# Capítulo 8. Integral de Riemann unidimensional

**1.-** Sea $f$ una función definida en el intervalo $[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$ de manera que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = x_0 \\ 0 & si \quad x \neq x_0 \end{cases}$$

Demostrar que $f$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ y que $\int_a^b f dx = 0$.

**2.-** Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in Q \\ 1 & si \quad x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

Demostrar que $f$ no es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ , $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , $a < b$.

**3.-** Justificar que la función $y = sign(x)$ es Riemann-integrable en cualquier intervalo real compacto. Hallar su integral definida en $[-1, x]$ con $x \in [-1, 1]$.
*Nota:* La función "signo de $x$" se define $\forall x \in \mathbb{R}$ por:

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

**4.-** Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & x \in [0, \pi) \\ -1 & x = \pi \\ \cos^2 x & x \in (\pi, 2\pi) \\ 0 & x = 2\pi \end{cases}$$

¿Es $\mathcal{R}$-integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$? En caso afirmativo, calcular su integral definida en el intervalo considerado.

**5.-** Sea $f$ acotada en un intervalo $[a,b]$. Si $|f|$ es Riemann-integrable en $[a,b]$, ¿se puede asegurar que $f$ también lo es?

**6.-** Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$\int_{-b/a}^0 f(b+ax)dx = \int_0^{b/a} f(b-ax)dx$$

**7.-** Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
i) Toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ es $\mathcal{R}$-integrable.
ii) Toda función $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ es continua en $[a,b]$.
iii) Si $f^2$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$, entonces $f$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$.
iv) Si $f^3$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$, entonces $f$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$.
v) Si $f$ y $g$ son funciones tales que $f(x) = g(x)$ , $\forall x \in [a,b] - Q$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$.
vi) Si $f$ es $\mathcal{R}$-integrable en $[0,\pi]$ y $\int_0^\pi f(x)dx = 0$, entonces, $f(x) = 0$ en $[0,\pi]$.

**8.-** Demostrar que son ciertas las siguientes afirmaciones:
Si $f$ es una función par: $f(x) = f(-x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Si $f$ es una función impar: $f(x) = -f(-x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

**9.-** Justificar que si $f(x)$ es una función impar, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \operatorname{sen} x dx = 0$.

**10.-** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se define $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt & si \quad x \neq 0 \\ f(0) & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que $F$ es continua en $\mathbb{R}$, y que si $\exists f'(0)$, entonces $\exists F'(0)$. Demostrar que $F \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$.

**11.-** Dada $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ continua en [0,2] y derivable en (0,2), supongamos que $\exists k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ , $\forall x \in (0,2)$. Demostrar que se verifica:

$$e^{-2k} < \int_0^1 e^{-f(t)}dt \int_1^2 e^{f(t)}dt < e^{2k}$$

**12.-** Calcular la derivada de las siguientes funciones (en un intervalo donde exista):

$$\int_1^x \frac{1+t^2}{t^4}dt \qquad \int_x^2 \frac{dy}{y^3+1} \qquad \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} e^{-t^2}dt \qquad \int_1^{e^t} \frac{\ln(x+1)}{x}dx$$

$$\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}dt \qquad \int_\varepsilon^{3x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt \qquad \int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_{-x}^{1} t^4 \cos t dt$$

**13.-** Calcular los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen} t dt} \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t dt}{x\int_0^x e^t dt}$$

**14.-** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f$ es creciente y $0 < g(x) < 1$ , $\forall x \in [a, b]$. Se definen las funciones $h, k, l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt \quad , \quad k(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt \quad , \quad l(x) = \int_a^{a+h(x)} f(t)dt.$$

i) Demostrar que $h$ es creciente y que $h(x) \leq x - a$ , $\forall x \in [a, b]$.
ii) Demostrar que $l'(x) \leq k'(x)$ , $\forall x \in (a, b)$.

**15.-** Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y tal que $f(t) = 0 \iff t = 0$; estudiar la existencia de extremos de la función:

$$F(x) = \int_0^{x^2-5x+6} f(t)dt$$

**16.-** Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$, se pide:
i) Si $g$ es derivable en $x_0$ y $g(x_0) = 0$, hallar:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^2} \int_{x_0}^x g(t)dt$$

ii) Si $g$ es derivable en 0 y $g(0) = 0$, hallar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n+4}} \int_0^{x^2} t^n g(t)dt$$

**17.-** Sea la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1} dt \quad , \quad x \in [0, 1]$$

i) Demostrar que $f \in C^1((0, 1))$ y que existe la inversa $f^{-1}$ continua en $[0, f(1)]$.
ii) Demostrar que la ecuación $f(x) + x^2 = 1$ tiene una única raíz real en $[0, 1]$.

**18.-** Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostrar que $F \in C^2(\mathbb{R})$ y calcular el polinomio de Taylor de grado 2 que aproxima a $F$ en un entorno de $x = 0$.

**19.-** Demostrar que existe el siguiente límite y hallar una cota superior:

$$\lim_{x \to 0+} \int_x^1 te^{-\frac{1}{t^2}} \operatorname{sen}(1/t)dt$$

**20.-** Estudiar, según el valor de $p$, la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \qquad\qquad \int_{0+}^a \frac{dx}{x^p} \ , \ a > 0$$

**21.-** Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx \qquad \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2(1/x) dx \qquad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \qquad \int_1^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \qquad \int_{-1}^7 \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{x^2+1} \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \qquad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$$

**22.-** Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x+x^3}} & , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

i) Justificar que $f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ , $\forall a > 0$ , $\forall b > a$.
ii) Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

**23.-** Sea la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \operatorname{sen}(t^2-1) dt \quad , \quad x \in [0,+\infty)$$

i) Demostrar que $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$ y hallar una cota superior para este límite.
ii) Considerar la función $F\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(x) + y^2 + 3$. Calcular la variación de $F(x,y)$ en el punto $(1,1)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 2y$.

# Anexo

**24.-** Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx \qquad \int \frac{\ln x}{x}dx \qquad \int x\sqrt{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx \qquad \int \operatorname{sen} x \cos x dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} \qquad \int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx \qquad \int \frac{e^x}{1-3e^x}dx$$

$$\int \ln x dx \qquad \int \cos(\ln x)dx \qquad \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$\int x^2 e^x dx \qquad \int e^x \cos x dx \qquad \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx \qquad \int \frac{dx}{x^2+10x+13} \qquad \int \frac{dx}{x^3+1}dx$$

$$\int \frac{x^4-3x}{x(x-1)(x-2)}dx \qquad \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx \qquad \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} \qquad \int \cos^2 x dx \qquad \int \operatorname{sen}^3 x dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx \qquad \int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$$

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx \qquad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx \qquad \int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \qquad \int x\sqrt{9-x^2}dx \qquad \int \sqrt{-x^2+x+1}dx$$

**25.-** Hallar el área de las siguientes regiones en el plano:

1) Región comprendida entre la parábola $x^2 = 2y$ y el círculo $x^2 + y^2 = 8$.
2) Región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 9$ y $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
3) Región limitada por las parábolas $x = -y^2 + 2y$ , $x = y^2 - 2y + 2$ y el eje OX.

**26.-** Calcular el área de la región plana comprendida entre las curvas $y = xe^{-x}$ y $y = x^2e^{-x}$, y calcular el volumen que aquella genera al girar en torno del eje OX.

**27.-** Calcular el volumen de los siguientes sólidos de revolución :
1) Sólido generado al girar la región comprendida entre las curvas $y = e^{-|x|}$ , $x = 1$ , $x = -1$ y el eje OX: a) en torno del eje OX; b) en torno del eje OY.
2) Sólido generado al girar en torno al eje OX, el trozo de círculo $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ comprendido entre las rectas $y = 0$ y $y = 1$.
3) Sólido generado al girar alrededor del eje OX la superficie que es interior a $x^2+y^2 = 4$ y exterior a $x^2 + y^2 = 4x$.

# Integral de Riemann unidimensional. Soluciones

**1.-** Usar la definición de integral de Riemann o el teorema de Lebesgue.

**2.-** Usar la definición de integral de Riemann o el teorema de Lebesgue.

**3.-**

$$\int_{-1}^{x} sign(y)dy = \begin{cases} -1-x & si \;\; x \leq 0 \\ x-1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

**4.-** $f$ es $\mathcal{R}$-integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$ y su integral definida en el intervalo considerado vale $\pi$.

**5.-** No

**6.-** Aplicar los cambios de variable $y = a + b - x$ y $y = -x$ respectivamente.

**7.-**

i) V
ii) F
iii) F
iv) V
v) V
vi) F

**8.-** Aplicar cambios de variable.

**9.-** Demostrar que la función $g(x) = f(x)^2 \operatorname{sen} x$ es impar y aplicar el problema anterior.

**10.-**

**11.-** Indicación: Aplicar los teoremas del valor medio para el cálculo integral y diferencial.

**12.-**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1+x^2}{x^4}$ | $-\dfrac{1}{x^3+1}$ | $2 \operatorname{sen} x \cos x e^{-\operatorname{sen}^4 x}$ | $\ln\left(e^t+1\right)$ |
| $\dfrac{e^x}{x}(2e^x-1)$ | $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ | $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ | $x^4 \cos(-x)$ |

**13.-** 2 y $\frac{1}{2}$

**14.-** Indicación:
i) Demostrar que $h'(x) > 0 \;\; \forall x \in [a,b]$ y utilizar $g(x) < 1$
ii) Definir $\alpha(x) = k(x) - l(x)$ y ver que $\alpha'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

**15.-** $x = 2$ y $x = 3$ son mínimos relativos y $x = \frac{5}{2}$ máximo relativo.

**16.-**

i) $\frac{1}{2}g'(x_0)$
ii) $\frac{2}{2n+4}g'(0)$

**17.-**

i) Ver que $f'$ es una función continua, $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in [0,1]$ y relacionar con inyectividad.
ii) Aplicar el teorema de Bolzano.

**18.-** $P_2(x) = \frac{1}{e}x^2$

**19.-** Para demostrar que existe el límite, aplicar los criterios de comparación para integrales impropias. Una cota superior es $\frac{1}{2}e^{-1}$.

**20.-**

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

$\int_{0+}^{a} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p < 1$ y diverge si $p \geq 1$.

**21.-**

| | | |
|---|---|---|
| converge | converge | converge a $2\sqrt{2}$ |
| converge a 1 | converge | converge a 6 |
| converge a 1 | converge a 1 | converge |
| converge a 1 | converge a -4 | converge a 1/2 |

**22.-**

i) Aplicar el teorema de Lebesgue.
ii) Es divergente.

**23.-**

i) $\frac{\pi}{2}$
ii) $2$

**24.-**

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx = 3\sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)) + C$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx = x - 2\arctan x + C$$

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx = x + \ln|x+1| + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

$$\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx = -\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

$$\int \frac{e^x}{1-3e^x}dx = -\frac{1}{3}\ln|1-3e^x| + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C$$

$$\int \frac{x^4-3x}{x(x-1)(x-2)}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 2\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}| + C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + C$$

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \arctan(x+1) + \frac{x-1/2}{x^2+2x+2} + C$$

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx = 2\tan x + \frac{2}{\cos x} - x + C$$

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = (\frac{3}{2}x - \frac{9}{2})\sqrt{x^2+2x+4} - \frac{1}{2}\arg\sinh(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

**25.-**

1) $2\pi + \frac{4}{3}$
2) $9(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$
3) $\frac{2}{3}$

**26.-** $A = \frac{3}{e} - 1$ y $V = \frac{\pi}{4}(16e^{-2} - 2)$

**27.-**

1) a) $\pi(1 - \frac{1}{e^2})$ ; b) $\pi(3 - \frac{5}{e})$
2) $\pi^2 - \frac{4}{3}\pi$
3) $\frac{22}{3}\pi$

# Capítulo 9. Integral múltiple de Riemann

**1.-** Calcular el valor de la integral $\int_R f(x,y)dxdy$, en los casos siguientes:

$$f(x,y) = xy(x+y) \quad \text{y} \quad R = [0,1]\times[0,1]$$
$$f(x,y) = x + y - 3xy^2 \quad \text{y} \quad R = [0,1]\times[1,3]$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases} \quad \text{y} \quad R = [0,1]\times[0,1]$$
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & , x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & , x^2+y^2 > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad R = [-1,1]\times[-1,1]$$

**2.-** Calcular el área limitada por las curvas $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$, $y = x$ y $y = 0$.

**3.-** Una pirámide está limitada por los tres planos de coordenadas y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Calcular su volumen.

**4.-** Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

**5.-** Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, los cilindros $x^2+y^2 = 1$ y $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, y el plano $z = 0$.

**6.-** Calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

**7.-** Aplicar un cambio a coordenadas polares para resolver las siguientes integrales:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dxdy \qquad \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$$

$$\int_0^a \int_0^x (x^2+y^2)^{-1/2} dydx \qquad \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-1/2} dydx$$

**8.-** Considerar en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ el sólido $A$ limitado por los planos de coordenadas y el plano $x+y+z=1$ (tetraedro unidad). Calcular

$$\int_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$$

**9.-** Calcular

$$\int_R 3xydxdy$$

siendo $R$ la región limitada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$ y $x + y = 1$.

**10.-** Resolver la siguiente integral aplicando un cambio de coordenadas:

$$\int_A dxdydz$$

siendo $A$ el sólido limitado por dos esferas de radios 1 y 4 centradas en el origen.

**11.-** Dada la función continua $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, demostrar que:

$$\int_{B_\rho} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})dxdydz = 4\pi \int_0^\rho f(r)r^2dr$$

donde $B_\rho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho^2\}$

**12.-** Calcular el volumen del sólido comprendido entre $z^2 \geq x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$.

**13.-** Calcular el volumen del sólido de $\mathbb{R}^3$ definido por:
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ y \geq 0 \ , \ y \geq x, \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

**14.-** Calcular el volumen del sólido limitado por una esfera centrada en el origen y de radio $R$, y un cilindro vertical de radio $R/2$ centrado en el punto $(0, R/2, 0)$.
(Llamado: **Bóveda de Viviani**).

**15.-** Sean la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2}$ y el sólido $A \subset \mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y \ , \ x + y \geq 0 \ , \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Hallar el volumen de $A$ por integración múltiple de Riemann.

**16.-** Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{e^x}{e^y(x+y)}$. Calcular el valor de la integral $\int_A f(x, y)dxdy$ siendo $A$ el recinto cerrado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 3 - x$, $y = x + 1$ y $y = x - 1$.

**17.-** Calcular el volumen de los sólidos siguientes:
1) Sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2 + 2x + 2y$.
2) Sólido en $z \geq 0$, limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ y $x^2 + y^2 = 4z$.
3) Sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $z = 0$.
4) Sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y el plano $x + y + z = 2$.
5) Sólido limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
6) Sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
7) Sólido limitado por $z + 1 = x^2 + y^2$, $z = -1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
8) Sólido limitado por $z^2 = x^2 + y^2$ , $2z = x^2 + y^2$ , $z = 1$ y $z = 1/2$.

**18.-** Demostrar que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## Integral múltiple de Riemann. Soluciones

**1.-**

$$\frac{1}{3}$$
$$-8$$
$$0$$
$$\frac{\pi}{2}$$

**2.-** $\frac{3\pi+6}{4}$

**3.-** $6$

**4.-** $\frac{80}{3}$

**5.-** $\frac{3\pi-8}{12}$

**6.-** $8\pi$

**7.-**

$$\frac{\pi a^4}{8} \qquad \frac{\pi a^3}{6}$$

$$\frac{a^3}{6}[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \qquad \sqrt{2}-1$$

**8.-** $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$

**9.-** $\frac{164}{9}$

**10.-** $84\pi$

**11.-** Aplicar un cambio de variable a coordenadas esféricas.

**12.-** $\pi$

**13.-** $\frac{3\pi}{16}$

**14.-** $V = \frac{2}{3}\pi R^3$

**15.-** $V = \frac{7\pi}{24} - \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})$

**16.-** $\frac{1}{2}\ln 3[e - \frac{1}{e}]$

# Capítulo 10. Sucesiones y series de funciones. Series de potencias. Series de Fourier

**1.-** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente en $(E,d)$ , espacio métrico, demostrar que $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $(E,d)$.

**2.-** Probar que se verifican las siguientes afirmaciones :

a) Toda serie normalmente convergente es uniformemente convergente.

b) La serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definidas por:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\neq n \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x=n \end{cases}$$

converge uniformemente pero no converge normalmente.

**3.-** Se definen para cada $n\geq 1$ , $n\in\mathbb{N}$ las sucesiones de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $f_n$ , $g_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ por :

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$g_n(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n} & si \;\; x=0 \text{ ó } x\in\mathbb{R}-Q \\ q+\dfrac{1}{n} & si \;\; x=\dfrac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Demostrar:

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en [0,1].

2) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en [0,1].

3) $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en [0,1].

**4.-** Se define para cada $n \geq 1$ , $f_n:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = min(n, \frac{1}{x})$.
i) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ , $\forall x > 0$.
ii) Estudiar la convergencia uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $[a,+\infty]$ $(a > 0)$.
iii) Estudiar la convergencia uniforme en (0,1].

**5.-** Estudiar la convergencia uniforme y normal de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \quad \text{en } [a,b]$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+nx^2)}$$

**6.-** Estudiar si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas:
i) Toda serie de funciones convergente es absolutamente convergente.
ii) Toda serie de funciones normalmente convergente es absolutamente convergente, y recíprocamente.
iii) Si una serie de funciones , $\sum f_n$ , converge uniformemente a una función $f$ , entonces la serie de sus derivadas, $\sum f_n'$ , converge a la derivada de la función $f$ , $f'$.
iv) Si una serie de funciones, $\sum f_n$ , converge a una función $f$ , entonces la serie de sus primitivas , $\sum \int f_n$ , converge a la integral de la función $f$ , $\int f$.
v) Una condición suficiente para la convergencia de una serie de funciones $\sum f_n$ , es que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
vi) Si $f(x) = \sum a_n x^n$ para $|x| < \rho$ , entonces, por extensión, $f(x) = \sum a_n x^n$ , $\forall x \in \mathbb{R}$.

**7.-** Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Definimos $g_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

i) Demostrar que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia $f$.
ii) Si $f(x) = e^x$ , demostrar que la convergencia es uniforme en todo intervalo acotado.
iii) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{x+\frac{1}{n}} - e^{x-\frac{1}{n}})$.

**8.-** Estudiar la convergencia de la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , donde:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

**9.-** Demostrar que las siguientes series de funciones son uniformemente convergentes en $\mathbb{R}$:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(3^n x)}{2^n}$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{n^{5/2}}$$

$$c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx^2)}{n!}$$

**10.-** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}-1}{2^n e^{nx}} \quad \text{en el intervalo } [0,+\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \quad \text{en el intervalo } (1,+\infty)$$

**11.-** Probar que la serie funcional :

$$(1-x)+(x-\frac{x^2}{2})+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})+\dots$$

es uniformemente convergente en el intervalo [-1,1].

**12.-** Probar que la serie funcional

$$(x-xe^{-x^2})+(xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2})+\dots$$

es uniformemente convergente en todo intervalo $[a,b]$ que no contenga al cero y no es uniformemente convergente en todo intervalo cuya adherencia contenga al cero.

**13.-** Demostrar que la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}+x^4}$$

es uniformemente convergente en toda la recta real pero no absolutamente convergente.

**14.-** Estudiar la convergencia uniforme de la serie funcional :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad \text{en el intervalo } [a,1), \text{ con } a>0$$

¿Y en (0,1) ?

**15.-** Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos^n x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} * \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\cos(x/n)\Big) \quad \text{en el intervalo } (-\infty,a]$$

**16.-** Sea $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $\forall n\in\mathbb{N}$ definida por $f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$. Se pide:
i) Calcular $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ y $g=\lim_{n\to\infty} f'_n$.
ii) Demostrar que $f$ es derivable pero $f'(0)\neq g(0)$.
iii) Estudiar la convergencia uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**17.-** Se define $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-n^2x^2} \quad \text{si } x\in\mathbb{R} \text{ , } n\geq 1$$

Demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente pero que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en un intervalo que contenga al origen.

**18.-** Calcular el siguiente límite:

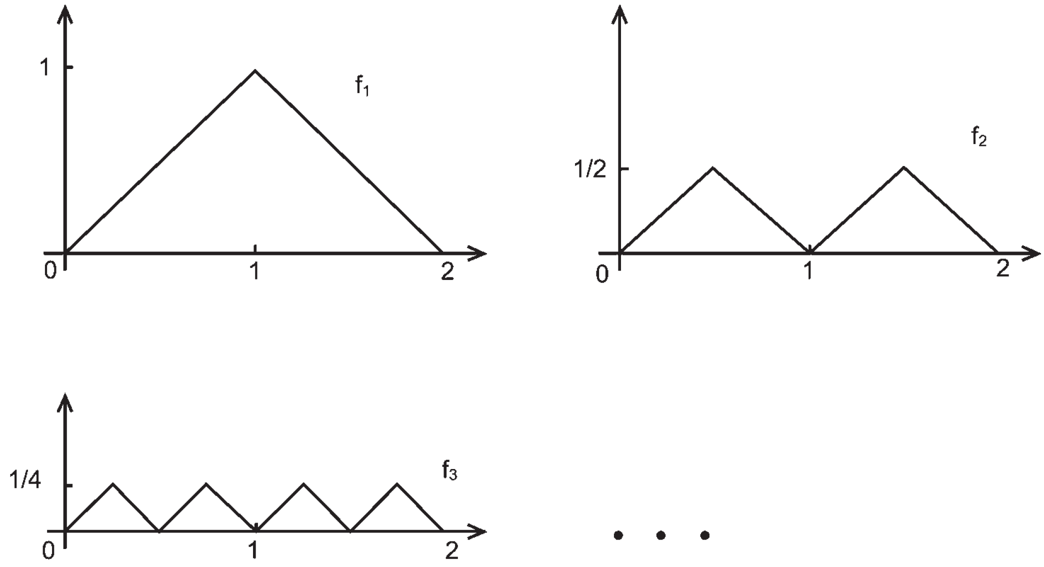
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x^2+n^2}dx$$

**19.-** Demostrar que la función suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x+n}$$

en el intervalo $(0,+\infty)$ es infinitamente derivable.

**20.-** Dada la sucesión de funciones :




i) Estudiar si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntual y/o uniformemente en [0,2].
ii) Demostrar que la sucesión

$$\left(\int_0^2 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge , sin calcular las integrales.
iii) Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones convergente uniformemente en un intervalo $[a,b]$. Sea $l_n$ la longitud de la gráfica de $h_n$ . Supongamos que $h_n$ converge uniformemente hacia $h$ y sea $l$ la longitud de $h$ . ¿Podemos asegurar que $\lim\limits_{n\to\infty}(l_n) = l$ ? En caso afirmativo demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo.

**21.-** Comprobar que la serie para la cual $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ , ($S_n$ denota la suma parcial $n$-ésima), no puede integrarse término a término si se desea obtener la integral de la función suma , $S(x)$ . ¿Qué conclusión podemos sacar?

**22.-** Supóngase que $f$ es derivable. Demostrar que la función $f'$ es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

**23.-** Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida de forma recurrente :

$$f_0(x) = 1 \quad , \quad f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)} \quad \forall n \geq 1.$$

a) Demostrar que en el intervalo [0,1] la sucesión es puntualmente convergente.
b) Demostrar que la convergencia es uniforme.

**24.-** Determinar el radio de convergencia de las siguientes series funcionales :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{3n}}{n!}$$

**25.-** Determinar un número $\lambda > 0$ tal que para $|x| < \lambda$ la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x + 1/2)^n$$

sea convergente.

**26.-** ¿Cómo determinar el radio de convergencia de las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn+h}$$

donde $h$ y $k$ son dos números naturales dados?

**27.-** Hallar las sumas de las siguientes series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 - n} x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^{2n} \ , \ |x| < 1$$

$$* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-q)\ldots(p-nq+q)}{n! q^n} x^n \ , \ |x| < 1$$

Y todas las posibles del ejercicio 24.

**28.-** Desarrollar las siguientes funciones en serie de potencias de $x$ :

$$\operatorname{sen}(2x) \qquad \frac{x^2}{1+x^4} \qquad e^{x/2} \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\frac{3}{1-x^2} \qquad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \frac{1}{(1-x)(2-x)} \qquad \ln\left((x+1)^{1/x}\right)$$

$$\arctan x \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad 2^x \qquad \operatorname{sen}^2 x$$

$$(1+x)e^{-x} \qquad \frac{x}{1+x-2x^2} \qquad \cosh x \qquad e^{-x^2}$$

**29.-** Usando el desarrollo en serie de potencias , calcular aproximadamente las siguientes integrales:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \qquad \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx \qquad \int_0^{1/2} \arctan(2x^2) dx \qquad \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2) dx \qquad \int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx$$

**30.-** Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
i) Los coeficientes de Fourier correspondientes a los senos en el desarrollo de una función par en el intervalo $[-\pi, \pi)$ son todos nulos.
ii) Los coeficientes de Fourier correspondientes a los cosenos en el desarrollo de una función impar en el intervalo $[-\pi, \pi)$ son todos nulos.
iii) Una función puede ser desarrollada en el intervalo $[0, \pi]$ en serie cosenoidal y también en serie senoidal.

**31.-** Dibujar las gráficas de las siguientes funciones periódicas de período $2\pi$ , y escribir su desarrollo en serie de **Fourier**.

$$\begin{array}{ll}
f(t) = t & \text{si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = |t| & \text{si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = t^2 & \text{si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = |\operatorname{sen} x| & \text{si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = 1 - t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t < 2\pi \\
f(t) = t + \pi & \text{si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = t & \text{si} \quad 0 \leq t < 2\pi \\
f(t) = t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t < 2\pi \\
f(t) = At^2 + Bt + C & \text{donde A,B,C son constantes ; si} \quad -\pi \leq t < \pi \\
f(t) = At^2 + Bt + C & \text{donde A,B,C son constantes ; si} \quad 0 \leq t < 2\pi
\end{array}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < t \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

**32.-** Demostrar que se verifican :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

Nota: se pueden utilizar los desarrollos en serie de Fourier para calcular algunas sumas de series trigonométricas o numéricas.

**33.-** Desarrollar en serie cosenoidal la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{si} \quad l/2 < x \leq l \end{cases}$$

**34.-** Desarrollar en serie senoidal la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq l/2 \\ l - x & \text{si} \quad l/2 < x \leq l \end{cases}$$

**35.-** Dada la función $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$ , $\forall x \in [0, \pi]$ , $k$ constante real, se pide :
i) Hacer la extensión impar de $f$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y calcular la serie de Fourier asociada.
ii) Si llamamos $S(x)$ a la suma de la serie de Fourier anterior, demostrar que $S(x)$ es Riemann integrable en $[0, \pi]$ y que

$$\int_0^{\pi} S(x)dx = \frac{8k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

iii) Calcular la suma de la serie numérica :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

**36.-** Consideramos la función lineal que se obtiene al unir los puntos del plano $(\pi, 0)$ y $(0, A)$ , $A > 0$.
i) Hacer la extensión par de $f$ y calcular su desarrollo en serie de Fourier.
ii) Estudiar la convergencia de la serie de Fourier asociada a la función $f$ y calcular la suma de la serie númerica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$