Capítulo 6. Cálculo diferencial para funciones reales de variable real

1.- Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada de las siguientes funciones reales:

$$f(x) = |x| + x|x| \qquad g(x) = x\sqrt{1+x^2}$$

$$r(t) = \operatorname{sen}(\cos^2 t) + \cos(\operatorname{sen}^2 t) \qquad s(t) = (t-1)(t-2)\sqrt{t+3}\sqrt[3]{t-4}$$

$$z(x) = (\operatorname{sen}^2 x + 1)^{e^{x^2}} \qquad y(x) = |\cos x|$$

$$f(t) = (1 + 1/t)^t \qquad h(t) = t^{\sqrt{t}}$$

$$g(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{e^{x+1}-1}{|x^2-1|}$$

$$h(u) = \begin{cases} 1-u & , \quad u \le 0 \\ e^{-u} & , \quad u > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

2.- Dada la función real de variable real :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2 & si \quad |x| \le 1 \\ |x| - 1 & si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Estudiar la derivabilidad en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

3.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A = Dom f$ y $(0,1) \in \mathring{A}$. Definimos $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, 1-x)$. Demostrar que si existe $g'(0)$, entonces existe $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ en la dirección de la recta $y = 1 - x$.

4.- Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivable. Se define la función:

$$g(x) = \begin{cases} |x| f\left(\frac{1}{|x|}\right) & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Estudiar la derivabilidad de g.
ii) Demostrar que g es derivable en $x = 0 \iff \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad si \quad x \neq y$$

i) Probar que si $\exists \lim_{(x,y)\to(a,a)} g(x,y) = l$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = l$.

ii) Considerar la función:

$$h(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & si \quad y \neq x \\ f'(x) & si \quad y = x \end{cases}$$

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, probar que h es continua en $\mathbb{R}^2$.

6.- Consideremos la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & , \ -x \leq y \leq x^2 \ , \ x \geq 0 \\ \dfrac{x}{y} & , \ x > 0 \ , \ y > x^2 \\ x^2 + y^2 & , \ x \leq 0 \leq y \\ \dfrac{x-y}{x+y} & , \ y < 0 \ , \ y < -x \end{cases}$$

Si h es la restricción de f sobre los puntos de la recta $x = -1$, es decir, $h(y) = f(-1, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, entonces:
Estudiar el dominio de derivabilidad de h y calcular la función derivada. Demostrar que h es inyectiva en todo su dominio de definición.

7.- Resolver los siguientes ejercicios:
i) Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ es paralela al eje de abscisas.
ii) ¿En qué punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de la curva $y^2 = 2x^3$ es perpendicular la tangente a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?
iii) Hallar los valores de x para los que la recta tangente a la curva $y = x - 1/x$ es paralela a la recta $2x - y = 5$.
iv) Hallar los valores de x para los que la recta tangente a la curva $y = (x+2)^2$ pasa por el origen de coordenadas.
v) Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1,1)$.

8.- Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
i) Toda función derivable es continua.
ii) Toda función continua es derivable.
iii) Si $f(x)$ es una función real continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$ para $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x_0) = 1$.
iv) Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{a\}$, entonces la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es horizontal.

9.- Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, A abierto, y f derivable en A. Demostrar que si x_0 es un punto de acumulación de ceros de f, entonces x_0 es un cero de f'.

10.- Demostrar que cada una de las siguientes funciones, satisface la ecuación diferencial ordinaria correspondiente:

$$
\begin{array}{lll}
y = xe^{-x} & \text{satisface} & xy' = (1-x)y \\
y = \dfrac{1}{2}x^2e^x & \text{satisface} & y'' - 2y' + y = e^x \\
y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} & \text{satisface} & y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})
\end{array}
$$

11.- Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivable, calcular la derivada primera y la derivada segunda de g en cada una de las situaciones siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
g(x) = f(x^2) & g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos^2 x) \\
g(x) = f(f(x)) & g(x) = f(x)e^{f(x)} \\
g(x) = \ln(f(x^2+1)) & g(x) = \cos(f(x^2)) + (f(x))^2 + 1
\end{array}
$$

12.- Sean $g(t) = f(\operatorname{sen} t) + e^{f(t)+1}$ y $h(t) = \ln(2 + f(t)) + f(\ln(1+t))$, donde $f(t)$ es una función real derivable tal que $f(0) = -1$ y $f'(0) = 1$. Probar que $g'(0) = h'(0)$.

13.- Un barco navega paralelamente a una costa recta a una velocidad de 12 millas por hora y a una distancia de 4 millas. ¿Cuál es la velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que la distancia al faro es de 5 millas?

14.- Un recipiente tiene la forma de un cono circular con el vértice en la parte superior. La altura es de 10m y el radio de la base es de 4m. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 m^3 por minuto. ¿A qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad de ésta es de 5m?

15.- La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define una función implícita $y = y(x)$.
i) Suponiendo que existe la derivada y', y sin resolver la ecuación respecto a y, demostrar que y' satisface la ecuación: $x^2 + y^2y' = 0$.
ii) Suponiendo que existe la derivada segunda y'', demostrar que siempre que $y \neq 0$ se verifica que $y'' = -2xy^{-5}$.

16.- La ecuación $x\operatorname{sen}(xy) + 2x^2 = 0$ define $y = y(x)$, función implícita derivable. Demostrar que y' satisface la ecuación:

$$y'x^2\cos(xy) + xy\cos(xy) + \operatorname{sen}(xy) + 4x = 0$$

17.- Las siguientes ecuaciones definen implícitamente una función derivable $y = y(x)$ en un entorno del punto indicado. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = y(x)$ en el punto correspondiente:

$$2 - y = y^x \qquad \text{en} \quad (0,1)$$
$$y = x - \ln y \qquad \text{en} \quad (1,1)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{en} \quad (0,b)$$

18.- Se considera una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(1) = 0$. Demostrar que la recta tangente a la curva $x^2 - (f(x))^2 + sen(xf(x)) + e^{f(x)} = 2$ en el punto (1,0) es perpendicular a la recta $y = x$.

19.- Demostrar que las curvas de ecuaciones $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ se cortan en el punto (1,1) y que sus tangentes en este punto son perpendiculares.
(Nota: se supone que localmente, en un entorno del punto (1,1), las curvas anteriores son la representación gráfica de una función $y = y(x)$).

20.- La ecuación $x^2y^2 + xe^y - 2x + y = -1$ define implícitamente $y = y(x)$ derivable en un entorno del punto (1,0). Probar que la recta tangente a $y = y(x)$ en el punto (1,0) es paralela a la recta $x = 2y$.

21.- Demostrar que un error relativo de un 1% al determinar la longitud del radio da lugar a un error relativo aproximado de un 2% al calcular el área del círculo y la superficie de la esfera.

22.- ¿En cuánto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera ($V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$) si su radio $R = 15\ cm$ se alarga 2 mm?

23.- A partir de la ley de Ohm: $I = E/R$, demostrar que una variación en la intensidad de la corriente debida a una variación de la resistencia puede calcularse de manera aproximada por $\Delta I \approx -I\Delta R/R$.

24.- Sea la función $f: (0, +\infty) \to [0,1]$ derivable tal que $\forall x \in (0, +\infty)$, $|f'(x)| < 1$. Demostrar que si $(x_n)_{n\in N}$ es una sucesión de $(0, +\infty)$ estrictamente creciente, entonces la sucesión $(f(\frac{1}{x_n}))_{n\in N}$ es convergente en [0,1].

25.- Sea la función $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$ derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x))$ y calcularlo.

Aplicar este resultado para calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} ((1+x)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}})$$

26.- A pesar de que la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ verifica que $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = 1$ y es continua en $[-\pi/2, \pi/2]$, no existe ningún $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $f'(a) = 0$. ¿Acaso este hecho contradice al teorema de Rolle?

27.- Sea $f:[0,1]\to(0,1)$ continua en [0,1] y derivable en (0,1) tal que $f'(x)\neq 1$, $\forall x\in(0,1)$. Demostrar que existe un único punto $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x_0)=x_0$.

28.- Demostrar que la ecuación funcional $x^2=18\ln x$ tiene una única solución en el intervalo $[1,e]$.

29.- Demostrar que la ecuación $\operatorname{senh} t-|t-1|=0$ tiene una única raíz real.

30.- Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable tal que $f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ y $\forall x\in(0,+\infty)$, $f'(x)>2/x$. Demostrar que la ecuación $f(x)-\ln(x^2)=0$ tiene exactamente una raíz real.

31.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=0$. Demostrar que si n es impar, entonces existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)+a^n=0$.

32.- Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Demostrar que si $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)\geq g'(x)$, y $\exists x_0\in(a,b)$ tal que $f(x_0)=g(x_0)$, entonces $\forall x\geq x_0$, $f(x)\geq g(x)$ y $\forall x\leq x_0$, $f(x)\leq g(x)$.

33.-
a) Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P'(x)$ tiene k raíces reales. Demostrar que $P(x)$ tiene a lo sumo $k+1$ raíces reales.
b) Sean $p,q\in\mathbb{R}$, $n\in N$. Demostrar que el polinomio $P(x)=x^n+px+q$ tiene como máximo dos raíces reales si n es par y tres si n es impar.

34.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; se define: x es un punto fijo de $f \overset{\text{def}}{\iff} f(x)=x$.
i) Demostrar que si f es derivable y $f'(x)\neq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, f tiene a lo sumo un punto fijo.
ii) Probar que la función $f(x)=x+\frac{1}{1+e^x}$ no tiene puntos fijos a pesar de cumplir que $0<f'(x)<1$.
iii) Demostrar que si $\exists K<1$ tal que $|f'(x)|\leq K$, $\forall x\in\mathbb{R}$, entonces f posee un punto fijo.
iv) Probar que la ecuación $x=\cos x$ tiene una única solución en el intervalo $[0,\frac{\pi}{3}]$.

35.- Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Se define la función $g(x)=f(x+1)-f(x)$; demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

36.- Demostrar que la ecuación funcional $x^2=x\sin x+\cos x$ se satisface exactamente para dos valores de x.

37.- Probar que la ecuación $e^{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$ tiene una única raíz real, y hallarla de forma aproximada.

38.- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0,2a]$ y tal que $f(0)=f(2a)$. Demostrar que $\exists c \in [0,a]$ tal que $f(c)=f(c+a)$.

39.- Sean f y g dos funciones continuas y derivables en un intervalo acotado I, verificando que $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$. Demostrar que entre dos ceros consecutivos de $f(x)$ existe a lo sumo un cero de $g(x)$.

40.- Sea $f\colon [a,b]\to \mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$, tal que $\forall x,y \in [a,b]$, $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^{\alpha}$, para $\alpha>1$ y $M>0$. Demostrar que f es constante en $[a,b]$.

41.- Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
i) Existe $a\in(-1,1)$ con $f'(a)=0$, para $f(x)=x+1/x$.
ii) Existe $a\in(-1,1)$ con $f'(a)=0$, para $f(x)=x^4+|x|$.
iii) La ecuación $e^x=1+x$ tiene una única raíz real.
iv) La ecuación $x^3-3x+1=0$ tiene tres raíces reales.
v) La ecuación $3\ln x = x$ tiene dos raíces reales.
vi) Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y derivable, cuya gráfica corta al eje de abcisas en exactamente tres puntos, entonces existen al menos dos puntos en los que la recta tangente a $y=f(x)$ es horizontal.

42.- Calcular los siguientes límites aplicando, si es posible, la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x - \ln x) \qquad \lim_{x\to \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{e^{1/x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-x} \qquad \lim_{x\to 0^+} (x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x} \qquad \lim_{x\to +\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$$

43.- Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^2(B_r(0))$, $r>0$, tal que $f'(0)\neq 0$. Demostrar que:

$$\exists \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{f(x)-f(0)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{f''(0)}{2f'(0)}$$

44.- Calcular el polinomio de Taylor de cuarto grado, que localmente aproxima a cada una de las siguientes funciones en un entorno del punto $x=0$:

$$f(x)=e^{-x^2} \qquad g(x)=\ln(x^2+1)$$

$$h(t)=\frac{1}{1+t^2} \qquad r(t)=\operatorname{sen}(t^2)$$

45.- Se desea aproximar el valor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para $x = 1/4$ haciendo uso del desarrollo de Taylor de f alrededor del origen de coordenadas con resto de Lagrange:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad , \; 0 < \theta < 1$$

i) Hallar un n tal que el error cometido al despreciar el resto sea menor que 0.01.
ii) Hallar directamente el mínimo n tal que el error cometido al despreciar el resto sea menor que 0.01.
iii) Calcular el valor de θ para este último valor de n, y explicar a qué se debe la diferencia entre los valores de n hallados en los apartados (i) y (ii).

46.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-veces derivable y tal que $f(1) - f(0) = 7$ y $|f''(x)| \leq 3$, $\forall x \in [0,1]$. Demostrar que f es monótona creciente en un entorno del cero.
Indicación: Usar el desarrollo de Taylor de f entorno al cero.

47.- Sea $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 3-veces derivable en (-1,1) y tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Demostrar que $f^{3)}(x) \geq 3$ para algún $x \in (-1,1)$.
Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de f entorno al cero, y evaluar la función en 1 y -1 para demostrar que existen $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \in (-1,0)$ tales que: $f^{3)}(s) + f^{3)}(t) = 6$.

48.- Calcular los extremos de las siguientes funciones:

$$y(x) = |\sin x| \qquad z(x) = |x^2 - 4|$$

$$r(t) = 3t - (t-1)^{3/2} \qquad s(t) = |t|$$

$$u(t) = \frac{t}{t^2+2} \qquad v(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x & , \; x \leq 3 \\ x^2 - 3 & , \; x > 3 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t - 4 & , \; t > 1 \\ e^{2t} & , \; t \leq 1 \end{cases}$$

49.- Hallar los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones sobre el conjunto indicado:

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x \quad \text{en} \quad [0, \pi]$$

$$g(x) = 1 + |9 - x^2| \quad \text{en} \quad [-5, 1]$$

$$h(x) = 1/x \quad \text{en} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

$$y(x) = |6 - 4x| \quad \text{en} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & , \; -2 \leq x \leq -1 \\ |x| & , \; |x| < 1 \\ 1 - (x-1)^2 & , \; 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad [-2, 2]$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 2 & , \; x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & , \; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad [-2, 2]$$

50.- Probar que se verifican las siguientes desigualdades:

$$\operatorname{sen} x \leq x \qquad \forall x \in [0, 2\pi]$$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \qquad \forall x \in [0, 2\pi]$$
$$\ln x \leq x \qquad \forall x > 0$$
$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad \forall x > 0$$
$$1 + x < e^x < 4x + 1 \qquad \forall x \in (0, 1)$$
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \qquad \forall x \geq 0$$

51.- Sea la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(z) = \begin{cases} \sqrt{1+z^2}\,\operatorname{sen}(z^3) & , \quad z \geq 0 \\ z|z| & , \quad z < 0 \end{cases}$$

i) Demostrar que $h \in C^1(\mathbb{R})$, es decir, h es derivable con continuidad en $\mathbb{R}$.
ii) Estudiar la monotonía de h en $(-\infty, 0]$, y hallar los extremos de h en [-1,0].

52.- Sea $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}, \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad p > 0$$

i) Calcular los extremos de f en $[0, +\infty)$ según los valores de p.
ii) Demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$2^{p-1}(1+x^p) \leq (1+x)^p \leq 1 + x^p \quad , \quad 0 < p < 1$$

$$1 + x^p \leq (1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p) \quad , \quad p > 1$$

53.- Estudiar cuáles de las funciones definidas implícitamente en el ejercicio 17 tienen un máximo o mínimo en los puntos indicados.

54.- ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = 2x\ln x + x^3/6 - 3x^2/2 - 2x$ que en [1,5] tiene menor pendiente?; ¿y la que tiene mayor pendiente?

55.- Hallar los puntos de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 80$ para $y \geq 0$ más cercanos y más alejados del punto (1,2). (Nota: Hallar los extremos de una función f monótona y positiva es equivalente a hallar los extremos de f^2).

56.- Cada lado de un cuadrado tiene longitud $\mathcal{L}$. Calcular el lado del cuadrado de área máxima que puede circunscribirse al cuadrado dado.

57.- Dada una esfera de radio R, calcular el radio r y la altura h del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en dicha esfera.

58.- La base de un triángulo está en el eje OX, un segundo lado se encuentra sobre la recta $y = 3x$, y el tercer lado pasa por el punto (1,1). Si se desea que el área del triángulo sea mínima, ¿cuál debe ser la pendiente del tercer lado?

59.- Una viga de madera tiene una sección rectangular de altura h y anchura p. Si la resistencia S de la viga es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco de 24 pulgadas de diámetro?

60.- Se trata de excavar un túnel en la roca para la conducción de agua. La forma del túnel debe ser la de un semicírculo sobre un triángulo de sección de K m^2. El coste de la excavación es proporcional a la suma de la altura total en el punto donde ésta es máxima, con el perímetro de la semicircunferencia. Hallar las dimensiones del túnel que minimizan el coste total.

61.- Un concierto tendrá lugar en un recinto deportivo S semicircular de radio R: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \ \ y \geq 0\}$. Se trata de llevar un cable desde un punto A de coordenadas $(R, 0)$ hasta otro punto B de coordenadas $(-R/2, 0)$. Para ello existen dos posibilidades:
a) llevar un cable sencillo por la semicircunferencia desde A hasta un punto C, y desde C, ir en línea recta hasta B con un cable reforzado, o bien,
b) llevar directamente un cable reforzado desde A hasta B en línea recta.
El cable sencillo cuesta una cantidad K_1 por unidad de longitud, y el cable reforzado una cantidad $K_2 = 2K_1$. Estudiar cuál de las dos posibilidades es la óptima para que el coste sea mínimo.

Cálculo diferencial para funciones reales de variable real. Soluciones

1.- Soluciones primera columna:
f derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
r derivable $\forall t \in \mathbb{R}$.
z derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.
f derivable $\forall t \in \mathbb{R} - [-1, 0]$.
g derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
h derivable $\forall u \in \mathbb{R}$.

Soluciones segunda columna:
g derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.
s derivable $\forall t \in (-3, +\infty)$.
y derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.
h derivable $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
f derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
f derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.- f es derivable en $x = 1$ y en $x = -1$ discontinuidad de salto.

3.- Como g es derivable en $x = 0$ es continua en $x = 0$ y por tanto f es continua en el punto (0,1) en la dirección de la recta $y = 1 - x$.

4.- Para que g sea continua en $x = 0$ f debe ser acotada.

5.- Indicación: Aplicar la definición de derivada y la existencia de límites direccionales cuando existe el límite global.

6.- $Domh' = \mathbb{R} - \{0\}$ y $h'(y) = \begin{cases} 2y\ , & y > 0 \\ \dfrac{2}{(1-y)^2}, & y < 0 \end{cases}$

h es inyectiva en $\mathbb{R}$ ya que es estrictamente creciente.

7.-

i) $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$
ii) $(\frac{32}{81}, -\frac{256}{243})$
iii) $x = 1$ y $x = -1$
iv) $x = 2$ y $x = -2$
v) $b = -1$ y $c = 1$.

8.-

i) V
ii) F
iii) F
iv) F

9.- Indicación: Aplicar la caracterización por sucesiones de punto de acumulación y el criterio secuencial.

10.-

$y'(x) = e^{-x}(1 - x)$
$y'(x) = xe^{x}(1 + \frac{x}{2})$; $y''(x) = e^{x}(\frac{x^2}{2} + 2x + 1)$
$y'(x) = -c_1e^{-x} - 2c_2e^{-2x}$; $y''(x) = c_1e^{-x} + 4c_2e^{-2x}$.

11.- Indicación: aplicar la regla de la cadena.

12.- $g'(0) = h'(0) = 2$.

13.- $\frac{36}{5}$ millas/hora.

14.- $\frac{5}{4\pi}$

15.- Derivar implicitamente la ecuación $x^3 + y^3 = 1$.

16.- Derivar implicitamente la ecuación $xsen(xy) + 2x^2 = 0$.

17.-

$$r_T: \ y = 0; \quad r_N: \ x = 1$$
$$r_T: \ y = 1/2x + 1/2; \quad r_N: \ y = 3 - 2x$$
$$r_T: \ y = b; \quad r_N: \ x = 0$$

18.- Derivando la ecuación y sustituyendo en el punto (1,0) obtenemos $2 + f' + f' = 0$.

19.- La recta tangente a $2x^2 + 3y^2 = 5$ es $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

20.- La ecuación de la recta tangente a $y = y(x)$ en el punto (1,0) es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

21.- Indicación: Utilizar la definición de diferencial de una función en un punto.

22.- 180π.

23.- Indicación: Utilizar la definición de diferencial de una función en un punto.

24.- Teorema del valor medio y ver que $\frac{1}{x_n}$ es convergente.

25.- Aplicar el teorema del valor medio; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\alpha$ y

$$\lim_{x\to+\infty}((1+x)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}})=1$$

26.- No contradice porque f no es derivable en el intervalo.

27.- Aplicar Bolzano a la función $g(x)=f(x)-x$.

28.- Aplicar los teoremas de Rolle y Bolzano.

29.- Aplicar los teoremas de Rolle y Bolzano.

30.- Aplicar los teoremas de Rolle y Bolzano.

31.- Aplicar Bolzano.

32.- Ver que $h(x)=f(x)-g(x)$ es creciente y $h(x_0)=0$.

33.- Rolle.

34.-

i) Definir $g(x)=f(x)-x$
ii) Ver que $\frac{1}{1+e^x}$ no puede valer 0.
iii) Aplicar el teorema del punto fijo.
iv) Ver que $f(x)=\cos x$ verifica el apartado iii).

35.- Aplicar el teorema del valor medio.

36.- Aplicar Rolle y Bolzano.

37.- Aplicar Rolle y Bolzano. $x\in(0,1)$.

38.- Definir $g(x)=f(x)-f(x+a)$ y aplicar el teorema de Bolzano.

39.- Aplicar el teorema de Rolle a la función $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ para estudiar la existencia y a $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ para comprobar la unicidad.

40.- Probar que $f'(x)=0$.

41.-

i) F
ii) F
iii) V
iv) V
v) V
vi) V.

42.-

0	1
0	0
$+\infty$	1
1	0
0	0
0	e
1	1

43.- Indicación: aplicar la regla de l'Hôpital.

44.-

$$T_f(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} \qquad T_g(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$$

$$T_h(t) = 1 - t^2 + t^4 \qquad T_r(t) = t^2$$

45.-
i) $n = 4$.
ii) $n = 3$.
iii) $\theta = 0.2$. La diferencia entre los valores de n hallados en los apartados (i) y (ii) se debe a que en (i) hemos tomado $\theta = 1$, que es el peor valor posible para θ.

46.- Indicación: Usar el desarrollo de Taylor de f entorno al cero y ver que $f'(0) > 0$.

47.- Indicación: Usar el desarrollo de Taylor de f entorno al cero, y evaluar la función en 1 y -1 para demostrar que existen $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \in (-1,0)$ tales que: $f^{3)}(s)+f^{3)}(t) = 6$.

48.-

z tiene mínimos absolutos en $x = -2$ y en $x = 2$ y máximo relativo en $x = 0$.
s tiene mínimos absolutos en $t = 0$.
h tiene un máximo absoluto en $t = 1$ y un máximo relativo en $t = 2$.

49.-

h tiene un máximo absoluto en $x = 1$ y un mínimo absoluto en $x = -1$.
y tiene un máximo absoluto en $x = -3$ y un mínimo absoluto en $x = \frac{3}{2}$.
$x = 3$ es un máximo relativo.

50.- Indicación: Usar la fórmula de Taylor y estudiar el signo del resto, o bien, estudiar la monotonía de la función diferencia de los dos términos de la desigualdad.

51.- ii) h es creciente y tiene un máximo en $z = 0$ y un mínimo en $z = -1$.

52.-

i) Si $p > 1$ $x = 0$ mínimo y $x = 1$ máximo.
Si $0 < p < 1$ $x = 1$ mínimo y $x = 0$ máximo.
ii) Evaluar la función en los extremos.

53.- Indicación: derivar implícitamente, ver si la derivada se anula, y en caso afirmativo estudiar el signo de las derivadas sucesivas (siempre suponiendo condiciones de derivabilidad.)

54.- La recta de menor pendiente es la tangente en $x = 2$ y la de mayor pendiente la tangente en $x = 5$.

55.- (4,8) es el punto más cercano y $(-\sqrt{8}0, 0)$ el más alejado.

56.- lado= $\mathcal{L}\sqrt{2}$.

57.- El radio $r = \frac{\sqrt{8}}{3}R$ y la altura $h = \frac{4R}{3}$.

58.- La pendiente del tercer lado es $m = -3$.

59.- La altura $h = 8\sqrt{6}$ y la anchura $p = 8\sqrt{3}$.

60.- El radio del semicírculo $R = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}}$ y la altura del triángulo $h = \frac{K}{R} - \frac{\pi}{2}R = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}}$.

61.- b).

Capítulo 7. Cálculo diferencial para funciones de variable vectorial

1.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones reales de variable vectorial:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy \qquad g(x,y) = xy + x/y + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r(u,v) = e^{-\frac{v^2}{u}} \qquad h(r,s,t) = e^{rst} + |t|$$

$$z(x,y) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{y}}\right) \qquad h(x,y,z) = x^y + \cos\left(\frac{y^2}{z}\right)$$

2.- Calcular, analíticamente y geométricamente, las derivadas parciales en el origen de coordenadas de las siguientes funciones reales de variable vectorial:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ xy \neq 0 \\ 3x+5y & , \ xy = 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2/y & , \ y \neq 0 \\ 0 & , \ y = 0 \end{cases}$$

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & , \ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & , \ x < 0 \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} 2xy + x & , \ y \geq 0 \\ x - x^2 - y^2 & , \ y < 0 \end{cases}$$

$$r(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2+1 & , \ xy \neq 0 \\ x - y & , \ xy = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(xy) & , \ x \neq 0 \\ y & , \ x = 0 \end{cases}$$

3.- Calcular la derivada en el origen de coordenadas y en la dirección del vector $v = (1,-1)$ para cada una de las funciones del ejercicio anterior.

4.- Para las funciones de los ejercicios 1 y 2, estudiar la diferenciabilidad y, si es posible, calcular la diferencial en (0,0). Análogamente, para las siguientes funciones de variable vectorial:

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2(y+1)\operatorname{sen}(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5.- Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\nabla f(0) = 0$ y que f es diferenciable en 0.

6.- Sea $f\colon E \to \mathbb{R}$ diferenciable en E abierto conexo de $\mathbb{R}^n$.
a) Demostrar que si $D_1 f(x) = 0$, $\forall x \in E$, entonces f sólo depende de las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$.
b) Demostrar que si $df(x) = 0$, $\forall x \in E$, entonces f es constante en E.

7.- Estudiar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:
i) Toda función real de variable vectorial $f(x,y)$ continua en un punto (a,b), es diferenciable en (a,b).
ii) Toda función real de variable vectorial $f(x,y)$ para la cual existe $\nabla f(a,b)$, $(a,b) \in Dom f$, es continua en este punto (a,b).
iii) Toda función real de variable vectorial $f(x,y)$ continua en un punto (a,b) y para la cual existe $\nabla f(a,b)$, es diferenciable en (a,b) y $df(a,b) = \nabla f(a,b)$.
iv) Toda función real de variable vectorial $f(x,y)$ para la cual existen $D_v f(a,b)$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in Dom f$, es diferenciable en (a,b).

8.- Sean $a = 10$cm y $b = 24$cm los lados de un rectángulo. ¿Cuánto variará la diagonal d de este rectángulo si el lado a se alarga 4mm y el lado b se acorta 1mm? Calcular el valor aproximado de esta variación y compararlo con el valor exacto.

9.- Una caja cerrada de dimensiones 10cm, 8cm y 6cm, está hecha de madera de 2mm de grueso. Determinar el volumen aproximado del material utilizado para construirla.

10.- Demostrar que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

11.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones, en el punto y según el vector que se indica:

$z(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ en $(x,y) = (1,1)$, $v = (2,1)$

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$ en $(x,y,z) = (-1,1,7)$, $v = (3,4,-12)$

$g(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ en $(x,y,z) = (\ln 3, 3/2, -3)$, $v = (1,1,2)$

12.- Dada la función real:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} & , \quad xy \neq 0 \\ x+y & , \quad xy = 0 \end{cases}$$

Calcular las derivadas parciales de $f(x,y)$ en (0,0). Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
i) Existe $\nabla f(0,0) = (1,1)$.
ii) $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ amb $\|v\| = 1$, $D_v f(0,0) = v_1 + v_2$.

13.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy + x + y$, calcular la variación de $f(x,y)$ en el punto (1,0) y en la dirección del vector (-1,1).

14.- Calcular la variación de la función $r(u,v) = u^2 - v^2$ en el punto (1,1) y en la dirección que forma un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje OX.

15.- Dada la función de densidad $\delta(x,y) = 48 - 4x^2/3 - 3y^2$, calcular su coeficiente de variación:
i) En el punto (1,-1) y en la dirección de máxima variación de esta densidad.
ii) En el punto (1,2) y en la dirección del eje de abcisas.
iii) En el punto (2,2) y en la dirección de la bisectriz.

16.- Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial, y calcular la matriz jacobiana en el punto indicado:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = (x^2+y^2, e^{xy}) & \text{en } (1,1) \\ g(x,y) = (xy, \operatorname{sen} x, x^2 y) & \text{en } (\pi, \pi/2) \\ h(x,y) = (e^{x+y}, \ln x) & \text{en } (1,0) \\ F(x,y,z) = (xyz, x^2 z) & \text{en } (2,-1,-1) \\ H(x,y,z) = (xy, xz, yz) & \text{en } (1,1,-1) \end{array}$$

17.- Un lado de un rectángulo de 20m aumenta con una velocidad de 5m/s, y el otro lado de 30m disminuye a una velocidad de 4m/s. ¿A qué velocidad varían el perímetro y el área del rectángulo?

18.- Calcular las siguientes derivadas:

$$\frac{dz}{dt} \quad \text{siendo } z = f(t\cos t, e^t) \text{ , } f \text{ diferenciable.}$$

$$\frac{du}{dt} \quad \text{siendo } u = x^2+y^2+z^2 \text{ con } x = f(t), y = tf(t), z = f(t^2) \text{ , } f \text{ derivable.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{siendo } z = f(x,y) \text{ , } f \text{ diferenciable, con } x = uv \text{ , } y = u/v.$$

19.- Calcular $\frac{dz}{dt}$ en las situaciones siguientes:

$$z = x + y \qquad \text{con } x = 4(t^2 - 1)\ ,\ y = \ln t$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{con } x = e^t\ ,\ y = \operatorname{sen} t$$

$$z = xy + xu + yu \qquad \text{con } x = t\ ,\ y = \cos(2t)\ ,\ u = \operatorname{sen}(2t)$$

20.- Sea la función real $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Consideremos el cambio a coordenadas cilíndricas y el cambio a coordenadas esféricas definidos respectivamente por las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$

En ambos casos, calcular el jacobiano del cambio y la expresión de la función f en las nuevas variables.

21.- Demostrar que si $z = f(x + ay)$ donde f es derivable y $a \in \mathbb{R}$, entonces se verifica la siguiente relación:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}$$

22.- Demostrar que la función $z = yf(x^2 - y^2)$, siendo f una función derivable, satisface la ecuación:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

23.- Demostrar que la función $z = f(x^2 + y^2)$, siendo f una función derivable, satisface la ecuación:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

24.- Comprobar que si $u(x, y, z) = f(xyz)$, siendo f una función 3-veces derivable en $\mathbb{R}$, se verifica :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = F(xyz)$$

y hallar la función F.

25.- Sea la función $f(x, y, z) = xy + x^2z + 3yz$, donde $x(s, t) = s^2 + t^2$, $y(s, t) = s^2 - t^2$ y $z(s, t) = 2st$ son tales que definen una función $F(s, t)$. Calcular $dF(s, t)$.

26.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(y+2x))$, y sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(u, v, w) \overset{\text{def}}{=} (u+2v^2+3w^3, 2v-u^2)$. Calcular $df(x, y)$, $dg(u, v, w)$ y $d(f\circ g)(1, -1, 1)$.

27.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:
i) La derivada direccional de $h(x,y) = y^2/x$ en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$ y en la dirección de la normal a la misma es igual a cero.
ii) Dada la función $f(x,y) = x + |y|$, un vector normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (0,0,0) es $v_N = (1,1,-1)$.
iii) La superficie $z = f(x,y)$, donde f se define:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & , \quad xy \neq 0 \\ 1 & , \quad xy = 0 \end{cases}$$

tiene un plano tangente horizontal en el punto (0,0,1) de ecuación $z = 1$.
iv) El paraboloide $3x^2 + 2y^2 = 2z + 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ se cortan en el punto (1,1,2) formando un ángulo recto.

28.- Calcular el plano tangente y la recta normal a las siguientes superficies en el punto indicado:

$$\begin{array}{ll} x^2y^2 + xz - 2y^3 = 10 & P = (2,1,4) \\ z = \operatorname{sen}(xy) & P = (1,\pi,0) \\ z = y + \ln(x/z) & P = (1,1,1) \end{array}$$

29.- Calcular la recta tangente y el plano o recta normal, según el caso, a las siguientes curvas en el punto indicado:

$$x^2y + y^3 = 10 \qquad P = (1,2)$$

$$\ln(2x - y^2) + 3x^2y = 3 \qquad P = (1,1)$$

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 4t^3 \end{cases} \qquad P = (2,1,4)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ xy + z = 0 \end{cases} \qquad P = (2,1,-2)$$

30.- Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ en el punto (2,2,1) y en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el mismo punto.

31.- Calcular la variación de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ en el punto (3,4,5) y a lo largo de la curva intersección de las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$.

32.- Calcular cómo varía $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en el punto (1,0,2) y en la dirección del vector normal al cono de revolución $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ en el mismo punto.

33.- Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el punto (1,2,-2) y a lo largo de la curva $r(t) = (t, 2t^2, -2t^4)$.

34.- Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy + x & , \quad y \geq 0 \\ x - x^2 - y^2 & , \quad y < 0 \end{cases}$$

i) Estudiar la diferenciabilidad de f en (0,0).
ii) Calcular la variación de f en (0,0) y a lo largo de la recta $y = -2x$.
iii) Probar que el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (0,0,0) proyectado sobre el plano $y = 0$ forma un ángulo de 45° con el eje OX.

35.- Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^3$ forman con los planos de coordenadas tetraedros de volumen constante, y calcular este volumen.

36.- Demostrar que la suma de las distancias al origen de las intersecciones con los ejes de un plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ es independiente del punto de tangencia.

37.- Sea la función $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y^3), \cos x - e^y)$. Justificar que f es localmente inversible en (0,0). Calcular $df^{-1}(0,0)$.

38.- Sea la función $g(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Justificar que en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^3$, g admite una función inversa diferenciable y que, además, g es globalmente inversible.

39.- Sea $f(x,y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$ definida en $A = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Justificar que f es localmente inversible en cualquier punto de A, pero no lo es globalmente.

40.- Estudiar si cada una de las siguientes ecuaciones define localmente una función implícita $y = y(x)$ en un entorno del punto (a,b) indicado. En caso afirmativo, calcular $y'(a)$:

$$x^2y + 3y^3x^4 = 4 \qquad \text{en } (1,1)$$
$$x^3 + 4y\operatorname{sen}(xy) = 0 \qquad \text{en } (0,\pi)$$

41.- Probar si la ecuación $x + y + z + \cos(xyz) = 0$ define localmente una función implícita $z = f(x,y)$ en un entorno del punto (0,0,-1). En caso afirmativo, calcular $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$:

42.- Probar si, localmente, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$$

define en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (0,2,1,1)$ dos funciones implícitas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. En caso afirmativo, comprobar si los vectores normales a las superficies $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son ortogonales en el punto (0,2,1).

43.- Probar si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u + v + x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ u^2 + v^2 + u - 2xyz = 0 \end{cases}$$

define en un entorno del punto $(x, y, z, u, v) = (0, 0, 0, -1/2, 1/2)$, dos funciones implícitas $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$. En caso afirmativo, calcular du y dv en el origen de coordenadas.

44.- Supongamos que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define tres funciones implícitas $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Demostrar que se verifica la relación:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

45.- Probar si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} e^t - x^2 + y^2 = 1 \\ t - xy = 1 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ en un entorno del punto $(t, x, y) = (0, -1, 1)$. En caso afirmativo, dicho sistema de ecuaciones define localmente una curva $C \subset \mathbb{R}^3$, expresada en coordenadas paramétricas por $r(t) = (t, x(t), y(t))$. Calcular la variación de $f(t, x, y) = txy - x + y$ en el punto (0,-1,1) y a lo largo de esta curva C.

46.- La ecuación $f(y/x, z/x) = 0$ define implícitamente a z como una función $z = z(x, y)$. Demostrar que se verifica:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

47.- Demostrar que la función $z = \arctan(y/x)$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

48.- Demostrar que la función $u = A\,\mathrm{sen}(a\lambda t + \varphi)\,\mathrm{sen}(\lambda x)$, A, a, λ, φ constantes, satisface la ecuación de las vibraciones de cuerda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

49.- Sea $z = f(x+ay) - g(x-ay)$, donde f y g son funciones dos veces derivables de una variable, y a es una constante. Demostrar que se verifica:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2(f''(x+ay) - g''(x-ay))$$

50.- Probar que la función $z = -x^2y + f(xy) + g(x)$, donde f y g son funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, satisface la relación:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

51.- Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 asociado a cada una de las siguientes funciones, en un entorno del punto indicado:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2 & P = (1,2) \\ g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz & P = (1,1,1) \\ z(r,t) = \operatorname{sen}(r^2 + t^2) & P = (0,0) \\ h(x,y,z) = e^{x+y+z} & P = (0,0,0) \end{array}$$

52.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:
i) Si (a,b) es un punto estacionario de una función real $f(x,y)$, entonces existe el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ y es horizontal.
ii) Si (a,b) es un punto de ensilladura de una función real $f(x,y)$, entonces no puede existir un plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$.
iii) Una función real $f(x,y)$ que no es diferenciable en un punto $(a,b) \in Dom f$ no tiene extremos.
iv) Una función real $f(x,y)$, diferenciable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y para el cual $\nabla f(a,b) = \vec{0}$, tiene un extremo local en (a,b).
v) Una función real $f(x,y)$, tal que $\forall (x,y) \in Dom f$ se verifica que $\nabla f(x,y) \neq \vec{0}$, no puede alcanzar ningún extremo en su dominio.

53.- Calcular los puntos estacionarios y estudiar los extremos locales y puntos de ensilladura, si existen, de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$$
$$g(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$$

54.- ¿ En qué punto la derivada de la función $f(x,y) = x^3 + 3y^3 - x^2 + y^2$ según la dirección del vector (1,2) alcanza un extremo? ¿De qué tipo de extremo se trata? ¿Cuál es el valor de la derivada direccional en este punto?

55.- Encontrar el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular contenido en el primer octante con un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano $x+y+z=1$.

56.- Un pentágono está compuesto por un rectángulo y un triángulo isósceles con la base sobre uno de sus lados. Sabiendo que el perímetro del pentágono tiene un valor fijo p, encontrar las dimensiones de sus lados para que el área sea máxima.

57.- Comprobar si la función $z = z(x,y)$, definida implícitamente por la ecuación $xyz + \operatorname{sen}(z-3) - x^2y^2 - x - y = 0$, tiene un máximo o un mínimo en el punto $(x,y) = (1,1)$.

58.- Dada la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 0$, determinar los puntos en cuyo entorno z es función implícita de x y de y, y estudiar los extremos relativos de esta función $z(x,y)$.

59.- Sea la distribución de puntos:

$$(-4,1),(-3,2),(-2,3),(-1,4),(0,4).$$

Ajustar a esta distribución una recta por el método de los mínimos cuadrados.

60.- Hallar los coeficientes que mejor ajusten los datos al utilizar el método de mínimos cuadrados en los siguientes casos:
i) $y(x) = ax^2 + bx + c$.
ii) $y(x) = ae^{bx}$.

61.- Estudiar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:
i) Una función real f, continua en la región $A = \{z \in C : |z+1| \leq 1\}$, alcanza un máximo y un mínimo absolutos en A.
ii) Una función real $f(x,y)$ continua en todos los puntos del rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) \neq \vec{0}$, $\forall (x,y) \in (a,b)\times(c,d)$, no alcanza ningún extremo en $\mathcal{R}$.
iii) En caso de que existan el máximo y mínimo absolutos de la función real $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$ sobre el círculo $x^2+y^2 \leq 1$, estos se alcanzan en la frontera.

62.- Calcular, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de las siguientes funciones sobre el conjunto indicado:

$f(x,y) = x^2 + y^2$	sobre el segmento $\{x+y=1\ ,\ 0 \leq x \leq 1\}$
$f(x,y) = x^2 + y^2$	sobre la región $\{y + x^2 \leq 1\ ,\ y \geq 0\}$
$g(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$	sobre el cuadrado $[-5,5]\times[-5,5]$
$z(x,y) = x + y$	si $x^2+y^2 \leq 1$ y $y \geq 0$
$r(x,y,z) = xyz$	si $x+y+z \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$

63.- Hallar los extremos de las siguientes funciones, sujetos a la condición indicada:

$d(x,y) = x^2 + y^2$	sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$
$z(x,y) = xy$	sobre la elipse $2x^2 + 9y^2 = 18$
$u(x,y) = xy^2$	sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$
$g(x,y,z) = xyz$	sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
$h(x,y) = e^x + e^y$	sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

64.- Calcular el máximo y el mínimo absolutos, si existen, de las siguientes funciones sobre el conjunto indicado:

$f(x,y) = x^2 - y^2$	sobre $x^2 + y^2 \leq 1$
$h(x,y,z) = x + y + z$	sobre $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
$r(x,y,z) = xy^2z^2$	sobre $x + y + z = 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
$z(x,y) = (x-1)^2 + y^2$	sobre $x^2 + y^2 \leq 4$

65.- Hallar los puntos de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z = 9$ cuya suma de coordenadas es máxima.

66.- Calcular la distancia máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2+6xy+5y^2 = 8$.

67.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \geq 0 \text{ ó } y \geq 0\}$.

68.- Estudiar los extremos de la función real $f(x,y,x) = x^2y^2z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

69.- Hallar los puntos de la curva

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

que están más cerca del origen de coordenadas.

70.- Se tiene que construir un depósito en forma de cilindro circular recto y base semiesférica de volumen constante dado V. Calcular las dimensiones que hacen el área mínima.

71.- Se desea hacer una construcción sobre un terreno T que cumple: $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x \ , \ x^2 - y^2 \leq 5\}$. Un ingeniero pretende trazar dos líneas rectas de ferrocarril que vayan del punto (6,0) del plano al punto más próximo y al punto más alejado del terreno. ¿Qué longitud de vía deberá construirse ?

Anexo

72.- Demostrar que, localmente, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y + e^t = 2 \\ xy + e^{tx} = 2 \end{cases}$$

define $x = x(t)$ y $y = y(t)$, funciones implícitas derivables en un entorno del punto $(t, x, y) = (0, 1, 1)$.

Sea $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t), y(t))$ tal que Imr define una curva C en el plano, y sea la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + \operatorname{sen}(xy - 1)$.
i) Si la curva C es regular en $t = 0$, calcular la variación de f en el punto (1,1) a lo largo de C.
ii) Demostrar que la curva C y la curva de nivel -1 de $f(x,y)$ se cortan en el punto (1,1) formando un ángulo recto.

73.- Demostrar que, localmente, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

define $x = x(z,u)$ y $y = y(z,u)$, funciones implícitas diferenciables en un entorno del punto $(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$. Demostrar que la función $F(z,u) \stackrel{\text{def}}{=} (x(z,u), y(z,u))$ admite función inversa diferenciable en un entorno del punto (0,1).

74.- Considerar $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay$, $a \in \mathbb{R}$.
i) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x,y) = 0$ define implícitamente una función $y = y(x)$, $y \in C^\infty$, en un entorno de (0,0)? ¿La ecuación anterior define implícitamente $x = x(y)$ derivable en un entorno de (0,0) para algún valor de a?
ii) Sea $y = f(x)$ la función implícita determinada por $h(x,y) = 0$, definida en cierto entorno abierto U de 0. Calcular el valor del parámetro a para que el polinomio de Taylor de segundo grado de f en el origen tome el valor 1 en el punto $x = 1$. ¿Para qué valores de a tiene f un extremo en $x = 0$?
iii) Sea $F: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (e^{x+y} + x^2 - 1, f(x) + y\cos x)$, ($U$ es el entorno de 0 donde f está definida). Demostrar que F admite función inversa diferenciable en un entorno de (0,0). Demostrar que la función $G = F \circ F + F^{-1}$ es diferenciable en (0,0) y calcular $dG(0,0)$.

75.- Considerar la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.
i) Hallar los puntos de la curva de nivel $f(x,y) = k$, $k > 0$ para los que el módulo del gradiente de $f(x,y)$ toma sus valores máximo y mínimo respectivamente.
ii) Sobre la curva de nivel del apartado anterior, dibujar el vector gradiente de f en los puntos hallados, y con la información obtenida dibujar de forma aproximada el mapa de curvas de nivel de f.

76.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente (o estrictamente decreciente), y considerar la función $G = h \circ f$.
i) Demostrar que los puntos de extremo relativo para f y G coinciden.
ii) Si f es diferenciable en $a \in A$ y h es derivable en $f(a)$, demostrar que a es un punto estacionario de G si y sólo si a es un punto estacionario de f.
iii) Determinar la distancia máxima y mínima del punto (-1,0) al conjunto del plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \ , \ y \geq x - 1\}$.

77.- Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 1 & , \quad xy \geq 0 \\ |x - 2y| - 1 & , \quad xy < 0 \end{cases}$$

i) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
ii) Calcular el gradiente de f en (0,0). Hallar la derivada direccional de f en (0,0) y en la dirección de la recta $y = -x$. Deducir de los cálculos anteriores que f no es diferenciable en (0,0); razonar la respuesta.
iii) Hallar los puntos de la curva plana que resulta de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $z = 0$, para los que la suma de coordenadas es máxima o mínima.

78.- Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.
ii) Demostrar que la ecuación $f(x,y) + z^2 + e^{z+1} = 2$ define implícitamente $z = z(x,y)$ en un entorno $V \times B_r(-1)$ del punto $(1, 0, -1)$ y que $(1,0)$ es un punto estacionario de $z(x,y)$.
iii) Considerar la función $H: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$H(x,y) = (xyz(x,y), x^2 + y^2 + z^2(x,y)) \ , \ (x,y) \in V$$

(donde V es el entorno de (1,0) del apartado anterior, y $z(x,y)$ es la función implícita local). Demostrar que H es localmente inversible en un entorno de (1,0) y calcular $dH^{-1}(0,2)$ justificando su existencia.

79.- Calcular el máximo de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$ condicionado por $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Usar este resultado para demostrar la siguiente desigualdad, que es válida para $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos cualesquiera:

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

80.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función tal que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq K < 1$.
i) Demostrar que la función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (x+f(y), y+f(x))$, admite una inversa local $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
ii) Demostrar que f tiene un único punto fijo.
iii) Suponed que $f(0) = 0$, y considerar la función real $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (f \circ f)(x) + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $h(x) = 0$ tiene una única raíz real.

81.- Demostrar que $u = x^3 f(y/x, z/x)$, donde f es una función diferenciable, satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$$

82.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g = (u,v)$ tal que $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $v(x,y,z) = x + y + z$. Considerar $h = f \circ g$. Demostrar que:

$$\|\nabla h(x,y,z)\|^2 = 4u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4v\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

83.- Sea $F\colon A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F \in C^2(A)$, A abierto. Sea $(x,y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $(a,b) = (a_1, \ldots, a_n, b) \in A$ tal que $F(a,b) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Sea $y(x)$ la función implícita definida por $F(x,y) = 0$ en un entorno de (a,b) tal que $y(a) = b$.
i) Demostrar que si $y(x)$ tiene un extremo relativo en el punto a, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b) = 0 \ , \ 1 \leq i \leq n$$

ii) Demostrar que los elementos de la matriz Hessiana $Hy(a)$, siendo a el extremo relativo de $y(x)$, son de la forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(a) = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a,b)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq n$$

iii) Hallar los extremos relativos de $y(x)$ para el caso particular:

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 27$$

84.- Sean $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}(1/y) & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y = 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{x+y} + \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}dt$$

i) Calcular $\nabla f(a,0)$ y $\nabla g(a,b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
ii) Calcular la variación de g en el punto (0,0) y en la dirección de la recta $y = x$. ¿En

qué dirección es máxima la derivada direccional de g en (0,0), y cuál es el coeficiente de máxima variación?
iii) Demostrar que la función $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F \stackrel{\text{def}}{=} (f, g)$, es diferenciable en (0,0). Deducir que $G = F \circ F$ es diferenciable en (0,0) y calcular $dG(0,0)$.
iv) Si existen el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (0,0,0) y plano tangente a $z = g(x,y)$ en el punto $(0,0,1/\pi)$, ¿ son ortogonales?

85.- Sea la función $f: [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = 1 + x^3 + y^2 + 2\int_0^{3x} \sqrt{1+t^2}dt + x\int_0^{y^2} e^{t^2/2}dt$$

i) Demostrar que $f \in C^2([-1,1] \times [-1,1])$.
ii) Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado, que aproxima a $f(x,y)$ en un entorno del origen de coordenadas; calcular el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,1)$; y comparar resultados.
iii) Justificar la existencia de extremos absolutos de f en el subdominio: $[0,1] \times [0,1]$, y hallar los puntos en los que f alcanza el máximo y el mínimo absoluto.
iv) Demostrar que la ecuación $f(x,y) = z^2 + \ln z$ define localmente una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno de (0,0,1), y comprobar si (0,0) es un punto estacionario de $z(x,y)$.

86.- En el plano XY, se considera el recinto T triangular de vértices $(0,0), (a,0)$ y $(0,b)$, $a > 0$, $b > 0$.
i) Dado un punto $(x,y) \in \overset{\circ}{T}$, al unirlo con los vértices de T se obtienen tres triángulos. Si A_1, A_2 y A_3 son las áreas de los tres triángulos, demostrar que hay un único punto $(x,y) \in \overset{\circ}{T}$, que minimiza la suma de las áreas al cuadrado, es decir, que es un mínimo de la función $Q(x,y) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.
ii) Hallar, si existen, los extremos absolutos de $Q(x,y)$ en T.

87.- Probar que los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son dos mínimos para la función $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ sobre la curva $y = 1/x$, mientras que son, respectivamente, un máximo y un mínimo para $f(x,y)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$. Razonar geométricamente la afirmación anterior e interpretar el resultado.

Cálculo diferencial para funciones de variable vectorial. Soluciones

1.-

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3ay \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y + \frac{1}{y} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3ax \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x - \frac{x}{y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

2.-

$D_1f(0,0) = 3$, $D_2f(0,0) = 5$
$D_1g(0,0) = 0$, $D_2g(0,0) = 0$
no existe $D_1z(0,0)$, $D_2z(0,0) = 0$
$D_1h(0,0) = 1$, $D_2h(0,0) = 0$
$D_1r(0,0) = 1$, $D_2r(0,0) = -1$
$D_1u(0,0) = 0$, $D_2u(0,0) = 1$

3.- El valor de la derivada para la última función del ejercicio anterior es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.-

g es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\nabla g(0,0) = (0,0)$, luego $dg(0,0) = 0$.
h es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\nabla h(0,0) = (0,0)$, luego $dh(0,0) = 0$.

5.- Probar que $f(0) = 0$ y usar la definición de derivada parcial y de diferenciabilidad en un punto.

6.-

a) Indicación: Demostrar que foi_1 es constante.
b) Se deduce de a).

7.-

i) F

ii) F
iii) F
iv) F

8.- Valor aproximado = 0.0615385. Valor exacto = 0.064727.

9.- $75.2cm^3$.

10.- Usar la definición de diferencial de una función en un punto.

11.-

$$D_{(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})}z(1,1)=\frac{6}{\sqrt{10}}$$
$$D_{(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{-12}{13})}f(-1,1,7)=\frac{48}{13}$$
$$D_{(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})}g(\ln 3,\frac{3}{2},-3)=-\frac{3}{\sqrt{6}}\sin\frac{3}{2}-\frac{3}{\sqrt{6}}\cos\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

12.-

i) V
ii) F

13.- $-2\sqrt{2}$.

14.- $1-\sqrt{3}$.

15.-

i) $\frac{194}{3\sqrt{97}}$
ii) $-\frac{8}{3}$
iii) $-\frac{52}{3\sqrt{2}}$

16.-

$$df(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ e & e \end{pmatrix}$$

$$dg(\pi,\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \pi \\ -1 & 0 \\ \pi^2 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

$$dh(1,0)=\begin{pmatrix} e & e \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dF(2,-1,-1)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$dH(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

17.- El perímetro varía a una velocidad de 2m/s y el área del rectángulo a una velocidad de $70m^2/s$.

18.-

$$\frac{dz}{dt} = D_1 f(\cos t - t\sin t) + D_2 f e^t$$
$$\frac{du}{dt} = 2f(t)f'(t) + 2tf(t)[f(t) + tf'(t)] + 4f(t^2)tf'(t^2)$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}v + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{u}{v^2}$$

19.-

$$\frac{dz}{dt} = 8t + \frac{1}{t}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^t + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos t = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t} + \operatorname{sen}^2 t}} + \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{e^{2t} + \operatorname{sen}^2 t}}$$
$$\frac{dz}{dt} = \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) - 2t\operatorname{sen}(2t) - 2\operatorname{sen}^2(2t) + 2t\cos(2t) + 2\cos^2(2t)$$

20.- El jacobiano del cambio a coordenadas cilíndricas vale r y la expresión de la función f en las nuevas variables es $f(r,\theta,z) = \sqrt{r^2+z^2}$.
El jacobiano del cambio a coordenadas esféricas vale $r^2 \operatorname{sen}\theta$ y la expresión de la función f en las nuevas variables es $f(r,\theta,\varphi) = r$.

21.- Derivar implícitamente.

22.- Derivar implícitamente.

23.- Derivar implícitamente.

24.- $F(x,y,z) = f'(xyz) + 3xyzf''(xyz) + x^2y^2z^2f'''(xyz)$

25.-

$dF(s,t) = (4s^3 + 10s^4t + 8s^2t^2 + 2t^5 + 4s^2t^3 + 6s^2t - 6t^3)ds + (6s^3 - 4t^3 + 2s^5 + 10st^4 + 12s^3t^2 - 18st^2)dt$

26.-

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}$$
$$dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(f \circ g)(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6\cos 9 & 18\cos 9 \end{pmatrix}$$

27.-

i) F
ii) F
iii) F
iv) V

28.-

$$r_n: \ \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}; \quad P_t: \ 4x+y+z=13$$
$$r_n: \ \frac{x-1}{\pi} = y-\pi = z; \quad P_t: \ \pi x + y + z + 2\pi = 0$$
$$r_n: \ x-1 = y-1 = \frac{z-1}{-2}; \quad P_t: \ x+y-2z=0$$

29.- La recta tangente a $x^2y+y^3=10$ en el punto $P=(1,2)$ es $4x+13y=30$ y la recta normal $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13}$.
La recta tangente a la curva $(x(t),y(t),z(t)) = (t^2+1, 2t-1, 4t^3)$ en el punto $P=(2,1,4)$ es $(x,y,z)=(2,1,4)+\lambda(1,1,6)$ y el plano normal $x+y+6z=27$.

30.- $-\frac{2}{3}$

31.- 0

32.- $\frac{4}{\sqrt{5}}$

33.- $\frac{25}{27}$

34.-

35.- $V = \frac{9}{2}a^3$

36.- Indicación: Si (x_0,y_0,z_0) es el punto de tangencia, las distancias al origen de las intersecciones con los ejes del plano tangente son: $x = \sqrt{x}_0(\sqrt{x}_0+\sqrt{y}_0+\sqrt{z}_0)$, $y = \sqrt{y}_0(\sqrt{x}_0+\sqrt{y}_0+\sqrt{z}_0)$, $z = \sqrt{z}_0(\sqrt{x}_0+\sqrt{y}_0+\sqrt{z}_0)$.

37.- Aplicar el teorema de la función inversa.

$$df^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

38.- Aplicar el teorema de la función inversa y demostrar que g es inyectiva.

39.- Aplicar el teorema de la función inversa y demostrar que f no es inyectiva.

40.-

$$y'(1) = -\frac{7}{5}$$

No cumple las hipótesis del teorema de la función implícita

41.- Aplicar el teorema de la función implícita. $D_1 f(0,0) = -1$ y $D_2 f(0,0) = -1$.

42.- El teorema de la función implícita define en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (0,2,1,1)$, dos funciones implícitas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Los vectores normales a las superficies $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ no son ortogonales en el punto (0,2,1) ya que $\nabla u(0,2) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ y $\nabla v(0,2) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$.

43.- Aplicar el teorema de la función implícita. $du(0,0,0) = 0$ y $dv(0,0,0) = 0$.

44.- Derivar implícitamente la ecuación $F(x(y,z), y, z) = 0$ respecto de y, la ecuación $F(x, y(x,z), z) = 0$ respecto de z, y la ecuación $F(x, y, z(x,y)) = 0$ respecto de x.

45.- Aplicando el teorema de la función implícita se demuestra que el sistema de ecuaciones define localmente la curva C, $x'(0) = \frac{1}{4}$ y $y'(0) = -\frac{3}{4}$. La variación de $f(t,x,y) = txy - x + y$ en el punto (0,-1,1) y a lo largo de esta curva C es $-\frac{8}{\sqrt{26}}$.

46.- Derivar implícitamente la ecuación $f(y/x, z/x) = 0$.

47.- Derivar parcialmente la función $z = \arctan(y/x)$.

48.- Calcular las derivadas segundas de la función $u = A \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen}(\lambda x)$ que aparecen en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

49.- Aplicar la regla de la cadena y derivar dos veces.

50.- Aplicar la regla de la cadena.

51.-

$$P_2(f)(x,y) = 9 + 7(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2$$

52.-

i) V
ii) F
iii) F
iv) F
v) F

53.- (4,-2) es un mínimo local para f, y $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$ es un máximo para g.

54.- En el punto $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$ hay un valor mínimo de la derivada direccional y su valor es $-\frac{5}{9\sqrt{5}}$.

55.- $V = \frac{1}{27}$

56.- $(x, y, z) = (\frac{\sqrt{3}}{2}p(2-\sqrt{3}), \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p(2-\sqrt{3}))$

57.- $z = z(x, y)$ tiene un mínimo local en el punto $(x, y) = (1, 1)$.

58.- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $z \neq 1$, (0,0,0) máximo relativo y (0,0,2) mínimo relativo.

59.- $y = \frac{4}{5}x + \frac{22}{5}$

60.- Indicación para el apartado ii): Encontrar el punto (a, b) que minimiza la función: $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - [\ln a + bx_i])^2$.

61.-

i) V
ii) F
iii) V

62.- El valor máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre el segmento $\{x + y = 1 \ , \ 0 \leq x \leq 1\}$ vale 1 y se alcanza en los puntos (0,1) y (1,0). El valor mínimo absoluto vale $\frac{1}{2}$ y se alcanza en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

El valor máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la región $\{y + x^2 \leq 1 \ , \ y \geq 0\}$ vale 1 y se alcanza en los puntos (0,1), (1,0) y (-1,0). El valor mínimo absoluto vale 0 para (0,0).

El valor máximo absoluto de $g(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$ sobre el cuadrado $[-5, 5] \times [-5, 5]$ vale 502 para $(5, 5)$. El valor mínimo absoluto vale $-30\sqrt{15} - 98$ para los puntos $(-5, \sqrt{15})$ y $(\sqrt{15}, -5)$.

El valor máximo absoluto de $z(x, y) = x + y$ si $x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ y \geq 0$ vale $\sqrt{2}$ para $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. El valor mínimo absoluto vale -1 para (-1,0).

El valor máximo absoluto de $r(x, y, z) = xyz$ si $x + y + z \leq 1 \ , \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$ se obtiene en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, y el valor mínimo absoluto en los puntos (x, y, z) con $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$ que cumplan la condición $x + y + z \leq 1$.

63.- La función $d(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ alcanza al valor mínimo en (1,0) y en (-1,0).

La función $z(x, y) = xy$ sobre la elipse $2x^2 + 9y^2 = 18$ tiene valor máximo $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ para los puntos $(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1)$ y $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -1)$, y valor mínimo $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ en los puntos $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -1)$,

$(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 1)$.

La función $g(x,y,z) = xyz$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene valor máximo $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ en los puntos $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y valor mínimo $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ en los puntos $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

La función $h(x,y) = e^x + e^y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tiene valor máximo absoluto en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y valor mínimo absoluto en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

64.- El máximo absoluto de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq 1$ se alcanza en los puntos (1,0) y (-1,0) y el mínimo absoluto en los puntos (0,1) y (0,-1).

El máximo absoluto de $z(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq 4$ está en (-2,0) y el mínimo absoluto en (1,0).

65.- (3,3,3)

66.- La distancia máxima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ vale 2 y se encuentra en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y la distancia mínima vale 1 en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

67.- El valor máximo de f sobre A se encuentra en los puntos (-2,0) y (0,-2) y el valor mínimo en el punto (1,1).

68.- El valor máximo absoluto de f es $(\frac{r^2}{3})^3$ y se obtiene para $(x,y,z) : \ x^2 = y^2 = z^2 = \frac{r^2}{3}$. El valor mínimo absoluto de f es 0 y se obtiene en los puntos $(x,y,z) : \ x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$.

69.- (1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0) y (0,-1,0).

70.- $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$

71.- Deberá construirse una via de longitud $6 + \sqrt{13}$, siendo (3,2), o bien, (3,-2) el punto más próximo y (0,0) el punto más alejado.

Anexo

72.-

i) -3
ii) $r'(0) = (0, -1)$ y $\nabla f(1,1) = (0,3)$.

73.- Aplicar los teoremas de la función implícita e inversa.

$$J_F(0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

74.-

i) $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. No
ii) $a = -1, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
iii)

$$dG(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

75.-

76.-

i) Indicación: utilizar la definición de extremo relativo y que h es estrictamente creciente.
ii) Aplicar la regla de la cadena.
iii) La distancia máxima del punto (-1,0) al conjunto del plano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \ , \ y \geq x - 1\}$ es $\sqrt{\frac{5+\sqrt{2}}{2}}$ y se alcanza en $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. La distancia mínima vale 1 y se obtiene en (0,0).

77.-

i) f es continua en $(\mathbb{R}^2 - \{xy = 0\}) \cup \{(0,0), (1,0), (-1,0), (0, \frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{2})\}$.
ii) $\nabla f(0,0) = (0,0)$. La derivada direccional de f en (0,0) y en la dirección de la recta $y = -x$ no existe, luego f no es diferenciable en (0,0).
iii) Para el punto $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}})$ la suma de coordenadas es máxima y para el punto $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}})$ la suma de coordenadas es mínima.

78.-

i) f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.
ii) Aplicar el teorema de la función implícita y comprobar que $\nabla z(1,0) = (0,0)$.
iii) Aplicar el teorema de la función inversa.

$$dH^{-1}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

79.- El máximo de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$ condicionado por $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ se encuentra en los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{n}} = \ldots = x_n$.

80.-

i) Aplicar el teorema de la función inversa.
ii) Demostrar que f es una contracción.
iii) Demostrar que h es estrictamente monótona y $h(0) = 0$.

81.- Aplicar la regla de la cadena y derivar implícitamente.

82.- Derivar implícitamente $h(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$.

83.-

i) Derivar implícitamente $F(x, y(x)) = 0$
ii) Derivar implícitamente dos veces $F(x, y(x)) = 0$
iii) (3,-6) mínimo y (-3,6) máximo.