 soles más. Averiguar cuánto era el gasto.

a) S/. 3 600 b) S/. 4 800 c) S/. 2 400

d) S/. 5 480 e) S/. 2 600

25. Un obrero gana S/. 400 por 16 días de trabajo de 8 horas diarias. ¿Cuánto ganaría por 20 días, si trabaja 6 horas diarias?

a) S/. 150 b) S/. 240 c) S/. 375

d) S/. 200 e) S/. 300

26. En un pueblo existe un santo que hace el milagro de duplicar el dinero que uno tiene, pero por cada milagro que hace se le debe dejar una limosna de 8 soles. Si luego de hacerle 3 milagros seguidos a un devoto, éste salió de la iglesia sin un centavo. ¿Cuánto tenía al entrar?

a) S/. 15 b) S/. 8 c) S/. 24

d) S/. 7 e) S/. 18

27. Tres personas A, B y C acuerdan que en cada partida de naipes el vencedor duplicará el dinero de los otros dos. Cada uno pierde una partida en el orden de sus nombres; si después de perder C, cada uno se quedó con S/. 16. ¿Con cuánto empezó a jugar C?

a) S/. 20 b) S/. 14 c) S/. 26

d) S/. 18 e) S/. 32

28. En una resta, la suma del minuendo, sustraendo y diferencia es 142. Si el sustraendo es el C°A del minuendo. Hallar la diferencia.

a) 55 b) 17 c) 45

d) 42 e) 83

29. Complete las siguientes operaciones y diga cuál es el valor de: a+b+c.

$$\begin{array}{lr} a = & *\,7\,*\,2 \\ b = & 7\,*\,3\,* \\ \hline & *\,0\,* \\ & 7\,* \\ \hline & *\,*\,* \\ & *\,3\,*\,*\,* \\ \hline c = & 6\,*\,*\,*\,7 \end{array}$$

a) 71 286 b) 74 036 c) 74 046

d) 79 450 e) 70046

30. Se suman todas las permutaciones cíclicas de un número de 9 cifras diferentes y distintas de cero. ¿Cuál es la cifra del cuarto orden de la suma total?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 5

31. Un padre a quien se le preguntó por la edad de su hijo responde: "Mi edad es tres veces la suya, pero hace 10 años era el quíntuple". ¿Cuál es la edad del hijo?

a) 20 años b) 30 años c) 10 años

d) 25 años e) 40 años

32. La suma de las edades de Juan y Pedro es 48 años, al acercarse María, Juan le dice: Cuando tú naciste yo tenía 4 años; pero cuando Pedro nació, tenías 2 años. ¿Cuál es la edad de María?

a) 21 b) 22 c) 23

d) 21 e) N. A.

33. La edad de un padre y su hijo suman 35; si el padre tuviera 17 años menos y el hijo 8 años más los dos tendrían la misma edad. Determinar cuántos años tiene el hijo.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

34. La edad de una persona es el doble de la de otra, y hace 7 años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es el producto de las edades actuales de estas personas?

a) 400 b) 395 c) 380

d) 392 e) 390

35. Suponiendo que b tiene el menor valor posible, determinar las operaciones indicadas y dar como respuesta (a + b + c + d). Cada asterisco representa una cifra.

$$\begin{array}{rr} & 35*8 \\ a = & *45* \\ \hline b = & ***2* \\ c = & *0*5 \\ \hline d = & 7*99 \end{array}$$

a) 10528 b) 164800 c) 21232

d) 26504 e) 11624

36. Un peatón va de A a B en 2 horas; al volver, como él ha recorrido 11 metros más por minuto, ha hecho el trayecto en 105 minutos. Hallar la distancia AB.

a) 12,5 km b) 11,5 km c) 8 km

d) 9,24 km e) 10,755 km

37. Un buque está anclado a una determinada distancia de la orilla. Si un observador calculó que la onda de una explosión en el buque demoró en llegar a la orilla 5 segundos más por aire que por agua. Calcular la distancia del buque a la orilla (velocidad del sonido en el aire = 330 m/seg. velocidad del sonido en el agua = 1 430 m/seg.)

a) 1 800 m b) 2 400 m c) 1 845 m

d) 2 145 m e) N.A.

38. Hallar la distancia entre dos ciudades A y B, sabiendo que dos autos parten de dichas ciudades al mismo instante uno de A y otro de B. Al cabo de 5 horas el auto que salió de A está a 100 km de B y el que salió de B está en el punto medio de la distancia pedida. La diferencia de velocidades es de 20 km/h.

a) AB = 300 km b) AB = 320 km

c) AB = 400 km d) AB = 24 km

e) AB = 700 km

39. Una tripulación emplea 3 horas en remar 16 km río abajo y en regresar. En remar 2 km, río arriba, emplea el mismo tiempo que en remar 4 km, río abajo. Hallar la velocidad del bote cuando rema río abajo.

a) 12 km/h b) 4 km/h c) 16 km/h

d) 24 km/h e) 10 km/h

40. Si A tiene 16 cifras, B tiene 11 cifras y C tiene 8. ¿Cuántas cifras tiene:

$$P = (A^2 . B . C)^{1/3} \ ?$$

a) 15 cifras b) 16 cifras c) 17 cifras

d) 15 ó 16 cifras e) 16 ó 17 cifras

41. Si $\overline{abc}$ x 9 = $\overline{dabc}$ donde las cifras son significativas y menores que 6. Hallar el valor de "d"

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4 e) 5

42. Siendo A y B números enteros y sabiendo que el producto A . B puede tener como mínimo 15 cifras y que el cociente de A y B puede tener como máximo 9 cifras. ¿Cuántas cifras tiene B?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 51 e) 6

43. La suma de los cuatro términos de una división es 425. Si se multiplica por 5 el dividendo y el divisor y se vuelve a realizar la operación, la suma de los términos sería 2073. Hallar el cociente primitivo.

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 17

44. Hallar el número entero de cuatro cifras, tal que al dividirlo entre su C°A da 12 de cociente y 16 de residuo.

a) 1 012 b) 71 112 c) 9 228

d) 11 252 e) 9 232

45. En una división el divisor es 135 y el residuo por exceso excede al residuo por defecto en 91. Si el dividendo está comprendido entre 800 y 900. Hallar el dividendo.

a) 759 b) 800 c) 816

d) 824 e) 832

46. Si A = # de cinco cifras; B = # de 7 cifras; C = # de 3 cifras. El mayor número de cifras que puede tener:

$$A^4 \ . \ B^5 / C^6 \text{ ; es:}$$

a) 42 b) 30 c) 37 d) 43 e) 44

47. Hallar el cociente de 450 entre 11 en menos de 4/5.

a) 40 b) 40,8 c) 40,5

d) 42,1 e) 40,2

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) B	3) B	4) C	5) C	6) C
7) B	8) E	9) A	10) C	11) D	12) C
13) C	14) E	15) B	16) A	17) D	18) E
19) E	20) A	21) C	22) B	23) D	24) B
25) C	26) D	27) C	28) D	29) D	30) D
31) A	32) C	33) B	34) D	35) D	36) D
37) D	38) C	39) C	40) E	41) C	42) B
43) C	44) E	45) E	46) C	47) B	

TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

DIVISIBILIDAD

Es la parte de la Aritmética que estudia las condiciones que debe reunir un número para ser divisible por otro.

En general, se dice que un número es divisible por otro, cuando lo contiene exactamente un número entero de veces.

Ejemplos:

i) Si "A" es divisible por "B", entonces "B" divide a "A".

Damdole forma matemática:

$$\frac{A}{B} = E, \text{ E es un número entero}$$

- Se entiende que "A" es divisible por "B" debido a que lo contiene un número E de veces.
- También expresa que "B" está contenido en "A", un número entero de veces.

ii) Si 369 es divisible por 9, entonces 9 divide a 369.

Es decir:

$$\frac{369}{9} = 41$$

Aquí, 369 es divisible por 9 porque lo contiene 41 veces. También expresa que 9 está contenido 41 veces en A.

OBJETIVO DE LA TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

La teoría de divisibilidad tiene como objetivo fundamental la determinación del residuo, de una división, directamente sin necesidad de calcular el cociente.

NÚMEROS DIVISIBLES

Se dice que dos números son divisibles cuando su cociente cumple dos condiciones:

1° Es exacto

2° Es un número entero

Ejemplo:

i) ¿Es 84 divisible por 7?

Rpta.: Sí, porque: $\frac{84}{7} = 12 \begin{cases} \text{Exacto} \\ \text{Entero} \end{cases}$

ii) ¿Es 75 divisible por 2?

Rpta.: No, porque: $\frac{75}{2} = 37{,}5 \begin{cases} \text{Exacto} \\ \text{No es entero} \end{cases}$

iii) ¿Es -45 divisible por 9?

Rpta.: Sí, porque: $\frac{-45}{9} = -5 \begin{cases} \text{Exacto} \\ \text{Entero} \end{cases}$

iv) ¿Es 0,0009 divisible entre 0,00009?

Rpta.: Sí, porque: $\frac{0,0009}{0,00009} = 10 \begin{cases} \text{Exacto} \\ \text{Entero} \end{cases}$

MÚLTIPLO Y DIVISOR DE UN NÚMERO

MÚLTIPLO DE UN NÚMERO

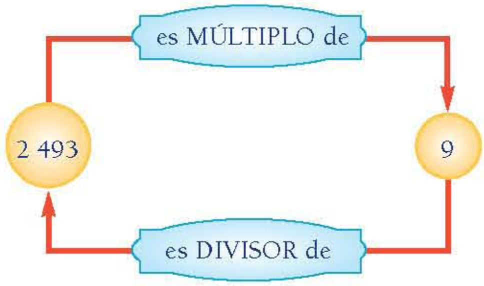
Es aquel número que contiene a otro exactamente un número entero de veces. Así 90 es múltiplo de 5, porque lo contiene 18 veces exactamente. Para expresar que 90 es múltiplo de 5, se utilizan cualquiera de las siguientes notaciones:

$$90 = \overset{\circ}{5} = m5 = \overset{\circ}{5}$$

DIVISOR DE UN NÚMERO

Es aquél número contenido en otro, un número entero de veces. Así en el caso anterior, 5 es divisor de 90 porque está contenido en éste 18 veces.

Otro ejemplo:



Nota 1

Analizando la definición de números divisibles y múltiplo de un número, se observa que expresan lo mismo. Por lo tanto, los términos múltiplos y divisibles son equivalentes.

Nota 2

Se llama equidivisores a varios números que están contenidos el mismo número de veces en sus respectivos "múltiplos". Ejemplo: 3; 5 y 7 son equidivisores de 15, 25 y 35, respectivamente, porque están contenidos 5 veces en cada caso.

Nota 3

Se llama equimúltiplos, a varios números que contienen el mismo número de veces a sus divisores. Ejemplo: 15, 25 y 35 son equimúltiplos de 3; 5 y 7 respectivamente porque los contienen 5 veces en cada caso.

PRINCIPIOS RELATIVOS A DIVISIBILIDAD

I. Si un número divide a otros varios, divide también a la suma de éstos.

Sean A, B y C tres números tales que admitan como divisor al número "n". Demostraremos que "n" divide a la suma (A + B + C).

De la hipótesis:

$$\frac{A}{n} = e_1 \Rightarrow A = n \,.\, e_1$$

$$\frac{B}{n} = e_2 \Rightarrow B = n \,.\, e_2$$

$$\frac{C}{n} = e_3 \Rightarrow C = n \,.\, e_3$$

donde, e_1, e_2, e_3 son números enteros.

Sumando:

$$A + B + C = n \,.\, e_1 + n \,.\, e_2 + n \,.\, e_3 = n\,(e_1 + e_2 + e_3)$$

De donde:

$$\frac{A + B + C}{n} = e_1 + e_2 + e_3 = E$$

Ejemplo:

$$7 \text{ divide a} \left.\begin{matrix} 35 \\ 105 \\ 28 \end{matrix}\right\} \therefore 7 \text{ divide a } 35 + 105 + 28 = 168$$

En efecto 168 contiene a 7, 24 veces:

$$\frac{168}{7} = 24$$

II. Si un número divide a otro, divide a todo múltiplo de éste.

Sea "S" un número cualquiera, el que admite como divisor a "n"; demostraremos que "n" divide a todo "mS" . Donde "mS" = múltiplo de S.

$$mS = S + S + \ldots\ldots.. + S$$

n

Observemos que "n" divide a cada uno de los sumandos "S". Por la propiedad anterior "n" dividirá a la suma de ellos " mS ":

Ejemplo:

24 admite como divisor a 3, entonces 3 divide a todo m24:

Consideremos: m24 = 5 . 24 = 120

$$120 = 24 \,.\, 5 = m24 = \overbrace{24 + 24 + 24 + 24 + 24}^{5 \text{ veces}}$$

3

Como 3 divide a cada uno de los 5 sumandos 24, por la II propiedad dividirá a la suma de ellos (120) que siempre será m24.

III. Si un número divide exactamente a otros dos, divide también a la diferencia de éstos.

Sean M y N dos números, tales que M > N.

Consideremos que el número "r" divide exactamente a M y a N.

Demostraremos que "r" divide a (M - N)

De la hipótesis:

$$\frac{M}{r} = e_1 \Rightarrow M = r \cdot e_1$$

$$\frac{N}{r} = e_0 \Rightarrow N = r \cdot e_0$$

evidentemente $e_1 > e_0$

$\therefore$ restando $M - N = r\,(e_1 - e_0)$

y: $$\frac{M - N}{r} = e_1 - e_0$$

que es un número entero y exacto

$$\Rightarrow \frac{M - N}{r} = e$$

Siendo el cociente "e" un número entero y exacto ello indica que r divide a: M - N

IV. Si un número divide al todo y a una parte, divide necesariamente a la otra parte.

Sea T el todo y sean P y Q sus partes.

Consideremos que el número "n" divide al todo T y a la parte P.

Demostraremos que "n" divide tambien a la otra parte, Q.

Como el todo es igual a la suma de sus partes:

$$T = P + Q \Rightarrow Q = T - P$$

n

Analizando esta expresión final, se observa que si "n' divide a T y P entonces por la III propiedad, dividirá a la diferencia de éstos, Q.

V. Si un número divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide también al residuo de dicha división.

Sea la división: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$

Consideremos que"n"divide a "D" y a "d". Demostraremos que "n" divide también al residuo "r".

Como: $D = d \cdot c + r \Rightarrow r = D - d \cdot c$

n

Apoyándonos en la IV propiedad, asi "n" divide a D y a (d . c), entonces dividirá a la diferencia de ellos,"r".

VI. Si un número "N" no divide a otros dos exactamente, divide a su diferencia siempre y cuando los residuos sean iguales.

Sean A y B dos números tales que: A > B.
Denotemos mN, múltiplo o multiplos de N.

Si N no divide a A $\Rightarrow A = mN + R_1$

Si N no divide a B $\Rightarrow B = mN + R_2$

Restando: $A - B = mN + (R_1 - R_2)$

Por lo tanto: Si $R_1 = R_2 \Rightarrow A - B = mN$

VII. Si un número N no divide a otros exactamente, divide a su producto, siempre ycuando el producto de los residuos sea igual a N ó múltiplo de N.

Sea N un número no primo y mN, múltiplo de N:

Si N : No divide a A $\Rightarrow A = mN + R_1$

No divide a B $\Rightarrow B = mN + R_2$

No divide a C $\Rightarrow C = mN + R_3$

Multiplicando: $A \cdot B \cdot C = mN + (R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)$

Hemos considerado que el producto de múltiplos es otro múltiplo; y que la suma de múltiplos también es otro múltiplo.

Por lo tanto:

$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = Mn \Rightarrow A \cdot B \cdot C = mN + mN = mN$

PRINCIPALES ARTIFICIOS UTILIZADOS EN DIVISIBILIDAD

1. Expresar que un número es "mp"

   N será mp $\Rightarrow$ N contiene a "p" exactamente un número entero de veces.

$$\begin{array}{l|l} N & p \\ \cline{2-2} & e_{(\text{entero})} \end{array} \qquad \Rightarrow N = p\ .\ e = mp$$

   Observar que si N = mp, la expresión "mp" se puede presentar como el producto de "p" por un número entero "e", tal como "p.e".

2. Expresar que un número M no es múltiplo de n.

   M no es múltiplo de n $\Rightarrow$ M no contiene a "n" exactamente un número entero de veces.

$$\therefore \begin{array}{l|l} M & n \\ \cline{2-2} r & q_{(\text{entero})} \end{array} \Rightarrow \ M = nq_{(\text{entero})} + r \Rightarrow M = mn + r,\ r > 0$$

   donde "r" representa el residuo de "M" entre "n"; luego "M" no es múltiplo de "n".

3. El binomio de Newton" (Por inducción).

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab}_{ma} + b^2 = ma + b^2$$

$$(a + b)^3 = \underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2}_{ma} + b^3 = ma + b^3$$

$$(a + b)^n = ma + b^n$$

$$(a - b)^n = \begin{cases} ma + b^n (\text{Si "n" es par}) \\ ma - b^n (\text{Si "n" es impar}) \end{cases}$$

   Este artificio se utiliza especialmente en los problemas de divisibilidad donde piden determinar el residuo y el dividendo es una potencia.

TEORÍA DE CONGRUENCIAS

Se denomina números congruentes a aquellos que dan el mismo resto al dividirlo por un módulo.

Notación. Si dos números M y N son divididos por el número "p" y en ambos casos se obtiene el mismo residuo, entonces ambos números M y N serán congruentes con respecto al módulo "p" y se denota así:

M = N (módulo "p") o también M = N (p)
Se lee "M congruente con N según el módulo p".

Ejemplos:

i) 628 ≡ 1 823(5), son congruentes porque al dividirlo entre el módulo 5, dan el mismo resto (3).

ii) 371 ≡ 184(3), no son congruentes según el módulo 3, porque no dan el mismo residuo.

RESTOS POTENCIALES

Se llama restos potenciales de un número N, respecto a otro "m", llamado módulo, a los residuos que se obtiene al dividir la serie natural de las potencias de N entre dicho módulo "m".

Ejemplos:

i) Hallar los restos potenciales de 10 con respecto al módulo 7.

$10^0 = 1$ $\quad 10^1 = m7 + 310^3 = m7 + 6 = m7 - 1$

$10^4 = m7 - 3 = m7 + 4$ $\quad 10^5 = m7 - 2$

$10^6 = m7 - 6 = m7 + 1 \ldots$

ii) Hallar los restos potenciales de 5 con respecto al módulo 3

$5^0 = 1$ $\quad 5^1 = m3 + 2$ $\quad 5^2 = m3 + 1$

$5^3 = m3 + 2$ $\quad 5^4 = m3 + 1 \ldots$

Observaciones

a) Mediante la aplicación de restos potenciales, se determina cualquier criterio de divisibilidad en cualquier sistema de numeración.

b) Logrando el resto de una potencia se determina fácilmente el de la siguiente potencia, como veremos:

$$N\alpha \equiv m(T_1) \qquad N^{\alpha+1} \equiv N\alpha\ .\ (T_2)$$

Ejemplo:

Calculemos los restos potenciales de 10 según el módulo 7.

$10^0 = 1$

$10^1 = 1\ .\ 10 = m7 + 3$
Resto por defecto

$10^2 = (m7 + 3)10 = m7 + 30 = m7 + m7 + 2$
$= m7 + 2$ Resto por defecto

$10^3 = (m7 + 2)10 = m7 + 20 = m7 + 6 = m7 - 1$
Resto por exceso

$10^4 = (m7 - 1)10 = m7 - 10 = m7 - 3$
Resto por exceso

$10^5 = (m7 - 3)10 = m7 - 30 = m7 - 2$
Resto por exceso

$10^6 = (m7 - 2)10 = m7 - 20 = m7 - 6 = m7 + 1$
Resto por defecto

GAUSSIANO

Se llama GAUSSIANO del número N, respecto al módulo "t", al menor exponente del número N congruente con la unidad respecto del módulo "t".

$$N9 \equiv 1\ (t)$$

El GAUSSIANO interviene principalmente en la ley de formación de los restos potenciales. Determina generalmente el "período".

Ejemplo:

Hallar los restos potenciales de 6 respecto a 64.

POTENCIA	RESTOS	
6^0	1	
6^1	6	
6^2	36	
6^3	24	Período
6^4	16	
6^5	32	
6^6	0	

CONGRUENCIAS NOTABLES

CONGRUENCIA DE FERMAT

Si "p" es un número primo y "a" un número cualquiera no divisible entre "p", se verifica que:

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$

Ejemplo:

$$p = 7 \quad , \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^{7-1} \equiv 1\ (7)$$

$2^6 = 64$ y $64 : 7$ da como residuo 1 y $1 : 7$ también da como residuo 1.

CONGRUENCIA DE EULER

Para comprender esta congruencia, definimos previamenteel indicador de un número:

Si "m" y "n" son dos números cualesquiera, primos entre sí, se verifica la siguiente congruencia:

$a^{\phi(m)} \equiv 1\ (m) \qquad \phi\ (m) =$ indicador de "m"

Ejemplo: $a = 4 \quad m = 7$

$4^{\phi(7)} \equiv 1\ (7) \qquad \phi\ (7) = 6 \Rightarrow 4^6 \equiv 1\ (7)$

$4^6 = 4\ 096$; $4\ 096 : 7$ da como residuo 1 y $1 : 7$ da como residuo 1.

CONGRUENCIA DE DIRICHLET

(Números asociados). Dada la serie: 1, 2, 3, ..., (p - 1); si p = 2q + 1 y "a" es un número tal que a < p, "m" un número de la serie; siempre habrá otro "n" en la serie tal que m . n ≡ a (módulo "p").

TEOREMA DE WILSON

La condición necesaria y suficiente para que un número p sea primo es que: $(p - 1)! = mp - 1$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

CRITERIO GENERAL DE DIVISIBILIDAD

Este criterio permite determinar las características que debe poseer un número para ser divisible entre otro. Permite por lo tanto, determinar cualquier criterio de divisibilidad.

EXPRESIÓN GENERAL DE DICHO CRITERIO

Sea:

$\overline{abc...tlu}$, de "n" cifras, un número cualquiera. Descomponiendo polinómicamente invirtiendo el orden:

$$\overline{abc...tlu} = u + 10^1 l + 10^2 t + ... + 10^{n-3}c + 10^{n-2}b + 10^{n-1}a \quad (1)$$

Determinaremos la condición para que sea divisible por Q:

$$\begin{array}{l|l} 10 & Q \\ \hline R_1 & C_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 10^1 = mQ + R_1$$

$$\begin{array}{l|l} 10^2 & Q \\ \hline R_2 & C_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{array} \quad \Rightarrow \quad 10^2 = mQ + R_2$$

$$\begin{array}{l|l} 10^{n-3} & Q \\ \hline R_{n-3} & C_{n-3} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 10^{n-3} = mQ + R_{n-3}$$

$$\begin{array}{l|l} 10^{n-2} & Q \\ \hline R_{n-2} & C_{n-2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 10^{n-2} = mQ + R_{n-2}$$

$$\begin{array}{l|l} 10^{n-1} & Q \\ \hline R_{n-1} & C_{n-1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 10^{n-1} = mQ + R_{n-1}$$

$$\overline{abc\ldots t\mathit{l}u} = u+(mQ + R_1)\mathit{l} + (mQ + R_2)t + \ldots$$
$$+ (mQ + R_{n-3})c + (mQ + R_{n-2})b + (mQ + R_{n-1})a$$

$$\overline{abc\ldots t\mathit{l}u} = u + mQ + R_1\,\mathit{l} + mQ + R_2\,t + \ldots$$
$$+ mQ + R_{n-3}\,c + mQ + R_{n-2}\,b + mQ + R_{n-1}\,a$$

$$\overline{abc\ldots t\mathit{l}u} = mQ + \;[u + R_1\,\mathit{l} + R_2\,t + \ldots$$
$$+ R_{n-3}\,c + R_{n2}b + R_{(n-1)}\,a]$$

Puede observarse que para que el número dado sea divisible por Q es necesario que la expresión dentro del corchete sea cero o múltiplo de Q y en la que los términos R, son los diversos residuos obtenidos al dividir entre Q, cada una de las potencias de 10 correspondiente a cada una de las cifras del número.

Ejemplo:

Determinar la condición para que un número de 4 cifras sea divisible por 31.

Sea $\overline{abcd}$ el número. Expresado en su forma polinómica e invirtiendo el orden:

$$\overline{abcd} = d + 10c + 100b + 1\,000a$$

$$\overline{abcd} = (d + r_1c + r_2b + r_3a) + m31 \qquad (1)$$

restos potenciales de 10 respecto a 31 son:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 31 \\ \hline -21 & 1 \end{array} \quad ; \quad r = -21$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 31 \\ \hline 7 & 3 \end{array} \quad ; \quad r_2 = 7$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,000 & 31 \\ \hline 8 & 32 \end{array} \quad ; \quad r_3 = 8$$

Remplazando estos valores (en 1):

$\overline{abcd} = (d - 21c + 7b + 8a) + m31$, analizando esta expresión final se deduce que $\overline{abcd}$ será divisible por 31 si $[d -21c + 7b + 8a]$ es cero ó m31.

PRINCIPALES CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Aplicando restos potenciales, según se ha visto anteriormente, se puede determinar cualquier criterio de divisibilidad. Consideremos un número cualquiera N tal que:

$$N = \ldots\ldots \overline{abcdef}$$

aplicando restos potenciales

DIVISIBILIDAD POR 2 $\left\{ \begin{array}{l} 10^0 \text{ —— } 1 \\ 10^1 \text{ —— } 0 \\ 10^2 \text{ —— } 0 \end{array} \right.$

Luego el carácter será: f = m2; es decir, basta que la cifra de las unidades sea par o cero.

DIVISIBILIDAD POR 3 $\left\{ \begin{array}{l} 10^0 \text{ —— } 1 \\ 10^1 \text{ —— } 1 \\ 10^2 \text{ —— } 1 \end{array} \right.$

Luego el carácter será: … + a + b + c + d + e + f = m3; es decir, que la suma de sus cifras sea m3.

DIVISIBILIDAD POR 4

Un número es divisible por 4 cuando sus dos últimas cifras son cero o m4.

DIVISIBILIDAD POR 5 $\left\{ \begin{array}{l} 10^0 \text{ —— } 1 \\ 10^1 \text{ —— } 0 \\ 10^2 \text{ —— } 0 \end{array} \right.$

Basta que f = 0 ó 5 para que el número sea divisible por 5.

DIVISIBILIDAD POR 7

Restos: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1

Carácter: $f + 3e + 2d - c - 3b - 2a + \ldots = \begin{cases} 0 \\ m7 \end{cases}$

DIVISIBILIDAD POR 9

Los restos potenciales son también 1, 1, 1,...; luego, el carácter es que la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

DIVISIBILIDAD POR 11

Los restos de las potencias de 10 son 1, -1, 1 -1,... Luego:

$$f - e + d - c + b - a + \ldots = \begin{cases} 0 \\ m11 \end{cases}$$

En otros términos, que la suma de las cifras de lugar impar comenzando por las unidades, menos las de lugar par, sea múltiplo de 11.

DIVISIBILIDAD POR 13

Restos: 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1

Carácter: $f - 3e - 4d - c + 3b + 4a + \ldots = \begin{cases} 0 \\ m13 \end{cases}$

DIVISIBILIDAD POR 17

Regla práctica.Un número es divisible por 17, si lo es la diferencia entre sus decenas y el quíntuplo de sus unidades.

Ejemplo: Averiguar si 2 975 es múltiplo de 17.

$297 - 5 . 5 = 272$; $27 - 5 . 2 = 17 = m17$

$\therefore$ 2 975 sí es m17

DIVISIBILIDAD POR 19:

Regla práctica. Un número es divisible por 19 si lo es la suma de sus decenas con el duplo de sus unidades.

Ejemplo: Averiguar si 6 650 es múltiplo de 19.

$665 + 2 . 0 = 665$; $66 + 2 . 5 = 76$

$7 + 2 . 6 = 19$

$\therefore$ si es m19

DEMOSTRACIONES

A continuación demostraremos algunos criterios de divisibilidad por otros procedimientos:

DIVISIBILIDAD ENTRE 9

TEOREMA. Un número es divisible por nueve cuando la suma de sus cifras es múltiplo de nueve..

Demostración. Esta demostración consta de varias partes y una conjunción.

Primera Parte. Cualquier potencia de 10 es igual a un múltiplo de 9 más 1.

Demostraremos que: $10^n = m9 + 1$

Demostración:

$$10^1 = 10 = 9 + 1 \qquad = m9 + 1$$

$$10^2 = 100 = 99 + 1 \qquad = m9 + 1$$

$$10^3 = 1000 = 999 + 1 \qquad = m9 + 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$10^n = \overbrace{10000\ldots0}^{\text{n ceros}} = \overbrace{999\ldots9}^{\text{n nueves}} + 1 = m9 + 1$$

NOTA:

La recíproca de esta primera parte no siempre es cierta; es decir, todo múltiplo de 9 + 1 no siempre da una potencia de 10.

Segunda Parte.- Toda cifra númerica seguida de ceros es igual a un múltiplo de 9 más dicha cifra.

Demostraremos que:

$$K\overbrace{0000\ldots..0}^{\text{n ceros}} = m9 + K$$

Demostración:

$$K\overbrace{0000\ldots0}^{\text{n ceros}} = K . 10^n = K(m9 + 1) = m9 + K$$

Tercera Parte.- Cualquier número puede descomponerse en dos sumandos, el primero, un múltiplo de nueve y, el segundo, la suma de las cifras que lo forman.

Sea: $\overline{mnpqr}$ un número cualquiera.

Demostraremos que:

$$\overline{mnpqr} = \overset{\circ}{9} + (m + n + p + q + r)$$

Demostración:

Expresado en otra forma:

$$\begin{aligned} \overline{m0000} &= \overset{\circ}{9} + m \\ \overline{n000} &= \overset{\circ}{9} + n \\ \overline{p00} &= \overset{\circ}{9} + p \\ \overline{q0} &= \overset{\circ}{9} + q \\ r &= \quad\; r \\ \hline \overline{mnpqr} &= \overset{\circ}{9} + (m + n + p + q + r) \end{aligned}$$

CONJUNCIÓN.- Analizando esta expresión última se observa que nueve divide a la parte múltiplo de nueve y para que divida a todo el número, es necesario que nueve divida a la otra parte; y, para ello se requiere que la suma de las cifras que forman la otra parte, sea múltiplo de nueve.

COROLARIO. Un número es divisible por 3 cuando la suma de las cifras que forman es múltiplo de 3.

$$\overline{abcd} = m9 + (\underbrace{a + b + c + d}) \Rightarrow a + b + c + d = m3$$

m3

DIVISIBILIDAD POR 11

TEOREMA. Un número es divisible por once cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras de lugar par da cero o múltiplo de once.

Demostración. Esta demostración, consta de 5 partes y una conjunción.

Primera Parte.- Toda potencia par de 10 es igual a un m11 + 1.

Bastará con demostrar que:

$$10^{2k} = m11 + 1$$

Demostración.- (Por inducción)

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 = 99 + 1 = m11 + 1 \\ 10^4 &= 10000 = 9999 + 1 = m11 + 1 \\ 10^6 &= 1000000 = 999999 + 1 = m11 + 1 \\ &\vdots \\ 10^{2k} &= 1\underbrace{000\ldots\ldots0}_{\text{2k ceros}} = \underbrace{999\ldots\ldots\ldots9}_{\text{2k nueves}} + 1 = m11 + 1 \end{aligned}$$

Se deduce que siempre que un número está formado por una cantidad par de nueves, será múltiplo de 11.

Segunda Parte.- Toda cifra numérica seguida de un número par de ceros es igual a un m11 más dicha cifra.

Demostraremos que:

$$\overline{N\underbrace{00\ldots\ldots\ldots0}_{\text{2n ceros}}} = m11 + N$$

Demostración:

$$\overline{N\underbrace{00\ldots\ldots\ldots0}_{\text{2n ceros}}} = N \,.\, 10^{2n} = N\,(m11+1) = m11 + N$$

Tercera Parte.- Toda potencia impar de 10 es igual a un m11 - 1.

Demostraremos que:

$$\begin{aligned} 10^{2k+1} &= 10^{2k} .\, 10 = 10(m11 + 1) = m11 + 10 \\ &= m11 + 11 - 1 = m11 - 1 \end{aligned}$$

Cuarta Parte.- Todo número seguido de un número impar de ceros es igual a un m11 menos dicho número.

Demostraremos que:

$$\overline{A\underbrace{000\ldots\ldots\ldots0}_{\text{2n + 1 ceros}}} = m11 - A$$

Demostración:

En efecto:

$$\overline{A\underbrace{000\ldots\ldots\ldots0}_{\text{2n + 1 ceros}}} = A \,.\, 10^{2n+1} = A\,(m11 - 1) = m11 - A$$

Quinta Parte.- Cualquier número puede descomponerse en 2 sumandos: el primero un m11 y el segundo, la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar con la suma de las cifras de lugar par.

Sea: $\overline{abcde}$, un número cualquiera.

Demostraremos que:

$$\overline{abcde} = m11 + [(e + c + a) - (d + b)]$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{a0000} &= m11 + a \\ \overline{b000} &= m11 - b \\ \overline{c00} &= m11 + c \\ \overline{d0} &= m11 - d \\ e &= e \\ \hline \overline{abcde} &= m11 + [(a + c + e) - (d + b)] \end{aligned}$$

CONJUNCIÓN

Analizando esta expresión última, observamos que si la diferencia mostrada en el corchete fuera cero o m11, el número $\overline{abcde}$, un número cualesquiera, será m11 y por lo tanto divisible entre 11.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Demostrar que siendo "n" un entero cualquiera, la suma:

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ es divisible por } 17$$

Solución:

Si demostramos que este número es múltiplo de 17, será divisible por 17.

Operando los exponentes

$$\begin{aligned} N &= 3 \cdot 25^n \cdot 5 + 8^n \cdot 2 \\ &= 15(17 + 8)^n + 8^n \cdot 2 \\ &= 15(m17 + 8^n) + 8^n \cdot 2 \\ &= m17 + 15 \cdot 8^n + 8^n \cdot 2 \\ &= m17 + 8^n (15 + 2) \\ &= m17 + 8^n \cdot m17 \\ &= m17 \end{aligned}$$

2.- Demostrar que, siendo "n" un entero cualquiera, la suma:

$$3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1} \text{ es múltiplo de } 17$$

Solución:

Operando con los exponentes:

$$\begin{aligned} 81^n \cdot 3^2 + 2 \cdot 64^n \cdot 4 &= m17 \\ (m17 + 13)^n \cdot 9 + 8\,(m17 + 13)^n &= m17 \\ (m17 + 13^n) \cdot 9 + 8\,(m17 + 13^n) &= m17 \\ m17 + 13^n \cdot 9 + m17 + 13^n \cdot 8 &= m17 \\ m17 + 13^n\,(9 + 8) &= m17 \\ m17 + 13^n \cdot m17 &= m17 \\ m17 &= m17 \end{aligned}$$

3.- Hallar a y b si: $\overline{30ab60} = m99$

Solución:

$$\overline{30ab60} = m99 \begin{cases} m9 \\ m11 \end{cases}$$

Aplicando divisibilidad entre 9:

$$3 + 0 + a + b + 6 + 0 = m9 \Rightarrow a + b \begin{cases} 9 & (1) \\ 18 & (2) \end{cases}$$

Aplicando divisibilidad entre 11:

$$b - (6 + a + 3) = b - 9 - a \begin{cases} 0 & (3) \\ m11 & (4) \end{cases}$$

Sólo (1) y (3) cumplen condiciones.

Rpta.: b = 9 ; a = 0

4.- El número de niños que va a un nido es menor que 265 y mayor que 95. Si se observa que los 2/7 del total usan mandiles celestes y los 5/13 del total usan mandiles amarillos, ¿cuál es la suma de las cifras del número que indica la cantidad de niños que no usan ni mandil celeste ni mandil amarillo?.

Solución:

Sea "n" el número de niños.

$$95 < n < 265 \qquad (1)$$

Usan mandiles celestes:

$$\frac{2}{7}\,n = \#\text{ entero} \Rightarrow\ n = m7$$

Usan mandiles amarillos:

$$\frac{5}{13}\,n = \#\text{ entero} \Rightarrow n = m13$$

entonces: n = m7 . m13 = m91 = 91K

reemplazando en (1):

$$95 < 91K < 265;\ \ K \in \mathbb{Z}^{+}$$

$$\frac{95}{91} < K < \frac{265}{91}$$

$$1\frac{4}{91} < K < 2\frac{83}{91} \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

$\therefore$ n = 91(2) = 182

Usan mandil celeste: $\frac{2}{7} \cdot 182 = 52$

Usan mandil amarillo: $\frac{5}{13} \cdot 182 = 70$

No usan mandil amarillo ni celeste:

$$182 - (52 + 70) = 60$$

Rpta.: Sumatoria pedida: 6 + 0 = 6

5.- A un número de 4 dígitos, cuyas 3 últimas cifras son iguales, se le ha restado otro, que se obtuvo al invertir el orden de las cifras del primero. Si la diferencia es múltiplo de 7, hallar la diferencia.

Solución:

El número es de la forma: $\overline{ammm}$

Por condición: $\overline{ammm} - \overline{mmma} = \overset{\circ}{7}$

Ahora calculemos esta diferencia:

Escribiendo polinómicamente:

$$1000a + 111m - 1110m - a = \overset{\circ}{7}$$

$$999a - 999m = \overset{\circ}{7}$$

$$999\,(a - m) = \overset{\circ}{7}$$

$$\Rightarrow a - m = \overset{\circ}{7}$$

$$\begin{array}{lcccl} & \downarrow & \downarrow & & \\ & 8 & 1 & & (\alpha) \\ \text{ó}: & 9 & 2 & & (\beta) \end{array}$$

De (α): 8 111 - 1 118 = 6 993

De (β): 9 222 - 2 229 = 6 993

Rpta.: La diferencia es: 6 993

6.- Hallar cuántos números entre 95 000 y 194 000 son m7 y m13 pero no m11.

Solución:

Podemos establecer que los números buscados son m91 = m7 . m13, pero no m11.

$$95\,000 < 91K < 194\,000$$

$$\frac{95\,000}{91} < K < \frac{194\,000}{91}$$

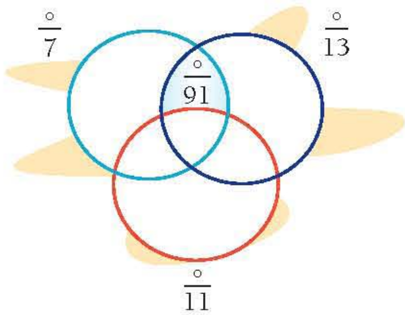
$$1\,043{,}95 < K < 2\,131{,}86$$

$$\therefore\ K = \underbrace{1\,044;\ 1\,045;\ldots\ldots;\ 2\,131}_{1\,088\text{ valores}}$$

Debemos excluir los valores de K que son m11 es decir:

$$K \neq \underbrace{1\,045;\ \ 1\,056;\ \ldots;\ 2\,123}_{99\text{ valores}}$$

Existen: 1 088 - 99 = 989 números



Rpta.: Cumplen 989 valores (área celeste en el gráfico)

7.- ¿Cuántos números entre 7 000 y 9 000 son m17 ó m19 ó m23, pero no múltiplos de dos o tres números a la misma vez.

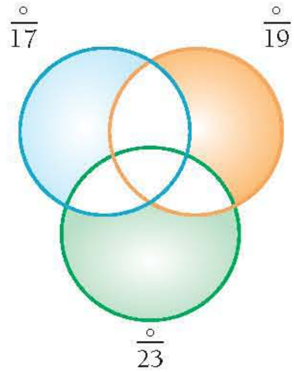
Solución:

En el gráfico, la zona tramada representa la solución gráfica del problema, esta zona es igual a:

n(m17 U m19 U m23) = n(m17) + n(m19)

+ n(m23) - n(m17; m19; m23) - n(m17; m19)

- n(m17; m23) - n(m19; m23)



A) n (m17): ?

$$7\,000 < 17K < 9\,000$$

$411,7 < K < 529,4 \Rightarrow K = \underbrace{412;...;529}_{118 \text{ valores}}$

$\therefore$ n (m17) = 118

B) n (m19): ?

$$7\,000 < 19K < 9\,000$$

$368,4 < K < 473,6 \Rightarrow K = \underbrace{369;...;473}_{105 \text{ valores}}$

$\therefore$ n (m19) = 105

C) n(m23): ?

$$7\,000 < 23K < 9\,000$$

$304,3 < K < 391,3 \Rightarrow K = \underbrace{305;...;391}_{87 \text{ valores}}$

$\therefore$ n(m23) = 87

Los m17 y m19 son m323:

$$7\,000 < 323K < 9\,000$$

$$K = \underbrace{22;23...;27}_{6 \text{ valores}}$$

Los m17 y m23 son m391 $\Rightarrow \exists$ 6 valores

Los m19 y m23 son m437 $\Rightarrow \exists$ 4 valores

Los m17, m19, y m23 son m7 429 $\Rightarrow \exists$ 1 valor

Rpta.: Cumplen: 118 + 105 + 87 - 1 - 6 - 6 - 4 = 293

8.- ¿Cuántos m2 y m7, pero no m15, hay entre 45 000 y 120 000?

Solución:

Los m2 y m7 son m14; entonces, de acuerdo al enunciado:

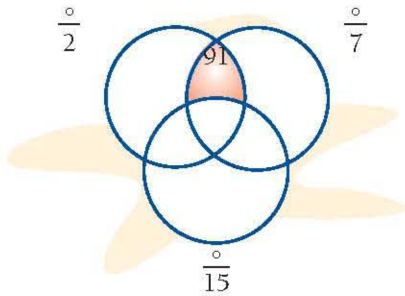
$$45\,000 < 14K < 120\,000$$

o:

$$3\,214,3 < K < 8\,571,4$$

$\therefore\ K = \underbrace{3\,215;...;8\,571}_{5\,357 \text{ valores}}$

5 357 números son m2 y m7 (1)



Por otro lado:

Los m2; m7 y m15 son m210, entonces, los múltiplos de 210 son:

$$4\,5000 < 210K < 120\,000$$

$$214,3 < K < 571,4$$

$\therefore\ K = \underbrace{215;\ ....;\ 571}_{357 \text{ valores}}$

357 números son m2, m7 y m15 (2)

De (1) y (2):

Sólo son m2 y m7

$$5\,357 - 357 = 5\,000 \text{ números}$$

Rpta.: Hay 5 000 números.

9.- Para cada número natural "n", definimos:

$$U_n = 16n^2 + 8n + 6\,(1 - 5^n) + 128$$

¿Cuál es el residuo de dividir U_n entre 64?

Sugerencia:

Considerar la expresión $U_{n+1} - 5\,U_n$

Solución:

$$U_n = 16n^2 + 8n + 6\,(1 - 5^n) + 128$$

$$U_n = 16n^2 + 8n + 6\,(1 - 5^n) + m64$$

$$U_n = 16n^2 + 8n + 6 - 6\,.\,5^n + m64$$

Agrupando en forma conveniente:

$$U_n = m64 + (16n^2 + 8n + 1) + 5 - 6\,.\,5^n$$

$$U_n = m64 + (4n + 1)^2 + 5 - 6\,.\,5^n$$

Aplicando inducción matemática:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \{0; 1; 2; 3;\ldots\}$$

Si: $n = 0 \Rightarrow U_n = m64 + [4(0) + 1]^2 + 5 - 6\,.\,5^0 = m64$

Si: $n = 1 \Rightarrow U_n = m64 + [4(1) + 1]^2 + 5 - 6\,.\,5^1 = m64$

Si: $n = 2 \Rightarrow U_n = m64 + [4(2) + 1]^2 + 5 - 6\,.\,5^2 = m64$

Si: $n = 3 \Rightarrow U_n = m64 + [4(3) + 1]^2 + 5 - 6\,.\,5^3 = m64$

⋮ ⋮ ⋮

⋮ ⋮ ⋮

Finalmente:

$$n = n \Rightarrow U_n = m64$$

Rpta.: Al dividir U_n entre 64, el residuo será igual a cero.

10.- Si $\overline{abba}$ es m63. Hallar "a" y "b".

Solución:

$$\overline{abba} = m63 \begin{cases} m7 \\ m9 \end{cases}$$

- Aplicando divisibilidad por m7:

$$(a + 3b + 2b) - a = m7$$

$$5b = \begin{cases} 0 \\ m7 \end{cases} \Rightarrow b = \begin{cases} 0 \\ m7 \end{cases} \qquad (1)$$

- Aplicando divisibilidad por 9:

$$a + b + b + a = m9 \Rightarrow 2(a + b) = m9$$

$$a + b = m9 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce:

Si: $b = 0 \Rightarrow a = 9$

$b = 7 \Rightarrow a = 2$

Rpta.:

a	9	2
b	0	7

11.- Hallar los números de la forma $\overline{ab1ba} = m44$, y dar como respuesta el residuo de $\overline{ab1ba}$ entre 5.

Solución:

$$\overline{ab1ba} = m44 = \begin{cases} m4 \\ m11 \end{cases} \qquad (1)$$

- Aplicando divisibilidad entre 11:

$$2(a - b) + 1 = \begin{cases} 0 \\ m11 \end{cases}$$

Que se cumple para:

$$2\,(a - b) + 1 = 11$$

de donde:

$$a - b = 5$$

- Aplicando divisibilidad entre 4:

$$a = \left\langle \begin{array}{l} \text{cero} \\ \text{cifra par} \end{array} \right\} \text{se deduce, } a \geqslant 6$$

Para $a = 6$ resulta $b = 1$

Para $a = 8$ resulta $b = 3$

- Los números serán: 61 116 y 83 138, se verifica que 16 es m4 pero 38 no es m4.

$\Rightarrow$ el único número que cumple será: 61 116

$$61\ 116 = 61\ 115 + 1 = m5 + 1$$

Rpta.: Residuo = 1

12.- Hallar todos los números de la forma:

$\overline{7a5b63} = m99$, sabiendo que $a > b$

Solución:

$$\overline{7a5b63} = m99 = \left\langle \begin{array}{l} m9 \\ m11 \end{array} \right.$$

- Aplicando divisibilidad entre 9:

$$7 + a + 5 + b + 6 + 3 = m9$$

$$21 + (a + b) = m99 \qquad (1)$$

- Aplicando divisibilidad por 11:

$$(3 + b + a) - (7 + 5 + 6) = m11$$

$$(a + b) - 15 = m11 \qquad (2)$$

En la expresión (2), observamos que $(a + b)$ puede ser 26 ó 15.

Si $a + b = 26$, la igualdad (1) sería $47 = m9$, lo que es falso.

$\therefore \quad a + b = 15$

Dado que $a > b$, los únicos valores posibles para a y b son:

a	9	8
b	6	7

Por lo tanto los números son: 795 663 y 785 763

Rpta.: 795 663; 785 763

13.- Si la suma del número N y su complemento aritmético es $m7 + 4$. ¿Cuántas cifras podrá tener el número N como mínimo?

Solución:

Para resolver este tipo de problemas hay que utilizar el GAUSSIANO.

Si N tiene "n" cifras:

$$N + C^0 A(N) = m7 + 4 = 10^n$$

Hallando los restos potenciales de 10 con respecto al módulo 7:

$10^0 = m7 + 1 \quad 10^3 = m7 + 6 \quad 10^6 = m7 + 1$

$10^1 = m7 + 3 \quad 10^4 = m7 + 4 \quad 10^7 = m7 + 3$

$10^2 = m7 + 2 \quad 10^5 = m7 + 5$

Por tanto:

$\therefore\ 10^n = 10^4 + 4$ y $n = 4, 10, 16, \ldots$

Rpta.: "N" podrá tener como mínimo 4 cifras.

14.- En el número $\overline{abccba}$ que es m7, las cifras a, b y c son diferentes.

¿Cuál es el residuo de dividir $\overline{acac\ \ldots\ldots}$ de 54 cifras por 11?

Solución:

Según criterio de divisibilidad por 7:

$$\overline{abccba} = m7 + a + 3b + 2c - (c + 3b + 2a)$$
$$= m7 + c - a$$

Como a y c son diferentes, $c - a = 7$

Según criterio de divisibilidad m11:

$$\overline{acac\ldots\ldots} = m11 + c - a + c - a + \ldots$$
$$= m11 + 27(c - a)$$

pero c - a = 7; entonces:

$\overline{acac........}$ = m11 + 189 = m11 + 17 . 11 + 2

= m11 + 2

Rpta.: Residuo = 2

15.- En los primeros números de la serie natural hay 747 números m7 y 2 243 números m3 ó m7. ¿Cuántos serán m3?.

Solución:

Sabemos que:

N°(m3 ó m7) = N°(m3) + N°(m7) - N°(m3 y m7).............. (1)

$$N°(m3) \text{ y } N°(m7) = \frac{N°(m7)}{3} = \frac{747}{3} = 249$$

Reemplazando en (1):

2 243 = N°(m3) + 747 - 249 ⇒ N°(m3) = 1 745

Rpta.: 1 745

16.- ¿Cuántos números de la forma N = $\overline{89a46b}$ que sean m56 existen?.

Solución:

Por dato: $\overline{89a46b}$ = m56 = m8 y m7.

Aplicando criterio de divisibilidad por 8:

$\overline{46b}$ = m8

460 + b = m8 ⇒ m8 - 4 + b = m8 ⇒ b = 4

Si b = 4 ⇒ $\overline{89a46b}$ = m7

Aplicando criterio de divisibilidad por 7:

1(4) + 3(6) + 2(4) - 1(a) - 3(9) - 2(8) = m7

⇒ 30 - a - 43 = m7

- a - 13 = m7

- (a + m7 - 1) = m7

1 - a = m7

⇒ a = 1 ó a = 8

Luego, los números son:

N_1 = 891 464 y N_2 = 898 464

Rpta.: Existen dos números.

17.- Determinar un número $\overline{abcd}$ sabiendo que:

$\overline{abcd}$. $\overline{dcba}$ = 10 065 627

Solución:

Se puede verificar que:

$\overline{abcd}$ = m9 + a + b + c + d

$\overline{dcba}$ = m9 + a + b + c + d

Luego, sí uno de estos números es m9, el otro también lo es.

Análogamente:

$\overline{abcd}$ = m11 + (b + d) - (a + c)

$\overline{dcba}$ = m11 + (c + a) - (b + d)

y si uno de estos números es m11, el otro también lo es. Se puede escribir por lo tanto:

10065627 = $(99)^2$. 13 . 79 = $\overline{abcd}$. $\overline{dcba}$

Lo que nos indica que ambos números son m11 y m9 simultáneamente; es decir que son m99.

Como los factores 13 y 79 son primos, $\overline{abcd}$ sólo podrá ser igual a:

99 . 1; 99 . 13; 99 . 79

Es imposible que sea igual a:

99 ó a 99 . 13 . 79 = 101 673, puesto que tiene 4 cifras.

99 . 13 = 1 287 y 99 . 79 = 7 821

Rpta.: 1 287 ó 7 821

18.- Del 2 000 al 3 000. ¿Cuántos números son m7, pero no m13?

Solución:

Encontramos todos los m7 menos los m13

1° Cálculo de los m7:

2 000 < 7K < 3 000

⇒ K = {286; ... ; 428} ⇒ 143 valores (1)

2º Cálculo de los m7 y m13 ó m91:

$$2\,000 < 91\,p < 3\,000 \Rightarrow p = 22; 23; \dots ; 32$$

entonces, p tiene 11 valores (2)

* De (1) y (2) se deduce que existen 143 múltiplos 7 de los cuales 11 son además m13.

Rpta.: Habra 143 - 11= 132 números m7 únicamente.

19.- Hallar el residuo respecto a 8 de:

$$7^{100} + 7^{99} . 3 + 7^{98} . 3^2 + \dots + 7 . 3^{99} + 3^{100}$$

Solución:

Analizando los restos potenciales se nota:

$$7^j = \begin{cases} m8 + 7, \text{ si j impar} \\ m8 + 1, \text{ si j par} \end{cases}$$

Además:

$$3^k = \begin{cases} m8 + 3, \text{ si k impar} \\ m8 + 1, \text{ si k par} \end{cases}$$

* En la serie hay 101 términos; 51 de ellos tienen exponentes pares:

⇒ El residuo total de la suma será:

$$51(m8 + 1)\,(m8 + 1) + 50(m8 + 7)(m8 + 3)$$

$$m8 + 1\,101 = m8 + 137 . 8 + 5 = m8 + 5$$

Rpta.: Residuo = 5

20.- Determinar el resto de la división por 8 del producto:

$$4\,365^{43} . 7\,937^{67}$$

Solución:

Se tiene:

$$4\,365 = 8 . 545 + 5 = m8 + 5$$

$$7\,937 = 8 . 992 + 1 = m8 + 1$$

Luego, se puede escribir, usando el binomio de Newton:

$$4\,365^{43} . 7\,937^{67} = (m8 + 5)^{43} . (m8 + 1)^{67}$$

$$4\,365^{43} . 7\,937^{67} = m8 + 5^{43} \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$5^{43} = 5^{40} . 5^3 = 25^{20} . 125 = (24 + 1)^{20}\,(120 + 5)$$

$$= (m8 + 1)(m8 + 5) = m8 + 5 \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1) queda:

$$4365^{43} . 7937^{67} = m8 + 5$$

Rpta.: Residuo = 5

21.- Si "n" y "p" no son m5, demostrar que:

$$E = m5 - 1, \text{ si:}$$

$$E = 32p^{32n} + 28p^{28n} + 24p^{24n} + \dots + 4p^{4n}$$

Demostración:

Considerando que cualquier número diferente de 5, a la cuarta potencia, se hace m5+1, la expresión se reduce fácilmente:

$$E = 32(m5 + 1) + 28(m5 + 1) + \dots + 4(m5 + 1)$$

$$E = m5 + 144$$

$$E = m5 + 4 = m5 - 1$$

22.- ¿Cuántos valores puede tomar:

$\overline{aabbaabb}$, tal que sea múltiplo de 187?

Solución:

Podemos advertir que:

$$187 = 11 . 17$$

luego:

$$\overline{aabbaabb} = m11 \qquad (1)$$

$$\overline{aabbaabb} = m17 \qquad (2)$$

Escribiendo este último en forma polinómica y sumando:

$$11\,001\,100a + 110\,011b = m17$$

$$110\,011(100a + b) = m17$$

$$(m17 + 4)(100a + b) = m17$$

$$400a + 4b = m\,17$$

$$(m17 + 9)a + 4b = m17$$

$$9a + 4b = m17$$

Luego:

$a = 1 \Rightarrow b = 2$

$a = 2 \Rightarrow b = 4$

$a = 3 \Rightarrow b = 6$

$a = 4 \Rightarrow b = 8$

$a = 9 \Rightarrow b = 1$

Rpta.: El problema tiene 5 soluciones.

23.- Hallar el menor valor de "x" si:

$$364^{227^{\overline{42x}}} - x = m9 \qquad (1)$$

Solución:

Haciendo $227^{\overline{42x}} = k$, y observando que:

$364 = m9 + 4$, la expresión (1) tomaría la forma:

$$(m9 + 4)^k - x = m9$$

$$\Rightarrow m9 + 4^k - x = m9 \qquad (2)$$

Analizando las potencias de 4 se tiene:

$4^3 = m9 + 1$; $4^{3+1} = m9 + 4$; $4^{3+2} = m9 + 7$

$\therefore$ "x" sólo puede tomar los valores: 1, 4 y 7

Si $x = 1$ en (2): $m9 + 4^k - 1 = m9$

$$4^k = m9 + 1 \Rightarrow k = 3$$

Como: $227^{421} \neq m3, \Rightarrow x \neq 1$

Si $x = 4$ en (2): $m9 + 4^k - 4 = m9$

$$4^k = m9 + 4 \Rightarrow k = m3 + 1$$

Como: $227^{424} = m3 + 1$

$\therefore$ $x = 4$ es la menor solución.

Rpta.: $x = 4$

24.- ¿Cuál es el resto que se obtiene al dividir la expresión:

$$E = 2^{3K+1} + 26^{K+4} + 2^3 \text{, entre 7?}$$

Solución:

$$E = 2^{3K+1} + 2^{6K+4} + 2^3$$

Se observa que:

$$2^{3K+1} = (m7 + 1)^K \, . \, 2 = m7 + 2$$

$$2^{6K+4} = (m7 + 1)^K \, . \, 16 = (m7 + 1)(m7 + 2)$$

$$= m7 + 2$$

$$2^3 = m7 + 1$$

Entonces:

$$E = m7 + 2 + m7 + 2 + m7 + 1$$

$$E = m7 + 5$$

Rpta.: Resto = 5

25.- Hallar la cantidad de números de 4 cifras distintas y diferentes de cero, tales que al restarles el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtenga un capicúa de 4 cifras.

Solución:

El problema consiste en calcular los valores de x e y, tal como sigue:

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{xyyx}$$

$$1\,000a + 100b + 10c + d - 1\,000d - 100c - 10b - a$$
$$= 1\,000x + 100y + 10y + x$$

$$999a - 999d + 90b - 90c = 1\,000x + 100y + 10y + x$$

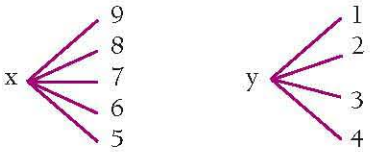
$$999(a - d) + 90(b - c) = 1\,001x + 110y$$

$$9[111(a - d) + 10(b - c)] = 11(91x + 10y)$$

$$\therefore 91x + 10y = m9$$

$$\Rightarrow x = m9 \text{ e } y = m9$$

$$\Rightarrow x + y = 9m$$



En conclusión los números que se puede formar son:

5445	8118
1881	7227
2772	6336
3663	
4554	

Rpta.: 8 números.

26.- Un vendedor tiene 6 cestas que contienen huevos. En algunas cestas hay huevos de gallina y en las otras de paloma. El número de huevos de cada cesta es: 8, 12, 21, 23, 24 y 29. El vendedor dice: "Si vendo esta cesta, me quedaría el cuádruple de huevos de gallina que de paloma". ¿A qué cesta se refiere el vendedor?

Solución:

Cantidad total de huevos:

$$8 + 12 + 21 + 23 + 24 + 29 = 117 \qquad (1)$$

Sea "n" el número de huevos que hay en la cesta que piensa vender. Al vender la cesta quedaría:

$$(117 - n) \text{ huevos} \qquad (2)$$

Se sabe que: "Si una cantidad es el cuádruple de otra, la suma de éstas será 5 veces la menor". Según ésto, podemos establecer que el número de huevos de paloma es:

$$117 - n = m5$$

De donde se infiere que n termina en 2 ó en 7 (3)

De (3) y (1) se deduce que: n = 12 huevos

Rpta.: El vendedor se refiere a la cesta que contiene 12 huevos.

27.- En una fiesta donde había 120 personas entre damas, caballeros y niños: el número de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la tercera parte del número de damas, el número de niños era igual a la quinta parte del número de damas y la cuarta parte del número de damas fue con vestido blanco.

¿Cuántas damas no bailaban en dicho momento?

Solución:

Para que el número de caballeros que no bailaban, el número de niños y el número de damas vestidas de blanco, sea un número entero, el número de damas, debe ser: m3; m5 y m4 a la vez. El menor múltiplo de 3; 4 y 5 es 60; luego, el número de damas es 60 y como es menor de 120, se tiene que:

Nº de damas = 60

Nº de niños = 1/5 . 60 = 12

Nº de caballeros = 120 - (60 + 12) = 48

Nº de caballeros que no bailaba: $\frac{60}{3} = 20$

Nº de caballeros que sí bailaban: 48 - 20 = 28

Nº de damas que bailaban : 28

Nº de damas que no bailaban: 60 - 28 = 32

Rpta.: 32 damas no bailaban.

28.- ¿Cuántos números de 4 cifras m8 que terminen en 6, existen?.

Solución:

Sea N uno de los números:

$$1\,000 < N < 10\,000$$

$$1\,000 < 8p < 10\,000$$

$$125 < p < 1\,250$$

donde:

$$p = 126; 127; 128; \ldots; 1\,249 \qquad (1)$$

Para que los m8 terminen en 6, los valores de p deben terminar en 2 ó 7. Luego, de la expresión (1) se deduce que los m8 buscados se obtiene:

1º Cuando p = 127; 137; 147;...;1 247 (a)

2º Cuando p = 132; 142; 152;...;1 242 (b)

De (a) se observa que p tiene:

$$\frac{1\,247 - 127}{10} + 1 = 113 \text{ valores}$$

De (b) se observa que p tiene:

$$\frac{1\,242 - 132}{10} + 1 = 112 \text{ valores}$$

Luego, p tiene 225 valores que cumplen las condiciones del problema.

Rpta.: Hay 225 m8 que terminan en 6.

29.- N = $\overline{8a561b}$, es divisible por 55. ¿Cuál es el valor de $\overline{ba}$, mayor que 10, para que $\overline{b20a}$ sea divisible por 7?.

Solución:

Como: 55 = 5 . 11

y : $\overline{8a561b}$ = m5 y m11 a la vez, entonces:

Aplicando divisibilidad entre 5, b puede ser: 0 ó 5

Divisibilidad por 11:

1° Si: b = 0, se tiene:

$$(8 + 5 + 1) - (a + 6 + 0) = 0 \text{ ó m}11$$

$$8 - a = 0 \Rightarrow a = 8$$

2° Si b = 5, se tiene:

$$(8 + 5 + 1) - (a + 6 + 5) = \begin{cases} 0 \\ 11 \end{cases}$$

$$14 - a - 11 = 3 - a \Rightarrow 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$$

Por lo tanto, los números $\overline{b20a}$ son:

$\overline{0208}$ = m7 + 2 $\overline{0203}$ = m7

$\overline{5203}$ = m7 + 2 $\overline{5208}$ = m7

Además puede observarse que b ≠puesto que $\overline{ba}$ > 10, luego:

$$\overline{b20a} = 5\,208 \text{ y, } \overline{ba} = 58$$

Rpta.: 58

30.- Si el número:

$$\overline{abcd} = \text{m}17 \text{ y } \overline{cd} = 4\,\overline{ab} + 3$$

Hallar: a + b + c + d

Solución:

$$\overline{abcd} = \text{m}17 \qquad (1)$$

$$\overline{cd} = 4\overline{ab} + 3 \qquad (2)$$

De (1):

$$100\overline{ab} + \overline{cd} = \text{m}17 \qquad (3)$$

De (2) en (3):

$$100\overline{ab} + 4\overline{ab} + 3 = \text{m}17 \qquad (4)$$

$$104\,\overline{ab} + 3 = \text{m}17$$

$$(102 + 2)\,\overline{ab} + 3 = \text{m}17$$

$$(\text{m}17 + 2)\,\overline{ab} + 3 = \text{m}17$$

$$\text{m}17 + 2\overline{ab} + 3 = \text{m}17$$

se deduce que:

$$\underbrace{2\overline{ab} + 3}_{\text{Número impar}} = \underbrace{\text{m}17}_{\text{Número impar}} \qquad (5)$$

Es decir, m17 podría adoptar los valores: 17, 51, 85, ...

De (2), se cumple:

$$\overline{cd} < 100$$

y, por lo tanto:

$$4\overline{ab} + 3 < 100$$

$$\overline{ab} < \frac{100 - 3}{4}$$

$$\overline{ab} < 24 + 1/4$$

Si m17 = 51 en (5): (única opción)

$$2\overline{ab} + 3 = 51 \Rightarrow \overline{ab} = 24$$

$$\therefore \overline{cd} = 4 \,.\, 24 + 3 = 99$$

Rpta.: $\overline{abcd}$ = 2 499

31.- Si $\overline{aba} = m7$ y $a^2 + b^2 = 106$

entonces, a . b será:

a) m7 b) m7 + 1 c) m7 + 2

d) m7 + 3 e) m7 + 4

Solución:

$$\overline{aba} = m7$$

Aplicando criterio de divisibilidad por 7:

$$3(a + b) = m7 \Rightarrow a + b = m7$$

$$\Rightarrow a + b = \begin{cases} 7 = m7 \\ 14 = m7 + 7 \end{cases} \quad (1)$$

Por dato:

$$a^2 + b^2 = 106 = m7 + 1 \quad (2)$$

Se sabe que:

$$(a + b)^2 = 2ab + a^2 + b^2$$

De (1): $(a + b)^2 = m7 + 7$

$$2ab + a^2 + b^2 = m7 + 7 \quad (3)$$

Restando (3) - (2):

$$2ab = m7 + 6$$

$\therefore$ a . b = m7+3

Rpta.: a . b es de la forma m7+3

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un barco donde iban 100 personas ocurre un naufragio. De los sobrevivientes la onceava parte son niños y la quinta parte de los muertos eran adultos. ¿Cuántos murieron?

a) 60 b) 50 c) 45 d) 30 e) N.A.

2. El número de tipos que se usó para la edición de un libro es m19. Si el número de páginas es mayor que 100 y m20. Hallar el número de páginas que puede tener el libro.

a) 340 b) 120 c) 360 d) 180 e) N.A.

3. Al dividir 15! entre N se obtiene 7 de residuo, al dividir 16! entre N da 5. ¿Cuál será el residuo de dividir 19! entre N?

a) 4 b) 14 c) 73 d) 61 e) N.A.

4. ¿Cuál es el menor valor de "n" para que: n . 7^{3247} sea múltiplo de 5 más 2?

a) 1 b) 5 c) 7 d) 9 e) N.A.

5. Hallar cuántos números enteros de 4 cifras existen, tales que sean divisibles por 11 y que terminen en 17.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 14 e) 1

6. Existen números de la forma N= $\overline{mcdu}$, sabiendo que son divisibles por 13 y además se cumple que:

$$\overline{du} = 3(\overline{mc} + 2)$$

Hallar: m + c + d + u

a) 12 b) 14 c) 11 d) 19 e) 21

7. ¿Cuántos números menores de 10 000 múltiplos de 4 son m2, m3 ó m7?

a) 1 071 b) 2 000 c) 1 881

d) 3 050 e) N.A.

8. Hallar, a . b si:

$$\overline{aba} + a = m7 \text{ y } \overline{abb} + a = m11$$

a) 14 b) 28 c) 56 d) 42 e) N.A.

9. ¿Cuántos números de la forma N= $\overline{7ba6b5}$ son m7?

a) 64 b) 128 c) 86 d) 102 e) 144

10. Hallar las 2 últimas cifras de 3^{136}

a) 21 b) 31 c) 41 d) 53 e) 62

11. Demostrar que: $3^{4n} + 9 = m10$

12. Si a un número m7 se le suma los 30 números consecutivos el resultado será:

a) m7 + 1 b) m7 + 2 c) m7 + 3

d) m7 + 4 e) N.A.

13. Del año 1 706 al 1 906. ¿Cuántos años bisiestos terminaron en 6?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

14. ¿Cuántos ceros se le debe añadir a la derecha de 394 para que se convierta en un m7 + 5. ¿Cuál de los siguientes números es respuesta del problema?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) N.A.

15. Colocar una V en la afirmación verdadera y una F en la falsa: si un número divide a otros dos, entonces siempre divide a:

* Su suma y su diferencia

* Su cociente

* Al residuo de su división.

a) V V V b) V F F c) V F V

d) F F F e) N.A.

16. ¿Cuántos números de cuatro cifras divisibles por 7 existen?

a) 1 200 b) 1 286 c) 1 300

d) 1 326 e) 1 438

17. En una división el dividendo es un número de 3 cifras m7 + 1, el divisor y el resto son números de dos cifras, m7 + 5 y m7 + 3, respectivamente. ¿Cuántos valores puede tener el cociente?

a) 6 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

18. Determinar "K" y "Q" (si son enteros y positivos), si:

$$17K + 38Q = 241$$

a) Q = 5, K = 3 b) Q = 6, K = 4 c) Q = 7, K = 3

d) Q = 8, K = 2 e) Q = 9, K = 1

19. En qué cifra termina: 3^{12478}

a) 7 b) 8 c) 9 d) 0 e) 1

20. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abab}$ son divisibles entre 7?

a) 5 b) 13 c) 25 d) 33 e) 48

21. ¿Cómo debe ser "a" para que: $(7)^{7^a}$ sea un m5 + 2?

a) m4 + 2 b) m4 + 1 c) m4 + 3

d) m5 + 3 e) m5 + 2

22. ¿Cuál es el valor de "a", si S es m7+a, sabiendo que:

$$S = 111^3 + 1111^4 + 11111^5 + 111111^6 + \ldots + 111 \ldots\ldots\ldots 11^{30}$$

a) 9 b) 1 c) 3 d) 5 e) 7

23. Hallar el mayor número de 3 cifras significativas que cumple las siguientes condiciones:

1° $\overline{abc} = m\overline{bc}$

2° $\overline{bc} = m7$

Dar el valor de a + b + c

a) 11 b) 18 c) 14 d) 12 e) 15

24. ¿Cuántos números múltiplos de 17, que no terminan en cifra par, existen entre 13 600 y 17 600?

a) 235 b) 326 c) 236

d) 118 e) N.A.

25. Si: $\overline{acd} + \overline{du} = m11$, $\overline{udca} = m3$ y $\overline{ad} - \overline{cu} = 42$, siendo $a \neq c \neq d \neq u$.

Hallar el resto de dividir $\overline{ad}$ entre $\overline{cu}$

a) 15 b) 7 c) 10 d) 12 e) 13

26. Hallar el mayor número $\overline{bac}$, tal que: $\overline{a6bc} = m33$ y $c = 3$ y $a + b < 10$.

a) 813 b) 906 c) 903

d) 816 e) 723

27. Hallar la suma de todos los números de dos cifras que divididos entre 5 den resto 3 y divididos entre 9 den resto 1.

a) 123 b) 173 c) 91

d) 102 e) 101

28. Hallar a + b, si: $\overline{(2a)3ba48} = m91$

a) 2 b) 5 c) 7 d) 8 e) 9

29. ¿Cuál es el residuo de dividir el mayor número cuya suma de cifras es 173 entre 3?

a) 5 b) 7 c) 13 d) 9 e) 11

30. Sabiendo que el número: $\overline{4ab73}$ es múltiplo de 51. Hallar b - a.

a) 6 b) 3 c) 8 d) 2 e) 1

31. Si el número $N = \overline{aabb0}$ es múltiplo de 63. Hallar a - b

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

32. ¿Cuál es el valor de "a" que no cumple con $\overline{56a4b2}$ es m21?

a) 1 b) 2 c) 5 d) 6 e) 7

33. Hallar el valor de $\overline{5a6b71}$, sabiendo que al dividirlo entre 7 da residuo 1, pero al dividirlo entre 3 no da residuo. Dar el mayor valor de (a + b)

a) 14 b) 11 c) 8 d) 6 e) 5

34. Hallar el valor de "a" para que el número $\overline{17a053}$ de un residuo igual a 10 al dividirlo entre 37.

a) 0 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

35. Hallar un número de la forma $\overline{abc}$ tal que sea múltiplo de $\overline{bc}$. Se sabe además que:

1° $10a - c = 10b$

2° a es igual al residuo que dan los números congruentes 37 y 241 respecto al módulo 4.

a) 110 b) 220 c) 350

d) 105 e) N.A.

36. Si $\overline{ababab} = mx$. ¿Cuál es el mayor valor de "x" sabiendo que es un módulo simple?

a) 3 b) 7 c) 13 d) 37 e) 41

37. Hallar la cifra significativa $\overline{5a4}$ tal que se cumpla que el número escrito en cifras mínimas sea m7.

a) 7 b) 5 c) 9

d) B y C son respuestas.

e) A y C son respuestas.

38. El número $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ es siempre múltiplo de:

a) 7 b) 9 c) 17 d) 5 e) N.A.

39. Sabiendo que: $1\,492^{\overline{abc}} + 16 = m40$. Hallar el máximo valor de $\overline{abc}$.

a) 896 b) 986 c) 989

d) 998 e) 999

40. Calcular el residuo que se obtiene al dividir N entre 7, si:

$$N = 4^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}} \quad \text{433 números}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

41. Si: $N = 43^{a^{a^{a}}} = m5 - 4$ ¿Cuánto vale "a"?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) N.A.

42. ¿Cuántos números de tres cifras son m2 y m3 pero no son m5?

a) 132 b) 120 c) 115

d) 125 e) 128

43. En una sección las notas obtenidas por los alumnos fueron: 21,33 y 77 puntos. Determinar cuántos alumnos habían en la sección, si se sabe que al sumar todas las notas se obtuvieron 436 puntos.

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) N.A.

44. Un número es múltiplo de 37 cuando restando "n" veces la última cifra del número formado por las cifras restantes, el resultado es m37. Dar el residuo de "n" entre 6.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

45. Hallar (a + b) si:

$$\overline{aba(b-6)} = m44$$

a) 10 b) 11 c) 8 d) 13 e) 14

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) A	3) C	4) A	5) C	6) D
7) A	8) C	9) D	10) A	11) dem.	12) C
13) C	14) E	15) B	16) A	17) B	18) A
19) C	20) C	21) C	22) C	23) E	24) D
25) B	26) D	27) C	28) D	29) B	30) D
31) A	32) C	33) D	34) E	35) B	36) D
37) D	38) A	39) D	40) B	41) C	42) B
43) A	44) E	45) D			

TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

¿QUE ES UN NÚMERO PRIMO?

En el conjunto de números naturales, todo entero mayor que 1 tiene al menos dos divisores, precisamente 1 y él mismo; si con estos divisores se agotan todos los divisores positivos de este número entero, entonces es un número PRIMO.

Un caso especial es el número 1, que sólo tiene un divisor, es decir, él mismo.

¿QUE ES UN NÚMERO COMPUESTO?

Un número entero mayor que 1, que tenga además de 1 y de sí mismo otros divisores positivos, se llama COMPUESTO.

CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

El número 1
(particular, pues sólo tiene un divisor)

Los números primos
(los que tienen dos divisores)

Los números compuestos
(los que tienen más de dos divisores)

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS

Son aquellos que, dentro de un conjunto en particular, sólo admiten como divisor común a la unidad. Es decir, son primos entre sí.

Ejemplos:

i) $\underbrace{45, 24, 18, 17}_{\text{divisor común (1)}}$ *ii)* $\underbrace{8, 15, 9}_{\text{divisor común (1)}}$

NÚMEROS PRIMOS ABSOLUTOS

Son aquellos que dentro de cualquier conjunto de números, todos ellos son números primos.

Ejemplo:

$$\underbrace{17, 23, 41, 47}_{\text{divisor común (1)}}$$

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI 2 á 2

Es todo conjunto de primos relativos o absolutos, donde se cumple que al tomar 2 elementos, éstos sólo admiten como divisor común a la unidad.

Ejemplo:

En el conjunto $\{8, 15, 17\} \Rightarrow 8, 15;\ \ 8, 17; 15, 17$, son primos entre sí 2 a 2

PROPIEDADES DE NÚMEROS PRIMOS

1.- El menor divisor, distinto de la unidad, de un entero mayor que la unidad, es un número primo.

En efecto, sea "q" el menor divisor, distinto de la unidad, de un número entero $A > 1$.

Si "q" fuese compuesto, tendría un divisor "q_1" con la condición: $1 < q_1 < q$; pero el número A siendo divisible por "q", tendría que ser divisible también por q_1, y ésto contradice a la hipótesis respecto al número "q".

2.- El menor divisor, distinto de la unidad, de un número compuesto C y que (según la propiedad anterior, tiene que ser primo) no es superior a C.

En efecto, sea "q" este menor divisor, entonces, podemos establecer que: $C = q \cdot C_1$, $C_1 < q$, de donde, multiplicando y simplificando por C_1, obtenemos que:

$$C < q^2 \ , \ q < C$$

3.- La cantidad de números primos es infinita.

De la validez de esta proposición se deduce que, cualquiera que sean los números primos distintos $P_1, P_2, \ldots, P_k$, se puede obtener un número primo nuevo que no está comprendido entre ellos. Tal que sea divisor primo de la suma $P_1, P_2, \ldots, P_k + 1$, el cual dividiendo a toda la suma, no puede coincidir con ninguno de los primos: $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

CRIBA DE ERASTOSTENES

Es un procedimiento que nos permite formar la tabla de los números primos que no superen a un número dado N. Este procedimiento consiste en lo siguiente:

Ejemplo:

Escribamos los números del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

El primer número de esta sucesión que es mayor que la unidad es el 2; éste sólo es divisible por 1 y por sí mismo, y por consiguiente, es primo.

Borremos de la sucesión (como compuestos) todos los números que son múltiplos de 2, a excepción del mismo 2.

El primer número no borrado que le sucede al 2 es el 3; éste no es divisible por 2 (pues en caso contrario estaría borrado), por lo cual 3 sólo es divisible por 1 y por sí mismo y, por consiguiente es primo.

Borremos de la sucesión todos los números que son múltiplos de 3, a excepción del mismo 3.

El primer número no borrado que le sucede al 3 es el 5; éste no es divisible por 2 ni por 3 (pues en caso contrario estaría borrado). Por consiguiente, 5 sólo es divisible por 1 y por sí mismo, por lo cual, también es primo. De esta manera se opera sucesivamente.

Cuando se haya borrado del modo indicado todos los números que son múltiplos de los números primos menores que un número primo "P", todos los números no borrados, menores que P^2, serán primos.

En efecto, cualquier número compuesto "a", menor que P^2, ya está borrado, por ser múltiplo de su divisor primo menor, siendo $a < P$.

De aquí se deduce que:

1º Al comenzar a borrar los múltiplos de un número primo "P", hay que empezar a borrar desde P^2.

2º La información de la tabla de números primos N se termina en cuanto se haya borrado todos los números compuestos que son múltiplos de los números primos que no son superiores a N.

REGLA PARA AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES O NO PRIMO

Para saber si un número es primo, basta comprender que no sea divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no exceda al número.

Ejemplo:

Averiguar si el número 317 es primo o no.

PROCEDIMIENTO

- Para ello se extrae la raíz cuadrada por exceso del número dado;

$$\sqrt{317} \cong 18$$

- Se divide el número dado entre todos los números primos menores que su raíz.

Si alguna de las divisiones resulta ser exacta, el número no es primo; y si todas son ser inexactas, se puede asegurar que el número dado es primo.

$317 \,\lfloor 2$	$317 \,\lfloor 3$	$317 \,\lfloor 5$	$317 \,\lfloor 7$
1 158	2 105	2 63	2 45
$317 \,\lfloor 11$	$317 \,\lfloor 13$	$317 \,\lfloor 17$	$\Rightarrow$ 317 es primo
9 28	5 24	11 18	

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Todo número no primo, se puede descomponer siempre en un producto de varios factores, todos los cuales son primos y la descomposición es única.

Sea "N" un número compuesto:

- N admite por lo menos un divisor primo: a > 1, luego: $N : a = C_1$
- Si el cociente fuese primo, ya estaría descompuesto en 2 factores primos.
- Si C_1 no fuese primo admitiría a su vez un factor primo "b" igual o distinto de a, b > 1; entonces :

  $C_1 : b = C_2$. Si C_2 fuese primo, N sería el producto de 3 factores primos y si no lo fuese a su vez, C_2 tendría otro factor primo y procediendo sucesivamente de este modo, como los cocientes $C_1, C_2, C_3, \ldots$, van disminuyendo, llegaríamos en la sucesión de cocientes a un cociente igual a la unidad, en cuyo caso el cociente anterior sería igual al divisor que como todos los divisores es primo y N = a . b . c ......h, pudiendo ser dos o más de estos factores primos iguales.

  Ejemplo:

  Descomponer el número 2 694 384 en sus factores primos

  PROCEDIMIENTO:

  - Se traza una raya vertical al costado derecho del número.
  - Se va dividiendo el número y luego los residuos sucesivamente entre los menores números primos hasta que el residuo sea 1, así:

2694384	2
1347192	2
673596	2
336798	2
168399	3
56133	3
18711	3
6237	3
2079	3
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

Luego: $2\,694\,384 = 2^4 \,.\, 3^7 \,.\, 7 \,.\, 11$

Se dice entonces que el número 2 694 384 está descompuesto en sus "Factores Primos".

N	a
C_1	b
C_2	c
.	.
.	.
.	.
h	h
1	

DIVISORES DE UN NÚMERO

TEOREMA. La condición necesaria y suficiente para que, un número, o producto de números, sea divisible por otro número, o por un producto de números, es que el primero contenga todos los factores primos del segundo, con iguales o mayores exponentes.

DEMOSTRACIÓN

En efecto:

- Es condición necesaria porque si el número:

  N = mp (mp = múltiplo de p) $\Rightarrow$ N = p K (donde K= entero). N tendrá todos los factores de "p" más los de "K"; luego, tendrá todos los "p" con los mismos o mayores exponentes.

- Es suficiente, porque si "N" tiene todos los factores de "p", será igual a "p", además, será divisible por los factores que tiene "N" y no tiene "p".

EL DIVISOR Y SUS FACTORES

En virtud del teorema anterior, todo divisor debe tener factores del múltiplo con exponentes iguales o menores.

Sea "N" un número cualquiera, tal que "N" en factores primos sea de la forma:

$$N = a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, c^{\gamma} \ldots \quad e^{\lambda}$$

Escribamos el siguiente cuadro de divisores:

1	a	a^2	… … …	a^{α}
1	b	b^2	… … …	b^{β}
…	…	…	… … …	…
1	c	c^2	… … …	c^{γ}
1	l	l^2	… … …	l^{λ}

Componiendo todos los productos que se puede formar, de modo que en cada uno, entre un elemento de cada fila, y uno solo, habremos formado todos los divisores.

- En efecto serán divisores, porque tendrán solamente los factores primos del número y con exponente a lo más iguales (cuando sean tomados de la última columna).
- Están todos, porque cualquier producto que se forme: $a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, c^{\gamma} \,.\, \ldots\, l^{\lambda}$, consta de un elemento de cada fila y hemos formado todos los productos que de este modo puede formar, luego también éste.
- Ninguno está repetido porque hemos formado todos los productos distintos que se puede formar.

REGLA PRÁCTICA PARA OBTENER TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Sera explicada con un ejemplo:

Hallar todos los divisores de 18 600

El procedimiento sugerido para este número es igual al que se debe seguir con cualquier otro número.

DISPOSICIÓN PRACTICA

Se descompone en sus factores primos:

$$18\,600 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5^2 \,.\, 31$$

Todos los divisores son obtenidos de la siguiente forma:

1,	2,	4,	8	} 1ra. Fila	1er. Grupo
3,	6,	12,	24	} (1ra. Fila) . (3)	
5,	10,	20,	40	(1er. Grupo) . (5)	
15,	30,	60,	120		
25,	50,	100,	200	(1er. Grupo) . (25)	
75,	150,	300,	600		

Hasta aquí hay 24 divisores y constituye el 1er. Bloque

31	62	124	248	(1 er. Bloque) (31)
93	186	372	744	
155	310	620	1 240	
465	930	1 860	3 720	
775	1 550	3 100	6 200	
2 325	4 6 50	9 300	18 600	

En este segundo bloque hay otros 24 divisores.

Total de divisores: 24 + 24 = 48

Un cuadro resume el proceso:

2^3	$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3$	1ra. Fila
3^1	3^1	
5^2	$5^1,\ 5^2$	1er. Grupo
31^1	31	1er. Bloque

PROCEDIMIENTO

1° Se descompone el número en factores primos.

2° Se desarolla todas las potencias del primer factor primo (2), desde el exponente cero, hasta la que posee un exponente igual al indicado en dicho factor primo; cada término de ese desarrollo será un divisor del número dado y todos estos divisores constituyen la primera fila.

3° Se desarrolla todas las potencias del segundo factor primo (3) partiendo desde el exponente 1, hasta el indicado en el factor primo, cada término de este desarrollo se multiplica por toda la primera fila.

4° Logrando nuevas filas, que serán los nuevos divisores del número dado, se reúne lo que llamaremos el primer grupo.

5° Se desarrolla el tercer factor primo en forma análoga al anterior, cada término del desarrollo se multiplica por el primer grupo, logrando más divisores del número dado; se reúne todos los grupos en un bloque.

6° Se desarrolla el cuarto factor primo como en los casos anteriores y cada término de este desarrollo se multiplica por lo anterior, logrando más divisores del número dado y así sucesivamente.

PRINCIPALES FÓRMULAS

Consideremos a N un número cualquiera.

Descompongamos el número dado N en sus factores primos: $a^{\alpha}, b^{\beta}, \ldots, l^{\lambda}$

de modo que: $N = a^{\alpha}\ b^{\beta}, \ldots, l^{\lambda}$

Los divisores de N son, como se sabe, los términos del desarrollo del producto:

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \ldots + b^{\beta})\ldots$$
$$\ldots(1 + l + l^2 + \ldots + l^{\lambda}) \quad (1)$$

1° NÚMERO DE DIVISORES DE N. Este número "n", es igual al número de los términos del producto (1), y se obtiene haciendo:

$$a = b = \ldots = l$$

Así: $$\boxed{n = (\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots(\lambda + 1)}$$

Cuando N es un cuadrado perfecto, n es impar, y recíprocamente.

Ejemplo: Calcular el número de divisores del número 18 600. Se descompone en sus factores primos:

$$18\,600 = 2^3 . 3 . 5^2 . 31$$

Luego, $n = (3 + 1)(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1)$

$n = 4 . 2 . 3 . 2 = 48$

2° SUMA DE VALORES DE LOS DIVISORES. Es la suma de los términos del producto (1).

Recordemos que, de una manera general:

$$1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{\alpha} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$$

Análogamente los otros factores; luego, la suma de todos los factores de N es :

$$\boxed{S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdots \frac{l^{\lambda+1} - 1}{l - 1}} \quad (2)$$

3° SUMA DE CUADRADOS DE LOS DIVISORES. Denotemos a esta suma como S_2. En el producto (2) resulta de remplazar a, b, …, l por a^2, b^2, …… , l^2.

En efecto:

$$\boxed{S_2 = \frac{a^{2(\alpha+1)} - 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{b^{2(\beta+1)} - 1}{b^2 - 1} \cdots \frac{l^{2(\lambda+1)} - 1}{l^2 - 1}}$$

En general, dado que la suma de las potencias semejantes de los divisores de N se calcula como la de los cuadrados, se tiene finalmente:

$$\boxed{S_2 = \frac{a^{2(\alpha+1)} - 1}{a^m - 1} \cdot \frac{b^{2(\beta+1)} - 1}{b^m - 1} \cdots \frac{l^{2(\lambda+1)} - 1}{l^m - 1}} \quad (3)$$

4° PRODUCTO DE LOS DIVISORES. Sean d_1, d_2, …, d_n los "n" divisores de N, en orden de magnitud creciente.

Se cumple evidentemente que:

$$d_1 d_n = N$$

$$d_2 d_{n-1} = N$$

$$d_n d_1 = N$$

Multiplicando estas expresiones entre sí:

$$(d_1 d_2 \ldots d_n)^2 = N^n$$

Si, $P = d_1 d_2 \ldots d_n \Rightarrow P^2 = N^n$

$$\therefore \quad \boxed{P = \sqrt{N^{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)}}}$$

INDICADOR DE UN NÚMERO N, δN

Es el número de enteros primos con N no superiores a superiores a él. Se le designa: δ(N).

N en factores primos:

$$N = a^{\alpha} \ . \ b^{\beta} \ . \ c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$$

$$\delta N = a^{(\alpha-1)} b^{(\beta-1)} c^{(\gamma-1)} \ldots l^{(\lambda-1)} (a - 1)(b - 1)(c - 1) \ldots (l - 1)$$

NÚMERO PERFECTO

Es aquel que es igual a la suma de sus divisores, exceptuando el mismo número.

Ejemplo:

6 y 28 son números perfectos porque:

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad y \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Los números perfectos pares son hallados por la fórmula de Euclides:

$$N = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right)$$

En la que el paréntesis debe ser un número primo absoluto.

Ejemplos:

para $n = 1$: $N = 2^1 \left(2^{1+1} - 1\right) = 6$

$n = 2$: $N = 2^2 \left(2^{2+1} - 1\right) = 28$

$n = 3$: $N = 2^3 \left(2^{3+1} - 1\right) = 120$

No se ha encontrado aún una expresión analítica para determinar los números perfectos impares.

NÚMERO DEFECTUOSO

Es aquel cuya suma de divisores incluido él mismo, es menor que el doble de dicho número.

Ejemplo:

El número 15 es defectuoso, porque:

$$\sum \text{divisores} = 1 + 3 + 5 + 15 < 2 \ . \ 15$$

NÚMERO ABUNDANTE

Es aquel cuya suma de divisores, incluido él mismo, es mayor que el doble del número.

Ejemplo:

El número 60 es abundante, porque:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 15 + 20 + 30 + 60 > 2 \ . \ 60$$

NÚMEROS AMIGOS

Dos números son amigos cuando cada uno es igual a la suma de los divisores de otro, excepto él mismo. Sus fórmulas son las siguientes:

$$n = 2^x\left[\left(2^z + 1\right)2 \ . \ 2^{2x-z} - 1\right]$$

$$n_1 = 2^x\left(2^x - 1 + 2^{x-z}\right)\left(2^x - 1 + 2^{x+z}\right)$$

Considerando que x > z y primos los paréntesis, y en consecuencia, z.

Ejemplo para:

$$z = 1; \ x = 2, \ n = 284 \ y \ n_1 = 220$$

son dos número amigos.

Divisores de 284: 1 + 2 + 4 + 71 +142 = 220

Divisores de 220: 1 + 2 + 4 +5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

NÚMEROS SATURADOS

Son los menores números enteros con el mayor número posible de divisores; es decir, que un número saturado tiene más divisores que cualquier otro menor que él.

Ejemplo:

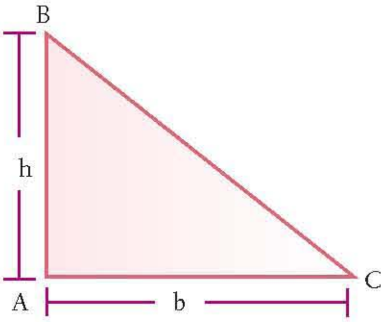
60 es un número saturado; tiene 12 divisores y ningún número menor que 60 tiene tantos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos triángulos rectángulos que tengan $50m^2$ de área existen, sabiendo que los lados son números enteros?

Solución:

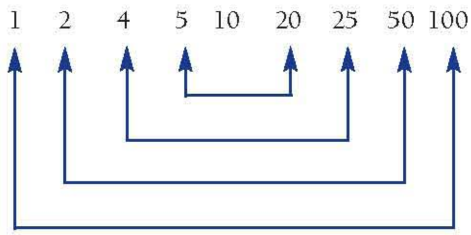
$$\text{Área} = \frac{b \ . \ h}{2}$$



$$50m^2 = \frac{b\ .\ h}{2} \Rightarrow b\ .\ h = 100$$

De esta última expresión se deduce que las dimensiones del triángulo deben ser 2 números cuyo producto es 100; estos números deben ser divisores de 100.

Divisores de 100:



Del diagrama se infiere que existe 5 triángulos rectángulos diferentes cuya área es $50m^2$. el divisor 10 figura solo, pero 10 . 10 = 100, lo que origina el quinto triángulo rectángulo.

Rpta.: 5 triángulos.

2.- Hallar un número entero que admite solamente dos divisores primos, que su número de divisores es 6 y que la suma de todos ellos es 124.

Solución:

Sea N el número buscado, tal que:

de divisores de N = 6 = 2 . 3

$$= (1 + 1)\ (2 + 1)$$

de donde:

$$\alpha = 1; \ \beta = 2$$

Luego:

N es de la forma $N = a\ .\ b^2$ (1)

Según (1) podemos establecer los divisores de N:

1	b	b^2
a	a . b	$a\ .\ b^2$

Tenemos por dato:

$$1 + a + b + a.b + b^2 + a\ .\ b^2 = 124$$

$$(1 + a)(1 + b + b + b^2) = 124 = 2^2\ .\ 31$$

Por comparación directa:

$$1 + a = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$1 + 2b + b^2 = 31 \Rightarrow b\ (b + 1) = 30 \Rightarrow b = 5$$

$$N = 3\ .\ 5^2 = 75$$

Rpta.: N = 75

3.- Hallar un número que no contiene otros factores primos que 3 y 5, y tales que el número de divisores es 15 y que el exponente del primer término es el doble del exponente del segundo término.

Solución:

El número buscado es de la forma:

$$N = a^{2x}\ .\ b^x$$

Por lo tanto el número de divisores de:

$$N = (2x + 1)\ (x + 1) = 15$$

$$\Rightarrow (2x + 1)\ (x + 1) = 5\ .\ 3$$

Por identificación directa:

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Luego el número buscado es:

$$N_1 = 3^4\ .\ 5^2 = 2\ 025$$

$$N_2 = 5^4\ .\ 3^2 = 5\ 625$$

Rpta.: $N_1 = 2\ 025$, $N_2 = 5\ 625$

4.- Hallar un número de la forma:

$$A = 66\ .\ 32^m\ .\ 81^n$$

sabiendo que tiene 158 divisores más que el número 2 275.

Solución:

Cálculo del número de divisores de 2 275:

$$2\ 275 = 5^2 \cdot 7 \cdot 13$$

de donde:

$$\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \delta = 1$$

y el número de divisores de 2 275 es:

$$n = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12 \text{ divisores}$$

Por lo tanto, el número A tendrá:

$$158 + 12 = 170 \text{ divisores}$$

Cálculo del número A:

$$A = 6 \cdot 32^m \cdot 81^n = (2 \cdot 3)(2^5)^m \cdot (3^4)^n$$
$$= 3^{4n+1} \cdot 2^{5m+1}$$

Número de divisores de A:

$$\# = (4n + 2)(5m + 2) = 170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$$

$$2(2n + 1)(5m + 2) = 2 \cdot 5 \cdot 17$$

$$(2n + 1)(5m + 2) = 5 \cdot 17$$

Entonces por comparación directa:

$$2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$$
$$5m + 2 = 17 \Rightarrow m = 3$$

$$\therefore\ A = 6 \cdot 32^3 \cdot 81^2 = 2^{16} \cdot 3^9$$

Rpta.: $A = 2^{16} \cdot 3^9$

5.- ¿Cuántas veces habrá que multiplicar por 12 al número 450 para que el producto resultante tenga 144 divisores?

Solución:

Consideremos que 450 debemos multiplicar por "n" veces 12; entonces el producto será :

$$P = 450 \cdot \underbrace{12 \cdot 12 \ldots 12}_{n \text{ veces}}$$

$$P = 450 \cdot 12^n = (2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)(2^2 \cdot 3)^n$$

$$P = 2^{2n+1} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^2$$

Calculemos el número de divisores de N:

$$\# \text{ de divisores} = (2n + 2)(n + 3)(2 + 1)$$

Pero, por dato # de divisores = 144; luego:

$$144 = (2n + 2)(n + 3)3$$

$$144 = 2(n + 1)(n + 3)3$$

$$24 = (n + 1)(n + 3)$$

$$4 \cdot 6 = (n + 1)(n + 3) \Rightarrow n = 3$$

Rpta.: Habrá que multiplicar 3 veces por 12.

6.- Hallar los números enteros, tales que sean divisibles por 15 y posean 15 divisores.

Solución:

Consideremos que los números buscados son de la forma S.

$$S = \overset{\circ}{m}15 \qquad (1)$$

Número de divisores:

$$n = 15 \qquad (2)$$

De la expresión (1) se deduce que S = m5 y m3, por lo tanto S posee los factores 3 y 5.

Luego S será de la forma:

$$S = 3^a \cdot 5^b \cdot p^c \ldots \qquad (3)$$

De (2) : Número de divisores:

$$n = 15 \begin{cases} 15 \cdot 1 = (14 + 1)(0 + 1) & (4) \\ 3 \cdot 5 = (2 + 1)(4 + 1) & (5) \end{cases}$$

Según (4) hay un sólo factor primo y según (3) debe haber por lo menos 2 factores, luego la expresión (4) es falsa.

De (3) y (5) se deduce:

$$S = 3^2 \cdot 5^4 \text{ ó } S = 3^4 \cdot 5^2$$

Rpta.: S = 5 625 ó S = 2 025

7.- ¿Cuántas divisores no divisibles por 6 tiene el número:

$$N = 120 \cdot 45^2\ ?$$

Solución:

Descomponiendo N en factores primos:

$$N = 120 \;.\; 45^2 = (2^3 \;.\; 3 \;.\; 5)\,(3^2 \;.\; 5)^2$$
$$= 2^3 \;.\; 3 \;.\; 5 \;.\; 3^4 \;.\; 5^2$$
$$= 2^3 \;.\; 3^5 \;.\; 5^3$$

Los divisores de 5^3 que no son múltiplos de 6 ó 2 . 3, son aquellos originados por:

$$A = 2^3 \;.\; 5^3 \quad y \quad B = 3^5 \;.\; 5^3$$

De esta manera, el factor 5^3 interviene en ambos números, entonces tendremos que los divisores no divisibles por 6 serán:

$$N = 2^3 \;.\; 5^3 + 3^5 \;.\; 5^3 - 5^3$$

Por su parte el número de divisores que no son divisibles por 6 es:

$$n = (3 + 1)\,(3 + 1) + (5 + 1)\,(3 + 1) - (3 + 1) = 36$$

Rpta.: Existen 36 divisores no divisibles por 6.

8.- Hallar un número de la forma: N = 2a . 3b, sabiendo que si se multiplica a dicho número por 8 y por 9 su número de divisores aumenta en 9 y 10 respectivamente.

Solución:

$$N = 2^a \;.\; 3^b \qquad (1)$$

Multiplicando N por 8 tenemos :

$$8N = 2^a \;.\; 3^3 \;.\; 8 = 2^a \;.\; 3^b \;.\; 2^3 = 2^{a+3} \;.\; 3^b \qquad (2)$$

$$9N = 2^a \;.\; 3^b \;.\; 9 = 2^a \;.\; 3^b \;.\; 3^2 = 2^a \;.\; 3^{b+2} \qquad (3)$$

Por datos del problema:

divisores 8N - # divisores N = 9 (4)

divisores 9N - # divisores N = 10 (5)

De (1):

divisores de N = (a + 1) (b + 1)

= ab + a + b + 1 (6)

De (2):

divisores de 8N = (a + 4) (b +1)

= ab + a + 4b + 4 (7)

De (3):

divisores de 9N = (a + 1) (b + 3)

= ab + 3a + b + 3 (8)

Sustituyendo (6) y (7) en (4):

$$ab + a + 4b + 4 - ab - a - b - 1 = 9$$
$$\Rightarrow \quad 3b = 6$$
$$\Rightarrow \quad b = 2$$

Sustituyendo (8) y (6) en (5):

$$ab + 3a + b + 3 - ab - a - b - 1 = 10$$
$$\Rightarrow \quad 2a = 8$$
$$\Rightarrow \quad a = 4$$

El número buscado será:

$$N = 2^4 \;.\; 3^2 \Rightarrow N = 144$$

Rpta.: N = 144

9.- Hallar un número de 5 cifras divisible por 7 que tiene 21 divisores.

Solución:

Consideremos que sea N el número buscado. Por condiciones del problema, podemos establecer:

$$10^4 < N < 10^5 \qquad (1)$$

$$N = m7 \qquad (2)$$

de divisores de N = 21 (3)

De la expresión (3):

de divisores de N = 21

21 . 1 = (0 + 1) (20 + 1) (4)

21

7 . 3 = (2 + 1) (6 + 1) (5)

De (2) y (4) se deduce que N debe poseer el factor primo 7 y como (4) indica que N tiene un solo factor primo, entonces:

$N = 7^{20}$ no es solución, ya que:

$$7^{20} > 105$$

De (2) y (5) se deduce:

1º $N = 7^6 \,.\, a^2 > 10^5$ (no es solución)

2º $N = 7^2 \,.\, a^6$

Este valor en (1):

$$10^4 < 7^2 \,.\, a^6 < 10^5$$

$$\frac{10^4}{7^2} < a^6 < \frac{10^4}{7^2} \,.\, 10$$

$$\frac{100}{7} < a^3 < \frac{100}{7} \,.\, 3{,}14$$

$$14{,}28 < a^3 < 44{,}85$$

$$2{,}43 < a < 3{,}55$$

$\Rightarrow$ $a = 3$

Luego el número buscado:

$$N = 7^2 \,.\, 3^6$$

Rpta.: N = 35 721

10.- El área de un rectángulo es $588m^2$. ¿Cuántos valores puede tener su perímetro sabiendo que sus lados miden un número entero de metros y su perímetro es menor que 150 metros?

Solución:

Por dato: área = $b \,.\, a = 588m^2$

pero: $588 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 7^2$

Los divisores de 588 serán:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 49, 84, 98, 147, 196, 294, 588

También por dato:

Perímetro = $2(b + a) < 150 \Rightarrow b + a < 75$

Pero como "b" y "a", son divisores de 588, sólo hay 3 valores que pueden adoptar:

$b = 28 \quad a = 21$

$b = 49 \quad a = 12$

$b = 42 \quad a = 14$

Rpta.: Puede tener 3 valores.

11.- Al multiplicar el número $2 \,.\, 3^b \,.\, 7^c$ por 3^3 los divisores aumentan en un 50% y al dividirlo por 98 disminuye a 1/4 del total.

Hallar: b + c

Solución:

Sea N el número buscado:

$$N = 2 \,.\, 3^b \,.\, 7^c \qquad (1)$$

$$\# D_N = 2(b + 1)(c + 1) \quad (2)$$

Multiplicando N por 3^3, la expresión (1) tomará la forma:

$$3^3 \,.\, N = 2^1 \,.\, 3^{b+3} \,.\, 7^c$$

y la (2) tomará la forma:

$$\# D_{3^3N} = (1 + 1)(b + 4)(c + 1)$$

Por condición del problema:

$$\# D_{3^3N} = \frac{150}{100} \# D_N$$

Sustituyendo los valores respectivos:

$$2(b + 4)(c + 1) = \frac{3}{2}[2(b + 1)(c + 1)]$$

$$b + 4 = \frac{3}{2}(b + 1) \Rightarrow b = 5$$

Dividiendo, (1) entre $2 \,.\, 7^2$:

$$\frac{N}{98} = 3^b \,.\, 7^{c-2}$$

$$\Rightarrow \# D\frac{N}{98} = (b + 1)(c - 1) \qquad (3)$$

Pero por condición del problema:

$$\# D\frac{N}{98} = \frac{1}{4} \# D_N$$

Reemplazando los valores dados en (2) y (3):

$$(b + 1)(c - 1) = \frac{1}{4} \cdot 2(b + 1)(c + 1)$$

$$c - 1 = \frac{1}{2}(c + 1) \Rightarrow c = 3$$

Rpta.: $b + c = 8$

12.- Hallar a + b, sabiendo que el número $\overline{ab(2a)(2b)}$ tiene 30 divisores.

Solución:

Descomponiendo polinómicamente, sumando y adecuando:

$$N = \overline{ab(2a)(2b)} = 102 \cdot \overline{ab}$$

$$N = \overline{ab(2a)(2b)} = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot \overline{ab}$$

N contiene a los factores primos 2, 3 y 17.

Como: $\#D_N = 30$

$\Rightarrow \quad \#D_N = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ó también:

$\#D_N = (1 + 1)(2 + 1)(4 + 1)$

Se deduce que:

$$\overline{ab} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$\therefore \quad a + b = 2 + 4 = 6$

Rpta.: $a + b = 6$

13.- ¿A qué potencia hay que elevar al número 72 para que contenga al número:

$$N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot 3^6 \cdot 2^{13} \cdot \ \ldots \ \cdot 2^{58} \cdot 3^{46} \ ?$$

Solución:

Se puede escribir así :

$$N = 2^{3 + 8 + 13 + \ldots + 58} \cdot 3^{2 + 6 + \ldots + 46}$$

$$\Rightarrow N = 2^{366} \cdot 3^{288} \qquad (1)$$

Por otra parte descomponiendo 72^n en sus factores primos:

$$72^n = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \qquad (2)$$

Si comparamos los exponentes de (1) y (2), y por condición del problema, se deduce:

$3n \geq 366 \Rightarrow n \geq 122$ y $2n \geq 288 \ \therefore \ n \geq 144$

Rpta.: Habrá que elevar el número 72 a la potencia 144 o múltiplo mayor.

14.- El número $N = 2 \cdot 3^\alpha \cdot 7^\beta$ tiene 40 divisores cuya suma de cifras es m9, y 30 divisores cuya cifra de menor orden es par. Hallar $\alpha + \beta$.

Solución:

Los divisores cuya suma son números m9:

$N = 2 \cdot 3^\alpha \cdot 7^\beta = 3^2 (2 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 7^\beta)$

$\quad = 9 (2 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 7^\beta)$

de divisores: $2(\alpha - 1)(\beta + 1) = 40$

y los divisores pares son: $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 30$

De las 2 últimas expresiones se deduce:

$$\alpha = 5, \ \beta = 4$$

Rpta.: $\alpha + \beta = 9$

15.- La sexta parte del número $2^\alpha \cdot 3 \cdot 7^\beta$, tiene 1/3 de los divisores del mismo. Si a dicho número se le multiplica por 21, el número de divisores aumenta en 24.

Hallar: $\alpha + \beta$

Solución:

$$D = (\alpha + 1)(2)(\beta + 1) \qquad (1)$$

La sexta parte del número es: $\dfrac{2^\alpha \cdot 3 \cdot 7^\beta}{6}$

Esto es: $2^{\alpha-1} \cdot 7^\beta$

"D" es el número de divisores del número dado:

$$\Rightarrow \alpha(\beta + 1) = \frac{1}{3} D \qquad (2)$$

El número dado multiplicado por 21 será:

$$2^\alpha \cdot 3^2 \cdot 7^{\beta+1}$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)(3)(\beta + 2) = D + 24 \qquad (3)$$

De (1),(2) y (3):

Rpta.: $\alpha + \beta = 6$

16.- ¿Cuántos divisores tendrá:

$$P = 36 \,.\, 36^2 \,.\, 36^3 \,.\, 36^4 \,.\, \dots \,.\, 36^n \;?$$

Solución:

Sabiendo en general que:

$$\Sigma N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

entonces el número dado es:

$$P = 36 \,.\, 36^2 \,.\, 36^3 \,.\, 36^4 \,.\, \dots \,.\, 36^n$$

$$= 36^{(1+2+3+4+\dots+n)} = 36^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (1)$$

como $36 = 2^2 \,.\, 3^2$, en (1):

$$P = 2^{2\frac{n(n+1)}{2}} \,.\, 3^{2\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P = 2^{n(n+1)} \,.\, 3^{n(n+1)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ El # de divisores de P será:

$$\# D = [n(n+1)+1]\,[n(n+1)+1]$$

Rpta.: $(n^2 + n + 1)^2$

17.- ¿Cuántos divisores de dos cifras tiene 180?

Solución:

$180 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$

cuadro de divisores de 180

1 2 4	$2^2 \rightarrow 2^0, 2^1, 2^2$	1 era Fila	1 er. Grupo
3 6 12 9 18 36	$3^2 \rightarrow 3^1, 3^2$		
5 10 20 15 30 60 45 90 180	$5 \rightarrow 5$		

Rpta.: Existen 10 divisores de 2 cifras.

18.- Hallar "α" si $36 \,.\, 10^\alpha$ tiene 12 divisores múltiplos de 2, pero no de 5.

Solución:

El número se puede escribir así:

$$36 \,.\, 10^\alpha = 2^{2+\alpha} \,.\, 3^2 \,.\, 5^\alpha \qquad (1)$$

Los divisores m2 pero no m5, son aquellos originados por el paréntesis de :

$2(2^{\alpha+1} \,.\, 3^2)$, y como son 12 divisores se tiene:

$$(\alpha + 1 + 1)\,(2 + 1) = 12$$

$$\alpha = 2$$

Rpta.: $\alpha = 2$

19.- Hallar el menor número múltiplo de 21 que tenga 14 divisores.

Solución:

Sea "N" el número buscado.

$$N = m21 \qquad (1)$$

"N" posee los factores primos 3 y 7 (N es mínimos); será de la forma:

$$N = 3^\alpha \,.\, 7^\beta \qquad (2)$$

$$\# D_N = (\alpha + 1)(\beta + 1) = 14 = (6 + 1)(1 + 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = 6 \text{ y } \beta = 1$$

como "N" es lo menor posible.

$\therefore \quad N = 3^6 \,.\, 7$

Rpta.: N = 5 103

20.- Si:

$$n(n+2)(n+4)(n+6) = 3 \,.\, \overline{aaaaaa}$$

Hallar "a":

Solución:

Descomponiendo polinómicamente :

$$(n)(n+2)(n+4)(n+6) = 3 \,.\, 111111 \,.\, a$$

Descomponiendo 111 111 en sus factores primos:

$$\begin{array}{c} 33 \quad 35 \\ (n)(n+2)(n+4)(n+6) = 3 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 37 \,.\, a \\ 39 \quad 37 \end{array}$$

$$= 33 \,.\, 35 \,.\, 37 \,.\, 39$$

Cambiando factores: $35 = (7 \,.\, a)$

Rpta.: $a = 5$

21.- ¿Cuántos divisores m3 tiene 120^9 ?

Solución:

120^9 en factores primos:

$$120^9 = (2^3 \,.\, 3 \,.\, 5)^9$$

$$120^9 = 2^{27} \,.\, 3^9 \,.\, 5^9 \qquad (1)$$

De (1): el número de divisores de 120^9 es:

$$\#D = (27+1)\,(9+1)\,(9+1) = 2\,800 \quad (2)$$

Los divisores de 120^9 que no son m3, son aquellos que no poseen el factor 3, según (1) estos divisores son originados por:

$2^{27} \,.\, 5^9$ y el número será:

$$(27+1)\,(9+1) = 280 \qquad (3)$$

De (2) y (3) los divisores de 120^9 que son m3 serán :

$$2\,800 - 280 = 2\,520$$

Rpta.: Tiene 2 520 divisores m3.

22.- ¿Cuál es el menor número de veces que se debe multiplicar al número $N = 127 \,.\, 128 \,.\, \ldots \,.\, 150$ por 27 para que sea divisible por 3^{80} ?

Solución:

El número N se puede expresar así:

$$N = \frac{150!}{126!} \text{ contiene } \begin{cases} 150! \rightarrow 3^{72} \\ 126! \rightarrow 3^{61} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ contiene } \frac{3^{72}}{3^{61}} = 3^{11}$$

Sea "n" el número de veces que se debe multiplicar por 27 $\rightarrow (3^3)^n$, entonces:

$$3^{11} \,.\, 3^n \text{ contiene a } 3^{80}$$

$$11 + 3n \geq 80$$

$$\therefore\ n_{mínimo} = 23$$

Rpta.: $n_{mínimo} = 23$

23.- Hallar la mayor potencia de 7 que está contenida exactamente en:

$$112 \,.\, 116 \,.\, 120 \,.\, \ldots \,.\, 232$$

Solución:

$$112 \,.\, 116 \,.\, 120 \,.\, \ldots \,.\, 232 = (4 \,.\, 28)(4 \,.\, 29)(4 \,.\, 30)\ldots(4 \,.\, 58)$$

$$112 \,.\, 116 \,.\, 120 \,.\, \ldots \,.\, 232 = 4^{31}(28 \,.\, 29 \,.\, 30 \,.\, \ldots \,.\, 58)$$

En el paréntesis se observa que los múltiplos de 7 son 28, 35, 42, 49 y 56. Los cuales se puede escribir así:

$$m7 = 4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 7$$

$$= \underbrace{4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 8}_{A} \,.\, 7^6 = \underbrace{A}_{\neq m7} \,.\, 7^6$$

Rpta.: La mayor potencia de 7 es 7^6

24.- ¿Cuántos divisores m3 y no m6 tiene 3 600?

Solución:

$$3\,600 = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \qquad (1)$$

Los divisores de 3 600 múltiplos de 3 son los generados por el paréntesis:

$$3\,600 = 3(2^4 \,.\, 3 \,.\, 5^2)$$

$$\#D_{3\,600}m3 = (4+1)(1+1)(2+1) = 30 \quad (2)$$

Los divisores de 3 600 múltiplos de 6 son los generados por el paréntesis:

$$3\,600 = (2^3 \,.\, 3 \,.\, 5^2) \,.\, 6$$

$\#D_{3\,600}\overset{\circ}{m}6 = (3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 24 \qquad (3)$

De (2) y (3) se deduce que los divisores de 3 600, m3 y no m6 son: 30 - 24 = 6

Rpta.: 6

25.- El número de vagones que lleva un tren A, es igual a los 5/11 del que lleva un tren B; y el que lleva un tren C, los 9/23 de otro D. Entre A y B llevan tantos vagones como los otros dos. ¿Cuál es el número de vagones de cada tren, sabiendo que no puede pasar de 25?

Solución:

Podemos establecer según el enunciado:

$$A = \frac{5 \,.\, B}{11} = \#\text{ entero} \Rightarrow B = m11 \qquad (1)$$

$$C = \frac{9 \,.\, D}{23} = \#\text{ entero} \Rightarrow D = m23 \qquad (2)$$

$$A + B = C + D \qquad (3)$$

$$A, B, C, D < 25 \qquad (4)$$

Remplazando: (1) y (2) en (3):

$$\frac{5 \,.\, B}{11} + B = \frac{9 \,.\, D}{23} + D$$

De donde: $B = \dfrac{22}{23} D = \#\text{ entero} \qquad (5)$

De (4) y (5), se deduce que D = 23

$\therefore$ B = 22, C = 9, A = 10

Rpta.: Número de vagones de cada tren es: 10, 22, 9 y 23

26.- Sabiendo que $\overline{xyz}$ es un número primo, determinar el cuadrado del número de divisores de:

$$\overline{xyzxyz}$$

Solución:

$\overline{xyz}$ = número primo

Descomponiendo polinómicamente:

$$\overline{xyzxyz} = \overline{xyz000} + \overline{xyz}$$

$$\overline{xyzxyz} = 1\,000\overline{xyz} + \overline{xyz}$$

$$\overline{xyzxyz} = 1001\overline{xyz}$$

$$\overline{xyzxyz} = 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, \overline{xyz}$$

Se ha descompuesto el número xyzxyz en factores primos.

$\therefore$ # de divisores de $\overline{xyzxyz}$: 2 . 2 . 2 . 2 = 16

Rpta.: N° pedido : $(16)^2 = 256$

27.- Un número tiene 24 divisores y el triple de éste, 30 divisores. ¿Cuántos divisores tendrá el triple del cuadrado de dicho número?

Solución:

Sea N el número:

$$N \rightarrow 24 \text{ divisores} \Rightarrow N = m3$$

$$3N \rightarrow 30 \text{ divisores} = 5 \,.\, 6 \Rightarrow 3N = 3^4 \,.\, a^5$$

$$= 5 \,.\, 3 \,.\, 2 \Rightarrow 3N = 3^4 \,.\, a^2 \,.\, b$$

Entonces:

$N = 3^3 \,.\, a^5 \Rightarrow$ 24 divisores

o: $N = 3^3 \,.\, a^5 \,.\, b \Rightarrow$ 24 divisores

$$3N^2 = 3(3^3 . a^2 . b)^2 = 3^7 \,.\, a^4 \,.\, b^2$$

$$3N^2 = 3(3^3 . a^5)^2 = 3(3^6 \,.\, a^{10}) = 3^7 \,.\, a^{10}$$

$\therefore$ # div. = (7 + 1) (10 + 1) = 88

o $\therefore$ # div. = (7 + 1) (4 + 1) (2 + 1) = 120

Rpta.: 88, 120

28.- Hallar $\alpha + \beta$ si $2^\alpha \,.\, 7^\beta$ y $a^4 \,.\, 7^\beta$ tienen ambos 20 divisores además "a" es un número primo.

Solución:

$N = 2^\alpha \,.\, 7^\beta$

N° Div. N = $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 20$

$N_1 = a^4 > 7^\beta$ (También 20 divisores)

N° Div. $N_1 = (4 + 1)(\beta + 1) = 20$

Por lo tanto se cumplirá que $\alpha = 4$ y $\beta = 3$

$$N_1 = a^4 . 7^3 = 2^4 . 7^3 \Rightarrow a = 2$$

$\therefore \quad N = 2^4 . 7^3$

Rpta.: 7

30.- La suma de los divisores de un número que tiene únicamente a 3 y a 7 como factores primos es 104. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

Solución:

El número es de la forma

$$N = 3^{\alpha} . 7^{\beta} \qquad (1)$$

Por dato:

$$\sum D_N = \frac{3^{\alpha+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^{\beta+1} - 1}{7 - 1} = 104$$

$$(3^{\alpha+1} - 1)(7^{\beta+1} - 1) = 2 . 6 . 104$$

$$= 2^5 . 3 . 13$$

$$\Rightarrow 3^{\alpha+1} - 1 = 2 . 13 = 26$$

$$\Rightarrow 3^{\alpha+1} = 27 = 3^3 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow 7^{\beta+1} - 1 = 2^4 . 3 = 48$$

$$\Rightarrow 7^{\beta+1} = 49 = 7^2 \Rightarrow \beta = 1$$

Reemplazando valores en (1):

$$N = 3^2 . 7 = 63$$

Rpta.:

La suma pedida es: $6 + 3 = 9$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la descomposición canónica del número: 82 798 848.

   Rpta.: $2^8 . 3^5 . 11^3$

2. Hallar la descomposición canónica del número: 81 057 226 635 000

   Rpta.: $2^3 . 3^3 . 5^4 . 7^3 . 11^2 . 17 . 23 . 37$

3. Hallar el exponente con el que el número 5 figura en la descomposición canónica de 5 258!

   Rpta.: $5^{1\,312}$

4. Si: P = 45 . 46 .47 . ... . 80 tiene n divisores. ¿Cuántos divisores tiene 81 . P?

   Rpta.: Tiene $\frac{11n}{9}$ divisores

5. Expresar la suma de todos los divisores de 1 200 que terminen en dos cifras ceros.

   Rpta.: 2 800

6. El producto de los divisores de un número de 5 divisores es 59 049.Halle la suma de las cifra de este número.

   Rpta.: 9

7. Hallar el número de divisores del número de 3 cifras igual a 15 veces la suma de sus cifras.

   Rpta.: 8

8. Hallar un número cuyo producto de divisores es:

   $$3^{30} . 5^{40}$$

   Rpta.: El número es 16 875

9. Hallar el número $2^a . 7^b$, sabiendo que si se le divide entre 4, su número de divisores se reduce a la tercera parte y si se le multiplica por 14 su número de divisores se duplica.

   Rpta.: El número buscado es 28

10. Al multiplicar un número por 3, su número de divisores aumenta en 4; si se le divide entre 7, su número de divisores disminuye en 3. Hallar el número.

    Rpta.: 3 087

11. ¿Cuál es el menor número de veces que se debe multiplicar a 100! por 3, para que sea divisible por 3^{100}?

    Rpta.: 52 veces

12. ¿Cuántos divisores impares tiene el producto de los 6 primeros números pares?

Rpta.: 6

13. Un número tiene 22 divisores, si su cubo tiene 64. ¿Cuántos tendrá su raíz cúbica?

Rpta.: 8

14. ¿Cuántos divisores deben tener $2^n \cdot 3^{n+4}$ para que su raíz cuadrada tenga 8 divisores?

Rpta.: 21

15. ¿Cuál es el valor de la cifra "a" del número $\overline{abcd}$, si sabemos que tiene 14 divisores y que: $a + c = b + d = 9$?

Rpta.: $\overline{abcd} = 8\,019$, $a = 8$

16. Si n es primo y $7^2 \cdot n$ tiene 56 números menores que 100 que son primos con este producto. Hallar n.

Rpta.: $n = 3$

17. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abab}$ existen tales que posean 6 divisores?

Rpta.: 2

18. Un número tiene 25 divisores y el triple de éste, 30 divisores. ¿Cuántos divisores tendrá el triple del cuadrado del mismo número?

Rpta.: 90

19. ¿Cuál es el menor número que multiplicado por sí mismo tiene 75 divisores? (Dar como respuesta la suma de sus cifras).

Rpta.: 9

PROBLEMAS CON ALTERNATIVAS SOBRE NUMEROS PRIMOS

1. ¿Cuántos números primos hay entre 125 y 200?

a) 6 b) 8 c) 7 d) 9 e) 10

2. Al dividir el mayor número de la forma $\overline{bbb}$ que tiene 12 divisores entre 5, se obtiene de residuo:

a) 2 b) 0 c) 4 d) 3 e) 1

3. ¿Cuál es el menor número $\overline{xyzxyz}$ que posee 16 divisores? . Expresar la cifra de tercer orden del mismo.

a) 1 b) 0 c) 2 d) 4 e) 3

4. Dado el número $\overline{xy(2x)(2y)}$ y sabiendo que tiene 16 divisores. Hallar x + y mínimo.

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 4

5. Hallar la suma de las cifras del producto de todos los divisores de 324.

a) $2^{30} \cdot 3^{30}$ b) $2^{15} \cdot 3^{15}$ c) $2^{15} \cdot 3^{30}$

d) $12^{12} \cdot 3^{15}$ e) N.A.

6. ¿Cuál es el menor número por el cual hay que multiplicar a 120, para que el producto tenga 30 divisores?

a) 15 b) 12 c) 9 d) 6 e) 4

7. Si 48! tiene n divisores, 49! tendrá:

a) 49n divisores b) 2n divisores

c) 3n divisores d) 8n/7 divisores

e) 9n/7 divisores

8. Si $\overline{mm}^m$ tiene 16 divisores, "m" vale por lo menos.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

9. ¿Por cuántos números compuestos es divisible el número 8 200?

a) 11 b) 24 c) 22 d) 12 e) 20

10. Hallar el número : $N = 2^5 . a . b$, sabiendo que a y b son números primos y que la suma de todos sus divisores es el triple de él.

a) 1 024 b) 672 c) 844

d) 936 e) 616

11. ¿Cuántos números de la forma $\overline{(3a)(4b)(3a)}$ son primos absolutos?

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) N. A.

12. ¿Cuántos divisores impares tiene el mayor número capicúa de 6 cifras?

a) 58 b) 32 c) 64 d) 60 e) 5

13. ¿Cuántas veces hay que multiplicar a 40 por 50 para que tenga 28 divisores más?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

14. Si $N = 10^{\alpha} . 15^{\beta}$ tiene 385 divisores. Hallar $\alpha + \beta$.

a) 4 b) 6 c) 7 d) 9 e) 10

15. Un número de la forma 7^a está precedido de: 705 894 enteros primos con él. Determinar "a".

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

16. ¿Cuántos divisores tiene la suma de todos los números de 3 cifras?

a) 32 b) 72 c) 36 d) 48 e) 86

17. Si $N = a^2 + a + 41$, N es siempre primo. A mayor valor absoluto del número, mayor número de divisores. $a(a^2 + 5)$ es siempre divisible por 6.

a) VFV b) FVV c) FFV

d) VVF e) FFF

18. Si $\overline{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+6)} = \overset{\circ}{m7}$ ¿Cuántos divisores tiene el número:

$\overline{a(a+1)(a+2)}$?

a) 8 b) 12 c) 16 d) 24 e) N.A.

19. Encontrar un número que tenga 63 divisores, sabiendo que su suma vale 51 181. (Dar como respuesta, la suma de las cifras del número).

a) 18 b) 12 c) 9 d) 8 e) N.A.

20. Hallar a + b, si $\overline{ab}$ tiene 12 divisores y $(\overline{ab})^2$ tiene 33.

a) 3 b) 15 c) 6 d) 12 e) 9

21. Si P = 72 . 72 . 72 . ... . 72 (n veces). Hallar "n" para que "P" tenga 1 820 divisores.

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

22. Hallar el menor perímetro que puede tener un terreno rectangular cuya área sea 252 mts^2, sabiendo que sus dimensiones expresadas en mts., son número enteros.

a) 80 b) 74 c) 64 d) 70 e) 54

23. Al multiplicar $N = 3^a . 2^b . 7^c$ por 14 ó por 49 el número de divisores se duplica. Entonces N puede ser:

a) 168 b) 294 c) 56

d) 84 e) 126

24. Si $\overline{bbb}$ tiene 6 divisores más que $\overline{b0}$, halle: 360 . b.

a) 90 b) 45 c) 120

d) 40 e) 72

25. ¿Cuántos rectángulos de área 3 024 m^2 y tales que sus lados sean números enteros existen?

a) 20 b) 34 c) 18 d) 24 e) N.A.

26. ¿Cuál es el número, comprendido entre 6 000 y 6 500, que al ser dividido entre 12, 21 y 35 da siempre con residuo 67? Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

a) 12 b) 14 c) 18 d) 21 e) 15

27. Cuántos divisores tiene:

$$7^{\alpha^{\beta}} \cdot 5^{\beta^{\alpha}}$$

si $\alpha^{\beta} \cdot \beta^{\alpha}$

Tiene 35 divisores y se sabe además que:

a = p^2 para p y b primo?

a) 5 350 b) 4 550 c) 5 450

d) 5 330 e) 4 540

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) C	3) C	4) B	5) C
6) C	7) B	8) E	9) A	10) C
11) A	12) A	13) B	14) A	15) B
16) E	17) B	18) E	19) D	20) C
21) E	22) B	23) C	24) A	25) B
26) C	27) D			

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR "MCD"

Se llama MCD de varios números al mayor de todos los divisores comunes de dichos números.

Para hallar el MCD de dos o más números, se descompone éstos en sus factores primos; el MCD es el producto de los factores comunes elevados a su menor exponente.

Ejemplo: Hallar el MCD de 18; 36; 48

PROCEDIMIENTO:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Los divisores comunes son 2 y 3, y el menor exponente para ambos es 1:

$$\therefore \quad \text{MCD} = 2 \,.\, 3 = 6$$

También se dice que El MCD es el mayor número contenido en cada uno de los números dados un número entero de veces.

PRINCIPIOS RELATIVOS AL MAXIMO COMÚN DIVISOR

1er. Principio.- Si dos números son divisibles entre sí el MCD de ellos es el menor.

Demostración:

Sean M y N dos números divisibles entre sí. Admitamos que M > N.

Por las condiciones anteriores, se deduce que N es divisor de M y N; por lo tanto N es el común divisor de dichos números, además es el mayor de los comunes divisores de M y N ya que no existe número mayor que N que pueda ser divisor de N. Podrá serlo de M, pero no de N, de lo contrario N dejaría de ser común divisor.

$$\therefore \quad \text{N es el MCD de M y N}$$

2do. Principio.- Si dos números no son divisibles entre sí, el MCD de ellos es igual al MCD del menor y también del residuo que se obtenga al dividir el mayor entre el menor.

Sean A y B dos números no divisibles entre sí. Además A > B, y "r" el residuo que se obtiene al dividir A : B. Demostraremos que:

$$\text{MCD}\ (A, B) = \text{MCD}\ (B, r)$$

Demostración:

Cálculo del MCD (A,B):

Consideremos que los divisores comunes de A y B son (en orden creciente):

$$1 < N_1 < N_2 < \ldots < N_n \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \text{MCD}\ (A, B) = N_n$$

Consideremos los divisores comunes de B y r (en orden creciente):

$$1 < C_1 < C_2 < \ldots < C_s \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \text{MCD}\ (B, r) = C_s$$

Por un principio de divisibilidad se sabe que: si un número divide al dividendo y al divisor de una división cualquiera, divide también al residuo de esa división. Según ésto:

Como: N_1 es divisor de A y B, lo será también de r.

N_2 es divisor de A y B, lo será también de r.

...

N_n es divisor de A y B, lo será también de "r".

Esto indica que todos los divisores comunes de A y B lo son también de B y "r" y que los divisores de B y "r" lo serán también de A y B.

Por tanto, las series (1) y (2) son iguales, ésto es:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ N_1 &= C_1 \\ N_2 &= C_2 \\ &\vdots \\ N_n &= C_s \end{aligned}$$

$$\text{MCD (A,B)} = \text{MCD (B,r)}$$

CÁLCULO DEL MCD DE VARIOS NÚMEROS

Se puede calcular el MCD de varios números aplicando métodos: 1° por la descomposición de los números en sus factores primos y 2° por el algoritmo de Euclides (que es un procedimiento de divisiones sucesivas).

1° CÁLCULO DEL MCD DE VARIOS NÚMEROS POR DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES PRIMOS

Dados varios números, se descompone éstos en el producto de sus factores primos; y, el MCD de ellos está dado por el producto de todos los factores primos comunes afectados del menor exponente.

Ejemplo:

Hallar el MCD de 5 480; 2 460 y 3 120

Por descomposición en sus factores primos:

$$5\,480 = 2^3 \cdot 5 \cdot 137$$

$$2\,460 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$$

$$3\,120 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

Los factores comunes son 2 y 5; éstos deben ser afectados de sus menores exponentes para hallar el MCD:

$$\therefore \text{MCD} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

2° CÁLCULO DEL MCD POR EL ALGORITMO DE EUCLIDES

Este procedimiento se funda en el principio de divisibilidad que dice: "Si un número divide al dividendo y al divisor de una división, divide también al residuo de dicha división".

Hallar el MCD (A, B) . Se define A > B

COCIENTE		C	C_1	C_2	C_3	C_4
	A	B	R	R_1	R_2	R_3
RESIDUO		R	R_1	R_2	R_3	0

$$\therefore \text{MCD(A, B)} = \text{MCD(B, R)} = \text{MCD}(R, R_1) \Rightarrow$$
$$\text{MCD}(R_1, R_2) = \text{MCD}(R_1, R_3) \Rightarrow R_3$$

Para hallar el MCD de varios números por este método, se procede a determinar el MCD de los dos primeros; luego se calcula el MCD del resultado anterior y del tercer número, se determina el MCD del resultado anterior del cuarto número, y así sucesivamente. El último MCD hallado es el MCD de los números dados.

Ejemplos:

i) Determinar el MCD de 360; 420; 720 y 540.

PROCEDIMIENTO:

MCD (360; 420) = 60

MCD (60; 720) = 60

MCD (60; 540) = 60

$\therefore$ MCD (360; 420; 720 ; 540) = 60

ii) Determinar el MCD de 380; 240; 170 y 35

PROCEDIMIENTO:

MCD (380; 240) = 20

MCD (20; 170) = 10

MCD (10; 35) = 5

$\therefore$ MCD (380; 240; 170 y 35) = 5

TEOREMA.- Si varios números son divididos entre el MCD de ellos, los cocientes obtenidos son primos entre sí.

Sea: P, Q y S tres números y:

$$D = MCD\ (P, Q, S)$$

Se tiene:

$$\frac{P}{D} = k_1,\ \frac{Q}{D} = k_2,\ \frac{S}{D} = k_3, \qquad (I)$$

Demostraremos que k_1, k_2 y k_3 son primos entre sí:

Demostración.- (Por El método del Absurdo)

Negamos la tesis y decimos: k_1, k_2 y k_3 no son primos entre sí. Entonces: k_1, k_2 y k_3 poseen un divisor común $n \neq 1$.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k_1}{n} = E_1, \text{(entero)} \Rightarrow k_1 = n\ .\ E_1 \\ \dfrac{k_2}{n} = E_2, \text{(entero)} \Rightarrow k_2 = n\ .\ E_2 \\ \dfrac{k_3}{n} = E_3, \text{(entero)} \Rightarrow k_3 = n\ .\ E_3 \end{array}\right\} \quad (II)$$

De la hipótesis (I):

$$P = D\ .\ k_1,\ Q = D\ .\ k_2,\ S = D\ .\ k_3 \qquad (III)$$

Sustituyendo (II) en (III):

$$P = D\ .\ n\ .\ E_1\ ,\ Q = D\ .\ n\ .\ E_2\ ,\ S = D\ .\ n\ .\ E_3$$

Analizando estas 3 expresiones finales observamos que ellas no son ciertas, ya que indican que los números P, Q y S, admiten al número "Dn" como común divisor y ésto no es cierto ya que "Dn" es mayor que D y por hipótesis se sabe que el mayor de los comunes divisores de P, Q y S es solamente D.

La negación de la tesis es falsa entonces la tesis debe ser cierta; es decir:

k_1, k_2, y k_3 sí, son primos entre sí

Nota:

Siempre que en un problema intervenga MCD se pensará en aplicar la propiedad que acabamos de demostrar.

Ejemplo: Si MCD (240, 420, 540) = 60

y: $\dfrac{240}{60} = 4$; $\dfrac{420}{60} = 7$; $\dfrac{540}{60} = 9$

Entonces: 4, 7 y 9 son primos entre sí.

TEOREMA.- Si varios números son divididos por otros, éstos últimos dividen también al MCD de los primeros.

Sean A y B dos números y D el MCD (A, B); además A > B.

Si n divide a A; n divide a B,demostraremos que n divide a D = MCD (A, B)

Demostración.- Cálculo de D

	C	C_1	C_2	C_3
A	B	R	R_2	= D
	R	R_1	0	

Por un principio de divisibilidad sabemos que si un número divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide también al residuo de esta división. Como "n" divide a A y B, "n" divide a R, residuo de A . B.

Dividiendo a B y R, dividirá a R_1 residuo de B . R y finalmente dividiendo a R y R_1, dividirá a R_2 = D, residuo de R entre R_1 y MCD (A, B).

PROPIEDADES DEL MAXIMO COMÚN DIVISOR

1ra. Propiedad.- Todo número, divisor común de dos números, es divisor del MCD de éstos.

En efecto, determinemos por ejemplo los divisores comunes de 12, 24 y 36 tendremos:

	12, 24, 36	
	1	común divisor
	2	común divisor
	3	común divisor
	4	común divisor
	6	común divisor
máximo	12	común divisor

se observa que 1, 2, 3, 4 y 6 son divisores de 12, que es el MCD de 12, 24 y 36.

2da. Propiedad.- Si se multiplica 2 números por un mismo número, el MCD de ellos queda multiplicado por este número.

En efecto, sean A y B dos números, y sea D el MCD (A, B). Podemos expresar:

$$A = D \cdot q_1 \quad ; \quad B = D \cdot q_2$$

donde q_1 y q_2 son primos entre sí.

Multiplicando A y B por "n", las igualdades anteriores resultarían de la siguiente forma:

$$n \cdot A = (D \cdot n) \cdot q_1 \quad ; \quad n \cdot B = (D \cdot n) \cdot q_2$$

lo que demuestra la propiedad.

Ejemplo:

Sean dos números: 24 y 36; cuyo M C D = 12

$$24 = 12 \cdot 2 \quad ; \quad 36 = 12 \cdot 3$$

Multiplicando estas dos igualdades por 5:

$$24 \cdot 5 = 12 \cdot 2 \cdot 5 = (12 \cdot 5) \cdot 2$$

$$36 \cdot 5 = 12 \cdot 3 \cdot 5 = (12 \cdot 5) \cdot 3$$

3ra. Propiedad.- Si se divide dos números por un divisor común a ambos, su MCD quedará también dividido por dicho número.

Sean M y N dos números tales que MCD (M,N) = D. Podemos expresar:

$$\left.\begin{array}{l} M = D \cdot q_1 \\ N = D \cdot q_2 \end{array}\right\} q_1 \text{ y } q_2 \text{ son primos entre sí.}$$

Dividiendo M y N por k, las igualdades anteriores resultarían:

$$\frac{M}{k} = \frac{D \cdot q_1}{k} \quad ; \quad \frac{N}{k} = \frac{D \cdot q_2}{k}$$

lo que demuestra la propiedad.

Ejemplo:

Sean dos números 24 y 36 cuyos MCD = 12

$$24 = 12 \cdot 2 \quad ; \quad 36 = 12 \cdot 3$$

dividiendo ambas igualdades por 6:

$$\frac{24}{6} = \frac{12 \cdot 2}{6} \quad ; \quad \frac{36}{6} = \frac{12 \cdot 3}{6}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Al hallar el MCD de dos números por el método de las divisiones sucesivas, se obtiene como cocientes 14, 1, 1, 1 y 2. Si ambos números son primos entre sí. ¿Cuál es su suma?.

Solución:

Sean A y B los números buscados, como son primos entre sí, su MCD será 1. Considerando que A > B, podemos establecer que:

	14	1	1	1	2
A	B	R_1	R_2	R_3	R_4
	R_1	R_2	R_3	R_4	0

$= 1 = \text{MCD}(A, B)$

OBSERVACIÓN.-

Este tipo de problemas se puede resolver empezando de derecha a izquierda, poniendo a todos los "elementos" de la operación en función del MCD, así:

$$R_3 = 2R_4 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$R_2 = R_3 + R_4 = 2 + 1 = 3$$

$$R_1 = R_2 + R_3 = 3 + 2 = 5$$

$$B = R_1 + R_2 = 5 + 3 = 8$$

$$A = 14B + R_1 = 14 \cdot 8 + 5 = 117$$

Rpta.: A + B = 125

2.- Entre las ciudades A y B distantes 714 km, existe un cierto número de paraderos y entre las ciudades B y C distantes 1 088 km, existe otro número de paraderos. Si los paraderos entre A y B y entre B y C, están todos igualmente distanciados se quiere que el número total de paraderos sea el menor posible; hallar la suma de las cifras del número que indica el número de paraderos entre B y C.

Solución:

Sea "d" la distancia entre paradero y paradero; por lo tanto d debe ser la mayor posible, d debe ser el mayor divisor común de 714 y 1 088:

d = MCD (714; 1 088)

$$\begin{array}{rcr|l} 714 & \text{---} & 1088 & 2 \\ 357 & \text{---} & 544 & 17 \\ 21 & \text{---} & 32 & \end{array}$$

MCD = 2 . 17 = 34

paraderos entre B y C = $\frac{1\,088}{34}$ - 1 = 32 - 1 = 31

Rpta.: 3 + 1 = 4

3.- Determinar cuántos pares de números existen, cuyo MCD sea 17, comprendidos entre 800 y 900.

Solución:

Sean A y B los números y D = 17 el MCD (A, B).

Por propiedad fundamental del MCD, en las siguientes ecuaciones q_1 y q_2 son primos entre sí.

$$\frac{A}{17} = q_1 \Rightarrow A = 17q_1$$

$$\frac{B}{17} = q_2 \Rightarrow B = 17q_2$$

Como:

$$800 < A < 900 \quad y \quad 800 < B < 900$$

Entonces:

$$800 < 17q_1 < 900 \quad y \quad 800 < 17q_2 < 900$$

$$47{,}05 < q_1 < 52{,}9 \quad y \quad 47{,}05 < q_2 < 52{,}9$$

Por lo tanto, q_1 y q_2 pueden tomar los siguientes valores: 48, 49, 50, 51, 52.

$$\text{si : \# pares} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = \frac{20}{2} = 10$$

Rpta.: Existen 10 pares.

4.- Para hallar el MCD de 2 números se utilizó el algoritmo de Euclides, hallándose 2 cocientes que son números iguales. Si la suma de dichos números es 341. Hallar el menor de ellos.

Solución:

Sean A y B los números, A > B y "n" el valor de los cocientes iguales.

Podemos establecer que:

	n	n
A	B	r
	r	0

Se cumple que:

$$B = n \,.\, r \quad y \quad A = n \,.\, B + r$$

Sustituyamos el valor de B:

$$A = n \,.\, n \,.\, r + r$$

$$A = n^2 \,.\, r + r$$

Además : A + B = 341

Si sustituimos los equivalentes de A y B:

$$n^2 \,.\, r + r + n \,.\, r = 341$$

$$r(n^2 + n + 1) = 11 \,.\, 31$$

$$\Rightarrow r = 11 \wedge n^2 + n + 1 = 31$$

$$\Rightarrow n = 5$$

$$\therefore A = 5^2 \,.\, 11 + 11 = 286$$

$$B = 5 \,.\, 11 = 55$$

Rpta.: El número menor es 55

5.- ¿Cuántos pares de números comprendidos entre 500 y 700 existen tales que su MCD sea 32?

Solución:

Sean los números : A y B

Por propiedad: A = 32 . q_1 B = 32 . q_2

q_1 y q_2 son primos entre sí

$$500 < 32 \,.\, q_1 < 700$$

$$15{,}6 < q_1 < 21{,}8$$

los valores que pueden tomar q_1 y q_2 son: 16; 17; 18; 19; 20 y 21.

$$\# \text{ pares} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{30}{2} = 15$$

Rpta.: Existen 15 pares de números.

6.- Hallar dos números enteros cuya suma sea: 4 273 691 sabiendo que los cocientes obtenidos en la determinación de su MCD han sido: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Solución:

Sean A y B los números buscados A > B, tales que:

$$A + B = 4\ 273\ 691 \qquad (1)$$

1	2	3	4	5	6	7	8	
A	B	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	0

$R_6 = 8R_7$

$R_5 = 7R_6 + R_7 = 7(8R_7) + R_7 \qquad = 57R_7$

$R_4 = 6R_5 + R_6 = 6(57R_7) + 8R_7 \qquad = 350R_7$

$R_3 = 5R_4 + R_5 = 5(350R_7) + 57R_7 \qquad = 1\ 807R_7$

$R_2 = 4R_3 + R_4 = 4(1\ 807R_7) + 350R_7 \quad = 7\ 578R_7$

$R_1 = 3R_2 + R_3 = 3(7\ 578R_7) + 1\ 807R_7 = 24\ 541R_7$

$B \ = 2R_1 + R_2 = 2(24\ 541R_7) + 7\ 578R_7$

$$B = 56\ 660R_7 \qquad (2)$$

$$A = B + R_1 = 56\ 660R_7 + 24\ 541R_7$$

$$A = 81\ 201R_7 \qquad (3)$$

(2) + (3) en (1):

$$81\ 201R_7 + 56\ 660R_7 = 4\ 273\ 691$$

$\Rightarrow R_7 = 31$; en (2) y (3):

$$B = 56\ 660\ .\ 31 = 1\ 756\ 460$$

$$A = 81\ 201\ .\ 31 = 2\ 517\ 231$$

Rpta.: Los dos números son:

1 756 540 y 2 517 231

7.- Hallar dos números enteros sabiendo que su MCD es 12 y la diferencia de sus cuadrados es 7 344.

Solución:

Sean A y B los números buscados, A > B.

$$MCD\ (A, B) = 12 \qquad (1)$$

$$A^2 - B^2 = 7\ 344 \qquad (2)$$

Por propiedad del MCD, q_1 y q_2 son primos entre sí:

$$\frac{A}{12} = q_1 \Rightarrow A = 12\ .\ q_1$$

$$\frac{B}{12} = q_2 \Rightarrow B = 12\ .\ q_2$$

De donde se deduce que:

$$A^2 = 144\ .\ q_1^2 \ , \quad B^2 = 144\ .\ q_2^2 \qquad (3)$$

(3) en (2):

$$144\left(q_1^2 - q_2^2\right) = 7\ 344$$

$$(q_1 + q_2)\ (q_1 - q_2) = 51 = 17\ .\ 3 = 51\ .\ 1$$

Primero, si:

$$\left.\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 17 \\ q_1 - q_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} q_1 &= 10 \\ q_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando estos valores en (3):

$$\left.\begin{aligned} A &= 12\ .\ 10 = 120 \\ B &= 12\ .\ 7 = 84 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Segundo, si:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + q_2 = 51 \\ q_1 - q_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = 26 \\ q_2 = 25 \end{array}\right\}$$

Reemplazando estos valores en (3):

$$\left.\begin{array}{l} A = 12 \;.\; 26 = 312 \\ B = 12 \;.\; 25 = 300 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Dos soluciones cumplen con la condición:

Rpta.: 120 y 84

312 y 300

8.- Hallar todos los pares de números enteros inferiores a 200 tales que su producto sea 32 928, si su MCD es 28.

Solución:

Sean A y B los números A > B, siendo A y B menores que 200.

$$\text{MCD}\,(A, B) = 28 \qquad (1)$$

$$A \;.\; B = 32\,928 \qquad (2)$$

Por propiedad, y considerando a q_1 y q_2 como primos entre sí:

$$\frac{A}{28} = q_1 \Rightarrow A = 28 \;.\; q_1$$

$$(3)$$

$$\frac{B}{28} = q_2 \Rightarrow B = 28 \;.\; q_2$$

(3) en (2):

$$A \;.\; B = 28^2 \;.\; q_1 \;.\; q_2 = 32\,928$$

$$q_1 \;.\; q_2 = 42 = 42 \;.\; 1 = 21 \;.\; 2 = 14 \;.\; 3 = 7 \;.\; 6 \quad (4)$$

De (4) y (3) se deduce que:

$$A = 28 \;.\; 7 = 196$$

$$B = 28 \;.\; 6 = 168$$

Rpta.: Sólo un par: 196; 168

9.- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{5du}$ ¿Qué valor debe tener la cifra "b" para que el MCD de $\overline{abc}$ y $\overline{cba}$ sea 18?

Solución:

Restando normalmente:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{abc}\,- \\ \underline{\overline{cba}} \\ \overline{5du} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d = 9 \text{ , luego } u = 4\text{, ya que por} \\ \text{propiedad: } 5 + d + u = 18 \Rightarrow \overline{5du} = 594 \end{array}$$

Alternativamente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{abc}}{18} = q_1 \\[2ex] \dfrac{\overline{cba}}{18} = q_2 \end{array}\right\rangle \text{ son primos entre sí}$$

Restando miembro a miembro:

$$\frac{\overline{abc} - \overline{cba}}{18} = q_1 - q_2 \Rightarrow \frac{594}{18} = q_1 - q_2 = 33 \quad (1)$$

Además:

$$18 \;.\; q_2 > 100\text{, luego } q_2 > 5$$

Como q_1 y q_2 son primos entre sí, admitimos los valores que verifican (1):

$$q_1 = 40, 41, 43, 46, 47, 49, 50$$

$$q_2 = 7,\; 8, 10, 13, 14, 16, 17$$

Para $q_1 = 49$ y $q_2 = 16$ se tiene la única solución:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} = 18 \;.\; 49 = 882\;- \\ \overline{cba} = 18 \;.\; 16 = \underline{288} \\ 594 \end{array}$$

Rpta.: b = 8

10.- Se quiere plantar a lo largo de las orillas de un terreno rectángular cierto número de rosales, igualmente espaciados de manera que la distancia de un rosal al siguiente sea como mínimo 1 metro y como máximo 2 metros y que haya un rosal en cada ángulo del terreno. La longitud de éste es 14,84m, la anchura, 10,60m ¿Cuántos rosales son necesarios?.

Solución:

La distancia que separa a dos rosales es la misma a lo ancho que a lo largo, expresada en centímetros será un número divisor común de 1 484cm y 1 060cm. La mayor distancia que pueda separar los rosales, vendrá dada por el MCD de 1 484 y 1 060; ésto es, 212 cm, y como el espacio que separa 2 rosales ha de estar comprendido entre 1m y 2m no puede ser otro que:

$$\frac{212}{2} = 106 \text{ cm} \quad \text{ó} \quad 1{,}06 \text{ m}$$

El perímetro del terreno rectangular es:

$$(14{,}84 + 10{,}60)2 = 50{,}88 \text{ m}$$

El número de rosales a plantar es:

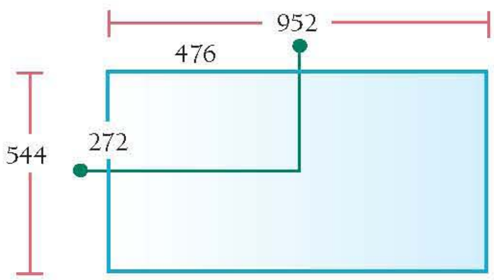
$$50{,}88 \,.\, 1{,}06 = 48$$

Rpta.: Hacen falta 48 rosales

11.- Un terreno de forma rectangular de 952m de largo y 544m de ancho, se desea cercar con alambre sujeto a postes equidistantes 30 a 40m.

Debe corresponder un poste a cada vértice y otro a cada punto medio de los lados del rectángulo. Determinar el número de postes.

Solución:



La distancia entre poste y poste debe ser divisor común de 476 y 272. Sea " l " la distancia entre poste y poste.

$$\text{MCD } (476, 272) = 68 = l$$

Pero como la distancia entre poste y poste debe estar entre 30 y 40 m, entonces:

$$l = \frac{68}{2} \Rightarrow l = 34$$

Perímetro del terreno:

$$(952 + 544)2 = 2\,992\text{m}$$

$\therefore$ Se requiere:

$$2\,992 : 34 = 88$$

Rpta.: 88 postes.

MINIMO COMÚN MÚLTIPLO "MCM"

Se llama MCM de varios números al menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Para hallar el MCM de dos o más números, se descompone los números en sus factores primos; el MCM es el producto de sus factores comunes y no comunes, elevados a su mayor exponente.

Ejemplo: Hallar el MCM (6, 8, 9).

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\therefore$ MCM = $2^3 \,.\, 3^2 = 72$

72 es El menor número que contiene como factores a 6; 8 y 9.

CÁLCULO DEL MCM DE VARIOS NÚMEROS

Dados varios números, se descompone éstos en el producto de sus factores primos y el MCM de ellos viene dado por el producto de todos los factores primos comunes y no comunes afectados del mayor exponente.

Ejemplo:

Hallar el MCM (840; 2 880; 4 500)

$$840 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7$$

$$2\,880 = 2^6 \,.\, 3^2 \,.\, 5$$

$$4\,500 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^3$$

$$\text{MCM } (840; 2\,880; 4\,500) = 2^6 \,.\, 3^2 \,.\, 5^3 \,.\, 7 = 504\,000$$

1er. Principio.- "Si dos números son divisibles, el mayor de ellos es su MCM".

Demostración.- Sean A y B dos números divisibles.

Consideremos que A > B.

Si A es divisible por B, ésto indica que A es múltiplo de B y como B es múltiplo de sí mismo, entonces A es múltiplo común de A y B.

2do Principio.- El producto de 2 números es igual al producto del MCD por el MCM de ellos.

Sean "P" y "Q" dos números.

demostremos que: P. Q = MCD (P, Q). MCM(P, Q)

Demostración.- Consideremos a P y Q descompuestos en sus factores primos:

$$P = a^2 \,.\, b^3 \,.\, c$$
$$Q = a \,.\, b^2 \,.\, p^5$$

$$\text{MCD}(P, Q) = a \,.\, b^2, \quad \text{MCM}(P, Q) = a^2 \,.\, b^3 \,.\, c \,.\, p^5$$

$$P \,.\, Q = a^2 \,.\, b^3 \,.\, c \,.\, a \,.\, b^2 \,.\, p^5$$

ordenando:

$$P \,.\, Q = a \,.\, b^2 \,.\, a^2 \,.\, b^3 \,.\, c \,.\, p^5$$

$$\text{MCD}(P, Q) \,.\, \text{MCM}(P, Q) = a \,.\, b^2 \,.\, a^2 \,.\, b^3 \,.\, c \,.\, p^5$$

$$\therefore \; P \,.\, Q = \text{MCD}(P, Q) \,.\, \text{MCM}(P, Q)$$

Nota.-
El MCM de 2 números primos entre sí o primos absolutos es igual al producto de dichos número.

Ejemplo: MCM (8, 9) = 72 = 8 . 9

Observar que MCD (8, 9) = 1

3er Principio.- El MCM de dos números es igual al producto de dichos números dividido entre su MC D.

Demostración.- Sean A y B dos números.

Por el 2do Principio:

$$\text{MCM}(A, B) \,.\, \text{MCD}(A, B) = A \,.\, B$$

$$\therefore \; \text{MCM}(A, B) = \frac{A \,.\, B}{\text{MCD}(A, B)}$$

Nota.-
Este teorema permite determinar el MCM de 2 números, conociendo su MCD.

Ejemplo: Hallar el MCM (57 y 27)

Solución.-

MCD (57, 27) = 3; aplicando el teorema anterior tenemos:

$$\text{MCM}(57, 27) = \frac{57 \,.\, 27}{\text{MCD}} = \frac{57 \,.\, 27}{3} = 513$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar dos números enteros sabiendo que su suma es 341 y su MCM es 28 veces su MCD.

Solución:

Sean los números A y B tales que:

$$\text{MCD}(A, B) = k$$
$$\text{MCM}(A, B) = R$$

Por datos:

$$A + B = 341 \qquad (1)$$
$$R = 28k \qquad (2)$$

Por propiedad:

$$\left.\begin{array}{l} A = k \,.\, q_1 \\ B = k \,.\, q_2 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Además, según el último teorema:

$$A \,.\, B = k^2 \,.\, q_1 \,.\, q_2 = k \,.\, R$$

Pero por (2): $k^2 \,.\, q_1 \,.\, q_2 = k(28k)$

$$\Rightarrow q_1 \,.\, q_2 = 28 \left\{\begin{array}{ll} q_1 = 4, \; q_2 = 7 & (\alpha) \\ q_1 = 1, \; q_2 = 28 & (\beta) \end{array}\right.$$

De (1) y (3):

$$A + B = k(q_1 + q_2) = 341$$

De (α):

$$A + B = k(4 + 7) = 341$$

k = 31

En (3):

$$\Rightarrow \quad A = 31 \;.\; 4 = 124$$

$$\Rightarrow \quad B = 31 \;.\; 7 = 217$$

Rpta.: 124 y 217

2.- Hallar el producto de 2 números enteros, sabiendo que su suma es 225 y que la suma de su MCM y su MCD es 315.

Solución:

Sea MCM = M

MCD = k

Sabemos que (ver problema anterior):

$$M = k \;.\; q_1 \;.\; q_2$$

Entonces:

$$M + k = k(q_1 \;.\; q_2 + 1) = 315$$

$$M + k = 3^2 \;.\; 5 \;.\; 7 \qquad (1)$$

Además:

$$A + B = (kq_1 + q_2) = 225 = 3^2 \;.\; 5^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que: $k = 3^2 \;.\; 5$

Aplicando (2) se deduce que: $(q_1 + q_2) = 5$

$$q_1 = 2$$

$$q_2 = 3$$

$$\therefore \quad A \;.\; B = (3^2 \;.\; 5)^2 \;.\; 2 \;.3 = 12\,150$$

Rpta.: 12 150

3.- Sí $\dfrac{\text{MCM (A, B)}}{\text{MCD (A, B)}} = x$

y : MCM(A, B) + MCD (A, B) = y

Hallar el MCM en función de x e y.

Solución:

$$\text{MCM(A, B)} = x \;.\; \text{M C D (A, B)} \qquad (1)$$

Como:

$$\text{MCM(A, B)} + \text{M C D (A, B)} = y \qquad (2)$$

(1) en (2):

$$x \;.\; \text{MCD (A, B)} + \text{MCD (A, B)} = y$$

$$\text{MCD (A, B)} \;.\; (x + 1) = y$$

$$\text{MCD(A, B)} = \frac{y}{(x + 1)}$$

Reemplazando en (1):

$$\text{MCM (A, B)} = \frac{xy}{x + 1}$$

Rpta.: $\dfrac{xy}{(x + 1)}$

4.- El número de páginas de un libro está comprendido entre 850 y 950. Si se cuenta sus páginas de 12 en 12 sobran 5, de 15 en 15 sobran 8, y de 18 en 18 sobran 11. Hallar el número de páginas del libro.

Solución:

Sea N el número de páginas.

De acuerdo a los datos:

$$850 < N < 950 \qquad (1)$$

$$N = m12 + 5 \qquad (2)$$

$$N = m15 + 8 \qquad (3)$$

$$N = m18 + 11 \qquad (4)$$

De (2), (3) y (4):

$$\left.\begin{array}{l} N = m12 - 7 \\ N = m15 - 7 \\ N = m18 - 7 \end{array}\right\} \; N + 7 \begin{cases} m12 \\ m15 \\ m18 \end{cases}$$

$$N + 7 = m[\text{M C M}(12, 15, 18)]$$

$$N + 7 = m180$$

$$N = m180 - 7 \qquad (5)$$

$$850 < m180 - 7 < 950$$

$$857 < m180 < 957$$

$$4 < m < 6$$

$$\Rightarrow \quad m = 5 \;\wedge\; N = 5(180) - 7 = 893$$

Rpta.: N = 893

5.- Los números 21 448 y 33 111, divididos entre un número de 4 cifras, dan respectivamente por residuos: 42 y 29. Determinar dicho número.

Solución:

Sea N el número de 4 cifras.

Según el problema:

$$21\,448 = NC_1 + 42 \Rightarrow NC_1 = 21\,406$$

$$33\,111 = NC_2 + 29 \Rightarrow NC_2 = 33\,082$$

N es común divisor de 21 406 y 33 082. El MCD de 21 406 y 33 082 es:

$$21\,406 = 2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 139$$

$$33\,082 = 2 \,.\, 7 \,.\, 17 \,.\, 139$$

MCD = 2 . 7 . 139 = 1 946

Siendo 1 946 de 4 cifras, es la solución del problema.

Rpta.: 1 946

6.- Determinar 2 números sabiendo que uno de ellos posee 21 divisores y el otro 10 divisores y además el MCD de ellos es 18.

Solución:

Según el problema:

$MCD\ (A\ ;\ B) = 18 = 2 \,.\, 3^2$

N° de divisores de $A = 21 = 3 \,.\, 7$

$= (2 + 1)(6 + 1)$

$\Rightarrow$ 2 y 6 son los factores primos de A:

$$A = p^2 \,.\, q^6$$

N° de divisores de $B = 10 = 2 \,.\, 5 = (1 + 1)(4 + 1)$

$\Rightarrow$ 1 y 4 son los factores primos de B:

$$B = r \,.\, s^4$$

Si 2 y 3^2 son factores del MCD (A; B), entonces pertenecen a A ó B y por semejanza, se deduce que:

$$r = 2 \quad y \quad p^2 = 3^2$$

Entonces: $A = 32 \,.\, q^6 \ ; \ B = 2 \,.\, s^4$

Cálculo de q y s:

Como A y B poseen a 18 como divisor entonces:

De (1): A debe poseer el factor 18, como tiene el factor nueve, eso quiere decir que q^6 debe proporcionarle el factor 2: q = 2. Como B debe poseer el factor 18 poseyendo ya el factor 2, será necesario que posea el factor 9 y para ello es necesario que s = 3.

$$A = 3^2 \,.\, 2^6 \quad ; \quad B = 2 \,.\, 3^4$$

Rpta.: A = 576, B = 162

7.- El producto de dos números es: $P = 180^5 .\ 17$ y su MCD es $9^4 .\ 4^3$.¿En cuántos ceros termina el MCM de dichos números?.

Solución:

Sean A y B los números. Por propiedad:

$$A \,.\, B = MCD\ (A, B) \,.\, MCM\ (A, B) \qquad (1)$$

Por condición del problema:

$$A \,.\, B = P = 180^5 \,.\, 17 \qquad (2)$$

$$MCD\ (A, B) = 9^4 \,.\, 4^3 \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), y expresando en sus factores primos:

$$2^{11} \,.\, 3^{10} \,.\, 5^6 \,.\, 17 = 3^8 \,.\, 2^6 \,.\, MCM\ (A, B)$$

$$\Rightarrow MCM\ (A, B) = 2^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5^6 \,.\, 17$$

$$= (2 \,.\, 5)^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 17$$

$$MCM\ (A, B) = 10^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 17$$

Rpta.: Termina en 5 ceros.

8.- Si: $MCM\ [(\overline{anan} - 7), B] = MCM\ [(\overline{anan} - 7), 33\,B]$

Hallar: a - n

Solución:

$$\overline{anan} - 7 = m33$$

$$100\overline{an} + \overline{an} - 7 = m33$$

$$101\overline{an} - 7 = m33$$

$$m33 + 2\overline{an} - 7 = m33$$

$$2\overline{an} - 7 + 33 = m33$$

$$2(\overline{an} + 13) = \overset{\circ}{m}33 \quad \overline{an} + 13 = m33 \left\{ \begin{array}{l} 33 \\ 66 \\ 99 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \overline{an} \in \{20, 53, 86\}$$

$\therefore \quad a - n = 2 - 0 = 5 - 3 = 8 - 6 = 2$

Rpta.: 2

9.- MCM (A, B) = 30 030; MCD (A, B) = 5 ¿Cuántas soluciones existen?.

Solución:

$$\frac{\text{MCM (A, B)}}{\text{MCD (A, B)}} = \frac{30\,030}{5} = 6\,006 \quad (1)$$

Pero: $A = Dq_1$

$B = Dq_2$

Donde q_1 y q_2 son primos entre sí:

$$\left. \begin{array}{r} \text{MCM (A, B)} = Dq_1q_2 \\ \text{MCD (A, B)} = D \end{array} \right\} \text{en (1)}$$

$$\frac{Dq_1q_2}{D} = 6\,006 \Rightarrow q_1 \,.\, q_2 = 6\,006$$

Pero: 6 006 = 2 . 3 . 7 . 11 . 13

El número de divisores (posibles valores de q_1 y q_2) está dado por todas las combinaciones de dichos factores:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 5 + 10 + 10 + 5 = 30$$

Rpta.: Existen: $\frac{30}{2}$ = 15 soluciones posibles.

10.- Se tiene cierto número N, del cual se sabe que al dividirlo entre 3, 4, 5, 6 y 9 deja residuo 1. Pero al dividirlo entre 7 deja residuo 0. Hallar la suma de las cifras del menor número que cumple con tal condición.

Solución:

Podemos establecer que:

$N = m3 + 1 \quad \Rightarrow \quad N - 1 = m3$

$N = m4 + 1 \quad \Rightarrow \quad N - 1 = m4$

$N = m5 + 1 \quad \Rightarrow \quad N - 1 = m5$

$N = m6 + 1 \quad \Rightarrow \quad N - 1 = m6$

$N = m9 + 1 \quad \Rightarrow \quad N - 1 = m9$

$N = m7$

Se deduce que N - 1= m[M C M (3,4,5,6,9)]

$N - 1 = m180 \Rightarrow N - 1 = 180k \Rightarrow k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \quad N = 180K + 1 \qquad (\alpha)$$

Pero:

$$N = m7 \Rightarrow 180k + 1 = m7$$

$$m7 + 5k + 1 = m7 \Rightarrow 5k + 1 = m7$$

Para que N sea lo menor posible, k debe ser 4.

Sustituyendo k = 4 en (α):

$$N = 180(4) + 1 = 721$$

Rpta.: La suma pedida es: 7 + 2 + 1 = 10

11.-¿Cuántas cajas cúbicas de arista entre 70 cm y 130 cm se podrá utilizar para empaquetar 28 800 cajas de fósforos de dimensión 4cm, 5cm y 6cm?

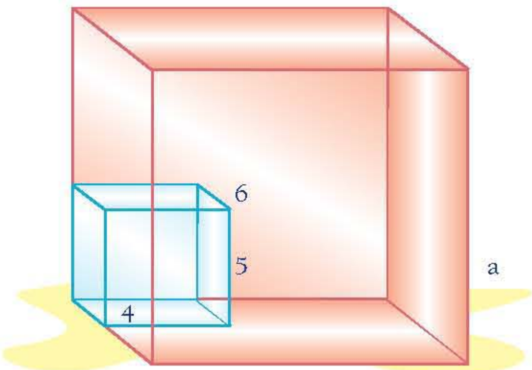
Solución:

Sea "a" la longitud de la arista del cubo; según enunciado debe ser 70 < a < 130

pero:

$$a = m4, m5, m6 \Rightarrow a = m60 \left\{ \begin{array}{l} 60 \\ 120 \\ 180 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \quad a = 120$



Para calcular cuántas cajas de fósforos entran en cada caja cúbica, se divide el volumen de la caja entre el volumen de una caja de fósforos.

$$\text{Volumen} = (\text{arista})^3$$

$$\#\text{ cajas de fósforo} = \frac{120\ .\ 120\ .\ 120}{4\ .\ 5\ .\ 6}$$

$$= 14\,400$$

$\Rightarrow$ Se necesitará:

$$\#\text{ cajas cúbicas} = \frac{28\,800}{14\,400} = 2$$

Rpta.: 2 cajas cúbicas.

12.- ¿Cuántos pares de números cumplen con la condición de que su MCM es 2 520 veces su MCD?

Solución:

Sean A y B los números:

MCD(A, B) = D

MCM(A, B) = Dq_1q_2 , q_1 y q_2 son primos entre sí.

$$\frac{\text{MCM (A, B)}}{\text{MCD (A, B)}} = \frac{Dq_1q_2}{D} = 2\,520$$

$$q_1 \cdot q_2 = 2^3\ .\ 3^2\ .\ 5\ .\ 7 = 8\ .\ 9\ .\ 5\ .\ 7$$

El número de combinaciones es:

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$$

Quitando las repeticiones es:

$$\frac{14}{2} = 7 \text{ combinaciones posibles.}$$

Rpta.: Existen 7 pares de números.

13.- Hallar dos números enteros sabiendo que su MCM es 864 y la suma de sus cuadrados es 55 872.

Solución:

Sean A y B los números buscados, tales que:

$$\text{MCM (A, B)} = 864 \qquad (1)$$

$$A^2 + B^2 = 55\,872 \qquad (2)$$

Por propiedad:

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{864}{q_1} \Rightarrow A^2 = \dfrac{(864)^2}{q_1^2} \\ B = \dfrac{864}{q_2} \Rightarrow B^2 = \dfrac{(864)^2}{q_2^2} \end{array}\right\} \quad (3)$$

(3) en (2):

$$\frac{(864)^2}{q_1^2} + \frac{(864)^2}{q_2^2} = (864)^2\left[\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\right] = 55\,872$$

cuya resolución implica que:

$$q_1^2 = 2^4 \Rightarrow q_1 = 4$$

$$q_2^2 = 3^4 \Rightarrow q_2 = 9$$

Reemplazando estos valores en (3):

$$A = \frac{864}{4} = 216$$

$$B = \frac{864}{9} = 96$$

Rpta.: 216 y 96

14.- Hallar dos números enteros, sabiendo que su suma es 8 veces su MCD y su producto es 840 veces su MCD.

Solución:

Sean A y B los números tales que:

$$\text{MCD (A, B)} = D$$

Por dato:

$$A + B = 8D \qquad (1)$$

$$A \;.\; B = 840\;D \qquad (2)$$

Por propiedad:

$$A = Dq_1 \;;\; B = Dq_2 \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$D(q_1 + q_2) = 8D$$

Como q_1 y q_2 son primos entre sí:

$$q_1 + q_2 = 8 \begin{cases} \begin{cases} q_1 = 7 \\ q_2 = 1 \end{cases} & (\alpha) \\ \begin{cases} q_1 = 5 \\ q_2 = 3 \end{cases} & (\beta) \end{cases}$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$A \;.\; B = D^2 \;.\; q_1 \;.\; q_2 = 840D$$

$$D = \frac{840}{q_1 \cdot q_2} \qquad (4)$$

(α) en (4):

$$D = \frac{840}{7\;.\;1} = 120$$

Este resultado en (3):

$$A = 120\;.\;7 = 840$$

$$B = 120\;.\;1 = 120$$

$\Rightarrow$ MCD (A, B) = 120

(β) en (4):

$$D = \frac{840}{3\;.\;5} = 56$$

Este resultado en (3):

$$A = 56\;.\;3 = 168$$

$$B = 56\;.\;5 = 280$$

$\therefore$ MCD (A, B) = 56

Rpta.: A = 168 y B = 280

15.- ¿En qué cifra termina el MCM de los números?

$$A = 7^{862} - 1 \;\text{ y }\; B = 7^{1293} - 1$$

Solución:

Como:

$$A = 7^{862} - 1 = (7^{431} - 1)\,(7^{431} + 1)$$

$$B = 7^{1\,923} - 1 = (7^{431} - 1)\,(7^{862} + \;7^{431} + 1)$$

Entonces:

$$MCM\;(A, B) = (7^{431} - 1)(7^{431} + 1)(7^{862} + 7^{431} + 1)$$

Pero, las potencias de 7 cíclicamente terminan en: 7, 9, 3, 1.

Si 432 es divisible por 4, y por lo tanto 7^{432} termina en 1; entonces, 7^{431} terminará en 3.

Del mismo modo, si 864 es divisible por 4 $\Rightarrow 7^{864}$ termina en 1; entonces, 7^{862} terminará en 9 (2 posiciones antes en el ciclo de potencias de 7)

$$\therefore\; MCM\;(A, B) = \left(\overline{\ldots 3} - 1\right)\left(\overline{\ldots 3} + 1\right)$$

$$\left(\overline{\ldots 9} + \overline{\ldots 3} - 1\right) = \left(\overline{\ldots 2}\right)\left(\overline{\ldots 4}\right)\left(\overline{\ldots 1}\right) = \ldots 8$$

Rpta.: El MCM (A, B) termina en la cifra 8.

16.- La distancia entre dos líneas de una vereda es 1,20m. Si se empieza a caminar pisando la raya con velocidad de 3 m/s y 75cm de longitud de paso. ¿Cuánto tiempo se debe caminar hasta pisar la raya por 34ava. vez, si se empezó a caminar con la derecha?.

Solución:

Pisará la raya dada cada:

$$MCM\;(75, 120) = 600\text{ cm}$$

O sea cada: $\frac{600}{75} = 8$ pasos.

Como empezó pisando la raya, pisará por 34ava. vez la raya, luego de:

$$33\;.\;8 = 264\text{ pasos}$$

Pisará la última raya con la izquierda, luego de:

$$\frac{264\;.\;0{,}75\text{m}}{3\text{m/s}} = 66\text{s}$$

Rpta.: 66 segundos.

17.- El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se cuenta de 2 en 2 sobra 1, de 3 en 3 sobra 2, de 5 en 5 sobra 4, y de 7 en 7 sobra 6. ¿Cuantas páginas tiene el libro?

Solución:

Hagamos la contabilidad en el orden del enunciado del problema.

En el primer caso:

$$m2 + 1 = m2 + 2 - 1 = m2 - 1$$

En el segundo caso:

$$m3 + 2 = m3 + 3 - 1 = m3 - 1$$

En el tercer caso:

$$m5 + 4 = m5 + 5 - 1 = m5 - 1$$

En el cuarto caso:

$$m7 + 6 = m7 + 7 - 1 = m7 - 1$$

Por tanto, el único común múltiplo de 2, 3, 5 y 7 comprendido entre 400 y 500 es 420; por lo que disminuido en una unidad da 419.

Rpta.: 419 páginas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Aplicando el algoritmo de Euclides, hallar el MCD (6 188 y 4 709).

   Rpta.: 17

2. Hallar el MCD (81 719, 52 003, 33 649 y 30 107).

   Rpta.: 23

3. Dos números menores que 300 tienen como producto 60 000 y como MCD a 10. Hallar la suma de ellos.

   Rpta.: 490

4. El MCD de dos números es 6, se desea saber cuales son estos números, sabiendo que los cocientes sucesivos que se obtienen al hallar el MCD son: 18, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3 y 3.

   Rpta.: 19 104 y 1 026

5. Hallar 2 números enteros, sabiendo que su producto es 420 veces su MCD y que la suma de sus cuadrados es 21 364.

   Rpta.: 140 y 42

6. Dos números A y B tienen 6 divisores cada uno, su MCM y su MCM tiene los mismos factores primos. Si A se triplica y B se duplica el MCM no se altera. Hallar el MCM.

   Rpta.: 36

7. Determinar dos números cuya diferencia de cuadrados vale 7 344 y el MCD de ellos 12.

   Rpta.: 312 y 300; 120 y 84

8. Hallar 2 números enteros, sabiendo que su suma es 8 veces su MCD y su producto es 840 veces su MCD.

   Rpta.: 840 y 120; 168 y 280

9. El número de páginas de un libro está comprendido entre 850 y 950. Si se cuentan sus páginas de 12 en 12 sobran 5, de 15 en 15 sobran 8, y de 18 en 18 sobran 11. Hallar el número de páginas del libro.

   Rpta.: 893 páginas.

10. ¿En qué cifra termina el MCM de los números:

    $A = 7^{862} - 1$ y $B = 7^{1293} - 1$?

    Rpta.: Termina en 4

11. Un móvil se desplaza a velocidad constante, recorriendo primero a 360 km y luego 480 km.

Si el MCM de los tiempos empleados es 96 horas. ¿Cuántas horas se ha demorado en total?

Rpta.: 56 horas

12. Un comerciante compra manzanas a S/. 2,50 cada una, se da cuenta que si las vende a S/. 2,60 a S/. 2,54 ó 2,64 cada una ganaría en todos los casos un número entero de soles. ¿Cuántas manzanas compró, si gastó menos de S/. 500?

Rpta.: 100 manzanas

13. El cociente que se obtiene al dividir la suma de dos números por su MCD es 8, el cociente de su producto por dicho MCD es 840, y se sabe además que su diferencia es menor que 200. Uno de ellos es:

Rpta.: 120

14. Dos números menores que 200 tienen como MCD 28 y el producto entre ellos es 32 928 el mayor de ellos es:

Rpta.: 196

15. Encontrar 3 números enteros A, B y C en base 12, si:

MCD (A, B) = $15_{(12)}$; MCD (B, C)= $15_{(12)}$

MCD (A, C) = $15_{(12)}$

Además: MCM (A, B, C,) = 1 $049_{(12)}$ y

$$A + B + C = 193_{(12)}$$

Rpta.: $43_{(12)}$; $71_{(12)}$; $9_{(12)}$

16. Hallar la suma de 2 números enteros sabiendo que su producto es 4 032 y que:

$$(MCD)^2 \; . \; MCM = 48\,384$$

Rpta.: 132

17. Hallar 2 números tales que la suma de los cuadrados es 10 530 y el MCM de los números es 297.

Rpta.: 27 y 99

18. ¿Cuántos pares de números hay tales que cumplan las siguientes condiciones:

MCM(A, B) = MCD2(A, B) = 1 089?

Rpta.: 2

PROBLEMAS PROPUESTOS CON ALTERNATIVAS

1. 3 cuerdas tienen una longitud de 120 dm cada una. Existen nudos en cada una de ellas desde el principio, en determinados puntos, que dividen las cuerdas en 30, 24 y 40 partes iguales sucesivamente. ¿Cuántos puntos de anudamiento existen en coincidencia en las 3?

a) 4 b) 7 c) 3 d) 5 e) 8

2. Si en una factoría el importe de los salarios es de 13 202 soles y en otra de 146 090 soles y cada hombre recibe el mismo salario. ¿Cuántos hombres hay en cada factoría si el salario es el mayor posible?

a) 46 y 509 b) 40 y 509 c) 46 y 508

d) 42 y 509 e) 40 y 519

3. Se divide A . B y el cociente resulta exacto e igual al cuadrado de su MCD.

Si MCD(A, B) + MCM (A, B) = 520. Hallar B.

a) 6 b) 8 c) 11 d) 14 e) 18

4. Hallar: A . B

Si MCM(42A, 6B) = 8 064 y MCD(77A, 11B) = 88

a) 1 760 b) 1 536 c) 3 456

d) 4 096 e) 5 120

5. ¿Cuántos divisores simples tiene el mayor número de 4 cifras, divisible por 14, 18 y 20 a la vez?

a) 2 b) 3 c) 54 d) 27 e) 3

6. Dos números menores que 200 tienen como MCD 28 y el producto entre ellos es 32 928; el mayor de ellos es:

a) 196 b) 198 c) 168

d) 184 e) 199

7. El MCD de dos números es 36 y su MCM 5 148. Si los dos son menores que 500, su suma es:

a) 942 b) 864 c) 760

d) 818 e) 996

8. Hallar el menor número tal que al dividírsele por 5, 7, 12 ó 18 dé un resto común que sea el mayor posible.

a) 1 322 b) 2 138 c) 2 524

d) 3 684 e) 5 128

9. Hallar el valor de "a" sabiendo que:
MCM $(\overline{ab}, \overline{(a+1)(B+1)}) = 132$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

10. El MCM de dos números es el cociente de dividir su producto por su MCD.

Todo divisor común de varios números lo es de su MCM

Todo múltiplo del MCD lo es de su MCM.

a) VVF b) VVV c) VFV

d) FFV e) VFF

11. El MCD de dos números es 12 y el MCM de ellos es 5 040. Determinar dichos números. El número de soluciones de este problema es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 11

12. Hallar la suma de dos números tales que la suma de su MCM y MCD es 92 y el cociente del MCD entre el MCM es 1/45.

a) 28 b) 38 c) 26 d) 36

e) N. A.

13. Al calcular el MCD de 2 números A y B; por el método del algoritmo de Euclides se observó que los dos primeros residuos fueron 98 y 32, además la suma de los cocientes sucesivos fue 33; si el número A es el mayor posible, ¿Cuál es su valor?

a) 1 404 b) 4 788 c) 2 514

d) 5 124 e) 7 394

14. Hallar la suma de 2 números sabiendo que su diferencia es 13 y la diferencia del MCM y MCD es 143.

a) 78 b) 91 c) 104

d) 130 e) 65

15. Hallar la suma de todos los números tales que la suma de su MCD es 92 y el cociente del MCD y MCM es 1/45.

a) 120 b) 92 c) 80 d) 52 e) 28

16. En una avenida que posee cuadras de 100m cada una, se desea plantar árboles de manera que en cada cuadra la distancia entre árbol sea igual y el número de árboles diferente. Al cabo de 9 cuadras, ¿cuántos árboles se habrán plantado (a ambos lados de la avenida)?

a) 452 b) 434 c) 218

d) 336 e) 226

17. El MCM de 2 números que se diferencian en 10 unidades es 2 415. Hallar la cifra de las decenas del menor número.

a) 0 b) 1 c) 5 d) 7 e) 2

18. El MCM de 2 números es 336 y la suma de sus cuadrados es 5 440. Hallar la diferencia de dichos números.

a) 8 b) 32 c) 64 d) 48 e) 60

19. El MCM de cuatro números consecutivos es 5 460. Hallar la suma de los dígitos del menor de los números si éste es m3.

a) 2 b) 3 c) 5 d) 72 e) 8

20. Un señor cuenta su dinero en soles. Si lo cuenta de 5 en 5 le sobran 3; de 6 en 6 le sobran 4; de 7 en 7 le sobran 5, pero si lo cuenta de 8 en 8 no le sobra nada. ¿Cuánto tenía, si la cantidad estaba comprendida entre 3 000 y 4 000?

a) 3 268 b) 3 568 c) 3 560

d) 3 528 e) 5 418

21. Dos números cuyo M C D es 10 se suman y se obtiene 100; si la diferencia es menor que 50. ¿Cuál es el mayor de dichos números?

a) 70 b) 60 c) 80

d) 90 e) Faltan datos

22. Se desea sembrar todo un terreno rectangular con árboles equidistantes entre sí. Si las dimensiones del terreno son 540 y 750m. Hallar cuántos árboles se necesitarán sabiendo que hay uno en cada esquina y que la distancia entre árbol y árbol está comprendido entre 12 y 20m.

a) 1 887 b) 1 800 c) 2 401

d) 1 600 e) N. A.

23. La M.a. de dos números es 49,5; además su MCD es 9. ¿Cuántos pares de números cumplen tales condiciones?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) A	3) C	4) B	5) A
6) A	7) B	8) C	9) C	10) D
11) E	12) B	13) D	14) B	15) B
16) B	17) A	18) D	19) B	20) B
21) A	22) A	23) E		

FRACCIONES ORDINARIAS O QUEBRADOS

Una fracción, llamada también número fraccionario o número quebrado, expresa la medida de una magnitud que contiene exactamente una o varias partes iguales de la unidad fraccionada.

Pertenece al conjunto de números racionales no enteros y está formada por dos números o términos separados por una linea horizontal u oblícua. Así la fracción $\frac{5}{8}$ ó 5/8 expresa que la unidad se ha dividido en ocho partes iguales, de las cuales se ha tomado 5 cualesquiera.

En general:

El número debajo de la raya se llama el **denominador** e indica en cuántas partes iguales ha sido dividida la unidad entera.

El número sobre la raya se llama **numerador** e indica en cuántas partes iguales de la unidad dividida han sido tomadas.

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

1. Por la comparación de sus términos

Una fracción puede ser:

a) Propia: aquella cuyo valor es menor que la unidad. La condición necesaria y suficiente para que una fracción sea propia, es que el numerador sea menor que el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{3}{6}, \frac{7}{11}, \frac{3}{7}$$

En general: $\frac{m}{n} < 1 \Rightarrow m < n$

b) Impropia: aquella cuyo valor, es mayor que la unidad. La condición necesaria y suficiente para que una fracción sea impropia, es que el numerador sea mayor que el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{5}{3}, \frac{11}{7}, \frac{7}{3}, \frac{3}{2}$$

En general: $\frac{m}{n} > 1 \Rightarrow m > n$

c) Fracción igual a la unidad: aquella cuyo numerador y denominador son iguales.

Ejemplos:

$$\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{a+b}{a+b}$$

En general: $\frac{m}{n} = 1 \Rightarrow m = n$

2. Por su denominador

Las fracciones pueden ser:

a) Ordinarias o Comunes.- Son aquellas cuyo denominador es diferente a una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{35}, \frac{11}{2}$$

En general: $\frac{a}{b} \Rightarrow b \neq 10^n$

b) Decimales.- Son aquellas cuyo denominador es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{8}{100}, \frac{37}{1\,000}$$

En general: $\frac{a}{b} \Rightarrow b = 10^n$

3. Por comparación de los denominadores

Pueden ser:

a) Homogéneas.- Son aquellas cuyos denominadores son iguales.

Ejemplos:

i) $\frac{3}{4}, \frac{17}{4}, \frac{11}{4}, \frac{1}{4}$ (4 es El denominador común)

ii) $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$

b) Heterogéneas.- Son aquellas cuyos denominadores son diferentes.

Ejemplos:

i) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$

ii) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{11}, \frac{6}{2}$

c) Reductibles.- Son aquellas cuyo numerador y denominador tienen algún divisor común distinto de uno (esta fracción se puede simplificar).

Ejemplos:

i) $\frac{8}{16} \Rightarrow \frac{8}{16} = \frac{2 . 2 . 2}{2 . 2 . 2 . 2} = \frac{1}{2}$

ii) $\frac{3}{21} \Rightarrow \frac{3}{21} = \frac{3}{3 . 7} = \frac{1}{7}$

d) Irreductibles.- Son aquellas cuyos términos son primos entre sí.

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{27}{4}$$

e) Equimúltiplos.- Se dice que una fracción es equimúltiplo de otra cuando el numerador y el denominador de la primera contiene el mismo número de veces, al numerador y al denominador de la segunda, respectivamente.

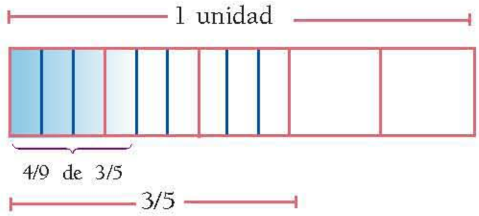
Ejemplos:

i) $\frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{16}{32} = \frac{1 . 16}{2 . 16}$

ii) $\frac{24}{15} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{24}{15} = \frac{8 . 3}{5 . 3}$

f) Fracción de fracción.- Se llama así a las partes consideradas de una fracción que se ha dividido en partes iguales. Así: 4/9 de 3/5, indica que la fracción 3/5 se ha dividido en 9 partes iguales, de las cuales se considera 4.

Graficando:



CONVERSIÓN DE FRACCIONES HETEROGÉNEAS A HOMOGÉNEAS

Para convertir varias fracciones a otras con un denominador común, se halla el MCM de los denominadores y éste será el denominador común de las mismas. Luego, se multiplica cada numerador por el cociente resultante de dividir el referido MCM entre su denominador correspondiente.

Ejemplos:

i) Homogenizar las siguientes fracciones:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \qquad (1)$$

Solución:

Hallaremos el MCM de b, d, f. Consideremos que:

$$\text{MCM } (b, d, f) = M$$

La expresión (1) no se altera si multiplicamos y dividimos a cada fracción por un número cualquiera; por lo que es equivalente a:

$$\left.\frac{a \cdot \frac{M}{b}}{b \cdot \frac{M}{b}}, \frac{c \cdot \frac{M}{d}}{d \cdot \frac{M}{d}}, \frac{e \cdot \frac{M}{f}}{f \cdot \frac{M}{f}}\right\} \text{ son iguales a: } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$$

ii) Homogenizar:

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{1}{7} \qquad (1)$$

Solución:

MCM (5,4,7) = 140 si reemplazamos en (1)

$$\frac{3 \cdot \frac{140}{5}}{5 \cdot \frac{140}{5}}, \frac{7 \cdot \frac{140}{4}}{4 \cdot \frac{140}{4}}, \frac{1 \cdot \frac{140}{7}}{7 \cdot \frac{140}{7}}$$

que es equivalente a:

$$\frac{84}{140}, \frac{245}{140} \cdot \frac{20}{140}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción es hallar otra equivalente a ella, pero con términos de menor valor, dividiendo sucesivamente numerador y denominador por un factor común.

Ejemplo:

Simplificar $\frac{8}{16}$

$$\frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Para lograrlo se han dividido sucesivamente numerador y denominador por 2.

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para realizar estas operaciones es necesario que las fracciones sean homogéneas y en caso de no serlo se hará la homogenización respectiva.

Demostración:

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{b} + \frac{r}{b} = \frac{a+p+r}{b}$$

$$\text{Denominemos} \begin{cases} \frac{a}{b} = C_1 \Rightarrow a = b\ C_1 \\ \frac{p}{b} = C_2 \Rightarrow p = b\ C_2 \\ \frac{r}{b} = C_3 \Rightarrow r = b\ C_3 \end{cases}$$

Sumando: $a + p + r = b\ (C_1 + C_2 + C_3)$

Dividiendo ambos entre b:

$$\frac{a+p+r}{b} = C_1 + C_2 + C_3$$

es decir:

$$\frac{a+b+r}{b} = \frac{a}{b} + \frac{p}{b} + \frac{r}{b}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar fracciones basta multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{a \cdot p \cdot r}{b \cdot q \cdot s}$$

Demostración:

Sea:

$$\frac{a}{b} = q_1 \Rightarrow a = b \cdot q_1$$

$$\frac{p}{q} = q_2 \Rightarrow p = q \cdot q_2$$

$$\frac{r}{s} = q_3 \Rightarrow r = s \cdot q_3$$

Multiplicando: $a \cdot p \cdot r = b \cdot q \cdot s \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$$\frac{a \cdot p \cdot r}{b \cdot q \cdot s} = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \Rightarrow \frac{a \cdot p \cdot r}{b \cdot q \cdot s} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones, basta multiplicar el quebrado ***dividendo***, por el quebrado ***divisor*** invertido.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Demostración:

$$\frac{A}{B} = k_1 \rightarrow A = Bk_1 \qquad (1)$$

$$\frac{C}{D} = k_2 \rightarrow A = Dk_2 \qquad (2)$$

Dividendo (1) : (2)

$$\frac{A}{C} = \frac{Bk_1}{Dk_2}$$

o:

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{D}{B} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{D}{B} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$$

o:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D}$$

DIVISIBILIDAD DE FRACCIONES

Dados dos números A y B fraccionarios, se dice que A es múltiplo de B ó que B es divisor de A cuando el cociente de A entre B es un entero C.

La condición necesaria y suficiente para que el quebrado A sea múltiplo del quebrado B o que el quebrado B sea divisor del quebrado A, es que al expresar ambas cantidades, como fracciones irreductibles, el numerador de A sea múltiplo del numerador de B y el denominador de A sea divisor del denominador de B.

Así por ejemplo, 3/2 es divisible por 1/4 ya que:

$$\frac{3}{2} : \frac{1}{4} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (entero);}$$

se verifica que: $3 = \text{m}1$; $4 = \text{m}2$

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

1ra Propiedad.- Si a cada uno de los dos términos de un quebrado propio se le suma una misma cantidad, el quebrado aumenta de valor.

Sea $\frac{P}{Q}$ un quebrado propio / $P < Q$:

$$\frac{P + C}{Q + C} > \frac{P}{Q}$$

Demostración:

Consideremos que $P < Q$ en R unidades $\Rightarrow P + R = Q$. Podemos establecer.

$$\frac{P + R}{Q} = \Rightarrow \frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = 1 \qquad (1)$$

También: $(P + C) < (Q + C)$, en R unidades:

$$\Rightarrow (P + C) + R = (Q + C) \Rightarrow \frac{(P + C) + R}{Q + C} = 1$$

$$\frac{(P + C)}{Q + C} + \frac{R}{Q + C} = 1 \qquad (2)$$

Analizando (1) y (2) observamos que el quebrado:

$\frac{R}{Q + C}$, de (2), es menor que el quebrado $\frac{R}{Q}$ de (1); y por tanto, el primero necesita una cantidad mayor que el segundo para ser igual a uno.

Por consiguiente: $\frac{P + C}{Q + C} > \frac{P}{Q}$

Ejemplo:

$$\frac{5 + 4}{9 + 4} > \frac{5}{9}$$

o:

$$\frac{9}{13} > \frac{5}{9}$$

A fin de comparar ambos quebrados, hallemos el común denominador:

$$\frac{81}{117} > \frac{65}{117}$$

2da Propiedad.- Si a los dos términos de un quebrado impropio se les aumenta una misma cantidad el quebrado disminuye de valor.

Sea $\frac{A}{B}$ un quebrado impropio / $A > B$:

$$\frac{A + P}{B + P} < \frac{A}{B}$$

Demostración:

Consideremos A > B en "n" unidades, entonces:

$$A - n = B \; ; \quad \frac{A-n}{B} = 1 \; ; \quad \frac{A}{B} - \frac{n}{B} = 1$$

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{n}{B} \qquad (1)$$

También: (A + P) > (B + P) en "n" unidades, entonces:

$$(A + P) - n = B + P \Rightarrow \frac{(A + P) - n}{(B + P)} = 1$$

$$\frac{A + P}{B + P} - \frac{n}{B + P} = 1 \Rightarrow - \frac{A + P}{B + P} = 1 + \frac{n}{B + P} \quad (2)$$

analizando (1) y (2), observamos que el sumando:

$\frac{n}{B + P}$ de (2) es menor que $\frac{n}{B}$ de (1)

y por lo tanto, la suma (2) es menor que la suma (1), es decir:

$$\frac{A + P}{B + P} < \frac{A}{B}$$

3ra Propiedad.- Si dos fracciones son iguales, y la primera de ellas es irreductible, la segunda es equimúltiplo de la primera.

Sean $\frac{n}{d} = \frac{a}{b}$, dos quebrados iguales

$\frac{n}{b}$ es irreductible (porque "n" y "d" son primos entre sí)

Entonces: a y b contienen a n y d, respectivamente, el mismo número de veces.

Demostración:

$$\text{De} : \frac{n}{d} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \frac{b \, . \, n}{d} \qquad (1)$$

Como "a" es un número entero: "d" divide a "bn" y siendo "d" primo con "n". "d" divide a "b":

$$\frac{b}{a} = k \text{ (entero)} \Rightarrow b = d \, . \, k \qquad (2)$$

$$\text{(2) en (1):} \quad a = \frac{d \, . \, k \, . \, n}{d} \Rightarrow a = k \, . \, n \qquad (3)$$

De (2) y (3) observamos que las veces que "n" está contenida en "a" son las mismas que "d" esta contenida en "b".

Por consiguiente $\frac{a}{b}$ es equimúltiplo de $\frac{n}{a}$

MAXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS QUEBRADOS

Teorema.- El MCD de varios quebrados irreductibles se obtiene dividiendo el MCD de los numeradores por el MCM de los denominadores.

Sea:

$\frac{a}{b}$ el MCD de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ (quebrados irreductibles).

Entonces:

a = MCD (p , r) ; b = MCM de (q , s)

Demostración:

Por definición: $\frac{a}{b}$ es la mayor expresión posible

$\frac{a}{b}$ está contenida en $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ un número entero

un número entero de veces.

$$\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \text{número entero} \Rightarrow \frac{p}{q} \cdot \frac{b}{a} = \text{número entero} \quad (1)$$

$$\frac{r}{s} : \frac{a}{b} = \text{número entero} \Rightarrow \frac{r}{s} \cdot \frac{b}{a} = \text{número entero} \quad (2)$$

Analizando (1) y (2) observamos que, siendo los quebrados irreductibles, para que dichas expresiones se cumplan es necesario que: los términos de "a" se simplifiquen con p y r; y los términos q y s, con el término "b". Es decir:

a = común divisor de p y s

b = múltiplo común de q y r   (3)

Como a/b debe ser la mayor expresión posible, deducimos que "a" debe ser lo más grande posible, y "b" lo más pequeña posible; por lo tanto, de (3):

a = MCD de p y r ; b = MCM de q y s

Ejemplo:

Hallar el MCD de: $\frac{15}{4}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{3}{8}$

$$\frac{\text{MCD }(15, 5, 3)}{\text{MCM}(4, 9, 8)} = \frac{1}{72}$$

MINIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS QUEBRADOS

Teorema.- El MCM de varios quebrados irreductibles, se obtiene dividendo el MCM de los numeradores por el MCD de los denominadores.

Sea $\frac{x}{y}$ el MCM de:

$$\frac{n}{d} \wedge \frac{r}{s} \text{ (quebrados irreductibles)}$$

Entonces:

x = MCM de "n" y "r" $\wedge$ y = MCD de "d" y "s"

Demostración:

Por definición de MCM:

$\frac{x}{y}$ es la menor expresión posible que contiene un número exacto de veces a:

$$\frac{n}{d} \wedge \frac{r}{s}$$

Además:

$$\frac{x}{y} : \frac{n}{d} = \text{\# entero} \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{d}{n} = \text{\# entero} \quad (1)$$

También:

$$\frac{x}{y} : \frac{r}{s} = \text{\# entero} \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{s}{r} = \text{\# entero} \quad (2)$$

Analizando las expresiones (1) y (2) observamos que los términos "n" y "r" deben simplificarse con los términos "x", y los términos "y", con los términos "d" y "s". Por lo tanto:

$$x = \text{MCM }(n, r) \ ; \ y \ \text{ MCD }(d, s) \quad (3)$$

Según definición x/y es lo menor posible y para ello se requiere que "x" sea lo más pequeño posible e "y" sea lo más grande posible.

x = MCM de "n" y "r"   y = MCD de "d" y "s"

Notas

1.- Dadas 2 ó más fracciones homogéneas, la mayor de las fracciones es aquella que tiene el mayor numerador.

Ejemplo:

Dados:

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8} \text{ y } \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$$

Por lo tanto, para averiguar cuál de varias fracciones heterogéneas es la mayor, basta con homogenizar las fracciones y realizar la comparación.

2.- Dadas dos o más fracciones con numerador común, será mayor la que posee el menor denominador.

Ejemplos:

$$\frac{3}{7}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{3}{2}$$

Demostraremos que la mayor es 3/2, para ello bastará con homogenizar, (dar común denominador a) las fracciones.

$$\frac{3}{7} = \frac{30}{70} \ ; \ \frac{3}{5} = \frac{42}{70} \ ; \ \frac{3}{2} = \frac{105}{70}$$

Donde:

$$\frac{105}{70} > \frac{42}{70} > \frac{30}{70} \Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{3}{5} > \frac{3}{7}$$

3.- Toda fracción cuyos términos son primos entre sí, es irreductible.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}, \frac{2}{13}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

> Nota: En operaciones con quebrados la palabra "de" debe entenderse como "por", pues se trata de una "fracción de fracción".

1.- La capacidad de una botella es 3/4 de litro. Calcular los litros que contiene cuando se llenan los 5/8.

Solución:

$$\frac{5}{8} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32} \text{ litros}$$

Rpta.: $\frac{15}{32}$ litros.

2.- Disminuir 121 en sus 9/11

Solución:

Bastará calcular los $\frac{2}{11} = \frac{11}{11} - \frac{9}{11}$ de 121

$$\frac{2}{11} \text{ de } 121 = \frac{2}{11} \cdot 121 = 22$$

Rpta.: 22

3.- Disminuir 3/4 en sus 5/9

Solución:

Si de una cantidad cualquiera se sustrae 5/9 queda los 4/9

Bastará calcular los 4/9 de 3/4

$$\frac{4}{9} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

Rpta.: $\frac{1}{3}$

4.- Aumentar 90 en sus 2/9

Solución:

Toda cantidad contiene sus 9/9. Si a esta cantidad se le agrega 2/9 se obtendrá 11/9. Bastará calcular 11/9 de 90.

$$\frac{11}{9} \text{ de } 90 = 11 \cdot \frac{90}{9} = \frac{990}{9} = 110$$

Rpta.: 110

5.- Aumentar 3/5 en sus 2/3

Solución:

$$\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Habrá que hallar los 5/3 de 3/5

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$$

Rpta.: 1

6.- Simplificar:

$$\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} : \frac{3}{10} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6}}{\left(\frac{6}{15} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{7}{12}\right)} \cdot 2\,\frac{3}{4} : \frac{1}{3}$$

Solución:

Se opera paso a paso:

$$\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6}}{\frac{12 + 5 - 6}{30} \cdot \frac{24 + 16 - 21}{36}} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{1}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{6}}{\frac{11}{30} \cdot \frac{19}{36}} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{\frac{18 + 4 - 3}{18}}{\frac{11}{30} \cdot \frac{19}{36}} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{1}$$

$$= \frac{19}{18} \cdot \frac{30}{11} \cdot \frac{36}{19} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{1} = 45$$

Rpta.: 45

7.- Simplificar:

$$\frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7} : \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \cdot 0{,}6 - \frac{1}{2} : \frac{3}{5}}{\left(30 : \frac{7}{5} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 0{,}4\right)} \cdot \left[11^2 + \frac{2}{5}\right]$$

Solución:

Los decimales se transforma a quebrados y se ejecuta operaciones paso a paso:

$$\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}}{\left(30\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{10}\right)}\cdot\left[121+\frac{2}{5}\right]$$

$$\frac{\frac{80+63-140}{168}}{\frac{600+7}{280}}\cdot\frac{607}{5}=\frac{3\,.\,280}{168\,.\,607}\cdot\frac{607}{5}=1$$

Rpta.: 1

8.- En un cajón había cierta cantidad de soles. Un niño retiró S/. 1,00; en seguida su hermano retiró 1/3 del resto, el otro hermano 1/2 de lo que aún queda y finalmente el hermano mayor se llevó 1/11 de lo que aún había. Determinar cuantos soles había en el cajón; si el padre de ellos encontró sólo S/. 30,00

Solución:

- Retirando el niño S/. 1,00 quedo en el cajón N soles.
- Su hermano cogió 1/3 de N; entonces: 2/3 N quedó.
- El otro hermano tomó 1/2 de 2/3 N;

  quedó $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\text{ N}=\frac{1}{3}\text{ N}$

- Finalmente el hermano mayor cogió

  $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3}$ N de lo que había.

Finalmente quedó: $\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{3}\text{N}=\frac{10}{33}\text{N}$

Según dato, lo que quedó era S/. 30,00; o sea:

$$\frac{10}{33}\text{N}=30\ \Rightarrow\ \text{N}=\frac{30\,.\,33}{10}=99$$

En el cajón había: S/. 99 + S/. 1 = S/. 100

Rpta.: S/. 100,00.

9.- La fracción 2 727/1 616 ¿Puede reducirse a fracción decimal equivalente?. En caso afirmativo, efectuar la reducción.

Solución:

Tenemos:

2 727 = 2 700 + 27 = 27(100 + 1) = 27 . 101

1 616 = 1 600 + 16 = 16(100 + 1) = 16 . 101

Luego: $\frac{2\,727}{1\,616}=\frac{27\,.\,101}{16\,.\,101}=\frac{27}{16}$

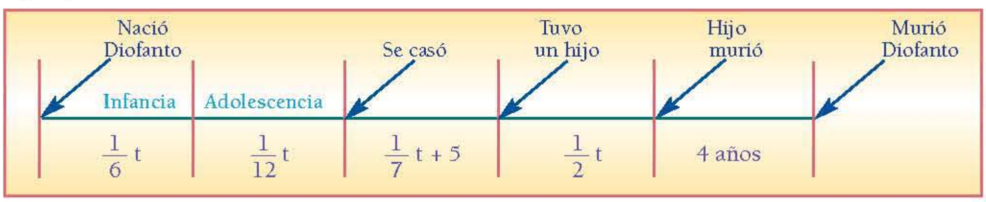
Como: $16 = 2^4$, la fracción 2 727/1 616 es igual a una fracción decimal de cuatro cifras decimales.

Rpta.: $\frac{27}{16}=1{,}6875$

10.- Diofanto vivió la sexta parte de su vida en la infancia; 1/12 en la adolescencia; se casó y luego de pasar un tiempo igual a 1/7 de su vida más 5 años, tuvo un hijo que vivió la mitad de los años que su padre vivió y murió 4 años antes que él. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

Solución:

Sea "t" el tiempo que vivió Diofanto.



$$\frac{1}{6}t+\frac{1}{12}t+\frac{1}{7}t+5+\frac{1}{2}t+4=t \qquad \frac{14t+7t+12t+42t}{84}+9=t \qquad 75t+756=84t$$

Rpta.: Vivió 84 años

11.- Un tanque puede ser llenado por una bomba en 5 horas y por una segunda bomba en 4 horas. Si una válvula, en el fondo, puede descargar el líquido en 10 horas. Determinar el tiempo que demoraría en llenarse si funcionan a la vez las 2 bombas y la válvula.

Solución:

En una hora:

la 1ra. bomba llena 1/5 del tanque

la 2da. bomba llena 1/4 del tanque

la válvula descarga 1/10 del tanque

Luego, en una hora funcionando las 2 bombas y la válvula se llena:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{4+5-2}{20} = \frac{7}{20} \text{ tanque}$$

Usando regla de 3 simple:

1h ——— 7/20 tanque

xh ——— 20/20 tanque

$$x = \frac{20/20}{7/20} \rightarrow x = 20/7$$

Luego todo el tanque se llenará en:

$$\frac{20}{7} \text{ h} = 2\frac{6}{7} \text{ h}$$

Rpta.: $2 \text{ h} \frac{6}{7}$ ó 2h 51 min 25,7 s.

12.- Un operario se compromete a hacer una obra en 2 2/5 días, un segundo operario en 3 días y un tercer operario en 4 días. Se contrata a los tres operarios para que hagan la obra trabajando a la vez. ¿Cuánto tiempo deben tardar?

Solución:

El 1° obrero hace la obra en 22/5 días = 12/5 días
En un día hará 5/12 de la obra.

El 2° obrero hace la obra en 3 días. En 1 día hará 1/3 de la obra.

El 3° obrero hace la obra en 4 días. En 1 día hará 1/4 de la obra.

Luego juntos; en 1 día hacen:

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} = 1$$

Rpta.: Los tres juntos terminan la obra en 1 día.

13.- Un tanque tiene 2 grifos, uno lo llena en 3 horas y el otro en 5 horas; se deja abierto el primero durante $1^1/3$ hora, después el segundo durante 3/4 hora y enseguida se dejan abiertos los dos. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar el estanque?

Solución:

El primer grifo llena el tanque en 3 horas.

$\therefore$ En 1h llena $\frac{1}{3}$ tanque

El segundo grifo llena el tanque en 5 horas.

$\therefore$ En 1h llena 1/5 tanque

El 1° en $1\frac{1}{3}$ h o sea en $\frac{4}{3}$ h llena:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \text{ tanque}$$

El 2° en $\frac{3}{4}$ h llena: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ tanque

Se ha llenado hasta ahora:

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{20} = \frac{107}{180} \text{ del tanque}$$

Falta llenar: $\frac{180}{180} - \frac{107}{180} = \frac{73}{180}$ del tanque.

Juntos los 2 grifos llenan en una hora:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \text{ de tanque}$$

Por regla de 3:

1h $\longrightarrow$ 8/15 de tanque

x $\longrightarrow$ 73/180 de tanque

$$x = \frac{73}{96} \text{ h}$$

Rpta.: Tardará 45 min 37,5s.

14.- Después de haber perdido sucesivamente los 3/8 de su fortuna, 1/9 del resto y los 5/12 del nuevo resto, una persona gana S/. 284 900 y de este modo la pérdida queda reducida a 1/3 de la fortuna primitiva. ¿Cuál es aquella fortuna?

Solución:

Sea F la fortuna primitiva.

Después de la tercera pérdida le queda:

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot F = \frac{35}{108} \cdot F$$

Como gana 284 900, tendrá: $\frac{35}{108}$ F + 284 900

Esto es igual a la fortuna que tenía, menos 1/3 de la fortuna que perdió:

$$\frac{35}{108} F + 284\,900 = F - \frac{1}{3} F = \frac{2}{3} F$$

$$284\,900 = \frac{2}{3} F - \frac{35}{108} F$$

$$F = \frac{284\,900 \, . \, 108}{37} = 831\,600$$

Rpta.: La fortuna ascendía a S/. 831 600

15.- Si un jugador en su primer juego pierde 1/3 de su dinero; en el segundo pierde 1/4 del resto y en el tercero pierde 1/5 del nuevo resto. ¿Qué fracción del dinero que tenía originalmente le ha quedado?

Solución:

S (inicial) → pierde 1/3 de S

quedan 2/3 de S → pierde 1/4 del resto

quedan 3/4 de 2/3 de S → pierde 1/5 del resto

quedan 4/5 de 3/4 de 2/3 de S =

4/5 . 3/4 . 2/3 . S = 2/5 de S

Rpta.: 2/5 de S.

16.- ¿Qué hora será cuando las manecillas del reloj se encuentren superpuestas entre las 3 y las 4?

Solución:

Siendo las 3h, están superpuestas cuando el minutero descuente las 15 divisiones (minutos) que le lleva de ventaja el horario.

Velocidad del minutero = 60 divisiones / h

Velocidad del horario = 5 divisiones / h

Por lo tanto, la diferencia de velocidades:

60 - 5 = 55 div/h

55 div. le descuenta en 1 hora

1 div. le descuenta en $\frac{1}{55}$ hora

15 div. le descuenta:

15 . 1/55 = 3/11 h = 16'21 9/11s

Rpta.: Será las 3 horas 16 minutos 21,81 segundos.

17.- Un recipiente se llena con 6 litros de vino. Se consume 1/3 del contenido y se vuelve a llenar con agua. Luego se consume 2/5 del contenido y se vuelve a llenar con agua y por último se consume los 3/8 del contenido y se vuelve a llenar con agua. ¿Qué cantidad de vino contiene un litro de esta última mezcla?.

Solución:

La cantidad de vino puro que va quedando es:

Retira	Queda
1/3	2/3
2/5	3/5 . 2/3
3/8	5/8 . 3/5 . 2/3 = 1/4

Rpta.: En 1 litro de la mezcla final hay 1/4 litro de vino puro.

18.- Una campesina llegó al mercado a vender huevos. La primera clienta le compró la mitad de todos los huevos más medio huevo. La segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que quedaban más medio huevo. Con ésto, terminó la venta porque la campesina no tenía más huevos. ¿Cuántos huevos trajo al mercado?

Solución: Sea T el total de huevos.

$\underbrace{\text{1° vende :}}$ $\quad\quad$ $\underbrace{\text{Le queda :}}$

$\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\right)$

$\underbrace{\text{2° vende :}}$ $\quad\quad$ $\underbrace{\text{Le queda :}}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ $\quad$ $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]$

Con esta venta terminó, luego le quedan cero huevos:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow T = 3$$

Rpta.: Trajo tres huevos.

19.- Un comerciante vende sus naranjas de la siguiente manera: del total que tenía 1/3 más 4, a S/. 0,50 c/u; luego vende los 3/5 de las que le quedan a S/. 0,40 c/u y finalmente vende la mitad de las que le quedaban, más 4, a S/. 0,30 c/u, con lo que se agota las naranjas. ¿Cuál es la cantidad de naranjas y cuál la recaudación en la venta?

Solución:

Sea "t" El total de naranjas:

1° Vende : $\left(\frac{1}{3}t + 4\right)$; queda: $\left(\frac{2}{3}t - 4\right)$

2° Vende : $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}t - 4\right)$; queda: $\left[\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}t - 4\right)\right]$

3° Vende: $\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}t - 4\right)\right] + 4$; queda: 0

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}t - 4\right)\right] - 4 = 0$$

de donde: $t = \frac{30}{4} \cdot \frac{48}{10} = 36$

Cálculo de lo recaudado:

1° Venta: $\left(\frac{1}{3} \cdot 36 + 4\right) 0{,}50 = 16 \;.\; 0{,}50 = 8{,}00$

2° Venta: $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} \cdot 36 - 4\right) 0{,}40 = 12 \;.\; 0{,}40 = 4{,}80$

3° Venta: $\left[\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3} \cdot 36 - 4\right) + 4\right] 0{,}30 = 2.40$

Rpta.: Total venta: S/. 15,20

FRACCIONES DECIMALES

Son aquellas fracciones cuyo denominador es una potencia de 10.

Pertenece al conjunto de números racionales "Q".

Ejemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{81}{100}, \frac{23}{1\ 000}, \frac{141}{10\ 000}$$

UNIDADES DECIMALES

Son aquellas fracciones decimales que poseen como numerador la unidad.

Ejemplos:

i) $\frac{1}{10}$ (se lee: un décimo)

ii) $\frac{1}{100}$ (un centésimo)

iii) $\frac{1}{1,000}$ (un milésimo)

NÚMERO DECIMAL

Es la expresión en forma "lineal" de una fracción. Un número decimal consta de dos partes: la parte entera llamada característica y la parte decimal llamada mantisa.

Ejemplo:

Sea El número 345,82431:

$$\underbrace{3\ 4\ 5}_{\substack{\text{Parte entera} \\ \text{(característica)}}} \quad , \quad \underbrace{8\ 2\ 4\ 3\ 1}_{\substack{\text{Parte decimal} \\ \text{(mantisa)}}}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Pueden ser: limitados o exactos e ilimitados o inexactos.

Se dice que un número decimal es exacto o limitado, cuanto tiene un número limitado de cifras.

Ejemplos:

i) $0,\overline{abcd}$ ii) 0,125 iii) 0,31642 iv) 0,758375

Los números decimales **exactos** o **limitados** son originados sólo por fracciones ordinarias que tengan su equivalente en fracción decimal.

Ejemplos:

i) $0,3435 = \frac{3\ 435}{10\ 000}$

ii) $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{f. ordinaria}}}{\frac{1}{4}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{f. decimal}}}{\frac{25}{100}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{n. decimal}}}{0,25}$

Los números decimales **ilimitados** o **inexactos**, son aquellos que tienen un número ilimitado de cifras, y se clasifican en periódicos y no periódicos.

NÚMEROS DECIMALES ILIMITADOS

Números decimales periódicos.- Son los números que tienen una cifra o un grupo de cifras que se repite indefinidamente.

1. Fracción decimal periódica pura.

   Cuando el período empieza inmediatamente después de la coma decimal.

Ejemplos:

i) $0,\overset{\frown}{ab} = 0,ab\ ab\ ab\ \ldots\ \infty$

ii) $0,\overset{\frown}{13} = 0,13\ 13\ 13\ \ldots\ \infty$

iii) $0,\overset{\frown}{6} = 0,6\ 6\ 6\ 6\ \ldots\ \infty$

iv) $0,\overset{\frown}{538461} = 0,538461538461\ \ldots\ \infty$

> Nota:
>
> La "ligadura" ($\frown$) indica que todo lo que está dentro de ella, se repite en forma indefinida.

2. Fracción decimal periódica mixta:

Cuando el período se inicia después de una cifra o grupo de cifras de la coma decimal; el grupo inicial de cifras decimales recibe el nombre de "parte periódica".

Ejemplos:

i) $0,ab\,\overset{\frown}{mns} = 0,ab\ mns\ mns\ mns\ \ldots$

ii) $0,10\,\overset{\frown}{435} = 0,10\ 435\ 435\ 435\ \ldots$

iii) $0,2\,\overset{\frown}{443} = 0,2\ 443\ 443\ 443\ \ldots$

> Notas:
>
> Los números decimales periódicos son generados por fracciones ordinarias.

Números decimales no periódicos.- Son los números cuyas cifras no se repiten en períodos.

1. Números irracionales:

Son aquellos números decimales que han sido originados al extraer la raíz de un número que no tiene raíz exacta.

Ejemplos:

i) $\sqrt{2} = 1,414213562\ \ldots$

ii) $\sqrt{3} = 1,732050808\ \ldots$

2. Números trascendentes:

Son aquellos números decimales que no pueden ser obtenidos como resultado de la solución de una ecuación con coeficientes enteros.

Ejemplos:

i) $\pi = 3,141592654\ldots$

ii) $e = 2,718281\ \ldots$

e = base de logaritmos Neperianos

CONVERSIÓN DE FRACCIONES DECIMALES A NÚMEROS DECIMALES

Para ello basta con dividir el numerador entre el denominador de la fracción. Puede saberse, sin embargo qué tipo de número decimal será originado por una fracción cualquiera, mediante el uso de la regla siguiente:

1. Si el denominador del quebrado posee sólo el factor 2 o el factor 5, o los dos factores a la vez, dará origen siempre a un número decimal exacto o limitado.

Ejemplos:

i) $\frac{1}{8} = 0,125$; *ii)* $\frac{4}{25} = 0,16$; *iii)* $\frac{3}{10} = 0,3$

$8 = 2\ .\ 2.\ 2 = 2^3$ $\quad 25 = 5\ .\ 5 = 5^2$ $\quad 10 = 2\ .\ 5$

> Nota:
>
> Si una fracción irreductible tiene como denominador una cantidad formada sólo por los factores 2 ó 5 o los dos a la vez, el número de cifras decimales del número decimal, es igual al mayor de los exponentes de los factores primos 2 ó 5.

2. Si el denominador del quebrado no posee el factor 2, ni el factor 5, dará origen a un número decimal periódico puro.

Ejemplos:

i) $\frac{7}{13} = 0,\overset{\frown}{538461}$ *ii)* $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$ *iii)* $\frac{4}{11} = 0,\overset{\frown}{36}$

Nota:

Para saber cuántas cifras tendrá un número decimal periódico puro, bastará con averiguar cuál es el menor número, formado por cifras 9, que contenga a cada uno de los factores primos del denominador (la cantidad de nueves indica la cantidad de cifras que tendrá el período).

Para su resolución ayuda el siguiente cuadro:

$$9 = 3^2$$
$$99 = 3^2 \,.\, 11$$
$$999 = 3^3 \,.\, 37$$
$$9999 = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 101$$
$$99999 = 3^2 \,.\, 41 \,.\, 271$$
$$999999 = 3^3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 37$$
$$9999999 = 3^2 \,.\, 239 \,.\, 4\,649$$
$$99999999 = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 101 \,.\, 73 \,.\, 137$$

3. Si el denominador del quebrado contiene los factores 2 ó 5, o los dos a la vez y además posee otro factores primos, dará origen a un número decimal periódico mixto.

Ejemplos:

i) $\dfrac{7}{60} = 0{,}1\overset{\frown}{16}$; *ii)* $\dfrac{11}{30} = 0{,}\overset{\frown}{36}$

$60 = 2^2 \,.\, 3 .\, 5$ $\quad$ $30 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5$

Nota:

Para las periódicas mixtas: constando, como sabemos, de parte no periódica y parte periódica, después de hacerla irreducible, se descompone en sus factores primos. La parte no periódica la dan los exponentes de los factores primos 2 ó 5. La parte periódica la dan los exponentes distintos de 2 ó 5, según la regla anterior.

Ejemplo: $\dfrac{629}{630}$

Solución:

$630 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7$; parte no periódica $2 \,.\, 5$; exponente mayor 1 ; parte periódica $3^2 \,.\, 7$, según el cuadro de la nota anterior se deduce que el período tendrá 6 cifras.

$$\frac{629}{630} = 0{,}9\overset{\frown}{984126}$$

GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL

Es la fracción ordinaria que da origen al número decimal.

Puede presentarse 2 casos: Generatriz de una fracción decimal exacta y Generatriz de una fracción decimal infinita periódica.

¿Cómo se halla el quebrado generatriz? De la siguiente manera:

I) DE UNA FRACCIÓN DECIMAL EXACTA. Se escribe como numerador el valor del número decimal dado sin la coma decimal y se divide entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Finalmente se simplifica la fracción resultante.

Ejemplos:

i) $0{,}8 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

ii) $0{,}32 = \dfrac{32}{100} = \dfrac{16}{50} = \dfrac{8}{25}$

iii) $0{,}85 = \dfrac{85}{100} = \dfrac{17}{20}$

iv) $4{,}24 = \dfrac{424}{1\,000} = \dfrac{212}{500} = \dfrac{106}{250} = \dfrac{53}{125}$

II) DE UNA FRACCIÓN INFINITA PERIÓDICA. (Con período distinto de 9). Se escribe como numerador la parte no periódica, seguida de un período, menos la parte no periódica, todo dividido por el número formado por tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras decimales haya antes del período. Finalmente se simplifica la fracción resultante.

Ejemplos:

i) $0,\widehat{7} = \dfrac{7-0}{9} = \dfrac{7}{9}$

ii) $0,\widehat{19} = \dfrac{019-0}{99} = \dfrac{19}{99}$

iii) $23,\widehat{13} = \dfrac{2\ 313 - 23}{99} = \dfrac{2\ 290}{99}$

iv) $2,\widehat{841} = \dfrac{2\ 841 - 28}{990} = \dfrac{2\ 813}{990}$

v) $0,0\widehat{692} = \dfrac{0692 - 6}{9\ 900} = \dfrac{686}{9\ 900} = \dfrac{343}{4\ 950}$

vi) $472,0\widehat{3} = \dfrac{47\ 203 - 4\ 720}{90} = \dfrac{42\ 483}{90}$

vii) $21,04\widehat{732} = \dfrac{2104\ 732 - 2\ 104}{99\ 900} = \dfrac{2102\ 628}{99\ 900}$

$$= \frac{525\ 657}{24\ 975}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuántas fracciones propias existen tales que al dividirlas entre su inversa se obtiene siempre una fracción decimal exacta de dos cifras?

Solución:

Sea $\dfrac{a}{b}$ la fracción. Podemos establecer:

$$\frac{a\ /\ b}{b\ /\ a} = \frac{a^2}{b^2} = 0,mn$$

De acuerdo a la regla de número de cifras de una fracción se deduce que b = 2; 5 ó 10.

Si b = 2 $\Rightarrow$ $a^2/2^2$ $\Rightarrow$ a = 1

Si b = 5 $\Rightarrow$ $a^2/5^2$ $\Rightarrow$ a = 1; 2; 3; 4

Si b = 10 $\Rightarrow$ $a^2/10^2$ $\Rightarrow$ a = 1; 3; 7; 9

Si b = 20 $\Rightarrow$ $a^2/2^2 . 5$ $\Rightarrow$ a = 1; 3; 5; 7; 9

Si b = 50 $\Rightarrow$ $a^2/2 . 5^2$ $\Rightarrow$ a = 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9

Rpta.: Existen 22 fracciones.

2.- Para el próximo examen de admisión a la universidad del año 2 000 se ha calculado la participación de 11 000 postulantes.

De los ingresantes, se prevé que $56,\widehat{56}$ por ciento se ha preparado y que el $56,\widehat{7567}$ por ciento serán mujeres.¿Cuál sería el mayor número de desaprobados?

Solución:

Consideremos que sean N los que ingresarán.

Los que estudiaron, preparándose para el examen, serían:

$$\frac{56,\widehat{56}}{100} \cdot N = \frac{\dfrac{5656-56}{99}}{100} N = \frac{5600}{99\ .\ 100} = \frac{56}{99} \cdot N$$

$$= \text{número entero “}\alpha\text{”}$$

Las mujeres serán:

$$56,\widehat{7567}\ .\ N = \frac{\dfrac{567\ 567 - 567}{9\ 990}}{100} N = \frac{567\ 000}{999\ 000}$$

$$\cdot N = \frac{567}{999} \cdot N = \frac{63}{111} \cdot N = \frac{21}{37} \cdot N$$

$$= \text{número entero “}\beta\text{”}$$

De (α) y (β), para que sean enteros, se deduce que N tiene que ser m 99 y m 37, luego será múltiplo de 99 . 37 = 3 663.

$$N = m\ 3\ 663$$

Luego los m 3 663 menores que 11 000 son:

$$N = 3\ 663;\ \ 7\ 326;\ \ 10\ 989$$

y los que desaprobarían el examen serían la diferencia a 11 000: 7 337 ; 3 674 u 11. Siendo 7 337 el mayor número de los tres.

Rpta.: 7 337

3.- Hallar a + b, si a/b = $0,\widehat{ab}$.

Solución:

Como se trata de una fracción decimal inexacta periódica mixta, de acuerdo a las reglas para conocer el número de cifras de una fracción y como b es de una cifra, se deduce que b = 2 . 3 = 6. Entonces a ≠ 6 y a< 6 (a/b es una fracción propia). Además, a ≠ 2, 3, 4 porque convierte a b en 2 ó 3.

Si a = 1 ; $1/6 = 0,1\widehat{6}$

a = 5 ; $5/6 = 0,8\widehat{3}$ (no cumple)

Rpta.: a + b = 7

4.- El período de una fracción de denominador 11 es de 2 cifras, que se diferencian en 5 unidades. Hallar la suma de los términos de dicha fracción, si es la mayor posible.

Solución:

$$\frac{N}{11} = 0,\widehat{\overline{(a+5)(a)}}$$

$$\frac{N}{11} = \frac{\overline{(a+5)(a)}}{99}$$

$$N = \frac{\overline{(a+5)(a)}}{9} \qquad (1)$$

De donde se deduce que:

$$10(a+5) + a = m9$$

$$11a + 50 = m9$$

$$9a + 2a + 45 + 5 = m9$$

$$2a + 5 = m9$$

$$\Rightarrow a = 2$$

este valor en (1):

$$N = \frac{72}{9} = 8 \Rightarrow 8 + 11 = 19$$

Rpta.: 19

5.- Hallar una fracción equivalente a 4/11, sabiendo que al sumarle 11 a cada término se obtiene $0,52\widehat{27}$. Dar como respuesta la suma de los términos de dicha fracción.

Solución:

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción buscada.

Por dato: $\frac{a}{b} = \frac{4k}{11k}$ (1)

Además:

$$\frac{4k+11}{11k+11} = 0,52\widehat{27}$$

$$\frac{4k+11}{11k+11} = \frac{5\,227 - 52}{9\,900}$$

$$\frac{4k+11}{11k+11} = \frac{23}{44} \Rightarrow k = 3$$

Entonces de (1):

a = 12, b = 33

Rpta.: a + b = 45

6.- Hallar el valor de N:

$$N = \left(\frac{1,\widehat{6}}{0,\widehat{3}} - \frac{0,\widehat{3}}{1,\widehat{6}}\right)\left(\frac{3}{2,\widehat{6}} + 0,1\widehat{6} - \frac{2}{3}\right)$$

Solución:

$$N = \left(\frac{\frac{15}{9}}{\frac{3}{9}} - \frac{\frac{3}{9}}{\frac{15}{9}}\right)\left(\frac{3}{\frac{24}{9}} + \frac{15}{90} - \frac{2}{3}\right) = \left(5 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{9}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{24}{5} \cdot \left[\left(\frac{27+4}{24}\right) - \frac{2}{3}\right] = \frac{24}{5}\left(\frac{31}{24} - \frac{16}{24}\right)$$

$$= \frac{24}{5} \cdot \frac{15}{24} = 3$$

Rpta.: N = 3

7.- Hallar el cociente entre el MCD y el MCM de:

$$\frac{21}{27} \text{ y } \frac{28}{30}$$

Solución:

$$\text{MCD}\left(\frac{21}{27}, \frac{28}{30}\right) = \frac{\text{MCD}(21, 28)}{\text{MCM}(27, 30)} = \frac{7}{270}$$

$$\text{MCM}\left(\frac{21}{27}, \frac{28}{30}\right) = \frac{\text{MCM}(21, 28)}{\text{MCD}(27, 30)} = \frac{84}{3}$$

El cociente será $= \dfrac{\frac{7}{270}}{\frac{84}{3}} = \dfrac{1}{1\,080}$

Rpta.: 1 / 1 080

8.- ¿Qué fracción de A se le debe sumar a ella misma para que sea igual a la cuarta parte de los 28/35 de 5/8 de 8?

Donde, A es los $\frac{6}{28}$ de $\frac{84}{72}$ de $\frac{30}{8}$

Solución:

Sea $\frac{n}{A}$ la fracción que se le debe agregar a A.

Podemos establecer:

$$A + \frac{n}{A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{28}{35} \cdot \frac{5}{8} \cdot 8 = 1 \qquad (1)$$

Pero por otra parte:

$$A = \frac{6}{28} \cdot \frac{84}{72} \cdot \frac{30}{8} = \frac{15}{16} \qquad (2)$$

De (1): $A^2 + n = A \quad \wedge \quad n = A - A^2$

$$\Rightarrow n = A(1 - A) \qquad (3)$$

(2) en (3):

$$n = \frac{15}{16}\left(1 - \frac{15}{16}\right) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{16} = A \cdot \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{A} = \frac{1}{16}$$

Rpta.: Se debe agregar $\frac{1}{16}$

9.- Hallar el menor "n" entero tal que al sumarlo y restarlo al numerador y denominador de la fracción generatriz de $0,\widehat{148}$ se convierta en una fracción impropia.

Solución:

Sea $\frac{A}{B}$ la fracción generatriz

$$\frac{A}{B} = 0,\widehat{148} = \frac{148}{999} = \frac{4}{27}$$

Se debe cumplir:

$$\frac{4 + n}{27 - n} > 1 \;\Rightarrow\; 4 + n > 27 - n \Rightarrow\; n > 11,5$$

Rpta.: $n_{\text{mínimo}} = 12$

10.- El período de una fracción de denominador 11 es de 2 cifras que se diferencian en 5 unidades. Hallar la suma de los términos de dicha fracción, si es la menor posible.

Solución:

Sea $\frac{M}{11}$ la fracción

$$\frac{M}{11} = 0,\overline{a(a+5)}$$

$$\frac{M}{11} = \frac{\overline{a(a+5)}}{99} \Rightarrow M = \frac{\overline{a(a+5)}}{9} = \#\text{ entero}$$

$$\Leftrightarrow a + a + 5 = \overset{\circ}{9} \;\Rightarrow\; a = 2$$

$$\frac{M}{11} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Finalmente:

$$M + 11 = 3 + 11 = 14$$

Rpta.: 14

11.- Simplificar:

$$E = \frac{0,\widehat{2} + 0,\widehat{3} + \ldots + 0,\widehat{7}}{0,\widehat{32} + 0,\widehat{43} + \ldots + 0,\widehat{87}}$$

Solución:

$$E = \frac{\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{7}{9}}{\frac{29}{90} + \frac{39}{90} + \frac{49}{90} + \ldots + \frac{79}{90}} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{324}{90}}$$

$$E = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

Rpta.: $E = 0,\widehat{83}$

12.- Hallar el mayor valor de $\overline{ab}$ si se cumple:

$$\frac{x}{\overline{ab}} + \frac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = 1 \text{ y } \frac{4}{\overline{cd}} = 0,\widehat{xyz}$$

Solución:

$$x + \overline{cd} = \overline{ab} \qquad (1)$$

$$\frac{4}{\overline{cd}} = \frac{\overline{xyz}}{999} \qquad (2)$$

Para que $\overline{ab}$ sea lo mayor posible, $\overline{cd}$ debe ser máximo en (1)

De (2), si suponemos que son equimúltiplos:

$$\frac{4}{\overline{cd}} = \frac{\overline{xyz}}{27 \,.\, 37} \Rightarrow \overline{cd}_{\text{máximo}} = 37$$

De este modo: $\overline{xyz} = 4 \,.\, 27 = 108 \Rightarrow x = 1$

En (1):

$$x + \overline{cd} = \overline{ab}$$

$$1 + 37 = \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} = 38$$

Rpta.: $\overline{ab} = 38$

13.- Dos caños A y B, llenan juntos un reservorio en 2 horas. Si el caño B fuera desagüe, A se tardaría en llenar el reservorio 60 horas. Si B no existiera ¿en cuánto tiempo llenaría el caño A el reservorio?

Solución:

Juntos por hora llenan: 1/2 reservorio.

Si B fuera desagüe, por hora se llenaría: $\frac{1}{60}$

$\therefore$ Consideremos que A emplea "x" horas en llenar el reservorio y B solo lo haría en "y" horas.

Podemos establecer por hora:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{60} \end{array}\right\rangle \quad \begin{array}{l} \frac{2}{x} = \frac{31}{60} \\[2ex] x = \frac{120}{31} \end{array}$$

$\therefore$ A lo llenaría en $\frac{120}{31}$ horas, ésto es:

Rpta.: $3 \text{ h } \frac{27}{31} \text{ m}$

14.- Se tiene dos tanques (1; 2) y 3 llaves: A y B ingresan agua al tanque 1 y C desagua el tanque 1 hacia el tanque 2. Si las capacidades son:

tanque 1 = 200 m^3

tanque 2 = 100 m^3

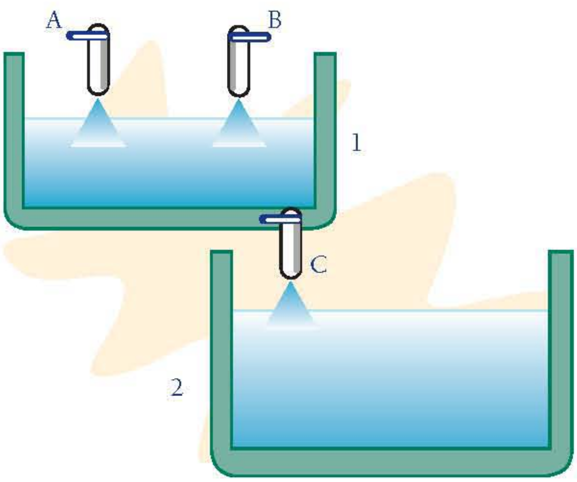
Velocidades de flujo de llaves:

A = 1 m^3/s

B = 3 m^3/s

C = 2 m^3/s

Cuando se llena el tanque 2 se cierra la llave C. Hallar el tiempo de llenado de ambos tanques.



Solución:

Por segundo el tanque (1) se llena con:

$1 + 3 - 2 = 2\ m^3$; en este lapso, el tanque (2) se llena: $2\ m^3$

$\therefore$ El tanque (2) se llenará al cabo de:

$$\frac{100\ m^3}{2\ m^3/s} = 50s$$

Durante este tiempo el tanque (1) recibió:

$$50 \ .\ 2 = 100\ m^3.$$

Falta llenar: $100\ m^3$ del tanque 1 y se cierra el desagüe C.

Entre A y B por segundo llenan:

$$1 + 3 = 4\ m^3/s$$

$\therefore$ Se termina de llenar al cabo de:

$$100 : 4 = 25\ s$$

Por lo tanto: A se llena en 25 + 50 = 75 s

B se llena al cabo de 50 s

Rpta.: 75 y 50 segundos.

15.- Un tanque se vacía en 3 horas. Si en cada hora se va la mitad de lo que había al inicio de la hora más medio litro. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

Solución:

Al principio había "n" litros

En la 1ra. hora se vacía: $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

queda: $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$

En la 2da. hora se vacía: $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

queda: $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]$

En la 3ra. hora se vacía:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}$$

queda nada:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2} = 3$$

$n = 7$

Rpta.: Capacidad: 7 litros.

16.- Un caño demora 10 h y 25 min para llenar un reservorio. Cuando éste se ha llenado en 1/5 de su capacidad, la bomba que alimenta el caño se malogra, disminuyendo su rendimiento en 1/3. ¿Cuánto tiempo tardó el caño en llenar el reservorio?

Solución:

Al llenar $\frac{1}{5}$ del reservorio habrán transcurrido:

$$\frac{1}{5}\ (10\ h\ 25\ min) = 2h\ 5\ min$$

Tiempo que faltaría normalmente para terminar de llenar el reservorio:

$$10\ h\ 25\ min - 2\ h\ 5\ min = 8\ h\ 20\ min$$

Como se malogra la bomba que alimenta el caño, éste disminuye su rendimiento en 1/3 lo que indica que en terminar de llenar el depósito va a demorar 1/3 más del tiempo normal, ésto es:

$$\frac{4}{3}\ (8\ h\ 20\ min)$$

$$= \frac{32}{3}\ h\ \ \frac{80}{3}\ min$$

$$= 10\frac{2}{3}\ h\ \ \frac{80}{3}\ min$$

$$= 10\ h\left(\frac{2}{3} \cdot 60\ min + \frac{80}{3}\ min\right)$$

$$= 10\ h\ \frac{200}{3}\ min = 10\ h\ 66\ \frac{2}{3}\ min$$

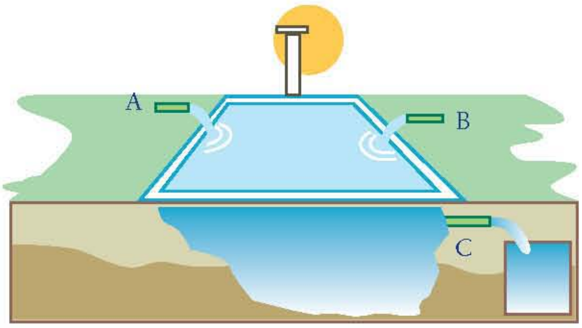
$$= 11\ h\ 6\ min\ \ 40\ s$$

∴ El caño demoró en llenar el reservorio:

2 h 05 min + 11 h 6 min 40 s

Rpta.: 13 h 11 min 40 s

17.- Una piscina es llenada con 2 grifos (A y B), y simultáneamente se desagua por el conducto C.



Sus caudales en m^3 por hora son:

	1ra hora	2da hora	3ra hora	4ta hora
A	$1\ m^3$	$4 m^3$	$7\ m^3$	$10\ m^3$
B	$1\ m^3$	$3\ m^3$	$5\ m^3$	$7\ m^3$
C	$-1\ m^3$	$-2\ m^3$	$-3\ m^3$	$-4\ m^3$

Si está vacía y su capacidad es 190 m^3. ¿Cuánto demora en llenarse?

Solución:

Por horas y con las 3 válvulas abiertas:

1ra	2da	3ra	4ta
1	5	9	13

La primera hora se llena 1 litro, después de cada hora siguiente se llena 4 litros más que en la hora anterior; proyectando el cuadro anterior hasta llenar los 190 m^3 tardará 10 horas.

$$S = \left(\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right) n$$

$$a_1 = 1\ ;\ r = 4\ ;\ S = 190$$

$$\Rightarrow\ 190 = \left(\frac{2 + (n-1)\,4}{2}\right) n$$

$$380 = 4n^2 - 2n$$

$$4n^2 - 2n - 380 = 0$$

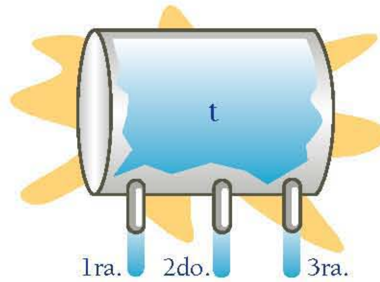
$$n = 10$$

Rpta.: Demora 10 horas.

18.- Una bomba agota el agua contenida en un pozo en cuatro dos sétimos días; otra, lo agotaría en dos cuatro treceavos días; y una tercera, en uno siete octavos días. Si se hace funcionar las tres bombas a la vez, ¿cuál es el tiempo en horas que se tardaría en agotar el agua del pozo?

Solución:

Consideremos sea "t" la capacidad del pozo:



Las bombas agotan el contenido en:

1ra	2da	3ra
$4\frac{2}{7}$ días	$2\frac{4}{13}$ días	$1\frac{7}{8}$ días
$\frac{30}{7}$ días	$\frac{30}{13}$ días	$\frac{15}{8}$ días
al día: $\frac{7}{30}$ t	al día : $\frac{13}{30}$ t	al dia: $\frac{8}{15}$ t

Trabajando juntas, al día agotan:

$$\left(\frac{7}{30} + \frac{13}{30} + \frac{8}{15}\right)t = \frac{36}{30}\ t = \frac{6}{5}\ t$$

Aplicando una regla de 3 simple directa:

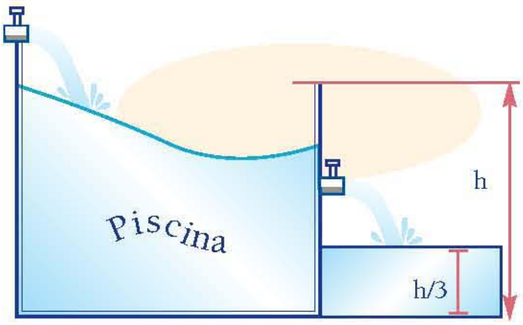
$\frac{6}{5}$ t ——— (agotan en) ——— 24 horas

t ——— (agotan en) ——— x horas

$$x = \frac{24 \text{ horas } t}{\frac{6}{5}\ t} = 20 \text{ horas}$$

Rpta.: 20 horas.

19.- Se tiene una piscina de 12 m^3 de capacidad con 2 grifos: uno de suministro con un caudal de 150 l /h y otro de desfogue con un caudal de 50 l/h, ubicados como muestra la figura. ¿Cuánto demorará en llenar la piscina inicialmente vacía?
El desfogue funciona sólo si la piscina tiene al menos 1/3 de agua.



Solución:

Capacidad de la piscina: 12 000 litros

El primer grifo trabaja solito, hasta llenar 1/3 de la capacidad de la piscina, ésto es:

$$\frac{12\ 000}{3} = 4\ 000 \text{ litros}$$

Tiempo transcurrido:

$$\frac{4\ 000}{150} = 26 \text{ h } \ 40 \text{ min}$$

A partir de este instante, empieza a funcionar también el desfogue, trabajando juntos.

Ahora, abierta las dos llaves por hora llenarán:

$$150 - 50 = 100 \text{ l/h}$$

como falta llenar 8 000 litros.

$\therefore$ Deben transcurrir:

$$\frac{8\ 000}{100} = 80 \text{ h}$$

$\Rightarrow$ Se llenará al cabo de:

$$80 \text{ h} + 26 \text{ h } 40 \text{ min.}$$

Rpta.: 106 h 40 min.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la menor fracción equivalente a 297/549, tal que el producto de sus términos sea 2 013.

   Rpta.: 33/61

2. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

   $$\frac{67}{122};\ \frac{103}{115};\ \frac{95}{122};\ \frac{101}{113};\ \frac{95}{127};\ \frac{99}{111};\ \frac{95}{113}$$

   Rpta.: 103/115

3. Hallar una fracción equivalente a:

   $$\frac{132\ 639}{183\ 654},$$

   y tal, que la suma de los cuadrados de sus términos sea 31 552.

   Rpta.: 104/144

4. Hallar los dos términos de una fracción equivalente a 1 292/2 261 sabiendo que el MCM de sus términos es 3 388.

   Rpta.: 484/847

5. Siendo "N" un número entero, hallar para qué valores de "N", la fracción:

   $$\frac{N + 8}{2N - 5} \text{ es entero}$$

   Rpta.: N = 3; 4; 6 y 13

6. Demostrar que la fracción:

   $$\frac{3\alpha + 4}{4\alpha + 8}$$

   es siempre irreductible, si "α" es un número impar.

7. Un padre tiene 45 años y su hijo 21. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del hijo sea los 4/7 de la del padre?

   Rpta.: Deberá transcurrir 11 años.

8. Preguntada una persona por su edad, responde: los 5/7 de mi edad menos 4 años dan la edad que tenía yo hace 12 años. Se desea saber la edad actual de esta persona.

   Rpta.: La edad actual es 28 años.

9. Un granjero regala a 3 amigos cierto número de palomas vivas: al primero le dio 1/7 del total más 5/7 de palomas; al segundo le regaló 1/11 del total más 10/11 de palomas y al tercero 2/5 del total. Si a él le quedó 35 palomas. Determinar ¿cuántas palomas recibieron los 2 primeros?

   Rpta.: El 1° recibió 15 y el 2° 10 palomas.

10. Un vendedor compró manzanas a S/. 2,50 cada una. Si vende los 3/7 de ellas a S/. 2,80 y luego los 3/5 de lo que le queda a S/. 3,00 perdería hasta ese momento S/. 114. ¿Cuántas manzanas compró?

    Rpta.: Compró 420 manzanas.

11. Dos personas pueden terminar juntas el tejido de una red en 25 días. Así trabajaron durante 5 días, al cabo de los cuales la menor abandona el trabajo y la mayor termina lo que faltaba en 60 días. Determinar ¿En cuántos días trabajando sola la mayor habría terminado el tejido?

    Rpta.: 75 días.

12. De un depósito lleno de agua se retira la mitad. Después se agrega la tercera parte. ¿Qué fracción de lo que quede hay que llenar para que al final falte 1/8?

    Rpta.: 1/20

13. En un gallinero de 17 gallinas se hace 3 divisiones para separarlas así: en una, debe ponerse la mitad de las aves; en la otra, la tercera parte y en la restante la novena parte. La dificultad estriba en arreglar matemáticamente las gallinas sin matar ningúna para dividirla. ¿Qué hacer?

    Rpta.: Considerar una gallina más y efectuar el reparto.

14. Una guarnición tiene víveres para cierto número de días. Si se aumenta en 1/3 el número de soldados de la guarnición. ¿En cuánto deberá reducirse la ración para que los víveres duren el mismo tiempo?

    Rpta.: E = 1/4

15. Un vaso contiene un tercio de su capacidad de mercurio, los 3/5 del resto de agua y el resto es aceite, siendo su peso entonces de 5 kilos; el vaso vacío pesa 1270 gramos. Hallar la capacidad del vaso sabiendo que 1 cc. de mercurio pesa 13 gramos, 1 cc. de aceite pesa 0,9 gramos.

    Rpta.: Capacidad del vaso 750 cc.

16. Un ómnibus partió con cierto número de pasajeros y en el primer paradero bajaron 1/8 del número que llevaba; en el segundo paradero, subieron 14; en el tercero, bajaron los 3/7 que llevaba; en el cuarto paradero, bajaron los 3/6 de lo que llevaba; llegando al quinto paradero con 16 pasajeros. ¿Con cuántos partió el ómnibus?

    Rpta.: Partió con 48 pasajeros.

17. ¿Cuánto le debemos quitar a los 2/3 de los 5/7 de los 6/5 de los 3/4 de 21 para que sea igual a la mitad de 1/3 de 2/5 de 3/4 de 14?

    Rpta.: Debemos quitar 8,3

18. Una pelota es dejada caer desde una cierta altura. En cada rebote pierde un tercio de la altura de la cual cayó. Si después del tercer rebote se elevó 48 cm. ¿De qué altura inicial cayó?

    Rpta.: Cayó de 162 cm.

19. En una fracción decimal la parte entera es igual a la parte decimal, cuyas cifras son consecutivas crecientes. Si la generatriz tiene por denominador 11. Hallar el numerador.

    Rpta.: El numerador es 500

20. Sea $\dfrac{m}{n} = 2{,}5252525$

Donde m y n son números primos entre si. Entoces la suma de las cifras de m, más las cifras de n, es:

Rpta.: 8

21. Si la fracción irreductible:

$$f = \frac{\overline{(m+1)(m-1)}}{\overline{nn0}}$$

da origen a la fracción decimal $0{,}m\widehat{mn}$

Hallar m + n

Rpta.: 9

22. ¿Cuántas fracciones propias pueden generar una periódica pura de dos cifras?

Rpta.: 90

23. Hallar la suma, si la mayor fracción propia periódica pura m/n y la menor fracción impropia periódica mixta d/e, tal que: m + n = d + e = 126

Rpta.: 11/5

24. ¿Cuántas cifras tiene: $\dfrac{1}{50! - 30¡}$ en la parte no periódica?

Rpta.: 26 cifras

25. Si la última cifra de la parte no periódica de 4/30! fuera dos. ¿Cuál sería la última cifra del período?

Rpta.: Sería 2 ó 7

26. Demostrar que si se convierte la fracción :

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

en decimales, se tendrá una fracción periódica mixta.

27. ¿Cuál es el menor número por el cual es necesario multiplicar 7 para obtener un número formado únicamente de cifras 3?

Rpta.: 47 619

28. Un alumno encontró que el tiempo empleado por el ómnibus de su casa desde la Universidad hasta el paradero, expresado en minutos, era un número primo mayor que tres y siendo éste el menor posible. Al llegar a su casa, recordó que en el ómnibus habían viajado un determinado número de alumnos y que el número que expresaba esa cantidad tenía 12 divisores. Se le ocurrió dividir el tiempo entre el número de alumnos y obtuvo una fracción decimal periódica mixta de dos cifras en su parte no periódica y una cifra en el período. Determinar el tiempo y el número de alumnos.

Rpta.: Tiempo 7 minutos, número de alumnos 60.

EJERCICIOS PROPUESTOS CON ALTERNATIVAS

1. Hallar el M C D de 2/8, 6/15 y 24/20

a) 2/120 b) 1/120 c) 2/60

d) 1/20 e) 3/45

2. Hallar el MCM de 4/7, 8/11 y 24/17

a) 24/77 b) 24/7 c) 4/77

d) 8 e) 24

3. La suma de una fracción cualquiera y su recíproca es en general, mayor que: (señalar el mayor valor)

a) La unidad b) 3/2 c) 4

d) 3 e) 2

4. ¿Cuántas fracciones de denominador 315 hay comprendidas entre 3/5 y 5/7?

a) 35 b) 36 c) 34

d) 33 e) infinitas

5. ¿Cuántas fracciones propias irreductibles de denominador 147 existen?

a) 63 b) 65 c) 70

d) 77 e) 84

6. Para cuántos valores de N se hace entera la fracción:

$$\frac{N+55}{N+1}$$

a) 6 b) 8 c) 10

d) 11 e) 12

7. Hallar la suma de los 4 términos de 2 fracciones irreductibles que suman 31/35

a) 15 b) 16 c) 17

d) 18 e) 19

8. ¿Cuántas fracciones propias de denominador 1 400 son reductibles?

a) 940 b) 820 c) 720

d) 460 e) N.A.

9. La fracción 23/55 está comprendida entre dos fracciones homogéneas cuyo denominador común es 19 y los numeradores son dos enteros consecutivos. Hallar estos números.

a) 6 y 7 b) 8 y 9 c) 20 y 21

d) 7 y 8 e) 19 y 20

10. Con 450 litros de vino, se llena 580 botellas de 5/7 y 5/6 de litro de capacidad. ¿Cuántas botellas de 5/7 litros hay?

a) 300 b) 280 c) 120

d) 140 e) 288

11. Si: $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}} = \dfrac{5}{17}$, ¿cuánto vale "b"?

a) 1 b) 2 c) 4

d) 6 e) cualquier dígito

12. Dada la fracción : $\dfrac{p+2}{p-1}$

donde "p" es un valor entero. ¿Cuántos valores de "p" dan origen a una cantidad entera?

a) 2 b) 1 c) 5

d) 4 e) 3

13. Al mirar el reloj, se observó que los 3/5 de lo que quedaba del día, era igual al tiempo transcurrido. ¿Qué hora era?

a) 12 m. b) 6 a.m. c) 9 a.m.

d) 10 a.m. e) 2 p.m.

14. A y B pueden hacer una obra en 6 2/3 días; A y C en 4 4/5 días, A, B y C en 3 3/4 días. ¿En cuántos días podrá hacer la obra A trabajando solo?

a) 10 10/11 b) 10 1/11 c) 10 1/2

d) 11 e) 11 1/11

15. ¿Cuántos términos tiene la suma:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}$$

para que se igual a: $\frac{3\,280}{6\,561}$?

a) 6 b) 7 c) 8

d) 9 e) 10

16. Hallar el valor de : $\frac{0{,}24}{0{,}68}$

a) 0,6 b) 0,35 c) 0,36

d) 0,195 e) 0,3

17. Hallar el numerador de una fracción irreductible, sabiendo que el producto de sus términos es 550 y que además es equivalente a un número decimal exacto.

a) 50 b) 2 c) 25

d) 11 e) 10

18. ¿Cuántas cifras tiene el período de: 3/11?

a) 2 b) 3 c) 5

d) 6 e) 12

19. ¿Cuál es el número decimal que dividido entre su recíproca da: $0{,}340\widehat{27}$?

a) $0{,}3\widehat{46}$ b) $0{,}2\widehat{96}$ c) $0{,}5\widehat{83}$

d) $0{,}1\widehat{73}$ e) $0{,}2\widehat{64}$

20. La fracción 1/1 577 origina un número decimal cuya parte periódica termina en la cifra:

a) 1 b) 3 c) 5

d) 7 e) ninguna anterior

21. Considere todas las fracciones irreductibles que generan números decimales de la forma: $0{,}\widehat{abc}$. ¿Cuántos denominadores diferentes se cuenta?

a) 16 b) 24 c) 18

d) 32 e) N.A.

22. Si: $0{,}\widehat{mn} + 0{,}\widehat{mn} = 1{,}\widehat{13}$. Calcular: (m + n)

a) 9 b) 10 c) 11

d) 12 e) Hay varias soluciones.

23. Calcular la fracción equivalente a $0{,}4\widehat{54}$ tal que el MCM de sus términos sea 935; dar como respuesta la suma de sus términos.

a) 288 b) 320 c) 272

d) 368 e) 464

24. Simplificar:

$$\frac{3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{3}} : \frac{7\frac{1}{2} + \dfrac{1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5}}{3}}{2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}}$$

a) 1 b) $\frac{144}{377}$ c) $\frac{2\,025}{10\,864}$

d) $\frac{1\,877}{46\,381}$ e) N.A.

25. Simplificar la siguiente expresión :

$$\cfrac{1-\cfrac{\frac{0{,}5}{12}}{\frac{0{,}1}{36}+\frac{0{,}5}{24}}}{\cfrac{0{,}088}{0{,}15+\frac{7}{12}}}+7+\frac{5{,}2}{7}$$

a) $\frac{33}{28}$ b) 3 c) $\frac{1\,411}{337}$

d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2\,445}{1\,785}$

26. Simplificar la expresión (aprox.)

$$\frac{1{,}13}{0{,}000\overset{\frown}{102}}\cdot\frac{0{,}004}{0{,}32}:\cfrac{17\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9{,}\overset{\frown}{3}}}{\frac{7}{4{,}\overset{\frown}{6}}\cdot\frac{1}{12{,}\overset{\frown}{3}}}$$

a) 11 b) 8,97 c) 4,5

d) 5,1 e) 9,9

27. $\sqrt{0{,}00\overset{\frown}{a}+2\cdot 0{,}0\overset{\frown}{a}+0{,}\overset{\frown}{a}}=0{,}\overset{\frown}{73}$

a) 1 b) 7 c) 6

d) 3 e) 4

28. Hallar "E" si:

$$\frac{\text{MCM}\left(0{,}\overset{\frown}{1}\,;\,0{,}\overset{\frown}{2}\,;\,0{,}\overset{\frown}{3}\,;\,\ldots\,;\,0{,}\overset{\frown}{8}\right)}{\text{MCD}\left(0{,}1\overset{\frown}{2}\,;\,0{,}2\overset{\frown}{3}\,;\,\ldots\,;\,0{,}7\overset{\frown}{8}\right)}$$

a) 84 b) $\frac{1}{24}$ c) 8 400

d) 840 e) $\frac{1}{42}$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) E	3) E	4) A	5) E
6) B	7) C	8) E	9) D	10) B
11) D	12) B	13) C	14) A	15) C
16) B	17) D	18) A	19) C	20) D
21) E	22) C	23) C	24) E	25) E
26) B	27) E	28) C		

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

POTENCIACIÓN

Es la operación aritmética que tiene por objeto hallar el producto de varios factores iguales. Así:

$$\underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, . \, a}_{m} = a^m$$

$$\text{donde} \begin{cases} a = \text{base} \\ m = \text{exponente} \end{cases}$$

POTENCIAS DE EXPONENTE REAL

La única definición dada hasta ahora de potencia exige que el exponente, el cual es el número de veces que la base entra como factor, sea un número natural.

Pero siendo uno de los principales fines del análisis matemático la generalidad de todas las operaciones, cualquiera que sea la naturaleza de los números que intervienen en ellas como datos, conviene generalizar la definición de potencia de modo que pueda aplicarse cuando el exponente es un número real cualquiera, racional o irracional.

Siendo "a" un número real cualquiera y "h" y "k" dos números naturales, se verificará siempre:

$$\boxed{(a^h)^k = a^{h\,k}}$$

LEYES FORMALES DE LA POTENCIACIÓN

1° La potencia es uniforme, es decir:

Si $a = b$ y $m = n$ entonces : $a^m = b^n$

En efecto: $a^m = a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a$

$b^n = b \, . \, b \, . \, b \, . \, \ldots \, . \, b$

y por ser uniforme la multiplicación:

$$\underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a}_{m} = \underbrace{b \, . \, b \, . \, b \, . \, \ldots \, . \, b}_{n}$$

2° La potenciación no es conmutativa ni asociativa

$a^n = a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a$ (n veces)

$n^a = n \, . \, n \, . \, n \, . \, \ldots \, . \, n$ (a veces)

$\therefore \; a^n \neq n^a$

Por otro lado:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \, . \, a^n \, . \, a^n \, . \, \ldots \, . \, a^n}_{\text{"m" veces}} =$$

$$\underbrace{\overbrace{(a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a)}^{n} \, \overbrace{(a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a)}^{n} \ldots \overbrace{(a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a)}^{n}}_{\text{" m" factores}} = a^{nm}$$

además:

$a^{n^m} = a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a$ (n^m veces) y como $n \, . \, m$, no es siempre igual a n^m, no es asociativa.

3° La potenciación es distributiva respecto a la multiplicación o sea:

$$(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$$

En efecto :

$$(a \, . \, b)^n = a \, . \, b \, . \, a \, . \, b \, . \, a \, . \, b \, . \, \ldots \, . \, a \, . \, b \text{ (n veces)}$$

$$= \underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, \ldots \, . \, a}_{n} \, . \, \underbrace{b \, . \, b \, . \, b \, . \, \ldots \, . \, b}_{n} = a^n \, . \, b^n$$

4° La potenciación es monótona, o sea si:

$$a < b$$

$\therefore\ a^n < b^n$ (es consecuencia de la multiplicación)

5° Módulo de la Potenciación.- El módulo de la potenciación es la unidad

Si: $a^m = a \Rightarrow m = 1$

CUADRADO DE UN NÚMERO

Se llama así al producto de 2 factores de números iguales:

Ejemplos:

i) $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$

ii) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

iii) $(0{,}25)\ (0{,}25) = (0{,}25)^2 = 0{,}0625$

CUADRADO DE UN NÚMERO DECIMAL

Para elevar al cuadrado un número decimal, se eleva como si fuese un número entero y al producto resultante se le separa el doble de cifras decimales que tenga la fracción.

Ejemplos:

i) $(0{,}31)^2 = 0{,}0961$

ii) $(0{,}00017)^2 = 0{,}0000000289$

TEOREMA: La diferencia de los cuadrados de 2 números enteros consecutivos es igual al doble del menor más uno.

También se puede decir que es igual a la suma de ellos.

Sean: A y (A + 1) los números enteros consecutivos.

Definición: $(A + 1)^2 - A^2 = 2A + 1 = A + (A + 1)$

Demostración:

$$(A + 1)^2 - A^2 = A^2 + 2A + 1 - A^2 = 2A + 1$$

TEOREMA: Si a un número N se le agrega media unidad, su cuadrado aumenta en dicho número N más 1/4.

Definición: Si el cuadrado de N es N^2, el cuadrado de $(N + 1/2)$ será: $N^2 + N + \frac{1}{4}$

Demostración:

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)^2 = N^2 + 2N \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = N^2 + N + \frac{1}{4}$$

CUADRADO PERFECTO

Es todo número que tiene raíz cuadrada exacta.

Ejemplos:

i) a^2 ; porque: $\sqrt{a^2} = a$

ii) 0,0625; porque: $\sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$

CARACTERÍSTICAS DE UN CUADRADO PERFECTO

1° La condición necesaria y suficiente para que un número sea cuadrado perfecto es que los exponentes de sus factores primos sean pares.

En efecto, sea "N" un número cuadrado perfecto. Consideremos que al descomponer "N" en factores primos toma la forma:

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \ \ldots \ \cdot l^{\lambda}$$

se debe cumplir:

$$\begin{array}{lcl} \alpha = \overset{\circ}{2} & \Rightarrow & \alpha = 2\alpha_1 \\ \beta = \overset{\circ}{2} & \Rightarrow & \beta = 2\beta_1 \\ \gamma = \overset{\circ}{2} & \Rightarrow & \gamma = 2\gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda = \overset{\circ}{2} & \Rightarrow & \lambda = 2\lambda_1 \end{array}$$

En efecto:

$$N = a^{2\alpha_1} \cdot b^{2\beta_1} \cdot c^{2\gamma_1} \cdot \ \ldots \ \cdot l^{2\lambda_1}$$

$$N = (a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot c^{\gamma_1} \cdot \ \ldots \ \cdot l^{\lambda_1})^2 = k^2$$

$\therefore \quad \sqrt{N} = a^{\alpha_1} . b^{\beta_1} . c^{\gamma_1} . \ \ldots . \ l^{\lambda_1} = k$

$\sqrt{N} = k$ (número entero)

2° Si un número es cuadrado perfecto y termina en 5, se cumple que:

La cifra de sus decenas es 2 y la cifra de sus centenas es par.

Sea "N" un número cuadrado perfecto que termina en cinco.

$N = \overline{\ldots 5}$; su raíz terminará en cinco, luego podemos establecer:

$\sqrt{N} = \ldots d\,5$; elevando al cuadrado:

$N=(\overline{\ldots 00} + \overline{d5})^2 = \overline{\ldots 0000} + 2 . \overline{d5} . \overline{\ldots 00} + \overline{d5}^2$

$N = \overline{\ldots 0000} + \overline{\ldots 00} + (10 . d + 5)^2$

$N = \overline{\ldots 000} + d^2 . 100 + d . 100 + 25$

$N = \overline{\ldots 000} + d\,(d + 1) . 100 + 25$

pero $d(d+1)$ es par o sea: $d(d + 1) = \overline{\ldots (2n)}$

$N = \overline{\ldots (2n)\,25}$

3° Todo cuadrado perfecto es de la forma:

$4n$ ó $4n + 1$

En efecto; si "N" es cuadrado perfecto:

a) Si "N" es par:

Su raíz cuadrada también será par. Por lo tanto:

$\sqrt{N} = 2p \Rightarrow N = 4p^2 = 4n$

b) Si "N" es impar:

Su raíz cuadrada también será impar. Por lo tanto :

$\sqrt{N} = 2n + 1 \Rightarrow N = (2n + 1)^2 = \underbrace{4n^2 + 4n}_{\overset{\circ}{m4}} + 1$

$\therefore \quad N = \overset{\circ}{m4} + 1 \Rightarrow N = 4n + 1$

CUÁNDO UN NÚMERO NO ES CUADRADO PERFECTO

1. Si un número termina en 2, 3, 7 ú 8, no puede ser cuadrado perfecto.

   En efecto: El cuadrado de un número termina en la misma cifra que el cuadrado de sus unidades, y como ninguno de los cuadrados de las 9 cifras significativas termina ni en 2, 3, 7 ú 8, un número que termina en estas cifras no es cuadrado perfecto.

2. El producto de dos números enteros consecutivos no es cuadrado perfecto.

   Observamos que a lo más si uno de ellos es cuadrado perfecto, el otro no lo es.

3. Si un número termina en una cantidad impar de ceros, no es un cuadrado perfecto.

   En efecto:

   $\overline{A\,\underbrace{000 \ldots 0000}_{(2n+1)\text{ ceros}}} = A . 10^{2n+1} \Rightarrow \sqrt{A . 10^{2n} . 10}$

   de esta última expresión se deduce que:

   A, puede ser cuadrado perfecto; 10^{2n}, es un cuadrado perfecto, pero 10 no es cuadrado perfecto.

   $\therefore \quad \overline{A\,\underbrace{000 \ldots 0000}_{(2n+1)\text{ ceros}}} \neq k^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos cuadrados perfectos de 3 cifras existen en base 11?

Solución:

El mayor número de tres cifras en base 11 es de la forma:

$\overline{\alpha\,\alpha\,\alpha}_{(11)}$

donde: $\alpha = 10$

El menor número de tres cifras en base 11 es de la forma:

$100_{(11)}$

Estos números lo transformamos a base 10 por descomposición polinómica:

$\overline{\alpha\,\alpha\,\alpha}_{(11)} = 10 . 11^2 + 10 . 11 + 10 = 1\,330$

$$\sqrt{1\ 330} = 36{,}47 \qquad (1)$$

$$100_{(11)} = 1 \cdot 11^2 = 121$$

$$\Rightarrow \sqrt{121} = 11 \qquad (2)$$

Analizando (1) y (2), se observa que el valor de la raíz cuadrada del menor cuadrado perfecto en base 11, tiene que poseer un valor mayor que 11 en el sistema decimal, y el mayor cuadrado perfecto en base 11 tiene que tener por raíz cuadrada un número igual a 36 en base 10.

El número de cuadrados perfectos en base 11 es:

$$36 - 11 = 25$$

Rpta.: Existen 25 cuadrados perfectos de 3 cifras en base 11.

2.- Al cuadrado de un número entero se le suma su cubo y se obtiene 16 250.

Hallar el número.

Solución:

Sea "A" el número buscado. Podemos establecer :

$$A^2 + A^3 = 16\ 250$$

$$A^2 + A^3 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

$$A^2 (A + 1) = 2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 13$$

$$A \cdot A (A + 1) = 25 \cdot 25 \cdot 26$$

Identificando factores por comparación de los miembros: A = 25

Rpta.: El número es 25

3.- Si "A" tiene 2m cifras, iguales a 1; "B" tiene "m" cifras iguales a 4. Demostrar que A + B + 1 es un cuadrado perfecto.

Solución:

En efecto, podemos establecer que:

$$A = \underbrace{111 \dots 1111}_{\text{2m cifras}},$$

descomponiendo polinómicamente y sumando:

$$A = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2m-1} = \frac{10^{2m} - 1}{10 - 1}$$

$$A = \frac{10^{2m} - 1}{9}$$

$$B = \underbrace{4444\dots4444}_{\text{"m cifras"}} = 4 \cdot (\underbrace{1111\dots1111}_{\text{"m" cifras}})$$

$$B = 4(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{m-1}) = 4\,\frac{(10^m - 1)}{10 - 1}$$

$$B = 4\frac{(10^m - 1)}{9}$$

Por lo que:

$$A + B + 1 = \frac{(10^{2m} - 1) + 4\,(10^m - 1)}{9} + 1$$

$$= \frac{(10^{2m} + 4 \cdot 10^m + 4)}{9}$$

pero: $10^{2m} + 4 \cdot 10^m + 4 = (10^m + 2)^2$

$$A + B + 1 = \frac{(10^m + 2)^2}{3^2} = \frac{(\overline{1\ 0000\dots00} + 2)^2}{3^2}$$

$$A + B + 1 = \left[\frac{\overline{100\dots02}}{3}\right]^2 = \underbrace{\overline{3333\dots4}}_{\text{"m" cifras}}{}^2 = k^2$$

$$\therefore \quad A + B + 1 = k^2$$

4.- Hallar el número $\overline{a9b9}$ cuadrado perfecto, tal que: a + b = 7

Solución:

$$\overline{a9b9} = k^2$$

Descomponiendo polinómicamente:

$$1\ 000\ a + 900 + 10b + 9 = k^2$$

$$1\ 000\ a + 10b + 909 = k^2$$

$$990\ a + 10(a + b) + 909 = k^2$$

Pero, como (a + b) = 7, se tiene:

$$990\ a + 10 \cdot 7 + 909 = k^2$$

$$11(90\ a + 89) = k^2$$

de aquí se deduce que:

$$90\,a + 89 = \overset{\circ}{m}11$$

$$(88 + 2)\,a + (88 + 1) = \overset{\circ}{m}11$$

$$2a + 1 = \overset{\circ}{m}11$$

por lo tanto: $a = 5$,

Reemplazando en la condición:

$$a = 5 \;;\; b = 2$$

Rpta.: 5 929 es el # cuadrado perfecto.

5.- ¿Cuántos son los números cuadrados perfectos de la forma $\overline{abc}$, tales que “a”, “b” y “c” son cifras diferentes y consecutivas sin importar el orden?

Solución:

Sean $(n - 1)$, n y $(n + 1)$ las cifras consecutivas. Su suma es $3n$, y entonces los números buscados son $\overset{\circ}{m}3$. Como éstos son cuadrados perfectos, deben ser también $\overset{\circ}{m}9$.

Por lo tanto:

$$3n = \overset{\circ}{m}9 \;\Rightarrow\; n = 3\,;\,6\,;\,9$$

como:

$$n + 1 < 10 \;\Rightarrow\; n \neq 9$$

Si $n = 3$, las cifras son 2; 3 y 4 . Escojamos combinaciones que no terminen en 2 o en 3. Pero 234 no es cuadrado perfecto, aunque 324 sí lo es.

Si $n = 6$, las cifras son 5; 6; 7; los números, según las reglas de formación de cuadrados, pueden ser: 576 y 756; pero $756 \neq k^2$. Entonces, sólo existen dos números.

Rpta.: 324 y 576

6.- ¿Cuál es el número que sumado con su cuadrado da 2 970?

Solución:

Descomponiendo el número en sus factores primos.

Se tiene:

$$2\,970 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 11 = 54 \,.\, 55 = 54\,(54 + 1)$$

$$2\,970 = 54^2 + 54$$

Rpta.: El número buscado es 54

7.- ¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre 3 200 y 8 600?

Solución:

Debe cumplirse que:

$$3\,200 < N^2 < 8\,600$$

$$\sqrt{3\,200} < N < \sqrt{8\,600}$$

$$56\frac{m}{n} < N < 92\frac{a}{b}$$

El número de cuadrados perfecto es:

$$92 - 56 = 36$$

Rpta.: Existen 36 cuadrados perfectos.

8.- ¿Qué valores deben tomar las cifras “a” y “b” del número $\overline{9ab4}$ para que éste sea un cuadrado perfecto?

Solución:

Como el número cuadrado tiene 4 cifras, la base debe tener 2 cifras, así:

$$\overline{9ab4} = \overline{mn}^{\,2}$$

también, al empezar en 9, debe cumplirse que:

$$9\,000 < \overline{mn}^{\,2} \Rightarrow m = 9$$

más aún, n debe ser mayor a 4

Como el número dado termina en 4, “n” será 2 ú 8; como n debe ser mayor que 4, sólo puede ser 8.

$$\overline{9ab4} = 98^2 = 9\,604$$

Rpta.: $a = 6$ y $b = 0$

9.- Hallar los cuadrados perfectos de la forma:

$$k^2 = \overline{aabb}$$

Solución:

$$\overline{aabb} = k^2$$

Descomponiendo polinómicamente

$$1\,100a + 11b = k^2$$

$$11(100a + b) = k^2 \qquad (\alpha)$$

Se deduce que:

$$100a + b = \overset{\circ}{11} = 11p \qquad (\beta)$$

De (α) y (β), se deduce que debe ser cuadrado perfecto y se puede escribir como:

$$p = 9a + \frac{(a + b)}{11}$$

Como $a + b < 18$, se deduce $a + b = 11$:

$\therefore \quad p = 9a + 1 \;,\; a = 7 \;,\; b = 4$

Rpta.: $\overline{aabb} = 7\,744$

10.- Determinar un número de 6 cifras, cuadrado perfecto, de la forma $\overline{abcdef}$ y tal que:

$$\overline{cd} = 2 \,.\, \overline{ab} \text{ y } \overline{ef} = 3 \,.\, \overline{cd}$$

Solución:

Podemos establecer que:

$$\overline{abcdef} = k^2$$

por descomposición polinómica:

$$10\,000\overline{ab} + 100\,\overline{cd} + \overline{ef} = k^2$$

sustituyendo los valores de $\overline{cd}$ y $\overline{ef}$, según dato se tiene:

$$10\,000\overline{ab} + 200\overline{ab} + 6\overline{ab} = k^2$$

$$\overline{ab}(10\,206) = k^2$$

$$\overline{ab} \,.\, 2 \,.\, 3^6 \,.\, 7 = k^2 \qquad (\alpha)$$

Por condición de cuadrado perfecto en la expresión (α) los exponentes de los factores primos deben ser pares, requiriéndose que: $\overline{ab} = 2 \,.\, 7$

$\overline{ab} = 14$, entonces: $\overline{ab} = 14$, $\overline{cd} = 28$ y $\overline{ef} = 84$

Rpta.: $\overline{abcdef} = 142\,884$

11.- Se escribe 4 cifras consecutivas crecientes. Luego, se permuta las dos primeras y el número de 4 cifras así formado es un cuadrado perfecto. Hallar este número.

Solución:

Sean las cuatro cifras consecutivas

$$(n), (n + 1), (n + 2) \text{ y } (n + 3)$$

El número buscado es de la forma:

$$\overline{n(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)}$$

y por condiciones del problema permutamos las dos primeras cifras y este será un número cuadrado perfecto

$$\overline{(n + 1)\,n\,(n + 2)\,(n + 3)} = k^2$$

$$1111 \,.\, n + 1\,023 = k^2$$

Recomponiendo polinómicamente y reduciendo :

$$11\,\underbrace{(101 \,.\, n + 93)} = k^2$$

Se deduce que:

$$101 \,.\, n + 93 = \text{m}11$$

$$(\text{m}11 + 2)n + \text{m}11 + 5 = \text{m}11$$

$$2n + 5 = 11 \;\Rightarrow\; n = 3$$

Rpta.: El número buscado es 3 456

12.- Un horticultor tiene cierto número de árboles que quiere plantar en un campo cuadrado formando igual número de hileras en ambos sentidos. Hechos sus cálculos, observa que según lo que se había propuesto le sobran 132 árboles, entonces decide plantar 2 hileras más de árboles en ambos sentidos, más, para ello ve que necesita 96 árboles más. Dígase cuántos árboles tenía y cuántos había pensado sembrar por hilera en un principio.

Solución:

La suma de $132 + 96 = 228$ representa la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencian en 2 unidades.

Luego:

$$(A + 2)^2 - A^2 = 4A + 4 = 4\,(A + 1) = 228$$

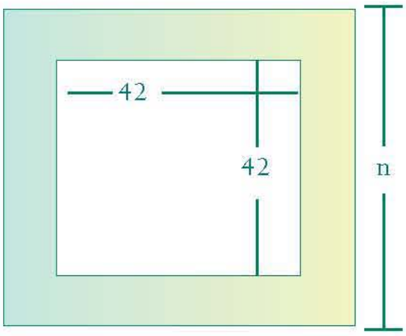
$$A = 56$$

Rpta.: Tenía: $56^2 + 132 = 3\,268$ árboles.
Pensó plantar: 56 árboles por hilera.

15.- Un Coronel que tiene 1 152 hombres, quiere formar con ellos un cuadrado de centro vacío que pueda contener 42 hombres de cada lado. Dígase cuántos hombres habrá en cada fila exterior del cuadrado y cuántas filas formará?

Solución:

La parte sombreada representa la presencia de los 1 152 soldados.



Del gráfico:

$$n^2 - 42^2 = 1152$$

$$n = 54$$

Cada fila exterior tiene: 54 hombres.

Número de filas exteriores:

$$\frac{54 - 42}{2} = 6 \text{ filas}$$

Rpta.: 54 hombres en cada fila exterior, formará: 6 filas.

CUBO DE UN NÚMERO

Se llama así al resultado de multiplicar tres veces un mismo número

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$(0,12)\,(0,12)\,(0,12) = (0,12)^3 = 0,001728$$

CUBO PERFECTO

Es todo número que tiene raíz cúbica exacta.

Ejemplos:

i) $\sqrt[3]{a^3} = a$

ii) $\sqrt[3]{512} = 8$

iii) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

iv) $\sqrt[3]{0,001728} = 0,12$

TEOREMA.- La diferencia de los cubos de 2 números consecutivos es igual a 3 veces el cuadrado del menor más 3 veces dicho número más uno.

Sean: $(A + 1)$ y A, dos números consecutivos.

Demostraremos que:

$$(A + 1)^3 - A^3 = 3A^2 + 3A + 1$$

Demostración:

$$(A + 1)^3 - A^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + 1 - A^3 = 3A^2 + 3A + 1$$

CARACTERÍSTICAS DE UN CUBO PERFECTO

1° La condición necesaria y suficiente para que un número sea cubo perfecto es que los exponentes de sus factores primos sean múltiplos de tres.

En efecto:

Si N es cubo perfecto, y descomponemos a N en factores primos, tal que:

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots l^{\lambda} \qquad (1)$$

Debe cumplirse que:

$$\alpha = 3\alpha_1 \; ; \quad \beta = 3\beta_1 \; ; \; \gamma = 3\gamma_1 \quad ; \dots \; \lambda = 3\lambda_1$$

Sustituyendo en (1):

$$N = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} c^{3\gamma_1} \dots l^{3\gamma_1} = k^3 \text{ (entero)}$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{N} = k \text{ (entero)}$$

2° Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

El cubo de un número termina en el cubo de la cifra de sus unidades y el cubo de los dígitos puede terminar en cualquiera de ellos.

CUÁNDO UN NÚMERO NO ES CUBO PERFECTO

1° No es cubo perfecto, si el número de ceros en que termina no es múltiplo de 3. Pues, si un número que termina en cero es cubo perfecto, lo será de otro que termine en cero: Si este otro termina en 1, 2, 3, …, p ceros, su cubo terminará en 3, 6, 9,…, 3p ceros.

2° Todo número que no sea múltiplo de 9 o que aumentado o disminuido en una unidad no sea múltiplo de dicho factor, no puede ser cubo perfecto.

En efecto, si N es cubo perfecto será:

$$N = A^3$$

Todo número A, sólo puede tener estas características:

$$A = \overset{\circ}{3}$$

$$A = \overset{\circ}{3} \pm 1$$

$$A = \overset{\circ}{3} \pm 2$$

Si: $A = \overset{\circ}{3}$

$\therefore \quad A^3 = \overset{\circ}{27} = \overset{\circ}{9}$

Si: $A = \overset{\circ}{3} \pm 1$

$\therefore \; A^3 = (\overset{\circ}{3} \pm 1)^3 = \overset{\circ}{27} \pm \overset{\circ}{27} + \overset{\circ}{9} \pm 1 = \overset{\circ}{9} \pm 1$

por lo tanto:

$$N \pm 1 = \overset{\circ}{9}$$

3° Todo número que sea divisible por un factor primo, no puede ser cubo si no lo es también por el cubo de dicho factor.

CUBO DE LOS 10 PRIMEROS NÚMEROS DE LA SERIE NATURAL

NÚMERO	CUBO
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1 000

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Demostrar que el número 1 331 es un cubo perfecto en todo sistema de numeración cuya base es mayor que 3.

Solución:

Sea "x" la base del sistema, entonces se tiene, descomponiendo polinómicamente que:

$$1\,331_x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = k^3$$

2.- Si al producto de 3 números enteros consecutivos se le agrega el número del medio, demostrar que el resultado es un cubo perfecto.

Solución:

Sea: $n(n+1)(n+2)$, el producto.

En efecto:

$$n(n+1)(n+2) + (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$= (n+1)^3 = k^3$$

3.- Si la suma de dos cubos de dos números es el capicúa 19 691. Hallar los números.

Solución:

Se tiene:

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - a\,.\,b + b^2) = 16\,691$$

Luego, (a + b) debe ser uno de los divisores de 19 691:

$$7,\ 29,\ 97,\ 203,\ 679\ \text{ y } 2\,813$$

y, el otro divisor será:

$$a^2 - a\,.\,b + b^2$$

Por simple comprobación se deduce que sólo verifican:

$$a = 27 \quad \text{y} \quad b = 2$$

$$27^3 + 2^3 = 19\,691$$

Rpta.: Los números son 27 y 2

4.- En una fiesta a la cual concurrieron menos de 2 000 personas, se observó en cierto momento que el número de mujeres que bailaba era k^3 y el número de las que no lo hacían era k; el, número de hombres que bailaban era k_1^2 y el número de los que no bailaban era k_1.

¿Cuál fue el número exacto de asistentes, si éste fue el mayor posible?

Solución:

Siendo el baile por parejas:

$$k^3 = k_1^2$$

se puede decir:

$$k^3 = k_1^2 = q^6$$

y así: $k = q^2$ y $k_1 = q^3$

por condición:

$$k^3 + k_1^2 + q^2 + q^3 = 2\,.\,q^6 + q^2 + q^3 < 2\,000$$

por lo tanto:

q = 3 (el mayor valor posible, porque para q = 4 se pasa), y el número de asistentes fue:

$$2\,.\,3^6 + 3^2 + 3^3 = 1\,494$$

Rpta.: asistieron 1 494 personas.

RADICACIÓN

Es la operación inversa a la potenciación; es decir, es el proceso aritmético que tiene por objeto hallar el factor de un producto de varios factores iguales.

RADICACIÓN EXACTA

Dados dos números: "N" llamado radicando o subradical y "m" llamado índice de la raíz, hallar otro tercero "A" llamado raíz, tal que:

$$A^m = N \Rightarrow A = \sqrt[m]{N}$$

RADICACIÓN APROXIMADA DE UN NÚMERO N

Puede ser por defecto y por exceso.

Se dice que la $\sqrt[m]{N}$ **por defecto** es el número "A", si A es el mayor número entero que verifica:

$$A^m < N$$

Se dice que la $\sqrt[m]{N}$ **por exceso** es el número "B", si B es el menor número entero que verifica:

$$B^m > N$$

RAÍZ CUADRADA

Raíz cuadrada de un número "N" es otro "A", tal que verifica:

$$\sqrt[2]{N} = \sqrt{N} = A \Rightarrow A^2 = N$$

RAÍZ CUADRADA APROXIMADA

La raíz cuadrada es aproximada cuando el cuadrado de la raíz no reproduce exactamente la cantidad subradical.

La raíz cuadrada es aproximada por defecto cuando la raíz es el mayor número entero cuyo cuadrado es menor que la cantidad subradical.

$$\sqrt{N} = A \Rightarrow A^2 < N$$

La raíz cuadrada es aproximada por exceso cuando la raíz es el menor número entero cuyo cuadrado es mayor que la cantidad subradical.

Ejemplo : $\sqrt{N} = P \Rightarrow P^2 > N$

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO CON UN ERROR MENOR QUE m/n

Extraer la raíz cuadrada de un número "A" con un error en menos de m/n es buscar el mayor múltiplo de m/n contenido en la raíz cuadrada de "A" y la fórmula es:

$$\frac{m}{n}\sqrt{A\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

TEOREMA. En la extracción de la raíz cuadrada inexacta, si el residuo "R" es menor que la raíz, el error de ésta va a ser menor que media unidad.

Sea "N": un número cualquiera, tal que:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & A \\ \hline R & \end{array} \Rightarrow N = A^2 + R \qquad (1)$$

ó:

$$R = N - A^2 \qquad (2)$$

Demostración:

Por condición del Teorema: $R < A$

Si se reemplaza R por A, la igualdad (1) se transforma en desigualdad, así:

$$N < A^2 + A$$

Con mayor razón se acentúa la desigualdad si al mayor se le agrega $\frac{1}{4}$

$$N < A^2 + A + 1/4$$

$$A^2 < N < (A + 1/2)^2$$

$$A < \sqrt{N} < (A + 1/2)$$

TEOREMA: En la extracción de la raíz cuadrada inexacta, el residuo es siempre menor que el doble de la raíz más uno.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & A \\ \hline R & \end{array} \Rightarrow N = A^2 + R \qquad (1)$$

Demostraremos que:

$$R < 2A + 1$$

Demostración: (Por contradicción)

1° Negamos las tesis, consideremos que:

$$R = 2A + 1 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$N = A^2 + 2A + 1$$

$$N = (A + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{N} = (A + 1)$$

La negación de la tesis nos ha conducido a una conclusión falsa, puesto que la N es por hipótesis "A" y no "A + 1", por lo tanto la negación de la tesis es falsa y la tesis es cierta.

2° Si:

$$R > 2A + 1 \qquad (3)$$

Como:

$$N = A^2 + R \qquad (4)$$

(3) en (4):

$$N > A^2 + 2A + 1 \Rightarrow N > (A + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{N} > A + 1$$

Analizando esta expresión, observamos que por haber negado la tesis, hemos llegado a concluir que la raíz de N es mayor que A + 1 y ésto es falso, puesto que por hipótesis la $\sqrt{N}$ es A.

Del análisis realizado, deducimos que no pudiendo ser R ni igual ni mayor que 2A + 1, tendremos que admitir que R < 2A + 1.

REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO

1. Se separa el número subradical en grupos de dos en dos cifras, empezando por la derecha.

2. Se determina mentalmente el mayor cuadrado exacto contenido en el grupo de la izquierda y se escribe su raíz cuadrada como la primera cifra de la raíz buscada.

3. El cuadrado de esta cifra se resta del grupo de la izquierda y junto al resto se baja el grupo siguiente para formar un dividendo parcial.

4. Se multiplica por 2 la raíz hallada para tomar un divisor parcial y se divide entre éste el número formado separando la primera cifra del dividendo anterior, formando el cociente (o el cociente disminuido) la cifra siguiente de la raíz buscada.

5. Para probar si la cifra es buena, se escribe al lado del divisor parcial para formar un divisor completo y se multiplica este divisor completo por la cifra de prueba. Si el producto se puede restar del dividendo formado, la cifra es buena.

6. Se resta este producto del dividendo formado, se baja el siguiente grupo de 2 cifras para formar un nuevo dividendo, se multiplica por 2 a parte de la raíz hallada para formar un divisor parcial y se procede como se indicó anteriormente.

7. Si no queda ningún residuo del dividendo formado con el último grupo del número dado, ha terminado la operación y la raíz es exacta. Si queda un residuo, se escribe una coma decimal después de esa parte de la raíz hallada. Se añade dos ceros al dividendo parcial, se procede como se indicó anteriormente y se continúa la operación tanto como decimales requiera.

8. Si en cualquier momento el divisor parcial es mayor que la parte del dividendo que resulta separando la primera cifra de la derecha, se escribe un cero como cifra correspondiente de la raíz, se baja el grupo siguiente y se procede como se indicó anteriormente.

9. Si el número dado, para extraer la raíz cuadrada, es un número decimal, se divide el número en grupos de 2 en 2 cifras de izquierda a derecha de la coma y si el último grupo de la derecha contiene solamente una cifra, se le añade un cero. Después se procede como se indicó anteriormente, poniendo la coma decimal en la raíz cuando se llega a la coma del número.

Ejemplo:

Hallar $\sqrt{526930,81}$

$\sqrt{5\ 26\ 93\ 0\ 81}$	725,9
4 9	142 . 2 = 284
3 6 9	1 445 . 5 = 7 225
2 8 4	14 509 . 9 = 130 581
8 5 3 0	
7 2 2 5	
1 3 0 5 8 1	
1 3 0 5 8 1	

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar la siguiente expresión:

$$E = \frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\ldots}}}}$$

Solución:

Haciendo el numerador igual a E_1:

$$E_1 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\infty}}}$$

Elevando al cuadrado:

$$E_1^2 = 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\infty}}}$$

Observe que las raíces valen E, porque es como el dato raíz infinita. Luego se puede escribir así:

$$E_1^2 = 3 \cdot E_1$$

Simplificando: $E_1 = 3$

Haciendo el denominador igual a E_2:

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots\infty}}}$$

Elevando al cuadrado:

$$E_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots\infty}}}$$

$$E_2^2 = \frac{1}{2}E_2$$

Simplificando:

$$E_2 = \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$E = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Rpta.: 6

2.- Hallar el residuo de extraer la raíz cuadrada de:

$\overline{444\ldots}$ (30 cifras)

Solución:

Si empezamos a efectuar la raíz cuadrada:

$\sqrt{4\ 4\ 4\ldots 4}$	66
8 4 4	126 . 6 = 756
8 8 4 4	1 326 . 6 = 7 956
8 8 8 4 4	

Se nota que por cada par de cifras del radicando, hay un ocho en el residuo. Como hay 15 pares de ochos, el residuo será un número formado por 15 cifras ocho.

Rpta.: Residuo $\underbrace{\overline{88\ldots 8}}_{15 \text{ cifras}}$

3.- Hacer racional la expresión:

$$E = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Solución:

Hacer racional una expresión es escribirla en forma tal que el denominador no esté afecto a la raíz. Si nosotros observamos que :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$$

Esto nos permite multiplicar numerador y denominador de la expresión dada por:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

que es la "conjugada del denominador".

La expresión propuesta, se puede escribir:

$$E = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}}{1}$$

Pero la expresión sub-radical queda como:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(8+2\sqrt{12}\right) = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(8+4\sqrt{3}\right)$$

$$= 4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$= 4$$

Luego la expresión propuesta es igual a:

$$E = \sqrt{4} = 2$$

Rpta.: 2

4.- Demostrar que el cuadrado de un número entero "n" es igual a la suma de los "n" primeros números impares.

Demostración:

Escribamos los números impares en términos de los cuadrados de los números de la serie natural:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

…

$$(n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n - 3$$

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

sumando miembro a miembro:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

Con lo cual, queda demostrada la propiedad.

RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO

La raíz cúbica de un número "N" es otro número "A" que verifica:

$$\sqrt[3]{N} = A \Leftrightarrow A^3 = N$$

REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO

1. Se divide el número cuya raíz se quiere hallar en grupos de tres cifras a partir de la coma decimal, a uno y otro lado de ella y añadiendo ceros a la parte decimal cuando el último grupo no contiene tres cifras.

2. Se halla el mayor cubo exacto que está contenido en el grupo de la izquierda y se escribe su raíz cúbica como primera cifra de la raíz cúbica buscada.

3. Se resta el cubo de esta cifra del primer grupo de la izquierda y se baja, junto al resto, el grupo siguiente para formar el dividendo parcial.

4. Debajo de la raíz hallada se escribe como divisor de tanteo el producto del cuadrado de la primera cifra de la raíz por 300, se divide el dividendo por este divisor de tanteo, y el cociente es la cifra de tanteo, y el cociente es la cifra de tanteo de la raíz.

5. Para hallar el divisor completo se suma al divisor parcial los dos números siguientes: 30 veces el producto de la primera cifra de tanteo y el cuadrado de la cifra de tanteo.

6. Se multiplica el divisor completo por la cifra de tanteo; si el producto es menor que el tanteo, la cifra es buena; se resta del dividendo y se baja el grupo siguiente para formar un nuevo dividendo.

7. Si el producto es mayor que el dividendo, se reemplaza la cifra de tanteo por la inferior en una unidad; se forma un nuevo divisor como se indica en (4) y (5) y se halla el resto correspondiente para formar el nuevo dividendo con arreglo a (6).

8. Usando las dos cifras obtenidas en la raíz como "primera cifra" se repite el paso (4) para hallar la siguiente cifra de tanteo.

9. Si es necesario se repite los pasos (5), (6) y (7) y se continúa hasta que ya no haya más grupos en el número inicial, o tanto como se desee añadiendo nuevos grupos de tres ceros después de la coma de decimales.

10. Se separa en la raíz tantas cifras decimales como grupos de a tres cifras decimales haya en el número dado.

Ejemplo:

Calcular la raíz cúbica del número 78347809,639.

$\sqrt[3]{78\,347\,809,639}$	427,9
64	$4^2 . 300 = 4\,800$
14347	$30 . 4 . 2 = 240$
10088	$2^2 = 4$
4259809	5 044
3766483	$42^2 . 300 = 529\,200$
493326 639	$30 . 42 . 7 = 8\,820$
493326 639	$7^2 = 49$
	538 069
	$427^2 . 300 = 54\,698\,700$
	$30 . 427 . 9 = 115\,290$
	$9^2 = 81$
	54 814 071

En conclusión:

$$\sqrt[3]{78\,347\,809,639} = 427,9$$

HALLAR LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO CON UN ERROR MENOR QUE a/b

Extraer la raíz cúbica de un número "N" en menos de a/b es buscar el mayor múltiplo de a/b contenido en la raíz cúbica de "N" y la fórmula es:

$$\frac{a}{b}\sqrt[3]{N\left(\frac{b}{a}\right)^3}$$

Ejemplo:

Hallar la raíz cúbica de 37,45 en menor de 7/20.

$$\frac{7}{20}\sqrt[3]{\frac{37,45\,.\,20^3}{7^3}} = \frac{7}{20}\sqrt[3]{873}$$

La raíz cúbica de 873 en menos de una unidad es 9, así:

$$\frac{7}{20}\cdot 9 = \frac{63}{20} = 3\,\frac{3}{20}$$

Mientras que $\sqrt[3]{37,45} = 3\ 1/3$. Advertir que la diferencia entre ambos resultados es menor que 7/20.

TEOREMA: En la extracción de la raíz cúbica, el residuo es menor que el triple del cuadrado de la raíz cúbica más el triple de esta raíz más uno.

Hipótesis:

$$\begin{array}{c|l} \sqrt[3]{N} & A \\ \cline{2-2} R & \end{array}$$

Tesis: $R < 3A^2 + 3A + 1$

Demostración: (por método del absurdo)

1° Admitamos que: $R = 3A^2 + 3A + 1$ (1)

Por otro lado: $N = A^3 + R$ (2)

Sustituyendo (1) en (2):

$$N = A^3 + 3A^2 + 3A + 1$$

$$N = (A + 1)^3$$

$$\sqrt[3]{N} = A + 1 \qquad (3)$$

Analizando la expresión (3) observamos que por haber negado la tesis hemos llegado a la conclusión de que la $\sqrt[3]{N}$ es A + 1; y ésto es falso, puesto que por hipótesis la $\sqrt[3]{N}$ es A y no A + 1. Por lo tanto, la negación de la tesis es falsa, entonces la tesis es cierta.

Si el resultado no puede ser igual a $3A^2 + 3A + 1$, no podrá ser tampoco mayor que esa cantidad, por lo tanto, si R no puede ser igual ni mayor que $3A^2 + 3A + 1$ se deduce que R es menor que dicha cantidad.

PRUEBA POR LOS NUEVES DE LA RAÍZ CÚBICA

Sea:

$$\begin{array}{c|l} \sqrt[3]{N} & A \\ \cline{2-2} R & \end{array} \Rightarrow N = A^3 + R \quad (1)$$

Sean p, q, r, los restos que se obtiene al dividir entre 9, los números N, A y R respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} N &= m9 + p \\ A &= m9 + q \\ R &= m9 + r \\ A^3 &= m9 + q^3 \end{aligned}\right\} (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), adecuadamente:

$$m9 + p = m9 + q^3 + m9 + r$$

$$m9 + p = m9 + (q^3 + r)$$

Por lo tanto, para verificar que la raíz hallada es correcta se debe cumplir que: la diferencia entre $(q^3 + r)$ y "p" debe ser cero, 9 ó al dividir esos números entre 9, deben dar el mismo residuo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el número $\overline{abcd}$ si se sabe que al extraerle su raíz cúbica, se obtuvo $\overline{ad}$ de raíz y 190 de residuo y que todas las cifras del número son diferentes de cero.

Solucíon:

$$\begin{array}{c|l} \sqrt[3]{a\,b\,c\,d} & \overline{ad} \\ \cline{2-2} 190 & \end{array} \Rightarrow \overline{abcd} = \overline{ad}^{\,3} + 190$$

El número debe ser:

$$10^3 \leq \overline{abcd} < 10^4$$

o también:

$$10^3 \leq \overline{ad}^{\,3} + 190 < 10^4$$

$$10 \leq \overline{ad} \leq 21,4 \Rightarrow a = 1 \text{ ó } a = 2$$

Si $a = 1$: (para $a = 2$ no se cumple)

entonces:

$$\overline{abcd} = \overline{1bcd}$$

$$10^3 < \overline{1bcd} < 2 \,.\, 10^3$$

o, también:

$$10 < \overline{1d}^3 + 190 < 2 \,.\, 10^3;$$

$$10 < \overline{1d} < 12{,}2$$

El único valor que satisface esta desigualdad es para $d = 1$, luego:

$$\overline{1d} = 11$$

Entonces: $11 \,.\, 11 \,.\, 11 = 11^3 = 1\,331$

$$N = 1\,331 + 190 = 1\,521$$

Rpta.: $\overline{abcd} = 1\,521$, $\overline{abcd} = 1$

2.- Demostrar que la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos, disminuída en 1 es siempre divisible por 6.

Demostración:

En efecto, efectuando el primer miembro resulta el segundo.

$$(a + 1)^3 - a^3 - 1 = 3a(a + 1)$$

Analizando el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 3 y se deduce que entre "a" y "a + 1", uno de ellos es par, luego es divisible por 6.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Completar la siguiente raíz cuadrada y dar como respuesta la suma de las cifras de la cantidad subradical (cada asterisco representa una cifra).

```
√ * * * * 9 8 | * * *
  * *         |-------
  ----        |
    * * *     |
      * *     |
    -------   |
      4 * * * |
      * * * * |
    --------- |
        4 * * |
```

Rpta.: 33

2. La raíz cuadrada de "N" es "q" y el residuo "r". ¿Cuál es el menor número que se le puede sumar a "N" para que la raíz aumente en 1?

Rpta.: $2q + 1 - r$

3. Hacer racional la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Rpta.: $-2 - \sqrt{6}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1\right)$

4. Hacer el producto de las cuatro cantidades irracionales siguientes:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$C = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$D = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Rpta.: $(A)\,(B)\,(C)\,(D) = 1$

5. Simplificar la expresión:

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Rpta.: $\sqrt{2}$

6. ¿Cuántos cuadrados perfectos son múltiplos de 16 pero no de 32 y tienen 3 cifras ?

Rpta.: 3

7. ¿Cuántos números, cubos perfectos, tienen como raíz cúbica un número entero de 2 cifras?

Rpta.: 90

8. Si $\overline{ab}$ es la raíz cúbica del cubo perfecto $\overline{abcd8}$, hallar: a + b c + d.

Rpta.: 18

9. ¿Cuántos números de 4 cifras existen tales que cada uno de estos números y su complemento aritmético tienen la misma raíz cúbica?

Rpta.: 175

10. Dar el valor del residuo al extraer la raíz cuadrada de $456430_{(7)}$

Rpta.: $553_{(7)}$

11. Calcule $\overline{abc}$ sabiendo que el número $\overline{9bcad00}$ es un cubo perfecto divisible por 3 y 7. Indicando luego el valor de a + b + c.

Rpta.: 9

12. Dos números impares consecutivos tienen por raíces cuadradas 2 números consecutivos, si el residuo de uno de ellos es 94, ¿Cuál es el valor del mayor de los 2 números? Dar el valor de las sumas de las cifras de dicho número.

Rpta.: 10

13. Hallar el mayor número $\overline{abc}$ tal que al extraer la raíz cuadrada de $\overline{abc}$ y de $\overline{cba}$ se obtiene el mismo residuo por defecto. Dar el valor de a + b + c.

Rpta.: 16

14. Si el número N = $\overline{35aa8b8}$ es un cubo perfecto. Hallar la diferencia de a y b

Rpta.: 1

15. Los tres residuos (parciales y total) de una raíz cuadrada de un número de 5 cifras son : 0, 34, 63. Hallar la suma de las cifras de la raíz.

Rpta.: 11

16. Hallar el cuadrado perfecto de la forma $\overline{abc90abc}$. Dar como respuesta a + b.

Rpta.: 16

17. Si: a, b, c y d son cifras diferentes de cero.

Hallar (a + b + c + d) si [$\overline{ab} = d^2$ y $\overline{ca} = b^2$]

Rpta.: 19

18. El residuo por defecto de la raíz cúbica de N es 370. El residuo por exceso de la raíz cúbica de N - 50 es 77. ¿Cuál es el valor de la raíz por defecto?

Rpta.: 11

19. Al extraer la raíz cúbica de $\overline{abcd}$ se obtuvo $\overline{ad}$ de raíz y 150 de residuo. ¿Cuál es el valor de a + d?

Rpta.: 2

20. Hallar el menor número tal que al multiplicarlo por 6 se obtiene un cuadrado perfecto y al multiplicarlo por 90 un cubo perfecto.

Rpta.: 2 400

EJERCICIOS PROPUESTOS CON ALTERNATIVAS

1. Si: $a^3 - b^3 = 316$. Hallar a - b.

a) 2 b) 79 c) 158

d) 4 e) N.A.

2. La suma de cifras de la raíz cúbica del número N que es el mayor cubo perfecto de 18 cifras es :

a) 54 b) 45 c) 36

d) 63 e) 72

3. Hallar la suma del mayor y menor número cuya raíz cuadrada por defecto es 24.

a) 1 021 b) 1 201 c) 1 321

d) 1 231 e) Falta información

4. Hallar el mayor número de 4 cifras tal que sea igual al cubo de la suma de sus cifras. Dar como respuesta la suma de sus cifras centrales.

a) 18 b) 9 c) 10

d) 11 e) N.A.

5. $\overline{abb}$ y $\overline{acd}$ son números cuadrados perfectos, consecutivos y pares; además $\overline{cd} - \overline{bb} = 52$. Con estos datos hallar abcd.

a) 1 820 b) 2 486 c) 1890

d) 1 436 e) 1 496

6. Hallar el menor valor de "n" si se sabe que: $\overline{abba}_{(n)} = k^3$

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) N.A.

7. ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar 10! para que sea cubo perfecto?

a) 84 b) 96 c) 154

d) 4 410 e) N.A.

8. El área de un cuadrado es $\overline{a9b9}$ si a + b = 7. Hallar el lado de dicho cuadrado.

a) 129 b) 33 c) 66

d) 77 e) 67

9. Hallar (a + b + c + d) si:

$\overline{6\ a\ b\ c\ d\ 6}$ es cubo perfecto.

a) 18 b) 15 c) 14

d) 20 e) 17

10. Un hombre nacido en la primera mitad del siglo XIX tenía $\sqrt[3]{x}$ años en el año "x". Entonces nació en:

a) 1 849 b) 1 825 c) 1 812

d) 1 836 e) 1 806

11. Extraer la raíz cuadrada de N, dar como respuesta la suma de las cifras de su raíz.

$$N = \overbrace{100\ldots\ldots\ldots\underbrace{020\ldots\ldots 001}_{7\text{ cifras}}}^{14\text{ cifras}}$$

a) 2 b) 3 c) 8

d) 15 e) 18

12. Hallar dos números tales que el cuadrado de su suma sea 7 744 y el cuadrado de su diferencia 324. Uno de ellos es:

a) 34 b) 28 c) 56

d) 47 e) 53

13. ¿Cuántos pares de número enteros existen tales que la diferencia de sus cuadrados es 48?

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) N.A.

14. ¿Cuántos números de 2 cifras pueden ser residuos máximos de una raíz cuadrada?

a) 99 b) 100 c) 90

d) 45 e) 15

15. Calcule cuántos números impares de 5 cifras existen que sean cuadrados perfectos.

a) 107 b) 109 c) 108

d) 110 e) 111

16. ¿Cuántos "unos" hay en la raíz cuadrada de:

$$\overbrace{100\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0}^{100}2\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 001}_{50}$$

a) 2 b) 5 c) 10

d) 11 e) 49

17. Si $\overline{17abc0}$ es un cuadrado perfecto.

Calcule: $\sqrt{a+b+c-1}$

a) 3 b) 2 c) 5

d) 1 e) $\sqrt{10}$

18. En qué cifra terminará la suma de los cuadrados de los 87 primeros números.

a) 0 b) 5 c) 7

c) 8 e) 1

19. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abb5}$ son cuadrados perfectos?

a) 1 b) 3 c) 9

d) 90 e) 99

20. ¿Cuántos cuadrados perfectos de 4 cifras terminan en la cifra 1?

a) 9 b) 10 c) 12

d) 13 e) 7

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) A	3) B	4) A	5) E
6) C	7) D	8) D	9) C	10) E
11) A	12) E	13) C	14) D	15) C
16) A	17) A	18) A	19) B	20) D

SISTEMAS DE UNIDADES DE MEDIDA

Actualmente, el Sistema de Unidades de Medida que se viene imponiendo en el mundo entero, es el SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS, que se denota así: S.I.

Sin embargo, por razones de tradición, conveniencias comerciales u otras razones todavía se usa las otras unidades de medida de antiguos sistemas, tales como: el inglés, métrico, español, etc. En este caso se hará una breve reseña de estos sistemas y también del S.I.

Hablaremos de las unidades de longitud, superficie, volumen o capacidad, peso, tiempo, ángulos, entre otras.

SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS (S.I)

Es el conjunto de medidas cuya unidad fundamental es el metro.

VENTAJAS DEL S.I.

- Es fijo, pues se ha establecido formal y legalmente.
- Está en armonía con el sistema de numeración decimal adoptado universalmente, lo cual facilita las operaciones que se efectúa con números en ese sistema.
- Existe una relación y dependencia entre las unidades de sus diversas especies.
- Actualmente, se ha determinado que 1 metro equivale a la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en el lapso de 1/2997294858 de segundo.

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO S.I.
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de materia	mol	mol

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

UNIDADES DERIVADAS

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Velocidad	metro por seg.	m/s
Fuerza y peso	newton	N
Presión	pascal	Pa
Capacidad	litro	L

- El litro es la capacidad interior de un cubo, cuya arista tiene como longitud la décima parte del metro.
- El kilogramo es lo que pesa en el vacío a la temperatura de 4° centígrados, la cantidad de 1 L de agua. En esta obra usaremos como unidad de peso 1 kg. Sin embargo debe quedar aclarado que la unidad de peso del SI es el newton "N".

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS

Los múltiplos y submúltiplos de una unidad principal se forma anteponiendo al nombre de la unidad principal, los siguientes prefijos:

MEDIDAS DE LONGITUD

SUBMÚLTIPLOS DEL METRO

decímetro	d	10^{-1}	= 0,1 m
centímetro	c	10^{-2}	= 0,01 m
milímetro	mm	10^{-3}	= 0,001 m
decimilímetro	dmm	10^{-4}	= 0,0001 m
centimilímetro	cmm	10^{-5}	= 0,00001 m
micrómetro	μ	10^{-6}	= 0,000001 m
nanómetro	η	10^{-9}	= 0,000000001 m
picómetro	ρ	10^{-12}	= 0,000000000001 m
femtómetro	f	10^{-15}	= 0,000000000000001 m
attometro	a	10^{-18}	= 0,000000000000000001 m

MÚLTIPLOS DEL METRO

Decámetro	D	10^{1}	= 10 m
Hectómetro	H	10^{2}	= 100 m
Kilómetro	k	10^{3}	= 1000 m
Miriámetro	M	10^{4}	= 10 000 m
Hecto-kilómetro	Hk	10^{5}	= 100 000 m
Mega-metro	M	10^{6}	= 1 000 000 m
Giga-metro	G	10^{9}	= 1 000 000 000 m
Tera-metro	T	10^{12}	= 1 000 000 000 000 m

MEDIDAS DE SUPERFICIE

1 Miriámetro cuadrado	$(Mm)^2$	=	100 000 000 m^2
1 Kilómetro cuadrado	$(km)^2$	=	1 000 000 m^2
1 Hectómetro cuadrado	$(Hm)^2$	=	1 0 000 m^2
1 Decámetro cuadrado	$(Dm)^2$	=	100 m^2
1 Metro cuadrado	$(m)^2$	=	1 m^2
1 decímetro cuadrado	$(dm)^2$	=	0,01 m^2
1 centímetro cuadrado	$(cm)^2$	=	0,0001 m^2
1 milímetro cuadrado	$(mm)^2$	=	0,000001 m^2

Se tiene además las medidas agrarias empleadas en las mediciones de campos.

1 área = a = 100 m^2

Múltiplo: Hectárea = Ha = 10 000 m^2

Submúltiplo: Centiárea = Ca = 1 m^2

MEDIDAS DE VOLUMEN

1 metro cúbico	=	m^3	=	$1m^3$
1 decímetro cúbico	=	dm^3	=	0,001 m^3
1 centímetro cúbico	=	cm^3	=	0,000001 m^3
1 milímetro cúbico	=	mm^3	=	0,000000001 m^3

No se utiliza múltiplos.

MEDIDAS DE CAPACIDAD

1 Mirialitro	=	Ml	=	10 000 L
1 Kilolitro	=	Kl	=	1 000 L
1 Hectolitro	=	Hl	=	100 L
1 Decalitro	=	Dl	=	10 L
1 litro	=	l	=	1 L
1 decilitro	=	dl	=	0,1 L
1 centilitro	=	cl	=	0,01 L
1 mililitro	=	ml	=	0,001 L

MEDIDAS DE PESO

1 Tonelada métrica	=	1 000 000 g	=	1 000 kg
1 Quintal métrico	=	100 000 g	=	100 kg
1 Miriagramo	=	10 000 g	=	10 kg
1 Kilogramo	=	1 000 g	=	1 kg

HUSOS HORARIOS

Se llama así al sistema que regula las diferentes horas en los distintos países y ciudades del mundo.

Está en relación directa con el movimiento astronómico de rotación de nuestro planeta.

El conocimiento y estudio de los husos horarios es importante y útil, a la vez que fácil, pues sólo hay que disponer de un mapamundi para establecerlos.

Sin embargo es recomendable tener mapas con las distribución de las horas, en razón de que algunos países han establecido modificaciones en sus respectivas zonas horarias.

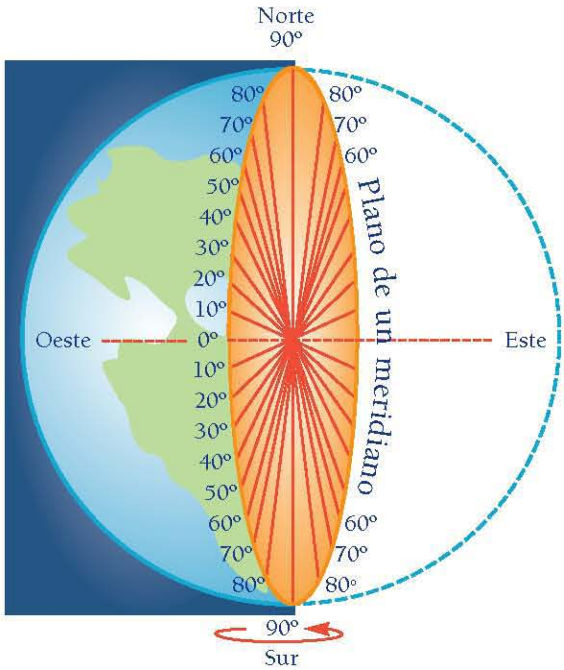
Como se sabe, el tiempo que permanece la mitad del globo terrestre iluminado por el sol se llama día y el tiempo que permanece en tinieblas, la otra mitad, se llama noche.

Días y noches se van sucediendo por efecto de la rotación, pues aunque la Tierra nos parece inerte, en realidad gira a razón de 465 metros por segundo, medido en un punto de la Línea Ecuatorial, y en su movimiento de traslación alrededor del Sol avanza más de 29 000 metros por segundo.

Se llama longitud a la distancia angular de cualquier punto al meridiano de Greenwich y latitud, es la distancia angular de cualquier punto del globo a la Línea Ecuatorial.

RELACIONES ENTRE LONGITUD Y TIEMPO

La Tierra, al dar una vuelta completa de oeste a este, recorre el arco correspondiente a un ángulo de 360° lo que nos permite establecer lo siguiente:



TIEMPO		LONGITUD ANGULAR
24 horas	< >	360°
1 hora	< >	15°
1 minuto	< >	15′
1 segundo	< >	15”

Estas equivalencias se cumplen sobre un punto de la Línea Ecuatorial o sobre cualquier circunferencia paralela a la Línea Ecuatorial. La Línea Ecuatorial separa del Hemisferio Norte del Hemisferio Sur

De acuerdo con estas igualdades, para saber la diferencia horaria que existe entre dos puntos de la superficie terrestre bastará dividir la distancia en arco que existe entre sus meridianos, por el factor 15. El meridiano de Greenwich divide a la Tierra en: Hemisferio Este (E) y en Hemisferio Oeste (O).

En el mismo hemisferio:

$$\text{diferencia de horas} = \frac{\text{diferencia de longitudes}}{15}$$

En distinto hemisferio:

$$\text{diferencia de horas} = \frac{\text{suma de longitudes}}{15}$$

SISTEMA INGLÉS DE MEDIDAS

LONGITUD

3 granos de cebada	=	1 pulgada (in.)
12 pulgadas	=	1 pie (ft.)
3 pies	=	1 yarda imperial (yd).
5 1/2 yardas	=	1 vara (rd.)
40 varas	=	1 estadio (fur.)
8 estadios	=	1 millas (mi.)
1,15 millas	=	1milla naútica (naut.mi.)
3 millas náuticas	=	1 legua
7 200 leguas	=	circunferencia del ecuador terrestre

SUPERFICIE

144 pulgadas cuadradas (sq in)	=	1 pie cuadrado (sq ft)
9 pies cuadrados	=	1 yarda cuadrada (sq yd)
$30\frac{1}{4}$ yardas cuadradas	=	1 vara cuadrada (sq rd)
40 varas cuadradas	=	1 pértica (R)
4 pérticas	=	160 varas cuadradas 1 ACRE (A)

VOLUMEN

12^3 = 1 728 pulgadas cúbicas (cu in)	=	1 pie cúbico (cu ft)
27 pies cúbicos	=	1 yarda cúbica (cu yd)
16 pies cúbicos	=	1 pie cuerda (cd ft)
8 pies cuerdas	=	1 cuerda (de leña)
$24\frac{3}{4}$ pies cúbicos	=	1 pértica (de piedra o mampostería)

PESOS (avois dupois = tener peso)

28,35 gramos (g)	=	1 onza (onz)
16 onzas	=	1 libra (lb)
100 libras	=	100 libras (cwt)
196 libras de harina	=	1 barricada (bbl)
2 000 libras	=	1 tonelada corta (T)
2 240 libras	=	1 tonelada larga (long ton) en minería

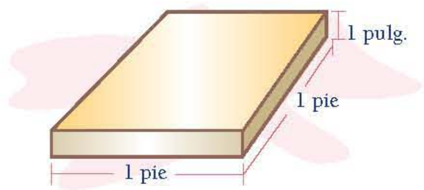
MEDIDAS DE LÍQUIDOS

4 gills (gi)	=	1 pinta (pt)
2 pintas	=	1 cuarto (qt)
4 cuartos	=	1 galón (gal)
1 galón	=	231 pulgadas cúbicas
31 1/2 galones	=	1 barril (bbl)
2 barriles	=	1 pipa (hhd)
2 pipas	=	1 bota

MEDIDAS DE MADERA

Para medir maderas se utiliza el "foot-board measure", impropiamente llamado "pie cuadrado". El "foot-board measure" es una medida cúbica ya que representa el volumen de una porción de madera cuyas dimensiones son: 1 pie de largo (12 pulg.); 1 pie de ancho (12 pulg.) y una pulgada de espesor.

El símbolo de 1 "foot-board measure" es, $\boxplus$ equivale a:



$\boxplus$ = 1 pie . 1 pie . 1 pulg

$\boxplus$ = 12 pulg . 12 pulg . 1 pulg = 144 pulg^3

OBSERVACIÓN: Para determinar cuántos "pies cuadrados" tiene una pieza de madera, bastará con dividir el volumen (en pulgadas) por 144.

Aplicación: Determinar cuántos "pies cuadrados" tiene un tablón de 6 pies de largo, 1,5 pies de ancho y 3 pulg. de espesor.

$$\boxplus = \frac{\text{Volumen total (en pulg.)}}{144}$$

$$\boxplus = \frac{6 \,.\, 12 \,.\, 1{,}5 \,.\, 12 \,.\, 3}{144} = 27 \text{ pies cuadrados}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Si en New York son 10 a.m. (75° Oeste) ¿Qué hora será en Honolulú, 165° E? Si un avión partiese la hora mencionada y el vuelo durará 8 h 40 min ¿A qué hora llegaría a Honolulú?

Solución:

New York	Honolulú
75° (O)	165° (O)
10 a.m.	

Como ambas ciudades estan en el mismo hemisferio:

por fórmula:

$$\text{Dif. hora} = \frac{165° - 75°}{15} = 6 \text{ horas}$$

La hora en Honolulú es:10 a.m. - 6 horas = 4 a.m.

∴ El avión llegaría a las: 4 h + 8 h 40 min = 12 h 40 min del mismo día.

Rpta.: 12 : 40 pm.

2.- Cuando en A son las 3 p.m. en B son las 7 h 30 min p.m. Si la longitud de A es 20° (O). ¿Cuál es la de B?

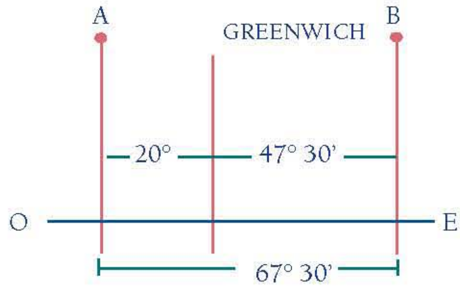
Solución:

Diferencia de horas:

19 h 30 min - 15 h = 4 h 30 min

Distancia angular entre A y B:

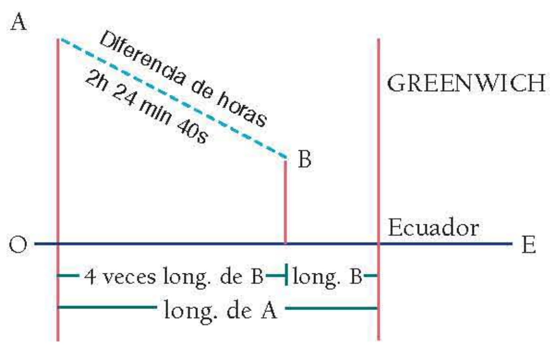
Long. ang = (4 h 30 min) . 15° = 67° 30'



Rpta.: Longitud de B = 47° 30'

3.- La diferencia horaria entre dos ciudades A y B, occidentales, es 2 h 24 min 40 s. Hallar la longitud de A si es 5 veces la longitud de B.

Solución:



Como las dos ciudades están al oeste de Greenwich, la que tiene mayor longitud (A), tiene la hora más temprana.

$$\text{Dif. Horas} = \frac{\text{4 veces longitud de B}}{15°}$$

(2 h 24 min 40 s) 15 = 4 veces longitud de B

$$\text{longitud de B} = \frac{36°10'00"}{4} = 9°2'30"$$

$$\therefore \text{ longitud de A } = 5(9°\ 2'\ 30")$$
$$= 45°\ 12'\ 30"$$

Rpta.: La longitud de A es 45° 12' 30"

4.- Si un pie cuadrado pesa 10 lb, hallar su densidad en el sistema métrico.

Solución:

Como:

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \qquad (1)$$

$$\text{Masa} = 10 \text{ lb} = 10 \,.\, 460 \text{ g} \qquad (2)$$

$$\text{Volumen} = 144 \text{ pulg}^3$$

$$\text{Volumen} = 144(2{,}54)^3 \text{ cc} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

Densidad = 1,95 g/cc

Rpta.: Su densidad es 1,95 g/cc

5.- ¿Cuántos galones U.S.A. hay en 7,36 toneladas métricas de agua?

Solución:

7,36 toneladas de agua = 7 360 L

Como:

1 L = 0,264 galones U.S.A.

Entonces:

7 360 . 0,264 = 1 943 gal.

Rpta.: 1 943 galones U. S. A.

6.- Un comerciante compró 3 yardas de una tela a 30 soles el pie. Si luego lo vende a S/. 3 la pulgada. ¿Cuánto ganó?

Solución:

1 yarda = 3 pies = 3 . 12 pulgadas = 36 pulgadas

Compró: 3 yd = 3 . 36 = 108 pulgadas

Invirtió: 3 . 3 pies . 30 soles/pie = 270 soles

Al efectuar la venta a S/. 3/pulgadas recaudó:

108 . 3 = S/. 324

$\therefore$ ganó : 324 - 270 = S/. 54

Rpta.: Ganó S/. 54

7.- Si x, y, z son cifras diferentes, hallar : (x + y + z)

Si:
x quintales + y arrobas + z libras = 4 080 onzas

Solución:

Reduciendo todo a onzas:

x(100 k) + y(25 lb) + z(16 oz) = 4 080 oz

x(3 524,8 oz) + y(400oz) + z(16 oz) = 4 080 oz

Simplificando y aproximando:

$$220x + 25y + z = 255$$

Por tanteos:

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \;; \quad y = 1 \quad z = 10$$

Rpta.: x + y + z = 12

8.- A pesa tantos kg como la mitad del peso en libras de B. Si A bajara 10 lb, pesarían igual. ¿Cuántas lb pesa A?

Solución:

Sea: n = peso en libras

$$\text{Peso de A} = \frac{n}{2} \text{ kg} \qquad (1)$$

$$\text{Peso de B} = \; n \text{ lb} \qquad (2)$$

Por condición del problema:

$$\frac{n}{2} \text{ k} - 10 \text{ lb} = n \text{ lb}$$

pero 1kg = 2,2 lib; luego:

$$\frac{n}{2}(2{,}2) \text{ lb} - 10 \text{ lb} = n \text{ lb}$$

$$n = 100$$

$$\text{Peso de A en lb} = \frac{100}{2} \cdot 2{,}2$$

Rpta.: A pesa 110 lb

9.- Un cubo cuya arista es doble de la de otro tiene 84 pies cúbicos (foot-board) más que aquel. ¿Cuál es la arista del menor?

Solución:

l = arista del 1er. cubo

$2\,l$ = arista del 2do. cubo

Volumen (en pies cúbicos) del 1er. cubo $= \dfrac{l^3}{144}$

Volumen (en pies cúbicos) del 2do. cubo $= \dfrac{8l^3}{144}$

Por condición del problema:

$$\frac{8l^3 - l^3}{144} = 84$$

$7l^3 = 84 \,.\, 144$

$l^3 = 12^3 \Rightarrow l = 12$ pulg $=$ 1pie

Rpta.: La arista menor mide 1 pie

10.- Un cubo de 3 pies de arista se divide en 4 partes iguales. Si el costo de cada parte es S/. 810. ¿Cuánto cuesta el "pie cuadrado"?

Solución:

Costo total del cubo $= 4 \,.\, 810 =$ S/. 3 240

Volumen del cubo (en pies cuadrados) $= \dfrac{\{3(12)\}^3 \text{ pulg}^3}{144 \text{ pulg}^3}$

Volumen del cubo (en pies cuadrados) $= 324$

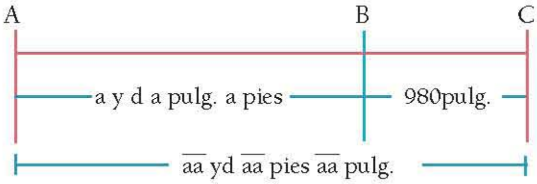
$\therefore$ Cada $\square$ cuesta $\dfrac{3\,240}{324} =$ S/. 10

Rpta.: El "pie cuadrado" cuesta S/. 10

11.- A, B y C están sobre la misma recta. B se encuentra a 980 pulgadas de C. Si de A a B hay a yardas, a pies, a pulgadas y de A a C hay $\overline{aa}$ yardas, $\overline{aa}$ pies, $\overline{aa}$ pulgadas. Hallar a.

Solución:

Por condición del problema podemos establecer:



Por condición del problema:

($\overline{aa}$ yd $\overline{aa}$ pies $\overline{aa}$ pulg) - (a yd a pies a pulg) = 980 pulg

Primero, se descompone los números $\overline{aa}$ polinómicamente; luego se transforma todo a pulgadas, finalmente se despeja "a".

$11 \,.\, a(36) + 11 \,.\, a(12) + 11a$ pulg

$-(36a$ pulg $+ 12a$ pulg $+ a) = 980$ pulg

$11a(49)$ pulg $- 49a$ pulg $= 980$ pulg

$49a$ pulg $(11 - 1) = 980$ pulg

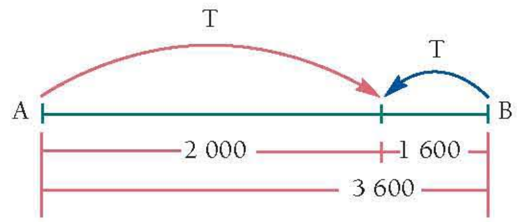
$a = 2$

Rpta.: a = 2

12.- Dos móviles separados por una distancia de 3 600 metros parten al mismo instante, en sentidos contrarios, hacia su encuentro. Este se produce a 2 000 metros de uno de los puntos de partida. Si con las mismas velocidades, el móvil que lleva menor velocidad, hubiese partido 6 minutos antes que el otro, el encuentro se hubiera producido en el punto medio.

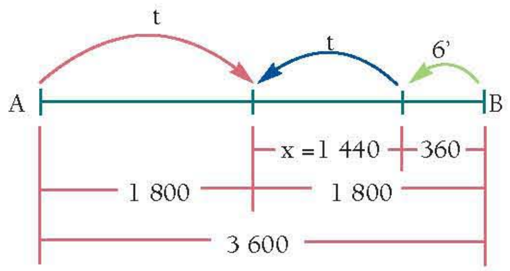
Determinar en metros por minuto las velocidades de ambos móviles.

Solución:



Para tiempos iguales: Cada vez que "A" recorre 200 m, "B" recorre 160 m.

Por otro lado:



En el tiempo "t":

A recorre 1 800 m (9 veces 200 m)

B recorrerá 9 veces 160 m = 1 440 m

Por otra parte, por dato:

$$V_B = \frac{360\text{m}}{6\text{ min}} = 60\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

El tiempo transcurrido hasta el encuentro es:

$$t = \frac{1\,440}{60} = 24\text{ min}$$

$$\therefore \quad V_A = \frac{1\,800}{24} = 75\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Rpta.: V_A = 75 m/min

V_B = 60 m/min

13.- A las 8 a.m. un grupo de 20 obreros inicia el desalojo de un depósito de azúcar, a fin de colocar las bolsas en el muelle para embarcarlas.

Cada obrero puede poner en el muelle 12 bolsas por hora, siendo la capacidad de cada una de ellas de 0,15 m^3.

Tres horas después, un equipo de 36 estibadores empieza el embarque, cargando cada uno de ellos 1,5 m^3 de azúcar por hora, siendo el número de obreros invariable y sabiendo que el barco partió 4 horas después que logró la buena organización de los trabajos, es decir, después de haber disminuido los estibadores necesarios, para que los que queden embarquen por hora el mismo número de bolsas que están depositando los obreros en el muelle. Determinar:

a) Hora de partida del barco.

b) Número de estibadores que quedó trabajando al final.

c) Número total de bolsas que se llevó el barco.

Solución:

Cada obrero coloca en el muelle:

$$12 \cdot 0{,}15\text{ m}^3 = 1{,}8\text{ m}^3$$

de azúcar por hora. A las 11 a.m. (3 horas después) cuando empezaron a trabajar los estibadores, los obreros habían almacenado en el muelle:

$$20 \cdot 1{,}8 \cdot 3 = 108\text{ m}^3$$

Los 36 estibadores cargan por hora:

$$36 \cdot 1{,}5 = 54\text{ m}^3$$

Los estibadores habrán cargado el mismo volumen de azúcar que los obreros cuando logren descontarle los 108 m^3 que éstos les llevan de ventaja.

Después de las 11 a.m. por cada hora que transcurra, los estibadores le descuentan:

$$36 \cdot 1{,}5 - 20 \cdot 1{,}8 = 18\text{ m}^3$$

Tendrán que transcurrir: 108 : 18 = 6 h., y será las 5 p.m. pero en ese instante se reduce el número de estibadores, al número necesario para que puedan cargar sólo los 36 m^3, que los obreros colocan por hora en el muelle. Luego, quedan:

36 : 1,5 = 24 estibadores, que trabajan durante 4 horas más. Entonces el barco partió a las 9p.m.

El barco se llevó:

$$13 \cdot 20 \cdot 12 = 3\,120\text{ bolsas}$$

Rpta.: Partió a las 9 p.m.

Quedaron 24 estibadores

El barco llevó 3 120 bolsas

14.- Los pesos de 2 lingotes de acero son entre ellos como 3 y 4, 5. El primero contiene 0,76% de carbono y el segundo 0,5%. Se extrae 93 kg de acero del primer lingote que se añade al segundo; en este momento, los dos lingotes tienen cantidades iguales de carbono. Se desea saber el peso inicial de cada lingote.

Solución:

Consideremos:

w_1 = peso del 1er. lingote

C_1 = cantidad de carbono 1er. lingote

w_2 = peso del 2do. lingote

C_2 = cantidad de carbono 2do. lingote

Cada kilo del 1er. lingote contiene:

$$\frac{0,76}{100} \cdot 1\ 000 = 7,6 \text{ g de C} \quad (\alpha)$$

Cada kilo el 2do. lingote contiene:

$$\frac{0,5}{100} \cdot 1\ 000 = 5 \text{ g de C} \quad (\beta)$$

Podemos establecer:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{3}{4,5} \quad (1)$$

Relación actual entre las cantidades de carbono:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{0,76}{100} \cdot 3}{\frac{0,5}{100} \cdot 4,5} \quad (2)$$

Al pasar 93 kg del 1er. lingote al segundo, se pasó también:

$$\frac{0,76}{100} \cdot 93\ 000 = 706,8 \text{ gramos de carbono.}$$

Con lo que los 2 lingotes poseen ahora la misma cantidad de carbono.

$$C_1 - 706,8 = C_2 + 706,8$$

$$C_1 - C_2 = 2 \,.\, 706,8 = 1\ 413,6\text{g} \quad (3)$$

De (2) y (3):

$$C_2 = 1\ 413,6 \,.\, 75 = 106\ 020\text{g} \quad (4)$$

De (β) y (4):

$$w_2 = \frac{106\ 020}{5} = 21\ 204 \text{ kg, en (1):}$$

$$w_1 = \frac{3}{4,5} \cdot 21\ 204 = 14\ 136 \text{ kg}$$

Rpta.: Peso del 1er. lingote : 14 136 kg
Peso del 2do. lingote : 21 204 kg

15.- La longitud de un canal de regadío se mide primero en metros y luego en pies. El número de metros se diferencia del número de pies en 1 083. ¿Cuál es la longitud en metros del canal de regadío?

(1 pie = 0,3048 m)

Solución:

La longitud es única, sea medida en metros o en pies; son:

x metros

y pies

$$\therefore \quad x = y\,(0,3048) \quad (1)$$

Por otro lado:

$$y - x = 1\ 083$$

$$y - 0,3048y = 1\ 083$$

$$0,6952y = 1\ 083$$

$$y = 1557,83 \text{ pies}$$

$$\Rightarrow \quad x = 474,83 \text{ m}$$

Rpta.: 474,83 m

16.- ¿Cuántos litros de agua de mar pesan 66,69 Qm teniendo presente que el agua de mar pesa 2,6% más que el agua dulce? (1 Qm = 100 kg)

Solución:

1 litro de agua de mar pesa 1,026 g

66,69 Qm de dicha agua es el peso de:

$$6\ 669 : 1,026 = 6\ 500 \text{ litros}$$

Rpta.: 6 500 litros

17.- Calcular el número de quintales métricos de trapos viejos que necesita una máquina que fabrica anualmente 17 000 resmas de papel, suponiendo que se desperdicia de los trapos el 15%. La resma de papel tiene 20 manos, y la mano pesa 170 gramos.

Solución:

17 000 resmas pesan:

$$17\,000 \,.\, 20 \,.\, 0{,}17 = 57\,800 \text{ kg}$$

Si 100 kg de trapos dan 85 kg de papel, para obtener 57 800 kg de papel hará falta:

$$\frac{57\,800 \,.\, 100}{85} = 68\,000 \text{ kg} = 680 \text{ Qm}$$

Rpta.: 680 Qm.

18.- Un comerciante compró café fresco; después de secarlo, lo vendió a 177 soles el kg y ganó 1/5 del precio de compra del café fresco. ¿Cuál es el precio de compra del kilogramo de café fresco, sabiendo que el café al secarse; pierde 1/10 de su peso?

Solución:

Si "p" es el precio de compra del kilogramo de café fresco, le resulta al comerciante a 10p/9 el precio de café ya seco; y como el precio de compra más la ganancia debe ser igual al precio de venta, se tendrá:

$$\frac{10\,p}{9} + \frac{p}{5} = 177$$

Rpta.: p = S/. 135

19.- ¿A qué distancia, en kilómetros, se habrá transportado 1 296 varas cúbicas de piedra, sabiendo que el transporte costó 1 125 dólares y que el transporte de un m^3 a un km de distancia costó anteriormente $ 0,75? (5 metros equivalen a 6 varas).

Solución:

Si 5 metros equivalen a 6 varas, entonces:

$(5m)^3 = 125\ m^3 <> (6varas)^3 = 216$ varas cúbicas

Así, las 1 296 varas cúbicas equivalen a:

$$\frac{1\,296 \,.\, 125}{216} = 750 \text{ m}^3$$

El transporte a un kilómetro de este volumen costó: 750 . 0,75

$\therefore$ la distancia pedida es:

$$\frac{1\,125}{750 \,.\, 0{,}75} = 2 \text{ km}$$

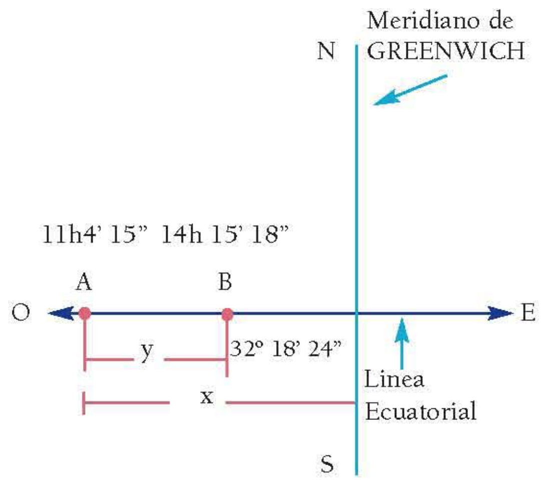
Rpta.: A 2 km de distancia.

20.- La longitud geográfica del punto B es 32° 18' 24" (O) y cuando en A son las 11 h 4 min 15 s a.m. en B son las 2 de la tarde 15 min 18 s, del mismo día. ¿Cuál es la longitud geográfica de A?

Solución:

Las 2 de la tarde = 14 h

Note que: como en A es más temprano que en B, entonces A se encontrará al oeste de B



Diferencia de horas =

14 h 15 min 18 s - 11 h 4 min 15 s = 3 h 11 min 3 s (1)

longitud de A = x = y + 32° 18'24"

Para ciudades situadas en el mismo lado del meridiano:

$$\text{Diferencia de horas} = \frac{\text{Diferencia de longitudes}}{15}$$

$3 \text{ h } 11 \text{ min } 3 \text{ s} = \dfrac{y}{15}$; de donde:

$(3 \text{ h } 11 \text{ min } 3 \text{ s})\ 15 = y$

$$y = 47° \ 45' \ 45''$$

$\therefore$ longitud de A = 47° 45' 45" + 32° 18' 24"

Rpta.: Longitud de A = 80° 4' 9" (O)

21.- La onza Troy de plata obtuvo a \$49,0 y en el término de 9 meses bajó a \$ 10,0. Pero, después de 9 meses más, el precio está a \$14,9. Suponiendo que se mantiene el incremento mensual, ¿en cuánto tiempo recupera el precio inicial de \$ 49?

Solución:

El incremento mensual es de $\dfrac{14{,}9 - 10}{9} = \dfrac{4{,}9}{9}$

Para recuperar su precio normal el incremento debe ser:

$$49{,}0 - 14{,}9 = 34{,}1$$

$\therefore$ Número de meses que deben transcurrir:

$$\frac{34{,}1}{\frac{4{,}9}{9}} = \frac{3\ 069}{49} = 62\frac{31}{49} = 62 \text{ meses } \frac{31 . 30}{49} \text{ dias}$$

ésto es: 62 meses $18\dfrac{48}{49}$ días < > 62 meses 19 días.

Rpta.: 62 meses 19 días.

22.- Una viga de acero, que cubica 1 225 cm^3 por metro de longitud está metida en el agua los 3/7. En virtud del principio de Arquímedes, la carga, debido a su peso, ha disminuido en 26,25 kg. ¿Cuál es la longitud de la viga?

Solución:

De acuerdo al principio de Arquímedes:

Los 26,25 kilogramos representa el peso del volumen de agua desalojada por los 3/7 de la viga; es decir, que los 3/7 de la viga tiene un volumen de 26 250 cm^3. (1 g agua = 1cm^3 agua)

$\therefore$ Volumen total de la viga:

$$26\ 250 : \frac{3}{7} = 61\ 250 \text{ cm}^3$$

y la longitud de la misma es:

$$\frac{61\ 250}{1\ 225} = 50 \text{ metros}$$

Rpta.: 50 m

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un avión parte de un punto A (long 30° E) en dirección al este para dar una vuelta al mundo; si su velocidad es 60°/h, cuando llegue a B (long 105° O). ¿Cuánto tiempo real de vuelo tendrá?

   Rpta.: 6 horas

2. La Ciudad de Nueva York se encuentra aproximadamente en la latitud 41° N y Buenos Aires aproximadamente en 35°S. ¿Cuál es la distancia norte-sur entre esas dos ciudades?

   Rpta.: 8 444 km

3. El extremo oriental de Maine está en los 45° N, 67° O y la costa del Pacífico de los Estados Unidos en esa latitud está en la longitud 124° O. ¿Cuál es el ancho de los Estados Unidos desde el Este hacia el Oeste en esa latitud?

   Rpta.: 4 477 km

4. El canal de Suez y la ciudad de Nueva Orleans están en el paralelo de latitud 30° N, teniendo Nueva Orleans una longitud de 89° O y Suez una longitud 31° 15' E. ¿Cuál es la distancia en millas, contando sobre su paralelo?

   Rpta.: 11 604 km = 7 200 millas

5. Cuando son las 9 horas en Washington (hora local) son las 8 horas 7 minutos 4 segundos en St. Louis. Si la longitud de Washington es 77° 1' O. ¿Cuál es la longitud de St. Louis?

   Rpta.: 90° 15' O

6. El sol, en Boston, sale 1 hora 11 minutos 56 segundos antes que en Nueva Orleans. Si la longitud de Nueva Orleans es exactamente 89° 2' O. ¿Cuál es la longitud de Boston?

   Rpta.: 71° 3' O

7. Cuando son las 2 horas 30 minutos de la mañana en La Habana, son las 9 horas 13 minutos de la mañana en la ciudad del Cabo en Africa del Sur.

   Si la longitud de esta última capital es 18° 23' E. ¿Cuál es la longitud de La Habana?

   Rpta.: 82° 22' O

8. El reloj de un barco puesto en la hora de Greenwich marca 5 horas 40 minutos 20 segundos de la tarde cuando el sol pasa por el meridiano del lugar.

   ¿Cuál es la longitud del lugar donde se halla el barco?

   Rpta.: 85° 5' O

9. Washington está a 77°1' O y Cincinnati a 84°24' O. ¿Cuál es la diferencia entre la hora local de los dos lugares?

   Rpta.: 29 min 32 s

10. Buffalo está a 78°55' O y Roma (Italia) a 20° 30' E. ¿Cuál es su diferencia de hora?

    Rpta.: 6 h 37 min 40 s

11. La longitud de Cambridge, Mass, es 71° 7' O y la de Cambridge, Inglaterra es 5' 2" E. Cuando es mediodía en Cambridge, Inglaterra. ¿Qué hora es en Cambridge, Mass?

    Rpta.: 7 h 15 min $11\,\dfrac{13}{15}$ s

12. La longitud de la ciudad de Nueva York es con una aproximación de un minuto, 73° 59' O y la de Manila en las Islas Filipinas es 120° 59' E.

    ¿Cuál es la diferencia entre la hora solar de las dos ciudades?

    Rpta.: 11 h 1 min

13. Washington D.C. y Lisboa, Portugal se encuentran ambas muy cerca del paralelo de latitud 38°

49' N y sus longitudes son: Washington 77° 4' O; Lisboa 9° 11' O. ¿Cuál es la longitud en millas del paralelo que une las dos ciudades?

Rpta.: 3 885 km = 3 657 millas

14. La longitud de Leningrado Rusia es 30° 18' E y la longitud del borde oriental de la península de Kamchatka Rusia en la misma latitud (60° N) es 165° E. ¿Cuál es la distancia a través de Rusia siguiendo ese paralelo?

Rpta.: 7 500 km = 4 600 millas

15. Argel (Argelia) y París (Francia) se encuentra ambas a unos cuantos minutos del mismo meridiano y sus latitudes son Argel 36° 48' N ; París 48° 50' N. ¿A qué distancia se encuentran las dos ciudades?

Rpta.: 1 337 km

16. Los aviadores americanos Wiley y Post en su viaje "alrededor del mundo" no volaron siguiendo una circunferencia máxima, sino aproximadamente a lo largo del paralelo 55° N o muy cerca de él.

¿Qué distancia aproximadamente recorrieron?

Rpta.: 22 900 km aproximadamente

17. Boston, Mass; y Roma, Italia; se encuentran ambas muy cerca del paralelo de la latitud 42° 8' N y sus longitudes son Boston 71° 4' O; Roma 12° 49' E.

Hállese la diferencia entre la hora de las dos ciudades y la distancia entre ellas siguiendo su paralelo.

Rpta.: 5 h 34 min ; 6 890 km

18. Cuatro cirios de diámetros diferentes y de longitudes 70, 66, 60 y 55 cm están fijos a cuatro soportes de alturas desiguales situados sobre un mismo plano horizontal. Se encienden los cirios al mismo tiempo y se observa que cuando el más largo ha disminuido en 10 cm las 4 llamas están a la misma altura. Sabiendo que estos cuatro cirios se consumen por completo en 28; 33; 40 y 55 horas respectivamente y que el soporte del cirio más largo es de 40 cm de altura.

Hallar las alturas de los otros tres soportes.

Rpta.: 42; 46 y 49.

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Se llama razón a la comparación de dos cantidades; esta "comparación" se puede hacer de dos maneras: Aritmética (por diferencia), Geométrica (por división).

Razón Aritmética

1° Averigua las unidades en que una cantidad excede a la otra (diferencia).

Ejemplos:

$$i)\quad \underbrace{a}_{\text{antecedente}} - \underbrace{b}_{\text{consecuente}} = \gamma$$

$$ii)\quad 15 - 8 = 7$$

Donde γ y 7 son los valores de la razón (diferencia)

Razón Geométrica

2° Averigua las veces que una cantidad contiene a otra (división).

Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \delta$$

"a" es el antecedente; "b" es el consecuente ; "δ" es el valor de la razón (cociente).

SERIE DE RAZONES IGUALES

Se llama así al conjunto de más de dos razones iguales. Así, en las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = K \;;\; \frac{c}{d} = K \;;\; \frac{e}{f} = K \;;\; \frac{g}{h} = K \;;$$

notamos que todas las razones tienen el mismo valor K; por lo tanto, podemos expresar :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = K; \quad \text{donde: } K = \text{constante}$$

De lo expuesto, se deduce que la condición necesaria y suficiente para obtener una serie de razones iguales es que todas las razones tengan el mismo valor.

Ejemplos:

$$i)\quad \frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{9}{45} = \frac{127}{635} = 0{,}2 \rightarrow K = 0{,}2 = \frac{2}{10}$$

$$ii)\quad \frac{1}{7} = \frac{3}{21} = \frac{7}{49} = \frac{11}{77} = K$$

$$K = 0{,}1428571 = \frac{1428\,571}{10\,000\,000}$$

TEOREMAS RELATIVOS A LA SERIE DE RAZONES IGUALES

TEOREMA 1.- En toda serie de razones iguales se cumple que la suma de antecedentes y la suma de consecuentes forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas.

Hipótesis:

Sea la serie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

Tesis: $\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

Demostración:

De la hipótesis se deduce:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{b} = k & \rightarrow & a = b \,.\, k \\ \frac{c}{d} = k & \rightarrow & c = d \,.\, k \\ \frac{e}{f} = k & \rightarrow & e = f \,.\, k \\ \frac{g}{h} = k & \rightarrow & g = h \,.\, k \end{array}\right\}$$

Sumando miembro a miembro:

$a + c + e + g = b \,.\, k + d \,.\, k + f \,.\, k + h \,.\, k$

$a + c + e + g = k(b + d + f + h)$

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

TEOREMA 2.- El producto de los antecedentes y el producto de las consecuentes forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas, elevada a una potencia igual al número de razones que intervienen en la serie.

Hipótesis:

Sea la serie:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

Tesis:

$$\frac{a \,.\, c \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{e}{f}\right)^3$$

Demostración:

De la hipótesis

$$\begin{array}{lll} \frac{a}{b} = k & \rightarrow & a = b \,.\, k \\ \frac{c}{d} = k & \rightarrow & c = d \,.\, k \\ \frac{e}{f} = k & \rightarrow & e = f \,.\, k \end{array}$$

Multiplicando miembro a miembro:

$$a \,.\, c \,.\, e = b \,.\, d \,.\, f \,.\, k^3$$

$$\therefore \; \frac{a \,.\, c \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f} = k^3$$

Luego: $\frac{a \,.\, c \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{e}{f}\right)^3$

TEOREMA 3.- La raíz enésima del producto de los antecedentes y la raíz enésima del producto de los consecuentes de “n” razones iguales, forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas.

Hipótesis:

Sea la serie:

$\frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{y}{z} = \; \ldots \; = \frac{a}{b} = \; k$ (“n” razones)

Tesis: $\frac{\sqrt[n]{r \,.\, p \,.\, y \,.\, \ldots \,.\, a}}{\sqrt[n]{s \,.\, q \,.\, z \,.\, \ldots \,.\, b}} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{y}{z} = \frac{a}{b}$

Demostración:

Por el teorema anterior: $\frac{r \,.\, p \,.\, y \,.\, \ldots \,.\, a}{s \,.\, q \,.\, z \,.\, \ldots \,.\, b} = k^n$

Extrayendo la raíz “n”: $\frac{\sqrt[n]{r \,.\, p \,.\, y \,.\, \ldots \,.\, a}}{\sqrt[n]{s \,.\, q \,.\, z \,.\, \ldots \,.\, b}} = k$

Sustituyendo k:

$$\frac{\sqrt[n]{r \,.\, p \,.\, y \,.\, \ldots \,.\, a}}{\sqrt[n]{s \,.\, q \,.\, z \,.\, \ldots \,.\, b}} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \; \ldots \; = \frac{a}{b}$$

TEOREMA 4.- La raíz "n" de la suma de antecedentes elevados a la potencia "n", y la raíz "n" de la suma de los consecuentes elevados a la potencia "n" de "n" razones iguales, forman una razón igual a cualquiera de las razones propuestas.

Hipótesis:

Sea la serie:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots = \frac{x}{z} = k \quad (\text{"n" razones iguales})$$

Tesis:

$$\frac{\sqrt[n]{(a^n + c^n + e^n + \dots + x^n)}}{\sqrt[n]{(b^n + d^n + f^n + \dots + z^n)}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots \frac{x}{z}$$

Demostración:

Elevando cada razón de la hipótesis al exponente "n" se tiene: k

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = \dots = \frac{x^n}{z^n} = k^n$$

Aplicando el primer teorema:

$$\frac{(a^n + c^n + e^n \dots x^n)}{(b^n + d^n + f^n \dots z^n)} = k^n$$

Extrayendo la raíz "n" a ambos términos:

$$\frac{\sqrt[n]{(a^n + c^n + e^n + \dots + x^n)}}{\sqrt[n]{(b^n + d^n + f^n + \dots + z^n)}} = k$$

$$\frac{\sqrt[n]{(a^n + c^n + e^n + \dots + x^n)}}{\sqrt[n]{(b^n + d^n + f^n + \dots + z^n)}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots = \frac{x}{z}$$

PROPORCIÓN

Se llama así a la comparación de 2 razones. Las proporciones pueden ser: Aritméticas o Geométricas.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA O EQUIDIFERENCIA

Se llama así a la igualdad de 2 razones aritméticas.

Ejemplo:

$a - b = \gamma$ 1ra. Razón aritmética

$c - d = \gamma$ 2da. Razón aritmética

Si: $\gamma = \gamma$ se tendrá equidiferencia.

$$a - b = c - d$$

a - b (recibe el nombre de 1ra. razón o primeros términos)

c - d (recibe el nombre de 2da. razón o segundos términos)

a y d (extremos)

b y c (medios)

a, b, c y d (cada uno de ellos es una cuarta diferencial)

PROPORCIONES GEOMÉTRICAS O SIMPLEMENTE "PROPORCIONES"

Se llama "extremos" de una proporción, al numerador de la primera razón y al denominador de la segunda razón; se llama "medios" al denominador de la primera y al numerador de la segunda.

1° Propiedad: Toda proporción se puede escribir de 8 maneras diferentes. Sea:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ una proporción,}$$

la cual se puede escribir así:

1. Originalmente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2. Cambiando medios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3. Invirtiendo: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

4. Invirtiendo: y cambiando medios $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

5. Permutando términos: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

6. Permutando términos: y cambiando medios $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

7. Permutando términos: e invirtiendo $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

8. Cambiando extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

2° Propiedad: En toda proporción se cumple que la suma o diferencia del antecedente con su consecuente es a la suma o diferencia del otro antecedente con su consecuente, como los antecedentes son entre sí y los consecuentes son también entre sí.

Hipótesis:

Sea : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ una proporción,

Tesis: $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Demostración:

Sabemos que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (1)

Por lo que: $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$

efectuando: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

Cambiando medios: $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$ (2)

Cambiando medios a (1): $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Añadiendo (2): $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3° Propiedad: En toda proporción se cumple que la suma de un antecedente con su consecuente es a su diferencia como la suma del otro antecedente con su consecuente, es también a su diferencia.

Hipótesis:

Sea: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ una proporción

Tesis: $\frac{m + n}{m - n} = \frac{p + q}{p - q}$

Demostración:

Sabemos que: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ (1)

Aplicando a (1) la segunda propiedad

a) Criterio suma: $\frac{m + n}{p + q} = \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$

b) Criterio diferencia: $\frac{m - n}{p - q} = \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$

Luego (a) = (b): $\frac{m + n}{p + q} = \frac{m - n}{p - q}$ (2)

Cambiando medios a (2): $\frac{m + n}{m - n} = \frac{p + q}{p - q}$

4° Propiedad: En toda proporción se cumple que la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente.

Hipótesis:

Sea: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ una proporción.

Tesis: $\frac{p \pm r}{q \pm s} = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

Demostración:

Sabemos que: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (1)

Cambiando medios a (1): $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ (2)

En (2) por la 2° Propiedad: $\frac{p \pm r}{q \pm s} = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

5° Propiedad: En toda proporción se cumple que la suma de antecedentes es a su diferencia como la suma de consecuentes es también a su diferencia.

Hipótesis:

Sea: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ una proporción.

Tesis: $\frac{p + r}{p - r} = \frac{q + s}{q - s}$

Demostración:

Sabemos que: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (1)

En (1), aplicando 4° propiedad:

a) Criterio suma: $\frac{p+r}{q+s} = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$;

b) Criterio diferencia: $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

Luego de (a) y (b): $\frac{p+r}{q+s} = \frac{p-r}{q-s}$ (2)

Cambiando medios a (2): $\frac{p+r}{p-r} = \frac{q+s}{q-s}$

6° Propiedad: Si a ambos términos de una proporción se le eleva a un mismo exponente o se les extrae la raíz del mismo índice, se obtiene siempre la misma proporción.

Hipótesis:

Sea: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ una proporción

Tesis: 1. $\frac{p^n}{q^n} = \frac{r^n}{s^n}$;

2. $\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} = \frac{\sqrt[n]{r}}{\sqrt[n]{s}}$

Demostración:

Sabemos que: $\frac{p}{s} = \frac{r}{s}$ (1)

Elevando (1) a la potencia "n":

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{r}{s}\right)^n \Rightarrow \frac{p^n}{q^n} = \frac{r^n}{s^n}$$

Extrayendo raíz "n" a (1):

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{\frac{r}{s}} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} = \frac{\sqrt[n]{r}}{\sqrt[n]{s}}$$

Nota:

La Media Proporcional en una proporción está dada por la raíz cuadrada de sus extremos.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \Rightarrow b^2 = a \cdot d \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot d}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- El radio de la Luna es los 3/11 del radio terrestre y el diámetro del Sol es igual a 108 diámetros terrestres. ¿Cuál es la razón geométrica entre los radios de la Luna y el Sol?

Solución:

Radio de la Luna = RL

Radio del Sol = RS

Radio de la Tierra = RT

$$\frac{RL}{RT} = \frac{3}{11} \qquad (1)$$

$$\frac{RT}{RS} = \frac{1}{108} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por (2) tenemos:

$$\frac{RL}{RS} = \frac{3}{11 \cdot 108} = \frac{1}{396}$$

Rpta.: $\frac{\text{Radio de la Luna}}{\text{Radio del Sol}} = \frac{1}{396}$

2.- Si en una relación geométrica entre dos números cuya suma es 65, al menor se le suma 17 y al mayor se le resta 17, la relación primitiva se invierte. ¿Cuál es el menor de dicho número?

Solución:

Sean "a" y "b" los números, donde a > b

$$a + b = 65 \qquad (1)$$

La relación primitiva es : $\frac{a}{b}$

Por dato ocurre lo siguiente:

$$\frac{a - 17}{b + 17} = \frac{b}{a}$$

Sumando 1 a los dos miembros:

$$\frac{a - 17 + (b + 17)}{b + 17} = \frac{a + b}{a}$$

de donde resulta: $a - b = 17$ (2)

Resolviendo el sistema de las 2 ecuaciones (1) y (2), se obtiene finalmente:

$$a = 41 \quad y \quad b = 24$$

Rpta.: El menor número es 24

3.- En una proporción geométrica la suma de los términos extremos es 20 y su diferencia 16. ¿Cuál es su media proporcional?

Solución:

Sea la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \Rightarrow b^2 = a \,.\, d \qquad (1)$$

Como: $a + d = 20$ y $a - d = 16$,

obtenemos:

$$a = 18 \quad y \quad d = 2$$

estos valores en (1):

$$b^2 = 18 \,.\, 2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

Rpta.: La media proporcional es 6

4.- La razón de dos números es 3/8 y su suma es 2 497. Encontrar el menor de los dos números.

Solución:

Sean a y b los números podemos establecer por dato:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{8} \qquad (1)$$

Sumando 1 a los dos términos de (1) y operando:

$$\frac{a + b}{b} = \frac{3 + 8}{8}$$

pero por dato: $a + b = 2\,497$

luego: $\frac{2\,497}{b} = \frac{11}{8}$

$\therefore$ $b = 1\,816$ y $a = 681$

Rpta.: El menor es 681

5.- Hallar tres cantidades que sean entre sí como 4; 5 y 8 y que sumen 850.

Solución:

Se puede escribir así:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{8} = \frac{A + B + C}{4 + 5 + 8} = \frac{850}{17} = 50$$

Se deduce:

$A = 4 \,.\, 50 = 200$

$B = 5 \,.\, 50 = 250$

$C = 8 \,.\, 50 = 400$

Rpta.: Las cantidades son 200; 250 y 400

6.- En una serie de razones geométricas iguales, los antecedentes son 2; 3; 7 y 11, mientras que el producto de los consecuentes es 37 422. ¿Cuál es la relación entre consecuente y antecedente?

Solución:

La serie buscada es de la forma:

$$\frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{7}{c} = \frac{11}{d} = k,$$

aplicando propiedad:

$$\frac{2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 11}{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d} = \frac{2^4}{a^4} = \frac{3^4}{b^4} = \frac{7^4}{c^4} = \frac{11^4}{d^4} k^4$$

$$\frac{462}{37\,422} = \frac{2^4}{a^4} \quad \Rightarrow \quad a = 6$$

Entonces $k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Rpta.: La razón buscada es 3

7.- "p" es el término central de una proporción geométrica continua, cuyos extremos son "m" y "n". Si:

$$\frac{m^2 - p^2 + n^2}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n^2}} = 1\ 296$$

Hallar "p".

Solución:

Como p es el término central, podemos establecer que:

$$\frac{m}{p} = \frac{p}{n} \Rightarrow p^2 = m\ .\ n \qquad (1)$$

Por dato:

$$\frac{m^2 - p^2 + n^2}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n^2}} = 2^4\ .\ 3^4 \quad (2)$$

(1) en (2):

$$\frac{(m^2 - m\ .\ n + n^2)}{\frac{(n^2 - m\ .\ n + m^2)}{m^2\ n^2}} = 2^4\ .\ 3^4$$

$m^2\ n^2 = 2^4\ .\ 3^4$

$m\ .\ n = 2^2\ .\ 3^2$

pero: $m\ .\ n = p^2$

$\therefore\ p^2 = 2^2\ .\ 3^2 \Rightarrow p = 2\ .\ 3 = 6$

Rpta.: $p = 6$

8.- Sabiendo que:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

Determinar el valor de:

$$E = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \cdot \frac{a^3}{b^3 - a^3}$$

Solución:

Del dato: $a = \frac{2}{3}b$ (1)

Reemplazando (1) en E:

$$E = \frac{\frac{4}{9}b^2 + b^2}{b^2} \cdot \frac{\frac{8}{27}b^3}{b^3 - \frac{8}{27}b^3}$$

Efectuando operaciones y simplificando:

$$E = \frac{13}{9} \cdot \frac{\frac{8}{27}}{\frac{19}{27}} = \frac{104}{171}$$

Rpta.: $E = \frac{104}{171}$

9.- Si:

$$\frac{a^2}{12} = \frac{b^2}{27} = \frac{c^2}{48} = \frac{d^2}{75}$$

$$(d + b) - (c + a) = 140$$

Hallar: $a + b + c + d$

Solución:

La expresión:

$$\frac{a^2}{12} = \frac{b^2}{27} = \frac{c^2}{48} = \frac{d^2}{75}$$

Se puede escribir así, si se aplica raíz cuadrada:

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{3\sqrt{3}} = \frac{c}{4\sqrt{3}} = \frac{d}{5\sqrt{3}} = k$$

De donde:

$$d + b = k\sqrt{3}\ .\ 8 \qquad (1)$$

$$c + a = k\sqrt{3}\ .\ 6 \qquad (2)$$

(1) - (2):

$$(d + b) - (c + a) = 2\sqrt{3}\ k$$

Pero, por datos:

$$(d + b) - (a + c) = 140$$

Luego: $140 = 2\sqrt{3}\,k$

$$k = \frac{70}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \frac{70\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente, sumando (1) y (2):

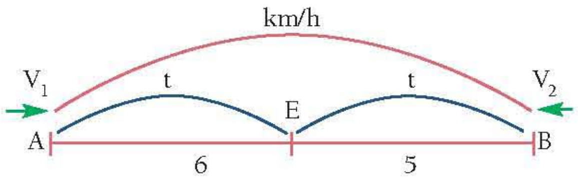
$$a + b + c + d = 14\sqrt{3}\,k = 14\sqrt{3} \cdot \frac{70\sqrt{3}}{3} = 980$$

Rpta.: $a + b + c + d = 980$

10.- Dos ciclistas parten en el mismo instante, uno de A y otro de B, y marchan al encuentro uno hacia el otro. Si la velocidad del primero es mayor que la del segundo en 4 km por hora, determinar dichas velocidades si la razón de los espacios recorridos por ellos, hasta el instante del encuentro es de 6/5.

Solución:

Gráficamente:



Por dato: $\frac{AE}{EB} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{V_1 t}{V_2 t} = \frac{6}{5}$

De donde: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{6}{5}$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{V_1 - V_2}{6 - 5} = \frac{V_1}{6} = \frac{V_2}{5}$$

Pero, por datos:

$$V_1 - V_2 = 4 \text{ ; luego}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{V_1}{6} \Rightarrow V_1 = 24 \text{ km/h}$$

Del mismo modo:

$$\frac{4}{1} = \frac{V_2}{5} \Rightarrow V_2 = 20 \text{ km/h}$$

Rpta.: $V_1 = 24$ km/h ; $V_2 = 20$ km/h

11.- Si $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ y $\frac{A \cdot B \cdot C}{a \cdot b \cdot c} = 8$

Hallar el valor de:

$$E = \frac{A + B + C + 4}{a + b + c + 2} \cdot \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 4^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2^2} \cdot \frac{A^3 + B^3 + C^3 + 4^3}{a^3 + b^2 + c^3 + 2^3}$$

Solución:

Sea:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \qquad (1)$$

$$\frac{A \cdot B \cdot C}{a \cdot b \cdot c} = k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$$

De (1), como $k = 2 = \frac{4}{2}$, se puede escribir:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{4}{2} = 2 \qquad (2)$$

De (2), por propiedad:

$$\frac{A + B + C + 4}{a + b + c + 2} = 2$$

también:

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2 + 4^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2^2} = 4$$

$$\frac{A^3 + B^3 + C^3 + 4^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 2^3} = 8$$

Sustituyendo estos 3 valores en E:

$$E = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$$

Rpta.: $E = 64$

12.- Dos cantidades son proporcionales a $\sqrt{2}$ y a $\sqrt{3}$ Si su suma es el número 2π. ¿Cuáles son dichas cantidades, conforme a los siguiente datos aproximados?

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{3} = 1,\,73 \qquad \pi = 3{,}14$$

Solución:

Sea la proporción:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{B}{\sqrt{3}} = k$$

Por propiedad:

$$\frac{A+B}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = k = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{B}{\sqrt{3}}$$

De donde:

$$A = \frac{\sqrt{2}\,(A+B)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad \wedge \quad B = \frac{\sqrt{3}\,(A+B)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \qquad (\alpha)$$

Por datos:

$$A + B = 2\pi = 2\,.\,3{,}14$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \quad ; \quad \sqrt{3} = 1{,}73$$

Reemplazando estos valores en (α):

$$A = 2{,}82 \qquad B = 3{,}46$$

Rpta.: 2,82 y 3,46

13.- Si: $\frac{A}{x} = \frac{B}{y} = \frac{C}{z} = k$,

Hallar: $E = \frac{A+B+C}{x+y+z}$

Solución:

$$A = x\,.\,k$$

$$B = y\,.\,k$$

$$C = z\,.\,k$$

Reemplazando estos valores en E:

$$E = \frac{x\,.\,k + y\,.\,k + z\,.\,k}{x+y+z} = \frac{k\,(x+y+z)}{(x+y+z)} = k$$

Rpta.: E = k

14.- Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \;\wedge\; \sqrt{a\,.\,b} + \sqrt{c\,.\,d} = 20$

y además: $a + c = 4$. Hallar el valor de k

Solución:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad < \quad \begin{matrix} a = k\,.\,b \\ c = k\,.\,d \end{matrix}$$

$$\therefore \qquad a + c = k(b + d) \qquad (1)$$

También se advierte que:

$$\frac{ab}{b^2} = \frac{cd}{d^2} = k \quad < \quad \begin{matrix} \sqrt{a\,.\,b} = \sqrt{k}\,.\,b \\ \sqrt{c\,.\,d} = \sqrt{k}\,.\,d \end{matrix}$$

Sumando estos últimos:

$$\sqrt{a\,.\,b} + \sqrt{c\,.\,d} = \sqrt{k}\,(b + d) \qquad (2)$$

Dividiendo (1) : (2), miembro a miembro:

$$\frac{a+c}{\sqrt{a\,.\,b} + \sqrt{c\,.\,d}} = \frac{k}{\sqrt{k}}$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{4}{20} = \frac{k}{\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{k}{\sqrt{k}}$$

la última expresión al cuadrado:

$$\frac{1}{25} = \frac{k^2}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{25}$$

Rpta.: $k = \frac{1}{25}$

15.- Si: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} = k$

Hallar:

$$E = \frac{[A\,.\,D]^2 + [C\,.\,D]^2}{[B\,.\,C]^2 + [C\,.\,D]^2} - \frac{(B + D)(C + D)}{A + B + C + D} + \frac{A\,.\,D^2}{B\,.\,C}$$

Solución:

De la proporción enunciada:

$$A = B\,.\,k \quad y \quad C = D\,.\,k$$

Sustituyendo en E:

$$E = \frac{B^2k^2D^2 + D^2k^2}{B^2k^2D^2 + D^4k^2} - \frac{(B + D)D(k + 1)}{(B + D) + k(B + D)} + \frac{B\,.k\,.D^2}{B\,.\,D\,.\,k}$$

$$E = \frac{D^2k^2(B^2 + D^2)}{D^2k^2(B^2 + D^2)} - \frac{(B + D)\,D(k + 1)}{(B + D)(k + 1)} + D$$

$$E = 1 - D + D = 1$$

Rpta.: $E = 1$

16.- Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$ y $\dfrac{a^3 - b^3}{b^3 - c^3} = 8$

Hallar: $E = \dfrac{ab + bc + cd}{(a + b + c)\,(b + c + d)}$

Solución:

De la primera proporción:

$$a = b\,.\,k \qquad (\alpha)$$

$$b = c\,.\,k \qquad (\beta)$$

$$c = d\,.\,k \qquad (\gamma)$$

(γ) en (β) y el resultado en (α):

$$\left.\begin{aligned} a &= d\,.\,k^3 \\ b &= d\,.\,k^2 \\ c &= d\,.\,k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Reemplazando este resultado en la segunda proporción enunciada:

$$\frac{d^3\,.\,k^9 - d^3\,.\,k^6}{d^3\,.\,k^6 - d^3\,.\,k^3} = 8 \Rightarrow \quad k = 2$$

Este valor en (1):

$$a = 8d \ ; \ b = 4d \ ; \ c = 2d$$

Estos valores en E:

$$E = \frac{32d^2 + 8d^2 + 2d^2}{(14d)(7d)}$$

$$E = \frac{42d^2}{14d\,.\,7d} = \frac{3}{7}$$

Rpta.: $E = \dfrac{3}{7}$

17.- Sabiendo que: $\dfrac{\overline{ab}}{C^\circ \ A \text{ de } \overline{ab}} = \dfrac{2}{3}$

Hallar (a + b)

Solución:

Descomponiendo polinómicamente, y teniendo en cuenta que el complemento aritmético de $\overline{ab}$ es $100 - \overline{ab}$; se tiene:

$$\frac{10\,a + b}{100 - (10a + b)} = \frac{2}{3}$$

Por propiedad, el producto de medios es igual al producto de extremos

$$30a + 3b = 200 - 20a - 2b$$

$$50a + 5b = 200$$

$$10a + \ b = 40$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ab} = 40$$

Rpta.: $a + b = 4$

18.- En una proporción geométrica continua, el producto de los cuatro términos es 1 048 576. El cuarto término es el doble de la suma de los medios. Hallar la proporción.

Solución:

Podemos establecer por enunciado:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

$$a \;.\; c \;.\; b^2 = 1\ 048\ 576 \qquad (2)$$

$$c = 2(b + b) = 4b \qquad (3)$$

De (1) por propiedad:

$$b^2 = a \;.\; c \qquad (4)$$

Reemplazando en (2):

$$b^4 = 1\ 048\ 576 = 2^{20}$$

$$b = 2^5 = 32$$

Reemplazando en (3):

$$c = 4 \;.\; 32 = 128$$

Reemplazando estos valores de b y c en (4):

$$32^2 = a \;.\; 128 \Rightarrow a = 8$$

∴ Sustituyendo en (1) la proporción es:

Rpta.: $\frac{8}{32} = \frac{32}{128}$

19.- Hallar dos números enteros cuya suma sea 435 sabiendo que su razón se invierte cuando se le resta 65 al mayor y se le agrega 65 al menor.

Solución:

Sea $a > b$

Por datos: $a + b = 435 \qquad (1)$

$$\frac{(a - 65)}{(b + 65)} = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

De (2) por propiedad:

$$\frac{(a - 65) + (b + 65)}{(b + 65)} = \frac{a + b}{a}$$

Simplificando y operando:

$$a - b = 65 \qquad (3)$$

De (1) y (3):

$$a = 250 \quad ; \quad b = 185$$

Rpta.: 250 y 185

20.- El corredor A da a B una ventaja de 20 metros en una carrera de 100 m. En otra carrera de 100 m, el corredor B da a C 30 m de ventaja. ¿Qué ventaja deberá dar A a C en una carrera de 100 m?

Solución:

Relacionamos los recorridos:

$$\frac{\text{recorrido de A}}{\text{recorrido de B}} = \frac{100}{80} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{recorrido de B}}{\text{recorrido de C}} = \frac{100}{70} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) . (2):

$$\frac{\text{recorrido de A}}{\text{recorrido de C}} = \frac{100}{56}$$

Rpta.: A debe dar a C 44 m de ventaja.

21.- El producto de los 4 términos de una proporción geométrica es 900 y se sabe que la suma de un antecedente más su consecuente correspondiente es 9. Si la constante de proporcionalidad es menor que 1, determinar, la suma de los términos.

Solución:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k < 1 \qquad (1)$$

$$a \;.\; b \;.\; c \;.\; d = 900 \qquad (2)$$

De (1) por propiedad:

$$\underbrace{b \;.\; c}_{x} = \underbrace{a \;.\; d}_{x} \quad ; \quad a < b, c < d$$

en (2):

$$x^2 = 900$$

$$x = 30$$

y como:

$$a + b = 9$$

se deduce que:

$$a = 3, \quad b = 6, \quad c = 5, \quad d = 10$$

Rpta.: $a + b + c + d = 24$

22.- Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 325$

Determinar el valor de $(a + b + c + d)$

Solución:

Por datos: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ (1)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 325 \qquad (2)$$

De (1):

$$\left.\begin{array}{l} a = b \,.\, k \\ c = d \,.\, k \end{array}\right\} \quad (3)$$

Sumando miembro a miembro y sumando luego $b + d$ a ambos miembros:

$$a + b + c + d = b \,.\, k + b + d \,.\, k + d$$

$$a + b + c + d = (k + 1)\,(b + d) \qquad (4)$$

Elevando (3) al cuadrado, sustituyendo en (2) y además sumando $b^2 + d^2$ a ambos:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = b^2 \,.\, k^2 + b^2 + d^2 \,.\, k^2 + d^2$$

$$= (k^2 + 1)\,(b^2 + d^2) = 325$$

$$= 13 \,.\, 5 \,.\, 5$$

Identificando factores:

$$\left.\begin{array}{lll} k^2 + 1 = 13 \,.\, 5 & \Rightarrow & k = 8 \\ b^2 + d^2 = 5 & \Rightarrow & b + d = 3 \end{array}\right\} \text{ en (4)}$$

Rpta.: $a + b + c + d = 9 \,.\, 3 = 27$

23.- En una serie de 4 razones geométricas continuas e iguales, la suma del primer antecedente con el tercer consecuente es 336. Determinar la suma de los consecuentes si se sabe que la suma de las 4 razones es 1 1/3.

Solución:

Podemos establecer por datos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k \qquad (1)$$

$$a + d = 336 \qquad (2)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = 1\,\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad (3)$$

De (1) y (3):

$$4k = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Entonces podemos establecer de (1) que:

$$\left.\begin{array}{l} b = 3a \\ c = 3b = 9a \\ d = 3c = 27a \\ e = 3d = 81\,a \end{array}\right\} \quad (4)$$

De (2) y (4):

$$a + d = a + 27a = 336 \Rightarrow a = 12$$

Sumando las igualdades de (4):

$$b + c + d + e = 120 \,.\, a = 120 \,.\, 12 = 1\,440$$

Rpta.: $b + c + d + e = 1\,440$

24.- Si: $\dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{8}{5}$

Determinar el valor de:

$$E = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 + b^2}$$

Solución:

Según datos:

$$(a + b)\,5 = (a - b)\,8 \Rightarrow 13b = 3a \Rightarrow a = \frac{13}{3}\,b$$

Por consiguiente, sustituyendo en E:

$$E = \frac{\frac{169}{9}\, b^2 - 3 \,.\, b^2}{\frac{169}{9}\, b^2 + b^2} = \frac{71}{89}$$

Rpta.: $E = \frac{71}{89}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El consumo de carbón de una máquina de vapor durante 30 días ha sido el siguiente: 5 días a 248 kilos por día; 12 a 180; 10 a 200, y el resto a 240. ¿Cuál ha sido el consumo medio por día?

   Rpta.: 204 kg

2. La densidad de un gas es de 12% mayor que la del aire, y la del nitrógeno es los 28/29 de la densidad del aire. Hallar la densidad de dicho gas respecto al nitrógeno.

   Rpta.: G = 1,16 N

3. Uno de los términos medios de una proporción contínua es medio, proporcional entre 3 y 5, y uno de los extremos es la media aritmética entre los mismos números. Calcular el valor del otro extremo de la proporción.

   Rpta.: 3,75

4. Hallar los 4 términos de una proporción continua, para la cual se verifica: que el producto de los cuatro términos es igual a 1 048 576, y que el cuarto término es el doble de la suma de los términos medios.

   Rpta.: $\frac{8}{32} = \frac{32}{128}$

5. El producto de los cuatro términos de una proporción es 50 625, uno de los extremos es 1/9 del otro, y los dos medios son iguales. ¿Cuáles son los términos de esta proporción? Hallar el resultado sin extraer la raíz cuadrada.

   Rpta.: $\frac{45}{15} = \frac{15}{5}$

6. Dos personas tienen: uno, 40 años y el otro, 30 años; sus edades están por lo tanto en relación 4 es a 3.¿ En cuánto tiempo esta relación será igual a 7/6?

   Rpta.: Dentro de 30 años

7. Un depósito tiene 5 conductos de desagüe de igual diámetro. Abiertos tres de ellos, se vacía el depósito en 5 horas y 20 minutos; abiertos los 5, ¿en cuánto tiempo se vaciará?

   Rpta.: 3 horas y 12 minutos

8. Si: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ y $a^3 + b^3 = 280$

   Hallar (a + b)

   Rpta.: 10

9. Sabiendo que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y que:

   $$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 15$$

   Hallar : a . b . c . d

   Rpta.: 20 736 ó 4 096

10. En una proporción continua uno de los términos extremos es la media aritmética de 8 y 18 y el valor del medio es medio proporcional entre 8 y 18. Calcular el valor del otro extremo de la proporción.

    Rpta.: $13,\overset{\frown}{076923}$

11. Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$ y $a + b + c = 21$

Hallar:

$$\frac{a^2c + a^2cd + a^2d^2 + b^3c + b^3d + abd^2}{ad + b^2d + ac^2 - bc}$$

Rpta.: 18

12. El producto de los primeros términos en una proporción es igual a 12, el producto de los segundos términos es 48; si el cuadrado de uno de los consecuentes es 16, hallar el valor del otro consecuente.

Rpta.: 8

13. La diferencia de los antecedentes de una proporción es 70; la suma de los cuadrados de los mismos es 10 900. Hallar la diferencia de los consecuentes, si la suma de los cuadrados de los mismos es 68 125.

Rpta.: 175

14. Si: $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7} = \dfrac{d}{11}$ y $a + b + c = 75$

¿Cuánto vale "d"?

Rpta.: 55

15. Si a y b son dos números pares consecutivos y:

$$\frac{a + 20}{20 - a} = \frac{b + 15}{15 - b} = r$$

Calcular: $(a + b + r)$

Rpta.: $\dfrac{49}{3}$

16. Si en $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{7}$ se cumple que

$a + b = 30$, ¿cuánto vale c?

Rpta.: 42

17. Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 221$

Hallar: $a + b + c + d$

Rpta.: 25

18. La suma, diferencia y producto de 2 números enteros están en la misma relación que los números 7; 1 y 48. Hallar el cociente de los números.

Rpta.: $1,\overset{\frown}{3}$

19. En una serie de razones geométricas contínuas la suma de sus 3 antecedentes es 126 y el producto de las tres razones es 8. Hallar el valor del término menor.

Rpta.: 9

20. Si:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \frac{E}{e} = k \quad \text{y}$$

$$\frac{A \,.\, B \,.\, C \,.\, D \,.\, E}{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e} = 3\,125$$

Hallar:

$$E = \sqrt[1\,000]{\frac{A^{2000} + B^{2000} + C^{2000} + E^{2000}}{a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} + d^{2000} + e^{2000}}}$$

Rpta.: 25

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales son aquellas magnitudes que se corresponden por su igual tendencia a crecer ambas o a decrecer ambas guardando proporción. Se clasifican en: Directamente proporcionales e Inversamente proporcionales

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Sabido es que el valor de una mercancía varía con su peso; que la cantidad de agua que sale de un grifo, varía con el tiempo durante el cual está abierto ese grifo; que una masa homogénea varía con su volumen, etc.

Si un kilo de garbanzos cuesta 8 soles, 2 kilos costará 2 veces más: 2 . 8 soles; tres kilos costará 3 veces más: 3 . 8 soles, etc.

El peso de una mercancía y su precio son magnitudes directamente proporcionales.

DEFINICIÓN

1. Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al hacerse los valores de una de ellas 2, 3, 4, 5, ..., n veces mayor o menor, los valores correspondientes de la otra, con la que está relacionada, se hacen respectivamente mayores o menores el mismo número de veces.

   Ejemplo:

   Si un kilo de garbanzos cuesta 8 soles, podemos establecer el siguiente gráfico:

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES			
Peso	1kg	2kg	3kg	4kg
Precio	S/. 8	S/. 16	S/. 24	S/. 32

Del cuadro, se deduce la siguiente relación:

$$\frac{1\text{ kilo}}{S/.\ 8} = \frac{2\text{ kilos}}{S/.16} = \frac{3\text{ kilos}}{S/.24} = \frac{4\text{ kilos}}{S/.32} = k = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

o, también:

$$\frac{S/.8}{1\text{ kilo}} = \frac{S/.16}{2\text{ kilos}} = \frac{S/.24}{3\text{ kilos}} = \frac{S/.32}{4\text{ kilos}} = k = 8$$

2. Dos magnitudes son D.P. cuando las razones formadas, al tomar 2 a 2 los valores correspondientes a estas magnitudes, son iguales.

   También se puede decir que las magnitudes son Directamente Proporcionales (D.P.) cuando la razón de 2 valores de la primera es igual a la razón de los dos valores correspondientes de la segunda.

   Ejemplo:

   Del cuadro anterior se tiene que:

$$\frac{1\text{ kilo}}{4\text{ kilos}} = \frac{S/.\ 8}{S/.\ 32} = 0{,}25$$

PROPIEDADES DE LAS MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

1. Sus valores correspondientes aumentan en la misma proporción; ésto es, quedan multiplicados por el mismo factor.

2. Sus valores correspondientes disminuyen en la misma proporción; ésto es, quedan divididos por el mismo número.

ESQUEMA CARTESIANO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

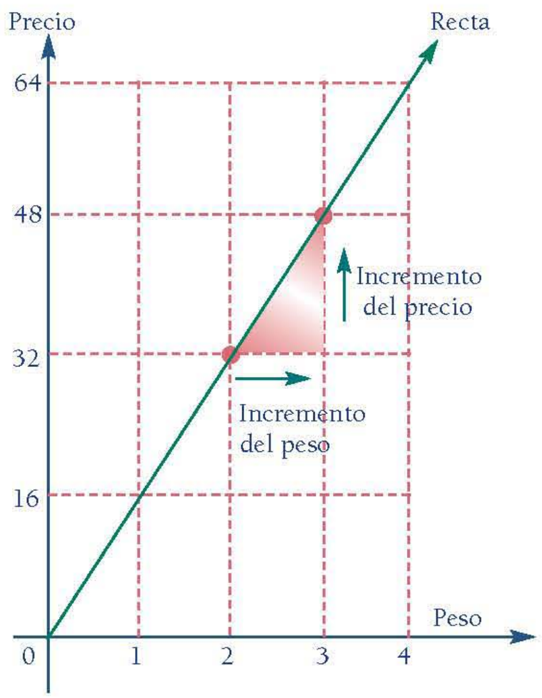
Se llama sistema de ejes cartesianos o rectangulares al conjunto de dos rectas que se cortan perpendicularmente, una vertical y la otra horizontal.

El precio de una mercancía y su peso son magnitudes Directamente Proporcionales (D.P.). En un sistema de ejes perpendiculares, uno vertical y el otro horizontal, dividamos cada uno de los ejes en porciones iguales, tomando como cero la intersección de ambos. En el eje horizontal marquemos los pesos sucesivos y, en el eje vertical, los precios correspondientes.

De esta manera:

Si 1 kg cuesta S/. 16 ; 2 kg costará S/. 32 ; 3 kg costará S/. 48 ; y así sucesivamente.

El precio crece al mismo número de veces al cual crece el peso.



Levantando perpendiculares a los ejes desde los puntos marcados; se unen con una recta el origen y los puntos de intersección de las perpendiculares levantadas; esta recta representa la proporcionalidad.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

El siguiente ejemplo nos lleva a comprender esta cuestión:

Un tren cuya velocidad es de 40 km/h, emplea 4 horas en recorrer 160 km. Si acelera su marcha a 80 km/h, empleará solamente 2 horas en hacer el mismo recorrido. En cambio, si su velocidad fuera de 20 km/h tardaría el doble del tiempo.

DEFINICIÓN

1. Dos magnitudes son Inversamente Proporcionales (I.P.) cuando al hacerse los valores de una de ellas 2, 3, 4, 5, ... "n" veces mayores, los valores correspondientes de la otra se hacen 2, 3, 4, 5, ..., n veces menores respectivamente ; y, viceversa.

   Es decir: mientras una crece la otra decrece.

   Ejemplo:

   La velocidad y el tiempo son magnitudes I.P., y de acuerdo a la definición podemos establecer el siguiente cuadro para un móvil que debe recorrer 24 km.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES				
Tiempo	1hora	2horas	3horas	4horas	5horas
Velocidad	24km/h	12km/h	8km/h	6km/h	4,8km/h

   Analizando el cuadro se deduce que:

   1 h . 24 km/h = 2 h . 12 km/h = 3h . 8 km/h

   = 24 km = k

   Por lo que podemos enunciar la segunda definición:

2. Dos magnitudes son I.P. cuando el producto de sus valores correspondientes es una cantidad constante.

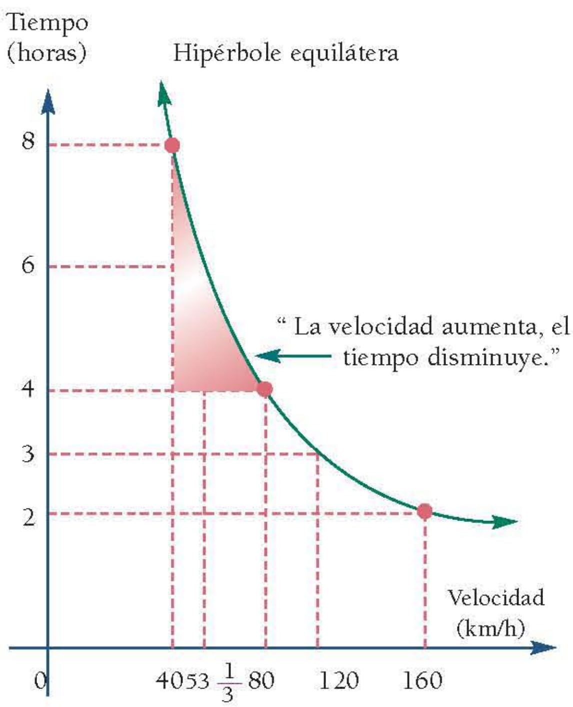
ESQUEMA CARTESIANO DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA

Para un determinado espacio, la velocidad y el tiempo son magnitudes I.P.

Ejemplo:

De Lima a Ica existe una distancia de aproximadamente 320 km; si un móvil se desplaza con una velocidad de 40km/h cubrirá dicha distancia en 8 horas; si duplica su velocidad (80 km/h) lo cubrirá en 4 horas; si cuadruplica su velocidad (160 km/h) cubre la distancia, sólo en 2 horas, y así sucesivamente.

Graficando en un sistema cartesiano



EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Si un tren recorre la primera vez 650 km en 8 horas; y, la segunda vez, 360 km en 4 horas, es correcto decir que los espacios recorridos:

A) No son directamente proporcionales a los tiempos empleados.

B) Son proporcionales a los tiempos empleados.

C) Han sido inversamente proporcionales a los tiempos empleados.

D) Han sido directamente proporcionales a las raíces cuadradas de los tiempos.

E) Han sido directamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

Solución:

Sabemos que: $v = \dfrac{e}{t}$ y como

$$e' = 650 \ , \ e'' = 360$$

$$t' = 8 \ , \quad t'' = 4$$

Entonces, podríamos probar si se cumple:

$$\frac{e'}{t'} = \frac{e''}{t''}$$

Pero, al reemplazar encontramos que NO se cumple la relación:

$$81{,}25 = \frac{650}{8} \neq \frac{360}{4} = 90$$

No son directamente proporcionales a los tiempos empleados.

Rpta.: A

2.- El peso de un disco varía proporcionalmente al cuadrado de su radio y también a su espesor. Dos discos cuyos espesores están en la relación de 9 es a 8; el primero pesa el doble del segundo. Determinar la relación de sus radios.

Solución:

Consideremos

$$P = \text{peso} \ , \quad e = \text{espesor} \ , \quad r = \text{radio}$$

Por datos:

$$P \ \alpha \ r^2 \ ; \ P \ \alpha \ e$$

(α se lee: "es proporcional a")

Por propiedad:

$$P \ \alpha \ (r^2 \, . \, e) \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{r^2 \, . \, e} = k \qquad (1)$$

(k = constante)

Primer disco	Segundo disco
$p_1 = 2a$	$P_2 = a$
$e_1 = 9$	$e_2 = 8$
$r_1 = \ ?$	$r_2 = ?$

Se reemplaza estos valores sucesivamente en (1):

$$\frac{2a}{r_1^2 \cdot 9} = k \quad y \quad \frac{a}{r_2^2 \cdot 8} = k$$

Igualando:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$$

Rpta.: Relación de radios $= \dfrac{4}{3}$

3.- El cuadrado de A varía proporcionalmente al cubo de B; si A = 3, B = 4. Determinar el valor de B cuando:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solución:

Según datos podemos establecer que:

$$A^2 \ \alpha \ B^3 \Rightarrow \frac{A^2}{B^3} = k \qquad (1)$$

También por datos:

$$\frac{3}{4} = \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{A^2}{B^3} = \frac{9}{64}$$

Si: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{9}{64} = \frac{(\sqrt{3}/3)^2}{B^3} \Rightarrow B^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{64}{9} = \frac{64}{27}$$

Rpta.: $B = \dfrac{4}{3}$

4.- Sabiendo que A es directamente proporcional a B! e inversamente proporcional a C!. Si A = 9, B = 19 y C = 17, hallar C cuando A = 39 y B = 39.

Solución:

Se cumple : $\dfrac{A \cdot C!}{B!} = k$

Reemplazando datos:

$$\frac{9 \cdot 17!}{19!} = k$$

También:

$$\frac{39 \cdot C!}{39!} = k$$

Igualando:

$$C! = \frac{9 \cdot 17! \ 39!}{19! \cdot 39} = 37!$$

Rpta.: C = 37

5.- Un terreno de forma cuadrada que se encuentra a 150 km al norte de Lima está valorizado en 1 millón de soles. Asumiendo que el precio de los terrenos varía proporcionalmente a su área e I.P. a la distancia que los separa de Lima. ¿Qué precio tendrá un terreno de forma cuadrada cuyo perímetro es la mitad del anterior y que se encuentra a 50 km de la capital?

Solución:

Asumiendo que:

P = precio de terreno

A = área

d = distancia a Lima

l = lado del terreno menor

r = constante de proporcionalidad

De acuerdo al enunciado:

$$P \ \alpha \ \frac{A}{d} \Rightarrow P = r\frac{A}{d} \Rightarrow r = \frac{P \cdot d}{A}$$

$$r = \frac{P_1 \cdot d_1}{A_1} = \frac{P_2 \cdot d_2}{A_2} \qquad (I)$$

Podemos establecer:

		1er. terreno	2do terreno
P :	→	1 000 000	x
d :	→	150	50
A :	→	$4l^2$	l^2

Reemplazando estos datos en (1):

$$\frac{1\ 000\ 000(150)}{4l^2} = \frac{x(50)}{l^2}$$

x = S/. 750 000

Rpta.: Precio del terreno: S/. 750 000

6.- Si el tiempo que demora un planeta en dar la vuelta alrededor del Sol es directamente proporcional al cubo de la distancia del planeta al Sol e inversamente proporcional al peso del planeta. ¿Cuánto tiempo demora un planeta de doble peso que el de la tierra en dar la vuelta al Sol, si la distancia que lo separa del Sol es el doble que la de la Tierra?

Solución:

	Tierra	Planeta
T	365	x
D	d	2d
P	p	2p

T : tiempo que demora en dar la vuelta al Sol (período de rotación)

D : distancia de un planeta cualquiera al Sol

P : peso de un planeta

De acuerdo al enunciado:

$$T \,\alpha\, \frac{D^3}{P} \Rightarrow T = r\,\frac{D^3}{P} \Rightarrow r = \frac{TP}{D^3}$$

Igualando ambas razones:

$$\underset{\text{Tierra}}{\frac{365\ .\ p}{d^3}} = \underset{\text{Planeta}}{\frac{x\ .\ 2p}{2^3\ .\ d^3}}$$

x = 1 460 días

Rpta.: 1 460 días

7.- Los coeficientes de inteligencia de dos personas están en la relación de 5/13. Si el más inteligente realiza un problema en 2,16 minutos menos que el otro; hallar en qué tiempo lo realiza este último.

Solución:

El más inteligente emplea menos tiempo. Por lo tanto, los tiempos empleados son inversamente proporcionales a los coeficientes de inteligencia, y podemos establecer que:

t = tiempo empleado por el menos inteligente en resolver el problema; (t - 2,16 minutos) será el tiempo empleado por el más inteligente en resolver el mismo problema.

Por propiedad de magnitudes I.P., podemos establecer :

$$5\ .\ t = 13\ .\ (t - 2{,}16)$$

$$t = 3{,}51 \text{ minutos}$$

Rpta.: El menos inteligente emplea 3,51 minutos en resolver el mismo problema.

8.- Según la Ley de Boyle, la presión de un gas es I.P. al volumen del gas. ¿A qué presión está sometido un gas si al aumentar esta presión en 2 atmósferas el volumen varía en un 20%?

Solución:

Sea:

presión = P

volumen = V

Por dato, según Boyle:

$$P\ .\ V = k$$

Si aumenta la presión, disminuye el volumen. En el problema disminuye en 20%; eso quiere decir que queda en 80%:

$$P\ .\ V = (P + 2)\ \frac{80}{100}\ V$$

P = 8

Rpta.: P = 8 atm.

9.- El cuadrado de A es directamente proporcional a B y B es inversamente proporcional al cuadrado de C. Si C aumenta en un 40% de su valor. ¿Qué pasará con el valor correspondiente de A?

Solución:

Podemos establecer por enunciado:

$$B \alpha A^2 \quad y \quad B \alpha \frac{1}{C^2}$$

$$\therefore \; B \alpha \frac{A^2}{C^2} \Rightarrow \frac{B \cdot C^2}{A^2} = k$$

Cuando C aumente en su 40% (2/5), B = constante, entonces:

$$\frac{BC^2}{A^2} = \frac{B\left(C + \frac{2}{5}C\right)^2}{x^2}$$

$$x = \frac{7}{5}A = A + \frac{2}{5}A$$

Rpta.: A también aumenta en 40%

10.- El precio de una piedra preciosa es directamente proporcional al cubo de su peso. Si una piedra preciosa de este tipo, que vale 100 000 soles, se parte en dos pedazos, uno pesa los 2/3 del otro. ¿Qué pérdida de valor sufrirá dicha piedra?

Solución:

Sea P el peso de la piedra:

$$\frac{100\,000}{P^3} = k$$

2 pedazos
- 1° peso = P_1 ; precio = x
- 2° peso = $\frac{2}{3}P_1$; precio = y

$$P_1 + \frac{2}{3}P_1 = P \Rightarrow P = \frac{5}{3}P_1$$

Se cumple:

$$\frac{100\,000}{\left(\frac{5}{3}P_1\right)^3} = \frac{x}{P_1^3} = \frac{y}{\left(\frac{2}{3}P_1\right)^3}$$

de aquí:

x = S/. 21 600

y = S/. 6 400

Costo total de la piedra después de romperse:

21 600 + 6 400 = S/. 28 000

Perdió: 100 000 - 28 000 = S/. 72 000

Rpta.: S/. 72 000

11.- En un mismo lugar, la duración de las oscilaciones de dos péndulos es proporcional a las raíces cuadradas de las longitudes de dichos péndulos. Un péndulo que tiene 0,9939 m de longitud bate segundos en París. Calcular con menos error que una oscilación el número de oscilaciones que daría en un día en París un péndulo de 0,5674 m.

(Batir segundos quiere decir que un péndulo demora 1 segundo en ir y volver a su posición inicial)

Solución:

La duración de una oscilación del 2do. péndulo es:

$$\frac{1}{\#} = \frac{\sqrt{0,5674}}{\sqrt{0,9939}}$$

Por lo tanto el número de oscilaciones en un día, es decir, en 86 400 segundos será:

$$1 \cdot \frac{\sqrt{0,9939}}{\sqrt{0,5674}} \cdot 86\,400 = 114\,351{,}12$$

Rpta.: 114 351,12 oscilaciones.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si se tiene la siguiente tabla de valores para dos magnitudes A y B :

A	36	144	324	9	4
B	6	3	2	12	18

Entonces:

a) $A \alpha B$ b) $A \alpha \frac{1}{2}$ c) $A \alpha B^2$

d) $A \alpha \frac{1}{B^2}$ e) $A \alpha B^3$

2. Se ha descubierto que la cantidad de trabajo hecho por un hombre en una hora varía en razón directa de su salario por hora e inversamente a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja por día. Si puede terminar una pieza en seis días cuando trabaja 9 horas diarias a un dólar por hora. ¿Cuántos días tardará en terminar la misma pieza cuando trabaja 16 horas diarias a un dólar y medio por hora?

a) $6\frac{3}{4}$ días b) $6\frac{2}{3}$ días

c) $5\frac{3}{4}$ días d) $6\frac{1}{3}$ días

e) N.A.

3. El valor de un diamante varía proporcionalmente al cuadrado de su peso. Si la piedra que se compró a S/. 640 000, se rompe en dos piezas, de las cuales una es los tres quintos de la otra. ¿Cuánto será la pérdida en porcentaje sufrida por romperse el diamante?

a) 46,875% b) 53,225% c) 56,5%

d) 61,725% e) N.A.

4. ¿Cuántos gramos tiene una esmeralda que vale S/. 112 500, si una de 6 g vale S/. 7 200? Se sabe que el precio es proporcional al cubo del peso.

a) 15 g b) 22,5g c) 63,4 g

d) 93,75 g e) N.A.

5. Dividir 1 400 en tres partes directamente proporcionales a 4, 6 y 10 e inversamente proporcionales a 8, 4 y 2. Indicar la diferencia entre la mayor y menor de las partes.

a) 600 b) 900 c) 300

d) 1 200 e) N.A.

6. Determinar la profundidad de un pozo sabiendo que una piedra tarda 1 segundo y 4/10 en llegar al fondo.

Se sabe que un cuerpo que cae libremente recorre una distancia proporcional al cuadrado del tiempo y que una piedra recorre 19,60 m en 2 segundos.

a) 10 m b) 11,5 m c) 9, 604 m

d) 12 m e) N.A.

7. Los días de lluvia de un mes cualquiera son D.P. a los días de lluvia al mes anterior, e I.P. a la temperatura promedio del mes anterior. Si en mayo llovió 8 días y la temperatura promedio fue de 16°C, determinar cuántos días llovió en julio, si en junio llovió 12 días y la temperatura promedio fue 12°C.

a) 8 días b) 12 días c) 20 días

d) 16 días e) 24 días

8. El número de focos eléctricos que existen en un salón varía en forma directa a la iluminación que hay, y la iluminación varía en forma directa al ta-

maño del salón y al número de watts de cada uno de los focos. Para un salón de cierto tamaño se requiere 8 focos de 25 watts cada uno. ¿Cuántos focos de 100 watts se necesitará para un salón cuyo tamaño es 50% mayor que el anterior?

a) 56 b) 48 c) 54

d) 36 e) 27

9. Si A^3 varía en forma directamente proporcional con B^2 y al mismo tiempo en forma inversamente proporcional con C, cuando A = 6, B = 3 y C = 4. Hallar el valor de B cuando:

$$A = \sqrt[3]{9} \quad y \quad C = 6$$

a) 2 b) 3 c) 1/2

d) 1/6 e) N.A.

10. La velocidad de un velero es directamente proporcional a la velocidad del viento, e I.P., al peso que lleva. Si cuando la velocidad del viento es de 15 km/h el peso es 100 kg, la velocidad del velero es 10 km/h. Determinar la velocidad del viento en una tormenta si el peso es de 80 kg y la velocidad del velero es 20 km/h.

a) 24 km/h b) 16 km/h c) 20 km/h

d) 25 km/h e) 30 km/h

11. Una cabra amarrada a un árbol por una cuerda de 6 m comiendo la misma cantidad de pasto diario, acaba lo que puede en 3 días. Si le ponen 2 m más de cuerda. ¿Cuánto más demorará?

a) 20/9 b) 21/9 c) 22/9

d) 23/9 e) N.A.

12. A es directamente proporcional a B y B es directamente proporcional a D e inversamente a C. Si A es 12, D es 40. ¿Cuánto será A si D es 90?

a) 27 b) 42 c) 35

d) 16 e) N.A.

13. A es directamente proporcional a B y C es inversamente proporcional a D y E. ¿Por cuánto hay que multiplicar a D para que cuando B y C se dupliquen y E se reduzca a la mitad A se haya duplicado?

a) 2 b) 4 c) 8

d) 12 e) N.A.

14. A varía en forma directamente proporcional con B y C; B varía proporcionalmente con D^2; y C varía en forma inversamente con A. Cuando A es igual a 20, D es igual a 5. Hallar el valor de A cuando D es igual a 7.

a) 22 b) 16 c) 32

d) 28 e) 24

15. Cuando Pedro y Juan trabajan juntos, el primero hace los 3/4 del trabajo y Juan el resto; cuando Juan y Esteban trabajan juntos, el primero hace los 3/5 del trabajo y Esteban el resto. Cuando trabajen los tres juntos, ¿qué fracción del trabajo hace Pedro?

a) 5/7 b) 9/14 c) 3/8

d) 5/8 e) 8/13

16. El cuadrado del recorrido de un automóvil es proporcional con el cubo de la cantidad de combustible que gasta; si en un recorrido de 70 km gasta 4 litros de gasolina. Hallar la cantidad de gasolina que gasta en un recorrido de:

$$\frac{\sqrt{70}}{70} \text{ km.}$$

a) 7/70 b) 280 c) $4/\sqrt{70}$

d) $4/\sqrt{35}$ e) 2/35

17. Se reparte N directamente proporcional a 1, 8, y 1/2 N. Si a 1 le corresponde 1/2. Hallar N.

a) 2 b) 5 c) 6

d) 15 e) 30

18. La cantidad de problemas que puede resolver un postulante, en un Examen de Admisión, es proporcional al número de problemas que ha resuelto y a la cantidad de meses que se ha preparado, pero es inversamente proporcional al número de días que no estudió. Un postulante que se preparó 5 meses y que no estudió 9 días resolvió 30 problemas. ¿Cuántos problemas podrá resolver un postulante que se prepare 3 meses más pero que no estudie 8 días?

a) 36 b) 54 c) 40

d) 28 e) 24

19. El peso de una varilla varía proporcionalmente a su longitud y a su sección transversal. Si un metro de hierro forjado de un centímetro de diámetro pesa 600 g, hallar el peso de una varilla de 5m de largo y que tiene 5 cm de diámetro.

a) 15kg b) 80kg c) 75kg

d) 85kg e) N.A.

20. Señalar qué enunciados no son falsos:

I. Si una cantidad es directamente proporcional a otras varias, no es proporcional al producto de ellas.

II. La suma del mayor y menor de los términos de una proporción no siempre es mayor que la suma de los otros dos.

III. Si dos cantidades son inversamente proporcionales cuando una de ellas aumenta en su mitad, tercera o cuarta parte, la otra disminuye en su mitad, tercera o cuarta parte.

a) I b) II c) III

d) II y III e) N.A.

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) C	3) A	4) A	5) A
6) C	7) E	8) B	9) E	10) A
11) B	12) A	13) E	14) D	15) B
16) E	17) C	18) B	19) A	20) E

REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

REGLA DE TRES SIMPLE

Es un procedimiento de cálculo que permite hallar un cuarto valor cuando se conoce otros tres valores, correspondientes a dos magnitudes. La regla de tres simple puede ser directa o inversa.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

La regla de tres simple directa es aquella en la que las magnitudes involucradas son directamente proporcionales.

PROBLEMA GENERAL

El peso a_1, de una mercancía cuesta b_1:cuánto costará el peso a_2 de la misma mercancía.

Peso y costo son magnitudes directamente proporcionales

Peso		Costo
a_1	$\longleftrightarrow$	b_1
a_2	$\longleftrightarrow$	x

Por propiedad de magnitudes D.P. : $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{x}$

Nota.-

En la práctica, si se determina que las magnitudes son D.P., se puede aplicar el siguiente método práctico:

El valor de la incógnita se obtiene al multiplicar los valores que están en la misma "diagonal" y este producto se divide por la tercera cantidad.

Método Práctico

Peso	Costo
a_1	b_1
a_2	x

$a_2 \xleftrightarrow{\text{diagonal}} b_1$

$$x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

La regla de tres simple inversa es aquella en la cual las magnitudes involucradas son inversamente proporcionales.

PROBLEMA GENERAL

Para cubrir el espacio d, un móvil que lleva una velocidad constante V_1, emplea el tiempo t_1 ; qué tiempo empleará en cubrir la misma distancia d, si su velocidad disminuye a V_2.

Velocidad y Tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

Velocidad	Tiempo
V_1	t_1
V_2	x

Es evidente que si la velocidad DISMINUYE el tiempo AUMENTA.

Nota.-

En la práctica si se determina que las magnitudes son I.P. el valor de la incógnita se puede obtener multiplicando los valores que están en la misma "horizontal" y dividiendo este producto por la tercera cantidad.

Método Práctico

Velocidad		Tiempo
V_1	⟷	t_1
V_2		x

$$x = \frac{V_1 \cdot t_1}{V_2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Para tapizar una pared se ha comprado 25 m de tela de 80 cm de ancho. ¿Qué longitud es necesario comprar para tapizar la misma pared si el ancho de la tela fuese 1,10 m?

Solución:
Ambas magnitudes son I.P.

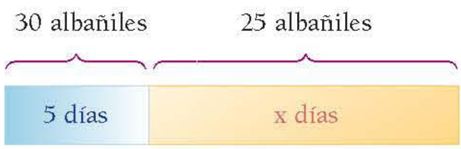
Longitud		Ancho
25 m	———	80 cm
x	———	110 cm

$$x = \frac{25 \cdot 0{,}80}{1{,}10} = 1{,}18$$

Rpta.: x =18,18 m

2.- 30 albañiles debían terminar una obra en 20 días; habían trabajado 5 días cuando 5 de ellos se retiraron. ¿Cuánto duró la construcción de la obra?

Solución:



Para la segunda parte, con menos albañiles.

30 albañiles	———	15 días
25 albañiles	———	x

Regla de tres inversa, luego:

$$x = \frac{15 \cdot 30}{25} = 18 \text{ días}$$

La obra duró: (18 + 5) días = 23 días

Rpta.: 23 días.

3.- Un barco tiene víveres para 22 días si lleva 39 tripulantes. Diga, ¿cuánto pueden durar los víveres si viajan sólo 33 tripulantes?

Solución:

Usando la regla de tres inversa:

39 tripulantes	———	22 días
33 tripulantes	———	x

$$x = \frac{39 \cdot 22}{33} = 26 \text{ días}$$

Rpta.: Dura 26 días.

4.- 40 kg de miel contiene 24 kg de azúcar. ¿Cuántos kg de H_20 hay que agregar a esta miel para que 5 kg de la nueva mezcla de miel contenga 2 kg de azúcar?

Solución:

En este caso, usaremos la regla de tres simple directa:

mezcla de miel		azúcar
5 kg	———	2 kg
x	———	24 kg

$$x = \frac{24 \cdot 5}{2} \Rightarrow x = 60 \text{ kg mezcla de miel}$$

En conclusión hay que agregar:

(60 - 40) kg = 20 kg de agua

Rpta.: Hay que agregar 20 kg de agua.

5.- Se tiene 2 toneles de 20 y 30 litros de vino de diferente calidad; se saca de ambos un mismo número de litros y se echa al primero lo que se sacó del segundo y viceversa obteniéndose en ambos toneles vinos de igual calidad. ¿Qué cantidad se sacó de los toneles?

Solución:

Supongamos que se mezcla todo, entonces:

Mezcla		Vino 2º tonel
50 L	———	30 L
20 L	———	xg

$$x = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12$$

Rpta.: Se sacó 12 L de cada tonel.

6.- 35 obreros pueden terminar una obra en 27 días. Al cabo de 6 días de trabajo se les junta cierto número de obreros de otro grupo, de modo que en 15 días más terminan la obra. ¿Cuántos obreros venían del segundo grupo?

Solución:

Sea x el número de obreros del segundo grupo:

Regla de tres simple inversa:

obreros		días
35	———	21
(35 + x)	———	15

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} x = 14$$

Rpta.: Pertenecen 14 obreros al segundo grupo.

7.- Para hacer una zanja de 40 m . 2m . 0,8 m se contrató 15 obreros que lo harían en 18 días; luego de 3 días, 3 obreros enferman. Se decide entonces no variar el tiempo ni contratar más obreros, sólo se disminuirá la longitud de la zanja. ¿En cuánto se disminuyó ésta?

Solución:

Como habían trabajado 3 días juntos, habían ejecutado 3/18 = 1/6 de la obra; por lo tanto 1/6 de la longitud, ésto es 8 m. Faltan 40 m de longitud, que ahora lo deben ejecutar 12 obreros, por lo que podemos establecer una regla de tres simple directa:

obreros		días
15	———	40
12	———	x

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} x = 32 \text{ m}$$

Entonces: 40 - 32 = 8

Rpta.: Se disminuyó en 8 m

8.- Ochenta litros de agua de mar contienen 2 lb de sal. ¿Cuántos litros de agua pura se deberá agregar, si se quiere que cada 10 litros de la nueva mezcla contenga 1/6 libra de sal?

Solución:

En la nueva mezcla:

litros	α	sal(lbs)
10	———	1/6
x	———	2

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} x = 120 \text{ L}$$

la nueva mezcla es de 120 L

$\therefore$ Se agregó 120 - 80 = 40 L de agua

Rpta.: Se agregó 40 L de agua pura

9.- En una caja hay 200 bolas, de las cuales 60 son rojas y el resto blancas. ¿Cuántas bolas blancas se deberá agregar, si se quiere que por cada 3 bolas rojas hayan 20 blancas?

Solución:

$$\begin{array}{ccc} \text{\# rojas} & \alpha & \text{\# blancas} \\ 3 & \text{———} & 20 \\ 60 & \text{———} & x \end{array}$$

$x = 400$ bolas blancas

∴ Se debe agregar:

$$400 - 140 = 260 \text{ blancas}$$

Rpta.: Se debe agregar 260 blancas.

10.- A una reunión asistieron 511 personas; se sabe que por cada 6 hombres, había 8 mujeres. ¿Cuántos hombres asistieron a la reunión?

Solución:

Se deduce que de cada 14 personas, 6 son hombres.

Regla de tres simple directa.

$$\begin{array}{ccc} \text{Personas} & & \text{Hombres} \\ 14 & \text{———} & 6 \\ 511 & \text{———} & x \end{array}$$

$x = 219$

Rpta.: Asistieron 219 hombres.

REGLA DE TRES COMPUESTA

OBJETIVO

Se da una serie de "n" valores correspondientes a "n" magnitudes y una segunda serie de (n-1) valores. El objetivo de la regla de 3 compuesta es determinar el valor desconocido de la segunda serie de valores.

	MAGNITUDES					
	A	B	C	D	...	N
Valores (1ra. serie)	a_1	b_1	c_1	d_1	...	n_1
Valores (2da. serie)	a_2	x	c_2	d_2	...	n_2

∴ Hallar "x"

Para resolver los problemas de regla de 3 compuesta, existen 4 métodos principales:

1° Reducción a la unidad o método razonado.

2° Aplicando criterios de proporcionalidad directa o inversa.

3° Regla práctica (ley de los signos) es el más usado y se explica más abajo.

4° Método de las fracciones.

REGLA PRÁCTICA: LEY DE LOS SIGNOS

Este método es sólo una consecuencia práctica de las magnitudes proporcionales y consiste en lo siguiente:

Se coloca los valores correspondientes a la misma magnitud, uno debajo del otro; a continuación se compara las magnitudes que intervienen para saber si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita y se sigue la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccc} \text{Si son D.P.:} & & \text{Si son I.P.:} \\ \text{arriba } - & \text{———} & \text{arriba } + \\ \text{abajo } + & \text{———} & \text{abajo } - \end{array}$$

El valor de la incógnita viene dado por un quebrado cuyo numerador es el producto de todas las cantidades asignadas con signo (+) y cuyo denominador es el producto de todas las cantidades asignadas con signo (-).

En todos los problemas, sin excepción el valor numérico que es de la misma especie que la incógnita llevará signo (+).

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- 500 obreros del ferrocarril, trabajando 10 horas diarias, han colocado ya 2 300 metros de vía en 28 días. 425 obreros trabajando 8 horas diarias, ¿cuántos metros de vía colocarán en 42 días?

Solución:

Aplicando el 1er método:

obreros	horas diarias	vía	días
500	10	2 300	28
425	8	x	42

Calculemos primero el número de horas de trabajo necesarias para colocar 1 metro de vía.

500 obreros trabajando 10 horas diarias, hacen 500 . 10 horas de trabajo al día.

En 28 días, hacen: 500 . 10 . 28 horas de trabajo.

Como han colocado 2 300 metros de vía, se calcula el tiempo necesario para colocar 1 metro dividiendo 500 . 10 . 28 entre 2 300; esto es:

$$\frac{500 \,.\, 10 \,.\, 28}{2\,300} \text{ horas por metro}$$

Por otra parte, 425 obreros, trabajando 8 horas diarias durante 42 días hacen 425 . 8 . 42 horas de trabajo. colocarán tantos metros de vía como veces esté contenido.

$$\frac{425 \,.\, 8 \,.\, 42}{\dfrac{500 \,.\, 10 \,.\, 28}{2\,300}} = 2\,346 \text{ metros de vía}$$

Rpta.: 2 346 metros de vía.

2.- Ocho obreros hacen la apertura de una zanja de 20 m de longitud, 5 de anchura y 2 de profundidad en 5 días, trabajando 10 horas diarias con un esfuerzo representado por 4, una actividad representada por 2 y en un terreno cuya resistencia a la cava está representada por 1. Calcular la longitud que tendrá otra zanja de 4m de anchura y 1,5 de profundidad habiendo sido abierta por 6 operarios que han trabajado durante 40 días, a 8 horas por día, con un esfuerzo como 5, una actividad como 3 y en un terreno de resistencia 2.

Solución:

Aplicando el 2º método:

Las longitudes de las dos zanjas son directamente proporcionales a los números de operarios, a los días de trabajo, a las horas que se trabaja por día, a los esfuerzos y a las actividades de los operarios, e inversamente proporcional a las anchuras, profundidades y resistencia a la cava del terreno.

$$x = \frac{20 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 40 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 3}{8 \,.\, 4 \,.\, 1{,}5 \,.\, 5 \,.\, 10 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 2} = 150 \text{ m}$$

Rpta.: 150 metros.

3.- Un muro de 50 metros de largo, 8,80 metros de alto y 30 cm de espesor, ha sido construido en 18 días por 6 hombres que trabajan 8 horas diarias. Se pregunta ¿qué altura tendrá otra pared que debe ser construida en 30 días por 3 hombres que trabajan 10 horas por día si va a tener 70 metros de largo y 45 cm de espesor?

Solución:

hombres	horas	días	largo	espesor	altura
-	-	-	+	+	+
6	8	18	50	30	8,80
3	10	30	70	45	x
+	+	+	-	-	

siguiendo la regla práctica, "x" será:

$$x = \frac{8{,}80 \,.\, 3 \,.\, 10 \,.\, 30 \,.\, 50 \,.\, 30}{6 \,.\, 8 \,.\, 18 \,.\, 70 \,.\, 45} = 4{,}37 \text{ m}$$

Rpta.: 4,37 m

4.- Una cuadrilla de 40 obreros ha hecho 400 metros de carretera durante cierto número de días a razón de 8 horas diarias. Otra cuadrilla de 60 hombres ha hecho 675 metros de la misma obra trabajando 6 horas diarias. Si el tiempo que han demorado las dos cuadrillas en hacer sus obras suma 25 días. Hallar el tiempo que emplea cada cuadrilla en hacer su obra.

Solución:

obreros	días	horas/día	longitud
+	+	+	-
40	T	8	400
60	25-T	6	675
-		-	+

donde:

$$25 - T = \frac{T \cdot 40 \cdot 8 \cdot 675}{60 \cdot 6 \cdot 400} = \frac{3T}{2}$$

$$25 - T = \frac{3T}{2}$$

$$T = 10 \text{ días}$$

$\therefore$ 25 - T = 15 días

Rpta.: Demoraron: 10 y 15 días.

5.- Se contrató una obra para ser terminada en 20 días por 15 obreros que trabajan 8 horas diarias. Habían trabajado ya dos días cuando se acordó que la obra quedase terminada tres días antes del plazo estipulado: para lo cual se contrató 5 obreros más. Diga si la jornada deberá aumentarse o disminuirse y en cuánto.

Solución:

obreros	días	horas/día	obra
+	+	+	-
15	20	8	1
20	15	x	9/10
-	-		+

$$x = \frac{15 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 9/10}{20 \cdot 15 \cdot 1} = 7{,}2 \text{ horas}$$

La jornada debe ser de 7,2 horas diarias, por lo que la jornada primitiva disminuye en:

8 - 7,2 = 0,8 horas = 48 minutos.

Rpta.: La jornada debe disminuir en 48 minutos.

6.- Un contratista se compromete a construir dos secciones de un ferrocarril que son igualmente difíciles para el trabajo. En cada sección emplea 80 obreros y al cabo de 50 días observa que mientras que los primeros han hecho 3/8 de su trabajo, los otros han construido los 5/7 del suyo y deseando terminar la primera sección en 120 días, se pregunta: ¿cuántos obreros deberán pasar de la segunda a la primera sección?

Solución:

80 obreros en cada grupo:

primer grupo de obreros

segundo grupo de obreros

En el 1er grupo:

50 días ———— 3/8 obra

120 días ———— x

$$x = \frac{120 \cdot 3/8}{50} = \frac{36/8}{5}$$

x = 9/10 de la obra

Si se construye los 9/10; entonces queda sin construir 1/10 de la obra.

En el 2do grupo:

obreros	días	obra
+	+	-
80	50	5/7
x	70	1/10
	-	+

Siguiendo la regla práctica:

$$x = \frac{80 \cdot 50 \cdot 1/10}{70 \cdot 5/7} = 8 \text{ obreros}$$

Rpta.: Deberán pasar 8 obreros del 2do al 1er grupo.

7.- $\overline{2a}$ familias que habitan en un edificio reciben:

$\overline{(a-2)\,00}$ litros de agua durante $\overline{a0}$ días.

Por tener que hacer algunas reparaciones en las tuberías, el agua hay que hacerla durar $\overline{a0}$ días más, con el problema que se alojan "a" familias más. ¿En cuánto hay que disminuir el consumo diario por familia?

Solución: Podemos establecer:

Familias	Litros/día	días
+	+	+
$\overline{2a}$	$\overline{(a-2)00}$	$\overline{a0}$
$\overline{2a}+a$	x	$2(\overline{a0})$
-		-

(γ)

Se deduce que la disminución es de:

$$\overline{(a-2)00} - x \qquad (\beta)$$

De (γ):

$$x = \frac{\overline{2a}\,.\,\overline{(a-2)00}\,.\,\overline{a0}}{(\overline{2a}+a)2(\overline{a0})}$$

$$x = \frac{(20+a)\,.\,100(a-2)\,.\,10a}{2(10+a)2(10a)}$$

$$x = \frac{25(a-2)\,.\,(20+a)}{(10+a)} \qquad (\Phi)$$

(Φ) en (β) es la disminución diaria.

$$100(a-2) - \frac{25\,(a-2)(20+a)}{10+a}$$

Rpta.: Disminución diaria por familia:

$$\frac{25(a-2)(20+3a)}{\overline{1a}}$$

8.- Una cantidad "MUCA" de obreros debe realizar una obra y al cabo de "VARIOS" días ha ejecutado 1/JA de aquella. Determinar cuántos obreros más se debe contratar para terminar la obra en "MUCHOS" días más. Se sabe que:

VARIOS + MUCHOS = DEMASIADO

Solución:

Obreros	días	obra
+	+	-
MUCA	VARIOS	1/JA
x	MUCHOS	(1 - 1/JA)
	-	+

(1)

$$\text{AUMENTO} = x - \text{MUCA} \qquad (2)$$

De (1):

$$x = \frac{(\text{MUCA})\,(\text{VARIOS})\,(1 - 1/\text{JA})}{\text{MUCHOS}\,.\,1/\text{JA}} \quad \text{en (2)}$$

Rpta.:

$$\text{AUMENTO} = \frac{\text{MUCA}}{\text{MUCHOS}}(\text{VARIOS}\,.\,\text{JA} - \text{DEMASIADO})$$

9.- Para la construcción de una cerca de 84 metros de longitud, 3m de altura y 0,6 m. de espesor, se hizo un presupuesto de 43 848 soles. Al ejecutar la obra, se rebajó la altura en 1 m, se disminuyó el espesor en 10 cm y en la longitud había un error por exceso de dos metros. ¿Qué economía se obtuvo?

Solución:

Podemos establecer:

longitud	altura	espesor	presupuesto
-	-	-	+
84	3	0,6	S/. 43 848
82	2	0,5	x
+	+	+	

$$x = \frac{82\,.\,2\,.\,0{,}5\,.\,43\,848}{84\,.\,3\,.\,0{,}6} = 23\,780$$

Economía: 43 848 - 23 780 = 20 068

Rpta.: Se obtuvo un ahorro de S/, 20 068

10.- Una familia de 5 personas gasta S/. 60 000 para vivir 3 meses en una ciudad. ¿Cuánto debe gastar para vivir en otra ciudad durante 5 meses si el costo de vida es los 5/4 del anterior, sabiendo que se une la suegra a la familia?

Solución:

personas	gasto	meses	costo
-	+	-	-
5	S/. 60 000	3	1
6	x	5	5/4
+		+	+

Rpta.: Debe gastar S/. 150 000

11.- Para plantar "grass" en un terreno de 500 m^2, 10 personas demoraron 15 días de 7 horas de trabajo. ¿Cuántos días de 8 horas de trabajo se demorarán en plantar 800 m^2, 15 personas doblemente hábiles?

Solución:

Superficie	personas	días	h/d	habilidad
-	+	+	+	+
500	10	15	7	1
800	15	x	8	2
+	-		-	-

$$x = 15 \cdot \frac{800}{500} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = 7$$

Rpta.: 7 días.

12.- Ocho hombres construyen 8 casas en un tiempo de 8 años trabajando con un cierto esfuerzo. ¿Cuántos hombres de la misma habilidad que los anteriores pero que trabajen con el doble de esfuerzo se necesitará para construir el doble de casas en un tiempo 50% menor que el anterior?

Solución:

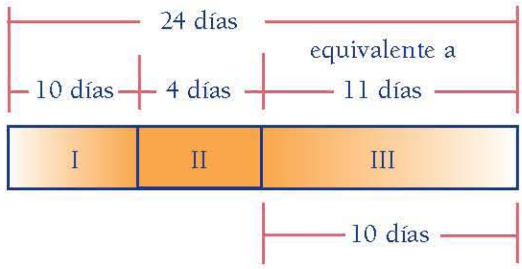
Hombres	Casas	Años	Esfuerzo
+	-	+	+
8	8	8	1
x	16	4	2
	+	-	-

$$x = 8 \cdot \frac{16}{8} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{1}{2} = 16$$

Rpta.: 16 hombres.

13.- En una construcción laboran 36 operarios, trabajando 5 horas diarias, deben terminarla en 24 días. Debido a las condiciones del clima, los obreros disminuyen en un 25% su rendimiento luego de 10 días de trabajo. El Ingeniero de la obra, 4 días más tarde, decide aumentar en una hora la jornada de trabajo y contrata más obreros. ¿Cuántos obreros más contrató?

Solución:



Los 4 días que trabajan con 75% de eficiencia ejecutan una labor equivalente a tan sólo 3 días de labor normal; por lo tanto, si recuperan su eficiencia, la III parte la ejecutarían en 11 días; pero como la deben efectuar en 10 días y con una eficiencia del 75%, el Ingeniero se ve en la necesidad de reforzar la cuadrilla, con obreros de igual eficiencia, y aumenta además la jornada en una hora.

Operarios	Días	Eficiencia	H/D
+	+	+	+
36	11	100	5
(36 + x)	10	75	6
	-	-	-

$$36 + x = 36 \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{100}{75} \cdot \frac{5}{6} = 44$$

Rpta.: Refuerzo: 8 obreros.

14.- Ocho costureras trabajando con un rendimiento del 60% en 20 días, 8 horas diarias, cada una ha hecho 200 pantalones con triple costura para niños. ¿Cuántas costureras de 80% de rendimiento harán en 24 días de 10 horas cada día, 450 pantalones de doble costura para adultos; si se sabe que a igual número de costuras los pantalones para adultos ofrecen una dificultad que es 1/3 más que la que ofrecen los pantalones para niños?

Solución:

A igual número de costuras:

	Pantalón de niño	Pantalón de adulto
costuras	3	3
dificultad inicial	$3 \,.\, 1 = 3$	$3\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 4$

Como el pantalón de niño tiene 3 costuras su dificultad será como 3 y como el pantalón de adulto tiene 2 costuras su dificultad será 1/3 menor que la dificultad inicial:

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

Luego de estas observaciones, podemos plantear la siguiente regla de tres compuesta:

Costureras	Rendimiento	Días	H/D	Pantalones	Dificultad
+	+	+	+	-	-
8	60	20	8	200	3
x	80	24	10	450	8/3
	-	-	-	+	+

$$x = 8 \cdot \frac{60}{80} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{450}{200} \cdot \frac{8/3}{3}$$

$x = 8$ costureras

Rpta.: 8 costureras.

15.- Una zanja de 20 metros de profundidad puede ser acabada en 12 días por 10 obreros. Después de cierto tiempo de trabajo se decide aumentar la profundidad en 10 metros para lo cual se contrata 5 obreros más, terminándose la obra a los 15 días de empezada. ¿A los cuántos días se aumentó el personal?

Solución:

Nótese que en los 3 últimos días trabajaron los 15 obreros.

Obreros	Profundidad	Días
-	+	-
10	20	12
15	x	3
+		+

$$x = 20 \cdot \frac{15}{10} \cdot \frac{3}{12}$$

$x = 7,5$ m de profundidad

El resto:

22,5m → 20 m por los 10 obreros
22,5m → 2,5 m por los 5 obreros

Obreros	Profundidad	Días
+	-	+
10	20	12
5	2,5	x
-	+	

$$x = 12 \cdot \frac{2,5}{20} \cdot \frac{10}{5} = 3 \text{ días}$$

Se aumentó el personal después de: 12 - 3 = 9 días

Rpta.: El personal aumentó al décimo día.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para cavar un pozo se cuenta con dos grupos de obreros. El primer grupo tiene N_1 hombres y puede concluir la obra en 10 días; el segundo grupo tiene N_2 hombres y puede acabar la obra en 5 días. Si se tomó la cuarta parte del 1er grupo y la octava parte del 2do grupo. ¿En cuántos días harán dicha obra?

   Rpta: 20 días.

2. Si 32 obreros trabajando durante 20 días, 10 horas al día han realizado una zanja de 20 m de largo, 2 m de ancho y 1 m de profundidad. ¿Cuántos obreros menos se necesita para realizar una zanja de 30 m de largo, 3 m de ancho y 0,5 m de profundidad en 30 días trabajando 8 horas al día?

   Rpta.: 2 obreros menos.

3. 16 obreros trabajando 9 horas diarias pueden hacer una obra en 24 días. Después de 6 días de trabajo se retira cierto número de obreros, por lo cual los obreros que quedaron tienen que trabajar 12 horas diarias para entregar la obra en el plazo estipulado. ¿Cuántos obreros se retiraron?

   Rpta.: Se retiraron 4

4. Dos obreros necesitan 12h para hacer un trabajo. Si uno trabajando solo lo hace en 20h. ¿Cuánto tiempo empleara el segundo?

   Rpta.: 28h.

5. Sabiendo que de 250 quintales de remolacha puede extraerse 30 quintales de azúcar. ¿Qué peso de azúcar podrán proporcionar 100 quintales de remolacha?

   Rpta.: 12 quintales.

6. Cuatro hombres se comprometen a hacer una obra en 18 días. Si después de 3 días llega uno más. ¿Cuántos días antes terminarán la obra?

   Rpta.: 3 días antes.

7. ¿Qué diámetro se le debe dar, a una polea para que pueda girar a una velocidad de 150 r.p.m. si otra polea de 0,60 m de diámetro accionada por la misma correa de transmisión, da 80 r.p.m.?

   Rpta.: 0,32 metros.

8. En un grupo, el 40% son hombres; si el número de hombres se duplica, ¿qué porcentaje del total serán mujeres?

   Rpta.: 42,86%

9. Si el precio de un objeto se le recarga con el 20% resulta igual al precio de otro descontado en un 30%, si el primero cuesta S/. 1 750, ¿cuál es el precio del segundo?

   Rpta.: Precio del segundo: S/. 3 000

10. Después de una venta en la que un corredor cobra el 2% de comisión, gasta dicho corredor el 70% de sus ganancias y le queda aún S/. 912,60. ¿A cuánto asciende su cuenta?

    Rpta.: Asciende a S/. 152 100

11. En una reunión el 50% son hombres y el otro 50% mujeres, si se retira el 10% de los hombres y el 30% de las mujeres. ¿Qué porcentaje de los que quedan serán hombres?

    Rpta.: El 56,25%

12. Si 10 obreros pueden hacer en 60 días una obra de "M" metros; ¿Cuántos hombres se necesitarán para que en 40 días hagan M metros de la obra?

    Rpta.: 15 hombres.

13. Un caño A llena un deposito en 2n horas y otro caño B en 3n horas. Además tiene un orificio en el fondo por el que se desagua en 4n horas.¿Que fondo demoraran esntando abierto los tres?

    Rpta.: $\dfrac{12n}{3}$

14. En la fabricación de 1 000 rieles de 12 metros de longitud cada uno, se ha gastado 144 mil soles. ¿En cuánto deberá fijarse el kg de riel para obtener una ganancia de 20%, si cada metro del mismo pesa 40 kg y al comprador se le hace una rebaja del 10% de dicho precio?

Rpta.: El kg se debe fijar a S/. 0,40

15. Un terraplén cubica 2 805 m^3, después de haber experimentado un asiento del 15%. Sabiendo que las tierras que forman ese terraplén, al ser excavadas sufrieron un esponjamiento del 32%. Calcular lo que cubicaba el macizo de tierra antes de la cava.

Rpta.: Cubicaba: 2500 m^3

16. Una tripulación de "n" hombres tiene víveres para "d" días, si reduce a la tercera parte el número de días de viaje. ¿Cuántos hombres más podrán viajar?

Rpta.: 2n hombres.

17. 25 obreros trabajando 8 horas diarias en 15 días han hecho una obra de 800 m^2. ¿Cuántos m^2 harán 20 obreros trabajando 6 horas diarias en 20 días?

Rpta.: 640 m^3

18. Un comerciante compró cemento en una fábrica y vendió la cuarta parte de él con un beneficio del 5%, otro tanto con una 15% de utilidad y el resto con una pérdida del 6%. En total tuvo una ganancia de 316 soles. ¿Qué cantidad cobró la fábrica por el cemento?

Rpta.: 15 800 soles.

19. Si 60 hombres pueden cavar una zanja de 80 m^3 en 50 días. ¿Cuántos días necesitarán 100 hombres 50% más eficientes para cavar una zanja de 1 200 m^3, cuya dureza es 3 veces la anterior?

Rpta.: 900

20. Dos vehiculos con idénticos depositos de gasolina los consumen uniformemente en 4 y 5 horas. ¿Después de cuánto tiempo, el deposito de un vehiculo contendrá el doble del otro?

Rpta.: $\frac{10}{3}$ h

21. 16 hombres hacen una obra en cierto número de días, trabajando cierto número de horas diarias, ¿Cuántos hombres harán la cuarta parte de la obra en la mitad del número de días, trabajando el doble número de horas si su rendimiento es el doble?

Rpta.: 12 hombres.

22. 20 cajistas en 27 días de 9 horas pueden componer 18 pliegos de 24 páginas con 2 columnas cada página, 42 líneas por columna y 30 letras en cada línea. ¿Cuántas horas al día tendrán que trabajar 36 cajistas durante 28 días para componer 32 pliegos de 36 páginas con una columna de 49 líneas y 44 letras cada línea?

Rpta.: 11 horas al día.

REGLAS DE PORCENTAJE

IDEA DE PORCENTAJE

Se llama tanto por ciento o porcentaje al número de unidades que se toma en cuenta de cada 100 unidades.

Ejemplo:

18% indica que de cada 100 unidades se considera 18.

El signo "%" se lee "por ciento"

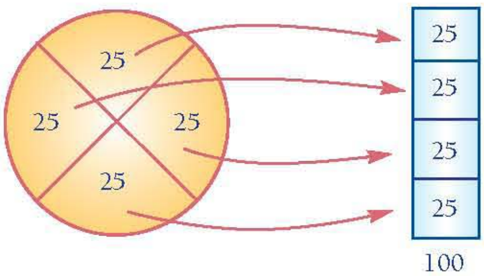
DEFINICIÓN

Tanto por ciento es el número de "partes" que se considera de un "todo" que ha sido dividido en 100 "partes" iguales.

Ejemplos:

i) Grafiquemos el siguiente problema: Hallar el 25% de 1200

Toda la circunferencia tiene 100 partes:



Entonces el 25% de 100 es 25.

El porcentaje se puede calcular mediante una regla de tres simple directa.

ii) Hallar el n % de M.

El "todo" (M) se representa como el 100%

unidades		%
M	——	100%
x	——	n

$$x = \left(\frac{n}{100}\right) M \quad \text{(fórmula)}$$

iii) Así, hallar el 12% de 400, será igual a aplicar la fórmula indicada:

$$x = \frac{12}{100} \cdot 400 = 48$$

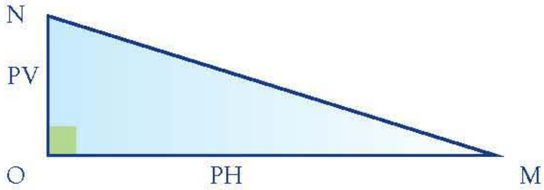
Nota:

El porcentaje puede expresarse como una fracción de denominador 100.

iv) Una recta tiene 8% de pendiente. A una proyección horizontal de 300 m., ¿qué proyección vertical corresponde?

Solución:

Se llama pendiente de una recta inclinada a la relación que existe entre su proyección vertical y su proyección horizontal.



Del gráfico:

$$\text{pendiente de MN} = \frac{NO}{MO}$$

La pendiente de una recta se indica por un tanto por ciento. Cuando se dice que una recta tiene 8% de pendiente, ésto indica que por cada 100 unidades de proyección horizontal corresponde 8 unidades de proyección vertical (o elevación).

En el caso específico del problema dado podemos establecer que:

$$\left.\begin{array}{lcl} 100 & \text{———} & 8 \\ 300 & \text{———} & x \end{array}\right\} x = 24 \text{ m}$$

Rpta.: 24 m de proyección vertical

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE GANANCIAS Y PERDIDAS

Definamos previamente:

Pv = Pc + G, donde:

Pv = Precio de venta

Pc = Precio de costo

G = Ganancia

1.- Antes de ir de compras tenía S/. 72 080; ahora que regreso de efectuar mis compras, sólo me queda S/. 4 324,8. ¿Qué porcentaje de lo que tenía antes de ir de compras tengo ahora?

Solución:

$$\left.\begin{array}{lcl} S/.\ 72\ 080 & \text{———} & 100 \\ S/.\ 4\ 324{,}8 & \text{———} & x \end{array}\right\} x = 6$$

Rpta.: 6 %

2.- Dos vacas fueron vendidas en S/. 6 000 cada una. Si en la primera se ganó el 25% y en la segunda se perdió el 25%. Determinar si hubo ganancia o pérdida y cuánto.

Solución:

Calculemos el valor de la ganancia en la venta de la primera vaca:

$$Pv = S/.\ 6\ 000$$

$$G = \frac{25}{100}\ Pc$$

Sabemos que:

$$Pv = Pc + G$$

$$\therefore\quad 6\ 000 = Pc + \frac{25}{100}\ Pc$$

$$\frac{125}{100}\ Pc = S/.\ 6\ 000$$

$$Pc = 4\ 800$$

Se ganó: 6 000 - 4 800 = S/. 1 200 (1)

Calculemos el valor de la perdida en la segunda vaca:

$$Pv = Pc - G$$

$$6\ 000 = Pc - \frac{25}{100}\ Pc$$

$$Pc = S/.\ 8\ 000$$

Se perdió: 8 000 - 6 000 = S/. 2 000 (2)

De (1) y (2), se perdió:

2 000 - 1 200 = S/. 800

Rpta.: Se perdió S/. 800

3.- Una persona va a comprar un automóvil por S/. 10 500 por el cual le harán un descuento del 5%.

Cuando va a cancelar descubre que éste no es su precio, por lo cual solamente paga S/. 9 595. ¿Cuántos soles menos era su precio?

Solución:

En realidad la persona paga únicamente el 95% del precio del auto.

El precio del vehículo era:

$$\frac{100}{95} \cdot 9\,595 = \text{S/. } 10\,100$$

El precio era menor en:

$$10\,500 - 10\,100 = 400 \text{ soles}$$

Rpta.: 400 soles menos.

4.- Una persona compró cierto número de pares de zapatos a S/. 80 cada par. Si los vendió con una ganancia neta de S/. 510 y los gastos ascendieron al 15% de la ganancia bruta. ¿Determinar cuántos pares de zapatos se compró si en total recibió S/. 3 800?

Solución:

Número de pares de zapatos:

$$n = \frac{\text{costo total}}{80} \qquad (1)$$

costo total = valor de venta total - ganancia bruta

costo total = 3 800 - ganancia bruta (G_b) (2)

Pero:

$$G_b = \text{ganancia neta} + \text{gastos}$$

Por datos del problema:

$$G_b = 510 + \frac{15}{100} G_b$$

$$\frac{85}{100} G_b = 510$$

$$G_b = 600$$

En la expresión (2) tendremos:

costo total = 3 800 - 600 = 3 200

En la expresión (1):

Número de pares de zapatos:

n = 3 200 / 80 = 40

Rpta.: 40 pares de zapatos.

5.- Un comerciante importaba cierto artículo y lo vendía en S/. 800 cada uno cuando el dólar costaba S/. 3, ganando el 20%. Ahora tiene que pagar por dólar S/. 4 y el precio de fábrica ha aumentado en 10%. Determinar a cómo deberá vender en la actualidad dicho artículo si desea ganar el 30%.

Solución:

Antes cuando el dólar se cotizaba a S/. 3, el precio de costo de cada artículo era:

$$Pc = \frac{800 \,.\, 100}{120} = \frac{\text{S/. } 2\,000}{3}$$

En dólares:

$$Pc = \frac{2\,000}{3} : 3 = \frac{2\,000}{9} \text{ dólares}$$

Actualmente, el costo de cada artículo ha sufrido un incremento del 10% por lo tanto cada artículo cuesta actualmente:

$$Pc' = \frac{110}{100} \cdot \frac{2\,000}{9} = \frac{2\,200}{9} \text{ dólares}$$

En Soles:

$$Pc' = \frac{2\,200}{100} \cdot 4 = \frac{8\,800}{9} \text{ soles}$$

Como se desea ganar 30% deberá vender a:

$$Pv = \frac{130}{100} \cdot \frac{8\,800}{9} = 1271{,}11$$

Rpta.: Deberá vender a S/. 1271,11

6.- Un bodeguero vende a S/. 160 una damajuana de vino con lo cual gana el 25% del Pc. Calcular la G y el Pc.

Solución:

$$G = 25\% \text{ de } Pc$$

$$Pv = 125\% \text{ de } Pc$$

Por lo tanto:

$$Pv \rightarrow 125\% \text{ ——— S/. } 160$$

$$Pc \rightarrow 100\% \text{ ——— } x$$

$$\therefore \quad x = \frac{100 \,.\, 160}{125} = 128$$

De esta manera:

$$Pc = S/.\ 128$$

$$G = (160 - 128) = S/.\ 32$$

Rpta.: Gana S/. 32 y vende a S/. 128

7.- Vendiendo una mercancía por S/. 10 el kg se gana el m% del Pc. ¿Qué % se gana cuando se vende por S/. 11 el kg?

Solución:

S/. Kg		Equivalente a
10	———	(100 + m) % del Pc
11	———	(100 + x) % del Pc

$$100 + x = \frac{11\,(100 + m)}{10}$$

$$100 + x = \frac{1\,100 + 11m}{10}$$

Rpta.: $x = (10 + 1{,}1m)\ \%$

8.- Un comerciante importaba cierto artículo de los Estados Unidos y lo vendía en S/. 468, ganando un 20% cuando el tipo de cambio era 2,6 soles por dólar. Ahora tiene que pagar 4,0 soles por dólar y además el precio de fábrica ha aumentado en un 40%. ¿A cómo deberá vender dicho artículo en la actualidad para que su ganancia sea del 30%?

Solución:

Costo del artículo:

$$468 \cdot \frac{100}{120} = S/.\ 390$$

En dólares:

$$\frac{390}{2{,}6} = \$\ 150$$

Costo actual del artículo:

$$\$\ 150 + \frac{40}{100} \cdot \$\ 150 = \$\ 210$$

Precio de venta para ganar 30%:

$$\$\ 210 + \frac{30}{100} \cdot \$\ 210 = \$\ 273$$

Precio de venta en soles:

$$273 \,.\, 4{,}0 = 1\,092 \text{ soles.}$$

Rpta.: Se deberá vender a S/. 1 092

10.- Un almacenista compró 20 camas y las vendió con una ganancia del 10%. Con el importe de la venta compró 60 mesas, que las vendió, ganando el 15%; y, con el importe de esta venta, compró 828 sillas al precio de 990 soles la docena.

¿Cuánto le costó al almacenista una cama?

Solución:

Costo de las sillas:

$$\frac{828}{12} \cdot 990 = S/.\ 68\,310$$

y, esta suma representa el 115% del precio de las mesas, el costo de las mesas es :

$$68\,310 \cdot \frac{100}{115} = 59\,400$$

Esta suma representa el 110% del precio de las camas y el costo de éstas es:

$$59\,400 \cdot \frac{100}{110} = 54\,000$$

Cada cama le costó:

$$54\,000 : 20 = S/.\ 2\,700$$

Rpta.: Cada cama costó S/. 2 700

10.- En cierta ciudad, cada propietario pagaba como contribución, la octava parte de alquiler que le producía sus fincas. Se aumentó las contribuciones y les hicieron pagar el 20% de lo que le producían las fincas. ¿En que porcentaje cada propietario debe aumentar los alquileres para poder seguir cobrando la misma renta?

Solución:

Consideremos 100 unidades de alquiler primitivo.

Variaciones:

Alquiler ———— 100

Pago de contribución:

1/8 de 100 ———— 12,5

Ganancia neta del propietario 87,5

Al aumentar las contribuciones al 20%, el propietario sólo ganará el 80% de lo que producen los alquileres y como desea seguir ganando lo mismo, el 80% del alquiler debe de ser S/. 87,50:

80 % ———— 87,50

100 % ———— x

$x = 109,375$

El aumento es: $109,375 - 100 = 9,375$

Rpta.: Aumenta en 9,375 %

11.- Un individuo dedicó una cierta cantidad de dinero a un negocio, y ganó el 20%. El total lo dedicó a otro negocio y perdió el 10%; y por último, invirtió lo que le quedaba en otro negocio y ganó el 8%. el resultado de estos 3 negocios ha sido una ganancia de S/. 30 784. ¿Cuál fue la cantidad invertida en el primer negocio?

Solución:

Sea N la cantidad invertida en el primer negocio. Podemos establecer que después del primer negocio tiene:

$$\left(\frac{120}{100}N\right)$$

Después del segundo negocio, tiene:

$$\frac{90}{100}\left(\frac{120}{100}N\right)$$

Después del tercer negocio, tiene:

$$\frac{108}{100}\left[\frac{90}{100}\left(\frac{120}{100}N\right)\right]$$

que equivale a:

$$\frac{108}{100}\left[\frac{90}{100}\left(\frac{120}{100}N\right)\right] = N + 30\ 784$$

$\therefore$ N = S/. 185 000

Rpta.: Invirtió S/. 185 000

12.- Una pieza de fundición pesa, en bruto, 45 kg y 42,75 kg después de tornearla. ¿Qué tanto por ciento de su peso ha perdido?

Solución:

Pérdida de peso: $45 - 42,75 = 2,25$ kg.

Podemos establecer:

$$\%\ \text{Pérdida de peso} = \frac{2,25}{45} \cdot 100 = 5$$

Rpta.: Perdió 5% de su peso.

13.- Un comerciante vendió las dos terceras partes del cemento que había comprado con un beneficio del 10%; la mitad del resto al precio de costo; y, lo que quedó, con un porcentaje de pérdida tal que sólo pudo obtener en todo el negocio lo que le costó. ¿Cuál fue este tanto por ciento de pérdida?

Solución:

Sea C el costo total del cemento y "x" el porcentaje que perdió en la última venta.

Se tiene:

$$\frac{2}{3}C + \frac{10}{100}\cdot\frac{2}{3}C + \frac{1}{6}C + \frac{1}{6}C - \frac{x}{100}\cdot\frac{1}{6}C = C$$

$$x = 40\%$$

Rpta.: Porcentaje de pérdida: 40%

14.- Por tarrefacción, un procedimiento para tostar café se pierde el 20% de su peso. Un tendero vende su café tarrefactado a S/. 10,00 el kilo y gana 15% sobre el precio de compra. ¿A qué precio ha comprado el café sin tostar?

Solución:

Por cada 100 kg de café crudo, se obtiene sólo 80 kg de café tarrefactado, por lo que "pierde" el 20%. En otras palabras. para vender 100kg de café tostado debe de comprar 125 kg de café crudo. El precio de compra correspondiente será:

$$Pc = \frac{10}{1,15 \cdot 1,25} = 6,9569$$

Rpta.: Ha comprado a S/. 6,96 el kilo.

15.- Un librero vende con un descuento de S/. 34 una enciclopedia cuyo precio está fijado en S/. 204. ¿Qué porcentaje representa este descuento y qué precio inicial habría que fijar a la obra para que, sin modificar el precio de venta, pueda hacer un descuento del 25%?

Solución:

1° La rebaja dicha corresponde a:

$$\frac{34 \cdot 100}{204} = 16\frac{2}{3}\,\%$$

2° En el segundo caso, la suma realmente cobrada por el librero, es decir S/. 170 = 204 - 34 representa 75/100 del precio señalado.

Este deberá ser:

$$\frac{170 \cdot 100}{75} = S/.\ 227$$

Rpta.: $16\frac{2}{3}$ % y S/. 227

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ÁREAS SOMBREADAS

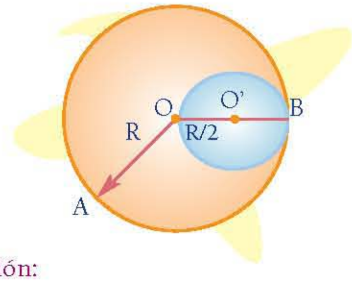
En general, se trata de calcular la relación entre el área sombreada y la parte no sombreada, de las figuras propuestas.

1.- ¿Qué porcentaje del área anaranjada es el área en azul?

Considerando que:

$\overline{AO} = \overline{OB}$

OO' = O'B



Solución:

Area del círculo mayor: πR^2

Area del círculo menor: $\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$$\pi R^2 \text{ ——— } 100\%$$

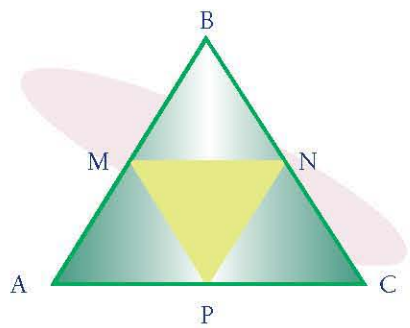
$$\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \text{ ——— } x$$

$$x = \frac{\frac{\pi R^2}{4} \cdot 100\%}{\pi R^2} = 25\%$$

Rpta.: 25%

2.- En el triángulo equilátero ABC, se une los puntos medios de sus 3 lados. ¿Qué porcentaje del área del triángulo ABC representa el área del triángulo sombreado formado por la unión de los puntos medios?

Solución:



Por propiedad geométrica.

$\Delta AMP = \Delta MBN = \Delta MNP = \Delta PNC$

Entonces se puede plantear:

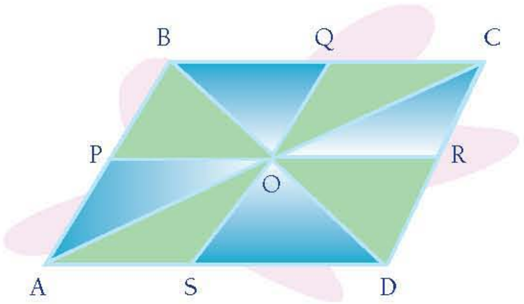
área ΔABC ——— 100%

área ΔMNP ——— $\frac{1}{4} \cdot 100\%$

Rpta.: Area sombreada 25%

3.- En la figura mostrada. ¿qué porcentaje del área total representa el área en azul?

(P, Q, R, y S, son puntos medios)



Solución:

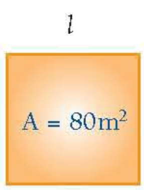
Analizando las relaciones geométricas notamos que el área sombreada representa el 50% del área total.

Rpta.: 50%

4.- Si un cuadrado de $80m^2$ de área se reduce a uno de 45 m^2; el perímetro del segundo cuadrado, ¿qué porcentaje del perímetro del primer cuadrado será?

Solución:

1er cuadrado:

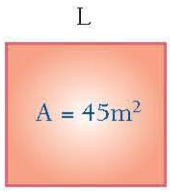


$\Rightarrow l^2 = 80$

$l = 4\sqrt{5}$

Perímetro = $4 \,.\, 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$ (1)

2do cuadrado:



$\Rightarrow L^2 = 45$

$L = 3\sqrt{5}$

Perímetro = $4 \,.\, 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ (2)

Planteando la siguiente regla de tres simple:

$16\sqrt{5}$ ——— 100%

$12\sqrt{5}$ ——— x

Rpta.: x = 75%

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE DESCUENTOS SUCESIVOS

Esta situación se presenta cuando a una cantidad se le aplica más de un descuento. En otras palabras, descuentos tras descuentos. El total de descuentos origina el Descuento Unico (D.U.)

1.- A un objeto que cuesta S/. 100 se le ha hecho dos descuentos sucesivos: el 20% más el 20%. Qué porcentaje efectivo de descuento se realizó?

Precio inicial	S/. 100
1er descuento: 20% de 100	20
nuevo precio	S/. 80
2do descuento : 20% de 80	16
nuevo precio (final)	64

Se observa que el descuento efectivo equivalente al propuesto es de: 100 - 64 = 36%

Nota.-
A esta conclusión se pudo arribar aplicando, la siguiente fórmula:

Para dos descuentos sucesivos del A% y B%, el descuento único (Du) equivalente es:

$$Du = \left[(A + B) - \frac{A \,.\, B}{100}\right] \% \qquad (I)$$

En el problema:

$$Du = \left[(20 + 20) - \frac{20 \cdot 20}{100}\right]\%$$

$$Du = (40 - 4)\ \%$$

$$Du = 36\%$$

Podemos generalizar para "n" descuentos sucesivos. Definamos éstos como:

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$$

El descuento único equivalente se obtiene aplicando la fórmula.

$$Du = \left[\frac{(100 - D_1)(100 - D_2)\ldots(100 - D)_n}{100^{n-1}} - 100\right]\% \quad \text{(II)}$$

2.- Tres descuentos sucesivos del 10%, 20% y 30%, ¿a qué descuento único equivalen?

Solución:

Aplicando la fórmula:

$$Du = \left[\frac{(100 - 10)(100 - 20)(100 - 30)}{100^{3-1}} - 100\right]\%$$

$$Du = \frac{90 \cdot 80 \cdot 70}{100 \cdot 100} - 100$$

$$Du = \frac{504}{10} - 100 = 50{,}4 - 100$$

$$Du = -49{,}6\%$$

Rpta.: El descuento es del 49,6%

(El signo "-" indica descuento o pérdida)

3.- El precio de un televisor después de habérsele hechos dos descuentos sucesivos del 10% y 30% es de $ 1260 ¿Cuál fue el precio que tenía antes de dichos descuentos?

Solución:

Sea P el precio que tenía el T.V. antes de los descuentos.

El descuento único (Du) por fórmula (I):

$$Du = \left[(10 + 30) - \frac{10 \cdot 30}{100}\right]\% = 40 - 3 = 37\%$$

$\therefore$ Los $ 1 260 representan sólo el:

$$100 - 37 = 63\%\ P$$

$$\therefore \quad \frac{63}{100} \cdot P = 1\ 260$$

$$P = \frac{1\ 260 \cdot 100}{63} = \$\ 2\ 000$$

Rpta.: $ 2 000

4.- ¿Cuál es el descuento único equivalente a descuentos sucesivos del 20%, 30%, 40% y 50%?

Solución:

$$Du = \left[\frac{(100-20)(100-30)(100-40)(100-50)}{100^{4-1}} - 100\right]\%$$

$$Du = \left[\frac{80 \cdot 70 \cdot 60 \cdot 50}{100^3} - 100\right]\%$$

$$Du = \left[\frac{80 \cdot 70 \cdot 60 \cdot 50}{100 \cdot 100 \cdot 100} - 100\right]\%$$

$$Du = \frac{1\ 680}{100} - 100 = -83{,}2\%$$

Rpta.: 83,2%

5.- Después de tres descuentos sucesivos del 10%, 20% y 30%, se pagó por un objeto S/. 504. ¿Cuál fue el precio inicial de dicho objeto?

Solución:

Aplicando la fórmula (II):

$$Du = \left[\frac{(100 - 10)(100 - 20)(100 - 30)}{100^{3-1}} - 100\right]\%$$

$$Du = 49{,}6\%$$

Se pagó: 100 - 49,6 = 50,4% del precio original, entonces:

$$50,4\% \ . \ P = 504$$

$$\frac{50,4}{100} \ P = 504$$

$$\therefore \qquad P = \frac{504 \ . \ 100}{50,4}$$

Rpta.: P = S/. 1 000

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE AUMENTOS O RECARGAS SUCESIVAS

Es el problema inverso al de descuentos sucesivos. A una cantidad se le recarga porcentajes sucesivos. En este tipo de problemas podemos trabajar como en el caso anterior. El total de aumentos origina el aumento único (A.u.)

1.- Un artículo cuesta S/. 100, el comerciante desea aumentar sus ganancias y hace dos recargos sucesivos del 10% más el 20%. ¿En qué porcentaje aumentó el precio del artículo?

Solución:

Precio original ______________	S/. 100
1^{er} recargo: 10% de 100 ________	10
nuevos precio: ______________	S/. 110
2^{do} recargo: 20% de 110 ________	22
precio final ______________	S/. 132

Rpta.: El recargo por cada S/. 100 es de S/. 32 o sea 32%.

> Nota.-
> A esta conclusión podemos arribar aplicando la siguiente fórmula para 2 aumentos sucesivos.

Au= aumento único equivalente.

A_1 y A_2 = los aumentos sucesivos.

$$Au = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \ . \ A_2}{100} \right] \% \qquad \text{(III)}$$

En el ejemplo anterior:

$$Au = \left[10 + 20 + \frac{10 \ . \ 20}{100} \right] \%$$

Au = 32%

Para "n" aumentos sucesivos:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots , A_n$$

$$Au = \left[\frac{(100 + A_1)(100 + A_2)(100 + A_3)}{100^{n-1}} - 100 \right] \% \ \text{(IV)}$$

2.- Tres aumentos sucesivos del 10% más el 20% más el 30%, ¿A qué aumento único equivalen?

Solución:

Aplicando la fórmula (IV):

$$Au = \left[\frac{(100 + 10)(100 + 20)(100 + 30)}{100^{3-1}} - 100 \right] \%$$

$$Au = \left[\frac{110 \ . \ 120 \ . \ 130}{10\ 000} - 100 \right] \%$$

Rpta.: Au = 71,6%

3.- Después de hacer al precio de costo de un artículo dos aumentos sucesivos del 20% más el 30%, se vendió dicho artículo por S/. 15 600. ¿Cuál fué el precio de costo del artículo?

Solución:

$$Au = \left(20 + 30 + \frac{20 \ . \ 30}{100} \right) \%$$

Au = 56%

Quiere decir que se pagó el 156% del precio de costo.

156% ______ 15 600

100% ______ x

Rpta.: x = S/. 10 000

4.- Después de 2 aumentos sucesivos, pagué por un par de zapatos 122,10 soles. ¿Cuál era el precio de los zapatos antes de los aumentos?, si los 2 aumentos son números consecutivos.

Solución:

$$Au = \left[x + (x+1) + \frac{x(x+1)}{100}\right]\%$$

$$Au = \left[2x + 1 + \frac{x(x+1)}{100}\right]\%$$

El pago final ers igual al precio inicial más el Au:

$$P + \frac{P}{100} \cdot Au = 122{,}10$$

finalmente:

$$(x+100)(x+101)P = 122{,}10 \ . \ 100^2$$

que tiene dos incognitas

Si suponemos que x = 10, por ejemplo:

P = S/. 100

Rpta.: Faltan datos.

5.- Dos aumentos sucesivos se diferencian en 10. Después de dichos aumentos se pagó por un objeto S/. 120,75. ¿Hallar el menor de los aumentos sucesivos?

Solución:

Análogamente al problema anterior:

$$(x+100)\ (x+110)P = 120{,}75 \ . \ 100^2$$

Rpta.: Faltan datos. Sin embargo, si se conoce uno de los elementos, se puede definir el valor de las demas incognitas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una ciudad está dividida en dos bandos: el 45% de la población es del bando A y el restante del bando B. Si el 20% de A se pasa a B y luego el 10% de la nueva población de B se pasa a A. ¿Cuál será el nuevo porcentaje de A?

a) 36% b) 40% c) 45%

d) 46,4% e) 42,4%

2. En una reunión, el 40% del total de personas son hombres. Si se retira la mitad de éstos. ¿Qué nuevo porcentaje del total son hombres?

a) 20% b) 22,5% c) 25%

d) 30% e) 15%

3. El costo de un objeto es de S/. 5 000 ¿Cuál será el precio de venta, si sabemos que al venderlo se rebaja el 25% del precio de venta, ganando en definitiva S/. 100?

a) S/. 5 000 b) S/. 6 800 c) S/. 6 400

d) S/. 6 000 e) S/. 5 600

4. Si después de hacer un descuento del 10% sobre el precio de venta, todavía se gana el 8% del precio de costo. Hallar el tanto por ciento que se recargó sobre el precio de costo para hallar el precio de venta.

a) 10% b) 12,5% c) 20%

d) 15% e) 29%

5. Si la base de un triángulo disminuye en un 20%. ¿En cuánto aumentará su altura para que su área no varíe?

a) 10% b) 20% c) 25%

d) 40% e) 50%

6. Un vendedor adquiere un tocadisco y lo vende ganando el 8% sobre el precio de costo. Si se vendiera ganando un 8% sobre el precio de venta, los ingresos serán mayores en S/. 432. ¿Cuál es el costo del tocadisco?

a) 62 000 b) 62 100 c) 65 000

d) 68 000 e) 70 000

7. A un obrero se le aumenta de la siguiente forma:

12% sobre el 20% de su sueldo.

15% sobre el 40% siguiente.

y 20% sobre los 2 000 restantes.

¿Cuál será su nuevo salario?

a) 4 800 b) 5 000 c) 5 600

d) 5 800 e) 5 820

8. Se vende un objeto en S/. 200 ganando el 12% del costo, más el 10% de la utilidad. ¿Cuál es la utilidad?

a) S/. 22,87 b) S/. 23,53 c) S/. 24,32

d) S/. 25,38 e) S/. 26,17

9. Gasté el 40% de mi dinero en libros y el 30% de lo que me queda en almorzar, si luego alguien me da S/. 280, tendré el 77% de lo que tenía inicialmente. ¿Cuánto gasté en libros?

a) 800 b) 600 c) 400

d) 320 e) 300

10. Se vendió un artículo en S/. 7 840 ganando el 12% del costo más el 15% del precio de venta. Hallar el precio de costo del artículo, en soles.

a) 5 000 b) 5 500 c) 5 950

d) 6 500 e) 5 800

11. En una reunión hay 8 hombres y 12 mujeres. ¿Cuántas mujeres se deben ir, para que el porcentaje de hombres presentes aumente en un 40%?

a) 8 b) 9 c) 10

d) 11 e) 6

12. Una deuda es el 30% de otra. ¿Qué porcentaje de la menor debo cancelar para que la deuda sea 10% de la mayor?

a) 33,33% b) 66,66% c) 80%

d) 60% e) 44%

13. Un comerciante vende un objeto ganando el 30%, a pesar de que hizo una rebaja del 10%.

Determinar dicha rebaja si el objeto le costó: S/. 180,00

a) 26 b) 13 c) 14

d) 28 e) N.A.

14. Al volumen de un líquido puro se le agrega el 40% de agua. El litro de la mezcla se vende en S/. 11,70, ganándose el 30%, o sea que el litro de líquido puro vale, en soles:

a) 11,70 b) 13,20 c) 12,10

d) 12,60 e) N.A.

15. Vendo un artículo en S/. 8 680,00 ganando el 24% del precio de costo, más el 10% del precio de venta; si lo hubiese vendido en S/. 7 000,00. ¿Hubiese ganado o perdido? ¿Cuánto?

a) Gano; 350 b) Pierdo; 700 c) Pierdo; 350

d) gano 700 e) No gano, ni pierdo

16. ¿Qué porcentaje habrá que disminuir a un número para que sea igual al 60% del 25% del 80% del 50% de los 10/3 del número?

a) 60% b) 70% c) 80%

d) 90% e) 20%

17. De un recipiente retiro el 25% de lo que no retiro, y de lo que he retirado devuelvo el 25% de lo que no devuelvo, quedando ahora 84 litros en el recipiente. ¿Cuántos litros no devolvi?

a) 24 b) 18 c) 20

d) 12 e) 16

18. Para embaldosar un piso de 5m de largo y 4m de ancho, se ha empleado 3 obreros, durante 4 días, trabajando 10 horas diarias.

¿Cuántos obreros más harán falta para embaldosar en 3 días, trabajando 8 horas diarias, un piso de 8m de largo y 5m de ancho?

a) 5 b) 2 c) 3

d) 6 e) 7

19. Un vendedor recarga al precio de sus artículos en el 25% de su valor. ¿Cuál es el máximo descuento que puede hacer sin ganar ni perder?

a) 5% b) 10% c) 15%

d) 20% e) 25%

20. El 40% de una cantidad excede al 20% de otra cantidad en S/. 21 800. Si ambas cantidades suman S/. 107 000. ¿Cuál es la diferencia de estas cantidades?

a) S/. 24 000 b) S/. 29 000 c) S/. 32 000

d) S/. 28 000 e) S/. 37 000

21. ¿En qué porcentaje un comerciante debe recargar sus costos para fijar los precios de sus artículos de tal manera que haciendo dos descuentos sucesivos del 20% y del 20% aún gane el 60% del costo?

a) 250 b) 150 c) 160

d) 200 e) 175

22. Un comerciante dice que gana el 80% del 20% del precio de costo, según dice. ¿Qué porcentaje del precio de venta está ganando?

a) $16\frac{21}{29}$ b) 13 c) $13\frac{23}{29}$

d) 16 e) 15

23. Una compañía posee 3 máquinas de 70% de rendimiento para producir 1600 envases cada 6 días de 8 horas diarias de trabajo, si se desea producir 3 600 envases en 4 días trabajando 7 horas diarias. ¿Cuántas máquinas de 90% de rendimiento se requiere?

a) 3 b) 2 c) 5

d) 4 e) N.A.

24. Un comerciante vendió la quinta parte de un lote de mercadería ganando el 15%; luego, la tercera parte del resto ganando el 20%, la cuarta parte del nuevo resto perdiendo el 25% y el resto, perdiendo el 30%. Si resultó perdiendo S/. 1 785.

¿Cuánto costó el lote de mercadería?

a) 15 600 b) 38 400 c) 28 000

d) 25 500 e) Ninguna

25. Si al precio de un objeto se le recarga el 20% resulta igual al precio de otro, descontado en un 30%. Si el primero cuesta S/. 1 750. ¿Cuál es el precio del segundo?

a) S/. 6 000 b) S/. 2 200 c) S/. 2 400

d) S/. 2 709 e) S/. 3 000

26. Se vendió un artículo en S/. 8 600 ganando el 25% del 30% del precio de costo más el 15% del 20% del precio de venta. ¿Cuál fue el costo del artículo?

a) 7 000 b) 7 500 c) S/. 7 760

d) 7 800 e) 7 900

27. Si el radio de un círculo aumenta en un 20%. ¿En qué porcentaje aumenta su área?

a) 40% b) 400% c) 144%

d) 140% e) 44%

28. Un comerciante vendió un reloj ganando el 60% del precio de venta. Si lo hubiera vendido ganando el 60% del costo, hubiera perdido 11 340 soles. ¿Cuánto le costó el reloj a dicho comerciante?

a) 20 160 b) 15 400 c) 25 200

d) 12 600 e) 31 500

29. Un comerciante compra un artículo en una feria y le hacen un descuento del 10% precio de lista. Luego el comerciante revende el artículo de modo que lo que ganó le alcanzó para saldar una deuda que tenía que era del 44% del costo del artículo.

¿Qué porcentaje del precio de lista debío fijar, para revenderlo de manera que haciendo un descuento del 20% del precio fijado pueda haber saldado su deuda?

a) 162% b) 142% c) 160%

d) 170% e) 148%

CLAVE DE RESPUESTAS

1) E	2) C	3) B	4) C	5) C
6) B	7) E	8) B	9) D	10) C
11) C	12) B	13) A	14) D	15) D
16) C	17) E	18) E	19) D	20) E
21) B	22) C	23) E	24) D	25) E
26) C	27) E	28) D	29) A	

EL INTERÉS Y LOS DESCUENTOS COMERCIALES

EL INTERÉS

Una persona puede tomar de otra o de una entidad crediticia, a préstamo, una cantidad de dinero y comprometerse a cambio, pagarle una indemnización por el capital colocado. Esta indemnización o este costo de alquiler se llama INTERÉS, "I".

El interés varía con la importancia del capital y la duración o tiempo que está colocado.

La persona o entidad que otorga el préstamo se llama PRESTAMISTA o ACREEDOR y la que la recibe, PRESTATARIO o DEUDOR.

A la suma del capital más el interés generado se le llama MONTO.

El interés puede ser simple o compuesto.

INTERÉS SIMPLE

Es aquel interés que no genera nuevo interés durante el período del préstamo, permaneciendo el capital constante. El interés simple puede ser determinado aritméticamente.

INTERÉS COMPUESTO

Es aquel interés que tan pronto se produce pasa a formar parte del capital prestado. Se dice entonces que los intereses se capitalizan; los problemas de interés compuesto son de cálculo logarítmico, por lo que su solución es algebraica. (Consultar seccion de Algebra).

CÁLCULO DEL INTERÉS SIMPLE

Los problemas de interés simple se resuelve ya sea aplicando la regla de tres simple o por medio de fracciones.

Resolveremos el problema general de cálculo del interés, según lo indicado en el siguiente enunciado:

Sabiendo que un capital de 100 soles prestados durante un año, produce "R" soles; hallar el interés simple que produce un capital "C" al cabo de "a" años.

Definamos:

R = ganancia que produce 100 soles en 1 año, o rédito.

CAPITAL	TIEMPO	INTERÉS
100	1	R
C	a	I

El interés es directamente proporcional al capital y al tiempo de colocación, luego:

$$I = \frac{C}{100} \cdot \frac{a}{1} \cdot R$$

$$\boxed{I = \frac{C \,.\, R \,.\, a}{100}} \qquad (1)$$

Si el tiempo a = 1 (1 año):

$$I = \frac{C \cdot R}{100}$$

Puede ocurrir que el tiempo esté expresado en meses o días; en este caso, se precisa modificar la fórmula (1), recordando que el año comercial tiene 360 días y el mes 30. Designemos por "d" el número de días y "m" el número de meses:

$$a = \frac{m}{12}$$

$$a = \frac{d}{360}$$

que al reemplazar en (1) se obtiene respectivamente:

$$I = \frac{C \cdot R \cdot m}{1\,200}$$

$$I = \frac{C \cdot R \cdot d}{36\,000}$$

Monto (M), es la suma del capital impuesto más los intereses que éste ha generado.

$$\boxed{M = C + I} \qquad (2)$$

CÁLCULO DE CAPITAL "C", CONOCIENDO EL MONTO "M"

Sustituyendo (1) en (2):

$$M = C + \frac{C \cdot R \cdot a}{100}$$

$$C = \frac{100\,M}{100 + R \cdot a}$$

Obsérvese que esta fórmula se ha deducido considerando el tiempo en años, si estuviera dado en meses o días, tendríamos, respectivamente:

$$C = \frac{1\,200\,M}{1\,200 + R \cdot m} \qquad C = \frac{36\,000\,M}{36\,000 + R \cdot d}$$

CÁLCULO DEL INTERÉS "I", CONOCIENDO EL MONTO "M"

De (1), despejamos el capital:

$$C = \frac{100\,I}{R \cdot a}$$

este valor en (2):

$$M = \frac{100\,I}{R \cdot a} + 1$$

$$\therefore \quad I = \frac{M \cdot R \cdot a}{100 + R \cdot a} \qquad I = \frac{M \cdot R \cdot m}{1\,200 + R \cdot m}$$

$$I = \frac{M \cdot R \cdot d}{36\,000 + R \cdot d}$$

Como todas estas magnitudes se considera proporcionales, estas fórmulas generales permiten calcular el interés y también calcular una cualquiera de las cantidades C, R, d, a, m, cuando se conoce las otras.

Nota.-

En todas las fórmulas el % = r = R/100, debe estar dado en forma anual, en caso contrario se aplicará las siguientes conversiones:

Si:%	(mensual)	se multiplica por	12 = % (anual)
Si:%	(bimensual)	"	6 = % (anual)
Si:%	(trimestral)	"	4 = % (anual)
Si:%	(cuatrimestral)	"	3 = % (anual)
Si:%	(semestral)	"	2 = % (anual)

EJRCICIOS RESUELTOS

1.- Un ahorrista coloca S/. 2 000 en ahorros en un banco al 5% de interés anual. Al cabo de 8 meses quiere retirar sus intereses ganados. Se pregunta: ¿a cuánto ascienden éstos?

Solución:

Aplicando la fórmula para meses:

$$I = \frac{C \cdot R \cdot m}{1\,200}$$

$$I = \frac{2\,000 \cdot 5 \cdot 8}{1\,200} = 66{,}66$$

Rpta.: I = S/. 66,66

2.- Una persona debe a un banquero S/. 4 500 pagaderos a 216 días; 5 800 soles pagaderos en 180 días y 12 000 soles pagaderos en 60 días. Ella, logra cancelar su deuda al cabo de un año, pagando 22 954,15 soles. ¿Cuál fue la tasa de interés? (considerar el año de 360 días).

Solución:

La suma de 22 954,15 soles, por medio de la cual la persona pagó su deuda, contiene el total de los pagos efectivos, más los intereses de estos pagos después de sus vencimientos respectivos. El monto de los intereses es, luego, la diferencia entre la suma entregada y el total de las sumas efectivas o sea:

$$22\,954{,}15 - (4\,500 + 5\,800 + 12\,000)$$
$$= 654{,}15 \text{ soles}$$

y representa la suma de los intereses de:

4 500 soles durante 144 días

5 800 soles durante 180 días

12 000 soles durante 300 días

Para determinar la tasa pedida por medio de estos datos, busquemos la suma de los intereses producidos con una tasa del 1%. Los intereses reportados por cada una de estas tres sumas serán :

$$1 \cdot 45 \cdot 2/5 = 18 \text{ soles}$$

$$1 \cdot 58 \cdot 1/2 = 29 \text{ soles}$$

$$1 \cdot 120 \cdot 5/6 = 100 \text{ soles}$$

Y su suma es: $18 + 29 + 100 = 147$ soles

Entonces, la tasa buscada es:

$$\frac{654{,}15}{147} = 4{,}45 \text{ veces mayor que } 1\%$$

Rpta.: Tasa = 4,45%

3.- Un capital de 40 000 soles estuvo impuesto durante un cierto número de años, meses, días; por los años se abonó el 5%, por los meses, el 4%; y, por los días, el 3%. Calcular el interés producido por dicho capital sabiendo que si se hubiera impuesto durante todo el tiempo al 5%, habría producido 3 840 soles más, que si se hubiera impuesto todo el tiempo al 3%.

Solución:

Si la imposición hubiera sido por 9 días, la diferencia entre los intereses producidos al 5% y 3% sería:

$$\frac{40\,000}{36\,000}\,(5 \cdot 9 - 3 \cdot 9) = 20 \text{ soles}$$

Por consiguiente, el tiempo que en realidad duró la imposición es:

$$\frac{3\,840}{20} \cdot 9 = 1\,728 \text{ días} = 4 \text{ años, } 9 \text{ meses, } 18 \text{ días}$$

El interés es pues:

$$40\,000\left(\frac{5 \cdot 4}{100} + \frac{4 \cdot 9}{1\,200} + \frac{3 \cdot 18}{36\,000}\right) = 9\,260$$

Rpta.: S/. 9 260

4.- Una persona coloca S/. 60 000 a rédito: parte al 4,5% y parte del total al 5,25%. Al fin de año da S/. 2 880 de interés. Dígase qué cantidades tienen impuestas a cada tasa.

Solución:

C_1 = parte al 4,5%

C_2 = parte al 5,25%

$$C_1 + C_2 = 60\,000$$

$$C_1 = 60\,000 - C_2 \qquad \text{(I)}$$

Por otra parte, como es al año:

$$\frac{C_1 \,.\, 4{,}5}{100} + \frac{C_2 \,.\, 5{,}25}{100} = 2\,880 \qquad (II)$$

Sustituyendo (I) en (II):

$$4{,}5(60\,000 - C_2) + 5{,}25\,C_2 = 288\,000$$

Rpta.: C_2 = S/. 24 000

C_1 = S/. 36 000

5.- Un capital aumentado en sus intereses simples, y depositado al 5% durante un cierto tiempo, se ha elevado a 29 040 soles. El mismo capital aumentado en sus intereses simples reportados al 4% durante el mismo tiempo sería igual a 28 512 soles. Hallar el capital y la duración de la imposición.

Solución:

La diferencia de los 2 intereses es:

$$29\,040 - 28\,512 = S/.\ 528$$

Que resulta por la diferencia del interés al:

5 - 4 = 1% del capital buscado durante el tiempo desconocido.

El interés al 5% del capital es, luego:

$$528 \,.\, 5 = S/.\ 2\,640$$

Luego el capital es:

$$29\,040 - 2\,640 = 26\,400 \text{ soles}$$

Duración de la imposición:

$$a = \frac{1\,(\text{año}) \,.\, 2\,640}{5 \,.\, 264} = 2 \text{ años}$$

Rpta.: Capital : S/. 26 400

Tiempo : 2 años

6.- ¿Qué capital es aquel que impuesto al 4% anual durante 5 meses, produce 1 100 soles menos que si se impusiera al 4% mensual durante el mismo tiempo?

Solución:

Recordando que:

$$I = \frac{C \,.\, R \,.\, m}{1\,200}$$

1° $$I_1 = \frac{C \,.\, 4 \,.\, 5}{1\,200} = \frac{C}{60}$$

2° $$I_2 = \frac{C \,.\, 48 \,.\, 5}{1\,200} = \frac{C}{5}$$

Según el problema:

$$I_2 - I_1 = 1\,100$$

O sea: $$\frac{C}{5} - \frac{C}{60} = 1100$$

Rpta.: C = S/. 6 000

7.- Un capital se impuso a interés simple, al 3% durante 5 años, 2 meses, 20 días, y otro capital que está con el anterior en la relación 3/4, se impuso al 4% durante el mismo tiempo. Los capitales con sus intereses han dado una suma de 74 280 soles. Averiguar el valor de cada uno de los capitales impuestos.

Solución:

5 años 2 meses 20 días = 1 880 días

Estando los capitales en la relación 3/4 supongamos, para mayor sencillez, 4 soles para capital del primero y 3 soles para el segundo.

Interés ganado por los 4 soles

$$\frac{4 \,.\, 3 \,.\, 1\,880}{36\,000} = \frac{47}{75}$$

Interés ganado por los 3 soles:

$$\frac{3 \,.\, 4 \,.\, 1\,880}{36\,000} = \frac{47}{75}$$

El interés total ganado por las dos cantidades:

$$\frac{47}{75} + \frac{47}{75} = \frac{94}{75}$$

Mediante una regla de tres simple:

7 de capital produce ———— $\frac{94}{75} + 7$

C de capital produce ———— 74 280

$\therefore$ C = 63 000

Como los capitales están en la proporción de 4/3 llamando C_1 y C_2 a éstos:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{3}$$

por propiedad:

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{4}{3 + 4}$$

$$\frac{C_1}{63\ 000} = \frac{4}{7}$$

Rpta.: C_1 = 36 000 ; C_2 = 27 000

8.- Un capital de S/. 6 000 depositado durante 10 meses se ha convertido en S/. 6 910. Calcular la tasa semestral de interés simple.

Solución:

$$I = 6\ 910 - 6\ 000 = S/.\ 910$$

Como:

$$I = \frac{C \cdot R \cdot m}{1\ 200} \Rightarrow R = \frac{1\ 200\ (I)}{C \cdot m}$$

$$\therefore \quad R = \frac{1\ 200\ (910)}{6\ 000\ (10)} = 18{,}2\%\ \text{annual}$$

Tasa semestral: 18,2 : 2 = 9,1%

Rpta.: 9,1% semestral.

9.- Se ha colocado las 2/7 partes de un capital al 6%; las 3/5, al 10%; y, el resto, al 7,5%. Si se obtiene una renta de S/. 12 000. Hallar el capital.

Solución:

Supongamos que:

$$C = S/.\ 3\ 500$$

$$\frac{2}{7}\ C = 1\ 000 \text{ al } 6\% \Rightarrow I_1 = 60$$

$$\frac{3}{5}\ C = 2100 \text{ al } 10\% \Rightarrow I_2 = 210$$

$$400 \text{ al } 7{,}5\% \Rightarrow I_3 = 30$$

$$I_T = S/.\ 300$$

$$\begin{array}{ccc} C & & R \\ 3\ 500 & \xrightarrow{\text{produce}} & 300 \\ x & \longrightarrow & 12\ 000 \end{array}$$

$$x = \frac{3\ 500 \cdot 12\ 000}{300} = S/.\ 140\ 000$$

Rpta.: Capital S/. 140 000

10.- La suma de un capital con sus intereses durante 2 años ha dado 16 200 soles, y la suma del mismo capital con sus intereses, al mismo porcentaje durante 4 años, ha dado S/. 17 400. Calcular el capital y el porcentaje a que estuvo impuesto.

Solución:

Sabemos que:

$$I_1 + C = 16\ 200$$

$$I_2 + C = 17\ 400$$

$$\therefore \quad I_2 - I_1 = 1\ 200 \qquad (I)$$

Por otra parte:

$$I_1 = \frac{C \cdot R \cdot 2}{100}$$

$$I_2 = \frac{C \cdot R \cdot 4}{100}$$

$$\therefore \quad I_2 - I_1 = \frac{2 \cdot C \cdot R}{100} \qquad (II)$$

Sustituyendo en (I):

$$\frac{C \cdot R}{100} = 600$$

Rpta.: Sólo se puede determinar que el interes anual es de S/. 600

11.- Si un capital de S/. 239 200 es dividido en tres partes, para imponerlas al 50%, 45% y 55%, respectivamente, resulta que producen el mismo interés. Hallar la parte impuesta al 45%.

Solución:

Sean C_1, C_2 y C_3 las partes impuestas al 50%, 45% y 55%, respectivamente y sea I_1, I_2 e I_3 sus intereses.

Podemos establecer:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 239\,220 \qquad (1)$$

Por datos: $I_1 = I_2 = I_3$

Entonces:

$$\frac{C_1 \cdot 50}{100} = \frac{C_2 \cdot 45}{100} = \frac{C_3 \cdot 55}{100}$$

Bastará con repartir 239 200 en partes I.P. a 50;45 y 55 para determinar C_1, C_2 y C_3 respectivamente.

Rpta.: C_2 = S/. 88 000

12.- La fortuna de una persona está dividida en dos partes: la primera que es 2/5, está colocada al 4%; la segunda parte produce S/ 180. Siendo la renta anual de dicha persona S/ 260, calcular la segunda parte de la fortuna y el porcentaje a que estuvo colocada.

Solución:

Para tener una aproximación supongamos un capital de S/. 500

La primera parte produce:

$$260 - 180 = \text{S/. } 80$$

Como 2/5 . 500 = S/. 200 producen, al 4%, S/. 8 de interés, los S/. 80 suponen un capital 10 veces mayor.

$$\frac{200 \cdot 80}{8} = \text{S/. } 2\,000$$

Luego, la fortuna será:

$$2\,000 \cdot \frac{5}{2} = \text{S/. } 5\,000$$

La segunda parte es:

$$5\,000 - 2\,000 = 3\,000 \text{ soles}$$

y el porcentaje impuesto es:

$$R = \frac{180 \cdot 100}{3\,000} = 6\%$$

Rpta.: S/. 3 000 y 6%

13.- Un capitalista coloca la suma de S/. 12 500 al 4% y 3,5 meses más tarde, otra suma de S/. 28 500 al 4 3/4%. ¿Al cabo de cuánto tiempo habrán producido intereses iguales las dos sumas colocadas, y cuánto habría producido la primera suma colocada al doble del tiempo y con un descuento del 1/2%?

Solución:

Interés producido por el primer capital durante 3,5 meses.

$$\frac{12\,500 \cdot 4 \cdot 3{,}5}{1\,200} = \text{S/. } 145{,}83$$

Interés producido por el primer capital durante un mes: S/. 41,66.

Interés producido por el segundo capital durante un mes:

$$\frac{28\,500 \cdot 1 \cdot 4{,}75}{1\,200} = \text{S/. } 112{,}81$$

Descuento en los capitales en un mes:

$$112{,}81 - 41{,}66 = \text{S/. } 71{,}15$$

Si en un mes el descuento es de S/. 71,15, el descuento de S/. 145,83 será en x meses:

$$x = \frac{1 \cdot 145{,}83}{71{,}15} = 2{,}1 \text{ meses}$$

y el tiempo que tarda en producir igual interés es:

$$3{,}5 + 2{,}1 = 5{,}6 \text{ meses}$$

luego, el doble del tiempo transcurrido será:

$$2 \cdot 5{,}6 = 11{,}2 \text{ meses}$$

Existe un descuento sobre el porcentaje de 1/2 %, por lo que la nueva tasa será:

$$4 - 1/2 = 3{,}5\%$$

que producen:

$$\frac{12\,500 \,.\, 3{,}5 \,.\, 11{,}2}{1\,200} = \text{S/. } 408{,}33$$

Rpta.: S/. 408,33

14.- Un capitalista compra con los 3/8 de su fortuna, un terreno que con todos los gastos, le resulta a S/. 3 528 la Ha; los 3/8 del resto son empleados en la compra de una casa. Lo que sobra produce una renta de S/. 2 805 al año, estando colocados sus 3/5 al 4,5% y lo demás al 6%. Se pide encontrar la extensión del terreno, el capital total, el valor de la casa y las cantidades colocadas a interés.

Solución:

Tentativamente supongamos un capital de: S/. 1 000

La parte impuesta el 4,5% será de:

$$1000 \,.\, 3/5 = \text{S/. } 600$$

y la parte colocada al 6%:

$$1\,000 - 600 = \text{S/. } 400$$

El interés total (anual) debido a S/. 1 000 asciende a:

$$\frac{600 \,.\, 4{,}5}{100} + \frac{400 \,.\, 6}{100} = \text{S/. } 51$$

y, puesto que la venta verdadera es de S/. 2 805, la suma impuesta a interés es de:

$$1\,000 \cdot \frac{2\,805}{51} = \text{S/. } 55\,000$$

Según ésto, fueron impuestos al 4,5%:

$$55\,000 \cdot \frac{3}{5} = \text{S/. } 33\,000$$

y al 6%:

$$55\,000 - 33\,000 = \text{S/. } 22\,000$$

Por otra parte, los S/. 55 000 que fueron colocados a interés, representan 25/64 de la fortuna que se busca, luego ésta es:

$$55\,000 \cdot \frac{64}{25} = \text{S/. } 140\,800$$

De los S/. 140 800, sus 3/8, o sea S/. 52 800, se invirtieron en la compra de un terreno de S/. 3 528 cada Ha. Su extensión será:

$$\frac{52\,800}{3\,528} = 14{,}9660 \text{ Ha}$$

Después de esta compra, quedaron aún:

$$140\,800 - 52\,800 = \text{S/. } 88\,000$$

Finalmente, el importe de la casa es:

$$88\,000 \cdot \frac{3}{8} = \text{S/. } 33\,000$$

Rpta.: 14,9660 Ha; S/.140 800; S/. 33 000

S/. 33 000; S/. 22 000

15.- Tres capitales cuya suma es S/. 209 300 son impuestos separadamente al 25%, 22,5% y 27,5% semestral, respectivamente, generando la misma renta. ¿Cuál es el capital impuesto al 25%?

Solución:

Puesto que los capitales y las tasas semestrales son I. P., el capital debe ser repartido de manera I.P. a 50% (25 . 2), 45% (22,5 . 2) y 55% (27,5 . 2).

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{IP} & & \text{DP} & & \\ & \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. & 50\% & \rightarrow & \frac{1}{50} & \rightarrow & 99 \\ 209\,300 & & 45\% & \rightarrow & \frac{1}{45} & \rightarrow & 110 \\ & & 55\% & \rightarrow & \frac{1}{55} & \rightarrow & \frac{90}{299} \end{array}$$

Nota.-
99, 110 y 90 son los resultados que se obtiene al multiplicar cada fracción por el MCM de sus denominadores.

Factor de proporcionalidad:

$$K = \frac{209\ 300}{299} = 700$$

$\therefore$ El capital impuesto al 25% semestral fue:

Rpta.: S/. 69 300

16.- Después de una cantidad determinada de meses de haber depositado un capital al 3% mensual el monto total es de S/. 12 600; pero cuando Juan se disponía a retirarlo, pensó que si dejaba su dinero un año más, el monto total que retiraría sería de S/. 14 220. Si al año Juan retiró su cuenta, ¿cuántos meses estuvo su dinero en el banco? Dar como resultado la suma de sus cifras.

Solución:

Sean:

C = capital; I = Interés; y "m" el número de meses.

Podemos establecer:

$$C + I_{(12+m)\text{meses}} = 14\ 220 \qquad (1)$$

$$C + I_{m\text{ meses}} = 12\ 600 \qquad (2)$$

(1) - (2):

$$I_{12\text{ meses}} = S/.\ 1\ 620$$

$$\therefore \quad I_{1\text{ mes}} = S/.\ 135$$

De esta última expresión, podemos establecer:

$$I = S/.\ 135$$

R = 36% (3% mensual), por dato

$$m = 1 \quad ; \quad C = ?$$

$$\text{Pero: } C = \frac{1\ 200 \,.\, 135}{36 \,.\, 1} = S/.\ 4\ 500$$

$$I_{m\text{ meses}} = 12\ 600 - 4\ 500 = S/.\ 9\ 720$$

$$m = \frac{9\ 720}{135} = 72 \text{ meses}$$

Rpta.: 7 + 2 = 9

17.- Un empleado coloca un capital al 50% durante 3 años y retira entonces el 20% de dicho capital, deja el resto de dicho capital durante 2 años, al cabo de los cuales retira el 20% de lo que le quedó como capital y deja la nueva suma durante 1 año. Si el total de los intereses ganados es S/. 209 600. Determinar el capital inicial.

Solución:

Consideremos supuestamente un capital de S/. 100 en las condiciones del problema.

La primera vez:

$$I_1 = \frac{100 \,.\, 50 \,.\, 3}{100} = S/.\ 150$$

La segunda vez:

$$I_2 = \frac{80 \,.\, 50 \,.\, 2}{100} = S/.\ 80$$

La tercera vez (80 - 20% = 64):

$$I_3 = \frac{64 \,.\, 50 \,.\, 1}{100} = 32$$

Interés total:

(ganado por: 100 + 80 + 64 = S/. 244)
= 150 + 80 + 32 = 262

podemos establecer:

S/. 244 genera $\rightarrow$ S/. 262

x $\rightarrow$ S/. 209 600

x = S/. 195 200

Y, repartiendo proporcionalmente a 100, 80 y 64, resulta que el capital inicial fue S/. 80 000, proporcional a 100

Rpta.: S/. 80 000

18.- Entre 2 capitales, uno de S/. 12 500 y otro de S/. 16 800, producen anualmente S/. 1 822,50. Calcular lo que producen el mayor y su porcentaje de interés, sabiendo que los porcentajes están en relación de 3/5.

Solución:

Puesto que los intereses son proporcionales a sus porcentajes:

S/. 12 500 al 3% produce anualmente: S/. 375

S/. 16 800 al 5% produce anualmente: S/. 840

Ambos porcentajes rentarían: S/. 1 215

Y, como la renta total es: S/. 1 822,50
la relación verdadera será:

$$1\ 822{,}50 : 1\ 215 = 1{,}5$$

Por lo tanto, los porcentajes verdaderos son:

$$3 \,.\, 1{,}5 = 4{,}5\% \quad y \quad 5 \,.\, 1{,}5 = 7{,}5\%$$

Y los capitales:

$$\frac{12\ 500 \,.\, 4{,}5 \,.\, 1}{100} = S/.\ 562{,}50$$

$$\frac{16\ 800 \,.\, 7{,}5 \,.\, 1}{100} = S/.\ 1\ 260$$

Rpta.: S/. 1 260 y 7,5%

19.- Un señor vende su casa ganando un millón de soles y con el dinero abre una cuenta bajo una tasa de 5% trimestral. Al cabo de un año retira la cuenta, gasta el 20% y pone el resto en un banco al 2% mensual. Si al cabo de 2 años sus intereses son de S/. 1 843 200. Hallar cuánto le costó la casa.

Solución:

Capital (C) = precio de venta (de la casa) =

Precio de costo + 1 000 000 (1)

R = 20 % anual

a = 1 M = ?

Lo que retira al cabo de 1 año es el monto (M) y como gasta 20% M; le queda:

80% M = 4/5 M; esta suma le impone al 2% mensual que al cabo de dos años produce:

$$I = 1\ 843\ 200$$

$$I = \frac{C \,.\, R \,.\, a}{100}$$

$$I = \frac{4/5\ M \,.\, 24 \,.\, 2}{100} = 1\ 843\ 200$$

$$\therefore \quad M = 4\ 800\ 000$$

Cálculo del Capital:

$$C = \frac{100\ M}{100 + R \,.\, a} = \frac{100 \,.\, 4\ \ 800\ 000}{100 + 20 \,.\, 1} = 4\ 000\ 000$$

Reemplazando en (1) tenemos:

Rpta.: Costo de la casa: S/. 3 000 000

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un capital es S/. 2 000 mayor que otro. El mayor se coloca al 0,5% trimestral y el otro el 0,7% trimestral, luego de 4 años uno de los montos obtenidos excede al otro en S/. 2 840. Calcular la suma de estos dos capitales iniciales y dar como respuesta la suma de las cifras.

   a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 13

2. Se presta un capital al 7%. Si se hubiera impuesto dos años más, al mismo rédito, el interés hubiese sido el 125% del anterior. ¿Cuál fue el sistema de imposición.

   a) 24 meses b) 94 meses c) 96 meses

   d) 80 meses e) 60 meses

3. Coloco un capital al 70/11% semestral. ¿Después de cuánto tiempo el capital (que se puso a interés simple) presenta el 44% del monto que se obtuvo?

   a) 8 años 6 meses b) 9 años 6 meses

   c) 7 años 3 meses d) 10 años

   e) N.A.

4. Durante un número de meses igual al tanto por ciento a que estuvo impuesto un capital, aumentó éste en su tercera parte. ¿Cuál fue el tanto por ciento?

   a) 20% b) 25% c) 30%

   d) 15% e) 35%

5. Si un capital se duplicase y la tasa de interés se triplicase, el interés en el mismo tiempo sería 20 000 soles mayor. ¿Cuál es el interés primitivo?

   a) S/. 2 000 b) S/. 2 500 c) S/. 3 000

   d) S/. 3 500 e) S/. 4 000

6. Un capital estuvo impuesto a interés simple durante 2 años y 3 meses. La suma del capital e intereses que se obtuvo estaba con el capital en la relación de 134/80. ¿A qué tanto por ciento estuvo impuesto el capital?

   a) 15% b) 20% c) 25%

   d) 30% e) 35%

7. Un capital, un número exacto de soles produce anualmente 439,75 soles. El tanto por ciento es igual a la cifra de las unidades del capital. Hallar la suma de las cifras del capital.

   a) 29 b) 27 c) 28

   d) 25 e) 30

8. 75% de un capital colocado al 4% durante 1 año y 5 meses produce un interés que se diferencia del que produce el resto del capital, pero colocados al doble de las condiciones del primero, en S/. 680. ¿Cuál es el capital?

   a) 20 000 b) 24 000 c) 12 000

   d) 36 000 e) 48 000

9. Un capital S/. 600 000 mayor que un segundo produce S/. 25 000 más que el segundo. Si los dos estuvieron impuestos durante 10 meses. ¿Cuál fue la tasa de interés?

   a) 4,5 b) 5 c) 6

   d) 4 e) N.A.

10. ¿Por cuántos años se prestará un capital al 7% anual para que el monto sea S/. 4 050, sabiendo que si se presta al 7.5% semestral el monto que se genere es de 5 250?

    a) 4 años b) 6 años c) 5 años

    d) 78 años e) 3 años

11. Dos sumas, una de 120 000 y la otra de 128 000 soles colocadas durante el mismo tiempo, la primera, al 60%, la segunda al 50%, han adquiri-

do alrededor de este tiempo el mismo valor, por la adición del interés simple al capital. ¿Cuál ha sido el tiempo de la imposición?

a) 2 años b) 5 años c) 10 años

d) 12 años e) N.A.

12. Una persona impone su capital en dos negocios de los cuales uno reporta el 6% y el otro el 12%. Ella retira de la primera una renta anual inferior en 5 400 a la que le da la segunda. Si ella hubiera invertido sus imposiciones, habría obtenido el mismo beneficio en cada una de las empresas. ¿Cuál es el capital total?

a) 60 000 b) 90 000 c) Falta datos

d) Absurdo e) N.A.

13. Dos personas ahorran mensualmente S/. 1 000, pero una de ellas tiene ya ahorrado una cierta cantidad de dinero. Determinar esta cantidad si al cabo de un año lo que ha ahorrado representa 6 veces lo que ahorró el otro.

a) S/. 48 000 b) S/. 72 000 c) S/. 54 000

d) S/. 60 000 e) S/. 84 000

14. Un capital de 2 900 soles, impuesto durante 4 años a un cierto tanto por ciento anual de interés simple, se ha convertido en 3 364 soles. Hallar la tasa.

a) 3% b) 4% c) 6% d) 7% e) 11%

15. Una persona coloca 50% de su capital a una tasa de interés del 36% anual, la tercera parte al 30% anual, y el resto al 24%, obteniendo una renta de S/. 96 000. ¿Cuánto es el monto?

a) S/. 396 000 b) S/. 39 600 c) S/. 348 000

d) S/. 34 800 e) N.A.

16. Una persona dispone de un capital de S/. 1 168 500 que lo ha dividido en 3 partes para imponerlas al 12%, 24% Y 30%, respectivamente. Sabiendo que todas las partes producen igual interés, ¿cuál es la parte impuesta al 24%?

a) S/. 308 000 b) S/. 305 800 c) S/. 306 500

d) S/. 305 700 e) S/. 307 500

17. Una persona presta cierta cantidad de dinero a interés simple. A los 5 meses le devolverán: S/.41 000 mientras que a los 8 meses le devolverán S/. 41 600. Hallar el porcentaje anual.

a) 60% b) 6% c) 50%

d) 5% e) N.A.

18. ¿Durante cuánto tiempo estuvo depositado un capital al 5% de interés anual si los intereses producidos alcanzan el 60% del valor del capital?

a) 12 años b) 288 meses c) 18 meses

d) 6 años e) N.A.

19. Dos capitales suman 224 980, uno de ellos impuesto al 4,8% durante tres años da los mismos intereses que el otro impuesto al 6% durante 6 años. ¿Cuáles son los capitales ?

a) 82 840 y 161 500 b) 64 280 y 180 700

c) 84 280 y 160 700 d) 96 400 y 128 580

e) N.A.

20. ¿En cuántos soles se convertirá un capital de 60 000 soles impuesto al 16% trimestral al cabo de 8 meses?

a) 80 200 b) 84 200 c) 85 600

d) 75 200 e) 95 400

21. Un capital impuesto durante dos años produce un interés del 10% del monto. ¿Qué porcentaje del monto producirá en 6 años?

a) 25% b) 28% c) 30%

d) 33% e) 20%

22. Un capital se impuso a interés simple al 3% durante 5 años, 2 meses y 20 días y otro capital que está con el anterior en la relación 3/4, se impuso al 4% durante el mismo tiempo. Los capitales con sus intereses han dado una suma de S/. 74 280. Determinar la suma de los capitales impuestos.

a) S/. 64 600 b) S/. 63 000 c) S/. 70 000

d) S/. 71 500 e) N.A.

23. El monto de un capital impuesto durante 8 años es S/. 12 400. Si el mismo capital se hubiera impuesto al mismo rédito, durante 9 años 6 meses el monto sería S/. 12 772. ¿Cuál es el capital?

a) S/. 10 016 b) S/. 10 116 c) S/. 10 216

d) S/. 10 316 e) S/. 10 416

24. Dos capitales impuestos a interés simple, uno al 24% y el otro al 20% están en la relación de 5 a 7. El segundo capital produce un interés de S/. 3 620 más que el otro. Calcular el menor capital.

a) 126 700 b) 90 500 C) 108 600

d) 84 600 e) 72 400

25. Un objeto valorizado en medio millón de soles, se desvaloriza uniformemente S/. 25 000 al año; una persona que posee S/. 150 000, coloca su dinero al 4% con el fin de comprar dicho objeto; ¿dentro de qué tiempo lo comprará?

a) $6\dfrac{4}{11}$ años b) $10\dfrac{2}{5}$ años

c) $11\dfrac{9}{31}$ años d) $10\dfrac{4}{11}$ años

e) N.A.

26. Presto los 2/3 de mi capital al 6% y el resto al 4,5%. El interés anual recibido es igual a los 4/5 del interés que produce S/. 33 000, al 5% durante 1 año. ¿Cuál es mi capital?

a) S/. 24 000 b) S/. 20 000 c) S/. 30 000

d) S/. 32 000 e) N.A.

27. Un capital impuesto al 4% semestral durante 3 años produce el mismo interés que otro impuesto al 5% durante 5 años. Si los capitales suman 117 600 ¿Cuáles son éstos?

a) 79 460 y 38 140 b) 39 240 y 78 360

c) 37 600 y 80 000 d) 47 600 y 70 000

e) 60 000 y 57 600

28. Un comerciante impone su capital de la siguiente manera:

$\dfrac{2}{5}$ al 30%, su tercera parte al 35% y el resto al 40%, el interés recibido es de 4 120 soles anuales. Determine dicha capital.

a) S/.12 000 b) S/.12 500 c) S/. 14 000

d) S/. 11 000 e) S/. 13 500

29. Un capital sumado con su interés al 5%, durante 6 meses da 164 000 soles. ¿Cuál es la diferencia entre el capital y el interés?

a) 80 000 b) 156 000 c) 100 000

d) 110 000 e) 120 000

30. Una persona presta a otra capital a interes simple, con la condición que se duplique al cabo de 1 año y tres meses. Durante qué tiempo se debe prestar el mismo capital, también a interés simple con la condición de que se cuadruplique.

a) 2 años 5 meses b) 3 años 11 meses

c) 3 años 9 meses d) 2 años 3 meses

e) 3 años 3 meses

CLAVE DE RESPUESTAS

1) E	2) C	3) D	4) A	5) E	6) D	7) A	8) E	9) B	10) C
11) E	12) B	13) B	14) B	15) A	16) E	17) B	18) A	19) E	20) C
21) C	22) B	23) E	24) B	25) C	26) A	27) E	28) A	29) B	30) C

DESCUENTOS COMERCIALES

LETRA DE CAMBIO

Es un documento comercial, mediante el cual una persona llamada giradora o acreedora de la letra, manda a otra persona que es la deudora o aceptante, que pague una cierta cantidad de dinero en un determinado plazo.

VALOR NOMINAL DE UNA LETRA (Vn)

Se llama así a la cantidad de dinero que figura escrita en la letra.

VALOR ACTUAL DE UNA LETRA (Va)

Es la diferencia entre el valor nominal y el descuento comercial; es la cantidad de dinero que entrega el banco, al acreedor, al hacer efectiva la letra.

$$Va = Vn - Dc \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dc = Vn - Va}$$

CLASES DE DESCUENTO

a) Descuento comercial o exterior (Dc)

b) Descuento racional o interior

DESCUENTO COMERCIAL (Dc)

Es lo que cobra un banco para pagar una letra de cambio antes de su vencimiento y representa el interés simple que produce el valor nominal de una letra desde el día en que se hace el descuento hasta el día de su vencimiento.

Se debe tener en cuenta que el descuento comercial es proporcional al valor de la letra, al tiempo que falta para su vencimiento y al porcentaje que fijan las instituciones de crédito.

FÓRMULA DEL DESCUENTO COMERCIAL

Se deduce mediante la solución de un problema general como el siguiente, donde se quiere hacer efectiva la letra de S/. 100, a un año de su vencimiento:

DEUDA	TIEMPO	INTERÉS
-	-	+
100	1	R
Vn	t años	Dc
+	+	

Incógnita: Dc

R = Interés producido por cada S/. 100 en 1 año, por lo que R es porcentaje anual.

$$Dc = \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100} \quad y \quad Va = Vn - Dc$$

Combinando estas expresiones, se puede deducir:

$$Va = Vn - \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100}$$

$$Va = \frac{Vn(100 - R \cdot t)}{100} \quad y \quad Vn = \frac{100 \cdot Va}{100 - R \cdot t}$$

Por otro lado: $Va = \dfrac{100 \cdot Va}{100 - R \cdot t} - Dc$

de donde:

$$Dc = \frac{Va \cdot R \cdot t}{100 - R \cdot t} \quad y \quad Va = \frac{Dc\,(100 - R \cdot t)}{R \cdot t}$$

> Observación:
>
> En todas estas fórmulas y las siguientes "t" está en años; deberá reemplazarse 100 por 1 200 ó 36 000 según que el tiempo esté dado en meses o días, respectivamente.

DESCUENTO RACIONAL(Dr)

También es lo que cobra un banco para pagar una letra de cambio antes de su vencimiento (también se llama descuento matemático, descuento interno, descuento justo y descuento teórico). Es el interés simple que produce el valor actual de una letra desde el día en que se hace el descuento racional y se calcula tomando en cuenta que el valor nominal es en realidad el monto, porque reúne al capital invertido y a los intereses que corresponde.

El descuento racional es completamente teórico, pues en la práctica no se le utiliza.

FÓRMULA DEL DESCUENTO RACIONAL

DATOS:

valor nominal "Vn", tiempo "t", porcentaje "%".

"Dr" será el interés producido por "Va".

$$Dr = \frac{Va \cdot R \cdot t}{100}$$

Por definición, se debe cumplir:

$$Vn = Va + \frac{Va \cdot R \cdot t}{100} \Rightarrow Va = \frac{100 \cdot Vn}{100 + R \cdot t}$$

o sea que:

$$Dr = \frac{\dfrac{100 \cdot Vn}{100 + R \cdot t} \cdot R \cdot t}{100}$$

$$Dr = \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100 + R \cdot t}$$

COMPARACIÓN ENTRE EL "Dc" Y EL Dr"

Se sabe que:

$$Dc = \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100} \qquad (1)$$

$$Dr = \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100 + R \cdot t} \qquad (2)$$

Se observa que a igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador, por lo tanto:

$$\boxed{Dc > Dr}$$

Es por ello que, como favorece a las instituciones de crédito, éstas aplican el descuento comercial y no el racional o matemático.

DESCUENTOS SUCESIVOS

DESCUENTO ÚNICO "D.U."

$$D.U. = \left[D_1 + D_2 - \frac{D_1 \cdot D_2}{100} \right] \%$$

D_1 = primer descuento

D_2 = segundo descuento

Ejemplo:

Un comprador logra un primer descuento de 25% y un descuento adicional de 10%. Se pregunta ¿cuál es el descuento final (único) que obtiene?

Solución:

Aplicando la fórmula:

$$D.U. = \left[25 + 10 - \frac{25 \cdot 10}{100} \right]$$

D.U. = 35 - 2,5 = 32,5

D.U. = 32,5%

Como podrá observarse el descuento único NO ES 35% = (25% + 10%).

AUMENTOS SUCESIVOS

AUMENTO UNICO "A.U."

$$\boxed{A.U. = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \cdot A_2}{100} \right] \%}$$

Ejemplo:

Un capital aumenta en dos porcentajes sucesivos de 18% y 12%. Cuál es el porcentaje de aumento único.

Solución:

Empezaremos por decir que la respuesta no es 30% (18 + 12); veamos:

$$A.U. = \left[18 + 12 + \frac{18 \cdot 12}{100} \right]$$

A. U. = 30 + 2,16 = 32,16

A.U. = 32,16%

VENTAS A PLAZOS

En las ventas y compras a plazos, tan frecuentes hoy en día, por la competencia comercial, debido a la economía de mercado, debe tenerse en cuenta un principio fundamental:

La suma de los valores actuales de las letras firmadas por el comprador, el día de la compra debe ser igual a la cantidad que el comprador debe en dicho día al vendedor.

El plazo es una fecha común que se da al vencimiento de varias letras, las cuales tienen diferentes valores y fechas de vencimiento.

Se tiene "n" letras de distintos o iguales valores nominales, sujetas a la misma tasa de descuento, a plazos diferentes. Se desea reemplazar todas por una sola letra llamada **ÚNICA DE CAMBIO**, cuyo valor nominal, sea la suma de los valores nominales de todos; se trata de averiguar el plazo común en días de la **ÚNICA DE CAMBIO**.

Consideremos "n" letras:

Valores nominales (en dinero):

$$Vn_1,\ Vn_2,\ Vn_3,\ \ldots,\ Vnn$$

Plazos (en días): $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,\ d_n$

Descuentos comerciales:

$$Dc_1,\ Dc_2,\ Dc_3,\ \ldots,\ Dc_n$$

Taza de descuento: R %

Se desea cambiar con una ÚNICA DE CAMBIO.

Se debe cumplir:

$$1°\quad Vn_{ÚNICA} = Vn_1 + Vn_2 + \ldots + Vn_n \qquad (1)$$

$$2°\quad Dc_{ÚNICA} = Dc_1 + Dc_2 + \ldots + Dc_n \qquad (2)$$

Cálculo del plazo X de la ÚNICA:

De (2):

$$Dc_{ÚNICA} = Dc_1 + Dc_2 + Dc_3 + \ldots + Dc_n$$

$$\frac{Vn_{ÚNICA} \cdot R \cdot X}{36\,000} = \frac{Vn_1 \cdot R \cdot d_1}{36\,000} + \frac{Vn_2\ R \cdot d_2}{36\,000} + \frac{Vn_3 \cdot R \cdot d_3}{36\,000} + \ldots + \frac{Vn_n \cdot R \cdot d_n}{36\,000}$$

$$Vn_{ÚNICA} \cdot R \cdot X = R(Vn_1 \cdot d_1 + Vn_2 \cdot d_2 + Vn_3 \cdot d_3 + \ldots + Vn_n \cdot d_n)$$

$$\therefore\ X = \frac{Vn_1 \cdot d_1 + Vn_2 \cdot d_2 + Vn_3 \cdot d_3 + \ldots + Vn_n \cdot d_n}{Vn_{UNICA}}$$

$$X = \frac{Vn_1 \cdot d_1 + Vn_2 \cdot d_2 + Vn_3 \cdot d_3 + \ldots + Vn_n \cdot d_n}{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3 + \ldots + Vn_n}$$

$$X = \frac{\Sigma(Vn \cdot d)}{\Sigma Vn}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuál será el valor efectivo de una letra de S/. 2 560 que ha sido descontada racionalmente al 6% y vence a los tres meses?

Solución:

Valor efectivo o actual es equivalente. Calculemos Dr:

$$Dr = \frac{Vn \cdot R \cdot t}{100}$$

$$\therefore\quad Dr = \frac{2560 \cdot 6 \cdot 3}{1\,200 + 6 \cdot 3} = 37{,}8$$

Luego, el valor efectivo será:

$$Va = Vn - Dr$$

$$Va = 2\,560 - 37{,}8 = S/.\ 2\,522{,}20$$

Rpta.: Va = S/. 2 521,60

2.- ¿Cuántos días ha de transcurrir para que el descuento de una letra equivalga a la centésima parte de su valor nominal, siendo el descuento del 4,5%?

Solución:

El objetivo es que: $Dc = \frac{Vn}{100}$

$$\therefore \quad \frac{Vn \cdot R \cdot d}{36\,000} = \frac{Vn}{100}$$

reemplazando valores:

$$\frac{Vn \cdot 4{,}5 \cdot d}{36\,000} = \frac{Vn}{100} \Rightarrow d = 80$$

Rpta.: 80 días.

3.- El valor nominal de una letra es 3/5 del valor nominal de otra. Se ha descontado al 5% por un mes y 12 días la primera y por 2 meses la segunda. El descuento comercial de la segunda letra ha sido de S/. 18,50. ¿Cuál ha sido el descuento comercial de la primera letra?

Solución:

$$Dc = \frac{Vn \cdot R \cdot m}{1\,200}$$

El valor nominal de la segunda letra es:

$$Vn = \frac{1\,200 \cdot Dc}{R \cdot m}$$

$$Vn = \frac{1\,200 \cdot 18{,}5}{5 \cdot 2} = S/.\ 2\,220$$

Luego, el valor nominal de la primera letra es:

$$2\,220 \cdot \frac{3}{5} = S/.\ 1\,332$$

Por lo tanto el descuento de esta letra en 42 días será:

$$Dc = \frac{1\,332 \cdot 5 \cdot 42}{36\,000} = S/.\ 7{,}77$$

Rpta.: Dc = S/. 7,77

4.- Se compra un objeto que vale al contado S/. 8 500 y como no dispone el comprador de dicha cantidad, éste le propone pagarle en el acto S/. 2500 y el resto en una letra a 90 días; el comerciante acepta. ¿Cuál es la diferencia del valor nominal de la letra, según se aplica el descuento racional o comercial con el 5% de interés?

Solución:

Se sabe que:

$$Va = 8\,500 - 2\,500 = S/.\ 6\,000$$

y $\quad Va = Vn - Dr,$

Si se hace el descuento racional en 90 días:

$$Dr = \frac{Va \cdot R \cdot t}{36\,000} = \frac{6\,000 \cdot 5 \cdot 90}{36\,000} = S/.\ 75$$

y $\quad Vn = 6\,000 + 75 = S/.\ 6\,075$

Si se hace el descuento comercial:

$$Va = Vn - Dc, \ m = 3 \text{ meses}$$

$$6\,000 = Vn - \frac{Vn \cdot R \cdot m}{1\,200} = Vn\left(\frac{1\,200 - 5 \cdot 3}{1\,200}\right)$$

$$Vn = 6\,000 \cdot 1\,200/1\,185 = S/.\ 6\,075{,}95$$

La diferencia es:

$$6\,075{,}95 - 6\,075 = S/.\ 0{,}95$$

Rpta.: Diferencia S/. 0,95

5.- Una letra pagadera a 45 días se la descuenta al 6%. ¿Cuál es el valor nominal de esta letra, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es S/. 9?

Solución:

Se sabe que:

$$Dc - Dr = \frac{Va \cdot R \cdot t}{100 - R \cdot t} - \frac{Va \cdot R \cdot t}{100}$$

de donde, si R = 6, t = 45/360:

$$Dr = 1\,191$$

entonces:

$$Dc = Dr + 9$$

$$Dc = 1\ 200$$

como:

$$Dc = \frac{Vn\ .\ R\ .\ t}{100}$$

$$\therefore \quad Vn = \frac{100\ .\ 1\ 200}{6{,}45/360}$$

$$Vn = 160\ 000$$

Rpta.: Vn = S/. 160 000

6.- La suma de los valores nominales de 2 letras es de S/. 8 400, habiéndose recibido S/. 8 280 por ambas, descontadas comercialmente al 6% la primera por 2 meses y la segunda por 3 meses. ¿Cuál es el valor nominal de la letra de mayor precio?

Solución:

1ra. letra	2da. letra
$Vn = Vn_1$	$Vn = Vn_2$
$Dc = Dc_1$	$Dc = Dc_2$
$m = 2$	$m = 3$

podemos establecer que el Dc total es:

$$Dc_1 + Dc_2 = 8\ 400 - 8\ 280 = 120 \qquad (1)$$

Además:

$$Vn_1 + Vn_2 = 8\ 400 \qquad (2)$$

De (1):

$$\frac{Vn_2\ .\ 6\ .\ 3}{1\ 200} + \frac{Vn_1\ .\ 6\ .\ 2}{1\ 200} = 120$$

$$Vn_1 + \frac{3}{2}\,Vn_2 = 12\ 000 \qquad (3)$$

De (2) y (3):

$$Vn_1 = S/.\ 1200 \ \text{ y } \ Vn_2 = S/.\ 7\ 200$$

Rpta.: S/. 7 200

7.- El valor actual de una letra despues de 1 año es los 24/25 de su valor nominal. ¿A qué tasa de porcentaje se hizo el descuento?

Solución:

$$Va = \frac{24}{25}\,Vn \qquad R = ?$$

$$Va = Vn - Dc$$

Reemplazando valores se tiene:

$$\frac{24}{25}\,Vn = Vn - \frac{Vn\ .\ R}{100} \quad \Rightarrow R = 4\%$$

Rpta.: R = 4%

8.- Dos pagarés de igual suma vencen dentro de 30 y 60 días respectivamente. Son descontados de un banco al 36% anual. ¿Cuál es el Vn de cada uno de ellos, si se recibe al momento del descuento S/. 319 140? (Un pagaré es una obligacion similar a una letra de cambio)

Solución:

Podemos establecer:

$$Va_1 + Va_2 = 319\ 140$$

O sea:

$$\frac{Vn\ (36\ 000 - d_1\ .\ R)}{36\ 000} + \frac{Vn(36\ 000 - d_2\ .\ R)}{36\ 000} = 319\ 140$$

Pero:

$$d_1\ .\ R = 30\ .\ 36 = 1\ 080$$

$$d_2\ .\ R = 60\ .\ 36 = 2160$$

Reemplazando, se obtiene:

$$\frac{Vn\ (34\ 920)}{36\ 000} + \frac{Vn\ (33\ 840)}{36\ 000} = 319\ 140$$

$$\Rightarrow Vn = S/.\ 167\ 089$$

Rpta.: Vn = S/. 167 089

9.- El Vn de una letra es 4/5 el valor de otra. Se han descontado comercialmente al 4%; la primera por 1 mes y 16 días y la segunda por 3 meses; si el descuento de ésta fue S/. 205. ¿Cuál fue el descuento de la primera?

Solución:

$$Vn_1 = \text{Valor nominal de la 1ra.}$$

$$Vn_2 = \text{Valor nominal de la 2da.}$$

Podemos establecer:

$$Vn_1 = \frac{4}{5}\ Vn_2 \ \text{ y } \ R = 4\%$$

$$Dc_2 = 205 = \frac{Vn_2 \ .\ 3\ .\ 4}{1\ 200}$$

De aqui se tiene:

$$Vn_2 = S/.\ 20\ 500$$

sustituyendo en Dc_1:

$$Dc_1 = \frac{\frac{4}{5}\ .\ 20\ 500\ .\ 46\ .\ 4}{36\ 000} = 83{,}8$$

Rpta.: $Dc_1 =$ S/. 83,8

10.- Se debe una suma de S/. 4 100, pagadera a los 5 meses y se conviene en pagar S/. 2 525 a los 2 meses y la cantidad necesaria para extinguir la deuda a los ocho meses. ¿Qué cantidad es ésta? Supóngase el descuento racional al 6%.

Solución:

Valor actual de los S/. 4 100 (considerando el Dr)

$$Va = \frac{100\ Vn}{100 + R\ .\ a} = \frac{100\ .\ 4\ 100}{100 + \frac{6\ .\ 5}{12}} = S/.\ 4\ 000$$

Valor actual de los S/. 2 525 pagaderos a los dos meses:

$$Va_1 = \frac{100\ .\ 2\ 525}{100 + \frac{6\ .\ 2}{12}} = S/.\ 2\ 500$$

Se deducirá el valor nominal de una letra pagadera a los 8 meses, cuyo valor efectivo sea de:

$$4\ 000 - 2\ 500 = S/.\ 1\ 500$$

$$Vn = \frac{1\ 500\left(100 + \frac{6\ .\ 8}{12}\right)}{100} = 1\ 560$$

Rpta.: Vn = S/. 1 560

11.- Una letra descontada al 15% produce un Dc igual al 130% del Dr. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el Dr sea igual al Dc primitivo?

Solución:

Valor nominal	=	Vn
Porcentaje	=	15%
Años	=	t

Se debe cumplir:

$$Dc = \frac{130}{100}\ Dr$$

Sustituyendo Dc y Dr:

$$\frac{Vn\ .\ 15\ .\ t}{100} = \frac{13}{10} \cdot \frac{Vn\ .\ 15\ .\ t}{(100 + 15\ .\ t)} \Rightarrow \ t = 2 \text{ años}$$

Sea "x" el plazo (en años) que debe transcurrir para que el Dr sea igual al Dc inicial. Podemos establecer:

$Dr_x = Dc_1$; es decir:

$$\frac{Vn\ .\ 15\ .\ x}{100 + 15\ .\ x} = \frac{Vn\ .\ 15\ .\ 2}{100} \Rightarrow \ x = 2 \text{ años } 6/7$$

Rpta.: 2 años 6/7 = 2 años 10 meses 9 días.

12.- Calcular el valor actual de una letra por S/. 2 100 pagadera a los 5 meses. Tasa 12%.

Solución:

$$Va = ? \quad Vn = S/.\ 2100$$

$Dc = ? \quad m = 5$

$R = 12\%$

$Va + Dc = Vn$

$$Va + \frac{Vn \cdot 12 \cdot 5}{1\ 200} = Vn$$

$$Va + \frac{2\ 100 \cdot 12 \cdot 5}{1\ 200} = 2\ 100$$

$$Va = S/.\ 1\ 995$$

Rpta.: Va = S/. 1 995

13.- Una persona compra una propiedad pagando al contado 15 000 soles y acepta 6 letras de 3 000 soles cada una pagaderas de 6 meses en 6 meses a partir del día de la venta. El vendedor descuenta en el Banco (es decir vende al Banco) estas letras según el descuento comercial recibiendo por todo S/. 31 425.

¿Cuál fue la tasa de descuento?

Solución:

La suma de los valores nominales de las seis letras es de:

$$3\ 000 \cdot 6 = 18\ 000 \text{ soles}$$

El banco entrega:

$$31\ 425 - 15\ 000 = 16\ 425$$

El banco le cobra al vendedor:

$$18\ 000 + 16\ 425 = 1\ 575 \text{ soles}$$

Se debe luego calcular cuál debe ser la tasa para que la suma de 3 000 soles, colocada a los 6 meses, 12 meses, 18 meses, 24 meses, 30 meses y 36 meses, de un interés de 1 575 soles. El tiempo total de colocación es:

$$6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 = 126 \text{ meses}$$

El interés para una tasa de 1 sería:

$$Dc = \frac{3\ 000 \cdot 1 \cdot 126}{12 \cdot 100} = 315 \text{ soles}$$

La tasa es $\frac{1\ 575}{315}$ = 5 veces más grande, o sea 5%.

Rpta.: 5%

14.- La suma de los valores nominales de dos letras es 8 400 soles, y se ha recibido por ellas 8 280 soles descontadas al 6%; la primera por dos meses y la segunda por 3 meses. ¿Cuál era el valor nominal de cada una de ellas?

Solución:

Si las 2 letras se descontarán por 2 meses, el descuento sería de :

$$Dc = \frac{Vn \cdot m \cdot R}{1\ 200}$$

$$= \frac{8\ 400 \cdot 2 \cdot 6}{1\ 200} = 84 \text{ soles}$$

Pero el descuento ha sido de:

$$8\ 400 - 8\ 280 = 120 \text{ soles}$$

La diferencia: 120 - 84 = 36 soles, representa el descuento de la segunda letra por un mes más al 6%. Por tres meses = 36 . 3 = 108 soles.

El valor nominal de esta letra se calcula así:

$$108 = \frac{Vn_2 \cdot 6 \cdot 3}{1\ 200}$$

$\therefore \quad Vn_2 = 7\ 200$

El de la primera:

$$Vn_1 = 8\ 400 - 7\ 200 = 1\ 200 \text{ soles}$$

Rpta.: 7 200 y 1 200 soles.

15.- Un objeto cuesta al contado S/. 8 000 y para comprarlo se firma una letra pagadera en 75 días. ¿Por cuánto es la letra si la tasa de descuento racional es 6%?

Solución:

$Va = S/.\ 8\ 000 \quad ; \quad t = 57 \text{ días} \quad ; \quad R = 6\%$

$Vn = Va + Dr$

$$Vn = 8\,000 + \frac{8\,000 \,.\, 6 \,.\, 75}{36\,000}$$

$$Vn = S/.\ 8\,100$$

Rpta.: Vn = S/. 8 100

16.- ¿Cuál fue el porcentaje de descuento comercial si una letra de S/. 6 000 que vencía el 19 de diciembre se pagó el 13 de setiembre con S/. 4 880? (Considerar el mes de 30 días).

Solución:

Cuando la letra se canceló faltaba para su vencimiento:

$$(30 - 13) + 30 + 30 + 19 = 96 \text{ días.}$$

Vn = S/. 6 000   R = ?%

Va = S/. 4 880   t = 96 días

Dc = S/. 1 120

Se sabe:

$$Dc = \frac{Vn \,.\, R \,.\, d}{36\,000}$$

de donde:

$$R = \frac{Dc \,.\, 36\,000}{Vn \,.\, d} = \frac{1\,120 \,.\, 36\,000}{6\,000 \,.\, 96} = 70\%$$

Rpta.: 70%

17.- ¿En qué fecha debe descontarse una letra que vence el 28 de julio del 2 000 para que su valor actual sea los 23/24 de su valor nominal? Supóngase un descuento del 30%.

Solución:

Datos: $$Va = \frac{23}{24}\,Vn$$

$$R = 30\% \quad ; \quad t = x$$

Se sabe que: Va = Vn - Dc ; o sea:

$$\frac{23}{24}\,Vn = Vn - Dc \quad \Rightarrow \quad Dc = \frac{Vn}{24}$$

$$\frac{Vn}{24} = \frac{Vn \,.\, R \,.\, x}{36\,000} \quad \Rightarrow \quad x = 50 \text{ días}$$

La letra se descontó 50 días antes de su vencimiento o sea:

Rpta.: 8 de junio del año 2 000

18.- Jorge lleva al banco a descontar una letra por S/. 108 000 que vence dentro de 90 días; consigue su objetivo pero es obligado a aceptar una tasa del 25% semestral; pero el descuento que le aplican es el racional.

¿Cuánto ahorró Jorge considerando que lo usual es que el descuento sea comercial?

Solución:

Vn = S/. 108 000 ; días = 90

R = 25% sem. = 50% anual

Dr = ?

ahorró:

$$Dc - Dr = X$$

o sea:

$$X = \frac{Vn \,.\, R \,.\, d}{36\,000} - \frac{Vn \,.\, R \,.\, d}{36\,000 + R \,.\, d}$$

$$X = \frac{108\,000 \,.\, 50 \,.\, 90}{36\,000} - \frac{108\,000 \,.\, 50 \,.\, 90}{36\,000 + 50 \,.\, 90}$$

Rpta.: X = S/. 1 500

19.- Una letra por S/. 108 000 que vence el 29 de Junio fue descontada el 10 de Junio del mismo año al 25% semestral; si además se le recargó: 1,5% de comisión y 3% por cambio de localidad en ambos casos sobre el valor nominal.

¿Cuánto se recibió por la letra después de todos los descuentos?

Solución:

$Vn = S/.\ 108\ 000$

$t = 19$ días

$R = 25\%$ sem. $= 50\%$ anual

Recargo por comisión: 1,5% del Vn

Cambio de localidad: 3% del Vn

Total recibió el Va de la letra, ésto es:

$$Va_{Total} = Vn - [Dc + recargo]$$

$$Va_{Total} = 108\ 000 - \left[\frac{108\ 000 \cdot 50 \cdot 19}{3\ 600} + \frac{1,5}{100} \cdot 108\ 000 + \frac{3}{100} \cdot 108\ 000\right]$$

$$Va_{Total} = S/.\ 100\ 290$$

Rpta.: Recibió S/. 100 290

Pagó en intereses y comisiones:

$108\ 000 - 100\ 290 = 7\ 710$ soles

EJERICIOS PROPUESTOS

1. Un comerciante toma en traspaso una tienda por 75 000 soles, a pagar en dos plazos: la mitad a los tres meses y la otra mitad a los dos meses siguientes. Paga al contado con un descuento del 6% anual. ¿Cuánto le ha costado el traspaso al comerciante?

   Rpta.: S/. 73 500

2. Calcular el valor nominal de una letra que descontada por 4 meses al 5%, da una diferencia de 2 soles entre el descuento comercial y el descuento racional.

   Rpta.: S/. 7 320

3. Se tiene una letra cuyo descuento racional es el 96% de su descuento comercial y otra de S/. 2 000 cuyo tiempo de vencimiento y la taza que se le aplica son el doble y el triple respectivamente de la primera. ¿Cuál es el valor actual de esta última letra?

   Rpta.: S/. 1 500

4. Dos personas se presentan a un Banco, la primera con una letra de 1 500 soles pagadera a 6 meses, la segunda con una letra de 1 470 soles pagadera en 10 días; el Banco descuenta las dos letras a la misma tasa y da a la segunda personas 12,55 más que a la primera. ¿Cuál es la tasa de descuento?

   Rpta.: 6%

5. El descuento comercial y el descuento racional que se aplicaría hoy a una letra de S/. 5 100 están en la misma relación de 17 a 15. Si dicha letra vence en 32 días. ¿Cuánto pagaría el banco si se descontara en 18 días?

   Rpta.: S/. 2 960

6. Calcule el valor nominal de una letra que descontada por 4 meses al 5% genera una diferencia de S/. 0,20 entre el descuento comercial y el descuento racional

   Rpta.: S/. 732

7. En una letra descontada al 8%, el descuento comercial es el 120% del descuento racional. ¿A qué plazo debe ser descontada racionalmente dicha letra, para que el descuento sea igual al descuento comercial inicial?

   Rpta.: 3 años; 1 mes y 15 días.

8. Un comerciante debe tres letras de S/. 1 250, S/. 2 000 y S/. 1 800 pagaderas en 8, 4 y 6 meses respectivamente. Propone a su acreedor cancelar su deuda en dos pagos:
   uno de S/. 2 800, pagadero dentro de 6 meses y otro en 4 años, 2 meses.
   ¿A cuánto asciende este último pago considerando el descuento comercial al 3%?

   Rpta.: 2 537 aproximadamente.

9. Si una letra se paga 15 días antes, se ahorra S/. 20. ¿Cuánto se ahorrará si se paga 21 días antes?

   Rpta.: S/. 28,00

10. ¿Cuál será el descuento comercial de una letra de S/. 3 500, el día que el descuento racional sea los 7/8 del descuento comercial?

   Rpta.: S/. 500,00

11. El valor actual de una letra es 1 470; la suma del valor nominal y el descuento es 1 530. Si el porcentaje de descuento es 12%. ¿Dentro de cuánto tiempo es la fecha de vencimiento?

   Rpta.: 2 meses.

12. Una persona debe pagar una letra de 5 000 el 13 de abril. Paga el 4 de Marzo, S/. 4 950. ¿Cuál fue el porcentaje anual de descuento?

   Rtpa.: 9%

13. Una letra de S/. 3 000 vence el 10 de Mayo. Si se paga el 20 de abril le descuentan S/. 10. ¿Cuánto se pagará el día 8 de abril?

   Rpta.: S/. 2 984

14. Se tiene dos letras que vencen dentro de 30 y 45 días, respectivamente. Si la primera tiene doble valor nominal. ¿Dentro de cuántos días se puede pagar la letra reemplazante?

   Rpta.: 35

15. Se tienen dos letras de S/. 6 000 y S/. 4 000 que vencen el 5 de Mayo y 14 de Junio, respectivamente. Si se reemplaza por una sola letra. ¿Qué día vencerá?

   Rpta.: 21 de Mayo.

16. Se tiene 3 letras de 5 175, 4 350 y 1 500 soles pagaderas respectivamente el 15 de Julio, el 30 de Octubre y el 16 de Marzo siguiente. Se desea reemplazar por una sola letra igual a la suma. ¿Cuál será la fecha de vencimiento de esta única?

   Rpta.: 28 de Setiembre.

17. Si una letra se descontara hoy comercialmente al 60%, se recibiria el 75% de su valor nominal, pero si se descontara un mes después racionalmente y a la misma tasa. ¿Qué tanto porciento de su valor nominal se recibiría?

   Rpta.: $83,\overset{\frown}{3}$ %

18. En un pagaré: el descuento comercial y el valor actual comercial están en la razón de 1 a 3. ¿Qué porcentaje del valor nominal es el descuento interno?

   Rpta.: 20%

19. Si el descuento comercial de una letra es S/. 250 y el descuento interno es S/. 240. Hallar el valor nominal.

   Rpta.: S/. 6 000

20. Señale la proposición correcta:

   a) Dc < Dr

   b) Vn (Dc + Dr) = Dc . Dr

   c) 1 año comercial < > 365 días

   d) M + I = C e) El Dc es un interés simple

   Rpta.: "e"

21. Los valores nominales de dos letras entre sí son como 4 es a 9. La primera ha sido descontada por un mes y 15 días, y la otra por dos meses, ambas sujetas a una tasa del 30%. Si el descuento de la segunda letra fue de S/. 2 400. ¿Cuál fue el descuento de la primera?

   Rpta.: S/. 800

22. Se descuenta el 5 de abril una letra por S/. 27 600, pagadera el 11 de Mayo del mismo año. Calcular el descuento al 38,5%.

   Rpta.: S/. 1062,6

23. ¿En qué fecha se descontó una letra de S/. 24 000 que vencía el 15 de Setiembre si se recibió por ella S/. 22 200? Considere una tasa de descuento comercial del 30% anual.

   Rpta.: 17 de Junio.

24. Un comerciante aceptó el día 1° de abril de 1996, 4 letras. La 1ra. por S/. 80 000 que vence el 10 de Agosto, la 2da. por S/. 160 000 que vence el 3 de Setiembre, la 3ra. por S/. 240 000 que vence el 13 de Octubre y la cuarta por S/. 320 000 que vence el 8 de noviembre. Todas estas fechas del año 1996. Si luego decide cancelar la deuda con un sólo pago de S/. 800 000. ¿En qué fecha vencerá?

   Rpta.: 4 de Octubre.

REPARTO PROPORCIONAL

REPARTO PROPORCIONAL

Es el procedimiento de cálculo que permite repartir una cantidad en partes proporcionales a otras.

El repartimiento proporcional puede ser simple o compuesto.

Se dice que es simple cuando las partes "repartidas" son proporcionales a números simples; y compuestas si las partes "repartidas" son proporcionales a los productos de varios números.

REPARTO PROPORCIONAL SIMPLE

En el repartimiento proporcional simple se presenta 3 casos:

1er. CASO

Repartir una cantidad en partes proporcionales a números dados. El siguiente ejemplo, nos lleva a comprender esta cuestión.

Ejemplo:

Repartir 12 600 proporcionalmente a 3; 6 y 9.

Solución:

Consideremos que de las 12 600 unidades a repartirse "a" unidades le corresponde a 3, "b" unidades a 6, y "c" unidades a 9. Por definición de repartimiento proporcional, y por propiedad de proporciones podemos establecer:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{a + b + c}{3 + 6 + 9} = \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{12\,600}{18} = \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9}$$

$$a = \frac{12\,600 \,.\, 3}{18} = 2\,100$$

$$b = \frac{12\,600 \,.\, 6}{18} = 4\,200$$

$$c = \frac{12\,600 \,.\, 9}{18} = 6\,300$$

> Observación: El factor $\dfrac{a + b + c}{3 + 6 + 9}$, es denominado "factor de proporcionalidad"

REGLA PRÁCTICA: Para repartir una cantidad en partes proporcionales a números dados, basta multiplicar la cantidad que debe repartirse por cada uno de los números que van a "recibir" la repartición y dividir los productos por la "suma" de estos mismos números.

2do. CASO

Repartir un número en partes proporcionales a varios quebrados.

Ejemplo:

Repartir 13 940 en partes proporcionales a 3/4, 1/3 y 5/8.

Solución:

Dando común denominador, tendremos:

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

De las 13 940 unidades a repartirse, corresponden a "a": 18/24, a "b" 8/24 y a "c" 15/24. Por lo que podemos establecer:

$$\frac{a}{\frac{18}{24}} = \frac{b}{\frac{8}{24}} = \frac{c}{\frac{15}{24}}$$

Multiplicando por 24 los denominadores, no se altera la igualdad de las razones y se tendrá:

$$\frac{a}{\frac{18}{24} \cdot 24} = \frac{b}{\frac{8}{24} \cdot 24} = \frac{c}{\frac{15}{24} \cdot 24}$$

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{8} = \frac{c}{15}$$

Basta con repartir 13 940 proporcionalmente a 18; 8 y 15 (1er caso), así:

$$a = \frac{13\,940 \;.\; 18}{41} = 6\,120$$

$$b = \frac{13\,940 \;.\; 8}{41} = 2\,720$$

$$c = \frac{13\,940 \;.\; 15}{41} = 5\,100$$

REGLA PRÁCTICA: Para repartir un número en partes proporcionales a quebrados, se dan a éstos un común denominador y se reparte el número en partes proporcionales a los numeradores de los quebrados así formados.

3er. CASO

Repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados.

Ejemplo:

Repartir 7 260 en partes inversamente proporcionales a 7; 11 y 21.

Solución:

Podemos establecer que de las 7 260 unidades, les corresponden a "a": 1/7, a "b" 1/11, a "c" 1/21.

Sabemos que si dos magnitudes son I.P., los valores de una de ellas son D.P. a las inversas de los valores de la otra magnitud, así:

$$\frac{a}{\frac{1}{7}} = \frac{b}{\frac{1}{11}} = \frac{c}{\frac{1}{21}} \qquad (1)$$

homogenizando los denominadores de las razones:

$$\frac{1}{7} = \frac{33}{231}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{21}{231}$$

$$\frac{1}{21} = \frac{11}{231}$$

Reemplazando estos valores en (1):

$$\frac{a}{\frac{33}{231}} = \frac{b}{\frac{21}{231}} = \frac{c}{\frac{11}{231}} \qquad (1)$$

simplificando:

$$\frac{a}{33} = \frac{b}{21} = \frac{c}{11}$$

Basta repartir 7 260 proporcionalmente a 33, 21 y 11, así:

$$a = \frac{7\,260 \;.\; 33}{65} = 3\,685{,}85$$

$$b = \frac{7\,260 \;.\; 21}{65} = 2\,345{,}54$$

$$c = \frac{7\,260 \;.\; 11}{65} = 1\,228{,}61$$

REGLA PRÁCTICA: Para repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales, a números dados, se da las razones inversas de dichos números y luego se procede como en el 2do caso.

REPARTO DE UTILIDADES

Tiene por objeto repartir proporcionalmente las ganancias o pérdidas habidas en la explotación de un negocio entre las personas que han intervenido en el negocio aportando sus capitales. Es simplemente un ejemplo especial de la regla de reparto proporcional.

Se presenta 4 casos:

1er CASO

Cuando los capitales y los tiempos de imposición son iguales. En este caso las ganancias o pérdidas se reparten por partes iguales entre los socios.

2do CASO

Los socios aportan distintos capitales por iguales tiempos. En este caso las ganancias o pérdidas respectivas serán proporcionales a los capitales, y el tiempo no influye por ser el mismo para todos.

3er CASO

Los socios aportan iguales capitales por tiempos distintos. Se repartirá los beneficios proporcionalmente a los tiempos.

4to CASO

Los socios aportan capitales desiguales, en tiempos desiguales. Las ganancias o pérdidas son proporcionales a los productos de los tiempos por los capitales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuál es el mayor de tres números que suman 4 536 y que son proporcionales a: 2/3, 3/5 y 5/6?

Solución:

Dando común denominador a los quebrados:

$$20/30 \quad ; \quad 18/30 \quad ; \quad 25/30$$

Se reparte proporcionalmente a los numeradores: 20; 18; 25:

El mayor será para 25:

$$\frac{4\,536 \,.\, 25}{20 + 18 + 25} = 1\,800$$

Rpta.: 1 800

2.- Un premio debe repartirse en razón inversa de las edades de cada uno de los ganadores, quienes tienen 8, 11, 16 y 20 años. Siendo el total ganado S/. 165 597. ¿Cuánto le corresponde al mayor?

Solución:

Se reparte directamente a:

$$1/8,\ 1/11,\ 1/16 \text{ y } 1/20$$

Dando común denominador:

$$110/880,\ 80/880,\ 55/880 \text{ y } 44/880.$$

Luego, se reparte proporcionalmente a: 110, 80, 55 y 44

Se calcula el valor de proporcionalidad:

$$\frac{165\ 597}{110 + 80 + 55 + 44} = 573$$

El mayor recibe:

$$44 \,.\, 573 = 25\,212$$

Rpta.: 25 212 soles.

3.- Tres ciclistas quedan de acuerdo para distribuirse S/. 9 450 proporcionalmente a las velocidades con que corran una misma distancia. Efectuando el recorrido resulta que el primero tardó 3 horas, el segundo 5 y el tercero 6. ¿Cuánto recibe el más veloz?

Solución:

Para distancias iguales las velocidades son inversamente proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlas, por tanto, habrá que dividir S/. 9 450 en partes inversamente proporcionales a 3; 5 y 6. Es decir proporcionales a 1/3, 1/5 y 1/6. Dando común denominador: 10/30, 6/30 y 5/30.

Se calcula el "factor de proporcionalidad":

$$\frac{9\,450}{10 + 6 + 5} = \frac{9\,450}{21} = 450$$

El más veloz recibe:

$$450 \; . \; 10 = 4\,500$$

Rpta.: 4 500 soles.

4.- Tres amigos se reunieron para un negocio, contribuyeron con S/. 2 400, S/. 3 600 y S/. 3 000 respectivamente. Al liquidar el negocio, obtuvieron una utilidad de S/. 4 500. ¿Cuánto le correspondió a cada uno?

Solución:

Como los tiempos son iguales, se distribuirá los 4 500 soles directa y proporcionalmente a los capitales aportados:

1er socio	2 400
2do socio	3 600
3er socio	3 000
Total aportado:	9 000

Llamando U_1, U_2 y U_3 a las utilidades para cada socio. Cada uno cobró:

$$U_1 = \frac{4\,500}{9\,000} \cdot 2\,400 = \text{S/. } 1\,200$$

$$U_2 = \frac{4\,500}{9\,000} \cdot 3\,600 = \text{S/. } 1\,800$$

$$U_3 = \frac{4\,500}{9\,000} \cdot 3\,000 = \text{S/. } 1\,500$$

5.- Un industrial empezó un negocio. A los 5 meses admitió un socio y 4 meses después de éste, entró un tercer socio. Cada uno de ellos aportó al negocio la misma cantidad. El negocio duró 14 meses, al cabo de los cuales la utilidad fue de S/. 56 000. ¿Cuánto le tocó a cada uno?

Solución:

Como aportaron la misma cantidad, se repartirá la utilidad en partes proporcionales al tiempo de imposición.

1er socio	:	14 meses
2do socio	:	9 meses
3er socio	:	5 meses
Total tiempo =		28 meses

Llamando U_1, U_2 y U_3 a las utilidades para cada socio. Cada uno recibió:

$$U_1 = 14 \cdot \frac{56\,000}{28} = \text{S/. } 28\,000$$

$$U_2 = 9 \cdot \frac{56\,000}{28} = \text{S/. } 18\,000$$

$$U_3 = 9 \cdot \frac{56\,000}{28} = \text{S/. } 10\,000$$

6.- Tres socios intervienen en un negocio, el primero aporta S/. 10 000 durante un año, el segundo S/. 8 000 durante cuatro meses y el tercero S/. 19 000 durante dos meses. El negocio quebró dejando una pérdida de S/. 6 650. Determinar la pérdida de cada socio.

Solución:

La pérdida la absorberán los socios en forma directamente proporcional al producto de los capitales y sus tiempos de imposición.

1er socio	:	10 000 . 12 =	120 000
2do socio	:	8 000 . 4 =	32 000
3er socio	:	19 000 . 2 =	38 000
Suma total	:		190 000

Dividiendo entre 2 000 cada producto:

$$\left\{\begin{array}{l} 60 \\ \quad 16 \quad \Rightarrow \text{suma} = 95 \\ 19 \end{array}\right.$$

Si llamamos P_1, P_2 y P_3 a las pérdidas, se tendrá que cada uno perdió:

$$P_1 = 60 \cdot \frac{6\,650}{95} = \text{S/. } 4\,200$$

$$P_2 = 16 \cdot \frac{6\,650}{95} = \text{S/. } 1\,120$$

$$P_3 = 19 \cdot \frac{6\,650}{95} = \text{S/. } 1\,330$$

7.- A los dos años de estar constituida una sociedad, se hizo la liquidación, resultando una ganancia de 61 671 soles. Empezó la sociedad con dos industriales que contribuyeron con 100 000 y 120 000 soles respectivamente, un tercer socio entró a los 10 meses y contribuyó con 50 000 soles; 4 meses antes de la liquidación, el primer socio impuso 30 000 soles adicionales. Calcular la ganancia de cada socio.

Solución:

Repartiremos la ganancia en forma directamente proporcional al producto de los capitales por sus respectivos tiempos:

			Totales
1er socio:			
100 000 . 24	=	2 400 000	
30 000 . 4	=	120 000	2 520 000
2do socio:			
120 000 . 24	=	2 880 000	2 880 000
3er socio:			
50 000 . 14	=	700 000	700 000
		Total:	6 100 000

Dividiendo entre 20 000 todos los números, con el fin que los cálculos se hagan con números más pequeños, nos da: 126; 144 y 35. Por lo tanto, siendo A, B y C la ganacia de cada socio el "factor de proporcionalidad" será:

$$\frac{A}{126} = \frac{B}{144} = \frac{C}{35} = \frac{A + B + C}{126 + 144 + 35} = \frac{61\,671}{305}$$

$$= 202,\ 2$$

∴ La ganancia de cada socio es:

Rpta.: A = 126 . 202,2 = 25 477,20

B = 144 . 202,2 = 29 116,80

C = 35 . 202,2 = 7 077,00

8.- Un ingeniero industrial inventó una máquina para pelar papas y empezó un negocio para fabricarla. Impuso como capital inicial S/. 60 000 y 6 meses después entró al negocio un segundo socio aportando un capital de S/. 40 000. Un año más tarde, un tercer socio se incorporó a la fábrica, con un capital de S/. 25 000. Se liquidó el negocio al cabo de 5 años, obteniendo una utilidad de S/. 517 560. ¿Qué cantidad cobrará cada socio por el capital impuesto más el beneficio, teniendo en cuenta que el inventor cobra además de la parte de la ganancia que le correspondió como socio, el 15% de los beneficios?

Solución:

El inventor cobra el 15%, ésto es:

$$\frac{15\ .\ 517\,560}{100} = 77\,634$$

Queda para el reparto:

517 560 - 77 634 = S/. 439 926

Los 439 926 soles se repartirá en forma directamente proporcional al producto de los capitales por los tiempos de imposición.

Los capitales y tiempos son:

60 000 . 5 . 12 = 3 600 000

40 000 . (60 - 6) = 2 160 000

25 000 . (54 - 12) = 1 050 000

Dividiendo entre 30 000, para simplificar:

1er socio	:	120
2do socio	:	72
3er socio	:	35
	suma:	227

Llamando, U_1 ; U_2 y U_3 a los beneficios de los socios, éstos serán:

$$U_1 = 120 \cdot \frac{439\,926}{227} = S/.\ 232\,560$$

$$U_2 = 72 \cdot \frac{439\,926}{227} = S/.\ 139\,536$$

$$U_3 = 35 \cdot \frac{439\,926}{227} = S/.\ 67\,830$$

lo que cobró cada socio será:

1er socio:

$$60\,000 + 232\,560 + 77\,634 = S/.\ 370\,194$$

2do socio:

$$40\,000 + 139\,536 = S/.\ 179\,536$$

3er socio:

$$25\,000 + \ \ 67\,830 = S/.\ 92\,830$$

9.- Dos amigos ganaron en un negocio 7 875 soles, el primero puso S/. 5000 durante 3 meses y el segundo puso su dinero durante 8 meses. ¿Cuánto impuso el segundo, si su capital se duplicó?

Solución:

Sean U_1 y U_2 las utilidades; y C_1 y C_2 los capitales. Si el segundo duplicó su capital, su utilidad fue igual al capital ($U_2 = C_2$)

Tenemos: $$\frac{U_1}{C_1 \cdot t_1} = \frac{U_2}{C_2 \cdot t_2}$$

como: $U_2 = C_2$

$$U_1 = \frac{C_1 \cdot t_1}{t_2} = \frac{5\,000 \cdot 3}{8} = 1\,875$$

$$U_2 = 7\,875 - U_1 = 7\,875 - 1\,875$$

$$U_3 = 6\,000 = C_2$$

Rpta.: El segundo impuso : S/. 6 000

10.- Dos industriales formaron una sociedad por un año, con un capital de 1 000 000, pero el segundo sólo pudo poner su capital cuatro meses más tarde; si obtuvieron el mismo beneficio: decir, qué capital impuso cada uno.

Solución:

Siendo $B_1 = B_2$ los beneficios, se tiene:

$$\frac{B_1}{C_1 \cdot t_1} = \frac{B_2}{C_2 \cdot t_2}$$

como $B_1 = B_2$:

$$C_1 \cdot t_1 = C_2 \cdot t_2$$

es decir los capitales aportados son inversamente proporcionales a los tiempos. como los tiempos son: $t_1 = 12$ meses y $t_2 = 8$ meses, se repartirá el millón directamente proporcional a: 1/12 y 1/8, es decir directamente proporcional a:

$$\frac{1}{12} \cdot 24 = 2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{8} \cdot 24 = 3$$

El capital aportado por el primero:

$$2 \cdot \frac{1\,000\,000}{2 + 3} = 400\,000$$

El capital aportado por el segundo:

$$3 \cdot \frac{1\,000\,000}{2 + 3} = 600\,000$$

Rpta.: Aportaron : S/. 400 000 y S/. 600 000 respectivamente.

11.- 3 socios han ganado en un negocio 136 000 soles. El primero contribuyó con 64 000 soles; el segundo con 30 000 soles durante 8 meses, y el tercero con 20 000 soles durante 6 meses. La ganancia del primero fue del 100% sobre su inversión. Calcular el tiempo que estuvo impuesto el primer capital y las ganancias de los otros dos.

Solución:

Como la ganancia del primero se duplicó; quiere decir que ganó 64 000 soles.

Entre el segundo y tercero han ganado:

$$136\ 000 - 64\ 000 = 72\ 000$$

Repartiremos los 72 000 soles en forma directamente proporcional al producto de los capitales por sus respectivos tiempos:

Socio N° 2:

$$30\ 000 \,.\, 8 = 240\ 000$$

Socio N° 3:

$$20\ 000 \,.\, 6 = 120\ 000$$

Dividiendo entre 120 000, socio N° 2 es como 2 y socio N° 3 es como 1, entonces se reparte los 72 000 soles proporcionalmente a 2 y 1:

$$G_2 = 2 \cdot \frac{72\ 000}{2 + 1} = 48\ 000$$

$$G_3 = 1 \cdot \frac{72\ 000}{2 + 1} = 24\ 000$$

Por otro lado:

$$\frac{G_1}{64\ 000 \,.\, t_1} = \frac{G_3}{20\ 000 \,.\, 6}$$

$$\frac{64\ 000}{64\ 000 \,.\, t_1} = \frac{24\ 000}{20\ 000 \,.\, 6}$$

de donde:

$$t_1 = \frac{64\ 000 \,.\, 20\ 000 \,.\, 6}{64\ 000 \,.\, 24\ 000} = 5 \text{ meses}$$

Rpta.: Primer capital 5 meses. Ganancia de los otros dos: 48 000 y 24 000 soles.

12.- En una sociedad, un socio impuso 6 000 soles durante 4 años, 4 meses; el otro socio impuso un capital en soles durante un tiempo en días, cuyos numerales eran iguales, si la utilidad del primero era como 8 y la utilidad del segundo era como 9. Calcular el capital y el tiempo de imposición del segundo.

Solución:

$C_1 = 6\ 000$; $C_2 = N$

$t_1 = 8$ años 4 meses $= 3\ 000$ días

$t_2 = N$

$$\frac{G_1}{6\ 000 \,.\, 3\ 000} = \frac{G_2}{N \,.\, N}$$

pero:

$$\frac{G_1}{8} = \frac{G_2}{9} \quad \text{ó} \quad \frac{G_2}{G_1} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{N^2}{18\ 000\ 000} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{9}{8}$$

$$\therefore \quad \frac{N^2}{18\ 000\ 000} = \frac{9}{8}$$

de donde:

$$N^2 = \frac{9 \,.\, 18\ 000\ 000}{8}$$

$$N^2 = \frac{9 \,.\, 9 \,.\, 1\ 000\ 000}{4}$$

$$N = \frac{9\ 000}{2} = 4\ 500$$

$C_2 = 4\ 500$ soles.

$t_2 = 4\ 500$ días $= 12$ años 6 meses.

Rpta.: 4 500 soles y 12 años 6 meses.

13.- Cuatro socios forman un negocio, aportando S/. 560 000, S/. 420 000, S/. 800 000 y S/. 220 000. El negocio, fracasa, y los dos primeros pierden 8 000 soles menos que los dos últimos. ¿Cuánto pierde cada uno?

Solución:

Los primeros invierten:

$$560\ 00 + 420\ 000 = 980\ 000$$

Los últimos invierten:

$$800\ 000 + 220\ 000 = 1\ 020\ 000$$

En consecuencia:

$$1\ 020\ 000 - 980\ 000 = 40\ 000 \text{ soles}$$

dieron una pérdida de 8 000 soles y un sol dio una pérdida de:

$$\frac{8\ 000}{40\ 000} = 0{,}2$$

Luego las pérdidas fueron:

Rpta.:

1ro :	560 000 . 0,2	=	112 000 soles
2do :	420 000 . 0,2	=	84 000 soles
3ro :	800 000 . 0,2	=	160 000 soles
4to :	220 000 . 0,2	=	44 000 soles

14.- Cinco personas invierten los intereses que les produce sus capitales en un negocio que deja S/. 246 000 de utilidad, los tres primeros tenían el mismo capital impuesto al 3 ; 5 y 6% respectivamente; el cuarto y quinto tenían un capital doble de los anteriores, impuesto al 3,5 y 4,5%. ¿Qué beneficios obtuvo cada uno, si los intereses fueron por imposiciones de sus capitales a los dos años por los dos primeros y a los 3 años por los tres últimos?

Solución:

Calculemos los intereses de cada uno que serán capitales en el negocio:

$$I_1 = \frac{C \,.\, 3 \,.\, 2}{1} = 6C$$

$$I_2 = \frac{C \,.\, 5 \,.\, 2}{1} = 10C$$

$$I_3 = \frac{C \,.\, 6 \,.\, 3}{1} = 18C$$

$$I_4 = \frac{2C \,.\, 3{,}5 \,.\, 3}{1} = 21C$$

$$I_5 = \frac{2C \,.\, 4{,}5 \,.\, 3}{1} = 27C$$

Se deberá repartir la utilidad de los 246 000 soles directamente proporcional a los números: 6, 10, 18, 21 y 27 (suma = 82).

Luego las ganancias de cada uno fueron:

$$G_1 = 6 \cdot \frac{246\ 000}{82} = \text{S/. } 18\ 000$$

$$G_2 = 10 \cdot \frac{246\ 000}{82} = \text{S/. } 30\ 000$$

$$G_3 = 18 \cdot \frac{246\ 000}{82} = \text{S/. } 54\ 000$$

$$G_4 = 21 \cdot \frac{246\ 000}{82} = \text{S/. } 63\ 000$$

$$G_5 = 27 \cdot \frac{246\ 000}{82} = \text{S/. } 81\ 000$$

15.- Repartir 2 080 en 3 partes proporcionales a los cubos de 105, 63 y 42.

Solución:

Elevemos cada uno al cubo y descompongamos sus factores.

$$\left\{\begin{array}{l} 105^3 \\ 63^3 \\ 42^3 \end{array}\right. \quad <> \quad \left\{\begin{array}{l} 3^3 \,.\, 5^3 \,.\, 7^3 \\ 3^3 \,.\, 7^3 \,.\, 3^3 \\ 3^3 \,.\, 2^3 \,.\, 7^3 \end{array}\right.$$

Se divide cada uno entre $3^3 \,.\, 7^3$

$$\left\{\begin{array}{l} 5^3 = 125 \\ 3^3 = 27 \\ 2^3 = 8 \end{array}\right.$$

$$\text{suma} = 160$$

Se reparte entonces proporcionalmente a 125, 27 y 8:

1) $\dfrac{2\,080}{160} \cdot 125 = 1\,625$

2) $\dfrac{2\,080}{160} \cdot 27 = 351$

3) $\dfrac{2\,080}{160} \cdot 8 = 104$

Rpta.: 1 625 ; 351 y 104

16.- Si se divide el número 4 488 en 3 partes D.P. a 0,1222… ; 0,3555…. y 0,2111… e inversamente proporcional a las raíces cuadradas de 175 ; 448 y 567. ¿Cuánto es la menor parte?

Solución:

Se transforma convenientemente los números que indican reparto proporcional directo o inverso.

$$0,\overset{\frown}{12} = 11/90 \quad \wedge \quad \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$$

$$0,\overset{\frown}{35} = 32/90 \quad \wedge \quad \sqrt{448} = 8\sqrt{7}$$

$$0,\overset{\frown}{21} = 19/90 \quad \wedge \quad \sqrt{567} = 9\sqrt{7}$$

Efectuando los productos y simplificando por el factor común, luego obtenemos:

$$\frac{11}{90} \cdot \frac{1}{5\sqrt{7}} = \frac{11}{5} = \frac{11}{5} \cdot 5 \,.\, 9 = 99$$

$$\frac{32}{90} \cdot \frac{1}{8\sqrt{7}} = 4 \quad = 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \quad = 180$$

$$\frac{19}{90} \cdot \frac{1}{9\sqrt{7}} = \frac{19}{9} = \frac{19}{9} \cdot 5 \,.\, 9 = 95$$

suma = 374

La menor parte será:

$$x = 4\ 488 \cdot \frac{95}{374} = 1\ 140$$

17.- Un número se reparte en forma directamente proporcional a $\overline{aa}$ y $\overline{aaa}$, correspondiéndole al menor 5,5. Calcular dicho número.

Solución: Sea N el número:

$$N = 5,5 + x$$

Relacionándolos proporcionalmente y luego por descomposición polinómica, se tendrá:

$$\frac{\overline{aa}}{5,5} = \frac{\overline{aaa}}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{11a}{5,5} = \frac{111a}{x}$$

x = 55,5

$\therefore \quad N = 5,5 + 55,5 = 61$

Rpta.: N = 61

18.- Se reparte S/. 10 500 en 3 partes, de tal manera que la primera y la segunda son entre sí como 2 es a 3; y la segunda y la tercera son entre sí como 4 es a 5. Hallar la menor de dichas cantidades.

Solución:

1era	2da	3ra
2	3	
	4	5
8	12	15

Se reparte proporcionalmente a 8, 12 y 15:

La menor será proporcional a 8:

$$x = 10\ 500 \cdot \frac{8}{35} = \text{S/. } 2\ 400$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Descomponer el número 934 en partes I.P. a los cuadrados de 5 ; 1/2 y 3. Indique las partes.

   Rpta.: Las partes son: 9; 900 y 25

2. Dividir 5 950 en tres partes D.P. a las raíces cuadradas de los números 32, 50 y 128. Indicar la mayor de las partes.

   Rpta.: 2 800

3. Dividir 7 956 en tres partes tales que sus raíces cúbicas sean I.P. a 1/4, 1/8 y 1/12. Indicar la diferencia de las dos menores.

   Rpta.: 1 547

4. Se divide el número N en dos partes tales que su suma, la suma de sus cuadrados y la diferencia de éstos sean proporcionales a 1; 170 y 80. Hallar la suma de las cifras de N.

   Rpta.: 5

5. Se reparte una cantidad en forma D.P. a 1 ; 2 y 4. La primera porción sería 242 unidades menor si el reparto se hubiera realizado en forma D.P. a los cuadrados de los números dados. Hallar la cantidad repartida.

   Rpta.: 2 541

6. Un número se reparte en forma directamente proporcional a:

   $\overline{bb}$ y $\overline{bbb}$, correspondiéndole al menor 5,5.

   Calcular dicho número.

   Rpta.: 61

7. Hallar el número que repartido en forma directamente proporcional a los 50 primeros números enteros de para el mayor 8.

   Rpta.: 204

8. Al repartir el número 59 en forma directamente proporcional a 10 números consecutivos, el menor recibe 5. Hallar el mayor de los 10.

   Rpta.: 34/5

9. Si 6 000 se reparte en forma directamente proporcional a los números a, 3a, 5a y 7a. ¿Cuánto le toca al menor?

   Rpta.: 400

10. Si un número se reparte en forma directamente proporcional a 2 y 5 se obtiene para el segundo valor 63 más que si se repartiera de manera inversamente proporcional, a los mismos valores. Hallar el número.

    Rpta.: 147

11. Después de 3 meses que A había fundado una empresa, para lo cual depositó S/. 12 000 000, se asoció con B que aportó 20% menos que A; 2 meses más tarde se les unió C que aportó el 75% de lo que habían depositado A y B. Al cabo de 2 meses liquidaron la empresa y tuvieron que afrontar una pérdida de S/. 774 000. ¿Cuánto tuvo que abonar C para saldar la deuda?

    Rpta.: S/. 162 000

12. Si se reparte S/. 270 000 en forma directamente proporcional a las edades de A, B y C, a A le toca la quinta parte de lo que le tocó a B y a C le toca los 4/5 que a B. Sabiendo que B tiene 10 años, hallar lo que le tocaría a B si la repartición se hiciese 4 años más tarde e inversamente proporcional a las edades de A, B y C en ese tiempo.

    Rpta.: S/. 60 000

13. El gerente de una fábrica reparte S/. 121 000 entre tres de sus mejores empleados, y lo hace tomando en cuenta los años de servicios y las inasistencias que tuvieron en ese lapso. Si los empleados tuvieron 10, 5 y 3 años de servicios y 9 ; 4 y 3 inasistencias respectivamente, hallar la diferencia de lo que le tocó a los empleados de 5 y10 años de servicios, sabiendo que el hecho de que en la repartición tuviesen que ver las inasistencias perjudicó al que tenía 10 años de servicios en dicha fábrica.

    Rpta.: S/. 5 000

14. A inició un negocio; 6 meses después se asoció con B quien aportó el 60% del capital que A había impuesto, 2 meses más tarde se les unió C que aportó el 7 por 8 de lo que A y B habían impuesto en el negocio. Si después de un año de empezado el negocio consiguieron una utilidad de S/. 371 000.

¿Cuál es la utilidad líquida que le corresponderá a C, considerando que tiene que pagar un impuesto a la renta de 4.5%?

Rpta.: S/. 93 590

15. July, Betty y Carmen iniciaron un negocio con capitales proporcionales a 5, 7 y 9 respectivamente y los tiempos que permanecen en el negocio son proporcionales a 2, 5 y 6 respectivamente. Halle la ganancia total obtenida, si la diferencia de las ganancias de Betty y July 750.

Rpta.: S/. 2 970

16. Al repartir 3 562 en parte proporcionales a 42^2, 28^3 y 56^2. ¿Cuál es la mayor diferencia entre las partes obtenidas?

Rpta.: 2 678

17. Tres poblaciones tienen que pagar un impuesto de guerra de 113 982 soles, en partes proporcionales al número de habitantes que tenían después de la guerra y en razón inversa del número de bajas que tuvieran durante la misma. Calcular lo que correspondió pagar a cada población, con los datos siguientes:

Pueblos	α	β	γ
Habitantes	21 600	12 960	8 910
Bajas	510	420	360

Rpta.: S/. 49 280 ; S/. 35 904 y S/. 28 798

18. Descomponer el número 35,1 en 3 sumandos que sean directamente proporcionales a los cuadrados de 2; 3 y 4, e inversamente proporcional a los cubos de 2; 3 y 4.

Rpta.: 16,2 ; 10,8 y 8,1

19. La presión es I.P. al volumen que contiene cierta cantidad de gas. Calcular la presión a la cual se halla un gas si al aumentarla en 2 atmósferas el volumen varía en un 40%.

Rpta.: 3

20. Indicar cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

I. Si una cantidad A es proporcional a B e inversamente proporcional a C, entonces cuando los valores de A no varían, B y C son directamente proporcionales.

II. Si una cantidad A es proporcional al producto de otras dos B y C, entonces B es inversamente proporcional al cociente C/A.

III. Si P varía proporcionalmente a Q entonces

$(P^2 + Q^2)$ es inversamente proporcional a $(P^2 - Q^2)$.

Rpta.: La III

PROMEDIOS, MEZCLAS Y ALEACIONES

PROMEDIOS

Sea la serie monótona ascendente:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < an$$

Se llama **cantidad media o promedio**, a cualquier valor numérico superior al menor (a1) pero inferior al mayor (an).

$$\text{Si P = promedio: } a_1 < P < a_n$$

∴ P puede tomar un número ilimitado de valores; es decir, que en cualquier serie numérica propuesta, la cantidad de promedios es ilimitada.

PRINCIPALES PROMEDIOS ó MEDIAS

Son 3: Media Aritmética "Ma", Media Geométrica "Mg" y Media Armónica "Mh".

Consideremos los números a_1; a_2; a_3 … a_n, con "n" términos, para calcular los promedios Aritmético (**Ma**), Geométrico (**Mg**) y Armónico (**Mh**).

I. Promedio Aritmético (Ma).

Se llama también media aritmética. Es el promedio que se obtiene al dividir la suma de todos los términos entre el número de términos.

Así:

$$\text{Ma("n" términos)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Ejemplo:

Hallar la Ma de 16 ; 14 ; 20 ; 50:

$$\text{Ma} = \frac{16 + 14 + 20 + 50}{4} = 25$$

II. Promedio Geométrico (Mg)

Se llama también media geométrica o proporcional. Es el promedio que se obtiene al extraer la raíz de índice "n" del producto de "n" términos. Así:

$$\text{Mg ("n" términos)} = \sqrt[n]{a^1 \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,.\, \ldots \, a^n}$$

Ejemplo:

Mg de 2; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5

$$\text{Mg} = \sqrt[5]{2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^3 \,.\, 2^4 \,.\, 2^5} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$$

III. Promedio Armónico (Mh).

Se llama también media armónica. Es el promedio que se obtiene al dividir el número "n" de términos, entre la suma de las inversas de los "n" términos. Así :

$$\text{Mh ("n" términos)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar la Mh (a, b)

$$\text{Mh (a, b)} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Nótese que para 2 números la Mh es igual al doble producto de los números entre la suma de los mismos.

PROPIEDADES DE LOS PROMEDIOS

1° Para dos números se cumple que su media geométrica es mayor que la media armónica pero menor que la media aritmética.

$$Mh\,(a,\,b) < Mg\,(a,\,b) < Ma\,(a,\,b)$$

2° Para dos números se cumple que la media geométrica es media proporcional ente la media aritmética y la media armónica.

$$\frac{Ma(a,\,b)}{Mg(a,\,b)} = \frac{Mg\,(a,\,b)}{Mh\,(a,\,b)} \Rightarrow Mg^2\,(a,\,b)$$

$$= Ma(a,\,b)\,.\,Mh\,(a,\,b)$$

$$\Rightarrow Mg\,(a,\,b) = \sqrt{Ma\,(a,\,b)\,.\,Mh\,(a,\,b)}$$

Comprobación:

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{2ab}{a+b}} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\,.\,\frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab}\,\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow a\,.\,b = a\,.\,b$$

3° La media aritmética de toda progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos equidistantes de los extremos o igual al término central, si lo hubiera. Así:

$$Ma(1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,......\,;\,99;\,100)$$

$$= \frac{1+100}{2} = \frac{2+99}{2} = \frac{3+98}{2} = \ldots = 50{,}5$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuál es la media aritmética de 2 números, si su media geométrica es 12 y su media armónica 4?

Solución:

Sabemos que: $Ma\,.\,Mh < > Mg^2$

Reemplazando valores:

$$Ma\,.\,4 = (12)^2 = 144$$

Rpta.: $Ma = 36$

2.- Si la Mh de 2 cantidades es 160 y su Mg es 200. ¿Cuál es su Ma?

Solución:

Sean a y b las cantidades:

$$Mh = \frac{2ab}{a+b} = 160$$

o:

$$\frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{160} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{ab}{160} \qquad (1)$$

pero : $Mg = \sqrt{ab} \Rightarrow ab = Mg^2 = 200^2$

En (1): $\frac{a+b}{2} = \frac{40\,000}{160} = 250 = Ma$

Rpta.: $Ma = 250$

3.- Hallar la suma de la Ma, Mg y Mh de los números 15, 25 y 243.

Solución:

$$Ma = \frac{15+25+243}{3} = 94\,\frac{1}{3} \qquad (\alpha)$$

$$Mh = \frac{3}{\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{243}} = \frac{3}{\frac{405+243+25}{6\,075}}$$

$$Mh = \frac{3\,.\,6\,075}{673} = 27\,\frac{54}{673} \qquad (\beta)$$

$$Mg = \sqrt[3]{15\,.\,25\,.\,243}$$

$$Mg = \sqrt[3]{3\,.\,5\,.\,5^2\,.\,3^5}$$

$$Mg = \sqrt[3]{3^6\,.\,5^3} = 9\,.\,5 = 45 \qquad (\gamma)$$

$$Ma + Mg + Mh = 94\,\frac{1}{3} + 45 + 27\,\frac{54}{673}$$

$$= 166\,\frac{835}{2\,019}$$

Rpta.: $\sum = 166\,\frac{835}{2\,019}$

4.- Si la media armónica entre 2 números enteros es a la media geométrica de los mismos, como 12 es a 13. Hallar dichos número sabiendo que son dígitos.

Solución:

Sean "a" y "b" los dígitos buscados, se cumple:

$$\frac{Mh\,(a,b)}{Mg\,(a,b)} = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}} = \frac{12}{13}$$

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad 26\sqrt{ab} = 12(a+b)$$

$$\Rightarrow \frac{13}{6}\sqrt{ab} = a + b \qquad (1)$$

Por condición, como a y b son dígitos:

$$a + b < 18$$

entonces, de la expresión (1):

$$\frac{13}{6}\sqrt{ab} = \#\ \text{entero} \ < \ 18$$

Se deduce: $\sqrt{ab} = 6$

Los números buscados son 4 y 9 pues son los únicos números cuya raíz cuadrada de su producto es 6 y además los 13/6 de la raíz cuadrada de su producto es igual a la suma de dichos números; según (1).

Rpta.: 4 y 9

5.- El producto de la Ma y la Mh de 2 números más 2 veces su media geométrica, resulta 399. Hallar el producto de los 2 números.

Solución:

Sean m y n los números buscados. Por condición del problema:

$$Ma(m,\,n)\,.\,Mh(m,\,n) + 2\,Mg(m,\,n) <> 399$$

reemplazando el producto de los 2 primeros:

$$Mg^2(m,n) + 2\,Mg(m,n) <> 399$$

$$Mg(m,\,n)\,[Mg(m,\,n) + 2] <> 399$$

En la expresión final se observa que el primer miembro es el producto de dos números que difieren en 2 unidades cuyo producto vale: 399; por lo tanto, ellos sólo pueden ser 19 y 21.

Entonces:

$$Mg(m,\,n) = 19 = \sqrt{m\,.\,n} \Rightarrow m\,.\,n = 19^2 = 361$$

Rpta.: m . n = 361

6.- Si:

$$\sqrt{Ma\,.\,Mg\,.\,Mh} = \sqrt[1,5]{143^{\,2,25}}$$

¿Cuál es el valor de: $S = \dfrac{(Mg)^2}{Ma} : Mh$?

Solución:

Por dato:

$$\sqrt{Ma\,.\,Mg\,.\,Mh} = \sqrt[1,5]{143^{\,2,25}}$$

$$= 143^{\,2,25/1,5} = 143^{\,3/2}$$

$$= \sqrt{143^{\,3}}$$

Por lo tanto:

$$Ma\,.\,Mg\,.\,Mh = 143^3$$

$$Ma\,.\,Mh\,.\,Mg = 143^3$$

osea:

$$Mg^2\,.\,Mg = 143^3$$

$$Mg^3 = 143^3$$

$$Mg = 143 = 11\,.\,13$$

Si: $Mg = \sqrt{Ma\,.\,Mh} = 143$

$\therefore \quad Ma\,.\,Mh = 143\,.\,143$

$$Ma = 143$$

$$Mh = 143$$

Por lo tanto, sustituyendo valores para S:

$$S = \frac{143^2}{143} : 143$$

$$S = \frac{143^2}{143} \cdot \frac{1}{143} = 1$$

Rpta.: S = 1

7.- Si se cumple que: $\dfrac{Mh}{Ma} = 0{,}9375$

Hallar el valor de Mg.

Solución:

Sean los números a y b:

$$\frac{Mh}{Ma} = 0{,}9375 = \frac{15}{16}$$

Esta expresión invertida en función de "a" y "b":

$$\frac{Ma}{Mh} = \frac{16}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{4\,a\,.\,b} = \frac{16}{15}$$

$$\Rightarrow \ (a+b)^2 = \frac{64}{15}\,.\,a\,.\,b \qquad (\alpha)$$

Restando 4a . b a ambos miembros de (α) y efectuando:

$$(a-b)^2 = \frac{4a\,.\,b}{15} \qquad (\beta)$$

(α) : (β):

$$\frac{a+b}{a-b} = 4$$

Para: Ma = 16 y Mh = 15

$$a = 20, \ \ b = 12$$

$$Mg = \sqrt{20\,.\,12} = 4\sqrt{15}$$

Rpta.: $Mg = 4\sqrt{15}$

8.- Si el medio armónico entre dos números es a su medio geométrico como 12 es a 13, encontrar la razón entre los números.

Solución:

Sean "a" y "b" los números buscados. Podemos establecer por dato:

$$\frac{Mh}{Mg} = \frac{\dfrac{2\,a\,.\,b}{a+b}}{\sqrt{a\,.\,b}} = \frac{12}{13}$$

efectuando:

$$6a - 13\sqrt{a\,.\,b} + 6b = 0$$

factorizando:

$$\left(3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right) = 0$$

igualando a cero cada factor se deduce que:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{2}{3} \quad \vee \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2}$$

Rpta.: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{9} \quad \vee \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{4}$

9.- La media geométrica de dos números vale 4 y la media armónica, 32/17. ¿Cuál es el menor de los números?

Solución:

Sean "a" y "b" los números, tenemos por dato:

$$\sqrt{a\,.\,b} = 4 \quad y \quad \frac{2\,a\,.\,b}{a+b} = \frac{32}{17}$$

De estas expresiones se obtiene: $a + b = 17$

y como $a\,.\,b = 16$, se trata pues de lograr dos números cuya suma sea 17 y cuyo producto sea 16, ellos son: 16 y 1.

Rpta.: El menor es 1

10.- Si la media geométrica de 2 números es $10\sqrt{6}$, y su media aritmética y su media armónica son 2 números enteros consecutivos. Hallar el menor de los números.

Solución:

Sean "a" y "b" los números.

$$Mg\,(a, b) = \sqrt{ab} = 10\sqrt{6}$$

$$ab = 600 \qquad (1)$$

$$Mh\,(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = n \qquad (2)$$

$$Ma\,(a, b) = \frac{a+b}{2} = (n+1) \quad (3)$$

De (1) y (2):

$$(a+b)n = 1\,200 \qquad (4)$$

De (3):

$$(a+b) = 2(n+1) \qquad (5)$$

(5) en (4):

$$2(n+1)\,n = 1\,200$$

$$n(n+1) = 600 \rightarrow n = 24$$

$$(n+1) = 25$$

en (2) y (3):

$$a + b = 50 \qquad (6)$$

De (1) y (6):

Los números son: 20 y 30

Rpta.: El número menor es 20

11.- Hallar la media armónica de $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$

Solución:

$$Mh\left(\sqrt{5},\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{5}\,\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$Mh\left(\sqrt{5},\sqrt{3}\right) = \sqrt{15}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

$$= 1{,}96$$

Rpta.: $Mh\left(\sqrt{5},\sqrt{3}\right) = 1{,}96$

12.- Si 12 y 9 3/5 son los medios geométrico y armónico respectivamente, entre dos números. Hallar el menor de los números.

Solución:

Sean a y b los números, entonces por enunciado:

$$Mg\,(a,b) = \sqrt{ab} = 12 \qquad (1)$$

$$Mh\,(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{48}{5} \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2), tenemos:

$$a + b = 30 \qquad (3)$$

$$ab = 144 \qquad (4)$$

De (3) y (4):

$$a = 24 \;\wedge\; b = 6$$

Rpta.: El número menor es 6

13.- La media armónica y geométrica de dos números valen 3,5 y 5 respectivamente. Hallar su media aritmética.

Solución:

Sean "a" y "b" los números, por dato:

$$\frac{2\,a\,.\,b}{a+b} = 3{,}5 \qquad (1)$$

$$\sqrt{a\,.\,b} = 5 \qquad (2)$$

De (2): $a\,.\,b = 25$

sustituyendo en (1) y despejando a + b:

$$a + b = \frac{50}{3{,}5} = \frac{100}{7}$$

$$\therefore\; Ma\,(a,b) = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{100}{7}}{2} = \frac{100}{14} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$$

Rpta.: $Ma\,(a,b) = 7\frac{1}{7}$

14.- En un salón de 60 alumnos la nota promedio de los aprobados es 14, la nota promedio de los desaprobados 08, y la nota promedio del salón 10,5. ¿En qué porcentaje debe incrementarse la nota promedio de los desaprobados, para tener un promedio en el salón de 12,5?

Solución:

$$\text{El promedio del salón} = \frac{\sum 60 \text{ notas}}{60} = 10{,}5$$

$$\therefore \quad \sum 60 \text{ notas} = 60\,.\,10{,}5 = 630 \qquad (1)$$

Consideremos que el número de aprobados sea "n" entonces el número de desaprobados será (60 - n). Por otro lado, se cumple que:

$$14(n) + 8(60 - n) = 630 \Rightarrow n = 25$$

$\therefore$ aprobados: 25

desaprobados: 35

Suma de notas de los aprobados:

$$14(25) = 350$$

Suma de notas de los desaprobados:

$$8(35) = 280 \qquad (2)$$

Ahora para el nuevo promedio:

$$\frac{\sum \text{de 60 notas}}{60} = 12{,}5$$

$\sum$ de 60 notas = 12,5 . 60 = 750

entonces la expresión (2) debe aumentar en:

$$750 - 630 = 120$$

280 ——— 100 %

120 ——— x

$$x = \frac{120 \,.\, 100}{280}$$

Rpta.: x = 42,85%

15.- Hace 10 años la media geométrica de tu edad y la mía era 10 años. Hallar la media armónica de nuestras edades actuales.

Solución:

Hace 10 años:

"a" mi edad y "b" tu edad

Por dato: $\sqrt{a \,.\, b} = 10$

$$a \,.\, b = 100 \qquad (1)$$

Actualmente, mi edad: (a + 10); tu edad :(b + 10)

Actualmente, la Mh de nuestras edades:

$$Mh = \frac{2(a + 10)\,(b + 10)}{(a + 10) + (b + 10)}$$

$$Mh = \frac{2\,(a \,.\, b + 10a + 10b + 100)}{a + b + 20}$$

Pero por (1), a . b = 100

luego:

$$Mh = \frac{2[(100 + 100 + 10\,(a + b)]}{(a + b) + 20}$$

$$Mh = \frac{400 + 20\,(a + b)}{(a + b) + 20}$$

$$Mh = \frac{20\,[20 + (a + b)]}{[(a + b) + 20]} = 20$$

Rpta.: Mh = 20

16.- En un salón de 45 alumnos los resultados de la prueba de rapidez fueron:

10 alumnos contestaron 5 buenas

10 alumnos contestaron 4 buenas

15 alumnos contestaron 3 buenas

10 alumnos contestaron 2 buenas

¿Cuál es el promedio de preguntas buenas del salón?

Solución:

Total de alumnos 45

Total de preguntas contestadas buenas:

$$10 \,.\, 5 + 10 \,.\, 4 + 15 \,.\, 3 + 10 \,.\, 2 = 155$$

$$\text{Promedio} = \frac{155}{45} = \frac{31}{9} = 3\,\frac{4}{9}$$

Rpta.: 3 4/9

17.- En un salón de "x" personas se determinó que el promedio de las edades de los hombres era "m" años, y de las mujeres "n" años.

Hallar la relación del número de hombres respecto al total, si el promedio de edad de las “x” personas es “y” años.

Solución:

Suma de todas las edades: $x \cdot y$

$$h = \# \text{ de hombres}$$

entonces:

$$x - h = \# \text{ de mujeres}$$

Suma de las edades de los hombres: hm

Suma de las edades de las mujeres: $(x - h)\, n$

Entonces la suma de las edades de los hombres y mujeres será:

$$h \cdot m + (x - h)n = x \cdot y$$

De donde:

$$h = \frac{x(y - n)}{m - n}$$

Relación pedida:

$$\frac{h}{x} = \frac{\dfrac{x(y - n)}{m - n}}{x}$$

Rpta.: $\dfrac{h}{x} = \dfrac{y - n}{m - n}$

18.- En una clase se observa que: P alumnos tienen R de promedio; que R alumnos tienen P de promedio, y que 2 alumnos no asistieron al examen. Hallar el promedio de la clase.

Solución:

Suma de las notas de los P alumnos: PR

Suma de las notas de los R alumnos: PR

Suma de las notas de los 2 alumnos que no asistieron: 0

∴ Promedio de la clase:

$$\frac{P \cdot R + P \cdot R + 0}{P + R + 2} = \frac{2\, P \cdot R}{P + R + 2}$$

19.- La Mg de dos números vale 4 y la media armónica 32/17. ¿Cuál es el menor de los números?

Solución:

Por dato:

$$Mg\,(a, b) = \sqrt{a \cdot b} = 4 \qquad (1)$$

$$Mh\,(a, b) = \frac{2\, a \cdot b}{a + b} = \frac{32}{17} \qquad (2)$$

De (1) y (2), tenemos:

$$ab = 16 \quad \wedge \quad a + b = 17 \quad \Leftrightarrow \quad a = 16 \qquad b = 1$$

Rpta.: El menor es 1

20.- Hallar la media armónica de la siguiente serie: 2, 6, 12, 20, 30, … , 600

Solución:

Recordemos que para calcular la Mh, debemos tomar las inversas de los elementos de la serie osea:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots, \frac{1}{600}$$

que también se puede escribir como:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right),$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), \ldots, \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right)$$

donde se observa que la serie tiene 24 términos, entonces:

$$Mh = \frac{1}{\dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right)}{24}}$$

$$Mh = \frac{24}{1 - \dfrac{1}{25}} = \frac{24}{\dfrac{24}{25}} = 25$$

Rpta.: Mh = 25

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La **Ma** de la media proporcional de los números 5 y 45 y la **Mg** de los números 108 y 12 es:

   a) 25,50 b) 20,50 c) 25

   d) 20 e) 26

2. La **Mg** de 30 números es 72 y de otros 60 números es 36. ¿Cuál será la **Mg** de los 90 números?

   a) $36\sqrt{4}$ b) $36\sqrt[3]{2}$ c) $36\sqrt[3]{9}$

   d) $18\sqrt[3]{9}$ e) Ninguno anterior

3. Si Mh (a, b) = 5; Mg (a, b) = 3,5 , Hallar Ma (a, b)

   a) 2,45 b) 2,55 c) 1,45

   d) 2,1 e) 1,85

4. Si: Mg (a, b) = K (Mh(a, b)). Si: a = 9b. Hallar K.

   a) 2 b) 1,5 c) 1,7

   d) 1,6 e) $3,\widehat{3}$

5. Dos números son entre sí como su **Ma** es a su **Mh**. Calcular la diferencia entre los cuadrados de esos números.

   a) 0 b) 1 c) 2

   d) 4 e) 16

6. Si al producto de la **Ma** . **Mh**, de 2 números se le agrega el doble de la **Mg** y a ésto se le suma 1, se obtiene 400. Hallar el producto de los números.

   a) 400 b) 361 c) 144

   d) 324 e) 100

7. El promedio de las notas de un grupo de 10 alumnos es 75. Si ninguna nota es menor que 73. ¿Cuál es la máxima nota que puede tener uno de ellos?

   a) 93 b) 102 c) 84

   d) 94 e) 103

8. La MA de "n" números es 50. Si se suprimen todos los 18 que son en total "x" la $\overline{\text{MA}}$ aumenta en x unidades.

   Halle "n" si este número es a "x" como 11 es a 3.

   a) 44 b) 40 c) 41

   d) 43 e) 46

9. Si la media geométrica de dos números es $10\sqrt{6}$ y su media aritmética y su media armónica son dos números enteros consecutivos.

   Hallar el menor de los números.

   a) 10 b) 15 c) 20

   d) 30 e) 40

10. Hallar la **Mg** de todos los números capicúas de 2 cifras.

    a) 99^3 b) $\sqrt[9]{99}$ c) $\sqrt[9]{(9!)\,.\,11}$

    d) $11\sqrt[9]{9!}$ e) $\sqrt{9!}$

11. La media armónica de dos números naturales diferentes es:

    a) Inferior a la media aritmética pero superior a la geométrica.

    b) Inferior a la media geométrica pero superior a la aritmética.

    c) Superior a las medias geométrica y aritmética.

    d) Inferior a las medias geométrica y aritmética.

    e) Ninguna de las anteriores.

12. La media armónica de dos números pares consecutivos es 4,8. Calcule la suma de los números.

a) 20 b) 14 c) 18

d) 16 e) 10

13. El promedio de las edades de cinco personas es 32 años. Si se retiran dos de ellos, el nuevo promedio es 28 años. Hallar la suma de las edades de las personas que se retiran.

a) 26 b) 76 c) 70

d) 84 e) 72

14. Hallar el promedio de 5 números sabiendo que la media de los dos primeros es 12, la media geométrica de los otros dos es 6, siendo uno de ellos el cuádruple del otro y el último es la media de los cuatro anteriores.

a) 8,25 b) 9,75 c) 8,75

d) 9,25 e) N.A.

15. La media aritmética de dos números es inferior en 9 unidades al mayor de los 2 números y la media geométrica es el doble del menor de los 2 números. Hallar la media armónica de dichos números.

a) 9,6 b) 13,3 c) 10,2

d) 16,8 e) N.A.

16. Cuatro personas suman sus edades y obtienen 287. El promedio de edades de las dos mayores es 85,5. Si las edades de las menores se diferencian en dos años, la menor tiene:

a) 60 b) 59 c) 58

d) 57 e) 56

17. En un aula de 40 alumnos el promedio de los 10 aprobados es 14. Hallar el promedio de los desaprobados si el promedio de la clase es 08.

a) 2 b) 4 c) 6

d) 8 e) 10

18. La **Ma** de 100 números consecutivos es 69,5. Hallar el número menor.

a) 16 b) 19 c) 20

d) 25 e) 30

19. La **Ma** de los cuadrados de 2 números consecutivos es 240,5. Hallar el menor.

a) 12 b) 13 c) 14

d) 15 e) 18

20. La **Mh** de 20 números es 18 y la **Mh** de otros 30 números es 54. Hallar la **Mh** de los 50 números.

a) 30 b) 25 c) 42

d) 28 e) 16,5

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) B	3) A	4) E	5) A
6) B	7) A	8) A	9) C	10) D
11) D	12) E	13) B	14) B	15) A
16) D	17) C	18) B	19) D	20) A

MEZCLAS Y ALEACIONES

Se llama mezcla a la unión de varias sustancias susceptibles de unirse en proporciones cualquiera, conservando cada una su propia naturaleza.

En las mezclas, como las sustancias mezcladas conservan su propia naturaleza, se deduce el siguiente principio: La cantidad de mezcla es igual a la suma de las cantidades mezcladas.

Este principio es el que sirve para establecer las ecuaciones fundamentales de la REGLA DE MEZCLA.

En el caso de mezcla de metales, ésta se hace mediante la fundición y a esta mezcla se llama "aleación".

REGLA DE MEZCLA

DEFINICIÓN

Es el procedimiento de cálculo usado en la resolución de problemas relativos a mezclas y aleaciones.

Esta regla tiene su fundamento en el hecho de que en el comercio se acostumbra a "mezclar" diversas clases de mercadería con el objeto de poder venderlas a un precio intermedio o medio.

Se llama precio de una mercadería al costo de su unidad y valor al costo total de la mercadería.

Ejemplo:

8 kilos de café cuestan 320 soles. Entonces el precio es S/. 40 y su valor S/. 320.

La regla de mezcla resuelve los 2 tipos de problemas de mezcla: 1° el precio medio de la mezcla y 2° la cantidad de cada uno de los ingredientes.

1° El PROBLEMA DIRECTO

Consiste en hallar el precio medio de una mezcla, conociendo las cantidades mezcladas y los precios respectivos.

CÁLCULO DEL PRECIO MEDIO.-

Se obtiene dividiendo el valor total de la mezcla entre el número de unidades de la mezcla.

Consideremos una mezcla en la que los ingredientes son: "a" litros cuyo precio unitario S/. P_1 , "b" litros de precio S/. P_2 y "c" litros de precio S/. P_3. Podemos establecer:

"a" litros de precio S/. P_1 vale S/. aP_1

"b" litros de precio S/. P_2 vale S/. bP_2

"c" litros de precio S/. P_3 vale S/. cP_3

El importe total de la mezcla será:

$$S/.\ (a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3)$$

y el número de los litros de la mezcla es:

a + b + c. Luego el precio medio (P_m) que resulta para cada litro de mezcla (precio de costo) es:

$$Pm = \frac{(a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3)}{a + b + c}$$

2° El PROBLEMA INVERSO

Consiste en determinar las cantidades de cada uno de los ingredientes que intervienen en la mezcla, conociendo el precio medio de la mezcla y los precios de los ingredientes.

El precio medio de la mezcla está siempre comprendido entre el menor y el mayor de los precios de las sustancias mezcladas.

Según ésto podemos establecer:

Sean C_1 y C_2 dos cantidades y P_1 el precio mayor correspondiente a la primera; P_o el precio menor y P_m el precio medio de la mezcla. Para que el problema sea posible se ha de tener:

$$P_o < P_m < P_1$$

Al vender C_1 unidades al P_m se pierde:

$$C_1 (P_1 - P_m) \text{ soles}$$

Al vender C_2 unidades al P_m se gana:

$$C_1 (P_m - P_o) \text{ soles}$$

Debiendo ser la ganancia igual a la pérdida, se tendrá:

$$C_1 (P_1 - P_m) = C_2 (P_m - P_o)$$

De donde se plantea la proporción:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_m - P_o}{P_1 - P_m}$$

Esta fórmula nos indica justamente la proporción en la que los ingredientes intervienen en la mezcla.

El problema se resuelve fácilmente aplicando la regla de reparto proporcional cuando se conoce una de las cantidades que se ha de mezclar o el total de ambas.

Nota.-

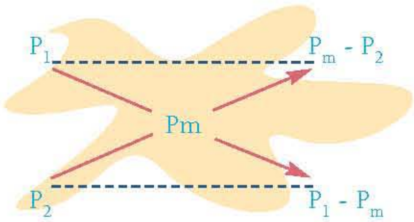
1. Se puede apreciar que la fórmula de mezcla inversa se ha deducido cuando en la mezcla intervienen 2 ingredientes, si en el problema intervienen más de dos ingredientes, la fórmula se aplicará las veces que sea necesaria, como veremos más adelante en la solución del problema.
2. Para que el problema de mezcla inversa sea determinado, se debe tener la relación en la que los ingredientes intervienen en la mezcla porque de lo contrario el problema sería indeterminado.

Los problemas de mezcla inversa, son resueltos aplicando un método práctico llamado: Método del Aspa (que puede ser aspa simple si en el problema intervienen dos ingredientes, o aspa compuesta si en el problema intervienen más de dos ingredientes).

METODO DEL ASPA SIMPLE

Se aplica cuando intervienen dos ingredientes y consiste en trazar un aspa, al centro del mismo se coloca el precio medio, en los extremos de la izquierda se coloca los precios de los ingredientes; a la derecha se resta los valores que están en la misma.

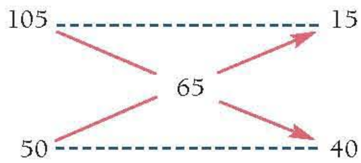
Los valores obtenidos indican la relación en la que intervienen los ingredientes cuyos precios están en la misma horizontal que las diferencias.



Ejemplo:

Se hace una mezcla de vinos de S/. 105 y S/. 50 el litro, se sabe que la mezcla total es de 220 litros y el precio medio S/. 65. ¿Cuántos litros de cada clase posee la mezcla?

Solución:



Total 55

De cada 55 litros de mezcla, 15 litros son de S/.105 el litro. Para una mezcla de 220 litros se requieren:

$$\frac{220 \,.\, 15}{55} = 60 \text{ litros de S/. 105 el litro, y}$$

$$220 - 60 = 160 \text{ litros de S/. 50 el litro.}$$

Observación:

Cuando en el problema intervengan más de dos ingredientes, se aplicará varias aspas simples o una disposición práctica como observaremos más adelante.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Un comerciante adquirió tres partidas de garbanzos: una de 6 sacos de 100 kg cada uno que vale S/. 3 000, otra de 220 kilogramos que vale S/. 294 y otra de 520 kilogramos que le costó S/. 3,90 el kilo. Mezclado todo y después de tenerlo almacenado durante 4 meses, decide vender toda la mezcla. ¿A cuánto tiene que vender el kilogramo de la mezcla para ganar un 25% contando con que el grano durante su almacenamiento tuvo una merma en su peso del 5%?

Solución:

Primera partida	600 kg	valor	S/. 3 000
Segunda partida	220 kg	valor	S/. 294
Tercera partida	520 kg	valor	S/. 2 028
Peso total de la mezcla:	1 340 kg	costo total:	S/. 5 322

Teniendo en cuenta una merma del 5% los 1 340 kg se redujeron a:

$$1\,340 - \left(\frac{5}{100} \cdot 1\,340\right) = 1\,273 \text{ kg}$$

Como se quiere ganar el 25%, los 1 273 kg hay que venderlos en:

$$5\,322 + \frac{25}{100} \cdot 5\,322 = \text{S/. } 6\,652{,}5$$

Para ello hay que vender el kilogramo a:

$$6\,652{,}5 \;:\; 1\,273 = \text{S/. } 5{,}22$$

Rpta.: S/. 5,22 es el precio por kg.

2.- Añadiendo al vino puro una décima parte de su volumen de agua, ha resultado el litro de la mezcla a S/. 2,50. ¿Cuál es el precio del litro de vino puro?

Solución:

Se deduce que de cada 11 litros de mezcla, 10 son de vino puro.

Cada 11 litros de la mezcla vale:

$$11 \,.\, 2{,}50 = \text{S/. } 27{,}50$$

(este valor representa el valor de 10 litros de vino puro, ya que el agua se considera carente de valor).

Por lo tanto el precio de un litro de vino puro es:

$$27{,}50 \;:\; 10 = \text{S/. } 2{,}75$$

Rpta.: El litro de vino puro costó S/. 2,75

3.- ¿En qué relación es necesario mezclar 2 calidades de harina cuyos valores son: una S/. 87 y la otra S/. 83,50 el saco de 100 kg cada uno, para obtener pan a S/. 0,88 el kilogramo. Se sabe que 100 kilogramos de esta mezcla de harina da 125 kilogramos de pan y que para la horneada de 100 kilogramos de pan los gastos de mano de obra y cocción se elevan a S/. 20?

Solución:

Costo de mano de obra de cocción de 125 kilogramos de pan:

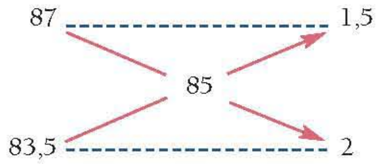
$$\frac{125 \,.\, 20}{100} = \text{S/. } 25$$

Valor de 125 kg de pan:

$$125 \,.\, 0{,}88 = \text{S/. } 110$$

Costo de 100 kg de mezcla:

$$110 - 25 = \text{S/. } 85$$



Rpta.: Es necesario 4 kg de harina menos cara por cada 3 kg de la otra. Es decir 2 es a 1,5.

4.- Un lechero hace una mezcla de leche para repartir a sus clientes. Si el precio medio de la venta es un cuadrado perfecto y quiere obtener un beneficio del 10% del costo sabiendo que para la mezcla usó 20 litros de leche de S/. 12 por litro, 15 litros de leche de S/. 8 por litro y agua. Calcular la cantidad de agua en la mezcla si ésta no puede ser mayor de 20 litros.

Solución:

Sea Pm = precio medio de la venta y
a = cantidad de agua

Podemos establecer:

$$Pm = \frac{(20 \,.\, 12 + 15 \,.\, 8) \,.\, 110/100}{35 + a}$$

$$Pm = \frac{36 \,.\, 11}{35 + a}$$

Como Pm debe ser K^2 y como:

$$Pm = \frac{6^2 \,.\, 11}{35 + a} \quad \text{se deduce:}$$

para que 35 + a sea un m11 . k^2, “a” tiene que ser 9, ya que:

$$Pm = \frac{6^2 \,.\, 11}{2^2 \,.\, 11} \quad \text{es un } K^2 \text{, por lo tanto:}$$

Rpta.: La mezcla contiene 9 L de agua.

5.- Se mezcla 3 clases de arroz de S/. 12, S/. 14 y S/. 18 el kg, en las siguientes proporciones: 20 kg del primero; 25 kg del segundo y 35 kg del tercero. Calcular el precio de la mezcla si sufre una pérdida del 5% sobre la suma de las cantidades mezcladas y se quiere obtener una ganancia del 15% sobre el costo de la mezcla.

Solución:

Cálculo del precio medio (Pm)

$$Pm = \frac{20 \,.\, 12 + 25 \,.\, 14 + 35 \,.\, 18}{80} \qquad (1)$$

Pérdida 5% de Pm (5/100); ganancia = 15% de Pm (115/100), estos valores en (1):

Pm de la mezcla:

$$\left[\frac{20 \,.\, 12 + 25 \,.\, 14 + 35 \,.\, 18}{80}\right]\frac{115/100}{95/100}$$

Rpta.: Precio de la mezcla: S/. 18,46

6.- Un litro de una solución de ácido en agua contiene 60 g de ácido. ¿Qué volumen de agua debe agregarse para encontrar 5 gramos de ácido en cada cuarto de litro?

Solución:

Primero diremos que si deseamos que en 1/4 de L haya 5 g de ácido, en 1 L deberá haber 20 g de ácido. Pero actualmente:

60 g de ácido hay en 1 L H_2O

Ahora:

20 g de ácido hay en 1 L

60 g de ———————— x

x = 3 L

$\therefore$ Se debe aumentar 3 - 1 = 2 litros de H_2O

Rpta.: 2 L de agua.

7.- Se compró damajuanas (recipientes o garrafas para vino) que contenían 5 números consecutivos de litros de vino, con precios: 400, 300, 200, 300 y 400 el litro, respectivamente; al mezclar los contenidos se vendió el litro ganando el 30%. ¿Cuál fue el precio de venta?

Solución:

Sean los 5 números consecutivos:

$$(n - 2), (n - 1), n, (n + 1), (n + 2)$$

Sea:

$$Pm = \frac{P_T}{(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2)}$$

$$Pm = \frac{P_T}{5n} \qquad (1)$$

donde P_T : Precio total de la mezcla; es decir:

$$P_T = (n - 2)(400) + (n - 1)(300) + n(200) + (n + 1)(300) + (n + 2)(400)$$

$$P_T = 1\,600\ n$$

reemplazando en (1):

$$Pm = \frac{1\,600n}{5n} = S/.\ 320$$

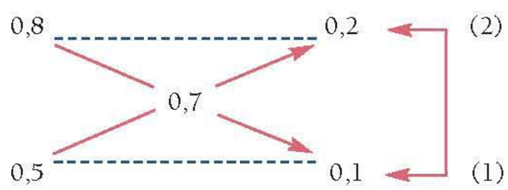
Para ganar 30% debe venderse:

$$Pv = \frac{130}{100} \cdot 320 = S/.\ 416$$

Rpta.: Pv = S/. 416

8.- Se desea obtener 420 kg de un líquido cuya densidad es 0,7 mezclando 2 líquidos cuyas densidades son: 0,5 y 0,8 ¿Qué peso de este último se debe emplear?

Solución:



Sabiendo que P = V . d:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(2)\ (0,8)}{(1)\ (0,5)}$$

$P_1 + P_2 = 420$

$P_1 \;\alpha\; (2)\,(0{,}8) = \;1{,}6 \;\rightarrow\; 16$

$P_2 \;\alpha\; (1)\,(0{,}5) = \;0{,}5 \;\rightarrow\; 5$

Total: 21

$$P_1 = \frac{420}{21} \cdot 16 = 320 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{420}{21} \cdot 5 = 100 \text{ kg}$$

Rpta.: 100 kg

ALEACIÓN

Es una mezcla en la cual los ingredientes son metales. Para alear dos metales deben fundirse, y en estado líquido quedan mezclados.

AMALGAMA.- Es un aleación en la cual uno de los ingredientes es mercurio.

METAL FINO.- Se llama así a los metales preciosos puros, de alto costo, como el oro, plata, platino, etc.

METAL ORDINARIO.- Se llama metales ordinarios, vasto o liga, a los metales no preciosos que intervienen en las aleaciones como el cobre, níquel, etc.

LEY DE ALEACIÓN.- Se llama así a la relación (cociente) que hay entre el peso del metal fino puro, y el peso total de la aleación.

Si: L = ley, F = peso del metal fino puro y P = peso total de la aleación :

$$L = \frac{F}{P} \qquad (1)$$

Así cuando se dice que un objeto es de plata de ley 925 milésimos fino, indica que por cada 1 000 partes en el peso de la aleación, 925 son de plata pura y 75 partes son de metal ordinario.

Sólo tienen ley los metales finos. Los metales ordinarios tienen ley igual a cero.

Nota:

La ley de una aleación es menor o igual a 1. (Sólo será igual a 1 cuando se trata de metal fino puro).

LEY DE LOS METALES FINOS EN KILATES:

La ley, sobre todo la del oro, suele expresarse en kilates. En el caso del oro, cada kilate representa 1/24 de oro del peso total de aleación.

Así, si una sortija de oro es de 18 kilates, significa que en 24 partes, por peso, 18 son de oro y 6 son del otro metal de la liga.

Conocida la ley en kilates, para expresarla en milésimas, no hay más que dividir el número de kilates entre 24.

$$L = \frac{\text{Nº de kilates}}{24}$$

Ejemplo:

¿De cuántas milésimas es el oro de 18 k?

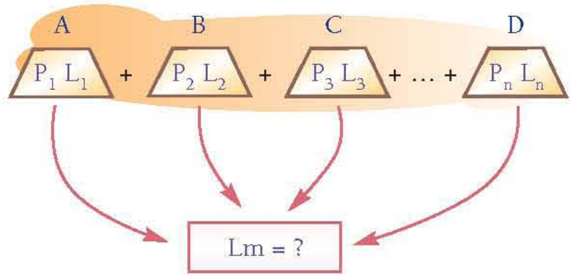
$$L = \frac{18}{24} = 0{,}750 \text{ milésimas}$$

Siendo la aleación una mezcla, se generarán los mismos tipos de problemas de mezcla.

EL PROBLEMA DIRECTO

Consiste en calcular la ley resultante, al fundir dos o más lingotes de leyes y pesos diferentes.

Consideremos los lingotes "A", "B", "C", ... "N" y cuyos pesos y leyes respectivamente son: $P_1, L_1, P_2, L_2, P_3, L_3, \ldots, P_n, L_n$. Se desea calcular la ley de la aleación resultante al fundir todos estos lingotes (Lm).



Pero :

$$Lm = \frac{\text{peso total del metal fino puro (Ft)}}{\text{peso total de la aleación (Pt)}} \qquad (1)$$

$$Ft = P_1 \,.\, L_1 + P_2 \,.\, L_2 + P_3 \,.\, L_3 + \ldots + P_n \,.\, L_n \quad (2)$$

$$Pt = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n \quad (3)$$

(2) y (3) en (1):

$$Lm = \frac{P_1 \,.\, L_1 + P_2 \,.\, L_2 + P_3 \,.\, L_3 + \ldots + P_n \,.\, L_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}$$

EL PROBLEMA INVERSO

Se puede aplicar la misma fórmula de mezcla inversa o el método del aspa, sólo que en vez de utilizar precios, aquí se utilizará leyes.

Al aplicar el método del aspa conviene recordar que sólo tienen ley los metales preciosos: la ley es 1 cuando toda la aleación está formada por metal fino puro. Si el metal no es precioso, su ley es cero.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Se funde un lingote de oro de 640 g y 0,800 de ley con otro de 720 g. Si la ley de la aleación resultante es 0,750. ¿Cuál es la ley del segundo lingote?

Solución:

Los datos son:

$$1 \begin{cases} P_1 = 640 \text{ g} \\ L_1 = 0{,}800 \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} P_2 = 720 \text{ g} \\ L_2 = \ ? \end{cases}$$

$$Lm = \frac{P_1 \,.\, L_1 + P_2 \,.\, L_2}{P_1 + P_2}$$

Reemplazando datos:

$$0{,}750 = \frac{0{,}800 \,.\, 640 + L_2 \,.\, 720}{1\,360}$$

$\therefore L_2 = 0{,}7055$

Rpta.: L2 = 0,706

2.- Dados dos lingotes de oro de ley 0,95 y 0,75. ¿Cómo han de amalgamarse para obtener 570 gramos de ley 0,89?

Solución:

Usando el método del aspa simple:

Peso	Leyes			Proporcionalidad
x	95		14	→ 7
		89		
y	75		6	→ 3

$$x + y = 570 \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{3} \quad (2)$$

De (1) y (2):

Rpta.: x = 399 g de ley 0,95
y = 171 g de ley 0,75

3.- Se funden 4 cucharas de plata de ley 0,750. Sabiendo que cada una pesa 170 gramos. ¿Qué peso de plata pura habrá que agregar para obtener una aleación de ley 0,90000?

Solución:

Ley de la plata pura = 1

Peso total de las 4 cucharas (W_{tc}): 170 . 4 = 680 g

peso de la plata pura (W_{pp}) = ?

1		0,150 →	15 →	3
	0,900			
0,750		0,100 →	10 →	2

$$\frac{W_{pp}}{3} = \frac{W_{tc}}{2}$$

$$W_{pp} = \frac{3.W_{tc}}{2} = \frac{3{,}680}{2} = 1\,020 \text{ g}$$

Rpta.: Se debe agregar 1 020 g de plata pura.

4.- Hallar la ley de una aleación de oro y cobre de densidad 14; sabiendo que la densidad del oro es 19 y la del cobre 9.

Solución:

Usando el método del aspa:

$$D_{au} = 19\ \frac{g}{cm^3}\ ;\ D_{cu} = \frac{g}{cm^3}$$

Pesos en 1 cm^3:

$$\begin{array}{lcccc} x \ \text{——} & 19 & & 5 & \rightarrow\ 1 \\ & & 14 & & \\ y \ \text{——} & 9 & & 5 & \rightarrow\ 1 \end{array}$$

Esto quiere decir que deben entrar volúmenes iguales de oro y cobre.

Relación de pesos:

Oro : 19 . 1 = 19 g

Cu : 9 . 1 = 9 g

$$\begin{array}{lcr} \text{oro} & \rightarrow & 19 \\ \text{cobr} & \rightarrow & 9 \\ \hline & & 28 \end{array}$$

$$\text{Ley} = \frac{19}{28} = 0{,}678$$

Rpta.: Ley 0,678

5.- La corona de la reina de Inglaterra pesa 4 484 gramos. Si cuando se sumerge en el agua experimenta una aparente pérdida de peso de 280 gramos y se sabe que el oro experimenta una aparente pérdida de peso en el agua de 5,2% de su peso y la plata pierde 9,5%; determinar el peso de oro y plata de la corona.

Solución:

En el aire:

Peso de oro + peso de plata = 4 484 (1)

Peso de la corona en el agua:

4 484 - 280 = 4 204 (2)

En el agua:

94,8% (peso de oro)
+ 90,5% (peso de plata) = 4 204 (3)

Esto es:

94,8% (peso corona - peso plata)
+ 90,5% (peso plata) = 4 204

94,8% peso corona - 94,8% peso plata
+ 90,5% (peso plata) = 4 204

4 250,83 - 4,3% peso plata = 4 204

de donde:

$$\text{peso plata} = \frac{46{,}83.100}{4{,}3} = 1\ 089{,}1$$

Rpta.: Peso de plata : 1 089,1 g
Peso del oro : 3 394,9 g

6.- Se tiene 5 barras de oro de ley 0,530; 0,610; 0,710; 0,850 y 0,900 respectivamente. ¿En qué proporciones debe hacerse la aleación para que resulte una barra de 125 kg y de ley 0,70?

Solución:

Aplicando regla del aspa donde C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, son las cantidades a tomarse de cada lingote, entonces:

$$\begin{array}{ll} C_1 & \left\{\begin{array}{lll} 0{,}900 & 0{,}170 & \ldots\ 17 \\ 0{,}850 & 0{,}170 & \ldots\ 17 \\ 0{,}710 & 0{,}090 & \ldots\ \ 9 \end{array}\right. \\ C_2 & \\ C_3 & \end{array}$$

0,700

$$\begin{array}{ll} C_4 & \left\{\begin{array}{l} 0{,}610 \\ 0{,}530 \\ 0{,}530 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} 0{,}010 & \ldots\ \ 1 \\ 0{,}150 & \ldots\ 15 \\ 0{,}200 & \ldots\ 20 \end{array}\right. \\ C_5 & \\ C_6 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\frac{C_1}{17} = \frac{C_2}{17} = \frac{C_3}{9} = \frac{C_4}{1} = \frac{C_5}{35}$$

como:

$$\frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5}{17\ .\ 2 + 9 + 1 + 35}$$

$$= \frac{C_1}{17} = \frac{C_2}{17} = \frac{C_3}{9} = \frac{C_4}{1} = \frac{C_5}{35}$$

Por dato:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 125$$

Rpta.: $C_1 = 26{,}89$ $\quad C_2 = 26{,}89$

$C_3 = 14{,}24$ $\quad C_4 = 1{,}58$

$C_5 = 55{,}37$

7.- Se hace una aleación de dos metales de pesos W_1 y W_2, de leyes L_1 y L_2. Si la aleación tiene como ley "L", hallar la relación de los pesos si $L_1 < L_2$.

Solución:

$$W_1 + W_2 = \text{peso de la aleación} \qquad (1)$$

Ley de la aleación:

$$L = \frac{W_1 \,.\, L_1 + W_2 \,.\, L_2}{W_1 + W_2}$$

$$(W_1 + W_2)\, L = W_1\, L_1 + W_2\, L_2$$

y como : $L_1 < L_2$

Efectuando, transponiendo y factorizando:

$$W_1\, (L - L_1) = W_2\, (L_2 - L)$$

de aquí:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_2 - L}{L - L_1}$$

Rpta.: $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{L - L_1}{L_2 - L}$

8.- Un joyero fundió oro de 12; 18 y 20 kilates con oro de 24 kilates para obtener 88 gramos oro de 22 kilates. ¿Cuál es la mayor cantidad de oro que se fundió y de qué ley?

Solución:

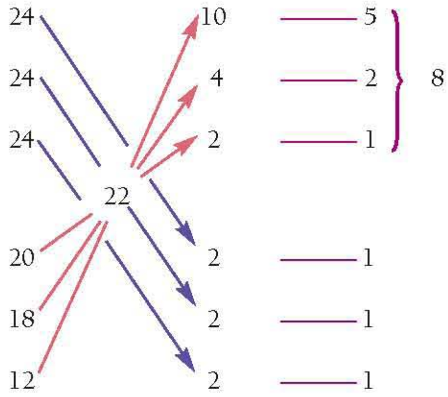
Según las condiciones dadas:

W_1 $\quad$ W_2

$L_1 = 12$ K $\quad$ $L_2 = 18$ K

W_3 $\quad$ W_4

$L_3 = 20$ K $\quad$ $L_4 = 24$ K



$$\frac{W_1}{1} = \frac{W_2}{1} = \frac{W_3}{1} = \frac{W_4}{8}$$

$$= \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{1 + 1 + 1 + 8} = \frac{88}{11} = 8$$

Evidentemente que la mayor cantidad de oro la proporcionará:

$$W_4 = 8 \cdot \frac{88}{11} = 64$$

Rpta.: 64 g de oro puro.

9.- Se tiene tres lingotes de plata y cobre : uno de ley 0,700, otro de 0,820 y otro de 0,900. Se quiere obtener otro lingote de ley 0,850 tomando 720 gramos del segundo y que pese 2 130 gramos. ¿Qué cantidades se precisará de los otros dos lingotes ?

Solución:

(pesos) (leyes . 100) = peso fino puro

x ——— 70 $\longrightarrow$ $70\,x$

720 ——— 82 $\longrightarrow$ $59\,040$

$2\,130 - (720 + x)$ ——— 90 $\longrightarrow$ $126\,900 - 90x$

(Peso total) (ley media . 100) = (fino puro total)

$$2\,130 \,.\, 85 = 181\,050 \qquad (1)$$

Peso fino puro total:

$$70x + 59\,040 + 126\,900 - 90x \qquad (2)$$

Como (1) = (2):

$$x = 244{,}5 \text{ gramos}$$

Rpta.: Peso del 1er. lingote: 244,5 g

Peso del 3er. lingote: 1 165,5 g

10.- Las leyes de 3 lingotes de plata son : 0,9; 0,8 y 0,72. Si se fundiera el primero y el segundo, se obtendría un lingote de 0,84 de ley; y, si se fundiera el segundo y el tercero, se obtendría un lingote de 0,77 de ley.

Determinar el peso del segundo lingote, si se sabe que la suma de los pesos de los 3 lingotes es 10,2 kg.

Solución:

Aplicando aspa en cada caso:

(leyes . 100)

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 90 & & 4 & \rightarrow & 2 & ó & 10 \\ & 84 & & & & & \\ 80 & & 6 & \rightarrow & 3 & ó & 15 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} 80 & & 5 & \rightarrow & ó & 10 \\ & 77 & & & & \\ 72 & & 3 & \rightarrow & ó & 15 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$10\ 200 \left\{\begin{array}{l} 10 \ .\ 300 = \ 3\ 000 \text{ g del 1er lingote} \\ 15 \ .\ 300 = \ 4\ 500 \text{ g del 2do lingote} \\ 9 \ .\ 300 = \ 2\ 700 \text{ g del 3er lingote} \end{array}\right.$$

Total: 34 10 200

nótese que: $300 = \dfrac{10\ 200}{34}$

Rpta.: Peso del 2do. lingote: 4,5 kg

11.- Se tiene tres lingotes de oro y cobre cuyas leyes son 0,700; 0,800 y 0,950. ¿Qué peso debe tomarse de cada uno para tener 4,5 kilos de una aleación cuya ley sea 0,895, sabiendo que lo que toma del primer lingote es, a la parte que se toma del segundo, como 2 a 5?

Solución:

Pesos	Leyes (x 100)	Fino Puro	
2x	70	140x	
5x	80	400x	(1)
(4,5 - 7x)	95	427,5 - 665x	
Peso total	ley media	fino total	
4,5	89,5	4,5 . 89,5	(2)

Se cumple: (1) = (2)

$$140\ x + 400x + 427{,}5 - 665x = 4{,}5\ .\ 89{,}5$$

$$427{,}5 - 125x = 402{,}75$$

$$125\ x = 24{,}75$$

$$x = \frac{24{,}75}{125}$$

"x" en gramos:

$$x = \frac{24{,}75}{125} \cdot 1000 = 198$$

Rpta.: 1° 2x = 396 g

2° 5x = 990 g

3° w = 3 114 g (por diferencia)

12.- Se dispone de varios lingotes, todos ellos de 1 kilogramo de peso y de ley 0,650 y de otra serie de lingotes, también de 1 kg de peso y de ley 0,900. ¿Cuántos lingotes de cada clase hay que tomar, para que al alearlos, se obtenga un lingote de ley 0,750 y cuyo peso esté comprendido entre 30 kg y 40 kg?

Solución:

Sea "x" el peso que se debe tomar de la primera serie.

Sea "y" el peso que se debe tomar de la segunda serie.

Podemos establecer:

$$30 < (x + y) < 40 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & \rightarrow & 650 & & 150 & \rightarrow & 3 \\ & & & 750 & & & \\ y & \rightarrow & 900 & & 100 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x + y}{y} = \frac{3 + 2}{2}$$

$$(x + y) = \frac{5}{2}y \qquad (2)$$

(2) en (1):

$$30 < \frac{5}{2}y < 40$$

$$60 < 5y < 80$$

$$12 < y < 16$$

$$y = 13 ;\ 14 \text{ ó } 15 \qquad (3)$$

Como (x + y) es un número entero; de (3) y (2) se deduce que:

$$y = 14 \ \wedge \ x = \frac{3}{2} \cdot 14 = 21$$

Rpta.: 21 kg de ley 0,650

14 kg de ley 0,900

13.- Tres lingotes de plata cuyas leyes son 0,96; 0,85 y 0,8; son fundidos con una cierta cantidad de metal fino, y se obtiene un lingote de 633 gramos y de ley 0,9. Determinar, el peso del primer lingote, sabiendo que los pesos de los tres primeros lingotes son proporcionales a 4; 5 y 6 respectivamente.

Solución:

Pesos	leyes . 100	Peso fino puro
4x	96	384x
5x	85	425x
6x	80	480x
(633 - 15x)	100	63 300 - 1 500x
Peso total	ley media	Fino total

Fino total:

$$384x + 425x + 480x + 63\,300 - 1500x \qquad (1)$$

$$633 \,.\, 90 = 56970 \qquad (2)$$

Como (1) = (2):

$$63\,300 - 211x = 56\,970$$

$$211x = 6\,330$$

$$x = 30$$

∴ los pesos son:

1er lingote:	4 . 30 = 120 g
2do lingote:	5 . 30 = 150 g
3er lingote:	6 . 30 = 180 g
4to lingote:	633 - 15 . 30 = 183 g

Rpta.: Peso del 1er lingote: 120 g

14.- Según Viturbe, la corona de Hierón, rey de Siracusa, pesaba 7 465 gramos y perdía, al sumergirla en el agua, 467 gramos. Se sabe que el oro pierde en el agua los 0,052 de su peso y que la plata pierde 0,095. Determinar las cantidades de oro y plata que contenía la corona.

Solución:

Sea : W_{oro} = peso del oro,

al sumergirse pierde: $\frac{52}{1\,000} W_{oro}$

queda: $\frac{948}{1\,000} W_{oro}$

Sea: W_{plata} = peso de la plata,

queda: $\frac{905}{1\,000} W_{plata}$

Podemos establecer:

$$W_{oro} + W_{plata} = 7\,465 \qquad (1)$$

Peso de la corona sumergida:

$$7\,465 - 467 = 6\,998 \text{ g} \qquad (2)$$

También:

$$\frac{948}{1\,000} W_{oro} + \frac{905}{1\,000} W_{plata} = 6\,998$$

$$948\, W_{oro} + 905\, W_{plata} = 6\,998\,000 \qquad (3)$$

De (1) y (3) se tiene:

Rpta.: $W_{oro} = 5\,631 \dfrac{42}{43}$ g ; $W_{plata} = 1\,833 \dfrac{1}{43}$ g $\rightarrow$ 7 465 g

15.- Un lingote está compuesto de plata y cobre en la proporción de 9 a 1, este lingote se funde conjuntamente con 1 050 gramos de plata. ¿Cuál era el peso del lingote primitivo, si en la aleación obtenida el peso de plata es al peso del cobre como 975 es a 25?

Solución: Al principio:

$$\frac{\text{Peso de plata}}{\text{Peso de cobre}} = \frac{9}{1}$$

$$\text{Peso de plata} = 9\ .\ \text{Peso de cobre} \qquad (1)$$

Después de fundirse:

$$\frac{\text{Peso de plata} + 1\,050\text{ g}}{\text{Peso de cobre}} = \frac{975}{25} = \frac{39}{1}$$

$$\text{Peso de plata} + 1\,050\text{ g} = 39\ .\ \text{Peso de Cu} \quad (2)$$

Restando (2) - (1) se tiene que:

$$\text{Peso de cobre} = 35\text{ g}$$

$$\therefore \quad \text{Peso de plata} = 315\text{ g}$$

Rpta.: peso total 350 g

16.- A un lingote de plata de 0,850 de ley, se le agrega 2,6 kg de plata pura y se obtiene otro lingote de 0,915 de ley. ¿Cuál era el peso del primer lingote?

Solución:

Sea "x" el peso del primer lingote

$$\begin{array}{ccccc} x & \rightarrow & 0{,}850 & & 0{,}085 \\ & & & 0{,}915 & \\ 2\,600 & \rightarrow & 1 & & 0{,}065 \end{array}$$

$$\frac{x}{2\,600} = \frac{85}{65} \Rightarrow x = 3\,400\text{ g}$$

Rpta.: Peso = 3,4 kg

17.- El peso específico de una joya hecha de oro y plata es 15, y su peso 700 gramos. Hallar la cantidad de oro y plata que contiene, sabiendo que el peso específico del oro es 19,25 y el de la plata, 10,5.

Solución:

x = peso de oro

y = peso de plata

$$x + y = 700 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \rightarrow & 19{,}25 & & 4{,}5 \\ & & & 15 & \\ y & \rightarrow & 10{,}5 & & 4{,}25 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{450}{425} = \frac{18}{17}$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{35}{17} \Rightarrow \frac{700}{y} = \frac{35}{17}$$

$$\therefore \quad y = 340 \ \wedge \ x = 360$$

Rpta.: 340 g de Ag y 360 g de Au

18.- Una aleación con peso 3,75 kg se funde con 5 kg de plata pura y resulta una nueva aleación de 0,835 de ley. Hallar la ley de la aleación primitiva.

Solución:

La nueva aleación posee:

(3,75 + 5) 0,835g = 7,30625kg de Ag pura

La aleación primitiva tenía:

7,30625 - 5 = 2,30625 kg de Ag

y su ley:

$$\frac{2{,}30625}{3{,}75} = 0{,}615$$

Rpta.: Ley = 0,615

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un comerciante mezcló 150 litros de aceite de S/. 3,50 con 200 litros de S/. 2,90. ¿Queriendo obtener un aceite que le salga a S/. 2,75. ¿Cuántos litros de aceite de S/. 2,50 tendrá que añadir a esta mezcla?

   Rpta.: 570 litros.

2. Un bodeguero tiene 160 Hl de vino de 13° de alcohol y cuyo precio es de 275 soles el Hl. Como el precio en el mercado es de 150 soles el Hl. desea determinar la cantidad de agua y espíritu de vino de 86° de alcohol cotizado a 200 soles el Hl que debe añadir a aquellos 160 Hl de vino para venderlos al precio oficial, pero conservando la proporción de alcohol.

   Rpta.: 141,744 Hl de agua.
   25,242 Hl de espíritu de vino.

3. Se realizó la siguiente mezcla: 1 kg de una sustancia de S/. 5 el kg, con 1 kg de una sustancia de S/. 8 el kg; 1kg de S/.11 el kg y asi sucesivamente. ¿Cuántos kg serán necesarios mezclar para obtener una mezcla de S/.29 el kg?

   Rpta.: 17 kg

4. Calcule el precio de venta de una corona de 18 kilates cuyo peso es de 32 gr y sabiendo que se ha pagado S/.30 el gramo de oro puro y S/.5 el gramo del metal ordinario, considerando una utilidad del 20% sobre el costo.

   Rpta.: S/. 912

5. Se mezcla dos clases de café en proporción de uno a dos y la mezcla se vende con el 5% de beneficio. Después se mezcla en proporción inversa de dos a uno y se vende con el 10% de beneficios. Siendo el precio de venta igual en los dos casos, averiguar la relación en la que están los precios de compra de las dos clases.

   Rpta.: $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{20}{23}$

6. Se mezcla 2 barras de plata: 300 gramos de ley 0,900 y 100 gramos de ley 0,800. ¿De cuántos kilates es la aleación resultante?

   Rpta.: 21 kilates.

7. Un joyero tiene 3 barras de plata y cobre de 0,680; 0,830 y 0,920 de ley. Funde las dos primeras en la relación de 2 a 5. Con esta aleación y la tercera barra desea obtener una aleación de 0,870 de ley. Calcular el peso de la segunda barra que entra en la aleación final, si el peso de ésta es 46,500 kg.

   Rpta.: 24,93 kg

8. Se tiene 2 lingotes: uno de 18 kilates y 3 kg de peso; y otro de 2 500 gramos que contiene 4 partes de oro por 1 de cobre. Se desea saber la cantidad de oro que hay que agregar a las barras, contenido en un lingote de 0,600 de ley, para obtener una liga de 0,650 fundiendo las dos nuevas barras.

   Rpta.: 1 350

9. Se tienen dos aleaciones de plata y cobre de distinta ley; mezclando pesos iguales de ambas aleaciones se obtiene otra de ley 0,865 y mezclando cantidades de ambas aleaciones que tengan el mismo peso de cobre se obtiene otra de ley 0,880. ¿Cuál es la ley primitiva de cada una de las aleaciones?

   Rpta.: 0,910 y 0,820

10. Se mezcla 450 gramos de una sustancia de peso específico 0,755 ; 335 gramos de 0,842 y 315 gramos de 0,950. Hallar el peso específico medio de la mezcla, teniendo en cuenta que hay una contracción del 2% y una merma por manipulación del 0,5%.

    Rpta.: 0,843

11. Un joyero tiene dos lingotes de plata: el primero tiene 500 g de peso y una ley que aumenta en 0,01 cuando se le agrega el lingote 20 g de plata

pura; el segundo tiene una ley de 0,85 y un peso tal que cuando se le quita 50 gramos de plata, la ley baja en 0,03. Hallar la ley del primer lingote y el peso del segundo.

Rpta.: L = 0,740; peso 300 g

12. Un joyero al fundir 3 lingotes cuyas leyes son 0,920; 0,840 y 0,740 obtuvo un lingote de plata cuya ley se desea conocer. Si los pesos de los lingotes están en la relación de 1, 3 y 4 respectivamente.

Rpta.: 0,800

13. Hallar el peso de una barra de oro y cobre de 0,69 de oro sabiendo que si se le extrae 2/5 de todo el oro que contiene y se le agrega 400 g de cobre, la fracción de este último en la nueva barra es 2/3.

Rpta.: 930,23 g

14. Una aleación de plomo y estaño pesa 65 kg. Cuando se sumerge el lingote en el agua pesa sólo 57,5 kg. ¿Cuánto pesa respectivamente cada metal sabiendo que la densidad del plomo es 11,40 y la del estaño 7,30?

Rpta.: Estaño : 36,5 kg

Plomo : 28,5 kg

15. Tres lingotes, el primero con ley 0,640, el segundo con ley 0,760 y el tercero con ley de 0,850 tienen pesos iguales. Ellos han sido afinados; al primero se le quita 1/6 de cobre, al segundo 1/8 y en fin, al tercero se le quita 1/10. Después de la afinación se funde los 3 lingotes. ¿Cuál será la ley de la aleación así obtenida?

Rpta.: 0,777

16. Se tiene 3 aleaciones de oro con leyes 0,750; 0,840 y 0,920. Se pide calcular qué peso se debe tomar de cada una de ellas para obtener una aleación que pesa 4 050 gramos con ley de 0,800. El peso del metal sacado del primer lingote debe ser al peso sacado del segundo en la relación de 2 a 7.

Rpta.: De ley 0,750 ; 1 080 g

De ley 0,840 ; 3 780 g

De ley 0,920 ; 1 215 g

17. Un comerciante mezcla 2 clases de café, una le cuesta S/. 18 el kg y la otra S/. 24 el kg vende 60 kg de esta mezcla en S/.23 el kg y gana el 15% del precio de compra. Calcule la diferencia de las cantidades de café de diferente calidad.

Rpta.: 20 kg

18. Una aleación de un material "A" y un material "B" pesa 7,465 kg y al sumergirla en el agua perdía los 0,052 del peso de "A" y que "B" pierde 0,095. Determinar la cantidad de "B" que habia en la aleación.

Rpta.: 1,833024 kg de 'B"

19. Se tiene 3 lingotes de oro y cobre cuyas leyes son 0,700 ; 0,800 y 0,950. ¿Qué peso debe tomarse de cada uno para tener 4,5 kg de una aleación cuya ley sea 0,895, sabiendo que lo que se toma del primer lingote es a la parte que se toma del segundo como 2 a 5.

Rpta.: 396 g ; 990 g y 3 114 g

20. Hallar el peso de una aleación de oro de ley 0,920, sabiendo que si se le añade 300 gramos de ley 0,880 y si de la aleación obtenida se quita 200 gramos que se sustituyen por 200 g de ley 0,833, se obtiene una aleación de ley 0,893.

Rpta.: 700 gramos.