Cálculo. Problemas y soluciones

Capítulo 1. Números reales y complejos

1.- ¿A qué intervalos corresponden los siguientes subconjuntos de números reales?:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 6 < 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : x < x^2 - 12 < 4x\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} < 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} < 1\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{x-1} \geq 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : (2x+1)^6(x-1) \geq 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : (x^2+1)(x^2+4)(x^3-1) = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \leq 0\}$$

2.- Demostrar que si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces se verifica:

$$i) \quad |x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$ii) \quad |x| > a \Longleftrightarrow x < -a \ \text{ o } \ x > a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$iii) \quad x^2 \leq a \Longleftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3.- Encontrar los intervalos correspondientes a los siguientes subconjuntos de números reales:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : |x-5| < |x-1|\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x-2| \leq 3\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x| > 4\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : |x+2||x-2| > 4\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 2x + 1| \geq 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x|\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 5\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2\}$$

4.- Operar en el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$, según se indica:

$$(6-5i)(6+5i) \qquad (1-i)(1+2i)(1-3i)$$

$$\frac{1}{2-i} \qquad \frac{7-4i}{3+2i}$$

$$(2-3i)^2+(i+5)^2 \qquad i^3(1+i)^2-(2i-1)$$

$$\frac{i(7+3i)}{3-4i} \qquad \frac{(1-i)^3(\sqrt{3}+i)}{1-\sqrt{3}i}$$

5.- Expresar en forma trigonométrica y polar los siguientes números complejos:

$$-1 \qquad -i$$

$$1+i \qquad \sqrt{3}+i$$

$$1-\sqrt{3}i$$

6.- Expresar en forma cartesiana los siguientes números complejos:

$$2e^{i\pi} \qquad 3e^{i\pi/3}$$

$$e^{-i\pi/2} \qquad \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$\sqrt{5} \qquad e^{i\pi/6}$$

7.- Calcular las raíces complejas siguientes:

$$\sqrt[5]{1} \qquad \sqrt[4]{-1}$$

$$\sqrt[3]{1-i} \qquad \sqrt[4]{i/2}$$

8.- Calcular las siguientes potencias:

$$(-1+i)^3 \qquad (1-\sqrt{3}i)^4 \qquad (5-12i)^2$$

9.- Encontrar las potencias n-ésimas de la unidad imaginaria i, es decir, i^n , $n \in \mathbb{N}$.

10.- Si a es un número real, demostrar que:

$$\cos a = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \qquad \operatorname{sen} a = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$$

11.- Resolver las siguientes ecuaciones en el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$:

$$x^2 + 4x + 29 = 0 \qquad z^4 + z^2 + 1 = 0$$
$$u^4 - 1 = 0 \qquad t^3 + t^2 - t - 1 = 0$$

12.- Encontrar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

$$3 + \sqrt{5}i\ ,\ 3 - \sqrt{5}i \qquad 2 + \sqrt{3}i\ ,\ 2 - \sqrt{3}i$$
$$-3 + i\ ,\ -3 - i \qquad -1 + 2i\ ,\ -1 - 2i$$

13.- Encontrar dos números complejos sabiendo que el producto de sus módulos es 9, el cociente de sus módulos es 1, el argumento del producto es 0 y el argumento del cociente es $\pi/2$.

14.- Encontrar $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que la suma de los cuadrados sea 3, el cociente sea imaginario puro y el módulo de este cociente sea 2.

15.- Encontrar las raíces del polinomio $z^3 - (1+3i)z^2 + (-2+i)z = 0$ siendo z números complejos.

16.- Determinar los números complejos z_1, z_2 i z_3 tales que ${z_1}^3$, ${z_2}^3$ i z_3 sean números reales, $z_3 = -a \ \ (a \in \mathbb{R}^+)$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $|z_1| = |z_2|$.

17.- Determinar el conjunto de todos los números complejos z que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

$$|2z + 3| < 1$$
$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2$$
$$|2z| \leq |2z + 1|$$
$$Re\left(\frac{2}{z}\right) + Im\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) < 1$$

Números reales y complejos. Soluciones

1.-

$$(-\infty,+\infty)$$
$$(-3,0)$$
$$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$
$$(-2,1)$$
$$[1,+\infty)\cup\{-\frac{1}{2}\}$$
$$(a,a)$$
$$(-2,1)$$
$$(4,6)$$
$$(-3,2)$$
$$[2,+\infty)\cup[-2,1)$$
$$[1,1]$$
$$[1,1]$$

2.- Utilizar la definición de la función valor absoluto y la propiedad $-|x| \leq x \leq |x|$.

3.-

$$[-2,2]$$
$$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$$
$$(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$$
$$(-\infty,+\infty)$$
$$[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$$
$$(3,+\infty)$$
$$[-1,1)\cup(3,5]$$
$$(-\infty,-\sqrt{8})\cup(\sqrt{8},+\infty)$$
$$(\frac{1}{2},+\infty)$$
$$(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$$

4.-

$$61$$
$$\frac{2}{5}+\frac{i}{5}$$
$$19-2i$$
$$-\frac{37}{25}+\frac{9}{25}i$$
$$6-8i$$
$$1-2i$$
$$3-2i$$
$$2-2i$$

5.-

$$1_{\pi} \qquad 1_{\frac{3\pi}{2}}$$
$$\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \qquad 2_{\frac{\pi}{6}}$$
$$2_{\frac{5\pi}{3}}$$

6.-

$$(-2,0) \qquad (\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$$
$$(0,-1) \qquad (1,-1)$$
$$(\sqrt{5},0) \qquad (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

7.-

$$1_{0+\frac{2k\pi}{5}},\ k=0,1,2,3,4. \qquad 1_{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}},\ k=0,1,2,3.$$
$$\sqrt[6]{2}_{\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}},\ k=0,1,2. \qquad (\frac{1}{\sqrt[4]{2}})_{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}},\ k=0,1,2,3.$$

8.-

$$2+2i \qquad 16e^{i\frac{20}{3}\pi} \qquad -119-120i$$

9.- $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ k\in\mathbb{N}.$

10.- Usar la definición de la exponencial compleja: $e^{ia}=\cos a+i\sin a.$

11.-

$$-2\pm 5i \qquad e^{\frac{\pi}{3}i},e^{\frac{4\pi}{3}i},e^{-\frac{\pi}{3}i},e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$1,-1,i,-i \qquad 1,-1,-1$$

12.-

$$z^2-6z+14=0 \qquad z^2-4z+7=0$$
$$z^2+6z+10=0 \qquad z^2+2z+5=0$$

13.- $z=3_{\frac{\pi}{4}},\quad w=3_{\frac{7\pi}{4}}$

14.- $z_1=-2,\ z_2=i$, o bien , $z_1=2,\ z_2=i$, o bien , $z_1=2,\ z_2=-i$, o bien , $z_1=-2,\ z_2=-i.$

15.- $z=0,\ z=i,\ z=1+2i.$

16.- $z_1=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ai,\ z_2=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ai,\ z_3=-a$

17.- Interior del círculo de radio $\frac{1}{2}$ y centro $(-\frac{3}{2}, 0)$
Circunferencia de centro $(0, -\frac{5}{3})$ y radio $\frac{4}{3}$
Semiplano derecho de la recta $x = -\frac{1}{4}$
Exterior de la circunferencia de centro (1,2) y radio $\sqrt{5}$.

Capítulo 2. Topología

1.- Probar que $d: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |\log(y/x)|$, es una distancia en $\mathbb{R}_0^+$ (llamada *distancia logarítmica*), y calcular un entorno de centro 10 y radio $r = 1$.

2.- Las aplicaciones $d_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $k = 1,2,3$ definidas por:
$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
$$d_2(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$
$$d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

son distancias en $\mathbb{R}^n$. Para cada una de ellas y en el caso $n = 2$, calcular un entorno de centro el origen de coordenadas y de radio $r = 1$.

3.- Estudiar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, según el caso, con la distancia euclídea, es decir, justificar si son abiertos o cerrados; indicar la frontera, la adherencia y el interior; justificar si son acotados e indicar el conjunto de puntos aislados y de puntos de acumulación:

$$A = (-1, 1)$$
$$B = \{-1, 0, 3/2, 2, \sqrt{5}\}$$
$$\mathbb{N}$$
$$\mathbb{Q}$$
$$C = ([0,2] \cup \{3\} \cup \{\mathbb{Q} \cap (4,5)\}) - \{1\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1 \text{ y } |y| < 2\}$$
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$$
$$G = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Im(z)\}$$
$$H = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$$

4.- Dado $(\mathbb{R}^n, d)$ espacio euclídeo, probar que todo subconjunto cerrado de un compacto de $\mathbb{R}^n$ es también un compacto.

5.- Dado el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 2\}$ calcular su interior, frontera, adherencia y acumulación. Estudiar si es un conjunto abierto, cerrado, acotado y/o compacto.

6.- Encontrar el lugar geométrico de los $z \in \mathbb{C}$ que pertenecen al conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\}$. Calcular el interior, la frontera, la adherencia y los puntos de acumulación del conjunto A.

Topología. Soluciones

1.- (1,100)

2.-

d_1 : circunferencia de centro (0,0) y radio 1
d_2 : cuadrado de vértices (1,1),(-1,1),(-1,-1) y (1,-1)
d_3 : cuadrado de vértices (0,1),(-1,0),(0,-1) y (1,0)

3.-

$fr(A) = \{-1, 1\},\ \overline{A} = A' = [-1, 1],\ \mathring{A} = A,\ Aisl(A) = \phi$

$fr(B) = \overline{B} = Aisl(B) = B,\ \mathring{B} = B' = \phi$

$fr(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = Aisl(\mathbb{N}) = \mathbb{N},\ \mathring{\mathbb{N}} = \mathbb{N}' = \phi$

$fr(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q})' = \mathbb{R},\ \mathring{\mathbb{Q}} = Aisl(\mathbb{Q}) = \phi$

$fr(C) = \{0, 1, 2, 3\} \cup [4, 5],\ \overline{C} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5],\ \mathring{C} = (0, 1) \cup (1, 2),$
$Aisl(C) = \{3\},\ C' = [0, 2] \cup [4, 5]$

$fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1\},$

$\overline{D} = D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\},\ \mathring{D} = D, Aisl(D) = \phi$

$fr(E) =$ rectángulo de vértices (-1,-2),(-1,2),(1,-2) y (1,2),

$\overline{E} = E' = [-1, 1] \times [-2, 2],\ \mathring{E} = (-1, 1) \times (-2, 2),\ Aisl(E) = \phi$

$fr(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\},\ \overline{F} = F' = F,$

$\mathring{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 4\},\ Aisl(F) = \phi$

$fr(G) = \overline{G} = G' = G,\ \mathring{G} = Aisl(G) = \phi$

$fr(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\},\ \mathring{H} = H,\ Aisl(H) = \phi$
$\overline{H} = H' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\},$

4.- Indicación: Todo subconjunto de un compacto está acotado.

5.-

$$\begin{aligned}
&A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 < 4\} \\
&\overset{\circ}{A} = A \\
&fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 4\} \\
&\overline{A} = A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 4\}
\end{aligned}$$

A abierto, no cerrado, acotado y no compacto.

6.- El lugar geométrico es la recta $x = y$.
$\overset{\circ}{A} = \phi$, $fr(A) = A$, $\overline{A} = A$ y $A' = A$.

Capítulo 3. Sucesiones

1.- Justificar si son o no acotadas las siguientes sucesiones:

$$(2n)_{n\in N} \qquad (\cos(n\pi))_{n\in N}$$
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N} \qquad \left(\frac{n^2-1}{n}\right)_{n\in N}$$

2.- En el espacio euclídeo de los reales, demostrar que la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ implica la convergencia de la sucesión $(|x_n|)_{n\in N}$. ¿Es cierto el recíproco? Justificar la respuesta.

3.- Dado el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ y el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos n}{n^2}\right)^{n^2} \quad \text{ó} \quad x = \frac{n^2+3^n}{5^n} \quad \text{ó} \quad x = n(2^{1/n^2} - 1)\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Demostrar que A tiene un único punto de acumulación.

4.- Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, d)$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $(a_n)_{n\in N}$ sucesión de términos de $A \subset \mathbb{R}^n$. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1) Si $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, entonces $a \in A$.
2) Si $\exists (a_{n_k}) \vdash (a_n)$ tal que (a_{n_k}) es convergente en A, entonces (a_n) es convergente en A.
3) Si $\exists (a_{n_k}) \vdash (a_n)$ tal que (a_{n_k}) es convergente en A, entonces A es un compacto.
4) Si $\forall (a_{n_k}) \vdash (a_n)$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n_k} = a$, entonces $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \bar{A}$.

5.- Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, d)$, $n \geq 1$. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1) Toda $(x_n)_{n\in N}$ sucesión convergente de $\mathbb{R}^n$ es acotada y viceversa.
2) Toda $(x_n)_{n\in N}$ sucesión de $\mathbb{R}^n$ monótona y acotada es convergente.
3) Toda $(x_n)_{n\in N}$ sucesión de $\mathbb{R}^n$ convergente es monótona.

4) Toda $(x_n)_{n\in N}$ sucesión de Cauchy es convergente.
5) $\forall (x_n)_{n\in N}$ sucesión de $\mathbb{R}^n$ convergente, entonces $A=\{a_n\}_{n\in N}$ es un conjunto infinito.

6.- Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R},d)$ y $(a_n)_{n\in N}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ monótona creciente. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
1) $(a_n)_{n\in N}$ es acotada inferiormente.
2) $(a_n)_{n\in N}$ es de Cauchy.
3) Si $(a_n)_{n\in N}$ es acotada superiormente con supremo en 0 y $(b_n)_{n\in N}$ es sucesión de $\mathbb{R}$, tal que $\forall n\in N$, $0<a<b_n<b$ con $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n=0$.

7.- Calcular el límite de las sucesiones numéricas que tienen por término general:

$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

8.- Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} (n)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2(2^{1/n}-1)$$
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-2n)$$
$$\lim_{n\to\infty} (1+(-1)^n)$$
$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1)$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}-\frac{n+1}{3n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln n$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{4n^2}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n-1}{3n}\right)^{-n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} (5^n-2^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+1)^{1/(n+1)}$$
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} (\ln(n^2+1)-n)$$
$$\lim_{n\to\infty} \ln(n^2-n+1)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{(2n-1)/n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}+\frac{1}{2}\right)^{n^4}$$

9.- En el espacio euclídeo de los reales se considera la sucesión numérica $(a_n)_{n\in N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lambda\in\mathbb{R}$. Demostrar :

$$1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lambda.$$
$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n^2}=\frac{\lambda}{2}.$$

10.- Dadas las siguientes sucesiones, $(x_n)_{n\in N}$, definidas por recurrencia en $(\mathbb{R},d)$ euclídeo, demostrar que son convergentes y calcular su límite:

$$i)\ x_1=3 \quad , \quad x_{n+1}=\frac{x_n+5}{2}$$
$$ii)\ x_1=2 \quad , \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

11.- Sean a_0 , $b_0\in\mathbb{R}$ tales que $a_0>b_0>0$. En el espacio euclídeo de los reales se consideran las sucesiones $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$ definidas recurrentemente por :

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \qquad\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

Demostrar las siguientes afirmaciones :

1) $a_n\geq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
2) $(a_n)_{n\in N}$ es decreciente y acotada inferiormente.
3) $(b_n)_{n\in N}$ es creciente y acotada superiormente.
4) $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$ convergen hacia el mismo límite.

12.- En el espacio euclídeo de los reales, se considera la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ de números racionales, (es decir, $x_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$), definida de manera recurrente por:

$$x_1 = \alpha \quad , \quad \alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$$
$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Demostrar que $(x_n)_{n\in N}$ es una sucesión acotada.
2) Demostrar que $(x_n)_{n\in N}$ es una sucesión monótona.
3) Estudiar la convergencia de $(x_n)_{n\in N}$. ¿Es convergente en $\mathbb{Q}$?
4) Considerar $(\mathbb{Q}, d)$ con la distancia euclídea inducida de los reales, ¿es $(\mathbb{Q}, d)$ un espacio métrico completo? Justificar la respuesta.

13.- En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ se consideran $(x_n)_{n\in N}$ y $(y_n)_{n\in N}$ dos sucesiones numéricas tales que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ y $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a < y_n < b$.
Definimos $z_n = (-1)^n x_n y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar:

$$(z_n)_{n\in N} \text{ es convergente } \iff \lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Sucesiones. Soluciones

1.-

No	Sí
Sí	No

2.- Indicación: $||x_n| - |x|| < |x_n - x|$. El recíproco es falso.

3.- $A' = \{0\}$

4.-

1) F
2) F
3) F
4) V

5.-

1) F
2) F
3) F
4) V
5) F

6.-

1) V
2) F
3) V

7.-

1) 1
2) 1
3) 1/2
4) 1

8.-

1	$+\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	$+\infty$
no existe	e^2
1	0
$\frac{2}{3}$	1
1	0
0	$+\infty$
1	$-\infty$
0	0
0	0
e^{-2}	0
0	1
π	1
0	0

9.- Indicación: Criterio de Stolz.

10.-

$i)$ $(x_n)_{n\in N}$ es monótona creciente. $l = 5$

$ii)$ $(x_n)_{n\in N}$ es monótona decreciente. $l = \sqrt{2}$

12.-

1) $0 < x_n < 1$
2) $(x_n)_{n\in N}$ es monótona creciente.
3) $l = +\sqrt{\alpha}$
4) No

13.- Indicación: El límite de una sucesión producto de una sucesión que tiende a cero por una que está acotada vale cero.

Capítulo 4. Series numéricas

1.- En el espacio euclídeo de los reales, razonar si es cierta o falsa la siguiente afirmación, con un contraejemplo en caso de falsedad:

Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geq 1} (-a_n)$ son convergentes, entonces, $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ es convergente.

2.- En el espacio euclídeo de los reales, sea $(a_n)_{n\in N}$ una sucesión y supongamos que $\exists M > 1$ tal que $|a_n| \leq Mn^{-M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n\geq 1} (b_n^k - b_{n+1}^k)$ es convergente. Demostrar que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n b_n$ es convergente.

3.- Se consideran el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ y la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

2) La serie de términos positivos y la de términos negativos son convergentes.

3) La sucesión de sumas parciales $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in N}$ no es convergente, pero está acotada.

4) La sucesión $(|a_n|)_{n\in N}$ es convergente hacia cero.

4.- Se consideran el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ y la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1) Si $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) $(s_n)_{n\in N} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in N}$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

3) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

5.- En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$, verificar las siguientes afirmaciones:

1) Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, entonces $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{a}{a-1}$.
2) $\forall n \geq 1$, $\ln n \leq n$, luego $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ es divergente.
3) Si $(a_n)_{n\in N}$ es una sucesión monótona creciente y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ es convergente.

6.- Se consideran el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ y la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, con $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Verificar que:

1) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es divergente.
2) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ es convergente.
3) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ es convergente.

7.- Se consideran el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ y las series numéricas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ es convergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
2) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son divergentes, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente.
3) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ es divergente.

8.- En el espacio euclídeo de los reales se consideran las sucesiones $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$. Demostrar que si las series numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2$ y $\sum\limits_{n\geq 1} b_n^2$ son convergentes, entonces la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n b_n$ es convergente.

9.- En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$, estudiar la convergencia de las siguientes series y, si es posible, calcular la suma:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+1}{n!} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n!}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+5} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{n}{2n-1}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

$$\sum_{n\geq 0}\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n n! + 3^{n+1}}{3^n n!}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{2n+3}{n^3+5n^2+8n+4} \quad (\bullet)$$

$(\bullet)$ Nota: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

10.- En el espacio euclídeo de los reales, estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas según el valor de la constante real a :

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^n\, \frac{n^2+1}{3^n}$, $a \in \mathbb{R}$. ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a^n+n^2+n}{a^{n+1}n(n+1)}$, $a > 0$.

11.- Si $(x_n)_{n\in N}$ es una sucesión convergente en el espacio euclídeo de los reales, probar que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right]}{(n\ln n)\ln\left((n+1)^{(n+1)}\right)} = \frac{1}{2\ln 2}$$

12.- En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$ se considera la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ de términos estrictamente negativos, es decir, $\forall n \in N$, $x_n < 0$, con $x_0 = -1$ y $\forall n \geq 1$,

${x_n} - {x_n}^2 = x_{n-1}$. Demostrar que la serie numérica $\sum\limits_{n\geq 1} {x_n}^2$ es convergente y calcular su suma. Asimismo, demostrar la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n^2 \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(x_n^2)\cos(x_n^2)$$

13.- Calcular los números reales a , b , c , d que verifican la igualdad:

$$x^3 = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx + d$$

Probar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$, si se conoce que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

14.- En el espacio euclídeo de los reales, se considera $(a_n)_{n\in N}$ sucesión de números reales positivos y $(s_n)_{n\in N}$ la sucesión de sus sumas parciales: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{s_n s_{n-1}}$$

Series numéricas. Soluciones

1.- F

2.- Indicación: Utilizar el criterio de comparación.

3.-

1) F
2) F
3) F
4) V

4.-

1) F
2) V
3) F

5.-

1) V
2) V
3) V

6.- Indicaciones:

1) Condición necesaria de convergencia.
2) Aplicar el criterio de comparación.
3) Aplicar el criterio de comparación.

7.-

1) F
2) F
3) F

8.- Indicación: $0 \leq |\ 2a_n b_n| \leq {a_n}^2 + {b_n}^2$

9.-

convergente	$2(e-1)$
convergente	divergente
convergente	divergente
divergente	convergente
divergente	1
$\frac{13}{6}$	1
$\frac{1}{4}$	$3(\frac{1}{4}+e)$
1	$\frac{\pi^2}{6}-\frac{3}{4}$

10.-

i) Convergente para $|a|<3$
ii) Convergente para $a>1$

11.- Indicación:

$$\frac{\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right]}{(n\ln n)\ln\left((n+1)^{(n+1)}\right)}=\frac{1}{nlnn}-\frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$$

12.-

$\sum\limits_{n\geq 1} {x_n}^2$ es telescópica y su suma vale 1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n^2$ converge absolutamente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(x_n^2)\cos(x_n^2)$ Indicación: aplicar el criterio de comparación y el criterio de comparación por paso al límite.

13.- $a=1$, $b=3$, $c=1$, $d=0$.

14.-

Indicación: $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{a_n}{s_n s_{n-1}}$ es telescópica.

Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = S$ $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{a_n}{s_n s_{n-1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S}$

Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es divergente $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{a_n}{s_n s_{n-1}}=\frac{1}{a_1}$.

Capítulo 5. Funciones: Límites y continuidad

1.- Estudiar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$h(t) = e^{1/t} - e^{2t} \qquad f(x) = \cos(x^2 - \ln(x+1))$$

$$g(u) = \ln\left(\frac{u-1}{u+2}\right) \qquad g(u) = \sqrt{\frac{u^3}{u^2-1}}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x - (y-1)^2 - 1} \qquad s(t) = \frac{\operatorname{sen}(1/t)}{t^3-1}$$

$$g(u,v) = \frac{u+v}{\sqrt{2u-v}} \qquad f(x,y) = \ln(y - x^2)$$

$$r(t,s) = \frac{\ln(t^2+s^4)}{\operatorname{sen}(ts)} \qquad h(t,z) = \frac{tz}{(t+1)^2 + (z-2)^2}$$

$$r(t) = \left(\frac{\ln|t+1|}{t\sqrt{t}}\ ,\ \frac{e^{2/t}}{t^2-1}\ ,\ \frac{\sqrt{t^2-4}}{\cos(2t)}\right)$$

2.- Calcular la composición de los siguientes pares de funciones:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$h(t) = \operatorname{sen}(t^2-2) \quad , \quad s(t) = e^{1/t}$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\ ,\ x+y\right) \quad , \quad g(x,y) = \sqrt{x-y+3}$$

$$r(t) = (\operatorname{sen} t\ ,\ \cos t\ ,\ t) \quad , \quad g(u,v,z) = u^2+v^2+z^2$$

$$f(x,y,z) = (x+z\ ,\ y-x) \quad , \quad h(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$$

3.- Representar gráficamente algunas curvas de nivel de las siguientes funciones reales de variable vectorial y estudiar de manera aproximada la superficie que generan en el espacio:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad h(s,t) = \sqrt{s^2+t^2}$$

$$z(x,y) = xy \qquad f(t,z) = t^2 - z^2$$

$$g(a,b) = 9a^2 + 4b^2 \qquad w(u,v) = 2u - v$$

4.- Encontrar el valor que toman las siguientes funciones sobre las curvas indicadas: (función restringida a los puntos de una curva)

$$g(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^2} \quad \text{sobre el trozo de circunferencia} \quad y - \sqrt{\pi/2 - x^2} = 0.$$

$$h(x,y,z) = \frac{3z}{x^2+2y^2} \quad \text{sobre el paraboloide} \quad z = x^2 + 2y^2.$$

5.- Calcular los siguientes límites de funciones de variable real:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$$

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/t}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$$

$$\lim_{t\to \pi/2} (\operatorname{sen} t - 1)\tan t$$

$$\lim_{x\to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^{e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x}$$

$$\lim_{t\to -1} \frac{e^{t+1}-1}{t^2-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$\lim_{t\to 0} t\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\arctan(x-4)}{\ln(x-3)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{|t|}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

$$\lim_{t\to +\infty} (\ln(t^2-2t+1))^{1/t}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (x\ln(1/x))^x$$

$$\lim_{x\to \infty} x\cdot \arcsin(1/x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{x-1}$$

$$\lim_{t\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen}(t-\pi/4)}{4t-\pi}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1-e^x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{\ln(2t+1)}$$

6.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las verdaderas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:

i) La suma de funciones discontinuas es discontinua.

ii) El producto de funciones discontinuas es continuo.

iii) Toda función continua es monótona.

iv) Toda función monótona es continua.

v) Si existen los límites laterales de una función en un punto, entonces la función es continua en este punto.

7.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las verdaderas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:

i) Una función de dos variables que es continua respecto de cada una de ellas, es continua respecto de las dos.

ii) Recíprocamente, si es continua respecto de las dos variables, lo es respecto de cada una de ellas.

iii) Una función $f(x, y)$, continua en la dirección de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, es continua en $(0, 0)$.

8.- Las siguientes funciones están definidas en $\mathbb{R} - \{0\}$. ¿Qué valor ha de tomar f en $x = 0$ para que sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \qquad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$f(x) = x \operatorname{sen}(\pi/x) \qquad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

9.- Demostrar que la función definida por :

$$q(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \in Q \\ 0 \ , \ x \notin Q \end{cases}$$

es discontinua en todo $\mathbb{R}$.

10.- Demostrar que f, función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & , \ x \in Q - \{0\} \\ 0 & , \ x = 0 \\ x & , \ x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

es continua en únicamente 2 puntos.

11.- Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua $(a \neq b)$ tal que $f(x) \in Q$, $\forall x \in [a, b]$. Demostrar que f es constante.

12.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(xy) = xf(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

13.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función.

i) Si $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en $x = 0$.

ii) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $x = 0$, $g(0) = 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en $x = 0$.

iii) ¿Es cierto el apartado (ii) si $g(0) \neq 0$? Buscar un contraejemplo en caso negativo.

14.- Sean (E, d) y (F, d') espacios métricos y la función $f: A \subset E \to F$ uniformemente continua en A. Demostrar que si $(x_n)_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy de A , entonces $(f(x_n))_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy de F.

15.- Dados $(\mathbb{R}^n, d)$ euclídeo y K subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, considerar la función $f: K \to K$ tal que:

$$\forall x, y \in K \ , \ x \neq y \ , \ 0 < \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < 1/2.$$

Justificar que $\exists z \in K$ tal que $f(z) = z$.

16.- Sea $A = \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \ldots\ldots\} = \{(-1)^n \frac{1}{n} \ , \forall n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \ , \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \in A \\ 0 & si \ x \notin A \end{cases}$$

i) Calcular los límites, si existen, de la función g para $x = \frac{3}{8}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 0$.

ii) Estudiar la continuidad de g.

17.- Considerar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = (-1)^n + \frac{1}{n} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ y la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in A \\ 2x^2 & , \ x \notin A \end{cases}$$

Estudiar la existencia del límite de la función g en los puntos: -1, -2/3, 0, 1/2, 1 y 2; y calcularlo en caso de que exista. Estudiar la continuidad de g.

18.- En el espacio euclidídeo $(\mathbb{R}, d)$, se considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = (-1)^n/2^n \ , \ \forall n \in N\}$ y las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in A \\ e^{-x^2} & , \ x \in \mathbb{R} - A \end{cases} \quad ; \quad \forall x \in A \ , \ g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ e^{-x^2} & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

i) Estudiar si A es un conjunto acotado. Calcular el interior, la acumulación y el conjunto de puntos aislados de A.

ii) Estudiar la continuidad de f y la continuidad de g.

19.- Calcular el valor de las constantes para que las siguientes funciones reales de variable real sean continuas en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & si\ x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2^{1/x} + a & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ b^{1/x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

20.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones e indicar el tipo de discontinuidad que presentan :

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen}(t+1)}{|t^2 - 1|} \qquad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$$

$$f(x) = \frac{|x| + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad g(y) = \frac{e^{2y} - 1}{\ln(y^2 + 1)}$$

$$r(t) = \begin{cases} e^{1/(t-1)} & , \ t < 1 \\ 0 & , \ t = 1 \end{cases} \qquad s(t) = \begin{cases} e^{1/(t-1)} & , \ t \neq 1 \\ 0 & , \ t = 1 \end{cases}$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2u)}{u} & , \ u > 0 \\ \ln|1 + u| & , \ u < 0, u \neq -1 \\ 1/2 & , \ u = 0 \\ 0 & , \ u = -1 \end{cases}$$

21.- Calcular los siguientes límites de funciones de variable vectorial:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\operatorname{sen}((x-1)y)}{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^2 - y^2 + 1)}{x + y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x - y}{x + y - 2} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^3}{x^2 - 2x + y^2 + 1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{x/y} - 1}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(xy + 1)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{e^{x+y} - 1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2 + xy)^{\frac{-1}{x^2y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + \operatorname{sen}(x^2y))^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

22.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones e indicar el tipo de discontinuidad que presentan :

$$f(x,y) = |x+y| \qquad\qquad h(u,v) = e^{-1/u^2v^2}$$
$$g(x,y) = \frac{\arctan(x+y)}{x^2-y^2} \qquad\qquad r(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(tx)}{t}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & , \ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & , \ x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{xy} & , \ xy \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ B1 & , \ y = 0, \ \ x \neq 0 \end{cases}$$

$$[Bh(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x \leq y^2 \\ 0 & , \ x \leq 0 \text{ ó } x > y^2 \end{cases}$$

$$r(s,t) = \begin{cases} st^2 \operatorname{sen}(1/t) & , \ t \neq 0 \\ 0 & , \ t = 0 \end{cases}$$

23.- Sea la función $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \operatorname{sen}(xy), \quad si \quad x \neq 0$$

Definir la función en los puntos de $x = 0$ para que sea continua en $\mathbb{R}^2$.

24.- Considerar la función de dos variables $f\colon \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ \dfrac{e^{y^3}-1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

i) Comprobar que el dominio de f puede extenderse a $\mathbb{R}^2$ de forma continua.

ii) Considerar el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z-2i|}{|z+i|} \geq \sqrt{2} \right\}$. Si $\bar{f}$ es la extensión continua de f en $\mathbb{R}^2$, estudiar la existencia de extremos absolutos de $\bar{f}|_A$ (restricción de $\bar{f}$ al conjunto A).

25.- Considerar la función real de variable vectorial $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ , & -x \leq y \leq x^2 \ \text{ y } \ x > 0 \\ \dfrac{x}{y} \ , & x > 0 \ \text{ y } \ y > x^2 \\ x^2 + y^2 \ , & x \leq 0 \leq y \\ \dfrac{x-y}{x+y} \ , & y < 0 \ \text{ y } \ y < -x \end{cases}$$

i) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^2$ los distintos dominios de definición de f
ii) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$
iii) Si h es la restricción de f sobre los puntos de la recta $x = -1$, es decir, $h(y) = f(-1, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, estudiar el dominio de continuidad de h ¿Dónde podemos asegurar que la función inversa, h^{-1} , es continua?

26.- Resolver las siguientes cuestiones:
i) Buscar un ejemplo de una función que toma valores positivos y negativos en un intervalo $[a, b]$, y que no se anula en ningún punto.
ii) Buscar un ejemplo de una función continua en un abierto A, que no alcanza ningún extremo en dicho conjunto A.
iii) Probar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, $f(-1) = -3$ y $f(2) = 18$, entonces $\exists t \in (-1, 2)$ tal que $f(t) = 7$.

27.- Dadas las siguientes ecuaciones, indicar un intervalo en el que pueda asegurarse que existe alguna solución (ayudaos gráficamente):

$x^3 - 3x + 1 = 0$	$x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$
$x - 1 = \operatorname{sen} x$	$x^3 = \arctan x$
$t^2 + \ln t = 0$	$e^{t-1} = \dfrac{1}{t+1}$
$e^t = 2 - t^2$	$t \ln t = 1$

28.- Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada.
Demostrar que la ecuación $f(x) - x^3 = 0$ tiene al menos una raíz real.

29.- Sin necesidad de la definición, justificar si las siguientes funciones alcanzan un máximo y un mínimo absolutos en los conjuntos indicados:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 - 2x + 3 & \text{en el intervalo } [-1, 0] \\ y(x) = 1/x & \text{en } \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} \\ h(t) = \operatorname{sen} t & \text{en } \{t \in \mathbb{R} : |2t - 3\pi| < \pi\} \\ r(t) = e^t \ln |t^2 - 1| & \text{en el intervalo } [-1, 2] \end{array}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , \ x \neq 0 \\ x & , \ x = 0 \end{cases} \qquad \text{en } \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \leq 1\}$$

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = e^{x+y} \cos(xy) & \text{en } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1 \text{ i } |x| \leq 2\} \\ g(x, y) = \dfrac{x + y^2}{\operatorname{sen}(xy)} & \text{en } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 - y^2\} \\ \varphi(z) = \dfrac{Re(z) + Im(z)}{|z|^2} & \text{en } \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\} \end{array}$$

$$F(u, v) = \begin{cases} 2u + 1 & , \ u \geq 0 \\ 1 + u^2 v & , \ u < 0 \end{cases} \qquad \text{en } \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

30.- Sea la función $H\colon \mathbb{R} \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que,

$$\text{para } x \in \mathbb{R}, \ y \geq 0 \ , \quad H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-y} - 1}{x + 2y} & , \ y \geq |x| \ , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \\ (x - y) \cos\left(\dfrac{1}{x^2 - y^2}\right) & , \ y < |x| \end{cases}$$

i) Estudiar la continuidad de la función H.
ii) Se consideran los conjuntos $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \ : \ |x| \leq y \leq 1\}$ y $C_2 = [1/2, 1] \times [1/2, 1]$. ¿Se puede asegurar que H alcanza un máximo y un mínimo absolutos en C_1? ¿Y en C_2? Justificar las respuestas.

Funciones: Límites y Continuidad. Soluciones

1.-

$\mathbb{R} - \{0\}$	$(-1, +\infty)$
$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$	$(-1, 0] \cup (1, +\infty)$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq y^2 - 2y + 2\}$	$\mathbb{R} - \{0, 1\}$
$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ 2u \geq v\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2\}$
$\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : ts \neq k\pi, \ k \in Z\}$	$\mathbb{R}^2 - \{(-1, 2)\}$

$$[2, +\infty) - \{t \in \mathbb{R} : \ t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z\}$$

2.-

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}; \quad (f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$(s \circ h)(t) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen}(t^2-2)}}; \quad (h \circ s)(t) = \operatorname{sen}(e^{2/t} - 2)$$

$$(g \circ f)(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{xy} - x - y + 3}; \quad \text{no existe} f \circ g$$

$$(g \circ r)(t) = 1 + t^2;$$

$$(r \circ g)(u, v, z) = (\operatorname{sen}(u^2 + v^2 + z^2), \cos(u^2 + v^2 + z^2), u^2 + v^2 + z^2)$$

$$(h \circ f)(x, y, z) = \operatorname{sen}(z + y); \quad \text{no existe} f \circ h$$

3.-

paraboloide de revolución	cono
paraboloide hiperbólico	paraboloide hiperbólico
paraboloide elíptico	plano

4.-

$$g(x) = \frac{1}{\pi/2 - x^2}$$
$$h(x, y) = 3$$

5.-

$-\frac{1}{2}$

e^2

no existe

1

1

0

1

1

1

$-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

0

-2

1

no existe

no existe

1

no existe

$a - b$

1

1

1

1

$\frac{1}{2}$

1

$\frac{1}{4}$

1

0

1

0

-1

$\frac{1}{2}$

6.-

i) F
ii) F
iii) F
iv) F
v) F

7.-

i) F
ii) V
iii) F

8.-

2	2
0	0

9.- Indicación: Aplicar el criterio secuencial.

10.- $x = \pm 1$

11.- Indicación: Demostrar por reducción al absurdo y aplicar el teorema de los valores intermedios.

12.- Indicación: Demostrar que $\frac{f(x)}{x}$ es constante y aplicar la definición de continuidad.

13.-

i) Indicación: $f(0) = 0$ y aplicar la definición de continuidad.
ii) Indicación: Observar que i) es un caso particular de ii).
iii) Falso.

14.- Indicación: Demostrar usando las definiciones.

15.- Indicación: Aplicar el teorema del punto fijo.

16.-

i) $\lim_{x \to \frac{3}{8}} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{4}} g(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe.
ii) Si $x_0 \notin (A \cup \{0\})$, g es continua en x_0.
Si $x_0 \in A$, g tiene una discontinuidad evitable en x_0.
Si $x_0 = 0$, discontinuidad esencial en $x = 0$.

17.-

Si $x_0 \in A$, g tiene una discontinuidad evitable en x_0.
Si $x_0 \notin (A \cup A')$, g es continua en x_0.
Si $x_0 \in A'$, discontinuidad esencial en x_0.(Ej. 1,-1).

18.-

i) A es un conjunto acotado. $\overset{\circ}{A} = \phi$, $A' = \{0\}$, $Aisl(A) = A$.
ii) f es continua en $\mathbb{R} - (A \cup \{0\})$ y g es continua $\forall x \in A$.

19.- Para f: $b = 1$, y para g: $a = 0$, $b \in (0, 1)$.

20.-

h presenta discontinuidad esencial en $t = 1$, y de salto en $t = -1$
f presenta discontinuidad esencial en $x = -2$, y evitable en $x = 1$
f es continua en $\mathbb{R} - [-1, 1]$
g presenta discontinuidad esencial en $y = 0$
r es continua $\forall t \in Dom r$
s presenta discontinuidad esencial en $t = 1$
α es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$

21.-

no existe	no existe
0	0
0	0
no existe	0
1	no existe
2	2
0	no existe
0	1

22.-

f es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
g es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(b, -b) \cup (a, a)\}$
h presenta discontinuidad evitable en $u = 0$ y en $v = 0$
r presenta discontinuidad evitable en $t = 0$
g es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
z presenta discontinuidad esencial en $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \neq 0$
h es continua en $\mathbb{R}^2 - [\{x = y^2\} \cup \{x = 0\}]$
r es continua $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$

23.-

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \operatorname{sen}(xy) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ y|y| & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

24.- i)

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ \dfrac{e^{y^3}-1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

ii) $\bar{f}|_A$ alcanza extremos absolutos en A. (aplicar el teorema de Weierstrass).

25.-

f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(\{y = x^2, x \geq 0\} - (1,1)) \cup \{y = -x, x \geq 0\} \cup \{x = 0, y \geq 0\} \cup (\{y = 0, x \leq 0\} - (-1,0))\}$.

26.-

i) Observemos que no se cumple el teorema de Bolzano.
ii) $f(x) = x$ definida en $A = (1,2)$.
iii) Aplicar el teorema de Bolzano a $h(t) = f(t) - 7$.

27.-

$(1,2)$	$(-1,1)$
$(1,\pi)$	$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
$(0,1)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(1,2)$

28.- Aplicar el teorema de Bolzano.

29.- Razonar, si es posible, aplicando el teorema de Weierstrass. (Sí, No, No, No, No, Sí, No, No, Sí).

30.- i) H es continua $\forall (x,y) \in DomH - \{(-a,a)\}$.
ii) En C_1 no podemos asegurar nada porque no estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weierstrass; sin embargo, en C_2 podemos asegurar la existencia de extremos absolutos.