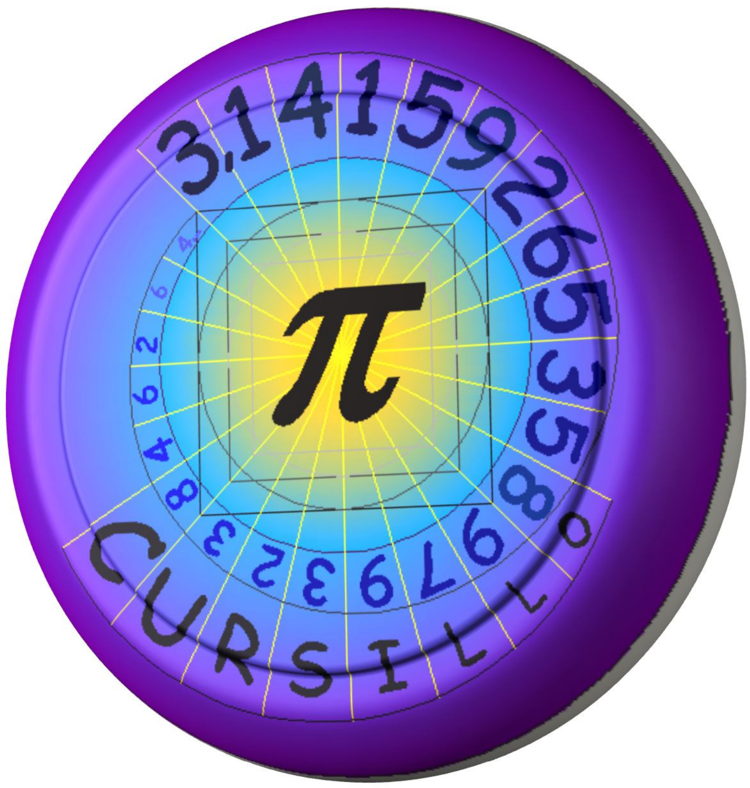
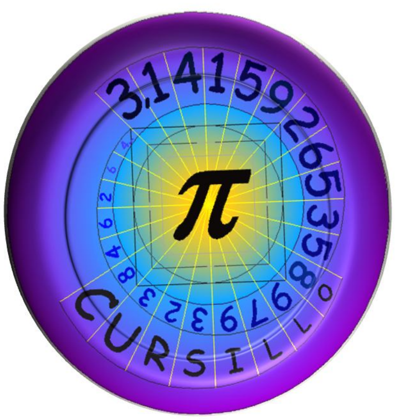
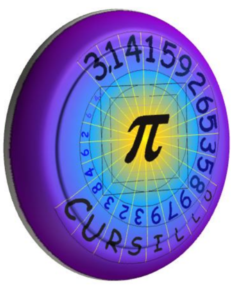




MATEMÁTICA I

ARITMÉTICA



ING. RAÚL MARTÍNEZ

PROLOGO

Este trabajo fue elaborado específicamente para el programa de ingreso **MATEMATICA I** de la FIUNA, no contiene la materia básica, es por eso se recomienda leerlo conjuntamente o posteriormente al libro de Baldor u otro análogo.

El principal objetivo de este escrito es que la facultad de Ingeniería sea más accesible a la gran mayoría de los bachilleres y deje ser una opción favorable a una elite que puede solventar los cursillos particulares.

De esta manera el autor está rindiendo tributo a la facultad en donde adquirió sus conocimientos matemáticos.

Con este trabajo el autor quiere homenajear al EX DECANO de la facultad de Ingeniería UNA. Ingeniero…PALEARI, último bastión y baluarte (En la universidad) de resistencia al oscurantismo que asolo a nuestro país, haciendo votos para que en breve vuelvan a trinar “Los ruiseñores” (Grupo Vocal DOS) en esta facultad.

Todo indica que el Paraguay, como el ave FENIX, está renaciendo de las cenizas y es en la universidad que serán pulidas sus alas para adentrarnos en el tercer milenio, y de esta juventud serán escogidos los artesanos artífices.

Cirino Raúl Martínez Princigalli.

ING. DE MINAS.

(U.F.M.G.)

Número natural

Es un concepto abstracto que simboliza cierta propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí, independiente de la naturaleza o de los elementos de dichos conjuntos.

Para contar los elementos de un conjunto se utiliza como conjunto de referencia, un conjunto fijo que es el conjunto de los números naturales.

Entonces contar un conjunto es coordinar sus elementos con una parte de la serie de los números naturales comenzando por el 1.

La serie de los números naturales es 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ...

Y es infinita.

Cifra o guarismo

Son los signos o símbolos que se emplean para representar los números.

Las cifras que empleamos son llamadas cifras Arábigas, porque fueron introducidos por los árabes en España y son: 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 y 9.

El cero recibe el nombre de cifra no significativa y representa los conjuntos nulos que carecen de elementos.

Número dígito: Es el número que consta de una sola cifra, como 2 ; 7.

Número polidígito: Es el número que consta de dos o más cifras, como 18 ; 536.

Valores absolutos y relativos de una cifra: Toda cifra tiene dos valores: absoluto y relativo.

- ***Valor absoluto:*** Es el que tiene una cifra por su figura.
- ***Valor relativo:*** Es el que tiene una cifra por el lugar que ocupa en un determinado número polidígito.

LA ARITMÉTICA Y SU OBJETO:

La aritmética tiene por objeto el estudio de los números reales positivos, es decir; los números naturales, los fraccionarios y los irracionales.

Relaciones de igualdad y desigualdad entre números naturales:

❖ ***Postulado:*** (Ley de tricotomía) Dados dos números *a* y *b* necesariamente tiene que verificarse una y sólo una de estas tres posibilidades: $a = b$; $a > b$ o $a < b$

❖ ***Signos dobles en la desigualdad:***

$\neq$ .... no es igual

$\ngtr$ .... no es mayor

$\nless$ .... no es menor

$\leq$ .... menor o igual

$\geq$ .... mayor o igual

CARACTERES DE LA IGUALDAD (LEYES)

❖ ***Carácter idéntico***: Todo número es igual a sí mismo. $a = a$.

❖ ***Carácter recíproco*:** Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.
Si $a = b$ $\Rightarrow$ $b = a$

❖ ***Carácter transitivo*:** Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero. Si $a = b$ y $b = c$ $\Rightarrow$ $a = c$

CARÁCTER TRANSITIVO DE LAS DESIGUALDADES

❖ Si un número es mayor que otro, y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero. Si $a > b$ y $b > c$ $\Rightarrow$ $a > c$

❖ Si un número es menor que otro y éste es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero. Si $a < b$ y $b < c$ $\Rightarrow$ $a < c$

OBS: Cuando tenemos una igualdad, se acostumbra decir que tenemos una ecuación, especialmente cuando las cantidades están expresadas en forma de letras.

Toda igualdad posee dos miembros, se denomina 1er miembro a todo lo que está a la izquierda del signo = , y a la otra se lo llama 2^{o} miembro de la igualdad.

Cuando decimos, multiplicando miembro a miembro ambas igualdades, queremos decir: 1er miembro (1^{a} ecuación) x 1er miembro (2^{a} ecuación) y 2^{o} miembro (1^{a} ecuación) x 2^{o} miembro (2^{a} ecuación).

OPERACIONES ARITMÉTICAS: Las operaciones aritméticas son siete:

- Suma o adición
- Resta o sustracción o diferencia
- Multiplicación
- División
- Potenciación
- Radicación
- Logaritmación

Las operaciones aritméticas pueden clasificarse en:

- ***Operaciones de composición o directas*****:** en estas operaciones, se conocen ciertos datos y se halla el resultado. Ejemplo: suma, multiplicación y potenciación.
- ***Operaciones de descomposición o inversas*****:** En estas operaciones se conoce el resultado de la operación directa correspondiente y uno de los datos, se halla el otro dato.

Operaciones directas		Operaciones inversas	Jerarquía
Suma	⇔	Resta	Operación Primaria
Multiplicación	⇔	División	Operación Secundaria
Potencia	⇔	Radicación Logaritmación	Operación Terciaria

SUMA O ADICIÓN

Sumar significa reunir los elementos de dos o más grupos (Sumandos) en un solo grupo (Suma). Luego en la operación suma, los datos son los sumandos y al resultado denominamos suma. Esta operación se efectúa contando los elementos de los grupos.

Principales propiedades de la suma

❖ ***Uniformidad:***

- ✓ La suma de varios números dados tiene un valor único
- ✓ La suma de números respectivamente iguales, son iguales.
- ✓ Sumando miembro a miembro varias igualdades, resulta una igualdad.

❖ ***Conmutativa**:* El orden de los sumandos no altera la suma.

❖ ***Asociativa – Disociativa:***

- ✓ La suma de varios números no varía sustituyendo varios sumandos por la suma.
- ✓ La suma de varios números no se altera descomponiendo uno o varios sumandos en dos o más sumandos.

Para aplicar estas propiedades de asociativa o disociativa, son utilizados símbolos o signos de agrupación o asociación, e indican una operación. Los signos de asociación más utilizados son:

( ) "paréntesis"
[ ] "corchetes"
{ } "llaves"

Cuando una operación se encierra en un paréntesis, ello indica que dicha operación tiene que efectuarse primero, y con el resultado de esta, se verifica la otra operación indicada.

❖ ***Monotonía:***

- ✓ Sumando miembro a miembro desigualdades con igualdades, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad primera.
- ✓ Sumando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

TEOREMA ①

En toda suma, si un sumando aumenta o disminuye un número, la suma aumenta o disminuye el mismo número.

H) Sean los sumandos a y b cuya suma es S

$a + b = S$

Sea n un número cualquiera.

T) $(a + n) + b = S + n$ ………………………………………… (1)

$(a - n) + b = S - n$ ………………………………………… (2)

D) En efecto, si a partir del 1° miembro de (1) podemos llegar al 2° miembro, aplicando propiedades de la suma, la igualdad será verdadera.

$$\underbrace{(a + n) + b = a + n}_{\text{Prop. Disosiativa}} + \underbrace{b = a + b}_{\text{Prop. Conmutativa}} + \underbrace{n = (a + b)}_{\text{Prop. Asociativa}} + \underbrace{n = S}_{\text{Por hipótesis}} + n$$

Luego: ……………………… $(a + n) + b = S + n$ ……………………..Que es la tesis.

Procediendo de forma análoga con la (2) el teorema queda demostrado.

TEOREMA ②

En Toda suma si un sumando aumenta un número cualquiera y otro sumando disminuye el mismo número, la suma no varía.

H) Sean los números a y b cuya suma es S

$a + b = S$

Sea n un número cualquiera

T) $\boxed{(a + n) + (b - n) = S}$

D) En efecto: al aumentar un sumando un número n , la suma S aumenta el mismo número n , por el teorema: *"Al aumentar uno de los sumandos un número, la suma queda aumentada en el mismo número"*.

Si al mismo tiempo disminuimos a otro sumando el mismo número n , la suma S, queda disminuida el mismo número, por el mismo teorema anterior.

Luego podemos escribir.

$$(a + n) + (b - n) = S + n - n$$

Es decir $\boxed{(a + n) + (b - n) = S}$ ... Que es la tesis.

RESTA O SUSTRACCIÓN

La resta es una operación inversa de la suma que tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos (*Minuendo*) y uno de ellos (*Sustraendo*), hallar el otro sumando (*resta, exceso o diferencia*).

Representación general $M - S = D$

De acuerdo con la definición de resta, la diferencia (D) sumada con el sustraendo, tiene que dar el minuendo (M). $D + S = M$

Propiedades de la resta

- ***Uniformidad:***
  - ✓ La diferencia de dos números tiene un valor único.
  - ✓ Restando miembro a miembro dos igualdades, resulta otra igualdad.

- ***Monotonía:***
  - ✓ Si de una desigualdad (Minuendo) se resta una igualdad (Sustraendo), siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.
  - ✓ Si de una igualdad (Minuendo) se resta una desigualdad (Sustraendo) siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad sustraendo.
  - ✓ Si de una desigualdad, se resta otra desigualdad de sentido contrario, siempre que la resta sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.

TEOREMA ③

En toda resta, si el minuendo aumenta o disminuye un número y el substraendo no varía, la diferencia queda aumentada o disminuida el mismo número.

H) Sea el minuendo M y el sustraendo S cuya diferencia es D.

$M - S = D$

Sea n un número cualquiera

T) $(M + n) - S = D + n$ .... (1)

$(M - n) - S = D - n$ .... (2)

D) Por definición de resta sabemos que sumando el substraendo con la diferencia tendremos el minuendo: $S + D = M$ .... (3)

Esta expresión (3) representa una suma y si sumamos o restamos un número n al sustraendo D, la suma M también quedará aumentada o disminuida en el número n, por el teorema *"Si un sumando aumenta o disminuye un número, la suma aumenta o disminuye el mismo número"*.

Luego: .... $S + (D \pm n) = (M \pm n)$

$(D \pm n) = (M \pm n) - S$

o también .... $(M \pm n) - S = (D \pm n)$ .... Que es la tesis.

TEOREMA ④

En toda resta, si el substraendo aumenta o disminuye un número y el minuendo no varía, la diferencia queda disminuida o aumentada en el mismo número.

H) Sea el minuendo M y el substraendo S cuya diferencia es D.

$M - S = D$

Sea n un número cualquiera.

T) $\boxed{M - (S \pm n) = (D \mp n)}$

D) Por definición de resta sabemos que sumando el substraendo con la diferencia obtendremos el minuendo. $S + D = M$ .... (1)

Por el teorema que dice: *"Si aumentamos o disminuimos uno de los sumandos en un número, la suma queda aumentada o disminuida en el mismo número."*

Luego: en (1) .... $S + (D \mp n) = M \mp n$

Transponiendo términos .... $D \mp n = M \mp n - S$

$D \mp n = M - S \mp n$

Introduciendo un paréntesis ...... $D \mp n = M - (S \pm n)$

O mejor .... $\boxed{M - (S \pm n) = D \mp n}$ .... Que es la tesis.

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es una operación de composición que tiene por objeto, dado dos números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un número llamado producto que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto a la unidad.

Al multiplicando y al multiplicador se los llaman también factores y cuando tenemos varios números multiplicados entre sí, se los denomina factores a todos estos números.
Al resultado de la multiplicación se lo denomina producto.

Particularidades de la multiplicación

- ✓ Si uno de los factores es cero, el producto será también cero.
- ✓ Si uno de los factores es igual a la unidad, el producto será igual al otro factor.
- ✓ Si multiplicamos un número por otro mayor que uno, el producto es mayor que el primer número.
- ✓ Si multiplicamos un número por otro menor que la unidad, el producto disminuye.

Otra definición de multiplicación

La multiplicación es una suma abreviada, que consta de tantos sumandos iguales al multiplicando, como unidades tenga el multiplicador.

$$a \times c = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{c\ veces}$$

Propiedades de la multiplicación

❖ ***Uniformidad:***

- ✓ El producto de dos números tiene un valor único.
- ✓ Multiplicando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.

❖ ***Asociativa – Disociativa:***

- ✓ El producto de varios números no varía sustituyendo dos o más factores por su producto.
- ✓ El producto de varios números no varía descomponiendo uno o más factores en dos o más factores.

❖ ***Monotonía:***

- ✓ Multiplicando miembro a miembro desigualdades del mismo sentido e igualdades, resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas.

❖ ***Distributiva:***

- ✓ La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta:

$$a \times (b + c - d) = ab + ac - ad$$

OBS: Una operación para ser distributiva con respecto a otra, debe ser de una jerarquía inmediatamente superior. $2^a \longrightarrow 1^a$

TEOREMA ⑤

En toda multiplicación, si el multiplicando se multiplica o divide por un número, el producto queda multiplicado o dividido por el mismo número.

H) Sea la multiplicación $a \times b = P$ .... $\begin{cases} a = multiplicando \\ b = multiplicador \\ P = producto \end{cases}$

Sea n un número cualquiera.

T) $(a \times n) \times b = P \times n$ .... (1)

$(a \div n) \times b = P \div n$ .... (2)

D) Por definición de producto sabemos que puede ser escrita como una suma

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots\dots\dots + a}_{b\ veces} = P$$

Multipliquemos por n el multiplicando y tendremos.

$$(a \times n) \times b = \underbrace{(a \times n) + (a \times n) + (a \times n) + \dots\dots\dots + (a \times n)}_{b\ veces} =$$

Ahora bien esta segunda suma, contiene el mismo número de sumandos, pero cada uno de estos sumandos se encuentra multiplicado por n, luego la suma que es P también quedará multiplicada por n.

Es decir: $(a \times n) \times b = P \times n$ .... Que es la 1° tesis.

Por un procedimiento análogo también podríamos demostrar que.

$(a \div n) \times b = P \div n$ .... Que es la 2° tesis.

TEOREMA ⑥

En toda multiplicación, si el multiplicador se multiplica o divide por un número, el producto queda multiplicado o dividido por el mismo número.

H) Sea el producto $a \times b = P$ .... $\begin{cases} a = multiplicando \\ b = multiplicador \\ P = producto \end{cases}$

Sea n un número cualquiera

T) $a \times (b \times n) = P \times n$

$a \times (b \div n) = P \div n$

D) Como el orden de los factores no altera el valor del producto, podemos escribir:

$a \times b = b \times a = P$

Aplicando el teorema: *"Si el multiplicando se multiplica o divide por un numero, el producto queda multiplicado o dividido por el mismo número"* tendremos:

$$(b \times n) \times a = P \times n$$
$$(b \div n) \times a = P \div n$$

Y aplicando nuevamente la ley conmutativa a estas ecuaciones tendremos:

$$a \times (b \times n) = P \times n$$
$$a \times (b \div n) = P \div n$$ .... Que es la tesis.

TEOREMA ⑦

En toda multiplicación, si el multiplicando se multiplica por un número y el multiplicador se divide por el mismo número o viceversa, el producto no varía.

H) Sea el producto $a \times b = P$ .... $\begin{cases} a = multiplicando \\ b = multiplicador \\ P = producto \end{cases}$

Sea n un número cualquiera.

T) $(a \times n) \times (b \div n) = P$

$(a \div n) \times (b \times n) = P$

D) En efecto: al multiplicar uno de los factores por un número el producto queda multiplicado por dicho número, pero si al mismo tiempo dividimos el otro factor por el mismo número el producto queda dividido por dicho número.

Luego el producto no sufrirá alteración pues fue multiplicado y dividido por el mismo número.

Luego: $(a \times n) \times (b \div n) = P \times n \div n$

O mejor: $(a \times n) \times (b \div n) = P$ .... Que es la tesis

Análogamente.... $(a \div n) \times (b \times n) = P$ .... Que es la tesis

DIVISIÓN

La división es una operación inversa de la multiplicación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (*Dividendo*) y uno de los factores (*divisor*), hallar el otro factor (*cociente*).

Si representamos por: .... $\begin{cases} D\text{: … … } el\ dividendo \\ d\text{: … … } el\ divisor \\ c\text{: … … } el\ cociente \end{cases}$

En cualquier división, siempre tendremos:

$D \div d = c$ o $\dfrac{D}{d} = c$ $D = d\ .\ c$ .... (1)

De acuerdo con la definición podríamos también decir que dividir un número (*Dividendo*) entre otro número (*divisor*), es hallar un número (*cociente*), que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

OBS: Las relaciones (1) siempre se cumplen, mismo que el resultado sea inexacto, es cuestión de expresar con todos los decimales o en forma de fracción.

Para una mejor comprensión de esta operación división, vamos a dividirlo en dos grupos:

- ✓ División exacta
- ✓ División entera o inexacta

División Exacta: Una división es exacta cuando existe un número entero que multiplicado por el divisor da el dividendo, es decir cuando el dividendo es múltiplo del divisor.

<u>Propiedades de la división exacta</u>: (Leyes)

- ***Uniformidad***:
  - ✓ El cociente de dos números tiene un valor único.
  - ✓ Dividiendo miembro a miembro dos igualdades, resulta otra igualdad.
- ***Monotonía:***
  - ✓ Si una desigualdad (dividendo) se divide entre una igualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.
  - ✓ Si una igualdad (dividendo) se divide entre una desigualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad divisor.
  - ✓ Si una desigualdad (dividendo) se divide entre otra desigualdad de sentido contrario (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.
- ***Propiedad distributiva:***

La división es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

$$(a + b - c) \div n = a \div n + b \div n - c \div n$$

Esto es fácilmente comprensible, asociado a la multiplicación.

OBS 1: La propiedad distributiva sólo es efectiva con respecto a otra operación de jerarquía inmediatamente inferior.

$$\begin{array}{ccc} Multiplicación & \xrightarrow{distributiva} & Suma\ y\ resta \\ División & \xrightarrow{distributiva} & Suma\ y\ resta \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2°\ jerarquía & & 1°\ jerarquía \end{array}$$

OBS 2: La división puede ser considerada como una resta abreviada, en la cual el divisor se resta todas las veces que se pueda del dividendo y el cociente indica el número de restas efectuadas.

- Hacer analogía con la multiplicación como suma abreviada.

TEOREMA ⑧

En toda división exacta, si el dividendo se multiplica o divide por un número no variando el divisor, el cociente queda multiplicado o dividido por el mismo número.

H) Sea la división: $D \div d = c$ .... $\begin{cases} D: \dots\dots el\ dividendo \\ d: \dots\dots el\ divisor \\ c: \dots\dots el\ cociente \end{cases}$

Sea n un número cualquiera.

T) $(D \times n) \div d = (c \times n)$ .... (1)

$(D \div n) \div d = (c \div n)$ .... (2)

D) Basándonos en la propia definición de la división podemos decir:

"Esta división que indica la tesis, será legitima o verdadera, si multiplicando el divisor d *por el cociente* $(c \times n)$ *nos reproduce el dividendo* $(D \times n)$*".*

Luego:

$$\underbrace{d \times (c \times n) = d \times c \times n}_{Prop.\ disociativa} = \underbrace{d \times \frac{D}{d}}_{c\, =\, \frac{D}{d} \dots por\ hip.} \times n = D \times n$$

Entonces $(D \times n) \div d = (c \times n)$ .... Es verdadera .... (1)

Análogamente procedemos para la 2° parte del teorema.

$$d \times (c \div n) = d \times c \div n = d \times \frac{D}{d} \div n = D \div n$$

Entonces $(D \div n) \div d = (c \div n)$ .... Es verdadera .... (2)

TEOREMA ⑨ (E.D.A)

En toda división exacta, si el divisor se multiplica o divide por un número no variando el dividendo, el cociente queda dividido o multiplicado por el mismo número.

H) Sea la división $D \div d = c$ .... $\begin{cases} D: \dots \dots \text{el dividendo} \\ d: \dots \dots \text{el divisor} \\ c: \dots \dots \text{el cociente} \end{cases}$

Sea n un número cualquier.

T) $D \div (d \times n) = (c \div n)$ .... (1)

$D \div (d \div n) = (c \times n)$ .... (2)

D) Basándonos en la propia definición de la división podemos decir: "*Esta división que indica la tesis, será legitima o verdadera, si multiplicando el divisor* $(d \times n)$ *por el cociente* $(c \div n)$ *nos reproduce el dividendo* D*".* Luego:

$(d \times n) \times (c \div n) = d \times n \times c \div n$ .... Prop. Disociativa.

$d \times n \times c \div n = d \times c$ .... Pues n aparece como factor y divisor simultáneamente.

$d \times c = D$ .... Por la propia definición de la división.

Entonces ...... $D \div (d \times n) = (c \div n)$ .... Es verdadera .... 1° parte

Para demostrar la 2° parte procedemos de forma análoga:

$(d \div n) \times (c \times n) = d \div n \times c \times n$ .... Prop. Disociativa.

$d \div n \times c \times n = d \times c$ .... Pues n es factor y divisor

$d \times c = D$ .... Por definición

Luego: $D \div (d \div n) = (c \times n)$ .... Es verdadera .... 2° parte.

TEOREMA ①⓪

En toda división exacta, si el dividendo y el divisor se multiplican o dividen por un mismo número, el cociente no varía.

H) Sea la división $D \div d = c$ .... $\begin{cases} D: \dots \dots el\ dividendo \\ d: \dots \dots el\ divisor \\ c: \dots \dots el\ cociente \end{cases}$

Sea n un número cualquiera

T) $(D \times n) \div (d \times n) = c$

$(D \div n) \div (d \div n) = c$

D) En efecto al multiplicar el dividendo por un número, el cociente queda multiplicado por el mismo número, pero si al mismo tiempo multiplicamos el divisor por ese mismo número el cociente quedará dividido por el número.

Luego el cociente quedará multiplicado y dividido por el mismo número y por tanto no variará.

Entonces podemos afirmar: $(D \times n) \div (d \times n) = c$ .... 1° parte

Con un raciocinio análogo podemos también afirmar que:

$(D \div n) \div (d \div n) = c$ .... 2° parte.

División entera o inexacta: Cuando no existe ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo, es decir, cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, la división es entera o inexacta.

La característica principal de la división entera es que el resto no es igual a cero.

El resto r siempre debe ser menor que el divisor.

OBS: En la vida cotidiana es costumbre que si nos preguntan ¿Cuánto es 23 ÷ 5? Algunos responderán, es aproximadamente 4.

Otros responderán es aproximadamente 5.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline (3) & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline (-2) & 5 \end{array}$$

En sentido teórico ambos tienen razón: el primero dio el cociente por defecto. El segundo dio el cociente por exceso.

Los números 3 y 2 son denominados restos por defecto (r) y por exceso (r') respectivamente.

Por convención, la división entera o inexacta se clasifica en:

- ✓ División entera o inexacta por defecto.
- ✓ División entera o inexacta por exceso.

En general si D no es múltiplo de d (*inexacta*), el cociente de $D \div d$ estará comprendido entre dos números consecutivos.

Si llamamos c al menor de ellos, el mayor será $(c+1)$.

Y siempre se cumplirá que el cociente exacto (*número decimal*) de la división $D \div d$ será mayor que c y menor que $(c+1)$.

Expresando en términos matemáticos tendremos:

$$\begin{array}{l} c \,.\, d < D \\ (c+1)\,.\, d > D \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Siendo: } \left[\begin{array}{l} c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathit{cociente\ por\ defecto} \\ (c+1) \ldots\ldots .\mathit{cociente\ por\ exceso} \end{array} \right.$$

✓ ***Residuo por defecto:*** Siendo c el cociente por defecto y r el resto por defecto de la división entera $D \div d$.
El residuo por defecto en una división entera es el número que se debe agregar al producto del cociente (*por defecto*) multiplicado por el divisor para obtener el dividendo.

$$D = c.d + r$$

✓ ***Residuo por exceso:*** Siendo c el cociente por defecto, entonces $(c+1)$ será el cociente por exceso, y llamando r' al residuo por exceso en una división entera $D \div d$ tendremos:
El residuo por exceso en una división entera es el número r' que se debe sustraer al producto del divisor por el cociente (*por exceso*) para obtener el dividendo, es decir:

$$D = d(c+1) - r'$$

TEOREMA ①① (E.D.A)

En toda división entera o inexacta, la suma de los restos por defecto y por exceso es igual al divisor.

H) Sea D el dividendo, d el divisor y c el cociente por defecto en una división inexacta

Sea r el residuo por defecto.

Sea r' el residuo por exceso.

T) $r + r' = d$

D) Por las definiciones de residuos en una división entera podemos escribir.

$D = d(c + 1) - r'$ .... residuo por exceso.

que desarrollando...... $D = d.c + d - r'$ .... (1)

También...................... $D = d.c + r$ .... (2) ... residuo por defecto.

Restando m. a m. .... $0 = d - r' - r$

Transponiendo términos ... $r + r' = d$

o mejor................................ $d = r + r'$ .... Que es la tesis.

TEOREMA ①② (E.D.A)

En toda división entera o inexacta, si el dividendo y el divisor se multiplican o dividen por un mismo número, el cociente no varía y el resto queda multiplicado o dividido por el mismo número.

H) Sea la división entera o inexacta.

$$D = d.c + r \; ..... \begin{cases} D \dots\dots\dots dividendo \\ d \dots\dots\dots divisor \\ c \dots\dots\dots cociente \\ r \dots\dots\dots resto \end{cases}$$

Sea n un número cualquiera

T) $(D \times n) = (d \times n)\, c + (r \times n)$ .... (1)

$(D \div n) = (d \div n)\, c + (r \div n)$ .... (2)

D) Sabemos que: $D = d\,c + r$ .... por hipótesis

Multiplicando ambos miembros por n .... $D\,n = (d\,c + r)\,n$

Prop. Distributiva .... $D\,n = d\,c\,n + r\,n$

Prop. Conmutativa .... $D\,n = d\,n\,c + r\,n$

Prop. Asociativa .... $(D\,n) = (d\,n)\,c + (r\,n)$ ...... 1° parte.

Procediendo en forma análoga, podemos demostrar la (2)

por hipótesis .... $D = d\,c + r$

Dividiendo ambos miembros por n .... $D \div n = (d\,c + r) \div n$

Prop. Distributiva .... $D \div n = d\,c \div n + r \div n$

Prop. Conmutativa .... $D \div n = d \div n \times c + r \div n$

Prop. Asociativa .... $(D \div n) = (d \div n) \times c + (r \div n)$ .... 2° parte.

Antes de continuar con algunas propiedades generales de la división, es menester que nos familiaricemos con algunos términos:

- ✓ ***Número primo:*** Decimos que un número es primo cuando *únicamente* es divisible por sí mismo y por la unidad.

  Ejemplo: 7 ; 13 ; 19 ;...

- ✓ ***Número compuesto:*** Un número es llamado compuesto cuando además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, también lo es por otro número.

  Ejemplo: 20 ; 18 ; 35 ;...

- ✓ ***Números primos relativos:*** Decimos que dos números son primos entre si cuando el único número que divide exactamente a ambos simultáneamente es la unidad.

  Ejemplo: 10 y 7

  20 y 27

  7 y 11

- ✓ ***Números primos entre si dos a dos:*** Decimos que varios números son primos entre si dos a dos cuando cada uno de ellos es primo relativo con los otros.

  Ejemplo: 20 ; 49 ; 33 ; 13

- ✓ ***Múltiplo de un número:*** Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.
- ✓ ***Sub múltiplo de un número:*** Un número es sub múltiplo de otro cuando está contenido un número exacto de veces en dicho número.
- ✓ ***Divisor de un número:*** Decimos que un número es divisor de otro número cuando lo divide exactamente a este número.

OBS: Las palabras "divisor" y "sub múltiplo" son sinónimos y se los puede usar indistintamente. "Múltiplo" y "sub múltiplo" son recíprocos, es decir si a es múltiplo de b. Tendremos, b es sub múltiplo de a, o también b es divisor de a.

- ✓ ***Número par:*** Es todo número múltiplo de 2.

La representación general de los números pares es $2n$, siendo n un número entero cualquiera.

Una secuencia de números pares consecutivos se los puede representar:

$2n$; $(2n+2)$; $(2n+4)$; ...

- ✓ ***Número impar:*** Es el número que no es múltiplo de 2.

La representación general de los números impares es: $2n \pm 1$ siendo n un número entero cualquiera.

Una secuencia de números impares consecutivos se los puede representar:

$(2n+1)$; $(2n+3)$; $(2n+5)$; ...

✓ ***Caracteres de divisibilidad:*** Son ciertas señales de los números que nos permiten conocer, por simple inspección, si un número es divisible por otro.

- *Divisibilidad por 2*: Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en cifra par.
- *Divisibilidad por 3*: Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 3.
- *Divisibilidad por 5*: Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en 5.
- *Divisibilidad por las potencias de 10*:
  - Un número es divisible por 10 cuando termina en cero.
  - Un número es divisible por 100 cuando termina en 2 ceros.
  - Y así sucesivamente.

OBS: **Al decir que un número m divide al número A, quiere decir que dicha división es exacta y no tiene resto, lo cual nos permite escribir:** $A = m \cdot e$
Siendo e el cociente de la división que necesariamente deberá ser un número entero.

TEOREMA ①③

Todo número que divide a otros varios, divide a su suma.

H) Sean los sumandos a , b , y c cuya suma es S.

$S = a + b + c$

Sea n un número que divide a los sumandos a , b , y c

T) n divide a la suma S.

D) Por hipótesis sabemos que n divide a los números a , b y c

Sean e_1 , e_2 y e_3 los respectivos cocientes de dividir a , b y c por n.

En toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$a = n\ e_1$$
$$b = n\ e_2$$
$$c = n\ e_3$$

$a + b + c = n\ e_1 + n\ e_2 + n\ e_3$ ....Resultado de sumar m. a m.

Factoreando n .... $a + b + c = n\,(e_1 + e_2 + e_3)$

Haciendo......................$(e_1 + e_2 + e_3) = E$ ...

Este número E será un numero entero pues es la suma de varios números enteros.

Luego $S = n\ E$ .... (1)

Esta igualdad (1) nos dice que el número S contiene al n , un número exacto (E) veces.

Es decir:................................ n divide a S ....Que es la tesis.

TEOREMA ①④ (E.D.A)

Todo número que no divide a otros varios, divide a su suma, si la suma de los residuos que resultan de dividir estos entre el número que no los divide, es divisible por este número.

H) Sea n que no divide a los sumandos a , b y c , cuya suma es S

$S = a + b + c$

Sean r_1 , r_2 y r_3 los respectivos residuos de dividir por n los sumandos

Sea R su suma. $R = r_1 + r_2 + r_3$

n divide a R

T) n divide a S

D) Sean q_1 , q_2 y q_3 los respectivos cocientes de dividir los sumandos a , b y c por $n.$

Sabemos que en toda división entera el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto.

Luego:

$$\left.\begin{aligned} a &= n\,q_1 + r_1 \\ b &= n\,q_2 + r_2 \\ c &= n\,q_3 + r_3 \end{aligned}\right\} \text{Sumando m. a m.}$$

$$a + b + c = n\,q_1 + n\,q_2 + n\,q_3 + r_1 + r_2 + r_3$$

Factoreando n ….. $a + b + c = n\,(q_1 + q_2 + q_3) + (r_1 + r_2 + r_3)$

$$S = n\,(q_1 + q_2 + q_3) + R \text{ ………………………………… (1)}$$

Analizando el 2° miembro de esta ecuación (1), tenemos dos sumandos:

El primer sumando $n.(q_1 + q_2 + q_3)$ es divisible por n por ser uno de sus factores.

El segundo sumando R es divisible por n por hipótesis.

Entonces por el teorema: *"Todo número que divide a varios sumandos, divide a su suma"*.

Por tanto: …………………………… n dividirá a la suma S ………………Que es la tesis.

OBS: Si un número no divide a otros números, pero divide a suma de los respectivos restos, entonces, también dividirá a la suma de dichos números.

TEOREMA ①⑤

Todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

H) Sea el número a que divide al número A

Sea $(n\,A)$ múltiplo de A

Siendo n un número entero.

T) a también va a dividir al número $(\,n\,A\,)$

D) Sabemos que un producto puede ser considerado como una suma abreviada, luego:

$$n\,A = \underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{n\ veces}$$

El número a divide a los sumandos "A" del 2° miembro por hipótesis, luego dividirá a la suma $(\,n\,A\,)$ por el teorema: *"Todo número que divide a varios sumandos, divide a su suma"*.

Luego……………………………………. a divide a $(\,n\,A\,)$………………………………Que es la tesis.

TEOREMA ⑯

Todo numero que divide a otros dos, divide a su diferencia.

H) Sean los números a y b .... siendo $a > b$

Sea D la diferencia entre a y b .... $D = a - b$

Sea el número n que divide a los números a y b

T) n divide a la diferencia D.

D) Sean e_1 y e_2 los cocientes de dividir a y b por n respectivamente.

Como en toda división exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$a = n\,e_1$$
$$b = n\,e_2$$

Restando miembro a miembro $\quad a - b = n\,e_1 - n\,e_2$

Factoreando n ...... $\quad a - b = n(\,e_1 - e_2\,)$ .... (1)

Haciendo $(e_1 - e_2) = E$ .... "E" será un número entero pues es la diferencia de dos números enteros.

Tendremos $\quad D = n\,E$ .... (2)

Esta expresión (2) nos dice que la diferencia D contiene al número n, un número entero "E" veces.

Luego...................... n divide a la diferencia D .... Que es la tesis.

TEOREMA ⑰

Todo numero que divide a la suma de dos sumandos y a uno de estos, divide al otro sumando.

H) Sea la suma $a + b = S$

El número n divide a S y al sumando a

T) n divide al sumando b.

D) En efecto, por definición de suma y resta podemos escribir:

$S - a = b$ ……………………………………………………………….… (1)

En esta igualdad (1) , tenemos que el número n divide a "S" y a "a" por hipótesis, luego por el teorema: *"Si un número divide a otro dos, divide a su diferencia".*

Podemos concluir que:……………………… n divide a "b" ………………… Que es la tesis.

TEOREMA ①⑧

Todo numero que divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, no divide a la suma.

H) Sea la suma $a + b = S$

El número n divide al sumando a, pero no divide al sumando b.

T) n no divide a la suma S.

D) En efecto por definición de suma y resta, podemos escribir:

$S - a = b$

Si n dividiera a S, también tendría que dividir a *"b"* por el teorema que dice: *"Si un número divide a otros dos divide a su diferencia".*

Pero n no puede dividir a " b " porque va contra la hipótesis.

Por tanto:...................... n no puede dividir a S .... Que es la tesis.

OBS.: Esta demostración se denomina "POR EL ABSURDO".
Suponemos que n divide a S, lo cual implica una contradicción o absurdo.
Luego lo contrario es verdadero.

TEOREMA ①⑨

Todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide al residuo.

H) Sea la división entera:

$$D = d\,.\,c + r \;\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} D \;\ldots\ldots\ldots..\,dividendo \\ d \ldots\ldots..\ldots\ldots\, divisor \\ c \ldots..\ldots\ldots\ldots\, cociente \\ r \ldots\ldots\ldots..\ldots.\, resto \end{cases}$$

Sea el número n que divide al dividendo D y al divisor d.

T) n divide al residuo r.

D) La división indicada en la hipótesis ………. $D = d.c + r$

Transponiendo términos tendremos: …… $D - d.c = r$ ………… (1)

Sabemos por hipótesis que n divide al divisor "d", luego dividirá al número $(d.c)$, por el teorema *"Todo número que divide a otro divide a sus múltiplos".*

Ahora bien en la ecuación (1) , el número n divide al número "D" por hipótesis y al número $(d.c\,)$ por la demostración anterior, y por lo tanto tendrá que dividir a su diferencia r porque *"Todo número que divide a otros dos divide a su diferencia".*

Luego……………………………. n divide a "r" ……………………………………..Que es la tesis.

TEOREMA ②⓪

Todo número que divide al divisor y al resto de una división inexacta, divide al dividendo.

H) Sea la división entera

$$D = d.c + r \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} D \ldots\ldots\ldots..dividendo \\ d \ldots\ldots\ldots\ldots divisor \\ c \ldots..\ldots.\ldots cociente \\ r \ldots\ldots\ldots\ldots.resto \end{cases}$$

Sea el número n que divide al divisor d y al resto r

T) n divide al dividendo D

D) Sabemos por hipótesis .... $D = d.c + r$ .... (1)

Analizando esta expresión vemos que el número n divide al número d y por tanto tendrá que dividir el número $(d\ c)$ por el teorema: *"Todo número que divide a otro divide a sus múltiplos".*

Ahora bien el número n divide al sumando $(d.c)$ por demostración anterior y al sumando r por hipótesis, luego tendrá que dividir a la suma D por el teorema *"Si un número divide a otros, divide a su suma".*

Luego.......................... n divide al dividendo D ....Que es tesis.

POTENCIACIÓN

Es una operación de composición en que un número llamado base se toma como factor tantas veces como indica otro número llamado exponente. El resultado es llamado potencia.

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\ veces} = P$$

OBS: Haciendo analogías, así como la multiplicación es una suma abreviada, también podemos decir que la potenciación es una multiplicación abreviada.

$$Multiplicación \rightarrow Suma\ abreviada$$

$$Potenciación \rightarrow Multiplicación\ abreviada$$

Propiedades de la potenciación:

- ***Uniformidad:***
  - ✓ Cualquier potencia de un número tiene un valor único
  - ✓ Si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, resulta otra igualdad.
- ***Monotonía:***
  - ✓ Si a los dos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia que no sea cero, resulta una desigualdad del mismo sentido que la dada.
- ***Distributiva:***
  - ✓ La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división exacta.

$$(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$$

$$(a \times b \div c)^n = a^n \times b^n \div c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \div b)^n = a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n}$$

OBS: El número fraccionario es una división indicada.

Operaciones con potencias:

❖ *Producto de potencias de igual base:*

Para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes

$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

❖ *Cocientes de potencias de igual base:*

Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes.

$$a^7 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times \cancel{a \times a \times a \times a}}{\cancel{a \times a \times a}} = a^4 = a^{7-3}$$

Esto es la base para explicar el ***exponente cero*** y el exponente negativo.

$$a^2 \div a^2 = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a \times a}{a \times a} = \frac{1}{1} = 1 = a^{2-2} = a^0$$

Cualquier expresión por más complicada que sea, cuando está elevada a un exponente cero, siempre es igual a la unidad.

El ***exponente negativo*** ocurre cuando el exponente del dividendo (*Numerador*) es menor que el exponente del divisor (*Denominador*)

$$a^3 \div a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Esto quiere decir que siempre podremos transformar un exponente negativo en positivo, invirtiéndolo, es decir:

$$m^{-5} = \frac{1}{m^5}$$

$$\frac{1}{c^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{c^3}} = c^3$$

❖ *Potencia de una potencia:*

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \dots \times a^m}_{n\ veces} = a^{m\,n}$$

❖ *Comparación de potencias en función de la base:*

Sea la potencia $b^n = P$ .... $\begin{cases} b \ldots\ldots\ldots base \\ n \ldots\ldots\ldots exponente \\ P \ldots\ldots\ldots Potencia \end{cases}$

Si... $b > 1$ ⟹ Cuando aumenta el exponente n aumenta la potencia P.

Si... $b = 1$ ⟹ La potencia independe del exponente.

Si... $0 < b < 1$ ⟹ Cuanto mayor es el exponente menor será la potencia.

Si... $b < 0$ ⟹ La potencia oscilará entre valores negativos y positivos.

Operaciones Inversas de la Potenciación

En la potenciación, conociendo la base y el exponente, hallamos la potencia. $b^n = P$

Como la potenciación no es conmutativa, es decir, no se puede permutar la base con el exponente, resulta que las operaciones inversas de la potenciación son dos:

- *Radicación*
- *Logaritmación*

RADICACIÓN

La radicación es una operación inversa de la potenciación en que se conoce la potencia y el exponente y se busca la base.

$$\sqrt[n]{P} = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \text{P ... Cantidad sub} - \text{radical} \\ n \ldots \text{Indice del radical} \\ b \ldots \text{Raíz} \end{cases}$$

***Raíz de un número*:** es el número que elevado a la potencia que indica el índice, reproduce la cantidad sub-radical.

Propiedades de la radicación

- ***Uniformidad:***
  - ✓ La raíz de un grado dado de un número tiene un valor único.
  - ✓ Si a los dos miembros de una igualdad se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.
- ***Distributiva:*** La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$$

$$\sqrt[n]{a \times b \div c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \div \sqrt[n]{c}$$

Raíz de un número fraccionario: Teniendo en cuenta que el número fraccionario es una división podemos escribir

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Raíz de una potencia: La raíz de cualquier grado de una potencia se obtiene dividiendo el exponente de la potencia por el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{p \div n} = a^{\frac{p}{n}}$$

Aquí tenemos la explicación para el exponente fraccionario, que ocurre cuando *p* no es divisible por n, de esta forma la división se deja indicada por medio de un número fraccionario y surge el exponente fraccionario.

Raíz de una raíz: La raíz de cualquier grado de una raíz se obtiene multiplicando los índices de ambas raíces

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

LOGARITMACIÓN

Siendo la potenciación $b^n = P$.

La logaritmación es una operación en que se conoce la potencia P y la base b y buscamos el exponente n.
El símbolo que fue convencionado para esta operación es *log*. En este caso particular tenemos:

$$\log_b P = n \Longrightarrow b^n = P$$

La comprensión perfecta de estas dos expresiones es la base para la solución de la mayoría de los problemas.
A continuación vamos a definir la logaritmación de una forma general sin utilizar los símbolos de potenciación.

Logaritmo de un número N, es el exponente que debemos elevar otro número llamado base para obtener dicho número *N*.

Entonces: Si... $\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$

OBS: Debido a que el logaritmo de un número es un exponente, sigue todas las normas aritméticas referentes a potencias de igual base.

Clasificación de los logaritmos

Fácilmente podemos comprender que, dependiendo del número que adoptamos como base, podríamos obtener infinidad de tipos de logaritmos.
Debido a esta diversidad y a algunas particularidades del número 10 (*diez*) y del número e = 2,7182818284 ... (*inconmensurable*) fue convencionado denominar:

- ✓ ***Logaritmo decimal o vulgar:*** Cuando se adopta como base el número 10, es decir $\log_{10} N$.

  También fue convencionado que cuando usamos este logaritmo decimal, no será preciso colocar o escribir la base. Entonces $\log_{10} N = \log N$

- ✓ ***Logaritmo natural o neperiano:*** Cuando se adopta como base el número *e*, es decir $\log_e N$.

  También fue convencionado que cuando utilizamos este logaritmo natural, lo expresamos de la siguiente forma: $\log_e N = \ln N$

- ✓ ***Logaritmo con cualquier base:*** Cuando adoptamos como base cualquier otro número diferente de los anteriores, en este caso es necesario especificar dicha base:

$$\log_b N$$

Principios fundamentales, relativos a los números primos

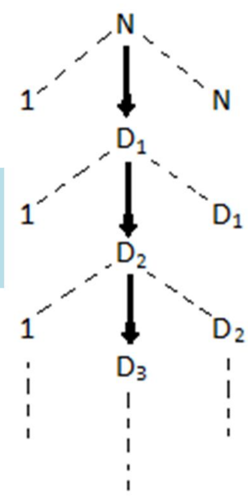
TEOREMA ②① (E.D.A)

Todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que uno.

H) Sea N un número compuesto

T) N tiene por lo menos un factor primo mayor que uno

D) Por definición de número compuesto, N debe tener un divisor D_1 distinto de la unidad y de si propio.



Si este divisor D_1 fuese primo el teorema quedaría demostrado, pero también podría ser que sea compuesto.

Al ser un número compuesto tendría que tener otro divisor D_2 distinto de la unidad y de si propio , este divisor D_2 también dividiría a N porque al dividir a D_1 también dividirá a su múltiplos.

Este nuevo divisor D_2 podría ser primo, en cuyo caso quedaría demostrado el teorema, en caso contrario, tendríamos que continuar el mismo raciocinio.

Ahora bien, estos divisores se van haciendo cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad (pues estamos suponiendo que son números compuestos).

Pero ningún número podrá tener un número ilimitado de divisores compuestos, lo que implica, que llegaremos necesariamente a un número primo que dividirá a N.

TEOREMA ②②

La serie de los números primos es ilimitada.

H) Sea el número primo P tan grande como se quiera

T) Existe otro número primo mayor que P

D) Formemos el producto de todos los números primos menores que P y multipliquémoslo por P.

A este producto añadámosle la unidad y sea N el resultado.

Es decir: $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \times P + 1 = N$

- En estas circunstancias debemos aceptar que N es mayor que P.

  Puede ser que el número N sea primo o compuesto.

  En el primer caso quedaría demostrado el teorema, porque habrá un número primo mayor que P.
- En caso de que sea compuesto, podemos afirmar que N debe poseer un número primo n mayor que la unidad que lo divida por el teorema que dice: *"Todo número compuesto tiene por lo menos un divisor primo mayor que uno".*

A respecto de dicho número primo n, podemos analizar tres posibilidades

- *Primera*: $n < P$ ....Esta posibilidad queda eliminada porque dividiendo N por cualquiera de los números primos menores que P, daría como residuo la unidad.

- *Segunda*: $n = P$ ....Esta posibilidad queda eliminada pues dividiendo N por P, daría como residuo la unidad.

- *Tercera:* $n > P$ ....Esta es la última y única posibilidad que nos queda y debemos aceptar que n es un número primo mayor P y en este caso sería igual a N.

A este número primo N y mayor que P, podríamos aplicar nuevamente el mismo razonamiento y llegaremos a una conclusión semejante, es decir que existe nuevamente otro número primo mayor que N.

Luego la serie de los números primos es ilimitada.

TEOREMA ②③

Si un número primo no divide a otro número, es primo con él.

H) Sea el número primo a que no divide al número b

T) a es primo con b

D) En efecto el número a por ser primo, solamente es divisible por a y por 1.

Por lo tanto los únicos divisores comunes que pueden tener a y b son a o 1

Pero a no puede ser divisor de b, pues por hipótesis a no divide a b

Luego el único divisor común de a y b es 1.

Es decir a y b son primos entre sí.

TEOREMA ②④

Todo número que divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, divide al otro factor.

H) Sea el número n que divide al producto $(a \times b)$

El número n es primo con a.

T) El número n tiene que dividir al factor b

D) En efecto: debido a que los números n y a son primos entre sí (por hipótesis), su máximo común divisor será la unidad .... $MCD_{(n\,,a)} = 1$.

n ... a ... *MCD = 1*

Multiplicando respectivamente estos dos números por b tendremos

$(n\,b)$ ... $(a\,b)$ ... $MCD = 1 \times b$

El nuevo MCD de estos dos números será b, porque *"Si dos números se multiplican por un mismo número, su MCD queda multiplicado por ese mismo número".*

Ahora bien:

- El número n divide el producto $(n\,b)$ por ser un factor de este producto.
- El número n divide el producto $(a\,b)$ por hipótesis.

Luego el número n divide a los números $(n\,b)$ y $(a\,b)$; por tanto dividirá también a su MCD, que es el número b porque *"Todo número que divide a otro dos, divide a su MCD".*

Luego el número n divide a b que es la tesis.

Obs: Se recomienda estudiar este teorema después del teorema 30.

TEOREMA ②⑤ (E.D.A)

Si un número es divisible por dos o más factores primos entre sí dos a dos, es divisible por su producto (Divisibilidad de un número compuesto).

H) Sea el número N divisible por los factores a, b y c.
que son primos entre sí dos a dos.

T) N es divisible por el producto $(a \times b)$
N es divisible por el producto $(a \times b \times c)$

D) En efecto: N es divisible por a, llamando e_1 al cociente tendremos:

$$N = a.e_1 \text{ .... (1)}$$

El factor b divide a N por hipótesis, luego dividirá a su igual $(a\ e_1)$, pero como es primo con a por hipótesis, tendrá que dividir al factor e_1 por el teorema: *"Si un número divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, tendrá que dividir al otro factor".*

Luego b dividirá a e_1, y llamando e_2 al nuevo cociente tendremos:

$$e_1 = b\ e_2 \text{ .... (2)}$$

Llevando (2) en (1) tendremos: $N = a\ b\ e_2$

$$N = (a\ b)\ e_2 \text{ .... (3)}$$

Esta expresión (3) nos dice que el número N contiene al producto $(a\ b)$ un número exacto e_2 veces, es decir: N es divisible por $(a\ b)$ .... 1° parte

De la primera parte utilizaremos las relaciones:

$$\begin{cases} N = a\ e_1 \text{ ... ... (1)} \\ e_1 = b\ e_2 \text{ ... ... (2)} \end{cases}$$

El número c divide a N por hipótesis, luego dividirá a su igual $(a\ e_1)$, pero como es primo con el factor a (por hipótesis) tendrá que dividir al factor e_1.

Considerando la ecuación (2), el número c divide al número e_1, luego dividirá a su igual $(b\ e_2)$, pero como es primo con b (por hipótesis) tendrá que dividir al factor e_2.

Llamando e_3 al cociente tendremos $e_2 = c\ e_3$ .... (4)

Llevando (4) en (3) tendremos: $N = (a\ b\ c)\ e_3$

Esta relación nos dice que: N es divisible por $(a\ b\ c)$ .... Que es la tesis.

<u>OBS:</u> Los números e_1, e_2 y e_3 serán números enteros.

TEOREMA ②⑥

Todo número compuesto es igual a un producto de factores primos.

(Descomposición de un número compuesto en factores primos)

H) Sea el número compuesto N.

T) N es igual a un producto de factores primos.

D) En efecto: N por ser compuesto tendrá por lo menos un divisor primo.

"Porque todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que la unidad".

Sea a dicho factor primo. Dividiendo N entre a, nos dará un cociente exacto que llamaremos e_1.

Luego tendremos.................$N = a\,e_1$.........(1)..........Pues el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.

Si este número e_1, fuese primo el teorema quedaría demostrado, pero existe la posibilidad que sea nuevamente un numero compuesto.

Aplicando el mismo raciocinio anterior tendremos que e_1 posee por lo menos un divisor primo que llamaremos *b.*

Llamando e_2 al nuevo cociente de dividir e_1 por *b*, tendremos:

$e_1 = b\,e_2$ .... (2)

Llevando (2) en (1) tendremos .... $N = a\,b\,e_2$ .... (3)

Si e_2 fuese un número primo, el teorema quedaría demostrado, pero si nuevamente fuese compuesto tendrá un divisor primo que llamaremos c.

Llamando e_3 al nuevo cociente de dividir e_2 por c tendremos:

$e_2 = c\,e_3$ .... (4)

Llevando (4) en (3) tendremos: $N = a\,b\,c\,e_3$ .... (5)

Si e_3 es primo quedaría demostrado el teorema, si no lo fuese, podríamos continuar el mismo raciocinio sucesivamente y cada vez obtendríamos un cociente menor y llegaríamos necesariamente a un cociente primo que dividido por si mismo dará de cociente la unidad y entonces:

El número N será igual a un producto de factores primos.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS O MÁS NÚMEROS

El máximo común divisor de dos o más números, es el mayor número que divide a dichos números exactamente.

Métodos para hallar el MCD de dos o más números

- ***Por descomposición en factores primos:*** Se descomponen los números en sus factores primos. El MCD será el producto de todos los factores comunes con su menor exponente.

- ***MCD de dos números por divisiones sucesivas:*** *Sean los números* A y B

	C_1	C_2	C_3
A	B	R_1	R_2
	R_1	R_2	(0)

$\Longrightarrow \quad MCD = R_2$

El máximo común divisor, es el último divisor sucesivo, hasta que el resto de cero. En este caso esquematizado será R_2

- ***MCD de más números:*** A , B , C y D

Se halla primero el máximo común divisor de los dos primeros.

Sea M_1 dicho máximo común divisor.

Luego se halla el MCD de M_1 con el siguiente número y así sucesivamente.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} MCD(1) \\ C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} MCD(2) \\ D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} MCD(3)$$

TEOREMA ②⑦

El máximo común divisor del dividendo y el divisor de una división inexacta es igual al del divisor y el resto.

H) Sea la división inexacta

$$D = d\,.c + r \;\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} D \ldots\ldots\ldots\ldots.\,dividendo \\ d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, divisor \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, cociente \\ r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, .resto \end{cases}$$

Sea $\boldsymbol{a}$ el MCD de D y d

T) a será también el MCD de d y r.

D) En efecto: Por los principios fundamentales de divisibilidad sabemos que:

- ✓ *"Todo número que divide el dividendo y el divisor de una división inexacta divide al residuo".*
- ✓ *"Todo número que divide al divisor y al residuo de una división inexacta, divide al dividendo"*

Sabemos que el número a divide a D y d .... Por hipótesis, luego dividirá a d y r.

Pero siendo a el mayor numero que divide a D y d .... MCD (por hipótesis).

También será el mayor número que dividirá a d y r..........Porque si existiese otro número mayor de a que divide a d y r este número tendría que dividir también al dividendo *(D)*

Y el número a no sería el MCD de d y D.

Luego: a es el MCD del divisor d y del resto r.

TEOREMA ②⑧

Todo divisor de dos números divide a su máximo común divisor.

H) Sea el número N que divide a A y B

Hallemos el MCD de A y B por el método de divisiones sucesivas.

Sean C_1, C_2 y C_3 los cocientes sucesivos y R_1, R_2 sus respectivos residuos:

	C_1	C_2	C_3
A	B	R_1	R_2
	R_1	R_2	(0)

$\Rightarrow$ $MCD = R_2$

T) El número N divide al MCD de A y B, es decir a R_2

D) En efecto: El número N divide a A y B por hipótesis, que son respectivamente dividendo y divisor de la primera división.

Por tanto N también dividirá a R_1 por el teorema que dice: *"Todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta dividirá al residuo".*

En la segunda división, aplicando el mismo principio anterior, el numero N por dividir al dividendo B y al divisor R_1, también dividirá al residuo R_2 que es el MCD de A y B.

Luego N divide al MCD de A y B.

TEOREMA ②⑨

Si se multiplican o dividen dos números por un mismo número, su máximo común divisor queda multiplicado o dividido por el mismo número.

H) Sean A y B dos números y sea n un número cualquiera.

	C_1	C_2	C_3
A	B	R_1	R_2
	R_1	R_2	(0)

$\Longrightarrow$ $MCD = R_2$

T) Si A y B se multiplican o dividen por el número n, el MCD de A y B que es la R_2 también quedará multiplicado o dividido por n.

D) En efecto: Si A y B se multiplican o dividen por n, el resto R_1 quedara multiplicado o dividido por n, porque: *"Si el dividendo y el divisor de una división inexacta se multiplican o dividen por un mismo número, el cociente no varía y el residuo queda multiplicado o dividido por dicho número".*

En la segunda división el dividendo B y el divisor R_1 están multiplicados o divididos por n, luego por el mismo motivo el residuo R_2 también quedará multiplicado o dividido por n.

Pero: R_2 es el MCD de A y B ....Que es la tesis.

TEOREMA ③⓪

Los cocientes que resultan de dividir dos números por su máximo común divisor, son primos entre sí..

H) Sean los números A y B, siendo M el MCD de ambos.

Sean C_A y C_B los cocientes de dividir, los números A y B por M.

$C_A = \frac{A}{M}$ y $C_B = \frac{B}{M}$

T) C_A y C_B son primos entre sí.

D) En efecto: *"Si se dividen dos números por un mismo número, su MCD queda dividido por el mismo número".*

Al dividir los números A y B por el número M, el MCD que en este caso es el mismo número M, quedará dividido por M, y el nuevo MCD será 1.

Es decir: C_A y C_B son primos entre sí.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS O MÁS NÚMEROS

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor número que contiene a todos un número exacto de veces.

Métodos para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números

- ***Por descomposición en factores primos:*** Se descomponen los números en sus factores primos.

  El mínimo común múltiplo será el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

- ***Por el máximo común divisor:*** Este método se fundamenta en el teorema que dice: “El mínimo común múltiplo de dos números es igual a su producto dividido por el máximo común divisor de los mismos”.

  Luego para hallar el mínimo común múltiplo de dos números, se multiplican dichos números entre sí y este producto dividimos por el MCD de ambos, obteniendo como cociente el mcm.

  Siendo A y B los números.

$$mcm_{(A,B)} = \frac{A \times B}{MCM_{(A,B)}} = \frac{P_{(A,B)}}{MCM_{(A,B)}}$$

- ***Mínimo común múltiplo de varios números:*** Cuando queremos calcular el mínimo común múltiplo de más de dos números por este método, primero determinamos el *mcm* de dos de ellos, sea m_1 dicho primer mcm.

  Posteriormente, hallamos el mcm de m_1 con el siguiente número y así sucesivamente.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} m_1 \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots \\ \\ C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} m_2 \ldots\ldots.\ldots\ldots \\ \\ D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} m_3$$

TEOREMA ③①

El mínimo común múltiplo de dos números es igual a su producto dividido por el máximo común divisor de los mismos.

H) Sean los números A y B cuyo producto es P.............$P = A \,.\, B$

Sea M el máximo común divisor y m el mínimo común múltiplo de ambos.

T) $\dfrac{P}{M} = m$

D) El producto P será múltiplo de A y B, pues contendrá al número A (B veces) y al número B (A veces).

Si dividimos este producto por un factor común a ambos números A y B, el cociente seguirá siendo múltiplo común de los dos números dados, aunque menor que el anterior.

Pero si dividimos el producto por el mayor factor común de los dos números dados que es M, el cociente seguirá siendo múltiplo común de los dos y el menor posible, es decir m.

Luego .... $\dfrac{P}{M} = m$ .... Que es la tesis.

NÚMERO FRACCIONARIO

Es el número que expresa una o varias partes iguales de la unidad principal y consta de dos términos, llamados numerador y denominador.

El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal y el numerador, cuántas de esas partes se toman.

Para escribir un número fraccionario se escribe el numerador arriba, separado de una raya oblicua u horizontal del denominador.

Clasificación de las fracciones:

- ***Fracciones comunes:*** son aquellas cuyo denominador no es la unidad seguida de ceros.
- ***Fracciones decimales:*** son aquellas cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.

Tanto las fracciones comunes como las decimales se clasifican en:

- ✓ ***Fracción propia:*** cuando el numerador es menor que el denominador.
- ✓ ***Fracción igual a la unidad:*** es cuando el numerador es igual al denominador.
- ✓ ***Fracción impropia:*** es cuando el numerador es mayor que el denominador. Toda fracción impropia es mayor que la unidad.
- ✓ ***Número mixto:*** es el que consta de una parte entera y otra parte fraccionaria.

Principales propiedades de las fracciones comunes

- ✓ De varias fracciones que tengan igual denominador, es mayor el que tenga mayor numerador.
- ✓ De varios quebrados que tengan igual numerador, es mayor el que tenga menor denominador.
- ✓ Si el numerador de una fracción se multiplica por un número, sin variar el denominador, la fracción queda multiplicada por dicho número, y si se divide, la fracción queda dividida por dicho número.
- ✓ Si el denominador de una fracción se multiplica o divide por un número, la fracción queda dividida en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número.
- ✓ Si los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por un mismo número, la fracción no varía.

Reducción y Simplificación de fracciones: Para simplificar o reducir una fracción se utiliza la última propiedad de las fracciones, dividiendo los términos de la fracción por un mismo número, hasta que el numerador y el denominador sean primos entre sí.

Fracción Irreducible: Una fracción es irreducible cuando el numerador y el denominador son primos entre sí.

Fracción Generatriz: Es la fracción que genera a un determinado número decimal, cuando dividimos el numerador por el denominador.

Dependiendo del cociente o del número decimal obtenido se pueden presentar los siguientes casos:

- ✓ ***Exacta:*** Cuando el número decimal obtenido no deja residuo.

  Ejemplo: $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $0{,}342$

- ✓ ***Inexacta periódica pura:*** Cuando en el cociente, una o más cifras se repiten en forma periódica y siempre se produce residuo.

  Ejemplo: $\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots$

- ✓ ***Inexacta periódica mixta:*** Cuando el cociente es una mezcla de los dos casos anteriores, es decir tiene una parte que no se repite y otra que se repite en forma periódica.

  Ejemplo: $\frac{67}{225} = 0{,}\underbrace{25}_{\text{Parte decimal exacta}}\overbrace{33}^{\text{Parte periódica}}\ldots$

- ✓ ***Inexacta no periódica:*** Es cuando las cifras del cociente decimal van cambiando en forma aleatoria.

Deducción para hallar la generatriz de una fracción decimal exacta

Sea el numero decimal $0,abc$ una fracción decimal exacta.

Queremos encontrar la fracción que le dio origen (fracción generatriz).

Llamando f a la fracción generatriz tendremos:

$$f = 0,abc \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción, en este caso 1000 tendremos:

$$1000f = abc$$

Luego:

$$f = \frac{abc}{1000}$$

Regla: Para hallar la generatriz de una fracción decimal exacta se pone por numerador la fracción decimal, prescindiendo del punto, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Deducción para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura

Sea el número decimal $0,\ abab.....$ fracción decimal periódica pura.

Queremos encontrar la fracción que le dio origen (fracción generatriz).

Llamando f a la fracción generatriz tendremos:

$$f = 0,(ab)ab...... \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el periodo, en este caso 100 tendremos:

$$100f = ab,abab...... \qquad (2)$$

$$100f = ab,abab...... \qquad (2)$$

$$f = 0,abab...... \qquad (1)$$

Restando miembro a miembro $\qquad 99f = ab$

Luego:

$$f = \frac{ab}{99}$$

***Regla**: Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura se pone por numerador un periodo, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo.*

Deducción para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta

Sea el número decimal $0,ab(cde)cde.....$ fracción decimal periódica mixta.

Queremos encontrar la fracción que le dio origen (fracción generatriz).

Llamando f a la fracción generatriz, tendremos:

$$f = 0,ab(cde)cde...... \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tinga la parte no periódica y el periodo, en este caso 100000 , porque son 5 esas cifras, tendremos:

$$100000f = abcde,cde...... \qquad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica, en este caso 100 tendremos:

$$100f = ab,cdecde...... \qquad (3)$$

$$100000f = abcde,cde...... \qquad (2)$$

$$100f = ab,cdecde...... \qquad (3)$$

Restando miembro a miembro

$$99900f = abcde - ab$$

Luego:

$$f = \frac{abcde - ab}{99900}$$

***Regla**: Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta se pone por numerador la parte no periódica seguida de un periodo menos la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.*

RAZONES Y PROPORCIONES

Razón o relación de dos cantidades: Es el resultado de comparar dos cantidades. La comparación puede hacerse de dos maneras:

- ✓ Hallando cuánto excede una a la otra, es decir restándolas.
- ✓ Hallando cuantas veces contiene una a la otra, es decir dividiéndolas.

Luego tenemos dos clases de razones

- ❖ ***Razón aritmética o por diferencias de dos cantidades:*** Es la diferencia indicada de dichas cantidades.

  Notación: $\boldsymbol{a-b}$ $\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}\ es\ a\ \boldsymbol{b}$

  Al primer término se le llama antecedente y al segundo término consecuente.

- ❖ ***Razón geométrica o por cociente de dos cantidades:*** Es el cociente indicado de dichas cantidades.

  Notación: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ $\boldsymbol{a:b}$ $\boldsymbol{a}\ es\ a\ \boldsymbol{b}$

  El primer término se llama antecedente y el segundo consecuente.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA:

Es la igualdad de dos razones aritméticas, también se lo denomina equidiferencia.

Notación: .... $\begin{cases} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} \;:\; \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a} \text{ } es \text{ a } \boldsymbol{b} \text{ } como \text{ } \boldsymbol{c} \text{ } es \text{ a } \boldsymbol{d} \end{cases}$

Términos de una proporción aritmética:

Medios:	2º	y	3º	términos
Extremos:	1º	y	4º	términos
Antecedentes:	1º	y	3º	términos
Consecuentes:	2º	y	4º	términos

$$\underbrace{a \,.\, \overbrace{b : c}^{Medios} \,.\, d}_{Extremos}$$

$$\underbrace{a \,.\, b}_{\textit{Antecedentes}} \overbrace{: c \,.\, d}^{Consecuentes}$$

TEOREMA ③②

En toda equidiferencia, la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.

H) Sea la equidiferencia $a - b = c - d$

T) $a + d = c + b$

D) Por hipótesis tenemos .... $a - b = c - d$

Sumando a ambos miembros un extremo y un medio tendremos .... $b + d = b + d$

$$a + d = c + b$$

Consecuencias

- ✓ En toda equidiferencia un medio es igual a la suma de los extremos, menos el otro medio.
- ✓ En toda equidiferencia un extremo es igual a la suma de los medios, menos el otro extremo.

Equidiferencia continúa

Cuando los medios son iguales, dicho término medio se llama *media diferencial*.

La media diferencial es igual a la semisuma de los extremos.

$a - b = b - c$ .... $b = \dfrac{a + c}{2}$

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA O EQUICOCIENTE:

Es la igualdad de dos razones geométricas o por cociente.

Notación: .... $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \\ a : b :: c : d \\ a \text{ es a } b \text{ como } c \text{ es a } d \end{cases}$

Términos de una proporción geométrica

Medios: 2º y 3º términos

Extremos: 1º y 4º términos

$$\underbrace{a : \overbrace{b :: c}^{Medios} : d}_{Extremos}$$

También se los puede denominar:

Antecedentes: 1º y 3º términos

Consecuentes: 2º y 4º términos

$$\overset{Consecuentes}{\underset{Antecedentes}{a : b :: c : d}}$$

Clases de proporciones geométricas

a) *Proporción discreta:* Es la proporción en que los medios no son iguales.

b) *Proporción continua:* Es la proporción en que los medios son iguales.

TEOREMA ③③

En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

H) Sea la proporción $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

T) $\boxed{a \times d = c \times b}$

D) En efecto multiplicando ambos miembros de la hipótesis por un medio y un extremo, es decir por $b \times d$ tendremos.

$$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$$
$$b\,d = b\,d$$

Multiplicando miembro a miembro .... $\dfrac{a\,\cancel{b}\,d}{\cancel{b}} = \dfrac{c\,b\,\cancel{d}}{\cancel{d}}$

Luego:............................ $\boxed{a\,d = c\,b}$ ....Que es la tesis.

Cambios que se pueden hacer en una proporción geométrica

Para que la transformación sea legítima sólo es necesario que se conserve el producto de los extremos igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Longrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \qquad \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \qquad \frac{b}{d}=\frac{a}{c} \qquad \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

Entonces podemos cambiar los medios, los extremos y también podemos invertir ambos miembros y la proporción subsiste.

TEOREMA ③④

Si dos proporciones geométricas tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción geométrica.

H) Sean las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ y $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$

T) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

D) La demostración es obvia pues dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí.

TEOREMA ③⑤

Si dos proporciones geométricas tienen los antecedentes respectivamente iguales, los consecuentes forman proporción geométrica.

H) Sean las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m}=\frac{c}{n}$

T) $\frac{b}{d}=\frac{m}{n}$

D) Cambiando los medios en ambas proporciones de la hipótesis llegaremos a la tesis.

Teorema ③⑥

Si dos proporciones geométricas tienen los consecuentes respectivamente iguales, los antecedentes forman proporción geométrica.

H) Sean las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{b} = \frac{n}{d}$

T) $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$

D) Cambiando los medios en ambas proporciones de la hipótesis llegaremos a la tesis.

TEOREMA ③⑦ (EDA)

En toda proporción geométrica, la suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente o antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente o antecedente.

1ª PARTE: La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente.

H) Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

T) $\boxed{\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}}$

D) Sumando o restando a los dos miembros de la hipótesis la unidad

$$\begin{array}{rcl} \frac{a}{b} & = & \frac{c}{d} \\ 1 & = & 1 \\ \hline \frac{a}{b} \pm 1 & = & \frac{c}{d} \pm 1 \end{array}$$

Y efectuando operaciones, tendremos: $\boxed{\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}}$ ....Que es la tesis.

2ª PARTE: La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente.

H) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

T) $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$

D) Invirtiendo la proporción de la hipótesis y sumando o restando de la unidad, tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ \frac{b}{a} & = & \frac{d}{c} \\ \hline 1 \pm \frac{b}{a} & = & 1 \pm \frac{b}{c} \end{array}$$

Y efectuando la operación tendremos: $\boxed{\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA ③⑧ (EDA)

En toda proporción geométrica, la suma o resta de los antecedentes es a la suma o resta de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

H) Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

T) $\boxed{\frac{a \pm c}{c \pm d} = \frac{a}{b}}$

D) En efecto: Cambiando los medios en la proporción dada, tendremos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a esta proporción el teorema: *"La suma o resta de los términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente"* tendremos:

$$\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b}$$

Cambiando los medios en esta última proporción tendremos:

$$\boxed{\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$ ……………………………… Que es la tesis.

TEOREMA ③⑨ (EDA)

En toda proporción geométrica, la suma de los dos términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es a su diferencia.

H) Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

T) $\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$

D) En efecto: Partiendo de la proporción dada y aplicando el teorema *"La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente"* tendremos:

$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ Cambiando los medios tendremos: $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$

Desarrollando esta igualdad en sus dos formas tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \end{array}\right\}$$ Dos expresiones iguales a una tercera son iguales

Luego :................................... $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$

Intercambiando los medios tenemos: $\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$ .... Que es la tesis.

TEOREMA ④⓪

En toda proporción geométrica, la suma de los antecedentes es a su diferencia como la suma de los consecuentes es a su diferencia.

H) Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

T) $\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$

D) Partiendo de la proporción dada y aplicando el teorema *"La suma o la diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente"* tendremos:

$$\frac{a \pm c}{a \pm d} = \frac{a}{b}$$ ....Que desarrollando en sus dos formas tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} \\ \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} \end{array}\right\}$$ Dos expresiones iguales a una tercera son iguales

Luego tendremos: $$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}$$

Cambiando los medios en esta última proporción tendremos:

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$ .... Que es la tesis

TEOREMA ④① (EDA)

En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

H) Sea la serie de razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

T) $\frac{a + c + m}{b + d + n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

D) Partiendo de las dos primeras razones dadas y aplicando el teorema *"La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente"* tendremos:

$\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$ ………………….. Pero $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ ………… por hipótesis.

Dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí,

Luego:…………………………………… $\frac{a + c}{b + d} = \frac{m}{n}$

Aplicando nuevamente a esta proporción el mismo teorema citado, tendremos:

$\frac{a + c + m}{b + d + n} = \frac{m}{n}$ …………………….. Pero $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ ……… Por hipótesis

Luego podemos escribir:

$\frac{a + c + m}{b + d + n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ ……….. Que es la tesis

ANEXO:

Sea la proporción $a : b :: c : d$

1- En toda proporción geométrica un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo: $a = \frac{(b \times c)}{d}$

2- En toda proporción geométrica un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio: $b = \frac{(a \times d)}{c}$

3- La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Longrightarrow b = \sqrt{ac}$$

Media proporcional: Es el término medio de una proporción geométrica continua, se lo denomina también media geométrica.

Tercera o tercia proporcional: Es el primero o cuarto término de una proporción geométrica continua.

Cuarta proporcional: Es cualquiera de los cuatro términos de una proporción geométrica discreta.

Magnitudes Proporcionales: Dos magnitudes son proporcionales cuando multiplicando o dividiendo una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida (o viceversa) por el mismo número.
Se clasifican en directamente proporcionales e inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales:

Son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número y dividiendo una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número.

Ejemplos:

- ✓ El tiempo y las unidades de trabajo realizadas.
- ✓ El número de cosas y el precio total (cuando se paga por unidad).
- ✓ El tiempo de trabajo y el salario de un obrero.
- ✓ El número de obreros empleado y el trabajo realizado.

Magnitudes inversamente proporcionales:

Son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y dividiendo una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplos:

- ✓ El número de obreros empleado y el tiempo necesario para hacer una obra.
- ✓ Longitud con el ancho, si el área permanece constante.
- ✓ La velocidad de un móvil con el tiempo empleado para recorrer un mismo espacio.

Razón de proporcionalidad: Es la relación que existe entre dos cantidades directamente proporcionales y en un determinado problema esta relación se mantiene constante (Por lo general).

Siendo a y b dichas cantidades o magnitudes.

La relación $\frac{a}{b}$ se llama razón de proporcionalidad.

Razón directa o inversa: Si tenemos cuatro cantidades o magnitudes, homogéneas dos a dos. Es decir:

$$\begin{cases} a \quad y \quad b \quad magnitudes\ homogéneas \\ c \quad y \quad d \quad magnitudes\ homogéneas \end{cases}$$

Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son directas

Las razones $\frac{b}{a}$ y $\frac{d}{c}$ son inversas

Modos de formar proporción con cantidades directamente proporcionales:

Para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos y directamente proporcionales, se igualan las razones directas.

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Modos de formar proporción con cantidades inversamente proporcionales: Para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, inversamente proporcionales, se iguala la razón directa de la primera cantidad con la razón inversa de la segunda cantidad.

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

Deducción de las fórmulas para dividir un número en partes proporcionales a otros varios

Sea el número *N* que debemos dividir en partes proporcionales a los números a , b y c

Llamemos: $\begin{cases} x \text{ a la parte de N correspondiente a " } a \text{ "} \\ y \text{ es la parte de N correspondiente a " } b \text{ "} \\ z \text{ a la parte de N correspondiente a " } c \text{ "} \end{cases}$

Como la suma de estas partes es igual al número dado N, tendremos:

$$x + y + z = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si las partes en que se divide el número debe ser proporcional a los números dados *a*, *b* y *c*, esto quiere decir que podemos formar con estas cantidades una serie de razones iguales:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Aplicando el teorema: *"En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente"*, tendremos:

$$\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pero $\quad x + y + z = N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ en (2)

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{en } (3)$$

Desmembrando respectivamente la igualdad (3) tendremos:

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{x}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \quad x = \frac{a\,N}{a + b + c}$$

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{y}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \quad y = \frac{b\,N}{a + b + c}$$

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{z}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \quad z = \frac{c\,N}{a + b + c}$$

Luego: para repartir un número en partes proporcionales a otros varios se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros números y se divide por la suma de estos.

APLICACIONES DE LA REPARTICIÓN PROPORCIONAL

- ***Repartición proporcional directa:*** Repartir un número o cantidad N en partes directamente proporcionales a los números a, b y c.

  Es sólo formar la proporción $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, y *aplicar los procesos anteriores.*

- ***Repartición proporcional inversa:*** Repartir el número o cantidad N en partes inversamente proporcionales a los números a, b y c.

  En este caso la proporción será $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$.

  A continuación se procede en forma análoga a la anterior.

OBS: Los números a, b y c podrán ser números enteros, fraccionarios, irracionales. El proceso no por eso es diferente.

Reparto Compuesto: El reparto compuesto es nada más que una combinación de dos o más repartos proporcionales, que podrán ser directas o inversas, es decir:

Repartir el número N en tres partes de tal forma que:

- Sean directamente proporcionales a: m, n y ℓ
- Sean inversamente proporcionales a: p, q y r.
- Sean directamente proporcionales a: k, t y w.

Llamemos x, y y z a dichas partes de N.

Formemos la proporción.

$$\frac{x}{m \times \frac{1}{p} \times k} = \frac{y}{n \times \frac{1}{q} \times t} = \frac{z}{\ell \times \frac{1}{r} \times w}$$

Luego:........................ $\frac{x}{\frac{m\ k}{p}} = \frac{y}{\frac{n\ t}{q}} = \frac{z}{\frac{\ell\ w}{r}}$

A partir de aquí el proceso es análogo a los anteriores.

ANEXO COMPLEMENTARIO 1

A continuación expondremos algunas reglas prácticas, definiciones y teoremas, que aunque no figuren en forma explícita en el programa el alumno debe saber.

Recomendamos que el alumno procure demostrar los teoremas, en caso contrario por lo menos que procure comprender bien el significado.

- **Casos particulares de la suma**:
  - ✓ *Sumandos unidad:* Cuando todos los sumandos son 1, la suma es igual al número de sumandos.

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{a\ veces} = a$$

  - ✓ *Sumandos nulo – Módulo de la adición:* El 0 es el único número que sumado con otro no lo altera. El 0 es el modulo de la suma.

$$N + 0 = N$$

- **Relación entre el producto y el multiplicando**:
  - ✓ Si el multiplicador es cero, $\Rightarrow$ el producto es cero
  - ✓ Si el multiplicador es 1 $\Rightarrow$ el producto es igual el multiplicando.
  - ✓ Si el multiplicador es > 1 $\Rightarrow$ el producto es $>$ que el multiplicando.
  - ✓ Si el multiplicador es < 1 $\Rightarrow$ el producto es $<$ que el multiplicando.

Luego multiplicar no es siempre aumentar.

- **Regla para multiplicar números terminados en cero.**
- ✓ Para multiplicar un número entero por la unidad seguida de ceros se añaden al entero tantos ceros como ceros acompañen a la unidad.
- ✓ Para multiplicar dos números terminados en cero, se multiplican los números como si no tuvieran ceros y a la derecha de este producto se añaden tantos ceros como haya en el multiplicando y multiplicador.

Siempre que un número aparezca en una expresión cualquiera como factor y divisor puede suprimirse sin que la expresión se altere.

Teorema 1A: Si un número divide a todos los sumandos de la suma, menos a uno de ellos, no divide a la suma, y el residuo que se obtiene al dividir la suma entre el número, es el mismo que se obtiene dividiendo el sumando no divisible entre dicho número.

Teorema 2A: Todo numero que no divide a otros dos, divide a su diferencia si los residuos por defecto que resultan de dividir estos dos números entre el numero que no los divide son iguales.

- **Divisibilidad por 3:**
  - ✓ **Lema 1**: La unidad seguida de cualquier número de ceros, es igual a un múltiplo de 3 más la unidad.
  - ✓ **Lema 2**: Una cifra significativa, seguida de cualquier número de ceros, es igual a un múltiplo de 3 más la misma cifra.
  - ✓ **Lema 3**: Todo número entero es igual a un múltiplo de 3 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Regla: ***Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.***

Teorema 3A: Todo número primo que divide a un producto de varios factores, divide por lo menos a uno de ellos.

Teorema 4A: Todo número primo que divide a una potencia de un número tiene que dividir a este número.

Teorema 5A: Si dos números son primos entre sí, todas sus potencias también son primos entre sí.

Teorema 6A: Todo número primo mayor que 3 equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en la unidad.

Teorema 7A: El producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

Teorema 8A: Un número compuesto no puede descomponerse más que en un solo sistema de factores primos.

Teorema 9A: Si dos números dados son primos entre sí, el MCM es su producto.

Teorema 10A: El MCM de varios números no se altera porque se sustituyan dos de ellos por su MCM.

Teorema 11A: Si los números dados (más de dos) son primos dos a dos, el MCM es su producto, porque 1 es el MCD de dos cualquiera de ellos.

ANEXO COMPLEMENTARIO 2

Teorema A-1

En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes multiplicados por cualquier número es a la suma de los consecuentes multiplicados respectivamente por los mismos números como un antecedente es a su consecuente.

H) Sea la serie de razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

Sean p, q y r números cualesquiera.

T) $$\frac{pa \pm qc \pm rm}{pb \pm qd \pm rm} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

Teorema A-2

En toda serie de razones iguales, la raíz n (enésima) de la suma de las potencias de grado n de los antecedentes es a la raíz enésima de la suma de las potencias de grado n de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

H) Sea la serie de razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{r}{s}$

T) $$\frac{\sqrt[n]{a^n \pm c^n \pm r^n}}{\sqrt[n]{b^n \pm d^n \pm r^n}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{r}{s}$$

Teorema A-3

En toda serie de razones iguales, la raíz n (enésima) del producto de n antecedentes es a la raíz enésima del producto de n consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

H) Sea la serie de razones iguales $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

T) $$\frac{\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n}}{\sqrt[n]{b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_n}} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Observación: Estos teoremas pueden ser aplicados a cualquier serie de razones iguales como también a una parte de ella, como una proporción normal.

Propiedad de fracciones desiguales

Teorema A-4

En toda serie de fracciones desiguales, ordenadas en forma creciente o decreciente, la fracción que se obtiene tomando por numerador la suma de los numeradores, y por denominador la suma de los denominadores, está comprendida entre la fracción mayor y la menor de ellos.

H) Sean las fracciones $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{m}{n} > \frac{r}{s}$.........ordenados en forma decreciente

T) $\frac{a}{b} > \frac{a+c+m+r}{d+d+n+s} > \frac{r}{s}$

***Obs.*:** Este teorema es aplicable a fracciones de términos positivos y únicamente se refiere a la suma aritmética.

Ejercicios de Aritmética

1) Se compran 160 cabezas entre novillos y corderos, pagando en total 109.200.000 Gs. Sabiendo que el número de corderos es 3 veces el número de novillos y que 20 corderos cuestan lo mismo que 2 novillos. ¿Cuál es el precio de cada uno?

Rta.: 2.100.000 Gs. y 210.000 Gs.

2) Un hecho histórico ha tenido lugar en un año expresado por 4 cifras, tales que, la primera y la tercera son iguales, la cuarta es la diferencia de estas dos cifras y la segunda es el cubo de la suma de las mismas. ¿Cuál es ese año? (Comenzando por la izquierda).

Rta.: 1810

3) Comprobar que dados tres números consecutivos, la diferencia entre los cuadrados de los números extremos es múltiplo del otro.

4) ¿Cuál es el mayor número que elevado al cuadrado, da un resultado menor o igual a 103?

5) Un número es tal que multiplicado por su triple da un resultado igual a 243. ¿Cuál es el número?

6) El quíntuplo de la quinta potencia de un número es igual a 5. ¿Cuál es el número?

7) Si la suma de dos números es un número primo, los números son primos entre sí. ¿Por qué?

8) Puede un número ser múltiplo de 8 y no de 4. ¿Por qué?

9) ¿Por qué la suma de varios números pares es también par?

10) La diferencia de dos números pares es par o impar? ¿Por qué?

11) Si *a*, *b*, *c* y *d* son cuatro números tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole m. Probar que la suma de los dos números extremos es igual a la suma de los dos medios.

12) Al efectuar una suma, se ha puesto el número 3 en vez del ocho en la cifra de las decenas y 7 en vez del 6 en las centenas. ¿En cuánto ha sido aumentado la suma ?

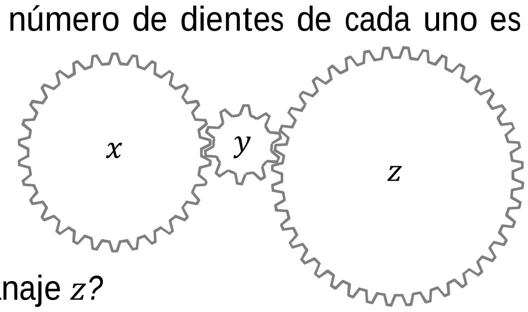
Rta.: aumenta 50

13) La figura muestra un sistema con tres engranajes acoplados, cada uno girando alrededor de un eje fijo. Los dientes son del mismo tamaño y el número de dientes de cada uno es el siguiente:

$x = 30\ dientes$

$y = 10\ dientes$

$Z = 40\ dientes$



Si el engranaje x da 12 vueltas, cuánto dará el engranaje z?

Rta.: 9 vueltas

14) En un cierto número, la cifra de las centenas es 4 y la de las decenas es 5. ¿En cuánto varía dicho número si se permutan estas dos cifras?

Rta.: aumenta 90

15) En cuánto aumenta un número si se disminuye en 1 la cifra de las unidades y se aumenta en 1 la de las unidades de mil?

Rta.: 999

16) Si al minuendo se le resta 100 y al sustraendo se le suma 100. ¿En cuánto aumenta o disminuye el resultado? Argumentar.

Rta.: disminuye 200

17) ¿Es par el cuadrado de un número par?

18) Si el cuadrado de un número es un número par. ¿Debe ser par el número?

19) Cuáles son los únicos números que pueden ser restos de la división de un número par por 2? ¿Y por 7?

20) El resto de la división de un número n por 15 es 6, y el resto de la división de un número m por 15 es 9. ¿Es divisible por 15 la suma de $m + n$? Argumentar

21) Después de gastar una parte de mi dinero, observo que tenía 10 veces lo que me queda. ¿Qué parte de lo que tenía gasté?

Rta.: $\frac{9}{10}$

22) Cinco motores consumen 7.200 kg. de combustible en 42 horas de funcionamiento. ¿Para cuántas horas alcanzará esa misma cantidad de combustible, si funcionan sólo 3 de esos motores?

Rta.: 70 hs.

23) Un colono ofrece a un empleado un salario anual de 48.116 Gs. y una sortija. Al cabo de 8 meses, despide al obrero y le entrega 28.116 Gs. y la sortija ¿En cuánto se apreció el valor de la sortija?

Rta.: 11.884 Gs.

24) El transporte de bordelesas de vino se cobra a razón de 1,25 Gs. cada 100 km. y por cada 100 kg. ¿Cuánto debe abonarse para el envío de 4 bordeleses de 250 kg cada una, a una distancia de 500 Km?

Rta.: 62,5 Gs.

25) Dos ciclistas parten uno de A y el otro de B, lugares que distan 115 km. Llevan la misma velocidad. Cuando se encuentran, el primero anduvo durante $2\frac{1}{2}$ horas y el segundo durante $3\frac{1}{4}$ horas. ¿Cuántos km recorrió cada uno?

Rta.: 50 Km ; 65 Km

26) Si con 1.250 kg de hierro se han hecho 5 planchas de 5 cm de espesor. ¿Cuántas planchas de 4 cm de espesor y , de largo y ancho igual que las anteriores podrán hacerse con 2 toneladas de hierro?

Rta.: 10 planchas

27) A cambio de 300 caballos se entregaron 180 vacas, 150 ovejas y la cantidad de 1.224.000.000 Gs. ¿A qué precio resultó cada caballo, sabiendo que cada vaca cuesta 1.200.000 Gs. y que por 100 ovejas se pagan 40.000.000 Gs?

Rta.: 5.000.000

28) Un comerciante importaba cierto artículo de los EE.UU y lo vendía a 3.900 Gs. ganando el 20%, cuando el dólar costaba 40 Gs. Ahora tiene que pagar 55 Gs. por cada dólar, el precio de fábrica ha aumentado 10%. ¿A qué precio deberá vender en la actualidad dicho artículo para que su ganancia sea el 30%?

Rta.: 6.741,42 Gs

29) Un tejido pierde al ser lavado $\frac{1}{20}$ de su longitud y $\frac{1}{16}$ de su ancho. Calcular cuántos metros de esta tela se deben comprar para obtener después de lavado 136,8 m^2, si el ancho de la tela original es de $\frac{6}{5}m$?

Rta.: 128 m

30) Uno de los términos medios de una proporción continua es media proporcional entre 3 y 5, y uno de los extremos es la media aritmética entre estos mismos números. Calcular el valor del otro extremo de la proporción.

Rta.: $\frac{15}{4}$

31) Para cavar un pozo se cuenta con dos grupos de obreros, el primer grupo tiene N hombres y puede concluir la obra en 10 días. El segundo grupo tiene N' hombres y puede concluir la obra en 5 días. Si se tomó la cuarta parte del primer grupo y la octava parte del segundo grupo. ¿En cuántos días harán dicha obra?

Rta.: 20 días

32) Cuatro trenes hacen el mismo recorrido con velocidades medias de 40 ; 35 ; 25 y 20 km/h respectivamente. El tiempo total empleado por los 4 trenes es de 26 hs y 48 min ¿Cuánto tiempo tardó cada tren en ese recorrido y cuál es este?

Rta.: 4 hs 40 min
5 hs 20 min
7 hs 28 min
9 hs 20 min

33) Tres cuadrillas de obreros han realizado un trabajo por el que se ha pagado 516 $. La primera cuadrilla contaba con 10 hombres y trabajó durante 12 días. La segunda cuadrilla con 6 hombres y trabajó 8 días y la tercera cuadrilla con 5 hombres trabajó 18 días. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla?

Rta.: 240 ; 96 ; 180

34) 50 hombres tienen provisiones para 20 días a razón de 3 raciones diarias. Si las raciones diarias se disminuyen $\frac{1}{3}$ y se aumentan 10 hombres. ¿Cuántos días durarán los víveres?

Rta.: 25 días

35) Dividir el número 467 en partes inversamente proporcionales a los cuadrados de 5 ; $\frac{1}{2}$ y 3.

Rta.: 4,5 ; 450 ; 12,5

36) Hallando previamente la generatriz de la decimales, calcular el $\frac{1}{4}$% del resultado de efectuar:

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{0{,}1999\ldots}\right) \times \left(\frac{1{,}333\ldots}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

Rta.: 0,01

37) Al dividir 4 m^3 585 dm^3 194 cm^3 por otro número complejo resulta como cociente 3 m 4 dm 2 cm. Hallar ese divisor.

38) Al dividir 1.866 y 1.479 por un mismo número, se obtienen por restos 33 y 22 respectivamente. ¿Cuál es el mayor divisor que cumple con esa condición?

Rta.: 47

39) Un lechero compró 800 litros de leche a 45 Gs/litro, después de agregarle agua se le derramó 15 litros, vendiendo el resto a 60 Gs/litro, ganando en total 16.500 Gs. ¿Cuántos litros de agua se ha agregado?

Rta.: 90 lts

40) En cuánto se vendió una mercadería que costó 1.320 Gs, sabiendo que si se lo hubiera vendido en 140 Gs. menos, se habría ganado 153 Gs?

Rta.: 1.613 Gs.

41) Tres personas decidieron festejar un acontecimiento aportando en partes iguales. Una de ellas trajo 5 botellas y otra 7 botellas de la misma bebida. Luego de hacer las cuentas, llegaron a la conclusión de que el tercero debía abonar 600 Gs. ¿Cuál es el precio de cada botella y como se repartieron el dinero (es decir los 600 Gs.) el primero y el segundo?

Rta.: 150 c/botella ; 150 y 450

42) Determinar el número y la suma de los divisores de cada uno de los números.

a) 240 b) 624.

43) Demostrar que la suma de dos números impares consecutivos es siempre divisible por 4.

44) Demostrar que la suma de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 3.

45) ¿Son primos entre sí dos enteros consecutivos?
¿Y dos enteros pares consecutivos?
¿Y dos enteros impares consecutivos?

46) Queriendo controlar la velocidad de los vehículos, dos agentes se colocan a 3 km. de distancia. Un automóvil pasa adelante del primero a las 7 hs 26 min y delante del segundo a las 7 hs 28 min. Sabiendo por reglamento que la velocidad máxima en ese lugar de 40 km/h. Deben aplicar multa o no al conductor de ese vehículo?

Rta.: 90 km/h ; si debe multar.

47) Si al dividendo de una división se le suma n veces el divisor. ¿Cómo varían el cociente y el resto?

48) Cuál es el dividendo de una división en la cual puede variar el divisor sin variar el cociente?

49) Tres personas heredan una casa y un terreno valuados respectivamente en 25.000.000 Gs. y 6.800.000 Gs. La primera conserva la casa y la segunda el terreno. ¿Qué suma de dinero debe entregar la primera a las otras dos, sabiendo que heredan por partes iguales?

Rta.: 3.800.000 Gs ; 10.600.000 Gs.

50) La distancia entre dos ciudades A y B es de 89 km. Un ciclista sale a las 7:00 hs de A hacia B y otro a las 8:00 hs de B hacia A. Sabiendo que la velocidad del primero es 17 km/h y la del segundo 19 km/h. ¿A qué hora tiene lugar el encuentro? ¿Y a qué distancia de A?

Rta.: 10 hs ; 51 Km de A

51) Si se suman 10 unidades a uno de los factores de un producto. ¿En cuánto aumenta el producto?

Rta.: 10 veces el otro factor

52) Dados 4 números enteros consecutivos. ¿Cuánto vale siempre la diferencia entre el producto de los dos números centrales y el producto de los dos extremos?

53) Sabiendo que un poste de 2 m de altura proyecta una sombra de 1,5 m de longitud, determinar la altura de una torre que a la misma hora proyecta una sombra de 24 m de longitud.

Rta.: $h = 32\ m$

54) Para hacer la mitad de una obra, 10 obreros tardaron 13 días. ¿Cuántos obreros más son necesarios para hacer la mitad faltante en 10 días?

Rta.: 3 Obreros más

55) ¿Cuánto debo pagar por una mercadería cuyo precio es 45.000 Gs, si me hacen un descuento del 20% pero me recargan 10% sobre el precio a pagar, en concepto de impuesto a las ventas?

Rta.: 39.600 Gs.

56) Si $2a + 3b + 5c = 184$ y $\frac{5}{a} = \frac{7}{b} = \frac{3}{c}$. Calcular a, b y c

Rta.: $\begin{cases} a = 20 \\ b = 28 \\ c = 12 \end{cases}$

57) Tres personas ganaron en total 882.000 Gs. Si se ha estipulado que por cada 100 Gs. de ganancia que recibe la primera, la segunda recibe 80 Gs. y la tercera recibe la tercera parte de lo que reciben las otras dos juntas. Determinar cuánto corresponde a cada una.

Rta.: 367.500Gs. ; 294.000 Gs ; 220.500 Gs.

58) Tres personas formaron una sociedad en la que ganaron 2.150.000 Gs, la primera aportó 700.000 Gs, la segunda 850.000 Gs., y la tercera 900.000 Gs. La primera integró la sociedad 1 año, la segunda 8 meses y los terceros 7 meses. ¿Cuánto corresponde a cada una?

Rta.: 840.000 Gs. ; 680.000 Gs. ; 630.000 Gs.

59) Dos obreros que hacen juntos 7 metros de una obra por día, tenían que hacer 84 metros de esta obra. Después de trabajar juntos 4 días, uno de ellos abandonó el trabajo, terminando el otro en 14 días. ¿Cuánto tiempo hubiera empleado cada uno en hacer la obra?

Rta.: 21 días ; 28 días

60) Dos mensajeros han trabajado el mismo número de días, el primero cobró 25.200 Gs. y el segundo 18.000 Gs. ¿Cuánto ganó cada uno por día si el primero ganó 300 Gs. por día más que el segundo?

Rta.: 1.050 Gs/día ; 750 Gs/día

61) Dos ruedas dentadas deben tener 864 mm y 420 mm de circunferencia. ¿Cuál es el máximo espesor que puede tener cada diente y cuantos dientes tendrá cada rueda para que engranen?

Rta.: 12 mm ; 72 y 35 dientes

62) El máximo común divisor de dos números es 51 y los cocientes que para hallarlo se han obtenido sucesivamente son: 2 ; 3 y 5 . Determinar los números.

Rta.: 1887 ; 816

63) Dos ruedas dentadas que tienen respectivamente 12 y 18 dientes, forman un engranaje. Determinar cuántas vueltas debe dar cada una, para que los dientes que ahora están en contacto vuelvan a estarlo.

Rta.: 3 y 2 vueltas respectivamente.

64) Juan y Antonio trabajando juntos pueden abrir una granja en 12 horas, Antonio y Tomás pueden abrirlo en 15 horas, Antonio trabajando sólo tardaría 25 horas. ¿Qué tiempo emplearían Juan y Tomás para abrir la granja?

Rta.: $14\frac{2}{7}$ días

65) Una casa de autos de alquiler, alquiló a una empresa de turismo 4 autos durante 5 días, y a otra 6 autos durante 3 días, cobrando en total 380.000 Gs. Determinar cuánto ha pagado cada empresa.

Rta.: 200.000 Gs. ; 180.000 Gs.

66) Dos hermanos se reparten un campo del que son propietarios. El primero se queda con 180 Has. y el segundo con 90 Has. más que el primero, pero entrega al primero 220.500.000 Gs. ¿Cuál es el precio de la Ha?

Rta.: 4.900.000 Gs/Ha.

67) Hallar el menor número primo, distinto de la unidad, que sea primo con 2.730 y 21.420.

Rta.: 11

68) Hallar en cm, el 10% de la diferencia entre los 5/8 de 0,7412 km. y los 4/5 de 28.310 mm.

Rta.: 4.406,02 cm

69) Utilizando la definición de logaritmo de un número verificar que: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{9} = \frac{4}{5}$

70) El agua contenida en un tanque de agua que tiene la forma de un cilindro de revolución se vacía en 3 horas. Si cada hora el nivel del agua baja la mitad de la altura más un metro. Determinar la altura inicial del agua en el tanque.

Rta.: $h = 14\,m$

71) En una división entera el resto es 21 y el dividendo 580. Determinar el divisor y el cociente de dicha división.

Rta.: $d = 43$; $c = 13$

72) Hallar el mínimo común múltiplo de los cocientes que resultan al dividir 79.781 y 5.681 por su menor divisor común distinto de la unidad.

Rta.: 141.151

73) Una rueda de 27 dientes engrana con otra de 12 dientes. Dando la primera 836 vueltas por minuto, cuántas vueltas dará por hora la segunda?

Rta.: 112.860 vueltas/hora

74) El numerador de una fracción se ha elevado al cuadrado. ¿Por cuánto hay que multiplicar el denominador para obtener una fracción equivalente a la dada?

Rta.: Por el numerador

75) Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 seg. y 54 seg. respectivamente. A las 20 hs 15 min se encienden simultáneamente. ¿A qué horas vuelven a encenderse juntos?

Rta.: $20\,hs$ $21\,min$ $18\,seg$

76) Un jardinero desea colocar 780 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de miosotis, en el menor número posible de canteros que contengan el mismo número de plantas sin mezclar. ¿Cuántos canteros hay?

Rta.: 31 canteros

77) Compré un artículo con un descuento del 10% sobre el costo y lo vendí con un beneficio del 10% sobre dicho costo. ¿Qué porcentaje sobre el precio que he pagado gané?

Rta.: $22\,\frac{2}{9}\,\%$

78) Un tonel lleno de vino costó 259.000 Gs. Tuvo una pérdida de 87 litros y entonces su valor se redujo a 137.200 Gs. ¿Cuántos litros de vino contenía inicialmente el tonel?

Rta.: 185 litros.

79) Ocho obreros pueden hacer una obra en 28 días. Después de 6 días de trabajo se incorporan al grupo 3 obreros y trabajan todos hasta terminar la obra. Calcular la duración de la obra.

Rta.: Duración total 22 días

80) Calcular el capital mayor, que resultó de repartir un capital de 1.628.419 Gs. entre dos personas, sabiendo que una de ellas recibió 29% más que la otra.

Rta.: 917.319 Gs.

81) Trabajando 11 horas diarias durante 20 días, 7 obreros han hecho un trabajo cuya dificultad está representada por 7 y la actividad de los trabajadores por 9. ¿Cuántos días necesitarán para hacer 5/4 del trabajo 12 obreros, si su actividad se representa por 11, la dificultad por 8 y trabajarán 10 horas por día?

Rta.: 15 días

82) Un obrero tarda 6 horas más que otro obrero para efectuar un trabajo. Hallar el tiempo que emplearía cada uno de ellos en realizarlo sólo, sabiendo que juntos emplean 4 hs en efectuar el mencionado trabajo.

Rta.: 6 horas ; 12 horas

83) Un comandante dispone sus tropas formando un cuadrado y ve que le quedan fuera 36 hombres. Entonces, pone un hombre más en cada lado del cuadrado y ve que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa del comandante?

Rta.: 3.061 hombres

84) A y B trabajando juntos pueden descargar un camión en 3,75 horas. A puede descargarlo sólo en 10 hs. ¿Cuánto tiempo tardaría B trabajando sólo?

Rta.: 6 horas

85) Compré cierto número de libros a razón de 5 libros por 6$. Me quedé con 1/3 de los libros, y vendiendo el resto a razón de 4 libros por 9$ gané 21$. ¿Cuántos libros compré?

Rta.: 30 libros

86) Tenía cierta suma de dinero, ahorré una suma igual a lo que tenía y gasté 5$. Luego ahorré una suma igual al doble de lo que me quedaba y gasté 39$. Si ahora no tenga nada. ¿Cuánto tenía al principio?

Rta.: 9 U$

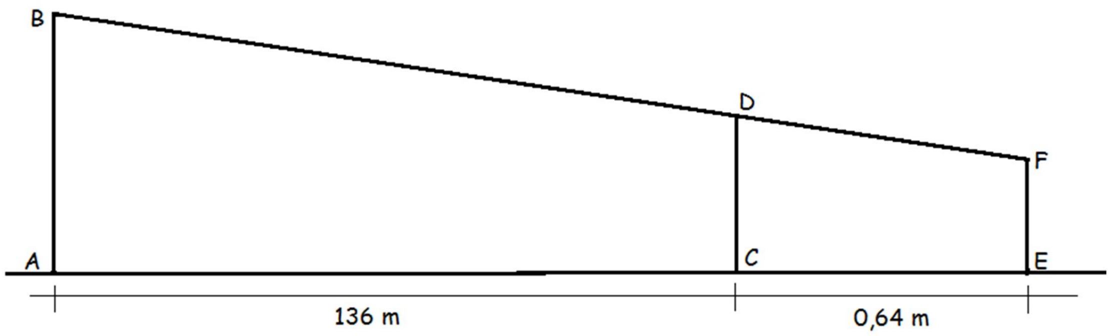
87) Una granja tiene un área de 0,4 km^2, suponiendo que esa granja sea un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro?

Rta.: 2.529,82 m

88) Un vendedor, para exponer manzanas las colocó en cajas de 4 docenas cada una. Si hubiese colocado en cajas de 3 docenas cada una, hubiera gastado 56 cajas más. ¿Cuántas manzanas estaban a la venta?

Rta.: 8064

89) Para hallar la altura de un obelisco si fijan dos postes CD = 2,45 m y EF = 1,65 m separados 0,64 m. Estando CD a 136 m del pie del obelisco. Calcular la altura del obelisco suponiendo que los puntos BDF están sobre el mismo plano.



Rta.: H = 172,45 m

90) Entre algunos familiares de un barrio, fue distribuido un total de 144 cuadernos, 192 lápices y 216 gomas de borrar. Esa distribución fue hecha de modo que fuesen beneficiados el mayor número posible de familias y todas recibiesen el mismo número de cuadernos, lápices y goma de borrar, sin que sobre algún material. El número de cuadernos que recibió cada familia será...

Rta.: 24 familias ; 6 cuadernos ; 8 lapices ; 9 borradores

91) En el inicio de un juego de fútbol, la altura media de los 11 jugadores de un equipo era de 1,72 m. En el primer tiempo, uno de esos jugadores con 1,77 m de altura fue sustituido, en su lugar entró otro que media 1,68 m de altura. En el segundo tiempo, otro jugador del mismo equipo con 1,73 m de altura fue expulsado. ¿Cuál es la altura media de los 10 jugadores de ese equipo?

Rta. : 1,71 m

92) Un televisor se vendía por 500.000 Gs. al contado o en 3 cuotas mensuales de 185.000 Gs. cada una, la primera se pagaría solamente un mes después de la compra. Paulo en vez de pagar al contado resolvió depositar en el banco a un rendimiento mensual del 2 %. De esa forma el esperaba liquidar la deuda haciendo retiradas de 185.000 Gs. cada mes. Verifique si la opción de Pulo fue buena y en ¿cuánto ganó o perdió?

Rta.: Perdió 35.570 Gs.

93) Un fabricante gastaba 40 Gs. en la producción de cada unidad de una mercadería, que el vendía por 100 Gs. Sobre el precio de venta el fabricante pagaba un impuesto del 40%. Debido a problemas con los precios de las materias primas, el costo de fabricación tuvo un aumento del 60%. Entonces, para evitar una caída drástica en la producción, el gobierno resolvió disminuir el impuesto un 30% sobre el precio de venta, pero el fabricante concordó en disminuir el porcentaje de su lucro de 50% para 40%. Calcular el nuevo precio de venta de esa mercadería.

Rta.: 128 Gs.

94) Un tanque de agua es abastecido por dos canillas A y B. La canilla A puede llenar trabajando sola 20 horas. En cambio la canilla B puede llenar el tanque en 18 horas. A las 2:00 AM, estando vacío el tanque, las 2 canillas son abiertas. Después de 4 hs. y 30 min. la canilla B es cerrada y la canilla A continúa. ¿A qué hora estará lleno el tanque?

Rta.: 16.00 Hs.

95) Hallar el menor número que dividido por 17; 38 y 115 dé por resto 11.

Rta.: 74.301

96) Un joven da 100 pasos en un minuto y su padre 3 pasos en dos segundos. El primero avanza en cada paso 70 cm y el segundo 90 cm ¿Cuánto tiempo tardarán para encontrarse partiendo de los extremos de una distancia de 5.670 m?

Rta.: 37 min ; 33 seg

97) Entre tres obreros se han repartido 343.750 $Gs.$ en partes proporcionales a sus jornales. ¿Cuáles eran esos jornales, sabiendo que al primero le ha correspondido en el reparto 96.250 $Gs.$ y al tercero 137.000 $Gs.$, y que la suma de los jornales de los tres obreros es igual a 31.250 $Gs.$?

Rta.: 8.750 $Gs.$; 10.045,45 $Gs.$; 12.454,54 $Gs.$

98) Una canilla puede llenar con agua un depósito cilíndrico en 8 hs y otra en 12 hs, mientras que el tubo de desagüe lo vacía en 15 hs. Cuando el nivel del agua es $\frac{1}{3}$ de la altura del depósito, se abren al mismo tiempo las canillas y el tubo de desagüe durante una hora. ¿Qué parte de la altura del depósito queda por llenar?

Rta.: $\frac{21}{40}\ h$

99) Se compra cierto número de libros por 560.000 Gs. Se venden 34 libros por 221.000 Gs, perdiendo 500 Gs. por libro. Calcular el precio de venta de cada uno de los libros restantes para obtener una ganancia líquida de 20%.

Rta.: 9.084,35 Gs. c/u

100) Vendí una casa en 38.400.000 Gs. ganando el 28% del costo de la misma. ¿Qué porcentaje del costo hubiese ganado, si la hubiese vendido en 37.500.000?

Rta.: 25 %

101) Hallar los cocientes que resultan de dividir los números 117.975 y 2.574 por su mayor divisor primo común.

Rta.: 9.075 ; 198

102) Hallar el menor múltiplo de 168 y 1.116 que sea divisible por 210.

Rta.: 78.120

103) Vendí dos terrenos en 8.400.000 Gs. cada uno. En uno gané el 20% del precio de venta y en el otro perdí 4 % del costo. ¿Cuánto gané o perdí en total?

Rta.: Gané 1.330.000

104) Un albañil se compromete a hacer una obra en 12 días, pero tardó 3 días más por trabajar, 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

Rta.: 8 horas

105) El máximo común divisor de dos números es 17. Los cocientes que para hallarlo se han ido obteniendo sucesivamente son 1; 20; 1 y 5. ¿Cuáles son los números?

Rta.: 2.227 ; 2.125

106) Repartir 30.500.000 Gs. entre 3 personas de modo que a la segunda le corresponda 5% menos que a la primera y que a la tercera le corresponda 10% más que a la primera.

Rta.: 10.000.000 ; 9.500.000 ; 11.000.000

107) El producto de dos números es 575.424 y el MCD es 36. Hallar el MCM de los números.

Rta.: 15.984

108) Una persona coloca 2/3 de su capital al 4% y el resto al 3% anual. La primera parte le produce 150 Gs/mes. ¿Cuál es el capital y la renta mensual de esa persona?

Rta.: capital 67.500 Gs. ; 206,25 Gs./mes

109) Un comerciante pensaba obtener un beneficio del 8 % sobre el precio de compra de una partida de mercaderías, pero su ganancia inferior a la prevista en 180.000 Gs. fue de 2.361.000 Gs. ¿Cuál ha sido el precio de compra de la mercadería?

Rta.: 31.762.500

110) Un comerciante mezcla 7 kg. de café de primera clase por cada 3 kg de segunda clase. ¿Cuántos kilogramos de cada clase necesita para hacer 480 kg de mezcla?

Rta.: Primera: 336 ; Segunda: 144

111) Hago una compra cuyo costo es el 2/3 del dinero que tengo, pero sobre ese valor me hacen un descuento del 15%. ¿Cuánto dinero tenía si me quedan 26.000 Gs?

Rta.: 60000 Gs.

112) En una librería se compran artículos por valor de 8.700.000 Gs. Ha vendido las dos tercera partes de lo que compró realizando un beneficio igual a los 2/5 del precio total de compra. ¿Cuánto cobró por las mercaderías vendidas? ¿Cuánto recaudó al vender todas las mercaderías?

Rta.: 9.280.000 ; 13.920.000

113) Se quiere alumbrar un terreno de forma trapezoidal tal que sus lados son respectivamente 320 m, 104 m, 396 m y 84 m. Deseando que los postes resulten equidistantes y que en cada esquina haya un poste. ¿Cuál es la máxima distancia a que deben colocarse y en tal caso cuántos postes se necesitan?

Rta.: 4 m ; 226 postes

114) Un comerciante pierde en un mal negocio 15% de su capital, posteriormente gana 1/3 del capital original. En otro negocio que realiza, gana 10 centavos de guaraní por cada 2 Gs de capital que tenía como nuevo capital. Y posteriormente pierde 50 Gs. de cada 1000 Gs. que poseía. Actualmente tiene 25.000.000 Gs. ¿Cuánto era su capital inicial?

Rta.: 22.114.108,8

115) Repartir 438.000 Gs. entre dos personas, sabiendo que a una de ellas le corresponde 35% más que a la otra. ¿Cuánto corresponde a cada una?

Rta.: 186.382,98 ; 251.617,02

116) Dos ruedas dentadas se engranan una sobre la otra, la primera tiene 48 dientes y tarda 4 segundos en dar una vuelta, la segunda tiene 104 dientes. Se las pone en movimiento y se pregunta ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán en la misma posición que al comenzar?

Rta.: 52 segundos

117) Cuatro buques parten para el mismo destino. El primero cada 10 días. El segundo cada 8 días. El tercero cada 9 días y el cuarto cada 15 días. ¿Cuántos días transcurren entre dos salidas simultáneas consecutivas?

Rta.: 360 días

118) Tres personas forman una empresa. El señor *A* pone 20 millones de guaraníes. Los señores *B* y *C* ponen el local, que pertenece 30% al señor *B* y 70% al señor *C*. El señor *B*, además de su parte del local, pone 10 millones de guaraníes. Sabiendo que al señor *A* y al señor *C* les corresponde la misma ganancia. ¿Cuánto le corresponde al señor *B*, si tienen que repartirse proporcionalmente a lo que invirtieron, una ganancia de 6.970.000 Gs.?

Rta.: 2.210.000

119) Sin efectuar la división, establecer si 20.520 es o no divisible por 45. Fundamentar la respuesta.

120) Un recipiente está lleno de agua hasta los 2/5 de su capacidad. Si se agregan 360 litros de agua queda cargado hasta los 2/3 de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

Rta.: 1350 Ltrs

121) Tres grifos funcionando conjuntamente llenan un depósito en 2 horas mientras que, si funcionan sólo dos de ellos lo llenan en 5 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenaría el tercero sólo?

Rta.: 3 hs 20 $min.$

122) Un recipiente recibe agua de dos grifos *A* y *B*. Funcionando sólo el grifo *A* tarda 22 minutos a más que el grifo *B* para llenarlo. Cuando funcionan juntos lo llenan en una hora. ¿Cuánto tiempo necesita cada uno para llenar el recipiente funcionando separadamente?

Rta.: 110 min ; 132 min

123) Hace ya 45 horas que un reloj adelanta 3 minutos cada 5 horas. ¿Qué hora señala el reloj cuando son los 8 y 50 minutos?

Rta.: 9 hs 17 min

124) Durante 4 años la fortuna de un negociante se ha aumentado cada año la cuarta parte de lo que era el año anterior, al cabo de este tiempo posee 78.125 Gs. ¿Cuánto tenía al principio y al fin de cada año?

Rta.: 32.000 ; 40.000 ; 50.000 ; 62.500 ; 78.125

125) Pedro compra 2/3 de una pieza de tela menos 15 metros; Juan compra ¼ de la misma pieza más 4 metros, con lo cual recibe 21 metros menos que el primero. ¿Cuál es la longitud de la pieza?

Rta.: 96 mts

126) Un zorro da $3\frac{1}{3}$ saltos por segundo, ha dado ya $30\frac{3}{4}$ saltos cuando se suelta en pos de él un dogo que da $4\frac{1}{2}$ saltos por segundo. ¿Cuánto tiempo tardará para alcanzarlo?

Rta.: 26 min 21,43 seg

127) Cuatro ruedas engranan sucesivamente y cada una tiene 2/3 del número de dientes de la rueda que le precede. Si la mayor tiene 162 dientes. ¿Cuánto tiene la menor? Si la menor da 286 vueltas, ¿cuántas vueltas dará la mayor?

Rta.: 48 dientes; 84,74 vueltas

128) Una bola cae desde una cierta altura sobre una mesa de mármol, rebota, vuelve a caer y rebotar. Después de haber tocado cuatro veces a la mesa, rebota la bola hasta 7 cm. ¿Desde qué altura cayó la primera vez, si después de cada caída volvía a elevarse 2/3 de la altura de donde había caído?

Rta.: 35,4375 cm

129) Una vasija llena de agua pierde la primera hora 1/3 de su capacidad, durante la segunda hora 1/3 del resto y así sucesivamente. Al cabo de 5 horas, quedan 5 litros en la vasija. ¿Cuál es la capacidad de esta?

Rta.: 37,96875 Ltrs

130) Pedro vende un caballo ganando 30%, y con este dinero compra otro y lo vende por 225 Gs. perdiendo 12,5%. ¿Cuánto le costó cada caballo?

Rta.: 197,80 ; 257,143

131) Sobre una mercadería comprada y vendida sucesivamente por 4 comerciantes, los dos primeros tuvieron cada uno 10% de beneficio y cada uno de los dos últimos 10% de pérdida. Por cuánto la compró el primero sabiendo que el cuarto lo vendió por 490,05 Gs?

Rta.: 500 Gs.

132) Un comerciante ha pedido por unas mercaderías 22% más de lo que le habían costado, pero como se encontraban algo averiadas tuvo que hacer un descuento de 10% del precio pedido. Ha ganado 98 Gs. en esta operación. ¿Qué suma pidió al principio?

Rta.: 1.220 Gs.

133) Con 750.000 Gs. se han comprado dos caballos que han sido pagados en razón directa de sus fuerzas, la cual es proporcional a los números 121 y 144 y en razón inversa de la edad que tienen y que es proporcional a los números $5\frac{4}{9}$ y $6\ \frac{1}{4}$ ¿Cuál es el precio de cada caballo?

Rta.: 368.243,79 ; 381.756,21

134) Dos amigos compraron un aparato de radio en 950$, uno de ellos pagó 200$ más que el otro, al revenderlo perdieron 45%. ¿Cuánto recibe cada uno de la reventa?

Rta.: 316,25 ; 206,25

135) Dos socios han fundado una empresa con un capital de 80.000 Gs. En el momento de liquidar la sociedad, el primero recibe capital más beneficio que suman 23.000 Gs. Sabiendo que el beneficio total ha sido de 12.000 Gs. Se desea saber cuáles han sido los capitales aportados por cada socio.

Rta.: 20.000 ; 60.000

136) Un ciclista desciende por una pendiente, a pedal libre, y con un movimiento tal que los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos. En el primer segundo recorre $2\ m$. ¿Qué distancia ha recorrido durante el tercer segundo?

Rta.: $10\ m$

137) Sabiendo que 12^x tiene 153 divisores simples y compuestos. ¿Cuántos divisores tiene x?

Rta.: $x = 8$

138) Hallar todos los divisores que sean cuadrados perfectos del número 1080.

Rta.: 1 ; 4 ; 9 ; 36

139) Una fábrica de muebles recibe una encomienda de cierta cantidad de sillas. Un equipo de 15 funcionarios consigue producir en 20 días la mitad de la encomienda. ¿En cuántos días útiles fueron terminadas las sillas si fueron dimitidos 3 funcionarios del equipo?

Rta.: 45 días

140) Un libro tiene 210 páginas de 35 líneas cada página y 60 letras cada línea. Se lo quiere reimprimir con menor formato en 300 páginas con 30 líneas en cada página. ¿Cuántas letras tendrá cada línea?

Rta.: 49 letras c/línea

141) En la fabricación de un remedio se usan 3 partes de una sustancia A, 4 partes de B, 6 partes de C y 7 partes de agua destilada. ¿Cuál es el porcentaje de agua destilada utilizada en la fabricación del remedio?

Rta.: 35 %

142) Un almacenero compra soja a 1.200 Gs. el kilogramo. Sabiendo que la soja no está bien seca y que después de seco pierde 10% de su peso. ¿A qué precio debe vender el kilogramo para ganar el 25% del costo?¿A qué precio debe vender para ganar el 15% del precio de venta?

Rta.: $1.666\,\frac{2}{3}$ Gs. ; 1.568,63 Gs.

143) Un corredor da la vuelta en un circuito circular en 7 minutos 30 segundos. El segundo corredor en 2 minutos 15 segundos y un tercer corredor en 5 1/3 minutos. Si salen todos juntos. ¿Cuánto tiempo tardará para volver a encontrarse en la meta?

Rta.: 12 hs

144) Repartir 280.000 Gs. entre dos personas de tal forma que la relación entre lo que lleva el primero con respecto al triple del segundo sean directamente proporcional a 5 y 8.

Rta.: 182608,70 ; 97.391,30

145) Dos individuos organizan una empresa que les ha producido 15.000$ de beneficio. Uno de ellos ha contribuido con 60.000$ más que el otro, por lo que le corresponde en el reparto 3000$ más que su socio. ¿Con cuánto contribuyó cada uno?

Rta.: 120.000 ; 180.000

146) Una cierta especie de bacteria se divide en dos cada 20 minutos y otra cada 30 minutos. Determine después de 3 hs, la razón entre el número de bacterias de la primera y el de la segunda especie, originados por una bacteria de cada especie?

Rta.: $\frac{B_1}{B_2} = \frac{19}{13}$

147) Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3$. Calcule el valor de la expresión $\frac{\log 32 + \log\sqrt{256}}{\log 5}$

Rta.: 3,86

148) Debido a que el desagüe no se había cerrado, una piscina tardó 10 hs en llenarse. Con el desagüe cerrado se hubiera llenado en 4 horas. ¿Cuánto tiempo demorará vaciar la piscina con las llaves cerradas y el desagüe abierto?

Rta.: $\frac{20}{3}\,hs = 6hs\,40min$

149) Un padre pregunta al hijo cuánto gastó de los 35.000 Gs. que tenía. Le responde: Las tres cuartas partes de lo que no gasté. ¿Cuánto gastó?

Rta.: 15.000 Gs.

150) Multiplicar $3m^2\,3cm^2$ por $3m\,3cm$.

Rta.: $9\,m^3\,90dm^3\,909cm^3$

151) Hallar el cociente de dividir el producto de los números 154 y 273 por su mínimo común múltiplo.

Rta.: 7

152) En 20 partidos un jugador gana 3 veces tantos juegos cuantos pierde. ¿Cuánto gana y cuánto pierde?

Rta.: Gana 15 y Pierde 5

153) Cuánto por ciento de x es cada uno de las expresiones siguientes:

a) $x + 0{,}05\,x$ .... Rta.: 105 %

b) $x - 0{,}05\,x$ .... Rta.: 95 %

c) $x + 20\,\%\; de\; x$ .... Rta.: 120 %

d) $x - 2/3\,x$ .... Rta.: $33\frac{1}{3}\%$

154) *A* puede terminar una obra en la tercera parte del tiempo que le llevaría a B. Comienzan la obra trabajando juntos durante 4 horas y la termina A trabajando sólo durante 2 horas más. Determinar cuántas horas emplearía B trabajando sólo para realizar toda la obra.

Rta.: 22 horas

155) Un obrero puede hacer un trabajo en 12 días. Después de 5 días de iniciado el trabajo contrata un ayudante, concluyéndose la obra en 3 días más. ¿Cuántos días demoraría el ayudante si tuviera que hacer sólo el mismo trabajo?

Rta.: 9 días

156) Una canilla da 56 litros en dos minutos y otra 72 litros en 3 minutos. Determinar las capacidades posibles de un tanque que puede llenarse en un número exacto de minutos por cualquiera de las dos canillas, sabiendo que la capacidad del tanque está entre 1500 y 1800 litros.

Rta.: 1.512 ; 1.680

157) Un cerrajero cuenta tornillos que ha fabricado por docenas, por decenas y de 15 en 15, y siempre le resultan 7 tornillos sobrantes. Sabiendo que a razón de 100 Gs. por tornillo, ha ganado más de 50.000 Gs. y menos de 60.000 Gs. Averiguar el número de tornillos fabricados.

Rta.: 547 tornillos

158) Determinar el menor número múltiplo de 5 que al dividirlo por 2; 3 y 4 se obtiene resto 1.

Rta.: 25

159) Se necesitan 3 bobinas de papel de 350 kg. cada una para imprimir 5.000 ejemplares de una obra. ¿Cuántas bobinas de 504 kg. se necesitarán para imprimir 8.000 ejemplares de otra obra, sabiendo que el número de páginas de esta última son 6/5 de la anterior?

Rta.: 4 bobinas

160) Un obrero tiene por salario el 90% de las dos terceras partes del sueldo de su jefe inmediato. Si su jefe inmediato tiene por salario el 60% de las 3/5 partes del salario del gerente que es 4.200.000 Gs. ¿Cuál es el salario mensual del obrero?

Rta.: 907.200

161) Un artículo en una tienda experimenta un descuento del 30%, y como no se vendía al año siguiente se le hace otro descuento del 50% sobre el precio del momento. ¿Cuál es el porcentaje de descuento con respecto al precio original?

Rta.: 65 %

162) Un comerciante aumentó los precios de todos sus productos un 150% y como la venta no era buena, volvió a los precios anteriores al aumento. En relación a los precios aumentados ¿Cuál fue el porcentaje de reducción?

Rta.: 40 %

163) Una competencia consiste en recorrer una distancia fija en el menor tiempo posible. Si los mejores tiempos registrados por 3 atletas fueron 10; 12 y 15 segundos y si los premios se distribuyen proporcionalmente al tiempo empleado. ¿Cuánto dinero recibe cada atleta si la cantidad total disponible para la premiación es de 12.800$?

Rta.: A_1 = 5.120 ; A_2 = 4.266,66 ; A_3 = 3.413,33

164) En un negocio que duró 3 años, un socio impuso 4.000 pesos y a los 8 meses retiró la mitad, el segundo impuso 6.000 pesos y al año agregó 3.000 pesos y el tercero que empezó con 6.000 pesos a los 2 años retiró 1.500 pesos. ¿Cuánto corresponde a cada uno si hubo un beneficio de 5.740 pesos?

Rta.: S_1 = 409,48 ; S_2 = 3.553,68 ; S_3 = 1.776,84

165) Necesito 150 m^2 de tela para forrar una pared para exhibición de cine. En la tienda encuentro la tela que necesito pero el vendedor me informa que esta tela encoje 15 % del largo y 10 % del ancho. En la etiqueta del fardo está escrito 1,5 m de ancho. ¿Cuántos metros de tela debo comprar para que después de mojado me dé justo la cantidad necesaria?

Rta.: 130,72 mts

166) Un operario puede hacer un trabajo en 12 días, trabajando 5 horas diarias, otro operario puede hacerlo en 15 días, trabajando 6 horas diarias. ¿En qué tiempo expresado en días y horas, lo harían los dos juntos si trabajaran 8 horas diarias?

Rta.: 4 días 4hs

167) Repartir 1.900.000 Gs. entre tres personas de tal modo que la parte que recibe la segunda sea el triple de la parte que recibe la primera y el cuádruple de la parte de la tercera.

Rta.: 400.000 ; 1.200.000 ; 300.000

168) Los planetas Júpiter, Saturno y Urano tienen periodos de revolución en torno del sol de aproximadamente 12; 30 y 84 años respectivamente. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que después de una observación vuelvan a ocupar simultáneamente las mismas posiciones?

Rta.: 420 años

169) Un tanque puede ser llenado por una primera canilla en 8 horas y por otra segunda canilla en 6 horas. Un desagüe que está colocado a 1/3 de la altura del tanque puede vaciar el tanque hasta su nivel en que se encuentra en 10 horas. Calcular ¿Cuánto tiempo serán necesarios para llenar el tanque estando vacío, si se abren simultáneamente las dos canillas y el desagüe?

Rta.: $\frac{776}{189}$

170) Hallar dos números cuyo cociente es igual a 6,6 y su máximo común divisor es 1.782.

171) Un obrero gana en dos días lo que otro gana en 3 días. Terminado el trabajo se les pagó en total 984.000, habiendo el primero trabajado 52 días y el segundo 45 días. ¿Cuánto fue la remuneración diaria de cada uno?

Rta.: 12.000 ; 8.000

172) Un depósito, cuya forma es la de un cilindro de revolución puede ser llenado por una canilla en 8 horas y vaciado por otra en 12 horas. Cuando el nivel del agua está a 1/3 de la altura del depósito, se abren las dos canillas al mismo tiempo. ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que el nivel del agua alcance los $3/4$ de la altura del depósito?

Rta.: 10 horas

173) El precio de un diamante es proporcional al cuadrado del peso. Si uno que cuesta 640$ se parte en dos, cuyos pesos están en la relación de 1 a 3. ¿Cuánto valdrá cada uno?

Rta.: 360 ; 40

174) La intensidad de la luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. ¿A qué distancia de una lámpara se halla un punto que recibe la mitad da la luz recibida por otro, que dista 16 m de la lámpara?

Rta.: $16\sqrt{2}$

175) El volumen de un cilindro es proporcional al producto de la altura por el cuadrado del radio. Dados dos tarros cilíndricos de 75 y 100 mm de diámetro y 125 y 150 mm de hondo. Hállese el radio de otro, cuya capacidad sea la suma de los dos primeros y que tenga 175 mm de hondo.

Rta.: 56,1 mm

176) En cuánto por ciento debe un comerciante aumentar los precios de costo al fijar los precios de catálogo, para que haciendo en estos un descuento de 20%, gane 20% sobre el precio de costo.

Rta.: 50 %

177) Dividir el número 12 en dos partes tales que la mayor sea media proporcional entre el número entero y la parte menor. Calcular el resultado con 0,001 de aproximación.

Rta.: 4,5835 y 7,4164

178) Un tanque se puede llenar por un grifo en h horas y por otro en k horas. Un desagüe lo puede vaciar en m horas. Si se abren simultáneamente los grifos y el desagüe. ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

Rta.: $\dfrac{h\,k\,m}{k\,m + h\,m - h\,k}$

179) Dos máquinas de imprenta trabajando juntas pueden imprimir un libro en 20 horas. A las 15 horas de trabajar juntas, una de ellas se rompe y entonces tarda la otra 9 hs. más en terminar el trabajo. ¿Cuántas horas necesitaría cada máquina para imprimir ella sola el libro?

Rta.: 36hs ; 45 hs

180) Tres jugadores A, B y C convienen en que el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Juegan 3 partidas. A pierde el primer partido, B pierde el segundo y C el tercero. Si cada jugador finaliza con 16.000 Gs. ¿Cuánto tenía cada uno al comienzo del juego?

Rta.: A = 26.000 ; B = 14.000 ; C = 8.000

181) He comprado hielo a centavo por kilogramo. ¿A cuánto por tonelada (1.000 kg.) debo venderlo, después que ha perdido por fusión 10% de su peso, para ganar 15%?

Rta.: 12,777...

182) Tres hermanos se reparten una herencia de 196.950$ proporcionalmente a sus edades. Uno de ellos que tiene 36 años y le corresponde 70.200$ renuncia a su parte, que pasa a engrosar la parte de los otros dos según la proporción dada inicialmente. Si de esta última suma, uno de los hermanos recibe 16.200$ más que el otro, hallar sus respectivas edades.

Rta.: 29,8

183) Una cuadrilla de obreros emplea 14 días para realizar cierta obra. Si trabajarán una hora a menos por día, les llevaría 16 días para terminar la misma obra. Calcular la cantidad de horas por día que deben trabajar para terminar una obra que presenta una dificultad de 5/4 de la anterior, en 7 días.

Rta.: 20 horas por día

184) Se reparte una cantidad en forma inversamente proporcional a 3; 5; 6; 8 e inversamente proporcional a 4; 6; 8; 12. Al sumar la segunda y la cuarta parte se obtiene 580.797. Hallar la cantidad repartida y las otras dos partes.

Rta.: 1.106.280 ; 442.512

185) La diferencia entre el precio de venta anunciado de una mercadería y el precio de costo es igual a 2.000.000 Gs. Si esa mercadería fuese vendida con un descuento de 10% sobre el precio anunciado dará todavía un lucro de 20% al comerciante. Calcular el precio de costo.

Rta.: 120 %

186) Se tiene una cinta que va a lo largo del Ecuador sobre la superficie terrestre. Si se corta dicha cinta en un punto, y se agrega un metro adicional de cinta, determinar a qué distancia "*d*" se separará la misma de la superficie. Considerar que la tierra es perfectamente esférica. (Observación: Radio terrestre 6400km)

Rta.: $16\ cm$

187) Un reloj fue corregido exactamente al mediodía. Determinar la hora en que la aguja menor ha recorrido un ángulo de 42°.

Rta.: $13hs\ \ 24min$

188) Tomás paga 10.000.000 Gs. por la compra de un bote. Se lo vende a María con una ganancia del 10%. Después de un tiempo María le vende el bote a Tomás perdiendo el 10%. ¿Obtuvo Tomás ganancia o pérdida en la negociación?¿Cuánto dinero ganó o perdió?

Rta.: Tomás ganó 1.100.000gs

189) Un conejo lleva una ventaja a un perro que lo persigue equivalente a 50 saltos del conejo. Si un salto del perro equivale a tres saltos del conejo y el conejo da ocho saltos mientras el perro da tres. ¿En cuántos saltos alcanza el perro al conejo?.

Rta.: 150 saltos

190) El producto de dos números A y B es 142.800 y el MCM de A y B es 357 veces mayor que MCD. Calcular la cantidad de valores que puede tener A.

Rta.: 8 valores

191) Se quiere obtener un número *N* que sea múltiplo de 187 y a la vez de 352. Además, *N* debe terminar en 2. ¿Cuál es el menor número natural por el cual se debe multiplicar 352 para obtener *N* y cuál es el número *N*?

Rta.: El menor número por el cual debemos multiplicar 352 es 51 y el número $N = 17.952$

192) El precio del diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Un diamante se divide en 3 partes cuyos pesos son directamente proporcionales a 2; 3 y 5. Si la diferencia de precios de la mayor y la menor de las partes es 420.000 Gs. Hallar el precio del diamante entero.

Rta.: 2.000.000 Gs

193) Un número *N* tiene como divisores primos únicamente 5 y 7. Si *N* se multiplica por 25 la cantidad de divisores aumenta en 6 pero si *N* se divide por 7 la cantidad de divisores disminuye en 5. Calcular la cantidad de divisores que tienen *N*.
Obs.: Resolver por ecuaciones

Rta.: 15 divisores $N = 5^4 \times 7^2$

194) Se reparte un número en forma directamente proporcional a todos los divisores del número 200. Si la mayor de las partes es 5.600.¿Cuál es el número repartido?.

Rta.: 13.020

195) Se sabe que *A* es inversamente proporcional a *B* y que *B* es inversamente proporcional a *C*. Cuando *A* aumenta en 15 unidades, *C* varía en un 20%. ¿Qué pasa con *B* cuando *A* aumenta en 25 unidades?

Rta.: B disminuye 25%

196) Al descomponer un número en sus factores primos, se encuentra que contiene como divisores primos únicamente a 2 y 3. Si el número se divide por 8, la cantidad de divisores del número disminuye en 12, pero si se multiplica por 9 la cantidad de divisores del número aumenta en 12. Hallar la suma de las cifras del número.

Rta.: 18 $N = 864$

197) Se sabe que una magnitud A es inversamente proporcional a B^2. Hallar el valor de *A*, sabiendo que si disminuye en 36 unidades, el valor de B varía en un 25%.

Rta.: $A = 100$

198) La razón geométrica de dos números es 25 milésimos. Si el antecedente aumenta en un 100% y el consecuente disminuye en un 20%. Determinar la nueva razón.

Rta.: 0,0325

199) Se tienen 3 pistas circulares concéntricas suyos radios son 100 m; 80 m; 75 m. Tres ciclistas partes simultáneamente de puntos situados en el mismo radio. Si los tres llegan al mismo tiempo al punto de partida después de recorrer una sola vez la pista. Determinar la velocidad del más lento, si la suma de las tres velocidades es 68 m/min.

Rta.: $V_3 = 20\ m/min$

200) Se sabe que el peso de un disco circular es directamente proporcional al cuadrado del radio (cuando el espesor es constante) y es directamente proporcional al espesor (cuando el radio es constante). Se tienen dos discos cuyos pesos están en la relación 2 : 3 y cuyos radios están en la relación 4 : 3 respectivamente. ¿En qué relación están sus espesores?.

Rta.: $\ell_1/\ell_2 = 3/8$

201) Se repartió una cantidad en forma directamente proporcional a cinco múltiplos consecutivos de 17. Si al mayor le corresponde 25% del total. ¿Qué porcentaje le corresponde al menor?.

Rta.: 15%

202) Tres hermanos se reparten en partes iguales una herencia que consiste en un terreno de $170m^2$, dos automóviles de igual valor y 10.000$. Uno recibe $150m^2$, el otro 10.000$ más un auto, y el tercero $20m^2$ más el otro auto. ¿Cuál es el valor de cada uno de los autos?

Rta.: 65.000 $

203) Una avenida puede ser refaccionada en 30 días con 30 obreros que trabajan 10 horas diarias. Después de 8 días de trabajo se les pide que culminen 12 días antes del plazo y así lo hicieron. ¿Cuántos obreros más o menos hacen falta, si el rendimiento de los trabajadores en lo que resta del trabajo es 40% a más que en la etapa anterior y si todos trabajaron 1 hora extra?

Rta.: 13 obreros

204) Una cantidad se reparte de manera tal que sea directamente proporcional a 3; 4 y 5 y a la vez inversamente proporcional a 2; 3; 4. Al sumar la primera y la tercera parte se obtiene 12.672. Hallar la cantidad repartida y la segunda parte.

Rta.: 18.816 ; 6.144

205) Un reloj marca las 5 horas. Determinar después de que tiempo las agujas estarán superpuestas por primera vez.

Rta.: 273/11 min

206) Luis y Carlos deben llenar dos recipientes de agua de igual capacidad, empleando Luis un balde de doble capacidad que el de Carlos. Cuando Luis empieza, Carlos ha echado ya 15 baldes y por cada 4 baldes que hecha Luis, Carlos hecha 5, terminando juntos el trabajo. ¿Cuántos baldes llenó Luis?

Rta.: 20 baldes de Luis

207) La parte carnosa y el hueso de una cereza son del mismo espesor. Supongamos que la cereza y el hueso son de forma esférica. ¿Cuántas veces es mayor el volumen de la parte carnosa que el del hueso?

Rta.: 7 veces mayor

208) Un empresario se comprometió a entregar dentro de 12 días un lote de 9.600 juguetes, para lo cual dispone de 6 máquinas, la que el 80% de su capacidad podrían hacer el trabajo en los 12 días trabajando 8 horas/día. Si después de haber realizado el 25% del trabajo se malogran 2 máquinas, entonces las restantes deben funcionar a toda capacidad y a razón de 9 hs/día. ¿Cuántos juguetes faltarán para completar el pedido?

Rta.: 450 juguetes

209) Dos números son entre sí como 7 es a 12. Si al menor se le suma 70, para que el valor de la razón no se altere, el valor del otro número debe triplicarse. Hallar el mayor de los dos números.

Rta.: El mayor es 60

210) Tres números *a*, *b*, *c* son entre sí como 9; 12; 25. Si la cuarta proporcional de *a*, *b*, *c* es 100. ¿Cuál es la tercera proporcional de *a* y *b*?

Rta.: 48

211) Pedro sube por una escalera de acceso a un mirador. Se detiene en cierto escalón y mira hacia arriba y hacia abajo dándose cuenta que hacia arriba hay doble cantidad de escalones que hacia abajo. Luego sube 8 escalones más y encuentra que hay la misma cantidad de escalones hacia arriba que hacia abajo. En ambas ocasiones Pedro no cuenta el escalón en donde está parado. Hallar la cantidad de escalones que tiene la escalera.

Rta.: 49

212) La Asociación Paraguaya de Fútbol exige a un club de fútbol aumentar tanto el largo como el ancho de la cancha de juego en un 20%, a los efectos de su habilitación. ¿Cuál es el % en que aumenta el área?

Rta.: 44%

213) El precio de los diamantes varía proporcionalmente con el cuadrado de su peso. Al fraccionarse en dos un diamante se observa que sus pesos están en la relación 2 : 3. ¿Qué porcentaje del precio se perdió?.

Rta.: Se perdió 48% del precio

214) Lo que queda de una cantidad luego de dos descuentos consecutivos de $a\%$ y $b\%$ es igual al recargo único equivalente a dos recargos de $a\%$ y $b\%$. Hallar $(a + b)$.

Rta.: 50%

215) El número de niños que se pueden alimentar en una aldea infantil aumenta en 5 si la ración se hace variar en 20%. ¿Cómo variará el número de niños por alimentar, si la ración se incrementa en 25% respecto a la original?.

Rta.: disminuirán 4 niños

216) Se inscribieron 33 personas para ir a un campamento y el promedio de las edades de las personas era 20,363636... Al campamento solo fueron 30 y el promedio de edades descendió un 0,163636... Si los tres jóvenes que faltaron tenían la misma edad. ¿Cuál era la edad de los tres?

Rta.: 22

217) Las agujas del reloj de Antonio giran a velocidad constante y las mismas se superponen cada 63 minutos. Averiguar si el reloj adelanta o retrasa y precisar ese adelanto o atraso.

Rta.: 2,45 min/hora

218) Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar 54.600 para que el resultado tenga raíz cuadrada exacta?

Rta.: 546

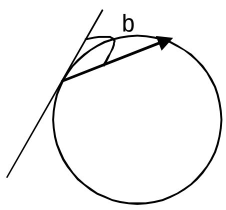
219) Los pobladores de una hacienda acostumbran cambiar 12 choclos por 36 papas, a su vez 24 papas por 16 locotes. En cierta ocasión un poblador solicitó 100 choclos, a cambio de n papas más n locotes. Calcular el valor de n.

Rta.: 120

220) ¿Existirá un número de dos cifras que tenga las siguientes propiedades? a) La cifra de las decenas debe ser 4 unidades inferior a la cifra de las unidades. b) Si este número se escribe invirtiendo el lugar de sus cifras y se sustrae el número buscado, se obtiene 27. *Justificar*

221) En una mesa circular de billar, una bola rebota formando ángulos iguales con la tangente a la circunferencia en el punto de rebote. Calcular con que ángulo inicial *b* debe lanzarse una bola desde el borde, para que después de rebotar 3 veces vuelva al punto desde el cual fue lanzado.

Rta.: 45°



222) Pedro debe fabricar cierta cantidad de sillas para una escuela. El lunes hace $\frac{1}{5}$ de esa cantidad, el martes $\frac{2}{3}$ de lo que faltaba y el miércoles $\frac{3}{4}$ de los que aún le quedaban por hacer. El jueves hace 40 sillas y completa el pedido. ¿De cuantas sillas es el pedido?

Rta.: 600 sillas

223) Una cantidad se reparte de manera tal que sea directamente proporcional a 3, 4, 5 y a la vez inversamente proporcional a 2, 3, 4. Al sumar la primera y la tercera parte se obtiene 12676gs. Hallar la cantidad repartida y la segunda parte.

Rta.: Total: 18821,9393... Segunda: 6145,9393...

224) Si el antecedente de una razón geométrica es la tercera proporcional de a y b, y el consecuente es la cuarta proporcional de c, d y e. ¿Qué pasa con la razón si a y b se multiplican por 2 y c ; d y e se dividen entre 2?

Rta.: se multiplica por 4

225) Un grupo de 21 obreros han hecho en 12 días de 8 horas de trabajo por día "$L1$" metros de una carretera. Otro grupo de 40 obreros, 20% más eficiente que los anteriores, han hecho "$L2$" metros de la misma carretera en 7 días trabajando 10 horas por día. Hallar la relación $L1/L2$

Rta.: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{5}$

226) Por cada 100cm de longitud un elástico se estira 15cm. Si los 4/3 de un elástico estirado mide 1748cm. ¿Cuánto costara el elástico si el metro cuesta 12500gs?

Rta.: 142.500

227) Un reloj marca las 5horas. Determinar después de que tiempo las agujas estarán superpuestas por primera vez.

Rta.: 5 hs 27′ 16,36"

228) Tres números a , b y c son entres si como 9, 12 y 25.Si la cuarta proporcional de a, b, c es 100. ¿Cuál es la tercera proporcional de a y b?

Rta.: 48

229) Un empleado distribuye su sueldo de la siguiente manera: 40% lo gasta en alimentos, una cantidad igual al 50% del gasto anterior en movilidad, otra cantidad igual al 60% del gasto anterior en compra de ropas y una cantidad igual al 70% del gasto anterior en diversiones. Si el resto, o sea 284200gs lo ahorra. ¿Cuánto ahorraría en un determinado mes si no compra ropa y se abstiene de diversiones?

Rta.: 580.000

230) Determinar la cantidad de cubos de lado 2 que caben en una caja rectangular de dimensiones 5.7.8.

Rta.: 35 cubos

231) Si $n/24$ es una fracción propia reducible mayor que 3/7. Calcular la cantidad de valores que puede tener n.

Rta.: 8 valores: 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 21 ; 22

232) Una avenida puede ser refaccionada en 30 días con 30 obreros que trabajan 10 horas diarias. Después de 8 días de trabajo se les pide que terminen en 12 días antes del plazo y así lo hicieron ¿Cuántos obreros más o menos hacen falta, si el rendimiento de los trabajadores en lo que resta del trabajo es el triple que en la parte anterior y si todos trabajaron una hora extra?

Rta.: 10 obreros menos

233) Tres hermanos se reparten en partes iguales una herencia que consiste en un terreno de 170 m^2, dos automóviles de igual valor y 10.000U$S. Uno recibe 150 m^2 el otro 10.000 U$S más el auto el tercero 20 m^2 y el otro auto. ¿Cuál es el valor de uno de los autos?

Rta.: 65.000 U$S

234) EL producto de los números A y B es 142.800 y el mcm de A y B es 357 veces mayor que el MCD. Calcular la cantidad de valores que puede tener A.

Rta.: 8 valores

235) A un determinado número se le hacen tres descuentos sucesivos del 20%, 25% y 40%. Si al mismo número se la hacen tres incrementos sucesivos del 20%, 25% y 40%. De los números que resultan. ¿Qué porcentaje del mayor es el menor?

Rta.: 75.6 %

236) Fermat demostró que todo número de la forma $N = 2^{2^x} + 1$, para todo $n \in N$, es primo. ¿Cuál es la suma de los cuatro primeros números primos de Fermat?

Rta.: 282

237) Luís y Carlos deben llenar dos recipientes de agua de igual cantidad empleando Luis un balde de doble capacidad que el de Carlos. Cuando Luís empieza, Carlos ha echado ya 15 baldes y por cada 4 baldes que hecha Luís, Carlos hecha 5, terminando juntos el trabajo. ¿Cuántos baldes hechó Luís?

Rta.: 20 baldes

238) Se tienen tres fracciones que son equivalentes a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ (en ese orden), tales que el denominador de cada una de ellas es igual a la mitad del numerador del siguiente.

Hallar la suma de los denominadores de estas fracciones, sabiendo que es la menor posible.

Rta.: $\frac{105}{140}$; $\frac{280}{336}$; $\frac{672}{768}$

Suma = 1244

239) Darío y Susana van al supermercado durante un mes que tiene 31 días, Susana comenzó a ir el primer lunes del mes y lo hizo cada 5 días. Darío empezó el primer martes del mismo mes y lo hizo cada 4 días. Se encontraron en el supermercado un solo día de ese mes. ¿Qué fecha corresponde a ese día?

Rta.: 12 del mes

240) Mario , Alberto y José se repartieron una suma de dinero proporcional a 4, 3 y 2. El que menos recibe obtiene 60.000gs. ¿Cuál es la suma repartida? ¿Qué porcentaje del total corresponde al que recibió más?

Rta.: Total : 270.000

Mario : $44\frac{4}{9}$ %

241) El 40% de los alumnos de una escuela practican voleibol. De los alumnos que no juegan al voleibol, el 25% son varones. El número total de mujeres es una vez y media el número de varones que practican voleibol. ¿Qué porcentaje de mujeres tiene la escuela?

Rta.: 51 %

242) En un tambor hay 24 litros de agua que se quiere repartir en tres partes iguales. Solo hay una botella de 5 litros y dos barriles, uno de 11 litros y el otro de 13 litros. ¿Cómo podemos hacerlo?

243) El lado de un cuadrado se aumenta un 50%. ¿En qué porcentaje aumenta el área del cuadrado?

Rta.: 125 %

244) Se inscribieron 33 jóvenes para ir a un campamento y el promedio de las edades de los jóvenes era de 30,3636…. Al campamento solo fueron 30 y el promedio de edades descendió en 0,163636……. Si los tres jóvenes que faltaron tenían la misma edad. ¿Cuál era la edad de los tres?

Rta.: 32 años

245) Las agujas del reloj de Antonio giran a velocidad constante y las mismas se superponen cada 63 minutos. Averiguar si el reloj adelanta y precisar ese adelanto o atraso.

Rta.: Adelanta 2min 27 seg por hora

246) Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales, efectuar:

$$\frac{(2{,}333\ldots)^{-1}\ \dfrac{0{,}02(-2{,}3)}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}}}{\dfrac{(0{,}333\ldots-2)^2}{-\frac{4}{3}\sqrt{0{,}23}}}$$

Rta.: $\dfrac{621\sqrt{23}}{218.750}$

247) Ordenar en forma creciente, sin efectuar las divisiones, las siguientes fracciones.

$$\frac{5}{182} \quad ; \quad \frac{3}{209} \quad ; \quad \frac{7}{465}$$

248) Repartir 6.438.000gs entre dos personas, sabiendo que a una de ellas le corresponde 35% más que a la otra. ¿Cuántos guaraníes corresponde a cada una?

Rta.: 2.739.574,47 ; 3.698.425,53

249) Repartir 1.900 gs entre tres persones de modo que la parte que recibe la segunda sea el triple de la parte que recibe la primera y el cuádruplo de la parte de la tercera.

Rta.: P = 400
S = 1200
T = 300

250) Entre tres obreros se han repartido 343.750gs en partes proporcionales a sus jornales. ¿Cuáles eran esos jornales, sabiendo que al primero le ha correspondido en el reparto 96.250gs, al tercero 137.500gs y que la suma de los jornales de los tres obreros es igual a 31.150gs?

Rta.: P = 8.722
S = 9.968
T = 12.460

251) Una rueda de un automóvil recorre una distancia de 2,9 km, 80 m, 15 dm al dar 920 vueltas. Calcular la longitud en metros de la cia. de la rueda.

Rta.: 3,24 m

252) Al dividir 10.475 y 4.312 por un cierto número entero, se tiene por restos 10 y 11 respectivamente. ¿Cuál es el mayor divisor que cumple con esa condición?

Rta.: 23

253) Hallar la raíz cúbica del número complejo 8 dm^3 120 cm^3 601 mm^3. Expresando el resultado en número complejo.

Rta.: 2 dm 1 mm

254) Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales, obtener el $\frac{1}{5}$% del resultado de efectuar:

$$\frac{0{,}3}{7}\cdot\frac{5}{0{,}4}\div\frac{0{,}06}{0{,}14}$$

Rta.: $\frac{1}{400}$

255) Hallando previamente la generatriz de los decimales, repartir 459 guaraníes en partes inversamente proporcionales a 0,66666……. y 1,0333…..

Rta.: 279 ; 180

256) Sin efectuar la división, establecer si 20.520 es o no divisible por 45. Fundamentar la respuesta.

257) Hallar el mínimo común múltiplo de los cocientes que resultan de dividir 3.300 y 18.250 por el mayor divisor primo común.

Rta.: 24.090

258) Un grifo llena un depósito en 4 horas y un desagüe lo vacía en 5 horas. ¿Qué parte del depósito se llenaría en 4 horas funcionando conjuntamente el grifo y el desagüe?

Rta.: 1/5

259) Hallar el máximo común divisor de los cocientes que resultan de dividir 23.100 y 134.750 por el mayor divisor primo común.

Rta.: 350

260) Si el producto de dos factores es 47 m^3 54 dm^3 123 cm^3 y uno de ellos es 2m 3dm 8mm. ¿Cuál es el otro factor expresado en número complejo?

Rta.: 20 m^2 38 dm^2 74 cm^2 1,65 mm^2

261) Tres grifos funcionando conjuntamente llenan un depósito en 2 horas, mientras que si funcionan solo 2 de ellas, lo llenan en 5 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenaría el tercero?

Rta.: 3 hs 20 min

262) Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes números: 299 ; 403 ; 713

Rta.: 9.269

263) Tres personas forman una empresa. El señor A pone 20 millones de guaraníes. Los señores B y C ponen el local, que pertenece 30% al señor B y el 70% al señor C. El señor B, además se su parte del local pone 10 millones de guaraníes. Sabiendo que al señor A y al señor C las corresponde la misma ganancia.

¿Cuánto le corresponde al señor B, si se tienen que repartir proporcionalmente a lo que invirtieron, una ganancia de 6,97 millones de guaraníes?

Rta.: 2.210.000 gs

264) Si una rueda da 2.496 vueltas en 3min y 15seg. ¿Cuántas vueltas dará en 1h 36min 25seg?

Rta.: 74.048

265) Una botella vacía pesa 425grs, llena de agua 1.175grs. Se desea saber cuántas botellas iguales a aquellas podrán llenarse con el contenido de un barril de 2hectolitros y 25litros.

Rta.: 300

266) Al dividir 1.237 por un número da 37 de resto y al dividir 2.587 por ese mismo número el resto es 43.Hallar ese número (Fundamentar la respuesta)

Rta.: 48

267) Se han repartido cierta suma de dinero proporcionalmente a los números 5,7 y 11. La primero parte es 1.368.000gs. Hallar los otros dos y la suma repartida.

Rta.: 6.292.800

268) Vendí una casa en 38.400.000gs ganando el 28% del costo de la misma. ¿Qué porcentaje del costo hubiese ganado si la hubiese vendido en 37.500.000?

Rta.: 25%

269) Hallar el menor número que al dividirlo por 5, 6, 7 o 15de por resto 3.

Rta.: 213

270) Una guarnición de 3.000 hombres tiene provisiones para 70 días.

Al terminar el día 29 salen 950 hombres.
¿Cuánto podrán durar las provisiones que quedan al resto de la guarnición?

Rta.: 60 dias

271) Repartir 3.050.000gs entre 3 personas de modo que a la segunda le corresponda 5% menos que a la primera, y que a la tercera le corresponda 10% más que la primero.

Rta.: P = 1.000.000
S = 950.000
T = 1.100.000

272) El producto de dos números es 575.424 y el máximo común divisor de los mismos es 36. Hallar el mínimo común múltiplo.

Rta.: 15.984

273) Hallar los cocientes que resultan de dividir 117.975 y 2.574 por su mayor divisor primo común.

Rta.: 9075 ; 198

274) Un tonel lleno de vino costo 259.000gs. Tuvo una pérdida de 87 litros y entonces su valor se redujo 137.200gs. ¿Cuántos litros de vino contenía inicialmente el tonel?

Rta.: 185

275) Compre un artículo con un descuento del 10% sobre el costo y lo vendí con un beneficio del 10% sobre dicho costo. ¿Qué porcentaje sobre el precio que he pagado gane?

Rta.: $22\frac{2}{9}$ %

276) Un obrero tarda 6 horas más que otro en efectuar un trabajo. Hallar el tiempo que emplearía cada uno de ellos en realizarlo solo, sabiendo que juntos utilizan 4 horas en efectuar el mencionado trabajo.

Rta.: 6 y 12

277) Al dividir 1.866 y 1.749 por el mismo número, se obtienen por restos 33 y 22 respectivamente. ¿Cuál es el mayor divisor que cumple con esa condición?

Rta.: 47

278) Hallar el menor número primo, distinto de la unidad que sea primo con 2.730 y 21.420.

Rta.: 11

279) Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales, efectuar:

$$\sqrt{\left(\sqrt{0.91666\ldots} + \sqrt{3.666\ldots}\right)^2 - 4\frac{1}{4}}$$

Rta.: 2

280) Hallar el menor múltiplo de 168 y 1.116 que sea divisible por 210.

Rta.: 78.120

281) Vendí dos terrenos en 8.400.000gs cada uno. En uno gane el 20% del precio de venta y en el otro perdí 4% del costo. ¿Cuánto gane o perdí en total?

Rta.: Gane 1.330.000

282) Un albañil se compromete hacer una obra en 12 días pero tardo 3 días más por trabajar 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajo diariamente?

Rta.: 8 $hs/día$

283) El máximo común divisor de dos números es 17. Los cocientes que para hallarlo se ha ido obteniendo son: 1 ; 20 ; 1 y 5. ¿Cuáles son los números?

Rta.: 2.227 ; 2.125

284) Hallar el mínimo común múltiplo de los cocientes que resultan al dividir 79.781 y 5.681 por su menor divisor común distinto de la unidad.

Rta.: 141.151

285) En una división entera el resto es 21 y el dividendo 580. Determinar el divisor y el cociente de dicha división.

Rta.: 43

286) Trabajando 11 horas diarias durante 20 días, 7 obreros han hecho un trabajo cuya dificultad está representada por 7 y la actividad de os trabajadores por 9.¿Cuántos días necesitaran para hacer 5/4 del trabajo 12 obreros, si su actividad se representa por 11, la dificultad por 8 y trabajan 10 horas diarias?

Rta.: 15

287) Un obrero gana en dos días lo que el otro gana en tres días. Terminado el trabajo se les pago un total 9.840.000gs, habiendo el primero trabajado 52 días y el segundo 45 días. ¿Cuál fue la remuneración diaria de cada uno de ellos?

Rta.: 120.000 ; 80.000

288) Hallar todos los divisores cuadrados perfectos del número 5.292.

Rta.: 1 ; 4 ; 9 ; 36 ; 49 ; 196 ; 441 ; 1764

289) Un obrero puede hacer un trabajo en 12 días. Después de 5 días de iniciado el trabajo contrata un ayudante, concluyéndose la obra en tres días más. ¿Cuántos días tardaría el ayudante si tuviera que hacer solo el mismo trabajo?

Rta.: 9

290) Hallar el mayor divisor común de 7.644 y 38.808 , que sea divisor de 1.302.

Rta.: 42

291) Un deposito, cuya forma es la de un cilindro de revolución, puede ser llenado por una canilla en 8 horas y vaciado por otra en 12 horas. ¿Cuándo el nivel del agua está a 1/3 de la altura del depósito, se abren las dos canillas al mismo tiempo. ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que el nivel del agua alcance los $3/4$ de la altura del depósito?

Rta.: 10 hs

292) Un libro tiene 210 páginas de 35 líneas cada página y 60 letras cada línea. Se lo quiere reimprimir con menor formato en 300 páginas, con 30 líneas en cada página ¿Cuantas letras tendrá cada línea?

Rta.: 49 letras

293) Vendí 2 terrenos a 7.200.000gs cada uno. En uno perdí el 25% del precio de venta y en el otro gane el 25% del costo ¿Cuánto gane o perdí en total?

Rta.: Perdí 360.000

294) Un granjero tiene 275 aves entre gallos, gallinas, y pollitos. El número de gallinas es al de gallos como 7 es a 3 y el número de pollitos es al de gallinas como 5 es a 2. ¿Cuántos gallos, gallinas y pollitos tiene el granjero?

Rta.: Gallos = 30
Gallinas = 70
Paloma = 175

295) Hallar el menor número por el cual hay que multiplicar 4.662, para que el producto sea divisible por 3.234.

296) A puede terminar una obra en la tercera parte del tiempo que le llevaría a B. Comienzan la obra trabajando juntos durante 4 horas y la termina A, trabajando solo durante dos horas más. Determinar cuántas horas emplearía B, trabajando solo, para realizar toda la obra.

Rta.: 22 hs

297) Determinar cuál es el $20\frac{1}{2}$ % del capital mayor, que resulta de repartir una suma de 34.920 gs en partes inversamente proporcionales a los números 0,4545.... y 0,1333....

Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales.

Rta.: 5535

298) Hallar los números naturales comprendidos entre 2.000 y 3.000, que divididos por 24, 36 y 60 dan 11 de resto.

Rta.: 2171 ; 2531 ; 2891

299) Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales, efectuar:

$$\left[\frac{0{,}30 + \dfrac{0{,}1515\ldots}{0{,}1010\ldots} - 0{,}0666\ldots}{0{,}01818\ldots} - 0{,}333\ldots\right]^2$$

Rta.: $\dfrac{81.796}{9}$

300) Cuando vendo un auto por 18.000.000 gano $\frac{2}{7}$ del costo. ¿En cuánto tendría que venderlo para ganar $\frac{3}{5}$ del costo?

Rta.: 22.400.000

301) Un obrero cavó un pozo en 21 días. Si hubiese trabajado 2 horas menos por día hubiera empleado 6 días más para realizar el mismo trabajo. ¿Cuántas horas por día trabajó el obrero?

Rta.: 9 horas

302) ¿Cuántos y cuáles son los divisores simples y compuestos del número 14161?

Rta.: 9 divisores: 1 ; 7 ; 49 ; 17 ; 119 ; 833 ; 289 ; 2023 ; 14.161

303) Un operario puede hacer una obra en 12 días, trabando 5 horas diarias, otro operario puede hacerlo en 15 días, trabajando 6 horas diarias. ¿En qué tiempo, expresado en días y horas, lo harían los dos juntos si trabajasen 8 horas diarias?

Rta.: 4 dias 4 horas

304) Un albañil contrata a un aprendiz ofreciéndole 20.000gs por cada día que trabaje y 10.000gs por cada día que no pueda trabajar por causa de la lluvia. Si al cabo de 23 días el aprendiz recibió 380.000gs. ¿Cuantos días trabajo?

Rta.: 15 dias

305) Dos hombres alquilan un cochera por 3.200.000gs, monto a ser pagado al término del contrato. El primero guardo en ella 4 automóviles durante 6 meses y el segundo 5 automóviles durante 8 meses. ¿Cuánto debe pagar cada uno, teniendo en cuenta la utilización que le ha dado?

Rta.: 1.200.000 ; 2.000.000

306) Hallar un número natural comprendido entre 80.000 y 100.000 , que sea divisible por 182 y 2.156.

Rta.: 84.084

307) Hallar los números cuyo cociente es igual a 6,65 y su máximo común divisor 1.782.

Rta.: 35.640 ; 237.006

308) Aplicando la regla de tres simple, calcular en cuanto se debe vender un artículo que costo 9.000gs para ganar el 40% del precio de venta.

Rta.: 15.000

309) Un obrero emplea 54 días en hacer 270 m^2 de pared en el tercer piso de un edificio. ¿Cuántos días deberá trabajar para hacer 300 m^2 de pared en el cuarto piso del mismo edificio, sabiendo que la relación de dificultad de la construcción en el tercer piso respecto a la construcción en el cuarto piso es de 3 a 4 ?

Rta.: 80 días

310) Se vendieron 2 automóviles usados por 10.200.000gs. Los precios de venta estaban en razón directa a la velocidad que pueden desarrollar, que es proporcional a los números 60 y 70, y en razón inversa al tiempo de uso de cada uno de ellos, que son 3 años y 5 años respectivamente. ¿Cuáles fueron los precios de venta?

Rta.: 6.000.000 ; 4.200.000

311) Vendí un computador por 3.750.000 gs. Si lo hubiera vendido por 3.840.000 gs, habría ganado el 28 % de su costo. ¿Qué porcentaje de su costo gane al realizar la venta?

Rta.: 25 %

312) Dos grifos suministran agua a un depósito. Funcionando solos, uno lo llenaría en 4 horas y el otro en 6 horas. Estando vacío el depósito, se deja abierto solamente el primer grifo durante 1 hora 20 min., después solamente el segundo grifo durante 45min, luego se dejan ambos abiertos. ¿En cuánto tiempo se llenara completamente el depósito?

Rta.: Tiempo total : 3 h 23 min

313) Una cuadrilla de 12 obreros se comprometieron a realizar una obra en 156 días, trabajando 10 horas diarias. Después de 7 días de haberse iniciado el trabajo, se retiran 5 hombres y estos no son reemplazados sino después de tres días. ¿Cuántos obreros se necesitan incorporar a la cuadrilla para terminar el trabajo en el tiempo establecido?

Rta.: 1 obrero

314) Una librería vende libros al contado por 50.000gs cada uno. Si la venta se hace a crédito, el precio tiene un incremento del 20%. Un comprador adquirió varios libros a crédito y la librería le hizo un descuento del 10% sobre el precio a plazo. En este caso ¿Cuál fue el precio de cada libro y cual el porcentaje de aumento del precio al contado de cada libro?

Rta.: 54.000 ; 8 %

315) Descomponer el número 35,1 en tres sumandos que sean directamente proporcionales a 2; 3 y 4 e inversamente proporcionales a los cubos de 2 ; 3 y 4.

Rta.: $\frac{6318}{305}$; $\frac{2808}{305}$; $\frac{3159}{610}$

316) Dos recipientes contienen 11.385 y 10.115 litros de vino de diferente calidad. Se desea envasarlos, sin mezclarlos, en botellas de igual capacidad. ¿Cuál es la máxima capacidad que deberían tener las botellas y cuantas botellas se necesitarían?

Rta.: 5 litros ; 4.300 botellas

317) Hallar dos números de 5 cifras, el menor y el mayor posibles, que sean divisibles por los números 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 11 , 14 y 21.

Rta.: 10.164 ; 99.792

318) Un empresario contrata 25 obreros por 40 días hábiles para hacer una obra, trabajando 8 horas diarias. Después de 30 días se retiran 5 obreros. ¿Cuántas horas por día deberán trabajar los obreros restantes para concluir el trabajo en el tiempo previsto en el contrato?

Rta.: 10 $h/día$

319) Una persona compra un artículo que cuesta 38.000 gs. El vendedor le hace un primer descuento del 20% del costo y después, un segundo descuento de 25% del primer descuento. ¿Cuánto pago el comprador?

Rta.: 28.500

320) Utilizando exclusivamente procedimientos aritméticos, hallar el número que es múltiplo de 2 , más 1 ; múltiplo de 7 , más 6 y múltiplo de 10 , menos 1.

Rta.: 69

321) Hallando previamente la fracción generatriz de los decimales e indicando todos los pasos efectuar:

$$N = \sqrt{\frac{2{,}125 - \frac{2^{-1}}{3^{-1}} \times 0{,}444\ldots}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{14} \div \frac{5}{7}} \div \left(\sqrt{0{,}91666\ldots} + \sqrt{3{,}666\ldots}\right)^2}$$

Rta.: $\frac{10\sqrt{609}}{2871}$

322) El costo (sin ganancia) de la mano de obra para concluir una pared de 5 m de longitud; 1,5 m de altura y 0,15 de espesor es de 240000 gs. Si me contratan para concluir otra pared de 14 m de largo y 0,30 de espesor. ¿Qué altura tendrá la misma, si el pago total (incluido el beneficio del 25%) a recibir es de 3750000 gs, sabiendo que a partir de una altura mayor a 1,8 m la dificultad se duplica?

Rta.: 2,57

323) Utilizando el procedimiento de reparto proporcional compuesto, resolver el problema: Un obrero gana en 3 días lo que otro gana en 5 días. Realizan un trabajo y se les paga un total 5.760.000gs. Sabiendo que el primer obrero trabajo 48 días y el segundo 40 días, calcular el jornal de cada uno.

Rta.: 80.000 gs/día ; 48.000 gs/día

324) Un comerciante compro 90 calculadoras. Vendió un lote de 35 calculadoras por 280.000gs perdiendo 3.000gs en cada una. Después vendió 30 calculadoras, ganando 30.000gs en total. Calcular el precio de venta de cada una de las restantes calculadoras para que gane 250.000gs en la operación.

Rta.: 24.000 c/u

325) Hallar los números naturales comprendidos entre 1.000 y 2.000, que divididos por 12, 15 y 18 dan 13 de residuo.

Rta.: 1.093 ; 1.273 ; 1.453
1633 ; 1.813 ; 1.993

326) ¿Cuántos y cuáles son los divisores comunes, simples y compuestos, de los números 1.560 y 2.400?

Rta.: 16 divisores: 1 ; 2 ; 4 ; 8
3 ; 6 ; 12 ; 24
5 ; 10 ; 20 ; 40
15 ; 30 ; 60 ; 120

327) El gerente de una empresa desea repartir la suma de 25.008.000gs entre tres de sus empleados, Ángel, Beatriz y Cirilo, proporcionalmente a la antigüedad de cada uno de ellos: (La de Ángel es iguala a los $3/4$ de la de Beatriz y la de Cirilo igual a los $2/5$ de la de Beatriz) e inversamente proporcional a sus salarios,(el de Ángel es 20 % menos que Cirilo y el de Beatriz es 20 % más que el de Cirilo) ¿Cuánto corresponde a cada empleado?

Rta.: 10.8000 ; 9.600.000 ; 460800

328) Repartir un capital de 20.300.000 gs entre tres personas de modo que a la segunda le corresponda 15 % menos que a la primera y a la tercera 20 % menos que a la segunda.

Rta.: P = 8.023.715,415
S = 6.820.158,103
T = 5.456.126,482

329) Dos secretarias, Ana y Beatriz escriben 85 palabras por minuto y 102 palabras por minuto respectivamente. Si Ana comienza un trabajo a las 8hs y Beatriz otro, 40 minutos después y ambas trabajan sin pausa. ¿A qué hora habrán escrito el mismo número de palabras?

Rta.: 12 hs

330) Un depósito puede ser llenado con agua por medio de dos grifos. Cada grifo, funcionando solo, llena el depósito en 21 horas 15 min. y 11 horas 15min, respectivamente. El segundo grifo suministra, por minuto, 24 litros de agua más que el primer grifo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Rta.: 34.425 ℓ

331) En una obra se emplearon 3 cuadrillas de obreros. La primera consto de 10 hombres y trabajo 6 días a razón de 8 horas de trabajo diario. La segunda, de 9 hombres, trabajo durante 5 días de 6 horas diarias. La tercera, compuesta por 7 hombres trabajo 3 días de 5 horas diarias. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla si la obra costo un total de 4.275.000gs?

Rta.: P = 2.400.000
S = 1.350.000
T = 525.000

332) Hallando previamente la fracción generatriz de las decimales efectuar:

$$N = \frac{\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - 0{,}0666\ldots \right) \div 2 \right] \div \frac{2}{5}}{\left(\frac{3{,}555\ldots - 1{,}8333\ldots}{9{,}777\ldots - 6{,}444\ldots} \times \frac{1}{71} \right) \div \frac{3{,}1 \times 0{,}1010101\ldots}{2{,}151515\ldots}}$$

Rta.: 20

333) Un número N es múltiplo de 3, más 1 ; de 5, más 3 ; de 7, más 5 y de 11, más 8. Hallar N.

Rta.: N = 1153

334) Dos obreros hicieron una obra trabajando juntos. El primero gano, por día, un tercio más de lo que gano el segundo. El primero cobro 900.000gs, habiendo trabajado cinco días más que el segundo. El segundo cobro 540.000gs. ¿Cuánto días trabajo cada obrero?

Rta.: $P = 25\ días$
$S = 20\ días$

335) Un tren que marcha a la velocidad de 72km/h, tarda 30 segundos en cruzar un puente, según lo juzga un pasajero por el ruido que percibe. Sabiendo que la longitud entre las ruedas extremas del tren es de 200 m, hallar la longitud del puente expresada en metros.

Rta.: 400 m

336) Un joven da 100 pasos en un minuto y su padre 3 pasos en 2 segundos. El primero alcanza en cada paso 710 cm y el segundo 90 cm. ¿Cuántas horas y minutos tardaran en encontrarse, partiendo en sentidos contrarios de dos ciudades distantes 5.670 m entre sí?

Rta.: 37 min 18,16 seg

337) Restar de la fracción $\dfrac{275}{289}$ los $\dfrac{7}{24}$ de la misma y expresar el resultado por medio de una fracción de numerador 275.

Rta.: $\dfrac{275}{408}$

338) $$\frac{\sqrt[3]{-\frac{8}{9}}\ .\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{1}{46} \times 2{,}0444... - (0{,}8 - 1) : 3}{0{,}555... - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2}}$$

Rta.: 5

339) $$\frac{\left(\rho + \frac{t}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}} = \frac{2\left(\rho + \frac{t}{2}\right)^4}{x}$$

Rta.: $x - 3\left(\rho + \frac{t}{2}\right)^2$

340) $$\left[1 - 0{,}111... + \frac{\sqrt{-\frac{1}{9}}}{\sqrt{-1}}\right]^{-1}$$

Rta.: $\dfrac{9}{11}$

341) $$\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(-\frac{5}{8}\right)(-15) - \frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\right)^{-1}$$

Rta.: $-\dfrac{25}{6}$

342) $$\frac{5}{6}(0{,}5 - 1)^{-2} - \frac{\frac{1}{100}}{(0{,}1)^3} + 0{,}666... - \sqrt[3]{-\frac{0{,}25}{2}}$$

Rta.: $-\dfrac{11}{2}$

343) $$\frac{\dfrac{1-\frac{3}{6}}{\frac{3}{8}-\frac{3}{4}}}{\dfrac{\frac{1}{3}+2}{2}} \times \sqrt{\frac{\frac{7}{8} : \left(\frac{1}{14}\right)^{-1}}{\frac{27}{16} \times 4 \times \frac{2}{3}}}$$

Rta.: $-\dfrac{4}{63}$

344) $$\frac{\dfrac{(-4)\sqrt[3]{\frac{1}{8} : (-4)}}{(-16)\left(-\frac{3}{4}\right)} + \dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}}}{\dfrac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+2 : \frac{5}{4}-\frac{1}{5}}{\left(-1+\frac{3}{5}\right)^2}}$$

Rta.: $\dfrac{7\sqrt[3]{2}-256}{385}$

345) $$\frac{3 : 0{,}1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}-\dfrac{0{,}5}{\frac{1}{1{,}2}}} + \sqrt[3]{0{,}875-1}$$

Rta.: $\dfrac{29}{2}$

346) $$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dfrac{\frac{3}{4}-1+\frac{1}{8}}{\frac{5}{3}-\frac{1}{6}}} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right]10^{-1}}}{\dfrac{\left[-1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-2}}{-\frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{10^2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$$

Rta.: $-\dfrac{125}{3}$

347) $$\frac{\frac{3}{7}+\frac{1}{3} : (-2)-\frac{32}{27}\times\frac{9}{4}\left(-\frac{3}{14}\right)}{\left(2-\frac{3}{4}\right)^{-1}-2 : \frac{3}{4}+2\times\frac{3}{4}} + 2$$

Rta.: $-\dfrac{141}{77}$

348) $$\frac{\dfrac{-\frac{1}{2}+\sqrt[3]{\frac{11}{8}+2}-\frac{3}{4}}{\dfrac{\frac{4}{5}+3}{2^{-1}}-5}}{\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}}{\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{1}{16}\right)} : \left(-\frac{8}{5}\right)^{-1}} \times 13$$

Rta.: $-55(2\sqrt[3]{37}-1)$

349) $$\frac{0,1^2\sqrt{1-\frac{5}{9}}}{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{(\,0,5-1\,)\left(1-\frac{2}{3}\right)}{x}$$

Rta.: $x = -4$

350) $$\frac{\frac{(\,2,999\ldots\,)^{-1}}{0,00333\ldots} \times \frac{0,02:(-\,0,3\,)}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}}}{\frac{(0,333\ldots-2)^2}{-\frac{4}{3}\sqrt{0,25}}}$$

Rta.: $\frac{24}{5}$

EJERCICIOS DE OPCIÓN MULTIPLE

351) Para los siguientes números $x = \sqrt[3]{\dfrac{-125}{2744}}$ $\quad y = 7{,}999\ldots$

Se dan las siguientes afirmaciones:

a- x e y son reales
b- x es irracional e y es racional
c- x es racional e y es natural
d- x es imaginario e y es periódica pura
e- x e y son números complejos

352) El menor número que es múltiplo de 5 y que al dividirlo por 2 , 3 y 4 se obtiene como resto 1

353) La razón entre dos números es $\dfrac{3}{5}$ y su máximo común divisor es 8. Calcular dichos números.

354) Un número tiene dos cifras... Si se divide este número por 5 se obtiene 4 de resto y si se divide por 9 se obtiene 6 de resto.

Calcular el número

355) El enunciado falso es:

a- El MCD de dos números es menor o igual al menor de los números.
b- El MCD es divisor de los divisores comunes de los dos números.
c- El MCD de dos números es múltiplo de los divisores comunes de los números.
d- Si dos números son primos entre sí, el MCM de estos es el producto de ambos.
e- El MCM de los números es múltiplo de MCD de los números.

356) Cuantos números inferiores a 100 son divisibles a la vez por 2 , 3 , 4.

357) El chofer de un ómnibus desea hacer en 8 días un trabajo hecho anteriormente en 10 días de 5 horas con velocidad de 60 km/h.

Las horas por día que deberá emplear para hacer el mismo trayecto si aumenta la velocidad en $1/4$ de la anterior será?

358) El 20% del 40% de una cantidad es lo mismo que:

a) 10% b) 65% c) 15% d) 32,5% e) 8%

359) Un objeto cuesta "n" guaraníes, se vende con a % de descuento.

Su precio de venta es ahora

a) $n - a$ b) $n - \frac{a}{100}$ c) $n - 0{,}01\,a$ d) $\frac{n-a}{100}$ e) $n(1 - 0{,}01a)$

360) Si x es el doble de y, e y es el 75 % de z

Entonces:

a) $z = \frac{2}{3}x$ b) $z = \frac{3}{2}x$ c) $z = \frac{1}{6}x$ d) $z = \frac{3}{8}x$ e) $z = \frac{3}{5}x$

361) Un comerciante subió los precios de sus artículos agregando un "cero" al precio antiguo. Entonces el alza a favor del comerciante fue:

a) 1% b) 10% c) 100% d) 1000% e) 900%

362) El a % del b % de x es lo mismo que:

a) El $(a\,.\,b)$ % de x b) El $(a + b)$ % de x c) El (a/b) % de x

d) El b % del a% de x e) El $(a - b)$ % de x

363) Tres personas A, B, C forman una sociedad: A aporta los $5/9$ del total y B los $5/12$ del total.

Si A traspasa los 0,3 de sus acciones a C, entonces:

a) Los 3 quedan con partes iguales.
b) A sigue siendo el mayor accionista.
c) A queda con tantas acciones como B y C juntos.
d) A queda con 200 % de C.
e) A queda con lo mismo de B.

364) Un comerciante ofrece su mercadería en las condiciones siguientes: hace primeramente un 25 % de descuento y luego recarga 20 %.

EL % real de descuento o recargo sobre el precio inicial es.

365) Se desea alambrar un terreno cuadrado de 1 km de lado. Cada $2m$ hay un poste y el alambre da una vuelta en cada poste. La cia. del poste es 30cm y se usan 4 vueltas de alambrado. Para la longitud del frente se agrega 10 cm más de alambre en cada extremo para el remate final por cada vuelta.

366) Dos grupos de construcción están a una distancia de 20 Km; trabajando uno en dirección del otro, colocando tubería que debe conectarse.
Ambos grupos trabajan la misma cantidad de horas y uno de ellos tiende 0,4Km de tubería por día más que el otro grupo y las dos tuberías se conectan después de 10 días.
Calcular la cantidad de tubería tendida por día.

367) Efectuar

$$\left[\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{931}\div\sqrt{19}\right)\right]^4$$

368) Un matrimonio sale a hacer las compras del mes, para lo cual el marido le da a su esposa una suma equivalente a los $\frac{2}{3}$ del dinero con que el queda. Al regresar el marido había gastado $\frac{5}{6}$ del dinero que tenía y su señora los $\frac{7}{8}$ del dinero que le había dado el marido. Al regresar juntan lo que sobro y es 150.000 gs. ¿Cuál fue la cantidad total inicial que tenía el marido?

369) Un numero de dos cifras es tal que la suma de sus dígitos es 7. Si se intercambian las cifras, el número queda disminuido en 9. Calcular dicho numero

370) El menor número real cuya mitad más uno sea mayor o igual a 3/2 es:

371) $10\,\%^2$:

a) 100 %   b) 20 %   c) 5 %   d) 1 %   e) 0,1 %

372) Siendo a y b números primos entre si y a/b la fracción generatriz de 0,1222......
Calcular $(b - a)$

373) Dada la serie de razones iguales: $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{9}$

Hallar a, b y c sabiendo que $a - b + c = 22$

374) En una escuela hay 180 alumnos de los cuales hay triple número de argentinos que de peruanos y doble número de peruanos que de colombianos. ¿Cuántos peruanos hay en la escuela?

375) Un artículo en una tienda sufre un descuento del 30% y como no se vendía, al año siguiente sufre otro descuento del 50%.
El % del descuento total fue de:

376) Un vendedor ambulante vende sus productos con una ganancia del 50% sobre el precio de venta.
Entonces su ganancia sobre el precio del costo es de:

377) Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:

a) Multiplicado o dividido una de ellas por un número, la otra queda multiplicado o dividido por dicho número.
b) Se multiplica una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número.
c) Si a una se le suma un número, la otra queda disminuida en el mismo número.
d) Es la comparación de dos razones iguales.
e) NDA

378) En las siguientes afirmaciones marcar falso o verdadero:

a) La suma es distributiva con respecto al producto.
b) La división es distributiva con respecto a la radicación.
c) Si $a > 1$ entonces $a^2 > 1$.
d) Si $a < 1$ entonces $-a > 1$.
e) La radicación es distributiva con respecto al producto.
f) Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a\,b > 0$.
g) Si $a < 0$ entonces $a^2 < 0$.
h) Si $(a + b) > 0$ entonces $-a - b < 0$.
i) La resta es distributiva con respecto a la división.
j) La potenciación y la radicación solo son distributivas con respecto a la multiplicación y división.
k) El producto de dos operaciones conjugadas es racional.
l) Un radical es racional si la raíz indicada es exacta.
m) Un radical es irracional si la raíz indicada no es exacta.
n) Los números menores que 1 tienen logaritmo positivo.
o) En todo sistema de logaritmo, el logaritmo de la base es cero.

379) Analizar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) La raíz cuadrada de un número es siempre positiva.
b) La raíz cúbica de un número negativo no es un número real.
c) la raíz par de un número negativo no es un número real.
d) La raíz de índice impar de un número negativo no es un número real.
e) Si $a = \sqrt[n]{x}$ entonces $a^n = x$.
f) Todo radical de índice par tiene dos soluciones reales,
g) Un radical de índice impar de un número negativo tiene una solución real.
h) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores.
i) La raíz de una suma no es igual a la suma a la suma de las raíces de los sumandos.
j) La raíz de una potencia se obtiene dividiendo el exponente del radicando por el índice del radical.
k) El producto de los factores positivos es siempre positivo.
l) EL producto de un número par de factores negativos es siempre positivo.
m) EL cociente de dos números negativos pares es negativo.
n) La suma de dos números pares, uno positivo y el otro negativo es siempre positivo.

380) Repartir 1.536.000 entre 3 persones $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$ de modo que la parte de Y sea el triple de X y la parte de Z sea el cuádruplo de Y.

381) Si 3 terneros se pueden alimentar durante 20 días con el pasto obtenido de un corral cuadrado de 50 m de lado, entonces el número de días que se puede alimentar 5 terneros de igual edad, con otro corral cuadrado de iguales condiciones y que tiene por lado el triple del corral original es:

382) Una ley queda expresada algebraicamente por la relación $x = \frac{2ab^2}{3c}$.
Si a se triplica , b se duplica y c se hace 6 veces mayor, entonces x:

a) Aumenta 4/3
b) Se duplica.
c) No varía.
d) Se reduce a los 2/3
e) Aumenta 3/2 veces.

383) ¿Qué porcentaje de $\boldsymbol{a}$ es $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{5}$% de $\boldsymbol{a}$?

384) Si $\boldsymbol{a}$ es el 25% de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ es el 15% de $\boldsymbol{c}$, entonces el 40 % de la expresión $\frac{a\ b}{c}$ es igual a:

a) $\frac{3b}{10}$ b) $\frac{3\ a}{15}$ c) $\frac{2\ b}{25}$ d) $\frac{3\ a}{20}$ e) $\frac{6\ a}{25}$

385) El cociente entre el 75% de X y el 15% de Y, se multiplica con el 60% de Z. El resultado es:

a) $\frac{3\ x\ y}{z}$ b) $\frac{300\ x\ z}{y}$ c) $\frac{x\ y}{3\ z}$ d) $\frac{3\ x\ z}{y}$ e) $\frac{3\ y\ z}{5\ x}$

386) El inverso multiplicativo del 25 % de 16 es:

387) La estatura de un padre es el doble que la estatura d la hija sobrando cierta cantidad de centímetros que está en la relación 2 a 3 con la estatura de la hija.

a) En qué razón está la altura de la hija con relación a la del padre?
b) Si el padre mide 1,72 m ¿cuál es la estatura de la hija?

388) Juan tiene una pieza de tela, regala $\frac{1}{4}$ de la pieza, luego la mitad del resto, y a una tercera persona le regala $\frac{1}{3}$ de lo que le queda. ¿Qué porcentaje de la pieza resta?

389) Una empresa vende una mercadería y va a recibir el pago en 2 cuotas. La primera en el acto de la compre y la segunda 30 días después. Suponiendo que el precio al contado de la mercadería sea c guaraníes, que el primer pago sea $\frac{c}{3}$ guaraníes, y le inflación en esos 30 días sea de 15 %.Calcular el valor que debe ser cobrado en el segundo pago, de modo a compensar la inflación.

390) Dos personas R y S depositan la misma cantidad de dinero en "CAJA DE AHORRO", diferentes. Si a S le pagan n % trimestral y a R él $\frac{n}{3}$% trimestral. Entones al final del año:

a) Los 2 han ganado los mismos intereses.

b) S ha ganado el triple de R.

c) R ha ganado la mitad que S.

d) S ganó $\frac{4}{3}$ más que lo ganado por R.

e) R ganó los $\frac{4}{3}$ 0,75 de S.

391) El valor de $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + (2^0)^n$ es:

a) 1 b) 2^{15+n} c) 2^{15} d) 2^6 e) otro valor

392) Si $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 0$ entonces el valor de a cuándo $b = 4$ y $c = 12$ es:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -3 d) $-\frac{1}{3}$ e) -8

393) Indique cuál de las siguientes proposiciones es correcta:

a) π es un número racional.

b) 3,1416 es un número irracional.

c) 3,14 es un número natural.

d) $\sqrt[3]{-64}$ es un número imaginario.

e) $\pi + \sqrt{-25}$ es un número complejo.

394) En un negocio de aves se venden pavos, gallinas y codornices.

Son todos gallinas menos 5, son todos pavos menos 7, y son todos codornices menos 4.
Si un cliente compro todas las gallinas y codornices.
¿Cuántos animales compre?

395) Respecto a la potenciación se afirma que:

1) $b^n = n^b$
2) $(b^m)^m$
3) $(a+b)^m = a^m + b^m$
4) $(a+b)^{(n-1)}(a+b) = (a+b)n$
5) $(a+b)(a+b)^{(n-1)}$

Por consiguiente:

a) Solo 1 son verdaderas.

b) Ninguna es verdadera

c) Todas son falsas

d) 1 son falsas

e) 2 son verdaderas

396) El valor numérico de la expresión $3n^2 + 4n - 5$ para $n \in N$

a) n = PAR, será par o impar: fundamentar la respuesta.

b) n = IMPAR, será par o impar: fundamentar la respuesta.

397) El valor de k es:

$$k = 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2}}}$$

398) Una maquina es capaz de perforar 4 tarjetas por segundo y otra, 6 tarjetas por segundo. Entonces 1200 tarjetas las dos máquinas juntas perforan en:

a) 8min 20seg b) 2min c) 500seg d) 50seg e) otro valor

399) Si n es un número natural, entonces el valor de $(2n+1)^2 - 1$ es siempre divisible por:

a) 2 y 3 b) 3 y 4 c) 4 y 6 d) 2 y 4 e) 4 y 8

400) Marque la afirmación correcta:

a) Un número es divisible por 8 cuando lo es por 2 y 4 a la vez.

b) Un número es divisible por 18 cuando lo es por 3 y 6 a la vez.

c) Un número es divisible por 6 cuando lo es por 3 y 2 a la vez.

d) Todas las reglas anteriores son verdaderas.

e) Todas las reglas (a, b, c) son falsas.

401) Un caracol sube por una pared de $7m$ de altura. Durante el día sube 3m pero durante la noche duerme y resbala $2m$. El número de días que necesita el caracol para llegar a la parte más alta de la pared es:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10

402) Siendo el MCD de dos números 140 y los cocientes de las divisiones sucesivas para su obtención: 1, 2 y 3. Hallar el número mayor

403) Una granjera tiene un número de huevos inferior a 200. Contándolos de 8 en 8, de 12 en 12 y de 15 en 15 le quedan siempre 7. Hallar los huevos que tiene.

404) El menor número natural que al dividirlo por 10 deja resto 9, cuando se divide por 9 deja resto 8 y cuando se divide por 8 deja resto 7 es:

405) ¿Por qué números se puede dividir 67 y 79 para obtener restos iguales?

406) Si n es un número entero, entonces las relaciones n , $2n$, $2n + 1$ expresan siempre:

a) n ....un número natural

b) $2n$ ....un numero par positivo

c) $2n + 1$.......un número cualquiera real

d) $2n$ ....un número natural

e) $2n + 1$.......un número impar cualquiera

407) Por el estacionamiento de 10 vehículos durante 6 horas, de 4 vehículos durante 5 horas y de 8 vehículos durante 3 horas, se ha pagado un total de 312.000gs. El costo de estacionar 2 vehículos durante 2 horas será:

408) Si $a^2 = 5$ entonces a partir de las siguientes proposiciones determinar cuál de las alternativas que se presentan seguidamente es la correcta.

a) $2a^2 = 10$ b) $(a^2)^3 = 5^3$ c) $\sqrt{a} = \sqrt{5}$ d) $a^2a^3 = 5a^3$ e) $a^4 = 25$

Entonces: a) solo a , b , c son verdaderas

b) solo b , c y d son falsas

c) solo a , b y e son verdaderas

d) solo c es falsa

e) todas son falsas.

409) Si $a\,b = 15$ entonces es verdadera la proporción:

a) $a = 3\,;\, b = 5$

b) $\sqrt{a\,b} = \left(\sqrt{15}\right)^2$

c) $a\,\sqrt{b} = a\,\sqrt{15}$

d) $a^2 b = 15^2$

e) $a\,b\,c = 15\,c$

410) Si $m^2n^4 = 4\,a$ entonces dadas las proposiciones siguientes, decidir cuál de las alternativas que se presentan a continuación es la correcta:

1) $m\,n = 2\sqrt{a}$

2) $m^3n^4 = 2\,a\,m$

3) $m\,n^2 = 2a$

4) $m^2 + n^4 = 4 + a$

5) $a\,m^2 = 4\,m^4$

Por consiguiente:

a) todas son falsas

b) solo 1 y 2 son verdaderas

c) solo 2 y 3 son verdaderas

d) solo 3 y 4 son verdaderas

e) solo 1 y 4 son verdaderas

411) La expresión $2^4\,.\,4^2$ es equivalente a:

1) 2^6 2) $2\,.\,2^4$ 3) 2^8 4) 4^4 5) $8^{4.2} = 8^6$

De las proposiciones anteriores podemos afirmar que:

a) todas son falsas

b) son falsas solamente 1 y 5

c) son falsas solamente 2 y 4

d) son falsas solamente 1 , 2 y 5

e) son falsas solamente 3 y 4

412) El valor de la expresión $3^3.\,3^2 - 3^0.\,4^0$ es:

413) El dividir un mismo número por 8 , 12 y 14 , siempre se obtienen como resto 2. El numero comprendido entre 500 y 600 es:

414) Si a y b son primos entre sí:

a) El MCM de a y b es $a\,b$

b) El MCD de a y b es a/b

c) El MCD de a y b no existe

d) dos de las anteriores son correctas

415) Si a es múltiplo de b

a) El MCM de a y b es $a\,b$

b) El MCD de a y b es b

c) El MCD de a y b es b/a

d) Ninguna anterior es correcta

416) Para a ,b ,n ∈ N y siendo a múltiplo de b

1) a es múltiplo de n b

2) b es divisor de n a

3) b es divisor de n a + z a

Por lo tanto:

a) 1 es verdadero

b) Solo 1 y 3 son verdaderas

c) Todas son verdaderas

d) Dos son falsas

417) Cuál de los 5 números relacionados abajo no es divisor de 10^{15}

a) 25 b) 50 c) 64 d) 75 e) 250

418) El número $m = 9481a$, donde a es la cifra de las unidades, es divisible por 15. El valor de a es:

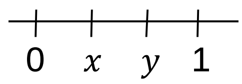
419) El producto de dos números enteros positivos, que no son primos entre s, es igual a 825. Entonces el MCD de esos dos números es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 11 e) 15

420) El resto de una división del entero n por 12 es 7. El resto de la división de n por 4 es:

421) Dividir un número por 0,0125 equivale a multiplicarlo por:

422) En la figura están representados geométricamente los números reales $0, x, y, 1$. Cuál es la posición del número $(x.y)$?



a) a la izquierda de 0

b) entre 0 y x

c) entre x e y

d) entre y e 1

e) a la derecha de 1

423) Una tela de $80cm$ de ancho se encoje el 10 % de largo y ancho al lavarla. ¿Cuánto debe comprarse para que una vez lavada el área sea de $18{,}75\ m^2$

424) La proposición incorrecta es:

a) Todo número natural es entero

b) A un número racional se lo representa por Q.

c) 2,999…… es un número natural

d) El cero no es un número natural

425) Si $A = \sqrt[3]{-\dfrac{512}{345}}$; $B = 0{,}3999\ldots$ y $C = \sqrt{-2}$

Se puede decir que: a) A y B son racionales

b) A y C son imaginarias

c) A , B , C son reales

d) B y C son complejas

426) El producto de un número par por otro impar es:

a) Divisible por 2

b) Divisible por 3

c) Divisible por 1

d) Dos de las anteriores son correctas

e) Una de las anteriores (a , b , c) es correcta

427) Todo número es divisible por 8 si:

a) Es múltiplo de 16

b) Es múltiplo de 4

c) Es divisor de 8

d) Es divisor de 4

428) Si n es múltiplo de 12

a) $3n + 2n$ es múltiplo de 12

b) $3n - 2n$ es múltiplo de 12

c) $4\,n$ es múltiplo de 24

d) Todas las anteriores son correctas

e) Solo 2 de las anteriores (a, b, c) son correctas

429) Marcar la afirmación correcta:

a) El MCD de a y b divide $a\,(a + b)$

b) El MCM de a y b es múltiplo del MCD

c) Si a y b se dividen por su MCD los cocientes son primos

d) Dos de las anteriores son correctas

430) La suma entre el MCD y el MCM de dos números es 483 y el producto entre los números es 9.702. ¿Calcular el MCD?

431) Cuál es el porcentaje de ganancia en la venta de un objeto si se vendió al precio de costo más su 150%?

432) Un comerciante promociona un producto regalando 1 por cada 3 que se compra. Entonces el descuento porcentual por unidad es:

a) 75% b) 25% c) 8,3% d) 6,25%

433) Al dividir cierto número por 162, 252 y 402 obtenemos siempre como resto 2. Determinar el mayor número que cumple esta condición. FUNDAMENTAR.

434) Para que n , $2n$, $2n + 1$ sean tres números enteros consecutivos, el valor de n debe ser:

435) En las siguientes pares de magnitudes marque: D = directamente proporcional
I = indirectamente proporcional
N = ninguna

a) Velocidad y tiempo (si el espacio no varía)

b) Número de obreros y tiempo (para realizar igual obra)

c) Numero de objetos y precio

d) Base y altura de un rectángulo

e) Obra realizada y tiempo (en igual número de obreros)

f) Volumen y capacidad

g) Velocidad y espacio (si el tiempo no varía)

h) Diámetro de una rueda de bicicleta y número de vueltas (misma distancia)

i) Peso de dos mesas de diferente tamaño

j) El tiempo y la unidad de trabajo realizadas

k) El número de cosas y el precio cuando se paga a razón del número

l) Los días de trabajo y las horas diarias que se trabajan

m) Número de obreros empleados y el trabajo realizado

n) Trabajo realizado por un grupo y la dificultad del trabajo

o) Experiencia de un obrero en una tarea y el tiempo empleado en hacer la misma tarea.

436) La alternativa falsa es:

a) El conjunto de divisores de un número es un conjunto infinito

b) El MCM es, en general, un número mayor o igual al mayor de los números dados.

c) Dos o más números son primos entre sí, si el MCD entre ellos es cero.

d) Cualquier número natural es divisible por sí mismo y por la unidad

e) Si $m \in N$ y $n \in N$ se cumple $m \cdot n = \text{MCD}(m, n) \cdot \text{MCM}(m, n)$

437) De las siguientes afirmaciones la incorrecta es :

a) Un número es divisible por 32 si lo es por 4 y 8

b) Un número es divisible por 4 y 8 si lo es por 32

c) EL cuadrado de un número impar es impar

d) Si m y n son números naturales, a es divisor de $(m\,a + n\,a)$

e) Dos de las anteriores son incorrectas

438) La expresión $\sqrt{x\,y}$ es un número racional si:

a) $x = \dfrac{0{,}04}{y}$ b) $x = 4\pi \quad y = \pi$ c) $x = -y$ d) $x = 9\,y$ e) $\dfrac{x}{y} = y$

439) Un grupo de a operarios termina un camino de 1km en b días.

Otro grupo de c operarios de la misma actividad o rendimiento lo habría terminado en

a) $\frac{a\,b\,s}{c}$ b) $\frac{(a+b)s}{c}$ c) $\frac{b\,c}{a}$ d) $\frac{a\,b}{c}$ e) $\frac{a\,c}{b}$

440) Si n litros de aceite valen a guaraníes, entonces $3n/4$ litros valen

a) 0,75a b) $\frac{3\,a\,n}{4}$ c) $\frac{4\,a\,n}{3}$ d) $\frac{3\,a}{4\,n}$ e) $\frac{3\,n}{4\,a}$

441) El precio de cierto alambre es proporcional al doble de su largo e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su sección transversal. Una persona compro 5 m de alambre de 4 $m\,m^2$ de sección por lo que pago 30.000 gs.

Otra persona compro 12 m de 2,25 $m\,m^2$ de sección.
¿Cuánto pago la última?

442) Dos tractores juntos pueden arar un potero en 15horas.

El tiempo que necesita cada uno si lo hiciera solo, sabiendo que el primero es tres veces más rápido que el segundo, es respectivamente:

443) Si $n \in$ I N, entonces la suma del inverso multiplicado de "n" con el inverso aditivo de "n" es:

a) 0 b) 1 c) $1 - n^2$ d) $\frac{(n+1)(1-n)}{n}$ e) $\frac{n^2+1}{n}$

444) Un avión demora "m" horas, "n" minutos y "p" segundos para trasladarse entre 2 ciudades. Por lo tanto el total de segundos que demoro es:

445) La operación $a - b$ es posible en los números naturales solo cuando:

a) $a = b$ b) $a > b$ c) $a <= b$ d) $a >= b$ e) Siempre

446) La afirmación correcta es:

a) El cero no es un número complejo

b) La diferencia entre dos números siempre es un número entero

c) Los números negativos son irracionales

d) $c = \{ x / x = a + bi \; ; \; a \in R \; ; \; b \in R \; ; \; i = \sqrt{-1} \}$

447) El conjunto de los números racionales está dado por:

a) $\{x / x = \frac{a}{b};\ a \in Z;\ b \in Z;\ b \neq 0\}$

b) $\{x / x = \frac{a}{b};\ a \in Z;\ b \in Z;\ a \neq 0\}$

c) $\{x / x = \frac{a}{b};\ a \in N;\ b \in N;\ a \neq 0\}$

d) $\{x / x = \frac{a}{b};\ a \in N;\ b \in N;\ b \neq 0\}$

e) $\{x / x = \frac{a}{b};\ a \in Z;\ b \in N;\ b \neq 0\}$

448) De las siguientes relaciones:

1) $Z \subset Q$

2) $C \subset bi$

3) $R \subset Q$

Son correctas:

a) Solo 1

b) Solo 1 y 2

c) Solo 3

d) Solo 2

e) Solo 1 y 3

449) $\frac{9}{4}$ es una fracción:

a) Común y propia

b) Decimal y propia

c) Común y decimal

d) Común e impropia

e) Mixta

450) Un comerciante compre jabón fresco, lo vendió, después de seco a 17,70gs el kg y gano 1/5 del precio de compra del Kg. de jabón fresco. ¿Cuál es el precio de compra del kg, sabiendo que el jabón, al secarse pierde 1/10 se su peso?

451) Cuál es el menor número no divisible por 3, 5, 6 y 10, que al dividirlos por estos se obtienen restos iguales.

452) Respecto a la radicación y potenciación es correcto o falso:

a) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c) $\sqrt[n]{a\,b} = (a\,b)^{-n}$

d) $a\,b = \left(\sqrt[c]{a\,b}\right)^{c}$

e) $(a+b)^n = a^n + b^n$

f) $(a^n b^n) = (a\,b)^n$

g) $(a^n)^n = a^{n+n}$

h) la potenciación es distributiva respecto a la suma

i) un número negativo no tiene raíz

j) $a + b = \sqrt{a+b}\,\sqrt{a+b}$

k) $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{-\frac{n}{m}} = a$

l) $\left[\dfrac{1000\,\pi\,\cos 45°}{87 \times \log(x^2+40)}\right] = 1$

m) $\sqrt[x^2+1]{(x+1)^{x^2+1}} = x+1$

453) Un número de dos cifras satisface las condiciones siguientes:

El numero dividido entre el digito de las unidades es igual al digito de las unidades. Además el digito de las decenas es igual a la mitad del digito de las unidades.
Encontrar el número.

454) Un caballo y su silla han costado 2.100.000gs. Sabiendo que el precio de la silla es 40% del precio del caballo. Cuanto costo el caballo?

455) Si “n” es un número natural mayor que 1, la expresión: $\sqrt[n]{\dfrac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$ es:

a) $\frac{4}{n}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}n$ d) $\sqrt[n]{2n+1}$

456) Un cierto número de alumnos hacia una prueba en una sala.

En un momento dado, se retiran 15 mujeres, quedando el número de varones igual al doble del número de mujeres.
En seguida, se retiran 31 varones, quedando en la sala igual número de mujeres y varones. El total de alumnos que hacia la prueba era:

457) De las siguientes afirmaciones:

I) $a^2 + b^2 = (a - b)^2$
II) $(a - b)^2 = (b - a)^2$
III) $a - b = \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$

La afirmación correcta es:

a) Las tres son correctas
b) Solo el II es correcta
c) Solo el III es correcta
d) Solo II y III son correctas
e) Ninguna es correcta

458) En un tonel de forma cilíndrica, está depositado una cantidad de vino que ocupa la mitad de su capacidad.

Retirando 40 ℓ de su contenido, la altura del nivel de vino baja 1/5.
Calcular la capacidad del tonel.

459) Dividiendo el numero x por el y, se obtiene como cociente 1 y resto 5. Si el a) El mcm entre dos números primos entre si es un numero primo

Cuádruplo de y dividido por x da cociente 2 y resto 8. Calcular x e y.

460) El número 518 es divisible por 37. El próximo número natural divisible por 37 es:

El MCM de un numero compuesto y 17 es 1394

461) El próximo número natural divisible por 17 es:

462) Los menores números naturales que debemos adicionar y substraer a 906 para obtener números divisibles por 11 es:

a) Se adiciona 7 y se substrae 4
b) se adiciona 14 y se substrae 7
c) Se adiciona 5 y se substrae 3
d) se adiciona 3 y se substrae 5
e) No se adiciona ni se substrae nada

463) Considere el número 2076. Invirtiendo la posición de apenas dos de sus cifras, obtendremos un número divisible al mismo tiempo por 5 y 10. Ese número es:

a) 2760 b) 7620 c) 6720 d) 2670 e) 7260

464) Después del número 1000, el menor número divisible al mismo tiempo por 2, por 3 y por 5 es:

a) 1002 b) 1003 c) 1005 d) 1020 e) 1010

465) El mayor número por el cual debemos dividir, los números 216 y 169 para obtener los restos 6 y 1 respectivamente:

466) En Las siguientes afirmaciones, marcar falso o verdadero y fundamentar:

a) EL MCM entre dos números primos entre sí es un número primo.
b) El producto del MCM y el MCD de dos números es múltiplo de cualquier divisor de los números.
c) El MCD entre dos números primos es la unidad
d) No siempre el MCM de dos o más números es mayor que ellos
e) El MCD de dos números divide al menor de los números
f) Todo divisor de un número divide el múltiplo del número
g) El MCD de dos números divide a su MCM
h) Dos números son primos entre sí, si solo son divisibles por sí mismos y por la unidad.
i) Los números racionales derivan de las operaciones con radicales
j) No todos los números pares son compuestos.
k) $\sqrt[3]{-a}$ es imaginario si $a \in R$
l) Un número mixto es una forma de expresar un quebrado propio.
m) Si 11 es factor de 209 , y 2.090 es múltiplo de 209. Entonces el primero es factor de 2.090.
n) Para que dos números sean primos entre si necesariamente deben ser primo
o) Un número compuesto es divisible por 2
p) Todo número compuesto debe tener por lo menos dos factores primos mayores que 1
q) cá es un sub. Múltiplo de área
r) Regla de tres es una operación que tiene por objeto igualar dos razones
s) División entera es cuando el cociente es un número entero y el resto cero.
t) Los divisores de 14 que no son divisores de 356 son 2 y 14
u) Los divisores de 35 que no son divisores de 14 son 5 y 35
v) El número 101 es primo
w) El número 111102 es divisible por 3
x) Todo número primo es impar
y) El MCD de 13 y 39 es 13

467) Un cierto planeta posee satélites naturales: Luna A y Luna B.

El planeta gira en torno al sol y los satélites en torno al planeta, de forma que el alineamiento SOL – PLANETA – LUNA A ocurre cada 18 años y el alineamiento SOL – PLANETA – LUNA B ocurre cada 48 años.

Si este año en que estamos ocurre el alineamiento SOL – PLANETA – LUNA A – LUNA B.

¿Cuándo volverá a ocurrir dicho fenómeno?

468) Una librería vende 297 libros de Ciencias y 483 libros de Matemáticas.
Esos libros deben ser embalados en cajas de forma que todas ellas contengan la misma cantidad de libros y no sobren libros.
¿Cuántos libros deberá ir en cada cajas? ¿Cuántas cajas serán necesarias?

469) Si la fracción irreducible $\frac{a}{b}$, la dividimos por su inversa y extraemos la raíz cuadrada de el cociente, la fracción que resulta es siempre igual a :

a) La primitiva
b) La unidad
c) No está definida
d) Un quebrado propio
e) Un quebrado impropio

470) Si el numero X divide a "Y" y a "Z" entonces son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones:

a) X divide a $(Y + Z)$
b) X divide a los múltiplos de $(Y + Z)$
c) X divide a $n\,Y$ siendo n cualquier número natural
d) X divide a $(Y - Z)$ siendo $Y > Z$
e) X divide a Y^n siendo n un número mayor que cero.
f) X no divide a $(X + Y + Z)^n$, siendo $n \in N$ y $n \neq 0$

471) Sí "a" divide a "b" pero no divide a "c" entonces son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones:

a) a divide a $(a + b)$
b) a divide a (bc)
c) a no divide $ab - c$..........siendo $b > c$
d) a puede dividir a $(b + c)^n$
e) a puede dividir a $[(b + c).n]$, si n es múltiplo de a

472) Si en la división $\frac{D}{d}$ tenemos que el residuo es mayor que cero, entonces son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones.

a) Si K divide a D, divide a r
b) Si K divide a d, divide a r
c) Si K divide a d y r, divide a d
d) Si K divide a D y d divide a r
e) Si K divide a d y r, divide a D

f) Si K divide a d y c divide a r

473) Analizar las siguientes afirmaciones si son falsas o verdaderas:

a) Una razón queda multiplicada, multiplicando su antecedente.

b) No se altera una razón dividiendo sus dos términos por un número

c) El antecedente es igual al producto del consecuente por la razón

d) Si un número es múltiplo de dos o más números, entonces siempre dicho número es el MCM.

e) Cuando un número es divisible por otro, el mayor de ellos es el MCM y el menor es el MCD

f) El producto de dos números es igual al producto de MCD y el MCM de esos números.

g) El MCM de dos números m y n es divisor de los múltiplos comunes de m y n.

h) Si "c" es el MCM de "a" y "b", entonces "c" es mayor o igual que el mayor entre a y b.

i) Si el cociente de una división es 1, el dividendo es igual al divisor.

j) Si el cociente de una división es cero, el dividendo es cero.

k) En una división el dividendo nunca puede ser igual a cero.

l) El resto de una división entera es siempre menor que el divisor

m) El producto de de la suma de dos números por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo.

n) El cociente de dividir dos números pares es siempre otro número par.

o) Todo número elevado a una potencia da siempre otro número par

p) El conjunto de divisores de un número es finito.

q) El conjunto de múltiplos de un número es finito.

r) Dos números tienen infinitos divisores comunes.

s) La suma de dos números primos es siempre par (analizar y justificar)

t) La diferencia de dos números impares consecutivos es siempre par

u) La suma de un número primo cualquiera con un número par es siempre un número par

v) Dos números enteros consecutivos son siempre primos entre si

w) La diferencia de dos números impares es siempre divisible por 2

x) El único número primo par es 2

y) Si la división de dos números pares es inexacta, el residuo será siempre impar

474) Si a es un número primo y $b = 2a$ entonces podemos afirmar:

a) Los únicos divisores de b son 2 y a

b) Los únicos divisores de a son 1, a y b

c) Los únicos divisores de b son 1 , 2 , a , b

475) Si a , b y c son primos relativos, entonces podemos asegurar:

a) a es primo con b

b) a , b y c son primos absolutos

c) a , b y c son primos de a dos

d) b y c son primos entre si

e) El MCD de a y b es 1

f) a no divide a b

g) El producto de $(a\ b)$ es divisible solamente por a y b

h) El número de divisores de a y b es 4

476) En las siguientes afirmaciones marcar con (F) o (V)

a) Si MCD $(a\ ,b) = z$ entonces MCD$(2a, 2b) = 2z$

b) Si x divide a los números b , c y d entonces divide a MCD(b, c, d)

c) Si MCD$(a, b, c) = z$ entonces a/z ; b/z y c/z son primos entre si

d) Si MCD$(a, b) = z$ y MCM$(a\ b) = y$ entonces $ab = yz$

e) Si $a = x^2.y$; $b = x\ y^2$ entonces MCD$(a\ ,b) = x\ y$

477) A partir de $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ marcar la opción (F) o (V):

a) $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b}$

b) $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b\ +\ d}{b-d}$

c) $\dfrac{a+d}{b+c} = \dfrac{a-\ d}{b-c}$

d) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

e) $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{c}{d}$

f) $\dfrac{\sqrt{a\ c}}{\sqrt{b\ d}} = \dfrac{c}{d}$

g) $\dfrac{2\ a\ +\ 3c}{2b\ +\ 3d} = \dfrac{a}{b}$

EJERCICIOS DE OMAPA

478) Una máquina trituradora de fracciones hace lo siguiente: Si una fracción F entra a la máquina, lo procesa y sale una nueva fracción $\frac{1-f}{1+f}$. Por ejemplo, entra $\frac{1}{2}$ y sale $\frac{1}{3}$ Ahora bien, si entra $\frac{2}{3}$ a la máquina, y si la fracción entra nuevamente y esta se sigue procesando hasta completar 1.000 procesos.

¿Cuál es la fracción que sale al final?

479) En una chapa se perforan 10 agujeros de $2\ cm$ de radio cada uno.

Por esos agujeros puede pasar cierta cantidad de agua.
Determinar el radio de otra perforación circular única que deja pasar la misma cantidad de agua. (Suponer la velocidad del agua homogénea e igual en todos los agujeros)

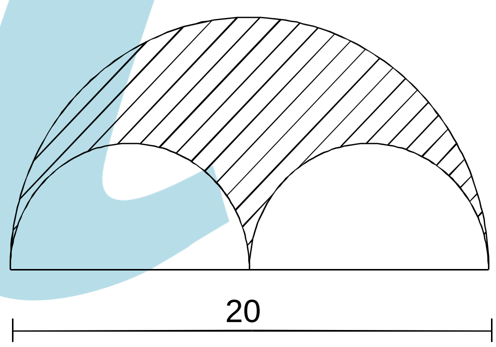
480) Si consideramos un reloj que funciona correctamente, ¿en cuántas posiciones coinciden las agujas del horario y el minutero?

481) Sí $4\,m = 3\,n$; entonces $7\,m$ es igual a:

a) $21\,n$ b) $\frac{21\,n}{2}$ c) $\frac{21}{9}$ d) $\frac{42}{3}$ e) $4\,n$ f) ninguna

482) El perímetro de la región sombrada es :

a) $10\,\pi$
b) $15\,\pi$
c) $20\,\pi$
d) $30\,\pi$
e) $40\,\pi$
f) ninguna de las anteriores



483) Con una lupa se aumenta 4 veces el objeto que se observa.
Si con esa lupa se observa un ángulo de 2º
¿Con que medida se ve el ángulo?

484) ¿Cuál es menor número por el que se debe multiplicar 54.600 para que el resultado tenga raíz cuadrada exacta?

485) Determinar cuál es la cifra de las unidades de $9^{99} + 99$

486) En un colegio hay un grado con 100 alumnos, entre los que hay castaños y rubios. El 10% de los castaños habían queridos ser rubios, el 10% de los niños rubios habían queridos ser castaños.

Los demás están contentos como son. Realizada una encuesta, resulta que el 74% del total estarían contentos de ser castaños. ¿Cuántos alumnos son castaños y cuántos son rubios?

487) En una carrera de motocicletas se inscribieron 9 corredores.

El que tenía asignado el numero 1 no pudo correr, los otros llegaron a la recta.
La suma de los números de los 3 primeros es igual a la suma de los 2 números de todos los otros corredores.
De los 3 ganadores, el que tenía el número más alto llego tercero el segundo tenía el numero siguiente al del ganador.
¿Qué números tenían los corredores que ocuparon los tres primeros lugares?

488) Juan y Pedro deciden jugar algo entretenido. El juego consiste en buscar números de tres cifras que sean divisibles al mismo tiempo por 15 y 21. Juan encontró todos los números posibles ¿Cuáles son los números que encontró Juan?

489) Juan hace los $\frac{2}{5}$ de un trabajo y Luis hace el 20% de los que resta. Lo que falta hacer del trabajo es en porcentaje:

490) Cuál de los siguientes números es el más grande:

a) 2^{12} b) 4^{12} c) 8^{11} d) 16^{8} e) 32^{6} f) 2^{14}

491) Encontrar los 4 menores números, de 4 cifras, que cumplen la siguiente condición: al dividirlo por 2 , 3 , 4 , 5 o 6 el resto es 1.

492) Había un pastor que no sabía contar hasta 10 y que tenía a su cargo un rebaño numeroso. Para saber si no le faltaba ni una oveja, invento un sistema que lo ponía en práctica todos los días al caer la tarde.

Agrupaba a sus animales de 2 en 2 , de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6. En todos los casos le sobraba una oveja.
Entonces un amigo le dijo que si los agrupaba de siete en siete no sobraría ni una oveja.
¿De cuantas ovejas era el rebaño si se sabe que el número de ovejas está entre 1.000 y 2.000?

493) Se tiene 8 monedas aparentemente iguales, pero una de ellas es falsa y pesa menos que las otras.

Con una balanza de dos platillos, cual es el menor número de pesadas que deben hacerse para hallar la moneda falsa?

494) La suma de $A + B$ es igual a 116. A es 3 menos que C, pero 4 más que B ¿Qué número es igual a C?

495) Un campesino tiene 5 panes y otro 3. Se encuentran con un cazador y entre los 3 comen, por parte iguales, los 8 panes.

El cazador paga a los campesinos 8.000gs ¿Cómo deben repartirse de manera que la distribución del dinero sea proporcional a la cantidad de pan que aporto cada campesino al cazador?

496) Hay una jarra que contiene 2 litros de vino y un cubo que contiene 2 litros de agua.

Se saca medio litro de vino de la jarra y se vacía en el agua y se agita para que la mezcla sea completa. Entonces se saca medio litro de la mezcla de agua y vino del cubo y se vacía de nuevo en la jarra de vino. Calcular el porcentaje de vino en la jarra y el porcentaje de agua en el cubo al finalizar estas mezclas.

497) Se tenían dos salones: Uno a alumbrado con 48 lámparas y el otro a oscuras.

Se apagaron 4 lámparas del primer salón y se encendieron 2 en el segundo, y se repitió la misma operación hasta que los dos salones resultaron con el mismo número de lámparas encendidas. ¿Qué número era este?

498) La suma de tres números múltiplos de 7 consecutivos es 63. El número mayor es:

499) 242 y 14 son el dividendo y el divisor de una división indicada. Si se aumentan 28 unidades al divisor, en cuanto tiene que aumentar el dividendo para que no varíe el cociente ni el resto?

500) ¿Son primos entre sí dos números enteros consecutivos?
¿Y dos enteros pares consecutivos?
¿Y dos enteros impares consecutivos?

501) Encontrar todos los números menores que 100 que sean divisibles por 3 y tales que el producto de sus cifras sea 24.

502) Se escribe la siguiente lista de números siguiendo cierta regla de formación:

21 – 24 – 22 – 25 – 23 – 26 – 24 – 27 – 25 – 28 – 26 –……….
Determinar el número que ocupa el lugar 2004 en la lista

503) Determinar el digito de las unidades del siguiente producto: $3^{2003}.7^{2004}.13^{2005}$

504) En el club "Los estudiantes" la relación entre la cantidad de varones y de mujeres es de 8 a 7.
El promedio de las edades de los varones es 21 y el promedio de las edades de las mujeres es 27.
Hallar el promedio de las edades de todos los integrantes del club.

505) Un número N se divide por 4 y se obtiene 9 de cociente y 1 de residuo.

Si N se divide por A se obtiene 5 de cociente y 2 de residuo.
¿Cuál es el valor de A?

506) El producto de dos números enteros A y B es 2004. Se sabe que A es múltiplo de 3. ¿Cuál es el mayor valor posible de A?

507) Un número entero N se divide entre 5 obteniéndose como cociente 8 y como residuo 3. ¿Qué número debemos restarle a N para que al dividir el nuevo número entre 5 se intercambien el cociente y el residuo de la primera división?

508) La profesora de matemática realiza una competencia entre los 30 alumnos.

La prueba es de 70 puntos y el promedio de los puntajes obtenidos por todos los alumnos es de 68.
¿Cuál es el menor porcentaje que puede tener uno de sus alumnos?

509) Fernando busca un número entero positivo de dos dígitos, tal que al sumarle el número que resulta de invertir sus cifras, obtiene un cuadrado perfecto.

¿Cuál es el mayor número que puede encontrar?

510) Se escriben todos los números de 3 dígitos, tales que la suma de los tres sea 3. Calcular la suma de todos los números

511) En un polígono de 2005 lados, uno de los vértices se denomina A. Determinar la cantidad de diagonales que se puede trazar desde el vértice A.

512) En un grupo de 270 alumnos

- 15 practicaban fútbol, ciclismo y natación.
- 27 practicaban fútbol y ciclismo
- 38 practicaban ciclismo y natación
- 27 practicaban fútbol y natación.
- 74 practicaban fútbol
- 90 practicaban ciclismo
- 88 practicaban natación

¿Cuántos alumnos no practican ningún deporte?

513) Un horno solar se alimenta con 25 células fotoeléctricas cuadradas de 2 cm de lado cada una. Se quiere reemplazar las 25 células por una sola célula cuadrada que recibe la misma cantidad de energía solar.

Determinar el lado que debe tener esta célula única

514) El valor de la expresión: $\dfrac{2005^2 + 2005}{2005 + 2005}$ es:

515) La suma del minuendo, sustraendo y diferencia de una substracción es 834. En otra substracción, esa suma es 766. Calcular la suma de los minuendos de ambas restas.

516) La asociación paraguaya de fútbol exige a un club, aumentar tanto el largo como el ancho de la cancha de juego en un 20% a los efectos de su habilitación. La superficie de la cancha aumenta en un porcentaje igual a:

517) El promedio de 5 números es 32,6. Se suma 1 al primer número, 2 al segundo y así sucesivamente hasta el quinto número. Calcular el nuevo promedio de los cinco números.

518) Se tienen 6 bolsas que contienen 18 , 19 , 21 , 23 , 25 y 34 bolitas respectivamente. En cinco de estas bolsas todas son blancas, en la otra todas son rojas. Luís toma tres bolsas de las que contienen bolsitas blancas. Enrique toma las otras dos bolsas de bolitas blancas. Al contar las bolitas que tiene cada uno, observan que Luís tiene el doble de bolitas que Enrique. ¿Cuántas bolitas rojas hay?

519) En la casa de Julián hay dos tanques de la misma capacidad que se usan para guardar agua. Julián y su hermana Raquel deben llevar los tanques y deciden hacerlo por separado, llevando un tanque cada uno. Julián usa un balde de 4 litros, lo carga varias veces hasta el borde, y sin derramar nada, lo vierte en el tanque que le corresponde. La última vez que lo hace, le sobran en el balde 3 litros de agua.
Raquel hace lo mismo, pero usa un balde de 5 litros y la última vez que lo hace le sobran 2 litros. Si cada tanque tiene menos de 80litros. ¿Cuál es la máxima capacidad que puede tener el tanque?

520) En la expresión $t = \dfrac{8\,a + 1}{b}$, a , b , t son números enteros positivos siendo $b < 4$. Analizar y determinar lo valores de a y b que permiten obtener t en las condiciones establecidas.

521) Laura tenía un jardín rectangular de 8 m de ancho 10 m de largo. Si aumenta 2 m el ancho se su jardín y 2 m de largo. ¿En cuánto aumento la superficie total?

522) Luís, Mario y Raquel juegan a las cartas. Cada uno comienza a jugar con la misma cantidad de dinero. El que gana un juego lleva los $1/4$ del dinero que tiene cada uno de los otros dos jugadores. Mario gana el primer juego, Luís gana el segundo y Raquel gana el tercero. Al ganar el tercer juego Raquel tiene 1.500gs.
Determinar con cuánto dinero comenzaron a jugar cada uno de los tres.

523) El señor Pérez tiene una parrilla pequeña, en la cual se pueden preparar solo dos bifes a la vez. Tanto su esposa como su hija esperan ansiosamente el almuerzo. Sabiendo que el tiempo de cocción de un lado de cada bife es de 10 minutos. ¿Cómo el señor Pérez debe preparar 3 bifes para que puedan cocinarlos de ambos lados y hacerlo en el menor tiempo posible? ¿En cuánto tiempo estarán listos los 3 bifes?

524) Determinar cuántos 9 hay en la suma del menor número de 2.000 cifras con el mayor número de 2.000 cifras.

525) Sobre una ruta, cada $4\,km$ hay una parada de ómnibus, cada $5\,km$ un teléfono y cada $30\,km$ una estación de servicio. ¿En qué kilómetro hay una parada, un teléfono y una estación de servicio?

526) Un jugador de tenis debe ganar por lo menos 3/5 de todos sus partidos para clasificar para las finales. De 12 partidos solo gano el 50%. Si faltan aún 13 partidos.

¿Cuántos de estos debe ganar por lo menos para clasificar?

527) Si $4m = 3n$. Calcular cuánto vale $7m$.

528) María va todos los días caminando a la escuela. Ayer María camino 26 cuadras en total entre ida y vuelta. Si a la ida fue por el camino más corto, pero a la vuelta se desvió caminando 6 cuadras más. ¿Cuál es la distancia de la casa de María a la escuela?

529) En un recipiente de 200 litros, contiene una mezcle de leche natural y leche de soja, donde el 25% corresponde a leche natural.
¿Cuántos litros de leche de soja se deben agregar a la mezcla para que resulte un 20% de leche natural?

530) Un equipo de la oficina de Estadísticas realizo del censo de una ciudad. Si cada uno de ellos causa 100 viviendas, 60 no serían visitadas. Pero sin embargo, todas las viviendas de la ciudad fueron visitadas porque cada encuestador visito 102 viviendas.

¿Cuántas viviendas tiene la ciudad?

531) Un reloj fue corregido exactamente al mediodía. Determinar la hora en que la aguja menor ha recorrido un ángulo de 42 grados.

532) La razón entre el número de hombres y de mujeres que hablan inglés en una empresa es 3/2. Si el 24% de los empleados de esa empresa hablan inglés, determinar el porcentaje de mujeres que hablan inglés.

533) Tomas paga 10.000.000gs por la compra de un bote. Se lo vende a María con una ganancia de 10%. Después de un tiempo María le vende el bote a Tomas perdiendo el 10%. ¿Obtuvo Tomas ganancia o pérdida en la operación? ¿Cuánto dinero gano o perdió?

534) Dados los números A y B tales que:

$$-4 < A < -1$$

$$1 < B < 2$$

Determinar el intervalo de valores del producto $(A.B)$

535) Los dos sextos grados de una escuela dieron el mismo examen. El sexto A, con 20 alumnos, tiene una nota promedio de 16, mientras el sexto B, que tiene 30 alumnos, obtuvo una nota promedio de 14. Calcular el promedio de los dos sextos grados.

536) Una llave llena un tanque de agua de $2m$ de altura en 10 horas. Otra llave lo hace en 12 horas y una tercera en 15horas. Calcular la altura que alcanzara el agua, si estando vacío el tanque se abren las tres llaves juntas durante una hora.

537) Un depósito tiene una capacidad de 800litros. Un tubo que arroja 10 litros de agua por minuto es abierto durante una hora y otro que arroja 20 litros por minuto se abre durante 5 minutos. Calcular cuántos litros de agua faltan para llenar el tanque.

538) Si se cuentan de dos en dos los caramelos de una bolsa sobra 1 caramelo. Los mismo pasa si se cuentan de 3 en 3, de 5 en 5 o de 7 en 7. Determinar la menor cantidad posible de caramelos que puede tener la bolsa.

539) La base de un triángulo se aumenta en un 10% y la altura se disminuye en un 10%. Determinar el cambio porcentual de área del triángulo.

540) Se quiere alambrar un terreno de forma trapezoidal cuyos lados miden 140 m, 133 m, 210 m y 182m, y se desea que los postes, colocados en el perímetro equidisten y estén uno del otro a la mayor distancia posible. Además en cada vértice debe haber un poste. Calcular cuántos postes se necesitan.

541) ¿De cuantas maneras se puede cambiar un billete de 50.000gs sin utilizar monedas?

542) Determinar dos enteros positivos A y B, tales que se su suma es 81 y su mínimo común múltiplo 180.

543) Se hacen dos descuentos sucesivos de 10% y del 20% sobre el precio de una mercadería.

Determinar el porcentaje que corresponde a un descuento único.

544) Un diamante de 2 quilates vale 1.600U$S. El valor del diamante es proporcional al cuadrado del número de quilates. ¿Cuál será el precio de un diamante de 8 quilates?

545) Se ha determinado que la tasa de nacimiento de una especia de aves es inversamente proporcional al cuadrado del grado de contaminación del aire.

Se registraron 2.000 nacimientos cuando el grado de contaminación era de 0,006. Si hay un incremento de 0,04 en el grado de contaminación del aire ¿Cuántas aves nacerán?

546) Si $N = x\,y^2$. Si tanto x como y disminuyen en un 25% ¿Cómo varia el valor de N?

547) Una persona sabe un secreto y se lo cuanta a 12 personas; a su vez, cada una de las 12 personas se los cuenta a otras 12 y cada una de estas a otra 12.

¿Cuántas personas saben el secreto?

548) La población de una colonia de bacterias se duplica dos veces cada día. Si en quince días se obtiene un cultivo con un millón de bacterias, determinar en cuantos días se podrá tener dos millones de bacterias.

549) Se tiene un conjunto de 24 tarjetas numeradas consecutivamente del 1 al 24. Se mezclan las tarjetas y se escoge una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de esta tarjeta sea divisible por 4 o por 6?

550) Una casa tiene en cada pieza un número par de puertas. Demostrar que debe tener necesariamente un número par de puertas hacia la calle.

551) Determinar la suma de la cifra de las unidades y la cifra de las decenas en número 11^{22}

552) Tenemos un rectángulo de $3m$ y $4m$. Al girar el rectángulo en al espacio alrededor de uno de los lados, obtendremos un cilindro. Se puede obtener dos cilindros diferentes. Determinar la relación entre estos volúmenes.

553) Se escribe un lista de números tales que al dividirlos por 3, 4 , 5 , 7 el resto es 2. Determinar los tres números que están en la lista.

554) Un muchacho dice “Tengo el mismo número de hermanos que de hermanas”, mientras que su hermana comenta ”Yo tengo dos veces más hermanos que hermanas”

Determinar la cantidad de varones y mujeres que hay en el grupo de hermanos.

Rta.: 4 varones ; 3 mujeres

555) En un número de 6 cifras, hay dos dígitos de 5, uno de ellos es las centenas y el otro en las centenas de mil. Determinar la diferencia entre los valores relativos de los dígitos 5.

556) Determinar a y b en la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 6\,a\,b\,3\,a \\ -\quad 6\,a\,a\,3 \\ \hline 5\,5\,a\,a\,8 \end{array}$$

557) Si $264 < x < 266$ y sabiendo que x es la suma de cinco números enteros consecutivos. Determinar esos números.