série de matemática monografía no. 17

INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL: ESPAÇOS DE BANACH E CÁLCULO DIFERENCIAL

Programa Regional de Desenvolvimiento Científico e Tecnológico
Departamente de Assuntos Científicos
Secretaría-Geral da
Organización dos Estados Americanos

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\lim_{m,n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 \Longrightarrow \lim_{m \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL: ESPAÇOS DE BANACH E CÁLCULO DIFERENCIAL

por

Leopoldo Nachbin
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, R.J., BRASIL

e

University of Rochester
Rochester, N.Y., ESTADOS UNIDOS

Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Departamento de Assuntos Científicos
Secretaria-Geral da
Organização dos Estados Americanos
Washington, D.C.—1976

Esta monografia foi preparada para publicação no Departamento de Assuntos Científicos da Secretaria-Geral da Organização dos Estados Americanos.

Coordenadora da Série: Eva V. Chesneau

Assessor Técnico: Dr. César Carranza
Pontifícia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú

Homenagem de saudade a meu cunhado

UBYRAJARA MARTINS

Aos leitores

O programa de monografias científicas é um aspecto do amplo trabalho da Organização dos Estados Americanos, sob a responsabilidade do Departamento de Assuntos Científicos da Secretaria-Geral, para cujo financiamento contribui de maneira substancial o Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Concebido pelos Chefes de Estado Americanos em sua reunião levada a efeito em Punta del Este, Uruguai, em 1967, e estruturado nos têrmos das deliberações e mandatos da Quinta Reunião do Conselho Cultural Interamericano, realizada em Maracay, Venezuela, em 1968, o Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico expressa as aspirações dos Chefes de Estado Americanos no sentido de pôr a ciência e a tecnologia a serviço dos povos latino-americanos.

Demonstrando grande visão, aquelas altas autoridades reconheceram que a ciência e a tecnologia estão transformando a estrutura econômica e social de muitos países e que, no momento, por serem instrumentos indispensáveis do progresso da América Latina, necessitam de um impulso sem precedente.

O Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico é um complemento dos esforços nacionais dos países latino-americanos e orienta-se no sentido da adoção de medidas que permitam o desenvolvimento da pesquisa, do ensino e da difusão da ciência e da tecnologia; a formação e aperfeiçoamento de pessoal científico; o intercâmbio de informações; e a transferência e adaptação aos países latino-americanos do conhecimento e das tecnologias oriundas de outras regiões.

No cumprimento dessas metas fundamentais, o programa de monografias representa uma contribuição direta para o ensino das ciências em níveis educacionais que abrangem importantíssimos setores da população e, ao mesmo tempo, concorre para a divulgação do saber científico.

A coleção de monografias científicas consta de quatro séries, em espanhol e em português, sôbre temas de física, química, biologia e matemática. Desde o comêço, destinaram-se as monografias a professôres e alunos de ciência do ensino médio e dos primeiros anos do ensino superior. De uns e de outros já se tem recebido testemunho do bom acolhimento a elas dispensado.

Êste prefácio proporciona oportunidade ao Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico da Secretaria-Geral da Organização dos Estados Americanos para expressarem seus agradecimentos ao Doutor Leopoldo Nachbin, autor desta monografia, e a tôdas as pessoas que com interêsse e boa vontade contribuam para sua divulgação.

Julho de 1976

ÍNDICE

Página

Aos Leitores v

Apresentação 1

PRIMEIRA PARTE: ESPAÇOS DE BANACH

CAPÍTULO 1. Espaços Normados 3

CAPÍTULO 2. Espaços de Banach 9

CAPÍTULO 3. Subespaços Normados 17

CAPÍTULO 4. Normas Equivalentes 21

CAPÍTULO 5. Espaços de Aplicações Lineares Contínuas.. 27

CAPÍTULO 6. Formas Lineares Contínuas 35

CAPÍTULO 7. Isometrias 41

CAPÍTULO 8. Produtos Cartesianos e Somas Diretas 43

CAPÍTULO 9. Produtos Cartesianos Normados 47

CAPÍTULO 10. Somas Diretas Topológicas 49

CAPÍTULO 11. Espaços Normados de Dimensão Finita 51

CAPÍTULO 12. Espaços de Aplicações Multilineares Contínuas 61

SEGUNDA PARTE: CÁLCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO 13. Cálculo Diferencial em Espaços Normados. 67

CAPÍTULO 14. Diferencial em Espaços Normados 71

CAPÍTULO 15. Aplicação Afim Contínua Tangente 75

CAPÍTULO 16. Algumas Regras do Cálculo Diferencial ... 77

CAPÍTULO 17. Caso de Uma Variável Escalar 87

CAPÍTULO 18. Teorema dos Acréscimos Finitos de Lagrange 89

CAPÍTULO 19. Aplicações com Diferenciais Nulas ou Constantes 97

CAPÍTULO 20. Permutabilidade entre Diferenciação e Limite 99

CAPÍTULO 21. Aplicações Continuamente Diferenciáveis .. 103

CAPÍTULO 22. Diferenciação Parcial 105

CAPÍTULO 23. Identificações Naturais para Aplicações Multilineares 113

CAPÍTULO 24. Diferenciação de Ordem Superior 119

Bibiliografia 127

Índice da Terminologia 129

Índice da Notação 131

APRESENTAÇÃO

Dos nossos leitores, admitimos como conhecidos apenas os rudimentos de álgebra linear e de espaços métricos. Para os que se iniciem no assunto, sugerimos o nosso livro de "Introdução à Álgebra", publicado pela Editora McGraw-Hill do Brasil, para os aspectos usuais de notação e terminologia.

O texto desta monografia está subdividido em duas partes, de doze seções cada uma.

A primeira parte faz uma introdução aos espaços de Banach. Os métodos da Análise Funcional aqui descritos transparecem especialmente no exemplo 20, §11. Trata-se aí de um resultado interessante, cujo enunciado nada envolve a priori de Análise Funcional, mas que se atinge por uma confluência do Teorema de Ascoli sobre a compacidade em espaços de funções contínuas, do Teorema de Riesz sobre a finitude da dimensão de um espaço normado localmente compacto, bem como do Teorema de Tychonoff sobre a unicidade da topologia de um espaço normado de dimensão finita.

A segunda é um noviciado no Cálculo Diferencial em espaços normados, feito de modo intrínseco, ou seja, independentemente de sistemas de coordenadas. Apresenta um método de conteúdo geométrico, adequado em dimensão finita, ou infinita. À medida que a linguagem dos espaços vetoriais for penetrando no ensino médio mediante a álgebra linear, como já ocorre, a forma aqui descrita do Cálculo Diferencial será gradativamente adotada em seus cursos de iniciação, guardadas as devidas proporções de nível, é claro.

Nesta exposição, pomos em relevo idéias e métodos, partindo do princípio de que as aplicações da Matemática, na época presente, requerem uma atividade altamente intelectual.

O livro compreende exemplos, exercícios e observações que, por vezes, apresentam material que vai além do nível do texto; são informações úteis, que podem ser omitidas numa primeira leitura.

A bibliografia no final é um guia para leituras ou consultas posteriores. Como o presente texto, ela deverá servir aos interessados no uso dos métodos da Análise Funcional em Economia, em Engenharia, em Estatística, em Física, em Informática, em Matemática, etc., em que eles se aplicam, como ora se verifica de modo crescente, cada vez mais refinado.

Devemos ao Professor Jorge Alberto Barroso, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, valiosas sugestões e grande estímulo no preparo desta edição patrocinada pela Organização dos Estados Americanos. O seu interesse foi decisivo para nós.

O presente volume reproduz, com acréscimos, cortes e correções, a matéria apresentada numa série de lições de introdução à Análise Funcional, que tivemos oportunidade de ministrar na Universidade de Brasília, durante os meses de janeiro e fevereiro de 1967. Foi um curso de verão, destinado a professores e alunos de Belo Horizonte, Brasília, Goiânia, Rio Claro e Salvador. O texto inicial foi redigido pelo Professor Roberto Mendes, da Universidade Federal de Minas Gerais, a partir de suas notas de aula. É um prazer agradecer-lhe.

Finalmente, agradecemos ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, pela ajuda no preparo deste volume.

1

ESPAÇOS NORMADOS

No que se segue, representaremos sempre por E (salvo indicação expressa em contrário) um espaço vetorial real ou complexo, de dimensão finita ou infinita. Quando o corpo dos escalares não for especificado, subentender-se-á que os resultados são válidos para os dois casos.

Usaremos a letra **K** para representar, indiferentemente, o corpo **R** dos números reais ou o corpo **C** dos números complexos. Observe-se que, se E for um espaço vetorial complexo, por restrição dos escalares de **C** a **R** obter-se-á um espaço vetorial real; além disso, se E tiver dimensão finita n sobre **C**, o correspondente espaço vetorial real terá dimensão $2n$ sobre **R**. Diz-se que esse espaço vetorial real é *subjacente* ao espaço vetorial complexo E, sendo representado por $E_{\mathbf{R}}$.

Definição 1. Uma *norma* em E é uma função real

$$x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$$

definida em E, tal que, quaisquer que sejam $x, y \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbf{K}$, se tenha:

1) $\|x\| \geq 0$ (positividade);

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular);

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogeneidade);

4) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$ (separação).

Temos as seguintes conseqüências imediatas:

a) Se tomarmos $\lambda = 0$, a propriedade 3) nos dará

$$\|0\| = 0;$$

então a propriedade 4) pode ser assim enunciada:

$$\|x\| = 0 \text{ equivale a } x = 0.$$

b) Fazendo-se $\lambda = -1$ na propriedade 3), vem

$$\|-x\| = \|x\|;$$

em particular, tem-se

$$\|y - x\| = \|x - y\|.$$

c) Notemos que

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|.$$

De fato, aplicando-se a propriedade 2) a

$$x = (x - y) + y,$$

vem que

$$\|x\| \le \|x - y\| + \|y\|,$$

donde

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|;$$

invertendo-se os papéis de x e y, vem

$$\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|,$$

donde

$$\|x\| - \|y\| \ge -\|x - y\|.$$

Então

4 $$-\|x - y\| \le \|x\| - \|y\| \le \|x - y\|,$$

donde a tese.

Definição 2. Um *espaço normado* é um espaço vetorial no qual está fixada uma norma.

Observação 1. Define-se, também, o conceito de seminorma; basta omitir a propriedade 4) da definição de uma norma. Esse conceito é importante na teoria dos espaços vetoriais topológicos.

Proposição 1. Todo espaço normado E é um espaço métrico relativamente à métrica natural d definida por

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

se $x, y \in E$. Além disso, quaisquer que sejam $x, y, z \in E$ e para todo $\lambda \in$ $\in \mathbf{K}$, tem-se

$$\|x\| = d(0, x)$$

bem como:

a) $d(x + z,\ y + z) = d(x, y)$ (invariância por translação);

b) $d(\lambda x,\ \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$ (homogeneidade).

Demonstração. A verificação dos axiomas de uma métrica é trivial. Por exemplo, a desigualdade triangular

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

resulta imediatamente do fato de ser

$$z - x = (y - x) + (z - y),$$

donde

$$\|z - x\| \leq \|y - x\| + \|z - y\|.$$

Para provar a), temos

$$d(x + z,\ y + z) = \|(y + z) - (x + z)\| =$$
$$= \|y - x\| = d(x,y);$$

e para b), observemos que

$$d(\lambda x,\ \lambda y) = \|\lambda y - \lambda x\| =$$
$$= \|\lambda(y - x)\| = |\lambda| \cdot \|y - x\| = |\lambda| \cdot d(x,y),$$

como queríamos. QED

Entre as normas arbitrárias e as métricas invariantes por translação e homogêneas num espaço vetorial, existe uma correspondência biunívoca natural, conforme a proposição 1 acima e o exercício 1 abaixo.

Exercício 1. Se, em um espaço vetorial E, estiver definida uma métrica d invariante por translação e homogênea, fazendo

$$\|x\| = d(0,x)$$

se $x \in E$, obtém-se uma norma sobre E e, quaisquer que sejam $x, y \in E$, tem-se

$$d(x,y) = \|y - x\|.$$

Observação 2. Todo espaço normado E é, de modo natural, um espaço topológico, visto ser um espaço métrico; isto é, em E têm sentido os conceitos de subconjunto aberto, subconjunto fechado, limite, etc. Diz-se que essa topologia natural é definida pela norma sobre E. Entretanto, é possível definir outras topologias importantes num espaço normado, que podem ser diferentes da topologia da norma, como, por exemplo, a chamada topologia fraca, que não consideraremos aqui.

Exercício 2. Um espaço vetorial $E \neq 0$, com a métrica discreta d definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = y, \\ 1 \text{ se } x \neq y, \end{cases}$$

onde $x, y \in E$, não é um espaço normado.

O exercício 2 acima dá-nos um exemplo de espaço vetorial e métrico que não é espaço normado; isto é, cuja métrica não resulta de nenhuma norma no sentido da proposição 1.

A fim de fixar a notação, enunciemos a definição que se segue.

Definição 3. Seja E um espaço normado. Então:

1) A *bola aberta* $B_r(a)$ de *centro* $a \in E$ e *raio* $r \geq 0$ é o conjunto dos $x \in E$ tais que

$$d(a, x) < r, \quad \text{ou} \quad \|x - a\| < r.$$

2) A *bola fechada* $\overline{B}_r(a)$ de *centro* $a \in E$ e *raio* $r \geq 0$ é o conjunto dos $x \in E$ tais que

$$d(a, x) \leq r, \quad \text{ou} \quad \|x - a\| \leq r.$$

3) A *esfera* $S_r(a)$ de *centro* $a \in E$ e *raio* $r \geq 0$ é o conjunto dos $x \in E$ tais que

$$d(a, x) = r, \quad \text{ou} \quad \|x - a\| = r.$$

Exercício 3. Em um espaço normado E, se $r > 0$, a aderência da bola aberta $B_r(a)$ é a bola fechada $\overline{B}_r(a)$; e o interior da bola fechada
6 $\overline{B}_r(a)$ é a bola aberta $B_r(a)$.

A propósito do exercício 3 acima, note-se que, em um espaço métrico qualquer, não se têm sempre as igualdades afirmadas; e sim apenas as inclusões da aderência de $B_r(a)$ em $\overline{B}_r(a)$ e de $B_r(a)$ no interior de $\overline{B}_r(a)$.

Proposição 2. Seja E um espaço normado. As aplicações

1) $(x, y) \in E \times E \to x + y \in E$,

2) $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \to \lambda x \in E$,

3) $(x, y) \in E \times E \to d(x, y) = \|y - x\| \in \mathbf{R}$,

4) $x \in E \to \|x\| \in \mathbf{R}$,

são todas contínuas.

Demonstração. Vejamos por partes:

1) Seja $(a, b) \in E \times E$ um ponto qualquer; e $a + b \in E$ sua imagem. Para provar que a aplicação em causa é contínua em (a, b), basta mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_\delta(a)$ e todo $y \in B_\delta(b)$, se tenha $x + y \in B_\varepsilon(a + b)$. De maneira equivalente, temos de provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x + y) - (a + b)\| < \varepsilon$$

sempre que

$$\|x - a\| < \delta, \quad \|y - b\| < \delta.$$

Tomando $\delta = \varepsilon/2$, temos

$$\|(x + y) - (a + b)\| \leq$$
$$\leq \|x - a\| + \|y - b\| < \delta + \delta = \varepsilon.$$

2) Sejam $\alpha \in \mathbf{K}$, $a \in E$ quaisquer. Provemos que a aplicação em causa é contínua em (α, a). Para isso, é preciso mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\lambda x - \alpha a\| < \varepsilon$$

sempre que

$$|\lambda - \alpha| < \delta, \quad \|x - a\| < \delta.$$

Temos a identidade

$$\lambda x - \alpha a = (\lambda - \alpha)a + \alpha(x - a) + (\lambda - \alpha)(x - a),$$

da qual resulta

$$\|\lambda x - \alpha a\| \leq |\lambda - \alpha| \cdot \|a\| + |\alpha| \cdot \|x - a\| + |\lambda - \alpha| \cdot \|x - a\|,$$

donde, escolhendo-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno, vem

$$\|\lambda x - \alpha a\| < \delta \cdot \|a\| + |\alpha| \cdot \delta + \delta^2 \leq \varepsilon.$$

3) A função em causa, sendo a métrica de um espaço métrico, é contínua. Trata-se de propriedade conhecida da teoria dos espaços métricos.

4) Se, na função do caso anterior, tomarmos $y = 0$, obteremos a função do caso atual, que é contínua devido à continuidade da função anterior. Trata-se da propriedade, conhecida na teoria dos espaços métricos, de que uma aplicação contínua de duas variáveis é parcialmente contínua em cada variável.

A demonstração está completa. QED

Corolário. Sejam fixados $a \in E$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $\alpha \neq 0$. A aplicação

$$x \in E \mapsto \alpha x + a \in E$$

é um homeomorfismo de E sobre E.

Demonstração. Se $\alpha = 1$, temos a translação $x \mapsto x + a$. Esta aplicação é contínua, como resulta da parte 1) da proposição 2, tomando-se $y = a$.

Se $a = 0$, obtém-se a homotetia $x \mapsto \alpha x$, que é contínua, como se vê tomando $\lambda = \alpha$ na parte 2) da proposição 2.

A aplicação $x \mapsto \alpha x + a$, sendo a composta das aplicações $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto x + a$, que são contínuas, é também contínua.

Ora,

$$x = \frac{1}{\alpha} y + \frac{-a}{\alpha} \text{ se } y = \alpha x + a.$$

Resulta que $x \mapsto \alpha x + a$ é uma bijeção entre E e E, tendo uma inversa que é

$$y \mapsto \frac{1}{\alpha} y + \frac{-a}{\alpha};$$

como esta inversa tem a mesma forma que a aplicação dada, ela também é contínua. Logo $x \mapsto \alpha x + a$ é um homeomorfismo. QED

8

2

ESPAÇOS DE BANACH

Apliquemos a um espaço normado E alguns conceitos familiares da teoria dos espaços métricos.

Seja (x_n) uma sucessão em E. Diz-se que (x_n) *converge para* $x \in E$ quando

$$\lim_n d(x, x_n) = \lim_n \|x_n - x\| = 0,$$

escrevendo-se

$$x = \lim_n x_n;$$

então x é univocamente determinado por (x_n).

A sucessão (x_n) é *de Cauchy* se

$$\lim_{m,n} d(x_m, x_n) = \lim_{m,n} \|x_n - x_m\| = 0.$$

É um fato conhecido da teoria dos espaços métricos que toda sucessão convergente é de Cauchy. A recíproca, porém, não é verdadeira; existem espaços métricos e, até mesmo, espaços normados (de dimensão infinita), nos quais uma sucessão de Cauchy pode não convergir, como veremos.

Um espaço normado diz-se *completo* se toda sucessão de Cauchy nesse espaço for convergente. Como veremos, todo espaço normado de dimensão finita é completo.

Definição 4. Um *espaço de Banach* é um espaço normado que é completo.

Observação 3. Do ponto de vista da Matemática, os espaços métricos mais importantes são completos; então, dentre os espaços normados, os mais importantes são os de Banach. Na teoria dos espaços métricos, estuda-se um método natural pelo qual, a todo espaço métrico, se associa o seu *completamento*, que é um espaço métrico completo. Quando aplicado a um espaço normado, o completamento é um espaço de Banach. Não consideraremos aqui esse assunto.

Vejamos alguns exemplos simples e importantes de espaços de Banach.

Exemplo 1. O espaço vetorial $\mathbf{K}$ (isto é, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) será um espaço de Banach se, para $x \in \mathbf{K}$, definirmos

$$\|x\| = |x|.$$

O espaço vetorial $\mathbf{K}^2 = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$ será um espaço de Banach se, para

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2,$$

definirmos

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

Se, além disso,

$$y = (y_1, y_2) \in \mathbf{K}^2,$$

então

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2}.$$

De modo mais geral, o espaço vetorial $\mathbf{K}^n$, onde $n = 1, 2, \ldots,$ será um espaço de Banach se definirmos, para

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,$$

a norma por

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$

Se, além disso,

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}^n,$$

então

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \ldots + |y_n - x_n|^2}.$$

Essas asserções (de que os axiomas de uma norma são satisfeitos, sendo o espaço completo) requerem verificação, que omitiremos. Os casos de $\mathbf{R}^n$ e de $\mathbf{C}^n$, com as normas acima, recebem os nomes de *espaço euclidiano* e *espaço unitário*, respectivamente.

Exemplo 2. Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Para

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,$$

definamos a sua norma por

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Mostra-se que $\mathbf{K}^n$ é um espaço de Banach.

Observação 4. Se $p = 2$, temos no exemplo 2 o caso do exemplo 1.

Observação 5. Se $p = 1$, então

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|;$$

nesse caso, a demonstração de que $\mathbf{K}^n$ é normado é simples, pois a desigualdade triangular é facilmente verificada.

Observação 6. Se $0 < p < 1$ e $n > 1$ no exemplo 2, constata-se facilmente que a desigualdade triangular é falsa; isto é, $\mathbf{K}^n$ não é um espaço normado em tal caso.

Exemplo 3. Seja $\mathbf{K}^n$ com a norma definida por

$$\|x\|_\infty = \sup \{ |x_1|, \ldots, |x_n| \}$$

para

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n.$$

Então $\mathbf{K}^n$ é um espaço de Banach, como é fácil verificar. O índice ∞ é devido ao fato de que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p,$$

conforme o exercício 4 abaixo.

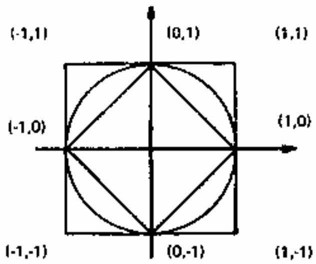
Exercício 4. Se $p \geq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ e $x \in \mathbf{K}^n$, tem-se

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \cdot \|x\|_\infty;$$

daí

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p.$$

Para visualizar melhor a geometria de um espaço normado, é conveniente considerar a *bola unitária* (aberta, ou fechada), ou seja, a bola de centro 0 e raio 1 do mesmo espaço. A figura abaixo ilustra as bolas unitárias que correspondem às normas definidas em $\mathbf{R}^2$ nos três casos notáveis de $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$.



O quadrado de vértices

$$(1, 0), \qquad (0, 1), \qquad (-1, 0), \qquad (0, -1)$$

corresponde à bola unitária dada por

$$\|x\|_1 \leq 1.$$

O disco de centro na origem e raio 1 corresponde à bola unitária dada por

$$\|x\|_2 \leq 1.$$

O quadrado de vértices

$$(1, 1), \qquad (-1, 1), \qquad (-1, -1), \qquad (1, -1),$$

corresponde à bola unitária dada por

$$\|x\|_\infty \leq 1.$$

Observação 7. Em $\mathbf{K}^n$, verifica-se que $\|x\|_p$ decresce quando p cresce; por isso, a respectiva bola unitária de $\mathbf{K}^n$ cresce quando p cresce.

Observação 8. Em $\mathbf{K}^n$, verifica-se que

$$\frac{\|x\|_p}{n^{1/p}}$$

cresce quando p cresce; isso tem uma interpretação geométrica simples na linguagem de homotetia de bolas unitárias, que deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 4. Seja o espaço l_p, com $p \geq 1$ um número real fixo. Por definição, um elemento de l_p é uma sucessão

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

tal que $x_n \in \mathbf{K}$ para todo n e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Então l_p é um espaço vetorial com as seguintes leis

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \ldots),$$

onde

$$y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$$

pertence a l_p e $\lambda \in \mathbf{K}$. Fazendo

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p},$$

obtém-se uma norma em l_p. Demonstremos, por exemplo, a desigualdade triangular em l_p a partir do caso finito do exemplo 2. Tem-se, para todo n,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{1/p},$$

resultando que

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{1/p},$$

como queríamos. Prova-se que l_p é um espaço de Banach.

Exemplo 5. Consideremos o espaço l_∞. Por definição, um elemento de l_∞ é uma sucessão limitada

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

tal que $x_n \in \mathbf{K}$ para todo n. Então l_∞ é um espaço vetorial com leis vetoriais definidas de modo análogo ao do exemplo 4. Fazendo

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|,$$

obtém-se uma norma em l_∞, como é fácil verificar. Prova-se que l_∞ é um espaço de Banach.

Exemplo 6. Consideremos um intervalo compacto (isto é, limitado e fechado) $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$ e o espaço $\mathcal{C}(I)$ das funções contínuas de I em $\mathbf{K}$. Então $\mathcal{C}(I)$ é um espaço vetorial com as leis seguintes. Se $f, g \in \mathcal{C}(I)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, definimos

$$f + g, \quad \lambda f \in \mathcal{C}(I)$$

por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

qualquer que seja $x \in I$. Fazendo

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

e notando que f é limitada, porque f é contínua e I é compacto, obtém-se uma norma em $\mathcal{C}(I)$. Prova-se que $\mathcal{C}(I)$ é um espaço de Banach, o que é uma conseqüência fácil do seguinte teorema da Análise Real: se uma sucessão (f_n) de $\mathcal{C}(I)$ converge uniformemente em I para uma função $f : I \to \mathbf{K}$, então f é contínua.

Exemplo 7. Além de I como no exemplo 6 e um inteiro $m \geq 0$, consideremos o espaço $\mathcal{C}^m(I)$ das funções de I em $\mathbf{K}$ que têm derivadas contínuas até a ordem m inclusive, onde agora $a \neq b$. Então $\mathcal{C}^m(I)$ é um espaço vetorial com leis vetoriais definidas de modo análogo ao do exemplo 6. Fazendo

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{x \in I \\ 0 \leq k \leq m}} |f^{(k)}(x)|$$

se $f \in \mathcal{C}^m(I)$ e notando que tal supremo é finito, obtém-se uma norma em $\mathcal{C}^m(I)$. Prova-se que $\mathcal{C}^m(I)$ é um espaço de Banach, o que é uma conseqüência fácil do seguinte teorema da Análise Real: se uma sucessão (f_n) de $\mathcal{C}^m(I)$ é tal que a sucessão $(f_n^{(m)})$ das derivadas de ordem m converge uniformemente em I e se existe $\xi \in I$ tal que a sucessão $(f_n^{(k)}(\xi))$ das derivadas de ordem k em ξ converge, qualquer que seja $k = 0, \ldots, m-1$, então existe $f \in \mathcal{C}^m(I)$ tal que a sucessão $(f_n^{(k)})$ das derivadas de ordem k converge uniformemente para a derivada $f^{(k)}$ de ordem k, qualquer que seja $k = 0, \ldots, m$. Se $m = 0$, recaímos no exemplo 6.

Exemplo 8. Retomemos o espaço vetorial $\mathcal{C}(I)$ do exemplo 6, supondo $a < b$. Fixemos um número real $p \geq 1$. Definindo

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p},$$

prova-se que assim se obtém uma norma, mas que $\mathcal{C}(I)$ não é completo. O caso $p = 1$ é particularmente mais simples. Aí está um exemplo de um espaço normado que não é um espaço de Banach. É precisamente por meio da integral de Lebesgue que se processa o completamento (ver observação 3) do espaço normado incompleto em questão, obtendo-se os chamados espaços $L_p(I)$ das funções de potência p-ésima integrável segundo Lebesgue em I. O fato de $L_p(I)$ ser completo é uma vantagem significativa que a integral de Lebesgue leva sobre a de Riemann.

Exemplo 9. Seja E um espaço vetorial. Primeiramente, suponhamos E real. Um *produto escalar* em E é uma *forma bilinear real*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto (x|y) \in \mathbf{R}$$

definida em $E \times E$, isto é, tal que, quaisquer que sejam $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, se tenha:

1) $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$,

$(\lambda x|y) = \lambda \cdot (x|y)$,

(linearidade em relação à primeira variável);

2) $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2)$,

$(x|\lambda y) = \lambda \cdot (x|y)$,

(linearidade em relação à segunda variável);

forma bilinear essa que também satisfaz:

3) $(y|x) = (x|y)$ (simetria);

4) $(x|x) \geq 0$ (positividade);

5) $(x|x) = 0$ implica $x = 0$ (separação).

Suponhamos, agora, E complexo. Um *produto escalar* em E é uma *forma sesquilinear complexa*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto (x|y) \in \mathbf{C}$$

definida em $E \times E$, isto é, tal que, quaisquer que sejam $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbf{C}$, se tenha:

1) $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$,

$(\lambda x|y) = \lambda \cdot (x|y)$,

(linearidade em relação à primeira variável);

2) $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2)$,

$(x|\lambda y) = \bar{\lambda} \cdot (x|y)$,

(semilinearidade em relação à segunda variável);

forma sesquilinear essa que também satisfaz:

3) $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simetria hermitiana);

4) $(x|x) \geq 0$ (positividade);

5) $(x|x) = 0$ implica $x = 0$ (separação).

Nos casos real e complexo, obtém-se uma norma sobre E definindo

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

se $x \in E$, como se verifica a partir da chamada *desigualdade de Schwarz:*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Se, além disso, E for completo, receberá o nome de *espaço de Hilbert*. Assim, para ilustrar, o exemplo 1 será um caso particular do atual, se definirmos o produto escalar, no caso real por

$$(x|y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

e no caso complexo por

$$(x|y) = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n.$$

Também o exemplo 4, quando $p = 2$, será um caso particular do atual, se definirmos o produto escalar, no caso real por

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

e no caso complexo por

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Igualmente o exemplo 8, se $p = 2$, será um caso particular do atual, se definirmos o produto escalar, no caso real por

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

e no caso complexo por

$$(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Os espaços de Hilbert são muito ricos de estrutura geométrica e alcance analítico, tendo variadas aplicações resultantes da existência de um produto escalar que determina sua norma. Na realidade, existem espaços de Banach, também fundamentais para as aplicações, que não são espaços de Hilbert; isto é, onde não se pode definir a norma por meio de um produto escalar. Um caso notável é o do exemplo 6 se $a \neq b$. O mesmo pode-se dizer do exemplo 2 se $n > 1$ e $p \neq 2$; do exemplo 3 se $n > 1$; do exemplo 4 se $p \neq 2$; do exemplo 5; do exemplo 7; e do exemplo 8 se $p \neq 2$.

3

SUBESPAÇOS NORMADOS

Definição 5. Sejam E um espaço normado e $F \subset E$ um subespaço vetorial. F é, de modo natural, um espaço normado, sendo a norma sobre F a induzida pela norma dada sobre E; ou seja, para todo $x \in F$ calcula-se $\|x\|$ no sentido de F, considerando x como elemento de E e calculando $\|x\|$ no sentido de E. Diz-se, então, que F é um *subespaço normado* de E.

Exercício 5. Sendo F um subespaço normado do espaço normado E, a topologia induzida em F pela topologia de E coincide com a topologia definida em F pela norma induzida em F pela norma de E.

Observação 9. Salvo indicação em contrário, subentende-se que a norma de um subespaço vetorial F do espaço normado E é a induzida sobre F pela norma de E.

Proposição 3. Um subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach é um espaço de Banach.

Demonstração. Resulta imediatamente do fato de todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo ser também um espaço métrico completo. QED

Proposição 4. Um subespaço de Banach de um espaço normado é fechado.

Demonstração. É decorrência da propriedade de que todo subespaço métrico completo de um espaço métrico é fechado. QED

Corolário. Um subespaço vetorial de um espaço de Banach é um espaço de Banach se, e somente se, ele for fechado.

Demonstração. Basta combinar as proposições 3 e 4. QED

Proposição 5. A aderência $\overline{F}$ de um subespaço vetorial F de um espaço normado é um subespaço vetorial.

Para a demonstração, precisamos dos seguintes lemas conhecidos da teoria dos espaços métricos.

Lema 1. Se A e B forem espaços métricos, a aplicação $f: A \to B$ será contínua se, e somente se, qualquer que seja $X \subset A$,

$$f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}.$$

Lema 2. Se A e B forem espaços métricos e $X \subset A$, $Y \subset B$, então

$$\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}.$$

Demonstração da proposição 5. Sendo F um subespaço vetorial de E, tem-se

$$F + F \subset F,$$

$$\mathbf{K}F \subset F.$$

Devemos provar que $\overline{F}$ é um subespaço vetorial de E. Ora, a aplicação

$$f: (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$$

é contínua, pelo item 1) da proposição 2), § 2. Usando o lema 1, temos

$$f(\overline{F \times F}) \subset \overline{f(F \times F)}.$$

Usando-se o lema 2, vem

$$f(\overline{F} \times \overline{F}) \subset \overline{f(F \times F)}.$$

Como f é a adição, temos que

$$f(\overline{F} \times \overline{F}) = \overline{F} + \overline{F},$$

$$f(F \times F) = F + F.$$

Resulta que

$$\overline{F} + \overline{F} \subset \overline{F + F}.$$

Da hipótese, vem que

$$\overline{F + F} \subset \overline{F}.$$

Logo

$$\overline{F} + \overline{F} \subset \overline{F}.$$

Por outro lado, a aplicação

$$g: x \in E \mapsto \alpha x \in E$$

é contínua qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{K}$, pelo corolário da proposição 2, § 2. Pelo lema 1

$$g(\overline{F}) \subset \overline{g(F)},$$

ou seja,

$$\alpha \overline{F} \subset \overline{\alpha F}.$$

Como

$$\alpha F \subset \mathbf{K}F \subset F,$$

vem

$$\alpha \overline{F} \subset \overline{F}$$

para todo $\alpha \in K$. Provamos, então, que

$$\overline{F} + \overline{F} \subset \overline{F},$$

$$K\overline{F} \subset \overline{F}.$$

Logo $\overline{F}$ é um subespaço vetorial de E, pois, além disso, $0 \in F \subset \overline{F}$. QED

Exercício 6. Seja c o conjunto das sucessões convergentes

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

sendo $x_n \in K$ e onde existe o limite

$$\lim_{n \to \infty} x_n.$$

Então c é um subespaço vetorial fechado de l_∞. Seja, também, c_0 o conjunto das mesmas sucessões com limite 0. Então c_0 é um subespaço vetorial fechado de c. Logo c e c_0 são espaços de Banach como subespaços normados de l_∞. (Salvo indicação em contrário, considera-se sempre c e c_0 com suas normas induzidas pela norma de l_∞.)

Exercício 7. Seja f o conjunto das sucessões finitas

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

sendo $x_n \in K$ e onde $x_n \neq 0$ para apenas um número finito de valores de n. Tem-se

$$f \subset c_0 \subset l_\infty$$

e c_0 é a aderência de f em l_∞. Como $f \neq c_0$, resulta que f não é fechado em l_∞. Então f é um espaço normado incompleto com a norma induzida pela norma de l_∞.

Exercício 8. Para todo número real $p \geq 1$, tem-se

$$f \subset l_p \subset c_0,$$

logo c_0 é a aderência de l_p em c_0. Sendo $l_p \neq c_0$, resulta que l_p não é fechado em c_0. Então l_p é um espaço normado incompleto com a norma induzida pela norma de c_0.

Exercício 9. Para todo número real $p \geq 1$, tem-se

$$f \subset l_p$$

e l_p é a aderência de f em l_p. Como $f \neq l_p$, resulta que f não é fechado em l_p. Então f é um espaço normado incompleto com a norma induzida pela norma de l_p.

Exercício 10. Para quaisquer números reais $q > p \geq 1$, tem-se

$$f \subset l_p \subset l_q,$$

logo l_q é a aderência de l_p em l_q. Sendo $l_p \neq l_q$, resulta que l_p não é fechado em l_q. Então l_p é um espaço normado incompleto com a norma induzida pela norma de l_q.

Exercício 11. Consideremos um intervalo compacto $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$, onde $a \neq b$. Para quaisquer inteiros $n > m \geq 0$, tem-se

$$C^{(n)}(I) \subset C^{(m)}(I)$$

e $C^{(m)}(I)$ é a aderência de $C^{(n)}(I)$ em $C^{(m)}(I)$. Como $C^{(m)}(I) \neq C^{(n)}(I)$, resulta que $C^{(n)}(I)$ não é fechado em $C^{(m)}(I)$. Então $C^{(n)}(I)$ é um espaço normado incompleto com a norma induzida pela norma de $C^{(m)}(I)$.

4

NORMAS EQUIVALENTES

Sabemos que toda norma em um espaço vetorial determina uma topologia (observação 2, § 1); mas, como veremos abaixo com exemplos, normas distintas podem determinar a mesma topologia, ou seja, a topologia não determina univocamente a norma da qual ela provém, em dimensão qualquer. É bem verdade, como provaremos no § 11, que duas normas num espaço vetorial de dimensão finita sempre determinam a mesma topologia. Daí a necessidade da definição que se segue.

Definição 6. Duas normas

$$\|\cdot\|_1, \qquad \|\cdot\|_2,$$

num espaço vetorial E são *equivalentes* (ou *topologicamente equivalentes*) quando elas definem a mesma topologia em E.

Definição 7. Na notação da definição 6, diz-se que $\|\cdot\|_2$ é *dominada* por $\|\cdot\|_1$ se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1$$

qualquer que seja $x \in E$.

É sabido que, em um conjunto qualquer E, duas métricas d_1, d_2 são equivalentes, isto é, determinam a mesma topologia em E, se, e somente se, para todo $a \in E$, qualquer bola de centro a e raio $r_2 > 0$ segundo d_2 contiver uma bola de centro a e raio $r_1 > 0$ segundo d_1, e vice-versa, tomando-se primeiro d_1 e depois d_2.

Em um espaço vetorial, tem-se a condição dada pela proposição que se segue.

Proposição 6. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, cada uma delas for dominada pela outra; ou ainda, se, e somente se, existir $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 \leq c \cdot \|x\|_2,$$

qualquer que seja $x \in E$.

Esta proposição será demonstrada abaixo, a partir da proposição 7.

Uma questão mais geral consiste em estudar, em um conjunto qualquer E, a condição para que a topologia definida por uma métrica d_2 esteja contida na topologia definida por outra métrica d_1 (isto é, toda parte de E aberta por d_2 seja também aberta por d_1). É sabido que tal ocorre se, e somente se, para todo $a \in E$, qualquer bola de centro a e raio $r_2 > 0$ segundo d_2 contiver uma bola de centro a e raio $r_1 > 0$ segundo d_1.

Em um espaço vetorial, tem-se a condição dada pela seguinte proposição que se segue.

Proposição 7. Para que a topologia $\mathcal{T}_2$ definida pela norma $\|\cdot\|_2$ no espaço vetorial E esteja contida na topologia $\mathcal{T}_1$ definida pela norma $\|\cdot\|_1$ em E, é necessário e suficiente que $\|\cdot\|_2$ seja dominada por $\|\cdot\|_1$.

Para a demonstração, precisamos do seguinte lema que se segue.

Lema 3. Sendo $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas num espaço vetorial E, então

$$\|x\|_1 \leq 1$$

sempre implica

$$\|x\|_2 \leq 1,$$

onde $x \in E$, se, e somente se,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

qualquer que seja $x \in E$.

Demonstração. A suficiência é evidente. Provemos, pois, a necessidade. Seja $x \in E$, $x \neq 0$. Façamos

$$y = \frac{x}{\|x\|_1}.$$

Como

$$\|y\|_1 = 1,$$

deduzimos que

$$\|y\|_2 \leq 1,$$

donde resulta

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Ora, essa desigualdade permanece verdadeira mesmo quando $x = 0$, o que completa a demonstração. QED

Exercício 12. Dadas duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial E, então

$$\|x\|_1 < 1$$

sempre implica

$$\|x\|_2 < 1,$$

onde $x \in E$, se, e somente se,

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1$$

qualquer que seja $x \in E$. Idem com o mesmo enunciado e

$$\|x\|_2 \le 1$$

em lugar de $\|x\|_2 < 1$.

Demonstração da proposição 7. Vejamos primeiro a suficiência. Devido ao resultado conhecido da teoria dos espaços métricos acima citado, para se provar que

$$\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$$

basta mostrar que, para todo $a \in E$ e qualquer $r_2 > 0$, existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_{2,r_2}(a) \supset B_{1,r_1}(a),$$

onde os índices 1 e 2 significam, respectivamente, que se trata de uma bola segundo $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Usando a constante c da definição 7 e supondo que

$$x \in B_{1,r_1}(a),$$

temos, tomando $r_2 = cr_1$,

$$\|x-a\|_2 \le c \cdot \|x-a\|_1 < cr_1 = r_2.$$

Logo

$$x \in B_{2,r_2}(a),$$

como queríamos. Resulta que $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Passemos a ver a necessidade. Ora, $\bar{B}_{2,1}(0)$ é uma vizinhança segundo $\mathcal{T}_2$ de 0. Por hipótese, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Logo $\bar{B}_{2,1}(0)$ é também uma vizinhança segundo $\mathcal{T}_1$ de 0. Então, existe $r > 0$ tal que

$$\bar{B}_{1,r}(0) \subset \bar{B}_{2,1}(0),$$

isto é

$$\|x\|_1 \le r$$

sempre implica

$$\|x\|_2 \le 1,$$

onde $x \in E$. Pelo lema 3, aplicado às normas $\|\cdot\|_3$ e $\|\cdot\|_2$, onde $c = 1/r$ e

$$\|x\|_3 = c \cdot \|x\|_1$$

se $x \in E$, deduzimos que

$$\|x\|_2 \le c \cdot \|x\|_1$$

qualquer que seja $x \in E$. Resulta que $\|\cdot\|_2$ é dominada por $\|\cdot\|_1$. QED

Demonstração da proposição 6. Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ forem as topologias definidas por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente, então $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, ou seja, as duas normas dadas são equivalentes, se, e somente se,

$$\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1, \qquad \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2,$$

ou seja, pela proposição 7, existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$\|x\|_2 \leq c_1 \cdot \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 \leq c_2 \cdot \|x\|_2,$$

qualquer que seja $x \in E$. Tomando-se

$$c = \sup\{c_1, c_2\},$$

vem equivalentemente que

$$\|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 \leq c \cdot \|x\|_2,$$

qualquer que seja $x \in E$. QED

Exercício 13. Sejam dadas duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ no espaço vetorial E. Supondo-se a segunda dominada pela primeira, toda sucessão em E de Cauchy pela primeira, é de Cauchy pela segunda. Supondo-se as duas equivalentes, elas têm as mesmas sucessões de Cauchy. Então,

E será completo por uma norma se, e somente se, E for completo pela outra.

Exercício 14. Duas quaisquer das normas $\|\cdot\|_p$, onde $1 \leq p \leq \infty$, definidas sobre $\mathbf{K}^n$ nos exemplos 2 e 3, § 2, são equivalentes.

Exercício 15. Sendo $l_p \subset c_0$, onde $p \geq 1$ é um número real, a norma induzida sobre l_p pela norma de c_0 é dominada pela norma de l_p; mas as duas normas assim obtidas sobre l_p não são equivalentes.

Exercício 16. Sendo $l_p \subset l_q$, onde $q > p \geq 1$ são números reais, a norma induzida sobre l_p pela norma de l_q é dominada pela norma de l_p; mas as duas normas assim obtidas sobre l_p não são equivalentes.

Exercício 17. Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{C}^m(I)$ do exemplo 7, § 2. Além da norma já indicada, costuma-se considerar também sobre $\mathcal{C}^m(I)$ a norma definida por

$$\|f\|_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|$$

se $f \in \mathcal{C}^m(I)$. Esta norma e a anterior são distintas, mas equivalentes. Uma terceira norma usual sobre $\mathcal{C}^m(I)$, distinta das duas normas anteriores, mas a elas equivalentes, é dada por

$$\|f\|_m = \sup_{x \in I} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot |f^{(k)}(x)|.$$

A vantagem destas duas novas normas sobre a primeira é que, com elas,

$$\|fg\|_n \leq \|f\|_n \cdot \|g\|_n,$$

onde $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, sendo $fg \in \mathcal{C}^n(I)$ definida por

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

qualquer que seja $x \in I$. (Esta nova desigualdade satisfeita pela norma é importante na teoria das álgebras de Banach).

Exercício 18. Sendo $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I)$, onde $n > m \geq 0$ são números inteiros, a norma induzida sobre $\mathcal{C}^n(I)$ por qualquer das normas consideradas sobre $\mathcal{C}^m(I)$ é dominada por qualquer das normas consideradas sobre $\mathcal{C}^n(I)$; mas as duas normas assim consideradas sobre $\mathcal{C}^n(I)$ não são equivalentes (ver exercício 17).

Exercício 19. Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{C}(I)$. A norma do exemplo 8, § 2, é dominada pela norma do exemplo 6, § 2; mas as duas normas assim obtidas sobre $\mathcal{C}(I)$ não são equivalentes. Usando-se de novo o exemplo 8, § 2, com dois números reais $q > p \geq 1$, a norma que corresponde a p é dominada pela norma que corresponde a q, visto que a função

$$t \to \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^t\,dx\right)^{1/t}$$

é crescente para $t \in \mathbf{R}$, $t \geq 1$; mas as duas normas assim obtidas sobre $\mathcal{C}(I)$ não são equivalentes. (Neste exercício, o fato de I ser compacto, logo de medida finita, é importante. A situação mudaria radicalmente substituindo-se I por $\mathbf{R}$, por exemplo.)

5

ESPAÇOS DE APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS

Nesta seção, E e F serão sempre espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbf{K}$. De resto, neste texto, quando considerarmos simultaneamente vários espaços vetoriais, subentenderemos que o corpo dos escalares é o mesmo para eles, salvo indicação expressa em contrário.

Proposição 8. A aplicação linear $u:E \to F$ é contínua em E se, e somente se, ela for contínua em algum ponto de E.

Demonstração. Quanto à necessidade, a proposição é evidente. Vejamos, a seguir, a suficiência. Seja, então, $a \in E$ e suponhamos u contínua em a. Provemos que u é contínua em qualquer outro ponto $b \in E$. Temos, para $x \in E$,

$$u(x) - u(b) = u(x - b + a) - u(a),$$

por linearidade, pois $x - b = (x - b + a) - a$. Como u é contínua em a, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u(x) - u(a)\| < \varepsilon$$

contanto que

$$\|x - a\| < \delta.$$

Logo

$$\|u(x) - u(b)\| = \|u(x - b + a) - u(a)\| < \varepsilon$$

contanto que

$$\|(x - b + a) - a\| = \|x - b\| < \delta,$$

o que prova ser u contínua em b. QED

Definição 8. Diz-se que a aplicação linear $u:E \to F$ é *limitada* se ela satisfaz às condições equivalentes seguintes:

1) Existe uma constante real $c \geq 0$ tal que, qualquer que seja $x \in E$, se verifique

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|.$$

2) A função real positiva

$$x \in E - \{0\} \to \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \in \mathbf{R}$$

é limitada no sentido usual.

A equivalência de 1) e 2) acima é imediata, levando-se em conta que $u(0) = 0$.

Exercício 20. Provar que a aplicação linear $u: E \to F$ é limitada no sentido usual, isto é, existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|u(x)\| \leq c$ qualquer que seja $x \in E$, se, e somente se, $u = 0$.

Exercício 21. A aplicação linear $u: E \to F$ é limitada no sentido da definição 8 se, e somente se, for verificada uma das seis condições equivalentes seguintes: u é limitada no sentido usual, em alguma ou em toda bola aberta ou fechada, ou em alguma ou em toda esfera, em E de raio $r > 0$.

Observação 10. No caso de uma aplicação linear, usaremos sempre a palavra *limitada* no sentido da definição 8 (e não no sentido usual), salvo indicação expressa em contrário.

Proposição 9. A aplicação linear $u: E \to F$ é contínua se, e somente se, ela for limitada.

Demonstração. Se u for contínua, dado $\epsilon = 1$, existirá $\delta > 0$ tal que

$$x \in \overline{B}_\delta(0)$$

implica que

$$u(x) \in \overline{B}_1(0),$$

visto que $u(0) = 0$; ou seja,

$$\|x\| \leq \delta$$

implica que

$$\|u(x)\| \leq 1.$$

Ora, as funções

$$x \in E \mapsto \frac{\|x\|}{\delta} \in \mathbf{R},$$

$$x \in E \mapsto \|u(x)\| \in \mathbf{R},$$

são, respectivamente, uma norma e uma seminorma (observação 1, § 1) sobre E. Notemos, também, que a demonstração do lema 3, § 4, não depende de a segunda norma satisfazer à condição 4) da definição 1, § 1. Tais comentários nos autorizam a aplicar a conclusão do lema 3 ao caso atual, donde

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

qualquer que seja $x \in E$, com $c = 1/\delta$. Portanto u é limitada.

Reciprocamente, suponhamos u limitada. Então

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

qualquer que seja $x \in E$, sendo $c > 0$ uma constante. Para provar que u é contínua em E, basta mostrar que u é contínua na origem, pela proposição 8. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/c$. Então, se $x \in E$, $\|x\| \leq \delta$, deduzimos que $\|u(x)\| \leq c\delta = \epsilon$, como queríamos. QED

Observação 11. Em espaços vetoriais topológicos, definem-se os conceitos de aplicação linear contínua e de aplicação linear limitada; mas não se tem sempre a equivalência da proposição 9.

Exercício 22. Provar que o lema 3, § 4, bem como o exercício 12, § 4, permanecem válidos se, em lugar de normas, considerarmos duas seminormas sobre E (observação 1, § 1).

Definição 9. Indicaremos com

$$\mathcal{L}_a(E;F)$$

o espaço vetorial das aplicações lineares de E em F, onde, se $u, v \in \mathcal{L}_a(E;F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, definimos

$$u + v, \qquad \lambda u \in \mathcal{L}_a(E;F)$$

por

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \qquad (\lambda u)(x) = \lambda u(x),$$

qualquer que seja $x \in E$. O índice a é a inicial de algébrico, significando que não se exige continuidade. Indicaremos com

$$\mathcal{L}(E;F)$$

o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(E;F)$ das aplicações lineares contínuas de E em F. Trata-se de um subespaço vetorial, à vista das condições 1) e 2) da proposição 2, § 1.

Definição 10. Para $u \in \mathcal{L}(E;F)$, definamos $\|u\|$ como sendo o ínfimo das constantes reais $c \geq 0$ tais que

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

qualquer que seja $x \in E$ (pela proposição 9 e à vista da definição 8).

Observação 12. Da definição de $\|u\|$, decorre imediatamente que o ínfimo em questão é um mínimo, ou seja,

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$$

qualquer que seja $x \in E$; e que

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

é satisfeita por uma constante $c \geq 0$, qualquer que seja $x \in E$, se e somente se $c \geq \|u\|$.

Proposição 10. A função

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \mapsto \|u\| \in \mathbf{R}$$

é uma norma.

Demonstração. Reportando-nos à definição 1, § 1, a condição 1) é imediata.

Vejamos, agora, a condição 2). Com efeito, se $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$, temos

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|,$$

$$\|v(x)\| \leq \|v\| \cdot \|x\|,$$

qualquer que seja $x \in E$; logo

$$\|(u+v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leq$$

$$\leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq (\|u\| + \|v\|) \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, donde

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Quanto à condição 3), sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Temos que

$$\|(\lambda u)(x)\| = \|\lambda u(x)\| =$$

$$= |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|u\| \cdot \|x\|$$

qualquer que seja $x \in E$, donde

$$\|\lambda u\| \leq |\lambda| \cdot \|u\|.$$

Supondo-se, primeiramente, que $\lambda \neq 0$, e substituindo-se λ por $1/\lambda$ e u por λu, vem

$$\left\|\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda u)\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda u\|,$$

donde

$$|\lambda| \cdot \|u\| \leq \|\lambda u\|.$$

Em conclusão,

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

para $\lambda \neq 0$; mas essa igualdade permanece verdadeira para $\lambda = 0$.

Finalmente, verifiquemos 4). Se $\|u\| = 0$, então

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$$

acarreta que $\|u(x)\| = 0$, donde $u(x) = 0$ para todo $x \in E$. Então $u = 0$.

Fica provado, pois, que $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço normado. QED

Observação 13. Sendo E, F dois espaços normados, $\mathcal{L}(E;F)$ é sempre considerado como um espaço normado relativamente à norma acima, salvo indicação expressa em contrário. Daí resulta que, a partir de espaços normados conhecidos E e F, podemos construir um novo espaço normado, a saber, $\mathcal{L}(E;F)$.

Exercício 23. Sendo E, F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$, então

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|u(x)\| =$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|u(x)\|.$$

Exercício 24. Mudando-se as normas de E e F por outras equivalentes, o espaço vetorial $\mathcal{L}(E;F)$ não se altera e sua norma muda por outra equivalente.

Proposição 11. Se F é completo, então $\mathcal{L}(E;F)$ também é completo.

Demonstração. Para provar que $\mathcal{L}(E;F)$ é completo, temos de mostrar que toda sucessão de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$ é convergente em $\mathcal{L}(E;F)$. Seja, então, $u_n \in \mathcal{L}(E;F)$, para $n = 1, 2, \ldots$, uma sucessão de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $\nu = 1, 2, \ldots$ tal que

$$\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

se $m, n \geq \nu$. Devido à definição 10 da norma em $\mathcal{L}(E;F)$, vem

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, se $m, n \geq \nu$. Resulta que, para cada x fixo, temos uma sucessão de Cauchy $u_n(x) \in F$, para $n = 1, 2, \ldots$. Como F é completo, tal sucessão é convergente em F. Seja

$$u(x) = \lim_n u_n(x) \in F.$$

Consideremos a aplicação

$$u : x \in E \mapsto u(x) \in F;$$

vamos provar que $u \in \mathcal{L}(E;F)$.

Em primeiro lugar, u é linear, pois, pela proposição 2, § 1, se $x, y \in E$, temos

$$u(x + y) = \lim_n u_n(x + y) = \lim_n [u_n(x) + u_n(y)] =$$

$$= \lim_n u_n(x) + \lim_n u_n(y) = u(x) + u(y);$$

e se $x \in E$, $\lambda \in \mathbf{K}$, obtemos

$$u(\lambda x) = \lim_n u_n(\lambda x) = \lim_n [\lambda u_n(x)] = \lambda \cdot \lim_n u_n(x) = \lambda u(x).$$

Mostremos, agora, que u é limitada, logo contínua, pela proposição 9. Ora, vimos que, se fixarmos $\varepsilon = 1$, existirá um inteiro $\nu \geq 1$ tal que

$$\|u_n - u_\nu\| \leq 1$$

se $n \geq \nu$; ou seja

$$\|u_n(x) - u_\nu(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in E$, se $n \geq \nu$. Passando ao limite quando n tende ao infinito, obtemos, pela proposição 2, § 1,

$$\|u(x) - u_\nu(x)\| = \|\lim_n u_n(x) - u_\nu(x)\| = \lim_n \|u_n(x) - u_\nu(x)\| \leq \|x\|.$$

Daí resulta que

$$\|u(x)\| \leq \|u(x) - u_\nu(x)\| + \|u_\nu(x)\| \leq$$

$$\leq \|x\| + \|u_\nu\| \cdot \|x\| = (1 + \|u_\nu\|) \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, isto é, u é limitada.

Sendo u linear e contínua, temos que $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Vamos provar que

$$u = \lim_n u_n$$

em $\mathcal{L}(E;F)$. Com efeito, retomando um $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\nu \geq 1$ um inteiro tal que

$$\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, se $m, n \geq \nu$. Mantendo n e x fixos, a proposição 2, § 1, nos fornece, quando m tende ao infinito,

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, se $n \geq \nu$, ou seja,

$$\|u_n - u\| \leq \varepsilon$$

se $n \geq \nu$. Logo (u_n) tende para u quando n tende ao infinito. QED

Observação 14. Reciprocamente, prova-se que, se $E \neq 0$ e $\mathcal{L}(E;F)$ for completo, então F é completo. A demonstração usa o chamado

Teorema de Hahn-Banach, resultado fundamental da teoria dos espaços normados que não consideraremos neste texto, enunciado na observação 16, § 6.

Proposição 12. Sejam E, F, G espaços normados e

$$u \in \mathcal{L}(E;F), \qquad v \in \mathcal{L}(F;G).$$

Considerando a aplicação composta, temos

$$v \circ u \in \mathcal{L}(E;G),$$

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|.$$

Demonstração. Para provar que $v \circ u$ pertence a $\mathcal{L}(E;G)$, temos de constatar ser $v \circ u$ linear e contínua. Ora, $v \circ u$ é linear, bem como contínua, por ser a aplicação composta de duas aplicações lineares, bem como contínuas. Além disso,

$$\|(v \circ u)(x)\| = \|v[u(x)]\| \leq$$

$$\leq \|v\| \cdot \|u(x)\| \leq \|v\| \cdot \|u\| \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, donde

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|,$$

como queríamos. QED

Exercício 25. Sendo $p \geq 1$ um número real, a inclusão de l_p em c_0 é uma aplicação linear contínua de norma 1.

Exercício 26. Sendo $q > p \geq 1$ números reais, a inclusão de l_p em l_q é uma aplicação linear contínua de norma 1.

Exercício 27. Sendo $n > m \geq 0$ números inteiros, a inclusão de $\mathcal{C}^n(I)$ em $\mathcal{C}^m(I)$ é uma aplicação linear contínua relativamente às normas usuais em tais espaços (exercício 17, § 4).

Exercício 28. Consideremos o espaço de Banach $\mathcal{C}(I)$ (exemplo 6, § 2). Introduzamos uma função $\mu: I \to \mathbf{K}$ de variação limitada e uma função $k: I \times I \to \mathbf{K}$ contínua. Definamos $u: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ pondo $g = u(f)$ se $f \in \mathcal{C}(I)$ e

$$g(y) = \int_a^b k(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)$$

para todo $y \in I$. Naturalmente, se fixarmos $\mu(x) = x$ para todo $x \in I$, teremos um caso particular em que

$$g(y) = \int_a^b k(x,y)\, f(x)\, dx.$$

Provar que u é uma aplicação linear contínua.

Exercício 29. Uma vez dados os inteiros $m \geq k \geq 0$, a derivação de ordem k

$$f \in \mathcal{C}^m(I) \mapsto f^{(k)} \in \mathcal{C}^{m-k}(I)$$

é uma aplicação linear contínua relativamente às normas usuais em tais espaços (exercício 17, § 4).

Exercício 30. Dadas as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ no espaço vetorial E, indiquemos com E_1 e E_2 o espaço vetorial E normado por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. Então, a aplicação identidade $I: E_1 \to E_2$ é contínua se, e somente se, $\|\cdot\|_2$ for dominada por $\|\cdot\|_1$. Portanto, todo caso de uma norma que não é dominada por outra (ver os exercícios 15, 16, 18 e 19 do § 4) propicia um exemplo simples de uma aplicação linear descontínua.

6

FORMAS LINEARES CONTÍNUAS

Definição 11. Dado um espaço normado E, escreveremos

$$\mathcal{L}_a(E;\mathbf{K}) = E'_a$$

$$\mathcal{L}(E;\mathbf{K}) = E'$$

para abreviar. O espaço vetorial E'_a das formas lineares sobre E é o *dual algébrico* de E, ao passo que o espaço normado E' das formas lineares contínuas sobre E é o *dual* de E, por vezes também chamado de *dual normado* de E. Resulta da proposição 11, § 5, que E' é um espaço de Banach.

Exemplo 10. Seja c o espaço de Banach das sucessões convergentes (exercício 6, § 3) e, para toda $x = (x_n) \in c$, definamos

$$l(x) = \lim_n x_n.$$

Então $l: c \to \mathbf{K}$ é uma forma linear contínua em c e $\|l\| = 1$.

Exemplo 11. Nos vários espaços de Banach de sucessões, l_∞, c, c_0, l_p, que consideramos, uma vez fixado um inteiro $\nu \geq 1$, podemos considerar em cada um deles a forma linear $x \mapsto x_\nu$, que a cada x associa sua ν-ésima coordenada. Ela é contínua, de norma 1.

Exemplo 12. No espaço de Banach $\mathcal{C}(I)$ (exemplo 6, § 2), uma vez fixado $\xi \in I$, podemos considerar a forma linear $f \mapsto f(\xi)$ em $\mathcal{C}(I)$, que a cada f associa seu valor em ξ. Ela é contínua, de norma 1. De modo um pouco mais geral, no espaço de Banach $\mathcal{C}^m(I)$ com qualquer de suas normas usuais (exercício 17, § 4), uma vez fixados $\xi \in I$ e um inteiro $0 \leq k \leq m$, a forma linear $f \mapsto f^{(k)}(\xi)$, que a cada f associa o valor em ξ da sua derivada de ordem k, é contínua.

Exemplo 13. No espaço de Banach $\mathcal{C}(I)$ (exemplo 6, § 12), uma vez fixada uma função $\mu: I \to \mathbf{K}$ de variação limitada, podemos considerar a forma linear em $\mathcal{C}(I)$ dada por

$$f \mapsto \int_a^b f(x)d\mu(x);$$

se fixarmos $\mu(x) = x$ para todo $x \in I$, teremos o caso particular de

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx.$$

Ela é contínua e sua norma é igual à variação total de μ em I; no caso particular indicado, a norma é 1. Reciprocamente, por um teorema famoso e fundamental de Riesz, toda forma linear contínua em $\mathcal{C}(I)$ se representa por uma integral de Stieltjes-Riemann do modo acima descrito, mediante uma μ. Esta μ pode ser escolhida de modo que $\mu(a) = 0$ e que μ seja contínua à direita em todo ponto de I; então μ é única, a partir da forma linear contínua dada em $\mathcal{C}(I)$.

Exemplo 14. Consideremos o espaço de Banach l_∞. Uma vez fixado um elemento

$$a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_1,$$

define-se uma forma linear contínua f_a em l_∞ por

$$f_a(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + \ldots$$

para todo

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_\infty,$$

verificando-se que

$$\|f_a\| = |a_1| + \ldots + |a_n| + \ldots,$$

ou seja, a norma de f_a em $(l_\infty)'$ é igual à norma de a em l_1. Nem todas as formas lineares contínuas em l_∞ podem ser obtidas do modo acima descrito; é o que se comprova mediante a chamada compactificação de Stone-Cech, estudada em Topologia Geral, quando aplicada ao conjunto $\{1, \ldots, n, \ldots\}$.

Observação 15. Em um espaço normado E de dimensão infinita, sempre existe uma forma linear descontínua, embora toda forma linear seja contínua se E for de dimensão finita. É o que veremos no § 11.

Proposição 13. Uma forma linear f num espaço normado E é contínua se, e somente se, o seu núcleo $f^{-1}(0)$, ou seja o conjunto das soluções $x \in E$ da equação $f(x) = 0$, for fechado em E.

Demonstração. Se f é contínua, $f^{-1}(0)$ é fechado, por ser a imagem inversa por uma aplicação contínua do conjunto $\{0\}$ que é fechado em $\mathbf{K}$.

Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(0)$ seja fechado. Vamos mostrar que f é contínua. Se $f = 0$, nada se tem a demonstrar, pois a continuidade é evidente. Seja, então, $f \neq 0$. Nesse caso, existe $a \in E$ tal que $f(a) \neq 0$. Podemos supor que $f(a) = 1$, pois, se assim já não fosse, tomaríamos o ponto

$$\frac{a}{f(a)}$$

em lugar de a e teríamos

$$f\left(\frac{a}{f(a)}\right) = 1.$$

Seja, pois, $f(a) = 1$. Como a não pertence a $f^{-1}(0)$ e sendo $f^{-1}(0)$ fechado, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a) \cap f^{-1}(0) = \phi.$$

Provemos, agora, que

$$|f(x)| < 1$$

contanto que $x \in B_r(0)$. Por redução ao absurdo, suponhamos que existe x tal que

$$x \in B_r(0), \qquad |f(x)| \geq 1.$$

Seja, então,

$$t = \frac{x}{f(x)}.$$

Logo

$$\|t\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|} \leq \|x\| < r, \qquad f(t) = 1.$$

Resulta que

$$a - t \in B_r(a) \cap f^{-1}(0),$$

o que é absurdo, pois essa interseção é vazia. Logo $|f(x)| < 1$ se $x \in B_r(0)$.

Para todo $\epsilon > 0$, temos, pois,

$$|f(x)| < \epsilon$$

contanto que

$$x \in B_{\epsilon r}(0),$$

que implica a continuidade de f em 0. Pela proposição 8, § 5, f é contínua. QED

Exemplo 15. Veremos no § 11 que a proposição 13 se generaliza assim: uma aplicação linear $u: E \to F$ do espaço normado E no espaço normado F de dimensão finita é contínua se, e somente se, seu núcleo $u^{-1}(0)$ for fechado em E. No § 11, veremos também que, sendo agora E de dimensão finita e F arbitrário, u é sempre contínua. Vejamos, agora, que, se E e F forem espaços normados de dimensão infinita, pode ocorrer que $u^{-1}(0)$ seja fechado sem que u seja contínua. Por exemplo, seja E um espaço vetorial com duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, sendo que a segunda não é dominada pela primeira. Indiquemos com E_1 e E_2 o espaço vetorial E normado por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. Então, a aplicação identidade $I: E_1 \to E_2$ não é contínua (ver exercício 30, § 5), mas seu núcleo $I^{-1}(0) = \{0\}$ é fechado.

Observação 16. Um teorema fundamental da teoria dos espaços normados é o Teorema de Hahn-Banach, cujo enunciado é o seguinte: dado um subespaço vetorial F de um espaço normado E, toda forma linear contínua g em F pode ser estendida a uma forma linear contínua f em E, ou seja, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in F$, de modo que $\|f\| = \|g\|$. Esse teorema, que tem muitas aplicações, não será considerado neste texto. Por meio dele prova-se que, se o espaço normado E tiver dimensão infinita, então E' também tem dimensão infinita; e, de modo mais geral, sendo E e F espaços normados, onde E tem dimensão infinita e $F \neq 0$, então $\mathcal{L}(E; F)$ é também de dimensão infinita.

Exercício 31. Consideremos o espaço de Banach c_0. Uma vez fixado um elemento

$$a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_1,$$

define-se uma forma linear contínua f_a em c_0 por

$$f_a(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + \ldots$$

para todo

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in c_0,$$

verificando-se que

$$\|f_a\| = |a_1| + \ldots + |a_n| + \ldots,$$

ou seja, a norma de f_a em $(c_0)'$ é igual à norma de a em l_1. Toda forma linear contínua em c_0 se representa do modo acima descrito por meio de um único elemento de l_1. (Comparar com o exemplo 14.)

Exercício 32. Consideremos o espaço de Banach l_1. Uma vez fixado um elemento

$$a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_\infty,$$

define-se uma forma linear contínua f_a em l_1 por

$$f_a(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + \ldots$$

para todo

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_1,$$

verificando-se que

$$\|f_a\| = \sup\{|a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots\}$$

ou seja, a norma de f_a em $(l_1)'$ é igual à norma de a em l_∞. Toda forma linear contínua em l_1 se representa do modo acima descrito por meio de um único elemento de l_∞.

Exercício 33. Consideremos o espaço de Banach l_p, onde $p > 1$ é um número real. Definamos q por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

notando que $q > 1$. Uma vez fixado um elemento

$$a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_q,$$

define-se uma forma linear contínua f_a em l_p por

$$f_a(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + \ldots$$

para todo

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_p,$$

verificando-se que

$$\|f_a\| = (|a_1|^q + \ldots + |a_n|^q + \ldots)^{1/q},$$

ou seja, a norma de f_a em $(l_p)'$ é igual à norma de a em l_q. Toda forma linear contínua em l_p se representa do modo acima descrito mediante um único elemento de l_q. É de se notar que a equação relacionando $p > 1$ e $q > 1$ é simétrica em p e q. Um caso particular notável é quando $p = q = 2$, que interessa à teoria dos espaços de Hilbert; é o único caso em que $p = q$. O exercício 32 pode ser visto como um caso limite do atual, quando $p = 1$ e $q = \infty$; mas o caso limite do atual, quando $p = \infty$ e $q = 1$ não é correto, como está elucidado no exemplo 14.

7

ISOMETRIAS

Façamos um pequeno parêntesis, para recordar o conceito de isometria. Se E e F forem dois espaços métricos, diz-se que a aplicação $u : E \to F$ é uma *isometria* se

$$d[u(x_1), u(x_2)] = d(x_1, x_2)$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in E$. Daí resulta imediatamente que u é contínua. É fácil verificar que u é, também, injetiva. Portanto, u é bijetiva desde que ela seja sobrejetiva; a sua inversa u^{-1} é, então, também uma isometria. É imediato que, em tal caso, u e u^{-1} são contínuas. Logo, toda isometria entre E e F é um homeomorfismo.

Proposição 14. Sendo E, F espaços normados, a aplicação linear $u : E \to F$ é uma isometria se, e somente se, para todo $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\|.$$

Demonstração. Com efeito, para que u seja uma isometria é necessário e suficiente que, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in E$,

$$d[u(x_1), u(x_2)] = d(x_1, x_2),$$

ou seja,

$$\|u(x_2) - u(x_1)\| = \|x_2 - x_1\|,$$

o que equivale a

$$\|u(x_2 - x_1)\| = \|x_2 - x_1\|,$$

ou a

$$\|u(x)\| = \|x\|$$

para todo $x \in E$. QED

Observação 17. Na notação da proposição 14, se u for uma isometria e $E \neq 0$, é claro que $\|u\| = 1$. A recíproca não é verdadeira, ou seja, $\|u\| = 1$ não implica que u seja uma isometria, nem mesmo quando u é injetiva; basta considerar as aplicações de inclusão dos exercícios 25 e 26, § 5.

Exemplo 16. No exemplo 14, § 6, a aplicação linear $a \mapsto f_a$ é uma isometria de l_1 em $(l_\infty)'$ que não é sobrejetiva. Já nos exercícios 31, 32 e 33, § 6, a aplicação linear $a \mapsto f_a$ é uma isometria entre l_1 e $(c_0)'$, entre l_∞ e $(l_1)'$, e entre l_q e $(l_p)'$, respectivamente. Por isso, o seguinte abuso de notação é corrente:

$$(c_0)' = l_1, \qquad (l_1)' = l_\infty, \qquad (l_p)' = l_q.$$

Exemplo 17. Seja s espaço vetorial das sucessões

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

sendo $x_n \in \mathbf{K}$, tais que a série

$$x_1 + \ldots + x_n + \ldots$$

seja convergente. Define-se em s uma norma fazendo

$$\|x\| = \sup_n |x_1 + \ldots + x_n|.$$

Os espaços normados s e c são isométricos pela aplicação linear sobrejetiva

$$(x_n) \in s \mapsto (x_1 + \ldots + x_n) \in c.$$

Notemos que $l_1 \subset s$, sendo a inclusão de l_1 em s uma aplicação linear contínua de norma 1, mas não uma isometria; e que $s \subset c_0$, sendo a inclusão de s em c_0 uma aplicação linear contínua de norma 2, portanto não uma isometria.

8

PRODUTOS CARTESIANOS E SOMAS DIRETAS

Consideremos, em primeiro lugar, o caso algébrico dos produtos cartesianos e das somas diretas. A seguir, veremos o caso normado dos produtos cartesianos (§ 9) e das somas diretas (§ 10).

Definição 12. Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais sobre $\mathbf{K}$. Seu *produto cartesiano* $E = E_1 \times E_2$, isto é, o conjunto dos pares ordenados $x = (x_1, x_2)$, onde $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, é um espaço vetorial com as seguintes leis. Se

$$x = (x_1, x_2) \in E, \qquad y = (y_1, y_2) \in E, \qquad \lambda \in \mathbf{K},$$

definimos

$$x + y, \qquad \lambda x \in E$$

por

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

As aplicações

$$p_1 : E \to E_1, \qquad p_2 : E \to E_2,$$

tais que

$$p_1(x) = p_1(x_1, x_2) = x_1,$$

$$p_2(x) = p_2(x_1, x_2) = x_2,$$

qualquer que seja $x \in E$, são as *projeções* de E nos fatores E_1, E_2. É fácil verificar que elas são lineares e sobrejetivas. Os núcleos dessas aplicações são os subespaços vetoriais de E seguintes

$$\bar{E}_2 = p_1^{-1}(0), \qquad \bar{E}_1 = p_2^{-1}(0),$$

respectivamente formados pelos pontos $(0, x_2) \in E$ e $(x_1, 0) \in E$, onde $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$.

Definição 13. Sejam E_1 e E_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial E sobre $\mathbf{K}$. Diz-se que E é a *soma direta* de E_1 com E_2, escrevendo-se $E = E_1 \oplus E_2$, se todo elemento $x \in E$ se representa, de modo único, na forma $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$. De modo equivalente, E é a soma direta de E_1 com E_2 quando

$$E = E_1 + E_2, \qquad E_1 \cap E_2 = \{0\},$$

ou seja, todo elemento de E se representa como soma de um elemento de E_1 com um elemento de E_2, além do que E_1 e E_2 se intersetam apenas na origem. As *projeções* de E nos subespaços vetoriais E_1, E_2 são as aplicações

$$p_1 : E \to E_1, \qquad p_2 : E \to E_2,$$

tais que

$$p_1(x) = p_1(x_1 + x_2) = x_1,$$

$$p_2(x) = p_2(x_1 + x_2) = x_2,$$

qualquer que seja $x \in E$. Elas são lineares e sobrejetivas. Seus núcleos são os próprios subespaços vetoriais de E dados

$$E_2 = p_1^{-1}(0), \qquad E_1 = p_2^{-1}(0).$$

Observação 18. Em Álgebra Linear, define-se uma *projeção* em um espaço vetorial E como sendo una aplicação $u : E \to E$ que pode ser obtida mediante uma soma direta $E = E_1 \oplus E_2$, de modo que

$$u(x) = x_1$$

se

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in E_1, \qquad x_2 \in E_2;$$

então, tal soma direta é unica, pois

$$E_1 = u(E), \qquad E_2 = u^{-1}(0).$$

Uma maneira direta de formular a mesma definição, sem citar expressamente E_1 e E_2, consiste em definir uma projeção em E como sendo uma aplicação $u : E \to E$ que é linear e idempotente (isto é, $u^2 = u$). Note-se que, no caso do produto cartesiano (definição 12), a palavra projeção não tem esse significado; mas que tal ocorre no caso da soma direta (definição 13). Tal abuso de terminologia, porém, não tem maior inconveniente, por causa da estreita semelhança entre o produto cartesiano e a soma direta, envolvendo suas respectivas projeções, como está explicado abaixo, nas proposições 15 e 16.

Proposição 15. Na notação das definições 12 e 13, se $E = E_1 \times E_2$, então E_1 e E_2 são isomorfos naturalmente a $\tilde{E}_1$ e $\tilde{E}_2$, respectivamente, pelos isomorfismos

$$\iota_1 : x_1 \in E_1 \mapsto (x_1, 0) \in \tilde{E}_1,$$

$$\iota_2 : x_2 \in E_2 \mapsto (0, x_2) \in \tilde{E}_2.$$

Além disso

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "p_h"] & & E_h \\
& E_1 \times E_2 \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "p_h"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 19. Tudo o que foi dito, sobre o produto cartesiano e a soma direta de dois espaços vetoriais, se generaliza para o caso de um número finito de espaços vetoriais, com adaptações que não explicitaremos. Idem no § 9 e no § 10.

Observação 20. Em Álgebra Linear, prova-se que, dados um espaço vetorial E e um seu subespaço vetorial E_1, existe sempre outro subespaço vetorial E_2 de E tal que E seja a soma direta de E_1 com E_2; tal E_2 não é único (a não ser nos casos triviais em que $E_1 = \{0\}$ ou $E_1 = E$ quando $E_2 = E$ ou $E_2 = \{0\}$, respectivamente).

Exercício 34. Se $f: E \to \mathbf{K}$ for uma forma linear no espaço vetorial E sobre $\mathbf{K}$, sendo $f(e) \neq 0$ para um certo $e \in E$, então $E = f^{-1}(0) \oplus (\mathbf{K}e)$. De modo mais geral, se $u: E \to F$ for uma aplicação linear entre os espaços vetoriais E, F e u for um isomorfismo entre um subespaço vetorial S de E e $u(E)$, então $E = u^{-1}(0) \oplus S$.

9

PRODUTOS CARTESIANOS NORMADOS

Definição 14. Sejam E_1, E_2 espaços normados e $E = E_1 \times E_2$ pela definição 12, § 8. Definamos

$$\|x\|_\infty = \sup\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

para todo

$$x = (x_1, x_2) \in E.$$

É fácil verificar que $x \mapsto \|x\|_\infty$ é uma norma sobre E. São imediatas as seguintes propriedades:

1) sendo $p_1: E \to E_1$, $p_2: E \to E_2$ as projeções pela definição 12, § 8, então, para todo $x \in E$,

$$\|p_1(x)\| \leq \|x\|_\infty, \qquad \|p_2(x)\| \leq \|x\|_\infty;$$

2) os isomorfismos $i_1: E_1 \to \tilde{E}_1$, $i_2: E_2 \to \tilde{E}_2$ da proposição 15, § 8, são isometrias entre os espaços normados em questão;

3) $\tilde{E}_1$ e $\tilde{E}_2$ são fechados em E.

É imediato que a topologia sobre E definida por tal norma é a topologia de produto cartesiano, descrita na teoria dos espaços métricos; por ela, se $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in E$, obtem-se uma vizinhança básica de ξ em E tomando o produto cartesiano $V = V_1 \times V_2$ de uma vizinhança V_1 de ξ_1 em E_1 por uma vizinhança V_2 de ξ_2 em E_2. Existem outras normas importantes em E. A adoção de uma ou outra norma em E depende da situação particular que se tenha em vista. Por exemplo, seja $p \geq 1$ um número real. Para todo

$$x = (x_1, x_2) \in E,$$

façamos

$$\|x\|_p = \left(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p\right)^{1/p}$$

Prova-se que $x \mapsto \|x\|_p$ é uma norma em E (comparar com o exemplo 2, § 2). É fácil demonstrar que esta nova norma e a norma acima são equivalentes. Usa-se, então, uma ou outra, conforme a conveniência. Se E_1, E_2 forem espaços de Hilbert, toma-se $p = 2$. Valem as propriedades 1), 2), 3) acima, com $\|\cdot\|_p$ agora em lugar de $\|\cdot\|_\infty$. Mantém-se a notação $E = E_1 \times E_2$, sendo necessário esclarecer se tal produto cartesiano é no sentido algébrico, ou normado, bem como qual é a norma usada em E.

Exercício 35. Sejam E_1, E_2 espaços normado e $E = E_1 \times E_2$. Temos que:

a) se $\|\cdot\|$ for uma norma em E tal que

$$\|p_1(x)\| \leq \|x\|, \qquad \|p_2(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in E$, sendo $p_1 : E \to E_1$, $p_2 : E \to E_2$ as projeções da definição 12, § 8, então

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|$$

para todo $x \in E$; isto é, $\|\cdot\|_\infty$ a *menor* norma em E com as propriedades acima;

b) se $\|\cdot\|$ for uma norma em E tal que os isomorfismos $i_1 : E_1 \to \bar{E}_1$, $i_2 : E_2 \to \bar{E}_2$ da proposição 15, § 8, são isometrias, então

$$\|x\| \leq \|x\|_1$$

para todo $x \in E$; isto é, $\|\cdot\|_1$ é a *maior* norma em E com as propriedades indicadas.

10

SOMAS DIRETAS TOPOLÓGICAS

Definição 15. Sejam E_1, E_2 subespaços vetoriais do espaço normado E. Diz-se que E é a *soma direta topológica* de E_1 com E_2 se E for a soma direta algébrica de E_1 com E_2 (definição 13, § 8) e o isomorfismo natural

$$t:(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto x_1 + x_2 \in E$$

(proposição 16, § 8) for um homeomorfismo. Escreve-se ainda $E = E_1 \times E_2$, devendo-se esclarecer em cada caso se a soma direta em questão é entendida no sentido algébrico, ou topológico.

Proposição 17. Na notação da definição 15, para que E seja a soma direta topológica de E_1 com E_2 é necessário e suficiente que E seja a soma direta algébrica de E_1 com E_2 e que as projeções $p_1 : E \to E_1$, $p_2 : E \to E_2$ (definição 13, § 8) sejam contínuas. Basta que uma seja contínua para que a outra o seja também.

Demonstração. Temos de examinar quando t é um homeomorfismo. Para isso, basta que examinemos quando o inverso t^{-1} é contínuo, já que a continuidade de t é evidente, pelo item 1) da proposição 2, § 1. Temos

$$t^{-1}(x) = t^{-1}(x_1 + x_2) = (x_1, x_2) = (p_1(x), p_2(x))$$

qualquer que seja $x \in E$, onde $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $x_1 + x_2 = x$. Isso mostra que p_1, p_2 são as aplicações componentes da aplicação t^{-1} de E no produto cartesiano $E_1 \times E_2$. É um fato conhecido da teoria dos espaços métricos que, se as *aplicações componentes* $f_1 : E \to E_1$, $f_2 : E \to E_2$ definem a *aplicação produto cartesiano*

$$f : x \in E \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \in E_1 \times E_2,$$

então f é contínua se, e somente se, f_1, f_2 forem contínuas. Segue-se que t^{-1} é contínua se, e somente se, p_1, p_2 forem contínuas. Isso prova a primeira parte do enunciado.

Além disso, se $x = x_1 + x_2 \in E$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, então, sendo $I : E \to E$ a aplicação identidade, vem que

$$I(x) = x = x_1 + x_2 = p_1(x) + p_2(x) = (p_1 + p_2)(x)$$

para todo $x \in E$, ou seja

$$I = p_1 + p_2.$$

Como I é contínua, a continuidade de p_1, ou de p_2, implica a de p_2, ou de p_1, pois a diferença de duas aplicações contínuas é também contínua, pelos itens 1), 2) da proposição 2, § 1. QED

Exercício 36. Numa soma direta topológica $E = E_1 \oplus E_2$, os subespaços vetoriais E_1, E_2 de E são fechados.

Observação 21. Sendo E um espaço normado, que é a soma direta algébrica de seus subespaços vetoriais E_1 e E_2, a hipótese de que E_1, E_2 são fechados em E não implica que E seja a soma direta topológica de E_1 e E_2, como se pode mostrar com exemplos.

Observação 22. Complementemos a observação 21, afirmando que se E for um espaço normado *completo*, ou seja, um espaço de Banach, que é a soma direta *algébrica* de seus subespaços vetoriais *fechados* E_1 e E_2, então E é a soma direta topológica de E_1 e E_2. Isso é um fato importante e não evidente, cuja demonstração depende do chamado *Teorema do Homeomorfismo*, cujo enunciado é o seguinte: sendo $u: E \to F$ um isomorfismo contínuo de um espaço de Banach E *sobre* un espaço de Banach F, então u é um homeomorfismo. A aplicação do Teorema do Homeomorfismo ao caso que nos interessa é muito simples, e por isso vamos explicitá-la. Sendo E um espaço de Banach que é a soma direta algébrica de seus subespaços vetoriais fechados E_1 e E_2, o isomorfismo $t: E_1 \times E_2 \to E$ da definição 15 é contínuo e sobrejetivo. Ora, E_1 e E_2 são espaços de Banach, pela proposição 3, § 3; logo $E_1 \times E_2$ é um espaço de

Banach, pela definição 14, § 9. O Teorema do Homeomorfismo implica, então, que t é um homeomorfismo.

Observação 23. É fácil ver que o Teorema do Homeomorfismo é equivalente aos chamados *Teorema da Aplicação Aberta* e *Teorema do Gráfico Fechado*, cujos enunciados são os seguintes, respectivamente:

1) Sendo $u: E \to F$ uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach E *sobre* um espaço de Banach F, então u é uma aplicação aberta, isto é, $u(X)$ é aberta em F para toda X aberta em E.

2) Sendo $u: E \to F$ uma aplicação linear de um espaço de Banach E em outro espaço de Banach F, para que u seja contínua é necessário e suficiente que seu gráfico G_u em $E \times F$ seja fechado em $E \times F$, onde G_u é o subespaço vetorial de todos os pontos

$$(x, u(x))$$

quando x varia em E.

Esses três teoremas (do homeomorfismo, da aplicação aberta e do gráfico fechado) dependem de os dois espaços normados serem completos; são falsos para espaços normados apenas.

O Teorema do Gráfico Fechado tem muitas aplicações importantes, por exemplo, em equações diferenciais parciais.

11

ESPAÇOS NORMADOS DE DIMENSÃO FINITA

Proposição 18. (Tychonoff). Duas normas em um espaço vetorial E de dimensão finita n são sempre equivalentes.

Demonstração. Se $n = 0$, a proposição é evidente, pois só há uma norma em E, a saber a norma 0. Suponhamos, então, que $n \geq 1$ e seja $a_1, \ldots, a_n$ uma base de E. Indiquemos com

$$t: (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mapsto \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in E$$

o isomorfismo entre $\mathbf{K}^n$ e E definido por tal base. Fixemos uma norma em E. Afirmamos que t é um homeomorfismo entre $\mathbf{K}^n$ e E, onde $\mathbf{K}^n$ tem a topologia de produto cartesiano, definida por sua norma $\|\cdot\|_\infty$ (exemplo 3, § 2). Provemos essa asserção por indução sobre n. Para $n = 1$, ela é verdadeira, pois as igualdades

$$\|\lambda_1 a_1\| = |\lambda_1| \cdot \|a_1\|,$$

$$|\lambda_1| = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot \|\lambda_1 a_1\|,$$

provam a continuidade de

$$t: \lambda_1 \mapsto \lambda_1 a_1, \qquad t^{-1}: \lambda_1 a_1 \mapsto \lambda_1 .$$

Suponhamos, agora que $n \geq 2$ e que a afirmação é verdadeira para $n-1$. Ora, t é obviamente contínuo, pois

$$\|\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n\| \leq |\lambda_1| \cdot \|a_1\| + \ldots + |\lambda_n| \cdot \|a_n\|,$$

donde

$$\|t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\| \leq c \cdot \|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_\infty$$

quaisquer que sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, fazendo

$$c = \|a_1\| + \ldots + \|a_n\|;$$

basta, então, usar a proposição 9, § 5. Temos de provar, agora, a continuidade de

$$t^{-1}: \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in E \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n.$$

Ora, t^{-1} é dado pelas funções componentes

$$f_j: \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mapsto \lambda_j \in \mathbf{K}$$

para $j = 1, \ldots, n$. É um fato conhecido da teoria dos espaços métricos que, se as funções componentes

$$f_j : E \to \mathbf{K}$$

para $j = 1, \ldots, n$, definem a aplicação produto cartesiano

$$t^{-1} : x \in E \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbf{K}^n,$$

então t^{-1} é contínua se, e somente se, $f_1, \ldots, f_n$ forem contínuas. Basta, portanto, demonstrar que cada uma das funções componentes $f_1, \ldots, f_n$ é contínua. Mostremos, por exemplo, que f_n é contínua. Como f_n é uma forma linear em E, para provar que f_n é contínua, é suficiente demonstrar que $f_n^{-1}(0)$ é fechado em E, pela proposição 13, § 6. Ora, $H = f_n^{-1}(0)$, é um subespaço vetorial de E de dimensão $n-1$, pois $f_n \neq 0$. Fixando-se uma base em H, o isomorfismo $\mathbf{K}^{n-1} \to H$ definido por tal base é um homeomorfismo, pela hipótese da indução. Como $\mathbf{K}^{n-1}$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$, pelo exemplo 3, § 2, resulta que H é completo (pois é claro que, se existe um isomorfismo homeomórfico entre dois espaços normados e um deles é completo, o outro também é completo). Logo, H é fechado em E, pela proposição 4, § 3. Portanto, f_n é contínua. Com o mesmo raciocínio, prova-se que $f_1, \ldots, f_n$ são contínuas, donde resulta que t^{-1} é contínuo, o que vem provar que t é um homeomorfismo.

Finalmente, sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em E. Representemos por E_1 e E_2 o espaço vetorial E normado com $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. Seja $I : E_1 \to E_2$ a aplicação identidade de E. Temos, assim, o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[dd, "I"'] & \\
& \mathbf{K}^n \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "t"] \\
E_2 &
\end{tikzcd}$$

É claro que $I \circ t = t$. Como t é um homeomorfismo nos dois casos, resulta imediatamente que I também é um homeomorfismo e, portanto, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ definem a mesma topologia em E, isto é, são equivalentes. QED

Corolário. Todo isomorfismo entre dois espaços vetoriais normados de mesma dimensão finita é, necessariamente, um homeomorfismo.

Demonstração. **Exercício.** QED

Na realidade, a proposição 18 e seu corolário são obviamente equivalentes.

A proposição acima justifica a definição abaixo.

Definição 16. A *topologia natural* de um espaço vetorial E de dimensão finita n é a topologia definida em E por qualquer norma sobre E; ela independe da escolha da norma. Se $n \geq 1$, essa topologia natural é a única topologia em E que torna um homeomorfismo qualquer isomorfismo entre K^n e E, onde K^n tem a topologia de produto cartesiano.

Observação 24. De modo mais geral, o Teorema de Tychonoff afirma, na linguagem da Topologia Geral, que, em todo espaço vetorial E de dimensão finita, existe uma, e somente uma, topologia de Hausdorff que torna contínuas as operações vetoriais

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E,$$

$$(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda x \in E.$$

Daí resulta imediatamente a proposição 18. A demonstração do Teorema de Tychonoff na sua forma mais geral segue as mesmas linhas da demonstração dada para a proposição 18.

Proposição 19. Toda aplicação linear $u : E \to F$ de um espaço normado E de dimensão finita em outro espaço normado F é contínua.

Demonstração. Se $x \in E$, definamos

$$\|x\|^* = \sup \{\|x\|, \|u(x)\|\},$$

onde, no segundo membro, consideramos as normas dadas em E e F. É imediato que $x \mapsto \|x\|^*$ é uma norma em E. Pela proposição 18, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|^*$ são equivalentes em E; então existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|^* \leq c \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, pela proposição 6, § 4, sendo de notar que

$$\|x\| \leq \|x\|^*$$

para todo $x \in E$. Da definição de $\|\cdot\|^*$ resulta que

$$\|u(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, o que prova ser u limitada e, portanto, contínua, pela proposição 9, § 5. QED

Exercício 37. Demonstrar a proposição 18, ou diretamente seu corolário, a partir da proposição 19 (o que mostra serem trivialmente equivalentes entre si esses três enunciados).

Exemplo 18. Em todo espaço normado E de dimensão infinita, existe pelo menos uma forma linear descontínua em E, isto é, $E' \neq E'_a$. De fato, sendo E de dimensão infinita, existem $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, linearmente independentes. Podemos supor que

$$\|x_n\| = \frac{1}{n}$$

para todo n, bastando para tanto substituir x_n por

$$\frac{x_n}{n \cdot \|x_n\|}.$$

Seja E_1 o subespaço vetorial de E gerado por $x_n, n = 1, 2, \ldots$; e determinemos um subespaço vetorial E_2 de E tal que E seja a soma direta algébrica de E_1 com E_2 (observação 20, § 8). Definamos uma forma linear $f: E \to \mathbf{K}$, requerendo que $f(x_n) = 1$ para todo n e que $f = 0$ sobre E_2. De modo mais explícito, se $x \in E$, temos que

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + y,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $y \in E_2$; então

$$f(x) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Ora, essa forma linear f é descontínua, pois $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \to 0$ é falso quando $n \to \infty$, o que prova a asserção. Analogamente, se E for um espaço normado de dimensão infinita e F for um espaço normado não reduzido à origem, existe pelo menos uma aplicação linear descontínua de E em F, isto é, $\mathcal{L}(E;F) \neq \mathcal{L}_a(E;F)$. Basta tomar uma forma linear f descontínua em E, bem como fixar $b \in F$, $b \neq 0$. Definindo $u: E \to F$ por $u(x) = f(x)\, b$ se $x \in E$, esta aplicação linear é descontínua.

54 **Exercício 38.** Se E for um espaço normado de dimensão infinita, então E' é de codimensão infinita em E'_a, ou seja, o espaço vetorial quociente E'_a/E' é dimensão infinita. Se, além disso, F for um espaço normado não reduzido à origem, então $\mathcal{L}(E;F)$ é de codimensão infinita em $\mathcal{L}_a(E;F)$, ou seja, o espaço vetorial quociente $\mathcal{L}_a(E;F)/\mathcal{L}(E;F)$ é de dimensão infinita.

Proposição 20. Todo subespaço vetorial F de dimensão finita n de um espaço normado E é fechado em E.

A demonstração utilizará o lema que se segue.

Lema 4. Todo espaço normado E de dimensão finita n é completo.

Demonstração. Se $n = 0$, o lema é evidente. Suponhamos, então que $n \geq 1$. Ora, $\mathbf{K}^n$ e E são isomorfos. Sendo $\mathbf{K}^n$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ (exemplo 3, § 2), um isomorfismo entre $\mathbf{K}^n$ e E é um homeomorfismo (corolário da proposição 18). Logo E é completo, pois $\mathbf{K}^n$ é completo. QED

Demonstração da proposição 20. Pelo lema 4, F é completo, donde resulta que F é fechado em E, à vista da proposição 4, § 3. QED

Vejamos, agora, a seguinte generalização da proposição 20; a anterior corresponde ao caso em que $G = \{0\}$.

Proposição 21. Sendo E um espaço normado, F um subespaço vetorial de E de dimensão finita n e G um subespaço vetorial fechado de E, entaõ $F + G$ é subespaço vetorial fechado de E.

Demonstração. Se $n = 0$, a proposição é óbvia. Suponhamos $n = 1$. Se $F \subset G$, a proposição é evidente, pois $F + G = G$. Suponhamos $F \not\subset G$; então existe $a \in F$, $a \notin G$. Como $n = 1$, temos $F = \mathbf{K}a$. Se $x \in F + G$, então $x = \lambda a + y$ de modo único, sendo $\lambda \in \mathbf{K}$, $y \in G$. Definamos $f: F + G \to \mathbf{K}$ por $f(x) = \lambda$. É imediato que f é linear em $F + G$. Provemos que f é contínua em $F + G$. Isso resulta imediatamente de que $f^{-1}(0) = G$ é fechado em E, logo em $F + G$ (proposição 13, § 6). Para provar que $F + G$ é fechado em E, seja (x_k) uma sucessão de $F + G$ tal que

$$b = \lim_k x_k \in E$$

existe; temos de provar que $b \in F + G$. Ora, $x_k = f(x_k)a + y_k$, com $y_k \in G$, para todo k. Como (x_k) é convergente em E, resulta que (x_k) é de Cauchy em E, logo em $F + G$. Portanto, $(f(x_k))$ é de Cauchy em $\mathbf{K}$ (pois toda aplicação linear contínua de un espaço normado em outro espaço normado, transforma uma sucessão de Cauchy em outra sucessão de Cauchy). Como $\mathbf{K}$ é completo, $(f(x_k))$ é convergente em $\mathbf{K}$, isto é, existe

$$\mu = \lim_k f(x_k) \in \mathbf{K}.$$

Ora, $y_k = x_k - f(x_k)a$. Portanto, existe

$$c = \lim_k y_k = b - \mu a$$

e $c \in G$, pois G é fechado e $y_k \in G$ para todo k. Logo $b = \mu a + c \in F + G$, o que prova ser $F + G$ fechado em E.

Se $n \geq 1$, basta aplicar o caso $n = 1$ e raciocinar por indução. Se $a_1, \ldots, a_n$ é uma base de F, então

$$F + G = \mathbf{K}a_1 + \ldots + \mathbf{K}a_n + G.$$

Pelo caso $n = 1$, vemos que $\mathbf{K}a_n + G$ é fechado em E, e assim sucessivamente. QED

Observação 25. Pode-se dar exemplos mostrando que a proposição 21 é falsa, supondo-se apenas que F, G sejam subespaços vetoriais fechados de E, mesmo quando, além disso, $F \cap G = \{0\}$ e E é completo.

A proposição seguinte generaliza a proposição 13, § 6; a anterior corresponde ao caso em que $F = \mathbf{K}$.

Proposição 22. Se E e F são espaços normados, onde F é de dimensão finita n, então uma aplicação linear $u: E \to F$ é contínua se, e somente se, seu núcleo $u^{-1}(0)$ for fechado em E.

Demonstração. No sentido direto, a proposição é evidente; se u é contínua, $u^{-1}(0)$ é fechado em E, por ser a imagem inversa por uma aplicação contínua do conjunto $\{0\}$, que é fechado em F.

Consideremos a recíproca, supondo $u^{-1}(0)$ fechado em E. O caso $n = 0$ é evidente. Suponhamos $n \geq 1$ e seja $a_1, \ldots, a_n$ uma base de F. Temos que, para todo $x \in E$,

$$u(x) = f_1(x)a_1 + \ldots + f_n(x)a_n$$

de modo único, onde $f_i(x) \in \mathbf{K}$ para todo i. Da linearidade de u, resulta que cada forma $f_i : E \to \mathbf{K}$ é linear, para todo i. Provemos que cada f_i é contínua. Ora, $u^{-1}(0)$ é o subespaço vetorial dos pontos $x \in E$ tais que

$$f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0;$$

em particular

$$u^{-1}(0) \subset f_i^{-1}(0)$$

e $u^{-1}(0)$ é de codimensão finita em $f_i^{-1}(0)$, ou seja, existe um subespaço vetorial F_i de E de dimensão finita tal que

$$f_i^{-1}(0) = F_i + u^{-1}(0).$$

Como $u^{-1}(0)$ é fechado em E, por hipótese, resulta da proposição 21 que $f_i^{-1}(0)$ é fechado em E e, portanto, f_i é contínua para todo i, pela proposição 13, § 6. Sendo $f_1, \ldots, f_n$ contínuas, então u é contínua. QED

Exercício 39. A proposição 22 implica facilmente a proposição 18, ou diretamente seu corolário, ou diretamente a proposição 19 (o que mostra serem equivalentes entre si esses quatro enunciados).

56

Observação 26. A proposição 22 é falsa omitindo-se que F é de dimensão finita (ver o exercício 30, § 5); mesmo quando se supõe que u seja um isomorfismo entre os espaços de Banach E e F.

Proposição 23. Seja E um espaço normado, que é a soma direta algébrica de seus subespaços vetoriais E_1 e E_2. Se E_1 for de dimensão finita e E_2 for fechado em E, então E é a soma direta topológica de E_1 com E_2.

Demonstração. Pela proposição 17, § 10, basta provar que a projeção $p_1 : E \to E_1$ é contínua, o que resulta da proposição 22, já que E_1 é de dimensão finita e $p_1^{-1}(0) = E_2$ é fechado em E. QED

Observação 27. Substituindo-se, na proposição 23, a hipótese de que E_1 é de dimensão finita pela de E_1 ser fechado, o enunciado é falso (ver as observações 21 e 22, § 10).

Com vistas ao Teorema de Riesz abaixo, recordemos as seguintes noções da teoria dos espaços métricos.

Seja, pois, E um espaço métrico. Uma parte $K \subset E$ é dita ***compacta*** quando, de todo ***recobrimento aberto*** $\mathcal{A}$ de K, isto é, de toda coleção $\mathcal{A}$ de partes abertas de E cuja reunião contém K, pode-se sempre extrair um ***subrecobrimento finito***, ou seja, existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ cuja reunião ainda contém K. Uma parte de E é dita ***relativamente compacta*** quando a sua aderência em E é compacta. Sendo $\mathbf{K}^n$ considerado como espaço normado de modo usual (ver exemplos 1, 2 e 3, § 2), o Teorema de Bolzano-Weierstrass diz que uma parte de $\mathbf{K}^n$ é compacta, ou relativamente compacta, se, e somente se, ela for limitada e fechada em $\mathbf{K}^n$, ou apenas limitada, respectivamente. Pelo corolário da proposição 18, o Teorema de Bolzano-Weierstrass permanece correto, substituindo-se $\mathbf{K}^n$ por qualquer espaço normado de dimensão finita.

Um espaço métrico E é *localmente compacto* quando todo ponto de E é centro de alguma bola fechada de raio estritamente positivo, que é compacta.

Proposição 24. (F. Riesz). Um espaço normado E é localmente compacto se, e somente se, ele for de dimensão finita.

Demonstração. Todo espaço normado E de dimensão finita é localmente compacto, pois toda bola fechada dele é compacta, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Reciprocamente, suponhamos E localmente compacto é provemos que E deve ser de dimensão finita. Sendo E localmente compacto, existe $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(0)$ é compacta. Ora, a coleção das bolas

$$B_{r/2}(a),$$

onde a varia em E, é um recobrimento aberto de $\bar{B}_r(0)$; logo, existem $a_1, \ldots, a_n \in E$ tais que

$$\bar{B}_r(0) \subset B_{r/2}(a_1) \cup \ldots \cup B_{r/2}(a_n).$$

Seja F o subespaço vetorial de E gerado por $a_1, \ldots, a_n$. Então, F é de dimensão finita no máximo igual a n. Afirmamos que $F = E$. Por absurdo, suponhamos que $F \neq E$. Então, existe $x \in E$ tal que $x \notin F$. Seja α a distância de F a x, definida por

$$\alpha = \inf_{t \in F} d(t, x) = \inf_{t \in F} \|x - t\|;$$

notemos que $\alpha > 0$, pois $\alpha = 0$ implicaria que $x \in \bar{F}$, o que não acontece, já que $x \notin F$ e $F = \bar{F}$, pela proposição 20. (Observação: pode-se mostrar que α é atingido, ou seja, que existe $t \in F$ tal que $\alpha = d(t, x)$, usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass em F; mas não vamos usar tal fato.) Como $\alpha > 0$, então $\alpha < 2\alpha$. Da definição de α, resulta que existe $y \in F$ tal que

$$\alpha \leq \|x - y\| \leq 2\alpha.$$

Ponhamos, visto que $x \neq y$,

$$z = \frac{r(x - y)}{\|x - y\|}.$$

Temos que $\|z\| = r$, donde $z \in \bar{B}_r(0)$. Logo, existe i tal que

$$z \in B_{r/2}(a_i),$$

ou seja $\|z - a_i\| < r/2$. Ora

$$x = y + \frac{\|x-y\| \cdot z}{r} = y + \frac{\|x-y\| \cdot a_1}{r} + \frac{\|x-y\| \cdot (z-a_1)}{r}.$$

Definamos

$$b = y + \frac{\|x-y\| \cdot a_1}{r}.$$

Então, $b \in F$ pois $y \in F$ e $a_1 \in F$. Logo

$$\alpha \leq \|x-b\|,$$

pela definição de α. Ora

$$x-b = \frac{\|x-y\| \cdot (z-a_1)}{r}$$

donde

$$\|x-b\| < \|x-y\| \cdot \tfrac{1}{2} \leq \alpha.$$

Assim, $\alpha \leq \|x-b\| < \alpha$, que é um absurdo. Portanto $F = E$, donde E ser de dimensão finita. QED

58 Uma aplicação interessante do Teorema de Riesz é dada pela proposição 25 e pelo exemplo 20 abaixo.

Definição 17. Diz-se que uma aplicação linear $u : E \to F$ entre espaços normados E e F é *compacta* se existe $r > 0$ tal que a imagem de $\bar{B}_r(0)$ por u seja relativamente compacta em F, isto é, a aderência de tal imagem seja compacta em F.

Exercício 40. Toda aplicação linear compacta entre espaços normados é contínua.

Exemplo 19. Mantenhamos a notação do exercício 28, § 5. A aplicação linear $u : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$, ali definida, é compacta. A prova dessa asserção depende do chamado *Teorema de Ascoli* seguinte: para que uma parte $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(I)$ seja relativamente compacta em $\mathcal{C}(I)$ é necessário e suficiente que

1) $\mathcal{F}$ seja pontualmente limitada, isto é, para todo $\xi \in I$, tem-se

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(\xi)| < +\infty;$$

2) $\mathcal{F}$ seja equicontínua, isto é, quaisquer que sejam $\xi \in I$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$$

para quaisquer

$$x \in I \cap [\xi - \delta, \xi + \delta], \quad f \in \mathcal{F}.$$

Proposição 25. Se $u : E \to E$ for uma aplicação linear compacta em um espaço normado E, então o subespaço vetorial F de E dos elementos $x \in E$ que satisfazem à equação

$$u(x) = x$$

é de dimensão finita.

Demonstração. É claro que F é um subespaço vetorial de E. Ora, F é fechado em E, pois F é a imagem inversa pela aplicação contínua

$$x \in E \mapsto (u(x), x) \in E \times E$$

da diagonal Δ de $E \times E$, diagonal essa que é o conjunto dos pontos (x, x) onde $x \in E$. Sendo Δ fechada em $E \times E$, resulta que F é fechado em E. Indiquemos as bolas em E e F com índices E e F, respectivamente. Seja $r > 0$ tal que a imagem de $\bar{B}_{E,r}(0)$ por u seja relativamente compacta em E. Temos que

$$\bar{B}_{F,r}(0) \subset u[\bar{B}_{E,r}(0)],$$

pois, se $x \in \bar{B}_{F,r}(0)$, então $x \in F$, donde

$$x = u(x) \in u[\bar{B}_{F,r}(0)] \subset \mu[\bar{B}_{E,r}(0)],$$

donde a asserção. Dessa inclusão, resulta que $\bar{B}_{F,r}(0)$ é relativamente compacta em E (visto que toda parte de um subconjunto relativamente compacto também é relativamente compacta). Sendo F fechado em E, então $\bar{B}_{F,r}(0)$ é relativamente compacta em F. Ora, $\bar{B}_{F,r}(0)$ é fechada em F. Logo $\bar{B}_{F,r}(0)$ é compacta. Daí resulta que $\bar{B}_{F,r}(a)$ é compacta para todo $a \in F$ (pois $\bar{B}_{F,r}(a)$ é a imagem de $\bar{B}_{F,r}(0)$ pela aplicação contínua $x \mapsto x + a$; e, num espaço métrico, toda aplicação contínua transforma uma parte compacta numa parte compacta). Logo F é localmente compacto. Pela proposição 24, F é de dimensão finita. QED

Exemplo 20. Mantenhamos a notação do exemplo 19. Da proposição 25, resulta que o espaço vetorial das funções $f \in \mathcal{C}(I)$ que satisfazem à equação integral homogênea

$$\int_a^b k(x, y) f(x) d\mu(x) = f(y),$$

para todo $y \in I$, é de dimensão finita.

Exercício 41. Um espaço normado é de dimensão finita se, e somente se, for verificada uma das seis condições equivalentes seguintes: alguma ou toda bola fechada, ou alguma ou toda esfera, é compacta, ou alguma ou toda bola aberta é relativamente compacta, sendo cada raio $r > 0$.

Exercício 42. Seja E um espaço normado real não reduzido à origem. O *espaço projetivo* $\mathbf{P}(E)$ de E é o conjunto dos subespaços vetoriais de E de dimensão um. Todo $R \in \mathbf{P}(E)$ interseta a esfera unitária S (de centro 0 e raio 1) em dois pontos Se $R_1, R_2 \in \mathbf{P}(E)$, definamos a distância $d(R_1, R_2)$ como a menor das distâncias $\|x_2 - x_1\|$ de um ponto $x_1 \in R_1 \cap S$ a outro $x_2 \in R_2 \cap S$. Mostrar que d é uma métrica em $\mathbf{P}(E)$; e que $\mathbf{P}(E)$ é compacto se, e somente se, E fôr de dimensão finita. Enunciar e provar o resultado análogo no caso complexo.

Exercício 43. Num espaço métrico E, define-se uma parte $X \subset E$ como *pré-compacta* se, para todo $\epsilon > 0$, existem $a_1, \ldots, a_n \in E$ tais que

$$X \subset B_\epsilon(a_1) \cup \ldots \cup B_\epsilon(a_n).$$

Toda parte relativamente compacta é pré-compacta; se E for completo, toda parte pré-compacta é relativamente compacta. Diz-se que E é *localmente pré-compacto* quando todo ponto de E é centro de alguma bola de raio estritamente positivo, que é pré-compacta. Verificar que a demonstração da proposição 24 prova que um espaço normado é localmente pré-compacto se, e somente se, ele for de dimensão finita. Por analogia com a definição 17, introduzir o conceito de aplicação linear pré-compacta e verificar que, para elas, a análoga da proposição 25 é válida.

Observação 28. Na notação da definição 17, se u for compacta, é fácil ver que a imagem por u de toda bola em E é relativamente compacta em F. Preferimos formular a definição 17 do modo adotado (em lugar de requerer que a imagem por u de toda bola em E seja relativamente compacta em F), pelo motivo que expomos a seguir. Quando E é

F forem espaços vetoriais topológicos, definir-se-á que uma aplicação linear $u : E \to F$ como compacta quando existir uma vizinhança V do 0 em E, cuja imagem por u seja relativamente compacta em F. Assim, a definição 17 no caso normado já é parecida com a sua correspondente no caso vetorial topológico.

12

ESPAÇOS DE APLICAÇÕES MULTILINEARES CONTÍNUAS

Enquanto as aplicações lineares são objeto de estudo da Álgebra Linear, as aplicações multilineares são abordadas na Álgebra Multilinear, também chamada de Álgebra Tensorial (porque é por meio do produto tensorial que as aplicações multilineares são reduzidas às aplicações lineares).

Observação 29. Vamos considerar aqui apenas as aplicações bilineares, sendo o caso geral das aplicações multilineares tratado da mesma forma, com adaptações que não explicitaremos.

Recordemos, em primeiro lugar, o caso algébrico. Sejam E_1, E_2 e F espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbf{K}$.

Definição 18. Diz-se que uma aplicação

$$u: E_1 \times E_2 \to F$$

é *bilinear* se, quaisquer que sejam $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$, $\lambda \in \mathbf{K}$:

1) $u(x_1 + y_1, x_2) = u(x_1, x_2) + u(y_1, x_2)$,

$u(\lambda x_1, x_2) = \lambda \cdot u(x_1, x_2)$,

ou seja, a aplicação parcial

$$x_1 \in E_1 \mapsto u(x_1, x_2) \in F$$

for linear, para todo $x_2 \in E_2$ fixado (linearidade em relação à primeira variável);

2) $u(x_1, x_2 + y_2) = u(x_1, x_2) + u(x_1, y_2)$,

$u(x_1, \lambda x_2) = \lambda \cdot u(x_1, x_2)$,

ou seja, a aplicação parcial

$$x_2 \in E_2 \to u(x_1, x_2) \in F$$

for linear, para todo $x_1 \in E_1$ fixado (linearidade em relação à segunda variável). Notemos que, então

$$u(0, x_2) = u(x_1, 0) = 0$$

se $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. No caso em que $F = \mathbf{K}$, temos o caso de uma forma bilinear.

Exemplo 21. Na notação do exemplo 9, § 2, um produto escalar, no caso real, é uma forma bilinear; mas, no caso complexo, um produto escalar é uma forma sesquilinear e não uma forma bilinear (recordemos que os prefixos "bi" e "sesqui" significam "duas vezes" e "uma vez e meia", respectivamente).

Exemplo 22. Sejam E, F espaços vetoriais. A aplicação

$$(x, u) \in E \times \mathcal{L}_a(E; F) \mapsto u(x) \in F$$

é bilinear.

Exemplo 23. Sejam E, F, G espaços vetoriais. A aplicação de composição

$$(u, v) \in \mathcal{L}_a(E; F) \times \mathcal{L}_a(F; G) \mapsto v \circ u \in \mathcal{L}_a(E; G)$$

é bilinear.

Exemplo 24. Sejam E e F espaços vetoriais. A aplicação

$$(f, y) \in E_a' \times F \mapsto yf \in \mathcal{L}_a(E; F)$$

é bilinear, onde yf é definida por

$$(yf)(x) = yf(x)$$

para todo $x \in E$.

Definição 19. Indicaremos com

$$\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$$

o espaço vetorial das aplicações bilineares de $E_1 \times E_2$ em F, relativamente às leis que se seguem. Se $u, v \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, definimos

$$u + v, \qquad \lambda u \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$$

por

$$(u + v)(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + v(x_1, x_2),$$

$$(\lambda u)(x_1, x_2) = \lambda u(x_1, x_2),$$

quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. O índice a é a inicial de algébrico, significando que não se exige continuidade.

Consideremos, agora, o caso normado. Sejam E_1, E_2 e F espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbf{K}$.

Definição 20. Diz-se que a aplicação bilinear $u: E_1 \times E_2 \to F$ é *limitada* se ela satisfaz às condições equivalentes seguintes:

1) Existe uma constante real $c \geq 0$ tal que, quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, se verifique

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|.$$

2) A função real positiva

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{\|u(x_1, x_2)\|}{\|x_1\| \cdot \|x_2\|},$$

definida se $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$, é limitada no sentido usual.

A equivalência das condições de 1) e 2) acima é imediata, levando-se em conta que $u(0, x_2) = 0$ e $u(x_1, 0) = 0$.

Observação 30. No caso de uma aplicação bilinear, usaremos a palavra *limitada* no sentido da definição 20 (e não no sentido usual), salvo indicação expressa em contrário.

Proposição 26. A aplicação bilinear $u: E_1 \times E_2 \to F$ é contínua se, e somente se, ela for limitada.

Demonstração. Se u for contínua, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x_1 \in \overline{B}_\delta(0), \qquad x_2 \in \overline{B}_\delta(0),$$

implicam que

$$u(x_1, x_2) \in \overline{B}_1(0),$$

visto que $u(0, 0) = 0$; ou seja,

$$\|x_1\| \leq \delta, \qquad \|x_2\| \leq \delta,$$

implicam que

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq 1.$$

Se $x_1 \in E_1$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \in E_2$, $x_2 \neq 0$, façamos

$$y_1 = \frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \qquad y_2 = \frac{\delta x_2}{\|x_2\|},$$

donde $\|y_1\| = \delta$, $\|y_2\| = \delta$, o que implica $\|u(y_1, y_2)\| \leq 1$, ou seja,

$$\left\|u\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| \leq 1.$$

Logo, fazendo-se $c = 1/\delta^2$, vem

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|,$$

desigualdade essa que permanece verdadeira se $x_1 = 0$, ou $x_2 = 0$. Portanto, u é limitada. (Este tipo de prova poderia ter sido usado na primeira parte da demonstração da proposição 9, § 5; e vice-versa, o lema 3, § 4, poderia ter sido usado aqui duas vezes.)

Reciprocamente, suponhamos u limitada. Então, existe $c \geq 0$ tal que

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

para quaisquer $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Seja $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. Provemos que u é contínua em (a_1, a_2). Temos, pela bilinearidade de u,

$$u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) = u(x_1 - a_1, a_2) + u(a_1, x_2 - a_2) + u(x_1 - a_1, x_2 - a_2);$$

logo

$$\|u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2)\| \leq$$

$$\leq c \cdot \|x_1 - a_1\| \cdot \|a_2\| + c \cdot \|a_1\| \cdot \|x_2 - a_2\| + c \cdot \|x_1 - a_1\| \cdot \|x_2 - a_2\|.$$

Daí resulta

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} [u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2)] = 0,$$

donde

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} u(x_1, x_2) = u(a_1, a_2),$$

isto é, u é contínua em (a_1, a_2). QED

Definição 21. Indicaremos com

$$\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$$

o espaço vetorial das aplicações bilineares contínuas de $E_1 \times E_2$ em F, o qual, como se verifica facilmente à vista das condições 1) e 2) da proposição 2, § 1, é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$.

Definição 22. Se $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, definamos $\|u\|$ como sendo o ínfimo das constantes reais $c \geq 0$ tais que

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ (pela proposição 26 e em face da definição 20).

Observação 31. Da definição de $\|u\|$, decorre logo que o ínfimo, a que ali se alude, é um mínimo, isto é,

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq \|u\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$; e que

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

é satisfeita por uma constante $c \geq 0$, quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, se, e somente se, $c \geq \|u\|$.

Proposição 27. A função

$$u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F) \mapsto \|u\| \in \mathbf{R}$$

é uma norma.

Demonstração. Exercício, por analogia com a prova da proposição 10, § 5. QED

Observação 32. Sempre consideraremos $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ como um espaço normado com relação à norma acima, a não ser que digamos o contrário, expressamente. $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é um exemplo de um novo espaço normado, construido a partir dos espaços normados conhecidos E_1, E_2 e F.

Proposição 28. Se F é completo, então $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ também é completo.

Demonstração. Exercício, por analogia com a prova da proposição 11, § 5. QED

Observação 33. Reciprocamente, se $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ e $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ for completo, então F é completo. Comparar com a observação 14, § 5.

Exercício 44. Sendo E_1, E_2, F espaços normados, uma aplicação bilinear $u: E_1 \times E_2 \to F$ é contínua em $E_1 \times E_2$ se, e somente se, ela for contínua em algum ponto de $E_1 \times E_2$.

Exercício 45. Enunciar e resolver o exercício para aplicações bilineares correspondente ao exercício 23, § 5.

Exercício 46. Sejam E_1, E_2, F, G espaços normados e

$$u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F), \qquad v \in \mathcal{L}(F; G).$$

Considerando a aplicação composta, temos

$$v \circ u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; G),$$

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|.$$

Exercício 47. Sejam E, F espaços normados, onde F é completo, S um subespaço vetorial denso de E e $u \in \mathcal{L}(S; F)$. Mostrar que u tem uma e uma única extensão $\overline{u} \in \mathcal{L}(E; F)$. Analogamente, sejam E_1, E_2, F espaços normados, S_1 um subespaço vetorial denso de E_1, S_2 um subespaço vetorial denso de E_2 e $u \in \mathcal{L}(S_1, S_2; F)$. Mostrar que u tem uma e uma única extensão $\overline{u} \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

Exercício 48. Sejam E_1, E_2, F espaços normados. Então $\mathcal{L}(E_1, E_2, F) = \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$ se, e somente se, E_1 e E_2 forem de dimensão finita, ou $E_1 = 0$, ou $E_2 = 0$, ou $F = 0$. Em caso contrário, $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é de codimensão infinita em $\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$, ou seja, o espaço vetorial quociente $\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)/\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é de dimensão infinita. (Ver exemplo 18 e exercício 38, § 11.)

Exercício 49. Sejam E, F espaços normados. A aplicação bilinear

$$(x, u) \in E \times \mathcal{L}(E; F) \mapsto u(x) \in F$$

é contínua; sua norma é 1, ou 0, conforme $\mathcal{L}(E;F) \neq 0$, ou $\mathcal{L}(E;F) = 0$. (Tem-se que $\mathcal{L}(E;F) \neq 0$ se, e somente se, $E \neq 0$ e $F \neq 0$. Se E for de dimensão finita, isso resulta do Teorema de Tychonoff; ver proposição 18, § 11. Se E for de dimensão infinita, isso resulta do Teorema de Hahn-Banach; ver observação 16, § 6.)

Exercício 50. Sejam E, F, G espaços normados. A aplicação bilinear de composição

$$(u, v) \in \mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G) \mapsto v \circ u \in \mathcal{L}(E; G)$$

é contínua; sua norma é 1, ou 0, conforme E, F e G sejam todos diferentes de 0, ou se um deles for 0. (Comparar com o exercício 49.)

Exercício 51. Sejam E, F espaços normados. A aplicação bilinear

$$(f, y) \in E' \times F \mapsto yf \in \mathcal{L}(E; F)$$

é contínua (sendo $\|yf\| = \|y\| \cdot \|f\|$); sua norma é 1, ou 0, conforme $E \neq 0$ e $F \neq 0$, ou em caso contrário. (Comparar com o exercício 49.)

13

CÁLCULO DIFERENCIAL EM ESPAÇOS NORMADOS

Em geral, desenvolve-se o Cálculo Diferencial em **R** (caso das funções diferenciáveis de uma variável real), em $\mathbf{R}^n$ (caso das funções diferenciáveis de várias variáveis reais), em **C** (caso das funções holomorfas, ou analíticas, de uma variável complexa) e em $\mathbf{C}^n$ (caso das funções holomorfas, ou analíticas, de várias variáveis complexas), por meio do uso de coordenadas e mediante o conceito de derivada (em **R** e **C**) e de derivada parcial (em $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$).

O ponto de vista que adotaremos aqui será intrínseco, isto é, independente da fixação de um sistema particular de coordenadas, ou de uma base, nos espaços vetoriais de dimensão finita, estendendo-se aos espaços normados de dimensão infinita, de modo banal. A rigor, essa é a maneira mais geométrica e intuitiva de desenvolver o Cálculo Diferencial. Ela deverá, gradativamente, penetrar nos cursos dessa matéria, à medida que a Álgebra Linear for sendo lecionada no ensino do nível médio cada vez mais.

Vejamos a motivação, no caso de função real de variável real, ou de função complexa de variável complexa, para o Cálculo Diferencial entre espaços normados reais ou complexos.

Análise Real em Uma Variável. Seja A uma parte aberta e não vazia da reta real **R** e $f: A \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real em A. Se $x_0 \in A$, a *derivada de f no ponto x_0*, representada por $f'(x_0)$, é definida como sendo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

onde se subentende que $x \in A$, ou, equivalentemente,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

onde se subentende que $x_0 + h \in A$, desde que o limite exista, caso no qual se diz que f é *derivavel em x_0*.

Podemos escrever a definição da derivada, de modo equivalente, como

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0,$$

ou

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ou ainda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Com a outra notação, temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Ora, **R** é um espaço vetorial e as aplicações lineares de **R** em **R** são da forma

$$u: t \in \mathbf{R} \mapsto at \in \mathbf{R},$$

onde $a \in \mathbf{R}$ é fixo e determina u, sendo único para cada aplicação linear de **R** em **R**.

Na penúltima fórmula acima, o termo

$$f'(x_0)(x - x_0)$$

é o valor em $x - x_0$ da aplicação linear

$$u: t \in \mathbf{R} \mapsto f'(x_0)t \in \mathbf{R}.$$

Então, dizer que f é derivável em $x_0 \in A$ é dizer que existe uma aplicação linear $u: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0,$$

ou, equivalentemente, com a outra notação,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)|}{|h|} = 0,$$

sendo u única em x_0.

É corrente definir a *diferencial em* x_0 da função $y = f(x)$ pela fórmula

$$dy = f'(x_0)dx,$$

onde se diz que dx é a diferencial da variável independente e dy é a diferencial da função. Essa linguagem intuitiva do Cálculo Diferencial tem justo fundamento histórico, proveniente da Geometria (reta tangente a uma curva plana) e da Mecânica (velocidade de um movimento retilíneo).

Na linguagem mais adequada da Álgebra Linear, a diferencial em x_0 da função f é a aplicação linear

$$t \in \mathbf{R} \mapsto f'(x_0)t \in \mathbf{R}.$$

Costuma-se, também, dizer que f é *derivável* ou *diferenciável*, usando tais qualificativos como sinônimos.

Análise Complexa em Uma Variável. Essas considerações, feitas a propósito da Análise Real em uma variável, podem ser estendidas ao caso complexo; basta, na exposição acima, substituir "real" por "complexa", bem como "$\mathbf{R}$" por "$\mathbf{C}$". Se A for uma parte aberta e não vazia da reta complexa $\mathbf{C}$, a derivada de uma função complexa de variável complexa, $f:A \to \mathbf{C}$, é definida formalmente como no caso real anterior. Há, apenas, uma novidade de terminologia: se f é derivável em A, o que significa que f é derivável em todos os pontos de A, então se diz que é holomorfa, ou *analítica complexa*, em A.

Análise em Espaços Normados. O conceito de diferenciabilidade foi estendido, de modo fundamental e simples, aos espaços normados, reais ou complexos, por Maurice Fréchet, como veremos a seguir.

Em síntese, sejam E, F dois espaços normados sobre $\mathbf{K}$. Consideremos uma parte aberta não vazia A de E e uma aplicação $f:A \to F$. A definição de derivada, em sua forma inicial, não tem sentido no caso normado; se $x_0, x \in A$, não se pode fazer a divisão

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A forma equivalente da definição de derivada, que foi indicada a seguir, tem sentido no caso normado (ver § 14). Iremos definir o que se entende por f ser diferenciável em um ponto $x_0 \in A$. A sua diferencial em x_0 será uma aplicação linear contínua de E em F, ou seja, um elemento de $\mathcal{L}(E;F)$. Mesmo que desejássemos, de início, limitar-nos a funções escalares $f:A \to \mathbf{K}$ (isto é, $F = \mathbf{K}$), sua diferencial primeira em A será uma aplicação de A em $\mathcal{L}(E;\mathbf{K}) = E'$, portanto, tomando valores num espaço normado, a saber E'. Para definirmos a diferencial segunda, ou seja a diferencial primeira da diferencial primeira (ver § 24), temos, pois, a necessidade de lidar com aplicações tomando valores num espaço normado F, desde o início.

14

DIFERENCIAL EM ESPAÇOS NORMADOS

Sejam E, F espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbf{K}$. Indiquemos com A uma parte aberta não vazia de E.

Definição 23. A aplicação $f: A \to F$ *é diferenciável num ponto* $x_0 \in A$ se existe $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

onde se subentende que $x \in A$, ou, equivalentemente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

onde se subentende que $x_0 + h \in A$.

Para efeitos da definição que se segue, necessitamos do lema abaixo.

Lema 5. Na notação da definição 23, u é única, caso exista.

Demonstração. Com efeito, suponhamos que se tenha $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$ tais que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - v(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Temos, supondo ainda $x_0 + h \in A$, $h \neq 0$,

$$\frac{v(h) - u(h)}{\|h\|} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)}{\|h\|} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - v(h)}{\|h\|}.$$

Portanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|v(h) - u(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Seja $d = v - u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|d(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $h \in E$, $h \neq 0$, $\|h\| \leq \delta$ implicam

$$\frac{\|d(h)\|}{\|h\|} \leq \epsilon.$$

Seja $x \in E$ tal que $x \neq 0$. Façamos

$$h = \frac{\delta x}{\|x\|}.$$

Então $\|h\| = \delta$, o que implica

$$\frac{\|d(h)\|}{\|h\|} \leq \epsilon, \quad \text{ou} \quad \frac{\|d(x)\|}{\|x\|} \leq \epsilon,$$

isto é

$$\|d(x)\| \leq \epsilon \,.\, \|x\|,$$

desigualdade essa que permanece verdadeira para $x = 0$, logo vale para todo $x \in E$. Resulta que $\|d\| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $\|d\| = 0$. Daí $d = 0$, isto é, $u = v$. QED

Definição 24. Na notação da definição 23 e à vista do lema 5, u é chamada de *diferencial de* f *em* x_0, sendo representada por $Df(x_0)$. Portanto

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(E;F).$$

Proposição 29. Se $f: A \to F$ é diferenciável em $x_0 \in A$, então f é contínua em x_0.

Demonstração. Sendo f diferenciável em x_0, existe $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Então, é claro que

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\| = 0.$$

Ora,

$$f(x) - f(x_0) = [f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)] + [u(x) - u(x_0)].$$

Como cada uma das duas parcelas do segundo membro tende para zero, quando x tende para x_0, vem que o mesmo ocorre com o primeiro membro. Daí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou seja, f é contínua em x_0. QED

Observação 34. Alguns autores incluem a continuidade de f em x_0, na definição de sua diferenciabilidade em x_0, supondo apenas que $u \in \mathcal{L}_a(E;F)$, para concluir daí que u é contínua. É outro ponto de vista equivalente.

Definição 25. A aplicação $f: A \to F$ *é diferenciável em* A se f for diferenciável em todos os pontos de A. Nesse caso, a aplicação

$$x \in A \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E;F)$$

é chamada a *diferencial de* f *em* A e representada por Df.

Observação 35. Embora possamos estar interessados, mais especialmente, na diferenciação de funções $f: A \to \mathbf{K}$ com valores escalares, quando $F = \mathbf{K}$, sua diferencial $Df: A \to \mathcal{L}(E;\mathbf{K}) = E'$ será uma aplicação com valores no dual normado E' de E, não tendo, pois, valores escalares e, sim, valores vetoriais. Por isso, para definirmos a diferenciação sucessiva de $f: E \to \mathbf{K}$, ou seja, a diferenciação de sua diferencial $Df: A \to E'$ (ver § 24), é essencial que, já de início, introduzamos a diferenciação de aplicações com valores vetoriais.

Observação 36. A única simplificação notável que ocorre na definição 23, no caso em que E é de dimensão finita, consiste em observar que, nesse caso, toda aplicação linear de E em F é contínua (proposição 19, § 11), de modo que, na definição de diferenciabilidade de f em x_0, não é essencial dizer que sua diferencial $Df(x_0)$ é uma aplicação linear contínua, pois tal continuidade é automática. 73

Observação 37. Quando E e F são espaços normados complexos, se f for diferenciável em A, então se diz que f é *holomorfa*, ou *analítica complexa*, em A. Temos, também, os espaços normados reais subjacentes E_R e F_R (§ 1). É preciso distinguir cuidadosamente entre a diferenciabilidade "complexa" de $f: A \subset E \to F$ e a diferenciabilidade "real" de $f: A \subset E_R \to F_R$. É claro que a diferenciabilidade complexa implica a diferenciabilidade real; mas a recíproca é falsa, como já mostra o seguinte exemplo clássico na Análise Complexa em uma variável. Sendo $E = F = \mathbf{C}$ e, portanto, $E_R = F_R = \mathbf{R}^2$, a função $f: z \in \mathbf{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbf{C}$ é diferenciável no sentido real, mas não o é no sentido complexo.

Observação 38. Alguns autores chamam também de derivada o que chamamos de diferencial; representam por $f'(x_0)$ e f' o que denotamos por $Df(x_0)$ e Df. Para nós, a derivada será definida no § 17, quando $E = \mathbf{K}$. Preferimos distinguir entre a derivada e a diferencial, a exemplo do que é feito no Cálculo Diferencial clássico, em uma variável real ou complexa. Lembremos, também, que, no Cálculo Diferencial clássico, em várias variáveis reais ou complexas, há o conceito de diferencial, mas não o de derivada (a não ser o de derivada parcial, que depende do sistema de coordenadas). Assim, é a palavra "diferencial" em lugar de "derivada", que deve prevalecer no caso de E qualquer.

Exercício 52. Sejam E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia, e $f: A \to F$. Temos o caráter local da diferenciabilidade, que se exprime assim:

a) se $B \subset A$ for aberto não vazio e f for diferenciável em A, então sua restrição $f|B$ será diferenciável em B;

b) se

$$A = \bigcup_{\iota \in I} B_\iota,$$

onde B_ι é aberto e não vazio para todo $\iota \in I$, então f será diferenciável em A se sua restrição $f|B_\iota$ for diferenciável em B_ι, para todo $\iota \in I$.

Exercício 53. Sejam E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia e $f:A \to F$. Tem-se o caráter topológico da diferenciabilidade, que se exprime assim: mudando-se equivalentemente as normas de E e F, não se altera a diferenciabilidade de f, nem sua diferencial, num ponto de A, ou em A.

Exercício 54. Sejam E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia e $f:A \to F$. Para que f seja diferenciável em $x_0 \in A$ é necessário e suficiente que existam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $r:A \to F$, sendo $r(x_0) = 0$ e r contínua em x_0, tais que, para todo $x \in A$,

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x).$$

Exercício 55. Sejam E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia e $f:A \to F$. Se f for diferenciável em $x_0 \in A$, tem-se o caráter lipschitziano de f em x_0, que se exprime assim: existem $\delta > 0$ e $c \geq 0$ tais que $B_\delta(x_0) \subset A$ e, para todo $x \in B_\delta(x_0)$,

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq c \cdot \|x - x_0\|.$$

15

APLICAÇÃO AFIM CONTÍNUA TANGENTE

Definição 26. Sejam E e F espaços normados. Uma aplicação $T: E \to F$ é dita *afim* quando existem $b \in F$ e $u \in \mathcal{L}_a(E;F)$ tais que, para todo $x \in E$,

$$T(x) = b + u(x).$$

Então, não só b e u definem T, mas, reciprocamente, T determina b e u, pois $b = T(0)$ e $u(x) = T(x) - T(0)$ para todo $x \in E$. Seja $\mathcal{A}_a(E;F)$ o espaço vetorial das aplicações afins de E em F, que é isomorfo naturalmente a $F \times \mathcal{L}_a(E;F)$, pela correspondência

$$(b,u) \in F \times \mathcal{L}_a(E;F) \mapsto T \in \mathcal{A}_a(E;F)$$

acima definida. O índice a é a inicial de algébrico. Seja $\mathcal{A}(E;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{A}_a(E;F)$ de tais aplicações afins contínuas. Para que T acima seja contínua é obviamente necessário e suficiente que u seja contínua.

Definição 27. Sendo E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia e $f: A \to B$ diferenciável em $x_0 \in A$, diz-se que a aplicação afim contínua dada por

$$x \in E \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) \in F$$

é *tangente* a f em x_0.

Observação 39. Como motivação, lembrar que, se $A \subset \mathbf{R}$ for aberta não vazia e $f: A \to \mathbf{R}$ for diferenciável em $x_0 \in A$, então a reta de $\mathbf{R}^2$ tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ ao gráfico de f em $\mathbf{R}^2$, ou seja, ao lugar geométrico representado pela equação $y = f(x)$, tem por equação

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definição 28. Sendo E e F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia, então as aplicações $f: A \to F$ e $g: A \to F$, supostas diferenciáveis em $x_0 \in A$, são ditas *tangentes* em x_0 quando elas têm a mesma aplicação afim contínua tangente em x_0, isto é,

$$f(x_0) = g(x_0), \qquad Df(x_0) = Dg(x_0).$$

Exercício 56. Nas condições da definição 28, mostrar que f e g são tangentes em x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|g(x) - f(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Observação 40. Alguns autores tomam a condição indicada no exercício 56 como definição de tangência de f e g em x_0, supondo, além disso, que $f(x_0) = g(x_0)$ e que f ou g seja contínua em x_0, o que acarreta a continuidade de ambas em x_0. Esta forma do conceito de tangência está usada, implicitamente na definição 23; ver, também, a proposição 29.

16

ALGUMAS REGRAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Proposição 30. Sendo E, F espaços normados, $b \in F$, então a aplicação constante $x \in E \mapsto b \in F$ tem diferencial igual a 0 em E.

Demonstração. Seja $f: E \to F$ tal que $f(x) = b$ para todo $x \in E$. Então, quaisquer que sejam $x, x_0 \in E$, tem-se $f(x) = f(x_0)$. Portanto

$$f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0) = 0,$$

onde 0 no primeiro membro indica o 0 de $\mathcal{L}(E;F)$, donde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

isto é, achamos a aplicação linear contínua $0: E \to F$ satisfazendo à condição da definição de diferenciabilidade. Resulta que f é diferenciável em x_0 e que $Df(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in E$. QED

Observação 41. A aplicação constante $x \in E \mapsto b \in F$ é também indicada por b, o que é um abuso cômodo de notação, de modo que a proposição 30 se escreve $Db = 0$. Mais adiante, a partir do Teorema de Lagrange, provaremos uma recíproca dessa proposição (ver § 19).

Proposição 31. Sejam E, F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então u é diferenciável em E e Du é a aplicação constante $x \in E \mapsto u \in \mathcal{L}(E;F)$.

Demonstração. Por linearidade

$$u(x) - u(x_0) - u(x - x_0) = 0$$

quaisquer que sejam $x, x_0 \in E$. Logo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|u(x) - u(x_0) - u(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0;$$

então, achamos $u \in \mathcal{L}(E;F)$ que satisfaz à definição de diferenciabilidade, ou seja u é diferenciável em x_0 e sua diferencial aí é $Du(x_0) = u$ para todo $x_0 \in E$. QED

Observação 42. A aplicação constante $x \in E \mapsto u \in \mathcal{L}(E;F)$ é indicada simplesmente por u, o que é um abuso cômodo de notação, de modo que a proposição 31 se escreve $Du = u$. Note-se, entretanto, que, no primeiro membro, tem-se $u: x \in E \mapsto u(x) \in F$, mas, no segundo membro, trata-se de $u: x \in E \mapsto u \in \mathcal{L}(E;F)$; ou seja, temos duas aplicações diferentes designadas pela mesma letra u. A presente regra $Du = u$ não deve ser comparada com $(e^x)' = e^x$, mas sim com $(ax)' = a$, do Cálculo Diferencial clássico. Mais adiante, no § 19, discutiremos a recíproca dessa proposição, estudando as aplicações de derivada constante, usando o Teorema de Lagrange.

Proposição 32. Sejam E_1, E_2, F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Então u é diferenciável em $E = E_1 \times E_2$ e sua diferencial em $x = (x_1, x_2) \in E$ é a aplicação linear contínua de E em F dada por

$$(t_1, t_2) \in E \mapsto u(t_1, x_2) + u(x_1, t_2) \in F.$$

Demonstração. Dado x, vamos mostrar que u é diferenciável em x. Ora, quaisquer que sejam $t_1 \in E_1$, $t_2 \in E_2$, temos que

$$u(x_1 + t_1,\ x_2 + t_2) = u(x_1, x_2) + u(t_1, x_2) + u(x_1, t_2) + u(t_1, t_2),$$

pela bilinearidade de u. Portanto

$$\|u(x_1 + t_1,\ x_2 + t_2) - u(x_1, x_2) - u(t_1, x_2) - u(x_1, t_2)\| =$$

$$= \|u(t_1, t_2)\| \leq \|u\| \cdot \|t_1\| \cdot \|t_2\|.$$

Lembrando o caráter topológico da diferenciabilidade (ver o exercício 53, § 14), pelo qual podemos usar em E qualquer norma que defina sua topologia de produto cartesiano, usemos em E a norma $\|\cdot\|_\infty$ (ver definição 14, § 9). Seja $t = (t_1, t_2) \in E$. Então

$$\|t\|_\infty = \sup\{\|t_1\|, \|t_2\|\}.$$

Logo

$$\|u(x + t) - u(x) - v(t)\| \leq \|u\| \cdot (\|t\|_\infty)^2,$$

onde definimos $v \in \mathcal{L}(E; F)$ por

$$v(t) = u(t_1, x_2) + u(t_2, x_1)$$

para todo $t \in E$. Resulta que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|u(x + t) - u(x) - v(t)\|}{\|t\|_\infty} = 0,$$

ou seja, u é diferenciável em x e $Du(x) = v$. QED

Observação 43. A regra que acabamos de provar é a análoga, no caso geral que estamos considerando, da regra $(fg)' = f'g + fg'$ do Cálculo Diferencial clássico, de derivação de um produto. Mais explicitamente, esta regra clássica resulta da proposição 32 acima e das proposições 35 e 36 abaixo, pois fg é a aplicação composta das seguintes.

$$x \in A \mapsto (f(x),\ g(x)) \in \mathbf{K}^2,$$

$$(y_1, y_2) \in \mathbf{K}^2 \mapsto y_1 y_2 \in \mathbf{K},$$

tomando valores a primeira em um produto cartesiano e sendo a segunda bilinear contínua. A proposição 32 se estende-se facilmente a aplicações multilineares contínuas.

Proposição 33. Sendo E um espaço normado, as operações vetoriais

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E,$$

$$(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \mapsto \lambda x \in E,$$

são diferenciáveis.

Demonstração. Com efeito, a primeira é linear contínua e a segunda é bilinear contínua; basta usar as proposições 31 e 32, respectivamente. QED

Proposição 34. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia, $f: A \to F$, $g: A \to F$, sendo ambas diferenciáveis em $x_0 \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Então $\alpha f + \beta g$ é diferenciável em x_0 e

$$D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0).$$

Demonstração. Sejam $s = \alpha f + \beta g$, $u = Df(x_0)$, $v = Dg(x_0)$, $w = \alpha u + \beta v$. Então

$$s(x) - s(x_0) - w(x - x_0) = \alpha[f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)] + \beta[g(x) - g(x_0) - v(x - x_0)]$$

se $x \in A$. Resulta que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|s(x) - s(x_0) - w(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

o que prova ser s diferenciável em x_0 e $Ds(x_0) = w$. QED

Observação 44. Costuma-se citar a proposição 34 como sendo a linearidade da diferenciação.

Proposição 35. Sejam E, F_1, F_2 espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia, $f_1: A \to F_1$, $f_2: A \to F_2$ e

$$f = f_1 \times f_2 : A \to F_1 \times F_2$$

o produto cartesiano das aplicações componentes f_1, f_2 dado por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in F_1 \times F_2$$

se $x \in A$. Para que f seja diferenciável em $x_0 \in A$ é necessário e suficiente que f_1, f_2 sejam diferenciáveis em x_0. Então

$$Df(x_0) = Df_1(x_0) \times Df_2(x_0)$$

é o produto cartesiano das aplicações componentes $Df_1(x_0)$, $Df_2(x_0)$, ou seja, para todo $t \in E$,

$$Df(x_0)(t) = (Df_1(x_0)(t),\ Df_2(x_0)(t)) \in F_1 \times F_2.$$

Demonstração. Suponhamos f_1, f_2 diferenciáveis em x_0. Sejam $u_1 = Df_1(x_0)$, $u_2 = Df_2(x_0)$. Façamos

$$u = u_1 \times u_2 \in \mathcal{L}(E;F_1 \times F_2).$$

Então, se $x \in A$,

$$f(x) - f(x_0) - u(x - x_0) = (f_1(x), f_2(x)) - (f_1(x_0), f_2(x_0)) - (u_1(x - x_0), u_2(x - x_0)) =$$

$$= (f_1(x) - f_1(x_0) - u_1(x - x_0),\ f_2(x) - f_2(x_0) - u_2(x - x_0)).$$

Usando a norma $\|\cdot\|_\infty$ em $F_1 \times F_2$ (ver definição 14, § 9), temos

$$\|f(x) - f(x_0) - u(x - u_0)\|_\infty = \sup_{i=1,2} \|f_i(x) - f_i(x_0) - u_i(x - x_0)\|.$$

Daí, juntamente com o fato de que f_1, f_2 são diferenciáveis em x_0, decorre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|_\infty}{\|x - x_0\|} = 0,$$

ou seja, f é diferenciável em x_0 e $Df(x_0) = u$.

A recíproca é demonstrada com o mesmo raciocínio, na ordem inversa. QED

Observação 45. Sejam E, F_1, F_2 espaços normados. Entre

$$\mathcal{L}(E;F_1) \times \mathcal{L}(E;F_2),$$

$$\mathcal{L}(E;F_1 \times F_2),$$

existe um isomorfismo e homeomorfismo natural, descrito do seguinte modo. A (u_1,u_2) no primeiro espaço associamos u no segundo espaço definido por

$$u(x) = (u_1(x),\ u_2(x)) \in F_1 \times F_2$$

para todo $x \in E$; escreve-se $u = u_1 \times u_2$. É imediato que $(u_1,u_2) \mapsto u$ é um isomorfismo e homeomorfismo entre os dois espaços normados em questão. Ponderemos que a correspondência bijetiva acima indicada é uma isometria para a norma $\|\cdot\|_\infty$ usada nos dois produtos cartesianos em jogo; mas não o é sempre para a norma $\|\cdot\|_p$, sendo $1 \leq p < \infty$.

Proposição 36. (Regra de Diferenciação de Aplicações Compostas). Sejam E, F, G espaços normados, $A \subset E$, $B \subset F$, ambos abertos não vazios, $f:A \to F$, $g:B \to G$, sendo $f(A) \subset B$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f for diferenciável em x_0 e g for diferenciável em y_0, então $g \circ f: A \to G$ é diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \circ Df(x_0).$$

Demonstração. Se $x \in A$, seja $r(x)$ definido por

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)$$

para $x \neq x_0$, onde $u = Df(x_0)$, e por $r(x_0) = 0$. Analogamente, se $y \in B$, seja $s(y)$ definido por

$$g(y) = g(y_0) + v(y - y_0) + \|y - y_0\| \cdot s(y)$$

para $y \neq y_0$, onde $v = Dg(y_0)$, e por $s(y_0) = 0$. Pela definição de diferenciabilidade, as aplicações $r: A \to F$, $s: B \to G$ são contínuas em x_0, y_0, respectivamente.

Para $x \in A$, seja $y = f(x) \in B$. Então, como as equações acima que definem r e s permanecem válidas para $x = x_0$ e $y = y_0$, respectivamente, temos, para $x \in A$,

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= g[f(x_0)] + v[f(x) - f(x_0)] + \|f(x) - f(x_0)\| \cdot s[f(x)] = \\ &= g[f(x_0)] + v[u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)] + \\ &+ \|u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)\| \cdot s[f(x)]. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - (v \circ u)(x - x_0) &= \|x - x_0\| \cdot v[r(x)] + \\ &+ \|u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)\| \cdot s[f(x)]. \end{aligned}$$

Para concluir que $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e que

$$D(g \circ f)(x_0) = v \circ u,$$

basta notar que, chamando de $\Delta(x)$ o segundo membro da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \|\Delta(x)\| &\leq \|x - x_0\| \cdot \|v\| \cdot \|r(x)\| + \\ &+ [\|u\| \cdot \|x - x_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|r(x)\|] \cdot \|s[f(x)]\|, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\Delta(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

pois $r(x) \to 0$ quando $x \to x_0$, bem como $f(x) \to y_0$ quando $x \to x_0$, e finalmente $s(y) \to 0$ quando $y \to y_0$. QED

Observação 46. Nas hipóteses da proposição acima, se f e g forem diferenciáveis em A e B, respectivamente, então, para todo $x \in A$,

$$D(g \circ f)(x) = Dg[f(x)] \circ Df(x),$$

o que, por abuso de notação, se escreve

$$D(g \circ f) = (Dg \circ f) \circ Df,$$

ou, ainda, mais simplesmente,

$$D[g(f)] = Dg(f)Df.$$

Observação 47. A proposição 36 generaliza a fórmula clássica $\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x)$ do Cálculo Diferencial clássico.

Observação 48. A título de comentário, apenas, notemos que a proposição 34 resulta das proposições 33, 35 e 36.

Proposição 37. (Regra de Diferenciação das Aplicações Inversas). Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$, $B \subset F$, ambos abertos não vazios, $f: A \to F$ que aplica A injetivamente sobre B, $f^{-1}: B \to E$ sua inversa que aplica B injetivamente sobre A, $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0) \in B$, donde $x_0 = f^{-1}(y_0) \in$ $\in A$. Suponhamos que f seja diferenciável em x_0. Para que f^{-1} seja diferenciável em y_0 é necessário e suficiente que f^{-1} seja contínua em y_0 e que $Df(x_0)$ seja um isomorfismo e um homeomorfismo de E sobre F, donde sua inversa $[Df(x_0)]^{-1}$ ser um isomorfismo e um homeomorfismo de F sobre E. Então

$$Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}.$$

Demonstração. Sejam

$$u = Df(x_0) \in \mathcal{L}(E;F),$$

$$v = u^{-1} \in \mathcal{L}(F;E),$$

para provarmos a suficiência. Façamos, para $x \in A$, $x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x),$$

e $r(x_0) = 0$, o que define $r: A \to F$ contínua em x_0, pela diferenciabilidade de f. Seja, para $y \in B$, $y \neq y_0$,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + v(y - y_0) + \|y - y_0\| \cdot s(y)$$

e $s(y_0) = 0$, o que define $s: B \to E$. Para provar que f^{-1} é diferenciável em y_0 e que sua diferencial em y_0 é igual a v, devemos provar que s é contínua em y_0.

Para $x \in A$, façamos $y = f(x) \in B$, ou, equivalentemente, para $y \in B$, façamos $x = f^{-1}(y) \in A$. Notemos que $x \to x_0$ equivale a $y \to y_0$, pela continuidade de f em x_0 e de f^{-1} em y_0. Temos que

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - v(y - y_0) = x - x_0 - v(y - y_0) = v[u(x - x_0)] - v(y - y_0) =$$

$$= v[u(x - x_0) - (y - y_0)] = -v[f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)].$$

Logo

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - v(y - y_0)\| \leq \|v\| \cdot \|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|.$$

Supondo $y \neq y_0$, o que equivale a $x \neq x_0$, temos

$$\|s(y)\| \leq \|v\| \cdot \|r(x)\| \cdot \frac{\|x - x_0\|}{\|y - y_0\|}.$$

Como $r(x) \to 0$ quando $x \to x_0$, para concluir que $s(y) \to 0$ quando $y \to y_0$, basta mostrar que

$$\frac{\|x - x_0\|}{\|y - y_0\|}$$

se mantém limitado quando $y \to y_0$, ou seja, quando $x \to x_0$.

Para isso, por cálculo análogo ao feito acima,

$$x - x_0 = v[u(x - x_0)] = -v[f(x) - f(x_0) - u(x - x_0) - (y - y_0)],$$

donde

$$\|x - x_0\| \leq \|v\| \cdot [\|x - x_0\| \cdot \|r(x)\| + \|y - y_0\|].$$

Daí

$$[1 - \|v\| \cdot \|r(x)\|] \cdot \|x - x_0\| \leq \|v\| \cdot \|y - y_0\|.$$

Como $r(x) \to$ quando $x \to x_0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset A$ e tal que $x \in B_\delta(x_0)$ implique $\|r(x)\| < 1/\|v\|$, ou seja

$$1 - \|v\| \cdot \|r(x)\| > 0.$$

Então, para $x \in B_\delta(x_0)$, temos

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\|v\| \cdot \|y - y_0\|}{1 - \|v\| \cdot \|r(x)\|}.$$

Resulta que, para $x \in B_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$,

$$\|s(y)\| \leq \frac{\|v\|^2 \cdot \|r(x)\|}{1 - \|v\| \cdot \|r(x)\|}$$

(que, aliás, permanece verdadeira para $x = x_0$). Portanto, $s(y) \to 0$ quando $y \to y_0$, o que prova a suficiência.

Vejamos, agora, a necessidade. Basta aplicar a proposição 29, § 14, para concluir que f^{-1} deve ser contínua em y_0. Além disso, aplicando a proposição 36 a

$$f \circ f^{-1} = I, \qquad f^{-1} \circ f = I,$$

vemos que, pela proposição 31,

$$Df(x_0) \circ Df^{-1}(y_0) = I,$$

$$Df^{-1}(y_0) \circ Df(x_0) = I;$$

logo $Df(x_0)$ é um isomorfismo e um homeomorfismo de E sobre F. QED

Observação 49. Esta proposição generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico para $y = f(x)$, pela qual

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Observação 50. Na proposição 37, figuram as hipóteses de que f tenha inverso f^{-1} e que este seja contínuo em y_0. É importante saber que tais hipóteses sobre f^{-1} podem ser abandonadas, passando a fazer parte da conclusão, localmente. É o que ocorre no resultado poderoso seguinte, conhecido como o *Teorema de Inversão Local:* sendo E, F espaços de Banach, $A \subset E$ aberto não vazio, $f: A \to F$ continuamente diferenciável em A e $x_0 \in A$ tal que $Df(x_0)$ seja um isomorfismo e um homeomorfismo de E sobre F, então existem uma vizinhança aberta V de x_0 em A e uma vizinhança aberta W de $y_0 = f(x_0)$ em F tais que f seja um homeomorfismo entre V e W, bem como $f^{-1}: W \to E$ seja continuamente diferenciável em W, tendo-se

$$Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$$

para todo $y \in W$, onde $x = f^{-1}(y)$, ou seja para todo $x \in V$, onde $y = f(x)$.

Observação 51. Na proposição 37 e no Teorema de Inversão Local (observação 50), a hipótese sobre $Df(x_0)$ implica que E e F são isomorfos por $Df(x_0)$. Logo, se E ou F for de dimensão finita, o outro também o será, com dimensão igual. Supondo, pois, E e F de mesma dimensão finita, a hipótese de que $Df(x_0)$ seja um isomorfismo e um homeomorfismo de E sobre F equivale, pelo corolário da proposição 18, § 11, a que $Df(x_0)$ seja um isomorfismo de E sobre F, ou a que $Df(x_0)$ seja injetiva, ou a que $Df(x_0)$ seja sobrejetiva.

Exercício 57. Sejam E, F_1, F_2, G espaços normados, $A \subset E$ aberta não vazia, $f_1: A \to F_1$, $f_2: A \to F_2$,

$$u \in \mathcal{L}(F_1, F_2; G), \qquad g = u(f_1, f_2): A \to G.$$

Se $x_0 \in A$ e f_1, f_2 são diferenciáveis em x_0, então g é diferenciável em x_0 e tem-se a seguinte regra de diferenciação de um produto, para todo $x \in E$,

$$Dg(x_0)(x) = u[Df_1(x_0)(x), f_2(x_0)] + u[f_1(x_0), Df_2(x_0)(x)].$$

Exercício 58. Considerar as aplicações bilineares contínuas dos exercícios 49, 50, 51, § 12. Escrever em cada caso a diferencial da aplicação. Escrever, também, em cada caso o enunciado particular a que se reduz o exercício 57.

Exercício 59. Seja E um espaço de Banach. O subconjunto A de todos $u \in \mathcal{L}(E;E)$ que têm inverso $u^{-1} \in \mathcal{L}(E;E)$ é aberto em $\mathcal{L}(E;E)$ e contem a identidade. A aplicação de inversão

$$\iota : u \in A \mapsto u^{-1} \in \mathcal{L}(E;E)$$

é um homeomorfismo de A, que coincide com seu inverso ι^{-1}. Além disso, ι é diferenciável em A e, para quaisquer $u \in A$, $v \in \mathcal{L}(E;E)$, tem-se

$$D\iota(u)(v) = -u^{-1} \circ v \circ u.$$

Observação 52. Este exercício generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Exercício 60. Mantenhamos a notação do exercício 59. Mostrar que, sendo F um espaço normado, a aplicação

$$(u,v) \in A \times \mathcal{L}(E;F) \mapsto vu^{-1} \in \mathcal{L}(E;F)$$

é diferenciável e escrever sua diferencial. Idem para

$$(u,v) \in A \times \mathcal{L}(F;E) \mapsto u^{-1}v \in \mathcal{L}(F;E).$$

Observação 53. Este exercício generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{fg' - f'g}{f^3}.$$

17

CASO DE UMA VARIÁVEL ESCALAR

Consideremos o caso em que $E = \mathbf{K}$. Seja F um espaço normado. Notemos que

$$\mathcal{L}_s(\mathbf{K};F) = \mathcal{L}(\mathbf{K};F)$$

e que F é naturalmente isomorfo a ambos, por medio do isomorfismo que a cada $b \in F$ associa a aplicação linear, automaticamente contínua, de $\mathbf{K}$ em F definida por

$$\lambda \in \mathbf{K} \mapsto \lambda b \in F.$$

Definição 29. Se $A \subset \mathbf{K}$ for aberto não vazio e $f: A \to F$ (função de variável real, ou complexa, com valores em F) for diferenciável em $x_0 \in A$, sua diferencial $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{K};F)$ se identifica naturalmente a um elemento de F, representado por $f'(x_0)$ e chamado de *derivada de f em x_0*. Portanto

$$Df(x_0): \lambda \in \mathbf{K} \mapsto \lambda f'(x_0) \in F.$$

Por isso, costuma-se dizer que f é *derivável em x_0* como sinônimo de que f é diferenciável em x_0. Diz-se que f e *derivável em A* quando f for derivável em todos pontos de A. Nesse caso, a função

$$x \in A \mapsto f'(x) \in F$$

é chamada de *derivada de f em A* e representada por f'.

Proposição 38. Na notação da definição 29, para que f seja diferenciável, ou derivável, em x_0 é necessário e suficiente que exista o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

cujo valor é, então, igual a $f'(x_0)$.

Demonstração. Exercício. QED

Observação 54. No estudo das funções de variável escalar, faz-se uma distinção entre as derivadas $f'(x_0)$, f' e as diferenciais $Df(x_0)$, Df, que são conceitos matemáticos distintos, embora se correspondam naturalmente, dada a correspondência natural entre F e $\mathcal{L}(\mathbf{K};F)$. Tais conceitos matemáticos distintos são equivalentes do ponto de vista de seu uso. No caso geral, em que E é qualquer espaço normado (em lugar de $E = \mathbf{K}$), vários autores ainda chamam de derivada o que chamamos aqui de diferencial $Df(x_0)$, Df, representando-as ainda por $f'(x_0), f'$. A exemplo do Cálculo Diferencial clássico, preferiremos distinguir derivada de diferencial, do ponto de vista de conceito e notação; a derivada tem sentido apenas no caso $E = \mathbf{K}$, ao passo que a diferencial prevalece quando E é um espaço normado qualquer.

Observação 55. No caso de uma variável escalar, sem repetir explicitamente, em termos da derivada, tudo o que foi dito anteriormente para a diferencial, observemos, para ilustrar, que a regra de derivação de aplicações compostas se enuncia

$$(g \circ f)'(x_0) = Dg(y_0)[f'(x_0)],$$

segundo a proposição 36 quando $E = \mathbf{K}$.

Observação 56. Quando $E = \mathbf{K}$, $A \subset \mathbf{K}$, F é um espaço normado, $f: A \to F$, $x_0 \in A$ e existe $\delta > 0$ tal que $[x_0, x_0 + \delta] \subset A$, podemos definir a derivada e a diferencial de f à direita de x_0; e analogamente para à esquerda, se $[x_0 - \delta, x_0] \subset A$. Não entraremos em detalhes, que devem ser claros para o leitor. No caso de um espaço normado qualquer E, a definição de diferenciabilidade de $f: A \to F$ em um ponto $x_0 \in A$ não interior a A, que agora não mais é suposto aberto, é assunto mais complexo, que não abordaremos neste texto.

Exercício 61. Seja $f: A \to F$, onde E, F são espaços normados e $A \subset E$ é aberto não vazio. Diz-se que f tem uma derivada em $x_0 \in A$ segundo a direção $t \in E$ quando existe o limite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda t) - f(x_0)}{\lambda}$$

em F, onde $\lambda \in \mathbf{K}$. Tal limite é a derivada em questão, sendo representado por

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0).$$

Provar que, se f for diferenciável em x_0, então essa derivada em x_0 segundo t existe qualquer seja t e

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0) = Df(x_0)(t).$$

18

TEOREMA DOS ACRÉSCIMOS FINITOS DE LAGRANGE

Comecemos recordando a formulação clássica do *Teorema dos Acréscimos Finitos de Lagrange*. Seja $A \subset \mathbf{R}$ aberta não vazia, $f: A \to \mathbf{R}$ diferenciável em A e $\lambda_0, \lambda_1 \in A$ tais que $[\lambda_0, \lambda_1] \subset A$. Então existe $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ tal que

$$f(\lambda_1) - f(\lambda_0) = f'(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_0).$$

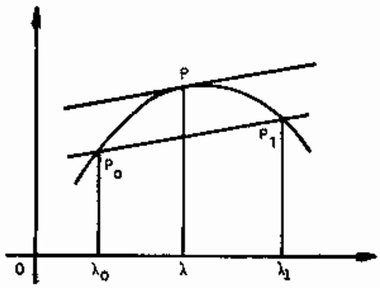
Um comentário usualmente feito é que, se $\lambda_0 \neq \lambda_1$, então λ pode ser escolhido no interior de $[\lambda_0, \lambda_1]$. Em todo caso, o fato de $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ faz com que esse resultado fundamental do Cálculo Diferencial também seja conhecido como o *Teorema do Valor Médio de Lagrange*. A sua interpretação geométrica, quando $\lambda_0 \neq \lambda_1$, é que, considerando-se o gráfico em $\mathbf{R}^2$ de f, ou seja, a curva de equação $y = f(x)$, bem como a corda à curva passando por seus pontos

$$P_0 = (\lambda_0, f(\lambda_0)), \quad P_1 = (\lambda_1, f(\lambda_1)),$$

existe um ponto

$$P = (\lambda, f(\lambda))$$

do arco da curva entre P_0, P_1 onde a tangente à curva é paralela à corda.



O corolário que se segue é imediato. Nas hipóteses acima, tem-se

$$|f(\lambda_1) - f(\lambda_0)| \leq \sup_{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]} |f'(\lambda)| \cdot |\lambda_1 - \lambda_0|.$$

Na quase totalidade das aplicações do Teorema de Lagrange, o que se usa é o corolário acima, sob a forma de uma desigualdade, mas não o próprio teorema, ou seja, a igualdade em seu enunciado.

Como veremos pela proposição 39 abaixo, o Teorema de Lagrange tem um análogo para funções diferenciáveis $f: A \to \mathbf{R}$, sendo A uma parte aberta não vazia de um espaço normado. E. Ele, porém, não tem um análogo para aplicações diferenciáveis com valores vetoriais, como mostra o exemplo 25 abaixo. Por outro lado, o corolário acima tem um análogo para aplicações diferenciáveis $f: A \to F$, sendo F um espaço normado, pela proposição 40 abaixo.

Definição 30. Se E for um espaço vetorial e $x_0, x_1 \in E$, o *segmento fechado* $[x_0, x_1]$ de *extremidades* x_0, x_1 é o conjunto dos pontos

$$(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$$

para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Se $x_0 = x_1$, então $[x_0, x_1]$ reduz-se ao ponto $x_0 = x_1$. Se $x_0 \neq x_1$, notemos que a aplicação

$$\lambda \in [0, 1] \mapsto (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in [x_0, x_1]$$

é bijetiva entre $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ e $[x_0, x_1] \subset E$. Se E for normado, então $[x_0, x_1]$ será compacto, pois é a imagem do compacto $[0, 1]$ pela aplicação acima, que é contínua.

Proposição 39. (Igualdade de Lagrange). Sejam E um espaço normado, $A \subset E$ aberto não vazio, $f: A \to \mathbf{R}$ diferenciável em A e $x_0, x_1 \in A$ tais que $[x_0, x_1] \subset A$. Então existe $x \in [x_0, x_1]$ tal que

$$f(x_1) - f(x_0) = Df(x)(x_1 - x_0).$$

Demonstração. A função

$$\lambda \in \mathbf{R} \mapsto (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in E$$

é derivável, por ser afim contínua; sua derivada é constante e igual a $x_1 - x_0$. Seja g a função definida por

$$g(\lambda) = f[(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1]$$

na parte aberta de $\mathbf{R}$ formada pelos $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in A$, parte essa que contém $[0, 1]$. Então, g é derivável, pois é a composta de duas aplicações diferenciáveis; sua derivada é, pela observação 55, § 17,

$$g'(\lambda) = Df[(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1](x_1 - x_0).$$

Pelo Teorema de Lagrange clássico, para função real de variável real, existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\lambda),$$

donde a igualdade do enunciado, sendo $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in [x_0, x_1]$. QED

Observação 57. A forma do Teorema de Lagrange, que acabamos de provar usando o Teorema de Lagrange clássico, contém como caso particular óbvio o caso clássico, sendo, pois, facilmente equivalente ao mesmo.

Observação 58. Na proposição 39, se $x_0 \neq x_1$, pode-se supor que $x \neq x_0$, $x \neq x_1$. Isso resulta da observação correspondente no caso do Teorema de Lagrange para função real de variável real.

Corolário. Nas hipóteses da proposição 39, temos

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Demonstração. Com efeito, na notação da conclusão da proposição 39, basta notar que

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\|. \text{ QED}$$

Exemplo 25. Tomemos a função

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto (x^2, x^3) \in \mathbf{R}^2,$$

que é diferenciável. Fixemos, por exemplo, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$ em $\mathbf{R}$. Afirmamos que a igualdade

$$f(\lambda_1) - f(\lambda_0) = f'(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_0)$$

é falsa para todo $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, ou mesmo para todo $\lambda \in \mathbf{R}$. De fato, aquela igualdade equivale a

$$(1, 1) - (0, 0) = (2\lambda, 3\lambda^2),$$

ou ainda a $2\lambda = 1$ e $3\lambda^2 = 1$, o que é impossível. Este exemplo tão simples mostra que uma igualdade do tipo do Teorema de Lagrange, expressa pela proposição 39, não pode ser esperada para o caso de valores vetoriais (mesmo quando o espaço da variável é de dimensão 1, como $\mathbf{R}$, sendo o espaço dos valores de dimensão 2, como $\mathbf{R}^2$).

Felizmente, o Teorema de Lagrange persiste sob a forma de desigualdade na sua formulação geral, como ocorre com o corolário da proposição 39. É o que veremos agora.

Proposição 40. (Desigualdade de Lagrange). Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio, $f : A \to F$ diferenciável em A e $x_0, x_1 \in A$ tais que $[x_0, x_1] \subset A$. Então

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Para a demonstração, precisaremos do lema que se segue.

Lema 6. Sejam $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_0 < \lambda_1$, $I = [\lambda_0, \lambda_1] \subset \mathbf{R}$ e $\Lambda \subset I$. Suponhamos que:

I) Λ é aberto à direita em I, isto é, se $\lambda \in \Lambda$, $\lambda < \lambda_1$, então existe μ tal que $\lambda < \mu < \lambda_1$ e $[\lambda, \mu] \subset \Lambda$.

2) O complemento $I - \Lambda$ é aberto à esquerda em I, isto é, se $\lambda \in \in I - \Lambda$, $\lambda_0 < \lambda$, então existe μ tal que $\lambda_0 < \mu < \lambda$ e $[\mu, \lambda] \subset I - \Lambda$.

Daí, $\Lambda = I$ se e somente se $\lambda_0 \in \Lambda$.

Demonstração. A necessidade é evidente. Provemos a suficiência. Suponhamos que $\lambda_0 \in \Lambda$. Raciocinemos por absurdo, admitindo que $\Lambda \neq \neq I$. Então $I - \Lambda \neq \emptyset$. Seja λ o ínfimo de $I - \Lambda$. Logo $\lambda \in I$. Temos que:

a) $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1$, $\lambda \in \Lambda$ é impossível por 1).

b) $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$, $\lambda \in I - \Lambda$ é impossível por 2).

c) $\lambda = \lambda_1 \in \Lambda$ é impossível por $\Lambda \neq I$.

d) $\lambda = \lambda_0 \in I - \Lambda$ é impossível por $\lambda_0 \in \Lambda$.

Daí resulta que $\lambda \in \Lambda$ é impossível por a) e c); e que $\lambda \in I - \Lambda$ é impossível por b) e d). Isso é absurdo. QED

Demonstração da proposição 40. Comecemos com o caso $E = \mathbf{R}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Queremos provar que

$$\|f(1) - f(0)\| \leq M,$$

onde

$$M = \sup_{x \in I} \|f'(x)\|$$

e $I = [0, 1]$. No caso em que $M = +\infty$, a desigualdade a provar é óbvia (e, de resto, sem interesse). Suponhamos que $M < +\infty$. Fixemos $\epsilon > 0$. Seja Λ o conjunto dos $\lambda \in I$ tais que

$$\|f(\lambda) - f(0)\| \leq (M + \epsilon)\lambda.$$

Temos $0 \in \Lambda$. Ora, Λ é fechado em I, pois a função

$$\lambda \in I \mapsto (M + \epsilon)\lambda - \|f(\lambda) - f(0)\| \in \mathbf{R}$$

é contínua (e o conjunto dos pontos onde uma função real contínua é maior que, ou igual a, 0 é fechado). Logo, $I - \Lambda$ é aberto em I e, portanto, aberto à esquerda em I.

Provemos que Λ é aberto à direita em I. Seja $\lambda \in \Lambda$, $\lambda < 1$. Pela diferenciabilidade de f em λ, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\lambda) \subset A$ e

$$\|f(\mu) - f(\lambda) - f'(\lambda)(\mu - \lambda)\| \leq \epsilon \cdot |\mu - \lambda|$$

se $\mu \in B_\delta(\lambda)$, donde

$$\|f(\mu) - f(\lambda)\| \leq \|f'(\lambda)(\mu - \lambda)\| + \|f(\mu) - f(\lambda) - f'(\lambda)(\mu - \lambda)\| \leq$$

$$\leq M \cdot |\mu - \lambda| + \epsilon \cdot |\mu - \lambda| = (M + \epsilon) \cdot |\mu - \lambda|,$$

visto que $\lambda \in I$. Podemos supor que $\delta \leq 1 - \lambda$. Então, se $\lambda \leq \mu \leq \lambda + \delta$, como $\lambda \in \Lambda$, temos que

$$\|f(\mu) - f(0)\| \leq \|f(\mu) - f(\lambda)\| + \|f(\lambda) - f(0)\| \leq$$

$$\leq (M + \varepsilon)(\mu - \lambda) + (M + \varepsilon)\lambda = (M + \varepsilon)\mu,$$

donde $\mu \in \Lambda$, ou seja $[\lambda, \lambda + \delta] \subset \Lambda$, como precisávamos.

Pelo lema 6, vemos que $\Lambda = I$. Logo $1 \in \Lambda$, isto é

$$\|f(1) - f(0)\| \leq M + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, o que prova

$$\|f(1) - f(0)\| \leq M.$$

Sejam, agora, E, x_0 e x_1 quaisquer. Como na demonstração da proposição 39, a função

$$\lambda \in \mathbf{R} \mapsto (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in E$$

é derivável, por ser afim contínua; sua derivada é constante e igual a $x_1 - x_0$. Seja g a função definida por

$$g(\lambda) = f[(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1]$$

na parte aberta de $\mathbf{R}$ formada pelos $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in A$, parte essa que contém $[0, 1]$. Então, g é derivável, pois é a composta de duas aplicações diferenciáveis; sua derivada é, pela observação 55, § 17,

$$g'(\lambda) = Df[(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1](x_1 - x_0).$$

Pelo caso anterior, temos

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{\lambda \in [0, 1]} \|g'(\lambda)\|,$$

donde a desigualdade do enunciado, pois

$$\|Df(x)(x_1 - x_0)\| \leq \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\|,$$

sendo $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in [x_0, x_1]$. QED

Observação 59. A proposição 40 pode ser deduzida, mediante o Teorema de Hahn-Banach (ver observação 16, § 6), do corolário da proposição 39, que foi deduzida do Teorema de Lagrange clássico. Portanto, a proposição 40 é uma conseqüência do Teorema de Lagrange para funções reais de variável real, mediante o Teorema de Hahn-Banach. A demonstração que demos aqui foi, porém, direta, sem utilizar nem o Teorema de Lagrange clássico, nem o Teorema de Hahn-Banach.

Proposição 41. Nas hipóteses da proposição 40, tem-se

$$\|f(x_1) - f(x_0) - Df(x_0)(x_1 - x_0)\| \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x) - Df(x_0)\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Demonstração. Definamos $g: A \to F$ por

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

para todo $x \in A$. Então

$$Dg(x) = Df(x) - Df(x_0).$$

Aplicando-se a proposição 40 a g, vem

$$\|f(x_1) - Df(x_0)(x_1) - f(x_0) - Df(x_0)(x_0)\| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x) - Df(x_0)\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Como $Df(x_0)$ é linear, vem a tese. QED

Observação 60. Suponhamos Df contínua em x_0. A proposição acima fornece a estimativa

$$\frac{\|f(x_1) - f(x_0) - Df(x_0)(x_1 - x_0)\|}{\|x_1 - x_0\|} \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x) - Df(x_0)\|$$

para $x_1 \neq x_0$. O primeiro membro da desigualdade acima tende para 0 quando x_1 tende para x_0, pela diferenciabilidade de f em x_0; mas a estimativa acima, em certo sentido, majora a diferenciabilidade de f em x_0 pela continuidade de Df em x_0.

Exercício 62. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio e $f: A \to F$. Diz-se que f é lipschitziana em A quando a expressão

$$\frac{\|f(x_2) - f(x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|}$$

é limitada para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 \neq x_2$. Daí resulta que f é contínua. Tem-se, f sendo diferenciável em A,

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\|f(x_2) - f(x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \geq \sup_{x} \|Df(x)\|.$$

A igualdade vale quando A é convexo, isto é $[x_1, x_2] \subset A$ sempre que $x_1, x_2 \in A$. Em tal caso, f é lipschitziana se, e somente se, Df for limitada em A.

Exercício 63. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio e $f: A \to F$. Se $x_0 \in A$, diz-se que f é estritamente diferenciável em x_0 quando f é diferenciável em x_0 e

$$\lim_{\substack{t \to x_0 \\ x \to x_0}} \frac{\|f(x) - f(t) - Df(x_0)(x - t)\|}{\|x - t\|} = 0,$$

onde $t \neq x_0$, $x \neq x_0$, $t \neq x$. Mostrar que, para todo $c > \|Df(x_0)\|$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset A$ e

$$\|f(x) - f(t)\| \leq c \cdot \|x - t\|$$

se $t, x \in B_\delta(x_0)$; logo f é lipschitziana e, conseqüentemente, contínua em $B_\delta(x_0)$. Se f é diferenciável em A, então f é estritamente diferenciável em x_0 se, e somente se, Df for contínua em x_0.

Observação 61. Uma forma do Teorema de Lagrange mais forte que a proposição 40 é a seguinte: nas hipóteses da proposição 40, tem-se que

$$f(x_1) - f(x_0)$$

pertence ao menor subconjunto convexo e fechado de F que contém todos os elementos

$$Df(x)(x_1 - x_0), \quad \text{onde} \quad x \in [x_0, x_1].$$

19

APLICAÇÕES COM DIFERENCIAIS NULAS OU CONSTANTES

Recordemos que se diz que um espaço métrico é *conexo* quando não existe nenhum subconjunto dele que seja ao mesmo tempo aberto e fechado, salvo o conjunto vazio e o espaço todo.

Proposição 42. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio, $f: A \to F$ diferenciável. Se $Df = 0$ em A, sendo A conexo, então f é constante em A.

Demonstração. Seja $x_0 \in A$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset A$. Se $x_1 \in B_\delta(x_0)$, então $[x_0, x_1] \subset B_\delta(x_0) \subset A$ e, portanto, pela desigualdade de Lagrange da proposição 40, § 18,

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in [x_0, x_1]} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_0\| = 0,$$

donde $f(x_1) = f(x_0)$, ou seja f é constante em $B_\delta(x_0)$. Isso mostra que f é localmente constante, isto é, todo ponto de A tem uma vizinhança em A onde f é constante.

Visto isso, fixemos $x_0 \in A$ e seja X o conjunto dos $x \in A$ tais que $f(x) = f(x_0)$. Pela observação acima, X é aberto. De fato, se $x \in X$, há uma vizinhança V de x em A onde f é constante e igual a $f(x)$, logo igual a $f(x_0)$; daí $V \subset X$, o que prova ser X aberto. Por outro lado, X é fechado, pois X é a imagem inversa pela aplicação contínua f do conjunto reduzido a $f(x_0)$, que é fechado. Logo X é aberto e fechado em A. Como $x_0 \in X$, vemos que X não é vazio. Sendo A conexo, resulta que $X = A$. Logo $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in A$. QED

Observação 62. Esta proposição é uma recíproca da proposição 30, § 16, na hipótese de que A seja conexo. Se A não for conexo, a proposição acima se aplica a cada componente conexa de A (ver o exercício 65 abaixo).

Proposição 43. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio, $f: A \to F$ diferenciável. Se Df for constante em A, sendo A conexo, então f é a restrição a A de uma aplicação afim contínua.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $Df(x) = u$ para todo $x \in A$. Ora, $Du(x) = u$ para todo $x \in E$, pela proposição 31, § 16. Logo

$$D(f - u|A)(x) = Df(x) - D(u|A)(x) = 0$$

para todo $x \in A$. Pela proposição 42, vemos que $f - u|A$ é constante em A, isto é, existe $b \in F$ tal que $f(x) - u(x) = b$, donde $f(x) = b + u(x)$ para todo $x \in A$, que é a tese. QED

Observação 63. Esta proposição é uma recíproca da proposição 31, § 16. Se A não for conexo, a proposição acima se aplica a cada componente conexa de A (ver o exercício 65 abaixo).

Observação 64. Na proposição 42, estudamos as soluções f_0 de $Df_0 = 0$. Na proposição 43, vimos as soluções f_1 de $Df_1 = f_0$. Podemos continuar, estudando as soluções f_2 de $Df_2 = f_1$, etc. o que conduz aos polinômios contínuos de E em F.

Exercício 64. Uma poligonal em um espaço normado E ligando $a, b \in E$ é um subconjunto de E da forma

$$[x_0, x_1] \cup \ldots \cup [x_{m-1}, x_m],$$

onde $a = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b$ são pontos de E e $m \geq 1$. Demonstrar que uma parte aberta não vazia A de E é conexa se, e somente se, quaisquer que sejam dois pontos dados de A, existir uma poligonal em E ligando os mesmos pontos e contida em A.

Exercício 65. Seja A uma parte aberta não vazia de um espaço normado E. Digamos que dois pontos de A são ligáveis quando existe uma poligonal em E ligando os mesmos pontos e contida em A. Isso define uma relação de equivalência em A. Cada classe de equivalência é aberta e fechada em A, bem como conexa, recebendo o nome de componente conexa de A. Todo subconjunto conexo de A está contido numa componente conexa de A.

20

PERMUTABILIDADE ENTRE DIFERENCIAÇÃO E LIMITE

Proposição 44. Sejam E e F espaços normados, sendo F completo, $A \subset E$ aberto não vazio e (f_n) uma sucessão de aplicações diferenciáveis de A em F. Suponhamos que

1) todo ponto $a \in A$ seja centro de alguma bola $B_\delta(a) \subset A$ com $\delta > 0$, tal que a sucessão $(D_n f)$ seja uniformemente convergente nessa bola;

2) exista ao menos um ponto $a_0 \in A$ tal que a sucessão $(f_n(a_0))$ seja convergente.

Então, sendo A conexo, a sucessão (f_n) é uniformemente convergente em $B_\delta(a)$, qualquer que seja $a \in A$. Fazendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in A$, tem-se que $f: A \to F$ é diferenciável em A e que

$$Df(x) = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$$

para todo $x \in A$.

Demonstração. Se $x \in B_\delta(a)$, então $[a, x] \subset B_\delta(a)$. Pela desigualdade de Lagrange (proposição 40, § 18) aplicada a $f_n - f_m$, temos então

$$\|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)]\| \leq \sup_{t \in B_\delta(a)} \|Df_n(t) - Df_m(t)\| \cdot \|x - a\|.$$

Pela hipótese 1) do enunciado, temos que

$$\lim_{m,n} \sup_{t \in B_\delta(a)} \|Df_n(t) - Df_m(t)\| = 0.$$

Portanto

$$\lim_{m,n} \|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)]\| = 0$$

se $x \in B_\delta(a)$. Logo, se existir o limite da sucessão $(f_n(x))$ para *algum* $x \in B_\delta(a)$, resulta, da igualdade acima, que existe o limite da sucessão $(f_n(a))$, o que, pela mesma igualdade, implica a existência do limite da sucessão $(f_n(x))$ para *todo* $x \in B_\delta(a)$.

Em outros termos, sendo X o conjunto dos pontos $x \in A$ para os quais o limite da sucessão $(f_n(x))$ existe e $B_\delta(a)$ segundo a condição 1) do enunciado, vemos que $B_\delta(a)$ ou está contida em X, ou é disjunta de X. Daí resulta imediatamente que X é aberto e que seu complementar em A também é aberto; logo X é aberto e fechado em A. Como $a_0 \in X$, então X não é vazio. Logo, como A é conexo, concluimos que $X = A$.

Seja, por conseguinte, $f: A \to F$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in A$. Notemos que, pela primeira desigualdade do início da demonstração, resulta que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(a) - f_m(a)\| + \sup_{t \in B_\delta(a)} \|Df_n(t) - Df_m(t)\| \cdot \delta$$

se $x \in B_\delta(a)$; portanto o limite da sucessão $(f_n(x))$ existe uniformemente para $x \in B_\delta(a)$.

Seja

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$$

para todo $x \in A$. Provemos que f é diferenciável em A e que $Df(a) = g(a)$ qualquer que seja $a \in A$. Observemos que, pela primeira desigualdade do início da demonstração, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ fixado, existe m tal que

$$\|f_n(x) - f_n(a) - [f_m(x) - f_m(a)]\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|$$

se $n \geq m$ e $x \in B_\delta(a)$. Fixando m e fazendo n tender para o infinito, vem

$$\|f(x) - f(a) - [f_m(x) - f_m(a)]\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|$$

se $x \in B_\delta(a)$. Além disso, podemos supor que m foi fixado suficientemente grande para que

$$\|Df_m(a) - g(a)\| \leq \varepsilon,$$

donde

$$\|Df_m(a)(x - a) - g(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|$$

para todo $x \in E$. Como f_m é diferenciável em a, existe ρ, sendo $0 < \rho \leq \delta$, tal que

$$\|f_m(x) - f_m(a) - Df_m(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|$$

se $x \in B_\rho(a)$. Logo, fazendo-se $u = g(a)$, como

$$f(x) - f(a) - u(x - a) = \{f(x) - f(a) - [f_m(x) - f_m(a)]\} +$$
$$+ \{f_m(x) - f_m(a) - Df_m(a)(x - a)\} + \{Df_m(a)(x - a) - u(x - a)\},$$

vem

$$\|f(x) - f(a) - u(x-a)\| \leq \epsilon \cdot \|x-a\| + \epsilon \cdot \|x-a\| + \epsilon \cdot \|x-a\| = 3\epsilon \cdot \|x-a\|$$

para todo $x \in B_\rho(a)$. Resulta, já que ϵ é arbitrário, que f é diferenciável em a e que $Df(a) = u = g(a)$ para todo $a \in A$, isto é

$$Df(a) = \lim_{n\to\infty} Df_n(a)$$

qualquer que seja $a \in A$. QED

Observação 65. A hipótese de F ser completo entrou em jogo apenas para provar que a sucessão $(f_n(x))$ é convergente, para todo $x \in A$; supondo-se este último fato, pode-se dispensar aquela hipótese. Se A não for conexo, a proposição acima se aplica a cada componente conexa de A (ver exercício 65, § 19). A condição 1) do enunciado da proposição acima é conhecida como sendo a convergência uniforme local de (Df_n); parte da conclusão do enunciado assegura a convergência uniforme local de (f_n).

Observação 66. Outro resultado importante, paralelo à proposição 44 (isto é, nem contendo aquela proposição, nem contido nela), é o que enunciamos a seguir. Sejam E e F espaços normados, sendo F completo, $A \subset E$ aberto não vazio e (f_n) uma sucessão de aplicações diferenciáveis de A em F. Suponhamos que a sucessão (Df_n) seja uniformemente em toda parte compacta de A; e que exista pelo menos um ponto $a_0 \in A$ tal que a sucessão $(f_n(a_0))$ seja convergente. Então, sendo A conexo, a sucessão (f_n) é uniformemente convergente em toda parte compacta de A. Fazendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in A$, tem-se que $f: A \to F$ é diferenciável em A e que

$$Df(x) = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$$

para todo $x \in A$. Quando E é de dimensão finita, logo localmente compacto, o resultado atual coincide com a proposição 44. Tanto o resultado atual, como a proposição 44, foram enunciados aqui em sua forma seqüencial; deixaremos de enunciá-los de modo geral, na linguagem de filtros, ou redes, da Topologia Geral. Comparar, também, com a observação 69, § 21.

21

APLICAÇÕES CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS

Definição 31. Sejam E, F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio e $f: A \to F$. Diz-se que f é *continuamente diferenciável em* A quando f é diferenciável em A e sua diferencial $Df: A \to \mathcal{L}(E;F)$ é contínua em A. O conjunto das aplicações continuamente diferenciáveis de A em F é designado por $\mathcal{E}^1(A;F)$, ou por $\mathcal{C}^1(A;F)$, conforme os autores, sendo um espaço vetorial em relação às leis seguintes. Se $f, g \in \mathcal{E}^1(A;F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, definimos

$$f + g, \ \lambda f \in \mathcal{E}^1(A;F)$$

por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

qualquer que seja $x \in A$. No caso em que $E = \mathbf{K}$, quando a derivada $f': A \to F$ deve ser contínua, passa-se a dizer, equivalentemente, que f é *continuamente derivável em* A.

Observação 67. As aplicações meramente diferenciáveis têm um interesse reduzido em nível corrente; as que interessam realmente são as continuamente diferenciáveis e tal observação deveria ser feita em todo curso de Cálculo Diferencial.

Observação 68. À vista do exercício 63, § 18, dizer-se que $f: A \to F$ é estritamente diferenciável em todos os pontos de A equivale a dizer que f é continuamente diferenciável em A.

Observação 69. No espaço vetorial $\mathcal{E}^1(A;F)$ pode-se definir uma topologia natural, que torna as operações vetoriais contínuas, mas não resulta de nenhuma norma; é a chamada topologia da convergência uniforme das aplicações e suas diferenciais sobre as partes compactas de A. Tem-se em $\mathcal{E}^1(A;F)$ um exemplo importante de um espaço vetorial topológico que não é normável (mesmo quando E é de dimensão finita). O fato de $\mathcal{E}^1(A;F)$ ser completo como espaço vetorial topológico, quando F é completo, é ligado ao comentário feito no final da observação 66, § 20.

22

DIFERENCIAÇÃO PARCIAL

Definição 32. Sejam E_1, E_2, F espaços normados, $E = E_1 \times E_2$, $A \subset E$ aberto não vazio, $f: A \to F$ e $a = (a_1, a_2) \in A$. Consideremos o aberto $A_{a_2} \subset \subset E_1$ formado pelos $x_1 \in E_1$ tais que $(x_1, a_2) \in A$, ou seja

$$A_{a_2} = p_1(A \cap [E_1 \times \{a_2\}]),$$

isto é, A_{a_2} é a *projeção em E_1 da seção $A \cap [E_1 \times \{a_2\}]$* de A paralela a E_1, onde $p_1: E \to E_1$ é a projeção natural. Notemos que $a_1 \in A_{a_2}$. Consideremos, também, a *aplicação parcial*

$$f_{a_2}: x_1 \in A_{a_2} \mapsto f(x_1, a_2) \in F.$$

É de notar que $a_2 \in p_2(A)$, onde $p_2: E \to E_2$ é a projeção natural. Analogamente com os papéis de E_1, E_2 trocados, conduzindo a

$$f_{a_1}: x_2 \in A_{a_1} \mapsto f(a_1, x_2) \in F.$$

Definição 33. Mantenhamos a notação da definição 32. Diz-se que f é *parcialmente diferenciável em relação a E_1 no ponto a* quando f_{a_2} for diferenciável em a_1. Define-se a *diferencial parcial*

$$D_{E_1} f(a),$$

ou, em notação mais simples

$$D_1 f(a),$$

de f em relação a E_1 no ponto a, por

$$D_1 f(a) = D f_{a_2}(a_1) \in \mathcal{L}(E_1; F).$$

Analogamente, definem-se a diferenciabilidade parcial de f em relação a E_2 no ponto a, bem como a diferencial

$$D_{E_2} f(a),$$

ou, em notação mais simples

$$D_2 f(a).$$

Definição 34. Na notação da definição 32, $f: A \to F$ é *parcialmente diferenciável em relação a E_1 em A* quando f for parcialmente diferenciável em relação a E_1 em todos os pontos de A. Nesse caso, a aplicação

$$x \in A \to D_1 f(x) \in \mathcal{L}(E_1; F)$$

é a *diferencial parcial de* f *em relação a* E_1 *em* A e representada por $D_{E_1} f$, ou simplesmente por $D_1 f$. Quando $D_1 f$ é contínua em A, diz-se que f é *continuamente parcialmente diferenciável em relação a* E_1 *em* A. Analogamente com E_2 em lugar de E_1.

Observação 70. Quando $E_1 = \mathbf{K}$, ou $E_2 = \mathbf{K}$, temos os conceitos de derivada parcial em relação a E_1, ou E_2 (segundo o § 17), sobre os quais não nos deteremos.

Proposição 45. (Regra da Diferenciabilidade Parcial e Total). Mantenhamos a notação da definição 32. Se f for diferenciável em a, então f é parcialmente diferenciável em relação a E_1 e E_2 em a; além disso, tem-se

$$Df(a)(t) = D_1 f(a)(t_1) + D_2 f(a)(t_2)$$

para todo $t = (t_1, t_2) \in E$, o que se exprime dizendo que a diferencial total em relação a E é a soma das diferenciais parciais em relação a E_1 e E_2, no ponto a. Reciprocamente, se f for parcialmente diferenciável em relação a E_1 e E_2 em A, sendo $D_1 f$ e $D_2 f$ contínuas em a, então f é diferenciável em a.

Demonstração. Provemos a primeira parte. Suponhamos f dife-
106 renciável em a. Ora, a aplicação parcial

$$f_{a_2} : x_1 \in A_{a_2} \to f(x_1, a_2) \in F$$

é obtida por composição das aplicações

$$x_1 \in E_1 \to (x_1, a_2) \in E$$

$$(x_1, x_2) \in A \to f(x_1, x_2) \in F.$$

A primeira é afim contínua, logo diferenciável; sua diferencial em a_1 é a aplicação

$$t_1 \in E_1 \to (t_1, 0) \in E.$$

A segunda é diferenciável em a, por hipótese. Resulta, pela proposição 36, § 16, que f_{a_2} é diferenciável em a_1 e que

$$Df_{a_2}(a_1)(t_1) = Df(a)(t_1, 0),$$

ou seja, f tem diferencial parcial em relação a E_1 em a e

$$D_1 f(a)(t_1) = Df(a)(t_1, 0),$$

para todo $t_1 \in E_1$. Analogamente, f tem diferencial parcial em relação a E_2 em a e

$$D_2 f(a)(t_2) = Df(a)(0, t_2),$$

para todo $t_2 \in E_2$. Somando, como

$$t = (t_1, t_2) = (t_1, 0) + (0, t_2),$$

vemos que a soma das diferenciais parciais é a diferencial total em a.

Provemos a segunda parte. Basta usar a continuidade de $D_2 f$ em a, como veremos. Temos

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = [f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)] + [f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)]$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in A$. Seja dado $\epsilon > 0$. Pela continuidade de $D_2 f$ em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(a_1) \times B_\delta(a_2) \subset A,$$

$$\|D_2 f(x_1, x_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \epsilon,$$

se $x_1 \in B_\delta(a_1)$, $x_2 \in B_\delta(a_2)$. Pela proposição 41, § 18, temos

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) - D_2 f(x_1, a_2)(x_2 - a_2)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t_2 \in [a_2, x_2]} \|D_2 f(x_1, t_2) - D_2 f(x_1, a_2)\| \cdot \|x_2 - a_2\| \leq 2\epsilon \cdot \|x_2 - a_2\|$$

se $x_1 \in B_\delta(a_1)$, $x_2 \in B_\delta(a_2)$, visto que

$$\|D_2 f(x_1, t_2) - D_2 f(x_1, a_2)\| \leq$$

$$\leq \|D_2 f(x_1, t_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| + \|D_2 f(x_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2)\|.$$

Ainda pela continuidade de $D_2 f$ em a, temos

$$\|D_2 f(x_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \epsilon$$

se $x_1 \in B_\delta(a_1)$, donde

$$\|D_2 f(x_1, a_2)(x_2 - a_2) - D_2 f(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\| \leq \epsilon \cdot \|x_2 - a_2\|$$

se $x_1 \in B_\delta(a_1)$, $x_2 \in E_2$. Finalmente, pela definição de diferenciabilidade segundo E_1 em a, podemos supor δ suficientemente pequeno para que também seja

$$\|f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)(x_1 - a_1)\| \leq \epsilon \cdot \|x_1 - a_1\|$$

se $x_1 \in B_\delta(a_1)$. Por conseguinte, combinando as estimativas acima para $x_1 \in B_\delta(a_1)$, $x_2 \in B_\delta(a_2)$, vem

$$\|f(x) - f(a) - D_1 f(a)(x_1 - a_1) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \leq$$

$$\leq \|f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) - D_2 f(x_1, a_2)(x_2 - a_2)\| +$$

$$+ \|D_2 f(x_1, a_2)(x_2 - a_2) - D_2 f(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\| +$$

$$+ \ \|f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)(x_1 - a_1)\| \ \leq$$

$$\leq \ 2\epsilon \cdot \|x_2 - a_2\| + \epsilon \cdot \|x_2 - a_2\| + \epsilon \cdot \|x_1 - a_1\| \ \leq$$

$$\leq \ 4\epsilon \cdot \sup\{\|x_1 - a_1\|, \|x_2 - a_2\|\} = 4\epsilon \cdot \|x - a\|_\infty .$$

Logo, f é diferenciável em a. QED

Observação 71. Sendo $p_1 : E \to E_1$ e $p_2 : E \to E_2$ as projeções, podemos enunciar

$$Df(a) = D_1 f(a) \circ p_1 + D_2 f(a) \circ p_2 .$$

Observação 72. A proposição acima generaliza a regra clássica do Cálculo Diferencial, segundo a qual, se $z = f(x, y)$, então

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

isto é, a diferencial total de f é a soma de suas diferenciais parciais.

Observação 73. Na proposição 45, a mera existência de $D_1 f$ e $D_2 f$ não implica a diferenciabilidade de f; essa diferenciabilidade fica assegurada em um ponto $a \in A$, quando as diferenciais parciais são contínuas nele.

Corolário. Para que f seja continuamente diferenciável em A é necessário e suficiente que f seja continuamente parcialmente diferenciável em relação a E_1 e E_2 em A.

Demonstração. Se f for continuamente diferenciável em A, então $D_1 f$ e $D_2 f$ existem em A, pela primeira parte da proposição 45. Provemos a continuidade de $D_1 f$ em A. Temos

$$D_1 f(x)(t_1) = Df(x)(t_1, 0),$$

se $x \in A$, $t_1 \in E_1$, pela primeira parte da demonstração da proposição 45. Consideremos a aplicação linear contínua

$$\iota_1 : t_1 \in E_1 \mapsto (t_1, 0) \in E.$$

Então

$$D_1 f(x)(t_1) = Df(x)[\iota_1(t_1)] = [Df(x) \circ \iota_1](t_1)$$

se $t_1 \in E_1$. Logo

$$D_1 f(x) = Df(x) \circ \iota_1$$

se $x \in A$. Temos que a aplicação linear

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \mapsto u \circ \iota_1 \in \mathcal{L}(E_1; F)$$

é contínua, pois $\|u \circ \iota_1\| \leq \|u\| \cdot \|\iota_1\|$. Ora,

$$D_1 f : x \in A \to D_1 f(x) \in \mathcal{L}(E_1;F)$$

obtém-se por composição das aplicações contínuas

$$x \in A \to Df(x) \in \mathcal{L}(E;F),$$

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \to u \circ t_1 \in \mathcal{L}(E_1;F),$$

e, portanto, $D_1 f$ é contínua. Analogamente, $D_2 f$ é contínua.

Reciprocamente, seja f continuamente parcialmente diferenciável em relação a E_1 e E_2 em A. Pela segunda parte da proposição 45, f é diferenciável em A. Provemos a continuidade de Df em A. Temos que a aplicação linear

$$u \in \mathcal{L}(E_1;F) \mapsto u \circ p_1 \in \mathcal{L}(E;F)$$

é contínua, pois $\|u \circ p_1\| \leq \|u\| \cdot \|p_1\|$, sendo $p_1 : E \to E_1$ a projeção. Ora,

$$x \in A \to D_1 f(x) \circ p_1 \in \mathcal{L}(E;F)$$

obtém-se por composição das aplicações contínuas

$$x \in A \to D_1 f(x) \in \mathcal{L}(E_1;F),$$

$$u \in \mathcal{L}(E_1;F) \mapsto u \circ p_1 \in \mathcal{L}(E;F),$$

e, portanto, ela é contínua. Analogamente

$$x \in A \to D_2 f(x) \circ p_2 \in \mathcal{L}(E;F)$$

é contínua. Sendo

$$Df(x) = D_1 f(x) \circ p_1 + D_2 f(x) \circ p_2$$

para todo $x \in A$, vemos que Df é contínua, como soma de duas aplicações contínuas. QED

Proposição 46. Sejam E, F_1, F_2, G espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio, $x_0 \in A$, $f_1 : A \to F_1$ e $f_2 : A \to F_2$ aplicações diferenciáveis em x_0, $B \subset F_1 \times F_2$ aberto não vazio tal que $(f_1(x), f_2(x)) \in B$ para todo $x \in A$. Façamos $y_1 = f_1(x_0)$, $y_2 = f_2(x_0)$ e seja $g : B \to G$ diferenciável em (y_1, y_2). Então $g(f_1, f_2) : A \to G$ é diferenciável em x_0 e

$$Dg(x_0) = D_1 g(y_1, y_2) \circ Df_1(x_0) + D_2 g(y_1, y_2) \circ Df_2(x_0).$$

Demonstração. Resulta imediatamente da proposição 36, § 16 e da primeira parte da proposição 45. QED

Observação 74. Nas hipóteses da proposição acima, se f_1, f_2 forem diferenciáveis em A e g for diferenciável em B, escreve-se, por abuso de notação

$$Dg(f_1, f_2) = D_1 g(f_1, f_2) Df_1 + D_2 g(f_1, f_2) Df_2$$

como resultado da aplicação da proposição acima em todo ponto de A.

Observação 75. A proposição acima generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico, pela qual, se $z = g(x, z)$ e $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, então

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}$$

Observação 76. Estudamos acima o caso de dois fatores, mas a extensão ao caso de um número finito de fatores é simples.

Proposição 47. (Regra de Diferenciação das Aplicações Implícitas). Sejam E, F, G espaços normados, $A \subset E \times F$ aberto não vazio, $f: A \to G$, $(x_0, y_0) \in A$, V uma vizinhança aberta de x_0 em E, $g: V \to F$ sendo $(x, g(x)) \in \in A$ e

$$f[x, g(x)] = 0$$

para todo $x \in V$, $g(x_0) = y_0$ e g contínua em x_0. Suponhamos que f seja diferenciável em (x_0, y_0), bem como que $D_2 f(x_0, y_0)$ seja um isomorfismo e um homeomorfismo de F sobre G. Então, g é diferenciável em x_0 e

$$Dg(x_0) = -[D_2 f(x_0, y_0)]^{-1} \circ D_1 f(x_0, y_0).$$

Demonstração. Para simplificar a notação, podemos supor que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(0,0) = 0$, $g(0) = 0$. Para tal, basta usar as translações

$$x \in E \mapsto x - x_0 \in E, \qquad y \in F \mapsto y - y_0 \in F$$

e substituir A, $f(x, y)$, $g(x)$ por

$$A - (x_0, y_0), \qquad f(x + x_0,\ y + y_0),$$

$$V - x_0, \qquad g(x + x_0) - y_0.$$

Façamos

$$u = D_1 f(0,0) \in \mathcal{L}(E; G),$$

$$v = D_2 f(0,0) \in \mathcal{L}(F; G),$$

$$w = -v^{-1} \circ u \in \mathcal{L}(E; F).$$

Seja $r: A \to G$ definida por $r(0,0) = 0$ e por

$$f(x, y) = u(x) + v(y) + \|(x, y)\|_\infty \cdot r(x, y)$$

se $(x, y) \in A$. Então, r é contínua em $(0,0)$. Temos que, se $x \in V$,

$$u(x) + v[g(x)] + \|(x, g(x))\|_\infty \cdot r[x, g(x)] = 0,$$

donde

$$\|g(x) - w(x)\| = \|(x, g(x))\|_\infty \cdot \varphi(x),$$

sendo

$$\varphi(x) = \|v^{-1}\{r[x, g(x)]\}\|.$$

Tomemos $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset V$ e $\varphi(x) < 1$ se $x \in B_\delta(0)$, pois $\varphi(0) = 0$ e φ é contínua em 0. Fixemos $x \in B_\delta(0)$. Distingamos dois casos:

1) $\|x\| \geq \|g(x)\|$. Então

$$\|g(x) - w(x)\| = \|x\| \cdot \varphi(x).$$

2) $\|x\| < \|g(x)\|$. Então

$$\|g(x) - w(x)\| = \|g(x)\| \cdot \varphi(x),$$

donde

$$\|g(x)\| \leq \|g(x) - w(x)\| + \|w(x)\| \leq \|g(x)\| \cdot \varphi(x) + \|w\| \cdot \|x\|,$$

e, por conseqüência,

$$\|g(x)\| \leq \frac{\|w\| \cdot \|x\|}{1 - \varphi(x)},$$

o que, pela igualdade acima, dá

$$\|g(x) - w(x)\| \leq \frac{\|w\| \cdot \|x\| \cdot \varphi(x)}{1 - \varphi(x)}.$$

Resumindo os dois casos, temos

$$\|g(x) - w(x)\| \leq \sup\left\{1, \frac{\|w\|}{1 - \varphi(x)}\right\} \cdot \|x\| \cdot \varphi(x).$$

Como $\varphi(x) \to 0$ quando $x \to 0$, vem que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|g(x) - w(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Logo, sendo $g(0) = 0$, vemos que g é diferenciável em 0 e que $Dg(0) = w$. QED

Observação 77. Esta proposição generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico para $y = g(x)$ satisfazendo $f(x, y) = 0$, pela qual

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Observação 78. Na proposição 47, figuram as hipóteses de que g exista e seja contínua em x_0. É importante saber que tais hipóteses sobre g podem ser abandonadas, passando a fazer parte da conclusão, localmente. É o que ocorre no resultado poderoso seguinte, conhecido como o *Teorema da Aplicação Implícita:* sendo E, F, G espaços de Banach, $A \subset E \times F$ aberto não vazio, $f: A \to G$ continuamente diferenciável em A, $(x_0, y_0) \in A$, $f(x_0, y_0) = 0$ e $D_2 f(x_0, y_0)$ um isomorfismo e um homeomorfismo de F sobre G, então existem uma vizinhança aberta V de x_0 em E, uma vizinhança aberta W de (x_0, y_0) em A e uma aplicação continuamente diferenciável $g: V \to F$ tais que

$$x \in V, \qquad y = g(x),$$

sejam equivalentes a

$$(x, y) \in W, \qquad f(x, y) = 0;$$

em outros termos, a equação $f(x, y) = 0$ se resolve em W exatamente por $y = g(x)$ com $x \in V$. Daí resulta que $g(x_0) = y_0$; e que $g: V \to F$ é a única aplicação tal que $(x, g(x)) \in W$ e $f[x, g(x)] = 0$ para todo $x \in V$, sendo g forçosamente continuamente diferenciável em V.

Observação 79. A respeito de $D_2 f(x_0, y_0)$ na proposição 47 e no Teorema da Aplicação Implícita, cabem comentários análogos aos feitos sobre $Df(x_0)$ na observação 51, § 16, que não repetiremos aqui.

Exercício 66. Deduzir a proposição 37 a partir da proposição 47 e,
 reciprocamente, provar esta a partir daquela.

23

IDENTIFICAÇÕES NATURAIS PARA APLICAÇÕES MULTILINEARES

Vamos limitar-nos, de início, ao caso bilinear. O caso multilinear é tratado da mesma forma. Faremos as indicações pertinentes a seguir.

Consideremos, em primeiro lugar, o caso algébrico das aplicações bilineares. A seguir, veremos o caso normado das aplicações bilineares contínuas.

Definição 35. Sejam E_1, E_2 e F espaços vetoriais sobre **K**. Existe um isomorfismo natural entre os dois espaços vetoriais

$$\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F),$$

$$\mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F)),$$

isomorfismo esse definido do modo seguinte. Seja dada

$$u \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F).$$

Fixemos provisoriamente $x_1 \in E_1$ e consideremos a aplicação parcial

$$u_{x_1}: x_2 \in E_2 \mapsto u(x_1, x_2) \in F,$$

ou seja,

$$u_{x_1}(x_2) = u(x_1, x_2) \in F$$

para todo $x_2 \in E_2$. É imediato verificar que

$$u_{x_1} \in \mathcal{L}_a(E_2; F).$$

Portanto, desse modo, a todo $x_1 \in E_1$ associamos $u_{x_1} \in \mathcal{L}_a(E_2; F)$. Indiquemos com $\tilde{u}$ a aplicação assim obtida, ou seja

$$\tilde{u}: x_1 \in E_1 \mapsto u_{x_1} \in \mathcal{L}_a(E_2; F).$$

Portanto, $\tilde{u}(x_1) = u_{x_1} \in \mathcal{L}_a(E_2; F)$ ou, explicitando,

$$\tilde{u}(x_1)(x_2) = u_{x_1}(x_2) = u(x_1, x_2) \in F$$

quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Resulta imediatamente que

$$\tilde{u} \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F)).$$

Na realidade, $\tilde{u}$ nada mais é do que u considerada como uma função de sua primeira variável, cujos valores são funções da segunda variável, ou, em diagrama

$$\tilde{u}: x_1 \in E_1 \mapsto \left[u_{x_1}: x_2 \in E_2 \to u(x_1, x_2) \in F\right].$$

Portanto, a cada

$$u \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$$

associamos

$$\tilde{u} \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F)).$$

Proposição 48. Na notação da definição 35, a aplicação

$$u \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F) \mapsto \tilde{u} \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F))$$

é um isomorfismo do primeiro espaço sobre o segundo.

Demonstração. Exercício. QED

Definição 36. Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbf{K}$. O espaço vetorial $\mathcal{L}_a(E, E; F)$ será indicado com

$$\mathcal{L}_a(^2E; F).$$

Notemos que, se $E \neq 0$ e $F \neq 0$, então

$$\mathcal{L}_a(^2E; F) \neq \mathcal{L}_a(E^2; F),$$

pois, à esquerda, temos o espaço vetorial das aplicações *bilineares* de E^2 em F, ao passo que, à direita, temos o espaço vetorial das aplicações *lineares* de E^2 em F. Diz-se que um elemento $u \in \mathcal{L}_a(^2E; F)$ é *simétrico* quando

$$u(x_1, x_2) = u(x_2, x_1)$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in E$. O conjunto

$$\mathcal{L}_{as}(^2E; F)$$

das aplicações bilineares simétricas de E^2 em F é, obviamente, um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(^2E; F)$.

Observação 80. Trocando-se os papeis de E_1 e E_2 na definição 35, introduz-se, de modo análogo, um isomorfismo sobrejetivo natural

$$\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F) \to \mathcal{L}_a(E_2; \mathcal{L}(E_1; F)).$$

Quando $E_1 = E_2 = E$, o isomorfismo acima e o anterior, da definição 35, dão dois isomorfismos sobrejetivos naturais

$$\mathcal{L}_a(^2E;F) \to \mathcal{L}_a(E;\mathcal{L}_a(E;F)),$$

que são distintos em geral.

Exercício 67. Sejam E e F dois espaços vetoriais sobre $\mathbf{K}$. Se

$$u \in \mathcal{L}_a(^2E;F),$$

então u é simétrica se, e somente se, a imagem de u em

$$\mathcal{L}_a(E;\mathcal{L}_a(E;F))$$

for a mesma pelos dois isomorfismos naturais do primeiro espaço vetorial sobre o segundo. Tem-se que

$$\mathcal{L}_{as}(^2E;F) \neq \mathcal{L}_a(^2E;F),$$

ou, equivalentemente, que os dois isomorfismos acima são distintos, se, e somente se, E for de dimensão pelo menos igual a 2 e $F \neq 0$.

Passemos, agora, ao caso normado.

Proposição 49. Sendo E_1, E_2 e F espaços normados, o isomorfismo natural de $\mathcal{L}_a(E_1, E_2;F)$ sobre $\mathcal{L}_a(E_1;\mathcal{L}_a(E_2;F))$ induz um isomorfismo natural, que é uma isometria, de $\mathcal{L}(E_1, E_2;F)$ sobre $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;F))$.

Demonstração. Seja

$$u \in \mathcal{L}(E_1, E_2;F)$$

e consideremos seu correspondente

$$\tilde{u} \in \mathcal{L}_a(E_1;\mathcal{L}_a(E_2;F))$$

pelo isomorfismo natural indicado. Se $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, temos

$$\tilde{u}(x_1)(x_2) = u(x_1, x_2).$$

Resulta que

$$\|\tilde{u}(x_1)(x_2)\| = \|u(x_1, x_2)\| \leq \|u\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

e, portanto $\tilde{u}(x_1)$ é limitada, donde contínua; isto é,

$$\tilde{u}(x_1) \in \mathcal{L}(E_2;F), \qquad \|\tilde{u}(x_1)\| \leq \|u\| \cdot \|x_1\|,$$

o que mostra ser $\tilde{u}$ limitada, donde contínua, tendo-se

$$\tilde{u} \in \mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;F)), \qquad \|\tilde{u}\| \leq \|u\|.$$

Isso mostra que o isomorfismo citado na proposição aplica $\mathcal{L}(E_1, E_2;F)$ em $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;F))$, diminuindo a norma. Na realidade, tem-se $\|\tilde{u}\| = \|u\|$, pois, invertendo o raciocínio, de

$$\|\tilde{u}(x_1)\| \leq \|\tilde{u}\| \cdot \|x_1\|$$

para todo $x_1 \in E_1$, obtemos

$$\|u(x_1, x_2)\| = \|\tilde{u}(x_1)(x_2)\| \leq \|\tilde{u}(x_1)\| \cdot \|x_2\| \leq \|\tilde{u}\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$$

para quaisquer $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Daí $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$. Resulta que $\|\tilde{u}\| = \|u\|$, isto é, o isomorfismo indicado é uma isometria de $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ em $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$. Resta mostrar que esse isomorfismo é sobrejetivo. Para isso, seja

$$v \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$$

e definamos

$$u : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto v(x_1)(x_2) \in F.$$

É imediato que $u \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$ e que $\tilde{u} = v$, sendo u, na verdade, contínua, pois $\|u(x_1, x_2)\| \leq \|v\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ para quaisquer $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, e sendo a verificação desta desigualdade uma repetição do raciocínio anterior. QED

Definição 37. Sejam E e F espaços normados. O espaço normado $\mathcal{L}(E, E; F)$ será indicado por $\mathcal{L}(^2E; F)$. O conjunto $\mathcal{L}_s(^2E; F)$ das aplicações bilineares simétricas contínuas de E^2 em F é, sem dúvida, um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^2E; F)$.

Proposição 50. Sendo E e F espaços normados, $\mathcal{L}_s(^2E; F)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(^2E; F)$.

Demonstração. Uma vez fixados $x_1, x_2 \in E$, a aplicação linear

$$u \in \mathcal{L}(^2E; F) \mapsto u(x_1, x_2) - u(x_2, x_1) \in F$$

é contínua, pois é limitada. Logo, o conjunto $Z(x_1, x_2)$ dos $u \in \mathcal{L}(^2E; F)$ onde a citada aplicação se anula, isto é, tais que

$$u(x_1, x_2) = u(x_2, x_1),$$

é fechado em $\mathcal{L}(^2E; F)$. Ora, $\mathcal{L}_s(^2E; F)$ é a interseção de $Z(x_1, x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in E$, donde o resultado. QED

Corolário. Se F for completo, então $\mathcal{L}_s(^2E; F)$ também é completo.

Demonstração. Basta aplicar as proposições 3, § 3 e 28, § 12. QED

Observação 81. Reciprocamente, se $E \neq 0$ e $\mathcal{L}_s(^2E; F)$ for completo, então F é completo. Comparar com a observação 33, § 12.

Observação 82. A título de introdução ao caso multilinear, façamos apenas os seguintes comentários no caso trilinear. Sejam E_1, E_2, E_3 e F espaços vetoriais. Existe um isomorfismo natural entre os dois espaços vetoriais seguintes

$$\mathcal{L}_a(E_1, E_2, E_3; F),$$

$$\mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; \mathcal{L}_a(E_3; F))),$$

pelo qual a todo elemento u do primeiro se associa um elemento $\tilde{u}$ do segundo tal que

$$\tilde{u}(x_1)(x_2)(x_3) = u(x_1, x_2, x_3)$$

quaisquer que sejam $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $x_3 \in E_3$. Sendo E e F espaços vetoriais, define-se

$$\mathcal{L}_a(^3E; F) = \mathcal{L}_a(E, E, E; F).$$

Se $u \in \mathcal{L}_a(^3E;F)$, diz-se que u é simétrica se

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_2, x_1, x_3),$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_3, x_2),$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_3, x_2, x_1),$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2, x_3 \in E$, sendo de notar que, nessas três relações, uma qualquer delas resulta das outras duas e que, qualquer que seja a permutação σ do conjunto $\{1, 2, 3\}$, então

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Representemos por $\mathcal{L}_{as}(^3E, F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(^3E;F)$ formado pelas aplicações trilineares simétricas de E^3 em F. Se E e F forem espaços normados, definimos também o espaço normado $\mathcal{L}(^3E;F)$ das aplicações trilineares contínuas de E^3 em F, bem como o subespaço vetorial $\mathcal{L}_s(^3E;F)$ de tais aplicações simétricas. Analogamente no caso multilinear. Por convenção, definimos

$$\mathcal{L}_a(^0E;F) = \mathcal{L}_{as}(^0E;F) = F,$$

$$\mathcal{L}(^0E;F) = \mathcal{L}_s(^0E;F) = F.$$

24

DIFERENCIAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR

Sejam E, F espaços normados e $A \subset E$ aberta não vazia.

Definição 38. De agora em diante, para ser mais precisos, diremos que $f : A \to F$ *é diferenciável de ordem um em um ponto de* A, ou então *em* A, para nos referirmos à diferenciabilidade introduzida até agora, mediante as definições 23 e 25, § 14.

Definição 39. Suponhamos que $f : A \to F$ seja diferenciável de ordem um em A. Diz-se que f *é diferenciável de ordem dois num ponto* $x_0 \in A$ ou então *em* A, quando a aplicação $Df : A \to \mathcal{L}(E;F)$ for diferenciável de ordem um em x_0, ou então em A, respectivamente. Então

$$D(Df)(x_0) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$$

é chamada *diferencial de ordem dois de* f *em* x_0, sendo representada por

$$D^2 f(x_0).$$

Além disso,

$$D(Df) : A \to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$$

é chamada *diferencial de ordem dois de* f *em* A, sendo representada por

$$D^2 f : A \to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)).$$

Esse conceito natural de diferencial de ordem dois, obtido por simples repetição da diferenciação de ordem um, tem o inconveniente de que os valores das diferenciais de ordem dois pertencem ao espaço normado $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$, o qual parece complicado, digamos assim, por ser um espaço normado de aplicações lineares contínuas cujos valores pertencem a outro espaço normado de aplicações lineares contínuas. Graças, porém, ao isomorfismo isométrico natural entre $\mathcal{L}(^2E;F)$ e $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$, que resulta da proposição 49, § 23, podemos transformar o conceito de diferencial de ordem dois do modo a seguir indicado.

Definição 40. Mantenhamos as hipóteses e notações da definição 39. Consideremos

$$D^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$$

e indiquemos com

$$d^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(^2E;F)$$

o elemento de $\mathcal{L}(^2E;F)$ que corresponde a $D^2f(x_0)$ pelo isomorfismo isométrico natural indicado. Notemos que a relação entre $D^2f(x_0)$ e $d^2f(x_0)$ é caracterizada por

$$d^2f(x_0)(s,t) = D^2f(x_0)(s)(t)$$

quaisquer que sejam $s, t \in E$. Por isso, à diferencial de ordem dois

$$D^2f: A \to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$$

corresponde a diferencial de ordem dois

$$d^2f: A \to \mathcal{L}(^2E;F).$$

Desse modo, os valores das diferenciais de ordem dois passam a pertencer ao espaço normado $\mathcal{L}(^2E;F)$, o qual parece simples, digamos assim, por ser um espaço normado de aplicações bilineares contínuas.

Observação 83. No caso da diferencial de ordem um, usaremos também as notações

$$df(x_0) = Df(x_0), \qquad df = Df.$$

Proposição 51. (Schwarz). Sejam E,F espaços normados, $A \subset E$ aberto não vazio, $x_0 \in A$, $f: A \to F$ diferenciável de ordem um em A e $Df: A \to \mathcal{L}(E;F)$ diferenciável de ordem um em x_0. Então

$$d^2f(x_0) \in \mathcal{L}_s(^2E;F),$$

isto é, para quaisquer $h, k \in E$,

$$d^2f(x_0)(h,k) = d^2f(x_0)(k,h).$$

Demonstração. Existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset A$. Seja

$$\Delta(h,k) = f(x_0 + h + k) - f(x_0 + h) - f(x_0 + k) + f(x_0),$$

supondo sempre que $h,k \in E$ sejam tais que

$$\|h\| < \frac{\delta}{2}, \quad \|k\| < \frac{\delta}{2},$$

o que assegura que $x_0 + h$, $x_0 + k$, $x_0 + h + k$ pertencem a A. Notemos que

$$\Delta(h,k) = \Delta(k,h),$$

o que nos dará, por um processo de aproximação, que

$$d^2f(x_0)(h,k) = d^2f(x_0)(k,h).$$

Para tal, definamos g por

$$g(x) = f(x+h) - f(x)$$

para $x \in B_{\delta/2}(x_0)$, supondo h fixado; pois, então, $x \in A$ e $x + h \in A$, uma vez que já supusemos que $\|h\| < \delta/2$. Notemos que

$$\Delta(h,k) = g(x_0 + k) - g(x_0).$$

Temos

$$\|\Delta(h,k) - D^2 f(x_0)(h)(k)\| \leq \|g(x_0 + k) - g(x_0) - Dg(x_0)(k)\| +$$

$$+ \|Dg(x_0)(k) - D^2 f(x_0)(h)(k)\| \leq \|g(x_0 + k) - g(x_0) - Dg(x_0)(k)\| +$$

$$+ \|Dg(x_0) - D^2 f(x_0)(h)\| \cdot \|k\|.$$

Pela proposição 41, § 18, temos

$$\|g(x_0 + k) - g(x_0) - Dg(x_0)(k)\| \leq \sup_{\|t\| \leq \|k\|} \|Dg(x_0 + t) - Dg(x_0)\| \cdot \|k\| \leq$$

$$\leq \sup_{\|t\| \leq \|k\|} \|Dg(x_0 + t) - D^2 f(x_0)(h)\| \cdot \|k\| + \|D^2 f(x_0)(h) - Dg(x_0)\| \cdot \|k\|.$$

Notemos que a expressão

$$Dg(x_0) - D^2 f(x_0)(h),$$

a qual aparece no final das duas desigualdades acima, nada mais é que o valor de 121

$$Dg(x_0 + t) - D^2 f(x_0)(h)$$

para $t = 0$. Substituindo a segunda desigualdade na primeira, vem

$$\|\Delta(h,k) - d^2 f(x_0)(h,k)\| \leq 3 \cdot \sup_{\|t\| \leq \|k\|} \|Dg(x_0 + t) - D^2 f(x_0)(h)\| \cdot \|k\|.$$

Ora,

$$Dg(x_0 + t) - D^2 f(x_0)(h) = [Df(x_0 + t + h) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(t + h)] -$$

$$- [Df(x_0 + t) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(t)],$$

pois

$$Dg(x) = Df(x + h) - Df(x)$$

e $D^2 f(x_0)$ é linear. Pela diferenciabilidade de Df em x_0, qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe ρ tal que $0 < \rho < \delta/2$ e

$$\|Dg(x_0 + t) - D^2 f(x_0)(h)\| \leq \epsilon \cdot \|t + h\| + \epsilon \cdot \|t\| \leq \epsilon \cdot \|h\| + 2\epsilon \cdot \|t\|,$$

contanto que $\|h\| \leq \rho$, $\|t\| \leq \rho$. Levando esta desigualdade na precedente, vem

$$\|\Delta(h,k) - d^2 f(x_0)(h,k)\| \leq 3\epsilon(\|h\| \cdot \|k\| + 2\|k\|^2)$$

desde que $\|h\| \leq \rho$, $\|k\| \leq \rho$, expressão essa que compara $\Delta(h,k)$ com $d^2f(x_0)(h,k)$. Permutando h e k nesta desigualdade, obtemos

$$\|\Delta(k,h) - d^2f(x_0)(k,h)\| \leq 3\epsilon(\|k\|\cdot\|h\| + 2\cdot\|h\|^2)$$

desde que $\|k\| \leq \rho$, $\|h\| \leq \rho$. Como $\Delta(h,k) = \Delta(k,h)$, das duas últimas desigualdades vem

$$\|d^2f(x_0)(k,h) - d^2f(x_0)(h,k)\| \leq 6\epsilon(\|h\|^2 + \|h\|\cdot\|k\| + \|k\|^2)$$

desde que $\|h\| \leq \rho$, $\|k\| \leq \rho$. Ocorre, porém, que esta última desigualdade é, na realidade, verdadeira quaisquer que sejam h e k pertencentes a E devido a uma homogeneidade de segunda ordem dos seus dois membros. Com efeito, quaisquer que sejam $h,k \in E$, se escolhermos $\lambda > 0$ tal que $\|\lambda h\| \leq \rho$, $\|\lambda k\| \leq \rho$ e aplicarmos a desigualdade com λh, λk em lugar de h,k, podemos a seguir dividir o resultado por λ^2 nos dois membros, o que prova ser aquela desigualdade verdadeira quaisquer que sejam h,k pertencentes a E. Como, na mesma desigualdade, agora ϵ, h, k são arbitrários, fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$d^2f(x_0)(h,k) = d^2f(x_0)(k,h)$$

quaisquer que sejam $h,k \in E$. QED

Com vistas a uma formulação do Teorema de Schwarz noutra notação mais próxima do Cálculo Diferencial clássico, formulemos a definição que se segue.

Definição 41. Se $f:A \to F$ for diferenciável de ordem um em $x_0 \in A$ e $h \in E$, definiremos a *derivada de f em x_0 segundo a direção h por*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = df(x_0)(h)$$

(comparar com o exercício 61, § 17). Se f for diferenciável de ordem um em A e $h \in E$, definiremos a *derivada de f em A segundo a direção h por*

$$\frac{\partial f}{\partial h}: x \in A \mapsto \frac{\partial f}{\partial h}(x) \in F.$$

Proposição 52. Sejam $x_0 \in A$, $f:A \to F$ diferenciável de ordem um em $\mathring{A}$ e $Df:A \to \mathcal{L}(E;F)$ diferenciável de ordem um em x_0. Então, quaisquer que sejam $h,k \in E$,

$$\frac{\partial f}{\partial k}: A \to F$$

é diferenciável de ordem um em x_0 e

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)(x_0) = d^2f(x_0)(h,k).$$

Demonstração. A aplicação

$$\frac{\partial f}{\partial k} : x \in A \mapsto Df(x)(k) \in F$$

é a composta das aplicações

$$x \in A \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E;F),$$

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \mapsto u(k) \in F,$$

que são diferenciáveis de ordem um em x_0, a primeira por hipótese e a segunda por ser linear e contínua. Pela regra de diferenciação de aplicações compostas (proposição 36, § 16), resulta que $\partial f/\partial k$ é diferenciável de ordem um em x_0, bem como que sua diferencial de ordem um em x_0 se obtém por composição de

$$h \in E \mapsto D^2 f(x_0)(h) \in \mathcal{L}(E;F)$$

com

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \mapsto u(k) \in F.$$

Tal composta é, pois, a aplicação

$$h \in E \mapsto D^2 f(x_0)(h)(k) \in F,$$

o que prova

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)(x_0)(h) = D^2 f(x_0)(h)(k),$$

ou seja, a igualdade do enunciado. QED

Corolário. (Regra de Comutatividade das Derivadas). Se $f: A \to F$ for diferenciável de ordem dois em A e $h, k \in E$, então

$$\frac{\partial f}{\partial h}, \quad \frac{\partial f}{\partial k},$$

serão diferenciáveis de ordem um em A e

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right) = \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right).$$

Demonstração. Pela proposição acima, $\partial f/\partial h$ e $\partial f/\partial k$ são diferenciáveis de ordem um em A e, para todo $x \in A$,

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)(x) = d^2 f(x)(h,k),$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)(x) = d^2 f(x)(k,h).$$

Pelo Teorema de Schwarz (proposição 51), resulta a igualdade dessas expressões, para todo x. QED

Observação 84. O corolário acima ou, na realidade, o Teorema de Schwarz, generaliza a regra do Cálculo Diferencial clássico para $z = f(x, y)$, pela qual

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Passemos, agora, à diferenciação de ordem $n \geq 3$. Vamos restringir-nos ao caso de diferenciação de ordem três, sendo o caso $n > 3$ tratado de maneira análoga.

Definição 42. Suponhamos que $f : A \to F$ seja diferenciável de ordem dois *em* A. Diz-se que f é *diferenciável de ordem três num ponto* $x_0 \in A$, ou então *em* A, quando a aplicação $D^2 f : A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ for diferenciável de ordem um em x_0, ou então em A, respectivamente. Então

$$D(D^2 f)(x_0) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$$

é chamada *diferencial de ordem três de* f *em* x_0, sendo representada por

$$D^3 f(x_0).$$

124 Além disso,

$$D(D^2 f) : A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$$

é chamada *diferencial de ordem três de* f *em* A, sendo representada por

$$D^3 f : A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))).$$

Notemos que

$$D^3 f(x_0) = D(D^2 f)(x_0) = D^2(Df)(x_0),$$

$$D^3 f = D(D^2 f) = D^2(Df).$$

Definição 43. Mantenhamos as hipóteses e notações da definição 42. Consideremos

$$D^3 f(x_0) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$$

e indiquemos com

$$d^3 f(x_0) \in \mathcal{L}({}^3E; F)$$

o elemento de $\mathcal{L}({}^3E; F)$ que corresponde a $D^3 f(x_0)$, pelo isomorfismo isométrico natural entre os espaços normados em questão (segundo a observação 82 e analogamente às proposições 48 e 49, § 23). A relação entre eles é descrita por

$$d^3 f(x_0)(r, s, t) = D^3 f(x_0)(r)(s)(t)$$

quaisquer que sejam $r, s, t \in E$. Analogamente, a diferencial de ordem três

$$D^3f: A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$$

se identifica à diferencial de ordem três

$$d^3f: A \to \mathcal{L}(^3E; F).$$

Proposição 53. Sejam $x_0 \in A$, $f: A \to F$ diferenciável de ordem dois em A e $D^2f: A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ diferenciável de ordem um em x_0. Então, quaisquer que sejam $h, k, l \in E$,

$$\frac{\partial f}{\partial l}: A \to F$$

é diferenciável de ordem um em A,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right): A \to F$$

é diferenciável de ordem um em x_0 e

$$\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)\right](x_0) = d^3f(x_0)(h, k, l).$$

Demonstração. É análoga à da proposição 52. QED

Proposição 54. (Schwarz). Sejam $x_0 \in A$, $f: A \to F$ diferenciável de ordem dois em A e $D^2f: A \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ diferenciável de ordem um em x_0. Então

$$d^3f(x_0) \in \mathcal{L}_s(^3E; F).$$

Demonstração. A proposição 53 dá uma expressão de $d^3f(x_0)(h, k, l)$. Pelas proposições 51 e 52, vemos que há simetria em h e k. Além disso, pelo corolário da proposição 52, há simetria em k e l. Resulta que $d^3f(x_0)$ é simétrica. QED

Definição 44. Por convenção, diz-se que toda $f: A \to F$ é *diferenciável de ordem zero em* A, definindo-se sua *diferencial de ordem zero em* $x_0 \in A$, ou então *em* A, respectivamente por

$$D^0f(x_0) = d^0f(x_0) = f(x_0),$$

$$D^0f = d^0f = f.$$

Definição 45. Diz-se que f é *continuamente diferenciável de ordem* m *em* A, onde $m = 0, 1, \ldots$, quando f é diferenciável de ordem m em A e D^mf é contínua em A, o que equivale a d^mf ser contínua em A. Notemos que, se $m > 0$, a continuidade de D^if e d^if para $i = 0, \ldots, m-1$ é automática, pela proposição 29, § 14. O espaço vetorial das aplicações continuamente diferenciáveis de ordem m em A com valores em F é designado por $\mathcal{E}^m(A; F)$, ou por $\mathcal{C}^m(A; F)$, conforme os autores.

Definição 46. Diz-se que f é *infinitamente diferenciável em* A se f é diferenciável de ordem m em A, qualquer que seja $m = 0, 1, \ldots$; então f é continuamente diferenciável de ordem m em A, para todo m. O espaço vetorial das aplicações infinitamente diferenciáveis em A com valores em F é designado por $\mathcal{E}^{\infty}(A;F)$, ou simplesmente por $\mathcal{E}(A;F)$, ou ainda por $\mathcal{C}^{\infty}(A;F)$.

Observação 85. Quando $E = \mathbf{K}$, temos os conceitos de *derivada de ordem* m *em* $x_0 \in A$, ou então *em* A, representadas por

$$f^{(m)}(x_0) \in F, \qquad f^{(m)}: A \to F.$$

Observação 86. É importante saber que, quando E e F são *complexos*, o fato de $f: A \to F$ ser diferenciável de ordem um em A implica que f é infinitamente diferenciável em A.

Exercício 68. Sejam E_1, E_2, F espaços normados, $A \subset E_1 \times E_2$ aberto não vazio e $f: A \to F$ continuamente diferenciável de ordem dois em A. Então

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f).$$

BIBLIOGRAFIA

(1) BARROS-NETO, J. An Introduction to the Theory of Distributions, Dekker, Nova York, N. Y., 236 págs. (1973).

(2) CARTAN, H. Calcul Différentiel, Hermann, Paris, 178 págs. (1967).

(3) COTLAR, M. e CIGNOLI, R. An Introduction to Functional Analysis, North-Holland, Amsterdam, 600 págs. (1974).

(4) DIEUDONNÉ, J. Éléments d'Analyse, Gauthier-Villars, Paris, Vol. 1, 414 págs. (1969); Vol. 2, 420 págs. (1969); Vol. 3, 386 págs. (1970); Vol. 4, 428 págs. (1971); Vol. 5, 222 págs. (1975); Vol. 6, 210 págs. (1975).

(5) DUNFORD, N. e SCHWARTZ, J. Linear Operators, Interscience, Nova York, N. Y., Vol. 1, 872 págs. (1958); Vol. 2, 1052 págs. (1963); Vol. 3, 668 págs. (1971).

(6) EDWARDS, R. E. Functional Analysis, Theory and Applications, Holt, Rinehart and Winston, Nova York, N. Y., 798 págs. (1965).

(7) HILLE, E. Methods in Classical and Functional Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 496 págs. (1972).

(8) HILLE, E. e PHILLIPS, R. S. Functional Analysis and Semigroups, American Mathematical Society, Providence, R. I., 820 págs. (1957).

(9) HORVÁTH, J. Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley, Reading, Mass., 462 págs. (1966).

(10) KELLEY, J. L. e NAMIOKA, I. Linear Topological Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 272 págs. (1975).

(11) KÖTHE, G. Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 472 págs. (1969).

(12) NACHBIN, L. The Haar Integral, Krieger, Huntington, N. Y., 168 págs. (1976).

(13) NACHBIN, L. Elements of Approximation Theory, Krieger, Huntington, N. Y., 132 págs. (1976).

(14) NACHBIN, L. Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Springer-Verlag, Berlin, 74 págs. (1969).

(15) NACHBIN, L. Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties, North-Holland, Amsterdam, 130 págs. (1970).

(16) REED, M. e SIMON, B. Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, Nova York, N. Y., Vol. 1, 324 págs. (1972); Vol. 2, 380 págs. (1975).

(17) RIESZ, F. e NAGY, B. Sz. Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 506 págs. (1952).

(18) ROBERTSON, A. P. e ROBERTSON, W. Topological Vector Spaces, Cambridge University Press, Londres, 166 págs. (1964).

(19) RUDIN, W. Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, Nova York, N. Y., 424 págs. (1966).

(20) RUDIN, W. Functional Analysis, McGraw-Hill, Nova York, N. Y., 412 págs. (1973).

(21) SCHAEFER, H. H. Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 306 págs. (1971).

(22) SCHWARTZ, L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann, Paris, 392 págs. (1961).

(23) SCHWARTZ, L. Analyse, Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann, Paris, 434 págs. (1970).

(24) TRÈVES, F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, Nova York, N. Y., 582 págs. (1967).

(25) YOSIDA, K. Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 560 págs. (1968).

ÍNDICE DA TERMINOLOGIA

aplicação afim, 75
aplicação afim contínua tangente, 75
aplicação analítica complexa, 73
aplicação bilinear, 61
aplicação bilinear limitada, 62
aplicação compacta, 58
aplicação continuamente diferenciável, 103, 125
aplicação continuamente parcialmente diferenciável, 106
aplicação derivável, 87
aplicação diferenciável, 71, 73, 119, 124, 125
aplicação estritamente diferenciável, 94
aplicação holomorfa, 73
aplicação infinitamente diferenciável, 126
aplicação linear limitada, 27
aplicação lipschitziana, 94
aplicação parcialmente diferenciável, 105
aplicação pré-compacta, 60
aplicações tangentes, 75

bola aberta, 6
bola fechada, 6
bola unitária, 11

caráter lipschitziano, 74
caráter local, 73
caráter topológico, 74
centro, 6
completamento, 9
componente conexa, 98
convergência, 9
convergência uniforme em compactos, 101
convergência uniforme local, 101

derivada, 87, 126
derivada à direita, 88
derivada à esquerda, 88
derivada segundo uma direção, 88, 122
desigualdade de Lagrange, 91
desigualdade de Schwarz, 15
desigualdade triangular, 3
diferencial, 72, 73, 119, 124, 125
diferencial à direita, 88
diferencial à esquerda, 88
diferencial parcial, 105
dual, 35
dual algébrico, 35
dual normado, 35

esfera, 6
espaço conexo, 97
espaço de Banach, 9
espaço de Hilbert, 15
espaço euclidiano, 10
espaço localmente compacto, 57
espaço localmente pré-compacto 60
espaço normado, 4
espaço normado completo, 9
espaço projetivo, 59
espaço unitário, 10
espaço vetorial real subjacente, 3
extremidade, 90

forma bilinear, 14
forma sesquilinear, 14

homogeneidade, 3, 4

igualdade de Lagrange, 90
invariância por translação, 4
isometria, 41

limite, 9
linearidade da diferenciação, 79
linearidade em relação, 14, 61

norma, 3
norma dominada, 21
norma induzida, 17
normas equivalentes, 21
normas topologicamente equivalentes, 21

parte compacta, 56
parte pré-compacta, 60
parte relativamente compacta, 56
permutabilidade, 99
poligonal, 98
positividade, 3, 14, 15
produto cartesiano, 43
produto cartesiano normado, 47

produto escalar, 14
projeção, 43, 44

raio, 6
recobrimento, 56
regra de comutatividade das derivadas, 123
regra de diferenciabilidade parcial e total, 106
regra de diferenciação das aplicações implícitas, 110
regra de diferenciação das aplicações inversas, 82
regra de diferenciação de aplicações compostas, 80

segmento, 90
semilinearidade em relação, 15
seminorma, 4
separação, 3, 14, 15
simetria, 14
simetria hermitiana, 15
simétrico, 114, 117
soma direta, 43
soma direta topológica, 49
subespaço normado, 17
subrecobrimento, 56
sucessão de Cauchy, 9

teorema da aplicação aberta, 50
teorema da aplicação implícita, 112
teorema de Ascoli, 58
teorema de Hahn-Banach, 38
teorema de Bolzano-Weierstrass, 56
teorema de inversão local, 84
teorema de Riesz, 35, 57
teorema de Schwarz, 120, 125
teorema de Tychonoff, 51
teorema do gráfico fechado, 50
teorema do homeomorfismo, 50
teorema do valor médio de Lagrange, 89
teorema dos acréscimos finitos de Lagrange, 89
topologia natural, 5, 52

ÍNDICE DA NOTAÇÃO

$\mathbf{K}$	3	$E_1 \oplus E_2$	43
$\mathbf{R}$	3	$\mathbf{P}(E)$	59
$\mathbf{C}$	3	$\mathcal{A}(E;F)$	75
$\mathbf{K}^n$	10	E'_a	35
$\mathbf{R}^n$	10	E'	35
$\mathbf{C}^n$	10	$\mathcal{L}_a(E;F)$	29
E_R	3	$\mathcal{L}(E;F)$	29
$B_r(a)$	6	$\mathcal{L}_a(E_1,E_2;F)$	62
$\bar{B}_r(a)$	6	$\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$	64
$S_r(a)$	6	$\mathcal{L}_a(^nE;F)$	114, 117
$\lim x_n$	9	$\mathcal{L}_{as}(^nE;F)$	114, 117
$\lVert x\rVert$	3, 15	$\mathcal{L}(^nE;F)$	116, 117
$\lVert x\rVert_p$	10, 12, 47	$\mathcal{L}_s(^nE;F)$	116, 117
$\lVert x\rVert_\infty$	11, 13, 47	$f'(x_0)$	87
$\lVert f\rVert$	13	f'	87
$\lVert f\rVert_p$	14	$Df(x_0)$	72
$\lVert f\rVert_n$	13, 24	Df	73
$\lVert u\rVert$	29, 64	$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$	122
$(x\mid y)$	14, 15	$\frac{\partial f}{\partial h}$	122
$(f\mid g)$	15	$D_{E_i}f(a)$	105
$\tilde{u}$	113, 117	$D_if(a)$	105
$[x_0, x_1]$	90	$D_{E_i}f$	106
l_p	12	D_if	106
l_∞	13	$f^{(n)}(x_0)$	126
c	19	$f^{(n)}$	126
c_0	19	$D^nf(x_0)$	119, 120, 124, 125
f	19	D^nf	120, 124, 125
$\mathcal{C}(I)$	13	$d^nf(x_0)$	119, 120, 124, 125
$\mathcal{C}^n(I)$	13	d^nf	120, 124, 125
$\mathcal{C}^n(A;F)$	125		
$\mathcal{B}^n(A;F)$	125, 126		
$\mathcal{B}(A;F)$	126		
$E_1 \times E_2$	43		

COLEÇÃO DE MONOGRAFIAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Série de matemática

Nº 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
Nº 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
Nº 3. Estructuras Algebraicas I, por Enzo R. Gentile.
Nº 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
Nº 5. Álgebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
Nº 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
Nº 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
Nº 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
Nº 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
Nº 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
Nº 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
Nº 12. Estructuras Algebraicas II (Álgebra Lineal), por Enzo R. Gentile.
Nº 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segunda Fase), por Howard F. Fehr, John Camp e Howard Kellogg.
Nº 14. Estructuras Algebraicas III (Grupos Finitos), por Horacio O'Brien.
Nº 15. Introducción a la Teoría de Grafos, por Fausto A. Toranzos.
Nº 16. Estructuras Algebraicas IV (Álgebra Multilineal), por Artibano Micali e Orlando E. Villamayor.
Nº 17. Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, por Leopoldo Nachbin.

Série de física

Nº 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
Nº 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi e Sayd Codina.
Nº 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
Nº 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
Nº 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
Nº 6. Semiconductores, por George Bemski.
Nº 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
Nº 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo e H. McIntosh.
Nº 9. La Radiación Cósmica, por Gastón R. Mejía e Carlos Aguirre.
Nº 10. Astrofísica, por Carlos Jaschek e Mercedes C. de Jaschek.
Nº 11. Ondas, por Oscar J. Bressan e Enrique Gaviola.
Nº 12. El Láser, por Mario Garavaglia.

Série de química

- N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
- N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw e Walter Colli.
- N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini e M. Burachik.
- N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
- N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez-Lara.
- N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
- N° 7. Fotoquímica de Gases, por Ralf-Dieter Penzhorn.
- N° 8. Introducción a la Geoquímica, por Félix González-Bonorino.
- N° 9. Resonancia Magnética Nuclear de Hidrógeno, por Pedro Joseph-Nathan.
- N° 10. Cromatografía Líquida de Alta Presión, por Harold M. McNair e Benjamín Esquivel H.
- N° 11. Actividad Óptica, Dispersión Rotatoria Óptica y Dicroísmo Circular en Química Orgánica, por Pierre Crabbé.
- N° 12. Espectroscopia Infrarroja, por Jesús Morcillo Rubio.
- N° 13. Polarografía, por Alejandro J. Arvía e Jorge A. Bolzan.
- N° 14. Paramagnetismo Electrónico, por Juan A. McMillan.
- N° 15. Introducción a la Estereoquímica, por Juan A. Garbarino.
- N° 16. Cromatografía en Papel y en Capa Delgada, por Xorge A. Domínguez.
- N° 17. Introducción a la Espectrometría de Masa de Sustancias Orgánicas, por Otto R. Gottlieb e Raimundo Braz Filho.

Série de biología

- N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
- N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
- N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
- N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
- N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
- N° 6. Microorganismos, por J.M. Gutiérrez-Vázquez.
- N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
- N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
- N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.
- N° 10. Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
- N° 11. Fundamentos de Inmunología e Inmunoquímica, por Félix Córdoba Alva e Sergio Estrada-Parra.
- N° 12. Bacteriófagos, por Romilio Espejo T.
- N° 13. Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera e Abraham Willink.
- N° 14. Relación Huésped-Parásito. Mecanismo de Patogenicidad de los Microorganismos, por Manuel Rodríguez Leiva.

Em preparação

Série de matemática

Estructuras Algebraicas V (Teoría de Cuerpos), por Darío J. Picco.
Estructuras Algebraicas VI (Estructura de Álgebras), por Artibano Micali.
Biomatemática, por Alejandro Engel.
Introducción al Análisis, por Manuel Balanzat.
Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta, por Juan Antonio Gatica.
Introducción a los Espacios de Hilbert, por José I. Nieto.
Introducción a la Computación, por Jaime Michelow.
Teoría General de la Optimización, por Enrique Cansado.
Programación Lineal, por Fernando L. Garagorry.

Série de física

Oceanografía Física, por Luis E. Herrera.
Teoría de Fluidos en Equilibrio, por Antonio E. Rodríguez e Roberto E. Caligaris.
Aplicação da Teoria de Grupos na Espectroscopia Raman e do Infra-Vermelho, por Jorge Humberto Nicola e Anildo Bristoti.
Teoría Estadística de la Materia, por Antonio E. Rodríguez e Roberto E. Caligaris.

Série de química

Fotometría de Llama por Emisión, por Juan Ramírez Muñoz.
Fotometría de Llama por Absorción Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Momento Polar, por Pedro Lehman.
Fluorescencia Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Termoquímica Moderna, por Jaime Cases.
Cromatografía de Gases, por Harold M. McNair.
Síntesis Orgánica, por Eduardo Sánchez.
Catálisis Homogénea, por Eduardo Humeres A.
Catálisis Heterogénea, por Sergio Droguett.

Série de biología

Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas-Campillo.
Ecología Fisiológica, por Ernesto Medina.
Etología: El Estudio del Comportamiento Animal, por Raúl Vaz-Ferreira.
Citogenética Básica y Biología de los Cromosomas, por F.S. Saez e H. Cardoso.
Citogenética Ultraestructural y la Biología Molecular de los Cromosomas, por R. Wettstein e J. Roberto Sotelo.
Análisis de Sistemas en Ecología, por Gilberto C. Gallopín.
Ecología de Poblaciones Animales, por Jorge E. Rabinovich.
Sistemas Ecológicos y el Hombre, por Ariel E. Lugo e Greg Morris.

Inventario de Vegetación de Biomas, por Jorge Morello.
Biología Celular de la Transformación Maligna, por Manuel Rieber.
Comportamiento y Aprendizaje, por Héctor Maldonado.
Principios Básicos de la Contracción Muscular, por Carlos Caputo.
Transporte a Través de la Membrana Celular, por Patricio Garrahan e Alcides Rega.
Genética de Poblaciones Humanas, por Francisco Rothhammer.
Duplicación Cromosómica y Heterocromatina a Nivel Molecular y Citológico, por Nestor O. Bianchi.

Nota: As pessoas interessadas em adquirir estas monografias devem dirigir-se ao Escritório de Vendas e Promoção, Organização dos Estados Americanos, Washington, D. C., 20006 ou aos Escritórios da Secretaria-Geral da OEA nos respetivos paises.