Capítulo 1 Polinomios y fracciones racionales

1. Hallar el máximo común divisor, por el algoritmo de Euclides, de los polinomios

$$P_1(x) = 2156x^5 + 1120x^4 - 433x^3 - 179x^2 + 32x + 4$$
$$P_2(x) = 1372x^5 + 784x^4 - 245x^3 - 131x^2 + 16x + 4$$

Solución:

Recordando el teorema de Euclides:

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = MCD(P_2(x), R(x))$$

Siendo $R(x)$ el resto de dividir $P_1(x)$ entre $P_2(x)$

Sabemos que

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = MCD(\lambda P_1(x), P_2(x)) \qquad \forall\lambda \text{ unidad en } \mathbf{R}[x]$$

y al ser $2156 = 4.7^2.11$ y $1372 = 4.7^3$, multiplicaremos $P_1(x)$ por 7 para evitar fracciones al hacer la división de $P_1(x)$ por $P_2(x)$;

$$7.P_1(x) = P_2(x).11 + (-784x^4 - 336x^3 + 188x^2 + 48x - 16)$$
$$R(x) = -784x^4 - 336x^3 + 188x^2 + 48x - 16$$

que simplificamos por -4 quedando

$$R(x) = 196x^4 + 84x^3 - 47x^2 - 12x + 4$$

$$P_2(x) = R(x) \cdot (7x + 1) + 0 \text{ luego } MCD(P_2(x), R(x)) = R(x)$$

por lo que:

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = R(x) = 196x^4 + 84x^3 - 47x^2 - 12x + 4$$

2. Hallar las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ sabiendo que una de ellas es triple.

Solución:

La descomposición en factores primos del polinomio será:

$$P(x) = (x - \alpha)^3 (x - \beta)$$

Si α es una raíz triple de $P(x)$, es raíz doble de $P'(x)$ y simple de $P"(x)$.

Por lo tanto el $MCD(P'(x), P"(x))$ contiene el factor $(x - \alpha)$. Basta pues hallar $MCD(P'(x), P"(x))$ y entre sus factores, por tanteo en $P(x)$, puede extraerse el valor de α .

Ahora bien, en este caso concreto, puesto que $P"(x)$ es de grado dos, resulta más sencillo hallar las raíces de $P"$ y de las dos ver cuál lo es también de $P(x)$

$$\begin{aligned} P'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \\ P"(x) &= 12x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

$$\text{De } P"(x) = 0 \text{ tenemos } x = -\frac{1}{2}, \ x = 1$$

$P(-\frac{1}{2}) \neq 0$, luego $-\frac{1}{2}$ no es raíz de $P(x)$, sin embargo $P(1) = 0$ luego $\alpha = 1$ es la raíz buscada.

Puesto que dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ con raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ contadas con su multiplicidad, es $a_{n-1} = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$, se tiene $\beta = -2$.

3. Probar que $P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ es divisible por $(x-1)^3$. (Se supone $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ y $n \in \mathbf{N}$).

Solución:

Que $P(x)$ sea divisible por $(x - 1)^3$ equivale a que 1 es por lo menos raíz triple de $P(x)$, raíz doble por lo menos, de $P'(x)$ y raíz simple por lo menos, de $P"(x)$.

Veamos

$$\begin{aligned}
P(1) &= n-(n+2)+(n+2)-n = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P(x)\\
P'(x) &= n(n+2)x^{n+1}-(n+2)(n+1)x^n+(n+2)\\
P'(1) &= n(n+2)-(n+2)(n+1)+(n+2) = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P'(x)\\
P''(x) &= n(n+2)(n+1)x^n-(n+2)(n+1)nx^{n-1}\\
P''(1) &= n(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)n = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P''(x)
\end{aligned}$$

por lo tanto $P(x)$ es divisible por $(x-1)^3$ como pretendíamos probar.

Observamos además que $P(x)$ no es divisible por $(x-1)^4$ pues

$$\begin{aligned}
P'''(x) &= n^2(n+2)(n+1)x^{n-1}-(n+2)(n+1)(n-1)nx^{n-2}\\
P'''(1) &= n^2(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)(n-1)n = n(n+1)(n+2) \neq 0.
\end{aligned}$$

4. Consideremos $P(x) = x^3-4x^2+5x-2$ a coeficientes reales.

a) Determinar $P'(x)$ (polinomio derivado de $P(x)$) y dar su descomposición en factores primos.

b) Probar que una de las raíces de $P'(x)$ lo es también de $P(x)$ y deducir de esto la descomposición en factores primos de $P(x)$.

c) Calcular $MCD(P(x), P'(x))$ y determinar dos polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ tales que:

$$P_1(x)P(x)+P_2(x)P'(x) = MCD(P(x), P'(x)).$$

Solución:

a)

$$P'(x) = 3x^2-8x+5 = (x-1)(3x-5).$$

b) Las raíces de $P'(x)$ son 1 y $\frac{5}{3}$, ahora bien:

$$\begin{aligned}
&P(\frac{5}{3}) \neq 0 \text{ luego } \frac{5}{3} \text{ no es raíz de } P(x).\\
&P(1) = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz doble de } P(x)\\
&P''(1) = -2 \text{ luego } 1 \text{ no es raíz triple de } P(x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-a) = x^3-(2+a)x^2+(2a+1)x-a = \\ &= x^3-4x^2+5x-2 \end{aligned}$$

de donde $a = 2$.

c) de

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-2) \\ P'(x) &= (x-1)(3x-5) \end{aligned}\right\}$$

se deduce que: $MCD(P(x), P'(x)) = (x-1)$.

Por el algoritmo de división $(P(x) = P'(x)Q(x)+R(x))$ tenemos:

$$9P(x) = P'(x)(3x-4)+(-2x+2) = P'(x)(3x-4)-2(x-1).$$

Despejando $(x-1)$

$$\begin{aligned} 9P(x)-P'(x)(3x-4) &= -2(x-1) \\ \frac{-9}{2}P(x)-\frac{1}{2}(3x-4)P'(x) &= (x-1) \end{aligned}$$

Luego

$$P_1(x) = \frac{-9}{2}, \quad P_2(x) = \frac{-1}{2}(3x-4).$$

5. Los restos de dividir un polinomio $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ por $x-1$, $x-2$ y $x-3$ son respectivamente $3, 7, 13$

Determinar el resto de dividir $P(x)$ por el producto

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

Solución:

Por el algoritmo de división sabemos

$$\begin{aligned} P(x) &= D(x)Q(x)+R(x) \quad \text{con} \quad grado\, R(x) < grado\, D(x) \\ P(x) &= (x-1)Q_1(x)+R_1(x) = (x-1)Q_1(x)+3 \\ P(x) &= (x-2)Q_2(x)+R_2(x) = (x-2)Q_2(x)+7 \\ P(x) &= (x-3)Q_3(x)+R_3(x) = (x-3)Q_3(x)+13 \\ P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)Q+R(x) \quad \text{con} \quad R(x) = ax^2+bx+c \end{aligned}$$

Sabemos que el valor numérico de un polinomio $P(x)$ en u es el resto de dividir el polinomio por $x-u$; luego y para $i=1,2,3$

$$P(u)=(x-u)Q_i(u)+R_i(u)=(u-1)(u-2)(u-3)Q(u)+R(u)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=R_1(1)=3=R(1)=a+b+c \\ P(2)=R_2(2)=7=R(2)=4a+2b+c \\ P(3)=R_3(3)=13=R(3)=9a+3b+c \end{array}\right\}$$

que, resolviendo el sistema nos queda:

$$a=b=c=1 \quad \text{y} \quad R(x)=x^2+x+1.$$

6. Encontrar un polinomio $P(x)\in \mathbf{R}[x]$ de grado cinco, tal que $P(x)+10$ sea divisible por $(x+2)^3$ y $P(x)-10$ sea divisible por $(x-2)^3$

Solución:

Puesto que $P(x)+10$ es divisible por $(x+2)^3$, tenemos que $P'(x)=(P(x)+10)'$ es divisible por $(x+2)^2$; y puesto que $P(x)-10$ es divisible por $(x-2)^3$, tenemos que $P'(x)=(P(x)-10)'$ es divisible por $(x-2)^2$; luego $P'(x)$ (polinomio de grado cuatro) será

$$P'(x)=k(x+2)^2(x-2)^2=k(x^4-8x^2+16) \quad \text{con} \quad k\in\mathbf{R}$$

de donde

$$P(x)=k(\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x+c), \text{ con } c\in\mathbf{R} \quad \text{e imponiendo que}$$

$$\left.\begin{array}{r} P(-2)=-10 \\ P(2)=10 \end{array}\right\}$$

Nota: Observamos que

$$P(x)+10=(x+2)^3Q_1(x)\Longrightarrow P(x)=(x+2)^3Q_1(x)-10\Longrightarrow P(-2)=-10$$
$$P(x)-10=(x-2)^3Q_2(x)\Longrightarrow P(x)=(x-2)^3Q_2(x)+10\Longrightarrow P(2)=10$$

resulta

$$\begin{aligned}-10 &= k(\frac{-32}{5}+\frac{64}{3}-32+c)\\ 10 &= k(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32+c)\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema tenemos

$$c=0,\ k=\frac{75}{128} \quad \text{y} \quad P(x)=\frac{15}{128}x^5-\frac{25}{16}x^3+\frac{75}{8}x$$

Otro método:

De:

$$\left.\begin{array}{lll} P(x)+10=(x+2)^3C_1(x) & \text{con} & grado\, C_1(x)=2 \\ P(x)-10=(x+2)^3C_2(x) & \text{con} & grado\, C_2(x)=2 \end{array}\right\}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}20 &= (x+2)^3C_1(x)-(x-2)^3C_2(x)\\ 1 &= (x+2)^3(\frac{1}{20}C_1)+(x-2)^3(\frac{1}{20}C_2(x))\end{aligned}$$

es decir, hemos de buscar $\frac{1}{20}C_1(x)$ y $\frac{1}{20}C_2(x)$ que son los polinomios de grado mínimo que hacen que se cumpla la *identidad de Bezout*, (observese que $(x+2)^3$ y $(x-2)^3$ son primos entre sí).

7. Descomponer en fracciones simples sobre **R**, la fracción

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}$$

Ídem sobre **C**.

Solución:

Planteamos

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-3}+\frac{dx+e}{x^2+4}$$

(Observamos que x^2+4 es primo sobre $\mathbf{R}$). Operando en el segundo miembro, queda

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)} =$$

$$\frac{a(x-1)(x-3)(x^2+4)+b(x-3)(x^2+4)+c(x-1)^2(x^2+4)+(dx+e)(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}$$

De la igualdad de estas dos fracciones se deduce la igualdad de los polinomios numeradores de las fracciones. De aquí se deduce por lo tanto un método de cálculo de los coeficientes desconocidos: identificar los coeficientes de igual grado de ambos polinomios, obteniendo así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Otro método más sencillo para obtener los coeficientes es: si dos polinomios son iguales, sus funciones polinómicas asociadas son también iguales, por lo que, dando valores a x en ambos polinomios, los valores numéricos han de ser iguales. Así,

para $x=1$ es $-14+3-39=b(1-3)(1+4) \quad \Rightarrow \quad b=5$

para $x=3$ es $-14\cdot 32+9-39=c(3-1)^2(3^2+4) \;\Rightarrow\; c=-3$

para $x=0$ es $-39=12a-60-12-3e \;\Rightarrow\; 12a-3e=33$

para $x=-1$ es $-14-3-39=40a-100-60-16(-d+e) \;\Rightarrow\; 10a+4d-4e=26$

para $x=2$ es $-56+6-39=-8a-40-24-(2d+e) \;\Rightarrow\; 8a+2d+e=25$

Resolviendo las tres últimas ecuaciones resulta $a=3, \quad d=0, \quad e=1$, luego la descomposición es

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-3}+\frac{1}{x^2+4}$$

Pasemos ahora a efectuar la descomposición en $\mathbf{C}$.

x^2+4 ya no es primo en $\mathbf{C}$, $x^2+4=(x-2i)(x+2i)$, por lo que la descomposición será:

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)} =$$

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-3}+\frac{m}{x-2i}+\frac{n}{x+2i}$$

Comparando esta descomposición con la anterior, podemos asegurar que $a, \; b, \; c$ serán los mismos obtenidos para el caso real, y $\frac{m}{x-2i}+\frac{n}{x+2i}=\frac{1}{x^2+4}$ por lo que $1=m(x+2i)+n(x-2i)$, que para $x=-2i$ se tiene $1=-4ni \;\rightarrow\; n=+\frac{1}{4}i$

para $x=2i$ se tiene $1=4mi \;\Rightarrow\; m=-\frac{1}{4}i$, y la descomposición es

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-3}+\frac{-\frac{1}{4}i}{x-2i}+\frac{\frac{1}{4}i}{x+2i}$$

8. Descomponer en fracciones simples sobre **C, R** y **Q** la fracción racional siguiente

$$\frac{t^6+t^4-t^2-1}{t^3(t^2-2t-1)}=Q(t).$$

Solución:

Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador, efectuamos la división y tenemos

$$Q(t)=t+2+\frac{6t^4+2t^3-t^2-1}{t^5-2t^4-t^3}$$

$t^5-2t^4-t^3$ tiene la misma descomposición en factores primos tanto sobre **R** como sobre **C**:

$$t^5-2t^4-t^3=t^3(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})$$

No así sobre **Q** que t^2-2t-1 es primo, por lo que la descomposición en fracciones simples de $Q(t)$ será la misma tanto sobre **R** como sobre **C** y distinta para **Q**.

Veamos para **R** y **C**:

$$Q(t)=t+2+\frac{A}{t^3}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}+\frac{D}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{E}{t-1+\sqrt{2}}$$

que operando obtenemos

$$\begin{aligned}Q(t)&=t+2+\frac{(A+Bt+Ct^2)(t^2-2t-1)+t^3(D(t-1+\sqrt{2})+E(t-1-\sqrt{2}))}{t^5-2t^4-t^3}\\&=t+2+\frac{P(t)}{t^5-2t^4-t^3}\end{aligned}$$

por lo que

$$6t^4+2t^3-t^2-1=(A+Bt+Ct^2)(t^2-2t-1)+t^3(D(t-1+\sqrt{2})+E(t-1-\sqrt{2}))=P(t)$$

y haciendo uso del hecho: si dos polinomios son iguales también lo son sus funciones polinómicas asociadas, tenemos

$$\begin{aligned}&(6t^4+2t3-t^2-1)(0)=-1=P(0)=-A\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)'(0)=0=P'(0)=-B-2A\\&(6t^4+2t3-t^2-1)''(0)=-2-P''(0)=2(A-2B-C)\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)'''(0)=12=\\&\qquad\qquad=P'''(0)=6(B-2C+(-1+\sqrt{2})D+(-1-\sqrt{2})E)\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)''''(0)=144=P''''(0)=48C+48(D+E)\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$A=1 \quad B=-2 \quad C=6 \quad D=4\sqrt{2} \quad E=-4\sqrt{2}$$

y la descomposición es

$$Q(t)=t+2+\frac{1}{t^3}+\frac{-2}{t^2}+\frac{6}{t}+\frac{4\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{-4\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}$$

Pasemos a la descomposición de $Q(t)$ sobre $\mathbf{Q}$:

$$Q(t)=t+2+\frac{A}{t^3}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}+\frac{M}{t^2-2t-1}$$

haciendo $\dfrac{4\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}+\dfrac{-4\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}=\dfrac{16}{t^2-2t-1}\in\mathbf{Q}(t)$

por lo que

$$Q(t)=t+2+\frac{1}{t^3}+\frac{-2}{t^2}+\frac{6}{t}+\frac{16}{t^2-2t-1}$$

y puesto que la descomposición en fracciones simples es única, ésta será la descomposición sobre $\mathbf{Q}$.

9. Descomponer en fracciones simples sobre $\mathbf{C}$ la fracción racional siguiente

$$Q(x)=\frac{1}{(x-3)^9(x-5)^9}$$

Solución:

La descomposición será

$$Q(x)=\sum_{n=1}^{9}\frac{A_n}{(x-3)^n}+\sum_{n=1}^{9}\frac{B_n}{(x-5)^n}$$

donde A_n, B_n con $n=1,\dots,9$ son números complejos a determinar.

Consideremos $F(x)=\dfrac{1}{(x-5)^9}$ función racional; desarrollamos $F(x)$ por la fórmula de Taylor en el punto $x=3$, hasta el orden 8, obteniendo

$$F(x)=F(3)+\frac{F'(3)}{1!}(x-3)+\ldots+\frac{F^8(3)}{8!}(x-3)^8+G(x)(x-3)^9$$

siendo $G(x)$ una función racional que está definida para $x=3$; usando este desarrollo tenemos

$$\frac{1}{(x-3)^9(x-5)^9}=\frac{F(3)}{(x-3)^9}+\frac{F'(3)}{(x-3)^8}+\ldots+\frac{F^8(3)}{8!(x-3)}+G(x)$$

Por la unicidad de los coeficientes A_n y B_n tenemos

$$A_n=\frac{F^{9-n}(3)}{(9-n)!}$$

$$F^n(x)=(-9)(-9-1)...(-9-n+1)(x-5)^{-9-n}=(-1)^n\frac{(8+n)!}{8!}\frac{1}{(x-5)^{9+n}}$$

luego $F^n(3)=(-1)^n\dfrac{(8+n)!}{8!}\dfrac{1}{(-2)^{9+n}}$

y $A_n=(-1)^{9-n}\dfrac{(17-n)!}{8!(9-n)!}\dfrac{1}{(-2)^{18-n}}$

y por simetría tenemos, (observese que obtenemos B_n considerando $F_1(x)=\dfrac{1}{(x-3)^n}$ y repitiendo el proceso anterior).

$$B_n=(-1)^{9-n}\frac{(17-n)!}{8!(9-n)!}\frac{1}{2^{18-n}}$$

10. Sobre el cuerpo de los racionales, descomponer en fracciones simples la fracción racional siguiente

$$Q(x)=\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)}$$

Solución:

Observamos que x^3+2 no tiene raíces en $\mathbf{Q}$, luego

$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx^2+Cx+D}{(x^3+2)}$$

Operando

$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)} = \frac{A(x^3+2)+(Bx^2+Cx+D)(x+1)}{(x+1)(x^3+2)}$$

Igualando numeradores tenemos

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ B+C&=2\\ C+D&=0\\ 2A+D&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=4\\ B&=-4\\ C&=6\\ D&=-6 \end{aligned}$$

luego la descomposición es

$$Q(x) = \frac{4}{(x+1)} + \frac{-4x^2+6x-6}{x^3+2}$$

11. Descomponer sobre $\mathbf{R}$ la fracción:

$$Q(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

Solución:

Haciendo $x^2+1=y$ tenemos $x^2=y-1$, luego

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} &= \frac{(y-1)^n}{y^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i y^{n-i}}{y^n} = \\ &= 1 - \frac{\binom{n}{1}}{y} + \frac{\binom{n}{2}}{y^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{1}}{y} = \\ &= 1 - \frac{\binom{n}{1}}{x^2+1} + \frac{\binom{n}{2}}{(x^2+1)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{(x^2+1)^n} \end{aligned}$$

Capítulo 2 Espacios vectoriales

1. Sea $\mathbf{R}_0$ el grupo multiplicativo de los números reales estrictamente positivos. Probar que $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial con las operaciones siguientes:

$$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\begin{gathered}(x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) = (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1)\\ \lambda \circ (x,y,z) = (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda)\end{gathered}$$

En caso de ser dimensión finita determinar una base

Solución:

Es fácil probar que con la operación $*$ el conjunto $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un grupo abeliano:

Asociatividad

$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned}(x,y,z) * ((x_1,y_1,z_1) * (x_2,y_2,z_2)) &= (x,y,z) * (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2) =\\ = (x \cdot (x_1 \cdot x_2), y * y_1 \cdot y_2), z \cdot z_1 \cdot z_2)) &= ((x \cdot x_1) \cdot x_2, (y \cdot y_1) \cdot y_2, (z \cdot z_1) \cdot z_2) =\\ = (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) * (x_2,y_2,z_2) &= ((x,y,z) * (x_1,y_1,z_1)) * (x_2,y_2,z_2)\end{aligned}$$

(Esta propiedad nos permite escribir $(x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) * (x_2,y_2,z_2)$)

Conmutatividad

$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned}(x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) = (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) &= (x_1 \cdot x, y_1 \cdot y, z_1 \cdot z) =\\ &= (x_1,y_1,z_1) * (x,y,z)\end{aligned}$$

Elemento neutro

$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$(1,1,1) * (x,y,z) = (1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z) = (x,y,z)$$

Elemento simétrico

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \ \exists (1/x, 1/y, 1/z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \quad \text{tal que}$$
$$(x,y,z) * (1/x, 1/y, 1/z) = (x \cdot 1/x, y \cdot 1/y . z \cdot 1/z) = (1,1,1)$$

Veamos ahora que la operación externa verifica las cuatro propiedades necesarias para que el conjunto sea un espacio vectorial:

Primera ley distributiva

$\forall \lambda \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z), (x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned} &\lambda \circ ((x,y,z) * (x_1,y_1,z_1)) = \lambda \circ (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) = \\ &= ((x \cdot x_1)^\lambda, (y \cdot y_1)^\lambda, (z \cdot z_1)^\lambda) = (x^\lambda \cdot x_1^\lambda, y^\lambda \cdot y_1^\lambda, z^\lambda \cdot z_1^\lambda) = \\ &= (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda) * (x_1^\lambda, y_1^\lambda, z_1^\lambda) = (\lambda \circ (x,y,z)) * (\lambda \circ (x_1,y_1,z_1)) \end{aligned}$$

Segunda ley distributiva

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu) \circ (x,y,z) = (x^{\lambda+\mu}, y^{\lambda+\mu}, z^{\lambda+\mu}) = (x^\lambda \cdot x^\mu, y^\lambda \cdot y^\mu, z^\lambda \cdot z^\mu) = \\ &= (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda) * (x^\mu, y^\mu, z^\mu) = (\lambda \circ (x,y,z)) * (\mu \circ (x,y,z)) \end{aligned}$$

Asociatividad de los escalares

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned} &(\lambda \cdot \mu) \circ (x,y,z) = (x^{\lambda \cdot \mu}, y^{\lambda \cdot \mu}, z^{\lambda \cdot \mu}) = \\ &= ((x^\mu)^\lambda, (y^\mu)^\lambda, (z^\mu)^\lambda) = \lambda \circ (x^\mu, y^\mu, z^\mu) = \\ &= \lambda \circ (\mu \circ (x,y,z)) \end{aligned}$$

Propiedad del elemento unidad del cuerpo

$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$1 \circ (x,y,z) = (x^1, y^1, z^1) = (x,y,z)$$

luego, en efecto $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

Veamos cuál es su dimensión y si es posible, determinemos una base.

Sabemos que $\forall x \in \mathbf{R}_0 \ x = e^{\log x}$, luego $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$, se tiene

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (e^{\log x}, e^{\log y}, e^{\log z}) = (e^{\log x},1,1) * (1,e^{\log y},1) * (1,1,e^{\log z}) = \\ &= (\log x \circ (e,1,1)) * (\log y \circ (1,e,1)) * (\log z \circ (1,1,e))\end{aligned}$$

luego los vectores $(e,1,1),(1,e,1),(1,1,e) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ forman un sistema de generadores.

Claramente son independientes, veamos:

de $$(\lambda_1 \circ (e,1,1)) * (\lambda_2 \circ (1,e,1)) * (\lambda_3 \circ (1,1,e)) = (1,1,1)$$

tenemos

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}) = (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda_i} = 1 \ \forall i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \ \forall i = 1,2,3$$

por lo que forman una base de dicho espacio vectorial.

2. Demostrar que el conjunto E de las sucesiones numéricas

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots) = (u_n) \qquad n \in \mathbf{N}$$

de números reales provista de dos leyes de composición, una interna $+$ y una externa $\cdot$, definidas mediante:

$$\forall u,v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} u+v = (u_n + v_n) & \forall n \in \mathbf{N} \\ \lambda \cdot u = (\lambda \cdot u_n) & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

es un espacio vectorial.

Solución:

Primero, probaremos que la operación (interna) $+$ dota a E de estructura de grupo abeliano

Asociatividad

$$\begin{aligned} u+(v+w) &= (u_n+(v+w)_n) = (u_n+(v_n+w_n)) \underset{(1)}{=} \\ &= ((u_n+v_n)+w_n) = ((u+v)_n+w_n) = (u+v)+w \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{R}$ tiene estructura de grupo, con la operación $+$

Conmutatividad

$$(u+v) = (u_n+v_n) = (v_n+v_n) = (v+u)$$

Existencia de elemento neutro

veamos que existe $e \in E$ tal que $u+e=u, \forall u \in E$

si $u+e=(u_n+e_n)=u, \ \forall u \in E$, entonces $u_n+e_n=u_n, \forall n \in \mathbf{N}$, de donde $e_n=0, \forall n \in \mathbf{N}$ y $e=(0,0,\ldots,0,\ldots)$, luego e existe y es único.

Existencia de elemento simétrico

hemos de ver que $\forall u \in E$ existe u^{-1} tal que $u+u^{-1}=e$

si $u+u^{-1}=(u_n+u_n^{-1})=e$, entonces $u_n+u_n^{-1}=0, \forall n \in \mathbf{N}$, de donde $u_n^{-1}= -u_n, \forall n \in \mathbf{N}$ y $u^{-1}=(-u_n)$; luego u^{-1} existe y es único.

Veamos ahora que la operación (externa) $\cdot$ verifica las cuatro propiedades, necesarias para que el grupo abeliano E sea un $\mathbf{R}$-espacio vectorial

Primera ley distributiva

$\forall u,v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(u+v) &= (\lambda(u+v)_n) = (\lambda(u_n+v_n)) = (\lambda u_n+\lambda v_n) = \\ &= (\lambda u_n)+(\lambda v_n) = \lambda(u_n)+\lambda(v_n) = \lambda u+\lambda v \end{aligned}$$

Segunda ley distributiva

$\forall \lambda,\mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in E$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)u &= ((\lambda+\mu)u_n) = (\lambda u_n+\mu u_n) = (\lambda u_n)+(\mu u_n) = \\ &= \lambda(u_n)+\mu(u_n) = \lambda u+\mu u \end{aligned}$$

Asociatividad de los escalares

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in E$

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)u &= ((\lambda\mu)u_n) = (\lambda(\mu u_n)) = \lambda(\mu u_n) = \lambda(\mu(u_n)) = \\ &= \lambda(\mu u)\end{aligned}$$

Propiedad del elemento unidad del cuerpo

Sea $1 \in \mathbf{R}$ y $\forall u \in E$

$$1 \cdot u = (1 \cdot u_n) = (u_n) = u$$

luego E es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

3. Sea $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Estudiar, para qué valores de $k \in \mathbf{R}$;

$$W = \{f \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) / f(1) = k\}$$

es un subespacio vectorial de F.

Solución:

Recordemos que F es un subespacio vectorial del K-espacio vectorial E si y solamente si:

$$\forall \lambda,\, \mu \in K\ \forall u,\, v \in F \quad \text{entonces} \quad \lambda u + \mu v \in F$$

Sean pues $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ y $f, g \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$;

$$(\lambda f + \mu g) \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad (\lambda f + \mu g)(1) = k$$

comprobemos si esto es así

$$(\lambda f + \mu g)(1) = (\lambda f)(1) + (\mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda k + \mu k = (\lambda + \mu)k$$

luego $(\lambda + \mu)k = k\ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ si y sólo si $k = 0$, por lo tanto W es subespacio vectorial si y sólo si $k = 0$.

4. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbf{R}$-espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

¿Determinan los vectores $ae_1 + be_2$, $ce_2 + de_3$, $ee_3 + fe_1$, con a, b, c, d, e, f escalares no nulos, una base de E?

Aplicar el resultado a las familias de vectores

a) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$

b) $(3,1,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$

referidos a la base natural de $\mathbf{R}^3$.

Solución:

Puesto que el número de vectores dado coincide con la dimensión del espacio, estos vectores forman base si y sólo si son independientes. Recordemos que una colección de vectores $\{e_1, ..., e_n\}$ de un K-espacio vectorial son independientes si y sólo si:

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Veamos pues,

$$\begin{aligned} \lambda_1(ae_1 + be_2) + \lambda_2(ce_2 + de_3) + \lambda_3(ee_3 + fe_1) &= 0 \\ (\lambda_1 a + \lambda_3 f)e_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 c)e_2 + (\lambda_2 d + \lambda_3 e)e_3 &= 0 \end{aligned}$$

Y puesto que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es base, tenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a + \lambda_3 f &= 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 c &= 0 \\ \lambda_2 d + \lambda_3 e &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 ab + \lambda_3 fb &= 0 \\ \lambda_1 ab + \lambda_2 ac &= 0 \\ \lambda_2 d + \lambda_3 e &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_3 fb - \lambda_2 ac &= 0 \\ \lambda_2 d + \lambda_3 e &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 fbd - \lambda_2 acd &= 0 \\ \lambda_2 acd + \lambda_3 ace &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_3(fbd + ace) = 0$$

Luego, si $fbd + ace \neq 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$ y los vectores serán independientes y formarán base (si $fbd + ace = 0$; cualquier $\lambda_3 \in \mathbf{R}$ es solución del sistema y por lo tanto, los vectores dados, no pueden formar base.).

Aplicando el resultado a las familias dadas, tenemos

$$\text{a)} \quad \left.\begin{aligned} (1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) &\Rightarrow a = b = 1 \\ (0,1,1) = (0,1,0) + (0,0,1) &\Rightarrow c = d = 1 \\ (1,0,-1) = (1,0,0) - (0,0,1) &\Rightarrow e = 1, f = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow fbd = -ace$$

luego, son dependientes (la relación de dependencia es $(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,1)$.

b) $$\left.\begin{array}{l}(3,1,0)=3(1,0,0)+(0,1,0)\Rightarrow a=3, b=1\\(0,2,1)=2(0,1,0)+(0,0,1)\Rightarrow c=2, d=1\\(1,0,2)=(1,0,0)+2(0,0,1)\Rightarrow e=1, f=2\end{array}\right\}\Rightarrow fbd\neq -ace$$

luego, son independientes, y por lo tanto forman base.

5. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ de dimensión n y sea $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ una base. Por restricción del cuerpo de escalares, E puede considerarse como un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

Demostrar que los $2n$ vectores $\{u_1,\dots,u_n,iu_1,\dots,iu_n\}$ forman una base de E sobre $\mathbf{R}$. Deducir de aquí que $dim\ E_{\mathbf{R}}=2\cdot dim\ E_{\mathbf{C}}$

Nota: hemos llamado $E_{\mathbf{C}}$, $E_{\mathbf{R}}$ a E como $\mathbf{C}$ espacio vectorial y como $\mathbf{R}$ espacio vectorial respectivamente.

Solución:

Ante todo, notamos que los vectores de $E_{\mathbf{C}}$ y $E_{\mathbf{R}}$ son los mismos. Veamos primero que los vectores dados son independientes en $E_{\mathbf{R}}$; consideremos una combinación lineal igualada a cero:

$$\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n+\lambda_{n+1}iu_1+\ldots+\lambda_{2n}iu_n=0, \quad \text{con} \quad \lambda_j\in\mathbf{R}\ j=1,\dots,2n$$

sumergiendo $E_{\mathbf{R}}$ en $E_{\mathbf{C}}$ esta igualdad puede escribirse

$$(\lambda_1+\lambda_{n+1}i)u_1+\ldots+(\lambda_n+\lambda_{2n}i)u_n=0 \quad \text{con } \lambda_j+\lambda_{n+j}i\in\mathbf{C}$$

y puesto que $\{u_i\}$ son base de $E_{\mathbf{C}}$, tenemos

$$\lambda_j+\lambda_{n+j}i\ =\ 0 \quad \forall j=1,\dots,n$$

por lo que:

$$\lambda_j=\lambda_{n+j}=0 \quad \forall j=1,\dots,n$$

y por lo tanto, los vectores $\{u_1,\dots,u_n,iu_1,\dots,iu_n\}$ son independientes. Veamos ahora que generan $E_{\mathbf{R}}$. Si $u\in E_{\mathbf{R}}$, entonces $u\in E_{\mathbf{C}}$ y por lo tanto

$$u=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n \quad \text{con} \quad \lambda j\in\mathbf{C}\ j=1,\dots,n,$$

es decir,

$$\lambda_j = a_j + b_j i \; j = 1, \ldots, n \text{ con } \quad a_j, b_j \in \mathbf{R},$$

luego

$$\begin{aligned} u &= (a_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + (a_n + b_n i)u_n = \\ &= a_1 u_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + a_n u_n + b_n i u_n = \\ &= a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1 i u_1 + \ldots + b_n i u_n \end{aligned}$$

luego, son también generadores. Por ser un sistema de generadores independientes son base, y por lo tanto

$$dim\ E_{\mathbf{R}} = 2.dim\ E_{\mathbf{C}}$$

6. Sea $E = \mathbf{R}^3$. Decir si los vectores $\{(1,2,3), (2,5,8), (1,3,7)\}$ son dependientes o independientes.

Solución:

El método que vamos a usar aquí para la discusión de la dependencia o independencia se apoya en las proposiciones siguientes.

a) Dados p vectores, $p \leq n$, de un espacio vectorial de dimensión n, $x_i = (a_i^1, ..., a_i^n)$, $1 \leq i \leq p$, si los coeficientes a_i^j son nulos para $i > j$ con $a_i^i \neq 0$ (es decir, si colocamos los vectores en columna, la matriz obtenida es tal que por encima de la diagonal principal, los elementos son todos nulos), entonces los vectores son independientes (es una condición suficiente, pero no necesaria); . Análogamente, si los coeficientes a_i^j son nulos para $i < j$ con $a_i^i \neq 0$ (es decir, si colocamos los vectores en columna, la matriz obtenida es tal que por debajo de la diagonal principal, los elementos son todos nulos), también son independientes.

b) El rango de un sistema de vectores no varía si a uno de ellos le sumamos una combinación lineal de los demás, por lo tanto para investigar las dependencia o no de los vectores dados los colocaremos en columna yuxtaponiéndolos y haremos operaciones elementales de fila o columna para conseguir los ceros necesarios para conocer el rango de la matriz, es decir la dimensión del subespacio que engendran

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x_1' & x_2' & x_3' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} x_1' = x_1\,; & x_2' = -2x_1 + x_2\,; & x_3' = -x_1 + x_3; \\ x_1'' = x_1'\,; & x_2'' = x_2'\,; & x_3'' = -x_2' + x_3'; \end{array}$$

Los tres vectores cumplen la condición establecida en a), luego son independientes.

7. Hallar $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ para que $(\lambda, \mu, -37, -6) \in \mathbf{R}^4$ pertenezca al subespacio $F \subset \mathbf{R}$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$.

Solución:

Para que el vector $(\lambda, \mu, -37, -6)$ pertenezca a F es condición necesaria y suficiente que pueda ponerse en combinación lineal de los generadores de F :

$$(\lambda, \mu, -37, -6) = a(1, 2, -5, 3) + b(2, -1, 4, 7)$$

obligando pues a la compatibilidad del sistema resultante

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda = & a + 2b \\ \mu = & 2a - b \\ -37 = & -5a + 4b \\ -6 = & 3a + 7b \end{array}\right\} \qquad a = 5, \quad b = -3, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 13$$

luego el vector $(\lambda, \mu, -37, -6) \in F$ si y sólo si $\lambda = -1$ y $\mu = 13$.

8. Sea $E = \mathbf{R}^2$ y W el subespacio engendrado por el vector $(1, 1)$. Si U es el subespacio engendrado por el vector $(0, 1)$. Probar que E es suma directa de W y U. Sea ahora U' el subespacio engendrado por el vector $(3, 1)$. Probar que también se verifica $E = W \oplus U'$ (no unicidad del complementario).

Solución:

Recordemos que si F, G son subespacios de E; estos forman suma directa si y sólo si

$$F \cap G = \{0\}$$

Si F y G forman suma directa y además se verifica que

$$F + G = E$$

diremos que E es *suma directa* de estos dos subespacios y lo notaremos por $F \oplus G$. Si E es de dimensión finita y F y G forman suma directa, para que $F + G = E$ basta comprobar que

$$dim\ F + dim\ G = dim\ E$$

Tomemos pues $x \in W \cap U$, es $x = \lambda(1,1)$ por ser de W, y $x = \mu(0,1)$ por ser de U.

Identificando $\lambda(1,1) = \mu(0,1)$ es

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0,$$

luego $x = 0$ y por tanto la suma es directa. Puesto que $dim\ E = 2$ y $dim\ W = dim\ U = 1$ se tiene

$$dim\ W + dim\ U = dim E$$

luego, en efecto, $E = W \oplus U$.

Sea ahora $y \in W \cap U'$ como antes: $y = \lambda(1,1) = \mu(3,1)$, de donde

$$\lambda = 3\mu \qquad \lambda = \mu$$

y de aquí se deduce $\lambda = \mu = 0$, es decir, $y = 0$; luego W y U' forman también suma directa y $dim\ W + dim\ U' = 2 = dim\ E$, por tanto es también $E = W \oplus U'$

9. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios de una variable de grado inferior o igual a 3 a coeficientes en $\mathbf{R}$.

a) Probar que los polinomios $p \in P_3$ que verifican $p(1) = p'(1) = 0$ (siendo p' el polinomio derivado de p) forman un subespacio vectorial F de P_3. Dar su dimensión.

b) Los polinomios $(x-1)^2$ y $x(x-1)^2$, ¿son linealmente independientes? Dar una base de F.

c) Encontrar dos polinomios para completar la base de F y formar una base de P_3. Determinar un subespacio vectorial complementario E de F en P_3.

Solución:

a) Sean $p, q \in F$; veamos si $\lambda p - \mu q \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$(\lambda p - \mu q)(1) = \lambda p(1) - \mu q(1) = \lambda \cdot 0 - \mu \cdot 0 = 0$$
$$(\lambda p - \mu q)'(1) = (\lambda p' - \mu q')(1) = \lambda p'(1) - \mu q'(1) = \lambda \cdot 0 - \mu \cdot 0 = 0$$

Luego, en efecto, $\lambda p - \mu q \in F$, y F es pues un subespacio vectorial.

Sea $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in F$, luego

$$\left.\begin{aligned} p(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \\ p'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= -3a_3 - 2a_2 \\ a_0 &= 2a_3 + a_2 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + (-3a_3 - 2a_2)x + (2a_3 + a_2) = \\ &= a_3(x^3 - 3x + 2) + a_2(x^2 - 2x + 1) = a_3p_1(x) + a_2p_2(x) \end{aligned}$$

y $p_1(x), p_2(x) \in F$ ($p_1(1) = p_1'(1) = 0$ y $p_2(1) = p_2'(1) = 0$) por lo que son generadores.

Y son independientes, pues de

$$a_3p_1(x) + a_2p_2(x) = 0; \quad \text{se tiene} \quad a_3 = a_2 = 0$$

luego son base, y $dim\, F = 2$.

Otra forma:

De hecho, basta observar que si $p(x) \in F$ entonces $p(x) = (x-1)^2(ax+b) = ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 = ap_1(x) + bp_2(x)$ luego F es el conjunto de polinomios generado por $p_1(x), p_2(x)$ con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ independientes, por lo que F es un subespacio vectorial de dimensión 2 y estos dos polinomios determinan una base

b) Sea $\lambda(x-1)^2 + \mu x(x-1)^2 = 0$, reordenando términos tenemos

$$\mu x^3 + (\lambda - 2\mu)x^2 + (\mu - 2\lambda)x + \lambda = 0$$

y por tanto, $\lambda = \mu = 0$, es decir, son independientes. En a hemos observado, que $(x-1)^2$, $x(x-1)^2 \in F$ (pues F es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que tres tales que tienen a 1 como raíz de multiplicidad por lo menos dos), luego, son base de F .

c) Los vectores $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - 2x^2 + x$ son independientes ya que forman una base de F . 1, x son vectores independientes de $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - 2x^2 + x$, ya que

$$\begin{gathered} \lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \alpha(x^2 - 2x + 1) + \beta(x^3 - 2x^2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \\ \beta x^3 + (\alpha - 2\beta)x^2 + (\mu - 2\alpha + \beta)x + \alpha + \lambda = 0 \end{gathered}$$

de donde $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$

luego $G = [1, x]$ es un subespacio complementario de F.

10. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ relacionadas mediante:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 - 3b_2 + 4b_3 \\ a_2 = b_2 + b_3 \\ a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

a) Hallar la matriz que transforma las coordenadas de los vectores de la base B a la A.

b) Sea $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ una nueva base cuyas coordenadas respecto de B son:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - b_2 + b_3 \\ c_2 = -b_1 + b_2 \\ c_3 = b_2 - b_3 \end{cases}$$

Hallar la matriz de transformación de B a C y de A a C.

Solución:

a) Recordemos que la matriz S de paso de A a B es la matriz cuadrada cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de A expresados en la base B. Luego:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de paso de } A \text{ a } B$$

y esta matriz es tal que si componemos dicha matriz con un vector columna cuyos componentes son las coordenadas de un vector de $\mathbf{R}^3$ en la base A, el resultado es el mismo vector (vector columna) cuyos componentes son las coordenadas del vector, pero expresado en la base B.

Obviamente, la matriz de paso de B a A será

$$S^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que necesitamos la expresión de los vectores de la base B en función de la base A, por lo que tenemos que invertir el sistema dado).

b) Análogamente, la matriz de paso de C a B es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

luego, la matriz de paso de B a C es

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si componemos las matrices S y T^{-1}

$$T^{-1} \circ S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nos proporciona, obviamente, la matriz de paso de A a C.

11. Estudiar si los vectores $w_1 = (0,1,-2,1)$, $w_2 = (1,1,2,-1)$, $w_3 = (1,0,0,1)$, $w_4 = (2,2,0,-1)$ forman o no, una base de $\mathbf{R}^4$

Solución:

Para que formen base es condición necesaria y suficiente que sean linealmente independientes, es decir,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

lo que equivale a decir, que el sistema

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 + 2\cdot\lambda_4 &= 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 + 2\cdot\lambda_4 &= 0 \\ -2\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 + 0\cdot\lambda_4 &= 0 \\ 1\cdot\lambda_1 - 1\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 - 1\cdot\lambda_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tenga solución única; lo que equivale a que

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$D = -8 \neq 0$, luego, en efecto, son base.

Observamos que, para ver si n vectores de un espacio vectorial de dimensión n , forman base basta calcular el determinante de la matriz, formada por los vectores columna que expresan los vectores dados respecto una base y ver si es o no distinto de cero.

12. En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios E_1 y E_2 generados por los vectores (1,1,1,1) y (1,-1,1,-1) para E_1 , y (1,2,0,1) , (1,2,1,2) y (3,1,3,1) para E_2 .

Hallar las dimensiones del subespacio intersección y del subespacio suma.

Solución:

Observamos que $dim\, E_1 = 2$ ya que (1,1,1,1) , (1,-1,1,-1) son independientes.

Veamos cuál es el subespacio $E_1 \cap E_2$: si $v \in E_1 \cap E_2$, entonces

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1,-1) = \\ &= \mu_1(1,2,0,1) + \mu_2(1,2,1,2) + \mu_3(3,1,3,1) \end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 3\mu_2 + 4\mu_3 \\ 2\lambda_2 &= -\mu_2 + 2\mu_3 \end{aligned}\right\}$$

por lo que, dando valores cualesquiera a los escalares μ_2, μ_3 , obtendremos los vectores de $E_1 \cap E_2$, y puesto que hay dos parámetros libres $dim E_1 \cap E_2 = 2$

Por ejemplo, para $\mu_2 = -1,\ \mu_3 = 1$, se tiene

$$w_1 = (3,1,3,1) - (1,2,1,2) = (2,-1,2,-1) \in E_1 \cap E_2$$

para $\mu_2 = \mu_3 = 1$

$$w_2 = (1,2,1,2) + (3,1,3,1) = (4,3,4,3) \in E_1 \cap E_2$$

observamos que w_1 y w_2 son independientes por lo que $dim\, E_1 \cap E_2 \geq 2$ y puesto que

$$E_1 \cap E_2 \subset E_1 \quad \text{y} \quad dim\, E_1 = 2$$

se tiene que $E_1 \cap E_2 = E_1$ y $dim\, E_1 \cap E_2 = 2$.

Sabemos que $dim\,(E_1{+}E_2) = dim\, E_1{+}dim\, E_2{-}dim\,(E_1{\cap}E_2)$, luego $dim(E_1{+}E_2) = dim\, E_2$.

(Tenemos que $E_1 + E_2 = E_2$, pues $E_2 \subset E_1 + E_2$ y tienen la misma dimensión).

Capítulo 3 Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices

1. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 8 & -4 & -29 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

reducirla a una matriz diagonal mediante transformaciones elementales de filas y columnas.

Solución:

Tomamos la matriz B y restamos la primera fila a la segunda; y la primera al doble de la tercera, quedando

$$B \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

Tomamos ahora la matriz B_1 y restamos a la tercera fila el triple de la segunda, quedando

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = B_2$$

Sobre B_2, dividimos la tercera fila por 49

$$B_2 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_3$$

Sobre B_3, sumamos a la segunda fila dieciséis veces la tercera y a la primera trece veces la tercera

$$B_3 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_4$$

Sobre B_4, sumamos a la primera fila cinco veces la segunda y tenemos

$$B_4 \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_5$$

que es ya diagonal; podemos seguir reduciendo dividiendo la primera fila por 8, obteniendo

$$B_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego $\quad B \sim I$.

2. Determinar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad A \in M_3(\mathbf{R})$$

por el *método del pivote*.

Solución:

Yuxtaponemos la matriz A y la matriz identidad I

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \overline{A}$$

y hacemos las transformaciones elementales de filas, necesarias para convertir A en I. Una vez terminado el proceso la matriz que aparece en el lugar que ocupaba I es la matriz A^{-1} inversa de A

$$\overline{A} \underset{(a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(b)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(c)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \underset{(d)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \vdots & 9 & -48 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(e)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -11 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A la tercera fila de $\overline{A}$ le sumamos la primera, obteniendo $\overline{A_1}$

(b) A la tercera fila de $\overline{A_1}$ multiplicada por -1 le sumamos seis veces la segunda de $\overline{A_1}$ obteniendo $\overline{A_2}$

(c) A la segunda fila de $\overline{A_2}$ le restamos dos veces la tercera de $\overline{A_2}$, obteniendo $\overline{A_3}$

(d) A la primera fila de $\overline{A_3}$ le restamos ocho veces la tercera, obteniendo $\overline{A_4}$

(e) A la primera fila de $\overline{A_4}$ le restamos cuatro veces la segunda

3. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=7 \\ 2x+y-2z=-2 \\ 3x-y+z=6 \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema se expresa en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ con } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yuxtaponemos a la matriz A la matriz columna $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, obteniendo la matriz B y hacemos transformaciones elementales a B para poder comparar los rangos de A y B

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -8 & -16 \\ 0 & 5 & -8 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $rango A = 2$, $rango B = 3$, y por tanto, el sistema es incompatible.

4. Discutir según los valores de a, b, c, d el sistema a coeficientes en K siguiente

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z+4t=a \\ 2x+3y+4z+t=b \\ 3x+4y+z+2t=c \\ 4x+y+2z+3t=d \end{array}\right\}$$

suponiendo: a) $K = \mathbf{Q}$ b) $K = \mathbf{Z}$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\2&3&4&1&b\\3&4&1&2&c\\4&1&2&3&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&-1&-2&-7&-2a+b\\0&-2&-8&-10&-3a+c\\0&-7&-10&-13&-4a+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&1&2&7&2a-b\\0&0&4&-4&a-2b+c\\0&0&4&36&10a-7b+d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&1&2&7&2a-b\\0&0&4&-4&-a+2b-c\\0&0&0&40&11-9b+c+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}10&20&30&40&10a\\0&40&80&280&80a-40b\\0&0&40&0&a+11b-9c+d\\0&0&0&40&11a-9b+c+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}40&0&0&0&-9a+b+c+11d\\0&40&0&0&a+b+11c-9d\\0&0&40&0&a+11b-9c+d\\0&0&0&40&11a-9b+c+d\end{pmatrix}$$

a) para $K=\mathbf{Q}$ las transformaciones elementales realizadas son válidas; el sistema tiene solución única

$$x=\frac{-9a+b+c+11d}{40}\qquad y=\frac{a+b+11c-9d}{40}$$
$$z=\frac{a+11b-9c+d}{40}\qquad t=\frac{11a-9b+c+d}{40}$$

b) para $K=\mathbf{Z}$ las transformaciones elementales realizadas son válidas; para que haya solución los elementos $-9a+b+c+11d$, $a+b+11c-9d$, $a+11b-9c+d$, $11a-9b+c+d$ han de ser múltiplos de 40.

5. Estudiar según los valores de a el sistema

$$\left.\begin{aligned}ax+y+z&=a\\x+ay+z&=a\\x+y+az&=a\end{aligned}\right\}$$

resolviéndolo en los casos en que ello sea posible.

Solución:

Hallemos el valor del determinante de la matriz asociada al sistema

$$detA = det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

Luego, si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible y determinado y por el método de Cramer tenemos que la solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$

Si $a = -2$, $rangoA = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, y $rango\overline{A} = 3$ siendo $\overline{A}$ la matriz obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz columna $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$

$$rango\overline{A} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, $rangoA = rango\overline{A} = 1$, luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones es:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

6. Resolver en $M_2(\mathbf{R})$ el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ x+2y-3z &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 3x+5y-z &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = B$$

Tomamos la matriz A del sistema ampliada con la matriz B y procedemos a efectuar las oportunas transformaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 3 & 5 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 2 & 3 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 3 & 5 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 7 & \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 8 & \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 7 & \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la solución del sistema es

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Se dice que $A \in M_3(\mathbf{R})$ es mágica si al sumar los elementos de cada fila, de cada columna, de la diagonal principal, y de la diagonal secundaria, se obtiene siempre el mismo valor. Construir todas las matrices mágicas simétricas.

Solución:

Una matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$ luego las matrices mágicas simétricas serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

con $x+a+b = s$, $a+y+c = s$, $b+c+z = s$, $x+y+z = s$, $2b+y = s$ que interpretándolo como un sistema de cinco ecuaciones con siete incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x+y+z-s &= 0 \\ y+a+c-s &= 0 \\ x+a+b-s &= 0 \\ z+b+c-s &= 0 \\ y+2b-s &= 0 \end{aligned}\right\}$$

resulta un sistema homogéneo, por tanto compatible, y que vamos a resolver por transformaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quedando el sistema de rango cinco:

$$\left.\begin{aligned} 3x-3c &= 0\\ 3y-s &= 0\\ 3z+3c-2s &= 0\\ 3a+3c-2s &= 0\\ -3b+s &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x &= 3c\\ 3y &= s\\ 3z &= -3c+2s\\ 3a &= -3c+2s\\ 3b &= s \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= c\\ y &= \frac{s}{3} = b\\ z &= \frac{2s-3c}{3} = a \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz mágica simétrica buscada es

$$\begin{pmatrix} c & \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3}\\ \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3} & c\\ \frac{s}{3} & c & \frac{2s-3c}{3} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para todo $c, s \in \mathbf{R}$.

8. Discutir y resolver en $\mathbf{R}$ el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+5z &= 1\\ 4x+3y+6z &= 2\\ 5x+4y+7z &= 3\\ 6x+5y+8z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Escrito matricialmente, el sistema es

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 6\\ 5 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix} = B$$

Tomamos la matriz $\overline{A}$ obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz columna B y procedemos a efectuar transformaciones elementales de fila

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 6 & 2\\ 5 & 4 & 7 & 3\\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4 & -4\\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 12\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos $rango\, A = rango\, \overline{A} = 2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones es

$$\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3/2x+3y=4,\ -y+2z=-2\} = \{(2-\frac{3}{2}\lambda,\lambda,-1+\frac{1}{2}\lambda),\forall\lambda\in\mathbf{R}\}$$

9. Determinar X tal que $AX=B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\2&1\end{pmatrix}$$

Solución:

Tomemos la matriz A_0 obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz B y procedamos a efectuar transformaciones elementales de fila

$$A_0=\begin{pmatrix}1&1&|&2&1\\1&0&|&0&2\\1&1&|&2&1\end{pmatrix}\underset{(a)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&|&0&2\\1&1&|&2&1\\1&1&|&2&1\end{pmatrix}\underset{(b)}{\sim}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&|&0&2\\1&1&|&2&1\\0&0&|&0&0\end{pmatrix}\underset{(c)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&|&0&2\\0&1&|&2&-1\\0&0&|&0&0\end{pmatrix}$$

Y tenemos que $rang\, A=2$ y $rang\, A_0=2$ por lo tanto el sistema es compatible y determinado y la única solución es:

$$X=\begin{pmatrix}0&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

(a) Permutamos la primera con la segunda fila

(b) A la tercera fila le restamos la segunda

(c) A la segunda fila le restamos la primera.

10. Sean a, b, c, d, cuatro números reales estrictamente positivos. Demostrar que el sistema siguiente no posee ninguna solución en $\mathbf{R}$

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+t&=a\\x-y-z+t&=b\\-x-y+z+t&=c\\-3x+y-3z-7t&=d\end{aligned}\right\}$$

Solución:

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

luego el sistema no es de rango máximo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

luego el sistema es de rango tres y las tres primeras ecuaciones son independientes. Consideramos pues el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a-t \\ x-y-z &= b-t \\ -x-y+z &= c-t \end{aligned}\right\}$$

que es compatible y determinado por ser de rango máximo; y resolviendo por Cramer, tenemos

$$x = \frac{a+b}{2} - t; \quad y = t - \frac{b+c}{2}; \quad z = \frac{a+c}{2} - t$$

Para que el sistema inicial sea compatible estos valores de x, y, z hallados, han de satisfacer la cuarta ecuación; substituyendo pues, tenemos

$$-3(\frac{a+b}{2} - t) + (t - \frac{b+c}{2}) - 3(\frac{a+c}{2} - t) - 7t = d$$

luego la compatibilidad implica

$$-(3a + 2b + 2c) = d$$

y puesto que a, b, c, d son estrictamente positivos, esta igualdad es imposible y el sistema es incompatible.

11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbf{C}$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x+wy+w^2z &= b \\ x+w^2y+wz &= b \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que w es una raíz cúbica de la unidad.

Solución:

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix} = (w-1)^2 - (w^2-1)^2 = 3w(w-1)$$

(Nota: puesto que $w^3 = 1$, se tiene $w^4 = w, \dots$, y $w^3 - 1 = (w-1)(w^2+w+1)$).

Si $w(w-1) \neq 0$, el sistema es compatible y determinado para todo $a, b, \in \mathbf{C}$ y resolviendo el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & w & w^2 \\ b & w^2 & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a+2b}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & w^2 \\ 1 & b & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & w & b \\ 1 & w^2 & b \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

si $w(w-1) = 0$, se tiene que $w = 0$ o $w - 1 = 0$, pero si $w^3 = 1$, es $w \neq 0$, luego ha de ser $w - 1 = 0$, es decir $w = 1$, en cuyo caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

y para que el sistema sea compatible, $b - a = 0$, y el conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 / x + y + z = a\}$$

si $a \neq b$, el sistema es incompatible.

Capítulo 4 Aplicaciones lineales

1. Consideremos las aplicaciones entre **R**-espacios vectoriales siguientes:

a) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, x-y, z-1)$

b) $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (x+z, y-z)$

c) $h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $h(x,y) = (x+k, y+k, x+y)$ con $k \in \mathbf{R}$

Determinar si son o no lineales.

Solución:

Recordemos que una aplicación $f : E \longrightarrow F$ con E, F, **K**-espacios vectoriales es lineal, si y sólo si

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall v, w \in E, \quad f(v+w) = f(v) + f(w) \\ 2) & \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array}$$

comprobemos si, para cada caso, se verifican los axiomas:

a) 1) sean $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$f(v+w) = ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), (z_1+z_2)-1$$

$$\begin{aligned} f(v)+f(w) &= (x_1+y_1, x_1-y_1, z_1-1) + (x_2+y_2, x_2-y_2, z_2-1) = \\ &= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_1-y_1)+(x_2-y_2), (z_1-1)+(z_2-1)) = \\ &= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), (z_1+z_2)-2)) \neq \\ &\neq f(v+w); \end{aligned}$$

luego, no puede ser lineal, (y no hace falta probar 2)

b) 1) sean $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\begin{aligned}
g(v+w) &= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2)) \\
g(v)+g(w) &= (x_1+z_1, y_1-z_1)+(x_2+z_2, y_2-z_2) = \\
&= ((x_1+z_1)+(x_2+z_2), (y_1-z_1)+(y_2-z_2)) = \\
&= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2)) = g(v+w)
\end{aligned}$$

2) Sea $v = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda v = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

$$\begin{aligned}
g(\lambda v) &= g(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1 + \lambda z_1, \lambda y_1 - \lambda z_1) \\
\lambda g(v) &= \lambda(x_1+z_1, y_1-z_1) = (\lambda(x_1+z_1), \lambda(y_1-z_1)) = \\
&= (\lambda x_1 + \lambda z_1, \lambda y_1 - \lambda z_1) = g(\lambda v)
\end{aligned}$$

luego, g es lineal.

c) 1) Sean $v = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$, entonces $v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned}
h(v+w) &= ((x_1+x_2)+k, (y_1+y_2)+k, (x_1+x_2)+(y_1+y_2)) \\
h(v)+h(w) &= (x_1+k, y_1+k, x_1+y_1)+(x_2+k, y_2+k, x_2+y_2) = \\
&= ((x_1+k)+(x_2+k), (y_1+k)+(y_2+k), (x_1+y_1)+(x_2+y_2)) = \\
&= ((x_1+x_2)+2k, (y_1+y_2)+2k, (x_1+x_2)+(y_1+y_2))
\end{aligned}$$

para que $h(v+w) = h(v) + h(w)$, es necesario y suficiente que $2k = k$, es decir $k = 0$.

2) Sea pues $k = 0$; y sea $v = (x, y)$, entonces $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda v = (\lambda x, \lambda y)$

$$\begin{aligned}
h(\lambda v) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y) \\
\lambda h(v) &= \lambda(x, y, x+y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(x+y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y) = h(\lambda v)
\end{aligned}$$

luego, h es lineal si y sólo si $k = 0$.

Nota: no hace falta probar 2 para $k \neq 0$ ya que de todos modos la aplicación no sería lineal.

Observación: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre K de dimensiones (finitas) n y m respec. y una aplicación $f : E \Longrightarrow F$, $f(v) = f(x_1, \ldots, x_n) = w = (y_1, \ldots, y_m)$, con x_i e y_i las coordenadas de los vectores $v \in E$ y $w \in F$ respecto a bases de E y F previamente escogidas. f es lineal si y sólo si las coordenadas y_i son polinomios homogéneos de grado 1 en las variables $x_1, \dots, x_n$: $y_1 = a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n$, ..., $y_m = a_1^m x_1 + \dots a_n^m x_n$, y la matrriz de la aplicación en las bases dadas es

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

esto es cada fila de la matriz esta formada por los coeficientes del polinomio correspondiente.

2. Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ lineal, de la cual se sabe que

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2,3) = (6,4,31) \\ f(2,0,1) = (3,6,12) \\ f(0,1,0) = (0,1,2) \end{array}\right\}$$

Hallar la matriz de f en la base natural.

Solución:

Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base natural, para dar la matriz de f en dicha base necesitamos conocer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ expresados en la base natural

$$\begin{aligned} (1,2,3) &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ f(1,2,3) &= f(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = \\ &= (6,4,31) = 6e_1 + 4e_2 + 31e_3 \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned} f(2,0,1) &= 2f(e_1) + f(e_3) = 3e_1 + 6e_2 + 12e_3 \\ f(0,1,0) &= f(e_2) = e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

es decir, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = 6e_1 + 4e_2 + 31e_3 \\ 2f(e_1) + f(e_3) = 3e_1 + 6e_2 + 12e_3 \\ f(e_2) = e_2 + e_3 \end{array}\right\}$$

que, despejando $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= \frac{3}{5}e_1 + \frac{16}{5}e_2 + \frac{9}{5}e_3 = (\frac{3}{5}, \frac{16}{5}, \frac{9}{5}) \\
f(e_2) &= e_2 + 2e_3 = (0, 1, 2) \\
f(e_3) &= \frac{9}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2 + \frac{42}{5}e_3 = (\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{42}{5})
\end{aligned}$$

luego, la matriz será

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & 2 & \frac{42}{5} \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolver el problema:

Puesto que $(1,2,3),(2,0,1),(0,1,0)$ son independientes forman una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbf{R}^3$.

Fijando esta base en el espacio de partida, y fijando la natural en el espacio de llegada, la matriz de la aplicación en estas bases es

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 31 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

y tenemos el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^3_{v_i} \arrow[r, "B"] & \mathbf{R}^3_{e_i} \\
\mathbf{R}^3_{e_i} \arrow[u, "S^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Luego $A = BS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & 2 & \frac{42}{5} \end{pmatrix}$

3. Sea E un espacio vectorial sobre K de dimensión $n > 1$ ¿Qué desigualdad verifican los rangos de dos endomorfismos f, g de E tales que $g \circ f = 0$?

Solución:

Si $g \circ f = 0$, entonces para todo $x \in E$ se tiene $g(f(x)) = 0$, lo que implica que Imf está contenido en $Kerg$; entonces $dim\ Imf \leq dim\ Kerg$, lo que equivale a decir

$$rango\ f + rango\ g \leq n$$

(ya que $dim\,kerg + rango\ g = n$)

4. Demostrar que la aplicación $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x-2y, z+y)$ es lineal. Hallar su matriz en las bases naturales y su rango. Encontrar una base de $Kerg$ y otra de Imf .

Solución:

Veamos la linealidad:

Sean $v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = \\ &= ((x_1+x_2) - 2(y_1+y_2), (z_1+z_2) + (y_1+y_2)) = \\ &= ((x_1-2y_1) + (x_2-2y_2), (z_1+y_1) + (z_2+y_2)) = \\ &= (x_1-2y_1, z_1+y_1) + (x_2-2y_2, z_2+y_2) = f(v) + f(w) \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$ sea $v = (x,y,z)$

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - 2\lambda y, \lambda z + \lambda y) = \\ &= (\lambda(x-2y), \lambda(z+y)) = \lambda(x-2y, 2+y) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

luego, en efecto es lineal.

Hallemos la matriz de la aplicación, calculando la imagen de los vectores de la base natural de $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0) \\ f(0,1,0) &= (-2,1) \\ f(0,0,1) &= (0,1) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rango\ A = 2 = dim\ Imf = \mathbf{R}^2$ (= número de vectores columna de A que son linealmente independientes).

$$dim\ Kerf = 3 - rangof = 3 - 2, = 1$$

una base de Imf puede ser $\{(1,0),(0,1)\}$;

determinemos ahora una de $Kerf$

$v \in Kerf$ si y sólo si $f(v) = 0$. Sea pues $(x,y,z) \in Kerf$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $Kerf = \{(x,y,z)/x - 2y = 0, y + z = 0\}$ y una base puede ser: tomando $y = 1$ las componentes x, z son: $x = 2,\ z = -1$ y el vector de la base es $(2,1,-1)$.

De hecho, los dos primeros apartados y según la observación del problema 1 podemos resolverlo de la manera: f es lineal ya que la imagen de un vector dado en coordenadas, es un vector cuyas coordenadas son polinomios homogéneos de grado 1 en las variables del vector inicial. La matriz de la aplicación viene dada por los coeficientes de dichos polinomios.

5. Un endomorfismo $f \in L(E_2)$ tiene por matriz en la base $\{e_1, e_2\}$ de E_2 a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar su matriz en la base $\{e'_1, e'_2\}$ dada por

$$\begin{aligned} 2e'_1 &= e_1 + e_2 \\ 2e'_2 &= e_2 - e_1 \end{aligned}$$

Solución:

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^2 \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & \mathbf{R}^2 \\ E_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_A^{-1}"] & E_2 \arrow[u, "\varphi_B^{-1}"'] \arrow[d, "\varphi_A^{-1}"] \\ \mathbf{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[u, "\varphi_A"] & \mathbf{R}^2 \end{tikzcd}$$

La relación entre ambas matrices es

$$B = S^{-1}AS$$

siendo $S = \varphi_A^{-1}\varphi_B$ la matriz cambio de base que para la base $\{e_1,\ e_2\}$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Necesitamos conocer S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación lineal definida por

$$f(x, y) = (2x - y, x + y, 2y - x)$$

a) Dar la matriz de f en las bases naturales de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente; calcular $f(3, \frac{1}{2})$.

b) Dar una base, y la dimensión de $Ker f$ y de $Im f$.

c) Dar la matriz de f en las bases $\{v_1,\ v_2\}$, $\{u_1,\ u_2, u_3\}$, siendo

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = (2,1) \\ v_2 = (0,3) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (2,0,1) \\ u_3 = (0,0,2) \end{array}\right\}$$

Calcular $f(\frac{1}{2}v_1 + (-\frac{1}{3})v_2)$.

Solución:

a) $f(1,0) = (2,1,-1)$, $f(0,1) = (-1,1,2)$, luego la matriz de f en las bases naturales es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$f(3, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $Ker f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / f(x,y) = 0\}$, luego

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible y determinado luego $Ker f = \{(0,0)\}$ y $dim\ Ker f = 0$, por lo tanto

$$dim\ Im f = dim\ \mathbf{R}^2 - dim\ Ker f = 2 \qquad \text{y}$$
$$Im f = [(2,1,-1), (-1,1,2)]$$

c) Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3 \\ {\scriptstyle S}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{-1}} \\ \mathbf{R}^2_{\{v_i\}} & \xrightarrow{B} & \mathbf{R}^3_{\{u_i\}} \end{array}$$

siendo $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de la base $\{v_1,\ v_2\}$ a la natural y $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de la base $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ a la natural. Necesitamos T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$B = T^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

finalmente, si hacemos

$$\begin{aligned} f(\frac{3}{2}v_1 + (-\frac{1}{3}v_2)) &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ -\frac{13}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{7}{2}u_1 + u_2 - \frac{13}{4}u_3 \end{aligned}$$

observamos que $\frac{3}{2}v_1 + (-\frac{1}{3})v_2 = \frac{3}{2}(2,1) - \frac{1}{3}(0,3) = (3, \frac{1}{2})$; luego

$$\frac{7}{2}u_1 + u_2 - \frac{13}{4}u_3 = (\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -2)$$

7. Sean E, F, G tres K-espacios vectoriales (de dimensión finita), y sean

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow G \\ g &: F \longrightarrow G \end{aligned}$$

dos aplicaciones lineales. Demostrar que es condición necesaria y suficiente para que exista al menos una aplicación $h : E \longrightarrow F$ tal que $g \circ h = f$, que $Imf \subset Img$.

Solución:

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ f\Big\downarrow & & g \\ G & & \end{array}$$

Veamos que la condición es necesaria. Sea $y \in Imf$; existe pues $x \in E$, tal que $f(x) = y$;

si $g \circ h = f$ se tiene $g(h(x)) = f(x) = y$, es decir, existe $z \in F \quad (z = h(x))$, tal que $g(z) = y$. Por lo tanto, $Imf \subset Img$.

Veamos que la condición es suficiente. Consideremos $Kerg \subset F$ y sea $F_1 \subset F$, tal que $F = Ker\, g \oplus F_1$.

Dado $x \in E$, vamos a definir $h(x)$. Sea $f(x) \in Imf \subset Img$, luego existe $y \in F$ tal que $g(y) = f(x)$ con $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Kerg$, $y_2 \in F_1$. Luego $g(y) = g(y_2)$.

Definimos $h(x) = y_2$. h está bien definido, pues sean $y = y_1 + y_2, \overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$ tales que $g(y) = g(\overline{y})$; entonces $y - \overline{y} \in Kerg$; puesto que $y_2 - \overline{y_2} \in F_1$ y $y - \overline{y} \in Kerg$, se tiene que $y_2 - \overline{y_2} \in Kerg \cap F_1 = \{0\}$; luego $y_2 = \overline{y_2}$.

8. Sea $\mathbf{R}[x]$ el espacio de los polinomios a coeficientes reales. Definimos $D, M : \mathbf{R}[x] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$ mediante

1) $D(P(x)) = P'(x)$ polinomio derivado.

2) $M(P(x)) = xP(x)$

a) Probar que D y M son lineales.

b) ¿Es D nilpotente? (diremos que $f \in L(E)$ es nilpotente si existe $n \in \mathbf{N}$, tal que $f^n = 0$).

c) Probar que $DM - MD = I$.

d) Deducir de ello que $(DM)^2 = D^2M^2 - DM$.

Solución:

a) Veamos que se cumplen las dos condiciones

$$D(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) = D(p(x)+D(q(x))$$
$$D(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda D(p(x))$$

luego D es lineal.

$$M(p(x)+q(x)) = x(p(x)+q(x)) = xp(x)+xq(x) = M(p(x))+M(q(x))$$
$$M(\lambda p(x)) = x(\lambda p(x)) = \lambda xp(x) = \lambda M(p(x))$$

luego M es lineal.

b) Si existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $D^n = 0$, implica que para todo $p(x) \in \mathbf{R}[x]$, es $D^n p(x) = 0$

Sea $q(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_0$, con $a_{n+1} \neq 0$,

$$D^n(q(x)) = D^{n-1}(D(q(x)) = D^{n-1}(a_{n+1}(n+1)x^n + \ldots + a_1) =$$
$$= \ldots = a_{n+1}(n+1)! \neq 0$$

contradicción. Luego D no es nilpotente.

Nótese que $\mathbf{R}[x]$ es de dimensión infinita, y que si nos restringimos a $D_{|\mathbf{R}_n[x]}$: $\mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}_n[x]$ entonces sí que es nilpotente, pues $D^{n+1} = 0$

c) Dadas $f, g \in End(E)$ entonces $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E \; f(x) = g(x)$, en nuestro caso:

$$(DM - MD)(p(x)) = D(M(p(x))) - M(D(p(x))) =$$
$$D(xp(x)) - M(p'(x)) = p(x) + xp'(x) - xp'(x) = p(x) = I(p(x))$$

luego $DM - MD = I$

d) $(DM)^2 = (DM)(DM) = D(MD)M = D(DM - I)M = (D^2M - D)M = D^2M^2 - DM$

9. Sea E el espacio de las matrices cuadradas a coeficientes en $\mathbf{C}$ de orden 2. Definimos una aplicación f de E en $\mathbf{C}$ de la forma

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})) = a + d$$

a) Probar que f es lineal.

b) Probar que si A, B son dos elementos cualesquiera de E, se tiene $f(AB) = f(BA)$.

c) Demostrar que es imposible encontrar dos elementos de E tales que

$$AB - BA = I$$

d) Dar una base de $Ker\, f$.

Solución:

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(A + A') &= f(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}) = a + a' + b + b' = \\ &= a + d + a' + d' = f(A) + f(A') \\ f(\lambda A) &= f(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}) = \lambda a + \lambda d = \lambda(a + d) = \lambda f(A) \end{aligned}$$

luego f es lineal.

Otra forma: escogidas bases $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para E y 1 para $\mathbf{C}$, la aplicación se expresa:

$$f(a, b, c, d) = a + d$$

y ahora podemos aplicar la observación dada en el problema 1.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

$$f(AB) = aa' + bc' + cb' + dd' = a'a + b'c + c'b + d'd = f(BA)$$

c) Puesto que $f(AB) = f(BA)$ se tiene que $f(AB - BA) = 0$, o sea que, para todo A, $B \in E$ se tiene que $AB - BA \in ker\, f$. Si $I = AB - BA$ para unas ciertas matrices A, B se tendría $I \in ker\, f$, pero $f(I) = 2 \neq 0$; luego, para todo A, $B \in E$ es $AB - BA \neq I$.

(Comparar dicho resultado con el hallado en el apartado c, del problema anterior).

d) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in ker\, f$ es $a = -d$; luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

$A_1, A_2, A_3 \in ker\, f$, generan $ker\, f$ y son linealmente independientes, luego son base de $ker\, f$.

10. Sea E un espacio vectorial sobre K, cuerpo conmutativo de característica distinta de dos. Diremos que $p \in End(E)$ es un proyector si y sólo si $p^2 = p$.

a) Comprobar que: p es proyector $\Leftrightarrow I - p$ es proyector.

b) Comprobar que: p es proyector $\Rightarrow Imp \oplus Kerp = E$

c) ¿ Es cierto el recíproco de b?

d) Si p_1, p_2 son proyectores, comprobar que $p_1 + p_2$ es proyector si y sólo si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

Solución:

a) $\Rightarrow$) $(I-p)^2 = I^2 + p^2 - Ip - pI = I^2 + p^2 - 2p \underset{(a)}{=} I + p - 2p = I - p$, luego si p es proyector $I - p$ también lo es.

(a) por ser p proyector

$\Leftarrow$) Puesto que $(I-p)^2 = I - p$, se tiene que $I + p^2 - 2p = I - p$, luego $p^2 - p = 0$, es decir, $p^2 = p$

b) Sea $x \in E$. Consideremos $x - p(x)$; se tiene que

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

luego $x - p(x) \in Kerf$.

Obviamente, $x = p(x) + x - p(x) \in Imp + Kerp$.

$$\Rightarrow E \subset Imp + Kerp \subset E \Rightarrow Imp + Kerp = E$$

Veamos que la suma es directa: sea $x \in Ker p \cap Im p$; se tiene $p(x) = 0$ y existe $y \in E$, tal que $p(y) = x$, luego $0 = p(x) = p^2(y) \underset{(a)}{=} p(y) = x$.

Entonces $E = Im p \oplus Ker p$

(a) por ser p proyector

c) Consideremos $E = \mathbf{R}^2$ y f tal que su matriz en la base natural sea $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se tiene $Im f = [(1,0)]$, $Ker f = [(0,1)]$, luego $\mathbf{R}^2 = Im f \oplus Ker f$. Sin embargo, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego f no es proyector.

Nota: En un espacio de dimensión finita E se tiene siempre que

$$dim\ E = dim\ Im f + dim\ Ker f$$

para todo $f \in End E$, pero esto no implica $E = Im f \oplus Ker f$. Para ello veamos un ejemplo:

Sea $\mathbf{R}^2$ y f tal que en la base natural sea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos $Im f = [(0,1)]$ y $Ker f = [(0,1)]$, luego $Im f = Ker f$ y no pueden formar sumar directa; pero

$$dim\, Im f + dim\, Ker f = 1 + 1 = 2 = dim\, \mathbf{R}^2$$

d) Sean p_1, p_2 proyectores. Si $p_1 + p_2$ es proyector $\Rightarrow (p_1 + p_2)^2 = p_1 + p_2$ pero

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1$$

luego $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$; luego $p_1 \circ p_2 = -p_2 \circ p_1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} p_1 \circ (p_1 \circ p_2) &= -p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \\ p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2 &= -(p_1 \circ p_2) \circ p_1 \end{aligned}$$

y componiendo esta última igualdad por p_1 por la derecha tenemos

$$(p_1 \circ p_2) \circ p_1 = -((p_1 \circ p_2) \circ p_1) \circ p_1 = -(p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_1) = -(p_1 \circ p_2) \circ p_1$$

luego $p_1 \circ p_2 \circ p_1 = -p_1 \circ p_2 \circ p_1 \Rightarrow 2p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0 \underset{(a)}{\Rightarrow} p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$; por lo que

$$p_1 \circ p_2 = -p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$$

luego $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$, y recíprocamente, si p_1, p_2 son proyectores y $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$, se tiene

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2$$

luego $p_1 + p_2$, es un proyector.

(a) aquí es donde interviene la hipótesis de $carac\ K \neq 2$

11. Sean $u_1 = (2, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, -2, 3)$, $u_4 = (6, -1, 6)$ vectores de $\mathbf{R}^3$ y sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal de la que conocemos $f(u_1) = (1, -1)$, $f(u_2) = (4, 1)$ y $f(u_3) = (3, 1)$.

a) ¿Es posible determinar $f(u_4)$?, ¿Por qué?

b) La aplicación f ¿será inyectiva? ¿será exhaustiva?

c) Calcular la matriz de f en las bases naturales de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ respectivamente.

d) Determinar una base de $Ker f$.

Solución:

a) Es posible hallar $f(u_4)$ ya que $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman base de $\mathbf{R}^3$.

(En efecto, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$) , por lo tanto

$u_4 = au_1 + bu_2 + cu_3$ y $f(u_4) = af(u_1) + bf(u_2) + cf(u_3)$

b) f no puede ser inyectiva, ya que

$$dim\ Ker f = dim\ \mathbf{R}^3 - dim\ Im f \geq 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$(dim\ Im f \leq 2$ puesto que $Im f \subset \mathbf{R}^2)$.

f será exhaustiva en caso de que $dim\ Im f = 2$. Veamos si es así: la matriz de f en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ y la natural de $\mathbf{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad rango\,A = 2 = rango\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matriz de f en las bases naturales será

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3_{u_i} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2 \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & A' \\ \mathbf{R}^3_{e_i} & & \end{array}$$

S es la matriz de cambio de base de $\{u_1, u_2, u_3\}$ a la natural $\{e_1, e_2, e_3\}$, y $A' = AS^{-1}$ con

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{20}{6} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

d) $Ker f = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / f(x,y,z) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{20}{6} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 20y + 18z &= 0 \\ -x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado de $rango\,, = 2$ cuyo conjunto de soluciones es

$$Ker f = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / y = -\frac{15}{16} z \;\; x = \frac{3}{16} z\} = [(3, 15, 16)]$$

12. Encontrar los valores de a para los cuales el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (x + ay - az, ax + y + z, -ax + ay + z)$ es un automorfismo.

Solución:

f será automorfismo si el determinante de su matriz asociada, en cualquier base, es distinto de cero. Busquemos pues la matriz de f en la base natural (por ejemplo).

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,a,-a) \\ f(0,1,0) &= (a,1,a) \\ f(0,0,1) &= (-a,1,1) \end{aligned}$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & 1 \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$$

y $det\, A = 1 - a - 3a^2 - a^3 = -(a+1)(a+1-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2})$, luego $det\, A \neq 0$ si y sólo si a es distinto de

$$-1, \quad -1+\sqrt{2}, \quad -1-\sqrt{2}$$

13. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

asociada a la aplicación lineal f definida sobre $\mathbf{R}^3$ respecto la base natural.

a) Hallar los subespacios $Im\, f$ y $Ker\, f$.

b) Hallar una base de $\mathbf{R}^3$ para la cual la matriz de f en dicha base sea

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Recordando la definición de $Im\, f$ y de $Ker\, f$:

$$\begin{aligned}
Imf &= \{y \in \mathbf{R}^3 / \exists x \in \mathbf{R}^3 \quad \text{con} \quad f(x) = y\} = \\
&= [f(1,0,0),\, f(0,1,0),\, f(0,0,1)] = \\
&= [(0,0,0),\, (2,0,0),\, (1,3,0)] = [(2,0,0),(1,3,0)] \\
Kerf &= \{x \in \mathbf{R}^3 / f(x) = 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2y + z &= 0 \\ 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow Kerf = [(1,0,0)]$$

De hecho, observando la matriz A que es de $rango\, 2$ y la primera columna es idénticamente nula, ya podemos afirmar que $Kerf = [(1,0,0)]$

b) Buscamos $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$, $v_3 = (z_1, z_2, z_3)$ tales que formen base, y si

$$S = , \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

entonces $SB = AS$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} x_2 = x_3 = y_3 &= 0 \\ 2y_2 &= x_1 \\ 3z_3 &= y_2 \\ 2z_2 + z_3 &= y_1 \end{aligned}\right\}$$

y podemos tomar:

$$v_1 = (6,0,0) \quad v_2 = (1,3,0) \quad v_3 = (0,0,1)$$

14. Se considera la aplicación $f_k : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definida por

$$f_k(x,y,z) = ((2-k)x + (k-1)y,\, 2(1-k)x + (2k-1)y,\, kz)$$

a) Determinar la matriz de f_k asociada a la base natural de $\mathbf{R}^3$

b) Determinar $Ker f_k$

c) Supuesto $k(k-1) \neq 0$, demostrar que la matriz M_k puede ponerse de la forma $M_k = A + kB$ donde A y B son dos matrices a determinar, y dar la expresión de M_k^2 en función de A, B y k y deducir de ello una expresión para M_k^n

Solución:

a)

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2-k, 2(1-k), 0) \\ f(0,1,0) &= (k-1, 2k-1, 0) \\ f(0,0,1) &= (0,0,k) \end{aligned}$$

luego

$$M_k = \begin{pmatrix} 2-k & k-1 & 0 \\ 2(1-k) & 2k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

b) Observamos que $det\, M_k = k^2$, luego, si $k \neq 0$, es $rango f_k = 3$ y, por tanto, $Ker f_k = \{0\}$

Sea pues $k = 0$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el $Ker f_0$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

Luego $Ker f_0 = [(1,2,0),(0,0,1)]$

c)

$$M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + kB$$

$M_k^2 = (A+kB)^2 = A^2 + k^2B^2 + kAB + kBA$.

Observamos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

luego, $M_k^2 = A + k^2 B$, y por lo tanto, por inducción se concluye que $M_k^n = A + k^n B$, veámoslo:

Es válido para $n = 1$, supuesto cierto para $n-1$: $M_k^{n-1} = A + k^{n-1}B$; veámoslo para n :

$$\begin{aligned} M_k^n &= M_k M_k^{n-1} = M_k(A + k^{n-1}B) = (A + kB)(A + k^{n-1}B) = \\ &= A^2 + k^{n-1}AB + kBA + k^n B^2 = A + k^{n-1}0 + k0 + k^n B = A + k^n B \end{aligned}$$

Nota: si $k = 0$, entonces B podría ser cualquier matriz, y por tanto no tendría por qué ser $AB = BA = 0$. Y si $k = 1$, $M_k = I$ y $M_k^n = I$, si bien la expresión hallada tiene sentido.

15. Sea $\mathbf{R}_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Consideremos los endomorfismos $f, D : \mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}_n[x]$ siendo D el operador derivada: $D(p(x)) = p'(x)$ y f tal que $f(p(x)) = p(x) - p'(x)$. Demostrar que existe f^{-1} , y que se puede poner en función del operador D .

Solución:

Sea $p(x) \in Ker f \Rightarrow f(p(x)) = 0 = p(x) - p'(x)$, luego $p(x) = p'(x)$. Pero $grado\ p'(x) \leq grado\ p(x)$, y vale la igualdad, si y sólo si $grado\ p(x) = 0$, luego $p(x) = a$ polinomio constante, pero $p'(x) = (a)' = 0$. Luego $a = 0$ y $p(x) = 0$.

Por lo tanto, f es inyectiva y toda aplicación lineal inyectiva de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo es exhaustiva, y por tanto, existe f^{-1}.

Si f^{-1} se puede poner en función de D esta ha de ser:

$$f^{-1} = \lambda_0 D^0 + \cdots + \lambda_n D^n \quad \text{ya que} \quad D^{n+1} = 0$$

y ha de cumplirse que $f^{-1} \circ f = I$

Notar que: $f = I - D$

$$\begin{aligned} I = f^{-1} \circ f = & \ (\lambda_0 D^0 + \ldots + \lambda_n D^n) \circ (I - D) = \\ = & \ \lambda_0 D^0 + \ldots + \lambda_n D^n - \lambda_0 D^1 - \cdots - \lambda_n^{D^{n+1}} = \\ = & \ \lambda_0 I + (\lambda_1 - \lambda_0) D^1 + (\lambda_2 - \lambda_1) D^2 + \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) D^{n-1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 - \lambda_0 &= 0 \\ \cdots&\cdots \\ \lambda_n - \lambda_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n$$

y $f^{-1} = D^0 + \ldots + D^n$.

Capítulo 5 Determinantes

1. Dadas las permutaciones $s = (4,3,1,2)$, $t = (1,2,4,3)$, determinar las permutaciones $s \circ t$, $t \circ s$, s^{-1} , t^{-1} , así como el signo de cada una de ellas.

Solución:

Recordando que $s = (a,b,c,d)$ significa $s(1) = a$, $s(2) = b$, $s(3) = c$, $s(4) = d$, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} s \circ t(1) = s(t(1)) = s(1) = 4 \\ s \circ t(2) = s(t(2)) = s(2) = 3 \\ s \circ t(3) = s(t(3)) = s(4) = 2 \\ s \circ t(4) = s(t(4)) = s(3) = 1 \end{array}\right\} \qquad s \circ t = (4,3,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} t \circ s(1) = t(s(1)) = t(4) = 3 \\ t \circ s(2) = t(s(2)) = t(3) = 4 \\ t \circ s(3) = t(s(3)) = t(1) = 1 \\ t \circ s(4) = t(s(4)) = t(2) = 2 \end{array}\right\} \qquad t \circ s = (3,4,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{De} & s^{-1}(1) = i & \text{tenemos} & s(i) = 1 & \text{luego} & i = 3 \\ \text{De} & s^{-1}(2) = i & \text{tenemos} & s(i) = 2 & \text{luego} & i = 4 \\ \text{De} & s^{-1}(3) = i & \text{tenemos} & s(i) = 3 & \text{luego} & i = 2 \\ \text{De} & s^{-1}(4) = i & \text{tenemos} & s(i) = 4 & \text{luego} & i = 1 \end{array}\right\} s^{-1} = (3,4,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{De} & t^{-1}(1) = i & \text{tenemos} & t(i) = 1 & \text{luego} & i = 1 \\ \text{De} & t^{-1}(2) = i & \text{tenemos} & t(i) = 2 & \text{luego} & i = 2 \\ \text{De} & t^{-1}(3) = i & \text{tenemos} & t(i) = 3 & \text{luego} & i = 4 \\ \text{De} & t^{-1}(4) = i & \text{tenemos} & t(i) = 4 & \text{luego} & i = 3 \end{array}\right\} t^{-1} = (1,2,4,3)$$

Veamos cuál es el signo de cada una de estas permutaciones

$$\begin{array}{llll}
N(s) = 3+2 = 5 & \text{luego} \quad s & \text{es impar}: & \varepsilon\,(s) = -1 \\
N(t) = 1 & \text{luego} \quad t & \text{es impar}: & \varepsilon\,(t) = -1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(st) &= \varepsilon(s)\cdot\varepsilon(t) = (-1)\cdot(-1) = 1 \\
\varepsilon(ts) &= \varepsilon(t)\cdot\varepsilon(s) = (-1)\cdot(-1) = 1 \\
\varepsilon(s^{-1}) &= \varepsilon(s) = -1 \\
\varepsilon(t^{-1}) &= \varepsilon(t) = -1
\end{aligned}$$

2. Hallar el valor del determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Recordando la definición de determinante:

$$\text{si} \quad A = (a^i_j),\ det A = \sum_s \varepsilon(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3}$$

se tiene

$$|A| = +3\cdot1\cdot1 + 0\cdot0\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - 3\cdot0\cdot1 - 0\cdot1\cdot1 = 3+1-2 = 2$$

3. Hallar el valor del determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

a) Por la regla de Laplace, por ejemplo, por los menores de las dos primeras

columnas.

b) Por los elementos de una línea, por ejemplo, de la primera fila.

c) Obteniendo "a priori"ceros en una línea y desarrollando luego por los elementos de ésta (reducción del orden).

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Hay que formar sumas de productos de determinantes 2×2, extraídos de A de manera que las dos columnas del primer factor se correspondan con la primera y segunda columnas de A y las dos columnas del segundo factor se correspondan con la tercera y cuarta columnas de A. Cada factor tendrá dos filas cuya ordenación será una permutación de $\{1,2,3,4\}$.

Por ejemplo

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (4) \end{matrix}, \quad \text{etc.}$$

El signo de cada sumando será el signo de la correspondiente permutación de filas. Por ejemplo, el signo del primer sumando anterior es el signo de la permutación $(1,2,3,4)$, que es $+$, y el del segundo, el de la permutación $(1,3,2,4)$, que es $-$.

Pasemos pues al cálculo de $|A|$

$$\begin{aligned} |A| = &+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-1) - 11(-19) + 19.12 + 6(-22) - 10.13 + (-1).(-17) = 188. \end{aligned}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3.117 + 2.41 - 4.40 - 5.17 = 351 + 82 - 160 - 85 = 188.$$

c) Seguiremos un método que nos permite obtener el máximo número de ceros en una línea (fila o columna) a base de sumarle a dicha línea una combinación lineal de las restantes. Por ejemplo, como en la segunda columna hay un cero, empleamos esta columna para rellenarla de ceros

$$\begin{array}{lc} fila\, a & \longrightarrow \\ fila\, b & \longrightarrow \\ fila\, c & \longrightarrow \\ fila\, d & \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

substituimos la fila c por $c-d-a$ (combinación lineal de filas), es decir, le sumamos a la fila c las filas a y d cambiadas de signo)

$$\begin{array}{lc} fila\, a & \longrightarrow \\ fila\, b & \longrightarrow \\ fila\, c & \longrightarrow \\ fila\, d & \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -7 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

substituimos, por ejemplo, la fila d por $d + \frac{5}{2}a$, quedando

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -7 & 0 \\ \frac{19}{2} & 0 & 12 & \frac{19}{2} \end{vmatrix}$$

Desarrollando pues por la segunda columna tenemos

$$-(-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & -7 & 0 \\ \frac{19}{2} & 12 & \frac{19}{2} \end{vmatrix} \quad = \quad 2\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 19 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 188$$

4. Probar que

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x^2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

para $n \geq 2$ (Es el llamado determinante de Van der Monde).

Solución:

Vamos a probarlo por inducción.

Para $n = 2$

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Supongamos que es cierto para $m = n - 1$, veamos que también lo es para n

$$
\begin{aligned}
V_n &\underset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_2^2x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_3^n - x_3^{n-2}x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_nx_1 & x_n^3 - x_n^2x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix} \underset{(b)}{=} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_2^2x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_{n-1} & x_n^3 - x_n^2x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix} \underset{(c)}{=} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \underset{(d)}{=} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)V_{n-1} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)
\end{aligned}
$$

(a) restando a la segunda columna la primera multiplicada por x_1 y a la tercera la segunda por x_1, ..., y a la n-sima la (n-1)-sima por x_1.

(b) desarrollando por la primera fila.

(c) si una fila o columna está multiplicada por un escalar, éste sale fuera.

(d) el determinante es el de Van der Monde de orden n-1.

5. Calcular

$$
V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}
$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
V &\underset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{vmatrix} \underset{(b)}{=} \begin{vmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = \\
&= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)
\end{aligned}
$$

(a) restando la primera columna a la segunda y tercera.

(b) desarrolllando por la primera fila.

6. Calcular

$$\triangle = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$$

sabiendo que $z \in \mathbf{C}$ es tal que $z^5 = 1$ y $z \neq 1$

Solución:

$$\begin{aligned} \triangle = z \cdot z^2 \cdot (z+1) + 0 \cdot z \cdot 0 + 1 \cdot (-z)(-1) - 1 \cdot z^2 \cdot 0 - z \cdot z \cdot (-1) - 0 \cdot (-z)(z+1) = \\ = z^4 + z^3 + z^2 + z \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que

$$0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

se tiene

$$\text{ó} \quad \left.\begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{pero} \quad z \neq 1$$

luego $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, de donde $\triangle = -1$

7. Calcular el determinante de orden n siguiente

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando por la primera columna tenemos

$$\begin{aligned}
A_n =& 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
\underset{(a)}{=}& 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
=& 2A_{n-1} - A_{n-2}
\end{aligned}$$

(a) desarrollando el segundo determinante por la primera fila

Luego tenemos la relación de recurrencia siguiente

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

que nos permitirá deducir el valor de A_n : tenemos que para $n = 1, 2, 3$ es

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 3, \quad A_3 = 4$$

Supongamos pues que $A_{n-1} = n$; veamos que $A_n = n + 1$

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} = 2n - (n-1) = 2n - n + 1 = n + 1$$

luego $A_n = n + 1$

8. Sin efectuar el desarrollo, probar que

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Sabemos que no se altera el valor de un determinante si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás. Sumando a la tercera columna la segunda, nos queda

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \underset{(a)}{=} 0$$

(a) observando que hay dos columnas iguales

9. Calcular las raíces de la ecuación

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Solución:

Sumando a la primera columna todas las demás tenemos

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} n+x & 1 & \dots & 1 \\ n+x & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+x & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(a)}{=} (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1} = 0$$

(a) restando a cada columna, a partir de la segunda, la primera columna

Luego las raíces son $x = -n$ y $x = 0$ de multiplicidad n-1.

10. Sabiendo que 18887, 39865, 58752, 64872, 96526 son divisibles por 17, demostrar que D es también múltiplo de 17, siendo D el determinante siguiente

$$D=\begin{vmatrix}1&8&8&8&7\\3&9&8&6&5\\5&8&7&5&2\\6&4&8&7&2\\9&6&5&2&6\end{vmatrix}$$

sin calcular el valor del determinante.

Solución:

Sabemos que

$$\left.\begin{aligned}18887&=17a\\39865&=17b\\58752&=17c\\64872&=17d\\96526&=17e\end{aligned}\right\}\quad\text{con}\quad a,b,c,d\in\mathbf{Z}$$

$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{10^4}\begin{vmatrix}1\cdot10^4&8&8&8&7\\3\cdot10^4&9&8&6&5\\5\cdot10^4&8&7&5&2\\6\cdot10^4&4&8&7&2\\9\cdot10^4&6&5&2&6\end{vmatrix}=\\
&=\frac{1}{10^4}\begin{vmatrix}1\cdot10^4+8\cdot10^3+8\cdot10^2+8\cdot10+7&8&8&8&7\\3\cdot10^4+9\cdot10^3+8\cdot10^2+6\cdot10+5&9&8&6&5\\5\cdot10^4+8\cdot10^3+7\cdot10^2+5\cdot10+2&8&7&5&2\\6\cdot10^4+4\cdot10^3+8\cdot10^2+7\cdot10+2&4&8&7&2\\9\cdot10^4+6\cdot10^3+5\cdot10^2+2\cdot10+6&6&5&2&6\end{vmatrix}=\\
&=\frac{1}{10^4}\begin{vmatrix}18887&8&8&8&7\\39865&9&8&6&5\\58752&8&7&5&2\\64872&4&8&7&2\\96526&6&5&2&6\end{vmatrix}=\frac{1}{10^4}\begin{vmatrix}17a&8&8&8&7\\17b&9&8&6&5\\17c&8&7&5&2\\17d&4&8&7&2\\17e&6&5&2&6\end{vmatrix}=\\
&=\frac{17}{10^4}\begin{vmatrix}a&8&8&8&7\\b&9&8&6&5\\c&8&7&5&2\\d&4&8&7&2\\e&6&5&2&6\end{vmatrix}=\frac{17}{10^4}\cdot D'\end{aligned}$$

$D = \frac{17}{10^4} \cdot D'$; puesto que $mcd(17 \cdot 10^4) = 1$ y $D, D' \in \mathbf{Z}$, se tiene que $D' = 10^4 \cdot h$ y por tanto $D = 17h$

11. Determinar la inversa de la matriz $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}(A_{ij})$$

Siendo

$$A_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nota: $A_{ij} = A^t_{ji}$

Luego, $\det \quad A = 5$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$