Schaum

MANUAL DE FÓRMULAS Y TABLAS MATEMÁTICAS

Murray R. Spiegel

- Trata temas elementales como álgebra, geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo.
- Contiene un conjunto de fórmulas y tablas matemáticas de gran utilidad práctica.
- Incluye definiciones, teoremas, gráficas y diagramas para la correcta comprensión y aplicación de las fórmulas.

McGraw-Hill

Utilizado por millones de estudiantes y recomendado por profesores de todo el mundo

MANUAL DE FORMULAS Y TABLAS MATEMATICAS

2 400 FORMULAS Y 60 TABLAS

MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.
Profesor de Matemáticas del
Rensselaer Polytechnic Znstitute

•

TRADUCCION Y ADAPTACIÓN

ORLANDO GUERRERO RIBERO
Químico de la Universidad de Alaska

•

McGRAW-HILL

MÉXICO. BUENOS AIRES . CARACAS . GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN
SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAN • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARíS • SAN FRANCISCO. SINGAPUR ,
ST. LOUIS • SIDNEY. TOKIO • TORONTO

MANUAL DE FÓRMULAS Y TABLAS MATEMÁTICAS

McGRAW-HILLIINTERAMERICANA DE MÉXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN:970-10-2095-2

Traducido de la primera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF MATHEMATICAL HANDBOOK OF FORMULAS AND TABLES

ISBN o-07-060224-7

1203456789 P.E-91 9076543216

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se termino de
Imprimir en Aaosto de 1998 en
Prógramas Educativos S. A. de C. V.
Calz. Chabacano No. 65-a Col. Asturias
Delegación Cuauhtémoc
C P. 06850 México, D. F
Empresa Certificada por el
Instituto Mexicano de Normalización
y Certificación A. C. bajo la Norma
ISO-9002: 1994/NMX-CC04: 1995
con el Núm. de Registro RSC-048

Se tiraron 1800 ejemplares

PROLOGO

El objeto de este manual es el de presentar un conjunto de fórmulas y tablas matemáticas que seguramente serán de valor para los estudiantes e investigadores en materias como las matemáticas, física, ingenieria y otras. Para cumplir este propósito, se ha tenido el cuidado de escoger aquellas fórmulas y tablas que puedan ser de mayor utilidad practica prescindiendo de las fórmulas altamente especializadas que raramente se emplean.

No se ha ahorrado esfuerzo para presentar los datos y fórmulas en forma precisa a la vez que concisa para que se puedan encontrar con la mayor confianza y facilidad.

Los temas tratados oscilan desde los elementales hasta los avanzados. Entre los temas elementales figuran el álgebra, la geometría, la trigonometría, la geometria analítica y el cálculo. Entre los temas avanzados, figuran las ecuaciones diferenciales, el análisis vectorial, las series de Fourier, las funciones gamma y beta, las funciones de Bessel y de Legendre, las transformadas de Fourier y de Laplace, las funciones elípticas y algunas otras funciones especiales importantes. Este amplio contenido de temas ha sido acogido con el fin de poder proporcionar, en un solo volumen, la mayor parte de los datos matemáticos importantes de utilidad para el estudiante o investigador, cualquiera que sea su área particular de interés o su nivel de aprendizaje.

Este libro está dividido en dos partes principales. En la parte 1 están contenidas las fórmulas matemáticas al tiempo que se tratan otros asuntos tales como definiciones, teoremas, gráficas diagramas, etc., que son esenciales para la correcta comprensión y aplicación de las fórmulas. En esta primera parte figuran además amplias tablas de integrales y transformadas de Laplace que pueden ser de gran valor para el estudiante o investigador. La parte II contiene tablas numéricas tales como los valores de las funciones elementales (trigonométricas, logaritmicas, exponenciales, hiperbólicas, etc.) así como también de las funciones de carácter avanzado (de Bessel, de Legendre, elípticas, etc.): Las tablas numéricas correspondientes a cada función se presentan por separado con el objeto de evitar confusiones, especialmente para el principiante en matemáticas. Así por ejemplo, las funciones seno y coseno para ángulos en grados y minutos se presentan en tablas separadas más bien que en una sola tabla, lo cual evita al estudiante el tener que preocuparse acerca de la posibilidad de incurrir en algún error por no buscar en la columna o fila apropiadas.

Deseo expresar mis agradecimientos a los diversos autores y editores por haberme otorgado el permiso de tomar datos de sus libros para emplearlos en varias de las tablas de este manual. Las referencias apropiadas aparecen junto con las tablas correspondientes. Me hallo especialmente agradecido del redactor, del extinto Sir Ronald A. Fisher, F. R. S., del Dr. Frank Yates, F. R. S., y de Oliver and Boyd Ltd., Edimburgo, por el permiso para emplear datos de la tabla III de su libro ***Statistical Tables for Biological, Agricultura1 and Medical Research.***

Deseo además expresar mi gratitud a Nicola Monti, Henry Hayden y Jack Margolin por su magnífica cooperación editorial.

M. R. SPIEGEL

TABLA DE MATERIAS

Parte I — FORMULAS

Parte II TABLAS

Parte I

FORMULAS

EL ALFABETO GRIEGO

Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	A
Epsilon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
MU	μ	M

Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Y
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

1 CONSTANTES NOTABLES

1.1 $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643\ldots$

1.2 $e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
= base de los logaritmos naturales

1.3 $\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35623\ 73095\ 0488\ldots$

1.4 $\sqrt{3} = 1{,}73205\ 08075\ 68877\ 2935\ldots$

1.5 $\sqrt{5} = 2{,}23606\ 79774\ 99789\ 6964\ldots$

1.6 $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ 1050\ldots$

1.7 $\sqrt[3]{3} = 1{,}44224\ 9570\ldots$

1.8 $\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 8355\ldots$

1.9 $\sqrt[5]{3} = 1{,}24573\ 0940\ldots$

1.10 $e^{\pi} = 23{,}14069\ 26327\ 79269\ 006\ldots$

1.11 $\pi^{e} = 22{,}45915\ 77183\ 61045\ 47342\ 715\ldots$

1.12 $e^{e} = 15{,}15426\ 22414\ 79264\ 190\ldots$

1.13 $\log_{10} 2 = 0{,}30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37389\ldots$

1.14 $\log_{10} 3 = 0{,}47712\ 12547\ 19662\ 43729\ 60279\ldots$

1.15 $\log_{10} e = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ldots$

1.16 $\log_{10} \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 12683\ldots$

1.17 $\log_e 10 = \ln 10 = 2{,}30258\ 50929\ 94046\ 68401\ 7991\ldots$

1.18 $\log_e 2 = \ln 2 = 0.69314\ 71805\ 59946\ 30941\ 7232\ldots$

1.19 $\log_e 3 = \ln 3 = 1{,}09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 5245\ldots$

1.20 $\gamma = 0.67721\ 66649\ 01532\ 86060\ 6512\ldots$ = constante *de Euler*

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

1.21 $e^{\gamma} = 1{,}78107\ 24179\ 90197\ 9852\ldots$ [véase 1.20]

1.22 $\sqrt{e} = 1{,}64872\ 12707\ 00128\ 1468\ldots$

1.23 $\sqrt{\pi} = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 8167\ldots$
donde Γ denota la *función* gamma [véanse las páginas 101-102].

1.24 $\Gamma(\tfrac{1}{3}) = 2.67893\ 85347\ 07748\ldots$

1.25 $\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 3{,}62560\ 99082\ 21908\ldots$

1.26 1 radián $= 180^\circ/\pi = 57{,}29577\ 95130\ 8232\ldots^\circ$

1.27 $1^\circ = \pi/180$ radianes $= 0{,}01745\ 32925\ 19943\ 2957\ldots$ radianes

2 PRODUCTOS Y FACTORES NOTABLES

2.1 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2.2 $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

2.3 $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

2.4 $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

2.5 $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

2.6 $(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

2.7 $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

2.8 $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

2.9 $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

2.10 $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

Los resultados anteriores constituyen casos especiales de' *la fórmula del binomio [véase* la página 3].

2.11 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

2.12 $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2.13 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

2.14 $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

2.15 $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

2.16 $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

2.17 $x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.18 $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.19 $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

A continuación se dan algunas formas generales de las factorizaciones anteriores, donde n representa un número entero positivo.

2.20
$$\begin{aligned} x^{2n+1} - y^{2n+1} &= (x - y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + y^{2n}) \\ &= (x - y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right) \\ &\quad \cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right) \end{aligned}$$

2.21
$$\begin{aligned} x^{2n+1} + y^{2n+1} &= (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + y^{2n}) \\ &= (x + y)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right) \\ &\quad \cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right) \end{aligned}$$

2.22
$$\begin{aligned} x^{2n} - y^{2n} &= (x - y)(x + y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots) \\ &= (x - y)(x + y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{n} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{n} + y^2\right) \\ &\quad \cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + y^2\right) \end{aligned}$$

2.23
$$\begin{aligned} x^{2n} + y^{2n} &= \left(x^2 + 2xy\cos\frac{\pi}{2n} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{3\pi}{2n} + y^2\right) \\ &\quad \cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2\right) \end{aligned}$$

3 LA FÓRMULA DEL BINOMIO Y COEFICIENTES BINOMIALES

FACTORIAL DE n

Si $n = 1, 2, 3, \ldots$ *el factorial de* n *se* define así

3.1 $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

Por otra parte, el *factorial de cero se* define así

3.2 $$0! = 1$$

FÓRMULA DEL BINOMIO PARA n ENTERO POSITIVO

Si $n = 1, 2, 3, \ldots$ entonces

3.3 $$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

El desarrollo anterior es llamado *fórmula del binomio. Se* pueden emplear otros valores de n y entonces tenemos una serie infinita [véase *series binomiales,* página 110].

COEFICIENTES BINOMIALES

La fórmula 3.3 se puede escribir también

3.4 $$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

donde los coeficientes, llamados *coeficientes binomiales,* están dados por

3.5 $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES

3.6 $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

La anterior expresión conduce al triángulo de Pascal [véase la página 236].

3.7 $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

3.8 $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

3.9 $$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

3.10 $$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$$

3.11 $$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

3.12 $$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

3.13 $$\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$$

3.14 $$(1)\binom{n}{1} + (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} + \cdots + (n)\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

3.15 $$(1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - \cdots (-1)^{n+1}(n)\binom{n}{n} = 0$$

FORMULA MULTINOMIAL

3.16 $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$$

donde la suma, Σ, comprende todos los enteros no negativos $n_1, n_2, \ldots, n_p$ para los cuales $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.

4 FORMULAS GEOMETRICAS

[illegible]

4.1 **Area** $= ab$

4.2 **Perímetro** $= 2a + 2b$

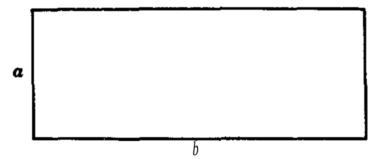


Fig. 4-1

[illegible]

4.3 **Area** $= bh = ab \operatorname{sen} \theta$

4.4 **Perímetro** $= 2a + 2b$

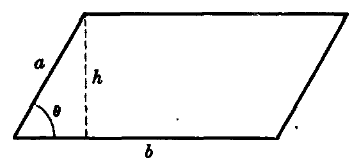


Fig. 4-3

TRIANGULO DE ALTURA h Y BASE b

4.5 **Area** $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ semiperímetro

4.6 **Perímetro** $= a + b + c$

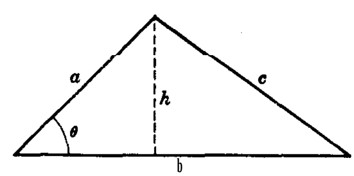


Fig. 4-3

TRAPECIO DE ALTURA h Y LADOS PARALELOS a Y b

4.7 **Area** $= \frac{1}{2}h(a+b)$

4.0 **Perímetro** $= a + b + h\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)$

$$= a + b + h(\csc\theta + \csc\phi)$$

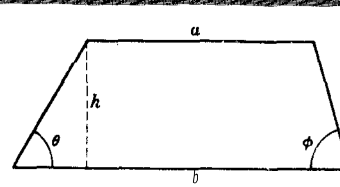


Fig. 4-4

POLIGONO REGULAR DE n LADOS IGUALES DE LONGITUD b

4.9 Area $= \frac{1}{4}nb^2 \cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2\frac{\cos(\pi/n)}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$

4.10 Perimetro = n b

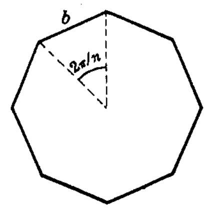


Fig. 4-5

CIRCULO DE RADIO r

4.11 Area $= \pi r^2$

4.12 Circunferencia $= 2\pi r$

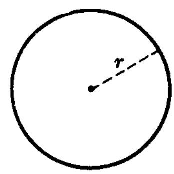


Fig. 4-6

SECTOR DE UN CIRCULO DE RADIO r

4.13 Area $= \frac{1}{2}r^2\theta$ (θ en radianes)

4.14 Longitud del arco $s = r\theta$

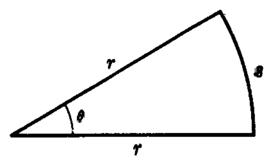


Fig. 4-7

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN UN TRIANGULO DE LADOS a, b, c

4.15 $$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ = semiperímetro

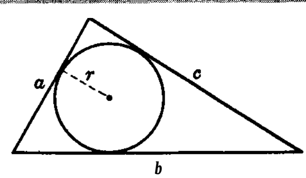


Fig. 4-8

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIANGULO DE LADOS a, b, c

4.16 $$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + 6 + c)$ = semiperímetro

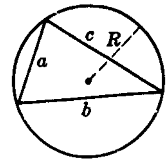


Fig. 4-9

POLIGONO REGULAR DE n LADOS INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r

4.17 **Area** $= \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\frac{360^\circ}{n}$

4.18 **Perímetro** $= 2nr \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2nr \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{n}$

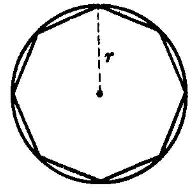


Fig. 4-10

POLIGONO REGULAR DE n LADOS CIRCUNSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r

4.19 **Area** $= nr^2 \tan\frac{\pi}{n} = nr^2 \tan\frac{180^\circ}{n}$

4.20 **Perímetro** $= 2nr \tan\frac{\pi}{n} = 2nr \tan\frac{180^\circ}{n}$

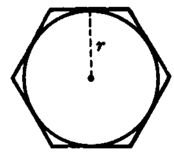


Fig. 4-11

SEGMENTO DE UN CIRCULO DE RADIO r

4.21 **Area de la zona sombreada** $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

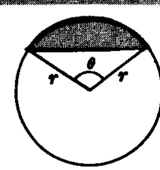


Fig. 4-12

ELIPSE DE SEMI-EJE MAYOR a Y SEMI-EJE MENOR b

4.22 **Area** $= \pi ab$

4.23 **Perímetro** $= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$

$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ **[aproximadamente]**

donde $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. **Véase las tablas numéricas de la página 254.**

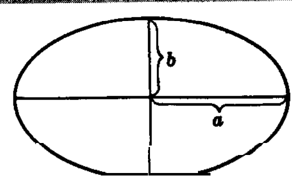


Fig. 4-13

SEGMENTO DE PARABOLA

4.24 **Area** $= \frac{2}{3}ab$

4.25 **Longitud del arco** ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a + \sqrt{b^2 + 16a^2}}{b}\right)$

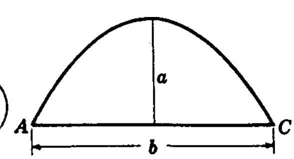


Fig. 4-14

PARALELEPIPEDO RECTANGULO DE LONGITUD a, ALTURA b, ANCHURA c

4.24 Volumen $= abc$

4.27 Area de la superficie $= 2(ab + ac + bc)$

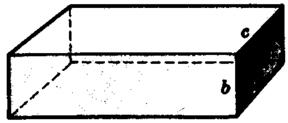


Fig. 4-15

PARALELEPIPEDO CON AREA A DE LA SECCION TRANSVERSAL Y h LA ALTURA

4.28 Volumen $= Ah = abc \operatorname{sen} e$

Fig. 4-16

ESFERA DE RADIO r

4.29 Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

4.30 Area de la superficie $= 4\pi r^2$

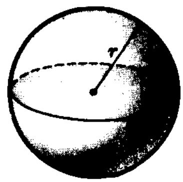


Fig. 4-17

CILINDRO CIRCULAR RECTO DE RADIO r Y ALTURA h

4.31 Volumen $= \pi r^2 h$

4.32 Area de la superficie lateral $= 2\pi r h$

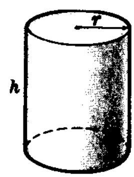


Fig. 4-16

CILINDRO CIRCULAR DE RADIO r Y ALTURA INCLINADA l

4.33 Volumen $= \pi r^2 l = \dfrac{\pi r^2 h}{\operatorname{sen}\theta} = \pi r^2 h \csc e$

4.34 Area de la superficie lateral $= 2\pi r l = \dfrac{2\pi r h}{\operatorname{sen}\theta} = 2\pi r h \csc e$

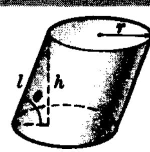


Fig. 4-19

CILINDRO DE AREA A DE SECCION TRANSVERSAL Y ALTURA [illegible]

4.35 Volumen $= AZ = \dfrac{Ah}{\operatorname{sen}\theta} = Ah \csc \theta$

4.34 Area de la superficie lateral $= pl = \dfrac{ph}{\operatorname{sen}\theta} = ph \csc \theta$

Obsérvese que las fórmulas 4.31 a 4.34 constituyeo casos especiales.

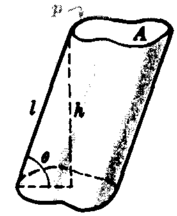


Fig. 4-20

CONO CIRCULAR RECTO DE RADIO r Y ALTURA h

4.37 Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

4.38 Area de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$

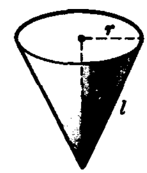


Fig. 4-21

PIRAMIDE DE AREA A DE LA BASE Y ALTURA h

4.39 Volumen $= \frac{1}{3}Ah$

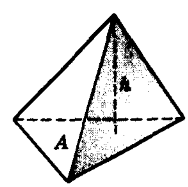


Fig. 4-22

CASQUETE ESFERICO DE RADIO r Y ALTURA h

4.40 Volumen (de la región sombreada) $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

4.41 Area de la superficie $= 2\pi r h$

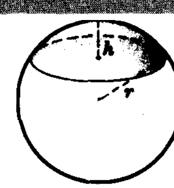


Fig. 4-23

TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO DE RADIOS a, b Y ALTURA h

4.42 volumen $= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

4.43 Area de la superficie lateral $= \pi(a + b)\sqrt{h^2 + (b - a)^2}$
$= \pi(a + b)l$

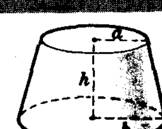


Fig. 4-44

TRIANGULO ESFERICO CON ANGULOS A, B, C SOBRE UNA ESFERA DE RADIO r

4.44 **Area del** triángulo $ABC = (A + B + C - \pi)r^2$

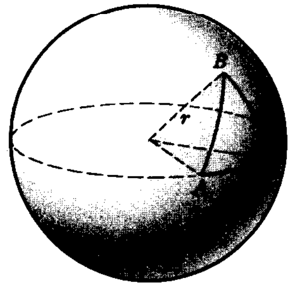


Fig. 4-25

TORO DE RADIO INTERIOR a Y RADIO EXTERIOR b

4.45 Volumen $= \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

4.44 **Area** de la superficie $= \pi^2(b^2 - a^2)$

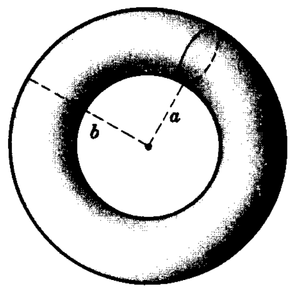


Fig. 4-26

ELIPSOIDE SE SEMI-EJES a, b, c

4.47 **Volumen** $= \frac{4}{3}\pi abc$

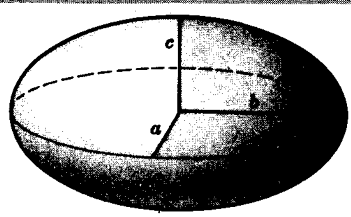


Fig. 4-27

PARABOLOIDE DE REVOLUCION

4.48 *Volumen* $= \frac{1}{2}\pi b^2 a$

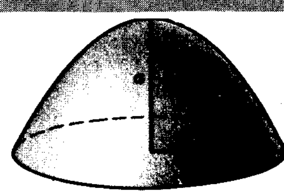


Fig. 4-28

5 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

DEFINICION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN TRIANGULO RECTANGULO

El triángulo ABC tiene un ángulo recto (90°) en C y lados de longitud a, b, c. Las funciones trigonométricas del ángulo A se definen de la siguiente manera:

5.1 $\quad$ *seno* de A = sen $A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

5.2 $\quad$ coseno de A = cos $A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

5.3 $\quad$ tangente de A = tan $A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

5.4 $\quad$ *cotangente* de A = cot $A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

5.5 $\quad$ *secante* de A = sec $A = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

5.6 $\quad$ *cosecante* de A = csc $A = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

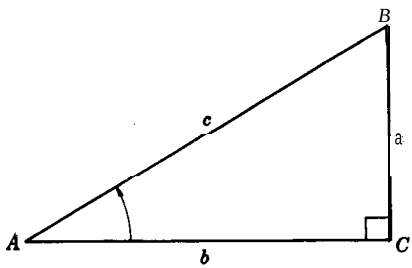


Fig. 5-1

EXTENSION DE LAS FUNCIONES PARA ANGULOS MAYORES DE 90°

Considérese un sistema de coordenadas xy (véanse las Fig. 5-2 y 5-3). Las coordenadas de un punto P en el plano xy son (x,y) con x positiva sobre OX y negativa sobre OX', y y positiva sobre OY y negativa sobre OY'. La distancia del punto P al origen O es positiva y se denota por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Un ángulo A formado a partir de OX en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj es considerado *positivo*. Si el ángulo se forma a partir de OX en el mismo sentido de dicho movimiento, entonces se considera *negativo*. Se llaman eje x y eje y a $X'OX$ y a Y'OY respectivamente.

Los diferentes cuadrantes, indicados con los números romanos I, II, III, IV, son llamados respectivamente, primero. segundo, tercero y cuarto cuadrantes. Por ejemplo, en la Fig. 5-2, el ángulo A está en el segundo cuadrante, mientras que en la Fig. 5-3 está en el tercero.

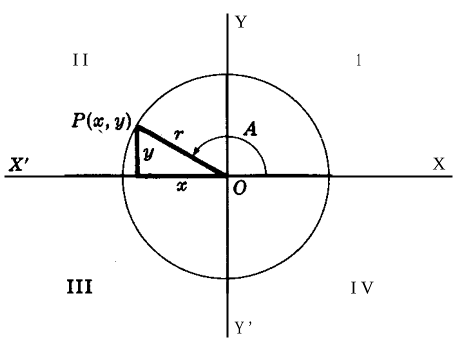


Fig. 5-2

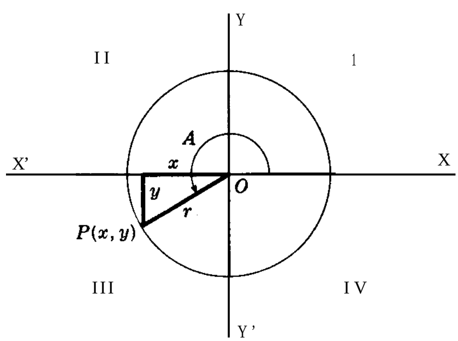


Fig. 5-3

Las funciones trigonométricas de un **ángulo** A de cualquier cuadrante se definen así

5.7 $\text{sen } A = y/r$

5.8 $\text{coa } A = x/r$

5.9 $\tan A = y/x$

5.10 $\cot A = x/y$

5.11 $\sec A = r/x$

5.12 $\csc A = r/y$

RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES

Un *radián* es aquel ángulo θ subtendido en el centro 0 de una circunferencia por un arco MN igual al radio r.

Como 2π radianes $= 360°$ tenemos que,

5.12 $1 \text{ radián} = 180°/\pi = 57{,}29577\ 95130\ 8232\ldots°$

5.14 $1° = \pi/180 \text{ radianes} = 0{,}1745\ 32925\ 19943\ 2957\ldots \text{radianes}$

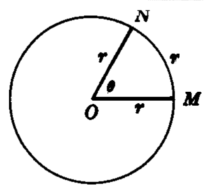


Fig.s-4

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

5.15 $\tan A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$

5.16 $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{\cos A}{\text{sen } A}$

5.17 $\sec A = \dfrac{1}{\text{coa } A}$

5.18 $\csc A = \dfrac{1}{\text{sen } A}$

5.19 $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

5.20 $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

5.21 $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$

SIGNOS E INTERVALOS DE VARIACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Cuadrante	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
I	+ 0 a 1	+ 1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	+ 1 a -	+ - a 1
II	+ 1 a 0	0 a -1	− - - a 0	0 a - -	− - - a -1	+ 1 a ∞
III	0 a -1	-1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	-1 a −∞	− −∞ a -1
IV	-1 a 0	+ 0 a 1	− −∞ a 0	0 a −∞	+ - a 1	− -1 a −∞

VALORES EXACTOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ALGUNOS ANGULOS

Angulo A en grados	Angulo A en radianes	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	al2	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	- 1	- 1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	3 '	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240”	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
270°	$3\pi/2$	- 1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	- 1	- 1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

Las tablas de las páginas 206-215 contienen los valores correspondientes a otros ángulos.

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En todas las gráficas x está dado en radianes

5.22 $y = \operatorname{sen} x$

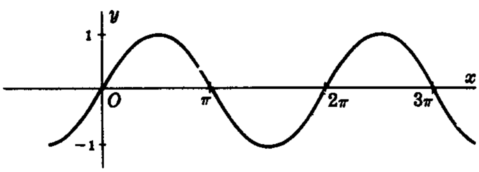


Fig. 5-5

5.23 $y = \cos x$

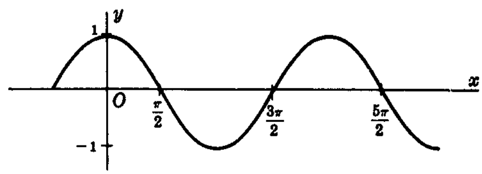


Fig. 5-6

5.24 $y = \tan x$

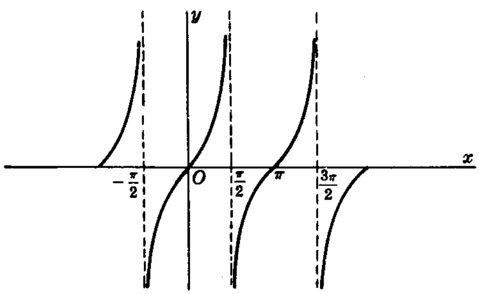


Fig. 5-7

5.25 $y = \cot x$

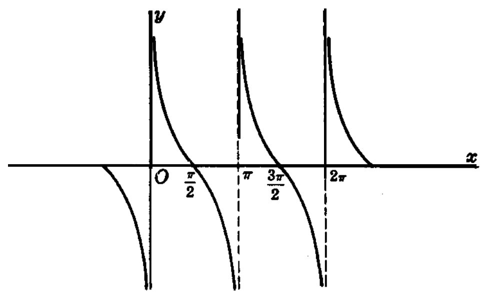


Fig. 5-8

5.26 $y = \sec x$

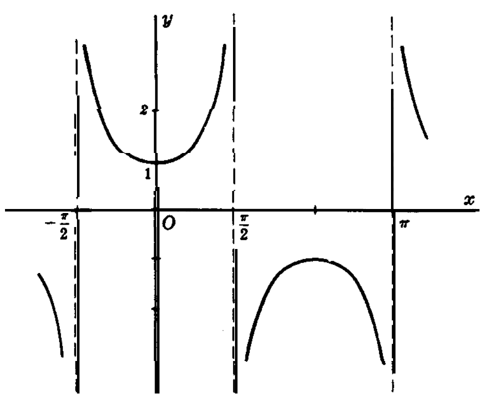


Fig. 5-9

5.27 $y = \csc x$

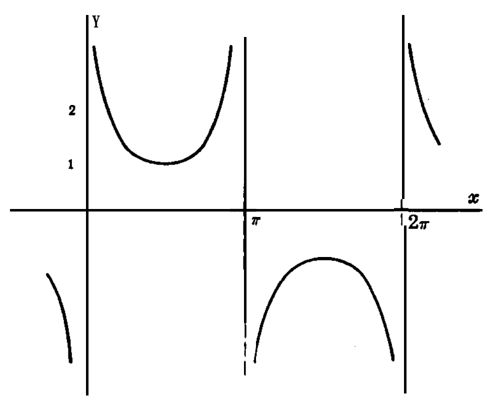


Fig. 5-10

FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS

5.28 $\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$

5.29 $\cos(-A) = \cos A$

5.30 $\tan(-A) = -\tan A$

5.31 $\csc(-A) = -\csc A$

5.32 $\sec(-A) = \sec A$

5.33 $\cot(-A) = -\cot A$

FORMULAS DE ADICION

5.34 $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

5.35 $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

5.36 $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

5.37 $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$

FUNCIONES DE ANGULOS DE CUALQUIER CUADRANTE REDUCIDOS AL PRIMER CUADRANTE

	$-A$	$90° \pm A$ $\frac{\pi}{2} \pm A$	$180° \pm A$ $\pi \pm A$	$270° \pm A$ $\frac{3\pi}{2} \pm A$	$k(360°) \pm A$ $2k\pi \pm A$ k = entero
sen	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$
cos	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$	$\cos A$
tan	$-\tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$
csc	$-\csc A$	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$
sec	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$	$\sec A$
cot	$-\cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES DE LOS ANGULOS DEL PRIMER CUADRANTE

	$\operatorname{sen} A = u$	$\cos A = u$	$\tan A = u$	$\cot A = u$	$\sec A = u$	$\csc A = u$
$\operatorname{sen} A$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	$1/u$
$\cos A$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$1/\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}/u$
$\tan A$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$1/\sqrt{u^2-1}$
$\cot A$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{u^2-1}$
$\sec A$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	u	$u/\sqrt{u^2-1}$
$\csc A$	$1/u$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	u

Para los otros cuadrantes úsense los signos apropiados según se indica en la tabla precedente.

FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

5.38 $$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

5.39 $$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$

5.40 $$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

FORMULAS DEL ANGULO MITAD

5.41 $$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o II cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el III o IV cuadrantes} \end{bmatrix}$$

5.42 $$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad \begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o IV cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el II o III cuadrantes} \end{bmatrix}$$

5.43 $$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad \begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o III cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el II o IV cuadrantes} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \csc A - \cot A$$

FORMULAS DEL ANGULO MULTIPLO

5.44 $$\operatorname{sen} 3A = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$$

5.45 $$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

5.46 $$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

5.47 $$\operatorname{sen} 4A = 4 \operatorname{sen} A \cos A - 8 \operatorname{sen}^3 A \cos A$$

5.48 $$\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$$

5.49 $$\tan 4A = \frac{4 \tan A - 4 \tan^3 A}{1 - 6 \tan^2 A + \tan^4 A}$$

5.50 $$\operatorname{sen} 5A = 5 \operatorname{sen} A - 20 \operatorname{sen}^3 A + 16 \operatorname{sen}^5 A$$

5.51 $$\cos 5A = 16 \cos^5 A - 20 \cos^3 A + 5 \cos A$$

5.52 $$\tan 5A = \frac{\tan^5 A - 10 \tan^3 A + 5 \tan A}{1 - 10 \tan^2 A + 5 \tan^4 A}$$

Véanse también las fórmulas 5.68 y 5.69.

POTENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

5.53 $$\operatorname{sen}^2 A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2A$$

5.54 $$\cos^2 A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2A$$

5.55 $$\operatorname{sen}^3 A = \tfrac{3}{4} \operatorname{sen} A - \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 3A$$

5.56 $$\cos^3 A = \tfrac{3}{4} \cos A + \tfrac{1}{4} \cos 3A$$

5.57 $$\operatorname{sen}^4 A = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2A + \tfrac{1}{8} \cos 4A$$

5.55 $$\cos^4 A = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2} \cos 2A + \tfrac{1}{8} \cos 4A$$

5.59 $$\operatorname{sen}^5 A = \tfrac{5}{8} \operatorname{sen} A - \tfrac{5}{16} \operatorname{sen} 3A + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 5A$$

5.60 $$\cos^5 A = \tfrac{5}{8} \cos A + \tfrac{5}{16} \cos 3A + \tfrac{1}{16} \cos 5A$$

Véanse **también** las fórmulas 5.70 y 5.73.

SUMA, DIFERENCIA Y PRODUCTO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

5.61 $$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B)$$

5.62 $$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A-B)$$

5.63 $$\cos A + \cos B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B)$$

5.64 $$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(B-A)$$

5.65 $$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

5.66 $$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$$

5.67 $$\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\}$$

FORMULAS GENERALES

5.68 $$\operatorname{sen} nA = \operatorname{sen} A \left\{(2\cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1}(2\cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\cos A)^{n-5} - \cdots\right\}$$

5.69 $$\cos nA = \frac{1}{2}\left\{(2\cos A)^n - \frac{n}{1}(2\cos A)^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}(2\cos A)^{n-4} - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}(2\cos A)^{n-6} + \cdots\right\}$$

5.70 $$\operatorname{sen}^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\operatorname{sen}(2n-1)A - \binom{2n-1}{1}\operatorname{sen}(2n-3)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\operatorname{sen} A\right\}$$

5.71 $$\cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\cos(2n-1)A + \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)A + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}\cos A\right\}$$

5.72 $$\operatorname{sen}^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA - \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

5.73 $$\cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots + \binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

Si $x = \operatorname{seo} y$ entonces $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, es decir, el ángulo cuyo *seno* es x o *el* seno *recíproco de* x es una función multiforme de x que puede considerarse como un conjunto de funciones uniformes llamadas *ramas.* Las demás funciones trigonométricas recíprocas también son multiformes.

A veces conviene seleccionar una determinada rama para algún propósito específico. Tal rama se denomina *rama principal* y sus valores se llaman *valores principales.*

VALORES PRINCIPALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

Valores principales para $x \geqq 0$	Valores principales para $x < 0$
$0 \leqq \operatorname{sen}^{-1} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \operatorname{sen}^{-1} x < 0$
$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \cos^{-1} x \leqq \pi$
$0 \leqq \tan^{-1} x < \pi/2$	$-\pi/2 < \tan^{-1} x < 0$
$0 < \cot^{-1} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \cot^{-1} x < \pi$
$0 \leqq \sec^{-1} x < \pi/2$	$\pi/2 < \sec^{-1} x \leqq \pi$
$0 < \csc^{-1} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \csc^{-1} x < 0$

RELACION ENTRE LAS FUNCIONES RECIPROCAS Y LAS TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

En todos los casos se da **por entendido que** se trata de valores principales.

5.74 $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$

5.75 $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

5.76 $\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \pi/2$

5.77 $\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1} (1/x)$

5.78 $\sec^{-1} x = \cos^{-1} (1/x)$

5.79 $\cot^{-1} x = \tan^{-1} (1/x)$

5.80 $\operatorname{sen}^{-1} (-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x$

5.81 $\cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$

5.82 $\tan^{-1} (-x) = -\tan^{-1} x$

5.83 $\cot^{-1} (-x) = \pi - \cot^{-1} x$

5.84 $\sec^{-1} (-x) = \pi - \sec^{-1} x$

5.85 $\csc^{-1} (-x) = -\csc^{-1} x$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

En todas las gráficas y está dado en radianes. La parte continua de las curvas corresponde a los valores principales.

5.86 $y = \operatorname{sen}^{-1} x$

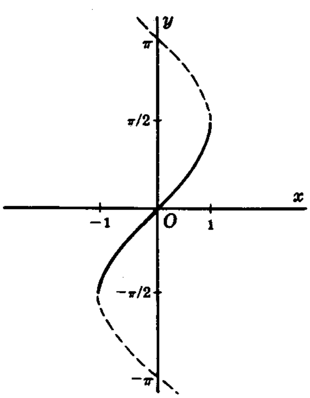


Fig. 5-11

5.87 $y = \cos^{-1} x$

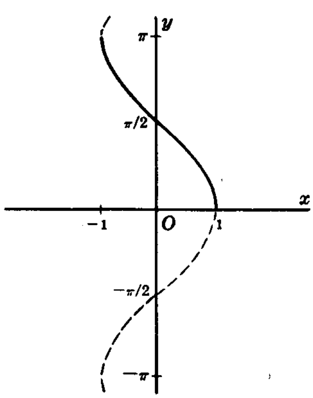


Fig. 5-12

5.88 $y = \tan^{-1} x$

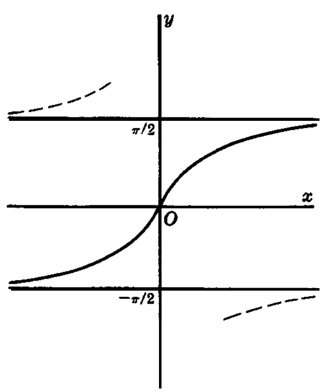


Fig. 5-13

5.89 $y = \cot^{-1} x$

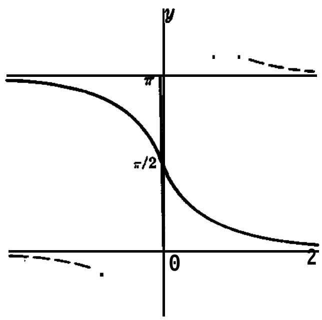


Fig. 5-14

5.90 $y = \sec^{-1} x$

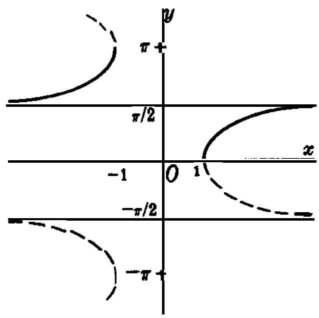


Fig. 5-15

5.91 $y = \csc^{-1} x$

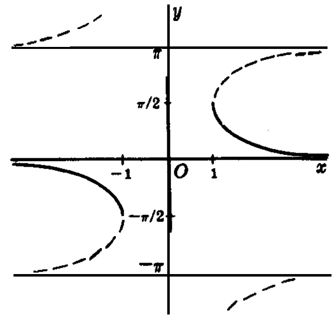


Fig. 5-16

RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y ANGULOSOS DE UN TRIANGULO PLANO

Las leyes siguientes son **válidas** para cualquier triángulo plano *ABC* de lados a, b, c y de **ángulos** A, B, C.

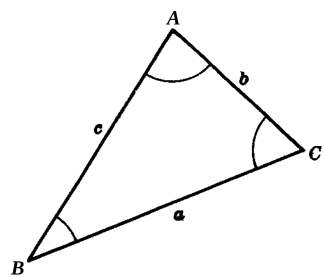


Fig. 5-17

5.92 **Ley de los senos**

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

5.93 **Ley de los cosenos**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar.

5.94 **Ley de las tangentes**

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

los otros lados y **ángulos** están relacionados en forma similar.

5.95 $$\operatorname{sen} A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el **semiperímetro del** triángulo. Se pueden obtener relaciones similares con los **ángulos** *B y C.*

Véanse además las fórmulas 4.5, página 5; 4.15 y 4.16, **página** 6.

RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y ANGULOS DE UN TRIANGULO ESFERICO

La Fig. 5-16 muestra el triángulo esférico ABC sobre la superficie de una esfera. La medida de los lados a, b, c [que son arcos de **círculo** máximos] está dada por los **ángulos** que subtienden en el centro de la esfera. Los ángulo! A, B, C son opuestos a los lados a, b, c respectivamente. Entonces son válida! las leyes siguientes.

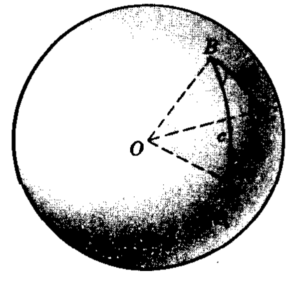


Fig. 5-18

5.96 **Ley de los senos**

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

5.97 **Ley de los cosenos**

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

se pueden expresar leyes similares con los otros lados y ángulos.

5.98 Ley de las tangentes

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}(a-b)}$$

resultados similares se obtienen con los otros lados y ángulos.

5.99
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Resultados similares se obtienen con los otros lados y ángulos.

5.100
$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

donde $S = \frac{1}{2}(A+B+C)$. Resultados similares se obtienen con los otros lados y ángulos.

Véase además la fórmula 4.44, página 10.

REGLAS DE NAPIER PARA TRIANGULOS ESFERICOS CON UN ANGULO RECTO

Prescindiendo del ángulo recto C, el triángulo esférico ***ABC*** está formado por cinco partes constituyentes que, si se colocan una tras otra según aparecen en la Fig. 5-19, quedarían en el siguiente orden: a, b, A, c, B.

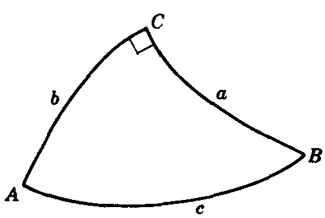


Fig. 5-19

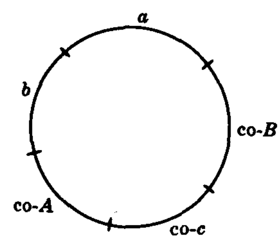


Fig. 5-20

Supóngase ahora que estas cantidades se ordenan en un círculo como se muestra en la Fig. 5-20 en donde hemos añadido el prefijo co [para indicar ***complemento]*** a la hipotenusa c y a los ángulos A y B.

Cualquiera de las partes de este círculo se puede llamar porte ***media,*** las dos partes vecinas se llamarían entonces partes *adyacentes* mientras que las dos restantes se llamarían ***partes opuestas.*** Entonces podemos expresar las reglas de **Napier** así:

5.101 El seno de cualquier parte media es igual al producto de las tangentes de las partes adyacentes.

5.102 El seno de cualquier parte media es igual al producto de los cosenos de las partes opuestas.

Ejemplo: Puesto que co-$A = 90° - A$, co-$B = 90° - B$, tenemos

$$\operatorname{sen} a = \tan b \tan(\text{co-}B) \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} a = \tan b \cot B$$

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \cos a \cos(\text{co-}B) \quad \text{o} \quad \cos A = \cos a \operatorname{sen} B$$

Naturalmente que estos resultados pueden obtenerse igualmente a partir de las leyes 5.97 de la página 19.

6 NUMEROS COMPLEJOS

DEFINICIONES RELATIVAS A LOS NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo se expresa generalmente en la forma $a + bi$ en donde a y b son **números reales** e i, **llamada** ***unidad imaginaria,*** se caracteriza por tener la propiedad **de** que $i^2 = -1$. Los números reales a y b *se* **conocen respectivamente** como las ***partes real e imaginaria*** **de** $a + bi$.

Los números **complejos** $a + bi$ y $a - bi$ *se* conocen como ***conjugados complejos*** el uno del otro.

IGUALDAD ENTRE NUMEROS COMPLEJOS

6.1 $$a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

ADICION DE NUMEROS COMPLEJOS

4.2 $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

SUSTRACCION DE NUMEROS COMPLEJOS

6.3 $$(a + bi) - (c + di) = (a-c) + (b - d)i$$

MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

6.4 $$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

6.5 $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

Obsérvese que las operaciones anteriores han **sido** efectuadas siguiendo las regias elementales del álgebra **y remplazando** i^2 por --1 cada vez que se ha encontrado conveniente.

REPRESENTACION GRAFICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Un número complejo $a + bi$ se puede representar mediante un punto (a, b) sobre ***un*** plano xy llamado ***diagrama de Argand*** o ***plano de Gauss. Así,*** por ejemplo, en la Fig. 6-1 P **representa** el número complejo -3 + 4i.

Un número complejo también puede interpretarse como un *vector* que se dirige de O hacia P.

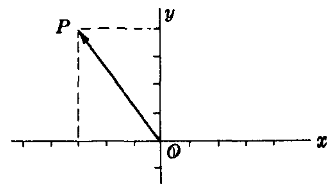


Fig. 6-1

FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

En la Fig. 6-2 el punto P cuyas coordenadas son (x, y) representa al número complejo $x + iy$. El punto P también se puede expresar por medio de ***coordenadas polares*** (r, θ). Puesto que $x = r$ cos 8, y = r sen θ se sigue que

6.6 $$x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

siendo ésta lo ***forma*** *polar* del número complejo. Con frecuencia decimos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ***es*** el ***módulo*** y θ la ***amplitud*** de $x + iy$.

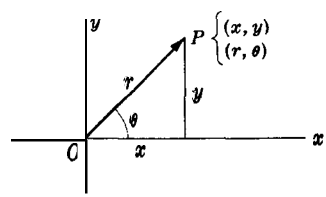


Fig. 6-2

MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

6.7 $$[r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} e,)]\,[r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen} e,)] = r_1r_2[\cos(e, + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

6.8 $$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} e,)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(e, - e,) + i \operatorname{sen}(e, - \theta_2)]$$

TEOREMA DE MOIVRE

Siendo p un número real cualquiera, el teorema de De Moivre establece que

6.9 $$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^p = r^p(\cos p\theta + i \operatorname{sen} pe)$$

RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Sea n cualquier entero positivo y p $= 1/n$, entonces 6.9 puede escribirse

6.10 $$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

donde k es cualquier entero. De aqui se pueden obtener las n raíces n-ésimas de un número complejo haciendo $k = 0, 1, 2, \quad, n - 1$.

7 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

LEYES DE LOS LOGARITMOS

A continuación vamos a suponer que p, q son números reales y m, n enteros positivos. En todos los casos queda descartada la división por cero.

7.1	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	7.2	$a^p/a^q = a^{p-q}$	7.3	$(a^p)^q = a^{pq}$
7.4	$a^0 = 1,\ a \neq 0$	7.5	$a^{-p} = 1/a^p$	7.6	$(ab)^p = a^p b^p$
7.7	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	7.8	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	7.9	$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

En a^p, p se llama ***exponente,*** a es la base y a^p se denomina la *potencia p de* a. La función $y = a^x$ es una función ***exponencial.***

LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS

Si $a^p = N$ donde $a \neq 0$, y $a \neq 1$, entonces ***p es*** el ***logaritmo*** de N en base a, lo cual se escribe $p = \log_a N$. El número N $= a^p$ es **llamado** ***el antilogaritmo*** de ***p en*** base a y se escribe $\text{antilog}_a\ p$.

Ejemplo: Puestoque $3^2 = 9$ tenemos $\log_3 9 = 2$, $\text{antilog}_3 2 = 9$.

La función $y = \log_a x$ se llama ***función*** *logarítmica.*

LEYES DE LOS EXPONENTES

7.10 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

7.11 $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

7.12 $\log_a M^p = p \log_a M$

LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS COMUNES

Los logaritmos comunes y sus antilogaritmos [también llamados ***brigsianos***] son aquellos en los cuales la base $a = 10$. El logaritmo común de N se **cscribe** $\log_{10} N$ o simplemente log N. Las **páginas** 202-205 rontienen tablas de logaritmos y antilogaritmo6 comunes. El empleo de estas tablas se ilustra con ejemplos en las páginas **194-196.**

LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS NATURALES

Los logaritmos y antilogaritmos naturales [también llamados neperianos] son aquellos en los cuales la base $a = e = 2{,}71828\,18\ldots$ [véase la página 1].

El logaritmo natural de N se escribe $\log_e N$ o $\ln N$. Las páginas 224-225 contienen tablas de logaritmos naturales. Las tablas de antilogaritmos naturales [o sea las que nos dan el valor de e^x para diferentes valores de x] aparecen en las páginas 226-227. El empleo de estas tablas se ilustra con ejemplos en las páginas 196 y 200.

CAMBIO DE BASE EN UN LOGARITMO

La relación entre el logaritmo de un número N en base a y el logaritmo de ese mismo número N en base b está dada por

7.13 $$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

En particular.

7.14 $$\log_e N = \ln N = 2{,}30258\,50929\ldots\log_{10} N$$

7.15 $$\log_{10} N = \log N = 0{,}43429\,44819\ldots\log_e N$$

RELACION ENTRE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LAS TRIGONOMETRICAS

7.16 $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\operatorname{sen}\theta$$

Estas relaciones son llamadas ***identidades de Euler***. En éstas, i representa la unidad imaginaria [véase la página 21].

7.17 $$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

7.18 $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

7.19 $$\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = -i\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)$$

7.20 $$\cot\theta = i\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}\right)$$

7.21 $$\sec\theta = \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$$

7.22 $$\csc\theta = \frac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

PERIODICIDAD DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

7.23 $$e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad k = \text{entero}$$

De lo anterior se desprende que el período de e^x es $2\pi i$.

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS EXPRESADA COMO EXPONENCIAL

La forma polar de un número complejo $x + iy$ se puede escribir como exponencial [véase 6.6, página 22] así:

7.24 $$x + iy = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{i\theta}$$

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJO EN FORMA POLAR

Las fórmulas 6.7 a 6.10 de la página 22 equivalen a las que se dan a continuación.

7.25 $$(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

7.26 $$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

7.27 $$(re^{i\theta})^p = r^pe^{ip\theta} \qquad \text{[teorema de De Moivre]}$$

7.28 $$(re^{i\theta})^{1/n} = \left[re^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$

LOGARITMOS DE UN NUMERO COMPLEJO

7.29 $$\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta + 2k\pi i \qquad k = \text{entero}$$

8 FUNCIONES HIPERBOLICAS

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

8.1 *Seno* hiperbólico de x $= \operatorname{senh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

8.2 ***Coseno hiperbólico*** de x $= \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

8.3 Tangente ***hiperbólica*** de x $= \tanh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

8.4 ***Cotangente hiperbólica*** de $x = \coth x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

8.5 ***Secante hiperbólica*** de x $= \operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

8.6 *Cosecante hiperbólica* de $x = \operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

8.7 $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

8.8 $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

8.9 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

8.10 $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

8.11 $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

8.12 $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

8.13 $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

FUNCIONES DE ARGUMENTOS NEGATIVOS

8.14 $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

8.15 $\cosh(-x) = \cosh x$

8.16 $\tanh(-x) = -\tanh x$

8.17 $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$

8.18 $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$

8.19 $\coth(-x) = -\coth x$

FORMULAS DE ADICION

8.20 $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

6.21 $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

8.22 $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh z \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

0.23 $\coth(x \pm y) = \dfrac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$

FORMULAS DE ANGULO DOBLE

6.24 $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

6.25 $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2 \cosh^2 x \quad 1 = 1 + 2 \operatorname{senh}^2 x$

8.26 $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

FORMULAS DEL ANGULO MITAD

8.27 $\operatorname{senh} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$ [+ si $x > 0$, $-$ si $x < 0$]

8.28 $\cosh \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$

8.29 $\tanh \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$ [+ si $x > 0$, $-$ si $x < 0$]

$$= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}$$

FORMULAS DEL ANGULO MULTIPLO

8.30 $\operatorname{senh} 32 = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

8.31 $\cosh 32 = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$

8.32 $\tanh 3x = \dfrac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x}$

8.33 $\operatorname{senh} 42 = 8 \operatorname{senh}^3 x \cosh x + 4 \operatorname{senh} x \cosh x$

8.34 $\cosh 42 = 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1$

8.35 $\tanh 4x = \dfrac{4 \tanh x + 4 \tanh^3 x}{1 + 6 \tanh^2 x + \tanh^4 x}$

POTENCIAS DE FUNCIONES HIPERBOLICAS

8.36 $\quad \operatorname{senh}^2 x \quad = \quad \frac{1}{2} \cosh\, - - \quad 2$

8.37 $\quad \cosh^2 x \quad = \quad \frac{1}{2} \cosh\, 2x + \frac{1}{2}$

8.38 $\quad \operatorname{senh}^3 x \quad = \quad \frac{1}{4} \operatorname{senh} 3x - \frac{3}{4}$ senhz

8.39 $\quad \cosh^3 x \quad = \quad \frac{1}{4} \cosh 3x + \frac{3}{4}$ coshz

8.40 $\quad \operatorname{senh}^4 x \quad = \quad \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{1}{8} \cosh 4x$

8.41 $\quad \cosh^4 x \quad = \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cosh 22 + \frac{1}{8} \cosh 4x$

SUMA, RESTA Y PRODUCTO DE FUNCIONES HIPERBOLICAS

8.42 $\quad$ senhz + senhy $= 2 \operatorname{senh} \frac{1}{2}(x + y) \cosh \frac{1}{2}(x - y)$

8.43 $\quad$ senhz − senhy $= 2 \cosh \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{senh} \frac{1}{2}(x - y)$

8.44 $\quad$ coshz + $\cosh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x + y) \cosh \frac{1}{2}(x - y)$

8.45 $\quad$ coshz − $\cosh y = 2 \operatorname{senh} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{senh} \frac{1}{2}(x - y)$

8.46 $\quad \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}\{\cosh (x + y) - \cosh (x - y)\}$

8.47 $\quad \cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh (x + y) + \cosh (x - y)\}$

8.48 $\quad \operatorname{senh} x \cosh y = \frac{1}{2}\{\operatorname{senh} (x + y) + \operatorname{senh} (x - y)\}$

FUNCIONES HIPERBOLICAS EXPRESADAS EN TERMINOS DE LAS OTRAS

En seguida vamos a suponer que $x > 0$. Si $x < 0$ úsese el signo apropiado según lo indican las fórmulas 8.14 a 8.19.

	$\operatorname{senh} x = u$	$\cosh x = u$	$\tanh x = u$	$\coth x = u$	$\operatorname{sech} x = u$	$\operatorname{csch} x = u$
$\operatorname{senh} x$	u	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{1+u^2}$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}/u$
$\tanh x$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$
$\coth x$	$\sqrt{u^2+1}/u$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$u/\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	u

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

0.49 $y = \operatorname{senh} x$

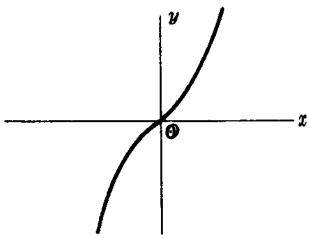


Fig. 8-1

8.50 $y = \cosh x$

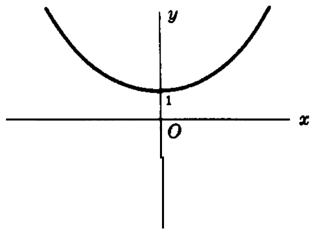


Fig. 8-2

8.51 $y = \tanh x$

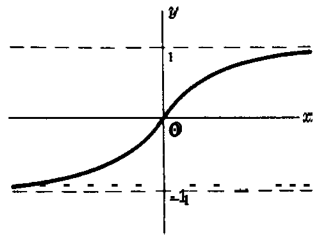


Fig. 8-3

8.52 $y = \coth x$

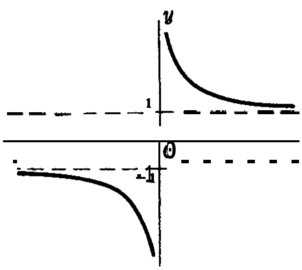


Fig. 8-4

8.53 $y = \operatorname{sech} x$

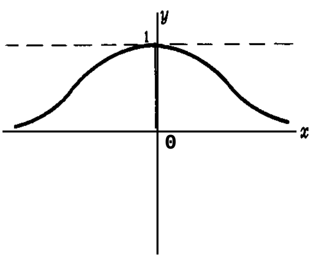


Fig. 8-5

8.54 $y = \operatorname{csch} x$

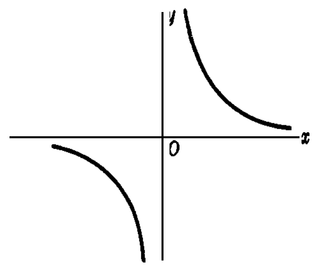


Fig. 8-6

FUNCIONES HIPERBOLICAS RECIPROCAS

Si $x = \operatorname{senh} y$, entonces $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ es llamado el seno **hiperbólico** recíproco de x. De manera similar se definen las demás funciones hiperbólicas recíprocas. Las funciones hiperbólicas recíprocas son multiformes y al igual que en el caso de las funciones trigonométricas recíprocas [véase la página 17], nos limitaremos a los valores principales para los cuales ellas pueden considerarse uniformes.

La lista siguiente cita los valores principales [a no ser que se indique 10 contrario] de las funciones hiperbólicas recíprocas expresados por medio de funciones logarítmicas en el dominio en que **son reales.**

8.55 $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad -\infty < x < \infty$

8.56 $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geqq 1 \qquad [\cosh^{-1} x > 0$ es valor principal$]$

8.57 $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$

8.58 $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \qquad x > 1 \text{ o } x < -1$

0.59 $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}\right) \qquad 0 < x \leqq 1 \qquad [\operatorname{sech}^{-1} x > 0$ es valorprincipal$]$

8.60 $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right) \qquad x \neq 0$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS RECIPROCAS

8.61 $\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1}(1/x)$

8.62 $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}(1/x)$

8.63 $\coth^{-1} x = \tanh^{-1}(1/x)$

8.64 $\operatorname{senh}^{-1}(-x) = -\operatorname{senh}^{-1} x$

8.65 $\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1} x$

8.66 $\coth^{-1}(-x) = \coth^{-1} x$

8.67 $\operatorname{csch}^{-1}(-x) = -\operatorname{csch}^{-1} x$

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS RECIPROCAS

8.68 $y = \operatorname{senh}^{-1} x$

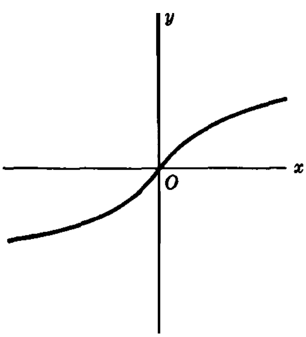


Fig. 8-1

8.69 $y = \cosh^{-1} x$

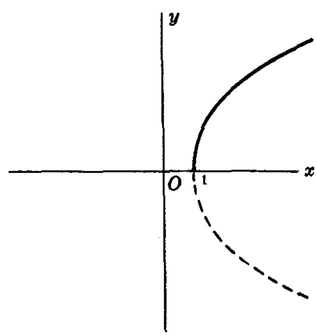


Fig. 8-8

8.70 $y = \tanh^{-1} x$

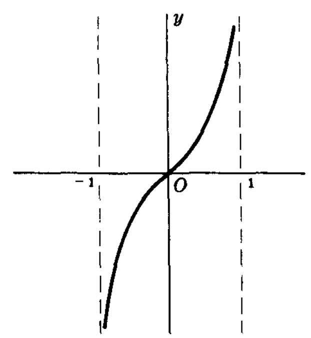


Fig. 8-9

8.71 $y = \coth^{-1} x$

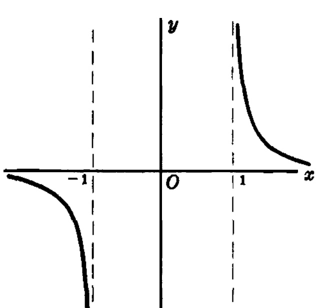


Fig. 8-10

8.72 $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

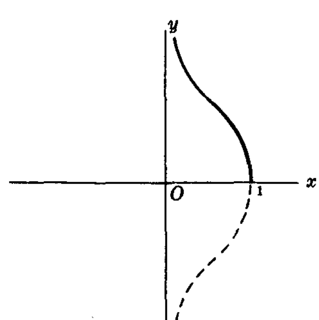


Fig. 8-11

8.73 $y = \operatorname{csch}^{-1} x$

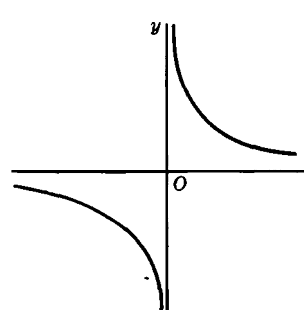


Fig. 8-12

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y LAS TRIGONOMETRICAS

8.74	$\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$	8.75	$\cos(ix) = \cosh x$	8.76	$\tan(ix) = i \tanh x$
8.77	$\csc(ix) = -i \operatorname{csch} x$	8.78	$\sec(ix) = \operatorname{sech} x$	8.79	$\cot(ix) = -i \coth x$
8.80	$\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen} x$	8.81	$\cosh(ix) = \cos x$	8.82	$\tanh(ix) = i \tan x$
8.83	$\operatorname{csch}(ix) = -i \csc x$	8.84	$\operatorname{sech}(ix) = \sec x$	8.85	$\coth(ix) = -i \cot x$

PERIODICIDAD DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

En seguida consideraremos que *k es* cualquier entero.

8.86	$\operatorname{senh}(x + 2k\pi i) = \operatorname{senh} x$	8.87	$\cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x$	8.88	$\tanh(x + k\pi i) = \tanh x$
8.89	$\operatorname{csch}(x + 2k\pi i) = \operatorname{csch} x$	8.90	$\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x$	8.91	$\coth(x + k\pi i) = \coth x$

RELACION ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS RECIPROCAS Y LAS TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

8.92	$\operatorname{sen}^{-1}(ix) = i \operatorname{senh}^{-1} x$	8.93	$\operatorname{senh}^{-1}(ix) = i \operatorname{sen}^{-1} x$
8.94	$\cos^{-1} x = \pm i \cosh^{-1} x$	8.95	$\cosh^{-1} x = \pm i \cos^{-1} x$
8.96	$\tan^{-1}(ix) = i \tanh^{-1} x$	8.97	$\tanh^{-1}(ix) = i \tan^{-1} x$
8.98	$\cot^{-1}(ix) = -i \coth^{-1} x$	8.99	$\coth^{-1}(ix) = -i \cot^{-1} x$
8.100	$\sec^{-1} x = \pm i \operatorname{sech}^{-1} x$	8.101	$\operatorname{sech}^{-1} x = \pm i \sec^{-1} x$
8.102	$\csc^{-1}(ix) = -i \operatorname{csch}^{-1} x$	8.103	$\operatorname{csch}^{-1}(ix) = -i \csc^{-1} x$

9 SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

ECUACION CUADRATICA $ax^2 + bx + c = 0$

9.1 Soluciones: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si a, b, c son reales y si $D = b^2 - 4ac$ es el *discriminante,* entonces las **raíces** son

(i) reales y desiguales si $D > 0$

(iii reales e iguales si $D = 0$

(iii) conjugadas complejas si $D < 0$

9.2 Si x_1, x_2 son las raíces, entonces $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1 x_2 = c/a$.

ECUACION CUBICA $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

Sea $$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

9.3 **Soluciones:** $$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S - T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S - T) \end{cases}$$

Si a_1, a_2, a_3 son reales y si $D = Q3 + R^2$ es el *descriminante,* entonces

(i) una de las raíces es real y dos son complejas conjugadas si $D > 0$.

(ii) todas las raíces son reales y por lo menos dos de ellas son iguales si $D = 0$.

(iii) todas las **raíces** son reales y distintas si $D < 0$.

Si $D < 0$, el cálculo se simplifica mediante el uso de la trigonometría.

9.4 Soluciones si $D < 0$: $$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q}\,\cos(\frac{1}{3}\theta) \\ x_2 = 2\sqrt{-Q}\,\cos(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ) \\ x_3 = 2\sqrt{-Q}\,\cos(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ) \end{cases} \qquad \text{donde } \cos\theta = -R/\sqrt{-Q^3}$$

9.5 $$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$$

donde x_1, x_2, x_3 son las tres raíces.

ECUACION DE CUARTO GRADO $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$

Sea y_1 una raíz real de la ecuación cúbica

9.6
$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0$$

9.7 **Soluciones:** Las 4 raíces de $z^2 + \frac{1}{2}\{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1}\}z + \frac{1}{2}\{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4a_4}\} = 0$

Si todas las raíces de 9.6 son reales, el cálculo se simplifica mediante el empleo de aquella determinada raíz real con la cual se puedan obtener números reales como coeficientes de la ecuación cuadrática 9.7.

9.8
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4 = a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -a_3 \\ x_1x_2x_3x_4 = a_4 \end{cases}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las cuatro raíces.

10 FORMULAS DE GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

DISTANCIA d ENTRE DOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1)$ Y $P_2(x_2, y_2)$

10.1 $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

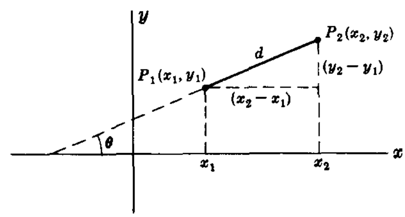


Fig. 10-l

PENDIENTE m DE LA RECTA QUE UNE LOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1)$ Y $P_2(x_2, y_2)$

10.2 $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

ECUACION DE LA RECTA QUE UNE LOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1)$ Y $P_2(x_2, y_2)$

10.3 $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$ o u-u, $= m(x - x_1)$

10.4 $$y = mx + b$$

donde $b = y_1 - mx_1 = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ es la intersección con el eje y.

ECUACION DE LA RECTA CUYA INTERSECCION CON EL EJE x ES $a \neq 0$ Y CON EL EJE y ES $b \neq 0$

10.5 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

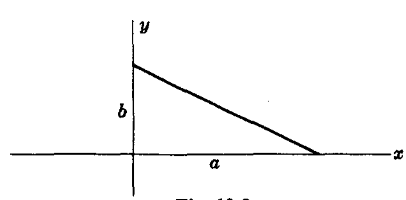


Fig. 10-2

FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA

10.6 $$x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha = p$$

donde p = distancia perpendicular desde el origen 0 hasta la linea

y α = ángulo que forma la perpendicular con la parte positiva del eje x.

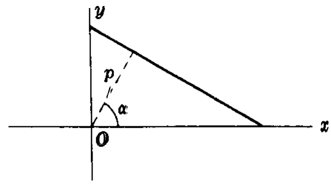


Fig. **10-3**

ECUACION GENERAL DE UNA RECTA

10.7 $$Ax + By + C = 0$$

DISTANCIA DEL PUNTO (x_1, y_1) A LA RECTA $Ax + By + C = 0$

10.8 $$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde el signo ha de escogerse de tal manera que la distancia no resulte negativa.

ANGULO ψ ENTRE DOS RECTAS CUYAS PENDIENTES SON m_1 y m_2

10.9 $$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Las rectas coinciden o son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

Las rectas son mutuamente perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

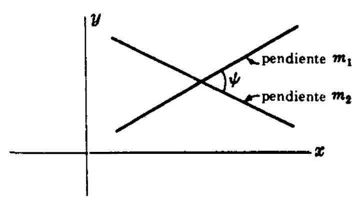


Fig. **10-4**

AREA DEL TRIANGULO CON VERTICES EN (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

10.10 **Area** $$= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3)$$

donde el signo ha de escogerse de tal manera que el área no resulte negativa.

Si el área es cero todos los puntos **están** sobre una recta.

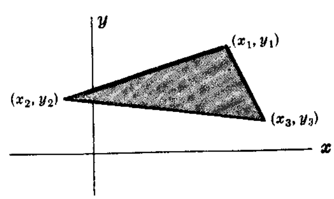


Fig. **10-5**

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR SIMPLE TRANSLACION

10.11 $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = Y - Yo \end{cases}$

donde (x, y) denotan las coordenadas primitivas [o sea las coordenadas relativas al sistema xy]. (x', y') denotan las nuevas coordenadas [relativas al sistema xy], (x_0, y_0) son las coordenadas del nuevo origen O' con respecto al sistema primitivo de coordenadas xy.

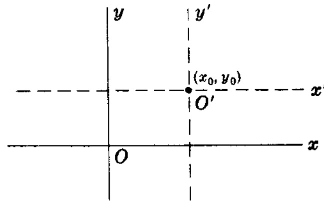


Fig. 10-6

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR SIMPLE ROTACION

10.12 $\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \text{ co.9 } \alpha \end{cases}$ o $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = y \text{ cosa} - x \text{ sena} \end{cases}$

donde el origen del sistema inicial [xy] coincide con el del nuevo sistema de coordenadas $[x'y']$ pero el eje x' forma un ángulo α con el eje positivo x.

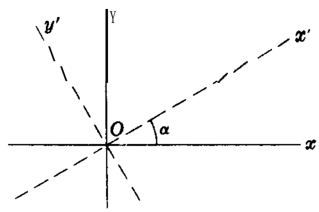


Fig. 10-7

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR TRANSLACION Y ROTACION

10.13 $\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + x_0 \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + y_0 \end{cases}$

o $\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0) \operatorname{sen}\alpha \\ y' = (y - y_0)\cos\alpha - (x - x_0) \text{ sena} \end{cases}$

donde las coordenadas del nuevo origen 0' del sistema de coordenadas x'y' son (x_0, y_0) en relación con el sistema primitivo de coordenadas xy y además el eje x' forma un ángulo α con el eje positivo x.

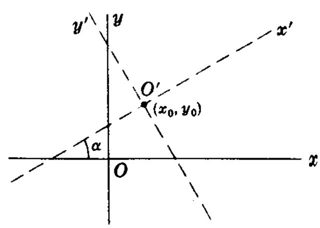


Fig. 10-8

COORDENADAS POLARES (r, θ)

Un punto P se puede localizar por medio de coordenadas rectangulares (x, y) o por coordenadas polares $(r,$ 8). Las ecuaciones de transformación son

10.14 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ o $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$

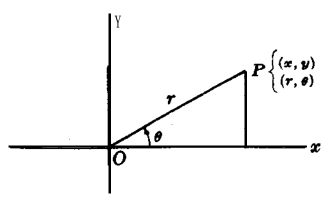


Fig. 10-9

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO R Y EN CENTRO EN (x_0, y_0)

10.15 $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

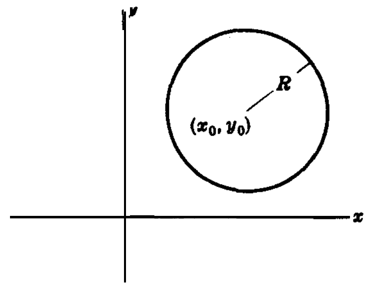


Fig. 10-10

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO R QUE PASA POR EL ORIGEN

10.16 $$r = 2R \cos(\theta - \alpha)$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares de cualquier punto de la circunferencia y (R, α) las coordenadas polares del centro.

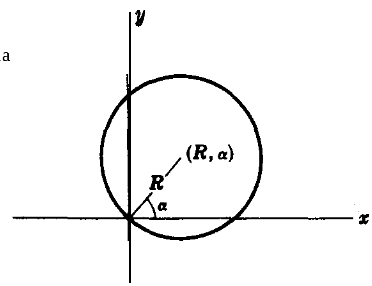


Fig. 10-11

CONICAS [ELIPSE, PARABOLA O HIPERBOLA]

Si un punto P se mueve de tal manera que la distancia entre P y un punto fijo [llamado foco] dividida por la distancia de P a una recta fija [llamada *directriz]* resulta ser una constante ϵ [llamada *excentricidad],* la curva trazada se *conoce* con el nombre de *cónica* [tales curvas *se llaman* así debido a que se obtienen cortando un cono por un plano a diferentes ángulos de inclinación].

Si el foco se sitúa arbitrariamente en el origen O, y si $OQ = p$ y $LM = D$, [véase la Fig. 10-12], laecuación de una cónica en coordenadas polares (r, θ) es

10.17 $$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \theta} = \frac{\epsilon D}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

La cónica es

(i) una elipse si $\epsilon < 1$

(ii) una parábola si $\epsilon = 1$

(iii) una hipérbola si $\epsilon > 1$.

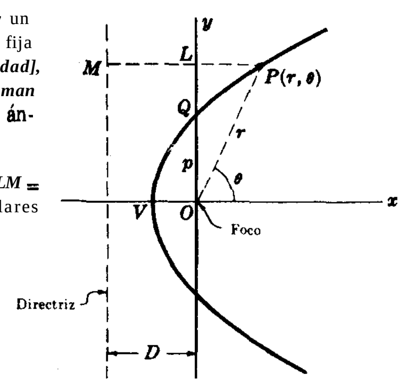


Fig. 10-12

ELIPSE CON CENTRO EN $C(x_0, y_0)$ Y CON EJE MAYOR PARALELO AL EJE x

10.18 Longitud del eje mayor $A'A = 2a$

10.19 Longitud del eje menor $B'B = 26$

10.20 La distancia del centro C al foco F o F' es

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

10.21 Excentricidad $= \epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

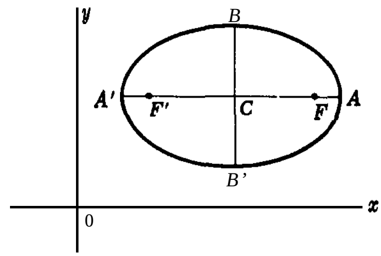


Fig. 10-13

10.22 Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

10.25 Ecuación en coordenadas polares si C está en O: $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$

10.24 Ecuación en coordenadas polares si C está sobre el eje x y F' está en O: $r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}$

10.25 Si P es cualquier punto de la elipse, $PF + PF' = 2a$

Si el eje mayor es paralelo al eje y, es preciso intercambiar x y y o remplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [o $90° - \theta$].

PARABOLA CUYO EJE ES PARALELO AL EJE x

Si el vértice está situado en $A(x_0, y_0)$ y la distancia de A al foco F es $a > 0$, la ecuación de la parábola es

10.26 $(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$ si la parábola se abra hacia la derecha [Fig. 10-14]

10.27 $(y - y_0)^2 = -4a(x - x_0)$ si la parábola se abre hacia la izquierda [Fig. 10-15]

Si el foco se halla en el origen (Fig. 10-16] la ecuación en coordenadas polares es

10.28 $$r = \frac{2a}{1 - \cos\theta}$$

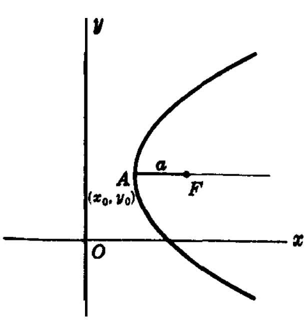


Fig. 10-14

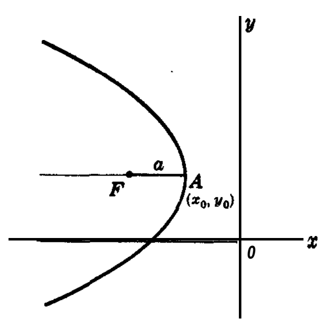


Fig. 10-15

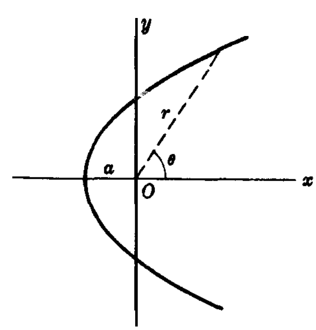


Fig. 10-16

En el caso en que el eje sea paralelo al eje y, hay que intercambiar x y y o remplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [o 90° − θ].

HIPERBOLA CON CENTRO EN $C(x_0, y_0)$ Y EJE MAYOR PARALELO AL EJE X

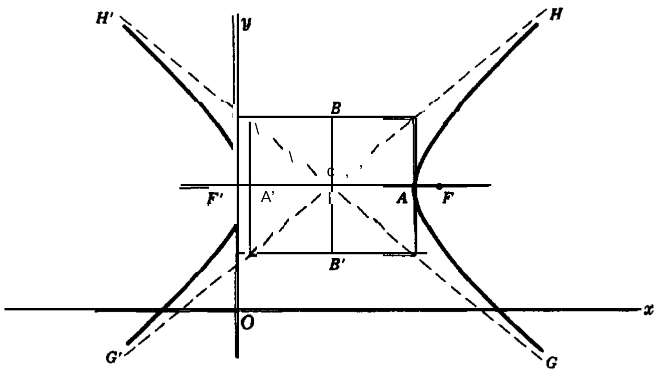


Fig. 10-17

10.29 Longitud del eje mayor A'A $= 2a$

10.20 Longitud del eje menor $B'B = 2b$

10.31 Distancia del centro C al foco F o $F' = c = \sqrt{a^2 + b^2}$

10.32 Excentricidad $\bullet = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

10.33 Ecuación en coordenadas rectangulares $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

10.34 Pendientes de las asíntotas $G'H$ y $GH' = \pm \dfrac{b}{a}$

10.35 Ecuación en coordenadas polares si C está en 0: $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$

10.36 Ecuación en coordenadas polares si C **está** sobre el eje X y F' se halla en 0: $r = \dfrac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \theta}$

10.37 Si P es un punto cualquiera de la **hipérbola,** $PF - PF' = \pm 2a$ [el signo **depende** de la rama]

Si el eje mayor es paralelo al eje y. hay que intercambiar x y y o remplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [o $90° - \theta$].

11 CURVAS PLANAS NOTABLES

LEMNISCATA

11.1 Ecuación en coordenadas polares:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

11.2 Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

11.3 Angulo formado por AB' o $A'B$ y el eje x = 45°

11.4 Area comprendida por uno de los lazos $= a^2$

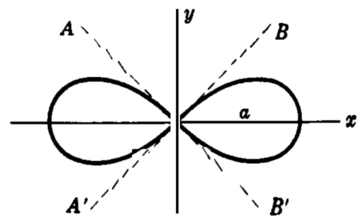


Fig. 11-1

CICLOIDE

11.5 Ecuaciones en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = a(\phi - \operatorname{sen} \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

11.6 Area comprendida por el arco $= 3\pi a^2$

11.7 Longitud de cada arco $= 8a$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a cuando rueda sin resbalar sobre el eje x.

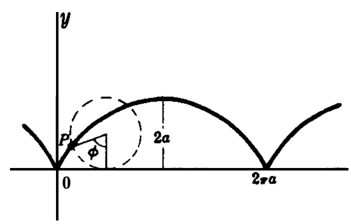


Fig. 11-2

HIPOCICLOIDE DE CUATRO PUNTAS

11.5 Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

11.9 Ecuaciones en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \operatorname{sen}^3 \theta \end{cases}$$

11.10 Area encerrada por la curva $= \frac{3}{8}\pi a^2$

11.11 Longitud de arco de toda la curva $= 6a$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio $a/4$ cuando rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia cuyo radio es a.

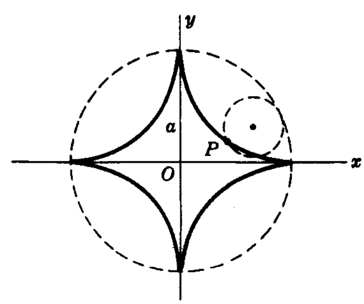


Fig. 11-3

CARDIOIDE

11.12 **Ecuación:** $r = a(1 + \cos\theta)$

11.13 **Area encerrada por la curva** $= \frac{3}{2}\pi a^2$

11.14 **Longitud de arco de la curva** $= 8a$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a a medida que rueda por fuera de otra circunferencia fija de radio a. Esta curva es un caso especial del caracol de Pascal [véase 11.32).

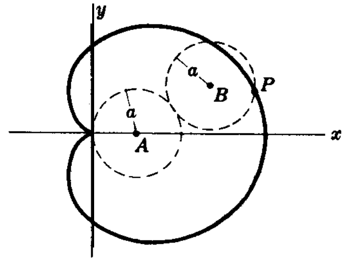


Fig. 11-4

CATENARIA

11.15 **Ecuación:** $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \cosh\frac{x}{a}$

Esta es la curva que forma un cable pesado y de densidad uniforme cuando se cuelga por sus extremos A y B.

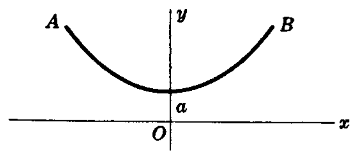


Fig. 11-5

ROSA DE TRES PETALOS

11.16 **Ecuación:** $r = a \cos 3\theta$

La ecuación $r = a$ sen 3θ corresponde a la de una curva similar que se obtiene haciendo girar la curva de la Fig. 118 $30°$ o $\pi/6$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

En general $r = a \cos n\theta$ o $r = a$ sen $n\theta$ tiene n pétalos si n es impar.

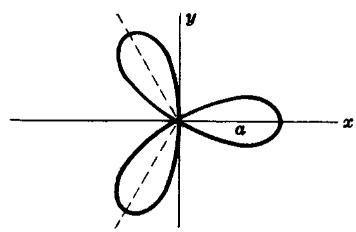


Fig. 11-6

ROSA DE CUATRO PETALOS

11.17 **Ecuación:** $r = a \cos 2\theta$

La ecuación $r = a$ sen 2θ corresponde a la de una curva similar que se obtiene haciendo girar la curva de la Fig. 11-7 $45°$ o $\pi/4$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

En general $r = a \cos n\theta$ o $r = a$ sen $n\theta$ tiene 2n pétalos si n es par.

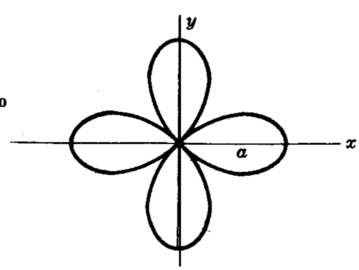


Fig. 11-7

EPICICLOIDE

11.18 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \\ y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b cuando rueda sin resbalar por el exterior de otra cuyo radio es a.

La cardioide [Fig. 11-4] es un caso especial de la epicicloide.

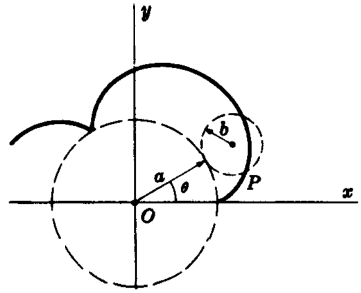


Fig. 11-9

HIPOCICLOIDE GENERAL

11.19 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\phi + b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \\ y = (a-b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b a medida que ésta rueda sin resbalar por el interior de otra cuyo radio es a.

Si $b = a/4$, la curva es la que se muestra en la Fig. 11-3.

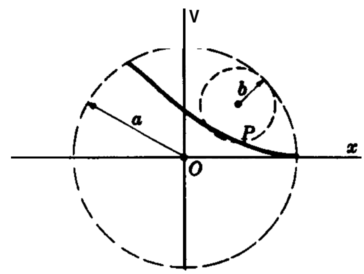


Fig. 11-9

TROCOIDE

11.20 Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a\phi - b\operatorname{sen}\phi \\ y = a - b\cos\phi \end{cases}$

Esta es la curva descrita por un punto P situado a una distancia b del centro de una circunferencia de radio a a medida que ésta rueda sin resbalar sobre el eje x.

Si $b < a$, la curva tiene la forma que muestra la Fig. 11-10 y se le conoce con el nombre de *cicloide reducida.*

Si $b > a$, la curva tiene la forma que muestra la Fig. 11-11 y se le llama ***cicloide alargada.***

Si $b = a$, la curva es la cicloide de la Fig. 11-2.

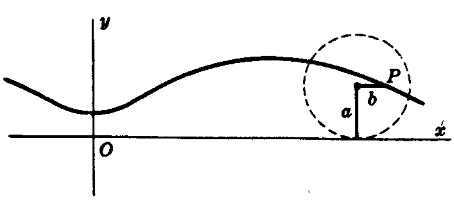


Fig. 11-10

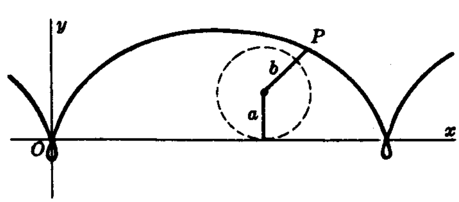


Fig. 11-11

TRACTRIZ

11.21 Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a \ln(\cot \frac{1}{2}\phi - \cos\phi) \\ y = a \operatorname{sen} \phi \end{cases}$

Esta es la curva descrita por el punto extremo P de una cuerda tirante PQ de longitud a a medida que el otro extremo Q se mueve a lo largo del eje x.

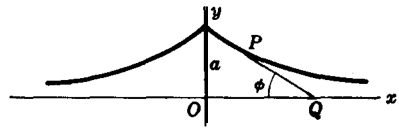


Fig. 11-12

BRUJA DE AGNESI

11.22 Ecuación en coordenadas rectangulares: $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$

11.23 Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2a \cot \theta \\ y = a(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$

En la Fig. 11-13 la linea variable OA corta la línea $y = 2a$ y la circunferencia de radio a y centro en $(0, a)$ en los puntos A y B respectivamente. Cualquier punto P de la "bruja" se localiza trazando paralelas a los ejes x y y de modo que pasen por B y A respectivamente determinando el punto P de intersección.

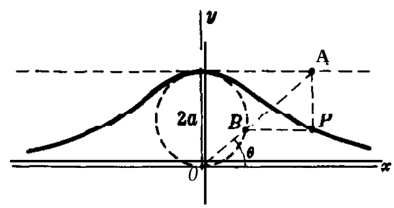


Fig. 11-13

FOLIO DE DESCARTES

11.24 Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

11.25 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

11.26 Area comprendida por el lazo $= \dfrac{3}{2}a^2$

11.27 Ecuación de la asíntota: $x + y + a = 0$

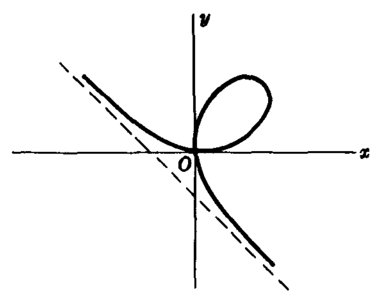


Fig. 11-14

INVOLUTA DE UNA CIRCUNFERENCIA

11.28 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a(\cos\phi + \phi \operatorname{sen} \phi) \\ y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi \cos\phi) \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por el punto extremo P de una cuerda enrollada en una circunferencia de radio a a medida que se desenvuelve mientras se mantiene tirante.

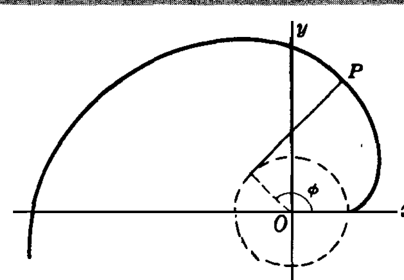


Fig. 11-15

EVOLUTA DE UNA ELIPSE

11.29 Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

11.30 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} ax = (a^2 - b^2)\cos^3\theta \\ by = (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

Esta curva es la envolvente de las normales a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ mostrada por la línea a trazos en la Fig. 11-16.

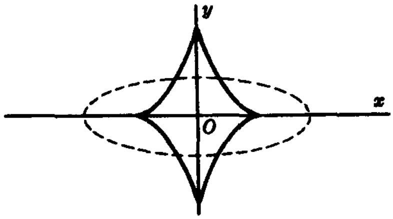


Fig. 11-16

ÓVALOS DE CASSINI

11.31 Ecuación en forma polar: $r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta = b^4$

Esta es la curva descrita por un punto P que se mueve de tal manera que el producto de las distancias entre P y dos puntos fijos [situados entre sí a una distancia $2a$] es una constante b^2.

La curva puede adoptar la forma de la Fig. 11-18 según que $b < a$ o que $b > a$ respectivamente. Si $b = a$ obtenemos la curva llamada lemniscata [Fig. 11-1],

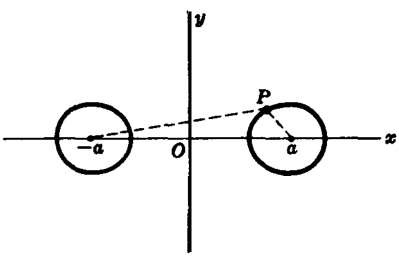


Fig. 11-17

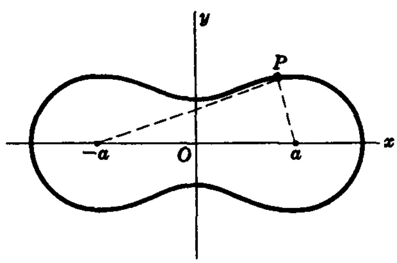


Fig. 11-18

CARACOL DE PASCAL

11.32 Ecuación en forma polar: $r = b + a\cos\theta$

Sea OQ una línea que une el origen O con un punto cualquiera Q de una circunferencia de diámetro a que pasa por 0. Entonces esta curva es el lugar geométrico de todos los puntos P para los cuales $PQ = b$.

La curva toma la forma de la Fig. 11-19 o la Fig. 11-20 según que $b > a$ o $b < a$ respectivamente. Si $b = a$, se obtiene la curva llamada *cardioide* [Fig. 11-4].

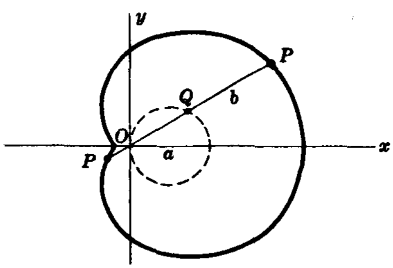


Fig. 11-19

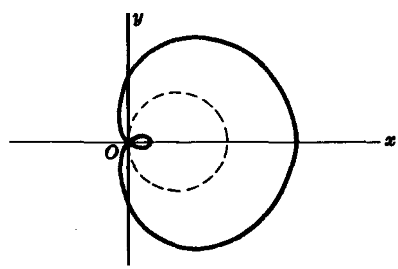


Fig. 11-29

CISOIDE DE DIOCLES

11.33 **Ecuación en coordenadas rectangulares:**

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

11.34 **Ecuaciones paramétricas:**

$$\begin{cases} x = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \\ y = \dfrac{2a \operatorname{sen}^3 \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

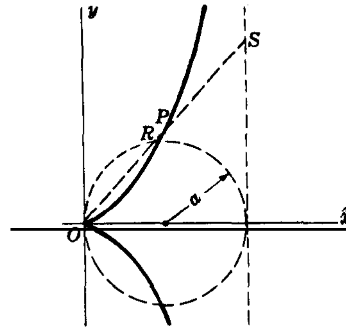


Fig. 11-21

Esta es la curva descrita por un punto P que se mueve de tal manera que la distancia OP = distancia RS. Se le emplea en el problema de la duplicación del cubo, que consiste en encontrar el lado de un cubo que tenga dos veces el volumen de un cubo dado.

ESPIRAL DE ARQUIMEDES

11.35 Ecuación polar: $r = a\theta$

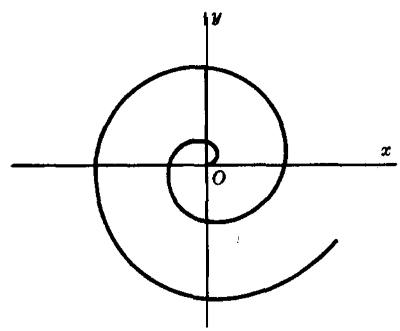


Fig. 11-22

12

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1, z_1)$ Y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

12.1 $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

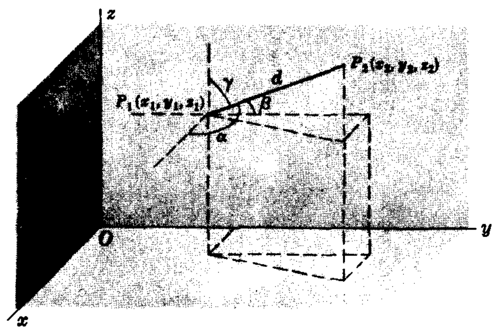


Fig. 12-1

[illegible]

12.2 $$l = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad m = \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad n = \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

donde α, β, γ denotan los ángulos que forma la línea P_1P_2 ron la parte positiva de los ejes x, y, z respectivamente y d está dada por 12.1 [véase Fig. 12-1].

12.3 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{o} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

NUMEROS DIRECTORES

Los números L, M, N que son proporcionales a los cosenos directores l, m, n, son llamados números directores. La relación entre ellos está dada por

12.4 $$l = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad m = \frac{M}{L^2 + M^2 + N^2}, \quad n = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

ECUACIONES EN FORMA CANONICA DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS $P_1(x_1,y_1,z_1)$ Y $P_2(x_2,y_2,z_2)$

12.5 $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{or} \quad \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

Estas ecuaciones también son válidas si se remplaza l, m, n por L, M, N respectivamente.

ECUACIONES EN FORMA PARAMETRICA DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS $P_1(x_1,y_1,z_1)$ Y $P_2(x_2,y_2,z_2)$

12.6 $$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$$

Estas ecuaciones también son válidas si se remplaza l, m, n por L, M, N respectivamente.

ANGULO ϕ FORMADO POR DOS RECTAS CON COSENOS DIRECTORES l_1, m_1, n_1 Y l_2, m_2, n_2

12.7 $$\cos\phi = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

ECUACION GENERAL DE UN PLANO

12.8 $$Ax + By + Cz + D = 0$$ [A, B, C, D siendo constantes]

ECUACION DEL PLANO QUE PASA POR LOS PUNTOS $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3)$

12.9 $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

o

12.10 $$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1) + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}(y-y_1) + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1) = 0$$

ECUACION DEL PLANO EN FORMA SEGMENTARIA

12.11 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

donde a, b, c son las intersecciones con los ejes x, y, z respectivamente.

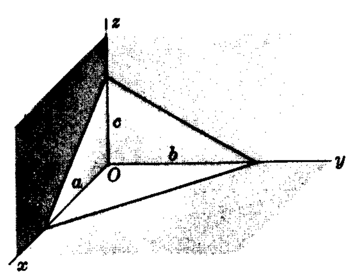


Fig. 12-2

ECUACIONES DE LA LINEA QUE PASA POR (x_0, y_0, z_0) PERPENDICULAR AL PLANO $Ax + By + Cz + D = 0$

12.12 $$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad \text{o} \quad x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct$$

Adviértase que los números directores de una línea perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ son A, B, C.

DISTANCIA DEL PUNTO (x_0, y_0, z_0) AL PLANO $Ax + By + Cz + D = 0$

12.13 $$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

en la cual el signo debe escogerse de tal manera que la distancia no resulte negativa.

ECUACION DEL PLANO EN FORMA NORMAL

12.14 $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

donde p = distancia perpendicular desde 0 hasta el punto P del plano, mientras que α, β, γ son los ángulos que forma OP con los ejes positivos x, y, z.

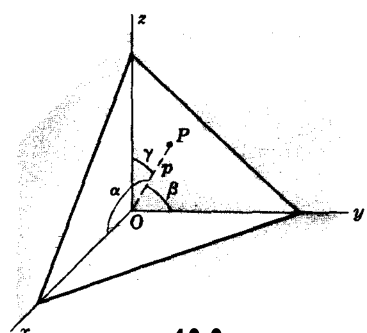


Fig. 12-3

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR TRANSLACION Y ROTACION

12.15 $$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

donde (x, y, z) denotan las coordenadas primitivas [o sea las coordenadas relativas al sistema xyz], (x', y', z') denotan las nuevas coordenadas [relativas al sistema $x'y'z'$] y (x_0, y_0, z_0) denotan las coordenadas del nuevo origen 0' con respecto al sistema primitivo de coordenadas xyz.

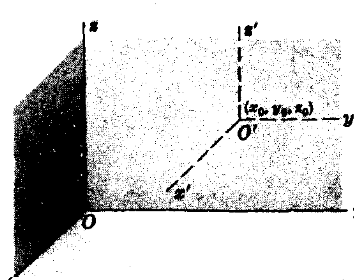


Fig. 12-4

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR SIMPLE ROTACION

12.16 $$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{cases}$$

o $$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z \end{cases}$$

donde los orígenes de los sistemas xyz y $x'y'z'$ coinciden mientras que l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 son los cosenos directores de los ejes x', y', z' en relación con los ejes x, y, z respectivamente.

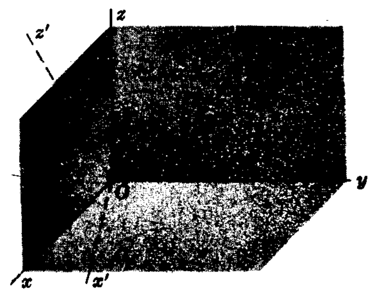


Fig. 12-5

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POR SIMPLE TRASLACION

12.17 $$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + x_0 \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + y_0 \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + z_0 \end{cases}$$

o $$\begin{cases} x' = l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) \\ y' = l_2(x - x_0) + m_2(y - y_0) + n_2(z - z_0) \\ z' = l_3(x - x_0) + m_3(y - y_0) + n_3(z - z_0) \end{cases}$$

donde el origen O' del sistema $x'y'z'$ tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) con respecto al sistema xyz mientras que l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 son los cosenos directores de los ejes x', y', z' en, relación con los ejes x, y, z respectivamente.

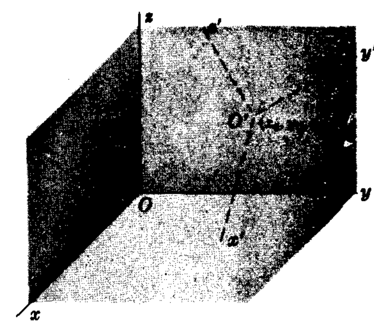


Fig. 12-6

COORDENADAS CILINDRICAS (r, θ, z)

Un punto P puede ser localizado por medio de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) [véase Fig. 12-7] lo mismo que por coordenadas rectangulares (x, y, z).

Las ecuaciones de transformación son

12.18 $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

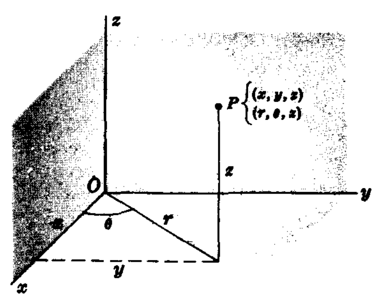


Fig. 12-7

COORDENADAS ESFERICAS (r, θ, ϕ)

Un punto P puede ser localizado por medio de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) [véase Fig. 12-8] lo mismo que por coordenadas rectangulares (x, y, z).

Las ecuaciones de transformación son

12.19
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

o
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases}$$

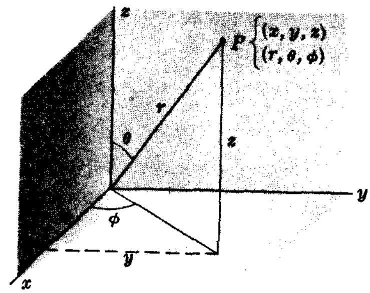


Fig. 12-8

ECUACION DE LA ESFERA EN COORDENADAS RECTANGULARES

12.20
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

donde el centro de la esfera es (x_0, y_0, z_0) y el radio R.

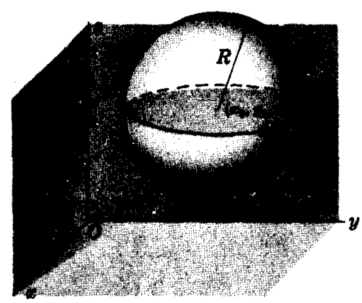


Fig. Il-9

ECUACION DE LA ESFERA EN COORDENADAS CILINDRICAS

12.21
$$r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

donde el centro de la esfera en coordenadas cilíndricas es (r_0, θ_0, z_0) y el radio R.

Cuando el centro se halla en el origen la ecuación es

12.22
$$r^2 + z^2 = R^2$$

ECUACION DE LA ESFERA EN COORDENADAS ESFERICAS

12.23
$$r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) = R^2$$

donde el centro de la esfera en coordenadas esféricas es (r_0, θ_0, ϕ_0) y el radio R.

Cuando el centro se halla en el origen la ecuación es

12.24
$$r = R$$

ECUACION DEL ELIPSOIDE CON CENTRO EN (x_0, y_0, z_0) Y SEMI-EJES a, b, c

12.25 $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

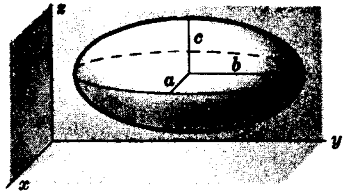


Fig. **12-10**

CILINDRO ELIPTICO CUYO EJE COINCIDE CON EL EJE z

12.26 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a, b denotan los semi-ejes de la sección elíptica.
Si $b = a$ se trata de un cilindro circular de radio a.

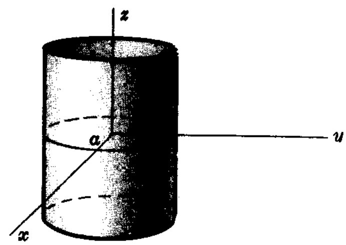


Fig. 12-11

CONO ELIPTICO CUYO EJE COINCIDE CON EL EJE z

12.27 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

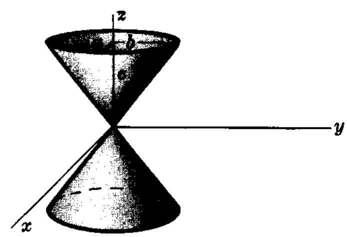


Fig. 12-12

HIPERBOLOIDE DE UNA SOLA HOJA

12.28 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

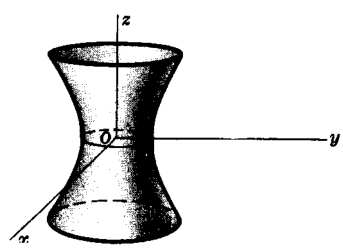


Fig. 12-13

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

12.29 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Obsérvese la orientación de los ejes en la Fig. 12-14.

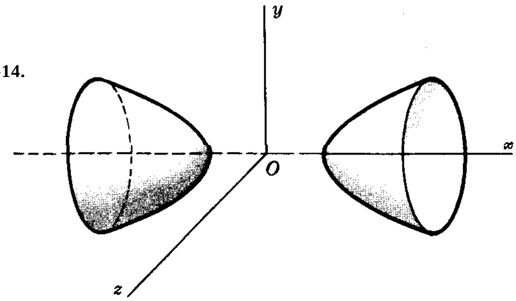


Fig. 12-14

12.30 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

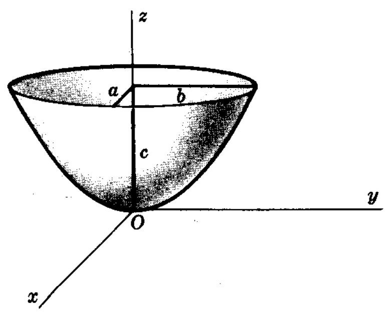


Fig. 12-15

PARABOLOIDE HIPERBOLICO

12.31 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Obsérvese la orientación de los ejes en la Fig. 12-16.

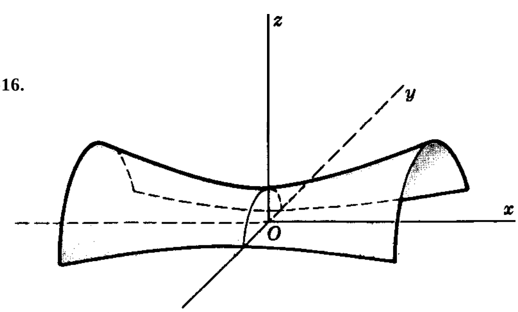


Fig. 12-16

13 DERIVADAS

DEFINICION DE UNA DERIVADA

Si y = f(z), la derivada dey o de f(x) con respecto a x se define como

12.1 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\text{A Z}}$$

donde h = Az. La derivada también se designa por y', df/dx o $f'(x)$. El proceso seguido para hallar la derivada se llama *diferenciación.*

REGLAS GENERALES DE DIFERENCIACION

En lo siguiente u, v, w son funciones de x; a, b, c, n constantes [con restricciones si así se indica]; e = 2,71828. es la base natural de los logaritmos; ln u es el logaritmo natural de u [o sea el logaritmo en base e] donde se supone que $u > 0$ y que todos los ángulos se dan en radianes.

13.2 $$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

13.3 $$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

13.4 $$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$$

13.5 $$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

12.6 $$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

13.7 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

12.8 $$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

13.9 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

12.10 $$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

12.11 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$ (Regla de la cadena)

13. 12 $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$$

13.13 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE LAS TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

13.14 $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$

13.15 $\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$

13.16 $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

13.17 $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

13.18 $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

13.19 $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

13.20 $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $\left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \frac{\pi}{2}\right]$

13.21 $\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cos^{-1} u < \pi]$

13.22 $\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $\left[-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \frac{\pi}{2}\right]$

13.23 $\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cot^{-1} u < \pi]$

13.24 $\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ $\left[\begin{array}{l} + \text{ si } 0 < \sec^{-1} u < \pi/2 \\ - \text{ si } \pi/2 < \sec^{-1} u < \pi \end{array}\right]$

13.25 $\frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ $\left[\begin{array}{l} - \text{ si } 0 < \csc^{-1} u < \pi/2 \\ + \text{ si } -\pi/2 < \csc^{-1} u < 0 \end{array}\right]$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

13.26 $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}$ $a \neq 0, 1$

13.27 $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

13.28 $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

13.29 $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$

13.30 $\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}[v \ln u] = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y DE LAS HIPERBOLICAS RECIPROCAS

13.31 $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u \frac{du}{dx}$

13.32 $\frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$

13.33 $\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$

13.34 $\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$

13.35 $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$

13.36 $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

13.37 $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

13.38 $\quad \dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} \qquad \left[\begin{array}{l} + \text{ si } \cosh^{-1} u > 0,\ u > 1 \\ - \text{ si } \cosh^{-1} u < 0,\ u > 1 \end{array}\right]$

13.39 $\quad \dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx} \qquad [-1 < u < 1]$

13.40 $\quad \dfrac{d}{dx}\coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx} \qquad [u > 1 \text{ o } u < -1]$

13.41 $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx} \qquad \left[\begin{array}{l} - \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u > 0,\ 0 < u < 1 \\ + \text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u < 0,\ 0 < u < 1 \end{array}\right]$

13.42 $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx} \qquad [- \text{ si } u > 0,\ + \text{ si } u > 0]$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La segunda, tercera y las derivadas de orden superior se definen así.

13.43 Segunda derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$

13.44 Tercera derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$

13.45 n-ésima derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

REGLA DE LEIBNITZ PARA DERIVADAS SUPERIORES DE PRODUCTOS

Supóngase que D^p representa al operador $\dfrac{d^p}{dx^p}$ tal que $D^pu = \dfrac{d^pu}{dx^p}$ = la p-ésima derivada de u. Entonces

13.46 $\quad D^n(uv) = uD^nv + \dbinom{n}{1}(Du)(D^{n-1}v) + \dbinom{n}{2}(D^2u)(D^{n-2}v) + \cdots + vD^nu$

donde $\dbinom{n}{1}, \dbinom{n}{2}, \ldots$ son los coeficientes binomiales [página 3].

Como casos notables están

13.47 $\quad \dfrac{d^2}{dx^2}(uv) = u\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^2u}{dx^2}$

13.48 $\quad \dfrac{d^3}{dx^3}(uv) = u\dfrac{d^3v}{dx^3} + 3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2} + 3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^3u}{dx^3}$

DIFERENCIALES

Sea $y = f(x)$ y $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Entonces

13.49 $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon = \dfrac{dy}{dx} + \epsilon$

donde $\epsilon \to 0$ a medida que $\Delta x \to 0$. Así

13.50 $\quad \Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x$

Si se llama $\Delta x = dx$ la diferencial de x, entonces la diferencial de y se define como

13.51 $\quad dy = f'(x)\,dx$

REGLAS PARA DIFERENCIALES

Las reglas para obtener diferenciales son exactamente análogas a las de derivación. Como ejemplos se observa que

13.52 $$d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw \pm \cdots$$

13.53 $$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

13.54 $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

13.55 $$d(u^n) = nu^{n-1}\,du$$

13.56 $$d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du$$

13.57 $$d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\,du$$

DERIVADAS PARCIALES

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables x y y. Entonces la definición de la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x, mientras y se conserva constante, está dada por

13.58 $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Análogamente la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y, mientras x se conserva constante, se define por

13.59 $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Las derivadas parciales de orden superior se definen de la siguiente manera.

13.60 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

13.61 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Los resultados expresados en 13.61 son iguales si la función y sus derivadas parciales son continuas, o sea que en este caso no importa el orden en que se efectúe la diferenciación.

La diferencial de $f(x, y)$ se define como

13.62 $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

De manera exactamente análoga se define la diferencial de las funciones de más de dos variables.

14 INTEGRALES INDEFINIDAS

DEFINICION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, entonces y es la función cuya derivada es $f(x)$ y se denomina *anti-derivada* de f(x) o ***integral indefinida*** de f(x), lo cual se escribe $\int f(x)\, dx$. Por otra parte, si $y = \int f(u)\, du$, entonces $\dfrac{dy}{du} = f(u)$. Puesto que la derivada de una constante es cero, todas las derivadas indefinidas difieren entre sí por una constante arbitraria.

Véase la definición de integral definida en la página 94. El procedimiento seguido para hallar la integral se llama ***integración.***

REGLAS GENERALES DE INTEGRACION

A continuación u, v, w son funciones de x; a, b, p, q, n, son constantes, con las restricciones que en caso dado se indiquen; $e = 2{,}71828$ es la base natural de los logaritmos; $\ln u$ es el logaritmo natural de u suponiendo que $u > 0$ [en general, para poder aplicar las fórmulas en los casos en que $u < 0$, remplácese $\ln u$ por $\ln |u|$]; todos los ángulos están expresados en radianes. Se han omitido todas las constantes de integración por estar subentendidas.

14.1 $$\int a\, dx = ax$$

14.2 $$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

14.3 $$\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \pm \int w\, dx \pm \cdots$$

14.4 $$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$ [Integración por partes]

Véase lo referente a la integración generalizada por partes en 14.48

14.5 $$\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} \int f(u)\, du$$

14.6 $$\int F\{f(x)\}\, dx = \int F(u) \frac{dx}{du}\, du = \int \frac{F(u)}{f'(x)}\, du$$

14.7 $$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$ [Para $n = -1$, véase 14.8]

14.8 $$\int \frac{du}{u} = \ln u \text{ si } u > 0 \text{ o } \ln(-u) \text{ si } u < 0$$
$$= \ln |u|$$

14.9 $$\int e^u\, du = e^u$$

14.10 $$\int a^u\, du = \int e^{u \ln a}\, du = \frac{e^{u \ln a}}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

14.11 $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u$

14.12 $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u$

14.13 $\int \tan u \, du = \ln \sec u = -\ln \cos u$

14.14 $\int \cot u \, du = \ln \operatorname{sen} u$

14.15 $\int \sec u \, du = \ln(\sec u + \tan u) = \ln \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

14.16 $\int \csc u \, du = \ln(\csc u - \cot u) = \ln \tan \frac{u}{2}$

14.17 $\int \sec^2 u \, du = \tan u$

14.18 $\int \csc^2 u \, du = -\cot u$

14.19 $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u$

14.20 $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u$

14.21 $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u)$

14.22 $\int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u)$

14.23 $\int \sec u \tan u \, du = \sec u$

14.24 $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u$

14.25 $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u$

14.26 $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u$

14.27 $\int \tanh u \, du = \ln \cosh u$

14.28 $\int \coth u \, du = \ln \operatorname{senh} u$

14.29 $\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh u)$ o $2 \tan^{-1} e^u$

14.30 $\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \tanh \frac{u}{2}$ o $-\coth^{-1} e^u$

14.31 $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u$

14.32 $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u$

14.33 $\int \tanh^2 u \, du = u - \tanh u$

14.34 $$\int \coth^2 u\, du = u - \coth u$$

14.35 $$\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \frac{\operatorname{senh} 2u}{4} - \frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u - u)$$

14.36 $$\int \cosh^2 u\, du = \frac{\operatorname{senh} 2u}{4} + \frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u + u)$$

14.37 $$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u$$

14.38 $$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u$$

14.39 $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

14.40 $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} \qquad u^2 > a^2$$

14.41 $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} \qquad u^2 < a^2$$

14.42 $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

14.43 $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) \quad \text{o} \quad \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}$$

14.44 $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$$

14.45 $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left|\frac{u}{a}\right|$$

14.46 $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right)$$

14.47 $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right)$$

14.48 $$\int f^{(n)} g\, dx = f^{(n-1)} g - f^{(n-2)} g' + f^{(n-3)} g'' - \cdots (-1)^n \int f g^{(n)}\, dx$$

Esta última es llamada fórmula *generalizada de integración por* partes.

SUSTITUCIONES IMPORTANTES

Ocurre en la práctica que es posible simplificar una integral mediante el empleo de una transformación o sustitución apropiada junto con la fórmula 14.6, página 57. En la lista siguiente se dan algunas transformaciones y sus resultados.

14.49 $$\int F(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \int F(u)\, du \qquad \text{donde} \quad u = ax + b$$

14.50 $$\int F(\sqrt{ax + b})\, dx = \frac{2}{a} \int u\, F(u)\, du \qquad \text{donde} \quad u = \sqrt{ax + b}$$

14.51 $$\int F(\sqrt[n]{ax + b})\, dx = \frac{n}{a} \int u^{n-1} F(u)\, du \qquad \text{donde} \quad u = \sqrt[n]{ax + b}$$

14.52 $$\int F(\sqrt{a^2 - x^2})\, dx = a \int F(a \cos u) \cos u\, du \qquad \text{donde} \quad x = a \operatorname{sen} u$$

14.53 $$\int F(\sqrt{x^2 + a^2})\, dx = a \int F(a \sec u) \sec^2 u\, du \qquad \text{donde} \quad x = a \tan u$$

14.54 $\displaystyle\int F(\sqrt{x^2-a^2})\,dx = a\int F(a\tan u)\sec u\tan u\,du$ donde $x = a\sec u$

14.55 $\displaystyle\int F(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{F(u)}{u}\,du$ donde $u = e^{ax}$

14.56 $\displaystyle\int F(\ln x)\,dx = \int F(u)\,e^u\,du$ donde $u = \ln x$

14.57 $\displaystyle\int F\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)dx = a\int F(u)\cos u\,du$ donde $u = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a}$

Resultados similares se aplican para otras funciones trigonométricas recíprocas

14.56 $\displaystyle\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = 2\int F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$ donde $u = \tan;$

INTEGRALES NOTABLES

En las páginas 60 a 93 se encuentra una tabla de integrales clasificada por tipos notables. Las observaciones hechas en la página 57 son igualmente aplicables en este caso. En todos los casos se supone excluida la división por cero.

INTEGRALES CON CONTIENEN $ax + b$

14.59 $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

14.60 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$

14.61 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b)$

14.62 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4}\ln(ax+b)$

14.63 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

74.64 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.65 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = \frac{2ax-b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

14.66 $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)}$

14.67 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$

14.68 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(ax+b)$

14.69 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{(ax+b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax+b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax+b)} + \frac{3b^2}{a^4}\ln(ax+b)$

14.70 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

14.71 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = \frac{-a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.72 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4x} - \frac{a^3x}{b^4(ax+b)} - \frac{3a^2}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.73 $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{2(ax+b)^2}$

14.74 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2}$

14.75 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(ax+b)$

14.76 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax+b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax+b)^2} - \frac{3b}{a^4}\ln(ax+b)$

14.77 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{a^2x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.78 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} = \frac{-a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.79 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} = \frac{a^4x^2}{2b^5(ax+b)^2} - \frac{4a^3x}{b^5(ax+b)} - \frac{(ax+b)^2}{2b^5x^2} - \frac{6a^2}{b^5}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

14.80 $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$ Si $n = -1$, véase 14.59.

14.81 $\displaystyle\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}, \quad n \neq -1, -2$

Si $n = -1, -2$, véase 14.62, 14.67.

14.82 $\displaystyle\int x^2(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$

Si $n = -1, -2, -3$, véase 14.61, 14.66, 14.75.

14.83 $$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n-1}\,dx \\[2ex] \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \dfrac{mb}{(m+n+1)a}\displaystyle\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx \\[2ex] \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \dfrac{m+n+2}{(n+1)b}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n+1}\,dx \end{cases}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{ax+b}$

14.84 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$

14.85 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$

14.86 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$

14.87 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right) \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} \end{cases}$$

14.88 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$ [Véase 14.87)

14.89 $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}$$

14.90 $$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$$

14.91 $$\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(a+bx)^3}$$

14.92 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$ [Véase 14.87]

14.93 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$ [Véase 14.87]

14.94 $$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$

14.95 $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$$

14.96 $$\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2x^m}{(2m+3)a}(ax+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx$$

14.97 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$$

14.98 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = -\frac{(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b}\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}}\,dx$$

14.99 $$\int (ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)}$$

14.100 $$\int x(ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$$

14.101 $$\int x^2(ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)}$$

14.102 $$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x}\,dx = \frac{2(ax+b)^{m/2}}{m} + b\int \frac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x}\,dx$$

14.103 $$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx} + \frac{ma}{2b}\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x}\,dx$$

14.104 $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \frac{2}{(m-2)b(ax+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $ax+b$ Y $px+q$

14.105 $$\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)$$

14.106 $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{q}{p}\ln(px+q)\right\}$$

14.107 $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)\right\}$$

14.108 $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{q}{bp-aq}\ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\}$$

14.109 $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2}\left\{\frac{q^2}{p}\ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2}\ln(ax+b)\right\}$$

14.110 $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int\frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}}\right\}$$

14.111 $$\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln(px+q)$$

14.112 $$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a\displaystyle\int\frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-m-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\displaystyle\int\frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}\,dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\displaystyle\int\frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} \end{cases}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{ax+b}$ Y $px+q$

14.113 $$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

14.114 $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{aq-bp}\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

14.115 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \dfrac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \dfrac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

14.116 $$\int (px+q)^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(px+q)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{(2n+3)p} + \frac{bp-aq}{(2n+3)p}\int\frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$

14.117 $$\int \frac{dx}{(px+q)^n\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(aq-bp)(px+q)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(aq-bp)}\int\frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

14.118 $$\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(px+q)^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a}\int\frac{(px+q)^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}}$$

14.119 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n}\,dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p}\int\frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{ax+b}$ Y $\sqrt{px+q}$

14.120 $$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{ap}}\ln\left(\sqrt{a(px+q)}+\sqrt{p(ax+b)}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-ap}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} \end{cases}$$

14.121 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap}\int\frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

14.122 $$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap}\sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

14.123 $$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

14.124 $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN x^2+a^2

14.125 $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.126 $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

14.127 $$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+a^2} = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.128 $$\int \frac{x^3\,dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2)$$

14.129 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

14.130 $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.131 $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

14.132 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.133 $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)}$$

14.134 $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.135 $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

14.136 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

14.137 $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.138 $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

14.139 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

14.140 $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

14.141 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}}$$

14.142 $$\int \frac{x^m\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

14.143 $$\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $x^2 - a^2$, $x^2 > a^2$

14.144 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) \quad \text{o} \quad -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$

14.145 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

14.146 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

14.147 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x^2-a^2)$

14.148 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)$

14.149 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

14.150 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

14.151 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

14.152 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2-a^2)}$

14.153 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

14.154 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

14.155 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

14.156 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

14.157 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

14.158 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$

14.159 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$

14.160 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$

14.161 $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + a^2\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-a^2)^n}$

14.162 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}}$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $a^2 - x^2,\ x^2 < a^2$

14.16 $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \quad \text{o} \quad \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

14.16 $$\int \frac{x\,dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)$$

14.165 $$\int \frac{x^2\,dx}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

14.166 $$\int \frac{x^3\,dx}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(a^2 - x^2)$$

14.16 $$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

14.168 $$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

14.169 $$\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

14.170 $$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

14.171 $$\int \frac{x\,dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)}$$

14.172 $$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

14.173 $$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)$$

14.174 $$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

14.175 $$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

14.176 $$\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

14.17 $$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

14.17 $$\int \frac{x\,dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

14.179 $$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

14.180 $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2 - x^2)^n} = a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2 - x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

14.181 $$\int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2 - x^2)^n}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{x^2+a^2}$

14.182 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \quad \text{o} \quad \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}$$

14.183 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

14.184 $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.185 $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$$

14.186 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.187 $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$$

14.188 $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.189 $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.190 $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

14.191 $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.192 $$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

14.193 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.194 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.195 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.196 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.197 $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.198 $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.199 $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.200 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.201 $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.202 $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.203 $$\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.204 $$\int x(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$$

14.205 $$\int x^2(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.206 $$\int x^3(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$$

14.207 $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.208 $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.209 $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{x^2-a^2}$

14.210 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

14.211 $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

14.212 $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2}$$

14.213 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$

14.214 $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$$

14.215 $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$

14.216 $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

14.217 $$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

14.218 $$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

14.219 $$\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

14.220 $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$

14.221 $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

14.222 $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$

14.223 $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

14.224 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

14.225 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

14.226 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

14.227 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

14.228 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} \quad \frac{}{a^4\sqrt{x^2-a^2}}$

14.229 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

14.230 $\displaystyle\int (x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

14.231 $\displaystyle\int x(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

14.232 $\displaystyle\int x^2(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

14.233 $\displaystyle\int x^3(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

14.234 $\displaystyle\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

14.235 $\displaystyle\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

14.236 $\displaystyle\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2-x^2}$

14.237 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.238 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$

14.239 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.240 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2}$

14.241 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.242 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$

14.243 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.244 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.245 $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

14.246 $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.247 $\displaystyle\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

14.248 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.249 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.250 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.251 $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

14.252 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

14.253 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.254 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

14.255 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.256 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}}$

14.257 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.258 $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.259 $\displaystyle\int x(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$

14.260 $\displaystyle\int x^2(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.261 $\displaystyle\int x^3(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$

14.262 $\displaystyle\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.263 $\displaystyle\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.264 $\displaystyle\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $ax^2 + bx + c$

14.265 $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left(\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right) \end{cases}$$

Si $b^2 = 4ac$, $ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2$ y entonces se pueden emplear los resultados de las páginas 60-61. Si $b = 0$ utilícense los resultados de la página 64. Si a o $c = 0$ empléense los resultados de las páginas 60-61.

14.266 $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a} \ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.267 $$\int \frac{x^2\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln(ax^2+bx+c) + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.268 $$\int \frac{x^m\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{ax^2+bx+c}$$

14.269 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c} \ln \left(\frac{x^2}{ax^2+bx+c} \right) - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.270 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)} = \frac{b}{2c^2} \ln \left(\frac{ax^2+bx+c}{x^2} \right) - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.271 $$\int \frac{dx}{x^n(ax^2+bx+c)} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1}} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)} - \frac{a}{c} \int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}$$

14.272 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.273 $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.274 $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

14.275 $$\int \frac{x^m\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$
$$- \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

14.276 $$\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2}\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

14.277 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2} = \frac{1}{2c(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)}$$

14.278 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{1}{cx(ax^2+bx+c)} - \frac{3a}{c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} - \frac{2b}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2}$$

14.279 $$\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}$$
$$- \frac{(m+n-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sqrt{ax^2+bx+c}$

En las fórmulas siguientes si $b^2 = 4ac$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x+b/2a)$ y entonces pueden emplearse las fórmulas de las páginas 60-61. Si $b = 0$ utilícense las fórmulas de las páginas 67-70. Si $a = 0$ o $c = 0$ utilícense las fórmulas de las páginas 61.62.

14.280 $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + 2ax + b\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad \text{o} \quad \dfrac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

14.281 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.282 $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.283 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c} + bx + 2c}{x}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad \text{o} \quad -\dfrac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

14.284 $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.285 $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.286 $$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.287 $$\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{6ax-5b}{24a^2}(ax^2+bx+c)^{3/2} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

14.288 $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}\,dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.289 $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.290 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.291 $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.292 $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.293 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

14.294 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{ax^2+2bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} - \frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

14.295 $$\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)}\int (ax^2+bx+c)^{n-1/2}\,dx$$

14.296 $$\int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{a(2n+3)} - \frac{b}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx$$

14.297 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$

14.298 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $x^3 + a^3$

Obsérvese que para las integrales que contienen $x^3 - a^3$ se remplazan por-n

14.299 $$\int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

14.300 $$\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

14.301 $$\int \frac{x^2\,dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln(x^3+a^3)$$

14.302 $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

14.303 $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{6a^4}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

14.304 $$\int \frac{dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

14.305 $$\int \frac{x\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

14.306 $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(x^3+a^3)}$$

14.307 $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

14.308 $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(x^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3}$$ [Véase 14.300]

14.309 $$\int \frac{x^m\,dx}{x^3+a^3} = \frac{x^{m-2}}{m-2} - a^3\int \frac{x^{m-3}\,dx}{x^3+a^3}$$

14.310 $$\int \frac{dx}{x^n(x^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{x^{n-3}(x^3+a^3)}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $x^4 \pm a^4$

14.311 $$\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

14.312 $$\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

14.313 $$\int \frac{x^2\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

14.314 $$\int \frac{x^3\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4}\ln(x^4+a^4)$$

14.315 $$\int \frac{dx}{x(x^4+a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+a^4}\right)$$

14.316 $$\int \frac{dx}{x^2(x^4+a^4)} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) + \frac{1}{2a^5\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

14.317 $$\int \frac{dx}{x^3(x^4+a^4)} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^6}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

14.318 $$\int \frac{dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) - \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.319 $$\int \frac{x\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$$

14.320 $$\int \frac{x^2\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.321 $$\int \frac{x^3\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4}\ln(x^4-a^4)$$

14.322 $$\int \frac{dx}{x(x^4-a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left(\frac{x^4-a^4}{x^4}\right)$$

14.323 $$\int \frac{dx}{x^2(x^4-a^4)} = \frac{1}{a^4x} + \frac{1}{4a^5}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{1}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

14.324 $$\int \frac{dx}{x^3(x^4-a^4)} = \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{4a^6}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $x^n \pm a^n$

14.325 $$\int \frac{dx}{x(x^n+a^n)} = \frac{1}{na^n}\ln\frac{x^n}{x^n+a^n}$$

14.326 $$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n+a^n} = \frac{1}{n}\ln(x^n+a^n)$$

14.327 $$\int \frac{x^m\,dx}{(x^n+a^n)^r} = \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n+a^n)^{r-1}} - a^n\int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n+a^n)^r}$$

14.328 $$\int \frac{dx}{x^m(x^n+a^n)^r} = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^m(x^n+a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n+a^n)^r}$$

14.329 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^n}} = \frac{1}{n\sqrt{a^n}}\ln\left(\frac{\sqrt{x^n+a^n}-\sqrt{a^n}}{\sqrt{x^n+a^n}+\sqrt{a^n}}\right)$$

14.330 $$\int \frac{dx}{x(x^n-a^n)} = \frac{1}{na^n}\ln\left(\frac{x^n-a^n}{x^n}\right)$$

14.331 $$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n-a^n} = \frac{1}{n}\ln(x^n-a^n)$$

14.332 $$\int \frac{x^m\,dx}{(x^n-a^n)^r} = a^n\int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n-a^n)^r} + \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n-a^n)^{r-1}}$$

14.333 $$\int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^r} = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n-a^n)^r} - \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^{r-1}}$$

14.334 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^n}} = \frac{2}{n\sqrt{a^n}}\cos^{-1}\sqrt{\frac{a^n}{x^n}}$$

14.335 $$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m}+a^{2m}} = \frac{1}{ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{sen}\frac{(2k-1)p\pi}{2m}\tan^{-1}\left(\frac{x+a\cos[(2k-1)\pi/2m]}{a\operatorname{sen}[(2k-1)\pi/2m]}\right) - \frac{1}{2ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{(2k-1)p\pi}{2m}\ln\left(x^2+2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}+a^2\right)$$

donde $0 < p \leqq 2m$.

14.336 $$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m}-a^{2m}} = \frac{1}{2ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{kp\pi}{m}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{m}+a^2\right) - \frac{1}{ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\operatorname{sen}\frac{kp\pi}{m}\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos(k\pi/m)}{a\operatorname{sen}(k\pi/m)}\right) + \frac{1}{2ma^{2m-p}}\{\ln(x-a)+(-1)^p\ln(x+a)\}$$

donde $0 < p \leqq 2m$.

14.337 $$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m+1}+a^{2m+1}} = \frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{sen}\frac{2kp\pi}{2m+1}\tan^{-1}\left(\frac{x+a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right) - \frac{(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2+2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+a^2\right) + \frac{(-1)^{p-1}\ln(x+a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

donde $0 < p \leqq 2m+1$.

14.338 $$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m+1}-a^{2m+1}} = \frac{-2}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{sen}\frac{2kp\pi}{2m+1}\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right) + \frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+a^2\right) + \frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

donde $0 < p \leqq 2m+1$.

INTEGRALES QUE CONTIENEN sen ax

14.339 $$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

14.340 $$\int x\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}$$

14.341 $$\int x^2\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax + \left(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a}\right)\cos ax$$

14.342 $$\int x^3\operatorname{sen} ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2}-\frac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen} ax + \left(\frac{6x}{a^3}-\frac{x^3}{a}\right)\cos ax$$

14.343 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \cdots$$

14.344 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{x} + a\int \frac{\cos ax}{x}\,dx$$ [véase 14.373]

14.345 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

14.346 $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.347 $$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

14.340 $$\int x \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen} 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

14.349 $$\int \operatorname{sen}^3 ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a}$$

14.350 $$\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$$

14.351 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

14.352 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \operatorname{sen}^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

14.353 $$\int \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)}$$ [*Si* $p = \pm q$, *véase* 14.368.]

14.354 $$\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

14.355 $$\int \frac{x\,dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$$

14.356 $$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$$

14.357 $$\int \frac{x\,dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

14.358 $$\int \frac{dx}{(1-\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

14.359 $$\int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$$

14.360 $$\int \frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax+q}{\sqrt{p^2-q^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax+q-\sqrt{q^2-p^2}}{p\tan\frac{1}{2}ax+q+\sqrt{q^2-p^2}}\right) \end{cases}$$

Si $p = \pm q$ **véanse** 14.354 y **14.356.**

14.361 $$\int \frac{dx}{(p+q\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{q\cos ax}{a(p^2-q^2)(p+q\operatorname{sen} ax)} + \frac{p}{p^2-q^2}\int\frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax}$$

Si $p = \pm q$ véanse 14.358 y 14.359.

14.362 $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{p^2+q^2}\tan ax}{p}$$

14.363 $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}\tan ax}{p} \\[2ex] \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax+p}{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax-p}\right) \end{cases}$$

14.364 $$\int x^m \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{x^m\cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1}\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\operatorname{sen} ax\,dx$$

14.365 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^n}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}\,dx$$ [véase 14.395]

14.366 $$\int \operatorname{sen}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2} ax\,dx$$

14.367 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$$

14.368 $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-x\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\operatorname{sen}^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\cos ax$

14.369 $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$

14.370 $\displaystyle\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\operatorname{sen} ax}{a}$

14.371 $\displaystyle\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

14.372 $\displaystyle\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

14.373 $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots$

14.374 $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int\frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$ [Véase 14.343]

14.375 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

14.376 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

14.377 $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

14.378 $\displaystyle\int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

14.379 $\displaystyle\int \cos^3 ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} - \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{3a}$

14.380 $\displaystyle\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

14.381 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a}$

14.382 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

14.383 $\displaystyle\int \cos ax\cos px\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{sen}(a+p)x}{2(a+p)}$ [Si $a = \pm p$, véase 14.377.]

14.384 $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}$

14.385 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\cot\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\frac{ax}{2}$

14.386 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}$

14.387 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}$

14.388 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\cot\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\cot^3\frac{ax}{2}$

14.389 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\tan^3\frac{ax}{2}$

14.390 $$\int \frac{dx}{p+q\cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \sqrt{(p-q)/(p+q)}\, \tan \tfrac{1}{2}ax \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\dfrac{\tan \frac{1}{2}ax + \sqrt{(q+p)/(q-p)}}{\tan \frac{1}{2}ax - \sqrt{(q+p)/(q-p)}} \right) \end{cases}$$ [Si $p = \pm q$ véanse 14.384 y 14.386.]

14.391 $$\int \frac{dx}{(p+q\cos ax)^2} = \frac{q \operatorname{sen} ax}{a(q^2-p^2)(p+q\cos ax)} - \frac{p}{q^2-p^2} \int \frac{dx}{p+q\cos ax}$$ [Si $p = \pm q$ véanse 14.388 y 14.389.]

14.392 $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \frac{p\tan ax}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

14.393 $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \dfrac{p\tan ax}{\sqrt{p^2-q^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\dfrac{p\tan ax - \sqrt{q^2-p^2}}{p\tan ax + \sqrt{q^2-p^2}} \right) \end{cases}$$

14.394 $$\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^m \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2}\cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2}\cos ax\, dx$$

14.395 $$\int \frac{\cos ax}{x^n}\, dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^{n-1}}\, dx$$ [Véase 14.365]

14.396 $$\int \cos^n ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax\, dx$$

14.397 $$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

14.398 $$\int \frac{x\, dx}{\cos^n ax} = \frac{x \operatorname{sen} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\cos^{n-2} ax}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN sen ax Y cos ax

14.399 $$\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a}$$

14.400 $$\int \operatorname{sen} px \cos qx\, dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}$$

14.401 $$\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a}$$ [Si $n = -1$, véase 14.440.]

14.402 $$\int \cos^n ax \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a}$$ [Si $n = -1$, véase 14.429.]

14.403 $$\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$$

14.404 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan ax$$

14.405 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a \operatorname{sen} ax}$$

14.406 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{a\cos ax}$$

14.407 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2\cot 2ax}{a}$$

14.408 $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

14.409 $$\int \frac{\cos^2 ax}{\operatorname{sen} ax}\,dx = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

14.410 $$\int \frac{dx}{\cos ax(1\pm\operatorname{sen} ax)} = \mp\frac{1}{2a(1\pm\operatorname{sen} ax)} + \frac{1}{2a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

14.411 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax(1\pm\cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1\pm\cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

14.412 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax\pm\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)$$

14.413 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{\operatorname{sen} ax\pm\cos ax} = \frac{x}{2}\mp\frac{1}{2a}\ln(\operatorname{sen} ax\pm\cos ax)$$

14.414 $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{sen} ax\pm\cos ax} = \pm\frac{x}{2}+\frac{1}{2a}\ln(\operatorname{sen} ax\pm\cos ax)$$

14.415 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{p+q\cos ax} = -\frac{1}{aq}\ln(p+q\cos ax)$$

14.416 $$\int \frac{\cos ax\,dx}{p+q\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{aq}\ln(p+q\operatorname{sen} ax)$$

14.417 $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{(p+q\cos ax)^n} = \frac{1}{aq(n-1)(p+q\cos ax)^{n-1}}$$

14.418 $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(p+q\operatorname{sen} ax)^n} = \frac{-1}{aq(n-1)(p+q\operatorname{sen} ax)^{n-1}}$$

14.419 $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax+q\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\ln\tan\left(\frac{ax+\tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

14.420 $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax+q\cos ax+r} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{p+(r-q)\tan(ax/2)}{\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{p^2+q^2-r^2}}\ln\left(\dfrac{p-\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\tan(ax/2)}{p+\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\tan(ax/2)}\right) \end{cases}$$

Si $r = q$ véase 14.421. Si $r^2 = p^2 + q^2$ véase 14.422.

14.421 $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax+q(1+\cos ax)} = \frac{1}{ap}\ln\left(q+p\tan\frac{ax}{2}\right)$$

14.422 $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax+q\cos ax\pm\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{ax+\tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

14.423 $$\int \frac{dx}{p^2\operatorname{sen}^2 ax+q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{apq}\tan^{-1}\left(\frac{p\tan ax}{q}\right)$$

14.424 $$\int \frac{dx}{p^2\operatorname{sen}^2 ax-q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{2apq}\ln\left(\frac{p\tan ax-q}{p\tan ax+q}\right)$$

14.425 $$\int \operatorname{sen}^m ax\cos^n ax\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} ax\cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int \operatorname{sen}^{m-2} ax\cos^n ax\,dx \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} ax\cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int \operatorname{sen}^m ax\cos^{n-2} ax\,dx \end{cases}$$

14.426 $$\int \frac{\operatorname{sen}^m ax}{\cos^n ax}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} ax}{\cos^{n-2} ax}\,dx \\ \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{m} ax}{\cos^{n-2} ax}\,dx \\ \dfrac{-\operatorname{sen}^{m-1} ax}{a(m-n)\cos^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} ax}{\cos^{n} ax}\,dx \end{cases}$$

14.427 $$\int \frac{\cos^m ax}{\operatorname{sen}^n ax}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-\cos^{m-1} ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}\,dx \\ \dfrac{-\cos^{m+1} ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \frac{\cos^{m} ax}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}\,dx \\ \dfrac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\operatorname{sen}^{n} ax}\,dx \end{cases}$$

14.428 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m ax\cos^n ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{a(n-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax\cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m} ax\cos^{n-2} ax} \\ \dfrac{-1}{a(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax\cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} ax\cos^{n} ax} \end{cases}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN tan ax

14.429 $$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax = \frac{1}{a}\ln\sec ax$$

14.430 $$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

14.431 $$\int \tan^3 ax\,dx = \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a}\ln\cos ax$$

14.432 $$\int \tan^n ax\sec^2 ax\,dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

14.433 $$\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln\tan ax$$

14.434 $$\int \frac{dx}{\tan ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen} ax$$

14.435 $$\int x\tan ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^3}{3} + \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.436 $$\int \frac{\tan ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

14.437 $$\int x\tan^2 ax\,dx = \frac{x\tan ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax - \frac{x^2}{2}$$

14.438 $$\int \frac{dx}{p+q\tan ax} = \frac{px}{p^2+q^2} + \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(q\operatorname{sen} ax + p\cos ax)$$

14.439 $$\int \tan^n ax\,dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2} ax\,dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\cot ax$

14.440 $$\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} ax$$

14.441 $$\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{\cot ax}{a} - x$$

14.442 $$\int \cot^3 ax\, dx = -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} ax$$

14.443 $$\int \cot^n ax \csc^2 ax\, dx = -\frac{\cot^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

14.444 $$\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax}\, dx = -\frac{1}{a}\ln \cot ax$$

14.445 $$\int \frac{dx}{\cot ax} = -\frac{1}{a}\ln \cos ax$$

14.446 $$\int x \cot ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cdots\right\}$$

14.447 $$\int \frac{\cot ax}{x}\, dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \cdots$$

14.448 $$\int x \cot^2 ax\, dx = -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{sen} ax - \frac{x^2}{2}$$

14.449 $$\int \frac{dx}{p + q\cot ax} = \frac{px}{p^2+q^2} - \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(p \operatorname{sen} ax + q\cos ax)$$

14.450 $$\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2} ax\, dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN $\sec ax$

14.451 $$\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

14.452 $$\int \sec^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a}$$

14.453 $$\int \sec^3 ax\, dx = \frac{\sec ax \tan ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln(\sec ax + \tan ax)$$

14.454 $$\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na}$$

14.455 $$\int \frac{dx}{\sec ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$$

14.456 $$\int x \sec ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$$

14.457 $$\int \frac{\sec ax}{x}\, dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} + \frac{61(ax)^6}{4320} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots$$

14.458 $$\int x \sec^2 ax\, dx = \frac{x}{a}\tan ax + \frac{1}{a^2}\ln \cos ax$$

14.459 $\displaystyle\int \frac{dx}{q+p\sec ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p+q\cos ax}$

14.460 $\displaystyle\int \sec^n ax\,dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\,dx$

INTEGRALES QUE CONTIENEN csc ax

14.461 $\displaystyle\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2}$

14.462 $\displaystyle\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{\cot ax}{a}$

14.463 $\displaystyle\int \csc^3 ax\,dx = -\frac{\csc ax\cot ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2}$

14.464 $\displaystyle\int \csc^n ax\cot ax\,dx = -\frac{\csc^n ax}{na}$

14.465 $\displaystyle\int \frac{dx}{\csc ax} = -\frac{\cos ax}{a}$

14.466 $\displaystyle\int x\csc ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

14.467 $\displaystyle\int \frac{\csc ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

14.468 $\displaystyle\int x\csc^2 ax\,dx = -\frac{x\cot ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{sen} ax$

14.469 $\displaystyle\int \frac{dx}{q+p\csc ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax}$ [Véase 14.360]

14.470 $\displaystyle\int \csc^n ax\,dx = -\frac{\csc^{n-2} ax\cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\,dx$

INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

14.471 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$

14.472 $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4}$

14.473 $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9}$

14.474 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(x/a)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(x/a)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots$

14.475 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

14.476 $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

14.477 $$\int \cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cos^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

14.478 $$\int x\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4}$$

14.479 $$\int x^2\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9}$$

14.480 $$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x}\,dx$$ [Véase 14.4'143

14.481 $$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

14482 $$\int \left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2-x^2}\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

14.483 $$\int \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$$

14.484 $$\int x\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$$

14.485 $$\int x^2\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$$

14.486 $$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots$$

14.487 $$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$$

14.488 $$\int \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$$

14.489 $$\int x\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+a^2)\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$$

14.490 $$\int x^2\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$$

14.491 $$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx$$ [Véase 14.486]

14.492 $$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$$

14.493 $$\int \sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\sec^{-1}\dfrac{x}{a} - a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ x\sec^{-1}\dfrac{x}{a} + a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

14.494 $$\int x\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\sec^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^2}{2}\sec^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

14.495 $$\int x^2\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}\sec^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \dfrac{a^3}{6}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^3}{3}\sec^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \dfrac{a^3}{6}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

14.496 $$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots$$

14.497 $$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\sec^{-1}(x/a)}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\sec^{-1}(x/a)}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

14.490 $$\int \csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\csc^{-1}\dfrac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ x\csc^{-1}\dfrac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

14.499 $$\int x\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\csc^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^2}{2}\csc^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

14.500 $$\int x^2\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}\csc^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \dfrac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^3}{3}\csc^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \dfrac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

14.501 $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots\right)$$

14.502 $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\csc^{-1}(x/a)}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\csc^{-1}(x/a)}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

14.503 $$\int x^m\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

14.504 $$\int x^m\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cos^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

14.505 $$\int x^m\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$$

14.506 $$\int x^m\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$$

14.507 $$\int x^m\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \dfrac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \dfrac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

14.508 $$\int x^m\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\csc^{-1}(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \dfrac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\csc^{-1}(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \dfrac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN e^{ax}

14.509 $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$

14.510 $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$

14.511 $\displaystyle\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

14.512 $\displaystyle\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

$\displaystyle = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^nn!}{a^n}\right)$ si $n =$ entero positivo

14.513 $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$

14.514 $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx$

14.515 $\displaystyle\int \frac{dx}{p+qe^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax})$

14.516 $\displaystyle\int \frac{dx}{(p+qe^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p+qe^{ax})} - \frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax})$

14.517 $\displaystyle\int \frac{dx}{pe^{ax}+qe^{-ax}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{pq}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{p}{q}}\,e^{ax}\right) \\ \dfrac{1}{2a\sqrt{-pq}}\ln\left(\dfrac{e^{ax}-\sqrt{-q/p}}{e^{ax}+\sqrt{-q/p}}\right) \end{cases}$

14.518 $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

14.519 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2}$

14.520 $\displaystyle\int xe^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\operatorname{sen} bx - 2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

14.521 $\displaystyle\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\operatorname{sen} bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

14.522 $\displaystyle\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$

14.523 $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen}^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\operatorname{sen} bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}^{n-2} bx\,dx$

14.524 $\displaystyle\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\operatorname{sen} bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} bx\,dx$

INTEGRALES QUE CONTIENEN ln x

14.525 $\int \mathrm{I\,n\,z\,d\,x} = \mathrm{x\,l\,n\,z} - x$

14.526 $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2})$

14.527 $\int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)$ [Si m = -1 véase 14.528.]

14.528 $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

14.529 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

14.530 $\int \ln^2 z \, dx = x \ln^2 z - 22 \ln x + 22$

14.531 $\int \frac{\ln^n x \, dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$ [Si n = -1 véase 14.532.]

14.532 $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$

14.533 $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \cdots$

14.53 $\int \frac{x^m \, dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + (m+1)\ln x + \frac{(m+1)^2 \ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{(m+1)^3 \ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \cdots$

14.535 $\int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx$

14.536 $\int x^m \ln^n x \, dx = \frac{x^{m+1} \ln^n x}{m+1} \; \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} z \, dz$

si m = -1 véase 14.531.

14.537 $\int \ln(x^2 + a^2) \, dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a}$

14.538 $\int \ln(x^2 - a^2) \, dx = x \ln(x^2 - a^2) - 2z + a\left(\mathrm{l}\,\frac{x+a}{x-}\right)$

14.539 $\int x^m \ln(x^2 \pm a^2) \, dx = \frac{x^{m+1} \ln(x^2 \pm a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1} \int \frac{x^{m+2}}{x^2 \pm a^2} dx$

INTEGRALES QUE CONTIENEN sech ax

14.540 $\int \operatorname{senh} ax \, dx = \frac{\cosh ax}{a}$

14.541 $\int x \operatorname{senh} ax \, dx = \frac{x \cosh ax}{a} - \frac{\operatorname{senh} az}{a^2}$

14.542 $\int x^2 \operatorname{senh} ax \, dx = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right) \cosh ax - \frac{2x}{a^2} \operatorname{senh} ax$

14.543 $$\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} + \cdots$$

14.544 $$\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{senh} ax}{x} + a\int \frac{\cosh ax}{x}\,dx$$ [Véase 14.565]

14.545 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{1}{a}\ln \tanh \frac{ax}{2}$$

14.546 $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} - \cdots + \frac{2(-1)^n(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.547 $$\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} ax \cosh ax}{2a} - \frac{x}{2}$$

14.548 $$\int x \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{x \operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4}$$

14.549 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a}$$

14.550 $$\int \operatorname{senh} ax \operatorname{senh} px\,dx = \frac{\operatorname{senh}(a+p)x}{2(a+p)} - \frac{\operatorname{senh}(a-p)x}{2(a-p)}$$

Para $a = \pm p$ véase 14.547.

14.551 $$\int \operatorname{senh} ax \operatorname{sen} px\,dx = \frac{a\cosh ax \operatorname{sen} px - p\operatorname{senh} ax \cos px}{a^2+p^2}$$

14.552 $$\int \operatorname{senh} ax \cos px\,dx = \frac{a\cosh ax \cos px + p\operatorname{senh} ax \operatorname{sen} px}{a^2+p^2}$$

14.553 $$\int \frac{dx}{p + q\operatorname{senh} ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(\frac{qe^{ax}+p-\sqrt{p^2+q^2}}{qe^{ax}+p+\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

14.554 $$\int \frac{dx}{(p+q\operatorname{senh} ax)^2} = \frac{-q\cosh ax}{a(p^2+q^2)(p+q\operatorname{senh} ax)} + \frac{p}{p^2+q^2}\int \frac{dx}{p+q\operatorname{senh} ax}$$

14.555 $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\operatorname{senh}^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{q^2-p^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\tanh ax}{p} \\[2ex] \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2-q^2}}\ln\left(\dfrac{p+\sqrt{p^2-q^2}\tanh ax}{p-\sqrt{p^2-q^2}\tanh ax}\right) \end{cases}$$

14.556 $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\operatorname{senh}^2 ax} = \frac{1}{2ap\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}\tanh ax}{p-\sqrt{p^2+q^2}\tanh ax}\right)$$

14.557 $$\int x^m \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x^m\cosh ax}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\cosh ax\,dx$$ [Véase 14.585]

14.558 $$\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax\cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx$$

14.559 $$\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^n}\,dx = \frac{-\operatorname{senh} ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}}\,dx$$ [Véase 14.587]

14.560 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \frac{-\cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$$

14.561 $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \frac{-x\cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\operatorname{senh}^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN cosh ax

14.562 $$\int \cosh ax\, dx = \frac{\operatorname{senh} ax}{a}$$

14.563 $$\int x \cosh ax\, dx = \frac{x \operatorname{senh} ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2}$$

14.564 $$\int x^2 \cosh ax\, dx = -\frac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right) \operatorname{senh} ax$$

14.565 $$\int \frac{\cosh ax}{x}\, dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$$

14.566 $$\int \frac{\cosh ax}{x^2}\, dx = -\frac{\cosh ax}{x} + a \int \frac{\operatorname{senh} ax}{x}\, dx$$ [Véase 14.543]

14.567 $$\int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax}$$

14.568 $$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$$

14.569 $$\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{senh} ax \cosh ax}{2}$$

14.570 $$\int x \cosh^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2}$$

14.571 $$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a}$$

14.572 $$\int \cosh ax \cosh px\, dx = \frac{\operatorname{senh} (a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{senh} (a+p)x}{2(a+p)}$$

14.573 $$\int \cosh ax \operatorname{sen} px\, dx = \frac{a \operatorname{senh} ax \operatorname{sen} px - p \cosh ax \cos px}{a^2 + p^2}$$

14.574 $$\int \cosh ax \cos px\, dx = \frac{a \operatorname{senh} ax \cos px + p \cosh ax \operatorname{sen} px}{a^2 + p^2}$$

14.575 $$\int \frac{dx}{\cosh ax + 1} = \frac{1}{a} \tanh \frac{ax}{2}$$

14.576 $$\int \frac{dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{1}{a} \coth \frac{ax}{2}$$

14.577 $$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax + 1} = \frac{x}{a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{2}{a^2} \ln \cosh \frac{ax}{2}$$

14.578 $$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{x}{a} \coth \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \operatorname{senh} \frac{ax}{2}$$

14.579 $$\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2} = \frac{1}{2a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \tanh^3 \frac{ax}{2}$$

14.580 $$\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2} = \frac{1}{2a} \coth \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \coth^3 \frac{ax}{2}$$

14.581 $$\int \frac{dx}{p + q \cosh ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \tan^{-1} \dfrac{qe^{ax} + p}{\sqrt{q^2 - p^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{p^2 - q^2}} \ln \left(\dfrac{qe^{ax} + p - \sqrt{p^2 - q^2}}{qe^{ax} + p + \sqrt{p^2 - q^2}}\right) \end{cases}$$

14.582 $$\int \frac{dx}{(p + q \cosh ax)^2} = \frac{q \operatorname{senh} ax}{a(q^2 - p^2)(p + q \cosh ax)} - \frac{p}{q^2 - p^2} \int \frac{dx}{p + q \cosh ax}$$

14.503 $$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2-q^2}} \ln\left(\dfrac{p \tanh ax + \sqrt{p^2-q^2}}{p \tanh ax - \sqrt{p^2-q^2}}\right) \\ \dfrac{-1}{ap\sqrt{q^2-p^2}} \tan^{-1} \dfrac{p \tanh ax}{\sqrt{q^2-p^2}} \end{cases}$$

14.584 $$\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2+q^2}} \ln\left(\dfrac{p \tanh ax + \sqrt{p^2+q^2}}{p \tanh ax - \sqrt{p^2+q^2}}\right) \\ \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \dfrac{p \tanh ax}{\sqrt{p^2+q^2}} \end{cases}$$

14.585 $$\int x^m \cosh ax \, dx = \frac{x^m \operatorname{senh} ax}{4} - \frac{m}{4} \int x^{m-1} \operatorname{senh} ax \, dx$$ [Véase 14.5571

14.586 $$\int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx$$

14.587 $$\int \frac{\cosh ax}{x^n} dx = \frac{\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^{n-1}} dx$$ [Véase 14.559]

14.588 $$\int \frac{dx}{\cosh^n ax} = \frac{\operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cosh^{n-2} ax}$$

14.589 $$\int \frac{x\,dx}{\cosh^n ax} = \frac{x \operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cosh^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\,dx}{\cosh^{n-2} ax}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN senh ax Y cosh ax

14.590 $$\int \operatorname{senh} ax \cosh ax \, dx = \frac{\operatorname{senh}^2 ax}{24}$$

14.591 $$\int \operatorname{senh} px \cosh qx \, dx = \frac{\cosh (p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cosh (p-q)x}{2(p-q)}$$

14.592 $$\int \operatorname{senh}^n ax \cosh ax \, dx = \frac{\operatorname{senh}^{n+1} ax}{(n+1)a}$$ [Si $n = -1$, véase 14.615.)

14.593 $$\int \cosh^n ax \operatorname{senh} ax \, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$ [Si $n = -1$, véase 14.604.]

14.594 $$\int \operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax \, dx = \frac{\operatorname{senh} 4ax}{32a} - \frac{x}{8}$$

14.595 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax \cosh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh ax$$

14.596 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax \cosh ax} = -\frac{1}{a} \tan^{-1} \operatorname{senh} ax - \frac{\operatorname{csch} ax}{a}$$

14.597 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax \cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{sech} ax}{4} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

14.598 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2 \coth 24x}{4}$$

14.599 $$\int \frac{\operatorname{senh}^2 ax}{\cosh ax} dx = \frac{\operatorname{senh} ax}{4} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \operatorname{senh} ax$$

14.600 $$\int \frac{\cosh^2 ax}{\operatorname{senh} ax} dx = \frac{\cosh ax}{4} + \frac{1}{4} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

14.601 $$\int \frac{dx}{\cosh ax (1 + \operatorname{senh} ax)} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \operatorname{senh} ax}{\cosh ax}\right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} e^{ax}$$

14.602 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax\,(\cosh ax + 1)} = \frac{1}{2a}\ln\tanh\frac{ax}{2} + \frac{1}{2a(\cosh ax + 1)}$$

14.603 $$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax\,(\cosh ax - 1)} = -\frac{1}{2a}\ln\tanh\frac{ax}{2} - \frac{1}{2a(\cosh ax - 1)}$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN tanh ax

14.604 $$\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax$$

14.605 $$\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{\tanh ax}{a}$$

14.606 $$\int \tanh^3 ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax - \frac{\tanh^2 ax}{2a}$$

14.607 $$\int \tanh^n ax\,\operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{\tanh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

14.608 $$\int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax}\, dx = \frac{1}{a}\ln\tanh ax$$

14.609 $$\int \frac{dx}{\tanh ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{senh} ax$$

14.610 $$\int x\tanh ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.611 $$\int x\tanh^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cosh ax$$

14.612 $$\int \frac{\tanh ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

14.613 $$\int \frac{dx}{p + q\tanh ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)}\ln(q\operatorname{senh} ax + p\cosh ax)$$

14.614 $$\int \tanh^n ax\, dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN coth ax

14.615 $$\int \coth ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{senh} ax$$

14.616 $$\int \coth^2 ax\, dx = x - \frac{\coth ax}{a}$$

14.617 $$\int \coth^3 ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{senh} ax - \frac{\coth^2 ax}{2a}$$

14.618 $$\int \coth^n ax\,\operatorname{csch}^2 ax\, dx = -\frac{\coth^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

14.619 $$\int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\coth ax}\, dx = -\frac{1}{a}\ln\coth ax$$

14.620 $$\int \frac{dx}{\coth ax} = \frac{1}{a}\ln\cosh ax$$

14.621 $$\int x \coth ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.622 $$\int x \coth^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{senh} ax$$

14.623 $$\int \frac{\coth ax}{x}\, dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \cdots \frac{(-1)^n 2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

14.624 $$\int \frac{dx}{p + q \coth ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2-q^2)}\ln(p \operatorname{senh} ax + q \cosh ax)$$

14.625 $$\int \coth^n ax\, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-2} ax\, dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN sech ax

14.626 $$\int \operatorname{sech} ax\, dx = \frac{2}{a}\tan^{-1} e^{ax}$$

14.627 $$\int \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{\tanh ax}{a}$$

14.628 $$\int \operatorname{sech}^3 ax\, dx = \frac{\operatorname{sech} ax \tanh ax}{2a} + \frac{1}{2a}\tan^{-1} \operatorname{senh} ax$$

14.629 $$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na}$$

14.630 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sech} ax} = \frac{\operatorname{senh} ax}{a}$$

14.631 $$\int x \operatorname{sech} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots \frac{(-1)^n E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$$

14.632 $$\int x \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{x \tanh ax}{a} - \frac{1}{a^2}\ln \cosh ax$$

14.633 $$\int \frac{\operatorname{sech} ax}{x}\, dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} - \frac{61(ax)^6}{4320} + \cdots \frac{(-1)^n E_n(ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots$$

14.634 $$\int \frac{dx}{q + p \operatorname{sech} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p + q \cosh ax}$$ [Véase 14.5811]

14.635 $$\int \operatorname{sech}^n ax\, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\, dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN csch ax

14.636 $$\int \operatorname{csch} ax\, dx = \frac{1}{a}\ln \tanh \frac{ax}{2}$$

14.637 $$\int \operatorname{csch}^2 ax\, dx = -\frac{\coth ax}{a}$$

14.638 $$\int \operatorname{csch}^3 ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch} ax \coth ax}{2a} - \frac{1}{2a}\ln \tanh \frac{ax}{2}$$

14.639 $$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na}$$

14.646 $$\int \frac{dx}{\operatorname{csch} ax} = \frac{1}{a}\cosh ax$$

14.641 $$\int x \operatorname{csch} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

14.642 $$\int x \operatorname{csch}^2 ax\, dx = -\frac{x\coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{senh} ax$$

14.642 $$\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x}\, dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \cdots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

14.644 $$\int \frac{dx}{q + p\operatorname{csch} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p + q\operatorname{senh} ax}$$ [Véase 14.553]

14.645 $$\int \operatorname{csch}^n ax\, dx = \frac{-\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\, dx$$

INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES HIPERBOLICAS RECIPROCAS

14.646 $$\int \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\, dx = x\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$$

14.647 $$\int x\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{4}$$

14.648 $$\int x^2\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(2a^2-x^2)\sqrt{x^2+a^2}}{9}$$

14.649 $$\int \frac{\operatorname{senh}^{-1}(x/a)}{x}\, dx = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3(x/a)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(x/a)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots & |x| < a \\ \dfrac{\ln^2(2x/a)}{2} - \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot 2\cdot 2} + \dfrac{1\cdot 3(a/x)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 6} + \cdots & x > a \\ -\dfrac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot 2\cdot 2} - \dfrac{1\cdot 3(a/x)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 6} - \cdots & x < -a \end{cases}$$

14.650 $$\int \frac{\operatorname{senh}^{-1}(x/a)}{x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{senh}^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.651 $$\int \cosh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \begin{cases} x\cosh^{-1}(x/a) - \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ x\cosh^{-1}(x/a) + \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.652 $$\int x\cosh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.653 $$\int x^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.654 $$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x}\, dx = \pm\left[\frac{1}{2}\ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{1\cdot 3(a/x)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 6} + \cdots\right]$$

$+$ si $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, $-$ si $\cosh^{-1}(x/a) < 0$

14.655 $$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x^2}\, dx = -\frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x} \mp \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$ [$-$ si $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, $+$ si $\cosh^{-1}(x/a) < 0$]

14.656 $$\int \tanh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = x\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$$

14.657 $$\int x\tanh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2-a^2)\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

14.658 $$\int x^2\tanh^{-1}\frac{x}{a}\, dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2-x^2)$$

14.659 $$\int \frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} + \cdots$$

14.660 $$\int \frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$$

14.661 $$\int \coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\coth^{-1}x + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$$

14.662 $$\int x\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \tfrac{1}{2}(x^2-a^2)\coth^{-1}\frac{x}{a}$$

14.663 $$\int x^2\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3}\coth^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2-a^2)$$

14.664 $$\int \frac{\coth^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{3^2} + \frac{(a/x)^5}{5^2} + \cdots\right)$$

14.665 $$\int \frac{\coth^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\coth^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$$

14.666 $$\int \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\operatorname{sech}^{-1}(x/a) + a\operatorname{sen}^{-1}(x/a), & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ x\operatorname{sech}^{-1}(x/a) - a\operatorname{sen}^{-1}(x/a), & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.667 $$\int x\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{sech}^{-1}(x/a) - \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-x^2}, & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{sech}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-x^2}, & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.668 $$\int \frac{\operatorname{sech}^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}\ln(a/x)\ln(4a/x) - \dfrac{(x/a)^2}{2\cdot 2\cdot 2} - \dfrac{1\cdot 3(x/a)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} \cdots, & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ \tfrac{1}{2}\ln(a/x)\ln(4a/x) + \dfrac{(x/a)^2}{2\cdot 2\cdot 2} + \dfrac{1\cdot 3(x/a)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} + \cdots, & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.669 $$\int \operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a} \pm a\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} \qquad [+ \text{ si } x > 0,\ - \text{ si } 2 < 0]$$

14.670 $$\int x\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a} \pm \frac{a\sqrt{x^2+a^2}}{2} \qquad [+ \text{ si } x > 0,\ - \text{ si } x < 0]$$

14.671 $$\int \frac{\operatorname{csch}^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\ln(x/a)\ln(4a/x) + \dfrac{1(x/a)^2}{2\cdot 2\cdot 2} - \dfrac{1\cdot 3(x/a)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} \cdots & 0 < x < a \\ \tfrac{1}{2}\ln(-x/a)\ln(-x/4a) - \dfrac{(x/a)^2}{2\cdot 2\cdot 2} + \dfrac{1\cdot 3(x/a)^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4} - \cdots & -a < x < 0 \\ -\dfrac{a}{x} + \dfrac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} - \dfrac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \cdots & |x| > a \end{cases}$$

14.672 $$\int x^m\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

14.673 $$\int x^m\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int\frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int\frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.674 $$\int x^m\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\tanh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int\frac{x^{m+1}}{a^2-x^2}\,dx$$

14.675 $$\int x^m\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\coth^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int\frac{x^{m+1}}{a^2-x^2}\,dx$$

14.676 $$\int x^m\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

14.677 $$\int x^m\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a} \pm \frac{a}{m+1}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad [+ \text{ si } x > 0,\ - \text{ si } x < 0]$$

15 INTEGRALES INDEFINIDAS

DEFINICION DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Sea $f(x)$ definida en el intervalo $a \leqq x \leqq b$. Divídase este intervalo en n partes iguales de longitud $\Delta x = (b-a)/n$. Entonces la integral definida de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se define como

15.1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \{f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \cdots + f(a+(n-1)\,\Delta x)\,\Delta x\}$$

El limite ciertamente existe si $f(x)$ es casicontinua.

Si $f(x) = \dfrac{d}{dx}g(x)$, entonces por el teorema fundamental del cálculo integral el valor de la integral anterior se puede hallar empleando la fórmula

15.2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}g(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Si el intervalo es infinito o si $f(x)$ tiene alguna singularidad en algún punto del intervalo, la integral definida es llamada *integral impropia.* Tales integrales pueden tratarse como las definidas mediante el empleo de adecuadas operaciones de limite. Por ejemplo,

15.3 $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

15.4 $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

15.5 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$ si b es un punto singular

15.6 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$ si a es un punto singular

15.7 $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \cdots\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \int_a^b h(x)\,dx \pm \cdots$$

15.8 $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$ donde c es una constante cualquiera

15.9 $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

15.10 $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

15.11 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

15.12 $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$ donde c se encuentra entre a y b

La fórmula anterior se conoce con el nombre de *teorema del valor medio* para integrales definidas y es válida siempre que $f(x)$ sea continua en $a \leqq x \leqq b$.

15.13 $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^c g(x)\, dx$ donde c se encuentra entre a y b

La anterior es una forma general de 15.12 y es válida siempre que $f(x)$ y $g(x)$ sean continuas en $a \leqq x \leqq b$ y que $g(x) \geqq 0$.

REGLA DE LEIBNITZ PARA DERIVAR BAJO EL SIGNO INTEGRAL

15.14 $$\frac{d}{d\alpha}\int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x,\alpha)\, dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx + F(\phi_1, \alpha)\frac{d\phi_1}{d\alpha} - F(\phi_2, \alpha)\frac{d\phi_2}{d\alpha}$$

METODOS APROXIMADOS PARA CALCULAR INTEGRALES DEFINIDAS

En las fórmulas siguientes el intervalo comprendido entre $x = a$ y $x = b$ se considera subdividido en n partes iguales por los puntos. $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ y sea $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$, $h = (b - a)/n$.

Fórmula del rectángulo

15.15 $$\int_a^b f(x)\, dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

Fórmula del trapecio

15.16 $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Fórmula de Simpson (también llamada fórmula de la parábola) para n par

15.17 $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{2h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

INTEGRALES DEFINIDAS QUE CONTIENE EXPRESIONES RACIONALES O IRRACIONALES

15.18 $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

15.19 $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\, dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

15.20 $$\int_0^\infty \frac{x^m\, dx}{x^n + a^n} = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \operatorname{sen}[(m+1)\pi/n]}, \quad 0 < m+1 < n$$

15.21 $$\int_0^\infty \frac{x^m\, dx}{1 + 2x\cos\beta + x^2} = \frac{\operatorname{sen} m\beta}{\operatorname{sen} m\pi\ \operatorname{sen}\beta}$$

15.22 $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

15.23 $$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

15.24 $$\int_0^a x^m(a^n - x^n)^p\, dx = \frac{a^{m+1+np}\,\Gamma[(m+1)/n]\,\Gamma(p+1)}{n\Gamma[(m+1)/n + p + 1]}$$

15.25 $$\int_0^\infty \frac{x^m\, dx}{(x^n + a^n)^r} = \frac{(-1)^{r-1}\pi a^{m+1-nr}\,\Gamma[(m+1)/n]}{n \sin[(m+1)\pi/n](r-1)!\,\Gamma[(m+1)/n - r + 1]}, \quad 0 < m+1 < nr$$

INTEGRALES DEFINIDAS QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Todas las letras se consideran positivas a no ser que se indique lo contrario.

15.26 $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ enteros y } m = n \end{cases}$$

15.27 $$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ enteros y } m = n \end{cases}$$

15.28 $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m + n \text{ impar} \\ 2m/(m^2 - n^2) & m, n \text{ enteros y } m + n \text{ par} \end{cases}$$

15.29 $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

15.30 $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \frac{\pi}{2}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

15.31 $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m+1}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

15.32 $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x \, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)}$$

15.33 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} px}{x} \, dx = \begin{cases} \pi/2 & p > 0 \\ 0 & p = 0 \\ -\pi/2 & p < 0 \end{cases}$$

15.34 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} px \cos qx}{x} \, dx = \begin{cases} 0 & p > q > 0 \\ \pi/2 & 0 < p < q \\ \pi/4 & p = q > 0 \end{cases}$$

15.35 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx}{x^2} \, dx = \begin{cases} \pi p/2 & 0 < p \leqq q \\ \pi q/2 & p \geqq q > 0 \end{cases}$$

15.36 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 px}{x^2} \, dx = \frac{\pi p}{2}$$

15.37 $$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos px}{x^2} \, dx = \frac{\pi p}{2}$$

15.38 $$\int_0^{\infty} \frac{\cos px - \cos qx}{x} \, dx = \ln \frac{q}{p}$$

15.39 $$\int_0^{\infty} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2} \, dx = \frac{\pi(q - p)}{2}$$

15.40 $$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$$

15.41 $$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma}$$

15.42 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x(x^2 + a^2)} \, dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ma})$$

15.43 $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

15.44 $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

15.45 $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{\cos^{-1}(b/a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

15.46 $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\,\text{sen}\,x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

15.47 $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x + a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}, \quad 0<a<1$$

15.48 $$\int_0^{\pi} \frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} (\pi/a)\ln(1+a) & |a|<1 \\ \pi\ln(1+1/a) & |a|>1 \end{cases}$$

15.49 $$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^m}{1-a^2}, \quad a^2<1,\ m=0,1,2,\ldots$$

15.50 $$\int_0^{\infty} \text{sen}\,ax^2\,dx = \int_0^{\infty} \cos ax^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

15.51 $$\int_0^{\infty} \text{sen}\,ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2n}, \quad n>1$$

15.52 $$\int_0^{\infty} \cos ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\cos\frac{\pi}{2n}, \quad n>1$$

15.53 $$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

15.54 $$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\,\text{sen}\,(p\pi/2)}, \quad 0<p<1$$

15.55 $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}, \quad 0<p<1$$

15.56 $$\int_0^{\infty} \text{sen}\,ax^2\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} - \text{sen}\,\frac{b^2}{a}\right)$$

15.57 $$\int_0^{\infty} \cos ax^2\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} + \text{sen}\,\frac{b^2}{a}\right)$$

15.58 $$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$$

15.59 $$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

15.60 $$\int_0^{\infty} \frac{\tan x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

15.61 $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^m x} = \frac{\pi}{4}$$

15.62 $$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\text{sen}\,x}\,dx = 2\left\{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\right\}$$

15.63 $$\int_0^{1} \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$$

15.64 $$\int_0^{1} \frac{\text{sen}^{-1}x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

15.65 $$\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \gamma$$

15.66 $$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x} = \gamma$$

15.67 $$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}px - \tan^{-1}qx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{p}{q}$$

INTEGRALES DEFINIDAS QUE CONTIENEN FUNCIONES EXPONENCIALES

15.68 $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

15.69 $$\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

15.70 $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\text{sen}\,bx}{x}\,dx = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

15.71 $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$$

15.72 $$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

15.73 $$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$$

15.74 $$\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(b^2-4ac)/4a}\,\text{fcer}\,\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

donde $\text{fcer}\,(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^\infty e^{-x^2}\,dx$

15.75 $$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(b^2-4ac)/4a}$$

15.76 $$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

15.77 $$\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}$$

15.78 $$\int_0^\infty e^{-(ax^2+b/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$

15.79 $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

15.80 $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(n+1)\left(\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots\right)$$

Cuando n es par esta última suma se puede hallar con ayuda de los números de Bernoulli [véanse páginas 108-109 y 114-115].

15.81 $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

15.82 $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x+1}\,dx = \Gamma(n+1)\left(\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\cdots\right)$$

La suma de esta última serie puede encontrarse para ciertos valores enteros positivos de n [véanse las páginas 108-109 y 114-115].

15.83 $$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\coth\frac{m}{2}-\frac{1}{2m}$$

15.84 $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \gamma$$

15.85 $$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}-e^{-x}}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\gamma$$

15.86 $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \gamma$$

15.107 $$\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx = \pi \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)$$

15.108 $$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi \ln a, & a \geqq b > 0 \\ 2\pi \ln b, & b \geqq a > 0 \end{cases}$$

15.109 $$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

15.110 $$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln\left(\frac{1 + b\cos x}{1 + a\cos x}\right)dx = \tfrac{1}{2}\{(\cos^{-1} a)^2 - (\cos^{-1} b)^2\}$$

15.111 $$\int_0^{a} \ln\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx = -\left(\frac{\operatorname{sen} a}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3a}{3^2} + \cdots\right)$$

Véase además 15.102.

INTEGRALES DEFINIDAS QUE CONTIENEN FUNCIONES HIPERBOLICAS

15.112 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{senh} bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\tanh\frac{a\pi}{2b}$$

15.113 $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{sech}\frac{a\pi}{2b}$$

15.114 $$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}$$

15.115 $$\int_0^{\infty} \frac{x^n\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n a^{n+1}}\Gamma(n+1)\left\{\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots\right\}$$

La suma de esta última serie puede hallarse si n es entero positivo e impar [véase la página 108].

15.116 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx} + 1}\,dx = \frac{\pi}{2b}\csc\frac{a\pi}{b} - \frac{1}{2a}$$

15.117 $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx} - 1}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2b}\cot\frac{a\pi}{b}$$

INTEGRALES DEFINIDAS DIVERSAS

15.118 $$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \{f(0) - f(\infty)\}\ln\frac{b}{a}$$

Esta última es llamada integral de *Frullani* la cual es válida si f(x) es continua y si $\int_1^{\infty} \frac{f(x) - f(\infty)}{x}\,dx$ converge.

15.119 $$\int_0^{1} \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

15.120 $$\int_{-a}^{a} (a+x)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = (2a)^{m+n-1}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

16 LA FUNCION GAMMA

DEFINICION DE LA FUNCION GAMMA $\Gamma(n)$ PARA $n > 0$

16.1 $$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt \qquad n > 0$$

FORMULA DE RECURRENCIA

16.2 $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

16.3 $$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{si } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ donde } 0! = 1$$

FUNCION GAMA PARA $n < 0$

Cuando $n < 0$ la función gamma puede ser definida con ayuda de 16.2, por ejemplo,

16.4 $$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION GAMMA

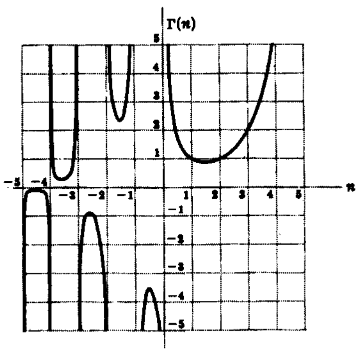


Fig. 16-1

ALGUNOS VALORES DE LA FUNCION GAMMA

16.5 $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

16.6 $$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

16.7 $$\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^m 2^m\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

ALGUNAS RELACIONES EN LAS QUE ENTRA LA FUNCION GAMMA

16.8 $$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

16.9 $$2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

Esta última ***se llama fórmula de duplicación.***

16.10 $$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = m^{\frac{1}{2}-mx}\,(2\pi)^{(m-1)/2}\,\Gamma(mx)$$

que queda reducida a la fórmula 16.9 cuando $m = 2$.

OTRAS DEFINICIONES DE LA FUNCION GAMMA

16.11 $$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}\,k^x$$

16.12 $$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\}$$

La anterior es la manera de representar la ***función*** gamma corno producto infinito. La constante γ es la constante de Euler.

DERIVADAS DE LA FUNCION GAMMA

16.13 $$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$$

16.14 $$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right) + \cdots$$

DESARROLLOS ASINTOTICOS DE LA FUNCION GAMMA

16.15 $$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51.840x^3} + \cdots\right\}$$

Esta es la llamada serieasintótica ***de Stirling.***

Si en 16.15 se hace $x = n$ entero y positivo, entonces la fórmula de Stirling da una aproximación útil para $n!$ cuando n es suficientemente grande [p. ej. $n > 10$].

16.16 $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

donde $\sim$ se emplea para indicar que la razón entre los términos a ambos lados se aproxima a 1 a medida que $n \to \infty$.

FORMULAS VARIAS

16.17 $$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \operatorname{senh} \pi x}$$

17 LA FUNCION BETA

DEFINICION DE LA FUNCION BETA

17.1 $$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \qquad m>0,\ n>0$$

RELACION ENTRE LA FUNCION BETA Y LA FUNCION GAMMA

17.2 $$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Mediante el empleo de 16.4, página 101, se puede modificar la definición de $B(m,n)$ para incluir también los valores $m<0$, $n<0$.

ALGUNAS FORMULAS IMPORTANTES

17.3 $$B(m,n) = B(n,m)$$

17.4 $$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

17.5 $$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}\,dt$$

17.6 $$B(m,n) = r^n(r+1)^m\int_0^1 \frac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}}\,dt$$

18 ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS Y SUS SOLUCIONES

ECUACION DIFERENCIAL	SOLUCION
18.1 Separación de variables $f_1(x)\ g_1(y)\ dx + f_2(x)\ g_2(y)\ dy = 0$	$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c$
18.2 Ecuación lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$y e^{\int P\,dx} = \int Q e^{\int P\,dx}\, dx + c$
18.3 **Ecuación** de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$	$v e^{(1-n)\int P\,dx} = (1-n) \int Q e^{(1-n)\int P\,dx}\, dx + c$ donde $v = y^{1-n}$. Si $n = 1$, la solución es $\ln y = \int (Q-P)\, dx + c$
18.4 Ecuación exacta $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$ donde $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.	$\int M\,\partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x\right) dy = c$ **donde** ∂x indica que la integración debe realizarse con respecto **a** x conservando **a** y constante.
18.5 Ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$	$\ln x = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c$ donde $v = y/x$. Si $F(v) = v$, la solución es $y = cx$

ECUACION DIFERENCIAL	SOLUCION
18.6 $y\,F(xy)\,dx + x\,G(xy)\,dy = 0$	$\ln x = \int \frac{G(v)\,dv}{v\{G(v)-F(v)\}} + c$ donde $v = xy$. Si $G(v) = F(v)$, la solución es $xy = c$.
18.7 Ecuación lineal homogénea de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ a, b son constantes reales.	Sean m_1, m_2 las raíces de $m^2 + am + b = 0$. Entonces hay 3 casos. Caso 1. m_1, m_2 reales y distintas: $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ Caso 2. m_1, m_2 reales e iguales: $y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$ *Caso 3.* $m_1 = p + qi$, $m_2 = p - qi$: $y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \operatorname{sen} qx)$ donde $p = -a/2$, $q = \sqrt{b - a^2/4}$.
18.8 Ecuación lineal no homogénea de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = R(x)$ a, b son constantes reales.	Hay 3 casos que corresponden a los de 18.7. **Caso 1.** $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \frac{e^{m_1x}}{m_1 - m_2}\int e^{-m_1x}R(x)\,dx + \frac{e^{m_2x}}{m_2 - m_1}\int e^{-m_2x}R(x)\,dx$ **Caso 2.** $y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + xe^{m_1x}\int e^{-m_1x}R(x)\,dx - e^{m_1x}\int xe^{-m_1x}R(x)\,dx$ *Caso 3.* $y = e^{px}(c_1 \cos qz + c_2 \operatorname{sen} qx) + \frac{e^{px}\operatorname{sen} qx}{q}\int e^{-px}R(x)\cos qx\,dx - \frac{e^{px}\cos qx}{q}\int e^{-px}R(z)\operatorname{sen} qx\,dx$
18.9 Ecuación de Euler o de Cauchy $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = S(x)$	Haciendo $x = e^t$, la ecuación se convierte en $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = S(e^t)$ y entonces puede resolverse como se indica en 18.7 y 18.8.

ECUACION DIFERENCIAL	SOLUCION
10.10 **Ecuación de Bessel**	
$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$.	$y = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(x)$ Véanse las páginas 136-137.
18.11 **Ecuación transformada de Bessel**	
$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (2p+1)x\frac{dy}{dx} + (\alpha^2x^{2r} + \beta^2)y = 0$	$y = x^{-p}\left\{c_1 J_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) + c_2 Y_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)\right\}$ donde $q = \sqrt{p^2 - \beta^2}$.
18.12 **Ecuación de Legendre**	
$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$	$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$ Véanse las páginas 146-148.

19 SERIES DE CONSTANTES

SERIES ARITMÉTICAS

19.1 $$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \tfrac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\} = \tfrac{1}{2}n(a + l)$$

donde $l = a + (n-1)d$ es el último término.

Los siguientes son algunos casos especiales

19.2 $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

19.2 $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

SERIES GEOMÉTRICAS

19.4 $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a - rl}{1-r}$$

donde $l = ar^{n-1}$ es el último término y $r \neq 1$.

Si $-1 < r < 1$, entonces

19.5 $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

SERIES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

19.6 $$a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots + \{a + (n-1)d\}r^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{rd\{1 - nr^{n-1} + (n-1)r^n\}}{(1-r)^2}$$

donde $r \neq 1$.

Si $-1 < r < 1$, entonces

19.7 $$a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}$$

SUMAS DE POTENCIAS DE ENTEROS POSITIVOS

19.8 $$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{B_1 p n^{p-1}}{2!} - \frac{B_2 p(p-1)(p-2)n^{p-3}}{4!} + \cdots$$

donde el último término de la serie contiene n o n^2 según que p sea par o impar. Las letras B_k denotan los *números de Bernoulli* [*véase la* página 114].

A continuación se presentan algunos casos especiales

19.9 $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

19.10 $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

19.11 $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

19.12 $$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Si $S_k = 1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ donde k y n son enteros positivos, entonces

19.12 $$\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\cdots+\binom{k+1}{k}S_k = (n+1)^{k+1}-(n+1)$$

[illegible] POSITIVOS

19.14 $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots = \ln 2$$

19.15 $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots = \frac{\pi}{4}$$

19.16 $$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\cdots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{3}\ln 2$$

19.17 $$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{4}$$

19.16 $$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\cdots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{3}\ln 2 \quad \sqrt{3}$$

19.19 $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

19.20 $$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

19.21 $$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

19.22 $$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

19.23 $$\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots = \frac{7\pi^4}{720}$$

19.24 $$\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots = \frac{31\pi^6}{30.240}$$

19.25 $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

19.26 $$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

19.27 $$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots = \frac{\pi^6}{960}$$

19.28 $$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

19.29 $$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots = \frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

19.20 $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots = \frac{1}{2}$$

19.31 $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots = \frac{3}{4}$$

19.22 $$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\frac{1}{7^2\cdot 9^2}+\cdots = \frac{\pi^2-8}{16}$$

19.33 $$\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$$

19.24 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}+\cdots=\int_0^1\frac{u^{a-1}\,du}{1+u^d}$$

19.25 $$\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$$

19.26 $$\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{5^{2p}}+\frac{1}{7^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p}-1)\pi^{2p}B_p}{2(2p)!}$$

19.27 $$\frac{1}{1^{2p}}-\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}-\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p-1}-1)\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$$

19.38 $$\frac{1}{1^{2p+1}}-\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{5^{2p+1}}-\frac{1}{7^{2p+1}}+\cdots=\frac{\pi^{2p+1}E_p}{2^{2p+2}(2p)!}$$

SERIES VARIAS

19.29 $$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

19.40 $$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\cdots+\operatorname{sen}n\alpha=\frac{\operatorname{sen}[\frac{1}{2}(n+1)]\alpha\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

19.41 $$1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\cdots=\frac{1-r\cos\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2},\qquad |r|<1$$

19.42 $$r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+r^3\operatorname{sen}3\alpha+\cdots=\frac{r\operatorname{sen}\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2},\qquad |r|<1$$

19.42 $$1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+\cdots+r^n\cos n\alpha=\frac{r^{n+2}\cos n\alpha-r^{n+1}\cos(n+1)\alpha-r\cos\alpha+1}{1-2r\cos\alpha+r^2}$$

19.44 $$r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+\cdots+r^n\operatorname{sen}n\alpha=\frac{r\operatorname{sen}\alpha-r^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)\alpha+r^{n+2}\operatorname{sen}n\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}$$

FORMULA SUMATORIA DE EULER-MACLAURIN

19.45 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}F(k) &= \int_0^n F(k)\,dk-\frac{1}{2}\{F(0)+F(n)\}\\ &\quad+\frac{1}{12}\{F'(n)-F'(0)\}-\frac{1}{720}\{F'''(n)-F'''(0)\}\\ &\quad+\frac{1}{30.240}\{F^{(v)}(n)-F^{(v)}(0)\}-\frac{1}{1.209.600}\{F^{(vii)}(n)-F^{(vii)}(0)\}\\ &\quad+\cdots(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}\{F^{(2p-1)}(n)-F^{(2p-1)}(0)\}+\cdots\end{aligned}$$

FORMULA SUMATORIA DE POISSON

19.46 $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi imx}F(x)\,dx\right\}$$

20 SERIES DE TAYLOR

SERIES DE TAYLOR DE FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

20.1 $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

donde R_n, el resto después de los n primeros términos, se puede hallar por cualquiera de las siguientes fórmulas:

20.2 resto de **Lagrange** $$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

20.3 resto de **Cauchy** $$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$$

El valor de ξ, que está comprendido entre a y x, puede ser diferente en las dos fórmulas. Este resultado es válido siempre que f(x) tenga derivadas continuas de orden n como mínimo.

Si el $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, se obtiene una serie infinita que es llamada serie de *Taylor* de f(x) en torno a $x = a$. En el caso en que $a = 0$ se la suele llamar serie *de Maclaurin.* Estas series, que a menudo se llaman series de potencias, son generalmente convergentes para todos los valores de x comprendidos dentro de cierto intervalo llamado *intervalo de convergencia* y son divergentes para todos los valores de x que quedan por fuera de dicho intervalo.

SERIES BINOMIALES

20.4 $$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots \\ &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Son casos espaciales

20.5 $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

20.4 $(a+x)^3 = a^3 +$ 34% $+ 3ax^2 + x^3$

20.7 $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

20.0 $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$

20.9 $(1+x)^{-2} = 1 - 22 + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$

20.10 $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$

20.11 $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

20.12 $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

20.12 $(1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

20.14 $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y DE LAS HIPERBOLICAS RECIPROCAS

20.15 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.16 $a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.17 $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

20.16 $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$

20.19 $\ln x = 2\left\{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\} \qquad x > 0$

20.20 $\ln x = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \qquad x \geqq \frac{1}{2}$

DESARROLLO EN SERIES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

20.21 $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.22 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.23 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \cdots + \dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.24 $\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} - \dfrac{2x^5}{945} - \cdots - \dfrac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

20.26 $\sec x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \cdots + \dfrac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.26 $\csc x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} + \dfrac{31x^5}{15.120} + \cdots + \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

20.27 $\operatorname{sen}^{-1} x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$

20.28 $\cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad |x| < 1$

20.29 $\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots & [+ \text{ si } x \geqq 1,\ - \text{ si } x \leqq -1] \end{cases}$

20.30 $\cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\right) & |x| < 1 \\ p\pi + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} - \cdots & [p = 0 \text{ si } x > 1,\ p = 1 \text{ si } x < -1] \end{cases}$

20.31 $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\cdot 3x^3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \cdots\right) \qquad |x| > 1$

20.32 $\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\cdot 3x^3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \cdots \qquad |x| > 1$

DESARROLLO EN SERIES DE FUNCIONES HIPERBOLICAS

20.33 $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.34 $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.35 $\tanh x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \cdots \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.36 $\coth x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + \dfrac{2x^5}{945} + \cdots \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

20.37 $\operatorname{sech} x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} - \dfrac{61x^6}{720} + \cdots \dfrac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.38 $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} - \dfrac{31x^5}{15.120} + \cdots \dfrac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

20.39 $\operatorname{senh}^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\left(\ln|2x| + \dfrac{1}{2\cdot 2x^2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \cdots\right) & \begin{bmatrix} + \text{ si } x \geqq 1 \\ - \text{ si } x \leqq -1 \end{bmatrix} \end{cases}$

20.40 $\cosh^{-1} x = \pm\left\{\ln(2x) - \left(\dfrac{1}{2\cdot 2x^2} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \cdots\right)\right\} \qquad \begin{bmatrix} + \text{ si } \cosh^{-1} x > 0,\ x \geqq 1 \\ - \text{ si } \cosh^{-1} x < 0,\ x \geqq 1 \end{bmatrix}$

20.41 $\tanh^{-1} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$

20.42 $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + \dfrac{1}{7x^7} + \cdots \qquad |x| > 1$

SERIES VARIAS

20.43 $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^5}{15} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.44 $e^{\cos x} = e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{31x^6}{720} + \cdots\right) \qquad -\infty < x < \infty$

20.45 $e^{\tan x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.46 $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} - \dfrac{x^6}{90} + \cdots + \dfrac{2^{n/2}\operatorname{sen}(n\pi/4)\, x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.47 $e^x \cos x = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + \cdots + \dfrac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)\, x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

20.48 $\ln|\operatorname{sen} x| = \ln|x| - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} - \dfrac{x^6}{2835} - \cdots - \dfrac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

20.49 $\ln|\cos x| = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} - \dfrac{17x^8}{2520} - \cdots - \dfrac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.50 $\ln|\tan x| = \ln|x| + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7x^4}{90} + \dfrac{62x^6}{2835} + \cdots + \dfrac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$

20.51 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3 - \cdots \qquad |x| < 1$

[illegible]

Si

20.52 $$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \cdots$$

entonces

20.53 $$x = C_1y + C_2y^2 + C_3y^3 + C_4y^4 + C_5y^5 + C_6y^6 + \cdots$$

donde

20.54 $$c_1C_1 = 1$$

20.55 $$c_1^3C_2 = -c_2$$

20.54 $$c_1^5C_3 = 2c_2^2 - c_1c_3$$

20.57 $$c_1^7C_4 = 5c_1c_2c_3 - 5c_2^3 - c_1^2c_4$$

20.58 $$c_1^9C_5 = 6c_1^2c_2c_4 + 3c_1^2c_3^2 - c_1^3c_5 + 14c_2^4 - 21c_1c_2^2c_3$$

20.59 $$c_1^{11}C_6 = 7c_1^3c_2c_5 + 84c_1c_2^3c_3 + 7c_1^3c_3c_4 - 28c_1^2c_2c_3^2 - c_1^4c_6 - 28c_1^2c_2^2c_4 - 42c_2^5$$

[illegible]

20.50 $$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(a, b) + (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b) \\ & + \frac{1}{2!}\{(x - a)^2f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b)f_{xy}(a, b) + (y - b)^2f_{yy}(a, b)\} + \cdots \end{aligned}$$

donde $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, . . . denotan Los valores de las derivadas parciales con respecto a x, y, . . . cuando $x = a$, $y = b$.

21 FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE

DEFINICION DE LOS NUMERO DE BERNOULLI

Los números de Bernoulli $B_1, B_2, B_3, \ldots$ *se* definen por las series

21.1 $$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \cdots \qquad |x| < 2\pi$$

21.2 $$1 - \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{B_1 x^2}{2!} + \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \pi$$

DEFINICION DE LOS NUMERO DE EULER

Los números de Euler $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *se definen por las* series

21.2 $$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} - \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

21.4 $$\sec x = 1 + \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} + \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

TABLA DE ALGUNOS DE LOS PRIMEROS NUMEROS DE BERNOULLI Y DE EULER

Números de Bernoulli	Números de Euler
B_1 = 1/6	E_1 = 1
B_2 = 1/30	E_2 = 5
B_3 = 1/42	E_3 = 61
B_4 = 1/30	E_4 = 1386
B_5 = 5/66	E_5 = 50.521
B_6 = 691/2730	E_6 = 2.702.765
B_7 = 7/6	E_7 = 199.360.981
B_8 = 3617/510	E_8 = 19.391.512,145
B_9 = 43.867/798	E_9 = 2.404.879.675.441
B_{10} = 174.611/330	E_{10} = 370.371.188.237.525
B_{11} = 854.513/138	E_{11} = 69.348.874.393.137.901
B_{12} = 236.364.091/2730	E_{12} = 15.514.534.163.557.086.905

RELACIONES QUE CONTIENEN NUMEROS DE BERNOULLI Y DE EULER

21.5 $$\binom{2n+1}{2}2^2B_1 - \binom{2n+1}{4}2^4B_2 + \binom{2n+1}{6}2^6B_3 - \cdots (-1)^{n-1}(2n+1)2^{2n}B_n = 2n$$

21.6 $$E_n = \binom{2n}{2}E_{n-1} - \binom{2n}{4}E_{n-2} + \binom{2n}{6}E_{n-3} - \cdots (-1)^n$$

21.7 $$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\binom{2n-1}{1}E_{n-1} - \binom{2n-1}{3}E_{n-2} + \binom{2n-1}{5}E_{n-3} - \ldots (-1)^{n-1}\right\}$$

SERIES QUE CONTIENEN NUMERO DE BERNOULLI Y DE EULER

21.8 $$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left\{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right\}$$

21.9 $$B_n = \frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left\{1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots\right\}$$

21.10 $$B_n = \frac{(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\left\{1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \ldots\right\}$$

21.11 $$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left\{1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots\right\}$$

FORMULA ASINTOTICA PARA LOS NUMEROS DE BERNOULLI

21.12 $$B_n \sim 4n^{2n}(\pi e)^{-2n}\sqrt{\pi n}$$

22 [illegible]

[illegible]

Hay cantidades en física tales como la temperatura, el volumen y la rapidez que pueden especificarse por un número real. Tales cantidades son llamadas escalares.

Otras cantidades tales como fuerza, velocidad y momentum, que exigen quedar completamente especificadas tanto en magnitud como en dirección, son llamadas *vectores*. Un vector se representa por medio de una flecha o sea, un segmento rectilíneo orientado. La magnitud del vector va expresada por la longitud de la flecha, empleando para ello alguna unidad apropiada.

[illegible]

Un vector se denota por medio de una letra negrilla tal como **A** [Fig. 22-1]. La magnitud se denota por $|\mathbf{A}|$ o A. El punto inicial de la flecha se llama origen mientras que el punto final se denomina extremo.

[illegible]

1. Igualdad entre dos vectores. Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección. Por ejemplo, en la Fig. 22-1, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

2. **Multiplicación** de un vector por un escalar. Si m es cualquier número real (escalar), entonces $m\mathbf{A}$ es un vector cuya magnitud es m veces la magnitud de **A** y cuya dirección es la misma que u opuesta a la de **A** según que $m > 0$ o que $m < 0$. Si $m = 0$, entonces $m\mathbf{A} = 0$, es llamado el *vector cero o nulo*.

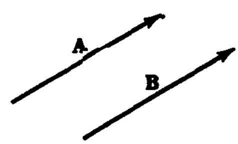


Fig. 22-1

3. Suma de vectores. La suma o resultante de **A** y **B** es un vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ que se construye haciendo coincidir el origen de **B** con el extremo de **A** y uniendo luego el origen de **A** con el extremo de **B** [Fig. 22-2(*b*)]. Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo para la adición de vectores según se muestra en la Fig. 22-2(c). El vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ se define como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

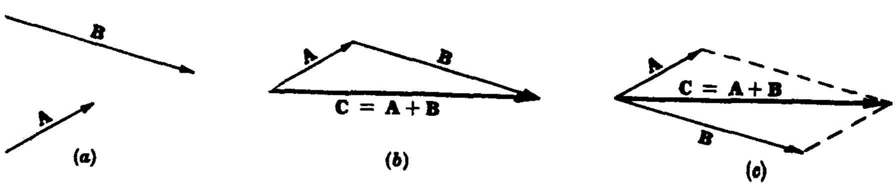
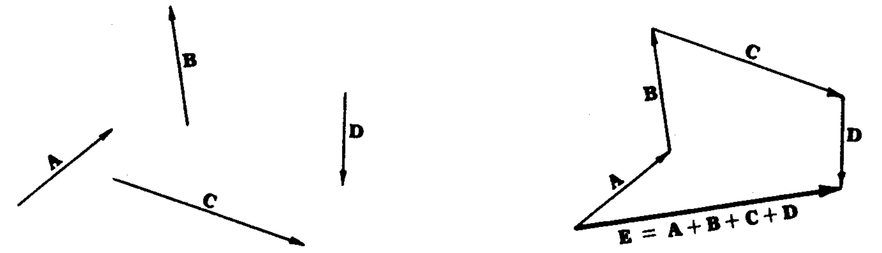


Fig. 22-2

Es evidente que esta definición se puede aplicar para sumar más de dos **vectores**. Así por ejemplo, en la Fig. 22-3 se indica la manera de hallar la suma E de los vectores A, B, C y D.



(*a*) (*b*)

Fig. 22-3

4. **Vectores unitarios.** Un *vector* unitario es un vector cuya magnitud es igual a la unidad. Si **A es un vector,** entonces **a** sería un vector unitario en la misma dirección de **A** si $\mathbf{a} = \mathbf{A}/A$ donde $A > 0$.

LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL

Si **A**, B, C son vectores y m, n son escalares, entonces

22.1 $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ Ley conmutativa de la adición

22.2 $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ Ley asociativa de la adición

22.3 $m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$ Ley asociativa de la multiplicación escalar

22.4 $(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A}+n\mathbf{A}$ Ley distributiva

22.5 $m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A}+m\mathbf{B}$ Ley distributiva

COMPONENTES DE UN VECTOR

Un vector A se puede representar colocando su origen en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Si i, j, k representan vectores unitarios cuya dirección es la misma que la de los ejes positivos x, y, z respectivamente, entonces

22.6 $$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

donde $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$, $A_3\mathbf{k}$ son los llamados *vectores componentes de* A en las tres direcciones i, j, k y A_1, A_2, A_3 *son las* llamadas *componentes* de A.

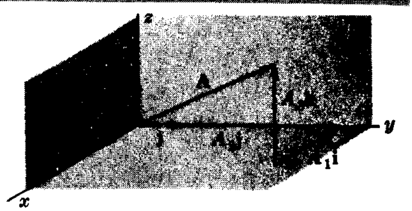


Fig. **22-4**

PRODUCTO ESCALAR

22.7 $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

donde θ es el ángulo formado por **A y B.**

Leyes fundamentaleo:

22.0 $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$ Ley conmutativa

22.9 $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$ Ley distributiva

22.10 $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

donde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$.

PRODUCTO VECTORIAL

22.11 $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\ \mathrm{sen}\,\theta\ \mathbf{u} \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

donde θ es el ángulo formado entre A y **B** y **u** es un vector unitario perpendicular al plano de A y **B** de tal manera que A, B, **u** forman un sistema *dextrorso* [los tres vectores A, **B**, **u** forman un sistema dextrorso si un descorchador de hélice enroscada hacia la derecha, al dar un giro menor de 180° de A hacia **B**, avanza en la dirección de u según se indica en la Fig. 22-5].

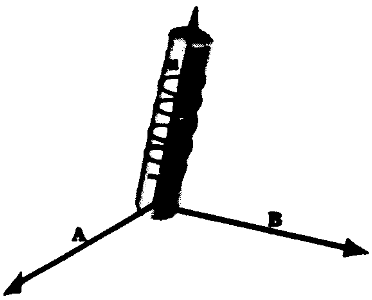


Fig. 22-5

Son resultados fundamentales

22.12 $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

22.12 $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

22.14 $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

22.15 $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ = área del paralelogramo cuyos lados son A y B

DIVERSAS FORMULAS QUE CONTIENEN PRODUCTOS VECTORIALES Y ESCALARES

22.16 $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$$

22.17 $|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$ = volumen del paralelepípedo cuyos lados son A, B, C

22.18 $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

22.19 $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

22.20 $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

22.21 $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\}$$

$$= \mathbf{B}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\}$$

DERIVADAS DE VECTORES

La derivada de una función vectorial $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$ de la variable escalar u se define así

22.22 $$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u+\Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} = \frac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{du}\mathbf{k}$$

Las derivadas parciales de una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ se definen de manera similar. Damos por entendido que todas las derivadas existen a menos que se especifique lo contrario.

FORMULAS QUE CONTIENEN DERIVADAS

22.23 $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

22.24 $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

22.25 $$\frac{d}{du}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\cdot\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right)$$

22.26 $$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = A\frac{dA}{du}$$

22.27 $$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = 0 \quad \text{si } |\mathbf{A}| \text{ es constante.}$$

EL OPERADOR NABLA

El operador *nabla* se define así

22.28 $$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

En las fórmulas que vienen a continuación vamos a suponer que $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ tienen derivadas parciales.

GRADIENTE

22.29 Gradiente de U = grad $U = \nabla U = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$

DIVERGENCIA

22.30 Divergencia de $\mathbf{A}$ $= \operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

ROTOR

22.31 Rotor de A = rot A = $\nabla \times \mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{a.}{\partial x} & \frac{a}{\partial y} & \frac{a}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

LAPLACIANO

22.32 Laplaciano de $U = \nabla^2 U = \nabla \cdot (\mathrm{V}\, U) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

22.33 Laplaciano de A $= \nabla^2 \mathbf{A} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$

OPERADOR BI-ARMONICO

22.34 Operador bi-armónico aplicado a $U =$ V W $= \nabla^2(\nabla^2 U)$

$$= \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2}$$

DIVERSAS FORMULAS QUE CONTIENEN ∇

22.35 $\nabla(U+V)$ = PU + VV

22.36 $\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

22.37 VX(A+B) $= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

22.38 V $\cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$

22.39 V $\times (VA) =$ (VU) $\times$ A $+ U(\nabla \times$ A)

22.40 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

22.41 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

22.42 $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

22.43 $\nabla \times (\nabla U) = 0$, o sea que el rotor del gradiente de Cl es cero.

22.44 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, o sea que la divergencia del rotor de A es cero.

22.45 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRALES QUE CONTIENEN VECTORES

Si $\mathbf{A}(u) = \dfrac{d}{du}\mathbf{B}(u)$, entonces la integral *indefinida* de $\mathbf{A}(u)$ es la siguiente

22.45 $$\int \mathbf{A}(u)\, du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c} \qquad \mathbf{c} = \text{vector constante}$$

La integral definida de A(u) de $u = a$ a $u = b$ está dada por

22.47 $$\int_a^b \mathbf{A}(u)\, du = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$$

En este caso la integral definida puede definirse de la misma manera como aparece en la página 94.

INTEGRALES CURVILINEAS

Considérase una curva C en el espacio tridimensional que una los puntos $P_1(a_1, a_2, a_3)$ y $P_2(b_1, b_2, b_3)$ como en la Fig. 22-6. Divídase la curva en n partes por los puntos intermedios $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. Entonces la *integral curvilínea* del vector $\mathbf{A}(x, y, z)$ a lo largo de la curva C se define así

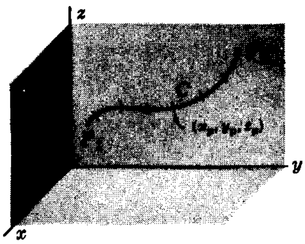


Fig. 22-6

22.48 $$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{n \to \infty} \sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) \cdot \Delta \mathbf{r}_p$$

donde $\Delta\mathbf{r}_p = \Delta x_p \mathbf{i} + \Delta y_p \mathbf{j} + \Delta z_p \mathbf{k}$, $\Delta x_p = x_{p+1} - x_p$, $\Delta y_p = y_{p+1} - y_p$, $\Delta z_p = z_{p+1} - z_p$ y además se supone que la mayor entre las magnitudes $|\Delta \mathbf{r}_p|$ se aproxima a cero a medida que $n \to \infty$. El resultado 22.46 es una generalización de la integral definida común [página 94].

La integral curvilínea 22.46 también se puede escribir

22.49 $$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\, dx + A_2\, dy + A_3\, dz$$

empleando $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES CURVILINEAS

22.50 $$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

22.51 $$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_3}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

Por regla general, el valor de una integral curvilínea depende de la trayectoria C que baya sido escogida para efectuar el recorrido entre los puntos P_1 y P_2 de una región dada $\mathcal{R}$. Sin embargo, en el caso en que $\mathbf{A} = \nabla\phi$ o cuando $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ donde ϕ y sus derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$, la integral curvilínea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. En tal caso

22.52 $$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1)$$

donde $\phi(P_1)$ y $\phi(P_2)$ denotan los valores de ϕ en P_1 y P_2 respectivamente. En particular, si C es una curva cerrada,

22.53 $$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

donde el círculo sobre el signo de integral hace énfasis en el hecho de que C es cerrada.

INTEGRALES MULTIPLES

Sea $F(x, y)$ una función definida en una región $\mathcal{R}$ del plano xy como se muestra en la Fig. 22-7. Subdivídase la región en n subregiones por medio de líeas paralelas a los ejes x y y, corno se indica en la figura. Sea $\Delta A_p = \Delta x_p \Delta y_p$, el brea de una de estas subregiones. Entonces la integral de $F(x, y)$ sobre $\mathcal{R}$ se define así

22.54 $$\int_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} F(x_p, y_p)\,\Delta A_p$$

siempre y cuando que el límite exista.

En tal caso la integral puede también escribirse como

22.55 $$\int_{x=a}^{b} \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy \right\} dx$$

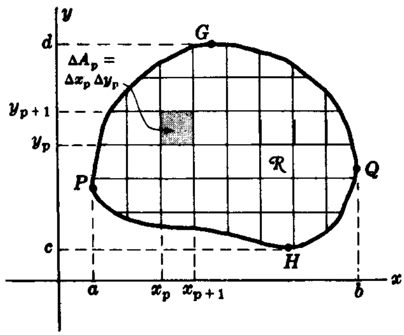


Fig. 22-7

donde $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ son las ecuaciones de las curvas *PHQ y PGQ* respectivamente mientras que a y b *son* las abscisas de los puntos P y Q. Esta integral también se puede escribir así

22.56 $$\int_{y=c}^{d} \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx \right\} dy$$

donde $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ son las ecuaciones de las curvas *HPG* y *PGQ* respectivamente mientras que c y *d son* las ordenadas de *H y G.*

Estas son las llamadas ***integrales dobles*** o ***integrales de*** área. Los anteriores conceptos se pueden ampliar para considerar ***integrales triples*** o ***de volumen*** así ***como*** para ***integrales múltiples*** en más de tres dimensiones.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Subdivídase la superficie S [véase la Fig. 22-8] en n elementos de área ΔS_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. Hágase $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$ donde (x_p, y_p, z_p) es algún punto P de ΔS_p. Sea $\mathbf{N}_p$ una normal unitaria a ΔS_p en el punto P. Entonces, la integral de superficie de la componente normal de A sobre S se define así

22.57 $$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\,dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{N}_p\,\Delta S_p$$

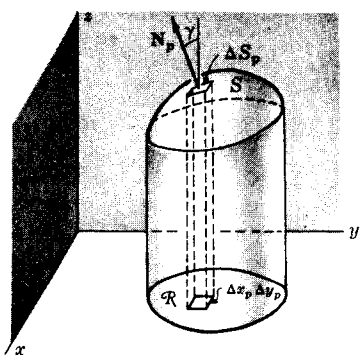


Fig. 22-8

RELACIONES ENTRE LAS INTEGRALES DOBLES Y LAS DE SUPERFICIE

Si $\mathcal{R}$ es la proyección de S sobre el plano xy, entonces [véase la Fig. 22-8].

22.58 $$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea S una superficie cerrada que encierra una región de volumen V; entonces si N es la normal positiva (dirigida hacia el exterior) y $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\, dS$, se tiene que [véase la Fig. 22-9]

22.59 $$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

Este teorema también se conoce con el nombre de teorema *de Gauss* o *teorema de Green.*

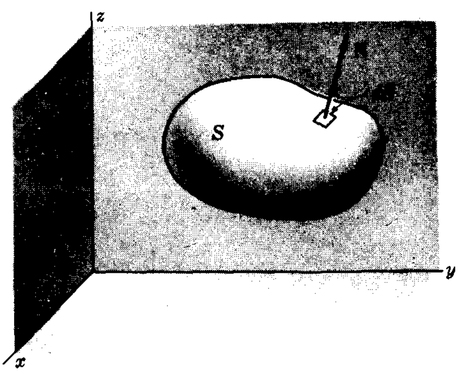


Fig. 22-9

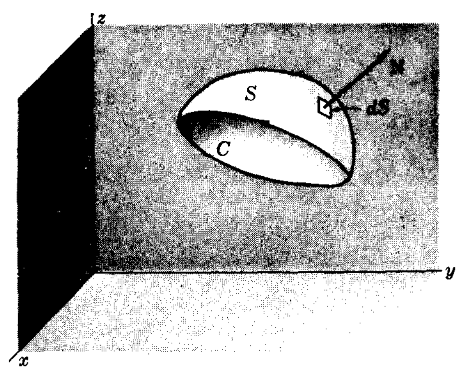


Fig. 22-10

TEOREMA DE STOKE

Sea S una superficie abierta bilátera cuyo contorno es una curva cerrada C que no se corta a sí misma [curva cerrada simple], como se muestra en la Fig. 22-10. Entonces

22.69 $$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

donde hemos empleado el círculo sobre el signo de integral para hacer énfasis en el hecho de que Ces cerrada.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

22.61 $$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde R es el área comprendida por la curva cerrada C. Este teorema constituye un caso especial del teorema de la divergencia o del teorema de Stoke.

PRIMERA IDENTIDAD DE GREEN

22.62 $$\int_V \{\phi\,\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\}\,dV = \int (\phi\,\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

donde ϕ y ψ representan funciones escalares.

SEGUNDA IDENTIDAD DE GREEN

22.63 $$\int_V (\phi\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2\phi)\,dV = \int_S (\phi\,\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

TEOREMAS VARIOS SOBRE INTEGRALES

22.64 $$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\,dV = \int_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

22.65 $$\int_C \phi\,d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$$

COORDENADAS CURVILINEAS

Un punto P *en* el espacio [véase la Fig. 22-11] puede localizarse no solo por medio de coordenadas rectangulares (x, y, z) sino también por coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3). Las ecuaciones de transformación para pasar del uno al otro sistema de coordenadas son las siguientes:

22.66 $$x = x(u_1, u_2, u_3)$$
$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$
$$z = z(u_1, u_2, u_3)$$

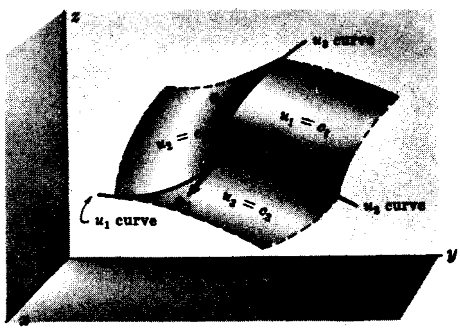


Fig. 22-11

Si u_2 y u_3 son constantes, entonces al variar u_1, el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ del punto P, describe una curva llamada curva coordenada u_1. De manera análoga se pueden definir las curvas coordenadas u_2 y u_3 que pasan por P. Los vectores $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ son vectores tangentes a las curvas coordenadas u_1, u_2, u_3. Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ representan vectores unitarios tangentes a dichas curvas, entonces

22.67 $$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3\mathbf{e}_3$$

donde

22.65 $$h_1 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right|, \quad h_2 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right|, \quad h_3 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$$

son llamados factores *de* escalo. Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son perpendiculares entre sí, el sistema coordenado curvilíneo se llama *ortogonal.*

FORMULAS EN LAS QUE ENTRAN COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

22.69 $$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1 + h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2 + h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3$$

22.70 $$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = h_1^2\,du_1^2 + h_2^2\,du_2^2 + h_3^2\,du_3^2$$

donde ds es el elemento de longitud de arco.

Si dV es el elemento de volumen, entonces

22.71 $$dV = |(h_1\mathbf{e}_1\,du_1)\cdot(h_2\mathbf{e}_2\,du_2)\times(h_3\mathbf{e}_3\,du_3)| = h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3$$
$$= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right| du_1\,du_2\,du_3 = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| du_1\,du_2\,du_3$$

donde

22.72 $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/\partial u_3 \end{vmatrix}$$

se llama el *Jacobiano* de la transformación.

TRANSFORMACION DE INTEGRALES MULTIPLES

La fórmula 22.72 puede emplearse para transformar integrales múltiples del sistema rectangular al sistema de coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, se tiene que

22.73 $$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{R}'} G(u_1,u_2,u_3)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| du_1\,du_2\,du_3$$

donde $\mathcal{R}'$ es la región en la cual queda convertida $\mathcal{R}$ después de la transformación y $G(u_1,u_2,u_3)$ es el valor que corresponde a $F(x,y,z)$ después de la transformación.

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTOR Y LAPLACIANO

A continuación, Φ representa una función escalar y $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ una función vectorial cuyas coordenadas curvilíneas ortogonales son u_1 u_2, u_3.

22.74 Gradiente de $\Phi = \text{grad}\,\Phi = \nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$

22.75 Divergencia de $\mathbf{A} = \text{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$

22.74 Rotor de $\mathbf{A} = \text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right]\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right]\mathbf{e}_2$$
$$+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right]\mathbf{e}_3$$

22.77 Laplaciano de $\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$

Obsérvese que el operador bi-armónico $\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$ se puede obtener a partir de 22.77.

SISTEMAS NOTABLES DE COORDENADAS ORTOGONALES

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) [Véase la Fig. 22-12]

22.78 $$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

22.79 $$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = r^2, \quad h_3^2 = 1$$

22.80 $$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

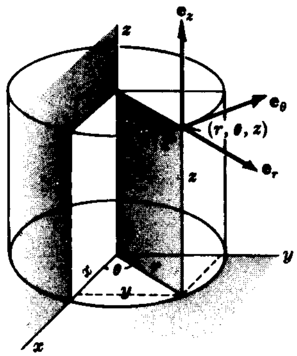


Fig. 22-12. Coordenadas cilíndricas.

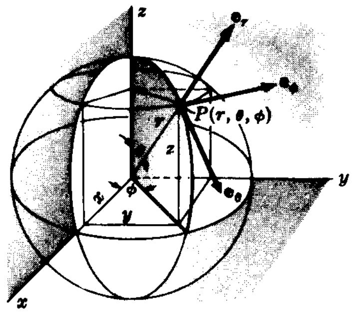


Fig. 22-13. Coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) [Véase la Fig. 22-13]

22.81 $$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = r\cos\theta$$

22.82 $$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = r^2, \quad h_3^2 = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

22.83 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z)

22.84 $$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = \mathrm{UV}, \quad z = z$$

22.85 $$h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \quad h_3^2 = 1$$

22.84 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Las trazas de las superficies coordenadas en el plano xy se muestran en la Fig. 22-14. Dichas trazas son parábolas homofocales que tienen un eje común.

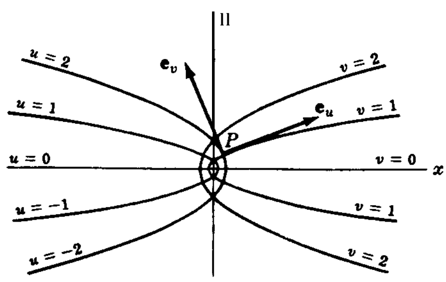


Fig. **22-14**

Coordenadas paraboloidales (u, v, ϕ)

22.87 $$x = uv\cos\phi, \quad y = uv\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

donde $$u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$$

22.88 $$h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \quad h_3^2 = u^2v^2$$

22.89 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{v(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Por revolución de las parábolas de la Fig. 22-14 alrededor del eje x, el cual pasa entonces a llamarse eje z, se obtienen dos sistemas de superficies coordenadas.

Coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z)

22.90 $$x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = z$$

donde $$u \geqq 0, \quad 0 \leqq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

22.91 $$h_1^2 = h_2^2 = a^2(\mathrm{senh}^2 u + \mathrm{sen}^2 v), \quad h_3^2 = 1$$

22.92 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\mathrm{senh}^2 u + \mathrm{sen}^2 v)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Las trazas de las superficies coordenadas en el plano xy se muestran en la Fig. 22-15. Tales curvas son elipses e hipérbolas homofocales.

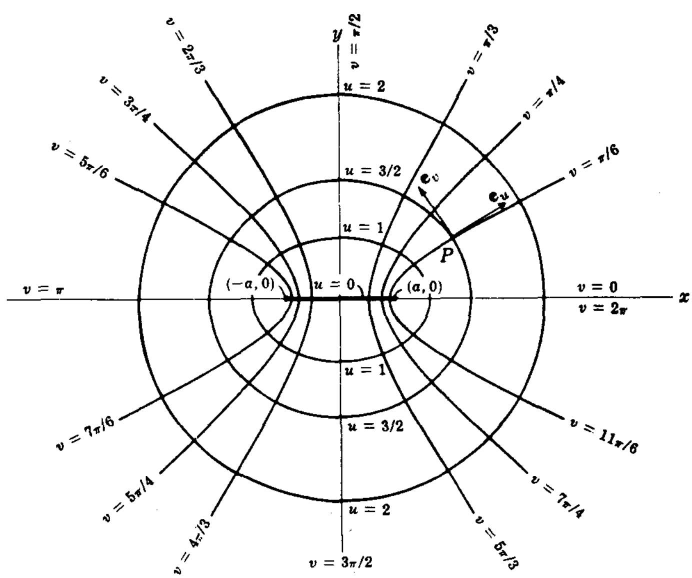


Fig. 22-15. Coordenadas cilíndricas elípticas

Coordenadas esferoidales alargadas (ξ, η, ϕ)

22.93 $x = a \operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta \cos\phi, \quad y = a \operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta \operatorname{sen}\phi, \quad z = a \cosh\xi \cos\eta$

donde $\xi \geqq 0, \quad 0 \leqq \eta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

22.94 $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta), \quad h_3^2 = a^2 \operatorname{senh}^2\xi \operatorname{sen}^2\eta$

22.95
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\operatorname{senh}\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{senh}\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{sen}\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\operatorname{senh}^2\xi\operatorname{sen}^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Por revolución de las curvas de la Fig. 22-15 alrededor del eje x, el cual pasa entonces a llamarse eje z, se obtienen dos series de superficies coordenadas. Una tercera serie de superficies coordenadas está compuesta por planos que pasan por dicho eje.

Coordenadas esferoidales achatadas (ξ, η, ϕ)

22.96 $x = a \cosh\xi \cos\eta \cos\phi, \quad y = a \cosh\xi \cos\eta$ sen +, $\quad z = a \operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta$

donde $\xi \geqq 0, \quad -\pi/2 \leqq \eta \leqq \pi/2, \quad 0 \leqq \phi$ C 2π

22.97 $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta), \quad h_3^2 = a^2 \cosh^2\xi \cos^2\eta$

22.98 v 4 =
$$\frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\cosh\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Por revolución de las curvas de la Fig. 22-15 alrededor del eje y, el cual pasa entonces a llamarse eje z, se obtienen dos series de superficies coordenadas. Una tercera serie de superficies coordenadas está compuesta por planos que pasan por dicho eje.

Coordenadas bipolares (u, v, z)

22.99 $x = \dfrac{a \operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \dfrac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u}, \quad z = z$

donde $0 \leqq u$ c 2π, -- $<$ v c ∞, -- $< z < \infty$

0

22.100 $x^2 + (y - a \cot u)^2 = a^2 \csc^2 u, \quad (x - a \coth v)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 v, \quad z = z$

22.101 $h_1^2 = h_2^2 = \dfrac{a^2}{(\cosh v - \cos u)^2}, \quad h_3^2 = 1$

22.102 $\nabla^2\Phi = \dfrac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

Las trazas de las superficies coordenadas sobre el plano xy se muestran en la Fig. 22-16.

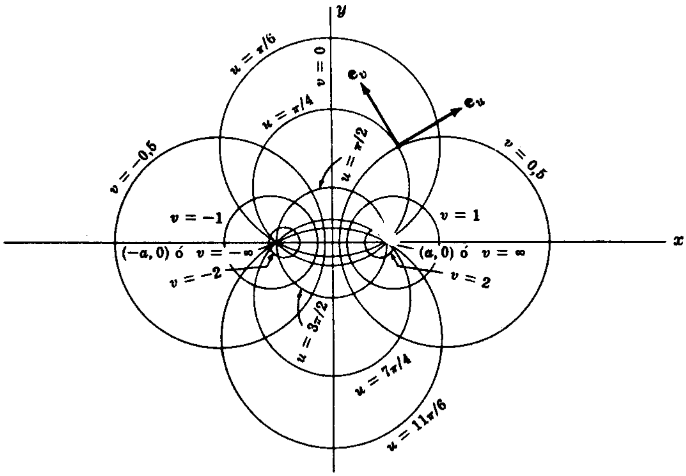


Fig. 22-16. Coordenadas bipolares.

Coordenadas toroidales (u, v, ϕ)

22.103 $$x = \frac{a \operatorname{senh} v \cos\phi}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \frac{a \operatorname{senh} v \operatorname{sen}\phi}{\cosh v - \cos u}, \quad z = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u}$$

22.104 $$h_1^2 = h_2^2 = \frac{a^2}{(\cosh v - \cos u)^2}, \quad h_3^2 = \frac{a^2 \operatorname{senh}^2 v}{(\cosh v - \cos u)^2}$$

22.105 $$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh v - \cos u)^3}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh v - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{(\cosh v - \cos u)^3}{a^2 \operatorname{senh} v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2 \operatorname{senh}^2 v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Las superficies coordenadas se obtienen haciendo girar las curvas que aparecen en la Fig. 22-16 alrededor del eje y, el cual pasa a llamarse eje z.

Coordenadas cónicas (λ, μ, ν)

22.106 $$x = \frac{\lambda\mu\nu}{ab}, \quad y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}$$

22.107 $$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)}, \quad h_3^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)}$$

Coordenadas elipsoidales (homofocales) $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$

22.108
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2-\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2-\lambda} = 1 & \lambda < c^2 < b^2 < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu} + \dfrac{y^2}{b^2-\mu} + \dfrac{z^2}{c^2-\mu} = 1 & c^2 < \mu < b^2 < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\nu} + \dfrac{y^2}{b^2-\nu} + \dfrac{z^2}{c^2-\nu} = 1 & c^2 \ C\ b^2 < \nu < a^2 \end{cases}$$

o

22.109
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ z^2 = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

22.110
$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} \\ h_2^2 = \dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ h_3^2 = \dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \end{cases}$$

Coordenadas paraboloidales (hornofocales) $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$

22.111
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2-\lambda} = z - \lambda & - - < \lambda < b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu} + \dfrac{y^2}{b^2-\mu} = z - \mu & b^2 < \mu < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\nu} + \dfrac{y^2}{b^2-\nu} = z - \nu & a^2 < \nu < \infty \end{cases}$$

o

22.112
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{b^2-a^2} \\ y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{a^2-b^2} \\ z = \lambda + \mu + \nu - a^2 - b^2 \end{cases}$$

22.113
$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)} \\ h_2^2 = \dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)} \\ h_3^2 = \dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{16(a^2-\nu)(b^2-\nu)} \end{cases}$$

23 SERIES DE FOURIER

DEFINICION DE LA SERIE DE FOURIER

La serie de Fourier correspondiente a la función f(x), la cual se supone definida en el intervalo $c \leqq x \leqq c + 2L$ donde c y $L > 0$ son constantes, se define así

23.1 $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

23.2 $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(z)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(z)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Si f(x) y f(x) son casicontinuas y si f(x) está periódicamente definida con un período de $2L$, o sea que $f(x + 2L) = f(x)$, entonces la serie converge hacia $f(x)$ si x es un punto de continuidad y hacia $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ si x es un punto de discontinuidad.

FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

Suponiendo que la serie 23.1 converge hacia f(x), se tiene que

23.3 $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

donde

23.4 $$c_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

23.5 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

FORMULA GENERAL DE LA IDENTIDAD DE PARSEVAL

23.6 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n)$$

donde a_n, b_n y c_n, d_n son los coeficientes de Fourier que corresponden a f(x) y g(x) respectivamente.

SERIES NOTABLES DE FOURIER Y SUS GRAFICAS

23.7 $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right)$$

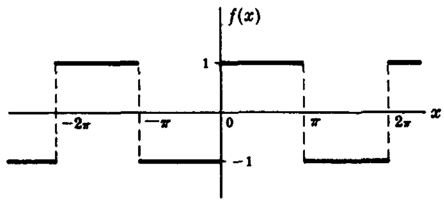


Fig. 23-1

23.8 $\quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

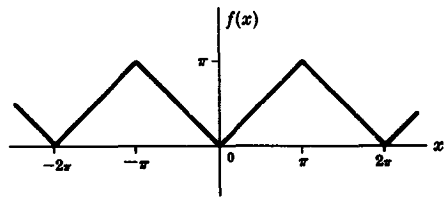


Fig. 22-2

23.9 $\quad f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right)$$

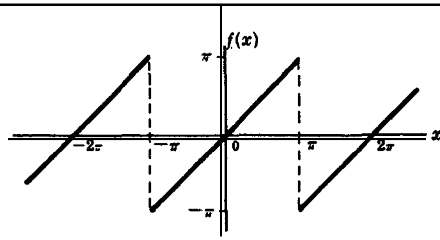


Fig. 23-3

23.10 $\quad f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$

$$\pi - 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots\right)$$

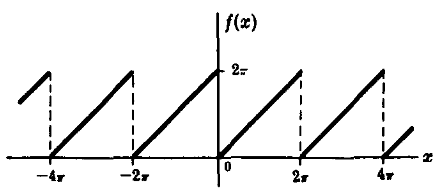


Fig. 22-4

23.11 $\quad j(z) = |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi < z < \pi$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)$$

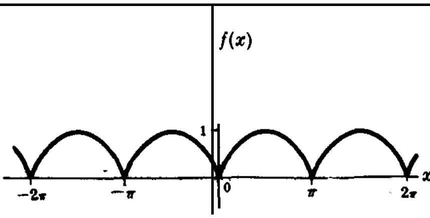


Fig. W-5

23.12 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

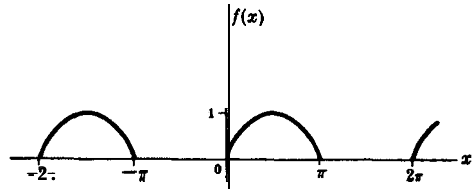


Fig. 23-6

23.13 $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \operatorname{sen} 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \operatorname{sen} 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

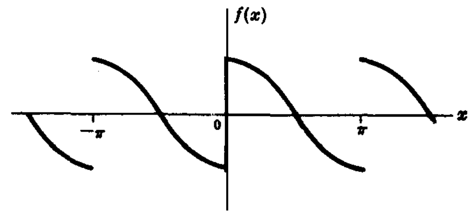


Fig. 23-7

23.14 f(z) = x^2, $-\pi < x < \pi$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

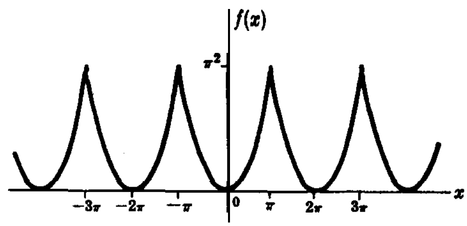


Fig. 23-8

23.15 $f(x) = x(\pi - x)$, $0 < x < \pi$

$$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$$

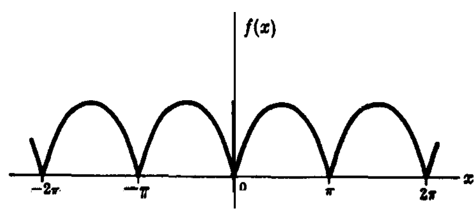


Fig. 33.9

23.16 f(z) = $x(\pi - x)(\pi + x)$, $-\pi < x < \pi$

$$12\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} - \cdots\right)$$

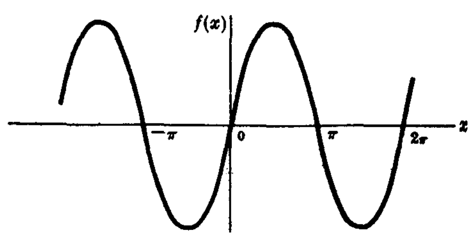


Fig. 23-10

23.17 $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - \alpha \\ 1 & \pi - \alpha < x < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < x < 2\pi \end{cases}$

$$\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos x}{1} - \frac{\operatorname{sen}2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha\cos 3x}{3} - \cdots\right)$$

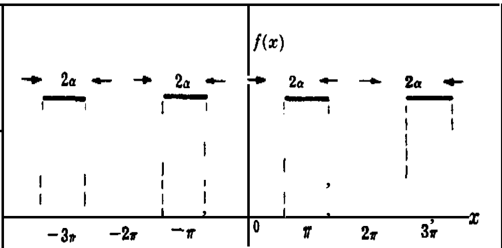


Fig. 23-11

23.18 $f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ -x(\pi - x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen}3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}5x}{5^3} + \cdots\right)$$

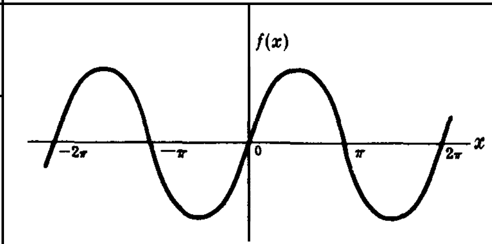


Fig. 23-12

DIVERSAS SERIES DE FOURIER

23.19 $f(x) = \operatorname{sen}\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ entero

$$\frac{2\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^2-\mu^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2-\mu^2} \quad \right)$$

23.20 $f(x) = \cos\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ entero

$$\frac{2\mu\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2} - \cdots\right)$$

23.21 $f(x) = \tan^{-1}[(a\operatorname{sen}x)/(1-a\cos x)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\operatorname{sen}x + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x + \cdots$$

23.22 $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2), \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$-2\left(a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots\right)$$

23.23 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\operatorname{sen}x)/(1-a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\operatorname{sen}x + \frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x + \frac{a^5}{5}\operatorname{sen}5x + \cdots$$

23.24 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\cos x)/(1-a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \ |a| < 1$

$$a\cos x - \frac{a^3}{3}\cos 3x + \frac{a^5}{5}\cos 5x - \cdots$$

23.25 $f(x) = e^{\mu x}, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\,\text{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu\cos nx - n\,\text{sen}\,nx)}{\mu^2+n^2}\right)$$

23.26 $f(x) = \text{senh}\,\mu x, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\,\text{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\text{sen}\,x}{1^2+\mu^2} - \frac{2\,\text{sen}\,2x}{2^2+\mu^2} + \frac{3\,\text{sen}\,3x}{3^2+\mu^2} - \cdots\right)$$

23.27 $f(x) = \cosh\mu x, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\mu\,\text{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2+\mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2+\mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2+\mu^2} + \cdots\right)$$

23.28 $f(x) = \ln|\text{sen}\,\tfrac{1}{2}x|, \quad 0 < x < \pi$

$$-\left(\ln 2 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$

23.29 $f(x) = \ln|\cos\tfrac{1}{2}x|, \quad -\pi < x < \pi$

$$-\left(\ln 2 - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$

23.30 $f(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{2}\pi x + \tfrac{1}{4}x^2, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$$

23.31 $f(x) = \tfrac{1}{12}x(x-\pi)(x-2\pi), \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$\frac{\text{sen}\,x}{1^3} + \frac{\text{sen}\,2x}{2^3} + \frac{\text{sen}\,3x}{3^3} + \cdots$$

23.32 $f(x) = \tfrac{1}{90}\pi^4 - \tfrac{1}{12}\pi^2x^2 + \tfrac{1}{12}\pi x^3 - \tfrac{1}{48}x^4, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$\frac{\cos x}{1^4} + \frac{\cos 2x}{2^4} + \frac{\cos 3x}{3^4} + \cdots$$

24 FUNCIONES DE BESSEL

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL

24.1 $$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad n \geqq 0$$

Las soluciones de la anterior ecuación se llaman *funciones de Bessel de orden n.*

FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA ESPECIE Y ORDEN n

24.2 $$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \end{aligned}$$

24.3 $$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \frac{x^{-n}}{2^{-n}\,\Gamma(1-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)} \end{aligned}$$

24.4 $$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots,$ $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente independientes.

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots,$ $J_n(x)$ está definida en $x = 0$ mientras que $J_{-n}(x)$ es definida.

Para $n = 0, 1$ se tiene

24.5 $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

24.6 $$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

24.7 $$J_0'(x) = -J_1(x)$$

FUNCIONES DE BESSEL DE SEGUNDA ESPECIE Y ORDEN n

24.6 $$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \lim\limits_{p\to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La forma anterior también se conoce con el nombre de función *de Weber o función de Neumann* [la *cual* se acostumbra a denotar por $N_n(x)$].

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, la regla de L'Hospital da

24.9 $$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\} J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\,(x/2)^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\Phi(k) + \Phi(n+k)\}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}$$

donde $\gamma = 0{,}5772156$ es la constante de Euler [página 1] y

24.10 $$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}, \qquad \Phi(0) = 0$$

Para $n = 0$,

24.11 $$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\} J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}(1 + \tfrac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) - \cdots\right\}$$

24.12 $$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para cualquier valor $n \geqq 0$, $J_n(x)$ será definida en $x = 0$ mientras que $Y_n(x)$ sed indefinida.

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE BESSEL

24.13 $$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

24.14 $$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \qquad \text{para todo } n$$

24.15 $$y = AJ_n(x) + BJ_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)} \qquad \text{para todo } n$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

FUNCION GENERADORA $J_n(x)$

24.16 $$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

FORMULAS DE RECURRENCIA DE LAS FUNCIONES BESSEL

24.17 $$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

24.18 $$J_n'(x) = \tfrac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}$$

24.19 $$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

24.20 $$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

24.21 $$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

24.22 $$\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Las funciones $Y_n(x)$ satisfacen idénticas relaciones.

FUNCIONES DE BESSEL CUYO ORDEN ES IGUAL A LA MITAD DE UN ENTERO IMPAR

En este caso las funciones se pueden expresar con auxilio de senos y cosenos.

24.23 $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$

24.24 $J_{-1/2}(x)\ \sqrt{\frac{22}{\pi 2x}}\cos x$

24.25 $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right)$

24.26 $J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x\right)$

24.27 $J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\operatorname{sen} x - \frac{3}{x}\cos x\right\}$

24.28 $J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{3}{x}\operatorname{sen} x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x\right\}$

Empléese la fórmula de recurrencia cada vez que se desee obtener resultados adicionales. A partir de 24.8 se pueden obtener los resultados correspondientes a $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, . . .

FUNCIONES DE HANKEL DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIES Y ORDEN n

24.29 $H_n^{(1)}(x) = J,,(z) + iY_n(x)$

24.30 $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\,Y_n(x)$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL MODIFICADA

24.31 $$x^2y'' + zy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geqq 0$$

Lás soluciones de la anterior ecuación se llaman funciones modificadas *de Bessel de orden n.*

FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL DE PRIMERA ESPECIE Y ORDEN n

24.32 $$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = e^{-n\pi i/2}J_n(ix)$$
$$= \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

24.33
$$I_{-n}(x) = i^nJ_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2}J_{-n}(ix)$$
$$= \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

24.34 $$I_{-n}(x) = I_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, entonces Z,(z) y $I_{-n}(x)$ son linealmente independientes

Para $n = 0, 1,$ se tiene

24.35 $$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

24.36 $$z,(z) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \frac{}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

24.37 $$I_0'(x) = I_1(x)$$

FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL DE ORDEN IGUAL A LA MITAD DE UN ENERO IMPAR

En este caso las funciones se pueden expresar por medio de senos y cosenos hiperbólicos.

24.58 $$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\operatorname{senh} x$$

24.59 $$I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cosh x$$

24.60 $$I_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cosh x - \frac{\operatorname{senh} x}{x}\right)$$

24.61 $$I_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\operatorname{senh} x - \frac{\cosh x}{x}\right)$$

24.62 $$I_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\operatorname{senh} x - \frac{3}{x}\cosh x\right\}$$

24.63 $$I_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\cosh x - \frac{3}{x}\operatorname{senh} x\right\}$$

Se pueden obtener resultados adicionales empleando la fórmula 24.48. A partir de 24.38 se pueden obtener los resultados correspondientes a $K_{1/2}(x), K_{3/2}(x), \ldots$

FUNCIONES DE BER Y DE BEI

Las partes real e imaginaria de $J_n(xe^{3\pi i/4})$ se denotan por $\operatorname{Ber}_n(x)$ y $\operatorname{Bei}_n(x)$ siendo

24.64 $$\operatorname{Ber}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

24.65 $$\operatorname{Bei}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

Si $n = 0$,

24.66 $$\operatorname{Ber}(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2} + \frac{(x/2)^8}{4!^2} - \cdots$$

24.67 $$\operatorname{Bei}(x) = (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \cdots$$

FUNCIONES DE KER Y DE KEI

Las partes real e imaginaria de $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$ se denotan por $\operatorname{Ker}_n(x)$ y $\operatorname{Kei}_n(x)$ siendo

24.68 $$\begin{aligned}\operatorname{Ker}_n(x) = {} & -\{\ln(x/2)+\gamma\}\operatorname{Ber}_n(x) + \tfrac{1}{4}\pi\operatorname{Bei}_n(x)\\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!\,(x/2)^{2k-n}}{k!}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}\\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}\end{aligned}$$

24.69 $$\begin{aligned}\operatorname{Kei}_n(x) = {} & -\{\ln(x/2)+\gamma\}\operatorname{Bei}_n(x) - \tfrac{1}{4}\pi\operatorname{Ber}_n(x)\\ & - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!\,(x/2)^{2k-n}}{k!}\operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}\\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}\end{aligned}$$

donde Φ está dado según 24.10, página 137.

Si $n = 0$,

24.70 $$\operatorname{Ker}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\operatorname{Ber}(x) + \frac{\pi}{4}\operatorname{Bei}(x) + 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2}(1+\tfrac{1}{2}) + \frac{(x/2)^8}{4!^2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}) - \cdots$$

24.71 $$\operatorname{Kei}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\operatorname{Bei}(x) - \frac{\pi}{4}\operatorname{Ber}(x) + (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}) + \cdots$$

FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL DE SEGUNDA ESPECIE Y ORDEN n

24.38 $$K_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} n\pi}\{I_{-n}(x) - I_n(x)\} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} p\pi}\{I_{-p}(x) - I_p(x)\} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$, aplicando la regla de L'Hospital se obtiene

24.39 $$K_n(x) = (-1)^{n+1}\{\ln(x/2) + \gamma\}I_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k-1)!\,(x/2)^{2k-n}$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\{\Phi(k) + \Phi(n+k)\}$$

donde $\Phi(p)$ está dada por 24.10.

Cuando $n = 0$,

24.40 $$K_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\}I_0(x) + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}(1 + \tfrac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + \cdots$$

24.41 $$K_{-n}(x) = K_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION MODIFICADA DE BESSEL

24.42 $$y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

24.43 $$y = AI_n(x) + BK_n(x) \qquad \text{para todo } n$$

24.44 $$y = AI_n(x) + BI_n(x)\int\frac{dx}{x I_n^2(x)} \qquad \text{para todo } n$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

FUNCION GENERADORA DE $I_n(x)$

24.45 $$e^{x(t+1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$$

FORMULAS DE RECURRENCIA PARA LAS FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL

24.46 $$I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x}I_n(x)$$

24.47 $$I_n'(x) = \tfrac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\}$$

24.48 $$xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)$$

24.49 $$xI_n'(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)$$

24.50 $$\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)$$

24.51 $$\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x)$$

24.52 $$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x}K_n(x)$$

24.53 $$K_n'(x) = -\tfrac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\}$$

24.54 $$xK_n'(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x)$$

24.55 $$xK_n'(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)$$

24.56 $$\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x)$$

24.57 $$\frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x)$$

ECUACION DIFERENCIAL CORRESPONDIENTE A LAS FUNCIONES DE BER, BEI, KER, KEI

24.72 $$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0$$

La solución general de la anterior ecuación es

24.73 $$y = A\{\mathrm{Ber}_n(x) + i\,\mathrm{Bei}_n(x)\} + B\{\mathrm{Ker}_n(x) + i\,\mathrm{Kei}_n(x)\}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

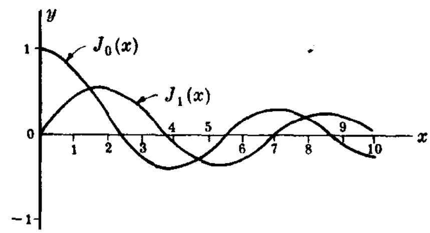


Fig. 24-1

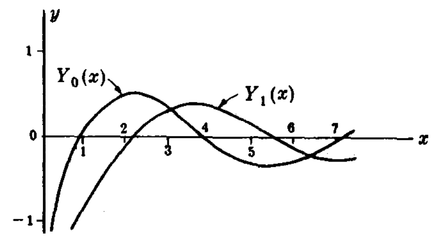


Fig. 24-2

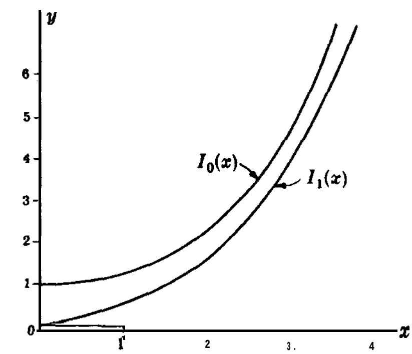


Fig. 24-3

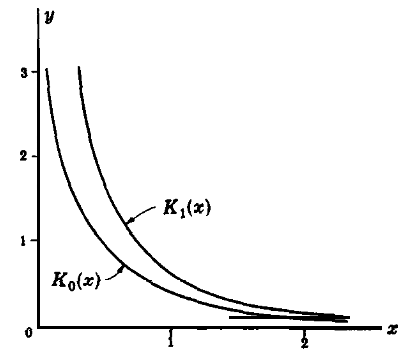


Fig. 24-4

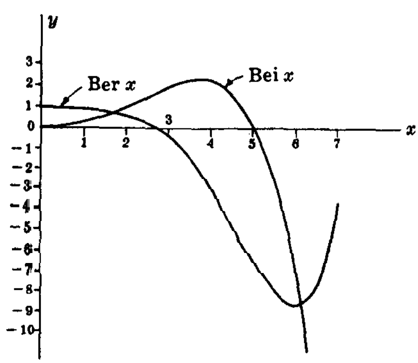


Fig. 24-5

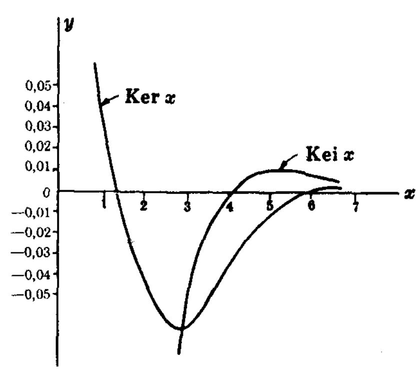


Fig. 24-6

INTEGRALES INDEFINIDAS QUE CONTIENEN FUNCIONES DE BESSEL

24.74 $$\int x\,J_0(x)\,dx = x\,J_1(x)$$

24.75 $$\int x^2\,J_0(x)\,dx = x^2 J_1(x) + x\,J_0(x) - \int J_0(x)\,dx$$

24.76 $$\int x^m\,J_0(x)\,dx = x^m J_1(x) + (m-1)x^{m-1}J_0(x) - (m-1)^2\int x^{m-2}J_0(x)\,dx$$

24.77 $$\int \frac{J_0(x)}{x^2}\,dx = J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x} - \int J_0(x)\,dx$$

24.78 $$\int \frac{J_0(x)}{x^m}\,dx = \frac{J_1(x)}{(m-1)^2x^{m-2}} + \frac{J_0(x)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-2}}\,dx$$

24.79 $$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x)$$

24.80 $$\int x\,J_1(x)\,dx = -x\,J_0(x) + \int J_0(x)\,dx$$

24.81 $$\int x^m\,J_1(x)\,dx = -x^m J_0(x) + m\int x^{m-1}J_0(x)\,dx$$

24.82 $$\int \frac{J_1(x)}{x}\,dx = -J_1(x) + \int J_0(x)\,dx$$

24.83 $$\int \frac{J_1(x)}{x^m}\,dx = -\frac{J_1(x)}{mx^{m-1}} + \frac{1}{m}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-1}}\,dx$$

24.84 $$\int x^n\,J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x)$$

24.85 $$\int x^{-n}\,J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n}J_n(x)$$

24.86 $$\int x^m\,J_n(x)\,dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1}J_{n-1}(x)\,dx$$

24.87 $$\int x\,J_n(\alpha x)\,J_n(\beta x)\,dx = \frac{x\{\alpha\,J_n(\beta x)\,J_n'(\alpha x) - \beta\,J_n(\alpha x)\,J_n'(\beta x)\}}{\beta^2-\alpha^2}$$

24.88 $$\int x\,J_n^2(\alpha x)\,dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$$

Los anteriores resultados también son válidos si se remplaza a $J_n(x)$ por $Y_n(x)$ o, más generalmente, por $A\,J_n(x) + B\,Y_n(x)$ donde A y B son constantes.

INTEGRALES DEFINIDAS QUE CONTIENEN FUNCIONES DE BESSEL

24.89 $$\int_0^\infty e^{-ax}\,J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

24.90 $$\int_0^\infty e^{-ax}\,J_n(bx)\,dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^n}{b^n\sqrt{a^2+b^2}} \qquad n > -1$$

24.91 $$\int_0^\infty \cos ax\,J_0(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} & a > b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

24.92 $\displaystyle\int_0^{\infty} J_n(bx)\,dx = \frac{1}{b} \qquad n > -1$

24.93 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{J_n(bx)}{x}\,dx = \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

24.94 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(b\sqrt{x})\,dx = \frac{e^{-b^2/4a}}{a}$

24.95 $\displaystyle\int_0^{1} x\,J_n(\alpha x)\,J_n(\beta x)\,dx = \frac{\alpha\,J_n(\beta)\,J_n'(\alpha) - \beta\,J_n(\alpha)\,J_n'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$

24.96 $\displaystyle\int_0^{1} x\,J_n^2(\alpha x)\,dx = \tfrac{1}{2}\{J_n'(\alpha)\}^2 + \tfrac{1}{2}(1 - n^2/\alpha^2)\{J_n(\alpha)\}^2$

24.97 $\displaystyle\int_0^{1} x\,J_0(\alpha x)\,I_0(\beta x)\,dx = \frac{\beta\,J_0(\alpha)\,I_0'(\beta) - \alpha\,J_0'(\alpha)\,I_0(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$

REPRESENTACION INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

24.98 $\displaystyle J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

24.99 $\displaystyle J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta, \qquad n = \text{entero}$

24.100 $\displaystyle J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma(n + \frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta, \qquad n > -\tfrac{1}{2}$

24.101 $\displaystyle Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(x \cosh u)\,du$

24.102 $\displaystyle I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

DESARROLLOS ASINTOTICOS

24.103 $\displaystyle J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ donde x es suficientemente grande

24.104 $\displaystyle Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ donde x es suficientemente grande

24.105 $\displaystyle J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{ex}{2n}\right)^{n}$ donde n es suficientemente grande

24.106 $\displaystyle Y_n(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(\frac{ex}{2n}\right)^{-n}$ donde n es suficientemente grande

24.107 $\displaystyle I_n(x) \sim \frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi x}}$ donde x es suficientemente grande

24.108 $\displaystyle K_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$ donde x es suficientemente grande

SERIES ORTOGONALES DE FUNCIONES DE BESSEL

Sea $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ las raíces positivas de $R J_n(x) + Sx J_n'(x) = 0$, $n > -1$. Entonces, bajo las condiciones indicadas, son válidos los siguientes desarrollos en series.

$S = 0$, $R \neq 0$, o sea que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son raíces positivas de $J_n(x) = 0$

24.109 $$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

donde

24.110 $$A_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx$$

En particular, si $n = 0$,

24.111 $$f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$$

donde

24.112 $$A_k = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx$$

$R/S > -n$

24.113 $$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

donde

24.114 $$A_k = \frac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx$$

En particular, si $n = 0$,

24.115 $$f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$$

donde

24.116 $$A_k = \frac{2}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx$$

$R/S = -n$

24.117 $$f(x) = A_0 x^n + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots$$

donde

24.118 $$\begin{cases} A_0 = 2(n+1) \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx \end{cases}$$

En el caso especial en que $n = 0$ de manera que $R = 0$ [o sea, cuando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$],

24.119 $$f(x) = A_0 + A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + \cdots$$

donde

24.120 $$\begin{cases} A_0 = 2 \displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_0^2(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx \end{cases}$$

25 NUMEROS DE BERNOULLI Y DE EULER

ECUACION DIFERENCIAL DE LEGENDRE

25.1 $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

Las soluciones de la anterior ecuación se llaman *funciones de Legendre de orden* n

POLINOMIOS DE LEGENDRE

En el caso en que $n = 0, 1, 2,$, las soluciones de 25.1 son polinomios de Legendre $P,(z)$ que se pueden hallar por la fórmula *de Rodrigue.*

25.2 $$P,(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

EJEMPLOS DE POLINOMIOS DE LEGENDRE

25.3 $P,(z) = 1$

25.4 $P_1(x) = x$

25.5 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

25.6 $P*(z) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

25.7 $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

25.3 $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 152)$

25.9 $P,(z) = \frac{1}{16}(231x^6 - 31524 + 105x^2 - 5)$

25.10 $P,(z) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

POLINOMIOS DE LEGENDRE EXPRESADOS POR θ DONDE x = cos q

25.11 $P_0(\cos\theta) = 1$

25.12 $P_1(\cos e) = \cos\theta$

25.13 $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$

25.14 $P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(3\ \text{cose} + 5\ \text{coste})$

25.15 $P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(9 + 20\cos 2\theta + 35\cos 4\theta)$

25.16 $P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(30\cos\theta + 35\cos 3e + 63\cos 5\theta)$

25.17 $P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(50 + 105\cos 2\theta + 126\cos 4\theta + 231\cos 6\theta)$

25.16 $P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(175\cos\theta + 189\cos 3e + 231\cos 5\theta + 429\cos 7\theta)$

FUNCION GENERADORA DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

25.19 $$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

FORMULAS DE CONCURRENCIA PARA LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

25.20 $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

25.21 $$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$$

25.22 $$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$

25.23 $$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

25.24 $$(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

25.25 $$\int_{-1}^{1} P,(z)\ P_n(x)\ dx = 0 \qquad m \neq n$$

25.26 $$\int_{-1}^{1} \{P_n(x)\}^2\ dx = \frac{2}{2n+1}$$

En razón de 25.25, P,,,(z) y $P_n(x)$ *se* **pueden llamar ortogonales en** $-1 \leqq x \leqq 1$.

SERIES ORTOGONALES DE POLINOMIOS DE LEGENDRE

25.27 $$f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \cdots$$

donde

25.28 $$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\ dx$$

ALGUNAS FORMULAS QUE CONTIENEN POLINOMIOS DE LEGENDRE

25.29 $P_n(1) = 1$ 25.30 $P_n(-1) = (-1)^n$ 25.31 $P_n(-x) = (-1)^nP_n(x)$

25.32 $$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} & n \text{ par} \end{cases}$$

25.33 $$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi)^n\ d\phi$$

25.34 $$\int P,(z)\ dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

25.35 $$|P_n(x)| \leqq 1$$

25.36 $$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

donde C **es una curva cerrada simple que tiene a** x **como punto interior.**

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DE LEGENDRE

La solución general de la ecuación de Legendre es

25.37 $$y = A\, U_n(x) + B\, V_n(x)$$

donde

25.38 $$U_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

25.39 $$V_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

La anterior serie es convergente en $-1 < x < 1$.

FUNCIONES DE LEGENDRE DE SEGUNDA ESPECIE

Si $n = 0, 1, 2,$ alguna de las series 25.33, 25.39 es finita. En tales casos,

25.40 $$P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ V_n(x)/V_n(1) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

donde

25.41 $$U_n(1) = (-1)^{n/2}\, 2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 \Big/ n! \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

25.42 $$V_n(1) = (-1)^{(n-1)/2}\, 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2 \Big/ n! \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Por otro lado, la serie no-finita, acompañada de un adecuado factor constante, se denota por $Q_n(x)$ y se conoce con el nombre de ***función de Legendre de segunda especie y orden*** n. Por definición,

25.43 $$Q_n(x) = \begin{cases} U_n(1)\, V_n(x) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ -V_n(1)\, U_n(x) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

FUNCIONES ESPECIALES DE LEGENDRE DE SEGUNDA ESPECIE

25.44 $$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

25.45 $$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

25.46 $$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}$$

25.47 $$Q_3(x) = \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}$$

Las funciones $Q_n(x)$ satisfacen fórmulas de recurrencia exactamente análogas a las que se dan en 25.20 a 25.24. Empleando éstas se puede expresar la solución general de la ecuación de Legendre de esta otra manera

25.48 $$y = A\, P_n(x) + B\, Q_n(x)$$

26 FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE

ECUACION DIFERENCIAL ASOCIADA DE LEGENDRE

26.1 $$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0$$

Las soluciones de la anterior ecuación son llamadas *funciones asociadas de Legendre.* Nos ocuparemos únicamente del importante caso en que m, n son enteros no-negativos.

FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE DE PRIMERA ESPECIE

26.2 $$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n$$

donde $P_n(x)$ son polinomios de Legendre [página 146]. Tenemos

26.3 $$P_n^0(x) = P_n(x)$$

26.4 $$P_n^m(x) = 0 \qquad \text{si } m > n$$

FUNCIONES ESPECIALES ASOCIADAS DE LEGENDRE DE PRIMERA ESPECIE

26.5 $P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$

26.6 $P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}$

26.7 $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

26.8 $P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$

26.9 $P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$

26.10 $P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2}$

FUNCION GENERADORA DE $P_n^m(x)$

26.11 $$\frac{(2m)!\,(1-x^2)^{m/2}t^m}{2^m m!\,(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^n$$

FORMULAS DE RECURRENCIA

26.12 $$(n+1-m)\,P_{n+1}^m(x) - (2n+1)x\,P_n^m(x) + (n+m)\,P_{n-1}^m(x) = 0$$

26.13 $$P_n^{m+2}(x) - \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)\,P_n^m(x) = 0$$

ORTOGONALIDAD DE $P_n^m(x)$

26.14 $$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\,P_l^m(x)\,dx = 0 \qquad \text{si } n \neq l$$

26.15 $$\int_{-1}^{1} \{P_n^m(x)\}^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

SERIES ORTOGONALES

26.16 $$f(x) = A_m P_m^m(x) + A_{m+1} P_{m+1}^m(x) + A_{m+2} P_{m+2}^m(x) + \cdots$$

donde

26.17 $$A_k = \frac{2k+1}{2}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_k^m(x)\,dx$$

FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE DE SEGUNDA ESPECIE

26.18 $$Q_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$$

donde $Q_n(x)$ son funciones de Legendre de segunda especie [página 148].

Dichas funciones son indefinidas en $x = \pm 1$, mientras que $P_n^m(x)$ son definidas en $x = \pm 1$.

Les funciones $Q_n^m(x)$ satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que $P_n^m(x)$ [véase 26.12 y 26.13].

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION ASOCIADA DE LEGENDRE

26.19 $$y = A\,P_n^m(x) + B\,Q_n^m(x)$$

27 POLINOMIOS DE HERMITE

ECUACION DIFERENCIAL DE HERMITE

27.1 $$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

POLINOMIOS DE HERMITE

En el caso en que $n = 0$, **1, 2,** las soluciones de la ecuación de Hermite se conocen como polinomios de **Hermite** H,(z) que se pueden hallar por la *fórmula de Rodrigue.*

27.2 $$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

EJEMPLOS DE POLINOMIOS DE HERMITE

27.3 H,(z) = 1

27.4 H,(z) = $2x$

27.5 H,(z) = $4x^2 - 2$

27.4 $H_3(x) = 8x^3 -$ 122

27.7 $H_4(x) =$ 1624 $- 48x^2 +$ 12

27.8 $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 +$ 1202

27.9 $H_6(x) = 64x^6 -$ 48024 $+ 720x^2$ 120

27.10 H,(z) = $128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

FUNCION GENERADORA

27.11 $$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, t^n}{n!}$$

FORMULAS DE RECURRENCIA

27.12 $H_{n+1}(x) =$ 22 H,(z) $- 2n\, H_{n-1}(x)$

27.13 $H_n'(x) -$ *2n H,-,(z)*

ORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

27.14 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \text{ H,,,(z) H,,(z) } dx = 0 \qquad m \neq n$$

27.15 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{H_n(x)\}^2 \, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

SERIES ORTOGONALES

27.16 $$f(x) = A_0 H_0(x) + A_1 H_1(x) + A_2 H_2(x) + \cdots$$

donde

27.17 $$A_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \text{ f(z) } H_k(x) \, dx$$

RESULTADOS ESPECIALES

27.18 $$\text{H , (z)} = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$$

27.19 $$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

27.20 $$H_{2n-1}(0) = 0$$

27.21 $$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

27.22 $$\int_0^x H_n(t)\,dt = \frac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)} \qquad \frac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}$$

27.23 $$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\} = -e^{-x^2} H_{n+1}(x)$$

27.24 $$\int_0^x e^{-t^2} \text{ H,,(t) } dt = \text{H,-,(O)} - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$$

27.25 $$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt)\, dt = \sqrt{\pi}\; n! \text{ P,(z)}$$

27.26 $$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n/2}} \binom{n}{k} H_k(x\sqrt{2})\, H_{n-k}(y\sqrt{2})$$

Esta última es llamada *fórmula de adición* para los polinomios de Hermite.

27.27 $$\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x)\, H_k(y)}{2^k k!} = \frac{H_{n+1}(x)\, H_n(y) - H_n(x)\, H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n!\,(x-y)}$$

28 POLINOMIOS DE LAGUERRE

ECUACION DIFERENCIAL DE LAGUERRE

28.1 $$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

POLINOMIOS DE LAGUERRE

En el caso en que $n = 0, 1, 2,$ las soluciones de la ecuacion de Laguerre se conocen como polinomios de Laguerre $L_n(x)$ que se pueden hallar por la fórmula de Rodrigue.

28.2 $$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

EJEMPLOS DE POLINOMIOS DE LAGUERRE

28.3 L,(x) = 1

28.4 L,(x) = $-x + 1$

28.5 L,(z) = $x^2 - 4x + 2$

28.6 L,(x) = $-x^3 + 9x2 - 182 + 6$

28.7 $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$

28.8 L,(x) = $-x^5 + 25x^4 - 20023 + 600x^2 - 600x + 120$

28.9 $L_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 240025 + 5400x^2 - 4320x + 720$

28.10 $L_7(x) = -x^7 + 49x^6 - 882x5 + 7350x^4 - 29.400x^3 + 52.920x^2 - 35.280x + 5040$

FUNCION GENERADORA

28.11 $$\frac{e^{-xt/1-t}}{1-t} = \overset{-}{\underset{n=0}{B}} \frac{L_n(x)\, t^n}{n!} -$$

FORMULAS DE RECURRENCIA

28.12 $$L,+,(x) - (2n+1-x)\,L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$$

28.13 $$L_n'(x) - n\,L_{n-1}'(x) + n\,L_{n-1}(x) = 0$$

28.14 $$x\,L_n'(x) = n\,L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

ORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

28.15 $$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) \; L,(z) \; dx = 0 \qquad m f n$$

28.16 $$\int_0^\infty e^{-x} \{L_n(x)\}^2 \; dx = (n!)^2$$

SERIES ORTOGONALES

28.17 $$f(x) = A_0 \, L_0(x) + A_1 \, L_1(x) + A_2 \, L,(z) + \cdots$$

donde

28.18 $$A_k = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{''} e^{-x} f(x) \, L_k(x) \, dx$$

RESULTADOS ESPECIALES

28.19 $L,(o) = n!$

28.20 $$\int_0^x L_{,,}(t) \; dt = L_n(x) - \frac{L_{n+1}(x)}{n+1}$$

28.21 $$L_n(x) = (-1)^n \left\{ x^n - \frac{n^2 x^{n-1}}{1!} + \frac{n^2(n-1)^2 x^{n-2}}{2!} - \cdots (-1)^n n! \right\}$$

28.22 $$\int_0^\infty x^p e^{-x} \; L_{,,}(z) \; dz = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ (-1)^n (n!)^2 & \text{si } p = n \end{cases}$$

28.23 $$\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(x) \; L_k(y)}{(k!)^2} = \frac{L_n(x) \, L_{n+1}(y) - L_{n+1}(x) \, L_n(y)}{(n!)^2 \, (x - y)}$$

28.24 $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \; L_k(x)}{(k!)^2} = e^t J_0(2\sqrt{xt})$$

28.25 $$L,(z) = \int_0^\infty u^n e^{x-u} J_0(2\sqrt{xu}) \, du$$

29 POLINOMIOS ASOCIADOS DE LAGUERRE

ECUACION DIFERENCIAL ASOCIADA DE LAGUERRE

29.1
$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

POLINOMIOS ASOCIADOS DE LAGUERRE

Cuando m y n son enteros no-negativos las soluciones de 29.1 son dadas por los polinomios asociados de Laguerre

29.2
$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

donde L,(z) denota polinomios de Laguerre [véase la página 153].

29.3
$$L_n^0(x) = L_n(x)$$

29.4
$$L_n^m(x) = 0 \qquad \text{si } m > n$$

ALGUNOS EJEMPLOS DE POLINOMIOS ASOCIADOS DE LAGUERRE

29.5 $L_1^1(x) = -1$

29.6 $L_2^1(x) = 2x - 4$

29.7 $L_2^2(x) = 2$

29.8 $L_3^1(x) = -3x^2 + 18x - 18$

29.9 $L_3^2(x) = -6x + 18$

29.10 L:(z) = - 6

29.11 $L_4^1(x) = 4x^3 - 48x^2 + 1442 - 96$

29.12 $L_4^2(x) = 12x^2 - 96x + 144$

29.13 L:(z) = 24x - 96

29.14 L:(x) = 24

FUNCION GENERADORA DE $L_m^n(x)$

29.15
$$\frac{(-1)^m t^m}{(1-t)^{m+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{n!} t^n$$

FORMULAS DE RECURRENCIA

29.16 $$\frac{n-m+1}{n+1} L_{n+1}^{m}(x) + (x+m-2n-1)\, L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^{m}(x) = 0$$

29.17 $$\frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = L_n^{m+1}(x)$$

29.18 $$\frac{d}{dx}\{x^m e^{-x} L_n^m(x)\} = (m-n-1)x^{m-1}e^{-x} L_n^{m-1}(x)$$

29.19 $$x\frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = (x-m)\, L_n^m(x) + (m-n-1)\, L_n^{m-1}(x)$$

ORTOGONALIDAD

29.20 $$\int_0^\infty x^m e^{-x}\, L_n^m(x)\, L_p^m(x)\, dx = 0 \qquad p \neq n$$

29.21 $$\int_0^\infty x^m e^{-x}\, \{L_n^m(x)\}^2\, dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

SERIES ORTOGONALES

29.22 $$f(x) = A_m L_m^m(x) + A_{m+1} L_{m+1}^{m}(x) + A_{m+2} L_{m+2}^{m}(x) + \cdots$$

donde

29.23 $$A_k = \frac{(k-m)}{(k!)^3}\int_0^\infty x^m e^{-x} L_k^m(x)\, f(x)\, dx$$

RESULTADOS ESPECIALES

29.24

$$L_n^m(x) = (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!}\left\{x^{n-m} - \frac{n(n-m)}{1!}x^{n-m-1} + \frac{n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{2!}x^{n-m-2} + \cdots\right\}$$

29.25 $$\int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}\{L_n^m(x)\}^2\, dx = \frac{(2n-m+1)(n!)^3}{(n-m)!}$$

30 POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

ECUACION DIFERENCIAL DE LAGUERRE CHEBYSHEV

30.1 $$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DE PRIMERA ESPECIE

Las soluciones de 30.1 son dadas por

30.2 $$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DE PRIMERA ESPECIE

30.3 $T_0(x) = 1$

30.4 T,(z) $= x$

30.5 T,(x) $= 2x^2 - 1$

30.6 T,(x) $= 4x^3 - 3x$

30.7 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

30.8 T,(z) $= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

30.9 $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

30.10 T,(z) $= 64x^7 -$ 11225 $+ 56x^3 - 7x$

FUNCION GENERADORA PARA $U_n(x)$

30.11 $$\frac{1 - tx}{1 - 2tz + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n$$

VALORES ESPECIALES

30.12 $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

30.13 $T_n(1) = 1$

30.14 $T_n(-1) =$ (-1)”

30.15 $T_{2n}(0) = (-1)^n$

30.16 $T_{2n+1}(0) =$ o

FORMULA DE RECURRENCIA PARA $T_n(x)$

30.17 $$T_{n+1}(x) - 2x\,T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

ORTOGONALIDAD

30.18 $$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad m \neq n$$

30.19 $$\int_{-1}^{1} \frac{\{T_n(x)\}^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

SERIES ORTOGONALES

30.20 $$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0\,T_0(x) + A_1\,T_1(x) + A_2\,T,(z) + \ldots$$

donde

30.21 $$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DE SEGUNDA ESPECIE

30.22 $$U_n(x) = \frac{\text{sen}\,\{(n+1)\cos^{-1}x\}}{\text{sen}\,(\cos^{-1}x)}$$

$$= \binom{n+1}{1}x^n - \binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

POLINOMIOS ESPECIALES DE CHEBYSHEV DE SEGUNDA ESPECIE

30.23 $U_0(x) = 1$

30.24 $U_1(x) = 22$

30.25 $U_2(x) = 4x^2 - 1$

30.26 $U_3(x) = 8x^3 - 42$

30.27 $U_4(x) = 1624 - 12x^2 + 1$

30.28 $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

30.29 $U_6(x) = 64x^6 - 8024 + 24x^2 - 1$

30.30 $U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

FUNCION GENERADORA PARA $U_n(x)$

30.31 $$\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,t^n$$

VALORES PARTICULARES

30.32 $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$

30.33 $U_n(1) = n + 1$

30.34 $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$

30.35 $U_{2n}(0) = (-1)^n$

30.36 $U_{2n+1}(0) = 0$

FORMULA DE RECURRENCIA PARA $U_n(x)$

30.37 $$U_{n+1}(x) - 2x\ U_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

ORTOGONALIDAD

30.38 $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ U,,,(x)\ U_n(x)\ dx = 0 \qquad m \neq n$$

30.39 $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \{U,(x)\}^*\ dx = \frac{\pi}{2}$$

SERIES ORTOGONALES

30.40 $$j(x) = A_0\ U,,(x) + A_1\ U,(z) + A_2\ U,(x) + \cdot\ ''$$

donde

30.41 $$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ j(x)\ U,(x)\ dx$$

RELACIONES ENTRE $T_n(x)$ Y $U_n(x)$

30.42 $$T_n(x) = U_n(x) - x\ U_{n-1}(x)$$

30.43 $$(1-x^2)\,U_{n-1}(x) = x\,T_n(x) - T_{n+1}(x)$$

30.44 $$U_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_{n+1}(v)\,dv}{(v-x)\sqrt{1-v^2}}$$

30.45 $$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}\,U_{n-1}(v)}{x - v}\,dv$$

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE CHEBYSHEV

30.46 $$y = \begin{cases} A\ \ T,,(x) + B\sqrt{1-x^2}\ \ U,,(x) & \text{si } n = 1,2,3,\ldots \\ A + B\,\mathrm{sen}^{-1}x & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

31 FUNCIONES HIPERBOLICAS

ECUACION DIFERENCIAL HIPERGEOMETRICA

31.1 $$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS

Una solución de 31.1 está dada por

31.2 $$F(a,b;c;x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

Si a, b, c son reales, entonces la serie es convergente para $-1 < x < 1$ siempre que $c-(a+b) > -1$.

CASOS ESPECIALES

31.3 $F(-p,1;1;-x) = (1+x)^p$

31.4 $F(1,1;2;-x) = [\ln(1+x)]/x$

31.5 $\lim_{n\to\infty} F(1,n;1;x/n) = e^x$

31.6 $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\operatorname{sen}^2 x) = \cos x$

31.7 $F(\frac{1}{2},1;1;\operatorname{sen}^2 x) = \sec x$

31.8 $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) = (\operatorname{sen}^{-1} x)/x$

31.9 $F(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2) = (\tan^{-1} x)/x$

31.10 $F(1,p;p;x) = 1/(1-x)$

31.11 $F(n+1,-n;1;(1-x)/2) = P_n(x)$

31.12 $F(n,-n;\frac{1}{2};(1-x)/2) = T_n(x)$

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HIPERGEOMETRICA

Si c, $a-b$ y $c-a-b$ son enteros, la solución general válida para $|x| < 1$ es

31.13 $$y = A\,F(a,b;c;x) + Bx^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;x)$$

PROPIEDADES VARIAS

31.14 $$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

31.15 $$\frac{d}{dx}F(a,b;c;x) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x)$$

31.16 $$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$$

31.17 $$F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;x)$$

32 TRANSFORMADAS DE LAPLACE

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE F(t)

32.1 $$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$$

En general f(s) existe cuando $s > \alpha$ donde α es cierta constante. $\mathcal{L}$ es llamado el *operador de la transformada de Laplace.*

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE f(s)

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ es la *transformada inversa de Laplace* de $f(s)$. $\mathcal{L}^{-1}$ es llamado *el operador de la transformado inversa de Laplace.*

FORMULA COMPLEJA PARA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La transformada inversa de Laplace de f(s) puede encontrarse directamente por los métodos de la teoría de las variables complejas. El resultado es

32.2 $$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} e^{st}f(s)\,ds$$

donde c ha de escogerse de tal manera que todos los puntos singulares de f(s) caigan a la izquierda de la linea $\text{Re}\{s\} = c$ en el plano complejo s.

TABLA DE PROPIEDADES GENERALES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
32.3	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
32.4	$f(s/a)$	$a\ F(at)$
32.5	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
32.6	$e^{-as} f(s)$	$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
32.7	$s f(s) - F(0)$	$F'(t)$
32.8	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
32.9	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
32.10	$f'(s)$	$-t\ F(t)$
32.11	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
32.12	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
32.13	$\frac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)\, du$
32.14	$\frac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)\, du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\, du$
32.15	$f(s)\, g(s)$	$\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du$

	$f(s)$	$F(t)$
32.16	$\displaystyle\int_s^\infty f(u)\,du$	$\dfrac{F(t)}{t}$
32.17	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t) = F(t+T)$
32.18	$\dfrac{f(\sqrt{s})}{s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
32.19	$\dfrac{1}{s}f(1/s)$	$\displaystyle\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
32.20	$\dfrac{1}{s^{n+1}}f(1/s)$	$t^{n/2}\displaystyle\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
32.21	$\dfrac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\displaystyle\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,F(u)\,du$
32.22	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
32.23	$\dfrac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$
32.24	$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = polinomio de grado inferior a n, $Q(s) = (6-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(6-\alpha_n)$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todas distintas.	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

TABLA DE ALGUNAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
32.25	$\frac{1}{s}$	1
32.26	$\frac{1}{s^2}$	t
32.27	$\frac{}{s^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
32.28	$\frac{1}{s^n}$ $\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
32.29	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
32.30	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
32.31	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
32.32	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\text{sen } at}{a}$
32.33	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
32.34	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\text{ sen } at}{a}$
32.35	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
32.36	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\text{senh } at}{a}$
32.37	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
32.38	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\text{ senh } at}{a}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.39	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
32.40	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
32.41	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
32.42	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at - at\cos at}{2a^3}$
32.43	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t \operatorname{sen} at}{2a}$
32.44	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at + at\cos at}{2a}$
32.45	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at \operatorname{sen} at$
32.46	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
32.47	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \operatorname{senh} at}{2a^3}$
32.48	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t \operatorname{senh} at}{2a}$
32.49	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at + at\cosh at}{2a}$
32.50	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at \operatorname{senh} at$
32.51	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
32.52	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at - 3at\cos at}{8a^5}$
32.53	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t \operatorname{sen} at - at^2\cos at}{8a^3}$
32.54	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\operatorname{sen} at - at\cos at}{8a^3}$
32.55	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t \operatorname{sen} at + at^2\cos at}{8a}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.56	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\,\text{sen}\,at + 5at\cos at}{8a}$
32.57	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\,\text{sen}\,at}{8}$
32.58	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\,\text{sen}\,at}{2a}$
32.59	$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
32.60	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
32.61	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\,\text{sen}\,at}{24a}$
32.62	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\,\text{senh}\,at - 3at\cosh at}{8a^5}$
32.63	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at - t\,\text{senh}\,at}{8a^3}$
32.64	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\,\text{senh}\,at}{8a^3}$
32.65	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\,\text{senh}\,at + at^2\cosh at}{8a}$
32.66	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\,\text{senh}\,at + 5at\cosh at}{8a}$
32.67	$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\,\text{senh}\,at}{8}$
32.68	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\,\text{senh}\,at}{2a}$
32.69	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
32.70	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
32.71	$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\,\text{senh}\,at}{24a}$
32.72	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

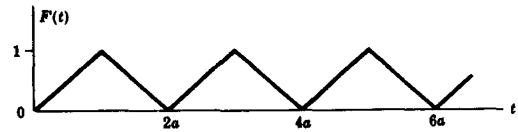
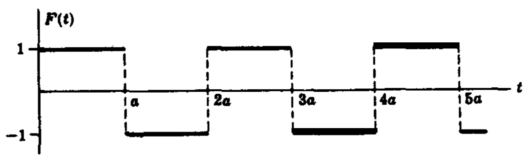
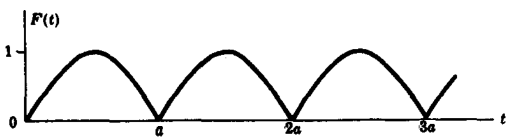
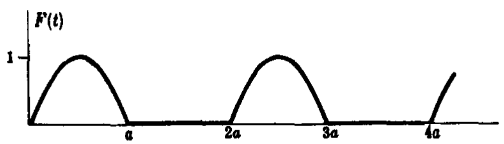
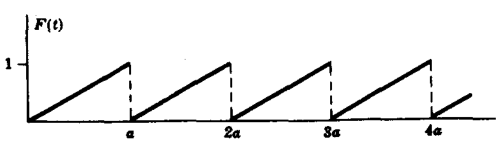
	$f(s)$	$F(t)$
32.73	$\frac{s}{s^3+a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}\,at}{2} - e^{-3at/2}\right\}$
32.74	$\frac{s^2}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e\text{-}\& + 2e^{at/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
32.75	$\frac{1}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2} - \cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
32.76	$\frac{s}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}\,at}{2} - \cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2} + e^{3at/2}\right\}$
32.77	$\frac{s^2}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{at} + 2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
32.78	$\frac{1}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{4a^3}(\operatorname{sen} at\cosh at - \cos at\operatorname{senh} at)$
32.79	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{\operatorname{sen} at\operatorname{senh} at}{2a^2}$
32.80	$\frac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a}(\operatorname{sen} at\cosh at + \cos at\operatorname{senh} at)$
32.81	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
32.82	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh} at - \operatorname{sen} at)$
32.83	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at - \cos at)$
32.84	$\frac{s^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\operatorname{senh} at + \operatorname{sen} at)$
32.85	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at + \cos at)$
32.86	$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
32.87	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
32.88	$\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}$	$\frac{e^{at}\operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
32.89	$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b\,e^{b^2t}\operatorname{fcer}(b\sqrt{t})\right\}$

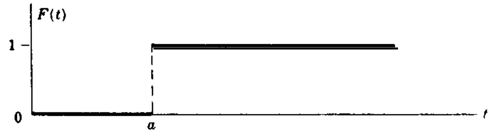
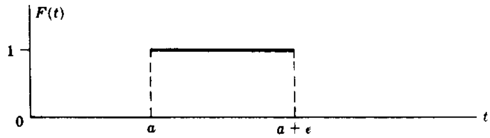
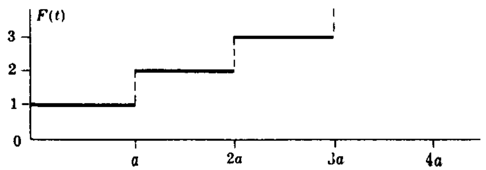
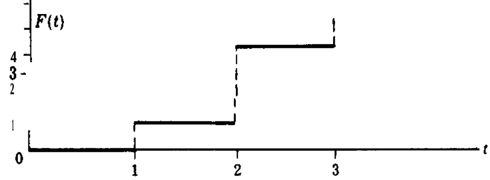
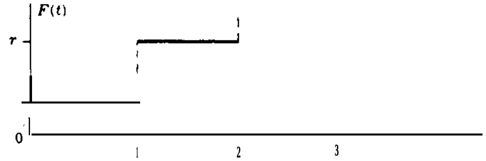
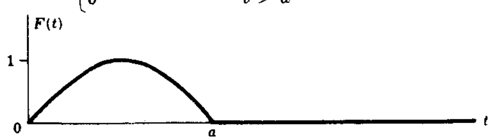
	$f(s)$	$F(t)$
32.90	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32.91	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
32.92	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n > -1$	$a^n J_n(at)$
32.93	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n > -1$	$a^n I_n(at)$
32.94	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
32.95	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$
32.96	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tJ_1(at)}{a}$
32.97	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$
32.98	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at) - atJ_1(at)$
32.99	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tI_1(at)}{a}$
32.100	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$tI_0(at)$
32.101	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at) + atI_1(at)$
32.102	$\dfrac{1}{s(e^s-1)} = \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ Véase además 32.165.	$F(t) = n, \quad n \leqq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
32.103	$\dfrac{1}{s(e^s-r)} = \dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k$ donde $[t]$ = máximo entero $\leqq t$
32.104	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)} = \dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Véase además 32.167.	$F(t) = r^n, \quad n \leqq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
32.105	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.106	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
32.107	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
32.108	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
32.109	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-a^2/4t}$
32.110	$\dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	fer $(a/2\sqrt{t})$
32.111	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{a}$	fcer $(a/2\sqrt{t})$
32.112	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s} + b)}$	$e^{b(bt+a)}$ fcer $\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
32.113	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\, a^{2n+1}} \displaystyle\int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
32.114	$\ln\left(\dfrac{s + a}{s + b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
32.115	$\dfrac{\ln[(s^2 + a^2)/a^2]}{2s}$	*Ic (at)*
32.116	$\dfrac{\ln[(s + a)/a]}{a}$	*le (at)*
32.117	$\dfrac{(\gamma + \ln s)}{s}$ γ = constante de Euler = 0,5772156	$\ln t$
32.118	$\ln\left(\dfrac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$	$\dfrac{2\ (\cos at - \cos bt)}{t}$
32.119	$\dfrac{\pi^2}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ γ = constante de Euler = 0,5772156	$\ln^2 t$
32.120	$\dfrac{\text{In a}}{8}$	$-(\ln t + \gamma)$ γ = constante de Euler = 0.5772156
32.121	$\dfrac{\ln^2 a}{8}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ γ = constante de Euler = 0.5772156.

	$f(s)$	$F(t)$
32.122	$\dfrac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$t^n \ln t$
32.123	$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$
32.124	$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\operatorname{Is}(at)$
32.125	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}} \operatorname{fcer}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
32.126	$e^{s^2/4a^2} \operatorname{fcer}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2t^2}$
32.127	$\dfrac{e^{s^2/4a^2} \operatorname{fcer}(s/2a)}{s}$	$\operatorname{fer}(at)$
32.128	$\dfrac{e^{as} \operatorname{fcer}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
32.129	$e^{as} \operatorname{Ie}(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
32.130	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(as)\right\} - \operatorname{sen} as \operatorname{Ic}(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
32.131	$\operatorname{sen} as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ic}(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
32.132	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(as)\right\} - \operatorname{sen} as \operatorname{Ic}(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
32.133	$\dfrac{\operatorname{sen} as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ic}(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
32.134	$\left[\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(as)\right]^2 + \operatorname{Ic}^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
32.135	0	$\mathcal{N}(t)$ = función nula
32.136	1	$\delta(t)$ = función delta
32.137	e^{-as}	$\delta(t-a)$
32.138	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Véase además 32.163.	$\mathcal{U}(t-a)$

	$f(s)$	$F(t)$
32.139	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \cos \dfrac{n\pi t}{a}$
32.140	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
32.141	$\dfrac{\cosh sx}{s \operatorname{senh} as}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi t}{a}$
32.142	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
32.143	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi t}{a}$
32.144	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
32.145	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \dfrac{n\pi t}{a}\right)$
32.146	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
32.147	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
32.148	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a}$
32.149	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
32.150	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
32.151	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a}$
32.152	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s \operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a}$
32.153	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
32.154	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s^2 \operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a}$
32.155	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\tfrac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

	$f(s)$	$F(t)$
12.156	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}\,J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda) = 0$
32.157	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}\,J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda) = 0$
32.158	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\dfrac{as}{2}$	Función de onda triangular  Fig. 32-1
32.159	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Función de onda cuadrada  Fig. 32-2
32.160	$\dfrac{\pi a}{a^2s^2 + \pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Función de onda senoidal rectificada  Fig. 32-3
32.161	$\dfrac{\pi a}{(a^2s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	Función de onda senoidal semi-rectificada  Fig. 32-4
32.162	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	Función de onda en diente de sierra  Fig. 32-5

	$f(s)$	$F(t)$
32.163	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Véase además 32.138.	Función unitaria de **Heaviside** $\mathcal{U}(t-a)$  Fig. 32-6
32.164	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	Función de pulsaciones  Fig. 32-7
32.165	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ Véase además 32.102.	Función escalonada  Fig. 32-8
32.166	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t)=n^2,\ n \leqq t < n+1,\ n=0,1,2,\ldots$  Fig. 32-9
32.167	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Véase además 32.104.	$F(t)=r^n,\ n \leqq t < n+1,\ n=0,1,2,\ldots$  Fig. 32-10
32.168	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t>a\end{cases}$  Fig. 32-11

33 TRANSFORMADAS DE FOURIER

TEOREMA DE INTEGRAL DE FOURIER

33.1 $$j(x) = \int_0^{\infty} \{A(a) \cos \alpha x + B(a) \operatorname{sen} \alpha x\}\, d\alpha$$

donde

33.2 $$\begin{cases} A(a) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos \alpha x \, dx \\ B(a) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} j(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \end{cases}$$

Las condiciones suficientes bajo las cuales el anterior teorema es válido son que:

(i) f(z) y f'(z) sean casicontinuas en todo intervalo finito $-L < x < L$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converja;

(iii) f(z) sea remplazada por $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ si x es un punto de discontinuidad.

FORMAS EQUIVALENTES DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

33.3 $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha (x-u)\, du\, d\alpha$$

33.4 $$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j(u)\, e^{i\alpha(x-u)}\, du\, d\alpha \end{aligned}$$

33.5 $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \operatorname{sen} \alpha u \, du$$

donde $f(x)$ es una función *impar* $[f(-x) = -f(x)]$.

33.6 $$j(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u \, du$$

donde $f(x)$ es una *función par* $[f(-x) = f(z)]$.

TRANSFORMADAS DE FOURIER

La transformada de Fourier de $f(x)$ se define así

33.7 $$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} j(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx$$

Entonces, de 33.7, se sigue que la transformada inversa de Fourier de $F(\alpha)$ es

33.8 $$\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

F(u) y f(z) son llamadas pares **de transformados** *de Fourier*

TEOREMA DE CONVOLUCION PARA TRANSFORMADAS DE FOURIER

Si $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ y $G(a) = \mathcal{F}\{g(x)\}$, entonces

33.9 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, G(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du = f^*g$$

donde f^*g denota el producto de *convolución* de f y g. Así que

33.10 $$\mathcal{F}\{f^*g\} = \mathcal{F}\{f\}\ \mathcal{F}\{g\}$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

Si $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, entonces

33.11 $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2\, d\alpha$$

De manera más general, si $F(a) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ y $G(a) = \mathcal{F}\{g(x)\}$, entonces

33.12 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(n)\, \overline{G(\alpha)}\, da$$

donde la barra significa que se trata de la conjugada compleja

TRANSFORMADAS DE FOURIER EN SENO

La transformada de Fourier en seno de $f(x)$ se define así

33.13 $$F_S(\alpha) = \mathcal{F}_S\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\ \mathrm{sen}\ \alpha x\, dx$$

Entonces, según 33.13, la transformada inversa de Fourier en seno de $F_S(\alpha)$ será

33.14 $$f(z) = \mathcal{F}_S^{-1}\{F_S(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_{,}(a)\ \mathrm{sen}\ \alpha x\ da$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER EN COSENO

La transformada de Fourier en coseno de $f(x)$ se define como

33.15 $$F_C(\alpha) = \mathcal{F}_C\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx$$

Entonces, según 33.15, se tiene que la transformada inversa de Fourier en coseno de $F_C(\alpha)$ es

33.16 $$f(x) = \mathcal{F}_C^{-1}\{F_C(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_C(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

ALGUNOS EJEMPLOS DE PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

	$f(x)$	$F(\alpha)$
33.17	$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < b \\ 0 & \lvert x\rvert > b \end{cases}$	$\dfrac{2 \operatorname{sen} b\alpha}{\alpha}$
33.16	$\dfrac{1}{x^2 + b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{b}$
33.19	$\dfrac{x}{x^2 + b^2}$	$-\dfrac{\pi i \alpha}{b} e^{-b\alpha}$
33.20	$f^{(n)}(x)$	$i^n \alpha^n F(\alpha)$
33.21	$x^n f(x)$	$i^n \dfrac{d^n F}{d\alpha^n}$
33.22	$f(bx)e^{itx}$	$\dfrac{1}{b} F\left(\dfrac{\alpha - t}{b}\right)$

TRANSFORMADAS NOTABLES DE FOURIER EN SENO

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
13.23	$\begin{cases} 1 & 0 < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\dfrac{1 - \cos b\alpha}{\alpha}$
33.24	x^{-1}	5
13.25	$\dfrac{z}{x^2 + b^2}$	$\dfrac{\pi}{2} e^{-b\alpha}$
B3.26	e^{-bx}	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}$
33.27	$x^{n-1} e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n) \operatorname{sen} (n \tan^{-1} \alpha/b)}{(\alpha^2 + b^2)^{n/2}}$
13.28	xe^{-bx^2}	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} \alpha e^{-\alpha^2/4b}$
B3.29	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
33.30	x^{-n}	$\dfrac{\pi \alpha^{n-1} \csc (n\pi/2)}{2\,\Gamma(n)} \qquad 0 < n < 2$
B3.31	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{z}$	$\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{\alpha + b}{\alpha - b} \right)$
33.32	$\dfrac{\operatorname{sen} bz}{x^2}$	$\begin{cases} \pi\alpha/2 & \alpha < b \\ \pi b/2 & \alpha > b \end{cases}$
33.33	$\dfrac{\cos bz}{z}$	$\begin{cases} 0 & \alpha < b \\ \pi/4 & \alpha = b \\ \pi/2 & \alpha > b \end{cases}$
33.34	$\tan^{-1} (zlb)$	$\dfrac{\pi}{2\alpha} e^{-b\alpha}$
93.35	$\csc bx$	$\dfrac{\pi}{2b} \tanh \dfrac{\pi\alpha}{2b}$
33.36	$\dfrac{1}{e^{2x} - 1}$	$\dfrac{\pi}{4} \coth \left(\dfrac{\pi\alpha}{2} \right) - \dfrac{1}{2\alpha}$

TRANSFORMADAS NOTABLES DE FOURIER EN COSENO

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
33.37	$\begin{cases} 1 & 0 < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen} b\alpha}{\alpha}$
33.30	$\dfrac{1}{x^2 + b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{2b}$
33.39	e^{-bx}	$\dfrac{b}{\alpha^2 + b^2}$
33.40	$x^{n-1} e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n) \cos (n \tan^{-1} \alpha/b)}{(\alpha^2 + b^2)^{n/2}}$
33.41	e^{-bx^2}	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\, e^{-\alpha^2/4b}$
33.42	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
33.43	x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1} \sec (n\pi/2)}{2\,\Gamma(n)}, \quad 0 < n < 1$
33.44	$\ln\left(\dfrac{x^2 + b^2}{x^2 + c^2}\right)$	$\dfrac{e^{-c\alpha} - e^{-b\alpha}}{\pi\alpha}$
33.45	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{x}$	$\begin{cases} \pi/2 & \alpha < b \\ \pi/4 & \alpha = b \\ 0 & \alpha > b \end{cases}$
33.46	$\operatorname{sen} bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos \dfrac{\alpha^2}{4b} - \operatorname{sen} \dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
53.47	$\cos bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos \dfrac{\alpha^2}{4b} + \operatorname{sen} \dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
33.48	$\operatorname{sech} bx$	$\dfrac{\pi}{2b} \operatorname{sech} \dfrac{\pi\alpha}{2b}$
j3.49	$\dfrac{\cosh (\sqrt{\pi}\, x/2)}{\cosh (\sqrt{\pi}\, x)}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, \dfrac{\cosh (\sqrt{\pi}\, \alpha/2)}{\cosh (\sqrt{\pi}\, \alpha)}$
13.50	$\dfrac{e^{-b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\{\cos (2b\sqrt{\alpha}) - \operatorname{sen} (2b\sqrt{\alpha})\}$

34 FUNCIONES ELIPTICAS

INTEGRAL ELIPTICA COMPLETA DE PRIMERA ESPECIE

34.1 $$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{x} \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}$$

donde $x = \operatorname{sen} \phi$, y $\phi = \operatorname{am} u$ es llamada *amplitud* de u. Además, tanto en la anterior fórmula como en lo que viene a continuación, $0 < k < 1$.

INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE PRIMERA ESPECIE

34.2 $$K = F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{1} \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE SEGUNDA ESPECIE

34.3 $$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta = \int_0^{x} \frac{\sqrt{1 - k^2 v^2}}{\sqrt{1 - v^2}}\, dv$$

INTEGRAL ELIPTICA COMPLETA DE SEGUNDA ESPECIE

34.4 $$E = E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta = \int_0^{1} \frac{\sqrt{1 - k^2 v^2}}{\sqrt{1 - v^2}}\, dv$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE TERCERA ESPECIE

34.5 $$\Pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{x} \frac{dv}{(1 + n v^2)\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}$$

INTEGRAL ELIPTICA COMPLETA DE TERCERA ESPECIE

34.6 $$\Pi(k, n, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\,\text{sen}^2\,\theta)\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,\theta}} = \int_0^1 \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

TRANSFORMACION DE LANDEN

34.7 $$\tan\phi = \frac{\text{sen}\ 2\phi_1}{k+\cos 2\phi_1} \quad \text{o} \quad k\ \text{sen}\,\phi = \text{sen}(2\phi_1 - \phi)$$

Lo cual da

34.8 $$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,\theta}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\phi_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1-k_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_1}}$$

donde $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$. Por aplicaciones sucesivas, se obtienen las sucesiones $k_1, k_2, k_3, \ldots$ y $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ tales que $k < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < 1$ donde $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. Se sigue que

34.9 $$F(k,\Phi) = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3\ldots}{k}}\int_0^{\Phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}} = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3\ldots}{k}}\ \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$$

donde

34.10 $$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad \ldots \quad \text{y} \quad \Phi = \lim_{n\to\infty}\phi_n$$

El anterior resultado se emplea como método aproximado para hallar el valor de $F(k, \phi)$.

FUNCIONES ELIPTICAS DE JACOBI

Con base en 34.1 se definen las funciones elípticas siguientes.

34.11 $$x = \text{sen}(\text{am}\,u) = \text{sn}\,u$$

34.12 $$\sqrt{1-x^2} = \cos(\text{am}\,u) = \text{cn}\,u$$

34.13 $$\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\,\text{sn}^2\,u} = \text{dn}\,u$$

También se pueden definir las funciones elípticas recíprocas $\text{sn}^{-1}\,x$, $\text{cn}^{-1}\,x$, $\text{dn}^{-1}\,x$ y las que se dan a continuación

34.14 $\text{ns}\,u = \dfrac{1}{\text{sn}\,u}$	34.17 $\text{sc}\,u = \dfrac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$	34.20 $\text{cs}\,u = \dfrac{\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}$
34.15 $\text{nc}\,u = \dfrac{1}{\text{cn}\,u}$	34.18 $\text{sd}\,u = \dfrac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u}$	34.21 $\text{dc}\,u = \dfrac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}$
34.16 $\text{nd}\,u = \dfrac{1}{\text{dn}\,u}$	34.19 $\text{cd}\,u = \dfrac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$	34.22 $\text{ds}\,u = \dfrac{\text{dn}\,u}{\text{sn}\,u}$

FORMULAS PARA LA ADICION

34.23 $$\text{sn}\,(u+v) = \frac{\text{sn}\,u\ \text{cn}\,v\ \text{dn}\,v + \text{cn}\,u\ \text{sn}\,v\ \text{dn}\,u}{1-k^2\,\text{sn}^2\,u\ \text{sn}^2\,v}$$

34.24 $$\text{cn}\,(u+v) = \frac{\text{cn}\,u\ \text{cn}\,v - \text{sn}\,u\ \text{sn}\,v\ \text{dn}\,u\ \text{dn}\,v}{1-k^2\,\text{sn}^2\,u\ \text{sn}^2\,v}$$

34.25 $$\text{dn}\,(u+v) = \frac{\text{dn}\,u\ \text{dn}\,v - k^2\,\text{sn}\,u\ \text{sn}\,v\ \text{cn}\,u\ \text{cn}\,v}{1-k^2\,\text{sn}^2\,u\ \text{sn}^2\,v}$$

DERIVADAS

34.26 $\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$

34.27 $\frac{d}{du}\operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$

34.28 $\frac{d}{du}\operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$

34.29 $\frac{d}{du}\operatorname{sc} u = \operatorname{dc} u \operatorname{nc} u$

DESARROLLOS EN SERIES

34.30 $$\operatorname{sn} u = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6)\frac{u^7}{7!} + \cdots$$

34.31 $$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots$$

34.32 $$\operatorname{dn} u = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots$$

CONSTANTE DE CATALAN

34.33 $$\frac{1}{2}\int_0^1 K\,dk = \frac{1}{2}\int_{k=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{d\theta\,dk}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0.915965594\ldots$$

PERIODOS DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS

sea

34.34 $$K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}, \qquad K' = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\theta}} \qquad \text{donde } k' = \sqrt{1-k^2}$$

Entonces

34.35 $\operatorname{sn} u$ tiene período $4K$ y $2iK'$

34.36 $\operatorname{cn} u$ tiene periodo $4K$ y $2K + 2iK'$

34.37 $\operatorname{dn} u$ tiene período $2K$ y $4iK'$

IDENTIDADES QUE CONTIENEN FUNCIONES ELIPTICAS

34.38 $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$

34.39 $\operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u = 1$

34.40 $\operatorname{dn}^2 u - k^2\operatorname{cn}^2 u = k'^2$ donde $k' = \sqrt{1-k^2}$

34.41 $\operatorname{sn}^2 u = \dfrac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}$

34.42 $\operatorname{cn}^2 u = \dfrac{\operatorname{dn} 2u + \operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}$

34.43 $\operatorname{dn}^2 u = \dfrac{1-k^2+\operatorname{dn} 2u + k^2\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}$

34.44 $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}} = \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$

34.45 $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}} = \dfrac{k\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$

VALORES ESPECIALES

34.46 $\mathrm{sn}\,0 = 0$ 34.47 $\mathrm{cn}\,0 = 1$ 34.48 $\mathrm{dn}\,0 = 1$ 34.49 $\mathrm{sc}\,0 = 0$ 34.50 amo = 0

INTEGRALES

34.51 $\int \mathrm{sn}\,u\,du = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u)$

34.52 $\int \mathrm{cn}\,u\,du = \frac{1}{k}\cos^{-1}(\mathrm{dn}\,u)$

34.53 $\int \mathrm{dn}\,u\,du = \mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sn}\,u)$

34.54 $\int \mathrm{sc}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln(\mathrm{dc}\,u + \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{nc}\,u)$

34.55 $\int \mathrm{cs}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{ds}\,u)$

34.56 $\int \mathrm{cd}\,u\,du = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{nd}\,u + k\,\mathrm{sd}\,u)$

34.57 $\int \mathrm{dc}\,u\,du = \ln(\mathrm{nc}\,u + \mathrm{sc}\,u)$

34.58 $\int \mathrm{sd}\,u\,du = \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}}\,\mathrm{sen}^{-1}(k\,\mathrm{cd}\,u)$

34.59 $\int \mathrm{ds}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{cs}\,u)$

34.60 $\int \mathrm{ns}\,u\,du = \ln(\mathrm{ds}\,u - \mathrm{cs}\,u)$

34.61 $\int \mathrm{nc}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\mathrm{dc}\,u + \frac{\mathrm{sc}\,u}{\sqrt{1-k^2}}\right)$

34.62 $\int \mathrm{nd}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cos^{-1}(\mathrm{cd}\,u)$

RELACION DE LEGENRE

34.63 $$EK' + E'K - KK' = \pi/2$$

donde

34.64 $$E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,d\theta \qquad K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}$$

34.65 $$E' = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \qquad K' = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}$$

35 FUNCIONES NOTABLES DIVERSAS

FUNCION DE ERROR $fer(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$

35.1 $$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

35.2 $$\text{fer}(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$$

35.3 $$\text{fer}(-x) = -\text{fer}(x), \qquad \text{fer}(0) = 0, \qquad \text{fer}(\infty) = 1$$

FUNCION COMPLEMENTARIA DE ERROR $fcer(x) = 1 - fer(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$

35.4 $$\text{fcer}\,(2) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

35.5 $$\text{fcer}\,(2) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$$

35.6 $$\text{fcer}\,(0) = 1, \qquad \text{fcer}(\infty) = 0$$

INTEGRAL EXPONENCIAL $Ie(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$

35.7 $$Ie(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du$$

35.8 $$Ie(x) = -\gamma - \ln x + \left(\frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} - \cdots\right)$$

35.9 $$Ie(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots\right)$$

35.10 $$Ie(\infty) = 0$$

INTEGRAL DE SENO $Is(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}\,u}{u}\,du$

35.11 $$Is(x) = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

35.12 $$Is(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\text{sen}\,x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\cdots\right) - \frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$$

35.13 $$Is(-x) = -Is(x), \qquad Is(0) = 0, \qquad Is(\infty) = \pi/2$$

INTEGRAL DE COSENO $Ic(x) = \int_x^{\infty} \cos \frac{u}{u}\, du$

35.14 $Ic(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u}\, du$

35.15 $Ic(x) = -\gamma - \ln x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} - \frac{x^8}{8 \cdot 8!} + \cdots$

35.16 $Ic(x) \sim \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$

as.17 $Ic(\infty) = 0$

INTEGRAL DE SENO DE FRESNELL $S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \operatorname{sen} u^2\, du$

35.18 $S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x^3}{3 \cdot 1!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots\right)$

as.19 $S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\cos x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) + (\operatorname{sen} x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

35.20 $S(-x) = -S(x), \quad S(0) = 0, \quad S(\infty) = \frac{1}{2}$

INTEGRAL DE COSENO DE FRESNELL $C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos u^2\, du$

35.21 $C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \cdots\right)$

35.22 $C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\operatorname{sen} x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) - (\cos x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

35.23 $C(-x) = -C(x), \quad C(0) = 0, \quad C(\infty) = \frac{1}{2}$

FUNCION ZETA DE RIEMANN $\zeta(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

35.24 $\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\, du, \quad x > 1$

35.25 $\zeta(1 - x) = 2^{1-x} \pi^{-x}\, \Gamma(x) \cos(\pi x/2)\, \zeta(x)$ [aplicable a otros valores]

35.26 $\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_k}{(2k)!} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

36 DESIGUALDADES

DESIGUALDAD TRIANGULAR

36.1 $$|a_1| - |a_2| \leqq |a_1 + a_2| \leqq |a_1| + |a_2|$$

36.2 $$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

36.3 $$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|^2 \leqq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)(|b_1|^2 + |b_2|^2 + \cdots + |b_n|^2)$$

La igualdad se cumple cuando y solamente cuando $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

DESARROLLO EN SERIES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Sean A, G y *H las* medias aritmética, geométrica y armónica de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

36.4 $$H \leqq G \leqq A$$

donde

36.5 $$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

36.6 $$G = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

36.7 $$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

La igualdad se cumple cuando y solamente cuando $a_1 = a_2 = \cdots =$ a,.

DESIGUALDAD DE HOLDER

36.8 $$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqq (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p}(|b_1|^q + |b_2|^q + \ldots + |b_n|^q)^{1/q}$$

donde

36.9 $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad p > 1, \; q > 1$$

La igualdad se cumple cuando y solamente cuando $|a_1|^{p-1}/|b_1| = |a_2|^{p-1}/|b_2| = \ldots = |a_n|^{p-1}/|b_n|$. Cuando $p = q = 2$ ésta queda reducida a 36.3.

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Si $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ y $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, entonces

26.10 $$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leqq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$

o

26.11 $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$$

DESIGUALDAD DE MINLOWSKI

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ son todos positivos y si $p > 1$, entonces

36.12 $$\{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\}^{1/p} \leqq (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}$$

La igualdad se cumple si y solamente si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

DESIGUALDAD DE CUACHY-SCHWARTZ PARA INTEGHRALES

26.13 $$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|^2 \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $f(x)/g(x)$ es constante.

DESIGUALDAD DE HOLDER PARA INTEGRALES

26.14 $$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}$$

en la que $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, $q > 1$. Si $p = q = 2$, ésta se reduce a ladesigualdad 36.13.

La igualdad se cumple si y sólo si $|f(x)|^{p-1}/|g(x)|$ es constante.

DESIGUALDAD DE MINLOWSKI PARA INTEGRALES

Si $p > 1$,

36.15 $$\left\{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $f(x)/g(x)$ es constante.

37 EJEMPLOS DE PROBLEMAS
PARA ILUSTRAR EL USO DE LAS TABLAS

37.1 $$\cot x = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{x^2-\pi^2} + \frac{1}{x^2-4\pi^2} + \frac{1}{x^2-9\pi^2} + \cdots\right\}$$

37.2 $$\csc x = \frac{1}{x} - 2x\left\{\frac{1}{x^2-\pi^2} - \frac{1}{x^2-4\pi^2} + \frac{1}{x^2-9\pi^2} - \cdots\right\}$$

37.3 $$\sec x = 4\pi\left\{\frac{1}{\pi^2-4x^2} - \frac{3}{9\pi^2-4x^2} + \frac{5}{25\pi^2-4x^2} - \cdots\right\}$$

37.4 $$\tan x = 8x\left\{\frac{1}{\pi^2-4x^2} + \frac{1}{9\pi^2-4x^2} + \frac{1}{25\pi^2-4x^2} + \cdots\right\}$$

37.5 $$\sec^2 x = 4\left\{\frac{1}{(\pi-2x)^2} + \frac{1}{(\pi+2x)^2} + \frac{1}{(3\pi-2x)^2} + \frac{1}{(3\pi+2x)^2} + \cdots\right\}$$

37.6 $$\csc^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-\pi)^2} + \frac{1}{(x+\pi)^2} + \frac{1}{(x-2\pi)^2} + \frac{1}{(x+2\pi)^2} + \cdots$$

37.7 $$\coth x = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{x^2+\pi^2} + \frac{1}{x^2+4\pi^2} + \frac{1}{x^2+9\pi^2} + \cdots\right\}$$

37.8 $$\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - 2x\left\{\frac{1}{x^2+\pi^2} - \frac{1}{x^2+4\pi^2} + \frac{1}{x^2+9\pi^2} - \cdots\right\}$$

37.9 $$\operatorname{sech} x = 4\pi\left\{\frac{1}{\pi^2+4x^2} - \frac{3}{9\pi^2+4x^2} + \frac{5}{25\pi^2+4x^2} - \cdots\right\}$$

37.10 $$\mathrm{tanhz} = 82\left\{\frac{1}{\pi^2+4x^2} + \frac{1}{9\pi^2+4x^2} + \frac{1}{25\pi^2+4x^2} + \cdots\right\}$$

38 PRODUCTOS INFINITOS

38.1 $\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.2 $\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.3 $\operatorname{senh} x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.4 $\cosh x = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.5 $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\left\{\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-x}\right\}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x/2}\right\}\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-x/3}\right\}\cdots$

Véase además 16.12, página 102.

38.6 $J_0(x) = \left(1-\frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$.

38.7 $J_1(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$.

38.8 $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$

38.9 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$

Este último es llamado *producto de Walli*

39 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCION BINOMIAL

39.1 $$\Phi(x) = \sum_{t \leqq x} \binom{n}{t} p^t q^{n-t} \qquad p > 0,\ q > 0,\ p + q = l$$

DISTRIBUCION DE POISSON

39.2 $$\Phi(x) = \sum_{t \leqq x} \frac{\lambda^t e^{-\lambda}}{t!} \qquad \lambda > 0$$

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

39.3 $$\Phi(x) = \sum_{t \leqq x} \frac{\binom{r}{t}\binom{s}{n-t}}{\binom{r+s}{n}}$$

DISTRIBUCION NORMAL

39.4 $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

DISTRIBUCION *t* DE STUDENT

39.5 $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt$$

DISTRIBUCION JI-CUADRADO

39.6 $$\Phi(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^x t^{(n-2)/2} e^{-t/2}\, dt$$

DISTRIBUCION *F*

39.7 $$\Phi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2}}{\Gamma(n_1/2)\,\Gamma(n_2/2)} \int_0^x t^{n_1/2}(n_2 + n_1 t)^{-(n_1+n_2)/2}\, dt$$

40 MOMENTOS DE INERCIA IMPORTANTES

La tabla que viene a continuación trae los momentos de inercia de diferentes cuerpos rígidos de masa M. En todos los casos se supone que el cuerpo tiene densidad uniforme (es decir, constante).

CLASE DE CUERPO RIGIDO	MOMENTO DE INERCIA
40.1 Varilla delgada de longitud a	
(a) alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por el centro de masa,	$\frac{1}{12}Ma^2$
(b) alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por uno de los extremos.	$\frac{1}{3}Ma^2$
40.2 Paralelepípedo rectángulo de lados a, b, c	
(a) alrededor de un eje paralelo a c y que pasa por el centro de la cara ab,	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
(b) alrededor de un eje paralelo a c y que pasa por el centro de la cara bc.	$\frac{1}{12}M(4a^2 + b^2)$
40.3 Lámina rectangular delgada de lados a, b	
(a) alrededor de un eje que pasa por el centro de la lámina y perpendicular a ella,	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
(b) alrededor de un eje paralelo al lado b y que pasa por el centro.	$\frac{1}{12}Ma^2$
40.4 Cilindro circular de radio a y altura h	
(a) alrededor del eje del cilindro,	$\frac{1}{2}Ma^2$
(b) alrededor de un eje perpendicular al eje del cilindro y que pasa por el centro de masa,	$\frac{1}{12}M(h^2 + 3a^2)$
(c) alrededor de un eje que coincide con el diámetro en uno de los extremos.	$\frac{1}{12}M(4h^2 + 3a^2)$
40.5 Cilindro circular hueco de radio exterior a, radio interior b y altura h	
(a) alrededor del eje del cilindro,	$\frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$
(b) alrededor de un eje perpendicular al eje del cilindro y que pasa por el centro de masa,	$\frac{1}{12}M(3a^2 + 3b^2 + h^2)$
(c) alrededor de un eje que coincide con el diámetro en uno de los extremos.	$\frac{1}{12}M(3a^2 + 3b^2 + 4h^2)$

40.6 Lámina circular de radio a,	
(a) alrededor de un eje perpendicular a la lámina y que pasa por el centro de ella, (b) alrededor de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{1}{2}Ma^2$ $\frac{1}{4}Ma^2$
40.7 Lámina circular hueca o anillo de radio exterior a y radio interior b	
(a) alrededor de un eje perpendicular al plano de la lámina y que pasa por el centro, (b) alrededor de un eje que coincide con un diámetro.	$\frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$ $\frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$
40.8 Anillo circular delgado de radio a	
(a) alrededor de un eje que pasa por el centro, y perpendicular al plano del anillo, (b) alrededor de un eje que coincide con el diámetro.	Ma^2 $\frac{1}{2}Ma^2$
40.9 Esfera de radio a	
(a) alrededor de un eje que coincide con un diámetro, (b) alrededor de un eje tangente a la superficie.	$\frac{2}{5}Ma^2$ $\frac{7}{5}Ma^2$
40.10 Esfera hueca de radio exterior a y radio interior b	
(a) alrededor de un-eje que coincide con un diámetro, (b) alrededor de un eje tangente a la superficie.	$\frac{2}{5}M(a^5 - b^5)/(a^3 - b^3)$ $\frac{2}{5}M(a^5 - b^5)/(a^3 - b^3) + Ma^2$
40.11 Concha esférica hueca de radio a	
(a) alrededor de un eje que coincide con un diámetro, (b) alrededor de un eje tangente a la superficie.	Ma^2 $2Ma^2$
40.12 Elipsoide de semi-ejes a, b, c	
(a) alrededor de un eje que coincide con el semi-eje c, (b) alrededor de un eje tangente a la superficie, paralelo al san-eje c y a una distancia a del centro.	$\frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$ $\frac{1}{5}M(6a^2 + b^2)$
40.13 Cono circular de radio a y altura h	
(a) alrededor del eje del cono, (b) alrededor de un eje perpendicular al eje del cono y que pasa por el vértice, (c) alrededor de un eje perpendicular al eje del cono y que pasa por el centro de masa.	$\frac{3}{10}Ma^2$ $\frac{3}{20}M(a^2 + 4h^2)$ $\frac{3}{80}M(4a^2 + h^2)$
40.14 Toro de radio exterior a y radio interior b	
(a) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y perpendicular al plano del toro, (b) alrededor de un eje situado en el plano del toro y que pasa por el centro de masa.	$\frac{1}{4}M(7a^2 - 6ab + 3b^2)$ $\frac{1}{4}M(9a^2 - 10ab + 5b^2)$

41 FACTORES DE CONVERSION

Longitud

1 kilómetro (km) = 1000 metros (m) 1 pulgada (pulg) = 2,540 cm
1 metro (m) = 100 centímetros (cm) 1 pie = 30,48 cm
1 centímetro (cm) = 10^{-2} m 1 milla (mi) = 1,609 km
1 milimetro (mm) = 10^{-3} m 1 mil = 10-s pulg
1 micra (μ) = 10^{-6} m 1 centímetro = 0,3937 pulg
1 miliniicra (m μ) = 10^{-9} m 1 metro = 39,37 pulg
1 angstrom (A) = 10^{-10} m 1 kilómetro = 0.6214 milla

Area

1 metro cuadrado (m^2) = 10.76 pie^2 1 millacuadrada (mi*) = 640 acres
1 piecuadrado (pies) = 929 cm^2 1 acre = 43.560 $pies^2$

Volumen

1 litro (l) = 1000 cm^3 = 1,057 cuartillos (qt) = 61,02 $pulg^3$ = 0.03532 pie^3
1 metro cúbico (m^3) = 1000 l = 35.32 $pies^3$
1 pie cúbico (pies) = 7,481 galones (E.E. U.U.) = 0.02832 m^3 = 28,32 l
1 galón (E.E. U.U.) = 231 $pulg^3$ = 3,785 l; 1 galón británico = 1,201 galones (E.E. U.U.) = 227,4 $pulg^3$

Masa

1 kilogramo (kg) = 2.2046 libras av (Ib) = 0,06852 slug; 1 Ib (av) = 453,6 gm = 0,03108 slug
1 slug = 32,174 Ib = 14,59 kg

Velocidad

1 km/hr = 0,2778 m/seg = 0,6214 mi/hr = 0,9113 pies/seg
1 mi/hr = 1,467 pies/seg = 1,609 km/hr = 0.4470 m/seg

Densidad

1 gm/cm^3 = 10" kg/m^3 = 62.43 lb/pie^3 = 1,940 slug/pie^3
1 lb/pie^3 = 0,01602 gm/cm^3; 1 slug/pie^3 = 0,5154 gm/cm^3

Fuerza

1 newton (nt) = 10^5 dinas = 0,1020 kgf = 0,2248 Ibf
1 libra fuerza (lbf) = 4,448 nt = 0.4536 kgf = 32,17 poundals
1 kilogramo fuerza (kgf) = 2,205 Ibf = 9,897 nt
1 tonelada (E.E. U.U.) = 2000 lbf; 1 tonelada grande = 2240 lbf; 1 tonelada métrica = 2205 Ibf

Energía

1 julio = 1 nt m = 10' ergios = 0,7376 pie lbf = 0.2389 cal = 9,481 X 10^{-4} Btu
1 pie lbf = 1,356 julios = 0,3239 cal = 1,285 X 10^{-3} Btu
1 caloría (cal) = 4,186 julios = 3,087 pie Ibf = 3,968 X 10^{-3} Btu
1 Btu (unidad térmica británica) = 778 pie lhf = 1055 julios = 0,293 vatio hr
1 kilovatio hora (kv hr) = 3.60 X 10^6 julios = 860.0 kcal = 3413 Btu
1 electrón voltio (ev) = 1,602 X 10^{-19} julios

Potencia

1 vatio = 1 julio/seg = 10^7 ergios/seg = 0.2389 cal/seg
1 caballo de fuerza (hp) = 550 pie lbf/seg = 33.000 pie lbf/min = 745.7 vatios
1 kilovatio (kv) = 1,341 hp = 737.6 pie Ibf/seg = 0,9483 Btu/seg

Presión

1 nt/m^2 = 10 dinas/cm* = 9.869 X 10^{-6} atmósfera = 2,089 X 10^{-2} lbf/pie^2
1 lbf/$pulg^2$ = 6895 nt/m^2 = 5.171 cm de mercurio = 27.68 pulg agua
1 atmósfera (atm) = 1,013 X 10^5 nt/m^2 = 1,013 x 10^6 dinas/cm^2 = 14.70 lbf/$pulg^2$ = 76 cm de mercurio = 406.8 pulg agua

Parte II

TABLAS

DESARROLLO EN FRACCIONES PARCIALES

LOGARITMOS COMUNES

1. Hállese log 2,36.

Necesitamos encontrar el número p tal que $10^p = 2,36 = N$. Puesto que $10^0 = 1$ y $10^1 = 10$, p se encontrará entre 0 y 1 y su valor se podrá hallar en las tablas de logaritmos comunes, página 202.

Así pues, para encontrar log 2,36 buscamos de arriba hacia abajo en la columna de la *izquierdo* encabezada con una N hasta que encontremos los dos primeros dígitos, 23. Luego proseguimos hacia la derecha hasta encontrar el número 3729 en la columna encabezada con el número 6. Entonces tenemos que log 2,36 = 0.3729, o sea que $2,36 = 10^{0,3729}$.

2. Hállese (*a*) log 23.6, (*b*) log 236, (*c*) log 2360.

Por el problema 1 sabemos que $2,36 = 10^{0,3729}$. Entonces, multiplicando sucesivamente por 10, tenemos

$$23,6 = 10^{1,3729},\quad 236 = 10^{2,3729},\quad 2360 = 10^{3,3729}$$

Así que

(*a*) log 23,6 = 1,3729

(*b*) log 236 = 2,3729

(c) log 2360 = 3,3729.

El número 0.3729 que hemos tomado de la tabla, se llama mantisa del logaritmo. El número que queda antes de la coma es la característica. Así por ejemplo, en (*b*) la característica es 2.

La regla siguiente es útil y de fácil comprensión.

Regla 1. La característica de un número mayor que 1 es igual al número de dígitos antes de la coma menos uno. Por ejemplo, puesto que 2360 tiene cuatro dígitos antes de la coma, la característica será $4 - 1 = 3$.

3. Hállese (*a*) log 0,236, (*b*) log 0,0236, (*c*) log 0,00236.

Por el problema 1 sabemos que $2,36 = 10^{0,3729}$. Entonces, dividiendo sucesivamente por 10 tenemos,

$$0,236 = 10^{0,3729-1} = 10^{9,3729-10} = 10^{-0,6271}$$

$$0,0236 = 10^{0,3729-2} = 10^{8,3729-10} = 10^{-1,6271}$$

$$0,00236 = 10^{0,3729-3} = 10^{7,3729-10} = 10^{-2,6271}$$

Entonces

(*a*) log 0,236 = $9,3729 - 10 = -0.6271$

(*b*) log 0,0236 = $8.3729 - 10 = -1.6271$

(*c*) log 0,00236 = $7,3729 - 10 = -2,6271$

El número 0.3729 es la mantisa del logaritmo. El número que acompaña a la mantisa [tales como: 9 − 10, 8 − 10, ó 7 − 10] es la característica.

La regla siguiente es útil y de fácil comprensión.

Regla 2. La característica de un número positivo menor que 1 tiene signo negativo y su valor numérico es igual al número de ceros que siguen inmediatamente después de la coma más uno. Así por ejemplo: puesto que 0,00236 tiene dos ceros que van después de la coma, la característica será -3 ó lo que es lo mismo, 7 − 10.

4. Verifíquese cada uno de los siguientes logaritmos.

(*a*) log 87,2. Mantisa = 0.9405, característica = 1; entonces log 87,2 = 1.9405.

(*b*) log 395.000 = 5.5966.

(*c*) $\log_{10} 0,0482$. Mantisa = 0.6830, caracterfstica = 8 − 10; entonces $\log_{10} 0,0482 = 8,6830 - 10$.

(*d*) log 0,000827 = 6,9175 − 10.

5. Hállese log 4,638.

Puesto que el número tiene cuatro dígitos, tenemos que interpolar para hallar la mantisa. La mantisa de log 4638 se encuentra entre las mantisas de log 4630 y de log 4646 y es mayor que la mantisa del primero en 0.8 veces la diferencia entre las dos mantisas.

Mantisa de log 4640 = 0,6665
Mantisa de log 4630 = 0,6656
Diferencia tabular = 0,0009

Mantisade log 4,638 = 0,6656 + (0,8) (0,0009)
= 0,6663 hasta la cuarta cifra

Entonces log 4,638 = 0.6663

Si así se desea, puede emplearse la tabla de partes proporcionales de la pagina 202 para obtener directamente la mantisa (6656 + 7),

6. Verifíquese cada uno de los siguientes logaritmos.

(a)	log 183,2 = 2,2630		(2626 + 6)
(b)	log 87,640 = 4,9427		(9426 + 2)
(c)	log 0,2548 = 9.4062 − 10		(4048 + 14)
(d)	log 0,009848 = 7,933 − 10		(9930 + 3)

ANTILOGARITMOS COMUNES

7. Hállese (*a*) antilog 1,7530, (*b*) antilog (7,7530 − 10).

(*a*) Tenemos que encontrar el valor de $10^{1.7530}$. Puesto que la mantisa es 0,7530 miramos de arriba hacia abajo en la columna de la *izquierda* encabezada con una *p* en la tabla de la pagina 205 hasta que encontramos los dos primeros dígitos, 75. Luego proseguimos hacia la *derecha* hasta encontrar el número 5662 en la columna encabezada con un 3. Puesto que la característica es 1, esto quiere decir que hay dos dígitos antes de la coma. Entonces el número buscado será 56.62.

(*b*) Al igual que en (*a*) encontramos otra vea el número 5662 que corresponde a la mantisa 0,7530. Entonces, puesto que la característica es 7 − 10, el número tendrá que tener dos ceros inmediatamente después de la coma. Por lo tanto el número buscado sera 0.005662.

8. **Hállese** antilog (9,3842 − 10).

La mantisa 0.3842 se encuentra entre 0,3840 y 0,3850 por lo cual tenemos que interpolar. De acuerdo con la tabla de la pagina 204 tenemos,

Número correspondiente a 0,3850 = 2427
Número correspondiente a 0,3840 = 2421
Diferencia tabular = 6

Mantisa dada = 0,3842
Mantisa menor más próxima = 0.3840
Diferencia = 0.0002

Entonces $2421 + \frac{2}{10}(2427 - 2421) = 2422$ hasta la cuarta cifra, luego el número buscado será 0,2422.

Este problema podría resolverse igualmente con ayuda de la tabla de partes proporcionales de la pagina 204.

9. Verifíquese cada uno de los siguientes antilogaritmos.

(*a*) antilog 2,6715 = 469.3

(*b*) antilog 9,6089 − 10 = 0.4063

(*c*) antilog 4.2023 = 15.930

CALCULOS QUE SE PUEDEN EFECTUAR MEDIANTE EL EMPLEO DE LOGARITMOS

10. $P = \dfrac{(784{,}6)(0{,}0431)}{28{,}23}$. $\log P = \log 784{,}6 + \log 0{,}0431 - \log 28{,}23$.

$$\begin{aligned} \log 784{,}6 &= 2{,}8947 \\ (+)\ \log 0{,}0431 &= 8{,}6345 - 10 \\ &\overline{11{,}5292 - 10} \\ (-)\ \log 28{,}23 &= 1{,}4507 \\ \log P &= \overline{10{,}0785 - 10} = 0{,}0785. \end{aligned}$$

Luego $P = 1{,}198$.

Nótese el carácter exponencial del anterior cómputo, es decir:

$$\frac{(784{,}6)(0{,}0431)}{28{,}23} = \frac{(10^{2,8947})(10^{8,6345-10})}{10^{1,4507}} = 10^{2,8947+8,6345-10-1,4507} = 10^{0,785} = 1{,}198$$

11. $P = (5{,}395)^8$. $\log P = 8 \log 5{,}395 = 8(0{,}7320) = 5{,}8560$, y $P = 717.800$.

12. $P = \sqrt{387{,}2} = (387{,}2)^{1/2}$. $\log P = \frac{1}{2}\log 387{,}2 = \frac{1}{2}(2{,}5879) = 1{,}2940$ y $P = 19{,}68$.

13. $P = \sqrt[5]{0{,}08317} = (0{,}08317)^{1/5}$. $\log P = \frac{1}{5}\log 0{,}08317 = \frac{1}{5}(8{,}9200 - 10) = \frac{1}{5}(48{,}9200 - 50) = 9{,}7840 - 10$
Y $P = 0{,}6081$.

14. $P = \dfrac{\sqrt{0{,}003654}\,(18{,}37)^3}{(8{,}724)^4\,\sqrt[4]{743{,}8}}$, $\log P = \frac{1}{2}\log 0{,}003654 + 3\log 18{,}37 - (4\log 8{,}724 + \frac{1}{4}\log 743{,}8)$

Numerador N

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log 0{,}003654 &= \tfrac{1}{2}(7{,}5628 - 10) \\ &= \tfrac{1}{2}(17{,}5628 - 20) = 8{,}7814 - 10 \\ 3\log 18{,}37 &= 3(1{,}2641) = \underline{3{,}7923} \\ \text{Sumando:}\quad \log N &= 12{,}5737 - 10 \end{aligned}$$

Denominador D

$$\begin{aligned} 4\log 8{,}724 &= 4(0{,}9407) = 3{,}7628 \\ \tfrac{1}{4}\log 743{,}6 &= \tfrac{1}{4}(2{,}8714) = \underline{0{,}7178} \\ \text{Sumando:}\quad \log D &= 4{,}4806 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log N &= 12{,}5737 - 10 \\ (-)\ \log D &= 4{,}4806 \\ \log P &= \overline{8{,}0931 - 10}. \end{aligned}$$

Entonces $P = 0{,}01239$

LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS

15. Hállese (*a*) ln 7,236, (*b*) ln 836,2, (*c*) ln 0,002548

(*a*) Empléese la tabla de la página 225.

$$\begin{aligned} \ln 7{,}240 &= 1{,}97962 \\ \ln 7{,}230 &= \underline{1{,}97824} \\ \text{Diferencia tabular} &= 0{,}00138 \end{aligned}$$

Entonces $\ln 7{,}236 = 1{,}97824 + \frac{6}{10}(0{,}00138) = 1{,}97907$

Lo anterior, expresado en exponenciales, significa que $e^{1,97907} = 7{,}236$.

(*b*) Al igual que en la parte (*a*), encontramos lo siguiente:

$$\ln 8{,}362 = 2{,}12346 + \tfrac{2}{10}(2{,}12465 - 2{,}12346) = 2{,}12370$$

Entonces

$$\ln 836{,}2 = \ln(8{,}362 \times 10^2) = \log 8{,}362 + 2\ln 10 = 2{,}12370 + 4{,}60517 = 6{,}72887$$

Lo anterior, expresado en exponenciales, significa que $e^{6,72887} = 836{,}2$.

(*c*) Al igual que en la parte (*a*) encontramos lo siguiente:

$$\ln 2{,}548 = 0{,}93216 + \tfrac{8}{10}(0{,}93609 - 0{,}93216) = 0{,}93530$$

Entonces

$$\ln 0{,}002548 = \ln(2{,}548 \times 10^{-3}) = \ln 2{,}548 - 3\ln 10 = 0{,}93530 - 6{,}90776 = -6{,}97246$$

Lo anterior, expresado en exponenciales, significa que $e^{-5,97246} = 0{,}002548$.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS Y MINUTOS)

16. Hállese (*a*) sen $74^\circ 23'$, (*b*) cos $35^\circ 42'$, (*c*) tan $82^\circ 56'$.

(*a*) Véase la tabla de la página 206.

$$\text{sen } 74^\circ 30' = 0{,}9636$$
$$\text{sen } 74^\circ 20' = 0{,}9628$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}0008$$

Entonces $\quad \text{sen } 74^\circ 23' = 0{,}9628 + \sim(0.0008) = 0.9630$

(*b*) Véase la tabla de la página 207.

$$\cos 35^\circ 40' = 0{,}8124$$
$$\cos 35^\circ 50' = 0{,}8107$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0.0017$$

Entonces $\quad \cos 35'42' = 0.8124 - \frac{2}{10}(0{,}0017) = 0{,}8121$

o $\quad \cos 35^\circ 42' = 0.8107 + \frac{8}{10}(0{,}0017) = 0{,}8121$

(*c*) Véase la tabla de la página 208.

$$\tan 82^\circ 60' = \tan 83^\circ 0' = 8.1443$$
$$\tan 82^\circ 50' = 7{,}9530$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}1913$$

Entonces $\quad \tan 82^\circ 56' = 7.9530 + \frac{6}{10}(0{,}1913) = 8{,}0678$

17. Hállese (*a*) cot $45^\circ 16'$, (*b*) sec $73^\circ 48'$, (*c*) csc $28^\circ 33'$.

(*a*) Véase la tabla de la página 209.

$$\cot 45^\circ 10' = 0.9942$$
$$\cot 45020' = 0{,}9884$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}0058$$

Entonces $\quad \cot 45^\circ 16' = 0.9942 - \frac{6}{10}(0{,}0058) = 0{,}9907$

o $\quad \cot 45^\circ 16' = 0.9884 + \frac{4}{10}(0{,}0058) = 0{,}9907$

(*b*) Véase la tabla de la página 210.

$$\sec 73^\circ 50' = 3{,}592$$
$$\sec 73^\circ 40' = 3{,}556$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}036$$

Entonces $\quad \sec 73^\circ 48' = 3{,}556 + \frac{8}{10}(0{,}036) = 3{,}585$

(*c*) Véase la tabla de la página- 211.

$$\csc 28^\circ 30' = 2{,}096$$
$$\csc 28^\circ 40' = 2{,}085$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}011$$

Entonces $\quad \csc 28^\circ 33' = 2{,}096 \quad \frac{3}{10}(0{,}011) = 2{,}093$

o $\quad \csc 28^\circ 33' = 2{,}085 + \frac{7}{10}(0{,}011) = 2{,}093$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS (GRADOS Y MINUTOS)

18. Hállese (a) $\text{sen}^{-1}(0,2143)$, (b) $\cos^{-1}(0,5412)$, (c) $\tan^{-1}(1.1536)$.

(a) Véase la tabla de la página 206.

$$\text{sen}\,12°30' = 0,2164$$
$$\text{sen}\,12°20' = 0,2136$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0,0028$$

Puesto que 0,2143 se encuentra a $\dfrac{0.2143 - 0,2136}{0,0028} = \frac{1}{4}$ de la diferencia entre 0,2136 y 0.2164, el ángulo buscado será $12°20' + \frac{1}{4}(10') = 12°22,5'$.

(b) Véase la tabla de la página 207.

$$\cos 57°10' = 0,5422$$
$$\cos 57°20' = 0,5398$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0,0024$$

Entonces $\cos^{-1}(0,5412) = 57°20' - \dfrac{0,5412 - 0,5398}{0.0024}(10') = 57°14,2'$

o $\cos^{-1}(0.5412) = 57°10' + \dfrac{0,5422 - 0,5412}{0.0024}(10') = 57°14,2'$

(c) Véase la tabla de la página 208.

$$\tan 49°10' = 1,1571$$
$$\tan 49°0' = 1.1504$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0,0067$$

Entonces $\tan^{-1}(1,1536) = 49°0' + \dfrac{1,1536 - 1,1504}{0.0067}(10') = 49°4,8'$

Se procede de manera similar con las otras funciones trigonométricas recíprocas.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS (RADIANES)

19. Hállese (a) sen (0,627), (b) cos (1,056). (c) tan (0,153).

(a) Véase la tabla de la página 213.

$$\text{sen}\,(0,630) = 0.58914$$
$$\text{sen}\,(0,620) = 0,58104$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0,00810$$

Entonces $\text{sen}\,(0,627) = 0,58104 + \frac{7}{10}(0,00810) = 0.58671$

(b) Véase la tabla de la página 214.

$$\cos(1,050) = 0,49757$$
$$\cos(1,060) = 0,48887$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0,00870$$

Entonces $\cos(1,056) = 0,49757 - \frac{6}{10}(0,00870) = 0,49235$

o $\cos(1,056) = 0,48887 + \frac{4}{10}(0,00870) = 0.49235$

(c) Véase la tabla de la página 212.

$$\tan(0,160) = 0,16138$$
$$\tan(0,150) = 0.15114$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0.01024$$

Entonces $\tan(0,153) = 0,15114 + \frac{3}{10}(0,01024) = 0,15421$

Se procede en forma similar con las otras funciones trigonométricas.

20. Hállese sen-1 (0,512) en radianes.

Véase la tabla de la página 213.

sen (0.5401 = 0,51414
sen (0,530) = 0,50553
Diferencia tabular = 0.00861

Entonces $\text{sen}^{-1}(0{,}512) = 0{,}530 + \dfrac{0{,}512 - 0.50563}{0{,}00861}(0{,}01) = 0{,}5375$ radianes

Se procede en forma similar co" las otras funciones trigonométricas recíprocas.

LOGARITMOS COMUNES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

21. Hállese (*a*) log se" 63°17', (*b*) log cos 48°44'.

(*a*) Véase la tabla de la página 217.

log sen 63°20' = 9,9512 - 10
log se" 63°10' = 9,9505 - 10
Diferencia tabular = 0,0007

Entonces $\log \text{sen}\, 63°17' = 9{,}9505 - 10 + \frac{7}{10}(0{,}0007) = 9.9510 - 10$

(*b*) Véase la tabla de la página 219.

log cos 48°40' = 9,8198 - 10
log cos 48°50' = 9,8184 - 10
Diferencia tabular = 0,0014

Entonces $\log \text{coa}\, 48°44' = 9.8198 - 10 - \frac{4}{10}(0{,}0014) = 9{,}8192 - 10$

0 $\log \cos 48°44' = 9.8184 - 10 + \frac{6}{10}(0{,}0014) = 9{,}8192 - 10$

Se procede en forma similar para hallar los logaritmos de las otras funciones trigonométricas. Obsérvese que $\log \sec x = -\log \cos x$, $\log \cot x = -\log \tan x$, $\log \csc x = -\log \text{sen}\, x$.

22. Si $\log \tan x = 9{,}6845 - 10$, hállese x.

Véase la tabla de la página 220.

log tan 25°50' = 9,6850 - 10
log tan 25°40' = 9.6817 10
Diferencia tabular = 0,0033

Entonces $x = 25°40' + \dfrac{9{,}6845 - 9{,}6817}{0{,}0033}(10') = 25°48{,}5'$

CONVERSION DE GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS EN RADIANES

23. Conviértase 75°28'47" en radianes.

Véase la tabla de la página 223.

70°	=	1,221730 radianes
5°	=	0,087267
20'	=	0,005818
8'	=	0,002327
40"	=	0,000194
7"	=	0,000034
Sumando, 75° 28' 47"	=	1,317370 radianes

CONVERSION DE RADIANES EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS

24. Conviértase 2,547 radianes en grados, minutos y segundos.

Véase la tabla de la página 222.

$$\begin{aligned}
2 \text{ radianes} &= 114^\circ\ 35'\ 29{,}6''\\
0.5 &= 28^\circ\ 38'\ 52.4''\\
0{,}04 &= 2^\circ\ 17'\ 30{,}6''\\
0{,}007 &= 0^\circ\ 24'\ 3{,}9''
\end{aligned}$$

Sumando, $2{,}547 \text{ radianes} = 144^\circ\ 114'\ 116.5'' = 145^\circ\ 55'\ 56{,}5''$

CONVERSION DE RADIANES EN FRACCIONES DE GRADO

25. Conviértase 1,382 radianes en grados.

Véase la tabla de la página 222.

$$\begin{aligned}
1 \text{ radián} &= 57{,}2958^\circ\\
0.3 &= 17{,}1887^\circ\\
0{,}08 &= 4{,}5837^\circ\\
0{,}002 &= 0{,}1146^\circ
\end{aligned}$$

Sumando, $1{,}382 \text{ radianes} = 79{,}1828^\circ$

FUNCIONES HIPERBOLICAS Y EXPONENCIALES

26. **Hállese** (*a*) $e^{5,24}$, (*b*) $e^{-0,158}$.

(*a*) Véase la tabla de la página 226.

$$\begin{aligned}
e^{5,30} &= 200{,}34\\
e^{5,20} &= 181{,}27\\
\text{Diferencia tabular} &= 19{,}07
\end{aligned}$$

Entonces $e^{5,24} = 181.27 + \frac{4}{10}(19{,}07) = 188{,}90$

(*b*) **Véase la** tabla de la **página** 227.

$$\begin{aligned}
e^{-0,150} &= 0.86071\\
e^{-0,160} &= 0.85214\\
\text{Diferencia tabular} &= 0{,}00857
\end{aligned}$$

Entonces $e^{-0,158} = 0{,}86071 - \frac{8}{10}(0{,}00857) = 0{,}85385$

o $e^{-0,158} = 0.85214 + \frac{2}{10}(0{,}00857) = 0.85385$

27. **Hállese** (*a*) senh (4,846). (*b*) **sech** (0,163).

(*a*) Véase la tabla de la página 229.

$$\begin{aligned}
\text{senh } (4{,}850) &= 63{,}866\\
\text{senh } (4{,}840) &= 63{,}231\\
\text{Diferencia tabular} &= 0{,}635
\end{aligned}$$

Entonces $\text{senh } (4{,}846) = 4{,}840 + \frac{6}{10}(0{,}635) = 6{,}221$

(*b*) Véase la tabla de la página 230.

$$\begin{aligned}
\cosh (0{,}170) &= 1{,}0145\\
\cosh (0{,}160) &= 1{,}0128\\
\text{Diferencia tabular} &= 0{,}0017
\end{aligned}$$

Entonces $\cosh (0.163) = 1.0128 + \frac{3}{10}(0{,}0017) = 1.0133$

y por lo tanto $\text{sech } (0{,}163) = \frac{1}{\cosh (0{,}163)} = \frac{1}{1.0133} = 0{,}98687$

28. Hállese $\tanh^{-1}(0{,}71423)$.

Véase la tabla de la página 232.

$$\tanh(0{,}900) = 0.71630$$
$$\tanh(0{,}890) = 0.71139$$
$$\text{Diferencia tabular} = 0{,}00491$$

Entonces $$\tanh^{-1}(0{,}71423) = 0{,}890 + \frac{0{,}71423 - 0{,}71139}{0{,}00491}(10) = 0{,}8958$$

INTERESES Y ANUALIDADES

29. Un hombre deposita en el banco $2800 a un interés compuesto del 5% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál será la cantidad acumulada al cabo de 8 años?

Hay un total de $n = 8 \cdot 4 = 32$ períodos de pago a la tasa de interés de $r = 0{,}05/4 = 0{,}0125$ por cada período. Por consiguiente el monto será de

$$A = \$2800(1 + 0{,}0125)^{32} = \$2800(1{,}4881) = \$4166{,}68$$

de acuerdo con los datos obtenidos en la tabla de la página 240.

30. Un hombre desea reunir $12.000 al cabo de 10 años. ¿Cuánto dinero tendrá que colocar a una tasa de interés compuesto del 6% capitalizable semestralmente?

El problema nos pide hallar el valor actual P que, al cabo de 10 años, ascenderá a la cantidad de $M = \$12.000$. Puesto que hay un total de $n = 10 \cdot 2 = 20$ períodos de pago a la tasa de interés de $r = 0{,}06/2 = 0{,}03$ por cada período, el valor presente será de

$$P = \$12.000(1 + 0{,}03)^{-20} = \$12.000(0{,}55368) = \$6644{,}16$$

de acuerdo con la tabla de la página 241.

31. Un hombre invierte $500 anuales al final de cada año. Si la tasa de interés compuesto es del 4% y los intereses son capitalizables anualmente, ¿a cuánto ascenderá la cantidad acumulada al cabo de 20 años?

En este caso $r = 0{,}04$, $n = 20$ y la cantidad acumulada será de [véase la tabla de la página 242],

$$\$500\left[\frac{(1 + 0{,}04)^{20} - 1}{0{,}04}\right] = \$500(29{,}7781) = \$14.889{,}05$$

32. ¿Cuál es el valor presente de una serie uniforme de pagos de $120 cada uno hechos al final de cada período de 3 meses durante 12 años al 6% de interés compuesto capitalizando los intereses trimestralmente?

En este caso hay $n = 4 \cdot 12 = 48$ períodos de pago, $r = 0{,}06/4 = 0{,}015$ y el valor presente es de

$$\$120\left[\frac{1 - (1{,}015)^{-48}}{0{,}015}\right] = \$120(34{,}0426) = \$4085{,}11$$

de acuerdo con la tabla de la página 243.

TABLA
1

LOGARITMOS COMUNES DE CUATRO CIFRAS

$\log_{10} N$ o $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
LO	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	3	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0632	0719	0755	4	3	ll	15	19	23	26	30	34
12	0792	0323	0364	0399	0934	0969	1004	1033	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	23	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1534	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	13	21	24	27
15	1761	1790	1313	1347	1375	1903	1931	1959	1937	2014	3	6	3	ll	14	17	20	22	25
16	2041	2063	2095	2122	2143	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	3	ll	13	16	13	21	24
17	2304	2330	2355	2330	2405	2430	2455	2430	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
13	2553	2577	2601	2625	2643	2672	2695	2713	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2733	2310	2333	2356	2373	2900	2923	2945	2967	2939	2	4	7	9	ll	13	16	13	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3113	3139	3160	3131	3201	2	4	6	3	ll	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3234	3304	3324	3345	3365	3335	3404	2	4	6	3	10	12	14	16	13
22	3424	3444	3464	3433	3502	3522	3541	3560	3579	3593	2	4	6	3	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3734	2	4	6	7	9	ll	13	15	17
24	3302	3320	3333	3356	3374	3392	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4043	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4133	4200	4216	4232	4249	4265	4231	4293	2	3	5	7	3	10	ll	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4373	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	6	6	3	9	ll	13	14
23	4472	4437	4502	4513	4533	4543	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	3	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4633	4693	4713	4723	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4736	4300	4314	4329	4343	4357	4371	4336	4900	1	3	4	6	7	9	10	ll	13
31	4914	4923	4942	4955	4969	4933	4997	5011	6024	5033	1	3	4	6	7	3	10	ll	12
32	5051	6065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	6159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	6135	6193	5211	5224	5237	5250	5263	5276	6239	6302	1	3	4	5	6	3	91012		
34	5316	5323	6340	5353	5366	5373	6391	5403	6416	5423	1	3	4	5	6	3	9	10	11
35	6441	6453	5465	6473	5490	5602	5514	6527	6539	6551	1	2	4	6	6	7	9	10	11
36	5563	6675	5537	5599	5611	5623	6635	5647	5653	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5632	6694	5705	6717	5729	6740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	3	9	1 0
33	6793	5309	6321	5332	5343	5355	6366	5377	6333	6399	1	2	3	5	6	7	3	9	1 0
39	5911	6922	6933	5944	5955	5966	6977	5933	6999	6010	1	2	3	4	5	7	3	9	1 0
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6035	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	3	9	1 0
41	6123	6133	6149	6160	6170	6130	6191	6201	6212	6222	12		3	4	5	6	7	3	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6234	6294	6304	6314	6325	12		3	4	5	6	7	3	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6335	6395	6405	6416	6425	12		3	4	5	7	6	3	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6434	6493	6503	6513	6522	12		3	4	5	6	7	3	9
45	6632	6642	6551	6561	6571	6530	6590	6599	6609	6613	1	2	3	4	5	6	7	3	9
46	6623	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	12		3	4	5	6	7	7	3
47	6721	6730	6739	6749	6753	6767	6776	6735	6794	6303	12		3	4	5	5	6	7	3
43	6312	6321	6330	6339	6343	6357	6366	6375	6334	6393	12		3	4	4	5	6	7	3
49	6902	6911	6920	6923	6937	6946	6955	6964	6972	6931	12		3	4	4	5	6	7	3
50	6990	6993	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	12		3	3	4	5	6	7	3
51	7076	7034	7093	7101	7110	7113	7126	7135	7143	7152	12		3	3	4	5	6	7	3
52	7160	7163	7177	7135	7193	7202	7210	7213	7226	7235	12		2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7234	7292	7300	7303	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7346	7356	7364	7372	7330	7383	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12		3	4	5	6	7	3	9

LOGARITMOS COMUNES DE CUATRO CIFRAS

$\log_{10} N$ o $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	1435	7443	7461	7469	7466	7474	1	2	2	3	4	5	6	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7101	1	1	2	3	4	4	6	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1		2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	6	6	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	6	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	6	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	6
81	9085	SOSO	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA 2

LOGARITMOS COMUNES DE CUATRO CIFRAS

10^p o antilog p

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Partes proporcionales								
0,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0,09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0,10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0,11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	8
0.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1436	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0,16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0,17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0,19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0,20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	8	3	8
0,22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	8	3	3
0.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0,24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	8	3	4
0.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0,29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	8	3	4	4
0,30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0,31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0,33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0,34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	6
0,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0,41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	6	6
0,46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	6	5	6
0,47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0,48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	6	6	6
0,49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 2 (continuación)

ANTILOGARITMOS COMUNES DE CUATRO CIFRAS

10^p o antilog p

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228		1	2	3	4	4	5	6	7
0,51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304		2	2	3	4	5	5	6	7
0,52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381		2	2	3	4	5	5	6	7
0,53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459		2	2	3	4	5	6	6	7
0,54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540		2	2	3	4	5	6	6	7
0,55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622		2	2	3	4	5	6	7	7
0,56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0,57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0,58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0,59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0,60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0,61	4074	4083	4093	4102	4111	1121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4169	4178	4188	4198	4207	1217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,65	4467	4417	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0,67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0,69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0,70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	6082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0,71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0,73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0,74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0,76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0,77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0,78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0,80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0,81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0,83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0,84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0,87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0,88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0,89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0,90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0,91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0,92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0,93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0,94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0,95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0,98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA 3

Sen x (x en grados y minutos)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	0,0000	0,0029	0.0058	0.0087	0,0116	0,0145
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0.0291	0,0320
2	0.0349	0,0378	0,0407	0,0436	0.0465	0.0494
3	0.0523	0.0552	0,0581	0,0610	0,0640	0.0669
4	0,0698	0.0727	0,0756	0.0785	0,0814	0,0843
5°	0,0872	0.0901	0,0929	0.0958	0,0987	0.1016
6	0,1045	0.1074	0.1103	0.1132	0.1161	0.1190
7	0,1219	0.1248	0,1276	0,1305	0.1334	0,1363
8	0,1392	0,1421	0,1449	0.1478	0,1507	0,1536
9	0,1564	0.1593	0,1622	0,1650	0.1679	0,1708
10°	0.1736	0,1765	0.1794	0.1822	0.1851	0,1880
11	0.1908	0.1937	0,1965	0.1994	0,2022	0,2051
12	0.2079	0,2108	0.2136	0,2164	0,2193	0.2221
13	0.2250	0.2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391
14	0.2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560
15°	0,2588	0,2616	0.2644	0.2672	0.2700	0,2728
16	0.2756	0.2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0.3035	0.3062
18	0.3090	0,3118	0,3145	0.3173	0.3201	0,3228
19	0.3256	0.3283	0.3311	0,3338	0.3365	0,3393
20°	0,3420	0,3448	0,3475	0.3502	0,3529	0,3557
21	0.3584	0.3611	0.3638	0,3665	0,3692	0,3719
22	0,3746	0,3773	0.3800	0,3827	0,3854	0,3881
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0.4041
24	0,4067	0,4094	0.4120	0,4147	0,4173	0,4200
25°	0,4226	0.4253	0,4279	0.4305	0,4331	0,4358
26	0,4384	0.4410	0,4436	0,4462	0.4488	0,4514
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669
28	0.4695	0.4720	0,4746	0,4772	0,4797	0.4823
29	0.4848	0.4874	0,4899	0,4924	0,4950	0.4975
30°	0.5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275
32	0,5299	0,5324	0,5348	0.5373	0,5398	0.5422
33	0.5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0.5712
35°	0,5736	0.5760	0,5783	0.5807	0,5831	0,5854
36	0,5878	0,5901	0.5925	0,5948	0,5972	0,5995
37	0,6018	0.6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134
38	0,6157	0,6180	0,6202	0.6225	0,6248	0,6271
39	0,6293	0,6316	0.6338	0,6361	0,6383	0,6406
40°	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0.6517	0,6539
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0.6905	0,6926
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050
45°	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0.7173
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412
48	0,7431	0,7451	0.7470	0,7490	0,7509	0,7528
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642
50°	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969
53	0.7986	0.8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073
54	0.8090	0.8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175
55°	0,8192	0,8208	0.8225	0,8241	0,8258	0,8274
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0.8465
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0.8557
59	0.8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646
60°	0,8660	0.8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732
61	0,8746	0,8760	0.8774	0,8788	0,8802	0,8816
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897
63	0.8910	0.8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975
64	0.8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051
65°	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325
69	0,9336	0.9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387
70°	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555
73	0.9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652
75°	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811
79	0,9816	0,9822	0,9827	0.9833	0,9838	0,9843
80°	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0.9868	0,9872
81	0,9877	0,9881	0,9886	0.9890	0,9894	0,9899
82	0,9903	0,9907	0,9911	0.9914	0,9918	0,9922
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0.9959
85°	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998
89	0,9998	0.9999	0,9999	1,0000	1.0000	1,0000
90°	1,0000					

TABLA

4

Cos *x* (*x en grados y minutos*)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
1	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0.9995
2	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990	0.9989	0,9988
3	0,9986	0,9985	0,9983	0,9981	0,9980	0,9978
4	0,9976	0,9974	0,9971	0,9969	0,9967	0,9964
5°	0,9962	0,9959	0,9957	0.9954	0,9951	0.9948
6	0,9945	0,9942	0,9939	0,9936	0,9932	0,9929
7	0,9925	0,9922	0,9918	0,9914	0,9911	0,9907
8	0,9903	0,9899	0,9894	0,9890	0,9886	0,9881
9	0,9877	0,9872	0,9868	0,9863	0,9858	0.9853
10°	0,9848	0,9843	0,9838	0,9833	0,9827	0.9822
11	0,9816	0,9811	0,9805	0,9799	0,9793	0,9787
12	0,9781	0,9775	0,9769	0,9763	0,9757	0,9750
13	0,9744	0,9737	0,9730	0,9724	0,9717	0,9710
14	0,9703	0,9696	0,9689	0,9681	0,9674	0,9667
15°	0,9659	0,9652	0,9644	0,9636	0,9628	0,9621
16	0,9613	0,9605	0,9596	0.9588	0,9580	0,9572
17	0,9563	0,9555	0,9546	0,9537	0,9528	0,9520
18	0,9511	0,9502	0,9492	0,9483	0,9474	0,9465
19	0,9455	0,9446	0,9436	0,9426	0,9417	0,9407
20°	0,9397	0,9387	0,9377	0,9367	0,9356	0,9346
21	0,9336	0,9325	0,9315	0,9304	0,9293	0,9283
22	0,9272	0,9261	0,9250	0,9239	0,9228	0,9216
23	0,9205	0,9194	0,9182	0,9171	0,9159	0,9147
24	0,9135	0,9124	0,9112	0,9100	0,9088	0,9075
25°	0,9063	0,9051	0,9038	0,9026	0,9013	0,9001
26	0,8988	0,8975	0,8962	0,8949	0,8936	0,8923
27	0,8910	0,8897	0,8884	0.8870	0,8857	0,8843
28	0,8829	0,8816	0,8802	0,8788	0,8774	0,8760
29	0,8746	0,8732	0,8718	0,8704	0.8689	0,8675
30°	0,8660	0.8646	0,8631	0,8616	0,8601	0,8587
31	0,8572	0.8557	0.8542	0,8526	0,8511	0,8496
32	0.8480	0,8465	0,8450	0.8434	0,8418	0,8403
33	0,8387	0.8371	0.8355	0,8339	0,8323	0,8307
34	0.8290	0,8274	0,8258	0,8241	0,8225	0,8208
35°	0,8192	0,8175	0.8158	0,8141	0,8124	0,8107
36	0,8090	0,8073	0,8056	0,8039	0,8021	0,8004
37	0.7986	0,7969	0,7951	0,7934	0,7916	0,7898
38	0,7880	0,7862	0,7844	0,7826	0,7808	0,7790
39	0,7771	0.7753	0,7735	0,7716	0,7698	0,7679
40°	0.7660	0,7642	0.7623	0.7604	0,7585	0,7566
41	0,7547	0,7528	0,7509	0,7490	0,7470	0,7451
42	0,7431	0.7412	0,7392	0,7373	0,7353	0,733:3
43	0.7314	0,7294	0,7274	0,7254	0,7234	0,721~1
44	0,7193	0,7173	0,7153	0,7133	0,7112	0,709:2
45°	0,7071	0.7050	0,7030	0,7009	0,6988	0,696:7

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	0,7071	0,7050	0,7030	0,7009	0,6988	0.6967
46	0,6947	0,6926	0,6905	0,6884	0,6862	0,6841
47	0,6820	0,6799	0,6777	0.6756	0,6734	0,6713
48	0,6691	0,6670	0,6648	0,6626	0,6604	0.6583
49	0,6561	0.6539	0.6517	0.6494	0,6472	0.6450
50°	0,6428	0,6406	0,6383	0,6361	0,6338	0,6316
51	0,6293	0,6271	0,6248	0.6225	0.6202	0,6180
52	0,6157	0,6134	0.6111	0,6088	0,6065	0,6041
53	0,6018	0,5995	0,5972	0,5948	0,5925	0,5901
54	0,5878	0,5854	0,5831	0,5807	0,5783	0,5760
55°	0,5736	0,5712	0,5688	0,5664	0.5640	0.6616
56	0,5592	0,5568	0,5544	0.5519	0,5495	0,5471
57	0,5446	0,5422	0.5398	0.6373	0,5348	0,5324
58	0,5299	0,5275	0,5250	0,5225	0.6200	0,5175
59	0,5150	0,5125	0,5100	0.6075	0,5050	0,5025
60°	0,5000	0,4975	0,4950	0.4924	0,4899	0,4874
61	0,4848	0,4823	0,4797	0,4772	0,4746	0,4720
62	0,4695	0,4669	0,4643	0,4617	0,4592	0,4566
63	0,4540	0,4514	0,4488	0.4462	0,4436	0.4410
64	0,4384	0,4358	0,4331	0,4305	0,4279	0.4253
65°	0,4226	0,4200	0.4173	0,4147	0,4120	0,4094
66	0,4067	0,4041	0.4014	0.3987	0.3961	0,3934
67	0,3907	0,3881	0,3854	0,3827	0.3800	0.3773
68	0,3746	0,3719	0,3692	0,3665	0.3638	0,3611
69	0,3584	0,3557	0,3529	0,3502	0,3475	0,3448
70°	0.3420	0,3393	0,3365	0,3338	0,3311	0,3283
71	0,3256	0,3228	0,3201	0,3173	0,3145	0.3118
72	0,3090	0,3062	0,3035	0.3007	0,2979	0,2952
73	0,2924	0,2896	0,2868	0,2840	0.2812	0,2784
74	0.2756	0,2728	0,2700	0,2672	0.2644	0,2616
75°	0,2588	0,2560	0.2532	0,2504	0,2476	0,2447
76	0,2419	0,2391	0,2363	0,2334	0.2306	0,2278
77	0,2250	0,2221	0,2193	0,2164	0,2136	0,2108
78	0,2079	0,2051	0,2022	0,1994	0,1965	0,1937
79	0.1908	0.1880	0,1851	0,1822	0,1794	0,1765
80°	0,1736	0,1708	0,1679	0,1650	0.1622	0,169:
81	0,1564	0,1536	0,1507	0,1478	0.1449	0,1421
82	0,1392	0,1363	0,1334	0,1305	0,1276	0,1248
83	0,1219	0,1190	0.1161	0,1132	0,1103	0,1074
84	0,1045	0J016	0,0987	0,0958	0.0929	0.0901
85°	0,0872	0,0843	0,0814	0,0785	0,0756	0,072'
86	0,0698	0,0669	0,0640	0,0610	0,0581	0,066:
87	0,0523	0,0494	0,0465	0,0436	0.0407	0,0378
88	0,0349	0,0320	0,0291	0,0262	0,0233	0,0204
89	0,0175	0.0145	0,0116	0,0087	0.0068	0,0029
90°	0,0000					

TABLA 5

Tan x (x en grados y minutos)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320
2	0.0349	0.0378	0,0407	0.0437	0.0466	0,0495
3	0.0524	0.0553	0,0582	0.0612	0.0641	0.0670
4	0,0699	0.0'729	0.0758	0.0787	0.0816	0.0846
5°	0,0875	0.0904	0,0934	0.0963	0.0992	0.1022
6	0.1051	0,1080	0.1110	0.1139	0,1169	0.1198
7	0.1228	0,1257	0.1287	0.1317	0.1346	0,1376
8	0,1405	0.1435	0.1465	0.1495	0.1524	0.1554
9	0.1584	0,1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1733
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914
11	0,1944	0,1974	0.2004	0.2035	0.2065	0.2095
12	0.2126	0.2156	0,2186	0,2217	0.2247	0,2278
13	0,2309	0,2339	0.2370	0.2401	0.2432	0.2462
14	0.2493	0,2524	0.2555	0.2586	0,2617	0.2648
15°	0.2679	0,2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836
16	0,2867	0,2899	0.2831	0.2962	0.2994	0.3026
17	0.3057	0.3089	0,3121	0.3153	0,3185	0.3217
18	0.3249	0.3281	0,3314	0,3346	0,3378	0.3411
19	0.3443	0.3476	0.3508	0,3541	0,3574	0, 3607
20°	0,3640	0,3673	0.3706	0,3739	0,3772	0.3805
21	0.3839	0.3872	0.3906	0,3939	0.3973	0,4006
22	0.4040	0.4074	0,4108	0.4142	0.4176	0,4210
23	0.4245	0,4279	0.4314	0.4348	0.4383	0.4417
24	0.4452	0,4487	0.4522	0.4557	0.4592	0,4628
25°	0.4663	0,4699	0,4734	0.4770	0,4806	0.4841
26	0.4877	0,4913	0.4950	0,4986	0.5022	0.5059
27	0,5095	0.5132	0.5169	0.5206	0.5243	0.5280
28	0,5317	0,5354	0,5392	0.5430	0,5467	0.5505
29	0,5543	0,5581	0.5619	0.5658	0.5696	0.5735
30°	0,5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969
31	0,6009	0,6048	0.6088	0.6128	0.6168	0.6208
32	0.6249	0.6289	0.6330	0.6371	0.6412	0.6453
33	0.6494	0.6536	0.6577	0.6619	0,6661	0,6703
34	0.6745	0,6787	0.6830	0,6873	0.6916	0,6959
35°	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	U.7221
36	0,7265	0.7310	0.7355	0,7400	0.7445	0,7490
37	0.7536	0,7581	0.7627	0.7673	0,7720	0,7766
38	0,7813	0.7860	0.7907	0.7954	0.8002	0.8050
39	0.8098	0,8146	0.8195	0.8243	0.8292	0.8342
40°	0,8391	0,8441	0.8491	0.8541	0.8591	0,8642
41	0.8693	0.8744	0,8796	0.8847	0.8899	0.6952
42	0.9004	0.9057	0.9110	0.9163	0.9217	0,9271
43	0,9325	0.9380	0.9435	0.9490	0,9545	0.9601
44	0,9657	0.9713	09770	0.9827	0,9884	0,9942
45"	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1,0235	1.0295

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45"	1,0000	1.0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295
46	1,0355	1,0416	1.0477	1,0538	1,0599	1,0661
47	1.0724	1.0786	1.0850	1.0913	1,0977	1,1041
48	1.1106	1,1171	1,1237	1.1303	1,1369	1,1436
49	1.1504	1.1571	1,1640	1,1708	1.1778	1,1847
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1,2203	1,2276
51	1.2349	1.2423	1.2197	1.2572	1,2647	1.2723
52	1.2799	1,2876	1.2954	1,3032	1.3111	1,3190
53	1,3270	1.3351	1,3432	1.3514	1.3597	1,3680
54	1,3764	1.3848	1.3934	1.4019	1,4106	1,4193
55°	1,4281	1.4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733
56	1,4826	1,4919	1.5013	1.5108	1,5204	1,5301
57	1.5399	1.5497	1,5597	1.5697	1,5798	1,5900
58	1.6003	1.6107	1,6212	1,6319	1,6426	1.6534
59	1,6643	1,6753	1,6864	1.6977	1.7090	1,7205
60°	1.7321	1.7437	1.7556	1,7675	1.7796	1,7917
61	1.8040	1.8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676
62	1.8807	1.8940	1.9074	1,9210	1,9347	1,9486
63	1,9626	1,9768	1,9912	2.0057	2,0204	2,0353
G4	2.0503	2.0655	2,0809	2.0965	2,1123	2,1283
65°	2,1445	2.1609	2.1775	2,1943	2,2113	2,2286
66	2,2460	2.2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369
67	2.3559	2.3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545
68	2,4751	2,4960	2,5172	2.5386	2,5605	2.5826
69	2.6051	2.6279	2.6511	2.6746	2.6985	2,7228
70°	2.7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770
71	2.9042	2.9319	2.9600	2,9887	3,0178	3,0475
72	3,0777	3.1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371
73	3.2709	3.3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6470	3,6891
75°	3.7321	3.7760	3.8208	3.8667	3.9136	3,9617
76	4.0108	4,0611	4.1126	4.1653	4,2193	4,2747
77	4.3315	4.3807	4.4494	4,5107	4,5736	4,6382
78	4.7046	4.7729	4.8430	4,9152	4,9894	5.0658
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764
80°	5,6713	5,7694	5.8708	5.9758	6,0844	6,1970
81	6,3138	6.4348	6.5606	6,6912	6.8269	6,9682
82	'7.1154	7.2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530
83	8.1443	8.3450	8.5555	8.7769	9,0098	9,2553
84	9.5144	9,7882	10,078	10,385	10,712	11,059
85°	11,430	11,826	12.251	12.706	13.197	13.727
86	14.301	14,924	15,605	16.350	17,169	18,075
87	1'3,081	20,206	21.470	22.904	24.542	26,432
88	28.636	31.242	31.368	38.188	42,964	49,104
89	57.290	68.750	85.940	114.59	171.89	343,77
90'	∞					

TABLA 6

COT x (x en grados y minutos)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	∞	343,77	171,89	114,59	85,940	68,750
1	57,290	49,104	42,964	38,188	34,368	31,242
2	28,636	26,432	24,542	22.904	21,470	20,206
3	19,081	18,075	17,169	16,350	15,605	14,924
4	14,301	13,727	13,197	12,706	12,251	11,826
5°	11,430	11,059	10,712	10,385	10,078	9,7882
6	9.5144	9,2553	9,0098	8,7769	8,5555	8,3450
7	8,1443	7,9530	7,7704	7,5958	7,4287	7,2687
8	7,1154	6,9682	6,8269	6,6912	6,5606	6,4348
9	6,3138	6,1970	6.0844	5,9758	5,8708	5,7694
10°	5,6713	5,5764	5,4845	5,3955	5,3093	5,2257
11	5.1446	5,0658	4,9894	4,9152	4,8430	4,7729
12	4,7046	4,6382	4,5736	4,5107	4,4494	4,3897
13	4,3315	4,2747	4,2193	4,1653	4,1126	4,0611
14	4,0108	3.9617	3,9136	3,8667	3,8208	3,7760
15°	3,7321	3,6891	3.6470	3,6059	3,5656	3,5261
16	3,4874	3,4495	3.4124	3,3759	3,3402	3.3052
17	3,2709	3,2371	3,2041	3,1716	3.1397	3,1084
18	3,0777	3,0475	3,0178	2,9887	2,9600	2,9319
19	2.9042	2,8770	2.8502	2,8239	2,7980	2,7725
20°	2,7475	2,7228	2,6985	2,6746	2.6511	2,6279
21	2,6051	2,5826	2.5605	2,5386	2,5172	2,4960
22	2,4751	2,4545	2,4342	2.4142	2,3945	2,3750
23	2,3559	2,3369	3,3183	2,2998	2,2817	2,2637
24	2,2460	2.2286	2,2113	2,1943	2,1775	2,1609
25°	2,1445	2,1283	2,1123	2,0965	2,0809	2,0655
26	2.0503	2,0353	2,0204	2,0057	1,9912	1,9768
27	1,9626	1,9486	1,9347	1,9210	1,9074	1,8940
28	1,8807	1.8676	1.8546	1.8418	1,8291	1.8161
29	1,8040	1,7917	1.7796	1,7675	1,7556	1,7437
30°	1.7321	1,7205	1,7090	1,6977	1,6864	1,675[illegible]
31	1,6643	1,6534	1,6426	1,6319	1,6212	1,610[illegible]
32	1.6003	1.5900	1,5798	1,5697	1,5597	1,549[illegible]
33	1,5399	1,5301	1,5204	1,5108	1,5013	1,491[illegible]
34	1,4826	1,4733	1,4641	1,4550	1.4460	1,4370
35°	1.4281	1,4193	1.4106	1,4019	1,3934	1,3848
36	1.3764	1,3680	1,3597	1,3514	1,3432	1,3351
37	1.3270	1,3190	1,3111	1,3032	1,2954	1,2876
38	1,2799	1,2723	1,2647	1,2572	1,2497	1,242[illegible]
39	1,2349	1,2276	1,2203	1.2131	1.2059	1,1988
40°	1.1918	1,1847	1,1778	1,1708	1,1640	1,1571
41	1.1504	1,1436	1,1369	1,1303	1,1237	1,1171
42	1.1106	1,1041	1,0977	1,0913	1.0850	1,0786
43	1,0724	1.0661	1,0599	1,0538	1,0477	1,0416
44	1.0355	1,0295	1,0235	1,0176	1,0117	1,0058
45°	1.0000	0.9942	0.9884	0,9827	0,9770	0,971[illegible]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
15°	1.000	0,9942	0,9884	0,9827	0,9770	0,9713
16	0.9657	0,9601	0,9545	0,9490	0.9435	0,9380
17	0,9325	0.9271	0.9217	0,9163	0,9110	0,9057
18	0,9004	0,8952	0,8899	0,8847	0,8796	0.8744
19	0,8693	0,8642	0,8591	0,8541	0,8491	0,8441
50°	0,8391	0,8342	0.8292	0,8243	0,8195	0,8146
51	0,8098	0,8050	0,8002	0,7954	0,7907	0,7860
52	0,7813	0,7766	0,7720	0.7673	0,7627	0,7581
53	0,7536	0,7490	0,7445	0,7400	0,7355	0,7310
54	0,7265	0,7221	0,7177	0,7133	0.7089	0,7046
55°	0.7002	0,6959	0.6916	0,6873	0,6830	0,6787
56	0,6745	0,6703	0,6661	0,6619	0,6577	0,6536
57	0,6494	0,6453	0,6412	0,6371	0,6330	0.6289
58	0,6249	0,6208	0,6168	0,6128	0,6088	0,6048
59	0,6009	0,5969	0,5930	0,5890	0,5851	0,5812
60°	0,5774	0,5735	0,5696	0,5658	0,5619	0,5581
61	0,5543	0,5505	0,5467	0.5430	0,5392	0,5354
62	0,5317	0,5280	0,5243	0.5206	0,5169	0,5132
63	0.5095	0,5059	0,5022	0,4986	0,4950	0.4913
64	0,4877	0,4841	0.4806	0.4770	0,4734	0,4699
65°	0,4663	0,4628	0,4592	0,4557	0,4522	0,4487
66	0,4452	0,4417	0,4383	0.4348	0,4314	0,4279
67	0,4245	0,4210	0,4176	0,4142	0,4108	0,4074
68	0,4040	0.4006	0,3973	0,3939	0.3906	0,3872
69	0.3839	0,3805	0,3772	0,3739	0,3706	0,3673
70°	0.3640	0,3607	0,3574	0,3541	0,3508	0.3476
71	0,3443	0,3411	0,3378	0,3346	0,3314	0,3281
72	0,3249	0,3217	0,3185	0,3153	0,3121	0,3089
73	0,3057	0,3026	0,2994	0,2962	0,2931	0,2899
74	0.2867	0,2836	0,2805	0,2773	0.2742	0.2711
75°	0,2679	0,2648	0,2617	0,2586	0,2555	0,2524
76	0,2493	0,2462	0,2432	0,2401	0,2370	0,2339
77	0,2309	0,2278	0,2247	0.2217	0.2186	0.2156
78	0,2126	0,2095	0,2065	0.2035	0,2004	0,1974
79	0,1944	0,1914	0,1883	0,1853	0,1823	0,1793
80°	0,1763	0,1733	0,1703	0,1673	0,1644	0,1614
81	0,1584	0,1554	0.1524	0,1495	0,1465	0,1435
82	0,1405	0,1376	0,1346	0,1317	0,1287	0,1257
83	0,1228	0,1198	0,1169	0,1139	0,1110	0,1080
84	0.1051	0.1022	0,0992	0,0963	0.0934	0,0904
85°	0,0875	0,0846	0.0816	0,0787	0.0758	0,0729
86	0,0699	0,0670	0,0641	0,0612	0,0582	0,0553
87	0,0524	0,0495	0,0466	0,0437	0.0407	0,0378
88	0,0349	0,0320	0.0291	0,0262	0,0233	0,0204
89	0,0175	0,0145	0,0116	0,0087	0.0058	0,0029
90°	0,0000					

TABLA 7

SEC x (x en grados y minutos)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001
2	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001
3	1,001	1,002	1,002	1,002	1,002	1,002
4	1,002	1,003	1,003	1,003	1,003	1,004
5°	1,004	1,004	1,004	1,005	1,005	1,005
6	1,006	1,006	1,006	1,006	1,007	1,007
7	1,008	1,008	1,008	1,009	1,009	1,009
8	1,010	1,010	1,011	1,011	1,012	1,012
9	1,012	1,013	1,013	1,014	1,014	1,015
10°	1,015	1,016	1,016	1,017	1,018	1,018
11	1,019	1,019	1,020	1,020	1,021	1,022
12	1,022	1,023	1,024	1,024	1,025	1,026
13	1,026	1,027	1,028	1,028	1,029	1,030
14	1,031	1,031	1,032	1,033	1,034	1,034
15°	1,035	1,036	1,037	1,038	1,039	1,039
16	1,040	1,041	1,042	1,043	1,044	1,045
17	1,046	1,047	1,048	1,048	1,049	1,050
18	1,051	1,052	1,053	1,054	1,056	1,057
19	1,058	1,059	1,060	1,061	1,062	1,063
20°	1,064	1,065	1,066	1,068	1,069	1,070
21	1,071	1,072	1,074	1,075	1,076	1,077
22	1,079	1,080	1,081	1,082	1,084	1,085
23	1,086	1,088	1,089	1,090	1,092	1,093
24	1,095	1,096	1,097	1,099	1,100	1,102
25°	1,103	1,105	1,106	1,108	1,109	1,111
26	1,113	1,114	1,116	1,117	1,119	1,121
27	1,122	1,124	1,126	1,127	1,129	1,131
28	1,133	1,134	1,136	1,138	1,140	1,142
29	1,143	1,145	1,147	1,149	1,151	1,153
30°	1,155	1,157	1,159	1.161	1,163	1,165
31	1,167	1,169	1,171	1,173	1,175	1,177
32	1,179	1,181	1,184	1,186	1,188	1,190
33	1,192	1,195	1,197	1,199	1,202	1,204
34	1,206	1,209	1,211	1,213	1,216	1,218
35°	1,221	1,223	1,226	1,228	1,231	1,233
36	1,236	1,239	1,241	1,244	1,247	1,249
37	1,252	1,255	1,258	1,260	1,263	1,266
38	1,269	1,272	1,275	1,278	1,281	1,284
39	1,287	1,290	1,293	1,296	1,299	1,302
40°	1,305	1,309	1,312	1,315	1,318	1.322
41	1,325	1,328	1,332	1,335	1,339	1,342
42	1,346	1,349	1,353	1,356	1,360	1,364
43	1,367	1,371	1,375	1,379	1,382	1,386
44	1,390	1,394	1,398	1,402	1,406	1,410
45°	1,414	1,418	1,423	1,427	1,431	1,435

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	1,414	1,418	1,423	1,427	1,431	1,435
46	1,440	1,444	1,448	1,453	1,457	1,462
47	1,466	1,471	1,476	1,480	1,485	1,490
48	1,494	1,499	1,504	1,509	1,514	1,519
49	1,524	1,529	1,535	1,510	1,545	1,550
50°	1,556	1,561	1,567	1,572	1,578	1,583
51	1,589	1,595	1,601	1,606	1,612	1,618
52	1,624	1,630	1,636	1,643	1,649	1,655
53	1,662	1,668	1,675	1,681	1,688	1,695
54	1,701	1,708	1,715	1,722	1,729	1,736
55°	1,743	1,751	1,758	1,766	1,773	1,781
56	1,788	1,796	1,804	1,812	1,820	1,828
57	1,836	1,844	1,853	1,861	1,870	1,878
58	1,887	1,896	1,905	1,914	1,923	1,932
59	1,942	1,951	1,961	1,970	1,980	1,990
60°	2,000	2,010	2,020	2,031	2,041	2,052
61	2,063	2,074	2,085	2,096	2,107	2,118
62	2,130	2,142	2,154	2,166	2,178	2,190
63	2,203	2,215	2,228	2,241	2,254	2,268
64	2,281	2,295	2,309	2,323	2,337	2,352
65°	2,366	2,381	2,396	2,411	2,427	2,443
66	2,459	2,475	2,491	2,508	2,525	2,542
67	2,559	2,577	2,595	2,613	2,632	2,650
68	2,669	2,689	2,709	2,729	2,749	2,769
69	2,790	2,812	2,833	2,855	2,878	2,901
70°	2,924	2,947	2,971	2,996	3,021	3,046
71	3,072	3,098	3,124	3,152	3,179	3,207
72	3,236	3,265	3,295	3,326	3,357	3,388
73	3,420	3,453	3,487	3,521	3,556	3,592
74	3,628	3,665	3.703	3,742	3,782	3,822
75°	3,864	3,906	3,950	3,994	4,039	4,086
76	4,134	4,182	4,232	4,284	4,336	4,390
77	4,445	4,502	4,560	4,620	4,682	4,745
78	4,810	4,876	4,945	5,016	5,089	5,164
79	5,241	5,320	5,403	5,487	5,575	5,665
80°	5,759	5,855	5,955	6,059	6,166	6,277
81	6,392	6,512	6,636	6,765	6,900	7,040
82	7,185	7,337	7,496	7,661	7,834	8,016
83	8,206	8,405	8,614	8,834	9,065	9,309
84	9,567	9,839	10,13	10,43	10.76	11,10
85°	11,47	11,87	12.29	12,75	13,23	13.76
86	14,34	14,96	15.64	16,38	17,20	18,10
87	19,11	20,23	21,49	22,93	24.56	26.45
88	28,65	31,26	34,38	38,20	42,98	49,11
89	57,30	68,76	85.95	114,6	171,9	343,8
90'	∞					

TABLA
8

CSC x (x en grados y minutos)

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	∞	343,8	171,9	114,6	85,95	68,76
1	57,30	49,11	42,98	38,20	34,38	31.26
2	28,65	26,45	24,56	22,93	21.49	20.23
3	19,11	18,10	17,20	16,38	15,64	14,96
4	14,34	13.76	13,23	12.75	12.29	11,87
5°	11,47	11,10	10,76	10.43	10,13	9,839
6	9,567	9,309	9,065	8,834	8,614	8,405
7	8,206	8,016	7,834	7,661	7,496	7,337
3	7,185	7,040	6,900	6,765	6,636	6,512
9	6,392	6,277	6,166	6,059	5,955	5,855
10°	5,759	5,665	5,575	5,487	5,403	5,320
11	5,241	5,164	5,089	5,016	4,945	4,876
12	4,810	4,745	4,682	4,620	4,560	4,502
13	4,445	4,390	4,336	4,284	4,232	4,182
14	4,134	4,086	4,039	3,994	3,950	3,906
15°	3,864	3,822	3,782	3,742	3,703	3,665
16	3,628	3,592	3,556	3,521	3,487	3,453
17	3,420	3,388	3,357	3,326	3,295	3,265
18	3,236	3,207	3,179	3,152	3,124	3,098
19	3,072	3,046	3,021	2,996	2,971	2,947
20°	2,924	2,901	2,878	2,855	2,833	2,812
21	2,790	2,769	2,749	2,729	2,709	2,689
22	2,669	2,650	2,632	2,613	2,595	2,577
23	2,559	2,542	2,525	2,508	2,491	2,475
24	2,459	2,443	2,427	2,411	2,396	2,381
25°	2,366	2,352	2,337	2,323	2,309	2,295
26	2,281	2,268	2,254	2,241	2,228	2,215
27	2,203	2,190	2,178	2,166	2,154	2,142
28	2,130	2,118	2,107	2,096	2,085	2,074
29	2,063	2,052	2,041	2,031	2,020	2,010
30°	2,000	1,990	1,980	1,970	1,961	1,951
Il	1,942	1,932	1,923	1,914	1,905	1,896
12	1,887	1,878	1,870	1,861	1,853	1,844
13	1,836	1,828	1,820	1,812	1,804	1,796
34	1,788	1,781	1,773	1,766	1,758	1,751
35°	1743	1,736	1,729	1,722	1,715	1,708
16	1,701	1,695	1,688	1,681	1,675	1,668
17	1,662	1,655	1,649	1,643	1,636	1,630
38	1,624	1,618	1,612	1,606	1,601	1,595
19	1,589	1,583	1,578	1,572	1,567	1,561
40°	1,556	1,550	1,545	1,540	1,535	1,529
Il	1,524	1,519	1,514	1,509	1,504	1,499
42	1,494	1,490	1,485	1,480	1,476	1,471
43	1,466	1,462	1,457	1,453	1,448	1,444
44	1,440	1,435	1,431	1,427	1,423	1,418
45°	1,414	1,410	1,406	1,402	1,398	1,394

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	1,414	1,410	1,406	1,402	1,398	1,394
46	1,390	1,386	1,382	1,379	1,375	1,371
47	1,367	1,364	1,360	1,356	1,353	1,349
48	1,346	1,342	1,339	1,335	1,332	1,328
49	1,325	1,322	1,318	1,315	1,312	1,309
50°	1,305	1,302	1,299	1,296	1,293	1,290
51	1,287	1,284	1,281	1,278	1,275	1,272
52	1,269	1,266	1,263	1,260	1,258	1,255
53	1,252	1,249	1,247	1,244	1,241	1,239
54	1,236	1,233	1,231	1,228	1,226	1,223
55°	1,221	1,218	1,216	1,213	1,211	1,209
56	1,206	1,204	1,202	1,199	1,197	1,195
57	1,192	1,190	1,188	1,186	1,184	1,181
58	1,179	1,177	1,175	1,173	1,171	1,169
59	1,167	1,165	1,163	1,161	1,159	1,157
60°	1,155	1,153	1,151	1,149	1,147	1,145
61	1,143	1,142	1,140	1,138	1,136	1,134
62	1,133	1,131	1,129	1,127	1,126	1,124
63	1,122	1,121	1,119	1,117	1,116	1,114
64	1,113	1,111	1,109	1,108	1,106	1,105
65°	1,103	1,102	1,100	1,099	1,097	1,096
66	1,095	1,093	1,092	1,690	1,089	1,088
67	1,086	1,085	1,084	1,082	1,081	1,080
63	1,079	1,077	1,076	1,075	1,074	1,072
69	1,071	1,070	1,069	1,068	1,066	1,065
70°	1,064	1,063	1,062	1,061	1,060	1,059
71	1,058	1,057	1,056	1,054	1,053	1,052
72	1,051	1,050	1,049	1,048	1,048	1,047
73	1,046	1,045	1,044	1,043	1,042	1,041
74	1,040	1,039	1,039	1.038	1,037	1,036
75°	1,035	1034	1,034	1,033	1,032	1,031
76	1,031	1,030	1,029	1,028	1,028	1,027
77	1,026	1,026	1,025	1,024	1,024	1,023
78	1,022	1,022	1,021	1,020	1,020	1,019
79	1,019	1,018	1,018	1,017	1,016	1,016
BO"	1,015	1,015	1,014	1,014	1,013	1,013
81	1,012	1,012	1,012	1,011	1,011	1,010
82	1,010	1,009	1,009	1,009	1,008	1,008
83	1,008	1,007	1,007	1,006	1,006	1,006
84	1,006	1,005	1,005	1,005	1,004	1,004
85°	1,004	1,004	1,003	1,003	1,003	1,003
B6	1,002	1,002	1,002	1,002	1,002	1,002
87	1,001	1,001	1,001	1,001	1.001	1,001
88	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000
89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
90°	1,000					

TABLA 9

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES *(en radianes)*

x	Sen x	Cos x	Tan x	Cot x	Sec x	Csc x
0,00	0,00000	1.00000	0,00000	∞	1,00000	∞
0,01	0.01000	0.99995	0,01000	99,9967	1.00005	100,0017
0,02	0.02000	0.99980	0,02000	49.9933	1,00020	50,0033
0,03	0.03000	0.99955	0,03001	333233	1,00045	33,3383
0,04	0.03999	0,99920	0.04002	24,9867	1,00080	25,0067
0,05	0,04998	0,99875	0,05004	19,9833	1.00125	20,0083
0,06	0,05996	0.99820	0.06007	16,6467	1.00180	16,6767
0,07	0.06994	0.99755	0,07011	14.2624	1,00246	14,2974
0,08	0,07991	0,99680	0,08017	12.4733	1.00321	12,5133
0,09	0,08988	0.99595	0,09024	11,0811	1,00406	11,1261
0,10	0.09983	0,99500	0,10033	9,9666	1,00502	10.0167
0,11	0J0978	0,99396	0.11045	9,0542	1.00608	9.1093
0,12	0.11971	0,99281	0.12058	8.2933	1,00724	8,3534
0,13	0.12963	0,99156	0.13074	7,6489	1,00851	7,7140
0,14	0,13954	0,99022	0.14092	7,0961	1,00988	7.1662
0,15	0,14944	0.98877	0,15114	6,6166	1.01136	6.6917
0,16	0,15932	0,98723	0.16138	6,1966	1,01294	6,2767
0,17	0.16918	0,98558	0,17166	5,8256	1.01463	5,9108
0,18	0.17903	0,98384	0,18197	5,4954	1,01642	5,5857
0,19	0,18886	0.98200	0,19232	5,1997	1,01833	5,2950
0,20	0,19867	0.98007	0,20271	4,9332	1,02034	5,0335
0,21	0.20846	0,97803	0,21314	4.6917	1,02246	4,7971
0,22	0.21823	0,97590	0.22362	4,4719	1,02470	4,5823
0,23	0.22798	0,97367	0.23414	4.2709	1.02705	4.3864
424	0,23770	0,97134	0,24472	4.0864	1,02951	4.2069
0.25	0,24740	0.96891	0,25534	3.9163	1,03209	4,0420
0,26	0,25708	0,96639	0,26602	3,7591	1,03478	3,8898
0.21	0,26673	0,96377	0,27676	3.6133	1.03759	3.7491
0,28	0,27636	0,96106	0.28755	3,4776	1.04052	3,6185
0.29	0,28595	0,95824	0,29841	3,3511	1,04358	3,4971
0.30	0,29552	0,95534	0.30934	3,2327	1,04675	3.3839
0.31	0,30506	0,95233	0,32033	3,1218	1,05005	3,2781
0.32	0.31457	0,94924	0,33139	3,0176	1.05348	3,1790
0,33	0,32404	0,94604	0,34252	2,9195	1.05704	3,0860
0,34	0,33349	0,94275	0,35374	2,8270	1,06072	2.9986
0,35	0,34290	0,93937	0,36503	2.7395	1,06454	2,9163
0.36	0,35227	0,93590	0,37640	2,6567	1.06849	2,8387
0.37	0.36162	0,93233	0,38786	2,5782	1,07258	2,7654
0,38	0,37092	0.92866	0.39941	2,5037	1,07682	2.6960
0,39	0.38019	0,92491	0,41105	2,4328	1.08119	2.6303
0,40	0.38942	0,92106	0,42279	2.3652	1,08570	2.5679

Tabla 9
(continuación)

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES (en radianes)

x	Sen *x*	Cos *x*	Tan *x*	Cot *x*	Sec *x*	Csc *x*
0,40	0.38942	0.92106	0,42279	2,3652	1.0857	2,5679
0,41	0,39861	0,91712	0.43463	2,3008	1,0904	2.6087
0.42	0,40776	0,91309	0,44657	2.2393	1.0962	2,4524
0.43	0,41687	0,90897	0,45862	2,1804	1.1002	2,3988
0,44	0,42594	0,90475	0,47078	2.1241	1.1063	2,3478
0,45	0,43497	0.90046	0.48306	2,0702	1,1106	2,2990
0,46	0,44395	0,89605	0,49545	2.0184	1.1160	2.2626
0,47	0,45289	0,89157	0,50797	1.9686	1,1216	2.2081
0.48	0,46178	0.88699	0.62061	1.9208	1,1274	2,1655
0,49	0,47063	0,88233	0,53339	1.8748	1.1334	2,1248
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,8305	1,1395	2,0858
0,51	0,48818	0.87274	0,55936	1.7878	1,1458	2,0484
0.62	0,49688	0,86782	0,57256	1.7466	1,1523	2.0126
0,53	0,50553	0.86281	0,58592	1,7067	1.1690	1,9781
0,54	0.61414	0.86771	0.69943	1,6683	1,1659	1,9450
0,55	0,52269	0.86252	0.61311	1,6310	1,1730	1,9132
0,56	0.63119	0,84726	0,62695	1.6960	1.1803	1.8826
0,57	0,53963	0,84190	0.64097	1.6601	1.1878	1,8531
0,58	0.64892	0.83646	0.66617	1,5263	1,1955	1,8247
0,59	0.66636	0,83094	0,66956	1,4935	1,2035	1,7974
0.60	0,56464	0.82634	0,68414	1.4617	1,2116	1,7710
0,61	0.67287	0,81965	0.69892	1,4308	1,2200	1.7466
0.62	0,58104	0.81388	0.71391	1.4007	1,2287	1,7211
0,63	0.68914	0,80803	0.72911	1,3715	1,2376	1.6974
0,64	0,59720	0.80210	0.74464	1,3431	1,2467	1.6746
0,65	0,60519	0.79608	0.76020	1,3154	1,2561	1,6524
0,66	0,61312	0,78999	0,77610	1,2885	1,2658	1,6310
0,67	0,62099	0.78382	0,79225	1,2622	1,2758	1,6103
0,68	0,62879	0,77757	0.80866	1,2366	1.2861	1.6903
0,69	0,63654	0,77125	0,82534	1,2116	1,2966	1,5710
0.70	0.64422	0,76484	0.84229	1,1872	1,3075	1,5523
0,71	0,65183	0.76836	0,85953	1.1634	1.3186	1.6341
0.72	0,65938	0,75181	0,87707	1,1402	1,3301	1,5166
0,73		0,74517	0.89492	1,1174	1,3420	1,4995
0,74	0,67429	0,73847	0.91309	1,0952	1,3542	1.4830
0,75	0,68164	0,73169	0,93160	1,0734	1,3667	1.4671
0.76	0.68892	0,72484	0,95045	1.0621	1,3796	1,4515
0,77	0,69614	0,71791	0,96967	1.0313	1.3929	1,4365
0,78	0,70328	0.71091	0.98926	1.0109	1.4966	1.4219
0,79	0,71035	0.70386	1.0092	0,99084	1.4208	1,4078
0.80	0,71736	0.69671	1.0296	0,97121	1,4353	1.3940

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES *(en radianes)*

x	Sen x	Cos x	Tan x	Cot x	Sec x	csc 2
0,80	0,71736	0,69671	1,0296	0,97121	1,4353	1,3940
0,81	0,72429	0,68950	1,0505	0,95197	1,4503	1.3807
0,82	0,73115	0,68222	1,0717	0,93309	1,4658	1,3677
0,83	0,73793	0,67488	1,0934	0,91455	1,4818	1,3551
0,84	0,74464	0,66746	1,1156	0,89635	1,4982	1.3429
0,85	0,75128	0,65998	1,1383	0,87848	1,5152	1.3311
0,86	0,75784	0,65244	1,1616	0,86091	1,5327	1,3195
0,87	0,76433	0,64483	1,1853	0,84365	1,5508	1,3083
0,88	0,77074	0,63715	1,2097	0,82668	1.6696	1,2975
0,89	0,77707	0,62941	1,2346	0,80998	1,5888	1.2869
0,90	0,78333	0,62161	1,2602	0,79355	1,6087	1.2766
0,91	0,78950	0,61375	1,2864	0,77738	1.6293	1.2666
0,92	0,79560	0,60582	1,3133	0,76146	1,6507	1,2569
0,93	0,80162	0,59783	1,3409	0,74578	1.6727	1,2475
0,94	0,80756	0,58979	1,3692	0,73034	1,6955	1,2383
0,95	0,81342	0,58168	1,3984	0,71511	1,7191	1,2294
0,96	0,81919	0,57352	1,4284	0,70010	1.7436	1,2207
0,97	0,82489	0,56530	1,4592	0,68531	1.7690	1,2123
0,98	0,83050	0,55702	1,4910	0,67071	1,7953	1,2041
0,99	0,83603	0,54869	1,5237	0,65631	1,8225	1,1961
1,00	0,84147	0,54030	1,5574	0.64209	1,8508	1,1884
1.01	0.84683	0,53186	1,5922	0,62806	1,8802	1,1809
1,02	0.86211	0,52337	1,6281	0,61420	1.9107	1,1736
1,03	0.85730	0.61482	1,6652	0,60051	1,9424	1.1666
1,04	0.86240	0,50622	1,7036	0.68699	1,9754	1,1595
1,05	0,86742	0,49757	1.7433	0,57362	2,0098	1,1528
1,06	0.87236	0,48887	1,7844	0.66040	2,0455	1,1463
1,07	0.87720	0.48012	1,8270	0,54734	2.0828	1,1400
1,08	0,88196	0,47133	1,8712	0,53441	2,1217	1.1338
1,09	0,88663	0,46249	1,9171	0.62162	2.1622	1.1279
1,10	0,89121	0,45360	1,9648	0,50897	2,2046	1,1221
1.11	0,89570	0,44466	2.0143	0.49644	2,2489	1,1164
1.12	0,90010	0,43568	2,0660	0,48404	2,2952	1,1110
1,13	0.90441	0.42666	2.1198	0,47175	2,3438	1,1057
1.14	0,90863	0,41759	2,1759	0,45959	2.3947	1,1006
1,15	0,91276	0,40849	2,2345	0.44753	2,4481	1,0956
1,16	0,91680	0,39934	2,2958	0,43558	2,5041	1,0907
1.17	0,92075	0,39015	2,3600	0,42373	2.6631	1.0861
1,18	0,92461	0,38092	2,4273	0.41199	2,6252	1,0815
1,19	0,92837	0,37166	2,4979	0,40034	2.6906	1,0772
1,20	0.93204	0,36236	2.6722	0.38873	2,7597	1.0729

x	Sen x	Cos x	Tan x	cot x	Sec x	Csc x
1,20	).93204	0,36236	2,5722	0,38878	2.7597	1.07292
1,21	3.93562	0,35302	2,6503	0.37731	2.8327	1.06881
1,22	3.93910	0,34365	2.7328	0,36593	2.9100	1.06485
1,23	),94249	0,33424	2.8198	0,35463	2.9919	1,06102
1.24	D.94578	0.32480	2,9119	0,34341	3.0789	1.05732
1,25	0,94898	0,31532	3,0096	0,33227	3.1714	1,05376
1,26	0,95209	0,30582	3,1133	0,32121	3.2699	1.05032
1,27	0,95510	0,29628	3,2236	(1.31021	3.3752	1.04701
1,28	0,95802	0.28672	3.3414	0.29928	3.4878	1.04382
1,29	0.96084	0,27712	3,4672	0,28842	3.6085	1.04076
1,30	0,96356	0,26750	3.6021	(1.27762	3.7383	1.03782
1,31	0,96618	0.25785	3.7471	(1.26687	3.8782	1.03500
1.32	0,96872	0.24818	3.9033	(1.25619	4.0294	1,03230
1,33	0,97115	0,23848	4.0723	(3.24556	4.1933	1.02971
1,34	0,97348	0,22875	4.2556	(J.23498	4,3715	1.02724
1.35	0,97572	0,21901	4,4552	0,22446	4.5661	1.02488
1,36	0.97786	0.20924	4.6734	0,21398	4.7792	1.02264
1,37	0,97991	0,19945	4.9131	0,20354	5,0138	1.02050
1,38	0,98185	0,18964	5.1774	0,19315	5.2731	1,01848
1,39	0,98370	0.17981	5,4707	0.18279	5.5613	1.01657
1,40	0,98545	0,16997	5.7979	0,17248	5.8835	1,01477
1,41	0,98710	0.16010	6,1654	0.16220	6.2459	1,01307
1,42	0,98865	0,15023	6,5811	0,15195	6,6567	1,01148
1.43	0.99010	0,14033	7.0555	0.14173	7.1260	1.00999
1,44	0.99146	0,13042	7.6018	0.13155	7.6673	1.00862
1,45	0.99271	0.12050	8,2381	0.12139	8.2986	1,00734
1,46	0,99387	0,11057	8,9886	0.11125	9.0141	1.00617
1,47	0.99492	0.10063	9.8874	0.10114	9.9378	1.00510
1.48	0,99588	0,09067	10.9834	0.09105	11.0288	1.00414
1,49	0,99674	0.08071	12,3499	0.08097	12.3903	1.00327
1,50	0.99749	0,07074	14.1014	0.07091	14.1368	1.00251
1,51	0,99815	0.06076	16.4281	0.06087	16.4585	1.00185
1,52	0,99871	0,05077	19,6695	0.05084	19.6949	1.00129
1.53	0.99917	0,04079	24,4984	0.04082	24.5188	1.00083
1,54	0,99953	0,03079	32.4611	0,03081	32.4765	1.00047
1.55	0.99978	0.02079	48.0785	0,02080	48.0889	1.00022
1.56	0.99994	0.01080	92,6205	0.01080	92.6259	1.00006
1,57	1.00000	0,00080	1255.77	0.00080	1255.77	1.00000
1,58	0,99996	-0,00920	--108,649	0.00920	-108.654	1.00004
1.59	0.99982	-0.01920	--52.0670	0.01921	-52.0766	1.00018
1,60	0.99957	-0.02920	--34.2325	0.02921	--34.2471	1.00013

TABLA 10

log sen x (x en grados y minutos)

[réstese 10 en cada caso]

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	–	7,4637	7.7648	7.9408	8,0658	8,1627
1	8,2419	8,3088	8.3668	8,4179	8,4637	8.5050
2	8,5428	8.5776	8.6097	8.6397	8.6677	8,6940
3	8.7188	8.7423	8.7645	8.7857	8,8059	8.8251
4	8,8436	8.8613	8,8783	8.8946	8,9104	8.9256
5°	8,9403	8,9545	8.9682	8.9816	8,9945	9.0070
6	9.0192	9,0311	9,0426	9,0539	9.0648	9.0755
7	9,0859	9,0961	9,1060	9,1157	9.1252	9.1345
8	9.1436	9,1525	9,1612	9,1697	9,1781	9.1863
9	9.1943	9.2022	9.2100	9,2176	9,2251	9.2324
10°	9.2397	9.2468	9,2538	9,2606	9.2674	9,2740
11	9.2806	9.2870	9.2934	9.2997	9,3058	9.3119
12	9.3179	9.3238	9,3296	9,3353	9.3410	9.3466
13	9.3521	9.3575	9.3629	9,3682	9,3734	9.3786
14	9.3837	9,3887	9.3937	9.3986	9.4035	9,4083
15°	9.4130	9.4177	9.4223	9.4269	9.4314	9.4359
16	9.4403	9.4447	9.4491	9,4533	9.4576	9.4618
17	9.4659	9.4700	9,4741	9.4781	9.4821	9.4861
18	9.4900	9.4939	9.4977	9.5015	9,5052	9,5090
19	9.5126	9,5163	9,5199	9,5235	9,5270	9.5306
20°	9.5341	9.5375	9.5409	9.5443	9,5477	9.5510
21	9,5543	9,5576	9.5609	9,5641	9.5673	9.5701
22	9.5736	9.5767	9,5798	9,5828	9,5859	9.5889
23	9.5919	9,5948	9.5978	9,6007	9,6036	9,6065
24	9.6093	9.6121	9.6149	9.6177	9.6205	9,6232
25°	9.6259	9.6286	9.6313	9.6340	9.6366	9.6392
26	9.6418	9.6444	9.6470	9.6495	9.6521	9.6546
27	9.6570	9,6595	9.6620	9.6644	9.6668	9,6692
28	9.6716	9,6740	9.6763	9.6787	9,6810	9.6833
29	9.6856	9.6878	9.6901	9.6923	9,6946	9,6968
30°	9.6990	9.7012	9.7033	9.7055	9.7076	9.7097
31	9.7118	9.7139	9.7160	9.7181	9.7201	9.7222
32	9.7242	9,7262	9.7282	9.7302	9.7322	9.7342
33	9.7361	9,7380	9.7400	9,7419	9.7438	9.7457
34	9.7476	9,7494	9.7513	9.7531	9.7550	9.7568
35°	9,7586	9.7604	9.7622	9.7640	9,7657	Y.7675
36	9,7692	9.7710	9.7727	9.7744	9.7761	9.7778
37	9.7795	9.7811	9.7828	9.7844	9.7861	9.7877
38	9.7893	9,7910	9,7926	9.7911	9,7957	9,7973
39	9.7989	9,8004	9.8020	9.8035	9.8050	9,8066
40	9.8081	9,8096	9.8111	9.8125	9.8110	9,8155
41	9,8169	9.818-l	9,8198	9.8213	9,8227	9.8241
42	9.8255	9.8269	9,8283	9.8297	9.8311	9.8324
	Y,8338	9.8351	9.8365	9,8378	9,8391	9 8405
44	9.X.118	9.8431	9.8144	9,8457	9.8469	9.8482
;5	9 8495	9.8507	9.8520	9.853'2	9.8545	9.8557

I - L -

log sen x (x en grados y minutos)

[réstese 10 en cada caso]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	9,8495	9,8507	9,8520	9,8532	9,8545	9,8557
46	9,8569	9,8582	9,8594	9,8606	9,8618	9,8629
47	9,8641	9.8653	9,8665	9.8676	9.8688	9,8699
48	9,8711	9,8722	9,8733	9.8745	9,8756	9,8767
49	9.8778	9,8789	9.8800	9,8810	9,8821	9.8832
50°	9,8843	9,8853	9,8864	9,8874	9,8884	9.8895
51	9,8905	9,8915	5.8925	9,8935	9.8945	3,8955
52	9,8965	9.8975	9,8985	9,8995	9,9004	9.9014
53	9,9023	9,9033	9,9042	9.9052	9.9061	9.9070
54	9,9080	9,9089	9,9098	9,9107	9.9116	9,9125
55°	9,9134	9,9142	9,9151	9,9160	9.9169	9,9177
56	9,9186	9,9194	9,9203	9,9211	9.9219	9.9228
57	9,9236	9,9244	9.9252	9,9260	9,9268	9.9276
58	9,9284	9.9292	9.9300	9,9308	9,9315	9,9323
59	9,9331	9,9338	9,9346	9,9353	9,9361	9.9368
60°	9,9375	9,9383	9,9390	9,9397	9,9404	9,9411
61	9,9418	9,9425	9.9432	9,9439	9.9446	9,9453
62	9,9459	9,9466	9,9473	9.9479	9,9486	9,9492
63	9,9499	9,9505	9,9512	9,9518	9,9524	9,9530
64	9,9537	9,9543	9,9549	9,9555	9,9561	9,9567
65°	9,9573	9,9579	9,9584	9,9590	9,9596	9,9602
66	9,9607	9,9613	9,9618	9,9624	9,9629	9.9635
67	9,9640	9,9646	9,9651	9,9656	9,9661	9,9667
68	9,9672	9,9677	9,9682	9,9687	9,9692	9,9697
69	9,9702	9.9706	9,9711	9,9716	9,9721	9,9725
70°	9,9730	9,9734	9,9739	9,9743	9,9748	9,9752
71	9,9757	9,9761	9,9765	9,9770	9,9774	9.9778
72	9,9782	9.9786	9,9790	9.9794	9,9798	9,9802
73	9,9806	9,9810	9,9814	9.9817	9,9821	9,9825
74	9,9828	9,9832	9,9836	9.9839	9,9843	9,9846
75°	9,9849	9,9853	9,9856	9,9859	9.9863	9,9866
76	9,9869	9,9872	9,9875	9,9878	9.9881	9,9884
77	9,9887	9,9890	9.9893	9,9896	9,9899	9,9901
78	9,9904	9,9907	9,9909	9,9912	9.9914	9.9917
79	9,9919	9.9922	9,9924	9,9927	9,9929	9,9931
80°	9,9934	9,9936	9,9938	9,9940	9.9942	9,9944
81	9,9946	9,9948	9,9950	9.9952	9,9954	9,9956
82	9,9958	9.9959	9,9961	9,9963	9,9964	9,9966
83	9,9968	9,9969	9,9971	9,9972	9.9973	9,9975
84	9,9976	9,9977	9.9979	9,9980	9,9981	9.9982
85°	9,9983	9.9985	9,9986	9,9987	9,9988	9,9989
86	9.9989	9,9990	9,9991	9.9992	9.9593	9.9993
87	9,9994	9,9995	9.9995	9.9996	9.9996	9,9997
88	9,9997	9,9998	9,9998	9,9999	9.9999	9.9999
89	9,9999	10,0000	10,0000	10.0000	10.0000	10,0000
90°	10.0000					

TABLA 11

log cos *x* (x en grados y minutos)

[réstese 10 en cada caso]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000
1	9,9999	9,9999	9,9999	9,9999	9,9998	9.9998
2	9,9997	9.9997	9.9996	9,9996	9,9995	9,9995
3	9,9994	9,9993	9,9993	9,9992	9,9991	9,9990
4	9.9989	9.9989	9,9988	9,9987	9.9986	9.9985
5°	9,9983	9,9982	9,9981	9,9980	9,9979	9,9977
6	9.9976	9,9975	9,9973	9,9972	9.9971	9,9969
7	9.9968	9,9966	9,9964	9,9963	9.9961	9,9959
8	9,9958	9.9956	9,9954	9.9952	9.9950	9.9948
9	9,9946	9.9944	9,9942	9,9940	9.9938	9,9936
10"	9,9934	9.9931	9,9929	9,9927	9,9924	9,9922
ll	9,9919	9,9917	9.9914	9,9912	9.9909	9.9907
12	9,9904	9,9901	9,9899	9,9896	9,9893	9,9890
13	9.9887	9,9884	9,9881	9,9878	9,9875	9,9872
14	9.9869	9,9866	9,9863	9,9859	9,9856	9,9853
15°	9.9849	9.9846	9,9843	9,9839	9.9836	9,9832
16	9,9828	9.9825	9,9821	9,9817	9,9814	9.9810
17	9.9806	9,9802	9,9798	9.9794	9,9790	9,9786
18	9.9782	9.9778	9.9774	9,9770	9,9765	9.9761
19	9.9757	9,9752	9.9748	9,9743	9.9739	9,9734
20°	9.9730	9,9725	9,9721	9,9716	9,9711	9,9706
21	9.9702	9,9697	9.9692	9,9687	9,9682	9.9677
22	9,9672	9,9667	9.9661	9.9656	9,9651	9.9646
23	9.9640	9.9635	9,9629	9,9624	9,9618	9,9613
24	9.9607	9,9602	9,9596	9,9590	9,9584	9,9579
25°	9,9573	9.9567	9.9561	9,9555	9.9549	9,9543
26	9,9537	9,9530	9,9524	9,9518	9,9512	9,9505
27	9,9499	9,9492	9.9486	9,9479	9,9473	9,9466
28	9.9459	9.9453	9.9446	9,9439	9,9432	9.9425
29	9.9418	9,9411	9,9404	9,9397	9,9390	9,9383
30°	9,9375	9,9368	9,9361	9,9353	9,9346	9,9338
31	9,9331	9.9323	9,9315	9,9308	9,9300	9,9292
32	9,9284	9,9276	9,9268	9.9260	9.9252	9,9244
33	9,9236	9,9228	9,9219	9.9211	9.9203	9,9194
34	9,9186	9.9177	9,9169	9,9160	9,9151	9.9142
35°	9,9134	9,9125	9,9116	9,9107	9,9098	9,9089
36	9,9080	9,9070	9.9061	9,9052	9,9042	9,9033
37	9,9023	9.9014	9,9004	9,8995	9,8985	9,8975
38	9.8965	9.8955	9,8945	9,8935	9,8925	9,8915
39	9,8905	9,8895	9.8884	9,8874	9,8864	9,8853
40°	9,8843	9.8832	9.8821	9.8810	9,8800	9,8789
41	9,8778	9.8767	9.8756	9,8745	9,8733	9,8722
42	9,8711	9.8699	9.8688	9.8676	9,8665	9,8653
43	9.8641	9.8629	9.8618	9.8606	9.8594	9,8582
44	9.8569	9.8557	9.8515	9.8532	9.8520	9,8507
45°	9.8495	9.8183	9.8169	9.8457	9,8444	9.8431

Tabla 11 (continuación) **log cos sen x** (x en grados y minutos)
[restar 10 en cada caso]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	9,8495	9,8482	9,8469	9.8457	9,8444	9.8431
46	9,8418	9.8405	9,8391	9.8378	9,8365	9,8351
47	9,8338	9,8324	9.8311	9,8297	9.8283	9,8269
48	9,8255	9,8241	9,8227	9,8213	9,8198	9,8184
49	9,8169	9,8155	9.8140	9,8125	9,8111	9,8096
50°	9,8081	9,8066	9,8050	9,8035	9.8020	9.8004
51	9,7989	9,7973	9,7957	9.7941	9.7926	9,7910
52	9,7893	9,7877	9,7861	9,7844	9,7828	9,7811
53	9,7795	9,7778	9.7761	9.7744	9,7727	9.7710
54	9.7692	9,7675	9,7657	9.7640	9,7622	9,7604
55°	9,7586	9,7568	9,7550	9,7531	9,7513	9,7494
56	9,7476	9.7457	9,7438	9,7419	9,7400	9,7380
57	9,7361	9,7342	9,7322	9,7302	9.7282	9.7262
58	9,7242	9,7222	9.7201	9,7181	9,7160	9.7139
59	9,7118	9.7097	9,7076	9,7055	9,7033	9.7012
60°	9.6990	9.6968	9,6946	9.6923	9,6901	9.6878
61	9,6856	9,6833	9,6810	9,6787	9,6763	9.6740
62	9,6716	9,6692	9,6668	9.6644	9,6620	9.6595
63	9,6570	9,6546	9,6521	9,6495	9.6470	9.6444
64	9.6418	9,6392	9,6366	9,6340	9,6313	9.6286
65°	9,6259	9,6232	9.6205	9,6177	9,6149	9,6121
66	9.6093	9,6065	9,6036	9,6007	9.5978	9,5948
67	9,5919	9,5889	9,5859	9,5828	9,5798	9,5767
68	9,5736	9,5704	9,5673	9,5641	9,5609	9.5576
69	9,5543	9,5510	9,5477	9,5443	9,5409	9,5375
70°	9,5341	9,5306	9.5270	9.5235	9,5199	9.5163
71	9,5126	9,5090	9.5052	9,5015	9,4977	9,4939
72	9.4900	9,4861	9,4821	9.4781	9,4741	9,4700
73	9,4659	9,4618	9,4576	9,4533	9,4491	9.4447
74	9,4403	9,4359	9,4314	9.4269	9,4223	9.4177
75°	9,4130	9,4083	9,4035	9,3986	9,3937	9.3887
76	9,3837	9,3786	9.3734	9,3682	9,3629	9,3575
77	9,3521	9,3466	9,3410	9,3353	9,3296	9,3238
78	9,3179	9,3119	9.3058	9,2997	9,2934	9.2870
79	9.2806	9,2740	9,2674	9.2606	9,2538	9,2468
80°	9,2397	9,2324	9.2251	9,2176	9.2100	9,2022
81	9,1943	9,1863	9.1781	9.1697	9,1612	9,1525
82	9,1436	9,1345	9,1252	9.1157	9.1060	9.0961
83	9,0859	9,0755	9.0648	9,0539	9,0426	9,0311
84	9,0192	9,0070	8,9945	8,9816	8.9682	8.9545
85°	8.9403	8,9256	8,9104	8,8946	8.8783	8.8613
86	8.8436	8,8251	8,8059	8,7857	8,7645	8,7423
87	8,7188	8.6940	8,6677	8.6397	8,6097	8,5776
88	8,5428	8,5050	8.4637	8.4179	8.3668	8,3088
89	8.2419	8,1627	8,0658	7,9408	7,7648	7,4637
90°						

TABLA 12

log cos x (x en grados y minutos)

[réstese 10 en cada caso]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	–	7.4637	7.7648	7,9409	8.0658	8,1627
1	8.2419	8,3089	8,3669	8,4181	8,4638	8,5053
2	8.5431	8.5779	8,6101	8,6401	8,6682	8.6945
3	8,7194	8,7429	8,7652	8,7865	8.8067	8,8261
4	8,8446	8,8624	8,8795	8,8960	8,9118	8,9272
5°	8,9420	8,9563	8,9701	8.9836	8,9966	9,0093
6	9.0216	9,0336	9,0453	9,0567	9,0678	9,0786
7	9,0891	9,0995	9,1096	9,1194	9.1291	9,1385
8	9,1478	9.1569	9,1658	9.1745	9.1831	9,1915
9	9.1997	9,2078	9,2158	9,2236	9,2313	9,2389
10°	9,2463	9.2536	9,2609	9,2680	9,2750	9.2819
11	9.2887	9,2953	9,3020	9,3085	9,3149	9,3212
12	9.3275	9,3336	9,3397	9,3458	9,3517	9,3576
13	9,3634	9,3691	9.3748	9,3804	9,3859	9,3914
14	9.3968	9,4021	9,4074	9.4127	9,4178	9,4230
15°	9.4281	9,4331	9,4381	9.4430	9,4479	9,4527
16	9.4575	9,4622	9,4669	9.4716	9,4762	9,4808
17	9,4853	9,4898	9.4943	9,4987	9,5031	9,5075
18	9,5118	9,5161	9,5203	9,5245	9,5287	9,5329
19	9,5370	9,5411	9,5451	9,5491	9,5531	9,5571
20°	9,5611	9,5650	9,5689	9,5727	9,5766	9.5804
21	9,5842	9.5879	9,5917	9,5954	9,5991	9.6028
22	9,6064	9,6100	9.6136	9,6172	9.6208	9,6243
23	9,6279	9,6314	9,6348	9,6383	9.6417	9,6452
24	9,6486	9.6520	9.6553	9,6587	9,6620	9,6654
25°	9,6687	9,6720	9,6752	9,6785	9,6817	9,6850
26	9,6882	9.6914	9.6946	9.6977	9,7009	9.7040
27	9.7072	9.7103	9.7134	9,7165	9,7196	9,7226
28	9,7257	9,7287	9.7317	9.7348	9.7378	9,7408
29	9,7438	9.7467	9,7497	9,7526	9,7556	9,7585
30°	9,7614	9.7644	9.7673	9,7701	9.7730	9,7759
31	9.7788	9.7816	9.7845	9,7873	9,7902	9,7930
32	9.7958	9,7986	9,8014	9,8042	9.8070	9.8097
33	9,8125	9.8153	9.8180	9,8208	9.8235	9,8263
34	9.8290	9,8317	9.8344	9,8371	9,8398	9.8425
35"	9.8452	9.8479	9,8506	9,8533	9,8559	9,8586
36	9.8613	9,8639	9.8666	9,8692	9,8718	9,8745
37	9.8771	9.8797	9,8824	9,8850	9,8876	9,8902
38	9.8928	9.8954	9,8980	9,9006	9,9032	9,9058
39	9,9084	9.9110	9.9135	9,9161	9,9187	9,9212
40°	9.9238	9.9264	9,9289	9,9315	9.9341	9.9366
41	9.9392	9.9417	9.9443	9,9468	9,9494	9.9519
42	9.9544	9.9570	9,9595	9.9621	9,9646	9,9671
43	9.9697	9.9722	9.9747	9.9772	9.9798	9.9823
44	9.9848	9.9874	9.9899	9,9924	9.9949	9,9975
45°	10.0000	10.0025	10.0051	10.0076	10.0101	10.0126

log tan x (x en grados y minutos)

[réstese 10 en cada caso]

x	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45°	10.0000	10,0025	10,0051	10,0076	10,0101	10.0126
46	10,0152	10,0177	10,0202	10,0228	10,0253	10.0278
47	10,0303	10.0329	10,0354	10,0379	10,0405	10,0430
48	10.0456	10,0481	10,0506	10.0532	10,0557	10,0583
49	10,0608	10,0634	10,0659	10,0685	10,0711	10,0736
50°	10,0762	10,0788	10,0813	10,0839	10,0865	10,0890
51	10,0916	10,0942	10.0968	10,0994	10,1020	10,1046
52	10,1072	10,1098	10,1124	10,1150	10,1176	10,1203
53	10,1229	10.1255	10,1282	10,1308	10,1334	10,1361
54	10,1387	10.1414	10,1441	10,1467	10,1494	10,1521
55'	10,1548	10,1575	10,1602	10.1629	10,1656	10,1683
56	10,1710	10,1737	10.1765	10,1792	10,1820	10,1847
57	10,1875	10,1903	10,1930	10,1958	10,1986	10,2014
58	10,2042	10,2070	10.2098	10.2127	10,2155	10,2184
59	10,2212	10,2241	10,2270	10.2299	10,2327	10,2356
60°	10.2386	10,2415	10,2444	10,2474	10,2503	10.2533
61	10,2562	10.2592	10,2622	10,2652	10,2683	10,2713
62	10,2743	10,2774	10.2804	10.2835	10,2866	10,2897
63	10.2928	10,2960	10,2991	10,3023	10,3054	10,3086
64	10,3118	10,3150	10,3183	10.3215	10,3248	10,3280
65°	10,3313	10,3346	10,3380	10,3413	10,3447	10,3480
66	10.3514	10,3548	10,3583	10,3617	10,3652	10,3686
67	10,3721	10,3757	10.3792	10,3828	10,3864	10,3900
68	10.3936	10,3972	10,4009	10,4046	10,4083	10,4121
69	10.4158	10.4196	10,4234	10,4273	10,4311	10,4350
70°	10,4389	10,4429	10,4469	10,4509	10,4549	10,4589
71	10,4630	10,4671	10,4713	10,4755	10,4797	10.4839
72	10.4882	10,4925	10,4969	10,5013	10,5057	10,5102
73	10.5147	10,5192	10,5238	10,5284	10.5331	10,5378
74	10,5425	10.5473	10,5521	10,5570	10,5619	10,5669
75°	10,5719	10,5770	10,5822	10,5873	10,5926	10.5979
76	10.6032	10,6086	10,6141	10,6196	10,6252	10,6309
77	10.6366	10,6424	10,6483	10,6542	10,6603	10,6664
78	10,6725	10,6788	10,6851	10.6915	10,6980	10,7047
79	10,7113	10,7181	10,7250	10.7320	10,7391	10,7464
80°	10.7537	10,7611	10,7687	10,7764	10,7842	10,7922
81	10,8003	10,8085	10.8169	10,8255	10,8342	10,8431
82	10,8522	10,8615	10,8709	10,8806	10.8904	10,9005
83	10,9109	10,9214	10,9322	10,9433	10.9547	10,9664
84	10,9784	10,9907	11,0034	11,0164	11.0299	11,0437
85°	11.0580	11,0728	11,0882	11,1040	11,1205	11.1376
86	11,1554	11,1739	11.1933	11,2135	11,2348	11,2571
87	11,2806	11,3055	11,3318	11,3599	11,3899	11,4221
88	11.4569	11,4947	11,5362	11.5819	11,6331	11,6911
89	11,7581	11.8373	11.9342	12,0591	12,2352	12,5363
90°						

TABLA 13

CONVERSION DE RADIANES EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDO O EN FRACCIONES DE GRADO

Radianes	Grad.	Min.	Seg.	Fracciones de grado
1	57”	17’	44,8″	57,2958°
2	114”	35’	29.6“	114,5916°
3	171”	53’	14.4”	171,8873°
4	229”	10’	59.2”	229,1831°
5	286”	28’	44.0″	286,4789°
6	343”	46’	28,8″	343,7747°
7	401”	4’	13.6”	401,0705°
8	458°	21’	58,4″	458,3662°
9	515”	39’	43.3”	515,6620°
10	572°	57’	28,1″	572,9578°
0,1	5”	43’	46,5″	
0,2	ll”	27’	33,0″	
0.3	17”	ll’	19,4″	
0,4	22”	55’	5,9″	
0,5	28”	38’	52,4″	
0.6	34”	22’	38.9”	
0,7	40°	6’	25.4”	
0,8	45”	50’	11,8″	
0,9	51”	33’	58,3″	
0.01	0”	34’	22,6″	
0,02	1°	8’	45,3″	
0.03	1”	43’	7,9″	
0.04	2”	17’	30,6″	
0.05	2”	51’	53,2″	
0,06	3”	26’	15,9″	
0,07	4”	0’	38,5″	
0.08	4”	35’	1,2″	
0.09	5”	9’	23,8″	
0,001	0°	3’	26,3″	
0,002	0°	6’	52,5″	
0,003	0”	10’	18,8″	
0,004	0°	13’	45,1″	
0,005	0”	17’	11,3″	
0,006	0”	20’	37,6″	
0,007	0°	24’	3,9″	
0,008	0°	27’	30.1”	
0,009	0°	30’	56,4″	
0,0001	0”	0’	20,6″	
0,0002	0°	0’	41,3″	
0,0003	0°	1’	1,9″	
0,0004	0°	1’	22.5”	
0,0005	0°	1’	43,1″	
0,0006	0°	2’	3,8″	
0,0007	0°	2’	24.4“	
0.0008	0°	2’	45.0”	
0,0009	0”	3’	5.6”	

TABLA
14

CONVERSION DE RADIANES EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS O EN FRACCIONES DE GRADO

Grados	Radianes
1°	0,0174533
2°	0,0349066
3°	0,0523599
4°	0.0698132
5°	0,0872665
6°	0J047198
7°	0,1221730
8°	0,1396263
9°	0.1570796
10°	0,1745329

Minutos	Radianes
1'	0,00029089
2'	0,00058178
3'	0,00087266
4'	0,00116355
5'	0,00145444
6'	0.00174533
7'	0,00203622
8'	0,00232711
9'	0,00261800
10'	0,00290888

Segundos	Radianes
1"	0,0000048481
2"	0,0000096963
3"	0.0000145444
4"	0,0000193925
5"	0,0000242407
6"	0,0000290888
7"	0,0000339370
8"	0,0000387851
9"	0,0000436332
10"	0,0000484814

TABLA 15

LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS

$\log_e x$ o $\ln x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,00000	0,00995	0,01980	0.02956	0,03922	0,04879	0,05827	0.06766	0,07696	0.08618
1,1	0.09531	0,10436	0,11333	0,12222	0,13103	0,13976	0.14842	0,15700	0,16551	0,17395
1,2	0.18232	0.19062	0,1 9885	0,20701	0,21511	0,22314	0,23111	0.23902	0,24686	0,25464
1,3	0.26236	0,27003	0,27763	0,28518	0.29267	0.30010	0,30748	0.31481	0,32208	0,32930
1.4	0.33647	0.34359	0.35066	0.35767	0,36464	0,37156	0,37844	0,38526	0,39204	0,39878
1,5	0,40547	0,41211	0,41871	0.42527	0,43178	0,43825	0,44469	0,45108	0,45742	0.46373
1.6	0,47000	0.47623	0.48243	0,48858	0,49470	0,50078	0,50682	0,51282	0,51879	0,52473
1,7	0.53063	0.53649	0,54232	0,54812	0.55389	0,55962	0,56531	0,57098	0,57661	0,58222
1,8	0,58779	0,59333	0,59884	0.60432	0,60977	0.61519	0,62058	0,62594	0,63127	0.63658
1.9	0.64185	0.64710	0,65233	0,65752	0,66269	0.66783	0,67294	0,67803	0,68310	0,68813
2,0	0.69315	0,69813	0,70310	0,70804	0,71295	0,71784	0,72271	0,72755	0,73237	0,73716
2,1	0,74194	0,74669	0.75142	0.75612	0,76081	0,76547	0,77011	0,77473	0,77932	0,78390
2.2	0.78846	0.79239	0,79751	0,80200	0,80648	0,81093	0,81536	0,81978	0,82418	0,82855
2.3	0.83291	0,83725	0.84157	0.84587	0,85015	0,85442	0,85866	0,86289	0,86710	0,87129
2,4	0.87547	0,87963	0.88377	0,88789	0,89200	0,89609	0.90016	0,90422	0,90826	0,91228
2.6	0.91629	0,92028	0.92426	0,92822	0,93216	0,93609	0,94001	0,94391	0,94779	0.95166
2,6	0.95551	0,95935	0,96317	0,96698	0,97078	0.97456	0.97833	0,98208	0,98582	0,98954
2,7	0.99325	0.99695	1.00063	1,00430	1.00796	1,01160	1,01523	1,01885	1,02245	1,02604
2.8	1,02962	1.03318	1,03674	1,04028	1,04380	1,04732	1,05082	1,05431	L05779	1,06126
2.9	1.06471	1,06815	1.07158	1.07500	1,07841	1.08181	L08519	138856	1.09192	1,09527
3.0	1.09861	1.10194	1.10526	1.10856	1,11186	1,11514	1,11841	1,12168	1,12493	1,12817
3.1	1,13140	1.13462	1,13783	1,14103	1,14422	1,14740	1,15057	1,15373	1.15688	1,16002
3,2	1,16315	1.16627	1,16938	1,17248	1,17557	1.17865	1,18173	1,18479	1,18784	1,19089
3.3	1,19392	1.19695	1,19996	1,20297	1,20597	1.20896	1.21194	1,21491	1.21788	1,22083
3,4	1,22378	1,22671	1.22964	1,23256	1,23547	1,23837	1,24127	1,24415	1,24703	1,24990
3,5	1.25276	1.25562	1,25846	1,26130	1,26413	1,26695	1,26976	1,27257	1,27536	1,27815
3,6	1,28093	1.28371	1.28647	1,28923	1,29198	1.29473	1,29746	1,30019	1.30291	1,30563
3.7	1.30833	131103	1.31372	1,31641	1,31909	1,32176	1,32442	1,32708	1,32972	1,33237
3.8	1.33500	1.33763	1.34025	1,34286	1,34547	1,34807	1,35067	1,35325	1,35584	1,35841
3,9	1,36098	1,36354	1,36609	1.36864	1,37118	1,37372	1,37624	1,37877	1,38128	1,38379
4.0	1,38629	1,38879	1,39128	1,39377	1,39624	1,39872	1,40118	1,40364	1.40610	1,40854
4.1	1.41099	1.41342	1,41585	1,41828	1.42070	1,42311	1,42552	1,42792	1,43031	1,43270
4.2	1.43508	1,43746	1,43984	1,44220	1,44456	1,44692	1,44927	1,45161	1,45395	1,45629
4.3	1.45862	1,46094	1.46326	1,46557	1,46787	1,47018	1,47247	1,47476	1,47705	1.47933
4.4	1.48160	1,48387	1.48614	1,48840	1,49065	1,49290	1,49515	1,49739	1,49962	1,50185
4.5	1.50408	1.50630	1.50851	1,51072	1,51293	1,51513	1,51732	1,51951	1,52170	1,52388
4.6	1.52606	1.52823	1.53039	1,53256	1,53471	1.53687	1.53902	1.54116	154330	1,54543
4.7	1.54756	154969	1,55181	1.55393	1.55604	1,55814	1,56025	1,56235	1.56444	1.66653
4,8	1.56862	1.57070	1,57277	1.57485	1,57691	1,57898	1,58104	1.58309	1,58515	1,58719
4.9	1,58924	1.59127	1.59331	1.59534	1.59737	1,59939	1.60141	1,60342	1,60543	1,60744

ln 10 = 2.30259	4 ln 10 = 9.21034	7 In 10 = 16,11810
2 In 10 = 4.60517	5 ln 10 = 11.61293	8 ln 10 = 18,42068
3 ln 10 = 6.90776	6 ln 10 = 13,81551	9 In10 = 20.72327

LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS

$\log_e x$ o $\ln x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,60944	1.61144	1,61343	1,61542	1.61741	1.61939	1.6213'7	1,62334	1.62531	1.62728
5,1	1,62924	1,63120	1,63315	1.63511	1.63705	1.63900	1,64094	1.64287	1,64481	1.64673
5,2	1,64866	1.65058	1,65250	1,65441	1,65632	1.65823	1,66013	1.66203	1.66393	1.66582
5,3	1,66771	1,66959	1,67147	1.67335	1,67523	1.67710	1.67896	1.68083	1.68269	1.68455
5.4	1,68640	1,68825	1,69010	1,69194	1.69378	1.69562	1,69745	1,69928	1.70111	1.70293
5,5	1,70475	1,70656	1,70838	1,71019	1,71199	1.71380	1,71560	1.71740	1,71919	1.72098
5.6	1.72277	1,72455	1,72633	1,72811	1.72988	1.73166	1.73342	1.73519	1,73695	1,73871
5,7	1,74047	1,74222	1,74397	1,74572	1.74746	1.74920	1.75094	1.75267	1.75440	1.75613
5,8	1,75786	1,75958	1,76130	1,76302	1,76473	1,76644	1.76815	1.76985	1.77156	1.77326
5,9	1,77495	1,77665	1,77834	1,78002	1,78171	1,78339	1.78507	1,78675	1.78842	1,79009
6,0	1,79176	1,79342	1,79509	1,79675	1,79840	1,80006	1.80171	1,80336	180500	1,80665
6,1	1,80829	1.80993	1,81156	1,81319	1,81482	1,81645	1,81808	1.81970	1,82132	1.82294
6,2	1,82455	1,82616	1,82777	1,82938	1,83098	1.83258	1.83418	1,83578	1,83737	1,83896
6,3	1,84055	1,84214	1,84372	1,84530	1,84688	1.84845	1,85003	1,85160	1.85317	1,85473
6,4	1.85630	1,85786	1.85942	1,86097	1,86253	1.86408	1,86563	1,86718	1,86872	1.87026
6,5	1.87180	1,87334	1.87487	1,87641	1.87794	1.87947	1.88099	1.88251	1,88403	1,88555
6,6	1,88707	1.88858	1,89010	1.89160	1,89311	1,89462	1.89612	1.89762	1,89912	1,90061
6,7	1,90211	1,90360	1,90509	1.90658	1,90806	1.90954	1,91102	1,91250	1.91398	1,91545
6.8	1,91692	1,91839	1,91986	1,92132	1,92279	1.92425	1.92571	1,92716	1,92862	1,93007
6,9	1.93152	1,93297	1.93442	1,93586	1,93730	1,93874	1.94018	1,94162	1,94305	1.94448
7,0	1,94591	1,94734	1,94876	1.95019	1.95161	1.95303	1,95445	1.95586	1.95727	1.95869
7,1	1,96009	1,96150	1,96291	1,96431	1.96571	1,96711	1,96851	1,96991	1,97130	1,97269
7,2	1,97408	1,97547	1,97685	1,97824	1.97962	1.98100	1,98238	1,98376	1,98513	1,98650
7,3	1,98787	1,98924	1,99061	1,99198	1.99334	1,99470	1,99606	1,99742	la99877	2,00013
7,4	2,00148	2,00283	2,00418	2,00553	2,00687	2,00821	2,00956	2,01089	2.01223	2,01357
7,5	2,01490	2,01624	2,01757	2.01890	2,02022	2,02155	2,02287	202419	2.02551	2,02683
7,6	2.02815	2,02946	2,03078	2.03209	2,03340	2,03471	2.08601	2,03732	2,03862	2.03992
7,7	2,04122	2,04252	2,04381	2,04511	2.04640	2,04769	2.04898	2,05027	2,05156	2,05284
7.8	2,05412	2,05540	2.05668	2.05796	2.05924	2,06051	2,06179	2,06306	2.06433	2,06560
7,9	2,06686	2,06813	2,06939	2,07065	2.07191	2.07317	2,07443	2,07568	2.07694	2,07819
8,0	2.07944	2,08069	2,08194	2.08318	2.08443	2,08567	2,08691	2,08815	2,08939	2,09063
8,1	2,09186	2,09310	2.09433	2,09556	2.09679	2,09802	2,09924	2,10047	2,10169	2,10291
8,2	2,10413	2,10535	2,10657	2.10779	2,10900	2,11021	2,11142	2,11263	2,11384	2.11505
8,3	2,11626	2,11746	2,11866	2,11986	2.12106	2,12226	2,12346	2,12465	2,12585	2,12704
8.4	2,12823	2,12942	2.13061	2.13180	2,13298	2,13417	2.13535	2,13653	2,13771	2,13889
8.5	2.14007	2.14124	2,14242	2,14359	2,14476	2,14593	2,14710	2.14827	2,14943	2,15060
8,6	2,15176	2,15292	2,15409	2,15524	2,15640	2,15756	2,15871	2,15987	2,16102	2.16217
8,7	2,16332	2,16447	2,16562	2,16677	2.16791	2,16905	2,17020	2,17134	2.17248	2,17361
8,8	2,17475	2,17589	2,17702	2,17816	2,17929	2,18042	2.18155	2,18267	2.18380	2,18493
8,9	2,18605	2,18717	2,18830	2,18942	2,19054	2,19165	2.19277	2,19389	2.19500	2,19611
9,0	2,19722	2,19834	2,19944	2,20055	2,20166	2.20276	2.20387	2,20497	2,20607	2.20717
9,1	2,20827	220937	2,21047	2,21157	2,21266	2,21375	2,21485	2.21594	2,21703	2,21812
9,2	2,21920	2,22029	2.22138	2,22246	2,22354	2.22462	2.22570	2,22678	2.22786	2.22894
9,3	2,23001	223109	2,23216	223324	2,23431	2.23538	2,23645	2,23751	2,23858	2,23965
9,4	2,24071	2.24177	2,24284	2,24390	2,24496	2,24601	2,24707	2.24813	2.24918	2.25024
9,5	2,25129	215234	2,25339	2,25444	2,25549	2,25654	2.25759	2.25863	2,25968	2.26072
9.6	2,26176	2,26280	2,26384	2,26488	2,26592	2.26696	2,26799	2.26903	2.27006	2.27109
9.7	2.27213	2,27316	2.27419	2.27521	2,27624	2,27727	2.27829	2.27932	228034	2.28136
9.8	2,28238	2.28340	2,28442	2,28544	2.28646	2,28747	2,28849	2,28950	229051	2,29152
9.9	2.29253	2.29354	2,29455	2,29556	2,29657	2.29757	2.29858	2.29958	2.30058	2,30158

TABLA

16

FUNCIONES EXPONENCIALES

e^x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	10101	1,0202	1.0305	1.0408	1,0513	1.0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1.1388	1.1503	1,1618	1,1735	1.1853	1.1972	1,2092
0,2	1,2214	1.2337	1,2461	1,2586	1.2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,349s	1.3634	1.3771	1,3910	1,404s	1,4191	1,4333	1,4477	1.4623	1,4770
0.4	1,4918	1,5068	1.5220	1,5373	1.5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	l,ö653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1.8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1.9542	1,9739	1,9937
0,7	2.0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,095s	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,247s	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,410s	2,4351
0,9	2.4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2.6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3.0042	3,0344	3.0649	3.0957	3,1268	3,1582	3.1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3.4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3.7062	3.7434	3,7810	3,8190	3.8574	3,8962	3,9354	3,974s	4,014s
1.4	4,0552	4.0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4.3929	4,4371
1,5	4,4817	4.5267	4.5722	4,6182	4,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5.0028	5,0531	5,103s	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5.3656	5,4195
1,7	5,473s	5.5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,929s	5,9895
1,8	6.0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6.4237	6,4883	6,5535	6,6194
1.9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6.9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7.6906	7,7679	78460	7,9248	8,0045	8.0849
2,1	8.1662	8,2482	8.3311	8,4149	8,4994	8.5849	8,6711	8,7583	8,8463	8.9352
2,2	9,0250	91157	9,2073	9.2999	9.3933	9,4877	95831	9,6794	9,7767	9.8749
2.3	9 9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15.029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16.777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17,814	17,993
2.9	18,174	18,357	18.541	18,728	18,916	19.106	19,298	19,492	19.688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21.328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22.421	22.646	22.874	23,104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25.028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26.576	26,843
3.3	27,113	27.385	27.660	27,938	28,219	28.503	28,789	29,079	29,371	29,666
3.4	29,964	30,265	30.569	30,871	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33.784	34.124	34.467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3.6	36.598	36.966	37.338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3.7	40,447	40.854	41.264	41,679	42,098	42,521	42.948	43,380	43,816	44,256
3.8	44,701	45.150	45,604	46.063	46.525	46,993	47,465	47,942	48.424	48,911
39	49,402	49.899	50.400	50.907	51,419	51,935	52,457	52,985	53,517	54,055
4.	54,598	FO.340	66,686	73.700	81.451	90,017	99,484	109,95	121,51	134,29
5.	148,41	164.02	181.27	200.34	221.41	244.69	270.43	298.87	330,30	365,04
6.	403.43	445.86	492.75	544.57	601.85	665,14	735,10	812,41	897,85	992,27
7.	1096.6	1212.0	1339.4	1480.3	1636.0	1808.0	1998,2	2208,3	2440,6	2697,3
8,	2981.0	3294,5	3641.0	4023.9	4447.1	4914.8	5431.7	6002 ,9	6634,2	7332,0
9,	8103.1	8955.3	9897.1	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930
10,	22026									

TABLA 17

FUNCIONES EXPONENCIALES

e^{x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00000	0,99005	0,98020	0,97045	0.96079	0,95123	0,94176	0.93239	0,92312	0,91393
0,1	0,90484	0,89583	0,88692	0,87810	0,86936	0,86071	0,85214	0,84366	0.83527	0,82696
0,2	0,81873	0,81058	0,80252	0,79453	0,78663	0.77880	0,77105	0,76338	0,75578	0.74826
0,3	0,74082	0,73345	0,72615	0,71892	0.71177	0.70469	0,69768	0,69073	0,68386	0,67706
0,4	0,67032	0,66365	0.65705	0,65051	0,64404	0,63763	0,63128	0,62500	0,61878	0,61263
0,5	0.60653	0,60050	0.59452	0,58860	0,58275	0.57695	0,57121	0,56553	0,55990	0.55433
0,6	0,54881	0,54335	0.53794	0.53259	0,52729	0,52205	0,51685	0,51171	0,50662	0.50158
0,7	0,49659	0,49164	0,48675	0,48191	0,47711	0,47237	0,46767	0.46301	0,45841	0,45384
0,8	0,44933	0,44486	0,44043	0,43605	0,43171	0,42741	0.42316	0,41895	0.41478	0,41066
0.9	0,40657	040252	0,39852	0,39455	0.39063	0.38674	0,38289	0.37908	0,37531	0.37158
1,0	0.36788	0.36422	0,36060	0,35701	0,35345	0.34994	0,34646	0,34301	0,33960	0,33622
1,1	0.33287	0,32956	0.32628	0,32303	0,31982	0,31664	0,31349	0.31037	0.30728	0,30422
1,2	0,30119	0.29820	0.29523	0,29229	0.28938	0.28650	0,28365	0.28083	0.27804	0.27527
1,3	0,27253	0,26982	0.26714	0,26448	0,26185	0,25924	0,25666	0.25411	0,25158	0,24908
1,4	0.24660	0,24414	0.24171	0.23931	0.23693	0,23457	0.23224	0.22993	0,22764	0,22537
1,5	0.22313	0,22091	0,21871	0,21654	0,21438	0,21225	0,21014	0,20805	0,20598	0,20393
1,6	0,20190	0,19989	0.19790	0,19593	0,19398	0,19205	0.19014	0,18825	0,18637	0,18452
1,7	0.18268	0,18087	0.17907	0,17728	0,17552	0,17377	0.17204	0,17033	0,16864	0.16696
1,8	0,16530	0,16365	0.16203	0,16041	0,15882	0,15724	0,15567	0,15412	0,15259	0.15107
1,9	0,14957	0,14808	0.14661	0,14515	0,14370	0,14227	0,14086	0,13946	0.13807	0,13670
2,0	0,13534	0,13399	0.13266	0,13134	0,13003	0.12873	0,12745	0,12619	0,12493	0,12369
2,1	0,12246	0,12124	0,12003	0,11884	0,11765	0.11648	0.11533	0,11418	0,11304	0,11192
2,2	0,11080	0J0970	0,10861	0.10753	0.10646	0J0540	0,10435	0,10331	0,10228	0J0127
2,3	0.10026	0,09926	0,09827	0,09730	0.09633	0,09537	0,09442	0,09348	0,09255	0.09163
2,4	0.09072	0,08982	0,08892	0,08804	0,08716	0,08629	0.08543	0,08458	0,08374	0,08291
2,5	0,08208	0.08127	0.08046	0.07966	0,07887	0,07808	0.07730	0,07654	0,07577	0,07502
2,6	0.07427	0,07353	0,07280	0,07208	0,07136	0,07065	0,06995	0.06925	0,06856	0,06788
2,7	0,06721	0,06654	0,06587	0,06522	0,06457	0.06393	0.06329	0.06266	0,06204	0,06142
2,8	0,06081	0,06020	0,05961	0.05901	0,05843	0,05784	0.05727	0,05670	0,05613	0,05558
2,9	0,05502	0,05448	0,05393	0.05340	0,05287	0.05234	0,05182	0,05130	0,05079	0.05029
3,0	0,04979	0.04929	0.04880	0,04832	0.04783	0,04736	0.04689	0.04642	0,04596	0,04550
3,1	0,04505	0,04460	0,04416	0.04372	0,04328	0,04285	0,04243	0,04200	0.04159	0,04117
3,2	0,04076	0,04036	0,03996	0,03956	0,03916	0.03877	0,03839	0.03801	0,03763	0,03725
3,3	0.03688	0,03652	0,03615	0,03579	0,03544	0.03508	0,03474	0,03439	0,03405	0.03371
3,4	0.03337	0,03304	0,03271	0,03239	0.03206	0,03175	0.03143	0.03112	0.03081	0,03050
3,5	0,03020	0,02990	0.02960	0,02930	0.02901	0,02872	0.02844	0,02816	0,02788	0.02760
3,6	0.02732	0,02705	0,02678	0,02652	0,02625	0,02599	0.02573	0,02548	0,02522	0.02497
3,7	0,02472	0,02448	0,02423	0,02399	0.02375	0,02352	0,02328	0.02305	0,02282	0.02260
3,8	0,02237	0,02215	0,02193	0,02171	0,02149	0,02128	0.02107	0,02086	0.02065	0,02045
3,9	0,02024	0.02004	0,01984	0.01964	0,01945	0,01925	0,01906	0,01887	0,01869	0,01850
4.	0,018316	0.016573	0,014996	0.013569	0,012277	0,011109	0,010052	$0,0^{2}90953$	$0,0^{2}82297$	$0,0^{2}74466$
5,	$0,0^{2}67379$	0.0'60967	$0,0^{2}55166$	$0,0^{2}49916$	$0,0^{2}45166$	$0,0^{2}40868$	$0,0^{2}36979$	$0,0^{2}33460$	$0,0^{2}30276$	$0,0^{2}27394$
6,	$0,0^{2}24788$	$0,0^{2}22429$	$0,0^{2}20294$	$0,0^{2}18363$	$0,0^{2}16616$	$0,0^{2}15034$	$0,0^{2}13604$	$0,0^{2}12309$	$0,0^{2}11138$	$0,0^{2}10078$
7.	$0,0^{3}91188$	$0,0^{3}82510$	$0,0^{3}74659$	$0,0^{3}67554$	$0,0^{3}61125$	$0,0^{3}55308$	0.0350045	$0,0^{3}45283$	$0,0^{3}40973$	$0,0^{3}37074$
8,	$0,0^{3}33546$	$0,0^{3}30354$	$0,0^{3}27465$	$0,0^{3}24852$	$0,0^{3}22487$	$0,0^{3}20347$	$0,0^{3}18411$	$0,0^{3}16659$	$0,0^{3}15073$	$0,0^{3}13639$
9,	$0,0^{3}12341$	0.0311167	$0,0^{3}10104$	$0,0^{4}91424$	$0,0^{4}82724$	$0,0^{4}74852$	$0,0^{4}67729$	$0,0^{4}61283$	$0,0^{4}55452$	$0,0^{4}50175$
10,	$0,0^{4}45400$									

TABLA

18a

FUNCIONES HIPERBOLICAS

senh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0600	0,0701	0,0801	0,0901
0,1	0,1002	0,1102	0,1203	0,1304	0,1405	0,1506	0,1607	0,1708	0,1810	0.1911
0,2	0,2013	0,2115	0,2218	0,2320	0,2423	0.2526	0,2629	0,2733	0,2837	0,2941
0,3	0,3045	0,3150	0.3255	0,3360	0,3466	0,3572	0,3678	0,3785	0.3892	0,4000
0,4	0.4108	0.4216	0.4325	0.4434	0.4543	0,4653	0,4764	0,4875	0.4986	0,5098
0.5	0.5211	0,5324	0,5438	0,5552	0,5666	0,5782	0.5897	0,6014	0,6131	0.6248
0,6	0.6367	0,6485	0,6605	0.6725	0,6846	0,6967	0,7090	0,7213	0.7336	0,7461
0.7	0,7586	0,7712	0,7838	0,7966	0,8094	0,8223	0,8353	0,8484	0,8615	0,8748
0,8	0,8881	0,9015	0,9150	0,9286	0,9423	0.9561	0.9700	0,9840	0,9981	1,0122
0.9	1,0265	1,0409	1,0554	1.0700	1,0847	1,0995	1.1144	1.1294	1.1446	1.1598
1.0	1,1752	1,1907	1,2063	1.2220	1,2379	1,2539	1,2700	1,2862	1,3025	1,3190
1,1	1,3356	1.3524	1,3693	1,3863	1,4035	1,4208	1,4382	1,4558	1,4735	1,4914
1,2	1.5095	1,5276	1,5460	1,5645	1,5831	1,6019	1,6209	1,6400	1,6593	1,6788
1,3	1.6984	1,7182	1,7381	1,7583	1,7786	1,7991	1,8198	1,8406	1,8617	1,8829
1,4	1,9043	1,9259	1,9477	1,9697	1,9919	2,0143	2,0369	2.0597	2,0827	2,1059
1,5	2.1293	2,1529	2.1768	2,2008	2,2251	2.2496	2,2743	2,2993	2,3245	2,3499
1,6	2.3756	2,4015	2,4276	2,4540	2,4806	2,5075	2.5346	2,5620	2,5896	2,6175
1.7	2,6456	2,6740	2,7027	2.7317	2,7609	2,7904	2,8202	2,8503	2,8806	2,9112
1,8	2,9422	2.9734	3,0049	3,0367	3,0689	3.1013	3,1340	3,1671	3,2005	3,2341
1,9	3,2682	3.3025	3.3372	3,3722	3,4075	3,4432	3.4792	3,5156	3,5523	3,5894
2,0	3,6269	3.6647	3,7028	3.7414	3,7803	3,8196	3,8593	3,8993	3,9398	3,9806
2,1	4.0219	4.0635	4,1056	4,1480	4,1909	4.2342	4,2779	4,3221	4,3666	4,4116
2.2	4,4571	4.5030	4.5494	4,5962	4,6434	4.6912	4,7394	4,7880	4,8372	4.8868
2.3	4.9310	4.9876	5.0387	5.0903	5.1425	5,1951	5,2483	5,3020	5,3562	5,4109
2.4	5.4662	5.5221	5.5785	5,6354	5,6929	5.7510	5.8097	5,8689	5.9288	5.9892
2,5	6.0502	6.1113	6.1741	6.2369	6.3004	6.3645	6,4293	6.4946	6,5607	6.6274
2.6	G.6947	6.7628	6.8315	6.9008	6,9709	7.0417	7,1132	7,1854	7,2583	7,3319
2.7	7,4063	7.4814	7.5572	7.6338	7.7112	7,7894	7.8683	7,9480	8,0285	8,1098
2.8	8.1919	3.2749	8.3586	8.4432	8.5287	8.6150	8,7021	8.7902	8,8791	8,9689
2.9	9.0596	9,1512	9.2437	3.3371	9.4315	9.5268	9.6231	9.7203	9,8185	9,9177

Tabla 18 c
(continuación)

FUNCIONES HIPERBOLICAS

senh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	10,018	10,119	10.221	10,324	10,429	10,534	10,640	10,748	10,856	10,966
3,1	11,076	11,188	11,301	11,415	11,530	11,647	11,764	11,883	12,003	12,124
3,2	12,246	12,369	12,494	12,620	12,747	12,876	13,006	13,137	13,269	13,403
3,3	13,538	13,674	12,812	13,951	14,092	14,234	14,377	14,522	14,668	14,816
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16.053	16,215	16,378
3,5	16,513	16,709	16,877	17,047	17,213	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22117
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445
89	21.691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476
4,3	36,843	37,214	37,688	37,965	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40.314
4.4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	48673	44,112	44,555
4.5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48.752	49,242
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,995	59,548	60,147
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66.47
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192
5.1	82,008	82,832	83,665	84,506	85,355	86,213	87,079	87,955	88,839	89.73
5,2	90,633	91.544	92,464	93,394	94,332	95,281	96,238	97,205	98,182	99,16
5,3	100,17	101,17	102,19	103,22	104,25	105,30	106,36	107,43	108,51	109,6
5,4	110,70	111.81	112,94	114,07	115.22	116.38	117,55	118.73	119,92	121.1
5,5	122,34	123,57	124,82	126,07	127,34	128.62	129.91	131,22	132,53	133,8
5,6	135,21	136,57	137,94	139,33	140,73	142,14	143.57	145,02	146,47	147,9
5.7	149,43	150,93	152,45	153,98	155,53	157,09	158,67	160.27	161,88	163.5
5,8	165,15	166,81	168,48	170,18	171,89	173.62	175.36	177,12	178,90	180,7
5,9	182,52	184,35	186,20	188,08	189,97	191,88	193,80	195.75	197,72	199.7

TABLA

18b

FUNCIONES HIPERBOLICAS

cosh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1.0000	1.0001	1,0002	1.0005	1,0008	1.0013	1,0018	1,0025	1,0032	1.0041
0,1	LOO50	1,0061	1.0072	1,0085	1.0098	1.0113	1,0128	1.0145	1,0162	1,0181
0,2	1,0201	1,0221	1.0243	1,0266	1,0289	1.0314	1,0340	1,0367	1.0395	1,0423
0,3	1,0453	1.0484	1,0516	1,0549	1,0584	1,0619	1,0655	1,0692	1,0731	1,0770
0.4	1,0811	1,0852	1,0895	LO939	1,0984	1.1030	1,1077	1,1125	1,1174	1.1225
0.5	1.1276	1.1329	1,1383	1,1438	1,1494	1,1551	1,1609	1,1669	1,1730	1,1792
0,6	1,1855	1.1919	1,1984	1.2051	1,2119	1,2188	1,2258	1,2330	1,2402	1,2476
0,7	1,2552	1,2628	1,2706	1,2785	1,2865	1,2947	1,3030	1,3114	1,3199	1,3286
0,8	1,3374	1.3464	1.3555	1,3647	1,3740	1,3835	1,3932	1,4029	1,4128	1,4229
0,9	1.4331	1,4434	1.4539	1.4645	1,4753	1.4862	1,4973	1.5085	1.5199	1.5314
1,0	1,5431	1,5549	1,5669	1,5790	1,5913	1.6038	1.6164	1,6292	1,6421	1.6552
1,1	1,6685	1,6820	1,6956	1,7093	1,7233	1.7374	1,7517	1,7662	1.7808	1,7957
1,2	1,8107	1,8258	1,8412	1,8568	1,8725	1,8884	1,9045	1,9208	1.9373	1,9540
1,3	1.9709	1,9880	2,0053	2,0228	2.0404	20583	2.0764	2,0947	2,1132	2.1320
1,4	2,1509	2.1700	2,1894	2,2090	2,2288	2.2488	2.2691	2,2896	2,3103	2.3312
1,5	2,3524	2.3738	2,3955	2,4174	2,4395	2,4619	2,4845	2,5073	2,5305	2,5538
1,6	2,5775	2,6013	2,6255	2,6499	2,6746	2.6995	2,7247	2,7502	2,7760	2.8020
1,7	2,8283	2.8549	2,8818	2,9090	2,9364	2,9642	2.9922	3,0206	3.0492	3,0782
1,8	3,1075	3.1371	3,1669	3,1972	3,2277	3,2585	3.2897	3,3212	3,3530	3,3852
1,9	3.4177	3,4506	3.4838	3,5173	3,5512	3,5855	3,6201	3,6551	3.6904	3,7261
2,0	3,7622	3,7987	3,8355	3,8727	3,9103	3,9483	3.9867	4,0255	4.0647	4,1043
21	4,1443	4,1847	4.2256	4.2669	4.3085	4,3507	4,3932	4,4362	4,4797	4,5236
2,2	4,5679	4,6127	4.6580	4,7037	4.7499	4,7966	4,8437	4,8914	4,9395	4,9881
2,3	5,0372	5,0868	5.1370	5,1876	5,2388	52905	5,3427	5,3954	5.4487	5,5026
2,4	5.5669	5,6119	5.6674	5,7235	5.7801	5.83'73	5.8951	5.9535	6,0125	6,0721
2,5	6,1323	6,1931	6.2545	6.3166	6.3793	6,4426	6,5066	6,5712	6,6365	6,7024
2,6	6,7690	6.8363	6.9043	6.9729	7.0423	7.1123	7,1831	7,2546	7.3268	7,3998
2,7	7.4735	7.5479	7.6231	7.6991	7.7758	7.8533	7,9316	8,0106	8,0905	8.1712
2,8	8,2527	8,3351	8.4182	6.5022	8,5871	8.6728	8.7594	8,8469	8,9352	9,0244
2,9	9,1146	9,2056	9,2976	9,3905	9.4844	9.5791	9.6749	9,7716	9.8693	9.9680

cosh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.0	10,068	10,168	10,270	10,373	10,476	10,581	10,687	10.794	10,902	11,011
3s	11,121	11,233	11,345	11,459	11,574	11,689	11,806	11.925	12.044	12.165
3,2	12,287	12,410	12,534	12,660	12,786	12,915	13,044	13.175	13,307	13.440
3,3	13,575	13,711	13,848	13,987	14,127	14,269	14.412	14,556	14.702	14,850
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,081	16.245	16,408
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19.444	19,639	19,836	20,035
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139
3.8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466
3,9	24,711	24,959	25.210	25,463	25,719	25,977	26.238	26,502	26,768	27.037
4,0	27,308	27,583	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32.365	32,691	33,019
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35.060	35,412	35,768	36,127	36.490
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326
4.4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42.819	43,250	43.684	44,123	44,566
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252
4.6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431
4.7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59.556	60,155
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65.819	66,481
4.9	67,149	67,823	68,505	69.193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198
5,1	82,014	82,838	83,671	84.512	85.361	86,219	87,085	87,960	88,844	89,737
5,2	90,639	91,550	92,470	93,399	94,338	95,286	96,243	97.211	98,188	99,174
5,3	100.17	101,18	102.19	103,22	104,26	105,31	106,67	107,43	108,51	109.60
5,4	110,71	111,82	112,94	114,08	115,22	116,38	117,55	118,73	119.93	121.13
5,5	122.35	123,58	124.82	126,07	127,34	128,62	129,91	131.22	132,54	133.87
5,6	135.22	136,57	137,95	139,33	140,73	142,15	143.58	145,02	146,48	147,95
5.7	149,44	150,94	152,45	153,99	155,53	157,10	158,68	160.27	161,88	163,51
5,8	165,15	166,81	168,49	170,18	171,89	173,62	175.36	177.13	178,91	180,70
5,9	18252	184,35	186,21	188,08	189,97	191,88	193,81	195.75	197,72	199,71

TABLA 18c	FUNCIONES HIPERBOLICAS tanh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0,01000	0,02000	0,02999	0,03998	0,04996	0.05993	0,06989	0,07983	0,08976
0,1	0,09967	0.10956	0,11943	0,12927	0.13909	0,14889	0,15865	0,16838	0.17808	0.18775
0,2	0,19738	0,20697	0.21652	0.22603	023550	0,24492	0,25430	0,26362	0,27291	0,28213
0,3	0,29131	0,30044	0.30951	0,31852	0.32748	0,33638	0,34521	0,35399	0,36271	0,37136
0,4	0.37995	0,38847	0,39693	0,40532	0.41364	0,42190	0,43008	0,43820	0,44624	0,45422
0.5	0.46212	0,46995	0,47770	0,48538	0,49299	0,50052	0,50798	0.51536	0.52267	0,52990
0,6	0,53705	0,54413	0,55113	0.55805	0.56490	0.57167	0,57836	0,58498	0,59152	0,59798
0,7	0,60437	0,61068	0,61691	0.62307	0.62915	0,63515	0,64108	0.64693	0,65271	0,65841
0,8	0,66404	0,66959	0.67507	0,68048	0,68581	0,69107	0.69626	0,70137	R-70642	0,71139
0,9	0,71630	0,72113	0.72590	0,73059	0.73522	0,73978	0,74428	0,74870	0,75307	0,75736
1,0	0.76159	0,76576	0.76987	0.77391	0,77789	0.78181	0,78566	0,78946	0.79320	0,79688
1,1	0,80050	0,80406	0.80757	0.81102	0,81441	0.81775	0.8210-i	0,82427	0.82745	0,83058
1,2	0,83365	0,83668	0,83965	0.84258	0.84546	0,84828	0.85106	0,85380	0.85648	0,85913
1,3	0.86172	0,86428	0.86678	0.86925	0.87167	0.87405	0,87639	0,87869	0.88095	0,88317
1.4	0,88535	0.88749	0,88960	0.89167	0,89370	0,89569	0.89765	0,89958	0,90147	0,90332
1,5	0.90515	0,90694	0,90870	0.91042	0,91212	0,91379	0,91542	0,91703	0,91860	0,92015
1.6	0.92167	0.92316	0,92462	0.92606	0.92747	0.92886	0.93022	0.93155	0,93286	0,93415
1.7	0.93541	0.93665	0,93786	0.93906	0,94023	0,94138	0.91250	0,94361	0,94470	0,94576
1,8	0.94681	0.94783	0,94884	0.94983	0,95080	0,95175	0,95268	0,95359	0.95449	0,95537
1,9	0.95624	0,95709	0,95792	0.95873	0,95953	0,96032	0.96109	0,96185	0 96259	0,96331
2,0	0,96403	0,96473	0,96541	0,96609	0.96675	0.96740	0,96803	0,96865	0.96926	0,96986
2,1	0,97045	0.97103	0.97159	0,97215	0.97269	0.97323	0,97375	0.97426	0,97477	0.97526
2.2	0,97574	0,97622	0.97668	0.97714	0.97759	0.97803	0.97846	0,97888	0,97929	0,97970
2.3	0,98010	0.98049	0.98087	0.98124	0.98161	0.98137	0,98233	0,98267	0,98301	0,98335
2,4	0,98367	0,98400	0,98431	0.98462	0,98492	0.98522	0,98551	0,98579	0,98607	0,98635
2.5	0.98661	0.98688	0.98714	0,98739	0,98764	0,98788	0,98812	0,98835	0,98858	0,98881
2.6	0,98903	0,98924	0.98946	0.98966	0,98987	0.99007	0,99026	0.99045	0,99064	0.99083
2,7	0.99101	0.99118	0,99136	0.99153	0,99170	0,99186	0.99202	0.99218	0,99233	0,99248
2.8	0.99263	0.99278	0.99292	0.99306	0,99320	0,99333	0.99346	0.99359	0.99372	0.99384
2.Y	0.99396	0.99408	0.99420	0.99431	0,99443	0,99454	0,99464	0,99475	0,99485	0,99496

Tabla 18 c
(continuación)

FUNCIONES HIPERBOLICAS

tanh x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,99505	0,99515	0,99525	0.99534	0,99543	0,99552	0,99561	0,99570	0,99578	0,99587
3,1	0,99595	0,99603	0,99611	0.99618	0,99626	0,99633	0,99641	0,99648	0,99655	0,99662
3,2	0.99668	0,99675	0.99681	0,99688	0.99694	0,99700	0,99706	0,99712	0,99717	0.99723
3,3	0,99728	0,99734	0,99739	0,99744	0,99749	0,99754	0,99759	0.99764	0,99768	0,99773
3,4	0,99777	0,99782	0,99786	0,99790	0,99795	0,99799	0,99803	0,99807	0,99810	0,99814
3,5	0.99818	0,99821	0,99825	0,99828	0,99832	0,99835	0,99838	0,99842	0,99845	0.99848
3,6	0,99851	0,99853	0,99857	0.99859	0,99862	0,99865	0,99868	0,99870	0,99873	0,99875
3,7	0,99878	0,99880	0,99883	0,99885	0,99887	0,99889	0,99892	0,99894	0,99896	0,99898
3,8	0,99900	0,99902	0,99904	0,99906	0,99908	0,99909	0.99911	0,99913	0,99915	0.99916
3,9	0,99918	0,99920	0,99921	0,99923	0,99924	0,99926	0,99927	0,99929	0,99930	0,99932
4,0	0.99933	0,99934	0,99936	0,99937	0,99938	0,99939	0,99941	0,99942	0,99943	0,99944
4,1	0,99945	0,99946	0,99947	0.99948	0,99949	0.99950	0,99951	0,99952	0,99953	0.99954
4,2	0.99955	0,99956	0,99957	0,99958	0,99958	0,99959	0,99960	0.99961	0,99962	0,99962
4,3	0,99963	0,99964	0.99965	0,99966	0,99966	0.99967	0,99967	0,99968	0,99969	0,99969
4,4	0,99970	0,99970	0,99971	0,99972	0.99972	0.99973	0,99973	0,99974	0,99974	0,99975
4,5	0,99975	0,99976	0,99976	0,99977	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99979	0,99979
4,6	0,99980	0,99980	0,99981	0.99981	0,99981	0,99982	0,99982	0.99982	0,99983	0,99983
4,7	0.99983	0.99984	0,99984	0,99984	0,99985	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99986
4.8	0.99986	0.99987	0,99987	0,99987	0.99987	0,99988	0,99988	0.99988	0,99988	0,99989
4,9	0.99989	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0.99991
5,0	0,99991	0,99991	0,99991	0,99991	0 99992	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
5,1	0,99993	0,99993	0,99993	0,99993	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994
5,2	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995
5,3	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0.99996	0,99996
5,4	0,99996	0.99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0.99996	0,99996	0,99997	0,99997
5,5	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997
5,6	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0.99998	0,99998
5,7	0.99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998
5,8	0.99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0.99998	0,99998	0,99998	0,99998
5,9	0,99998	0,99999	0,99999	0,99999	0.99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999

TABLA

19

FACTORIAL DE n

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

n	$n!$
0	1 (por definición)
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	'720
7	5040
8	40.320
9	362.880
LO	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
1 4	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.428.096.000
18	6.402.373.705.728.000
19	121.645.100.408.832.000
20	2.432.902.008.176.640.000
21	51.090.942.171.709.440.000
22	1.124.000.727.777.937.680.000
23	25.852.016.738.892.566.840.000
24	620.448.401.733.421.599.360.000
2 5	15.511.210.043.335.539.984.000.000
26	403.291.461.126.724.039.584.000.000
27	10.888.869.450.421.549.068.768.000.000
28	304.888.344.611.803.373.925.504.000.000
29	8.841.761.993.742.297.843.839.616.000.000
30	265.252.859.812.268.935.315.188.480.000.000
31	8.22284 × 10^{33}
32	2.63131 X 1035
3 3	8,68332 × 10^{36}
34	2,95233x 10^{38}
35	1.03331 x 10^{40}
36	3,71993x 10^{41}
37	1.3'7638 X 1043
38	5.23023~ 1044
39	2,03979 × 10^{46}

n	$n!$
40	$15915 X 1047
41	3,34525x 10^{49}
42	1,40501 x 105'
43	6,04153 x 10^{52}
44	265827 X1054
45	1,19622 X 10^{56}
46	5,50262 x 1057
47	2,58623 x 10^{59}
48	1,24139 x 10^{61}
49	6,08282 x 10^{62}
50	3,04141x 10^{64}
51	1.55112 x 10^{66}
52	8,06582 x 105'
53	4,27488 x 10^{69}
54	2.30844 X 10"
55	1,26964 x 10^{73}
56	7,10999 x 10^{74}
57	4,05269 x 10"
58	2,35056x 10^{78}
59	1,38683x 10^{80}
60	8,32099 x 10^{81}
61	5,07580 x 10^{83}
62	3,14700 x 10^{85}
63	1,98261 x 10^{87}
64	1.26887 × 10^{89}
65	8,24765x 10^{90}
66	5,44345 x 10^{92}
67	3,64711 × 10^{94}
68	2,48004 x 10^{96}
69	1,71122 x 10^{98}
70	1,19786 x 10^{100}
71	8,50479 x 10^{101}
72	6.12345 x 10^{103}
73	4,47012 x 10^{105}
74	3,30789 × 10^{107}
75	2.48091 x 10^{109}
76	1.88549 x 10^{111}
77	1.45183 x 10^{113}
78	1.13243 x 10^{115}
79	8.94618 x 10^{116}

n	$n!$
80	7.15695 X 10^{118}
81	5,79713 x 10^{120}
82	4,75364 X 10^{122}
83	3,94552 × 10^{124}
84	3,31424X 10^{126}
85	2,81710 × 10^{128}
86	242271X 10^{130}
87	2,10776 X 10^{132}
38	1,85483 × 10^{134}
89	1,65080 X 10^{136}
90	1,48572X 10^{138}
91	1,35200 × 10^{140}
92	1.24384 X 10^{142}
93	1,15677 × 10^{144}
94	1,08737 X 10^{146}
95	1.03300 x 10^{148}
96	9,91678 X 10^{149}
97	9,61928X 10^{151}
98	9,42689 X 10'53
99	9,33262X 10'55
100	9,33262 X 10'57

TABLA 20

$\Gamma(x) = \int_0$ ... para 1 ...

Para poder obtener valores adicionales ...

$(x + 1) = x\Gamma(x)$]

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,50	0,88623
1,01	0,99433	1,51	0,88659
1,02	0,98884	1,52	0,88704
1.03	0.98355	1,53	0,88757
1.04	0,97844	1,54	0,88818
1,05	0,97350	1,55	0,88887
1.06	0,96874	1,56	0.88964
1.07	0,96415	1.57	0,89049
1,08	0.95973	1,58	0,89142
1,09	0,95546	1.59	0,89243
1,10	0,95135	1,60	0,89352
1,11	0,94740	1.61	0,89468
1,12	0,94359	1,62	0.89592
1,13	0,93993	1.63	0.89724
1,14	0,93642	1,64	0.89864
1,15	0.93304	1,65	0.90012
1,16	0,92980	1,66	0,90167
1,17	0,92670	1,67	0,90330
1,18	0,92373	1,68	0,90500
1,19	0,92089	1.69	0,90678
1.20	0.91817	1,70	0.90864
1.21	0.91558	1,71	0,91057
1,22	0,91311	1,72	0.91258
1.23	0,91075	1,73	0,91467
1,24	0,90852	1.74	0.91683
1,25	0,90640	1,75	0,91906
1,26	0,90440	1.76	0,92137
1,27	0.90250	1,77	0,92376
1,28	0,90072	1,78	0,92623
1.29	0,89904	1,79	0,92877
1,30	0,89747	1,80	0,93138
1,31	0,89600	1,81	0.93408
1,32	0,89464	1.82	0,93685
1,33	0.89338	1,83	0,93969
1,34	0,89222	1,84	0,94261
1,35	0,89115	1,85	0,94561
1,36	0,89018	1,86	0,94869
1,37	0.88931	1,87	0,95184
1,38	0,88854	1,88	0,95507
1,39	0,88785	1,89	0,95838
1.40	0,88726	1,90	0.96177
1,41	0.88676	1,91	0,96523
1.42	0,88636	1,92	0,96877
1,43	0,88604	1,93	0,97240
1,44	0,88581	1,94	0,97610
1,45	088566	1,95	0,97988
1,46	0,88560	1,96	0,98374
1,47	0,88563	1,97	0,98768
1.48	0,88575	1,98	0,99171
1,49	0.88595	1,99	0,99581
1,50	0,88623	2,00	1,00000

TABLA
21

COEFICIENTES BINOMINALES

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k},\ 0!=1$$

Obsérvese que cada número es la suma de dos números en la fila anterior; uno de estos números está en la misma columna y el otro en la columna anterior [por ejemplo, 56 = 35 + 21}. Esta clase de ordenamiento se conoce con el nombre de triángulo *de Pascal [véase 3.6,* página 4].

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	36	36	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10	1	10	45	120	210	262	210	120	45	10
ll	1	11	55	165	330	462	462	330	165	65
12	1	12	66	220	495	792	924	792	496	220
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6436	6436	5005
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310
18	1	18	163	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	76582	92878
20	1	20	190	1140	4845	16504	38760	77620	125970	167960
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975
26	1	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562276	3124550
27	1	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075	4686825
28	1	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108106	6906900
29	1	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145	10015005
30	1	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925	14307160

Tabla 21
(continuación)

COEFICIENTES BINOMINALES

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k},\ 0\,!=1$$

$n \backslash k$	10	11	12	13	14	15
10	1					
11	11	1				
12	66	12	1			
13	286	78	13	1		
14	1001	364	91	14	1	
15	3003	1365	455	105	15	1
16	8008	4368	1820	560	120	16
17	19448	12376	6188	2380	680	136
18	43758	31824	18564	8568	3060	816
19	92378	75582	50388	27132	11628	3876
20	184756	167960	125970	77520	38760	15504
21	352716	352716	293930	203490	116280	54264
22	646646	705432	646646	497420	319770	170544
23	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314
24	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504
25	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760
26	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160
27	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860
28	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160
29	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760
30	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520

Para $k >$ **15** hágase uso de $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

TABLA

22

CUADRADOS, CUBOS, RAICES Y RECIPROCOS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
1	1	1	1,000 000	3,162 278	1,000 000	2,154 435	4,641 589	1,000 000
2	4	8	1,414 214	4,472 136	1,259 921	2,714 418	5,848 035	0,500 000
3	9	27	1,732 051	5,477 226	1,442 250	3,107 233	6,694 330	0,333 333
4	16	64	2,000 000	6,324 555	1,587 401	3,419 952	7,368 063	0,250 000
5	25	125	2,236 068	7,071 068	1,709 976	3,684 031	7,937 005	0,200 000
6	36	216	2,449 490	7,745 967	1,817 121	3,914 868	8,434 327	0,166 667
7	49	343	2,645 751	8,366 600	1,912 931	4,121 285	8,879 040	0,142 857
8	64	612	2,828 427	8,944 272	2,000 000	4,308 869	9,283 178	0,125 000
9	81	729	3,000 000	9,486 833	2,080 084	4,481 405	9,654 894	0,111 111
10	100	1000	3,162 278	10,000 00	2,154 435	4,641 589	10,000 00	0,100 000
ll	121	1331	3,316 625	10,488 09	2,223 980	4,791 420	10,322 80	0,090 909
12	144	1728	3,464 102	10,954 45	2,289 428	4,932 424	10,626 59	0,083 333
13	169	2197	3,605 551	11,401 75	2,351 335	5,065 797	10,913 93	0,076 923
14	196	2 744	3,741 657	11,832 16	2,410 142	5,192 494	11,186 89	0,071 429
15	225	3 375	3,872 983	12247 45	2,466 212	5,313 293	11,447 14	0,066 667
16	256	4 096	4,000 000	12,649 ll	2,519 842	5,428 835	11,696 07	0,062 500
17	289	4 913	4,123 106	13,038 40	2,571 282	5,539 658	11,934 83	0,058 824
18	324	5 832	4,242 641	13,416 41	2,620 741	5,646 216	12,164 40	0,055 556
19	361	6859	4,358 899	13,784 05	2,668 402	5,748 897	12,385 62	0,052 632
20	400	8 000	4,472 136	14,142 14	2,714 418	5,848 035	12,599 21	0,050 000
21	441	9 261	4,582 576	14,491 38	2,758 924	5,943 922	12,805 79	0,047 619
22	484	10 648	4,690 416	14,832 40	2,802 039	6,036 811	13,005 91	0,045 455
23	529	12 167	4,795 832	15,165 75	2,843 867	6,126 926	13,200 06	0,043 478
24	576	13 824	4,898 979	15,491 93	2,884 499	6,214 465	13,388 66	0,041 667
26	625	15 625	5,000 000	15,811 39	2,924 018	6,299 605	13,572 09	0,040 000
26	676	17 576	6,099 020	16,124 52	2,962 496	6,382 504	13,750 69	0,038 462
27	729	19 683	5,196 152	16,431 68	3,000 000	6,463 304	13,924 77	0,037 037
28	784	21952	6,291 503	16,733 20	3,036 589	6,542 133	14,094 60	0,035 714
29	841	24 389	5,385 165	17,029 39	3,072 317	6,619 106	14,260 43	0,034 483
30	900	27 000	5,477 226	17,320 51	3,107 233	6,694 330	14,422 50	0,033 333
31	961	29 791	5,567 764	17,606 82	3,141 381	6,767 899	14,581 00	0,032 258
32	1024	32 768	5,656 854	17,888 54	3,174 802	6,839 904	14,736 13	0,031 250
33	1089	35 937	6,744 663	18,165 90	3,207 534	6,910 423	14,888 06	0,030 303
34	1 156	39 304	5630952	18.439 OS	3,239 612	6,979 532	15,036 95	0,029 412
35	1225	42876	5,916 080	18,708 29	3,271 066	7,047 299	15,182 94	0,028 671
36	1296	46 656	6,000 000	18,973 67	3,301 927	7,113 787	15,326 19	0,027 778
37	1369	50 653	6,082 763	19.235 38	3,332 222	7,179 054	15,466 80	0,027 027
38	1444	54 872	6,164 414	19,493 59	3,361 975	7,243 156	15,604 91	0,026 316
39	1621	59 319	6,244 998	19,748 42	3,391 211	7,306 144	15.740 61	0,025 641
40	1600	64 000	6,324 555	20,000 00	3,419 952	7,368 063	15,874 01	0,025 000
41	1681	68 921	6,403 124	20,248 46	3,448 217	7,428 959	16,005 21	0.024 390
42	1764	74 088	6,480 741	20,493 90	3,476 027	7,488 872	16,134 29	0,023 810
43	1849	79 507	6,557 439	20,736 44	3,503 398	7.547 842	16,261 33	0,023 256
44	1936	85184	6.633250	20,976 18	3,530 348	7,605 905	16,386 43	0,022 727
45	2 025	91125	6,108 204	21,213 20	3,556 893	7,663 094	16,509 64	0,022 222
46	2 116	97336	6,782 330	21,447 61	3,583 048	7,719 443	16,631 03	0,021 739
47	2 209	103 823	6,855 655	21,679 48	3,608 826	7,774 980	16,750 69	0,021 277
48	2 304	110 592	6,928 203	21.908 90	3,634 241	7,829 735	16,868 65	0,020 833
49	2 401	117 649	7,000 000	22,135 94	3,659 306	7,883 735	16,984 99	0,020 408
50	2 500	125 000	7,071 068	22,360 68	3.684 031	7,937 005	17,099 76	0,020 000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
50	2 500	125 000	7,071 068	22,360 68	3,684 031	7,937 005	17,099 76	0,020 000
51	2 601	132 651	7,141 428	22,583 18	3.708 430	7,989 570	17,213 01	0,019 608
62	2 704	140 608	7,211 103	22,803 51	3,732 511	8,041 452	17,324 78	0,019 231
53	2 809	148 877	7,280 110	23,021 73	3,756 286	8,092 672	17,435 13	0,018 868
54	2 916	157 464	7,348 469	23,237 90	3.779 763	8,143 253	17,544 ll	0,018 519
55	3 025	166 375	7,416 198	23,452 08	3,802 952	8,193 213	17,651 74	0,018 182
56	3 136	175 616	7,483 315	23,664 32	3,825 862	8,242 571	17,758 08	0,017 857
57	3 249	185193	7,549 834	23.874 67	3,848 501	8,291 344	17,863 16	0,017 544
58	3 364	195112	7,615 773	24,083 19	3,870 877	8,339 551	17,967 02	0,017 241
59	3 481	205 379	7,681 146	24,289 92	3,892 996	8,387 207	18,069 69	0,016 949
60	3 600	216 000	7,745 967	24,494 90	3,914 868	8,434 327	18,171 21	0,016 667
61	3 721	226 981	7,810 250	24,698 18	3,936 497	8,480 926	18,271 60	0,016 393
62	3 844	238 328	7,874 008	24,899 80	3,957 892	8,527 019	18,370 91	0,016 129
63	3 969	250 047	7,937 254	25,099 80	3,979 057	8,572 619	18,469 15	0,015 873
64	4 096	262144	8,000 000	25,298 22	4,000 000	8,617 739	18,566 36	0,015 625
65	4 225	274 625	8,062 258	25,495 10	4,020 726	8,662 391	18,662 56	0,015 385
66	4 356	287 496	8,124 038	25,690 47	4,041 240	8,706 588	18,757 77	0,015 162
67	4 489	300 763	8,185 353	25,884 36	4,061 548	8,750 340	18,852 04	0,014 925
68	4 624	314 432	8,246 211	26,076 81	4,081 655	8,793 659	18,945 36	0,014 706
69	4 761	328 509	8,306 624	26,267 85	4,101 566	8,836 556	19,037 78	0,014 493
70	4 900	343 000	8,366 600	26,457 51	4,121 285	8,879 040	19,129 31	0,014 286
71	5 041	357 911	8,426 150	26,645 83	4,140 818	8,921 121	19,219 97	0,014 085
72	5 184	373 248	8,485 281	26,832 82	4,160 168	8,962 809	19,309 79	0,013 889
73	5 329	389 017	8,544 004	27,018 51	4,179 339	9,004 113	19,398 77	0,013 699
74	5 476	405 224	8,602 325	27,202 94	4,198 336	9.045 042	19,486 95	0,013 514
75	5 625	421875	8,660 254	27,386 13	4,217 163	9,085 603	19,574 34	0,013 333
76	5 776	438 976	8,717 798	27,568 10	4,235 824	9,125 805	19,660 95	0,013 158
77	5 929	456 533	8,774 964	27,748 87	4,254 321	9,165 656	19,746 81	0,012 987
78	6 084	474 552	8,831 761	27,928 48	4,272 659	9,205 164	19,831 92	0,012 821
79	6 241	493 039	8,888 194	28,106 94	4,290 840	9,244 335	19,916 32	0,012 658
80	6 400	512 000	8,944 272	28,284 27	4,308 869	9,283 178	20,000 00	0,012 500
81	6 561	531441	9,000 000	28,460 50	4,326 749	9,321 698	20,082 99	0,012 346
82	6 724	551368	9,055 385	28,635 64	4,344 481	9,359 902	20,165 30	0,012 195
83	6 889	571787	9,110 434	28,809 72	4,362 071	9,397 796	20,246 94	0,012 048
84	7 056	592 704	9,165 151	28,982 75	4,379 519	9,435 388	20,327 93	0,011 905
85	7 225	614 125	9,219 544	29,154 76	4,396 830	9,472 682	20,408 28	0,011 765
86	7 396	636 056	9,273 618	29,325 76	4,414 005	9,509 686	20,488 00	0,011 628
87	7 569	658 503	9,327 379	29,495 76	4,431 048	9,546 403	20,567 10	0,011 494
88	7 744	681472	9,380 832	29,664 79	4,447 960	9,582 840	20,645 60	0,011 364
89	7 921	704 969	9,433 981	29,832 87	4,464 745	9,619 002	20,723 51	0,011 236
90	8 100	729 000	9,486 833	30,000 00	4,481 405	9,654 894	20,800 84	0.011 111
91	8 281	753 571	9,539 392	30,166 21	4,497 941	9,690 521	20,877 59	0,010 989
92	8 464	778 688	9,591 663	30,331 50	4,614 357	9,725 888	20,953 79	0,010 870
93	8 649	804 357	9,643 651	30,495 90	4,530 655	9,761 000	21,029 44	0,010 763
94	8 836	830 584	9,695 360	30,659 42	4,546 836	9.795 861	21,104 54	0,010 638
95	9 025	857 375	9.746 794	30,822 07	4,562 903	9,830 476	21.179 12	0,010 526
96	9 216	884 736	9,797 959	30,983 87	4,578 857	9,864 848	21.253 17	0,010 417
97	9 409	912 673	9,848 858	31.144 82	4,594 701	9,898 983	21,326 71	0,010 309
98	9 604	941192	9,899 495	31,304 95	4,610 436	9,932 884	21,399 75	0,010 204
99	9 801	970 299	9,949 874	31,464 27	4,626 065	9.966 555	21,472 29	0,010 101
00	10 000	1000 000	10,00 000	31,622 78	4,641 589	10,00 000	21,544 35	0,010 000

TABLA 23	**FACTOR DE CANTIDAD COMPUESTA: $(1 + r)^n$** Si un capital P se coloca a la tasa r (en valor decimal) de interés compuesto capitalizando los intereses anualmente, la cantidad acumulada (monto) al cabo de n años será $M = P(1 + r)^n$

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	1.0100	1,0125	1.0150	1,0200	1,0250	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600
2	1,0201	1.0252	1,0302	1.0404	1,0506	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236
3	1.0303	1,0380	1,0457	1.0612	1,0769	1,0927	1.1249	1.1576	1,1910
4	1.0406	1,0509	1,0614	1.0824	1,1038	1,1255	1,1699	1.2155	1,2635
5	1.0510	1.0641	1,0773	1,1041	1,1314	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382
6	1,0615	1,0774	1,0934	1,1262	1,1597	1.1941	1,2653	1,3401	1,4185
7	1,0721	1,0909	1,1098	1,1487	1,1887	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036
8	1.0829	1.1045	1,1265	1,1717	1,2184	1,2668	1,3688	1,4775	1,5938
9	1,0937	1,1183	1.1434	1,1951	1,2489	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895
10	1,1046	1,1323	1,1605	1.2190	1.2801	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908
11	1,1157	1,1464	1,1779	1.2434	1.3121	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983
12	1,1268	1,1608	1,1956	1,2682	1,3449	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122
13	1,1381	1,1753	1,2136	1,2936	1,3785	1,4685	1.6651	1,8856	2,1329
14	1.1495	1,1900	1,2318	1,3195	1.4130	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609
15	1,1610	1,2048	1.2502	1,3459	1.4483	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966
16	1,1726	1,2199	1,2690	1,3728	1.4845	1.6047	1.8730	2,1829	2,5404
17	1.1843	1,2351	1,2880	1,4002	1,5216	1,6528	1,9479	2.2920	2.6928
18	1,1961	1,2506	1,3073	1,4282	1,5597	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543
19	1,2081	1,2662	1,3270	1.4568	1,5987	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256
20	1,2202	1,2820	1.3469	1,4859	1,6386	1,8061	2,1911	2,6533	3.2071
21	1,2324	1,2981	1,3671	1.5157	1,6796	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996
22	1,2447	1.3143	1,3876	1.5460	1,7216	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035
23	1,2572	1,3307	1.4084	1,5769	1.7646	1,9736	2,4647	3,0715	3.8197
24	1,2697	1,3474	1,4295	1.6084	1.3087	2.0328	2,5633	3,2251	4.0489
25	1,2824	1.3642	1,4509	1,6406	1,8539	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919
26	1.2953	1,3812	1.4727	1,6734	1,9003	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494
27	1,3082	1,3985	1.4948	1,7069	1.9478	2,2213	2,8834	3.7335	4.8223
28	1.3213	1,4160	1,5172	1.7410	1.9965	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117
29	1.3345	1,4337	1,5400	1.7758	2.0464	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184
30	1,3478	1,4516	1,5631	1,8114	2,0976	2,4273	3,2434	43219	5,7435
31	1,3613	1,4698	1.5865	1.8476	2.1500	2,5001	3,3731	4.5380	6,0881
32	1,3749	1,4881	1,6103	1,8845	2.2038	2.5751	3,5081	4.7649	6,4534
33	1,3887	1,5067	1,6345	1,9222	2,2589	2.6523	3,6484	5,0032	6,8406
34	1.4026	1,5256	1,6590	1,9607	2,3153	2.7319	3.7943	5,2533	7,2510
35	1.4166	1,5446	1,6839	1,9999	2,3732	2.8139	3.9461	5,5160	7,6861
36	1,4308	1.5639	1,7091	2,0399	2,4325	2,8983	4,1039	5,7918	8.1473
37	1.4451	1.5835	1.7348	2.0807	2,4933	2,9852	4.2681	6,0814	8,6361
38	1.4595	1.6033	1.7608	2.1223	2,5557	3,0748	4.4388	6,3855	9,1543
39	1.4741	1.6233	1.7872	2.1647	2.6196	3.1670	4,6164	6,7048	9,7035
40	1.4889	1.6436	1.8140	2,2080	2,6851	3.2620	4,8010	7,0400	10.2857
41	1.5038	1.6642	1.8412	2.2522	2.7522	3.3599	4,9931	7.3920	10,9029
42	1.5188	1,6850	1.8688	2.2972	2.8210	3.4607	5,1928	7,7616	11,5570
43	1.5340	1.7060	1.8969	2.3432	2.8915	3.5645	5,4005	8,1497	12,2505
44	1.5493	1.7274	1.9253	2.3901	2.9638	3.6715	5,6165	8,5572	12,9855
45	1.5648	1.7489	1.9542	2.4379	3.0379	3.7816	5,8412	8,9850	13,7646
46	1.5805	1.7708	1.9835	2.4866	3.1139	3.8950	6.0748	9.4343	14,5905
47	1.5963	1.7929	2.0133	2.5363	3.1911	4.0119	6,3178	9.9060	15,4659
48	1.6122	1.8154	2.0435	2.587171	3.2715	4.1323	6.5705	10,4013	16,3939
49	1.6283	1.8380	2.0741	2.6388	3.3533	4.2562	6.8333	10,9213	17.3775
50	1.6446	1.8610	2.1052	2.6916	3.4371	4.3839	7.1067	11.4674	18.4202

TABLA 24

FACTOR DE VALOR PRESENTE: $(1+r)^{-n}$

El valor presente P que se convertirá en el valor M al cabo de n años de estar colocado a la tasa r (en valor decimal) de interés compuesto capitalizando los intereses anualmente es $P = M(1+r)^{-n}$.

n \ r	1%	1¼%	1½%	2%	23%	3%	4%	5%	6%
1	0,99010	0,98765	0,98522	0,98039	0.97561	0,97087	0,96154	0,95238	0.94340
2	0,98030	0,97546	0,97066	0,96117	0,95181	0,94260	0,92456	0.90703	0,89000
3	0,97059	0,96342	0,95632	0,94232	0,92860	0,91514	0,88900	0,86384	0,83962
4	0,96098	0,95152	0,94218	0,92385	0,90595	0,88849	0,85480	0,82270	0.79209
5	0,95147	0,93978	0,92826	0,90573	0,88385	0,86261	0,82193	0.78353	0.74726
6	0,94205	0.92817	0,91454	0,88797	0,86230	0.83748	0.79031	0,74622	0,70496
7	0,93272	0.91672	0.90103	0,87056	0,84127	0,81309	0,75992	0,71068	0.66506
8	0,92348	0,90540	088771	0,85349	0.82075	0,78941	0,73069	0,67684	0,62741
9	0,91434	0.89422	0,87459	0,83676	0,80073	0,76642	0,70259	0,64461	0.59190
10	0,90529	0,88318	0,86167	0,82035	0,78120	0.74409	0,67556	0,61391	0,55839
ll	0.89632	0,87228	0,84893	0.80426	0,76214	0,72242	0,64958	0,58468	0.62679
12	0,88745	0,86151	0.83639	0,78849	0,74356	0.70138	0,62460	0,55684	0.49697
13	0,87866	0.85087	0,82403	0,77303	0,72542	0,68095	0.60057	0,53032	0,46884
14	0,86996	0.84037	0,81185	0,75788	0,70773	0,66112	0.57748	0,50507	0,44230
15	0,86135	0,82999	0,79985	0.74301	0,69047	0.64186	0,55526	0.48102	0.41727
16	0,85282	081976	0,78803	0,72845	0,67362	0,62317	0,53391	0,45811	0.39365
17	0,84438	0,80963	0.77639	0.71416	0,65720	0,60502	0,51337	0,43630	0.37136
18	0.83602	0,79963	0,76491	0,70016	0.64117	0.58739	0.49363	0,41552	0,35034
19	0.82774	0,78976	0.75361	0,68643	0,62553	0,57029	0,47464	0,39573	0,33051
20	0,81954	0,78001	0.74247	0,67297	0.61027	0.55368	0.45639	0,37689	0.31180
21	0,81143	0,77038	0,73150	0,65978	0,59539	0,53755	0.43883	0.35894	0.29416
22	0,80340	0,76087	0,72069	0,64684	0,58086	0,52189	0.42196	0.34185	0,27751
23	0,79544	0.75147	0,71004	0,63416	0,56670	0,50669	0.40573	0,32557	0,26180
24	0,78757	0,74220	0.69954	0,62172	0,55288	0,49193	0,39012	0.31007	0.24698
25	0,77977	0,73303	0.68921	0,60953	0,53939	0,47761	0.37512	0,29530	0.23300
26	0,77205	0,72398	0,67902	0,59758	0,52623	0,46369	0.36069	0,28124	0.21981
27	0,76440	0,71505	0.66899	0,58586	0,51340	0,45019	0.34682	0,26785	0,20737
28	0,75684	0,70622	0,65910	0.57437	0,50088	0.43708	0.33348	0.25509	0.19563
29	0,74934	0,69750	0.64936	056311	0,48866	0,42435	0,32065	0.24295	0,18456
30	0.74192	0,68889	0,63976	0.65207	0,47674	0,41199	0,30832	0,23138	0,17411
31	0.73458	0,68038	0,63031	0,54125	0,46511	0.39999	0,29646	0,22036	0.16425
32	0,72730	0,67198	0,62099	0,53063	0,45377	0,38834	0.28506	0,20987	0,15496
33	0,72010	0,66369	0.61182	0,52023	0,44270	0.37703	0.27409	0,19987	0,14619
34	0,71297	0,65549	0,60277	0,51003	0,43191	0,36604	0,26355	0,19035	0,13791
35	0,70591	0.64740	0,59387	0,50003	0,42137	0,35538	0.25342	0,18129	0,13011
36	0.69892	0,63941	0,58509	0,49022	0,41109	0,34503	0.24367	0.17266	912274
37	0,69200	0,63152	0,57644	0,48061	0,40107	0,33498	0.23430	0.16444	0,11579
38	0,68515	0,62372	0.66792	0,47119	0.39128	0,32523	0,22529	0.15661	0.10924
39	0,67837	0.61602	0.55953	0,46195	0.38174	0,31575	0,21562	0,14915	0J0306
40	0,67165	0.60841	0,55126	0,45289	0,37243	0.30656	0,20829	0,14205	0,09722
41	0,66500	0.60090	0,54312	0,44401	0,36335	0.29763	0,20028	0,13528	0,09172
42	0,65842	0,59348	0,53509	0,43530	0,35448	0,28896	0.19257	0.12884	0,08653
43	0,65190	0,58616	0.52718	0,42677	0,34584	0,28054	0,18517	0,12270	0,08163
44	0,64545	0,57892	0.61939	0,41840	0,33740	0,27237	0,17805	0,11686	0,07701
45	0,63905	0,57177	0,51171	0,41020	0,32917	0,26444	0,17120	0,11130	0,07265
46	0,63273	0,56471	0.60415	0,40215	0,32115	0.25674	0,16461	0,10600	0.06854
47	0.62646	0,55774	0,49670	0,39427	0.31331	0.24926	0,15828	0.10095	0.06466
48	0.62026	0,55086	0.48936	0,38654	0.30567	0,24200	0,15219	0,09614	0.06100
49	0.61412	0,54406	0.48213	0.37896	0,29822	0.23495	0.14634	0.09156	0,05755
50	0,60804	0,53734	0.47600	0.37153	0,29094	0,22811	0,14071	0.08720	0.05429

TABLA

25

[illegible]

Si al final de cada cierto período se coloca una suma fija P a la tasa r (en valor decimal) de interés compuesto capitalizando los intereses al finalizar cada período, la cantidad acumulada al cabo de n períodos será igual a: $P\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$

Este sistema se suele llamar *serie uniforme*. En el caso particular en que los períodos sean de un año, la serie se llama *anualidad*.

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	1,0000	1.0000	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000
2	2.0100	2,0125	2.0150	2.0200	2,0250	2,0300	2,0400	2.0500	2,0600
3	3.0301	3,0377	3,0452	3,0604	3,0756	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836
4	4.0604	4,0756	4.0909	4,1216	4,1525	4,1836	42465	4,3101	4,3746
5	5,1010	5,1266	5,1523	5,2040	5.2563	5,3091	5.4163	5,5256	5.6371
6	6,1520	6,1907	6,2296	6,3081	6,3877	6,4684	6,6330	6.8019	6.9753
7	7,2135	7,2680	7,3230	7,4343	7,5474	7,6625	7,8983	8.1420	8.3938
8	8.2857	8,3589	8.4328	8,5830	8,7361	8.8923	9,2142	9,5491	9.8975
9	9,3685	9.4634	9.5593	9.7546	9,9545	10,1591	10.5828	11,0266	11.4913
10	10.4622	10.5817	10.7027	10.9497	11,2034	11.4639	12,0061	12,5779	13,1808
11	11,5668	11.7139	11,8633	12.1687	12.4835	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716
12	124825	12,8604	13,0412	13.4121	13,7956	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699
13	13.8093	14,0211	14.2368	14,6803	15,1404	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821
14	14.9474	15.1964	15.4504	15.9739	16.5190	17,0863	18.2919	19,5986	21.0151
15	16,0969	16.3863	16.6821	17,2934	17.9319	18,5989	20,0236	21.5786	23,2760
16	17.2579	17.5912	17.9324	18,6393	19,3802	20.1569	21.8245	23.6575	25,6725
17	18,4304	18,8111	19,2014	20,0121	20,8647	21.7616	23,6975	25,8404	28.2129
18	19.6147	20,0462	20.4894	21,4123	22.3863	23.4144	25.6454	28.1324	30,9057
19	20,8109	21,2968	21.7967	22,8406	23,9460	25,1169	27.6712	30,5390	33.7600
20	22,0190	22,5630	23,1237	24.2974	25.5447	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856
21	23,2392	23.8450	24.4705	25,7833	27,1833	28,6765	31,9692	35.7193	39.9927
22	24,4716	25,1431	25,8376	27.2990	28,8629	30,5368	34,2480	38.5052	43,3923
23	25,7163	26,4574	27.2251	28.8450	30.5844	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958
24	26,9735	27,7881	28,6335	30,4219	32,3490	34.4265	39,0826	44,5020	50,8156
25	28,2432	29,1354	30,0630	32,0303	34,1578	36.4593	41.6459	47,7271	54.8645
26	29,5256	30,4996	31,5140	33.6709	36,0117	38,5530	44,3117	51,1135	59.1564
27	30,8209	31,8809	32,9867	35,3443	37.9120	40,7096	47.0842	54,6691	63,7058
28	32,1291	33,2794	34,4815	37,0512	39,8598	42,9309	49,9676	58.4026	68,5281
29	33,4504	34,6954	35,9987	38,7922	41,8563	45.2189	52,9663	62,3227	73,6398
30	34,7849	36,1291	37,5387	40,5681	43.9027	47.5754	56.0849	66,4388	79,0582
31	36,1327	37.5807	39.1018	42,3794	46,0003	50,0027	59,3283	70,7608	84.8017
32	37,4941	39.0504	40,6883	44,2270	48.1503	52.5028	62,7015	75,2988	90,8898
33	38,8690	40,5386	42,2986	46,1116	50.3540	55.0778	66,2095	80.0638	97,3432
34	40,2577	42.0453	43,9331	48,0338	52,6129	57,7302	69,8579	85,0670	104,1838
35	41,6603	43.5709	45.5921	49,9945	54,9282	60,4621	73.6522	90,3203	111,4348
36	43,0769	45.1155	47.2760	51,9944	57,3014	632759	77.5983	95,8363	119,1209
37	44,5076	46,6794	48,9851	54,0343	59,7339	66,1742	81,7022	101,6281	127,2681
38	45,9527	48,2629	50,7199	56,1149	62.2273	69,1594	85,9703	107.7095	135,9042
39	47,4123	49,8662	52.4807	58,2372	64,7830	72,2342	90,4091	114,0950	145,0585
40	48,8864	51,4896	54,2679	60,4020	67,4026	75,4013	95,0255	120,7998	154.7620
41	50.3752	53,1332	56,0819	62.6100	70,0876	78,6633	99,8265	127,8398	165,0477
42	51,8790	54,7973	57,9231	64,8622	72,8398	82.0232	104,8196	135,2318	175.9505
43	53,3978	56,4823	59,7920	67,1595	75,6608	85,4839	110,0124	142.9933	187.5076
44	54,9318	58,1883	61,6889	69,5027	78,5523	89,0484	115,4129	151,1430	199,7580
45	56.4811	59,9157	63,6142	71.8927	81,5161	92,7199	121,0294	159,7002	212.7435
46	58.0459	61,6646	65.5684	74.3306	84.5540	96,5015	126,8706	168,6852	226.5081
47	59.6263	63.4354	67.5519	76,8172	87,6679	100,3965	132,9454	178,1194	241,0986
48	61,2226	65,2284	69,5652	79.3535	90.8596	104,4084	139.2632	188,0254	256,5645
49	62.8348	67,0437	71.6087	81,9406	94,1311	108,5406	145,8337	198,4267	272,9584
50	64,4632	68.8818	73,6828	84.5794	97,4843	112,7969	152.6671	209,3480	290,3359

TABLA
26

FACTOR DE VALOR PRESENTE PARA SERIES UNIFORMES

Una serie uniforme en la cual el pago regular efectuado al finalizar cada uno de los n periodos de pago es de A a la tasa r (en valor decimal) de interés compuesto capitalizando los intereses al fin de cada periodo tendrá por valor presente: $A\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$.

r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	0.9901	0,9877	0.9852	0.9804	0,9756	0,9709	0,9615	0,9524	0.9434
2	1,9704	1,9631	1.9559	1,9416	1,9274	1,913s	1,8861	1,8594	1,8334
3	2,9410	2,9265	2.9122	2,8839	2.8560	2,8286	2,7751	2.7232	2.6730
4	3.9020	3.3781	3,8544	3,8077	3,7620	3,7171	3.6299	3,5460	3,4651
5	4,8534	4,8178	4.7826	4.7135	4.6458	4,5797	4,4518	4,329s	4,2124
6	5,7955	5,7460	5,6972	5.6014	5.5031	5,4172	5,2421	5.0757	4,9173
7	6.7282	6.6627	6.5982	6,4720	6,3494	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824
8	7,6517	7,5681	7.4859	7,3255	7.1701	7,0197	6,7327	6,4632	6.2098
9	8,5660	8,4623	8.3605	8.1622	7.9709	7,7861	7,4353	7.1078	6.8017
10	9.4713	9,345s	9,2222	8.9826	8,7521	8,5302	8,1109	7,7217	7.3601
ll	10.3676	10,2178	10,0711	9,7868	9,5142	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869
12	11,2551	11,0793	10,9075	10.5753	10,2578	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838
13	12.1337	11,9302	11,731s	11,3484	10,9832	10,6350	9,9856	9.3936	8,8527
14	13,0037	12,7706	12,5434	12.1062	11,6909	11,2961	10,5631	9.8986	9.2950
15	13,8651	13.6005	13,3432	12,8493	12,3814	11,9379	11,1184	10.3797	9,7122
16	14,7179	14,4203	14,1313	13,5777	13,0550	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059
17	15,5623	15.2299	14,9076	14,291s	13.7122	13,1661	12.1657	11,2741	10.4773
18	16,3983	16,0295	15,6726	14.9920	14,3534	13,7535	12,6593	11.6896	10,8276
19	17,2260	16.8193	16,4262	15.6785	14.9789	14,3238	13,133s	12,0853	11,1581
20	13.0456	17,5993	17,1686	16,3514	15,5892	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699
21	18.8570	18,3697	17,9001	17.0112	16,1845	15,4150	14,0292	12.8212	11,7641
22	19,6604	19,1306	18,6208	17,6580	16,7654	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416
23	20,4558	19,8820	19,3309	18,2922	17.3321	16,4436	14,8568	13.4886	12,3034
24	21,2434	20,6242	20,0304	18.9139	17,8850	16,9355	15.2470	13.7986	12,5504
25	22,0232	21,3573	20,7196	19.5235	18.4244	17,4131	15.6221	14,093s	12.7834
26	22,7952	22,0813	21.3986	20,1210	18,9506	17,8768	15,9828	14,3752	13,0032
27	23.6596	22,7963	22,0676	20,7069	19,4640	18,3270	16.3296	14,6430	13.2106
28	24,3164	23,5025	22.7267	21,2813	19,9649	18,7641	16,6631	14,8981	13.4062
29	25,0658	24.2000	23,3761	21,8444	20,4535	19,1885	16.9837	15,1411	13.5907
30	25,8077	24.8889	24,0158	22,3965	20,9303	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648
31	26,5423	25,5693	24,6461	22,9377	21,3954	20,0004	17.5885	15,5928	13,9291
32	27,2696	26.2413	25.2671	23,4683	21.8492	20,3888	17,8736	15,8027	14,0840
33	27,9897	26,9050	25,8790	23,9886	22,291s	20,7658	18,1476	16.0025	14,2302
34	28.7027	27,5605	26,4817	24.4986	22,7238	21,1318	18,4112	16,1929	14,3681
35	29,4086	28,2079	27,0756	24,9986	23,1452	21,4872	18,6646	16,3742	14.4982
36	30,107s	28,8473	27.6607	25,4888	23,5563	21,8323	18,9083	16.5469	14,6210
37	30,799s	29.4783	28,2371	25,9695	23,9573	22,1672	19,1426	16,7113	14.7368
38	31,4847	30,1025	28,8051	26,4406	24,3486	22.4925	19,3679	16.8679	14.8460
39	32,1630	30,7185	29,3646	26,9026	24,7303	22,8082	19,5845	17,0170	14.9491
40	32,8347	31,3269	29.9158	27,3555	25,1028	23.1148	19,7928	17,1591	15.0463
41	33.4997	31,9278	30,4590	27,7995	25.4661	23,4124	19,9931	17,2944	15,1380
42	34.1581	32,5213	30.9941	28.2348	25,8206	23.7014	20,1856	17,4232	15,2245
43	34.8100	33,107s	31.5212	28,6616	26.1664	23,9819	20,3708	17,545s	15,3062
44	35,455s	33,6864	32,0406	29.0800	26.5038	24,2543	20.5488	17.6628	15,3832
45	36.0945	34.2582	32,5523	29,4902	26,8330	24,5187	20,7200	17,7741	15.4558
46	36,7272	34,8229	33,0565	29,8923	27,1542	24,7754	20.8847	17,8801	16.5244
47	37.3537	35,3806	33.5532	30.2866	27,4675	25,0247	21.0429	17.9810	15,5890
48	37,9740	85.9315	34,0426	30,6731	27,7732	25,2667	21,1951	18.0772	15.6500
49	38,5881	36,4755	34,5247	31.0521	28,0714	25,5017	21,3415	18.1687	16.7076
S0	39,1961	37,0129	34.9997	31,4236	28.3623	25.7298	21.4822	18,2559	lb.7619

TABLA 27

FUNCIONES DE BESSEL
$J_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	1.0000	0,9975	0.9900	0.9776	0,9604	0,9385	0,9120	0,8812	0,8463	0,8075
1,	0.7662	0,7196	0.6711	0,6201	0,5669	0,5118	0,4554	0,3980	0,3400	0,2818
2,	0.2239	0,1666	0,1104	0,0555	0,0025	-0.0484	—0,0968	—0,1424	—0,1850	—0,2243
3.	—0,2601	—0,2921	—0,3202	—0,3443	—0,3643	—0,3801	--0.3918	—0,3992	—0,4026	—0,4018
4,	—0,3971	-0.3887	—0,3766	—0,3610	-0.3423	—0,3205	—0,2961	-0.2693	—0,2404	—0,2097
6.	-0.1776	-0.1443	—0,1103	—0,0758	—0,0412	—0,0068	0,0270	0,0599	0,0917	0,1220
6,	0.1606	0,1773	0.2017	0,2238	0,2433	0,2601	0.2740	0,2851	0,2931	0.2981
7,	0.3001	0,2991	0,2951	0,2882	0,2786	0,2663	0,2516	0,2346	0.2154	0,1944
8,	0.1717	0,1475	0,1222	0,0960	0.0692	0.0419	0,0146	-0.0125	—0,0392	—0,0653
9,	—0,0903	—0,1142	—0,1367	—0,1577	—0,1768	—0,1939	—0,2090	—0,2218	—0,2323	—0,2403

TABLA 28

FUNCIONES DE BESSEL
$J_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,0000	0,0499	0,0995	0,1483	0,1960	0,2423	0,2867	0,3290	0,3688	0,4059
1,	0.4401	0,4709	0,4983	0,5220	0,5419	0,5579	0,5699	0,5778	0,5815	0,5812
2,	0.5767	0,5683	0,5560	0,5399	0,5202	0,4971	0,4708	0,4416	0,4097	0,3754
3.	0,3391	0,3009	0,2613	0,2207	0,1792	0,1374	0,0955	0,0538	0,0128	—0,0272
4,	—0,0660	-0.1033	—0,1386	—0,1719	—0,2028	—0,2311	—0,2566	—0,2791	—0,2985	—0,3147
5,	—0,3276	—0,3371	-0.3432	-0.3460	—0,3453	-0.3414	—0,3343	—0,3241	—0,3110	—0,2951
6,	-0.2767	—0.2559	—0,2329	—0,2081	—0,1816	—0,1538	-0.1250	—0,0953	—0,0652	—0,0349
7,	-0.0047	0,0252	0,0543	0,0826	0,1096	0.1352	os592	0,1813	0.2014	0,2192
8,	0.2346	0,2476	0,2580	0,2657	0.2708	0,2731	0,2728	0,2697	0,2641	0,2559
9,	0.2453	0.2324	0.2174	0.2004	0,1816	OS613	0.1396	0,1166	0,0928	0,0684

TABLA 29

FUNCIONES DE BESSEL

$Y_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	$-\infty$	-1.5342	−1,0811	−0,8073	−0,6060	−0,4445	-0.3085	−0,1907	-0.0868	0,0056
1,	0.0883	0,1622	0,2281	0.2865	LI.3378	0.3824	0.4204	0,4520	0,4774	0,4968
2,	0,5104	0.5183	0.5208	0.5181	0,5104	0,4981	0,4813	0,4605	0,4359	0,407s
3.	0,3769	0.3431	0.3071	0,2691	0.2296	0,1890	0,1477	0,1061	0.0645	0,0234
4,	−0,0169	0.0561	0,0938	0.1296	−0,1633	0,1947	−0,2235	−0,2494	−0,2723	−0,2921
5,	−0,3085	−0,3216	-0.3313	-0.3374	-0.3402	−0,3395	−0,3354	−0,3282	−0,3177	−0,3044
6.	-0.2882	0.2694	−0,2483	-0,2251	-- 0.1999	−0,1732	−0,1452	−0,1162	−0,0864	-0.0563
7,	-0.0259	0.0042	0,0339	0,0628	0,0907	0.1173	0,1424	0,1658	0,1872	0,2065
8,	0.2235	0,2381	0,2501	0,2595	0,2662	0.2702	0,2715	0,2700	0,2659	0,2592
9,	0,2499	0.2383	0,2245	0.2086	0.1907	0,1712	0,1502	0,1279	0.1045	0,0804

TABLA 30

FUNCIONES DE BESSEL

$Y_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	$-\infty$	-6.4590	-3.3238	-2.2931	-1.7809	-1.4715	−1,2604	−1,1032	−0,9781	−0,8731
1,	−0,7812	−0,6981	−0,6211	−0,5485	−0,4791	-0.4123	−0,3476	−0,2847	−0,2237	−0,1644
2,	-0.1070	-- 0.0517	0.0015	0.0523	0.1005	0.1459	0,1884	0,2276	0,2635	0,2959
3,	0.3247	0.3496	0.3707	0,3879	0,4010	0,4102	0,4154	0,4167	0,4141	0,4078
4,	0,3979	0,3846	0,3680	0,3484	0,3260	0,3010	0.2737	0,2445	0,2136	0,1812
5,	0,1479	0,1137	0,0792	0.0445	0.0101	0.0238	−0,0568	−0,0887	−0,1192	−0,1481
6.	-0.1750	−0,1998	−0,2223	0,2422	0.2596	−0,2741	−0,2857	−0,2945	-0.3002	−0,3029
7.	−0,3027	n.2095	0.2934	0,2846	0.2731	02591	−0,2428	−0,2243	−0,2039	−0,1817
8.	0.1581	0,1331	−0,10 [illegible]2	0.0806	0.0535	−0,0262	0,0011	0,0280	0,0544	0,0799
9,	0,1043	0,1275	0.1491	0.1691	0.1871	0.2032	0.2171	0,2287	0,2379	0,2447

TABLA 31

FUNCIONES DE BESSEL $I_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	1,000	1,003	1,010	1,023	1,040	1,063	1,092	1,126	1,167	1,213
1,	1,266	1,326	1,394	1,469	1,553	1,641	1,750	1,364	1,990	2,128
2,	2.280	2,446	2.629	2,830	3,049	3,290	3,553	3,842	4,157	4,603
3,	4,881	6,294	6,141	6,243	6,785	7,378	8,028	8,739	9,617	10.37
4,	11,30	12.32	13,44	14,67	16,01	17,48	19.09	20,86	22.79	24,91
5,	27,24	29.79	32,58	35,65	39,01	42,69	46.74	51,17	56,04	61,38
6,	67,23	73,66	80,72	88,46	96,96	106,3	116,5	127,8	140,1	153,7
7,	168,6	185,0	202,9	222.7	244.3	268,2	294.3	323,1	354,7	389,4
8,	427.6	469,5	515,6	566,3	621.9	683,2	750.5	824,4	905,8	995,2
9,	1094	1202	1321	1451	1595	1753	1927	2119	2329	2561

TABLA 32

FUNCIONES DE BESSEL $I_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,0000	0,0501	0.1005	0.1517	0,2040	0,2579	0,3137	0,3719	0,4329	0,4971
1,	0,5652	0,6375	0,7147	0,7973	0.8861	0,9817	1,085	1,196	1,311	1,448
2,	1,691	1,745	1.914	2,098	2,298	2,517	2,755	3,016	3,301	3,613
3,	3,953	4,326	4.734	5.181	5.670	6.206	6,793	7,436	8,140	8,913
4.	9,759	10.69	11.71	12.82	14.05	15,39	16,86	18.48	20,25	22,20
5,	24.34	26.68	29.25	32.08	35.18	38.59	42.33	46.44	50,95	55,90
6,	61,34	67.32	73.89	81.10	89.03	97,74	107.3	117.8	129,4	142.1
7,	156.0	171.4	188.3	206.8	227.2	249.6	274.2	301.3	331.1	363,9
8,	399.9	439.5	483.0	531.0	583.7	641.6	705,4	775.5	862.7	937.6
9.	1031	1134	1247	1371	1508	1658	1824	2006	2207	2428

TABLA 33

FUNCIONES DE BESSEL

$K_0(x)$

x	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9
0,	∞	2.4271	1.7527	1.3726	1,1145	0,9244	0.7775	0.6605	0.5653	0.4867
1,	0,4210	0.3656	0.3185	0,2782	0.2437	0,2138	0.1880	0,1655	0.1459	0.1288
2.	0,1139	0,1008	0,08927	0,07914	0,07022	0.06236	0,05540	0.04926	0.04382	0.03901
3,	0,03474	0,03095	0,02759	0,02461	0.02196	0.01960	0,01750	0,01563	0.01397	0.01248
4,	0,01116	$0,0^{2}9980$	$0,0^{2}8927$	$0,0^{2}7988$	0.027149	$0,0^{2}6400$	0.025730	$0,0^{2}5132$	$0,0^{2}4597$	$0,0^{2}4119$
6.	$0,0^{2}3691$	0.023308	$0,0^{2}2966$	0.022659	$0,0^{2}2385$	0.022139	0.021918	$0,0^{2}1721$	$0,0^{2}1544$	$0,0^{2}1386$
6,	$0,0^{2}1244$	$0,0^{2}1117$	$0,0^{2}1003$	$0,0^{3}9001$	$0,0^{3}8083$	0.037259	$0,0^{3}6520$	$0,0^{3}5857$	$0,0^{3}5262$	$0,0^{3}4728$
7,	$0,0^{3}4248$	$0,0^{3}3817$	$0,0^{3}3431$	$0,0^{3}3084$	$0,0^{3}2772$	$0,0^{3}2492$	$0,0^{3}2240$	0.032014	0.031811	$0,0^{3}1629$
8,	$0,0^{3}1465$	0.031317	$0,0^{3}1185$	$0,0^{3}1066$	$0,0^{4}9588$	$0,0^{4}8626$	$0,0^{4}7761$	$0,0^{4}6983$	$0,0^{4}6283$	$0,0^{4}5654$
9,	$0,0^{4}5088$	$0,0^{4}4579$	$0,0^{4}4121$	0.043710	$0,0^{4}3339$	$0,0^{4}3006$	$0,0^{4}2706$	$0,0^{4}2436$	$0,0^{4}2193$	$0,0^{4}1975$

TABLA 34

FUNCIONES DE BESSEL

$K_1(x)$

x	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9
0,	∞	9,8538	4.7760	3,0560	2,1844	1,6564	1.3028	1.0503	0.8618	0.7166
1,	0,6019	0,5098	0,4346	0.3726	0,3208	0,2774	0,2406	0,2094	0.1826	0,1597
2,	0,1399	0,1227	0J079	0,09498	0.08372	0,07389	0.06628	0.0577-t	0,05111	0,04529
3,	0,04016	0.03563	0,03164	0,02812	0.02500	0,02224	0.01979	0,01763	0.01671	0.01400
4,	0,01248	0,01114	$0,0^{2}9938$	$0,0^{2}8872$	$0,0^{2}7923$	$0,0^{2}7078$	$0,0^{2}6325$	$0,0^{2}5654$	$0.0^{2}5055$	$0.0^{2}4521$
5,	$0,0^{2}4045$	$0,0^{2}3619$	$0,0^{2}3239$	$0,0^{2}2900$	$0,0^{2}2597$	0.022326	0.022083	$0,0^{2}1866$	$0.0^{2}1673$	0.021499
6,	$0,0^{2}1344$	$0,0^{2}1205$	$0.0^{2}1081$	$0,0^{3}9691$	$0,0^{3}8693$	$0,0^{3}7799$	0.036993	$0.0^{3}6280$	$0,0^{3}5636$	$0,0^{3}5059$
7,	$0,0^{3}4542$	$0,0^{3}4078$	$0,0^{3}3662$	$0,0^{3}3288$	0.032963	$0,0^{3}2653$	$0,0^{3}2383$	$0,0^{3}2141$	$0.0^{3}1924$	$0.0^{3}1729$
8,	$0,0^{3}1554$	$0,0^{3}1396$	$0,0^{3}1255$	0.031128	$0,0^{3}1014$	0.0'9120	$0,0^{4}8200$	$0,0^{4}7374$	$0,0^{4}6631$	0.0'5964
9,	$0,0^{4}5364$	$0,0^{4}4825$	$0,0^{4}4340$	$0,0^{4}3904$	$0,0^{4}3512$	$0,0^{4}3160$	$0,0^{4}2843$	0.042669	$0.0^{4}2302$	$0.0^{4}2072$

TABLA 35

FUNCIONES DE BESSEL
Ber (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	1,0000	1.0000	1.0000	0.9999	0,9996	0.9990	0,9980	0,9962	0.9936	0,9898
1,	0.9844	0,9771	0,9676	0,9554	0,9401	0,9211	0,8979	0,8700	0,8367	0,7975
2,	0.7517	0.6987	0,6377	0,5680	0.4890	0,4000	0.3001	0,1887	0,06511	−,07137
3.	-0.2214	-0.3855	−0,5644	−0,7584	−0,9680	-1.1936	−1,4353	-1.6933	−1,9674	-2.2576
4,	−2,5634	−2,8843	-3.2195	-3.5679	-3.9283	-4.2991	-4.6784	−5,0639	-5.4531	-5.8429
5.	-6.2301	−6,6107	-6.9803	−7,3344	−7,6674	−7,9736	−8,2466	-8.4794	−8,6644	-8.7937
6,	-8.8583	-8.8491	−8,7561	−8.5688	-8.2762	-7.8669	-7.3287	-6.6492	−5,8155	-4.8146
7,	-3.6329	−2,2571	-6737	1.1308	3,1695	5,4550	7,9994	10.814	13,909	17,293
8,	20,974	24.957	29,245	33,840	38,738	43,936	49,423	55.187	61,210	67.469
9,	73,936	80,576	87,350	94,208	101,10	107,95	114,70	121.26	127.54	133,43

TABLA 36

FUNCIONES DE BESSEL
Bei (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0.0000	$0,0^{2}2500$	0,01000	0.02250	0.04000	0,06249	0,08998	0.1224	0.1599	0,2023
1.	0,2496	0.3017	0,3587	0,4204	0,4867	0,5576	0,6327	0,7120	0.7953	0,8821
2.	0.9723	1.0654	1.1610	1.2585	1.3575	1,4572	1,5569	1.6557	1.7529	1.8472
3.	1.9376	2.0228	2.1016	2.1723	2,2334	2.2832	2.3199	2.3413	2,3454	2.3300
4.	2.2927	2.2309	2.1422	2.0236	1.8726	1.6860	1,4610	1.1946	0.8837	0.5251
5.	0.1160	−,3467	−.8658	−1,4443	-2.0845	-2.7890	-3.5597	-4.3986	-5.3068	-6.2854
6.	-7.3347	-8.4545	-9.6437	-10.901	-12,223	-13,607	-15,047	-16.538	-18.074	−19.644
7.	-21.239	-22.848	-24.456	-26.049	-27.609	-29.116	-30.548	-31,882	-33,092	-34.147
8.	−35.017	-35.667	-36.061	-36.159	-35,920	-35.298	-34.246	-32.714	-30.651	-28.003
9,	-24.713	-20.724	-15.976	-10.412	-3.9693	3,4106	11,787	21,218	31.758	43,459

TABLA

37

FUNCIONES DE BESSEL
Ker (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	∞	2,4205	1,7331	1.3372	1,0626	0,8559	0,6931	0.5614	0,4529	0,3625
1,	0.2867	0,2228	0,1689	0,1235	0,08513	0,05293	0,02603	$0{,}0^{2}3691$	—0,01470	—0,02966
2,	—0,04166	—0,05111	—0,05834	—0,06367	—0,06737	—0,06969	—0,07083	—0,07097	—0,07030	—0,06894
3,	—0,06703	—0,06468	—0,06198	—0,05903	—0,05590	—0,05264	—0,04932	—0,04597	—0,04265	—0,03937
4,	—0,03618	—0,03308	—0,03011	—0,02726	-0.02456	—0,02200	—0,01960	-0.01734	—0,01525	—0,01330
5,	—0,01151	$-0{,}0^{2}9865$	$-0{,}0^{2}8359$	$-0{,}0^{2}6989$	$-0{,}0^{2}5749$	$-0{,}0^{2}4632$	$-0{,}0^{2}3632$	$-0{,}0^{2}2740$	$-0{,}0^{2}1952$	$-0{,}0^{2}1258$
6,	$-0{,}0^{3}6530$	$-0{,}0^{3}1295$	$0{,}0^{3}3191$	$0{,}0^{3}6991$	$0{,}0^{2}1017$	$0{,}0^{2}1278$	$0{,}0^{2}1488$	$0{,}0^{2}1653$	$0{,}0^{2}1777$	$0{,}0^{2}1866$
7,	$0{,}0^{2}1922$	$0{,}0^{2}1951$	$0{,}0^{2}1956$	$0{,}0^{2}1940$	0.021907	$0{,}0^{2}1860$	$0{,}0^{2}1800$	$0{,}0^{2}1731$	$0{,}0^{2}1655$	$0{,}0^{2}1572$
8,	$0{,}0^{2}1486$	$0{,}0^{2}1397$	0.021306	0.021216	0.021126	$0{,}0^{2}1037$	0.039511	$0{,}0^{3}8675$	$0{,}0^{3}7871$	$0{,}0^{3}7102$
9,	$0{,}0^{3}6372$	$0{,}0^{3}5681$	0.035030	$0{,}0^{3}4422$	$0{,}0^{3}3855$	$0{,}0^{3}3330$	$0{,}0^{3}2846$	$0{,}0^{3}2402$	$0{,}0^{3}1996$	$0{,}0^{3}1628$

TABLA

38

FUNCIONES DE BESSEL
Kei (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	—0,7854	-0.7769	—0,7581	—0,7331	—0,7038	—0,6716	—0,6374	—0,6022	—0,5664	—0,5305
1,	—0,4950	—0,4601	—0,4262	—0,3933	—0,3617	—0,3314	—0,3026	—0,2752	—0,2494	-0.2251
2,	—0,2024	—0,1812	—0,1614	—0,1431	—0,1262	-0.1107	-609644	—0,08342	-0.07157	—0,06083
3,	0.05112	—0,04240	—0,03458	-0.02762	—0,02145	—0,01600	-0.01123	$-0{,}0^{2}7077$	$-0{,}0^{2}3487$	$-0{,}0^{3}4108$
4,	$0{,}0^{2}2198$	$0{,}0^{2}4386$	$0{,}0^{2}6194$	$0{,}0^{2}7661$	$0{,}0^{2}8826$	$0{,}0^{2}9721$	0.01038	0,01083	0,01110	0,01121
5,	0,01119	0,01105	0,01082	0,01051	0,01014	$0{,}0^{2}9716$	$0{,}0^{2}9255$	$0{,}0^{2}8766$	$0{,}0^{2}8258$	$0{,}0^{2}7739$
6,	$0{,}0^{2}7216$	$0{,}0^{2}6696$	0.026183	$0{,}0^{2}5681$	$0{,}0^{2}5194$	$0{,}0^{2}4724$	$0{,}0^{2}4274$	$0{,}0^{2}3846$	$0{,}0^{2}3440$	$0{,}0^{2}3058$
7,	$0{,}0^{2}2700$	$0{,}0^{2}2366$	$0{,}0^{2}2057$	$0{,}0^{2}1770$	$0{,}0^{2}1507$	$0{,}0^{2}1267$	0.021048	$0{,}0^{3}8498$	$0{,}0^{3}6714$	$0{,}0^{3}5117$
8,	$0{,}0^{3}3696$	$0{,}0^{3}2440$	$0{,}0^{3}1339$	$0{,}0^{4}3809$	$-0{,}0^{4}4449$	$-0{,}0^{3}1149$	$-0{,}0^{3}1742$	$-0{,}0^{3}2233$	$-0{,}0^{3}2632$	$-0{,}0^{3}2949$
9,	$-0{,}0^{3}3192$	$-0{,}0^{3}3368$	$-0{,}0^{3}3486$	$-0{,}0^{3}3552$	-0.033574	$-0{,}0^{3}3557$	$-0{,}0^{3}3508$	$-0{,}0^{3}3430$	$-0{,}0^{3}3329$	-0.033210

TABLA 39	VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL POR IGUALACION A CERO

La tabla siguiente proporciona algunas de las primeras raíces positivas de diferentes ecuaciones. Obsérvese que en todos los casos de raíces consecutivas de elevado valor, aquellas difieren entre sí por una cantidad que se aproxima a $\pi =$ $14159

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$	2,4048	3,8317	5.1356	6,3802	7.5883	8,7715	9,9361
	5.5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386	13,5893
	8,6537	10.1735	11,6198	13.0152	14.3725	15,7002	17,0038
	11,7915	13.3237	14.7960	16.2235	17,6160	18,9801	20,3208
	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178	23,5861
	18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303	26,8202
$Y_n(x) = 0$	0.8936	2,1971	3,3842	4,5270	5,6452	6,7472	7,8377
	3,9577	5,4297	6,7938	8.0976	9.3616	10,5972	11,8110
	7,0861	8,5960	10.0235	11,3965	12,7301	14,0338	15,3136
	10,2223	11,7492	13.2100	14,6231	15,9966	17.3471	18.6707
	13.3611	14.8974	16,3790	17.8185	19,2244	20,6029	21.9583
	16.5009	18.0434	19.5390	20.9973	22,4248	23,8265	25,2062
$J'_n(x) = 0$	0.0000	1,8412	3,0542	4,2012	5,3176	6.4156	7,5013
	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9,2824	10,5199	11,7349
	7,0156	8,5363	9.9695	11.3459	12,6819	13,9872	15,2682
	10,1735	11.7060	13.1704	14,5859	15,9641	17,3128	18,6374
	13.3237	14.8636	16.3475	17.7888	19,1960	20.5755	21,9317
	16.4706	18,0155	19,5129	20.9725	22.4010	23.8036	25,1839
$Y'_n(x) = 0$	2.1971	3.6830	5,0026	6,2536	7,4649	8,6496	9,8148
	5.4297	6.9415	8.3507	9.6988	11,0052	12,2809	13,5328
	8,5960	10.1234	11.5742	12.9724	14,3317	15.6608	16,9655
	11.7492	13.2858	14.7609	16,1905	17,5844	18,9497	20.2913
	14.8974	16.4401	17.9313	19,3824	20,8011	22,1928	23,5619
	18.0434	19.5902	21.0929	22.5598	23,9970	25,4091	26,7995

TABLA 40

INTEGRALES EXPONENCIAL, DE SENO Y DE COSENO

$$Ie(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du, \quad Is(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du, \quad Ic(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$$

x	$Ie(x)$	$Is(x)$	$Ic(x)$
0,0	∞	0,0000	∞
0,5	0.6598	0,4931	0.1778
1,0	0.2194	0,9461	—0,3374
1,5	0,1000	1,3247	—0,4704
2,0	0,04890	1,6054	-0.4230
2,5	0,02491	1,7785	—0,2859
3,0	0,01305	1,8487	-0.1196
3,5	$0,0^26970$	1,8331	0.0321
4.0	$0,0^23779$	1,7582	0.1410
4,5	0.022073	1.6641	0.1936
5,0	$0,0^21148$	1.6499	0,1900
5,5	$0,0^36409$	1,4687	0.1421
6.0	$0,0^33601$	1,4247	0,0681
6,5	0.032034	1.4218	—0,0111
7,0	0.031166	1,4546	—0,0767
7.6	$0,0^46583$	1,5107	—0,1156
8,0	0.0'3767	1,5742	—0,1224
8,5	$0,0^42162$	1,6296	-0.09943
9,0	$0,0^41245$	1,6650	—0,05535
9.6	$0,0^57185$	1,6745	$—0,0^22678$
10.0	$0,0^54157$	1,6583	0.04646

TABLA 41

POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_n(\cos\theta)$
$(P_0(\cos\theta) = 1)$

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
0.00	-0,5000	0,0000	0.3750	0,0000
0.05	-0,4963	-0,0747	0,3657	0,0927
0,10	-0,4850	-0,1475	0,3379	0,1788
0,15	-0,4663	-0.2166	0,2928	0.2523
0,20	-0.4400	-0.2800	0.2320	0,3075
0.25	-0,4063	-0,3359	0,1577	0,3397
0.30	-0,3650	-0,3825	0.0729	0,3454
0,35	-0.3163	-0,4178	-0,0187	0,3225
0,40	-0.2600	-0,4400	-0,1130	0,2706
0,45	-0.1963	-0.4472	-0,2050	0.1917
0.50	-0.1250	-0,4375	-0.2891	0,0898
0,55	-0,0463	-0.4091	-0,3590	-0,0282
0,60	0,0400	-0,3600	-0.4080	-0,1526
0,65	0,1338	-0,2884	-0.4284	-0,2705
0.70	0,2350	-0,1925	-0,4121	-0,3652
0,75	0.3438	-0,0703	-0.3501	-0,4164
0,80	0.4600	0.0800	-0.2330	-0.3995
0.85	0.5833	0.2603	-0,0506	-0,2857
0.90	0,7150	0.4725	0.2079	-0.0411
0,95	0.8538	0.7184	0,5541	0,3727
1.00	1.0000	1,0000	1.0000	1,0000

TABLA 42

POLINOMIOS DE LEGENDRE P_n (cos θ)

$[P_0 \text{ (cos } \theta) = 1]$

θ	P_1 (cos e)	P_2 (cos e)	P_3 (cos θ)	P_4 (cos θ)	P_5 (cos θ)
0°	1,0000	l,0000	l,0000	l,0000	1,0000
5°	0,9962	0.9886	0,9773	0.9623	0,9437
10°	0,9848	0.9548	0.9106	0,8532	0.7840
15°	0,9659	0.8995	0,8042	0.6847	0,5471
20°	0,9397	0.8245	0.6649	0.4750	0.2715
25°	0.9063	0,7321	0,5016	0.2465	0,0009
30°	0,8660	0,6250	0,3248	0.0234	—0,2233
35°	0,8192	0,5065	0.1454	-0.1714	—0,3691
40°	0,7660	0,3802	-0.0252	—0,3190	—0,4197
45°	0.7071	0.2500	—0,1768	—0,4063	—0,3757
50°	0,6428	0,1198	—0,3002	—0,4275	—0,2545
55°	0,5736	—0,0065	—0,3886	—0,3852	—0,0868
60°	0,5000	—0,1250	-0.4375	—0,2891	0.0898
65°	0,4226	—0,2321	—0,4452	—0,1552	0,2381
70°	0,3420	-0.3245	—0,4130	—0,0038	0,3281
75°	0,2588	—0,3995	—0,3449	0,1434	0,3427
80"	0,1737	—0,4548	—0,2474	0.2659	0,2810
85°	0,0872	—0,4886	4.1291	0.3468	0,1577
90°	0,0000	—0,5000	0.0000	0,3750	0,0000

TABLA 43

INTEGRALES ELIPTICAS COMPLETAS DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIES

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta, \quad k = \operatorname{sen}\psi$$

ψ	K	E	ψ	K	E	ψ	K	E
0°	1.5708	1.5708	30°	1.6858	1,4675	60°	2,1565	1,2111
1	1.5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1.5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1.5727	1.5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1.5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1.1638
6	1,5751	1.5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1.7522	1,4171	67	2.3809	1.1453
8	1.5785	1,5632	38	1.7633	1,4092	68	2,4198	1.1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2.4610	1,1272
10	1,5828	1.5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1.8256	1,3680	73	2.6521	1.0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1.3594	74	2.7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1.8541	1.3506	75	Z-7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1.8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1.5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3.0617	1.0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1.5191	51	1.9539	1,2963	81	3.2553	1.0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1.9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1.6426	1.5037	54	2,0133	1.2681	84	3,6519	1.0172
25	1.6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3.8317	1,0127
26	1,6557	1.4924	56	2,0571	1.2492	86	4,0528	1,0086
27	1.6627	1.4864	51	2,0804	1,2397	87	4.3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4.7427	1,0026
29	1,6777	1.4740	59	2.1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1.6858	1.4675	60	2,1565	1.2111	90	∞	l,0000

TABLA 44

INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE PRIMERA ESPECIE

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}}, \quad k = \operatorname{sen}\psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60"	70'	80"	90°
0°	0,0000	0.0000	0.0000	0,0000	0.0000	0,0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	os745	0,1746	0,1746	0.1746	0,1749	0.1751	0.1762	0.1753	0'1754	0.1754
20°	0,3491	0.3493	0.3499	0,3508	0.3520	0.3533	0.3545	0.3555	0.3561	0.3564
30°	0,5236	0.5243	0.5263	0,5294	0,5334	0.5379	0,5422	0.5459	0.5484	0 5493
40°	0,6981	0,6997	0.7043	0,7116	0.7213	0.7323	0,7436	0.7535	0 7604	0.7629
50°	0,8727	0,8756	0.8842	0,8982	0.9173	0,9401	0,9647	0.9876	1.0044	1.0107
60°	1,0472	1.0519	1,0660	1.0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	13014	1.3170
70°	1,2217	1,2286	1.2495	1,2853	1.3372	1.4068	1.4944	1.5959	1,6918	1,7354
80°	1,3963	1,4056	1.4344	1,4846	1,5597	1.6660	1.8125	2 0119	2.2653	2.4362
90°	1,5708	1,5828	1,6200	1.6858	1,7868	1.9356	2.1565	25046	3,1534	∞

TABLA 45

INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE SEGUNDA ESPECIE

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta, \quad k = \operatorname{sen}\psi$$

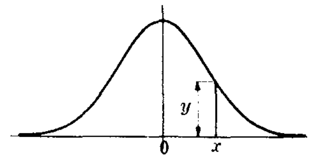
ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60"	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0.0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0 0000	0.0000	0,0000
10°	0,1745	0,1745	os744	0,1743	0.1742	0.1740	0.1739	0.1738	0,1737	0,1736
20°	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0.3420
30°	0,5236	0,5229	05209	0.5179	0,5141	0,5100	0,5061	0.5029	0,5007	0.6000
40°	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50°	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0.8134	0,7954	0,7801	0,7697	0.7660
60°	1,0472	1,0426	1,0290	L0076	0.9801	0,9493	0.9184	0,8914	0.8728	0.8660
70°	1,2217	1,2149	1,1949	1.1632	1.1221	1,0750	1.0266	0,9830	0.9514	0.9397
80°	1,3963	1,3870	1.3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1.0565	1.0054	0.9848
90°	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1.3056	1,2111	1.1184	1.0401	1,0000

TABLA

46

ORDENADAS DE LA CURVA NORMAL TIPIFICADA

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



x	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9
0.0	0,3989	0.3989	0.3989	0,3988	0,3986	0.3984	0,3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0,3970	0.3965	0.3961	0,3956	0.3951	0,3945	0,3939	0,3932	0.3925	0,3918
0.2	0.3910	0.3902	0,3894	0.3885	0,3876	0,3867	0,3857	0.3847	0,3836	0,3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0,3778	0,3765	0,3752	0.3739	0,3725	0.3712	0,3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3663	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0.3572	0,3555	0.3538
0,5	0.3521	0.3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0.6	0.3332	0,3312	0.3292	0,3271	0,3251	0,3230	0.3209	0.3187	0,3166	0,3144
0.7	0.3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0.2989	0,2966	0,2943	0,2920
0.8	0.2897	0,2871	0,2850	0.2827	0.2803	0,2780	0.2766	0,2732	0.2709	0,2685
0.9	0,2661	0.2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0.2492	0.2468	0,2444
1,0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0,2323	0,2299	0.2276	0,2251	0.2227	0,2203
1,1	0.2179	0.2166	0,2131	0.2107	0,2083	0,2059	0.2036	0.2012	0.1989	0,1965
1,2	0.1942	0.1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0.1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0.1714	0.1691	0.1669	0,1647	0.1626	0.1604	0,1582	0,1561	0.1639	0,1518
1,4	0.1497	0,1476	0.1466	0,1435	0.1416	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1.6	0.1296	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0,1200	0,1182	0,1163	0.1146	0,1127
1,6	0.1109	0J092	0J074	0.1067	0.1040	0,1023	0,1006	0,0989	0.0973	0,0957
1.7	0.0940	0.0926	0.0909	0.0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1.8	0.0790	0,0775	0.0761	0.0748	0,0734	0.0721	0,0707	0.0694	0,0681	0,0669
1.9	0.0666	0.0644	0,0632	0.0620	0.0608	0,0596	0,0584	0,0573	0.0662	0,0551
2.0	0.0640	0.0629	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2.1	0.0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0.0379	0,0371	0.0363
2.2	0.0366	0.0347	0,0339	0,0332	0,0325	0.0317	0,0310	0.0303	0,0297	0,0290
2.3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0.0268	0,0252	0.0246	0,0241	0,0235	0.0229
2,4	0.0224	0,0219	0.0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0.01'76	0.0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0.0139
2,6	0,0136	0,0132	0.0129	0,0126	R0122	0,0119	0.0116	0,0113	0,0110	0.0107
2,7	0,0104	0,0101	0.0099	0.0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0.0079	0.0077	0,0075	0.0078	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2.9	0.0060	0,0058	0.0066	0.0066	0,0053	0.0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3.0	0.0044	0,0043	0.0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0.0036	0,0035	0,0034
3.1	0,0033	0,0032	0.0031	0.0030	0.0029	0,0028	0.0027	0,0026	0,0025	0,0025
3.2	0,0024	0.0023	0.0022	0.0022	0,0021	0,0020	0.0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0.0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0.0012	0,0012	0.0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0.0009	0,0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0.0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0.0006	0.0006	0.0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3.7	0,0004	0.0004	0.0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0.0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0.0002	0,0002	0,0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0.0001

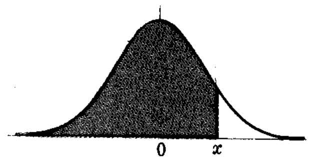
TABLA

47

AREAS BAJO LA CURVA NORMAL TIPIFICADA

de $-\infty$ a x

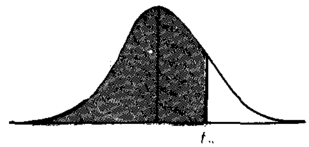
$$\text{fer}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,5000	0,5040	0.5080	0.5120	0.5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,531s	0,5359
os	0.5398	0,5438	0.5478	0,5517	0,5557	0,5596	0.5636	0.5675	0,5714	0.5754
0,2	0.5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0.6179	0.6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0.6628	0,6664	0,6700	0,6736	0.6772	0.6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0.6950	0,6985	0,701s	0.7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0.7224
0,6	0,7258	0.7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0.7549
0,7	0,7580	0.7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0.7823	0,7852
0.8	0,7881	0.7910	0,793s	0,7967	0.7996	0,8023	0,8051	0,8078	0.8106	0,8133
03	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0.8264	0,8289	0,8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0.8665	0.8686	0,8708	0.8729	0,8749	0,8770	0.8790	0,8810	0.8830
1,2	0.8349	0,8869	0,8888	0.8907	0.8925	0,8944	0.8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0.9032	0,904s	0.9066	0.9082	0.9099	0,9115	0.9131	0,9147	0,9162	0.9177
1,4	0.9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0.9265	0,9279	0,9292	0.9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0.9418	0,9429	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0.9505	0,9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0,9554	0.9564	0,9573	0,9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0,9625	0,9633
1,8	0.9641	0,9649	0,9656	0,9664	0.9671	0,9678	0.9686	03693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,971s	0,9726	0,9732	0.9738	0,9744	0,9750	0,9756	0.9761	0.9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0.9788	0,9793	0,9798	0.9803	0,9808	0.9812	0,9817
2,1	0.9821	0.9826	0,9830	0.9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0.9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0.9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0.9887	0,9890
2,3	03893	0.9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0.9909	0,9911	0.9913	0.9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0.9925	0,9927	0,992s	0.9931	0,9932	0.9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0.9945	0,9946	0,9948	0,994s	0.9951	0.9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0.9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0.9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0.9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0.9978	0,997s	03979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0.9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0.9988	0,9989	0,9989	0.9989	0,9990	0.9990
3,1	03990	0.9991	0,9991	0,9991	0,9992	0.9992	0,9992	0,9992	0.9993	0,9993
3,2	03993	03993	0,9994	0,9994	0,9994	0.9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	03995	0.9995	0,9995	0,9996	0,9996	03996	0.9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0.9998	0,9998	0.9998
3,6	03998	03998	0,9999	03999	0.9999	0,999s	0,9999	0,999s	0,9999	0,999s
3,7	03999	03999	03999	03999	0.9999	0,9999	0,9999	03999	0,9999	0,9999
3.8	03999	03999	0,999s	03999	03999	0,999s	0,9999	03999	0,9999	0,999s
3,9	1,0000	l,0000	1,0000	1.0000	l,0000	1.0000	l,0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 48

VALORES PERCENTILES (t_p) DE LA DISTRIBUCION t DE STUDENT para n grados de libertad (área sombreada = p)



n	$t_{0,995}$	$t_{0,99}$	$t_{0,975}$	$t_{0,95}$	$t_{0,90}$	$t_{0,80}$	$t_{0,75}$	$t_{0,70}$	$t_{0,60}$	$t_{0,55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3.08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9.92	6.96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1.64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4.60	3.75	2,78	2.13	1,53	0.941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4.03	3.36	2,57	2,02	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0.132
6	3,71	3.14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3.00	2.36	1,90	1,42	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0.889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3.17	2,76	2.23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3.11	2,72	2.20	1.80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3.06	2,68	2,18	1,78	1.36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1.77	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2.98	2,62	2.14	1.76	1,34	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2.95	2.60	2,13	1,75	1.34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1.34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2.11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1.73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1.32	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2.52	2.08	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2.07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2.49	2.06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2.79	2.48	2.06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1.71	1.32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2.77	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2.76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0.530	0,256	0,127
30	2,75	2.46	2,04	1.70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2.00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2.36	1.98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
∞	2,58	2,33	1.96	1.645	1,28	0,842	0,674	0,524	0,253	0,126

Tomada de: **R. A. Fisher y F. Yates,** *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (6ª. edición, 1963), **Tabla III, Oliver y Boyd Ltd., Edimburgo.** con permiso de los autores y editores.

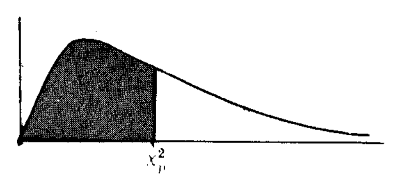
TABLA

49

VALORES PERCENTILES (χ_p^2) DE LA DISTRIBUCION JI-CUADRADO

con n grados de libertad

(área sombreada = p)



n	$\chi^2_{0,995}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0.75}$	$\chi^2_{0,50}$	$\chi^2_{0.25}$	$\chi^2_{0,LO}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,005}$
1	7,88	6.63	5,02	3,84	2.71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,0010	0.0002	0,0000
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0.0506	0,0201	0,0100
3	12,8	11,3	9,35	7.81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11.1	9,49	7.78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12.8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1.15	0,831	3,564	0,412
6	18,5	16,8	14.4	12,6	10,6	7,84	5,35	3.45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9.04	6,35	4,25	2.83	2,17	1,69	1.24	0.989
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10.2	7.34	5,07	3.49	2.73	2,18	1,65	1.34
9	23,6	21,7	19,0	16.9	14.7	11,4	8.34	5,90	4.17	3,33	2,70	2.09	1,73
10	25,2	23,2	20.5	18.3	16.0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21.9	19,7	17,3	13.7	10,3	7.58	5,58	4,57	3.82	3.05	2,60
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6.30	5,23	4,40	3,57	3.07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9.30	7,04	5,89	5,01	4.11	3.57
14	31,3	29,1	26.1	23,7	21.1	17,1	13.3	10,2	7,79	6.57	5,63	4.66	4.07
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,3	32,0	28.8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9.31	7,96	6,91	6.81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12.8	10,1	8,67	7,56	6,41	5.70
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26.0	21,6	17,3	13,7	10,9	9.39	8,23	7,01	6,26
19	38.6	36,2	32.9	30.1	27.2	22,7	18,3	14.6	11.7	10,1	8,91	7,63	6,84
20	40.0	37.6	34,2	31,4	28.4	23,8	19,3	15,5	12.4	10,9	9.59	8,26	7.43
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20.3	16,3	13,2	11,6	10.3	8,90	8.03
22	42,8	40.3	36.8	33.9	30,8	26,0	21.3	17,2	14,0	12,3	11,0	9.54	8.64
23	44,2	41.6	38.1	35,2	32,0	27,1	22,3	18.1	14.8	13.1	11,7	10.2	9,26
24	45,6	43.0	39,4	36,4	33,2	28,2	23.3	19,0	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24.3	19,9	16.5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	48,3	45,6	41,9	38.9	35,6	30,4	25,3	20,8	17.3	15.4	13,8	12,2	11,2
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21.7	18.1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	51,0	48,3	44.5	41,3	37,9	32.6	27.3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33.7	28,3	23.6	19,8	17.7	16.0	14,3	13.1
30	53.7	50,9	47.0	43,8	40,3	34.8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15,0	13.8
40	66,8	63,7	59,3	55.8	51,8	45,6	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22.2	20,7
50	79,5	76,2	71.4	67,5	63,2	56,3	49,3	42,9	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0
60	92,0	88,4	83,3	79.1	74,4	67,0	59,3	52,3	46.5	43,2	40,5	37,5	35,5
70	104,2	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3
80	116,3	112.3	106.6	101.9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60.4	57,2	53.5	51.2
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98.6	89.3	80,6	73,3	69,1	65,6	61.8	59.2
100	140.2	135,8	129,6	124,3	118.5	109,1	99,3	90.1	82.4	77,9	74,2	70,1	67,3

Tomada de: Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the* χ^2 *distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), con permiso del autor y del editor.

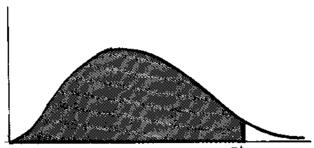
TABLA 50

VALORES PERCENTILES 95' DE LA DISTRIBUCION F

n_1 = grados de libertad para el numerador

n_2 = grados de libertad para el denominador

(área sombreada = 0.95)



n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	161,4	199,5	215.7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,3	248,0	250,1	251,1	252,2	253.0	254.3
2	18.51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,46	19.46	19,47	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9.28	9,12	9.01	8,94	8,85	8.74	8,69	8,66	8,62	8,60	8.58	8,56	8.53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6.04	5,91	5,84	5,80	5,75	5,71	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5.79	5,41	5.19	5.05	4,95	4,82	4,68	4.60	4,56	4,50	4,46	4,44	4.40	4.36
6	5,99	5.14	4,76	4.53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,87	3,81	3.77	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4.12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,44	3,38	3.34	3,32	3,28	3.23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3.69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,15	3.08	3,05	3,03	2,98	2,93
9	5,12	4.26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,93	2,86	2,82	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3.48	3,33	3.22	3.07	2,91	2.82	2,77	2,70	2,67	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,65	2,57	2,53	2.50	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3.26	3,11	3.00	2,85	2.69	2,60	2,54	2,46	2,42	2,40	2.35	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3.18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,51	2,46	2,38	2,34	2,32	2,26	2,21
14	4.60	3,74	3,34	3.11	2,96	2,85	2,70	2.53	2,44	2.39	2.31	2.27	2,24	2,19	2.13
15	4.54	3,68	3.29	3,06	2,90	2.79	2,64	2,48	2.39	2,33	2,25	2,21	2,18	2,12	2.07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,28	2.20	2,16	2,13	2,07	2.01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2.81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,23	2,15	2,11	2.08	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2.34	2,25	2,19	2,11	2,07	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2.90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,15	2,07	2,02	2,00	1,94	1.88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,12	2.04	1,99	1,96	1.90	1.84
22	4,30	3,44	3,05	2.82	2,66	2,55	2,40	2.23	2,13	2,07	1,98	1,93	1,91	1.84	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2.62	2,51	2,36	2,18	2,09	2,03	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
26	4,23	3,37	2.98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2.05	1,99	1.90	1.85	1,82	1,76	1,69
28	4,20	3.34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	2,02	1,96	1,87	1,81	1,78	1,72	1,65
30	4.17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
40	4,08	3.23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1.51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2.13	1,95	1,85	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2,37	2,25	2,10	1.92	1.81	1,75	1,65	1,59	1,56	1.48	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2.50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,72	1,62	1,56	1,53	1,45	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2.48	2,33	2,21	2,05	1,88	1,77	1,70	1.60	1,54	1,51	1,42	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2,19	2,03	1,85	1.75	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
150	3,91	3.06	2.67	2.43	2.27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,64	1,54	1,47	1,44	1,34	1.22
200	3,89	3,04	2.65	2,41	2,26	2.14	1,98	1,80	1,69	1,62	1,52	1,45	1,42	1,32	1.19
1000	3,86	3,02	2.62	2.39	2.23	2,12	1.96	1,78	1,67	1,60	1,49	1,42	1,38	1,28	1.13
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2.09	1.94	1,75	1.64	1,57	1,46	1,40	1,32	1,24	1.00

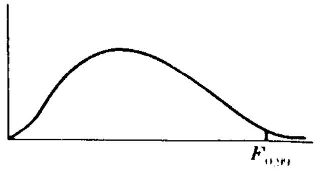
Tomada de: G. W. Snedecor y W. G. Cochran, *Statistical Methods* (6ª. edición, 1967), imprenta de la Universidad del Estado de Iowa, Ames, Iowa, con permiso de los autores y del editor.

TABLA

51

VALORES PERCENTILES 99° DE LA DISTRIBUCION F

n_1 = grados de libertad para el numerador
n_2 = grados de libertad para el denominador
(área sombreada = 0,99)



n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	4L052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6208	6258	6286	6302	6334	6366
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99.33	99.36	99.42	99,44	99,45	99,47	99,48	99.48	99.49	99.50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,41	27,49	27,05	28.63	26,69	26.50	26.41	26.35	26,23	26.12
4	21,20	18.00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	14,02	13.83	13.74	13,69	13,57	13.46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,68	9,55	9,38	9,29	9,24	9.13	9.02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7.52	7,39	7,23	7.14	7,09	6.99	6.88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7.19	6,84	6,47	6,27	6,15	5,98	5.90	5.85	5,75	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7.01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,36	5.20	5.11	5,06	4.96	4.86
9	10,56	8.02	6,99	6,42	6,06	5.80	5,47	5,11	4.92	4,ao	4.64	4.56	4.51	4.41	4.31
10	10,04	7.56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,41	4,25	4.17	4,12	4.01	3.91
11	9,05	7,20	6,22	5,67	5,32	5.07	4,74	4,40	4,21	4,10	3,94	3.86	3.80	3.70	3.60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3.86	3.70	3,61	3,56	3,46	3,36
13	9,07	6.70	5,74	5,20	4.86	4,62	4,30	3,96	3.78	3,67	3.51	3.42	3.37	3.27	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,51	3,34	3.26	3.21	3.11	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4.00	3,67	3,48	3,36	3,20	3.12	3,07	2.97	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,25	3.10	3,01	2.96	2,86	2.75
17	8,40	6,11	5,18	4.67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,16	3,00	2,92	2,86	2.76	2.65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4.25	4,01	3,71	3,37	3,19	3,07	2.91	2.83	2.78	2.68	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4.17	3,94	3.63	3,30	3,12	3.00	2.84	2,76	2.70	2.60	2.49
20	8,10	5,85	4,94	4.43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,94	2,77	2,69	2.63	2.53	2.42
22	7.94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,83	2,67	2.58	2,53	2,42	2.31
24	7,82	5,61	4.72	4,22	3,90	3,67	3,36	3.03	2,85	2,74	2.58	2.49	2,44	2.33	2.21
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,77	2.66	2.50	2,41	2.36	2.25	2.13
28	7.64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,23	2.90	2.71	2.60	2,44	2,35	2.30	2.18	2.06
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2.84	2,66	2,55	2.38	2,29	2,24	2.13	2,01
40	7,31	5,18	4.31	3,83	3.51	3,29	2,99	2,66	2,49	2,37	2.20	2,11	2.05	1,94	1,81
50	7,17	5.06	4,20	3,72	3,41	3,18	2.88	2,56	2,39	2,26	2,10	2,00	1.94	1.82	1,68
60	7,08	4.98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2.32	2,20	2,03	1,93	1.87	1.74	1,60
70	7,01	4,92	4,08	3.60	3,29	3.07	2,77	2,45	2,28	2,15	1.98	l,aa	1,82	1,69	1.53
80	6.96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2.74	2.41	2.24	2,11	1.94	1,84	1,78	1,65	1.49
00	6,90	4.82	3.98	3.51	3.20	2,99	2,69	2,36	2,19	2.06	1,89	1.79	1.73	1,59	1.43
50	6,81	4,75	3.91	3.44	3,14	2.92	2,62	2,30	2.12	2,00	1,83	1.72	1.66	1.51	1.33
00	6,76	4.71	3,88	3,41	3.11	2.90	2.60	2,28	2.09	1,97	1,79	1,69	1,62	1.48	1.28
00	6,70	4.66	3.83	3,36	3.06	2.85	2.55	2.23'	2,04	1.92	1,74	1,64	1,57	1.42	1.19
∞	6,64	4,60	3.78	3.32	3,02	2,80	2,51	2.18	1.99	1,87	1,69	1,59	1-.52	1.36	1,00

Tomada de: G. W. Snedecor y W. G. Cochran, *Statistical Methods* (6ª. edición, 1967), imprenta de D Universidad del Estado de Iowa, Ames, Iowa, con permiso de los autores y del editor.

TABLA

52

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
63298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

INDICE DE SIMBOLOS Y NOTACIONES ESPECIALES

En la lista que sigue se encuentran los símbolos y notaciones particulares que se han empleado en este manual junto con las paginas en las cuales se halla su definición o en las que aparecen por primera vez. Los casos en los cuales un mismo signo pueda dar lugar a más de una sola interpretación podrán ser aclarados por el contenido.

Símbolos

Ber, (x), $\mathrm{Bei}_n(x)$	140
$B(m, n)$	función beta, 103
B_n	números de Bernoulli, 114
$C(x)$	integral de coseno de Fresnel, 184
$Ic(x)$	integral de coseno, 184
e	base de los logaritmos naturales, 1
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	vectores unitarios en coordenadas curvilíneas, 124
fer (2)	función de error, 163
$\mathrm{fcer}(x)$	función complementaria de error, 163
$E = E(k, \pi/2)$	integral elíptica completa de segunda especie, 179
$E(k, \phi)$	integral elíptica incompleta de segunda especie, 179
$Ie(x)$	integral exponencial, 163
E_n	números de Euler, 114
$F(a, b; c; x)$	función hipergeométrica, 166
$F(k, \phi)$	integral elíptica incompleta de primera especie, 179
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier, 175, 176
h_1, h_2, h_3	factores de escala en coordenadas curvilíneas, 124
$H_n(x)$	polinomios de Hermite, 151
$^{(2)}(x)$	funciones de Hankel de primera y segunda especies, 136
i	unidad imaginaria, 21
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	vectores unitarios en coordenadas rectangulares, 117
$I_n(x)$	función modificada de Bessel de primera especie, 136
$J_n(x)$	función de Bessel de primera especie, 136
$K = F(k, \pi/2)$	integral elíptica completa de primera especie, 179
$\mathrm{Ker}_n(x)$, Kei, (x)	140
$K_n(x)$	función modificada de Bessel de segunda especie, 139
$\ln x$ 0 $\log_e x$	logaritmo natural de x, 24
$\log x$ 0 $\log_{10} x$	logaritmo común de x, 23
$L_n(x)$	polinomios de Laguerre, 153
$L_n^m(x)$	polinomios asociados de Laguerre, 155
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$	transformada de Laplace y transformada inversa de Laplace, 161
$P_n(x)$	polinomios de Legendre, 146
$P_n^m(x)$	funciones asociadas de Legendre de primera especie, 149
$Q_n(x)$	funciones de Legendre de segunda especie, 148
$Q_n^m(x)$	funciones asociadas de Legendre de segunda especie, 150
r	coordenada cilíndrica, 49
r	coordenada polar, 22, 36
r	coordenada esférica, 50
$S(x)$	integral de seno de Fresnel, 184
$Is(x)$	integral de seno, 183
$T_n(x)$	polinomios de Chebyshev de primera especie, 157
$U_n(x)$	polinomios de Chebyshev de segunda especie, 156
$Y_n(x)$	función de Bessel de segunda especie, 136

Símbolos Griegos

γ	constante de Euler, 1
$\Gamma(x)$	función gamma, 1, 101
$\zeta(x)$	función zeta de Riemann, 194
θ	coordenada cilíndrica, 49
θ	coordenada polar, 22, 36
θ	coordenada esférica, 50
π	1
ϕ	coordenada esférica, 50
$\Phi(p)$	la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$, $\Phi(0) = 0$, 137
$\Phi(x)$	función de distribución de la probabilidad, 189

Notaciones

$A = B$	*A es* igual a *B*
$A > B$	*A es* mayor que *B* o *B es menor que A*
$A < B$	*A* es menor que *B* o *B* es mayor que *A*
$A \geqq B$	*A es* mayor que o igual a *B*
$A \leqq B$	*A es* menor que o igual a *B*
$A \approx B$	*A* es aproximadamente igual a *B*
$A \sim B$	A es asintótico a *B* o *A/B* se aproxima a 1, 102
$\|A\|$	valor absoluto de *A* $= \begin{cases} A & \text{si } A \geqq 0 \\ -A & \text{si } A \leqq 0 \end{cases}$
$n!$	factorial de *n*, 3
$\binom{n}{k}$	coeficientes binomiales, 3
$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, etc.	derivadas de *y* o de *f(x)* con respecto a *x*, 53, 55
$D^p = \frac{d^p}{dx^p}$	*p*-ésima derivada con respecto a *x*, 55
dy	diferencial de *y*, 55
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, etc.	derivadas parciales, 56
$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$	Jacobiano, 125
$\int f(x)\, dx$	integral indefinida, 57
$\int_a^b f(x)\, dx$	integral definida, 94
$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$	integral curvilínea de A a lo largo de C, 121
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	producto escalar de A y B, 117
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	producto vectorial de A y B, 118
∇	operador nabla, 120
$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$	operador laplaciano, 120
$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2)$	operador bi-armónico. 120

INDICE

Schaum

• El objetivo de este manual es presentar un conjunto de fórmulas y tablas matemáticas que seguramente serán de gran valor para los estudiantes e investigadores en materias como matemáticas, física, ingeniería y otras.

• Los temas tratados oscilan desde los elementales hasta los avanzados.

• Entre los temas elementales figuran el álgebra, la geometría, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo. Entre, los temas avanzados figuran las ecuaciones diferenciales, el análisis vectorial, las series de Fourier, las funciones gama y beta, las funcionés de Bessel y de Legrende, las transformadas de Laplace y Fourier, las funciones elípticas y algunas otras funciones especiales importantes.

• Este manual está dividido en dos partes principales: en 'la primera están contenidas las fórmulas matemáticas al tiempo que se tratan otros asuntos, tales como definiciones, teoremas, gráficas, diagramas, etc., que son esenciales para. la correcta comprensión y aplicación de las fórmulas. La segunda parte'contiene tablas numéricas, tales como los valor&& las funciones elementales (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, hiperbólicas, etc.).

ISBN 970-10-2095-2

McGraw-Hill Interamericana
Editores, S.A. de C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies