série de matemática monografia no. 6

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA EUCLIDIANA

Departamento de Assuntos Científicos
União Pan-Americana, Secretaria Geral
Organização dos Estados Americanos

$$\vec{u}$$

$$T(\vec{u})$$

$$\|T\| = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u},\hat{}\,\vec{v})$$

$$\delta(A, B) = |B - A|$$

$$T(X) = T(A) + T^*(X - A)$$

$$\Delta(T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)) = \Delta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n).$$

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA EUCLIDIANA

por

ALEXANDRE AUGUSTO MARTINS RODRIGUES

Universidade de São Paulo
São Paulo, Brasil

Departamento de Assuntos Científicos
União Pan-Americana
Secretaria Geral
Organização dos Estados Americanos
Washington, D.C. - 1969

Esta monografia foi preparada para publicação no
Departamento de Assuntos Científicos da União Pan-Americana

Coordenadora da Série: Eva V. Chesneau
Assessor Técnico: Dr. Manfredo Perdigão do Carmo
Universidade da California,
Berkeley, Calif., E.U.A.

AOS LEITORES

A coleção de monografias científicas faz parte dos programas gerais de informação e publicações do Departamento de Assuntos Científicos e tem por principal objetivo divulgar e apresentar de modo simples os novos temas e métodos que surgem com o rápido desenvolvimento das ciências e da tecnologia.

Atualmente, a coleção consta de quatro séries, em espanhol e em português, sôbre física, química, biologia e matemática, mas constitui objeto de consideração a possibilidade de incluir outros ramos da ciência.

Desde o comêço, essas monografias foram dedicadas aos professôres e estudantes de ciência do nível secundário e do nível universitário básico. Espera-se, entretanto, que sejam elas acolhidas também pelos homens de ciência dedicados a pesquisas especializadas e pelo público em geral que se interesse em adquirir informações ou conhecimentos sôbre a matéria.

Nesta oportunidade, a União Pan-Americana expressa seus agradecimentos à Agência de Desenvolvimento Internacional e à National Science Foundation, dos Estados Unidos, pela significativa assistência financeira prestada em apoio a êste programa; e ao Doutor Alexandre Augusto Martins Rodrigues, autor da monografia.

Jesse D. Perkinson
Diretor

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A presente monografia tem por objetivo desenvolver os fundamentos da geometria euclidiana com os métodos da álgebra linear.

A geometria euclidiana pode ser apresentada axiomàticamente, no ensino universitário, quer através dos postulados que remontam a Euclides, sob a formulação devida a Hilbert, quer através da geometria projetiva ou da álgebra linear. Entretanto, o único método realmente viável, nos primeiros anos universitários, é o da álgebra linear.

A dificuldade em apresentar a geometria pelos outros métodos que mencionamos acima explica, a nosso ver, por que o ensino universitário da análise matemática e da álgebra é feito com bases axiomáticas, enquanto o da geometria recorre, ou pelo menos recorria até recentemente, a noções intuitivas provenientes do curso secundário.

O ensino da geometria através da álgebra linear é de tal modo simples, põe tão claramente em evidência a essência dos fenómenos geométricos e contribui tanto para a formação matemática do estudante que não faltam hoje matemáticos que propugnam sua adoção mesmo no curso secundário. Por outro lado, a aplicação da álgebra linear à geometria facilita a compreensão e o domínio da primeira teoria. Acreditamos que o emprêgo generalizado dos métodos da álgebra linear no ensino da geometria no curso secundário é ùnicamente uma questão de tempo.

A compreensão do texto pressupõe do leitor ùnicamente o conhecimento dos fundamentos da álgebra linear, que poderão ser adquiridos em qualquer dos livros mencionados na bibliografia.

Limitamo-nos a considerar aspectos fundamentais que interessam imediatamente à geometria euclidiana. Ao leitor que deseje ampliar seus conhecimentos, principalmente sob o aspecto algébrico da teoria, recomendamos o livro de J. Diéudonné, "Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire", Hermann, Paris, 1964.

A origem desta monografia encontra-se no curso que desenvolvemos na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo em 1959 e 1960 e nas notas mimeografadas que então publicamos. O presente texto é baseado, em grande parte, no curso que ministramos no Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo em 1964.

Desejamos apresentar nossos agradecimentos aos Srs. João Affonso Pascarelli e Alcilea Augusto pela colaboração que prestaram na redação de parte do texto e à Professôra Elza F. Gornide que leu os originais e contribuiu com valiosas sugestões.

1

ESPAÇOS AFINS

Neste capítulo introduzimos axiomàticamente a noção de soma de um ponto de um espaço E com um vetor de um espaço vetorial V. Em seguida, definimos em E várias noções que generalizam conceitos da geometria elementar. Assim, por exemplo, definimos em E a noção de variedade linear (generalização de retas e planos), paralelismo de variedades lineares, semi-espaços, simplexos (generalização de triângulos e tetraedros), etc.

Entretanto, não definimos distância de 2 pontos de E. Dêsse modo, obtemos em E um modêlo das propriedades da geometria euclidiana que não dependem da noção de distância. Ao conjunto dessas propriedades é que se denomina geometria afim. Estudamos também um grupo de transformações naturalmente associado a E: o grupo das transformações afins.

§ 1. Espaços Afins

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sôbre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. Um conjunto não vazio E diz-se um espaço afim associado a V se fôr dada uma aplicação de $V \times E \to E$ que a cada par $(\vec{x}, A) \in V \times E$ faz corresponder um elemento de E, denotado com $A + \vec{x}$, satisfazendo às seguintes condições:

1) $A + (\vec{x} + \vec{y}) = (A + \vec{x}) + \vec{y}$ para todo $A \in E$ e quaisquer que sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de V.

2) Dados $A, B \in E$, existe um único vetor $\vec{x} \in V$ tal que $B = A + \vec{x}$.

Os elementos de E chamam-se *pontos* do espaço afim; e os elementos de V, *vetores livres* ou, simplesmente, *vetores*. O ponto $A + \vec{x}$ denomina-se *soma do ponto* A *com o vetor* $\vec{x}$. O único vetor $\vec{x}$ tal que $B = A + \vec{x}$ denomina-se *diferença dos pontos* B e A e será denotado por $B - A$. Portanto, quaisquer que sejam $A, B \in E$, $B = A + (B - A)$.

Dos axiomas 1) e 2) da definição 1.1 decorrem as seguintes propriedades, válidas quaisquer que sejam $A, B, C \in E$ e $\vec{x} \in V$:

3) $A + \vec{0} = A$.

De fato, seja $\vec{x} \in V$ tal que $A + \vec{x} = A$. Então, $(A + \vec{x}) + \vec{0} = A + \vec{0}$. Por outro lado, $(A + \vec{x}) + \vec{0} = A + (\vec{x} + \vec{0}) = A + \vec{x} = A$. Logo, $A = A + \vec{0}$.

4) $A - A = \vec{0}$.

Decorre de 3) e da definição de diferença de pontos.

5) $(A - B) + (B - C) = A - C$.

Pois

$$C + [(A - B) + (B - C)] = [C + (B - C)] + (A - B) = B + (A - B) = A.$$

6) $A - B = -(B - A)$.

Basta fazer $C = A$ em 5).

O vetor $A + (-\vec{x})$ será designado com $A - \vec{x}$.

7) $(B - A) + \vec{x} = (B + \vec{x}) - A = B - (A - \vec{x})$.

A primeira igualdade segue-se de

$$A + [(B - A) + \vec{x}] = [A + (B - A)] + \vec{x} = B + \vec{x}$$

e a segunda demonstra-se de modo semelhante.

8) Regra do paralelogramo: se $B - A = C - D$, então $B - C = A - D$.

Com efeito, da hipótese obtém-se $B = A + (C - D)$. Logo

$$D + (B - C) = D + [(A + (C - D)) - C] = D + [A - (C + (D - C))] = \\ = D + (A - D) = A.$$

Como exemplo de espaço afim, observamos que todo espaço vetorial V pode ser considerado um espaço afim associado a si mesmo (neste caso $E = V$). Basta definir a soma do ponto $A \in V$ com o vetor $\vec{x} \in V$ como sendo a soma $A + \vec{x}$ de elementos de V, dada pela estrutura de espaço vetorial de V.

Vamos agora introduzir a noção de variedade linear de um espaço afim que generaliza os conceitos de reta e plano da geometria elementar.

Definição 1.2. Um subconjunto, não vazio, S de E diz-se uma variedade linear se existe um subespaço vetorial de V, denominado direção de S e designado a seguir com dir S tal que S é um espaço afim associado a dir S, em relação à operação $(\vec{x}, A) \in \in \operatorname{dir} S \times S \to A + \vec{x}$, onde $A + \vec{x}$ indica a soma do ponto A com o vetor $\vec{x}$ considerados como elementos de E e V, respectivamente.

A definição 1.2 implica que, tomado um ponto $A \in S$, o conjunto dos vetores $X - A$, onde X percorre S, coincide com o subespaço dir S. Em particular, o conjunto dos vetores $X - A$, $X \in S$, não depende da escolha do ponto $A \in S$.

Definição 1.3. A dimensão de uma variedade linear S é a dimensão do subespaço dir S. S denomina-se, respectivamente, uma reta, um plano ou um hiperplano, conforme sua dimensão seja um, dois ou $n - 1$.

O subconjunto formado por um único ponto $A \in E$ é uma variedade linear cuja direção é o subespaço formado pelo vetor $\vec{0}$; a dimensão da variedade linear A é zero. O espaço afim E é também uma variedade linear cuja direção é V; a dimensão de E é, por definição, a dimensão de V. De modo geral, seja $V_0 \subset V$ um subespaço vetorial e $A \in E$ um ponto qualquer; o conjunto S dos pontos $A + \vec{x}$, onde $\vec{x}$ percorre V_0 é, òbviamente, uma variedade linear de direção V_0. Se A e B são dois pontos distintos de E, o conjunto dos pontos $X = A + \lambda(B - A)$, onde λ percorre o corpo real $\mathbb{R}$, é uma reta que contém os pontos A e B e cuja direção é o subespaço gerado pelo vetor $B - A$. Esta é a única reta que contém os pontos A e B, pois, se uma reta r contém A e B, sua direção V_0 --cuja dimensão é um-- contém o vetor $B - A \neq 0$ sendo, portanto, o subespaço gerado pelo vetor $B - A$, e, então, r é necessàriamente o conjunto dos pontos $X = A + \lambda(B - A)$.

Definição 1.4. A variedade linear S_1 diz-se paralela à variedade linear S_2 se $\operatorname{dir} S_1 \subset \operatorname{dir} S_2$ ou $\operatorname{dir} S_2 \subset \operatorname{dir} S_1$.

Da definição decorre que, se S_1 é paralela a S_2, então S_2 é paralela a S_1. Outra conseqüência imediata é que duas variedades lineares de mesma dimensão são paralelas se têm, e sòmente se têm, a mesma direção. É essa propriedade que justifica a denominação direção dada ao subespaço dir S associado à variedade linear S.

Por um ponto $A \in E$ passa uma única variedade linear T paralela a uma variedade linear dada S e de mesma dimensão que S. De fato, T é, necessàriamente, a variedade dos pontos $A + \vec{x}$, onde $\vec{x}$ percorre dir S.

Se S_1, S_2 e S_3 são variedades lineares de mesma dimensão e S_1 é paralela a S_2 e S_2 é paralela a S_3, então S_1 é paralela a S_3.

Verifica-se imediatamente que a interseção $\bigcap_{i \in I} S_i$ de uma família S_i, $i \in I$, de variedades lineares de E é uma variedade linear cuja direção é o subespaço $\bigcap_{i \in I}$ dir S_i. Em particular, dado um conjunto F de pontos de E, a interseção H de tôdas as variedades lineares de E que contém F (existe pelo menos uma variedade linear que contém F que é o próprio espaço E) é uma variedade linear. É claro que H é a "menor" variedade linear que contém F no sentido de que H está contida em qualquer variedade linear de E que contém F. H denomina-se a *variedade linear gerada pelo conjunto* F.

Definição 1.5. Um conjunto $F = \{A_0, \ldots, A_p\}$ de $p + 1$ pontos de E diz-se linearmente independente se a variedade linear gerada por F tem dimensão p.

Proposição 1.1. Se o conjunto $\{A_0, \ldots, A_p\}$ de $p + 1$ pontos de E é linearmente independente, os vetores $A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$ são linearmente independentes qualquer que seja k, $0 \leq k \leq p$. Recìprocamente, se existe um índice k, $0 \leq k \leq p$, para o qual os vetores $A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$ sejam linearmente independentes, o conjunto de pontos $\{A_0, \ldots, A_p\}$ é linearmente independente.

Demonstração. Seja $F = \{A_0, \ldots, A_p\}$ e suponhamos que F seja um conjunto linearmente independente. Suponhamos, por absurdo, que exista um índice k, $0 \leq k \leq p$, para o qual os vetores $A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$ sejam linearmente dependentes e seja V_0 o subespaço vetorial gerado por êles. Então $\dim V_0 \leq p - 1$ e a variedade linear $S = \{A_k + \vec{x} \mid x \in V_0\}$ contém F --logo contém a variedade linear H gerada por F-- e tem dimensão $\leq p - 1$, o que é contraditório, já que, por hipótese, $\dim H = p$.

Recìprocamente, se existe k, $0 \leq k \leq p$, para o qual os vetores $A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$ são linearmente independentes, seja V_0 o subespaço vetorial gerado por êles ($\dim V_0 = p$) e ponhamos, como acima, $S = \{A_k + \vec{x} \mid x \in V_0\}$. Já que S contém F, $H \subset S$ donde dir $H \subset$ dir S, e como $\dim S = p$, tem-se

$\dim H \leq p$. Por outro lado, se H contém F, dir H, certamente, conterá os vetores

$$A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$$

e, portanto, o subespaço V_0. Ora, $\dim V_0 = p$, logo de $V_0 \subset \operatorname{dir} H$ segue-se $\dim H \geq p$. As duas desigualdades dão $\dim H = p$ e, conseqüentemente, F é um conjunto linearmente independente.

Observe-se que, unindo as duas afirmações da proposição 1.1, conclui-se que, se os vetores $A_0 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_p - A_k$ são linearmente independentes para algum k, $0 \leq k \leq p$, então o mesmo vale para qualquer k, $0 \leq k \leq p$.

Finalmente, como resultado imediato, enunciamos uma proposição a respeito da unicidade da variedade linear de dimensão p que contenha $p + 1$ pontos dados.

Proposição 1.2. A condição necessária e suficiente para que exista uma única variedade linear de dimensão $p (p < n)$ que contenha $p + 1$ pontos dados $A_0, \ldots, A_p$ é que o conjunto $F = \{A_0, \ldots, A_p\}$ seja linearmente independente.

Demonstração. Condição necessária. Se, por absurdo, a variedade linear H gerada por F tivesse dimensão $\leq p - 1$, sendo $V_0 = \operatorname{dir} H$, seria possível construir dois subespaços vetoriais V_1 e V_2 tais que: $V_1 \neq V_2$, $\dim V_i = p$ e $V_0 \subset V_i$, $i = 1, 2$. Pondo $S_i = \{A_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in V_i\}$ $i = 1, 2$, teríamos construído duas variedades lineares S_1 e S_2, distintas, de dimensão p e contendo F, pois ambas contêm H. Isso contradiria a hipótese de unicidade; logo, $\dim H = p$ e o conjunto F é linearmente independente. Como escólio, conclui-se que H é esta única variedade.

Condição suficiente. Suponhamos F linearmente independente, isto é, se H é a variedade linear gerada por F, $\dim H = p$ e seja S uma outra variedade linear de dimensão p contendo F. Provemos que S = H. De fato, por definição, se S contém F, $H \subset S$, donde $\operatorname{dir} H \subset \operatorname{dir} S$; como êstes espaços vetoriais têm ambos dimensão p, temos $\operatorname{dir} H = \operatorname{dir} S$, mas H e S, tendo pontos comuns e mesma direção, devem portanto coincidir.

Sejam $(A_0, \ldots, A_p)$ uma seqüência de pontos de E e $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ uma seqüência de escalares tais que $\lambda = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \neq 0$. Escolhido o ponto $0 \in E$, definimos o ponto G do seguinte modo:

$$G = 0 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (A_i - 0) \qquad [1.1]$$

Aparentemente, o ponto G depende da escolha do ponto 0. Vejamos que, na realidade, G não depende de 0. Para tanto, seja $0' \in E$ um ponto qualquer, em relação ao qual definimos o ponto G' como em [1.1]

$$G' = 0' + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (A_i - 0')$$

ou seja

$$G' = 0 + (0' - 0) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (A_i - 0) + \frac{1}{\lambda}(0 - 0') \sum_{i=0}^{p} \lambda_i =$$

$$= 0 + \sum_{i=0}^{p} \lambda_i (A_i - 0) = G.$$

Isso significa que o ponto G depende sòmente das seqüências $(A_0, \ldots, A_p)$ e $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$.

Definição 1.6. G chama-se *baricentro* dos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados de massas $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$.

Observemos que se G é o baricentro dos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados das massas $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$, G será também o baricentro dos mesmos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados de massas $\mu_0, \ldots, \mu_p$ que gozam da propriedade de ter soma igual a 1. Basta fazer

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i = 0, \ldots, p.$$

Usaremos o símbolo $\mu_0 A_0 + \ldots + \mu_p A_p$ para denotar o baricentro dos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados de massas $\mu_0, \ldots, \mu_p$, sempre que

$$\sum_{i=0}^{p} \mu_i = 1.$$

Ao baricentro de dois pontos A_0, A_1, afetados de massas $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, chamaremos ponto médio do par (A_0, A_1). O ponto médio do par (A_0, A_1) será, portanto, o ponto $\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1$.

Introduziremos, a seguir, a noção *de sistema de coordenadas de um espaço afim.*

Definição 1.7. O par $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ formado por um ponto $0 \in E$ e uma base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de V denomina-se um sistema de coordenadas de E. Diz-se que 0 é a origem do sistema de coordenadas.

Dados um sistema de coordenadas $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ e um ponto $X \in E$, as componentes do vetor $X - 0$ em relação à base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ denominam-se *coordenadas* do ponto X nesse sistema de coordenadas. Mais precisamente, a componente do vetor $X - 0$ em relação ao vetor $\vec{e}_i$ denomina-se *i-ésima coordenada* de X. Isto é, se $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de X, então $X - 0 = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Proposição 1.3. Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ as coordenadas de dois pontos X e Y de E. O vetor $X - Y$ tem componentes $(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ em relação à base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Se $\vec{u}$ é o vetor de componentes $(u_1, \ldots, u_n)$, o ponto $X + \vec{u}$ tem coordenadas $(x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)$.

Demonstração. A primeira afirmação segue-se de:

$$\vec{v} = X - Y = (X - 0) - (Y - 0)$$

Logo, as componentes de $\vec{v}$ serão $v_i = x_i - y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, isto é, $X - Y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$.

A segunda é conseqüência de:

$$X + \vec{u} = 0 + (X - 0) + \vec{u}$$

e, portanto,

$$(X + \vec{u}) - 0 = (X - 0) + \vec{u}.$$

Isto é, as coordenadas de $X + \vec{u}$ são $(x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)$, e a proposição fica demonstrada.

Sejam $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ e $(0', \vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$ dois sistemas de coordenadas de um espaço afim E. Um ponto $X \in E$ tem coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ no primeiro sistema e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ no segundo. Vamos investigar que relação existe entre as coordenadas (x'_i) e (x_i).

Para isso, seja $\|a_{ij}\|$ a matriz de mudança da base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ para a base $(\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$, isto é, $\vec{e}\,'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$. Suponhamos ainda que as coordenadas de $0'$ no sistema $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sejam $(b_1, \ldots, b_n)$. Como

$$X - 0 = (X' - 0') + (0' - 0),$$

vem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_j \vec{e}'_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij} \right) \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i$$

Logo

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j + b_i \qquad [1.2]$$

que são as fórmulas de *mudança de coordenadas* em um espaço afim.

Seja $S \subset E$ uma variedade linear de dimensão p. Vamos deduzir as *equações da variedade linear* S em relação ao sistema de coordenadas $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E. Denotaremos por V^* o espaço dual de V.

Sejam V_0 a direção de S, $W \subset V^*$ o subespaço anulador de V_0 e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p})$ uma base de W. Em outras palavras, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$, $n-p$ formas linearmente independentes que se anulam em todos os vetores de V_0. Então um vetor $\vec{v}$ de V pertence a V_0 se, e sòmente se, $\alpha_i(\vec{v}) = 0$ para todo i, $i = 1, \ldots, n-p$.

Pôsto isto, se B é um ponto da variedade linear S, a condição necessária e suficiente para que um ponto $X \in E$ esteja em S é que

$$\alpha_i(X - B) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad [1.3]$$

As relações [1.3], escritas em têrmos de coordenadas, serão as equações de S. Sejam, portanto, $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas de X e $(b_1, \ldots, b_n)$ as coordenadas de B no sistema $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ e suponhamos que $\alpha_i(\vec{e}_j) = a_{ij}$, com $i = 1, \ldots, n-p$ e $j = 1, \ldots, n$; então

$$\alpha_i(X - B) = a_{i1}(x_1 - b_1) + \ldots + a_{in}(x_n - b_n), \quad 1 \le i \le n - p.$$

Fazendo $a_{i1}b_1 + \ldots + a_{in}b_n = c_i$, $1 \le i \le n - p$, as relações [1.3] escrevem-se como:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = c_i, \quad i = 1, \ldots, n - p \qquad [1.4]$$

que são as equações procuradas.

Não é difícil demonstrar que vale a recíproca no seguinte sentido: dada a matriz $\|a_{ij}\|$, $(n-p) \times n$, tal que as formas lineares definidas pelas linhas da matriz na base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sejam linearmente independentes+ e uma seqüência de $n - p$ escalares $(c_1, \ldots, c_{n-p})$, as equações [1.4] definem uma variedade linear de dimensão p.

Exercícios

1) Demonstrar que $(B - A) + \vec{x} = B - (A - \vec{x})$.

2) Por três pontos de um espaço afim, não pertencentes a uma mesma reta, passa um único plano.

3) Sejam S_1 e S_2 duas variedades lineares tais que $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Demonstrar que $S_1 \cap S_2$ é uma variedade linear cuja direção é a interseção das direções de S_1 e S_2.

4) Num espaço afim de dimensão 3, uma reta e um plano não paralelos têm um único ponto em comum.

5) Num espaço afim de dimensão 4, a interseção de dois hiperplanos não paralelos é um plano.

6) Sejam S_1 e S_2 duas variedades tais que $\operatorname{dir} S_1 \oplus \operatorname{dir} S_2 = V$. Então S_1 e S_2 têm um único ponto comum.

7) Dois planos não paralelos de um espaço afim de dimensão 4 têm, em comum, ou um único ponto ou uma reta.

8) Demonstrar que, em um espaço afim de dimensão 4, existem uma reta e um plano, não paralelos, que não têm ponto comum.

9) Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de $p + 1$ pontos $(p \le n)$ seja linearmente independente é que não esteja contido em alguma variedade linear de dimensão $p - 1$.

+ Isto equivale a dizer que a matriz tem pôsto $n - p$.

10) Seja $\{A_0, \ldots, A_p\}$ um conjunto linearmente independente de $p+1$ pontos, com $p \leq n$. O lugar geométrico dos baricentros dos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados de massas arbitrárias é a variedade linear de dimensão p que contém tais pontos.

11) Demostrar que $\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 = \frac{1}{3}A_0 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2) = \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2) = \frac{1}{3}A_2 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1)$. Aplicar êste resultado para demonstrar que, dados três pontos de um espaço afim, as três retas que unem cada ponto ao ponto médio do par formado pelos outros dois pontos se encontram em um ponto.

12) Demonstrar que $\frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = \frac{1}{4}A_1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3) = \ldots = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_3) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_3 = \ldots$ Enunciar um teorema de geometria correspondente a êste resultado, como foi feito no exercício (11) (o teorema afirma que 7 retas têm um ponto comum!).

13) Sejam A, B e C, respectivamente, os pontos de coordenadas (0, 2), (4, 0) e (2, 4), em relação a um sistema de coordenadas de um plano. Seja D o ponto de encontro das retas AB e C0, onde 0 é a origem do sistema de coordenadas. Escrever as equações de mudança de coordenadas para um nôvo sistema, cuja origem seja D e (C - D, A - D) a base.

14) Em relação a um sistema de coordenadas de um espaço afim de dimensão 4, sejam A, B, C os pontos de coordenadas (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) e (0, 0, 1, 0). Quais são as equações do plano que passa por A, B e C?

§ 2. Noções que Dependem da Relação de Ordem dos Números Reais

No parágrafo precedente, nenhum uso foi feito da relação de ordem dos números reais e tôdas as propriedades podem ser enunciadas e são verdadeiras quando os escalares pertencem a um outro corpo qualquer. Vamos, neste parágrafo, estudar noções geométricas em cujas definições se faz uso da relação de ordem dos escalares. Começaremos definindo p --simplexo que generaliza, para espaços de dimensão qualquer, as noções de segmento, triângulo e tetraedro da geometria elementar.

Seja $\{A_0, \ldots, A_p\}$ um conjunto de $p+1$ pontos, linearmente independente.

Definição 1.8. O conjunto $[A_0, \ldots, A_p]$ dos baricentros $\lambda_0 A_0 + \ldots + \lambda_p A_p$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, p$, denomina-se p-simplexo de vértices $A_0, \ldots, A_p$.

Quando $p = 1$, o 1-simplexo $[A_0, A_1]$ denomina-se *segmento de extremidades* A_0 e A_1. Um 2-simplexo e um 3-simplexo denominam-se, respectivamente, *triângulo* e *tetraedro*. Para qualquer subseqüência $(A_{j_0}, \ldots, A_{j_k})$ da seqüência $(A_0, \ldots, A_p)$, o k-simplexo $[A_{j_0}, \ldots, A_{j_k}]$ denomina-se *face* do p-simplexo $[A_0, \ldots, A_p]$. Quando o p-simplexo é um triângulo, as faces de dois vértices chamam-se também *lados do triângulo*.

Proposição 1.4. *O p-simplexo $[A_0, \ldots, A_p]$ é igual ao conjunto* K *dos pontos* $P \in E$ *da forma*

$$P = A_0 + \alpha_1(A_1 - A_0) + \ldots + \alpha_p(A_p - A_0),$$

com

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, p \text{ e } 0 \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leq 1.$$

Demonstração. Seja P um ponto de $[A_0, \ldots, A_p]$. Pela fórmula [1.1], fazendo $0 = A_0$, existem escalares $\lambda_i \geq 0$, com $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$ tais que

$$P = A_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (A_i - A_0)$$

Como $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $0 \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \leq 1$, vem $P \in K$. Recìprocamente, se $P \in K$, a fórmula

$$P = A_0 + \alpha_1(A_1 - A_0) + \ldots + \alpha_p(A_p - A_0)$$

mostra que P é o baricentro dos pontos $A_0, \ldots, A_p$ afetados de massas $1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, cuja soma é 1 e que são tôdas não negativas.

Em particular, o segmento de extremidades A_0 e A_1 é o conjunto dos pontos $A_0 + \alpha(A_1 - A_0)$, com $0 \leq \alpha \leq 1$.

Suponhamos, agora, que a dimensão de E seja $n \geq 1$. Seja H um hiperplano de E e chamemos de K seu complementar em E. Tomemos uma forma linear $\alpha \neq 0$ pertencente ao subespaço anulador de dir H; α é uma base dêsse subespaço. Dado um ponto $0 \in H$, um ponto $X \in E$ pertence a H se, e sòmente se, $\alpha(X - 0) = 0$. Sejam A e B dois pontos distintos de K, então $\alpha(A - 0) \neq 0$ e $\alpha(B - 0) \neq$ $\neq 0$.

Proposição 1.5. O segmento $[A, B]$ não encontra H se, e sòmente se, $\alpha(A - 0)$ e $\alpha(B - 0)$ têm o mesmo sinal.

Demonstração. Seja $X = A + \lambda(B - A)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, um ponto de $[A, B]$. Como

$$X - 0 = A - 0 + \lambda[(B - 0) - (A - 0)] = (1 - \lambda)(A - 0) + \lambda(B - 0),$$

vem

$$\alpha(X - 0) = (1 - \lambda) \quad \alpha(A - 0) + \lambda\alpha(B - 0). \qquad [1.5]$$

Ora, λ e $1 - \lambda$ são ambos não negativos e não se anulam ao mesmo tempo. É claro, portanto, que se: $\alpha(A - 0)$ e $\alpha(B - 0)$ têm o mesmo sinal, $\alpha(X - 0)$ é diferente de zero, ou seja, X não pertence a H. Por outro lado, o segundo membro de [1.5] anula-se para $\lambda = \dfrac{\alpha(A - 0)}{\alpha(A - 0) - \alpha(B - 0)}$. Se $\alpha(A - 0)$ e $\alpha(B - 0)$ tiverem sinais contrários, êste valor de λ estará compreendido entre 0 e 1 e o segmento $[A, B]$ encontrará H em um ponto.

Vamos introduzir em K uma relação de equivalência: dados dois pontos $A, B \in K$, dizemos que A é equivalente a B --e escrevemos $A \sim B$-- se $A = B$ ou, sendo $A \neq B$, o segmento $[A, B]$ não encontra H. Da proposição 1.5 segue-se que $A \sim B$ se, e sòmente se, $\alpha(A - 0)$ e $\alpha(B - 0)$ têm o mesmo sinal. Isso implica, fàcilmente, que a relação definida é, na realidade, uma relação de equivalência.

Mostremos agora que existem, exatamente, duas classes de equivalência. De fato, seja $\vec{x} \in V$ um vetor não pertencente à direção de H. Os pontos $C = 0 + \vec{x}$ e $C' = 0 - \vec{x}$ pertencem a K e não são equivalentes, pois 0 pertence ao segmento $[C, C']$. Pela proposição 1.5, todo ponto de K é equivalente a C ou a C'.

Definição 1.9. Cada classe de equivalência de K, pela relação de equivalência definida acima, denomina-se semi-espaço determinado pelo hiperplano H.

Quando a dimensão de E fôr 1 ou 2 usaremos, respectivamente, os têrmos *semi-reta* ou *semi-plano* para designar um semi-espaço.

Seja V um espaço vetorial. No conjunto $V - \{\vec{0}\}$, a relação $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, com $\lambda > 0$, é uma relação de equivalência. Cada classe de equivalência denomina-se *semi-reta vetorial*. É claro que tôda reta de V (subespaço de dimensão 1) contém duas semi-retas distintas, que são ditas *semi-retas opostas*.

Seja r uma reta de um espaço afim E e r_1 uma semi-reta contida em r, determinada pelo ponto $P \in R$. Dizemos, neste caso, que r_1 é uma *semi-reta de origem* P. Seja $Q \in r_1$ um ponto de r_1 e, portanto, distinto de P. Vamos mostrar que r_1 é o conjunto dos pontos X tais que $X = P + \lambda(Q - P)$, com $\lambda > 0$. De fato, seja $\alpha \neq 0$ uma forma linear da direção de r. Como dir $\{P\} = \{\vec{0}\}$, α pertence ao anulador de dir P. Para todo $X \in r$, $X - P = \lambda(Q - P)$. Por outro lado, $X \in r_1$ se, e sòmente se, $\alpha(X - P)$ e $\alpha(Q - P)$ têm o mesmo sinal, ou seja, se, e sòmente se, $\lambda > 0$. Logo r_1 é o conjunto dos pontos $P + \lambda(Q - P)$ com $\lambda > 0$. O conjunto dos vetores $X - P$, $X \in r_1$ é, evidentemente, uma semi-reta vetorial e denomina-se *semi-reta vetorial associada* a r_1.

Recìprocamente, dados um vetor $\vec{v} \in \text{dir } r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, e um ponto $P \in r$, o conjunto dos pontos $X = P + \lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ é uma semi-reta cuja semi-reta vetorial associada é o conjunto dos vetores $\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$.

Retornemos à situação em que E é um espaço afim de dimensão n, H um hiperplano de E e K o complementar de H em E. Seja $\alpha \neq 0$ uma forma linear pertencente ao anulador da direção de H. Se B é um ponto de H, segue-se da proposição 1.5 que o conjunto dos pontos $X \in E$ tais que $\alpha(X - B) > 0$ é um semi-espaço. O outro semi-espaço determinado pelo hiperplano H é definido pela desigualdade $\alpha(X - B) < 0$.

Consideremos, agora, um sistema de coordenadas $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E e suponhamos que $\alpha(\vec{e}_i) = a_i$. Sabemos, do parágrafo 1, que

$$\alpha(X - B) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - c,$$

onde $c = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, se $(b_1, \ldots, b_n)$ são as coordenadas do ponto B e $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas do ponto X. Ficou, portanto, demonstrada a seguinte proposição:

Proposição 1.6. Se a equação de H em relação a um sistema de coordenadas é $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - c = 0$, cada semi-espaço definido por H é o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem, respectivamente, a uma das desigualdades $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - c > 0$ ou $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - c < 0$.

Finalmente, como última decorrência da relação de ordem dos números reais, veremos a possibilidade de orientar um espaço afim E.

Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e denotemos por β o conjunto de tôdas as bases de V.

Definição 1.10. Uma base X_i é *equivalente* a uma base X_j se o determinante da matriz M_{ij} de mudança da base X_i para a base X_j fôr positivo. Escrevemos então $X_i \sim X_j$.

Proposição 1.7. A relação $X_i \sim X_j$ é uma relação de equivalência sôbre β.

Demonstração. Seja I_n a matriz identidade $n \times n$. Que $X_i \sim X_i$ para tôda $X_i \in \beta$ vem do fato de que $\det I_n = 1 > 0$ e que I_n é a matriz da mudança de base de X_i para X_i; que $X_i \sim X_j$ acarreta $X_j \sim X_i$ resulta do fato de que $M_{ji} = M_{ij}^{-1}$; logo, se uma tem determinante positivo a outra também tem. Finalmente $X_i \sim X_j$ e $X_j \sim X_k$ acarretam $X_i \sim X_k$ pois $M_{ik} = M_{ij}M_{jk}$; logo, será positiva se as duas no segundo membro o forem.

Proposição 1.8. É possível dividir β de um único modo em duas classes β_1 e β_2 sem elementos comuns de maneira que duas bases pertençam a uma mesma classe se, e sòmente se, forem equivalentes.

Demonstração. Como a classe que contém uma base qualquer X_i deve ser necessàriamente o conjunto das bases X_j tais que $\det M_{ij} > 0$, tal partição só pode ser feita de um único modo. Por outro lado, se $X_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ é uma base de V seja $X_2 = (-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Sejam β_1 e β_2, respectivamente, as classes das bases equivalentes a X_1 e X_2. Como a matriz de mudança da base X_1 para a base X_2 tem determinante negativo, segue-se fàcilmente que as classes β_1 e β_2 satisfazem às condições exigidas.

Definição 1.11. Qualquer uma das classes β_1 ou β_2 diz-se uma *orientação* de V.

V possui, portanto, duas orientações.

Definição 1.12. Um espaço vetorial orientado é um espaço vetorial associado a uma das suas orientações.

Definição 1.13. Se V é um espaço vetorial orientado, uma base diz-se orientada positivamente se ela pertence à classe que dá a orientação de V; caso contrário, ela diz-se orientada negativamente.

Convém observar que o conceito de orientação depende essencialmente da relação de ordem dos números reais.

Definição 1.14. Um espaço afim E diz-se um espaço afim orientado quando o espaço vetorial V de seus vetores livres estiver orientado.

Se E é um espaço afim orientado, o sistema de coordenadas $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E será dito de *orientação positiva* ou de *orientação negativa* quando a base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de V fôr, respectivamente, positiva ou negativa.

Exercícios

1) Um subconjunto $H \subset E$ diz-se *convexo* se, para todo par de pontos $A, B \in H$, o segmento $[A, B]$ está contido em H. Demonstrar que um p-simplexo é um conjunto convexo.

2) Em um plano afim, se uma reta encontra um dos lados de um triângulo e não contém nenhum dos vértices pertencentes a êsse lado, ela encontra um outro lado do triângulo.

3) Sejam A_1, A_2, A_3 os vértices de um triângulo. Seja P_1 o conjunto dos pontos da reta A_2A_3 e os do semiplano determinado por A_2A_3 que contém o vértice A_1. Sejam P_2 e P_3 conjuntos construídos de maneira análoga, relativamente aos outros lados. Demonstrar que o triângulo $[A_1, A_2, A_3]$ é a interseção dos três conjuntos P_1, P_2 e P_3.

4) Em relação a um sistema de coordenadas de um plano, sejam A_1, A_2 e A_3, respectivamente, os pontos de coordenadas $(2,4)$, $(-4,4)$ e $(2,-2)$. Escrever um sistema de 3 desigualdades do primeiro grau que caracterize, em coordenadas, os pontos que pertencem ao triângulo $[A_1, A_2, A_3]$.

5) Demonstrar que um p-simplexo admite um único conjunto de vértices, isto é, se $[A_0, \ldots, A_p] = [B_0, \ldots, B_p]$, existe uma permutação do conjunto de índices $\{0, \ldots, p\}$ de tal modo que $A_i = B_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

§ 3. Transformações Afins

Vamos, neste parágrafo, definir aplicações entre espaços afins que desempenham, nesta teoria, o mesmo papel que os homomorfismos na teoria dos grupos, anéis, etc. e as aplicações contínuas na topologia.

Sejam E_1 e E_2 dois espaços afins associados, respectivamente, aos espaços vetoriais V_1 e V_2 e $T: E_1 \to E_2$ uma aplicação de E_1 em E_2.

Definição 1.15. T diz-se uma aplicação afim se existe um ponto A de E_1 tal que a aplicação $T_A^*: V_1 \to V_2$, definida por $T_A^*(\vec{x}) = T(A+\vec{x}) - T(A)$, $\vec{x} \in V_1$, seja uma aplicação linear.

Proposição 1.9. Se $T: E_1 \to E_2$ é uma aplicação afim, a aplicação T_A^* é linear, qualquer que seja o ponto $A \in E_1$. Além disso, T_A^* não depende da escolha do ponto A, mas sòmente de T.

Demonstração. Com efeito, tomado um ponto $B \in E_1$, façamos, para qualquer $\vec{x} \in V_1$:

$$T_B^*(\vec{x}) = T(B+\vec{x}) - T(B).$$

Temos:

$$\begin{aligned} T_B^*(\vec{x}) &= T[A+(B-A)+\vec{x}] - T[A+(B-A)] = \\ &= T[A+(B-A)+\vec{x}] - T(A) - T_A^*(B-A) = \\ &= T_A^*[(B-A)+\vec{x}] - T_A^*(B-A) \end{aligned}$$

e, pela linearidade de T_A^*, temos finalmente:

$$T_B^*(\vec{x}) = T_A^*(\vec{x}),$$

o que demonstra a proposição.

Como T_A^* não depende do ponto A, abandonaremos o índice A e usaremos, simplesmente, a notação T^*. A aplicação T^* denomina-se *aplicação linear associada à aplicação afim* T. Tomado $X \in E$ e fazendo-se, na definição 1.15, $\vec{x} = X - A$, vem:

$$T(X) = T(A) + T^*(X-A) \qquad [1.6]$$

Vamos examinar alguns exemplos de aplicações afins. Seja E um espaço afim associado ao espaço vetorial V. Fixado um vetor $\vec{y} \in V$, é fácil verificar que a aplicação

$$X \in E \rightarrow X + \vec{y} \in E$$

é uma aplicação afim de E em E, cuja aplicação linear associada é a aplicação idêntica de V; esta aplicação denomina-se *translação de vetor* $\vec{y}$. Em particular, a translação de vetor nulo, isto é, a aplicação idêntica de E, é uma aplicação afim.

Fixados um ponto $A \in E$ e um número real ρ, a aplicação

$$X \in E \rightarrow A + \rho(X - A) \in E$$

é uma aplicação afim de E em E, denominada *homotetia de centro* A e razão ρ. A aplicação linear associada a esta é a homotetia vetorial: $\vec{x} \in V \rightarrow \rho\vec{x} \in V$.

Mais geralmente, dado dois pontos A e B de E e uma aplicação linear $U: V \rightarrow V$, a aplicação de E em E definida por

$$T(X) = B + U(X - A)$$

é uma aplicação afim tal que $T(A) = B$ e cuja aplicação linear associada é U. Ainda mais, T é a única aplicação afim que goza dessas propriedades.

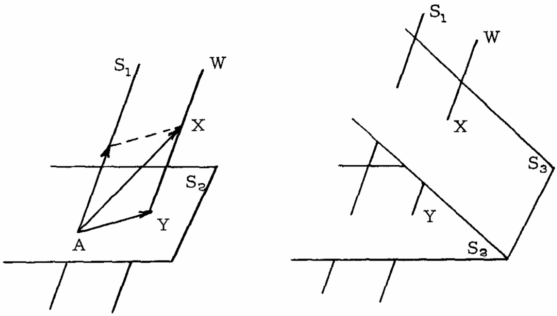
Para introduzir uma classe importante de aplicações afins --a das projeções-- vamos mostrar que, se S_1 e S_2 são duas variedades lineares de E, tais que $\operatorname{dir} S_1 \oplus \operatorname{dir} S_2 = V$, então S_1 e S_2 têm um único ponto comum. De fato, sejam $B_1 \in S_1$ e $B_2 \in S_2$, então $B_1 - B_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, com $\vec{v}_1 \in \operatorname{dir} S_1$ e $\vec{v}_2 \in \operatorname{dir} S_2$. O ponto $A = B_1 - \vec{v}_1 = B_2 + v_2$ pertence, portanto, a ambas as variedades S_1 e S_2. Seja A' um outro ponto pertencente a S_1 e S_2. Então $A - A' \in \operatorname{dir} S_1$ e $A - A' \in \operatorname{dir} S_2$, logo $A - A' = \vec{0}$, donde $A = A'$.

Definiremos uma aplicação $P: E \rightarrow E$ do seguinte modo: dado um ponto $X \in E$, seja W a variedade paralela a S_1, que passa por X. A variedade linear W intercepta S_2 em um único Y. Pomos $P(X) = Y$.

Vamos mostrar que P é uma aplicação afim. Seja A o ponto de encontro de S_1 e S_2. Dado um vetor $\vec{x} \in V$, seja $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, com o $\vec{v}_1 \in \operatorname{dir} S_1$ e $\vec{v}_2 \in \operatorname{dir} S_2$. É fácil ver que

$$P(A + \vec{x}) = A + \vec{v}_2 \quad \text{e} \quad P(A) = A.$$

Logo, $P^*(x) = \vec{v}_2$. A aplicação linear associada P^* é, portanto, a projeção sôbre $\operatorname{dir} S_2$, paralelamente à $\operatorname{dir} S_1$. Verifica-se, sem dificuldade, que a aplicação afim P satisfaz à condição $P^2 = P$.



Essa aplicação P denomina-se *projeção sôbre a variedade* S_2, *paralelamente à variedade* S_1. Observe-se que a restrição de P a uma variedade linear S_3 de E é ainda uma aplicação afim de S_3 em S_2.

Uma propriedade importante das aplicações afins, que se verifica fàcilmente, é que, se $T: E_1 \to E_2$ é uma aplicação afim e S é uma variedade linear de E_1, então $T(S)$ é uma variedade linear de E_2, cuja direção é T^* (dir S). Em particular, as aplicações afins preservam o paralelismo, isto é, se S_1 e S_2 são variedades lineares paralelas, então $T(S_1)$ e $T(S_2)$ também são paralelas.

Proposição 1.10. Uma aplicação afim $T: E_1 \to E_2$ será injetora, sobrejetora ou bijetora se, e sòmente se, T^* fôr, respectivamente, injetora, sobrejetora ou bijetora.

Demonstração. Vamos demonstrar que se T fôr injetora, T^* também o será. As outras demonstrações, análogas a esta, são deixadas a cargo do leitor. Sejam: $A \in E_1$ e $\vec{x}, \vec{y} \in V$, com $\vec{x} \neq \vec{y}$. Temos: $T^*(\vec{x}) = T(A + \vec{x}) - T(A)$ e $T^*(\vec{y}) = T(A + \vec{y}) - T(A)$. Como $A + \vec{x} \neq A + \vec{y}$ e, conseqüentemente, $T(A + \vec{x}) \neq T(A + \vec{y})$, vem que $T^*(\vec{x}) \neq T^*(\vec{y})$.

Proposição 1.11. Sejam $T: E_1 \to E_2$ e $U: E_2 \to E_3$ aplicações afins. A aplicação composta T o U é uma aplicação afim e

$$(T \circ U)^* = T^* \circ U^*$$

Demonstração. Sejam $A \in E$ um ponto qualquer e $\vec{x} \in V_1$ um vetor livre de E_1. Então:

$$(T \circ U)^*(\vec{x}) = (T \circ U) \cdot (A + \vec{x}) - (T \circ U)(A) =$$

$$= T[U(A) + U^*(\vec{x})] - T(U(A)) =$$

$$= T(U(A)) + T^*(U^*(\vec{x})) - T(U(A)) =$$

$$= (T^* \circ U^*)(\vec{x}).$$

Como $T^* \circ U^*$ é uma aplicação linear, fica demonstrado que $T \circ U$ é uma aplicação afim.

Proposição 1.12. Se $T : E_1 \to E_2$ é uma aplicação bijetora, então T^{-1} é também uma aplicação afim e $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

A demonstração desta proposição fica a cargo do leitor.

Denotaremos por GA(E) o conjunto das aplicações afins bijetoras de E em E. Das proposições 1.11 e 1.12 resulta que, se $T_1, T_2 \in GA(E)$, então $T_1 \circ T_2 \in GA(E)$ e $T_1^{-1} \in GA(E)$. Como a aplicação idêntica de E pertence a GA(E), concluímos que GA(E) é um grupo em relação à operação de composição de aplicações. O grupo GA(E) denomina-se *grupo afim* de E. Um elemento de GA(E) é também denominado uma *transformação afim de* E.

Estudaremos, agora, o efeito de uma aplicação afim sôbre as coordenadas de um ponto X de E. Sejam $T : E \to E$ uma aplicação afim e $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ um sistema de coordenadas de E.

Sejam $(b_1, \ldots, b_n)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ as coordenadas, respectivamente, dos pontos T(0), X e T(X). Se $M = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, \ldots, n$ é a matriz da aplicação T^* em relação à base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, teremos que, de $T(X) = T(0) + T^*(X - 0)$; resulta imediatamente:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

que são as *equações da aplicação afim* T, *no sistema de coordenadas* $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Reciprocamente, dado um sistema de equações lineares

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

e um sistema de coordenadas $(0, e_1, \ldots, e_n)$ de E, a aplicação que ao ponto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ faz corresponder o ponto de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ é uma aplicação afim de E em E.

Exercícios

1) Seja $T: E \to E$ uma aplicação afim tal que T^2 é a aplicação idêntica. Demonstrar que T é uma projeção.

2) Seja G o baricentro dos pontos $A_0, \ldots, A_p$, afetados de massas $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ e $T: E \to E$ uma aplicação afim. Demonstrar que o baricentro dos pontos $T(A_0), \ldots, T(A_p)$, afetados das massas $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$, é $T(G)$.

3) Dada uma seqüência de três pontos (A_1, A_2, A_3) pertencentes a uma reta r e tal que $A_1 \neq A_2$, chama-se razão simples da seqüência (A_1, A_2, A_3) o escalar λ tal que $A_3 - A_1 = \lambda(A_2 - A_1)$. Demonstrar que, dada outra seqüência (B_1, B_2, B_3) de pontos de uma reta s tal que $B_1 \neq B_2$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma transformação afim T tal que $T(A_i) = B_i$ $i = 1, 2, 3$, é que a razão simples de (A_1, A_2, A_3) seja igual à razão simples de (B_1, B_2, B_3).

4) A imagem de um p-simplexo de um espaço afim E por uma transformação afim de E inversível é um p-simplexo.

5) Num espaço afim E de dimensão n, dados dois conjuntos de pontos $\{A_0, \ldots, A_n\}$ e $\{B_0, \ldots, B_n\}$, se o conjunto $\{A_0, \ldots, A_n\}$ é linearmente independente, existe uma única transformação afim $T: E \to E$ tal que $T(A_i) = B_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

6) Dados um ponto $A \in E$ e uma aplicação afim $T: E \to E$, existem uma única translação $\mathcal{T}$ e uma única transformação afim T' que deixa fixo o ponto A (isto é, tal que $T'(A) = A$) de modo que $T = \mathcal{T} \circ T'$.

7) Se $\mathcal{T}$ é uma translação de E e $T: E \to E$ uma aplicação afim bijetora, então $T^{-1} \circ \mathcal{T} \circ T$ é uma translação.

2

ESPAÇOS EUCLIDIANOS

§ 1. Espaços Euclidianos

Espaços vetoriais euclidianos são espaços vetoriais munidos de um produto escalar. Introduziremos agora a seguinte definição:

Definição 2.1. Um espaço afim associado a um espaço vetorial euclidiano denomina-se *espaço euclidiano*.

Seja E um espaço euclidiano e A, B pontos de E.

Definição 2.2. Chama-se distância de A e B o módulo do vetor B - A.

Usaremos a notação $\delta(A, B)$ para designar a distância de A e B e $|B - A|$ para designar o módulo do vetor B - A.

Propriedades:

1. $$\delta(A, B) = \delta(B, A)$$

Demonstração.

$$\delta(A, B) = |B - A| = |(-1)(A - B)| = |-1|\,|A - B| =$$
$$= |A - B| = \delta(B, A).$$

2. $$\delta(A, B) \geq 0,$$

$\delta(A, B) = 0$ se, e sòmente se, $A = B$.

3. $\delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$ (propriedade triangular)

Demonstração.

$$C - A = (B - A) + (C - B), \quad \text{donde}$$

$$|C - A| \leq |B - A| + |C - B|$$

Definição 2.3. O par $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ formado por um ponto 0 de E e uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de V denomina-se um *sistema de coordenadas ortogonais de* E.

Deduziremos, a seguir, a fórmula da distância em coordenadas ortonormais.

Sejam $(0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ um sistema de coordenadas ortonormais de E e A e B dois pontos de E de coordenadas, respectivamente, $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$.

Temos:

$$|B - A| = |(b_1 - a_1, \ b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)|$$

donde

$$\delta(A, B) = |B - A| = + \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

Dado um subespaço V_o de V, denotaremos o subespaço ortogonal a V_o com $V_o^{\perp}$. Se a dimensão de V_o é p, então a dimensão de $V_o^{\perp}$ é $n - p$.

Seja E um espaço euclidiano de dimensão n e sejam S_1 e S_2 variedades lineares de E.

Definição 2.4. Diz-se que a variedade linear S_1 é ortogonal à variedade linear S_2 se dir $S_1 \supset (\text{dir } S_2)^{\perp}$, ou $(\text{dir } S_1)^{\perp} \supset$ dir S_2.

Vamos demonstrar que se S_1 é ortogonal a S_2, então S_2 é ortogonal a S_1. De fato, se, por exemplo, dir $S_1 \supset (\text{dir } S_2)^{\perp}$, tomando-se o ortogonal de ambos os números, vem,

$$(\text{dir } S_1)^{\perp} \subset (\text{dir } S_2)^{\perp\perp} = \text{dir } S_2$$

Portanto, S_2 é ortogonal a S_1. Êsse fato nos possibilita dizer, simplesmente, que S_1 e S_2 são ortogonais.

Definição 2.5. Dizemos que duas variedades lineares são perpendiculares se forem ortogonais e tiverem interseção não vazia.

Proposição 2.1. Dada uma variedade linear S_1 de dimensão p e um ponto A de E, existe uma única variedade linear S_2, de dimensão $n - p$, que passa por A e é perpendicular a S_1.

Demonstração. Seja $V_o = (\text{dir } S_1)^{\perp}$. Temos

$$\dim V_o = n - p$$

Então a variedade linear $S_2 = \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in V_0\}$ satisfaz às condições do enunciado, pois é ortogonal a S_1 e $\text{dir } S_1 \oplus \text{dir } S_2 = V$ (ver exercício 6 do Capítulo 1, § 1).

A unicidade decorre da imposição de ser $\dim S_2$ igual a $n - p$.

Pela demonstração acima, vemos que as variedades S_1 e S_2 que satisfazem às condições do enunciado possuem um único ponto B em comum. Êsse ponto chama-se *projeção ortogonal* do ponto A sôbre a variedade S_1. Observemos que se A não pertence à variedade S_1, a reta que passa por A e B é a única perpendicular por A à variedade S_1.

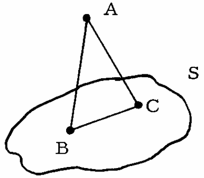
Definição 2.6. Chama-se distância do ponto A à variedade S a distância de A à sua projeção ortogonal sôbre S.

Proposição 2.2. A distância de A à variedade S é o mínimo das distâncias de A aos pontos de S.

Demonstração. Seja B a projeção ortogonal de A sôbre S e C um ponto qualquer de S.

Temos:

$$\begin{aligned} C - A &= (C - B) + (B - A), |C - A|^2 = \langle C - A, C - A \rangle = \\ &= \langle (C - B) + (B - A), (C - B) + (B - A) \rangle = \\ &= |B - A|^2 + |C - B|^2 + 2\langle (B - A), (C - B) \rangle \end{aligned}$$



Sendo B - A ortogonal a C - B, vem

$$|C - A|^2 = |B - A|^2 + |C - B|^2$$

Como $|C - B|^2 \geq 0$, temos

$$|B - A|^2 \leq |C - A|^2$$

donde

$$|B - A| \leq |C - A|.$$

Exercícios

1) O lugar geométrico dos pontos de um espaço euclidiano E que equidistam de 2 pontos distintos A e B é um hiperplano perpendicular à reta que passa por A e B.

2) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D de um espaço euclidiano E de dimensão 2, se $\delta(A, B) = \delta(B, C) = \delta(C, D) = \delta(D, A)$, então a reta AC é perpendicular à reta BD.

3) Sejam A, B, C, D quatro pontos de um espaço euclidiano E de dimensão 3, não pertencentes a um mesmo plano. Considerados os pares de retas reversas (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), se dois dêsses pares são formados por retas ortogonais, então o terceiro também o é.

4) Seja $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas de um espaço euclidiano E tal que $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 4$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -2$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 6$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 2$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = -5$, $\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 14$. Considere o leitor os pontos A, B, C e D de coordenadas $(1, 1 - 1)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ e calcule a distância das retas AB e CD.

5) Seja E um espaço euclidiano e S_1, S_2 duas variedades lineares de E. Seja p a dimensão do subespaço gerado por dir S_1 e dir S_2. Supondo que $p < n$, mostrar que existe pelo menos uma variedade linear U de dimensão $n - p$, ortogonal a S_1 e S_2 e que encontra cada uma dessas variedades em um único ponto. Além disso, se $q = \dim(\operatorname{dir} S_1 \cap \operatorname{dir} S_2)$, a reunião de tôdas as variedades U com as propriedades acima é uma variedade linear de dimensão $n - p + q$.

§ 2. Transformação de Semelhança

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Definição 2.7. Um operador linear T diz-se um *operador de semelhança* se existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$\langle T(\vec{x}), \quad T(\vec{y})\rangle = \rho^2 \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \qquad [2.1]$$

quaisquer que sejam $\vec{x}, \vec{y}$ de V. A constante denomina-se *módulo do operador de semelhança* T.

Como exemplo de operador de semelhança, citaremos as homotetias. Dado um número real $\alpha \neq 0$, lembremos que se chama *operador de homotetia de razão* α a aplicação $\vec{x} \to \alpha\vec{x}$. É claro que um operador de homotetia de razão α é um operador de semelhança de módulo $|\alpha|$.

Se T é um operador de semelhança módulo ρ, então para todo $\vec{x} \in V$,

$$|T(\vec{x})| = \rho|\vec{x}|$$

Vamos demonstrar que tôda aplicação $T: V \to V$ que satisfaz à equação [2.1] é necessàriamente linear e, portanto, é um operador de semelhança.

Proposição 2.3. Seja T uma aplicação de V em V. Se existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$\langle T(\vec{x}), \quad T(\vec{y})\rangle = \rho^2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

para quaisquer vetores $\vec{x}, \vec{y}$ de V, então T é um operador de semelhança.

Demonstração. Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dois vetores de V. Temos:

$$\begin{aligned}|T(\vec{x}+\vec{y}) - T(\vec{x}) - T(\vec{y})|^2 &= |T(\vec{x}+\vec{y})|^2 + |T(\vec{x})|^2 + |T(\vec{y})|^2 - \\ &- 2\langle T(\vec{x}+\vec{y}), \quad T(\vec{x})\rangle - 2\langle T(\vec{x}+\vec{y}), \quad T(\vec{y})\rangle - \\ &- 2\langle T(\vec{x}), \quad T(\vec{y})\rangle = \rho^2|\vec{x}+\vec{y}|^2 + \rho^2|\vec{x}|^2 + \rho^2|\vec{y}|^2 - \\ &- 2\rho^2\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}\rangle - 2\rho^2\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{y}\rangle - 2\rho^2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0\end{aligned}$$

Portanto

$$|T(\vec{x}+\vec{y}) - T(\vec{x}) - T(\vec{y})| = 0$$

e

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}|T(\lambda\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})|^2 &= |T(\lambda\vec{x})|^2 + \lambda^2|T(\vec{x})|^2 - \\ &- 2\lambda\langle T(\lambda\vec{x}), \quad T(\vec{x})\rangle = \rho^2|\lambda\vec{x}|^2 + \rho^2\lambda^2|\vec{x}|^2 - \\ &- 2\lambda\rho^2\langle \lambda\vec{x}, \vec{x}\rangle = 0\end{aligned}$$

Portanto

$$|T(\lambda\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})| = 0$$

e

$$T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x}).$$

Proposição 2.4. Todo operador de semelhança é inversível. O inverso de um operador de semelhança de módulo ρ é um operador de semelhança de módulo $\frac{1}{\rho}$.

Demonstração. Para demonstrar a primeira parte basta verificar que todo operador de semelhança T é biunívoco. De fato, se $T(\vec{x}) = 0$, então $|T(\vec{x})| = \rho|\vec{x}| = 0$. Como $\rho \neq 0$, vem $\vec{x} = 0$. Logo T é biunívoco.

Quanto à segunda parte, observemos que:

$$\langle TT^{-1}(\vec{x}),\ TT^{-1}(\vec{y})\rangle = \rho^2\langle T^{-1}(\vec{x}),\ T^{-1}(\vec{y})\rangle$$

pois T é operador de semelhança. Mas

$$\langle TT^{-1}(\vec{x}),\ TT^{-1}(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

Logo:

$$\langle T^{-1}(\vec{x}),\ T^{-1}(\vec{y})\rangle = \frac{1}{\rho^2}\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle,$$

para todo par de vetores $\vec{x}, \vec{y}$ de V.

Proposição 2.5. Sejam T_1 e T_2 dois operadores de semelhança de módulos ρ_1 e ρ_2, respectivamente. Então T_1T_2 é um operador de semelhança de módulo $\rho_1\rho_2$.

Demonstração.

$$\langle T_1T_2(\vec{x}),\ T_1T_2(\vec{y})\rangle = \rho_1^2\langle T_2(\vec{x}),\ T_2(\vec{y})\rangle = \rho_1^2\rho_2^2\langle (\vec{x}), (\vec{y})\rangle.$$

As proposições 2.4 e 2.5 mostram que o conjunto dos operadores de semelhança é um grupo denominado grupo dos operadores de semelhança. Designamos êsse grupo com GS(V).

Da definição 2.7, resulta imediatamente que um operador de semelhança de módulo 1 é um operador ortogonal. O conjunto dos operadores ortogonais 0(V) é, evidentemente, um subgrupo do grupo dos operadores de semelhança. O determinante de um operador ortogonal é igual a +1 ou -1. Chamaremos operador ortogonal próprio um operador ortogonal de determinante +1. O conjunto dos operadores ortogonais próprios é um subgrupo de 0(V) que designamos com $0^+(V)$. Um operador ortogonal de determinante -1 será dito impróprio.

Proposição 2.6. Todo operador de semelhança T é o produto de uma homotetia por um operador ortogonal.

Demonstração. Seja T o operador de semelhança e ρ o seu módulo. Seja H_ρ a homotetia de razão ρ e seja $M = \frac{1}{\rho}T$. É imediato que $T = MH_\rho = H_\rho M$ e que M é operador ortogonal.

Seja E um espaço euclidiano associado ao espaço vetorial V. Vamos estudar as aplicações de E em E que multiplicam as distâncias entre os pontos de E por uma mesma constante $\rho > 0$.

Demonstraremos adiante que essas aplicações são as transformações afins de E, cujo operador linear associado é um operador de semelhança:

Definição 2.8. Uma semelhança de módulo $\rho > 0$ é uma aplicação afim de E em E cuja aplicação linear associada é um operador de semelhança de módulo ρ.

Seja 0 um ponto de E e $\alpha \neq 0$ um número real. A aplicação $T: E \to E$ definida por

$$T(X) = 0 + \alpha(X - 0)$$

é uma semelhança cujo operador linear associado é o operador de homotetia de razão α. T denomina-se homotetia de centro 0 e razão α.

Se 0 é um ponto de E e T um operador de semelhança, existe uma única semelhança de E que deixa 0 fixo e cujo operador é T.

Teorema 2.1. Uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação $T: E \to E$ seja uma semelhança de módulo ρ é que

$$\delta(T(A),\ T(B)) = \rho\delta(A, B),$$

quaisquer que sejam os pontos A, B de E.

Demonstração. Seja 0 um ponto de E e consideremos a aplicação $T^*: V \to V$ definida por

$$T^*(\vec{x}) = T(0 + \vec{x}) - T(0).$$

Basta demonstrar que T^* é um operador de semelhança de módulo ρ. De fato:

$$2\langle T^*(\vec{x}),\ T^*(\vec{y})\rangle = \langle T^*(\vec{x}), T^*(\vec{x})\rangle + \langle T^*(\vec{y}),\ T^*(\vec{y})\rangle -$$

$$
\begin{aligned}
& - \langle T^*(\vec{x}) - T^*(\vec{y}),\ T^*(\vec{x}) - T^*(\vec{y}) \rangle = \\
= \ & |T(0 + \vec{x}) - T(0)|^2 + |T(0 + \vec{y}) - T(0)|^2 - \\
& - |T(0 + \vec{x}) - T(0 + \vec{y})|^2 = \\
= \ & \rho^2 |\vec{x}|^2 + \rho^2 |\vec{y}|^2 - \rho^2 |\vec{x} - \vec{y}|^2 = 2\rho^2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle .
\end{aligned}
$$

Portanto, pela proposição 2.3, T^* é um operador de semelhança, e o teorema está demonstrado.

Das proposições 1.10, 1.11 do Capítulo 1, 2.4 e 2.5 dêste capítulo, resulta imediatamente que:

a) tôda semelhança é uma aplicação bijetora de E em E;

b) o conjunto das semelhanças de E é um grupo, subgrupo do grupo afim de E, que designamos com GS(E).

Dados dois subconjuntos A e B de E, diz-se que A *é semelhante a* B se existe uma semelhança T tal que B é a imagem de A por T. Do fato de o conjunto das semelhanças ser um grupo, decorre que a relação "A é semelhante a B" é uma relação de equivalência no conjunto dos subconjuntos de E.

§ 3. Movimentos Rígidos

Definição 2.9. Uma semelhança de módulo 1 denomina-se um *movimento rígido*.

Da definição 2.7 e do teorema 2.1 decorre que uma aplicação $M: E \to E$ é um movimento rígido se, e sòmente se, M preserva a distância, isto é, $\delta(M(A), M(B)) = \delta(A, B)$ para todo par de pontos A, B de E. Uma semelhança T é um movimento rígido se, e sòmente se, o operador linear associado a T fôr um operador ortogonal.

Das proposições 2.4 e 2.5 decorre que o conjunto dos movimentos rígidos é um subgrupo do grupo das semelhanças, que denotaremos com GM(E). O operador linear associado a um movimento rígido é um operador ortogonal e, portanto, seu determinante é igual a +1 ou -1.

Definição 2.10. Um movimento rígido diz-se *proprio* ou *improprio*, conforme o determinante do operador linear associado fôr +1 ou -1.

Como o conjunto das transformações ortogonais de determinante +1, como foi observado no parágrafo precedente, é um grupo, o conjunto dos movimentos rígidos próprios é também um grupo, subgrupo do grupo dos movimentos rígidos.

Exemplos. 1) Translação. No Capítulo 1, parágrafo 3, definimos translação de vetor $\vec{x}$ como a aplicação $\mathcal{T}: E \to E$ definida por $\mathcal{T}(A) = A + \vec{x}$, para todo A de E. Tôda translação é um movimento rígido, pois

$$\delta(A + \vec{x},\ B + \vec{x}) = |(B + \vec{x}) - (A + \vec{x})| = |B - A| = \delta(A, B).$$

O operador linear associado a uma translação é a identidade; logo, a translação é um movimento rígido próprio.

2) Reflexão ao longo de um hiperplano. Seja H um hiperplano de E. Dado o ponto A de E, seja A' a projeção ortogonal de A sôbre H e consideremos o ponto $A'' = A' + (A' - A)$. A aplicação T definida por $T(A) = A''$ é, por definição, a reflexão ao longo do hiperplano H. Verifica-se, sem dificuldade, que tôda reflexão ao longo de um hiperplano é um movimento rígido impróprio.

Dada uma semelhança T de módulo ρ e um ponto 0 de E, T é o produto de uma translação $\mathcal{T}$ por uma semelhança S de módulo ρ que deixa fixo o ponto 0. De fato, seja $\mathcal{T}$ a *translação* de vetor $T(0) - 0$ e S a transformação afim definida por $S(X) = 0 + T^*(X - 0)$. S é uma semelhança de módulo ρ (pois $S^* = T^*$) que deixa fixo o ponto 0. Temos ainda

$$(\mathcal{T}S)(X) = \mathcal{T}(S(X)) = \mathcal{T}(0 + T^*(X-0)) = 0 + T^*(X-0) + T(0) - 0 = \\ = T(X).$$

Logo $\mathcal{T}$ e S satisfazem às condições impostas. Por outro lado, tôda semelhança S de módulo ρ que deixa fixo o ponto 0 é o produto de uma homotetia H de razão ρ e centro 0 por um movimento rígido M que deixa fixo o ponto 0. (Basta tomar M definido por $M(X) = 0 + \frac{1}{\rho}S^*(X - 0)$). Concluímos, assim, que $T = \mathcal{T} \cdot H \cdot M$ onde $\mathcal{T}$ é uma translação, H uma homotetia de centro 0 e razão ρ e M um movimento rígido que deixa 0 fixo.

Em particular, se T é um movimento rígido ($\rho = 1$), H é a identidade, donde concluímos que, *dado un movimento rígido* T *de* E *e um ponto* 0 *de* E, T *é o produto de uma translação por um movimento rígido que deixa fixo o ponto* 0.

§ 4. Volume

Sejam V um espaço vetorial euclidiano, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ uma base ortonormal de V e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, n vetores de V. Suponhamos

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{e}_k \quad 1 \le i \le n$$

e seja A a matriz $\|a_{ki}\|$. Diremos que A é a matriz dos n vetores na base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Vamos mostrar que o determinante de A não depende, a não ser quanto ao sinal, da base ortonormal escolhida. De fato, se $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$ é outra base ortonormal de V, $M = \|b_{ki}\|$ é a matriz de mudança da primeira para a segunda base e

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} e'_k$$

então

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\vec{e}_k = \sum_{j,k=1}^{n} a'_{ki} b_{jk}\vec{e}_j$$

Portanto,

$$a_{ji} = \sum_{j=1} b_{jk} a'_{ki}$$

Logo $A = MA'$, onde $A' = \|a'_{ki}\|$.

Como $\det M = \pm 1$, vem que, ou $\det A' = \det A$ ou $\det A' = -\det A$. Caso o espaço V seja orientado, det A não dependerá da base ortonormal escolhida para definir a matriz A, desde que ela tenha sempre orientação positiva. Em qualquer caso, $|\det A|$ não depende da base ortonormal escolhida, e será indicado com $\Delta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$.

É imediato que, uma condição necessária e suficiente para que os n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sejam linearmente independentes é que

$$\Delta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) \neq 0$$

Seja T um operador ortogonal de V. A matriz dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ é igual à matriz dos vetores $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)$, em relação à base $(T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \ldots, T(\vec{e}_n))$. Pelo que vimos acima o determinante desta última matriz é igual, a não ser quanto ao sinal, ao determinante da matriz dos vetores $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2) \ldots T(\vec{v}_n)$ em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Deduz-se imediatamente a seguinte:

Proposição 2.7. $\Delta(T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)) = \Delta(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$.

Consideremos o espaço euclidiano E associado a V e seja $[A_o, A_1, \ldots, A_n]$ um n-simplexo de E. Seja A_k um vértice qualquer dêsse simplexo. Demonstraremos que o número $\Delta(A_o - A_k, A_1 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k)$ não depende do vértice k escolhido. De fato, basta demonstrar que

$$\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \Delta(A_1 - A_o, \ldots, A_n - A_o)$$

Mas:

$$\begin{aligned}
&\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \\
= \;&\Delta(A_k - A_o, A_1 - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \\
= \;&\Delta(A_k - A_o, (A_1 - A_o) - (A_k - A_o), \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \\
&\ldots, A_n - A_k) = \Delta(A_k - A_o, A_1 - A_o, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \\
&\ldots, A_n - A_k) + \Delta(A_k - A_o, -(A_k - A_o), \ldots, A_{k-1} - A_k, \\
&A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k).
\end{aligned}$$

Mas, um determinante com duas colunas proporcionais é nulo; logo,

$$\begin{aligned}
&\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \\
= \;&\Delta(A_k - A_o, A_1 - A_o, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k).
\end{aligned}$$

Operando de maneira análoga com os outros vetores $A_j - A_k$, $j \neq k$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \\
= \;&\Delta(A_k - A_o, A_1 - A_o, \ldots, A_{k-1} - A_o, A_{k+1} - A_o, \ldots, A_n - A_o).
\end{aligned}$$

Como a troca de colunas não altera o valor absoluto do determinante, vem, finalmente,

$$\begin{aligned}
&\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k) = \\
= \;&\Delta(A_1 - A_o, \ldots, A_k - A_o, \ldots, A_n - A_o).
\end{aligned}$$

Definição 2.11. O número real $\frac{1}{n!}\Delta(A_o - A_k, \ldots, A_{k-1} - A_k, A_{k+1} - A_k, \ldots, A_n - A_k)$, independente da escolha do vértice A_k, denomina-se volume do n-simplexo $[A_o, \ldots, A_n]$.

Nos casos particulares em que $n = 1$ e $n = 2$ usaremos os têrmos comprimento e área, respectivamente, em lugar de volume. É imediato que o comprimento de um segmento $[A_0, A_1]$ é igual à distância $\delta(A_0, A_1)$.

Vamos demonstrar na proposição seguinte que o volume de um n-simplexo é invariante por um movimento rígido. Lembremos que a imagen de um n-simplexo por um movimento rígido é um n-simplexo (ver exercício 4 do § 3, Capítulo 1).

Proposição 2.8. Seja T um movimento rígido de E. O volume do n-simplexo $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ é igual ao volume do n-simplexo $[T(A_0), T(A_1), \ldots, T(A_n)]$.

Demonstração. Seja T^* o operador ortogonal associado a T. Então

$$\frac{1}{n!}\,\Delta(T(A_1) - T(A_0), \ldots, T(A_n) - T(A_0)) =$$

$$= \frac{1}{n!}\,\Delta(T^*(A_1 - A_0), \ldots, T^*(A_n - A_0)),$$

e, pela proposição 2.7, êste último número é igual a $\frac{1}{n!}\Delta(A_1 - A_0, \ldots, A_n - A_0)$.

Uma vez definido o volume do n-simplexo, pode-se estender a noção de volume a outros subconjuntos do espaço E. Essa extensão é objeto da chamada "teoria da medida".

Observação. E possível associar a n vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ de um espaço vetorial euclidiano V o número $\Delta(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ sem lançar mão de bases de V.

De fato, o produto escalar de V estende-se canônicamente a um produto escalar de $\overset{n}{\wedge} V$ (produto exterior de V, n vêzes). $\Delta(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ é simplesmente o módulo do n-vetor $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_n$. Dêsse modo, pode-se definir o volume de um n-simplexo sem o uso de bases de V.

Exercícios

1) Seja E um espaço euclidiano de dimensão n e $A_0, \ldots, A_p$, $0 \le p \le n$, $p + 1$ pontos linearmente independentes de E. Dados outros $p + 1$ pontos $B_0, \ldots, B_p$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma semelhança T de E tal que $T(A_i) = B_i$, $0 \le i \le p$, é que exista uma constante $\rho \neq 0$ tal que $\delta(A_i, A_j) = \rho\delta(B_i, B_j)$, $0 \le i, j \le p$.

2) Demonstre que tôda reflexão ao longo de um hiperplano é um movimento rígido impróprio.

3) Dadas duas homotetias H_1 e H_2 de um espaço euclidiano E, determine o leitor em que condições $H_1H_2 = H_2H_1$.

4) Dada uma transformação afim T de um espaço euclidiano E e um n-simplexo $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$, o volume do n-simplexo $[T(A_0), T(A_1), \ldots, T(A_n)]$ é igual ao volume do n-simplexo $[A_0, \ldots, A_n]$ se, e sòmente se, T fôr unimodular, isto é, se, e sòmente se, o módulo do determinante da transformação linear associada T^* fôr 1.

5) O volume de um n-simplexo $[A_0, \ldots, A_n]$ de um espaço euclidiano de dimensão n é igual a $\frac{1}{n}$ vêzes o produto da distância de um dos vértices à face oposta pelo volume dessa face.

§ 5. Ângulos

Em todo êste parágrafo, V designará um espaço vetorial euclidiano de dimensão 2 e usaremos a expressão semi-reta para indicar as semi-retas vetoriais de V. Em cada semi-reta r de V existe um único vetor de módulo 1, que chamaremos *vetor unitario* de r.

Um operador ortogonal próprio de V será denominado *rotação*. O conjunto das rotações é um grupo que designaremos com $0^+(V)$. As proposições seguintes desempenharão papel fundamental neste parágrafo.

Proposição 2.9. Sejam $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ dois vetores de módulo 1 de V. Existe uma única rotação T tal que $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$.

Demonstração. Seja $\vec{h}_1$ um vetor ortogonal a $\vec{e}_1$ de módulo 1. Existe um único vetor $\vec{h}_2$, de módulo 1, ortogonal a $\vec{e}_2$, tal que as bases ortonormais $(\vec{e}_1, \vec{h}_1)$ e $(\vec{e}_2, \vec{h}_2)$ têm a mesma orientação. De fato, se $\vec{u} \neq \vec{0}$ é um vetor ortogonal a $\vec{e}_2$, qualquer outro vetor v, ortogonal a $\vec{e}_2$, será $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Se $|\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}| = 1$, devemos ter $|\lambda| = \frac{1}{|\vec{u}|}$ e, portanto, $\lambda = \frac{1}{|\vec{u}|}$ ou $\lambda = -\frac{1}{|\vec{u}|}$.

As bases obtidas tomando-se $\lambda = \frac{1}{|\vec{u}|}$ e $\lambda = \frac{-1}{|\vec{u}|}$ não têm a mesma orientação; logo, uma delas tem a mesma orientação que a base $(\vec{e}_1, \vec{h}_1)$.

Seja T o operador linear tal que $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $T(\vec{h}_1) = \vec{h}_2$. T é um operador ortogonal próprio e $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$. Para demonstrar a unicidade, seja S uma rotação tal que $S(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$. Construamos $\vec{h}_1$ como acima. Então $S(\vec{h}_1)$ é ortogonal a $\vec{e}_2$, pois $0 = \langle \vec{e}_1, \vec{h}_1 \rangle =$ $= \langle S(\vec{e}_1), S(\vec{h}_1) \rangle = \langle \vec{e}_2, S(\vec{h}_1) \rangle$, e $|S(\vec{h}_1)| = 1$.

Por outro lado, as bases $(\vec{e}_1, \vec{h}_1)$ e $(\vec{e}_2 = S(\vec{e}_1), S(\vec{h}_1))$ têm a mesma orientação. Logo $S(\vec{h}_1) = \vec{h}_2$ e, portanto, $S = T$.

Proposição 2.10. Seja $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ uma base ortonormal de V e T um operador linear. T é uma rotação se, e sòmente se, a sua matriz em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é da forma

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

com $a^2 + b^2 = 1$. T é um operador ortogonal impróprio se, e sòmente se, a sua matriz em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é da forma

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ b & -a \end{Vmatrix}$$

com $a^2 + b^2 = 1$.

Demonstração. Demonstraremos apenas a primeira parte. A demonstração da segunda parte se faz anàlogamente.

Seja

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

a matriz de T em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Como $\det T = 1$, a matriz de T^{-1} é

$$\begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}$$

Como T é ortogonal, $T^{-1} = {}^tT$, logo,

$$\begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Portanto, $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = -a_{21}$.

Por outro lado, de $|T(\vec{e}_1)| = 1$, vem $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$.

Recìprocamente, como se verifica fàcilmente, a matriz

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

com $a^2 + b^2 = 1$ é uma matriz ortogonal de determinante 1. Logo, o operador correspondente na base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é uma rotação.

Proposição 2.11. O grupo $0^+(V)$ é comutativo.

Demonstração. Pela proposição 2.10, o grupo $0^+(V)$ é isomorfo ao grupo das matrizes

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

O cálculo direto do produto de dois elementos dêste último grupo mostra que êle é comutativo.

Convém notar que o grupo $0(V)$ de todos os operadores ortogonais de V não é comutativo, como se verifica imediatamente pelo cálculo direto do produto de dois elementos convenientemente escolhidos.

Seja Δ o conjunto dos pares ordenados (r_1, r_2) de semi-retas de V. Introduzimos em Δ a seguinte relação: (r_1, r_2) é equivalente a (r_1', r_2') se existe uma rotação T tal que $T(r_1) = r_1'$ e $T(r_2) = r_2'$. Verifica-se, sem dificuldade, que se trata efetivamente de uma relação de equivalência. A classe de equivalência de (r_1, r_2) será indicada com $(r_1 \hat{,} r_2)$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto quociente de Δ por essa relação de equivalência.

Definição 2.12. Chama-se ângulo da semi-reta r_1 com a semi-reta r_2 a classe de equivalência $(r_1 \hat{,} r_2)$.

Seja E um espaço euclidiano associado a V e $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ duas semi-retas de E. Sejam r_1 e r_2 as semi-retas vetoriais associadas a $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$.

Definição 2.13. Chama-se ângulo das semi-retas $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ a classe de equivalência $(r_1 \hat{,} r_2)$.

Proposição 2.12. Dados um ângulo α e uma semi-reta r, existe uma única semi-reta r' tal que $\alpha = (r \hat{,} r')$.

Demonstração. Existência. Sejam s e s' duas semi-retas tais que $\alpha = (s \hat{,} s')$ e seja T a rotação que leva s em r. Façamos $r' = T^{-1}(s')$. Por definição, $(r \hat{,} r') = (s \hat{,} s') = \alpha$. A unicidade decorre do fato de ser única a rotação que leva s em r.

Proposição 2.13. Sejam r_1, r_2, r_1', r_2' quatro semi-retas de V. Os ângulos $(r_1 \hat{,} r_2)$ e $(r_1' \hat{,} r_2')$ são iguais quando, e sòmente quando, os ângulos $(r_1 \hat{,} r_1')$ e $(r_2 \hat{,} r_2')$ são iguais.

Demonstração. Suponhamos $(r_1 \hat{,} r_2) = (r_1' \hat{,} r_2')$, e seja U a rotação tal que $U(r_1) = r_1'$ e $U(r_2) = r_2'$.

Pela proposição 2.9, existe uma rotação T tal que $T(r_1) = r_2$. Como o grupo $0^+(V)$ é comutativo, temos

$$r_2' = U(T(r_1)) = T(U(r_1)) = T(r_1').$$

Portanto, $(r_1 \hat{,} r_1') = (r_2 \hat{,} r_2')$.

Reciprocamente, se $(r_1 \hat{,} r_1') = (r_2 \hat{,} r_2')$, então demonstra-se anàlogamente, trocando r_1' por r_2', que $(r_1 \hat{,} r_2) = (r_1' \hat{,} r_2')$.

Dado um ângulo α e tomado um representante (r_1, r_2) de α, seja T uma rotação tal que $T(r_1) = r_2$. T não depende do representante escolhido. De fato, se $(r_1' \hat{,} r_2') = (r_1 \hat{,} r_2)$, pela proposição 2.13, $(r_1 \hat{,} r_1') = (r_2 \hat{,} r_2')$. Logo, existe uma rotação que leva r_1 em r_2 e r_1' em r_2'. Como T é a ùnica rotação que leva r_1 em r_2, devemos ter $T(r_1') = r_2'$. Da proposição 2.13, decorre ainda que a aplicação h assim definida, do conjunto dos ângulos no conjunto das rotações é injetora. h é também, evidentemente, sobrejetora. T denomina-se a rotação de ângulo α, e α o ângulo da rotação T. O ângulo de uma rotação T é, portanto, o ângulo $(r \hat{,} T(r))$, onde r é uma semi-reta qualquer.

Por meio da aplicação bijetora h, transportamos a $\mathcal{A}$ a estrutura de grupo abeliano de $0^+(V)$. Denotando-se aditivamente a operação do grupo $\mathcal{A}$, segue-se imediatamente que:

$$(r\hat{,}r') + (r'\hat{,}r'') = (r\hat{,}r''),$$

donde se deduz que

$$(r\hat{,}r) = 0 \quad e \quad (r\hat{,}r') = -(r'\hat{,}r).$$

Dada uma semi-reta r, denotaremos $-r$ a semi-reta oposta a r. O ângulo $(r\hat{,}-r)$ não depende da semi-reta r, como se verifica fàcilmente, e denomina-se *ângulo raso*.

No que se segue, suporemos V orientado. Seja T uma rotação de V. A matriz $\|M\|$ de mudança de uma base ortonormal de V orientada positivamente para outra base ortonormal de V orientada positivamente é uma matriz ortogonal de determinante 1. Como o grupo dessas matrizes é comutativo (proposição 2.11), resulta da expressão $\|M\|^{-1}\|T\|\,\|M\|$ de mudança de base da matriz de um operador linear que a matriz de T independe da base ortonormal com orientação positiva escolhida.

Seja α um ângulo e T a rotação de ângulo α. Seja

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

a matriz de T em relação a uma base ortonormal com orientação positiva.

Definição 2.14. As aplicações $\cos : \mathcal{A} \to R$ e $\text{sen} : \mathcal{A} \to R$, que ao ângulo α associam respectivamente os números reais a e b, denominam-se *co-seno* e *seno*.

Da definição 2.14 resulta que a matriz da rotação de ângulo α em relação a qualquer base ortonormal com orientação positiva de V é

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \qquad [2.2]$$

Para todo ângulo α, vale a relação

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \qquad [2.3]$$

que se deduz imediatamente da ortogonalidade da matriz [2.2].

Dados dois ângulos α e β tais que $\cos\alpha = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$, da definição das aplicações $\cos \mathcal{A}$ e $\operatorname{sen} \mathcal{A}$, resulta que as rotações de ângulos α e β são iguais e, portanto, $\alpha = \beta$. Além disso, dados dois números reais a e b tais que $a^2 + b^2 = 1$, existe um ângulo α, único pela observação acima, tal que $\cos\alpha = a$ e $\operatorname{sen}\alpha = b$. De fato, α é o ângulo da rotação, cuja matriz em relação a uma base ortonormal com orientação positiva é

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

Observemos que, se a matriz da rotação T em relação à base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é

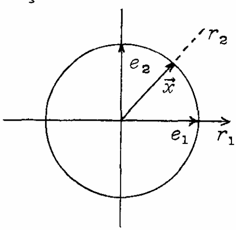
$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

então a matriz de T em relação à base $(\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$ é

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$$

Portanto, $\cos\alpha$ não depende da orientação de V escolhida mas $\operatorname{sen}\alpha$ troca de sinal quando se muda a orientação de V. (Daí a necessidade de orientar o plano para definir a função trigonomé- trica sen).

Seja (r_1, r_2) um par de semi-retas tais que $\alpha = (r_1 \hat{,} r_2)$ e $\vec{e}_1$ e $\vec{x}$, respectivamente, os vetores unitários de r_1 e r_2. Seja $\vec{e}_2$ o vetor tal que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é uma base ortonormal de V com orientação positiva. Se T é a rotação de ângulo α, então $T(\vec{e}_1) = \vec{x}$ e, pela definição da matriz de um operador, temos



$$\vec{x} = \cos\alpha \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{e}_2. \quad [2.4]$$

Dados dois vetores não nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de V, chamamos ângulo dêsses vetores o ângulo das semi-retas a que êles pertencem. O ângulo dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ será denotado também com $(\vec{x} \hat{,} \vec{y})$.

Seja α o ângulo dos vetores não nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$; indiquemos com $\vec{e}_1$ e $\vec{u}$, respectivamente, os vetores unitários $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ $\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ e seja $\vec{e}_2$ o vetor tal que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é uma base ortonormal com orientação positiva. Pela fórmula [2.4].

$$\vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{e}_2,$$

logo

$$\langle \vec{e}_1, \vec{u} \rangle = \cos\alpha$$

e, portanto,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y}). \qquad [2.5]$$

Sejam α e β dois ângulos e T e U as rotações de ângulo α e β. Por definição de soma de ângulos, a rotação de ângulo $\alpha + \beta$ é $T \circ U$. Tomada uma base ortonormal de V com orientação positiva e efetuando o produto das matrizes

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Vmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{Vmatrix}$$

obtemos as fórmulas de adição das funções seno e co-seno.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \end{aligned} \qquad [2.6]$$

§ 6. Medida de Ângulos

Vamos construir, neste parágrafo, um homomorfismo sobrejetor do grupo aditivo $\mathbb{R}$ dos números reais no grupo $\mathcal{C}$ dos ângulos. Supomos o espaço V (de dimensão 2) orientado, de modo que as aplicações cos e sen estão definidas.

Seja $h: \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ uma aplicação sobrejetora e denotemos com f e g, respectivamente, as aplicações $\cos \circ h$ e $\operatorname{sen} \circ h$.

Proposição 2.14. Uma condição necessária e suficiente para que h seja um homomorfismo é que f e g satisfaçam às seguintes fórmulas de adição:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$
$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \qquad [2.7]$$

Demonstração. A condição é necessária; de fato, de $h(x+y) = h(x) + h(y)$, vem:

$$f(x+y) = \cos(h(x+y)) = \cos(h(x) + h(y)) = \cos(h(x))\cos(h(y)) - \operatorname{sen}(h(x))\operatorname{sen}(h(y)) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

Anàlogamente, para a função g.

A condição é suficiente. Temos:

$$\cos(h(x+y)) = f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) = \cos(h(x))\cos(h(y)) - \operatorname{sen}(h(x))\operatorname{sen}(h(y)) = \cos(h(x) + h(y))$$

Anàlogamente, a segunda equação de [2.6] conduz a

$$\operatorname{sen}(h(x+y)) = \operatorname{sen}(h(x) + h(y))$$

Logo, $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

Da análise matemática sabemos que as funções de variável real $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ definidas pelas séries

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

satisfazem às condições da proposição [2.7] e ainda $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Pode-se demonstrar, sem grande dificuldade, a partir das séries acima, que, dados dois números reais a e b tais que $a^2 + b^2 = 1$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x_0 = a$ e $\operatorname{sen} x_0 = b$. Além disso, o conjunto dos números reais que satisfazem essas duas equações é o conjunto $\{x_0 + 2k\pi\}$ onde k é um número inteiro qualquer.

Dado um número real x, existe um único ângulo α tal que $\cos\alpha = \cos x$ e $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} x$. Façamos $\alpha = h(x)$. h é uma aplicação sobrejetora; de fato, pelo que foi dito acima, dado um ângulo α como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x_0 = \cos\alpha$ e $\operatorname{sen} x_0 =$

$= \operatorname{sen} \alpha$. Como, pela definição de h, $\cos x = \cos(h(x))$ e $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(h(x))$, pela proposição 2.14 h é um homomorfismo.

Definição 2.15. Dado um ângulo α, qualquer número real x tal que $h(x) = \alpha$ denomina-se uma medida de α.

Pela observação feita acima, se x_0 é uma medida de α, as outras medidas são os números $x_0 + 2k\pi$. É claro que se x e y são medidas dos ângulos α e β, então $x + y$ é uma medida de $\alpha + \beta$.

Em questões que envolvem medidas de ângulos, freqüentemente identifica-se um ângulo com uma de suas medidas. É assim que se fala do ângulo $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-3\pi}{4}$ etc.

Observações. 1. Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita n. Dados dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de V, não nulos e linearmente independentes, entenderemos por ângulo dêsses vetores o ângulo de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ no subespaço de dimensão 2 gerado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Como o co-seno de um ângulo independe da orientação do plano, $\cos(\vec{x}, \vec{y})$ está perfeitamente determinado, e, além disso,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| \quad |\vec{y}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}).$$

Entretanto, sem orientar o plano gerado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$, não se pode definir nem $\operatorname{sen}(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ nem a medida de $(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$.

Se $\vec{x}$ e $\vec{y}$, não nulos, forem colineares, diremos que formam ângulo nulo se pertencerem à mesma semi-reta e que formam ângulo raso se pertencerem a semi-retas opostas.

2.* Como vimos acima, existe uma aplicação canônica do conjunto $\mathcal{A}$ dos ângulos no grupo $0^+(V)$, a saber, a aplicação que leva o ângulo α na rotação de ângulo α. Transportamos para $\mathcal{A}$, por meio dessa aplicação, a estrutura de grupo topológico de $0^+(V)$. Com a estrutura assim definida, $\mathcal{A}$ é um grupo topológico canônicamente isomorfo a $0^+(V)$. Por outro lado, pode-se demonstrar que o grupo topológico $0^+(V)$ e, portanto $\mathcal{A}$, é isomorfo ao grupo $\mathbb{R}/Z$, onde $\mathbb{R}$ é o grupo aditivo dos números reais, munido da topologia usual, e Z é o subgrupo dos números inteiros. Ainda mais,

* Os resultados enunciados nesta observação não são necessários para a compreensão do resto do texto e podem ser deixados de lado pelo leitor que não conheça o conceito de grupo topológico. Para a demonstração dos teoremas sôbre grupos topológicos aqui enunciados, consultar N. Bourbaki, Topologie Générale, livro III.

existem sòmente dois isomorfismos de grupo topológico entre $\mathcal{A}$ e $\mathbb{R}/Z$. A orientação de V permite a escolha de um dêsses dois isomorfismos, a saber, o isomorfismo que faz corresponder à classe do número $\frac{1}{4}$(mod Z) o ângulo de 2 vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ tais que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é uma base ortonormal com orientação positiva. Seja g o isomorfismo assim definido e $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/Z$ o homomorfismo canônico. Para qualquer número real a, a aplicação $x \in \mathbb{R} \to j(ax)$ é um homomorfismo contínuo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}/Z$; êsse homomorfismo é sobrejetor quando $a \neq 0$. Recìprocamente, podese demonstrar que qualquer homomorfismo contínuo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}/Z$ é da forma $x \in \mathbb{R} \to j(ax)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Portanto, os homomorfismos contínuos sobrejetores de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{A}$ são da forma $x \in \mathbb{R} \to g(j(ax))$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Denotemos com h_a o homomorfismo correspondente ao número a. Fixado a, qualquer número real pertencente à classe $h_a^{-1}(\alpha)$ denomina-se uma medida do ângulo α na base a. Quando $a > 1$, o ângulo $h_a(1)$ denomina-se unidade de ângulo na base a. Quando $a = 2\pi$ (observar que 2π é o período principal das funções sen e cos!) o homomorfismo h_a é exatamente aquêle que definimos por meio das funções seno e co-seno. A unidade de ângulo correspondente denomina-se radiano. Outras unidades usadas freqüentemente são as que correspondem às bases $a = 360$ (grau) e $a = 400$ (grado).

Para finalizar, desejamos salientar que o conceito de medida de ângulo envolve de maneira essencial a noção de continuidade, isto é, a topologia da reta real $\mathbb{R}$.

§ 7. Movimentos Rígidos no Plano e no Espaço

Vamos agora estudar, de maneira mais detalhada, os movimentos rígidos no plano e no espaço euclidiano de dimensão 3. Usaremos, neste parágrafo, alguns resultados de álgebra linear que serão apresentados sob a forma de lemas.

Lema 2.1. Se V é um espaço vetorial euclidiano de dimensão 2 e se T é um operador ortogonal próprio, então +1 é valor próprio de T se, e sòmente se, T é a identidade.

Demonstração. Se T = I, +1 é valor próprio de T. Recìprocamente, suponhamos que +1 seja valor próprio de T. Certamente, existe um vetor próprio de módulo 1 associado a +1, pois se $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um vetor próprio associado a +1, $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ também o é. Seja então $\vec{e}_1$ um vetor próprio unitário associado a +1, e $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ uma base ortonormal de V. Como $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ e $T(\vec{e}_2)$ é ortogonal a $T(\vec{e}_1)$, segue-se que ou $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$ ou $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$. No primeiro caso T = I e o teorema é verdadeiro. Se ao contrário $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$, então na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a matriz de T é

$$\|T\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$$

e $\det T = -1$ contra a hipótese.

Teorema 2.2. Um movimento rígido próprio T de um plano euclidiano ou é uma translação ou tem um único ponto fixo.

Demonstração. Seja T^* o operador linear associado a T.

1o. caso. T^* é a identidade. Tomando o ponto 0, qualquer, no plano, temos:

$$T(X) = T(0) + T^*(X - 0) = T(0) + (X - 0) = X + (T(0) - 0)$$

para qualquer ponto X do plano. Logo, T é a translação de vetor $T(0) - 0$.

2o. caso. T^* não é a identidade. Vamos demonstrar inicialmente que $T^* - I$ é inversível. De fato, dado $\vec{x} \neq \vec{0}$, $T^*(\vec{x}) \neq \vec{x}$, pois $+1$ não é valor próprio de T^*, donde $(T^* - I)(\vec{x}) = T^*(\vec{x}) - \vec{x} \neq \vec{0}$. Logo $T^* - I$ é inversível e em particular e sobrejetor. Dado, então, o vetor $0 - T(0)$, existe $\vec{u}$ tal que $(T^* - I)(\vec{u}) = 0 - T(0)$. Façamos $M = 0 + \vec{u}$, e vamos verificar que M é ponto fixo. De fato,

$$T(M) = T(0) + T^*(M - 0) = T(0) + T^*(\vec{u}) = T(0) + \vec{u} + (0 - T(0)) =$$
$$= 0 + \vec{u} = M.$$

Falta demonstrar apenas que êsse ponto fixo é único. Podemos escrever:

$$T(X) = T(M) + T^*(X - M) = M + T^*(X - M)$$

Se M' é outro ponto fixo,

$$T(M') = M + T^*(M' - M) = M'$$

donde $M' - M = T^*(M' - M)$. Como $+1$ não é valor próprio de T^*, vem que $M' - M = 0$, ou $M' = M$.

Definição 2.16. Um movimento rígido próprio no plano com um ponto fixo denomina-se *rotação* com centro nesse ponto.

Definição 2.17. Chama-se *ângulo da rotação* T o ângulo do operador de rotação associado T^*.

Lema 2.2. Todo operador ortogonal impróprio T de um espaço vetorial euclidiano V de dimensão finita admite -1 como valor próprio.

Demonstração. Suponhamos que V tenha dimensão n e seja $\|T\|$ a matriz de T em relação a uma base ortonormal de V. Como $\|T\|$ é uma matriz ortogonal, ${}^t\|T\| \, . \, \|T\| = I_n$ onde ${}^t\|T\|$ indica a matriz transposta de T e I_n a matriz identidade $n \times n$. Portanto, ${}^t\|T\|(\|T\| + I_n) = I_n + {}^t\|T\|$. Tomando determinantes e lembrando que $\det\|T\| = \det{}^t\|T\| = -1$, vem $-\det(\|T\| + I_n) = \det(I_n + {}^t\|T\|) = \det{}^t(I_n + {}^t\|T\|) = \det(I_n + \|T\|)$. Logo $\det(\|T\| + I_n) = 0$, isto é, $\det(T + I) = 0$, onde I é o operador identidade. Portanto, -1 é valor próprio de T.

Lema 2.3. Todo operador ortogonal impróprio de um espaço vetorial euclidiano V de dimensão 2 admite +1 e -1 como valôres próprios.

Demonstração. Que admite -1 como valor próprio resulta do lema 2.2. Seja então $\vec{e}_1$ um vetor próprio associado ao valor próprio -1, podemos supor $|\vec{e}_1| = 1$. Seja $\vec{e}_2$ um vetor unitário tal que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ seja base ortonormal de V. Temos:

$$S(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 \quad \text{e} \quad S(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \quad \text{ou} \quad -\vec{e}_2$$

Se $S(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$ vem

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad \text{e} \quad \det S = 1$$

contra a hipótese, logo $S(\vec{e}_2) = +\vec{e}_2$ e portanto +1 é valor próprio de S.

Da demonstração vemos também que os vetores próprios associados aos valôres próprios +1 e -1 são ortogonais.

Teorema 2.3. Um movimento rígido impróprio T de um plano euclidiano é o produto de uma reflexão ao longo de uma reta r por uma translação cujo vetor pertence à direção de r.

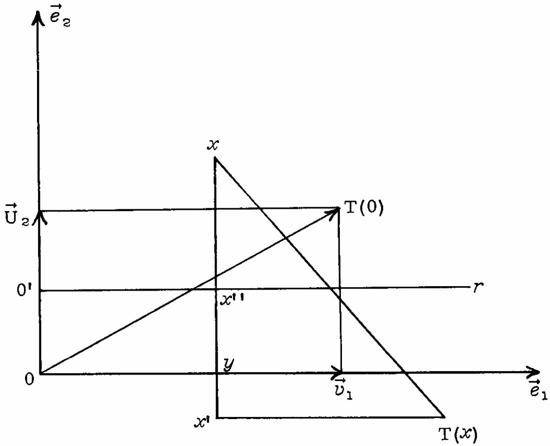
Demonstração. Seja T^* o operador ortogonal associado a T e sejam $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ os vetores próprios unitários associados aos valôres próprios +1 e -1 de T^*. Seja 0 um ponto qualquer do plano. Podemos escrever:

$$T(X) = T(0) + T^*(X - 0) = (T(0) - 0) + 0 + T^*(X - 0)$$

Vamos decompor $T(0) - 0$ segundo $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$; obtemos: $T(0) - 0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1 = \eta\vec{e}_1$ e $\vec{v}_2 = u\vec{e}_2$. Segue-se que

$$T(X) = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T^*(X - 0) \qquad [2.8]$$

Tomemos o ponto $0' = 0 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$ e a reta r por $0'$ tal que $\vec{e}_1 \in \in \operatorname{dir} r$.



Vamos demonstrar que T é o produto da reflexão ao longo de r pela translação de vetor $\vec{v}_2$. Seja Y a projeção de X sôbre a reta que passa por 0 e cuja direção contém $\vec{e}_1$. Temos

$$X - 0 = (X - Y) + (Y - 0)$$

$$T^*(X - 0) = T^*(X - Y) + T^*(Y - 0) = (Y - X) + (Y - 0)$$

pois $T^*(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$ e $T^*(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$. Substituindo em [2.8] vem

$$T(X) = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (Y - X) + (Y - 0) = \vec{v}_1 + (Y + (Y - X) + \vec{v}_2).$$

Façamos $X' = Y + (Y - X) + \vec{v}_2 = Y + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + (Y + \frac{1}{2}\vec{v}_2 - X)$ e $X'' = Y + + \frac{1}{2}\vec{v}_2$ (projeção de X sôbre r).

Obtemos $X' = X'' + (X'' - X)$. Logo X' é a imagem de X pela reflexão ao longo de r.

Mas $T(X) = X' + \vec{v}_1$. Concluímos que T é o produto da reflexão ao longo de r pela translação de vetor v_1.

Passaremos agora a estudar os movimentos rígidos no espaço. Começaremos com o seguinte lema.

Lema 2.4. Seja T um operador ortogonal próprio de um espaço vetorial euclidiano V de dimensão ímpar. Então +1 é valor próprio de T.

Demonstração. Seja $\|T\|$ a matriz de T em relação a uma base ortonormal de V. Como no lema 2.2 temos ${}^t\|T\| \cdot \|T\| = I_n$ ou seja,

$$ {}^t\|T\|(\|T\| - I_n) = (I_n - {}^t\|T\|) = -({}^t\|T\| - I_n). $$

Tomando determinantes e lembrando que $\det {}^t\|T\| = \det \|T\| = +1$, vem

$$ \det(\|T\| - I_n) = (-1)^n \cdot \det({}^t\|T\| - I_n). $$

Mas $(-1)^n = -1$ pois n é ímpar, logo

$$ \det(\|T\| - I_n) = -\det({}^t\|T\| - I_n) = -\det {}^t({}^t\|T\| - I_n) = -\det(\|T\| - I_n). $$

Logo, $\det(\|T\| - I_n) = 0$, ou seja, $\det(T - I) = 0$ e, portanto, +1 é valor próprio de T.

Até o fim dêste parágrafo, V designará um espaço vetorial euclidiano de dimensão 3.

Lema 2.5. Seja S um operador ortogonal próprio, distinto da identidade, de V. Nessas condições, o conjunto dos vetores fixos por S é uma reta.

Demonstração. Pelo lema 2.4, S sendo um operador ortogonal próprio de um espaço de dimensão ímpar, admite +1 como valor próprio. Seja então $\vec{e}_1$ um vetor próprio unitário associado ao valor próprio +1 de S. Vamos demonstrar que o conjunto dos vetores fixos por S é a reta $r = \{\alpha\vec{e}_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Em primeiro lugar, todos os vetores de r são fixos por S, pois $S(\alpha\vec{e}_1) = \alpha S(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1$. Falta demonstrar que todos os vetores fixos por S pertencem a r. De fato, seja H o plano ortogonal a $\vec{e}_1$. Se $\vec{x} \in H$, $S(\vec{x}) \in H$ pois

$$ \langle S(\vec{x}), \vec{e}_1 \rangle = \langle S(\vec{x}), S(\vec{e}_1) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle = 0. $$

Designemos então por S a restrição de S a H, e vamos verificar que S' é um operador ortogonal próprio em H, distinto da identidade. É imediato que S' é ortogonal, pois S é ortogonal. Seja $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de H. Temos

$$\begin{aligned} S(e_1) &= \vec{e}_1 \\ S(e_2) &= a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 \\ S(e_3) &= c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \end{aligned}$$

donde

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{Vmatrix}$$

e

$$\|S'\| = \begin{Vmatrix} a & c \\ b & d \end{Vmatrix} \qquad \text{(na base } (\vec{e}_2, \vec{e}_3))$$

logo $\det\|S'\| = \det\|S\| = 1$ e, portanto, S' e operador ortogonal próprio. Como $S \neq I$, então $S' \neq I$.

Seja $\vec{u}$ um vetor de V tal que $S(\vec{u}) = \vec{u}$. Podemos escrever

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{onde } \vec{x} \in r \text{ e } \vec{y} \in H$$

Temos: $\vec{u} = S(\vec{u}) = S(\vec{x}) + S(\vec{y}) = \vec{x} + S(\vec{y})$ e $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ donde $\vec{y} = S(\vec{y}) = S'(\vec{y})$. Sendo S' um operador ortogonal próprio, distinto da identidade, de um plano, pelo lema 2.1 +1 não é valor próprio de S', logo $\vec{y} = 0$ e, portanto, $\vec{u} \in r$.

Definição 2.18. Um operador ortogonal próprio S de um espaço vetorial euclidiano de dimensão 3 que deixa fixos os pontos de uma reta r denomina-se *rotação* em tôrno de r. r denomina-se *eixo de rotação* do operador S.

Como é fácil ver, o conjunto das rotações em tôrno de um eixo fixo de um espaço vetorial euclidiano de dimensão 3 é um grupo, subgrupo do grupo ortogonal $0^+(V)$.

Da definição 2.18 segue-se também que qualquer reta é um eixo de rotação do operador identidade de V. Por outro lado, na demonstração do lema 2.5, ficou estabelecido que se um operador ortogonal próprio S de V admite um eixo de rotação r, a restrição S' do operador S ao plano H ortogonal a r é um operador ortogonal próprio. Justifica-se assim a introdução da seguinte definição:

Definição 2.19. Chama-se ângulo de rotação do operador S em tôrno do eixo r o ângulo de rotação do operador $S' = S/H$.

Suponhamos V orientado e seja S uma rotação em tôrno de uma reta r. Suponhamos r orientada e seja $(\vec{e}_1)$ base ortonormal positiva de r. Seja H o plano ortogonal a r. Dados dois pares de vetores linearmente independentes $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $(\vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ de H, tais que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $(\vec{e}_1, \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ são bases de V com orientação positiva, então as bases $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $(\vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ de H têm mesma orientação. Assim, a classe $\{(\vec{e}_2, \vec{e}_3)\}$ das bases ortonormais de H, tais que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tem orientação positiva em V, definem uma orientação de H. Dêsse modo, quando V e o eixo de rotação r são orientados o plano H tem uma orientação natural e podemos definir a medida do ângulo de rotação de S como sendo a medida do ângulo de rotação de S' em H.

Teorema 2.4. Seja T um movimento rígido próprio, distinto da identidade, de um espaço euclidiano de dimensão 3, que deixa fixo um ponto. Então, o conjunto dos pontos fixos de T é uma reta.

Demonstração. O operador ortogonal T^* associado a T é próprio e distinto da identidade (pois T não é translação). Pelo lema 2.5 o conjunto dos vetores fixos por T^* é a reta $\{\lambda\vec{e}_1\}$, onde $\vec{e}_1$ é um vetor próprio associado ao valor próprio +1. Seja r a reta $\{0 + \lambda\vec{e}_1\}$, onde 0 é o ponto fixo por T. Todos os pontos de r são fixos: de fato, se $X = 0 + \lambda\vec{e}_1$,

$$T(X) = T(0) + T^*(X-0) = 0 + T^*(\vec{e}_1) = 0 + \lambda\vec{e}_1 = X$$

Por outro lado, se X é ponto fixo por T, vem:

$$X = T(X) = T(0) + T^*(X-0) = 0 + T^*(X-0)$$

logo $X - 0 = T^*(X-0)$, isto é, $X - 0$ é vetor fixo por T^*, donde $X - 0 = \lambda\vec{e}_1$ e, portanto, $X \in r$.

Definição 2.19. Um movimento rígido próprio de um espaço euclidiano de dimensão 3 que deixa fixos os pontos de uma reta denomina-se *rotação* em tôrno dessa reta. A reta fixa denomina-se eixo de rotação.

Definição 2.20. Chama-se *ângulo da rotação* T o ângulo do operador de rotação associado T^*.

Seja T uma rotação de eixo r e T^* o operador ortogonal associado. Seja H o plano vetorial ortogonal a dir r, tomemos $A \in r$ e o plano π por A perpendicular a r. É claro que H = dir π. Sabemos que T^* deixa H invariante e, como $T(A) = A$, T deixa o plano π fixo. Portanto, a restrição de T a π é um movimento rígido T' em π. O operador ortogonal $(T')^*$ associado a T' é a restrição de T^* a H, logo $(T')^*$ é operador ortogonal próprio, e, portanto, T' é rotação de centro A. O ângulo de rotação de T' é o ângulo de rotação de T.

Teorema 2.5. Todo movimento rígido próprio T num espaço euclidiano E de dimensão 3 ou é uma translação, ou é o produto de uma rotação por uma translação de vetor pertencente à direção do eixo de rotação.

Demonstração. Seja T^* o operador ortogonal associado a T e 0 um ponto de E.

1o. caso. T^* é a identidade. Nesse caso, T é a translação de vetor $T(0) - 0$.

2o. caso. T^* não é a identidade. Seja $\vec{e}_1$ vetor próprio de T^* associado ao valor próprio +1, e H o plano ortogonal a $\vec{e}_1$. Tomemos o plano π que passa por 0 e cuja direção é H. Podemos escrever $T(X) = (T(0) - 0) + 0 + T^*(X - 0)$.

Vamos decompor $T(0) - 0$ da seguinte maneira:

$$T(0) - 0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{com} \quad \vec{v}_1 \in \operatorname{dir} \pi \quad \text{e} \quad \vec{v}_2$$

pertencente ao ortogonal da direção de H.

Definimos a aplicação

$$T'(X) = T(X) - \vec{v}_2.$$

T' é um movimento rígido, produto de T pela translação de vetor $-\vec{v}_2$, que deixa fixo o plano π. De fato, temos $(T')^* = T^*$, logo $(T')^*$ deixa invariante H. Mas

$$T'(0) = T(0) - \vec{v}_2 = T(0) - 0 + 0 - \vec{v}_2 = 0 + \vec{v}_1 \in \pi$$

e, portanto, π é invariante por T'.

Seja $\bar{T}$ a restrição de T' a π. $\bar{T}$ é um movimento rígido próprio, distinto da identidade, de π; logo $\bar{T}$ é uma rotação. Seja M o centro dessa rotação e designemos com r a reta perpendicular a

π por M. Como $T'(M) = M$ e $\vec{e}_1$ pertence à direção de r, T' é uma rotação de eixo r. Chamando-se $\mathcal{T}$ a translação de vetor $\vec{v}_2$, vem $T = \mathcal{T} \circ T'$, e o teorema está demonstrado.

Teorema 2.6. Todo movimento rígido impróprio T num espaço euclidiano de dimensão 3 ou é o produto de uma reflexão ao longo de um plano por uma translação de vetor paralelo ao plano de reflexão, ou é o produto de uma reflexão ao longo de um plano por uma rotação de eixo perpendicular ao plano de reflexão.

Demonstração. Seja T^* o operador ortogonal associado a T e seja 0 um ponto qualquer de E. Temos

$$T(X) = T(0) + T^*(X - 0)$$

1o. caso. Suponhamos que +1 é valor próprio de T^*. Como $\det T^* = -1$ e, pelo lema 2.2, -1 é valor próprio de T^*, existe uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V tal que

$$T^*(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$$
$$T^*(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$
$$T^*(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$$

Seja M o ponto médio do segmento $[T(0), 0]$ e seja π o plano que passa por M e cuja direção é o subespaço gerado por $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Vamos decompor $(T(0) - 0)$ da seguinte maneira:

$$T(0) - 0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{onde} \quad \vec{v}_1 \in \operatorname{dir} \pi \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \lambda \vec{e}_1$$

Temos: $T(X) = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T^*(X - 0)$. Seja Y a projeção de X sôbre o plano π; vem:

$$\begin{aligned} T(X) &= 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T((X - Y) + (Y - M) + (M - 0)) = \\ &= 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (Y - X) + (Y - M) + \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \\ &= 0 + \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + (Y - X) + (Y - M) = \\ &= M + (Y - M) + (Y - X) + \vec{v}_1 = Y + (Y - X) + \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Mas $Y + (Y - X) = X'$ é o simétrico de X em relação a π. Logo $T(X) = X' + \vec{v}_1$, isto é, T é o produto da reflexão ao longo de π pela translação de vetor v_1, que pertence à direção de π.

2o. caso. Suponhamos que +1 não é valor próprio de T*. Neste caso, existe uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V tal que

$$T^*(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$$

$$T^*(\vec{e}_2) = a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3$$

$$T^*(\vec{e}_3) = c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3$$

Podemos escrever: $T(X) = 0 + (T(0) - 0) + T^*(x - 0)$. Seja M o ponto médio de $[T(0), 0]$ e π o plano que passa por M e cuja direção é o subespaço gerado por $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Seja π' o plano que passa por 0 e é paralelo a π. Vamos decompor $(T(0) - 0)$ da seguinte maneira:

$$T(0) - 0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \text{onde } \vec{v}_1 \in \text{dir}\,\pi \text{ e } \vec{v}_2 = \lambda\vec{e}_1$$

Vem:

$$T(X) = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T^*(X - 0).$$

Seja S o movimento rígido cujo operador linear associado S*, em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, é dado por:

$$S^*(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$$

$$S^*(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$

$$S^*(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$$

e que deixa M fixo.

É imediato que S é uma reflexão ao longo de π.

Seja R o movimento rígido definido por:

$$R = T \cdot S^{-1}$$

Lembrando que $R^* = T^*(S^{-1})^* = T^*(S^*)^{-1}$, temos:

$$R^*(e_1) = e_1$$

$$R^*(e_2) = ae_2 + be_3$$

$$R^*(e_3) = ce_2 + de_3$$

Vamos verificar que o plano π' é fixo pelo movimento rígido R. De fato, se $Z \in \pi'$, $R(Z) = T(S^{-1}(Z)) = T(Z')$, onde Z' é o simétrico de Z em relação ao plano π e portanto $Z' - Z = \vec{v}_2$. Substituindo na expressão de T vem:

$$\begin{aligned} R(Z) = T(Z') &= 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T^*(Z' - 0) = \\ &= 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + T^*(Z' - Z) + T^*(Z - 0) = \\ &= 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (Z - Z') + T^*(Z - 0) = \\ &= 0 + \vec{v}_1 + T^*(Z - 0), \end{aligned}$$

logo $R(Z) \in \pi'$.

Além disso, como as restrições de T^* e R^* à direção de π' coincidem e não são a identidade, segue-se que a restrição de R ao plano é uma rotação. Seja A o centro dessa rotação. Concluímos então que R é uma rotação em tôrno da reta r que passa por A e é perpendicular a π'. Sendo $T = R \cdot S$, o teorema está demonstrado.

Observemos que T possui um único ponto fixo, que é a interseção de r com π.

Exercícios

1) Demonstre que dados um ângulo α e um inteiro $n \geq 1$, existem n, e sòmente n, ângulos β, tais que $\alpha = n\beta$.

2) Demonstre que o produto de duas reflexões de um espaço euclidiano E de dimensão 2, ao longo de duas retas concorrentes, é uma rotação. Qual é o ângulo de rotação?

3) Seja $(0, e_1, e_2)$ um sistema ortonormal de coordenadas com orientação positiva, de um plano euclidiano orientado E. Seja T_1 a rotação de ângulo $\pi/2$ com centro na origem e T_2 a rotação de ângulo $3\pi/2$ com centro no ponto $(-1, 0)$. Mostre que o produto T_1T_2 é uma translação. Qual é o vetor dessa translação?

4) Demonstre que todo movimento rígido de um plano é o produto de reflexões em número não superior a 3.

5) Sejam T_1 e T_2 duas rotações de um espaço euclidiano E de dimensão 3, em tôrno de eixos distintos e concorrentes. Em que condições $T_1T_2 = T_2T_1$?

6) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 3 e $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un sistema ortonormal de coordenadas, com orientação positiva. Seja T uma rotação de E que deixa o ponto 0 fixo e leva os pontos de coordenadas $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ nos pontos de coordenadas $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Determine o eixo de rotação de T. Escolha uma orientação para o eixo de rotação e determine o ângulo de rotação de T.

BIBLIOGRAFIA

(1) ARTZY, R. Linear Geometry, Addison-Wesley, Nova York (1965).

(2) DIÉUDONNÉ, J. Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire, Hermann, Paris (1964).

(3) GREUB, W.H. Linear Algebra, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 97, Springer-Verlag, Berlim (1967).

(4) HALMOS, P. Finite Dimensional Vector Spaces, Van Nostrand, Nova York (1958).

(5) JACY MONTEIRO, L.H. Álgebra Linear, Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo, São Paulo (1967).

(6) KUIPER, N. Linear Algebra and Geometry, North-Holland, Amsterdam (1962).

(7) MARTINS RODRIGUES, A.A. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo, São Paulo (1967).

(8) VILLAMAYOR, O. Algebra Lineal, monografía No. 5, série de matemática, União Pan-Americana, Washington, D. C. (1967).

COLEÇÃO DE MONOGRAFIAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Série de matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, pelo Conselho Nacional de Professôres de Matemática dos Estados Unidos da América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
N° 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
N° 7. El Concepto de Número por César A. Trejo.
N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.

Série de física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi e Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.

Série de química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw e Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro C. Paladini e M. Burachik.
N° 4. Mecanismos de las Reacciones Orgánicas, por Jorge Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.

Série de biologia

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.

Nº 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
Nº 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
Nº 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
Nº 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.

Em preparação

Série de matemática

Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.
Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.

Série de física

Fôrças Nucleares, por Oscar Sala e A. F. R. de Toledo Piza.
Física Nuclear, por Mariano Bauer E. e Alfonso Mondragón.
Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.

Série de química

Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
Complejos, por Manuel Madrazo Garamendi.

Série de biología

Hereditariedade Humana, por Pedro H. Saldanha.

Nota. As pessoas interessadas em adquirir estas monografias devem dirigir-se à Oficina de Vendas e Promoção, União Pan-Americana, Washington, D. C., 20006.