Capítulo 6 Diagonalización de endomorfismos

1. Sea E un $\mathbf{R}$-espacio vectorial y f un endomorfismo de E cuya matriz en una determinada base $\{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar el polinomio característico $Q(t)$.

$$\begin{aligned} Q(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 3 & 1 & 0-t \end{vmatrix} = \\ = -t^3 + (trA)t^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})t + detA = \\ = -t^3 + 2t^2 + 4t + 7 \end{aligned}$$

Nota A_{ii} es el determinante del menor adjunto al elemento a_{ii} de la matriz A .

2. Determinar el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

dando sus raíces.

Solución:

$$
\begin{aligned}
det(A-tI) &= \begin{vmatrix} (a+b)^2-t & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2-t & a^2-t & b^2 & ab \\ (a+b)^2-t & b^2 & a^2-t & ab \\ (a+b)^2-t & ab & ab & a^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-t & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2-t & ab \\ 1 & ab & ab & a^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab-t & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab-t & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} a^2-ab-t & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab-t & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)\begin{vmatrix} a^2-ab-t & b^2-ab \\ b^2-ab & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)\begin{vmatrix} a^2+b^2-2ab-t & b^2-ab \\ a^2+b^2-2ab-t & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2)(a^2-b^2-t)((a-b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ab \\ 1 & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)((a-b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ab \\ 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)^2((a-b)^2-t)
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, las raíces son $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, (a^2-b^2) , y esta última de multiplicidad dos.

3. Si $A \in M_n(K)$ es una matriz inversible, demostrar que AB y BA tienen los mismos valores propios (siendo K un cuerpo conmutativo).

Solución:

En efecto,

$$\begin{aligned} det(AB - I) &= det(ABAA^{-1} - \lambda IAA^{-1}) = det(ABAA^{-1} - A\lambda IA^{-1}) = \\ &= det(A(BA - \lambda I)A^{-1}) = detAdet(BA - \lambda I)detA^{-1} = \\ &= det(BA - \lambda I) \end{aligned}$$

4. Demostrar que si la matriz $A \in M_n(K)$ verifica $A^m = 0$, el único valor propio posible de A es el cero (donde K es un cuerpo conmutativo).

Solución:

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $\lambda \neq 0$ que sea valor propio de la matriz A , lo que equivale a que λ sea un valor propio del endomorfismo f del espacio vectorial K^n cuya matriz en determinada base es A y esto significa que existe un vector $v \in K^n$, $v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v \neq 0$

Y aplicando f a ambos miembros de la igualdad se tiene

$$f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$$

luego λ^2 es un valor propio no nulo de f^2 y por tanto de A^2

inductivamente tenemos que $f^m = \lambda^m v \neq 0$, en efecto:

Sabemos que es cierto para $m = 1, 2$ supongamos que lo es para $m - 1$ veamos que lo es para m

$$f(f^{m-1}v) = f(\lambda^{m-1}v) = \lambda^{m-1}f(v) = \lambda^{m-1}\lambda v = \lambda^m v$$

Por lo tanto tenemos que λ^m es valor propio no nulo de la matriz $A^m = 0$ lo cual es absurdo.

5. Se define $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ $\forall$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Comprobar que f es lineal y hallar su matriz en la base natural. Hallar el polinomio característico y los valores propios. ¿Es f diagonalizable?

Solución:

Veamos la linealidad:

$\forall v = (x_1, x_2, x_3),\ w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ y $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(v+w) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = f(v) + f(w) \\ f(\lambda v) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) = \lambda(x_1, x_2, 0) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

Determinemos la matriz de la aplicación f

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 \\ f(e_2) &= e_2 \\ f(e_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

luego la matriz de f en la base natural es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

El polinomio característico es:

$$det(f - tI) = (1-t)^2(-t) = -t^3 + 2t^2 - t$$

(obvio ya que la matriz es diagonal)

Los valores propios son los valores $\lambda \in \mathbf{R}$ tales que $\exists v \in \mathbf{R}^3$ $v \neq 0$ con $f(v) = \lambda v$ y estos valores son las raíces del polinomio característico:

$$(1-t)^2(-t) = 0 \quad t = 1 \text{ doble}, \quad t = 0$$

f diagonaliza puesto que $dim\, Ker(f - I) = 2$.

En (1) observamos ya que la base natural es la base de vectores propios, (f es la "proyección ortogonal"sobre el plano horizontal XY), y en (2) vemos que la matriz es diagonal.

6. Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 2 & 8 \\ 20 & -3 & -8 \\ -60 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

hallando una base de vectores propios de f (endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz en la base natural es A).

Solución:

Busquemos el polinomio característico de A :

$$det(A - tI) = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t+1)^2(t-1)$$

por lo tanto

$$\mathbf{R}^3 = Ker(f+I)^2 \oplus Ker(f-I)$$

$$dim\, Ker(f+I) = 3 - rango \begin{pmatrix} -20 & 2 & 8 \\ 20 & -2 & -8 \\ -60 & 6 & 24 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

luego A diagonaliza y

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la nueva base será $\{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in Ker(f+I)$ y $v_3 \in Ker(f-I)$

$$\begin{aligned} Ker(f+I) &= \{(x,y,z)/ \begin{pmatrix} -20 & 2 & 8 \\ 20 & -2 & -8 \\ -60 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \\ &= \{(x,y,z)/ -10x + y + 4z = 0\} \end{aligned}$$

subespacio de dimensión dos, del que seleccionamos una base

$$v_1 = (2,0,5), \quad v_2 = (1,2,2)$$

$$ker(f-I) = \{(x,y,z)/ \begin{pmatrix} -22 & 2 & 8 \\ 20 & -4 & -8 \\ -60 & 6 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$
$$= \{(x,y,z)/ -11x+y+4z=0; \quad 10x-2y-4z=0\}$$

subespacio de dimensión uno del que seleccionamos una base

$$v_3 = (-1,1,-3)$$

7. Estudiar la diagonalización, según los distintos valores de $\alpha \in \mathbf{R}$, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dando en el caso en que ello sea posible una matriz S tal que $S^{-1}AS$ sea diagonal.

Solución:

Busquemos el polinomio característico:

$$det(A-tI) = -(t-1)^2(t-2)$$

luego los valores propios de A son $t_1 = 1$ doble y $t_2 = 2$.

Para que A diagonalice, ha de verificarse:

$$1 \le dim\ ker(A-t_iI) = \text{multiplicidad de la raíz } t_i$$

Estudiemos pues el caso $t_1 = 1$

$$dim\ Ker(A-I) = 3 - rango\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-1=2 & \text{para} \quad \alpha = 0 \\ 3-2=1 & \text{para} \quad \alpha \neq 0 \end{cases}$$

luego, sólo diagonaliza para $\alpha = 0$. Sea pues $\alpha = 0$ y busquemos la matriz S (matriz de los vectores propios).

Sean $\{v_1, v_2\}$ base de $Ker\ (A-I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sean pues $v_1 = (1,0,0)$, $\quad v_2 = (0,1,0)$

y $\{v_3\}$ base de $Ker\ (A+I)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x &= 0 \\ -y-z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sea pues $v_3 = (0,1,-1)$

luego $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y en efecto, se tiene que $D = S^{-1}AS$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: En este caso $S = S^{-1}$

8. Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ un endomorfismo diagonalizable que admite por vectores propios a los $v_1 = (-1,2,2)$, $v_2 = (2,2,-1)$, $v_3 = (2,-1,2)$ y sabemos que $f(5,2,5) = (0,0,7)$. Hallar los valores propios de f.

Solución:

Puesto que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ expresaremos los vectores $(5,2,5)$ y $(0,0,7)$ en la base formada por los vectores propios de f y aplicamos f, al primero

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} f(1,1,2) &= f(v_1 + v_2 + 2v_3) = f(v_1) + f(v_2) + 2f(v_3) = \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + 2\lambda_3 v_3 = \frac{14}{9}v_1 - \frac{7}{9}v_2 + \frac{14}{9}v_3 \end{aligned}$$

Y $\lambda_1 = \frac{14}{9}$ $\lambda_2 = -\frac{7}{9}$ $\lambda_3 = \frac{7}{9}$ ya que $\{v_i\}$ es una base del espacio y la expresión de un vector en una determinada base es única.

9. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^n$. Probar que si $\lambda \in \mathbf{R}$ es un valor propio de f entonces λ^p es un valor propio de f^p $\forall p \in \mathrm{N}$ y los subespacios propios respectivos E, E_p son tales que $E \subset E_p$. Dar un ejemplo en el que $E \neq E_p$.

Solución:

Sea λ un valor propio, existe pues un vector $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $f(x) = \lambda x$; luego

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

es decir λ^2 es valor propio de f^2 de vector propio x .

Supongamos que hemos probado que también λ^{p-1} es valor propio de f^{p-1} de vector propio x , entonces

$$f^p(x) = f(f^{p-1}(x)) = f(\lambda^{p-1}x) = \lambda^{p-1}f(x) = \lambda^{p-1}\lambda x = \lambda^p x$$

luego λ^p es valor propio de f^p de vector propio x , y obviamente, para todo vector x propio de valor propio λ de f , podemos aplicarle el razonamiento anterior, y se tiene

$$E \subset E_p$$

Veamos que la igualdad en general es falsa; sea $f \in End(\mathbf{R}^3)$ tal que su matriz en la base natural es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\{e_3\}$ es el subespacio de vectores propios de valor propio cero. Sin embargo f^2 es tal que su matriz en la base natural es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\{e_2, e_3\}$ es el subespacio de vectores propios de valor propio cero y claramente

$$E \not\subset E_2$$

10. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar A^n , para todo $n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Si D es una matriz diagonal $D = (\lambda_{ii})$ se tiene claramente $D^n = (\lambda_{ii}^n)$

Si A es diagonalizable, existe S tal que $D = S^{-1}AS$ y

$D^n = (S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS$ luego $A^n = SD^nS^{-1}$

Veamos si A es diagonalizable:

$det(A - tI) = -(t+1)^2(t+5)$

los valores propios son $t = -1$ doble y $t = 5$.

$$dim\ Ker(A+I) = 3 - rango\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

luego A diagonaliza.

Busquemos la matriz S :

$v_1, \quad v_2 \in Ker(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y+z = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_1 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ v_2 &= (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \end{aligned}\right\}$$

$v_3 \in Ker(A - 5I)$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

luego

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Y

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 5^n \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$A^n = SD^nS^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}5^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & (-1)^n\frac{1}{3} + \frac{1}{3}5^n \\ \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & (-1)^n\frac{2}{3} + \frac{1}{3}5^n \end{pmatrix}$$

11. a) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

b) Sean $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$, $B \in M_{m,m}(\mathbf{C})$, $C \in M_{n,m}(\mathbf{C})$, tales que $AC - CB = \lambda C$. Probar que
$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad A^pC = C(\lambda I_m + B)^p$$

c) Sea $E = M_{n,m}(\mathbf{C})$ y f un endomorfismo de E definido de la forma $f(X) = AX - XB$ con $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$ y $B \in M_{m,m}(\mathbf{C})$ fijas. Probar que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un valor propio de f si y sólo si $\lambda = \mu_i - \nu_j$ con μ_i y ν_j valores propios de los endomorfismos de $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{C}^m$ asociados a las matrices A y B respectivamente.

Solución:

a) En efecto: $det\,(A-\lambda I)=det\,(A-\lambda I)^t=det\,(A^t-\lambda I)$

b) Veámoslo por inducción respecto a p. Se verifica claramente para $p=1$: de $AC-CB=\lambda\cdot C$ tenemos

$$AC=\lambda C+CB=C(\lambda I_m)+CB=C(\lambda I_m+B)$$

supongamos ahora que es cierto para p y veamos que lo es para $p+1$

$$\begin{aligned}A^{p+1}C&=AA^pC=A(C(\lambda I_m+B)^p)=(AC)(\lambda I_m+B)^p=\\&=(C(\lambda I_m+B))(\lambda I_m+B)^p=C(\lambda I_m+B)^{p+1}\end{aligned}$$

c) Sea $\{\mu_1,\dots\mu_n\}$ el conjunto de valores propios de A y $\{\nu_1,\dots,\nu_j\}$ el conjunto de valores propios de B

Sea μ_i un valor propio de A, existe v vector columna de $\mathbf{C}^n-\{0\}$ tal que $Av=\mu_i v$.

Sea ν_j un valor propio de B entonces, por a, es también valor propio de B^t, por lo que existe w vector columna de $\mathbf{C}^m-\{0\}$ tal que $B^tw=\nu_j w$ y por tanto $w^tB=\nu_j w^t$

Sea ahora $X=v\cdot w^t\in M_{n,m}(\mathbf{C})$;

$$\begin{aligned}f(X)&=AX-XB=Av\cdot w^t-v\cdot w^tB=\\&=\mu_i v\cdot w^t-\nu_j v\cdot w^t=(\mu_i-\nu_j)v\cdot w^t=(\mu_i-\nu_j)X\end{aligned}$$

por lo que $\mu_i-\nu_j$ es un valor propio de f

Recíprocamente

Sea $X\neq 0$ un vector propio de f de valor propio λ ($f(X)=\lambda X$)

Sea $P(t)=(-1)^n(t-\mu_1)\dots(t-\mu_n)$ (los μ_i no necesariamente distintos) el polinomio característico de A (recuérdese que $\mathbf{C}$ es algebraicamente cerrado por lo que todos los factores primos de $P(t)$ son de grado 1).

Por el teorema de Cayley-Hamilton $P(A)=0$ por lo que $P(A)X=0$. Ahora bien, por b, $P(A)X=XP(\lambda I_m+B)$.

Tenemos pues

$$\begin{aligned}0&=XP(\lambda I_m+B)=X(\lambda I_m-\mu_1 I_m)\dots(\lambda I_m-\mu_n I_m)=\\&=X((\lambda-\mu_1)I_m+B)\dots((\lambda-\mu_n)I_m+B)=XC,\qquad C\in M_{m,m}(\mathbf{C})\end{aligned}$$

X es una matriz no nula por lo que C no puede ser de rango máximo:

$$det\, C = \prod_{i=1}^{n} (det\, ((\lambda - \mu_i) I_m + B)) = 0$$

existe, pues, algún i para el cual $det\, ((\lambda - \mu_i) I_m + B) = 0$ es decir $-(\lambda - \mu_i)$ es un valor propio de B por lo que existe algún j para el cual $\nu_j = -(\lambda - \mu_i)$, es decir $\lambda = \mu_i - \nu_j$.

Capítulo 7 Forma reducida de Jordan

1. Hallar el polinomio anulador de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sin utilizar el polinomio característico.

Hay que buscar un polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ tal que $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$ sea la matriz nula.

Empecemos suponiendo que $P(t)$ es un polinomio de primer grado: $a_0 + a_1 t$ y planteemos $P(A) = a_0 I + a_1 A = 0$ es decir

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 0 \\ a_1 & 2a_1 & 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + 2a_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o sea} \quad a_0 = a_1 = 0$$

Esto nos dice que no puede formarse la matriz nula por combinación lineal no nula de I y A por lo que $P(t)$ no puede ser de primer grado.

Intentemos ahora con un polinomio de segundo grado $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica

$$\left.\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 0 \\ a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow a_0 = -a_1 = 4a_2$$

Puede tomarse $a_0 = 4$, $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, para tener $P(t)$ normalizado, por lo que

$$P(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

2. Sabiendo que un endomorfismo f de $\mathbf{R}^{11}$ tiene $(t+1)^2(t-4)^3(t+2)^6$ como polinomio característico y $(t+1)^2(t-4)(t+2)^3$ como polinomio anulador. ¿Cuáles son sus posibles formas de Jordan?

Solución:

De:

$$\begin{aligned} Q(t) &= (t+1)^2(t-4)^3(t+2)^6 \\ P(t) &= (t+1)^2(t-4)(t+2)^3 \end{aligned}$$

Se tiene la $1^{\underline{a}}$ descomposición:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{11} &= Ker(f+I)^2 \oplus Ker(f-4I) \oplus Ker(f+2I)^3 \\ &= E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \end{aligned}$$

Pasemos a la descomposición de los E_i en monógenos; el polinomio anulador de E_1 es $(t+1)^2$, luego la dimensión del monógeno mayor es 2 y coincide con el polinomio característico $(t+1)^2$, que nos dice que $dim\ E_1 = 2$, luego en E_1 hay un solo monógeno $E_1 = E_{11}$, y la matriz de f restringida a E_1 es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio anulador de E_2 es $(t-4)$, luego f restringido a E_2 diagonaliza, ya que la dimensión del monógeno mayor es 1 , y puesto que el polinomio característico restringido a E_2 es $(t-4)^3$, se tiene que la dimensión de E_2 es 3 , por lo que hay tres monógenos en E_2 de dimensión 1 y es $E_2 = E_{21} \oplus E_{22} \oplus E_{23}$ y la matriz de f restringida a E_2 es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio anulador de E_3 es $(t+2)^3$, luego la dimensión del monógeno mayor es 3 y puesto que el polinomio característico de E_3 es $(t+1)^6$, la dimensión de E_3 es 6 , luego no tenemos unívocamente determinada la descomposición de E_3 .

Las posibilidades son:

a) $E_{31} \oplus E_{32}$ con $dim\ E_{31} = dim E_{32} = 3$

b) $E_{31} \oplus E_{32} \oplus E_{33}$ con $dim E_{31} = 3$, $dim E_{32} = 2$ y $dim E_{33} = 1$

c) $E_{31} \oplus E_{32} \oplus E_{33} \oplus E_{34}$ con $dim E_{31} = 3$, $dim E_{32} = dim E_{33} = dim E_{34} = 1$.

Y la matriz f restringida a E_3 es

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & 0 & \\ & & & 1 & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & & \\ & & & & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

luego, las posibles formas de Jordan, son

$$a)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & \\ & & & & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & \\ & & & & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & & -2 & \\ & & & & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

3. ¿Es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & & \\ 1 & 3 & & & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & 1 & 3 & & & \\ & & & & 2 & 0 & \\ & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

reducida de Jordan de algún endomorfismo?

Solución:

Si lo fuese el polinomio anulador sería

$$P(t) = (-2 - 3t + t^2)(t - 2)^2$$

$(-2 - 3t + t^2)$ es el polinomio anulador de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pero $-2 - 3t + t^2$ no es primo:

$$(-2 - 3t + t^2) = (t - \frac{3 + \sqrt{17}}{2})(t - \frac{3 - \sqrt{17}}{2})$$

luego la matriz anterior no puede ser reducida de Jordan.

4. Hallar la forma reducida de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Hallemos el polinomio característico:

$$det(A - tI) = t^4$$

(Obvio ya que la matriz es triangular).

$$dim\ Ker(A - 0I) = 4 - rango\, A = 4 - 3 = 1 \text{ (no diagonaliza, pues } 1 \neq 4)$$
$$dim\ Ker(A - 0I)^2 = 4 - rango\, A^2 = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$
$$dim\ Ker(A - 0I)^3 = 4 - rango\, A^3 = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$
$$dim\ Ker(A - 0I)^4 = 4 - rango\, A^4 = 4 - rango\, 0 = 4$$

Luego, tenemos

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 1\} = dim\ Ker\ f = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 2\} = dim\ Ker\ f^2 - dim\ Ker\ f = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 3\} = dim\ Ker\ f^3 - dim\ Ker\ f^2 = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 4\} = dim\ Ker\ f^4 - dim\ Ker\ f^3 = 1$

luego hay un solo subespacio irreducible de $dim\ 4$ y la matriz reducida es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: esto ya se podía preveer, puesto que al ser

$$dim\ Ker(A - 0I) = dim\ Ker\ f = 1$$

el subespacio de vectores propios correspondiente al valor propio cero es de dim 1 y en cada subespacio monógeno hay un subespacio de dim 1 invariante, luego solo puede haber un monógeno.

5. Dado el endomorfismo de $\mathbf{R}^5$ cuya matriz en la base natural viene dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) polinomios característico y anulador

b) los subespacios monógenos correspondientes

c) una base de estos subespacios monógenos, diciendo qué vectores son

propios y escribir en esta base la matriz del endomorfismo.

Solución:

a) Polinomio característico

$$Q(t) = det(A - tI) = -(t-2)^5$$

veamos el anulador:

$$dim\ Ker(A - 2I) = 5 - rango(A - 2I) = 5 - 3 = 2$$

(por ser de dimensión dos habrá dos vectores propios linealmente independientes, con valor propio dos. Por tanto, como en cada subespacio monógeno hay un vector propio, habrá dos subespacios monógenos)

$$\begin{aligned} dim\ Ker(A-2I)^2 &= 5 - rango(A-2I)^2) = 5 - 1 = 4 \\ dim\ Ker(A-2I)^3 &= 5 - rango(A-2I)^3 = 5 \end{aligned}$$

luego $(t-2)^3$ anula a todo el espacio, luego al polinomio anulador es:

$$P(t) = (t-2)^3$$

b) Por ser $dim\ Ker(A-2I) = 2$, hay dos monógenos de $dim \geq 1$

$dim\ Ker(A-2I)^2 - dim\ Ker(A-2I) = 4-2 = 2$, hay dos monógenos de $dim \geq 2$

$dim\ Ker(A-2I)^3 - dim\ Ker(A-2I)^2 = 5-4 = 1$, hay un monógeno de $dim \geq 3$.

luego, hay un monógeno de $dim\, 3$, y un monógeno de $dim\, 2$

c) Hallemos una base del primer monógeno $\{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 \in Ker(A-2I)^3 = \mathbf{R}^5$, luego u_1 puede ser cualquier vector tal que $(A-2I)^2 u_1 \neq 0$ y puesto que

$$Ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z,t,k) / \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}k = 0\}$$

Podemos tomar por ejemplo $u_1 = (0,0,1,1,0)$, entonces

$$\begin{aligned} u_2 &= (A-2I)u_1 = (0,0,0,1,1) \\ u_3 &= (A-2I)^2 u_1 = (A-2I)u_2 = (1,0,0,0,1) \end{aligned}$$

y u_3 es vector propio ($(A-2I)u_3 = (A-2I)^3 u_1 = 0u_1 = 0$).

Hallemos ahora una base del segundo monógeno u_4, u_5 :

$u_4 \in Ker(A-2I)^2$ y $u_4 \notin Ker(A-2I)$

$$\begin{aligned} Ker(A-2I)^2 &= \{(x,y,z,t,k)/\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}k = 0\} \\ Ker(A-2I) &= \{(x,y,z,t,k)/ -x+y-z+t+k=0, x+y-z+t-k=0, \\ &\quad x-y+z+t-k=0, y=0\} \end{aligned}$$

Observamos que $u_2 \in Ker(A-2I)^2$, $u_2 \notin Ker(A-2I)$, luego tenemos que tomar la precaución de elegir u_4 de forma que u_4, $(A-2I)u_4 = u_5$ sean linealmente independientes de u_2, u_3 .

Sea pues

$$u_4 \;=\; (1,1,0,0,0)$$

y por lo tanto

$$u_5 \;=\; (A-2I)u_4 \;=\; (0,1,1,0,0)$$

y u_5 es vector propio.

Vayamos a determinar la matriz de f en la base $\{u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4,\, u_5\}$:

$$\begin{aligned} &(A-2I)u_1 = u_2 \Rightarrow Au_1 - 2u_1 = u_2 \Rightarrow Au_1 = 2u_1 + u_2 \\ &(A-2I)u_2 = u_3 \Rightarrow Au_1 - 2u_2 = u_3 \Rightarrow Au_2 = 2u_2 + u_3 \\ &(A-2I)u_3 = 0 \Rightarrow Au_3 - 2u_3 = 0 \Rightarrow Au_3 = 2u_3 \\ &(A-2I)u_4 = u_5 \Rightarrow Au_4 - 2u_4 = u_5 \Rightarrow Au_4 = 2u_4 + u_5 \\ &(A-2I)u_5 = 0 \Rightarrow Au_5 - 2u_5 = 0 \Rightarrow Au_5 = 2u_5 \end{aligned}$$

luego, la matriz es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y claramente $J = S^{-1}AS$, donde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f \in End(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz en la base natural es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $g \in End(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz en una cierta base: $B = \{v_1 , v_2 , v_3\}$ es

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Pueden ser f y g el mismo endomorfismo?

Solución:

Para que A_1 y A_2 puedan representar el mismo endomorfismo ha de existir una matriz S tal que $S^{-1}A_1S = A_2$

Veamos cómo podemos determinar dicha matriz: busquemos (si existen) las formas reducidas de Jordan de f y g . Si son el mismo endomorfismo, coincidirán y tendremos

$$A_1 = S_1^{-1} J S_1 \qquad A_2 = S_2^{-1} J S_2$$

con lo cual tendremos

$$\left.\begin{array}{l} S_1 A_1 S_1^{-1} = J \\ S_2 A_2 S_2^{-1} = J \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 A_1 S_1^{-1} = S_2 A_2 S_2^{-1} \quad \Rightarrow (S_1^{-1} S_2)^{-1} A_1 (S_1^{-1} S_2) = A_2$$

y $S = S_1^{-1} S_2$ es la matriz buscada ya que se verifica: $S^{-1} A_1 S = A_2$

Estudiemos pues A_1

$$\begin{array}{l} det(A_1 - tI) = -(t-1)^3 \\ dim\ Ker(A_1 - I) = 1 \end{array}$$

luego hay un solo monógeno y J será

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la base de Jordan es

$$\begin{array}{l} w_1 \in Ker(A_1 - I)^3 = \mathbf{R}^3 \quad w_1 \notin Ker(A_1 - I)^2, \quad \text{por ejemplo} \quad w_1 = (0,1,0) \\ w_2 = (A_1 - I) w_1 = (\frac{1}{2}, 0, 1) \\ w_3 = (A_1 - I)_2 w_1 = (A - I) w_2 = (1,0,0) \end{array}$$

$$\text{y} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasemos a estudiar, ahora, A_2

$$\begin{aligned} det(A_2 - tI) &= -(t-1)^3 \\ dim\, Ker(A_2 - I) &= 1 \end{aligned}$$

luego hay un solo monógeno y

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la base de Jordan es

$$\begin{aligned} & u_1 \in Ker(A_2 - I)^3 = \mathbf{R}^3,\ u_1 \notin Ker(A_2 - I)^2, \text{ por ejemplo } u_1 = (8, -5, 10) \\ & u_2 = (A_2 - I)u_1 = (1, -1, 1) \\ & u_3 = (A_2 - I)^2 u_1 = (A_2 - I)u_2 = (-3, 2, -4) \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto:

$$S = S_1^{-1} S_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sea $f = (D + I) : P_2(\mathbf{R}) \longrightarrow P_2(\mathbf{R})$ donde $P_2(\mathbf{R})$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos a coeficientes reales y D es la aplicación derivada;

a) determinar la forma reducida de Jordan así como la base para la cual la matriz adopta dicha forma

b) probar que f^{-1} es un polinomio en f y utilizar dicho resultado para determinar la matriz de f^{-1} en la base natural $\{x^2, x, 1\}$.

Solución:

a) En la base $\{x^2, x, 1\}$, la matriz de f adopta la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - tI) &= -(t-1)^3 \\ dimKer(A - I) &= 3 - rango(A - I) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

luego hay un solo monógeno y la matriz reducida de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan:

$$\begin{aligned} & v_1 \in Ker(A - I)^3 = \mathbf{R}^3; \quad v_1 \notin Ker(A - I)^2 = \{(x, y, z)/x = 0\} \\ & v_1 = (1, 0, 0) \\ & v_2 = (A - I)v_1 = (0, 2, 0) \\ & v_3 = (A - I)^2 v_1 = (A - I)v_2 = (0, 0, 2) \end{aligned}$$

luego la base es $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$.

b) El polinomio anulador de f es $(t-1)^3$, luego

$$(f - I)^3 = 0 \Leftrightarrow f^3 - 3f^2 + 3f - I = 0$$

luego

$$I = f^3 - 3f^2 + 3f \;=\; f(f^2 - 3f + 3I) \;=\; (f^2 - 3f + 3I)f$$

por lo que

$$f^{-1} \;=\; f^2 - 3f + 3I$$

Y la matriz A^{-1} es:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Hallar la forma normal de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallando la base de $\mathbf{R}^4$ en la cual la matriz del endomorfismo adopta dicha forma normal.

Solución:

Calculemos los polinomios característico y anulador de A

$$\begin{aligned} det(A - tI) \;&=\; det\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{smallmatrix}\right) - tI_2\right) det\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - tI_2\right) \;= \\ &=\; (t-1)^4 \\ dim\; Ker(A - tI) \;&=\; 4 - rango(A - I) \;=\; 4 - 2 \;=\; 2 \end{aligned}$$

luego hay dos monógenos

$$dim\ Ker(A-I)^2\ =4-rango(A-I)^2\ =\ 4-0=4=dim\ \mathbf{R}^4$$

luego son dos monógenos de $dim\ 2$ y la forma de Jordan es

$$J\ =\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Y $\mathbf{R}^4\ =E_1\oplus E_2$ con $dim\ E_i\ =\ 2$ para $i=1,2$

Busquemos la base de Jordan:

base de E_1:

$$\begin{aligned}&v_1\in Ker(A-I)^2,\quad v_1\notin Ker(A-I)\\&v_1\ =\ (1,0,0,0)\\&v_2\ =\ (A-I)v_1\ =\ (2,-4,7,-17);\end{aligned}$$

base de E_2:

$$\begin{aligned}&v_3\in Ker(A-I)^2,\quad v_3\notin Ker(A-I)\\&v_3\ =\ (0,1,0,0)\\&v_4\ =\ (A-I)v_3\ =\ (1,-2,1,-6)\end{aligned}$$

hay que tomar la precaución de que v_3, v_4 sean linealmente independientes de v_1, v_2.

9. Determinar la forma reducida de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz en la base natural es

$$A\ =\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\quad\text{con}\quad a\in\mathbf{R}$$

Solución:

Busquemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} det(A - tI) &= -(t-1)^2(t-2) \\ dim\ Ker(A - I) &= \begin{cases} 2 & a = 0 \\ 1 & a \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $a = 0$ f diagonaliza, y D es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para $a \neq 0$ el valor propio 1 nos da un único subespacio monógeno, y J es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan: distinguiremos dos casos

1) $a = 0$

$$v_1, \quad v_2 \in Ker(A - I) = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$$

elegimos $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (0, 1, 0)$

$$v_3 \in Ker(A - 2I) = \{(x, y, z)/x = 0,\ y + z = 0\}$$

elegimos $v_3 = (0, 1, -1)$.

2) $a \neq 0$

$$\begin{aligned} v_1 &\in Ker(A - I)^2 = \{(x, y, z)/x + ay + (a+1)z = 0\} \\ v_1 &\notin Ker(A - I) = \{(x, y, z)/ay + az = 0, \quad x + z = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{elegimos} \quad v_1 &= (a, -1, 0) \\ v_2 &= (A - I)v_1 = (-a, -a, a) \\ v_3 &\in Ker(A - 2I) \\ v_3 &= (0, 1, -1) \end{aligned}$$

10. Sea $A \in M_n(\mathbf{R})$ y sea H el $\mathbf{R}$-espacio vectorial generado por las matrices

$$\{I,\ A,\ A^2, \cdots,\ A^{n-1}\}$$

a) Demostrar que si $B \in H$ y B es inversible, entonces $B^{-1} \in H$.

b) Si $detA = 0$, probar que existe $B \in H, \quad B \neq 0$ tal que $AB = BA = 0$.

Solución:

a) Por el teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que el polinomio característico $\lambda^n + \lambda_1\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_n$ anula a la matriz:

$$A^n + \lambda_1 A^{n-1} + \cdots + \lambda_n I = 0$$

por lo que $A^n = \sum_{i=1}^n -\lambda_i A^{n-i} \in H$, con lo cual $A^m \in H \, \forall m \geq n$, y tiene sentido la aplicación:

$$\begin{aligned} f : &H \longrightarrow H \\ &C \longrightarrow B \cdot C \end{aligned}$$

f es lineal, pues

$$\begin{aligned} f(C_1 + C_2) = B(C_1 + C_2) = BC_1 + BC_2 = f(C_1) + f(C_2) \\ f(\lambda C) = B \cdot (\lambda C) = \lambda B \cdot C = \lambda f(C) \end{aligned}$$

f es inyectiva, pues si $BC_1 = BC_2$, al ser B inversible, tenemos $B^{-1}(BC_1) = B^{-1}(BC_2)$ y por tanto, $C_1 = C_2$, y puesto que H es de dimensión finita f es biyectiva, luego $I \in H$ tiene antiimagen por la aplicación f; es decir, existe $C \in H$ tal que $f(C) = B \cdot C = I$, luego $C = B^{-1} \in H$

Nota: puesto que las matrices son de orden finito de $B \cdot C = I$, deducimos $C = B^{-1}$. Si fueran de orden infinito, podría ser que $B \cdot C = I$, pero $C \cdot B \neq I$.

b) Supongamos $A \neq 0$; sea $p(\lambda)$ el polinomio anulador de A tenemos que $p(A) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i A^i = 0$ y puesto que $det A = 0$ es $\lambda_0 = 0$ (ya que el polinomio anulador divide al característico y tiene sus mismas raíces), luego

$$\lambda_1 A + \cdots + \lambda_r A^r = 0$$

y sea pues $B = \lambda_1 I + \cdots + \lambda_r A^{r-1}$

B es distinta de cero, ya que si $B = 0$ el polinomio anulador de A sería $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r x^{r-1}$

Si $A = 0$, entonces $\forall B \in H$, tenemos $AB = BA = 0$

Capítulo 8 Análisis matricial

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular e^A, e^{tA}.

b) Utilizar dicho resultado para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4z \\ y' = 2x + 2z \\ z' = 4x + 2y + 3z \end{cases}$$

sabiendo que para $t = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Solución:

a) La exponencial de una matriz viene definida por:

$$e^A = \lim_{p \to \infty} (I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots \frac{1}{p!}A^p)$$

Puesto que existe S tal que $A = SDS^{-1}$, con D matriz diagonal, tenemos que:

$$\begin{aligned} e^A &= \lim_{p\to\infty}(SS^{-1} + SDS^{-1} + \frac{1}{2!}SD^2S^{-1} + \cdots + \frac{1}{p!}SD^pS^{-1}) = \\ &= S\lim_{p\to\infty}(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \cdots\frac{1}{p!}D^p)S^{-1} \\ &= Se^DS^{-1} \end{aligned}$$

veamos que en efecto existen las matrices S y D

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= -(\lambda+1)^2(\lambda-8) \\ dim\ ker(A+I) &= 2 \end{aligned}$$

luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

determinemos S

$\{v_1\,,v_2\}$ base de $ker(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x+y+2z=0 \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = (1,0,-1) \\ v_2 = (0,2,-1) \end{matrix}\right\}$$

$v_3 \in ker(A-8I)$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_3 = (2,1,2)$$

de donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$e^D = \lim_{p\to\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} (-1)^2 & & \\ & (-1)^2 & \\ & & (8)^2 \end{pmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \frac{1}{p!}\begin{pmatrix} (-1)^p & & \\ & (-1)^p & \\ & & (8)^p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-1} & & \\ & e^{-1} & \\ & & e^8 \end{pmatrix}$$

y

$$e^A = Se^DS^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & -4e^{-1}+4e^8 \\ -2e^{-1}+2e^8 & 8e^{-1}+e^8 & -2e^{-1}+2e^8 \\ -4e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & 5e^{-1}+4e^8 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \lim_{p\to\infty}(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{p!}t^pA^p) = Se^{tD}S^{-1}$$

y

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$e^{tA} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} & -4e^{-t}+4e^{8t} \\ -2e^{-t}+2e^{8t} & 8e^{-t}+e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} \\ -4e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{t}+2e^{8t} & 5e^{-t}+4e^{8t} \end{pmatrix}$$

b) Pasemos a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$X(t) = e^{tA}X(0) \quad \text{con} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

por lo que

$$X(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -11e^{-t} + 20e^{8t} \\ 8e^{-t} + 10e^{8t} \\ 7e^{-t} + 20e^{8t} \end{pmatrix}$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y - 4z \\ \frac{dy}{dt} &= -y + 6z \\ \frac{dz}{dt} &= -y + 4z \end{aligned} \right\}$$

Solución:

El sistema puede expresarse matricialmente

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir, $\frac{dX}{dt} = AX$.

Intentaremos efectuar un cambio de base de modo que la nueva matriz $J = S^{-1}AS$ sea lo más sencilla posible. Así, si $X = SZ$, tenemos $\frac{dX}{dt} = S\frac{dZ}{dt}$ y la ecuación queda $S\frac{dZ}{dt} = SJS^{-1}SZ$, es decir $\frac{dZ}{dt} = JZ$.

Busquemos la forma reducida de Jordan de A

$$
\begin{aligned}
&det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)\\
&dim\ ker(A-I) = 1
\end{aligned}
$$

luego no diagonaliza y

$$
J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

La base de Jordan es

$$
\begin{aligned}
&v_1 \in ker(A-I)^2 \quad v_1 \notin ker(A-I) \quad \text{sea pues} \quad v_1 = (1,3,1)\\
&v_2 = (A-I)(v_1) = (2,0,0)\\
&v_3 \in ker(A-2I) \quad \text{sea pues} \quad v_3 = (0,2,1)
\end{aligned}
$$

y la matriz S es

$$
S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

El sistema queda

$$
\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \\ \frac{dz_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}
$$

cuya solución es:

$$
\left.\begin{aligned}
z_1 &= C_1 e^t\\
z_2 &= (C_1 t + C_2)e^t\\
z_3 &= C_3 e^{2t}
\end{aligned}\right\}
$$

que volviendo a la base natural

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ (C_1 t + C_2) e^t \\ C_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x &= (2C_1 t + C_1 + 2C_2) e^t \\ y &= 3C_1 e^t + 2C_3 e^{2t} \\ z &= C_1 e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}\right\}$$

3. Sea f un endomorfismo del $\mathbf{R}$-espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ tal que su matriz en la base natural es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & -4 & -4 \\ 30 & 25 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la forma reducida de Jordan de f y la base de Jordan correspondiente.

b) Calcular e^{3A} .

Solución:

a) Determinemos la forma reducida de A

$$\begin{aligned} &det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)3(\lambda - 1) \\ &dim\ ker(A + I) = 2 \end{aligned}$$

luego no diagonaliza, y el valor propio -1 nos proporciona dos monógenos y la matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan

$$
\begin{aligned}
& v_1 \in ker(A+I)^2 \,, v_1 \notin ker(A+I) \,, v_1 = (1,0,0,0) \\
& v_2 = (A+I)v_1 = (0,12,30,0) \\
& v_3 \in ker(A+I) \quad \text{independiente con} \quad v_2, \quad \text{sea} \quad v_3 = (1,0,3,0) \\
& v_4 \in ker(A+I) \,, v_4 = (0,1,1,1)
\end{aligned}
$$

y la matriz cambio de base es

$$
S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 30 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 10 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}
$$

b) $e^{3A} = e^{3SJS^{-1}} = Se^{3J}S^{-1}$

$$
e^{3J} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 3e^{-3} & e^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3} \end{pmatrix}
$$

luego

$$
e^{3A} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 36e^{-3} & 31e^{-3} & -12e^{-3} & -19e^{-3}+e^{3} \\ 90e^{-3} & 75e^{-3} & -29e^{-3} & -46e^{-3}+e^{3} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3} \end{pmatrix}
$$

4. Determinar las funciones reales de una variable $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ tales que verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$
\left.\begin{aligned}
x' &= x - z + u \\
y' &= y + z \\
z' &= z \\
u' &= u
\end{aligned}\right\}
$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $u(0) = 2$.

Solución:

Escribiendo el sistema dado en forma matricial $AX = X'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ u' \end{pmatrix}$$

Busquemos la forma reducida de Jordan de la matriz A para simplificar el problema

$$\begin{aligned} &det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4 \\ &dim\ ker(A - I) = 2 \end{aligned}$$

luego hay dos monógenos

$$dim\ ker(A - I)^2 = 4$$

luego ambos monógenos son de dimensión dos, por lo que la matriz de Jordan adopta la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan

$$\begin{aligned} &e_1\,,\ e_3 \in ker(A - I)^2\,, \quad e_1,\ e_3 \notin ker(A - I) \\ &e_2 = (A - I)e_1\,, \quad e_4 = (A - I)e_3\,, \end{aligned}$$

de manera que e_1, e_2, e_3, e_4 sean independientes.

Sea pues

$$e_1 = (0,0,1,0) \Rightarrow e_2 = (-1,1,0,0)$$
$$e_3 = (0,0,0,1) \Rightarrow e_4 = (1,0,0,0)$$

luego

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e^{tA} = e^{tSJS^{-1}} = Se^{tJ}S^{-1}$

$$e^{tJ} = e_t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & te^t & e^t \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -te^t & te^t \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Hallar:

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

Solución:

Busquemos, para obtener de forma sencilla A^n, la forma reducida de Jordan de la matriz A

$$det(A - \lambda I) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{3})$$

luego A diagonaliza

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y la matriz cambio de base es:

$$\begin{aligned} v_1 &\in ker(A - \frac{1}{2}I), \quad v_1 = (1,3) \\ v_2 &\in ker(A + \frac{1}{3}I), \quad v_2 = (-1,2) \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= SD^nS^{-1} = S\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \\ & (-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}(\frac{1}{3})^n & \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}(\frac{1}{3})^n \\ \frac{6}{5}(\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n & \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n \\ \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2$ (es la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $\frac{1}{2} < 1$).

$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n = \frac{3}{4}$ (es la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $-\frac{1}{3}$, $|-\frac{1}{3}| < 1$).

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{5}{4} \\
\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{1}{4} \\
\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{3}{2} \\
\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular $senA$.

Solución:

Por definición:

$$senA \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Determinemos la forma reducida de Jordan de A

$$\begin{array}{l} det(A-\lambda I) = -(\lambda + I)^2 + (\lambda - 2) \\ dim\ ker(A+I) = 2 \end{array}$$

luego A diagonaliza.

La matriz cambio de base es

$v_1\,, v_2 \in ker(A+I)$ independientes $v_3 \in ker(A-I)$ sean pues

$$\begin{aligned} v_1 \ &= \ (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ v_2 \ &= \ (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{2}) \\ v_3 \ &= \ (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \end{aligned}$$

luego

$$S \ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} \ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$sen\,A \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n S D^{2n+1} S^{-1}}{(2n+1)!} \ = \ S(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D^{2n+1}}{(2n+1)!})S^{-1} \ =$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2)^{2n+1} \end{pmatrix} S^{-1} \ =$$

$$= S \begin{pmatrix} sen(-1) & 0 & 0 \\ 0 & sen(-1) & 0 \\ 0 & 0 & sen(2) \end{pmatrix} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}sen(-1) & -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) \\ -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) & \frac{2}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) \\ -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) & \frac{2}{3}sen(-1) + \frac{1}{3}sen(2) \end{pmatrix}$$

Apéndice I Grupos

1. Consideremos el subconjunto $GL_2(\mathbf{R})$ de $M_2(\mathbf{R})$ definido por

$$GL_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

a) Probar que $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ es un grupo no conmutativo, ($\cdot$ es el producto habitual entre matrices).

b) Consideremos el subconjunto $SL_2(\mathbf{R})$ de $M_2(\mathbf{R})$ definido por

$$SL_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Probar que $(SL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ es un subgrupo del grupo $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$.

Solución:

a) Primero veamos que la operación está bien definida, es decir dadas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in$ $Gl_2(\mathbf{R})$ entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbf{R})$$

para ello basta calcular $a_2 d_2 - b_2 c_2$

$$\begin{aligned} a_2 d_2 - b_2 c_2 &= (aa_1 + bc_1)(cb_1 + dd_1) - (ca_1 + bc_1)(ab_1 + bd_1) = \\ &= (ad - bc)(a_1 d_1 - b_1 c_1) \neq 0 \end{aligned}$$

Veamos que se verifican las propiedades de grupo y que falla la conmutatividad

Asociatividad

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} (aa_1 + bc_1)a_2 + (ab_1 + bd_1)c_2 & (aa_1 + bc_1)b_2 + (ab_1 + bd_1)d_2 \\ (ca_1 + dc_1)a_2 + (cb_1 + dd_1)c_2 & (ca_1 + dc_1)b_2 + (cb_1 + dd_1)d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a(a_1a_2 + b_1c_2) + b(c_1a_2 + d_1c_2) & a(a_1b_2 + b_1d_2) + d(c_1b_2 + d_1d_2) \\ c(a_1a_2 + b_1c_2) + d(c_1a_2 + d_1c_2) & c(a_1b_2 + b_1d_2) + d(c_1b_2 + d_1d_2) \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Existencia de elemento neutro

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$. $\exists \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y el elemento neutro es único: supongamos que existe un elemento $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R})$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} \text{por ser } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ neutro } \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{por ser } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ neutro } \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existencia de elemento simétrico

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R}) \quad ad - cb \neq 0$ luego $1/ad - bc \in \mathbf{R}$

Sea $\begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$ y es tal que:

$$\begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente para cada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$, el elemento simétrico es único. (¡Comprobarlo!)

Luego $GL_2(\mathbf{R})$ tiene estructura de *grupo*, veamos que no es abeliano.

Sean $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Sean $A, B \in Sl_2(\mathbf{R}) \subset GL_2(\mathbf{R})$ consideremos $B^{-1}A \in GL_2(\mathbf{R})$ y veamos si pertenece a $SL_2(\mathbf{R})$

$$det\,(B^{-1}A) = det\,B^{-1} det\,A = 1/det\,b \cdot det\,A = 1/1 \cdot 1 = 1$$

2. Sea G un grupo tal que para cada $x \in G, x^2 = e$, siendo e el elemento neutro del grupo G.

Probar que G es un grupo conmutativo.

Solución:

De $x^2 = e$ se tiene $x = x^{-1}$

Para todo par de elementos $x, y \in G$ se tiene $xy \in G$ luego

$$(xy)^2 = xyxy = e$$

premultiplicando dicha igualdad por x y postmultiplicando por y tenemos

$$\begin{aligned} xyxy &= e \\ xxyxyy &= xey \\ eyxe &= xy \\ yx &= xy \end{aligned}$$

luego el grupo es conmutativo.

3. Encontrar todos los subgrupos normales de $\mathcal{S}_3$

Solución:

$\mathcal{S}_3 = \{i, g_1, g_2, s_1, s_2, s_3\}$ con

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Componiendo de todas las formas posibles estos elementos, de dos en dos, obtenemos la siguiente tabla

$\circ$	i	g_1	g_2	s_1	s_2	s_3
i	i	g_1	g_2	s_1	s_2	s_3
g_1	g_1	g_2	i	s_3	s_1	s_2
g_2	g_2	i	g_1	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	i	g_1	g_2
s_2	s_2	s_3	s_1	g_2	i	g_1
s_3	s_3	s_1	s_2	g_1	g_2	i

(Nota: en la tabla $x \circ y$ es x columna, y fila)

Teniendo en cuenta que

a) el grupo es de orden seis,

b) el orden de sus subgrupos ha de ser divisor de seis,

c) un subconjunto de un grupo finito es subgrupo si este es cerrado con respecto la operación,

simplemente observando la tabla anterior, vemos cuáles son los subgrupos de $\mathcal{S}_3$,

Subgrupos de orden 1: $\{i\}$

Subgrupos de orden 2: $\{i, s_1\}, \{i, s_2\}, \{i, s_3\}$

Subgrupos de orden 3: $\{i, g_1, g_2\}$

Subgrupos de orden 6: $\mathcal{S}_3$

Son subgrupos normales los subgrupos $\{i\}, \mathcal{S}_3$ (los impropios), así como el de índice dos, que puesto que el orden de S_3 es seis, éste es $\{i, g_1, g_2\}$. Analicemos si algún subgrupo de orden dos es normal, estudiemos por ejemplo $\{i, s_1\}$ (los otros dos se estudian de la misma forma).

Se trata de comparar $a \circ \{i, s_1\}$, con $\{i, s_1\} \circ a$ con $a \in S_3$ un elemento cualquiera:

sea $a = s_2$

$$\begin{aligned} s_2 \circ \{i, s_1\} &= \{s_2, g_1\} \\ \{i, s_1\} \circ s_2 &= \{s_2, g_2\} \end{aligned}$$

conjuntos distintos por lo que el subgrupo no es normal, (ninguno de los tres subgrupos de orden dos es normal).

4. Sea S un subgrupo de un grupo G y sea $x \in G$. Probar que

$$x^{-1}Sx = \{x^{-1}yx \mid \forall y \in S\}$$

es un subgrupo de G

Solución:

Sean $y_1, y_2 \in S$ entonces $x^{-1}y_1x$ y $x^{-1}y_2x$ son dos elementos de $x^{-1}Sx$, veamos si se verifica la condición de subgrupo:

$$(x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2x) = (x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2^{-1}x) = x^{-1}y_1(xx^{-1})y_2^{-1}x = x^{-1}y_1y_2^{-1}x$$

las igualdades anteriores son todas ellas ciertas puesto que x, y_1, y_2 son elementos de G que tiene estructura de grupo.

Ahora bien, por ser S subgrupo $y_1 y_2^{-1} = y_3 \in S$, luego

$$(x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2x)^{-1} = x^{-1}y_3x \in x^{-1}Sx$$

y por lo tanto $x^{-1}Sx$ es un subgrupo de G

5. Sea $A \in M_2(\mathbf{C})$ y sea $S = \{X \in GL_2(\mathbf{C}) \mid XA = AX\}$.

a) ¿Es S un subgrupo de $GL_2(\mathbf{C})$?.

b) Determinar S para el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Sean $X_1, X_2 \in S$ luego verifican $X_1A = AX_1$ y $X_2A = AX_2$

Para ver si se verifica $X_1X_2^{-1}A = AX_1X_2^{-1}$ (condición de subgrupo), veamos primero que, si $X_2 \in S$ entonces $X_2^{-1} \in S$.

En efecto: premultiplicando y postmultiplicando la igualdad $X_2A = AX_2$ por X_2^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} X_2^{-1}X_2AX_2^{-1} &= X_2^{-1}AX_2X_2^{-1} \\ AX_2^{-1} &= X_2^{-1}A \\ X_2^{-1}A &= AX_2^{-1} \end{aligned}$$

y finalmente

$$X_1X_2^{-1}A \underset{(a)}{=} X_1AX_2^{-1} \underset{(b)}{=} X_1AX_2^{-1}$$

(a) $X_2^{-1} \in S$

(b) $X_1 \in S$

Luego en efecto S es subgrupo.

b) Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in S$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 - x_4 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad x_1 = x_4 \qquad x_3 = 0 \\
&\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ahora bien $X \in GL_2(\mathbf{C})$ luego $x_1 \neq 0$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \neq 0 \right\}$$

6. Probar que $(\mathbf{R}, *)$ con $a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ es un grupo isomorfo a $(\mathbf{R}, +)$.

Solución:

Veamos que $(\mathbf{R}, *)$ es un grupo abeliano.

1) La operación está bien definida ($a * b$ existe para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y es único)

Asociatividad

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= (\sqrt[3]{a^3+b^3})*c = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3+b^3})^3 + c^3} = \\
&= \sqrt[3]{(a^3+b^3)+c^3} = \sqrt[3]{a^3+(b^3+c^3)} = \sqrt[3]{a^3 + (\sqrt[3]{b^3+c^3})^3} = \\
&= a * (\sqrt[3]{b^3+c^3}) = a*(b*c)
\end{aligned}
$$

Existencia de elemento neutro

Si $e \in \mathbf{R}$ es tal que $\forall a \in \mathbf{R}$

$$a * e = e * a = a$$

entonces

$$\sqrt[3]{a^3 + e^3} = a \quad \Rightarrow \quad a^3 + e^3 = a^3 \quad \Rightarrow \quad e^3 = 0$$

por lo tanto $e = 0$ y evidentemente es único

Existencia de elemento simétrico

Si para cada $a \in \mathbf{R}$ existe $a_1 \in \mathbf{R}$ tal que

$$a * a^{-1} = a_1 * a = 0$$

entonces

$$0 = \sqrt[3]{a^3 + a_1^3} \quad \Rightarrow \quad a^3 = -a_1^3 \quad \Rightarrow \quad a = a_1$$

luego el elemento simétrico existe y es único

Conmutatividad

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{b^3 + a^3} = b * a$$

Luego en efecto es grupo abeliano, establezcamos ahora el isomorfismo con $(\mathbf{R}, +)$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbf{R}, *) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, +) \\ a & \longrightarrow & \varphi(a) = a^3 \end{array}$$

Dicha aplicación está bien definida ya que $\varphi(a)$ es un número real único, para cada $a \in \mathbf{R}$.

Es inyectiva pues $\varphi(a) = \varphi(b) \quad \Rightarrow \quad a^3 = b^3$ lo que implica $a = b$

Es además exhaustiva pues $\forall a \in \mathbf{R}$ existe $\sqrt[3]{a}$ tal que $\varphi(\sqrt[3]{a}) = a$

Esta aplicación es morfismo de grupos, ya que

$$\varphi(a * b) = \varphi(\sqrt[3]{a^3 + b^3}) = (\sqrt[3]{a^3 + b^3})^3 = a^3 + b^3 = \varphi(a) + \varphi(b)$$

por lo que φ es un isomorfismo.

7. Sea G un grupo. Probar que si existe un número entero n tal que $(ab)^n = a^n b^n$ para todo $a, b \in G$ entonces

$$G^n = \{x^n \mid x \in G\} \qquad \text{y} \qquad G_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$$

son subgrupos normales de G, y si G es un grupo finito entonces el orden de G^n coincide con el índice de G_n

Solución:

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow x^n \end{aligned}$$

y comprobemos que es morfismo de grupos

$$\varphi(ab) = (ab)^n \underset{(a)}{=} a^n b^n = \varphi(a)\varphi(b)$$

(a) por hipótesis

$Ker\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e\} = G_n$ luego G_n es subgrupo normal de G

$Im\varphi = \{y \in G \mid \exists x \in G \text{ tal que } \varphi(x) = y\} = \{x^n \mid x \in G\} = G^n$ luego G^n es un subgrupo de G, veamos que tambien es normal

$$\forall y \in G \quad yx^ny^{-1} = (yxy^{-1})^n \in G^n$$

Y por último $\varphi(G) = G^n \simeq G/G_n$, por lo que

$$ord\, G^n = ind\, G_n$$

8. Probar que un grupo $(G, \cdot)$ es abeliano si y sólo si la aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ definida por $\varphi(x) = x^{-1}$ es un automorfismo de G.

Solución:

La aplicación φ está bien definida puesto que cada elemento de G admite un inverso y este es único.

Supongamos ahora que φ es un automorfismo

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \qquad \forall a, b \in G$$

Por definición de φ tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \tag{1}$$

Por definición de elemento simétrico tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \tag{2}$$

que por (1) y (2)

$$\varphi(a \cdot b) = b^{-1} \cdot a^{-1} = \varphi(b) \cdot \varphi(a) = \varphi(b \cdot a)$$

y por ser φ automorfismo es

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Luego G es conmutativo.

Recíprocamente

La aplicación φ es biyectiva por ser G grupo (para cada elemento $a \in G$ existe simétrico y es único), veamos que el hecho de ser el grupo abeliano nos asegura que φ es morfismo

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \underset{(a)}{=} a^{-1} \cdot b^{-1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

(a) hipótesis de conmutatividad

9. Sea G un grupo. Probar que el orden de un elemento $a \in G$ es el mismo que el orden de su inverso a^{-1}

Solución:

Sea $n = ord\, a$ el orden de $a \in G$ es decir $a^n = e$. Puesto que todo elemento $a \in G$ conmuta con su inverso a^{-1} y este es tal que $aa^{-1} = e$, se tiene

$$\begin{aligned}(aa^{-1})^n &= e^n = e\\ (aa^{-1})^n &= aa^{-1} \dots aa^{-1} = a^n(a^{-1})^n\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$a^n(a^{-1})^n = e$$

Ahora bien $a^n = e$ luego $(a^{-1})^n = e(a^{-1})^n = e$. Por lo tanto si m es el orden de a^{-1} se tiene que m es divisor de n.

Análogamente tenemos $(a^{-1}a)^m = e^m = e$ de donde

$$a^m = ea^m = (a^{-1})^m a^m = e$$

por lo que n es un divisor de n.

Finalmente si n es divisor de m y m es divisor de n es que $n = m$.

Apéndice II Anillos de clases de restos

1. Sea $\mathbf{Z}$ el anillo de los números enteros, un subconjunto, $I \subset \mathbf{Z}$, diremos que es un ideal si y solamente si

$$\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in I \\ \forall x \in I,\ \forall a \in \mathbf{Z}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}x - y \in I \\ a \cdot x \in I\end{array}\right\}$$

Probar que todos los ideales de $\mathbf{Z}$ son de la forma

$$I = (a) = \{a \cdot m \mid \forall m \in \mathbf{Z}\}.$$

Solución:

Sea, a, el menor entero positivo perteneciente a I, para todo $m \in I$, tenemos

$$m = a \cdot c + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < a$$

puesto que $a \in I$ se tiene que $a \cdot c \in I$ y por tanto $r = m - a \cdot c \in I$; r es positivo o nulo y por pertenecer a I ha de ser nulo, luego $m = a \cdot c$ es decir $I = (a)$; (estos ideales se llaman principales).

2. a) Probar que la intersección de dos ideales de $\mathbf{Z}$ es siempre un ideal.

b) Probar, con un ejemplo, que la unión de dos ideales de $\mathbf{Z}$ no tiene por qué ser un ideal.

Solución:

a) $(a) \cap (b) = I$

Sean $x, y \in I$; veamos si $x - y \in I$. De $x, y \in I$ se tiene

$$\begin{array}{lll} x, y \in (a) & \text{de donde} & x - y \in (a) \\ x, y \in (b) & \text{de donde} & x - y \in (b) \end{array}$$

De $x - y \in (a)$, y $x - y \in (b)$ se tiene $x - y \in (a) \cap (b) = I$

Sean $x \in I$, $m \in \mathbf{Z}$; veamos si $m \cdot x \in I$.

De $x \in I$ se tiene

$$\begin{array}{lll} x \in (a) & \text{luego} & m \cdot x \in (a) \\ x \in (b) & \text{luego} & m \cdot x \in (b) \end{array}$$

De $m \cdot x \in (a)$, y $m \cdot x \in (b)$ se tiene $m \cdot x \in I$

(b) Consideremos los ideales $I_1 = (3)$, $I_2 = (2)$ y sea $(3) \cup (2)$.

Tenemos que $9 \in (3)$, $4 \in (2)$ y $9 - 4 = 5 \notin (3) \cup (2)$ puesto que $5 \notin (3)$ y $5 \notin (2)$, luego $(3) \cup (2)$ no es ideal.

3. Probar que $mcd(a, b) = d$, siendo d el generador del ideal suma de los ideales de $\mathbf{Z}$ generados por a, b respectivamente.

Solución:

Recordemos que

$$I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$$

es siempre un ideal.

En $\mathbf{Z}$ sabemos que los ideales son principales, luego

$$(a) + (b) = (d).$$

Veamos que d es en efecto $mcd(a, b)$.

$(a) \subset (d)$ pues $\forall m \in (a)$ $\ m + 0 = m \in (a) + (b) = (d)$.

Por el mismo razonamiento $(b) \subset (d)$.

De $(a) \subset (d)$ tenemos que $a \in (d)$, luego $a = d \cdot k_1$

De $(b) \subset (d)$ tenemos que $b \in (d)$, luego $b = d \cdot k_2$

de donde d es divisor común de a, y b; falta ver que es el máximo.

De $(d) = (a) + (b)$ tenemos que $d \in (a) + (b)$; luego existen $m, n \in \mathbf{Z}$ tales que

$$a \cdot m + b \cdot n = d$$

por lo que si d_1 es divisor de a y b lo es de $a \cdot m + b \cdot n$, es decir, lo es de d , por lo que $mcd(a,b) = d$.

4. Probar que $mcm(a,b) = c$, siendo $c \in \mathbf{Z}$ el generador del ideal intersección de los ideales generados por $a, b \in \mathbf{Z}$.

Solución:

Tenemos, por hipótesis, que $(a) \cap (b) = (c)$; veamos que c = mcm(a,b).

$$\text{De} \quad (a) \cap (b) = (c) \quad \text{tenemos} \begin{cases} (c) \subset (a), & \text{luego } c \in (a) \\ (c) \subset (b), & \text{luego } c \in (b) \end{cases}$$

de donde

$$\begin{array}{lll} c = a \cdot k_1 & \text{con} & k_1 \in \mathbf{Z} \\ c = b \cdot k_2 & \text{con} & k_2 \in \mathbf{Z} \end{array}$$

luego c es múltiplo de a y b. Veamos que es el mínimo. Sea h un múltiplo de a y b cualquiera

$$\begin{array}{lll} h = a \cdot h_1 & \text{de donde} & h \in (a) \\ h = b \cdot h_2 & \text{de donde} & h \in (b) \end{array}$$

y por tanto, $h \in (a) \cap (b)$, es decir $h = c \cdot h_3$, es también múltiplo de c.

5. Probar que para que $\mathbf{Z}/(n)$ sea cuerpo, es condición necesaria y suficiente que n sea primo.

Solución:

Supongamos que $\mathbf{Z}/(n)$ es cuerpo, es decir $\forall \overline{a} \in \mathbf{Z}/(n)$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, existe $\overline{b} \in \mathbf{Z}/(n)$ tal que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

Si n no fuera primo, existirían $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$; ambos distintos de n, tales que $n_1 \cdot n_2 = n$; por lo tanto $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = \overline{n} = \overline{0}$.

Puesto que $\overline{n}_1 \neq \overline{0}$ y $\mathbf{Z}/(n)$ por hipótesis es cuerpo, existe $\overline{m}$ tal que $\overline{n}_1 \cdot \overline{m} = \overline{1}$, luego $\overline{0} = \overline{0} \cdot \overline{m} = \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 \cdot \overline{m} = \overline{n}_1 \cdot \overline{m} \cdot \overline{n}_2 = \overline{1} \cdot \overline{n}_2 = \overline{n}_2$, luego $n_2 = \dot{n}$ y puesto que $n_2 \mid n$, se tiene $n_2 = n$ *contradicción*; luego n ha de ser primo, y la condición es necesaria.

Veamos que es también suficiente:

Sea $\overline{0} \neq \overline{a} = \{m \cdot n + a, \forall m \in \mathbf{Z}, \text{con} 0 < a < n\}$. Puesto que n es primo, $mcd(a, n) = 1$; por lo que existen $r, s \in \mathbf{Z}$, tales que $a \cdot r + n \cdot s = 1$ (recordar que $(a) + (n) = (1)$); luego $\overline{a \cdot r + n \cdot s} = \overline{1}$, o sea, $\overline{a} \cdot \overline{r} + \overline{n} \cdot \overline{s} = \overline{1}$; Pero $\overline{n} = \overline{0}$, por lo tanto $\overline{a} \cdot \overline{r} = \overline{1}$ y $\mathbf{Z}/(n)$ es cuerpo.

6. Determinar todos los divisores de cero de

a) $\mathbf{Z}/(12)$; b) $\mathbf{Z}/(18)$; c) $\mathbf{Z}/(24)$.

Solución:

Un elemento $\overline{a} \in \mathbf{Z}/(n)$ con $\overline{a} \neq \overline{0}$ es un divisor de cero si y solamente si existe $\overline{b} \in \mathbf{Z}/(n)$, $\overline{b} \neq \overline{0}$ tal que

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$$

Observamos que si $\overline{a}$ es divisor de cero, también lo es $\overline{b}$, y $a \cdot b = \dot{n}$.

a) $12 = 2^2 \cdot 3$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$; es decir, las clases de resto de los divisores propios de 12 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 12.

Observamos que $\overline{2} \cdot \overline{6} = \overline{0}$, $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$, $\overline{3} \cdot \overline{8} = \overline{0}$, etc.

b) $18 = 2 \cdot 3^2$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$, es decir, las clases de resto de los divisores propios de 18 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 18 .

Observamos que $\overline{2} \cdot \overline{9} = \overline{0}$, $\overline{4} \cdot \overline{6} = \overline{0}$, $\overline{8} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} \cdot \overline{9} = \overline{0}$, etc.

c) $24 = 2^3 \cdot 3$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{16}$, $\overline{18}$, $\overline{20}$, $\overline{22}$, $\overline{9}$, $\overline{15}$, $\overline{21}$, es decir, las clases de resto de los divisores propios de 24 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 24.

Observamos que $\overline{2}\cdot 12=\overline{0}$, $\overline{4}\cdot\overline{6}=\overline{0}$, $\overline{8}\cdot\overline{3}=\overline{0}$, $\overline{21}\cdot\overline{8}=\overline{0}$, etc.

7. Escribir las tablas de sumar y multiplicar de $\mathbf{Z}/(4)$ y resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=1\\2x+2y&=1\end{aligned}\right\}$$

Solución:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=1\\2x+2y&=1\end{aligned}\right\}\overset{(a)}{\Rightarrow}\quad 0x+y=2\quad\Rightarrow\quad y=2$$

$$\overset{(b)}{\Rightarrow}\qquad 2x+3\cdot 2=1\quad\Rightarrow\quad 2x+2=1\quad\Rightarrow\quad 2x=3$$

no tiene solución pues no existe ningún elemento x en $\mathbf{Z}/(4)$ tal que $2{\cdot}x=3$. Obsérvese que 2 no es inversible en $\mathbf{Z}/(4)$ (es un divisor de cero)

(a) sumando ambas ecuaciones.

(b) sustituyendo el valor de x en la primera ecuación.

8. Escribir la tabla de sumar y multiplicar del cuerpo $\mathbf{Z}/(5)$ y resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}x+2y&=1\\2x+y&=0\end{aligned}\right\}$$

Solución:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=1\\ 2x+y&=0\end{aligned}\right\} \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} 2x+4y&=2\\ 2x+y&=0\end{aligned}\right\} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} 4x+0y=2$$
$$\Rightarrow \quad 4x=2 \quad \Rightarrow \quad x=3$$
$$\stackrel{(c)}{\Rightarrow} \quad 2\cdot 3+y=0 \quad \Rightarrow \quad 1+y=0 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

(a) multiplicando la primera ecuación por 2.

(b) sumando ambas ecuaciones.

(c) sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación.

9. Descomponer en fracciones simples, sobre $\mathbf{Z}/(5)$ la fracción racional siguiente
$$\frac{4}{x^2+4x+3}$$

Solución:

Hallemos primero las raíces del denominador, haciendo uso de las tablas del ejercicio anterior:
$$(x^2+4x+3)(4)=1+1+3=0$$
$$(x^2+4x+3)(2)=4+3+3=0$$
luego $x^2+4x+3=(x-4)(x-2)=(x+1)(x+3)$, luego
$$\frac{4}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$
$$\frac{4}{(x+1)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A+B}{(x+1)(x+3)}$$
Igualando numeradores tenemos
$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ 3A+B&=4\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad A=2,\quad B=3$$