PROBABILIDAD

Teoría
Ejemplos Resueltos (60)
Ejercicios Propuestos (100)
Anexo: Combinatoria

Ing. Mario Raúl Azocar
(Master of Science - New York University - New York)

PROBABILIDADES

1.1 INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios sobre probabilidades tuvieron su origen en algunos problemas implícitos en juegos de azar.

En el siglo diecisiete un entusiasta jugador de dados y naipes, el señor Chevalier de Mére, consultó a Blaise Pascal (1623-1662) sobre algunas inquietudes técnicas referentes a juegos de dados. Esta consulta motivó una correspondencia sobre el tema, entre Pascal y Pierre Fernat (1601-1665).

Los historiadores de la matemática están generalmente de acuerdo en considerar este hecho como el origen del estudio de las probabilidades.

Las ideas de probabilidades permanecen circunscritas a los problemas de juegos de azar hasta que Pierre Laplace (1749-1827) y Friedrich Gauss (1777-1855) hacen notar que las teorías desarrolladas son aplicables también a otras actividades diferentes de los juegos de azar.

En el año 1900, durante el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas realizado en París , el doctor David Hilbert (1826-1943) señaló como uno de los problemas matemáticos más importantes: la necesidad de una rigurosa fundamentación de los conceptos básicos del cálculo de probabilidades. De esta tarea se preocuparon muchos matemáticos, pero fue Andrei Nikolaevich Kolmogorov (matemático soviético, nacido en 1903) quien en 1933 publicó una teoría axiomática del cálculo de probabilidades basada en la teoría de la medida desarrollada por H. Lebesgue (1875-1941) a principios de siglo veinte.

El modelo matemático que presentaremos aquí, es esencialmente el del doctor Kolmogorov, con las simplificaciones honestas que lo hagan comprensible a los no especialistas.

1.2. EL ESPACIO MUESTRA

En la construcción de modelos matemáticos es necesario tomar algunos conceptos primitivos (ideas que se aceptan sin definición) y algunos axiomas o postulados de los cuales se obtienen los teoremas que en conjunto constituyen la teoría o modelo.

La utilidad de un modelo matemático depende de lo realista que sea, en el sentido que los resultados que proporcione representen con suficiente aproximación lo que está entregando la realidad que se pretende interpretar.

Para presentar el modelo matemático de probabilidad introduciremos las ideas primitivas de:

a. Experimento deterministico.
b. Experimento aleatorio.

Hablando con generalidad podemos decir que se entiende por experimento la ejecución de un determinado acto. Por ejemplo, son experimentos:

(i).- Someter a tracción una barra de fierro.
(j).- Encender una lámpara eléctrica.
(k).- Lanzar un dado.

Existe una clase de experimento que, repetidas en las mismas condiciones, se obtienen siempre los mismos resultados. Pertenecen a este grupo de ejemplos

(i) y (j) anteriormente señalados. Estos experimentos de resultado único se llaman deterministicos, deseando expresar con esta denominación, que es posible predecir su resultado.

Además de estos experimentos determinísticos hay otros cuyo resultado varía aún cuando las condiciones en que se realiza permanezcan invariables. Entre ellos podemos mencionar:

a.- Lanzamiento de un dado.

b.- Estatura de una persona tomada arbitrariamente en un grupo dado.

c.- Número de artículos defectuosos que produce una máquina en 8 horas de trabajo.

Estos experimentos que ejecutados en las mismas condiciones dan resultados diferentes se llaman experimentos aleatorios. Por ejemplo al lanzar un dado puede salir cualquiera de los números; 1, 2, 3, 4, 5, o 6 y realmente no se sabe cual de ellos saldrá hasta no ejecutar el experimento.

Resumiendo lo dicho sobre experimento determinístico y aleatorio, podemos expresar: Si S es el conjunto de los resultados de un experimento, éste es un aleatorio si y solo si S tiene más de un elemento. Contrariamente si S tiene un solo elemento el experimento correspondiente se llama determinístico.

De especial importancia en el cálculo de probabilidades es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, por ello tomaremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN 1.1. Se llama espacio muestra de un experimento aleatorio al conjunto S de todos sus resultados.

Ejemplo 1.1 Consideremos el experimento aleatorio: lanzo una moneda. Su espacio muestra es:

$$S = \{cara, sello\} = \{c, s\}$$

Ejemplo 1.2 Consideremos el experimento aleatorio: tomo arbitrariamente un punto en el círculo: $x^2 + y^2 \leq a^2$

Su espacio muestra es:

$$S = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

Ejemplo 1.3 Se lanzan simultáneamente dos dados: uno rojo y otro azul. Determinar un espacio muestra de este experimento.

Solución:

1° Sea x_1 el número que da al dado rojo y x_2 el número que da al dado azul, entonces:

$$S = \{(x_1, x_2) / X_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ y } x_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tomando el experimento: lanzo un dado, podemos estar interesados en obtener resultados tales como:

a) Sacar as: {1}
b) Sacar un número par: {2, 4, 6}
c) Sacar un número divisible por 3: {3, 6}

Estos resultados esperados son sub-conjuntos del espacio muestra:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y naturalmente para considerar todos los resultados que se puede obtener es aconsejable considerar todos los sub-conjuntos de S, que en este caso particular, sabemos son: $2^6 = 64$.

Cuando el conjunto S sea finito o infinito numerable, el conjunto de todos los sub-conjuntos de S lo designaremos por S^* y en este contexto tomaremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN 1.2 Se llama suceso o acontecimiento cualquier sub-conjunto del espacio muestra S de un experimento aleatorio.

De acuerdo a esta definición, cuando S es finito o numerable, todo acontecimiento es un elemento de S*.

DEFINICIÓN 1.3 Se llama espacio medible de un experimento aleatorio a la pareja: (S,S^*).

Ejemplo 1.4 Sea el experimento aleatorio: lanzo una moneda. Su espacio muestra es:

$$S = \{cara, sello\} = \{c, s\}$$

Y el espacio de los acontecimientos es:

$$S = \{ \{c\}, \{s\}, \{c, s\}, \varnothing\}$$

Obs. 1.1 Cuando el espacio muestra de un experimento aleatorio es infinito (no numerable) no se puede considerar todo sub-conjunto de S como suceso, pues si S = R hay sub-conjuntos de R que no son medibles y por lo tanto no se puede definir para ellos la noción de probabilidad.

Cuando el espacio S sea infinito (no numerable) tomaremos como S^* un conjunto de sub-conjuntos de S que aceptaremos verificar las hipótesis siguientes:

a.- $\varnothing \in S^*$

b.- Para todo suceso A de S^*, su complemento respecto de S. O sea: $A^c = S - A$ también es elemento de S^*, o sea:

$$A \in S^* \qquad \text{implica} \qquad A^c \in S^*$$

c.- Para cualquiera sucesión: A_1, A_2, ... A_k...... de elementos de S^*, también es elemento de S^* el conjunto:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots\ldots \cup A_k \ldots\ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Una colección de conjuntos que verifica las condiciones: (a), (b) y (c) se conoce en álgebra abstracta con el nombre de: sigma-álgebra. Veamos ahora algunas propiedades inmediatas del sigma-álgebra : S^*

TEOREMA 1.1 El espacio muestra S de un experimento aleatorio pertenece a: S^*, o sea:

$$S \in S^*$$

Dm: De inmediato como:

$$\varnothing \in S^* \text{ tenemos: } \varnothing^c = S \in S^*$$

TEOREMA 1.2 Si A_1, A_2, A_3, ..., A_n es un conjunto finito de elementos de S^*, también es elemento de S^* el conjunto:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots, \cup A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{k=n} A_n\right) \in S^*$$

Dm. Como $\varnothing \in S^*$, definamos:

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots\ldots\ldots = \varnothing$$

Y entonces

$$\bigcup_{n=1}^{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S^*$$

TEOREMA 1.3 Si A_1, A_2, ...A_k .... es una sucesión de elementos de S^*, también es elemento de S^* el conjunto:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in S^*$$

Dm.

1º $A_k \in S^* \quad \Rightarrow \quad A_k^c \in S^*$

$$A_k^c \in S^* \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c \in S^*$$

2º $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c \in S^* \quad \Rightarrow \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c\right)^c \in S^*$

pero

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c\right)^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(A_k^c\right)^c\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

TEOREMA 1.4 Si A_1, A_2, ...A_n es un conjunto finito de elementos de S^*, también es elemento de S^* el conjunto:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \in S^*$$

Dm. Como $S \in S^*$, tomando:

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = S$$

Se tiene:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in S^*$$

Terminaremos estas ideas sobre la noción de suceso o acontecimiento con un ejemplo más.

Ejemplo 1.5 Consideremos el experimento: lanzar una moneda dos veces. Su espacio muestra es:

$$S = \{ (c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$$

El acontecimiento: A = sale cara en el primer lanzamiento, se expresa por:

$$A = \{ (c, c), (c, s)\} \in S^*$$

Si designamos con B el suceso: aparece en los dos lanzamientos a lo menos una cara, se tiene:

$$B = \{ (c, c), (c, s), (s, c)\} \in S^*$$

Si C es el acontecimiento: no sale cara, se tiene:

$$C = \{ (s, s) \} \in S^*$$

Si con D designamos el acontecimiento sale a lo menos tres caras. Como este hecho es imposible, tomamos:

$$D = \varnothing \in S^*$$

Finalmente tomaremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.4 Dado un espacio medible (S, S*) se llama acontecimiento simple (elemental) todo elemento: $w \in S$.

Ejemplo 1.6 En el experimento lanzo una moneda, tenemos:

$$S = \{c, s\}$$

Donde: {c} y {s} son acontecimientos simples o elementales.

DEFINICIÓN 1.5 Todo acontecimiento no simple se dirá compuesto.

Ejemplo 1.7 En el experimento: lanzo un dado se tiene:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y son entre otros acontecimientos compuestos, los acontecimientos:

A = Sale un número par: $\{2, 4, 6\} \in S^*$

B = Sale un número divisible por 3: $\{3, 6\} \in S^*$

DEFINICIÓN: 1.6 Un acontecimiento $A \in S^*$ ocurre si y solo si uno de sus elementos aparece como resultado del experimento.

Dicho de otra manera, si A se compone de los elementos acontecimientos simples w_j^i:

$$A = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots\ldots\ldots w_n\}$$

El suceso A ocurre si y solo si: $w_j \in A$ es resultado del experimento. Si el resultado del experimento es w_0 y $w_0 \notin A$, diremos que A no ocurre.

Ejemplo 1.8 En el ejemplo 1.7 el acontecimiento A = sale un número par = {2,4,6} ocurre si al lanzar el dado se obtiene como resultado uno de los números: 2, 4, 6.

Ejemplo 1.9 En el ejemplo 1.3 donde se lanza dos dados, uno rojo y el otro azul, consideremos el suceso: A = la suma de los números obtenidos es 7.

Entonces:

$$A = \{ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

Y el acontecimiento A ocurre si los dados presentan, al ser lanzados, uno cualquiera de los elementos de A.

1.3 ALGEBRA DE SUCESOS.

Más adelante, y con motivo de las aplicaciones de la probabilidad, será necesario expresar las proposiciones del lenguaje ordinario, mediante un lenguaje matemático. De aquí la necesidad de introducir una simbología apropiada a estos fines.

Como los sucesos o acontecimientos son conjuntos, el lenguaje matemático natural que aparece como indicado es la simbología del álgebra de Boole, es decir la simbología usual del Álgebra de Conjuntos.

En este acápite que hemos llamado Álgebra de Sucesos pretendemos precisar el sentido de la simbología que usaremos.

DEFINICIÓN 1.7

1.- Si A es un suceso de un espacio medible (S, S*), designaremos con: A^c, el suceso que ocurre si y solo si A no ocurre. A^c se llama la negación de A.

2.- El suceso: S lo llamaremos certeza o acontecimiento seguro de ocurrir y el suceso: $S^c = \varnothing$ se llamará suceso imposible de ocurrir.

3.- Si A y B son dos sucesos de un espacio medible (S, S*) designaremos con: AUB el acontecimiento: uno al menos de los dos sucesos A o B ocurre.

Respecto al simbolismo unión de conjuntos es bien sabido que:

(i) $A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$; $A \cup S = S$

(ii) $A \cup B = B \cup A$

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4.- Si A_1, A_2, ...A_k .... Son sucesos de un espacio medible (S, S*), designaremos con:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{(n finito o no)}$$

el suceso que consiste en la realización de uno al menos de los A_k.

5.- Si A y B son dos sucesos de un espacio medible (S, S*), designaremos con: $A \cap B$, la ocurrencia simultánea de A y B.

Respecto al simbolismo intesección de conjuntos, es bien sabido que:

(i) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap A = A$; $A \cap S = A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(iii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

6.- Si A_1, A_2, ...A_k .... son sucesos de un espacio medible (S, S*), designaremos con:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{(n finito o no)}$$

el suceso que ocurre si y solo si ocurre cada uno de los A_k.

7.- En un espacio medible (S, S^*) dos acontecimientos A y B se dirán excluyentes o incompatibles si:

$$A \cap B = \varnothing$$

Con ello deseamos expresar que la ocurrencia simultánea de ambos es imposible, o sea, si ocurre A no ocurre B y contrariamente si ocurre B no ocurre A.

8.- En un espacio medible (S, S*) diremos que un suceso A implica el suceso B, si y solo si: al ocurrir A debe necesariamente ocurrir B. Esta implicancia la expresaremos por

$$A \subset B$$

Pues si w es un resultado del experimento, como:

$$w \in A \qquad y \qquad A \subset B: \qquad \Rightarrow w \in B.$$

Respecto a esta noción de implicancia, desde el álgebra de conjuntos se sabe que:

(i) $A \subset B \wedge B \subset C$ entonces: $A \subset C$

(ii) $\varnothing \subset A \subset S$

(iii) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

9.- En un espacio medible (S, S^*), dados dos sucesos A y B, el acontecimiento ocurre A y no ocurre B, lo expresaremos por:

$$A \cap B^c$$

10.- Dados dos sucesos A y B de un espacio medible (S, S^*) el acontecimiento: ocurre A o B pero no ambos lo expresaremos por:

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Terminaremos estas ideas señalando que con la introducción de las definiciones precedentes hemos logrado construir una álgebra de sucesos que es isomorfa con el álgebra de conjuntos.

En efecto recordamos que en álgebra de conjuntos esta formada por un conjunto S de elementos y dos operaciones: unión e intersección en S, tales que:

1.- $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

2.- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4.- Existe: $\varnothing$ y Ω en S tales que:

$A \cap \varnothing = \varnothing \quad \wedge A \cup \Omega = \Omega$

5.- $\forall A \in S$ existe $A^c \in S$, tales que:

$A \cap A^c = \varnothing$ y $A \cup A^c = \Omega$

1.4 AXIOMATICA DE LA PROBABILIDAD

En este párrafo, presentaremos una definición axiomática de la noción de probabilidad y algunas consecuencias que resultan inmediatas.

DEFINICIÓN 1.8 Dado un espacio medible (S, S*) una probabilidad es una función P(*) de S* a $\Re$, tal que:

A1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S^*$

A2) $P(S) = 1$

A3) $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ Para cada sucesión de acontecimientos (A_j) mutuamente excluyentes.

Ejemplo 1.10 Para el experimento aleatorio: lanzo una moneda, tenemos:

$$S = \{c, s\} \text{ y } S^* = \{ \{c\}, \{s\}, \varnothing, \{c, s\}\}$$

Entonces en el espacio medible (S, S*) la función P(*) a $\Re$ definida por:

$$P(c) = 0.3; \quad P(s) = 0.7; P(c, s) = 1; \quad P(\varnothing) = 0$$

Es una probabilidad, pues ella verifica la axiomática: (A1), (A2), y (A3).

DEFINICIÓN 1.9 Sea P(*) una probabilidad definida en el espacio medible (S,S*) y A un suceso. El número P(A) será la probabilidad de ocurrencia del acontecimiento A.

DEFINICIÓN 1.10 Un espacio de probabilidades es una terna (S, S*, P) donde (S, S*) es un espacio medible y P una probabilidad definida en él.

Partiendo de la axiomática de la probabilidad obtendremos algunos resultados importantes.

TEOREMA 1.5 En todo espacio de probabilidades (S, S^*, P) se tiene:

$$P(\varnothing) = 0$$

Dm.

1° Consideremos la sucesión de acontecimientos mutuamente excluyentes definida por:

$$A_1 = S \qquad y \qquad A_2 = A_3 = A_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \varnothing$$

Entonces por el axioma (A3), tenemos:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

o sea:

$$P(S) = P(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

$$P(S) = P(S) + \sum_{j=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

Luego:

$$\sum_{j=2}^{\infty} P(\varnothing) = 0$$

y como: $P(\varnothing) \geq 0$, concluimos que:

$$P(\varnothing) = 0$$

TEOREMA 1.6 En todo espacio de probabilidades (S, S*, P) para cada conjunto finito (A_j) de n acontecimientos excluyentes, se tiene:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

Dm.

1° Tomaremos en S*, además de los sucesos: A_1, A_2 .... A_n, los acontecimientos:

$$A_{n+1} = A_{n+2} = A_{n+3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \varnothing$$

Se tiene así, una sucesión infinita de acontecimientos excluyentes.

2° De acuerdo al axioma (A3), tenemos:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

TEOREMA 1.7 En todo espacio de probabilidades (S, S^*, P) y para cada suceso A, se tiene:

$$P(A) = 1 - P(A^c) \quad \wedge \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

Dm.

1º Los acontecimientos A y A^c son excluyentes: $A \cap A^c = \varnothing$, luego:

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

de donde la tesis es inmediata.

DEFINICIÓN 1.11 En un espacio medible (S,S^*) los acontecimientos (A_j) constituyen una partición del espacio S si y solo si.

a) $A_j \neq \varnothing$ $\quad \forall\ j \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots, N\}$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\quad \forall\ i \neq j$

c) $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = S$ $\quad$ Para N finito o no.

Ejemplo 1.11 Al experimento aleatorio: lanzo un dado, corresponde el espacio muestra:

$$S = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$$

Donde: w_j significa: el dado dio el número j con (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Los acontecimientos w_j forman una partición de S, pues:

a) $w_j \neq \varnothing$ $\quad \forall\ j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $w_i \cap w_j = \varnothing$ $\quad \forall\ i \neq j$

c) $\bigcup_{j=1}^{6} w_j = S$

TEOREMA 1.8 En un espacio de probabilidades (S, S^*, P) sea $(A_j)^n$, una partición de S, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) = 1$$

Dm.

Como loa A_j constituyen una partición de S, resulta de inmediato que:

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = P(S) = 1$$

Ejemplo 1.12 Para el ejemplo anterior del lanzamiento de un dado, se tendrá:

$$\sum_{j=1}^{6} P(w_j) = 1$$

si suponemos el dado no cargado, se tendrá:

$$P(w_1) = P(w_2) = ... = P(w_6) = p$$

De donde:

$$6p = 1 \text{ y } p = P(w_6) = 1/6$$

Ejemplo 1.13 En el experimento: lanzo una moneda, los acontecimientos {c} y {s} constituyen una partición del espacio muestra: S = {c, s}, luego:

$$P(c) + P(s) = 1$$

Ahora si la moneda no está cargada, se tendrá: P(c) = P(s), luego: P(c) = P(s) = ½.

Teorema 1.9 En un espacio de probabilidades (S, S^*, P) si $A \subset B$, entonces:

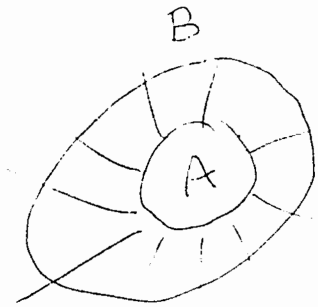
$$P(A) \leq P(B)$$

Dm.

1° Tenemos: $B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c)$

luego:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$



2° Como: $A \subset B$, tenemos: $B \cap A = A$

luego:

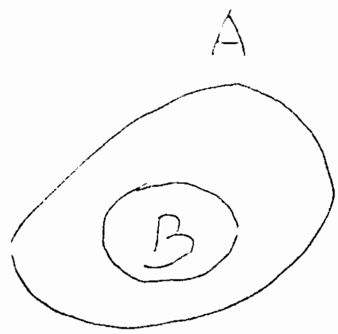
$$B = A \cup (B \cap A^c)$$

3° Como los sucesos: A y $(B \cap A^c)$ son excluyentes, resulta:

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

Y como: $P(B \cap A^c) \geq 0$, tenemos:

$$P(B) \geq P(A)$$



Corolario. Si $A \supset B$, entonces $P(A - B) = P(A) - P(B)$

TEOREMA 1.10 En todo espacio de probabilidades (S, S^*, P) para cada suceso S, se tiene:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Dm.

1° Por axioma (A1) tenemos:

$$P(A) \geq 0 \qquad \forall A \in S^*$$

2° Como siempre: $A \subset S$, resulta:

$$P(A) \leq P(S) = 1$$

Luego:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \forall A \in S^*$$

TEOREMA 1.11 En todo espacio de probabilidades (S, S^*, P), dados dos sucesos A y B, la probabilidad que ocurra A y no ocurra B es:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Dm.

1° De inmediato tenemos:

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

Y como los sucesos: $(A \cap B)$ y $(A \cap B^c)$ son excluyentes, resulta:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

De donde

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

TEOREMA 1.12 En todo espacio de probabilidades (S, S^*, P) para cada par de acontecimientos A y B se tiene:

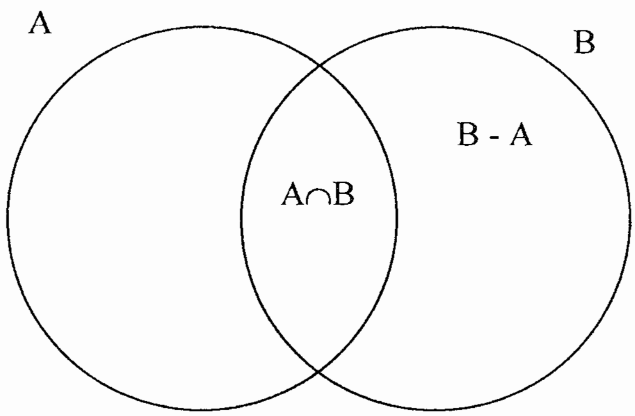
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dm.

De inmediato resulta

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$$



Y como: A y $(B \cap A^c)$ son disjuntos, resulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C) \qquad (\alpha)$$

Pero por teorema anterior tenemos:

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) \qquad (\beta)$$

Finalmente sumando las igualdades (α) y (β) resulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corolario.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo 1.14 En un espacio de probabilidades (S, S^*, P) si dos sucesos A y B son tales que: $P(A) + P(B) > 1$, demostrar que A y B no son excluyentes.

Solución:

1° Debemos demostrar que: $A \cap B \neq \varnothing$

2° De la igualdad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) > 0$$

Y de $P(A \cap B) > 0$ se tiene: $A \cap B \neq \emptyset$, pues si fuera $A \cap B = \emptyset$ se tendría

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

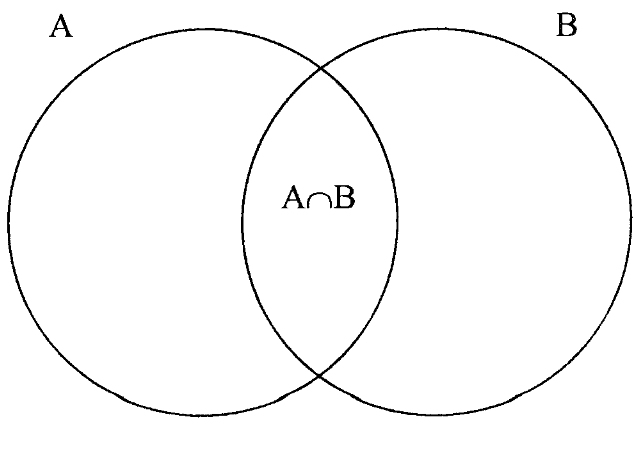
TEOREMA 1.13 En el espacio (S, S*, P) se considera dos sucesos A y B. Si x es el acontecimiento ocurre sólo uno de ellos. Se tiene:

$$P(x) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Dm.

1° De inmediato

$$x = (A \cup B) - (A \cap B)$$



Y como: $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

Tenemos:

$$P(x) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

Luego:

$$P(x) = P(A) + P/B) - 2P(A \cap B)$$

1.5 CALCULO DE PROBABILIDADES

Bajo este título pretendemos determinar una expresión que nos permita calcular el valor numérico de la probabilidad de un suceso.

Previo a este objetivo, recordemos que si el espacio muestra S de un experimento aleatorio es finito o numerable, el espacio S^* de los sucesos está constituido por todos los sub-conjuntos de S.

Contrariamente si el espacio S es infinito no numerable, el espacio S^* fue restringido al obligarlo a verificar las condiciones:

a) $\varnothing \in S^*$

b) $A \in S^*$ implica $A^c \in S^*$

c) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S^* \quad \forall A_j \in S^*$

En este caso, el conjunto S* con las condiciones indicadas recibe el nombre de sigma-álgebra, la cual tiene la propiedad de contener (como se demostró) los sucesos:

$$A;\ A^c;\ S;\ \bigcup_{1}^{n} A_j\ ;\ \bigcup_{1}^{\infty} A_j\ ;\ \bigcap_{1}^{\infty} A_j\ ;\ \bigcap_{1}^{n} A_j$$

Y todos aquellos sucesos que resultan combinando las operaciones: complemento, unión e intersección.

Además las limitaciones (a), (b) y (c) impuestas a S^* garantizan el hecho de poder definir la probabilidad de cada uno de los sucesos de S^*, pues todos ellos son medibles.

La razón fundamental para imponer estas condiciones fue que si el espacio muestra de un experimento aleatorio es el cuerpo de los reales $\Re$, no todo sub-conjunto de $\Re$ puede ser tomado como suceso, pues hay sub-conjuntos de $\Re$ que no son medibles (ver algún texto de Teoría de la Medida).

La sigma-álgebra $\Re^*$ se conoce usualmente con el nombre de Algebra de Borel, en honor el matemático francés Emile Bórel (   ).

Finalmente hacemos presente que los conjuntos no-medibles en $\Re$ son difíciles de construir y como jamás aparecen en las aplicaciones de la probabilidad, es recomendable olvidarlos.

Abordaremos ahora la determinación de la expresión que nos permitirá calcular el valor numérico de la probabilidad de ocurrencia de un suceso.

TEOREMA 1.14 Sea (S, S*) un espacio medible y sea: μ (*) una medida de S* a $\Re$ con μ (s) < ∞ (medida finita), entonces la función P(*) definida por:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} \qquad \forall\, A \in S^*$$

en una función de probabilidades.

Dm.

Debemos demostrar que: p(*) verifica la axiomática de una función de probabilidad. Así tenemos:

1° Como μ (*) es una medida, siempre se tiene: μ (A) $\geq$ 0, luego:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} \geq 0$$

y se cumple el axioma (A1).

2° De inmediato:

$$P(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(S)} = 1$$

3° Como toda medida finita es aditiva , o sea para toda sucesión de conjuntos medibles y disjuntos se tiene:

$$\mu\left(\sum A_j\right) = \sum \mu\left(A_j\right)$$

resulta:

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} A_j\right) = \frac{\mu\left(\bigcup_1^{\infty} A_j\right)}{\mu(S)}$$

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} A_j\right) = \frac{\sum \mu\left(A_j\right)}{\mu(S)}$$

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} A_j\right) = \sum \frac{\mu\left(A_j\right)}{\mu(S)} = \sum P\left(A_j\right)$$

y así queda verificado el axioma (A3).

Particularmente si el espacio muestra S es finito, para cada suceso A $\in$ S^*, se tiene:

$$\mu\ (A) = \text{cardinalidad de } A = \#A$$

y entonces la probabilidad del suceso A, queda dada por:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

lo que usualmente se expresa diciendo:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Que en rigor debe entenderse:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos favorables}}{\text{número de elementos de S}}$$

Cuando el espacio muestra del experimento aleatorio, sea una longitud, un área o un volumen, la probabilidad de un suceso A, por extensión a lo dicho precedentemente, se calculará por.

$$P(A) = \frac{\text{longitud de A}}{\text{longitud de S}}$$

$$P(A) = \frac{\text{área de A}}{\text{área de S}}$$

$$P(A) = \frac{\text{Volumen de A}}{\text{Volumen de S}}$$

Tales espacios de probabilidad se conocen con el nombre de probabilidades geométricas.

Para una buena comprensión de las ideas expuestas, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.15 De un naipe inglés de 52 cartas se sacan dos al azar. Se pide:

a.- Probabilidad de que ambas sean trébol (A).

b.- Probabilidad de que una sea trébol y la otra corazón. (B)

Solución:

1° Dos cartas de una totalidad de 52, se pueden tomar de $\binom{52}{2}$ maneras, luego la medida del espacio muestra es:

$$m(S) = \binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 1326$$

2° Dos cartas trébol de una totalidad de13 cartas trébol. Se puede tomar de $\binom{13}{2}$ maneras, luego la medida de A es:

$$m(A) = \binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{1 \times 2} = 78$$

$$P(A) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17} = 0.0588$$

3° Una carta trébol se toma de 13 disponibles, de 13 maneras y lo propio ocurre con una de corazón. Luego la pareja: una de trébol y una de corazón se puede tomar de: 13 x 13 maneras, así:

$$P(B) = \frac{13 \times 13}{1326} = \frac{13}{102} = 0.12745$$

Ejemplo 1.16 En una caja hay 80 tuercas de las cuales 12 son defectuosas. Se toma 6 de ellas al azar. Se pide:

a.- Probabilidad de que las 6 sean buenas (A)

b.- Probabilidad de que hayan 2 defectuosas (B).

Solución:

1° La medida del espacio muestra es:

$$m(S) = \binom{80}{6} =$$

2° Para tomar 6 tuercas buenas, ellas se tomarán de las (80 – 12 = 68) buenas, luego:

$$m(A) = \binom{68}{6} \qquad \text{y} \qquad P(A) = \frac{\binom{68}{6}}{\binom{80}{6}}$$

3° Para que en las 6 tuercas tomadas haya 4 buenas y 2 defectuosas las 4 buenas se tomarán de 68 buenas y las 2 defectuosas se tomarán de las 12 defectuosas, luego la medida de B es:

$$m(B) = \binom{68}{4} \text{ x } \binom{12}{2} \text{ y } P(B) = \frac{\binom{68}{4} \text{ x } \binom{12}{2}}{\binom{80}{6}}$$

Ejemplo 1.17 En una rifa de 100 números hay tres números premiados. Una persona compra 5 números. Probabilidad de saque un premio a lo menos.

Solución:

1° La medida de los casos posibles es:

$$m(S) = \binom{100}{5}$$

2° Sea A el suceso sacar un premio a lo menos. Entonces A^c es el suceso: no sacar ningún premio.

3° Calcularemos $P(A^c)$. Para no sacar ningún premio tomaremos los 5 números entre los 97 no premiados, luego:

$$P(A^c) = \frac{\binom{97}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{97 \text{ x } 96 \text{ x } 95 \text{ x } 94 \text{ x } 93}{100 \text{ x } 99 \text{ x } 98 \text{ x } 97 \text{ x } 96} = 0.556$$

4° Finalmente la probabilidad de sacar un premio a lo menos es:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.856 = 0.144$$

Ejemplo 1.18 Una caja contiene 60 pernos y 140 tuercas. Veinte pernos están dañados y lo mismo ocurre con 50 tuercas. Se toma un ítem al azar. Se pide: probabilidad que sea perno o esté dañado.

Solución:

1° Sea A el acontecimiento, la pieza tomada es perno, entonces:

$$P(A) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

2° Sea B el suceso el ítem está dañado, entonces:

$$P(B) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}$$

3° Nosotros buscamos: P(AUB) y sabemos que:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(AUB) = \frac{6}{20} + \frac{7}{20} - \frac{20}{200} = \frac{11}{20} = 0.55$$

Ejemplo 1.19 Una rifa consta de 100 boletos entre los cuales hay dos premiados. Determinar el menor número de boletos que es necesario comprar para que la probabilidad de ganar a lo menos un premio sea mayor a 4/5.

Solución:

1° Sea A el suceso: ganar un premio a lo menos. Entonces A^c es el suceso no ganar ningún premio.

2° Sea n el número de boletos a comprar, entonces:

$$P(A^c) = \frac{\binom{98}{n}}{\binom{100}{n}} = \frac{n^2 - 199n + 9900}{9900}$$

Luego:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{-n^2 + 199n}{9900} > \frac{4}{5}$$

De donde:

$$n^2 - 199n + 7920 < 0$$

$$(n - 55)\ (n - 144) < 0$$

luego el menor número de boletos a comprar es: 56.

Ejemplo 1.20 Una caja contiene n fichas. Se saca al azar un puñado de ellas. Probabilidad de extraer un número par de ellas.

Solución:

1° Al sacar un puñado de fichas al azar, éste puede traer: 1, 2, 3, ...n fichas luego la medida de los casos posibles es:

$$m(S) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^N - 1$$

2° Llamando A al acontecimiento sacar un número par de fichas, el se verifica, sacando: 2, o 4, o 6, ...etc., luego la medida de A es:

$$m(a) = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots\ldots\ldots = 2^{N-1} - 1$$

y entonces la probabilidad pedida es :

$$P(A) = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$$

Ejercicio 1.21 En un comedor hay 60 comensales, determinar la probabilidad que: A = dos personas, a lo menos, cumplen años el mismo día.

Solución:

1° Cada persona nace algún día de los 365 días del año, luego la medida de todos los casos posibles es:

$$m(s) = 365^{60}$$

2° Calculamos la probabilidad del acontecimiento contrario de A, o sea A^c. La primera persona puede nacer cualquier día d_1 de los 365 días del año, la segunda cualquier día d_2 de 364 días restantes y así sucesivamente, hasta la de orden 60, podría nacer un día d_{60} de los (365 – 59) días restantes, luego la medida de A^c es:

$$m\,(A^c) = 365 \times 364 \times 363 \times \ldots\ldots (365 - 59)$$

luego:

$$P(A^c) = \frac{365!}{365^{60} x (365-60)!}$$

Y entonces:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365!}{365^{60} x (305)!} = 0.994$$

Resultado que nos indica que tal situación es muy probable.

Ejemplo 1.24 Se toma al azar dos números comprendidos entre 0 y 1. Determine la probabilidad que la suma de ellos no supere 1 y que su producto no sea mayor que 2/9.

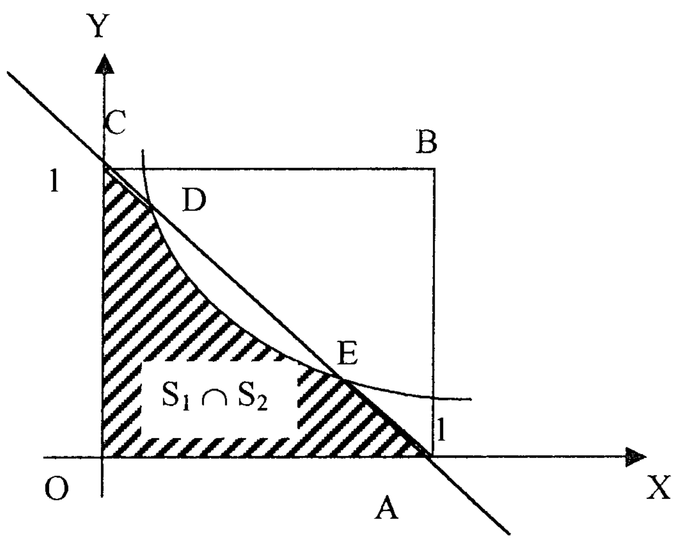
Solución:

1º Llamando x e y los números tomados, tenemos:

$$S = \{(x, y) \;/\; x + y < 1 \;\wedge\; xy < \frac{2}{9}\}$$

$$m(s) = 1 \times 1 = 1$$

2º El suceso: $x + y < 1$ es el triángulo: OAC = S



3º El suceso: $xy < 2/9$ queda expresado por el área S_2 bajo la hipérbola $xy=2/9$ y el acontecimiento A, cuya probabilidad se busca, esta en el área: $S_1 \cap S_2$, donde fácilmente se encuentra: $X_d = 1/3$ y $X_e = 2/3$.

La medida de $(S_1 \cap S_2)$ está dada por:

$$m\,(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$$

Finalmente

$$P(A) = \frac{m(S_1 \cap S_2)}{m(S)} = 0.487$$

Ejemplo 1.22 En el cuadrado S = { (x, y) / $|x| < 1$ y $|y| < 1$}. Se toma al azar un punto M = (a, b). Determinar la probabilidad que las raíces de la ecuación: $x^2 + 2ax + b = 0$ sean complejas.

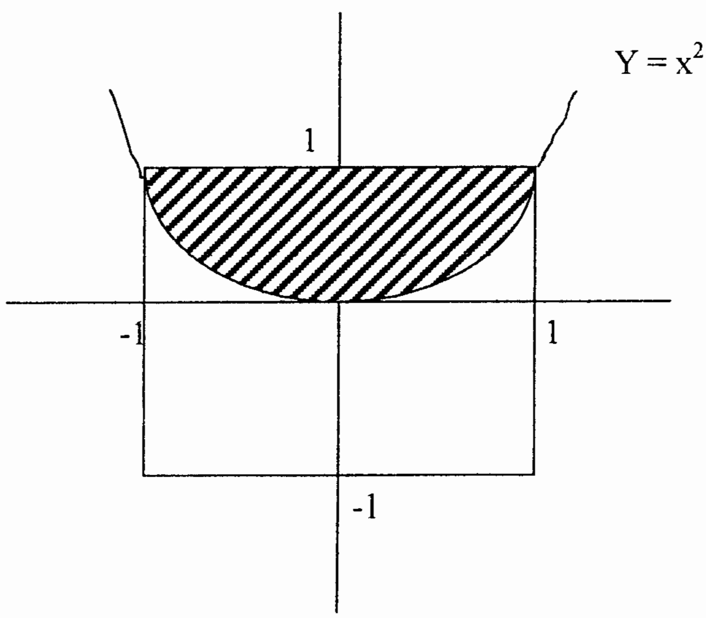
Solución:

1° Graficado el espacio muestra, su medida es: m(S) = 4

2° Como las raíces de la ecuación son:

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

ellas serán complejas cuando: $a^2 - b < 0$.



El suceso pedido esta dado por todos los puntos interiores a S e interiores a la parábola: $y = x^2$ ($b > a^2$). Así:

m(a) = área del segmento parabólico

luego:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\frac{2}{3}x2x1}{4} = \frac{1}{3}$$

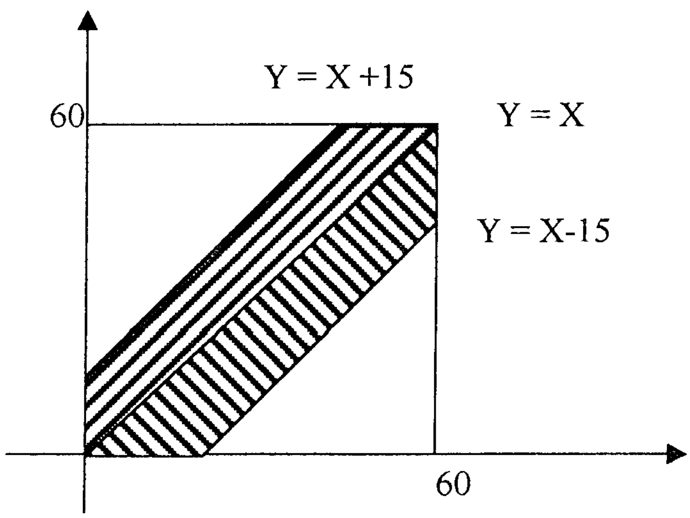
Ejemplo 1.23 Dos personas α y β deciden juntarse en un determinado lugar entre las 12 M y la 1 PM y acuerdan esperar 15 minutos. Determinar la probabilidad de que se encuentren.

Solución:

1° Sea x el instante en que llega α e y el instante en que llega β. Entonces el espacio muestra del experimento es:

$$S = \{(x, y) / 0 \le x \le 60 \text{ y } 0 \le y \le 60\}$$

y m (S) = 60 x 60 minutos^2.



2º Sea A el suceso α y β se encuentran, entonces:

$$A = \{ (x, y) \,/\, |y - x| \leq 15 \}$$

Pero

$$|y - x| \leq 15$$

implica

$$-15 \leq y - x \leq 15$$

o bien:

$$x - 15 \leq y \leq x + 15$$

Así A es la región comprendida entre las rectas:

$y = x - 15$ e $y = x + 15$.

Y como:

$$m(A) = 60 \times 60 - 45 \times 45$$

la probabilidad buscada es:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(B)} = 1 - \frac{45x45}{60x60} = \frac{7}{16} = 0.4375$$

1.6 PROBABILIDAD CONDICIONADA

En algunos casos la probabilidad de un acontecimiento A, varía según haya o no ocurrido un suceso B. Esta probabilidad se conoce como probabilidad condicionada y en esta acápite pretendemos definir con rigor este concepto.

DEFINICIÓN. 1.12 En un espacio de probabilidades (S, S*, P), llamaremos probabilidad condicionada del suceso A, cuando ha ocurrido B, al número.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{con } P(B) > 0$$

Esta definición tendrá validez como tal, siempre que la función $P(A \mid B)$ sea realmente una probabilidad según la definición 1.8

Teorema 1.15 Si $P(B) > 0$, la función $P(A \mid B)$ es una probabilidad en el espacio medible (S, S*), es decir se tiene:

a) $P(A \mid B) \geq 0 \qquad \forall A \in S^*$

b) $P(S \mid B) = 1$

c) $P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_k \middle| B\right) = \sum_{1}^{\infty} P(A_k \mid B)$

para toda sucesión (A_k) de acontecimientos excluyentes de S*.

Dm.

(a) Como $P(A \cap B) \geq 0$, de inmediato se tiene:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

(b) $P(S \mid B) = \dfrac{P(S \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

(c) Finalmente:

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_k \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_k\right) \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_k \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{1}^{\infty} P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{1}^{\infty} P(A_k|B)$$

Así hemos demostrado que lo definido como probabilidad condicionada es realmente una probabilidad.

OBSV: De acuerdo al teorema precedente resulta que cada propiedad establecida para una función de probabilidad, es válida también para la probabilidad condicionada y por ello se tiene:

1.- $P(\varnothing \mid B) = 0$

2.- $P\left(\bigcup_{1}^{n} A_j \middle| B\right) = \sum_{1}^{n} P(A_j|B)$; $A_k \cap A_j = \varnothing$

3.- $P(A \mid B) = 1 - P(A^c \mid B)$

4.- $P(A \mid B) \leq P(C \mid B)$ $\forall A \subset C$

5.- $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$

6.- $P(A \cap C^c \mid B) = P(A \mid B) - P(A \cap B \mid C)$

7.- $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B) \mid C)$

8.- $P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$ con $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$ con $P(A) > 0$

Ejemplo 1.25 En una universidad el 25% de los estudiantes falló en matemáticas, el 15% falló en estadísticas y el 10% falló en ambas asignaturas. Se toma un estudiante al azar, se pide:

a) Sabiendo que reprobó estadística, probabilidad que también falló en matemáticas.
b) Si falló en matemáticas, cual es la probabilidad que haya fallado en estadística.
c) Probabilidad que el estudiante haya reprobado uno de esos ramos a lo menos.

Solución:

1° Sean los acontecimientos

M = estudiantes que reprobaron matemáticas

E = estudiantes que reprobaron estadísticas.

Entonces:

$$P(M) = 0.25 \qquad P(E) = 0.15 \qquad P(M \cap E) = 0.10$$

2º Luego:

$$P(M \mid E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3}$$

$$P(E \mid M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}$$

$$P(MUE) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0.3$$

Ejemplo 1.26 En un espacio de probabilidades se tiene:

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Se pide calcular: $P(A^c \mid B^c)$ y $P(B^c \mid A^c)$

Solución:

1º $P(A^c) = 1- P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

2º $P(A^c \mid B^c) = \dfrac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)}$ $\qquad$ $P(B^c \mid A^c) = \dfrac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)}$

3º Necesitamos calcular: $P(A^c \cap B^c)$. Por las Leyes de Morgan, tenemos:

$$A^c \cap B^c = (AUB)^c$$

Estimar:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12}$$

$$P(AUB)^c = 1 - P(AUB) = \frac{5}{12} = P(A^c \cap B^c)$$

Luego

$$P(A^c \mid B^c) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} \qquad\qquad P(B^c \mid A^c) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

Ejemplo 1.27 Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo. Se considera los sucesos:

A = La suma de los puntos es 7 u 11

B = La suma de los puntos es impar

Se pide calcular: $P(A \mid B) + P(A \mid B^c) =$

Solución:

1° De inmediato tenemos:

A = { (1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)}

Así: m(A) = 8

B = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (&, 3), (6, 5)}

Así m(B) = 18

Además:

$$A \cap B = A \qquad y \qquad A \cap B^c = \varnothing$$

Luego:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{4}{9}$$

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = P(\varnothing)/(18/36) = 0$$

Así:

$$P(A \mid B) + P(A \mid B^c) = \frac{4}{9} \neq 1$$

Recordemos que siempre se tiene:

$$P(A \mid B) + P(A^c \mid B) = 1$$

Ejemplo 1.28 Se ha recibido una carta que se sabe puede venir desde Valdivia o desde Taltal. Del sello de correos sólo tiene estampado las letras consecutivas: AL. Probabilidad que la carta venga de Valdivia.

Solución:

1° Sea x el suceso: la partícula AL pertenece a la palabra Valdivia. Como en esta palabra hay 7 pares de letras consecutivas de las cuales uno sólo es: AL, tenemos: P(X) = 1/7

2° Sea Y el suceso: la partícula AL pertenece a la palabra Taltal. Como en esta hay 5 pares de letras consecutivas de las cuales 2 son: AL, tenemos P(Y) = 2/5.

3º De acuerdo al enunciado, debemos calcular:

$$P(X \mid XUY) = \frac{P(X \cap (X \cup Y)}{P(XUY)} = \frac{P(X)}{P(X)+P(Y)}$$

$$P(X \mid XUY) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+\frac{3}{5}} = \frac{5}{19}$$

Además la probabilidad que la carta venga de Taltal es: 14/19.

Ejemplo 1.29 En un lote de 100 artículos hay 20 defectuosos. Se toma uno y sin devolverlo se toma otro. Probabilidad que ambos sean defectuosos.

Solución:

1º Sea A el suceso el primer artículo sacado es defectuoso y sea B el segundo artículo sacado es defectuoso. Se busca: $P(A \cap B)$.

2º De $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{100} x \frac{19}{99} = \frac{19}{495} = 0.03838$$

Ejemplo 1.30 Tabulaciones sobre mortalidad indican que la probabilidad que una persona muera entre t_1 y t_2 años es:

$$P(t_1 < t \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)dt$$

Siendo:

$$Q(t) = \begin{cases} 3x10^{-9}\ t^2(100 - t)^2 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Determinar:

a) probabilidad que una persona viva 100 años.

b) Probabilidad que una persona muera entre los 60 y 70 años, si ella ya tiene 40 años.

Solución:

1° De inmediato

$$P(99 < t \leq 100) = 3x10^{-9} \int_{99}^{100} t^2(100 - t)^2 dt = 0$$

2° Para la segunda pregunta, tenemos:

$$P(60 < t \leq 70 \mid t \geq 40) = \frac{P[(60 < t \leq 70) \cap (t \geq 40)]}{P(t \geq 40)}$$

$$= \frac{P[(60 < t \leq 70)]}{P(t \geq 40)}$$

y como:

$$P(60 < t \leq 70) = 3x10^{-9} \int_{60}^{70} t^2(100 - t)^2 dt = 0.1543$$

$$P(t \geq 40) = 1 - P(t \leq 40) = 0.2050$$

Luego:

$$P((60 < t \leq 70 \mid 40) = \frac{0.1543}{0.2050} = 0.075$$

Obsv. Con el objeto de simplificar la notación, usualmente pondremos:

$$\bigcap_{1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_n = A_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n$$

TEOREMA. 1.16 Regla del Producto.

En un espacio de probabilidades (S, S^*, P) dados n sucesos cualquiera para los cuales : $P(A_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}) > 0$, se tiene:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \ldots\ldots P(A_n \mid A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_{n-1})$$

Dm.

1° Haremos ver que las probabilidades contenidas en la tesis: existen. En efecto:

$$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset A_1 \cap A_2 \cap A_3 \supset \ldots\ldots\ldots\ldots \supset A_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}$$

Luego:

$$P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq P(A_1A_2A_3) \geq \ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0$$

Así queda garantida la existencia de

$$P(A_2 \mid A_1), P(A_3 \mid A_1A_2), P(A_4 \mid A_1A_2A_3), \ldots\ldots$$

2º de:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

Resulta:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)$$

3º Finalmente usando inducción matemática, resulta la tesis.

Ejemplo 1.31 Un lote de 100 artículos es sometido a inspección de acuerdo al siguiente criterio: el lote es rechazado si uno al menos de 5 artículos sacados es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el lote, sabiendo que el contiene 7 artículos fallados?

Solución:

1º Sea A el acontecimiento el lote es rechazado, entonces A^c es el suceso el lote no es rechazado.

2º Designando con B_j el suceso: el artículo j-ésimo es sano, se tiene:

$$A^c = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5$$

Luego:

$$P(A^C) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)\, P(B_3 \mid B_1B_2) \,.......P(B_5 \mid B_1B_2B_3B_4)$$

O sea:

$$P(A^c) = \frac{93}{100} x \frac{92}{99} x \frac{91}{98} x \frac{90}{97} x \frac{89}{96} = 0.692$$

Finalmente

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 0.308$$

Ejemplo 1.32 Una caja contiene inicialmente r fichas rojas y b fichas blancas. Se saca una al azar, se observa su color, devolviéndola con a fichas del color sacado. Determinar la probabilidad de obtener ficha roja en cada una de las tres primeras sacadas.

Solución:

1° Sea R_j el suceso salió ficha roja en la sacada de orden j. Entonces se busca $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$.

2° Para ello tenemos:

$$P(R_1 R_2 R_3) = P(R_1) \times P(R_2 \mid R_1) \times P(R_3 \mid R_1R_2)$$

$$P(R_1 R_2 R_3) = \frac{r}{r+b} x \frac{r+a}{r+b+a} x \frac{r+2a}{r+b+2a}$$

TEOREMA. 1.17 (DE LA PROBABILIDAD TOTAL)

Si $(B_j)^n$ es una partición del espacio muestra S, para cada suceso A, se tiene:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Dm.

1° Como $A \in S^*$, tenemos: $A \subset S$, así:

$$A = A \cap S = A \bigcap \left(\bigcup_{1}^{n} B_j \right) = \bigcup_{1}^{n} (A \bigcap B_j)$$

2º Mostraremos que los acontecimientos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, son excluyentes. Pues:

$$(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = A \cap (B_1 \cap B_2) = A \cap \varnothing = \varnothing$$

Entonces:

$$P(A) = P\bigcup_{1}^{n} (A \bigcap B_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A \bigcap B_j)$$

Pero como:

$$P(A \mid B_j) = \frac{P(A \bigcap B_j)}{P(B_j)}$$

Resulta:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)$$

Conclusión que demuestra la tesis, que se conoce con el nombre de Teorema de la Probabilidad Total.

COR. Como B y B^c siempre constituyen una partición del espacio S, para todo $A \in S^*$, se tiene:

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c).$$

Ejemplo 1.33 En un lote de 100 artículos hay 20 defectuosos. Se toma uno al azar y luego sin reintegrarlo se toma otro. Probabilidad que el segundo artículo sea defectuoso.

Solución:

1° Sea A el suceso el segundo artículo sacado resultó defectuoso. Sea B el suceso el primer artículo sacado fue defectuoso, entonces B^c es el primer artículo sacado es no defectuoso. Como B y B^c constituyen una partición del espacio: sanos y defectuosos, se tiene:

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(B^c)\,P(A \mid B^c)$$

$$P(A) = \frac{20}{100} \text{x} \frac{19}{99} + \frac{80}{100} \text{x} \frac{20}{99} = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 1.34 En un juego de dominó se toma una carta y luego sin devolverla se toma otra. Probabilidad que haya coincidencia.

Solución:

1° El dominó tiene 28 cartas de las cuales 7 son chanchos.

2° Sea A el suceso hay coincidencia. La primera carta tomada puede ser chancho (B) o bien no-chancho (B^c), entonces:

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(B^c)\,P(A \mid B^c)$$

$$P(A) = \frac{7}{28} \text{x} \frac{6}{27} + \frac{21}{28} \text{x} \frac{12}{27} = \frac{7}{18}$$

Ejemplo 1.35 En una fábrica de tuercas, las máquinas A, B y C, entregan el 50%, el 30% y el 20% de la producción. El porcentaje de tuercas defectuosas que entregan la máquinas es: 3%, 4% y 5%. De la producción se toma una tuerca al azar, probabilidad que ella sea defectuosa.

Solución:

1° Sea X el suceso la tuerca tomada es defectuosa. Como ella proviene de alguna de las máquinas: A, B y C, tenemos:

$$P(X) = P(A)\,P(X \mid A) + P(B)\,P(X \mid B) + P(C)\,P(X \mid C)$$

Luego:

$$P(X) = 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 = 0.037$$

TEOREMA 1.18 (FÓRMULA DE BAYES)

Sea $(B_k)^n$ una partición del espacio muestra S y A un suceso tal que: $P(A) > 0$, entonces:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)\,P(B_k)}$$

Dm.

1° La definición de probabilidad condicionada nos da:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} \qquad \wedge \qquad P(A \mid B_j) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}$$

Eliminando $P(A \cap B_j)$ entre estas igualdades se tiene:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{P(A)}$$

2° Aprovechando el teorema de la probabilidad total (1.17), queda:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

Ejemplo 1.35 Con referencia al ejemplo 1.35, se saca una tuerca y resulta ser defectuosa, determinar la probabilidad que ella venga de la máquina A.

Solución:

Usando la fórmula de Bayes tenemos:

$$P(A \mid X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C)}$$

$$P(A \mid X) = \frac{(0.5)x(0.03)}{(0.03)x(0.5) + (0.04)x(0.4) + (0.05)x(0.2)} = \frac{15}{37}$$

Ejemplo 1.36 En un banco se ha concluido estadísticamente que la probabilidad que un cliente con fondos extienda un cheque con fecha equivocada es: 0.01. En cambio la probabilidad que un cliente sin fondos de un cheque con fecha equivocada es 1.

El 90% de los clientes del banco tiene fondos. En caja se recibe un cheque con fecha equivocada ¿Qué probabilidad existe que sea sin fondos?.

Solución:

A = cheque con fecha equivocada

B = cliente con fondos: P(B) = 0.90

C = cliente sin fondos: $P(B^c) = 0.10$

Además:

$$P(A \mid B) = 0.01 \ \text{y} \ P(A \mid B^c) = 1$$

2° El Teorema de Bayes, nos da:

$$P(B^c \mid A) = \frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A|B^c)P(B^c) + P(A|B)P(B)}$$

$$P(B^c \mid A) = \frac{1\text{x}0.10}{1\text{x}0.10 + 0.01\text{x}0.90} = \frac{0.10}{0.109} = 0.917$$

Ejemplo 1.37 Una caja X_1 contiene 12 fichas negras y 8 fichas rojas. Otra caja idéntica X_2, contiene 10 fichas negras y 20 rojas. Se toma una caja al azar y se saca una ficha. Se pide:

a) Probabilidad que la ficha sea negra

b) Si la ficha sacada es negra, probabilidad que provenga de la caja X_1.

Solución:

1° Sea A = la ficha sacada es negra. El teorema de la probabilidad total nos da:

$$P(A) = P(X_1)\, P(A \mid X_1) + P(X_2)\, P(A \mid X_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2}\text{x}\frac{12}{8+12} + \frac{1}{2}\text{x}\frac{10}{10+20} = \frac{28}{60} = 0.467$$

2° Si la ficha sacada es negra, la probabilidad que provenga de la caja X_1 la da la fórmula de Bayes, así:

$$P(X_1 \mid A) = \frac{P(X_1|A)P(X_1)}{P(X_1|A)P(X_1) + P(X_2|A)P(X_2)}$$

Y como el denominador ya fue calculado, tenemos:

$$P(X_1 \mid A) = \frac{\dfrac{6}{(12+8)}}{\dfrac{6}{(12+8)} + \dfrac{5}{(10+20)}} = \frac{\dfrac{6}{20}}{\dfrac{28}{60}} = \frac{9}{14}$$

1.7 INDEPENDENCIA ESTOCASTICA

La independencia estocástica de sucesos es, hablando con generalidad, la negación de los acontecimientos condicionalmente dependientes. Veamos la definición formal de este concepto.

DEFINICIÓN 1.13 En un espacio de probabilidades (S, S^*, P) dos acontecimientos A y B son estocásticamente independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En caso contrario los acontecimientos son dependientes.

Ejemplo 1.38 Se toma al azar una carta desde un naipe de 52 cartas. Se considera los acontecimientos:

A = La carta sacada es trébol.
B = La carta sacada es As.

Determinar si A y B son o no independientes.

Solución:

1° De inmediato tenemos

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{52}$$

2° $P(A)\,P(B) = \frac{1}{4} x \frac{1}{13} = \frac{1}{52} \quad \wedge \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

luego: A y B son estocásticamente independientes.

Ejemplo 1.39 En el espacio S = {(1, 0). (0, 1), (1, 1)} se tiene: $P(w_1) = \frac{1}{3}$ $\forall\ w_j \in S$, se consideran los acontecimientos:

A = la primera componente de w_j es 1

B = la segunda componente de w_j es 1

Determinar si A y B son independientes.

Solución:

1° $P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{3} \qquad P(A)P(B) = \frac{4}{9}$

2° $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq P(A)P(B).$

Así los acontecimientos no son independientes, son dependientes.

Ejemplo 1.40 En todo espacio de probabilidades (S, S*, P) los acontecimientos $\varnothing$ y S son independientes de todo suceso $A \in S^*$.

Solución:

1° $P(A \cap \varnothing) = P(\varnothing) = 0$

$P(A) \cdot P(\varnothing) = P(A) \cdot 0 = 0$

2° $P(A \cap S) = P(A)$

$P(A) \cdot P(S) = P(A) \cdot 1 = P(A)$.

TEOREMA 1.19 En un espacio (S, S*, P) dos acontecimientos A y B con $P(B)>0$, son independientes si y solo si $P(A \mid B) = P(A)$.

Dm.

1° Sea A y B independientes, entonces:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

2° Recíprocamente sea: $P(A \mid B) = P(A)$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B)$$

Y entonces A y B son independientes.

TEOREMA 1.20 En un espacio (S, S*, P) sea A y B sucesos independientes, entonces:

a) A y B^c son independientes

b) A^c y B son independientes

c) A^c y B^c son independientes.

Dm.

1° De inmediato tenemos:

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

Y como los acontecimientos son excluyentes resulta:

a).- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)\,P(B)$

$P(A \cap B^c) = P(A)\,(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$

Así A y B^c son independientes.

b).- De análoga manera, considerando:

$$B = B \cap S = B(A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

Se tiene:

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(B \cap A^c) = P(B)\,(1 - P(A)) = P(B) \cdot P(A^c)$$

c).- Finalmente A^c y B independientes, implica por a).- que A^c y B^c son independientes.

Cor. Si una cualquiera de las parejas de sucesos: (A, B); (A, B^c); (A^c, B); (A^c, B^c) son independientes, también son independientes cada una de las parejas restantes.

Ejemplo 1.41 Se tiene dos armas A y B. Las probabilidades de dar en el blanco con cada una de ellas es: P(A) = 0.6, P(B) = 0.8. Se disparan ambas armas determinar la probabilidad que sólo una acierte.

Solución:

1° Llamando M el acontecimiento cuya probabilidad se busca, tenemos: $M = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, luego:

$$P(M) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$
$$P(M) = P(A) \cdot P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B)$$
$$P(M) = 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.8 = 0.44$$

Ejemplo 1.42 Una persona α de 7 afirmaciones regularmente entrega 5 verdaderas y una persona β entre 9 afirmaciones entrega 8 verdaderas. Si ellos no se conocen se pide probabilidad que respecto a un mismo hecho, se contradigan.

Solución:

1° Sea los acontecimientos:

$A = \alpha$ dice la verdad $\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{5}{7}$

$B = \beta$ dice la verdad $\Rightarrow$ $P(B) = \dfrac{8}{9}$

$X = \alpha$ y β se contradicen

Entonces:

$$X = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$
$$P(X) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

2° Como las personas no se conocen sus afirmaciones son independientes, luego:

$$P(X) = P(A)\,P(B^c) + P(A^c)P(B)$$

$$P(X) = \frac{5}{7} x \frac{1}{9} + \frac{2}{7} x \frac{8}{9} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$$

DEFINICIÓN. 1.14 En un espacio de probabilidades (S, S*, P) tres sucesos: A, B y C son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \quad ; \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C) \quad ; \quad P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

Obs. Se podría pensar que la definición exige demasiado y que presumiblemente la última igualdad podría ser consecuencia de las tres primeras. Tal cosa no ocurre y para respaldar esta afirmación se han dado numerosos ejemplos. A continuación exponemos uno que nos parece muy ilustrativo.

Ejemplo 1.43 Se lanzan dos dados, uno rojo y el otro azul. Se consideran los sucesos:

A = El dado azul da número par.
B = El dado rojo da número impar.
C = Ambos dados dan par o ambos dan números impares.

Determinar si los sucesos: A, B y C son independientes o no.

Solución:

1° De inmediato se tiene:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ x \ \frac{1}{2} = P(A)\,P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)\,P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(B)\,P(C)$$

Hasta aquí los sucesos: A, B y C son independientes dos a dos, pero ellos no son independientes, pues:

$$P(A)\,P(B)\,P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Obs.: De acuerdo a las ideas precedentes la definición de independencia de los sucesos: $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$ no puede estar expresada simplemente por:

$$P(A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\ldots.P(A_n)$$

Es necesario además que cada conjunto de k sucesos ($2 \leq k \leq n$) satisfaga una igualdad análoga a la anteriormente dada. Así tenemos:

DEFINICIÓN 1.15 Los acontecimientos $(A_k)^n$, con n finito o numerable son independientes si y solo si la probabilidad de la intersección de cualquier número finito de ellos, sea igual al producto de sus probabilidades.

Si el número n es finito, el número de igualdades contenidas en la definición precedente es:

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - (n+1)$$

Ejemplo 1.44 Un examen consta de 4 preguntas. Cada pregunta presenta 3 respuestas de las cuales sólo una es correcta. Un estudiante toma en cada pregunta una respuesta al azar. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar si ello se logra entregando más respuestas buenas que malas?

Solución:

1° El espacio muestra de cada pregunta es:

$$S = \{\text{buena, mala}\} = \{B, M\}$$

Por enunciado: $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(M) = \frac{2}{3}$

2° Sea A el suceso: aprobar el examen. Ello ocurre cuando:

$$A = \{BBBB, BBBM, BBMB, BMBB, MBBB\}$$

De donde:

$$P(A) = P(BBBB) + P(BBBM) + P(BBMB) + P(BMBB) + P(MBBB)$$

3° Como las respuestas se toman al azar, ellas son independientes, luego:

$$P(BBBB) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$P(BBBM) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(M) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)$$

De donde:

$$P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} = 0.1111$$

Ejemplo 1.45 Se lanzan simultáneamente tres dados, buscando tres ases. Determinar el número mínimo de lanzamientos necesarios para lograr el objetivo con probabilidad no inferior a: 0.7

Solución:

1° Sea A el acontecimiento lograr tres ases en un lanzamiento, entonces:

$$P(A) = \frac{1}{6}x\frac{1}{6}x\frac{1}{6} = \frac{1}{216} \qquad \wedge \qquad P(A^c) = \frac{215}{216}$$

Entonces la probabilidad de no lograr 3 ases en n lanzamiento es:

$$P(B) = \left(\frac{215}{216}\right)^n \qquad \Rightarrow \qquad P(B^c) = 1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n \geq 0.7$$

$$\left(\frac{215}{216}\right)^n \leq 0.3$$

$$n(\log 215 - \log 216) \leq \log 0.3$$

de donde: $n \geq 260.15$. Así el número mínimo de lanzamientos necesarios para tener 3 ases con probabilidad no inferior a: 0.7 es $n = 261$

Ejemplo 1.46 Tres personas A, B y C disparan a un blanco. Sus posibilidades de acertar son:

$$P(A) = 0.7 \quad P(B) = 0.8 \quad P(C) = 0.9$$

Los tres han disparado una vez simultáneamente y se encuentra una sola bala en el blanco. Probabilidad que el proyectil sea de A.

Solución:

1° Sea X_1 el suceso: la bala en el blanco es de A. Análogamente se define: X_2 y X_3. Entonces la probabilidad buscada es:

$$P(X_1 \mid X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \frac{P[X_1 \cap (X_1 \cup X_2 \cup X_3)]}{P(X_1 \cup X_2 \cup X_3)}$$

2° Como los acontecimientos: X1, X2, X3 son excluyentes, resulta:

$$P(X_1 \mid X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \frac{P(X_1)}{P(X_1)+P(X_2)+P(X_3)}$$

3° Pero por definición de X_j, tenemos:

$P(X_1) = P(AB^CC^C) = P(A)\ P(B^C)\ P(C^C) = 0.014$
$P(X_2) = P(\ A^CBC^C) = P(A^C)\ P(B)\ P(C^C) = 0.024$
$P(X_3) = P(A^CB^CC) = P(A^C)\ P(B^C)\ P(C) = 0.054$

Finalmente:

$$P(X_1 \mid X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \frac{0.014}{0.014+0.024+0.054} = 0.152$$

Ejemplo 1.47 Se lanza un par de dados, uno rojo el otro azul, tantas veces como sea necesario para obtener 5 0 7 puntos. Probabilidad de sacar 5 puntos antes de obtener 7 puntos.

Solución:

1° Para un lanzamiento tenemos:

Si A = {Sacar 5 puntos} se tiene: $P(A) = \frac{4}{36}$

Si B = {Sacar 7 puntos} se tiene: P(B) = $\frac{6}{36}$

Si X = {Sacar 5 o 7 puntos} = AUB

Tenemos:

$$P(X) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{36}$$

$$P(X^c) = 1 - P(X) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

Siendo X^c = no sacar ni 5 ni 7 puntos.

2° El acontecimiento cuya probabilidad se busca es:

$$M = A \cup (X^cA) \cup (X^c X^c A) \cup (X^c X^c X^c A) \cup .....$$

De donde:

$$P(M) = P(A) + P(X^cA) + P(X^c X^cA) + ...$$

$$P(M) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}x\frac{13}{18} + \frac{1}{9}x\left(\frac{13}{18}\right)^2 + ...$$

$$P(M) = \frac{1}{9}x\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{1}{9}x\frac{18}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ejemplo 1.48 Se tiene un dado no cargado, el cual se lanza sucesivamente. Demostrar que alguna vez debe salir un as.

Solución:

1° Sea A el acontecimiento sale as al lanzar un dado, entonces:

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \wedge \quad P(A^c) = \frac{5}{6}$$

2° Sea A_k el suceso sale As por primera vez en el lanzamiento de orden k. Sea B_k el suceso: sale As en el lanzamiento de orden k. Entonces el suceso A_k queda expresado por:

$$A_k = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c \cap .... \cap B_{k-1}^c \cap B_k$$

Así:

$$P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} x \frac{1}{6}$$

3° Llamando X el acontecimiento cuya probabilidad se busca, tenemos:

$$X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_k .....$$

Luego:

$$P(X) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_k) + ...$$

$$P(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} x \frac{5}{6} + \frac{1}{6} x \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} x \left(\frac{5}{6}\right)^3 + ... + \frac{1}{6} x \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$P(X) = \frac{1}{6} x \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{6} x \frac{6}{1} = 1$$

Resultado que nos indica que X es un suceso seguro de ocurrir.

DEFINICIÓN. 1.16 Se llama experimento Bernoulli, todo experimento aleatorio cuyo espacio muestra S, tiene sólo dos resultados llamados: éxito y fracaso, que ocurren con probabilidades p y q = 1 – p, respectivamente.

Son ejemplos de experimentos Bernoulli los siguientes:

a) Nacimiento de un hijo: S = {niño, niña}
b) Lanzamiento de una moneda: S = {c, s}
c) Se toma al azar una tuerca en la producción de una máquina: S = {tuerca sana, tuerca defectuosa}

TEOREMA 1.21 Si en un experimento Bernoulli la probabilidad de ocurrencia de un suceso A es p en cada prueba de una serie de n ensayos, la probabilidad que dicho suceso ocurra k veces en n $(n \geq k \geq 0)$ tentativas es:

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Siendo $q = 1 - p$ la probabilidad de ocurrencia de A^c.

Dm.

1° Si tomamos un determinado grupo de k ensayos, la probabilidad que A ocurra en cada uno de ellos y no ocurra en los $(n - k)$ restantes es:

$$p^k \cdot q^{n-k}$$

2° Ahora el número k de experimentos que puede tomarse en n de ellos es: $\binom{n}{k}$, luego la probabilidad buscada es:

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

COR.1 La probabilidad que el acontecimiento A ocurra a lo menos k veces en n ensayos es:

$$P(n, k) = P(x = k) + P(x = k+1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(k = n)$$

COR.2. La probabilidad que el acontecimiento A ocurra a lo mas k veces en n ensayos es:

$$P(0, k) = P(x = 0) + P(x = 1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(x = k)$$

COR.3 La probabilidad que el acontecimiento A ocurra a lo menos s veces y a lo mas t veces (n > t > s) en n ensayos es:

$$P(s, t) = P(x = s) + P(x = s+1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(k = t)$$

Ejemplo 1.49 Un estudiante resuelve por termino medio el 60% de los problemas que le proponen. Un examen contiene 8 problemas y se necesita resolver bien a lo menos 5 para aprobar. ¿Qué probabilidad tiene el estudiante de salir bien?

Solución:

1° La probabilidad de resolver un problema es: p = 0.6 y la de no resolverlo es q = 0.4

2° La probabilidad que tiene el estudiante de resolver k en una totalidad de 8 ≥ k problemas es:

$$P(X = K) = \binom{8}{k} p^k q^{8-k}$$

3° Nuestro estudiante aprobará si:

$$P(x \geq 5) = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} p^k q^{8-k}$$

$$P(x \geq 5) = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} (0.6)^k (0.4)^{8-k} = 0.5941$$

Ejemplo 1.50 Un cargamento de manzanas después del transporte del origen a su destino, contiene el 90% de manzanas sanas. Probabilidad que una bolsa de 25 unidades contenga:

a) Cinco manzanas malas.

b) No más de 5 manzanas malas

c) No menos de 5 manzanas malas

Solución:

1° De inmediato tenemos un experimento de Bernoulli con p= 0.9 y q = 0.1, luego:

a).- $P(x = 5) = \binom{25}{5} (0.9)^{20} (0.1)^5 = 0.0885$

b).- $P(x \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{25}{k} (0.1)^k (0.9)^{25-k} = 0.9666$

c).- $P(x \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{25}{k} (0.1)^k (0.9)^{25-k} = 0.098$

Ejemplo 1.51 Se introduce al azar 4 fichas numeradas de 1 a 4, en cuatro cajas igualmente numeradas. Probabilidad que ninguna ficha caiga en la caja de igual número.

Solución:

1° Consideremos el acontecimiento contrario al pedido, para ello sea:

A_j = la ficha (j) cae en la caja (j).

2° Debemos calcular la probabilidad del suceso: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Como los acontecimientos Aj no son excluyentes, por teorema 1.11 tenemos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_1^4 P(A_j) - \sum_1^4 P(A_iA_j) + \sum_1^4 P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

3° Cuatro fichas se disponen en 4 cajas de 4! Maneras, luego: m(S) = 24. Ahora una ficha se toma de 4 disponibles de 4 maneras se disponen de 3! Maneras, luego:

$$\sum_1^4 P(A_j) = \frac{4x3!}{24}$$

Análogamente 2 fichas se toman entre 4 de $\binom{4}{2}$ maneras y las dos restantes se disponen de 2! maneras, luego:

$$\sum_1^4 P(A_iA_j) = \frac{\binom{4}{2}2!}{24} \Rightarrow \qquad \sum_1^4 P(A_iA_jA_k) = \frac{\binom{4}{3}1!}{24}$$

y como $P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 1/24$

finalmente tenemos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{24-12+4-1}{24} = \frac{5}{8}$$

Así la probabilidad pedida es: 3/8

Ejemplo 1.52 Tres jugadores A, B y C extraen por orden una ficha de una caja que contiene 10 fichas blancas y 10 fichas negras (sin reposición). El que primero extrae una blanca gana. Si el orden del juego es: ABC ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ganar?

Solución:

1° Veamos las maneras en que puede ganar A. Indicando con una raya encima, cuando se extrae ficha negra, tenemos:

A .... $p_1 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$\overline{ABC}$ A .... $p_2 = \frac{10}{20} x \frac{9}{19} x \frac{8}{18} x \frac{10}{20} = \frac{20}{323}$

$\overline{ABC}$ $\overline{ABC}$ A .... $p_3 = \frac{10}{20} x \frac{9}{19} x \frac{8}{18} x \frac{7}{17} x \frac{6}{16} x \frac{5}{15} x \frac{10}{14} = \frac{5}{323x4}$

$\overline{ABC}$ $\overline{ABC}$ $\overline{ABC}$ A .... $p_4 = \frac{10}{20} x \frac{9}{19} x .... x \frac{10}{11} = \frac{5}{323x26x11}$

Y aquí el juego termina, pues si la última sacada de A fuera negra, se tendría sacada 10 negras y sólo queda en la caja 10 fichas blancas y ganaría B. Así la probabilidad que tiene A de ganar es:

$$P(A) = \sum_{1}^{4} p_j = 0.5665$$

Razonando de análoga manera se encuentra:

$$P(B) = 0.2914 \qquad y \qquad P(C) = 0.1427$$

Ejemplo 1.53 Se lanzan dos dados 100 veces, se pide probabilidad de sacar 12 puntos en 3 casos

Solución:

1° Si se lanzan dos dados, la medida del espacio muestra es $m(S) = 6^2 = 36$

2° Así la probabilidad de sacar 12 puntos en un lanzamiento es:

$$P(A) = \frac{1}{36} \quad y \quad P(A^c) = \frac{35}{36}$$

Luego la probabilidad de sacar 3 veces 12 puntos en 100 lanzamientos es:

$$P = \binom{100}{3}\left(\frac{1}{36}\right)^3\left(\frac{35}{36}\right)^{97} = 0.2257$$

Ejemplo 1.54 Se lanzan 2 dados 100 veces. Probabilidad de sacar 12 puntos en 3 veces, a lo menos.

Solución:

De acuerdo al ejercicio anterior se tiene de inmediato:

$$P = \sum_{3}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{36}\right)^k\left(\frac{35}{36}\right)^{100-k}$$

$$P = 1 - \sum_{0}^{2}\binom{100}{k}^k\left(\frac{1}{36}\right)^k\left(\frac{35}{36}\right)^{100-k} = 0.528$$

Ejemplo 1.55 En un tubo vertical se enfilan aleatoriamente 2n bolitas de las cuales n son blancas y n son negras. Probabilidad que en la mitad inferior del tubo queden exactamente: $p < n$ bolitas blancas.

Solución:

1° n bolitas se pueden tomar de (2n) bolitas disponibles de $\binom{2n}{n}$ maneras, luego: la medida del espacio muestra es:

$$m(S) = \binom{2n}{n}$$

2° En la mitad inferior del tubo hay n bolitas, entre las cuales deseamos tener: p blancas y (n – p) negras. Llamando A a este suceso, su medida es:

$$m(A) = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}^2$$

3° Así la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\binom{n}{p}^2}{\binom{2n}{n}}$$

Ejemplo 1.56 (Póker con dados)

Se lanzan 5 dados de colores diferentes (sólo para distinguirlos) se pide probabilidad de:

a) Obtener un par: (a, a, b, c, d)
b) Obtener dos pares: (a, a, b, b, c)
c) Un trío: (a, a, a, b, c)
d) Cinco puntos diferentes; (a, b, c, d, e)
e) Un full: (a, a, a, b, b)
f) Cuatro cartas: (a, a, a, a, b)
g) Poker: (a, a, a, a, a)

Solución:

1° La medida del espacio es:

$$m(S) = V_5^6 = 6^5 = 7776$$

a) Veamos la medida de un par: tenemos las permutaciones con repetición de 6 elementos en los cuales hay dos iguales. Los dos iguales valen para los seis números y los tres números restantes se pueden tomar de $\binom{5}{3}$ maneras, luego:

$$m(1par) = \frac{5!}{2!1!1!1!} \text{ x } 6 \text{ x } \binom{5}{3} = 3600$$

de análoga manera se encuentran:

$$m(2pares) = \frac{5!}{2!2!1!} \text{ x } 6 \text{ x } \binom{5}{2} = 1800$$

$$m(1trío) = \frac{5!}{3!1!1!} \text{ x } 6 \text{ x } \binom{5}{2} = 1200$$

$$m(full) = \frac{5!}{3!2!} \text{ x } 6 \text{ x } \binom{5}{1} = 300$$

m(5 p. diferentes) = 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720

$$m(4 cartas) = \frac{5!}{4!1!} \text{ x } 6 \text{ x } \binom{5}{1} = 150$$

m(poker) = 6

Así la probabilidades buscadas son:

$p(a) = \frac{3600}{7776} = 0.4629$ $\qquad$ $p(b) = \frac{1800}{7776} = 0.2315$

$p(c) = \frac{1200}{7776} = 0.1543$ $\qquad$ $p(d) = \frac{720}{7776} = 0.0926$

$p(e) = \frac{300}{7776} = 0.03858$ $\qquad$ $p(f) = \frac{150}{7776} = 0.01929$

$p(g) = \frac{6}{7776} = 0.00077$ $\qquad$ $p(h) = \frac{240}{7776} = 0.03086$

Hemos agregado el caso de la escala no considerada en el enunciado. Su medida es:

$$h) \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 5 \\ \\ 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases} \qquad m(\text{escala}) = 2 \times 5! = 240$$

y su probabilidad la ya indicada en p(h). De este modo quedan incluidos todos los casos, pues:

$$3600 + 1800 + 1200 + 720 + 300 + 240 + 150 + 6 = 7776$$

Además se tiene:

p(poker) < p(4 cartas) < p(escala) < p(full) < p(trío) < p(2 pares) < p(1 par)

Ejemplo. 1.56 Una secretaria ha escrito n cartas y los n sobres correspondientes. Pone las cartas, al azar, en los sobres. Se pide probabilidad que una al menos de las cartas quede en el sobre correspondiente.

Solución:

1° Supongamos las cartas y los sobres numerados de 1 a n. Llamemos A_j al suceso: la carta de orden j queda en el sobre j. Entonces debemos calcular:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = \sum_{1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i A_j A_k) + \ldots..$$

2° El número de maneras de colocar n cartas en n sobres es: m(5) = n!

3° Los casos favorables al acontecimiento A_j son (n – 1)! luego:

$$P(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Análogamente los casos favorables al acontecimiento: $A_i \cap A_j$ son (n – 2)!, luego:

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

y así sucesivamente, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots\ldots.$$

O sea:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots\ldots. + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

Ejemplo 1.57 A un conductor le han pasado 12 partes, todos por mal estacionamiento. Se pide:

a) Probabilidad que le hayan pasado los partes en días martes o jueves.

b) Probabilidad que de los 12 partes ninguno haya sido emitido en domingo. ¿Se deduce de aquí que la policía no trabaja en día domingo?

Solución:

1° Definimos los sucesos.

A_k = El k-ésimo parte fue emitido día Martes.
B_k = El k-ésimo parte fue emitido día Jueves.

Entonces se busca:

$$p = P((A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap (A_{12} \cup B_{12}))$$

como los sucesos: $A_j \cap B_j$ son independientes tenemos:

$$p = \prod_{j=1}^{12} P(A_j \cup B_j) = \prod_{j=1}^{12} [P(A_j) + P(B_j)]$$

$$p = \prod_{j=1}^{12} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right)^{12} = 0.2959x10^{-6}$$

2° Pasemos a calcular ahora la probabilidad que ninguno de los 12 partes fue emitido en Domingo. Para ello definamos el suceso:

C_k = el k-ésimo parte no fue emitido en Domingo.

Entonces de inmediato se tiene:

Entonces de inmediato se tiene:

$$P(C_k) = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow q = P\left(\bigcap_{1}^{12} C_k\right) = \left(\frac{6}{7}\right)^{12} = 0.15726$$

De aquí concluimos que la probabilidad que se pase a lo menos un parte el día Domingo es: 0.84274 y como ésta es bastante alta deducimos que la policía no trabaja en Domingo.

Ejemplo 1.58 El dueño de 5 cabañas de descanso tiene 3 televisores para arrendar a sus clientes. Se sabe que 2 de 3 clientes piden televisor. Si las cabañas están siempre ocupadas, se pide: probabilidad que un cliente que solicite televisor, lo reciba.

Solución:

1° La probabilidad que un cliente solicite televisor es: $p = 2/3$

2° Un cliente α que solicita un televisor lo logra en los siguientes casos mutuamente excluyentes:

A_0 = ningún cliente ha solicitado televisor.
A_1 = sólo 1 cliente ha pedido televisor.
A_2 = sólo 2 clientes han pedido televisor.
A_4 = cuatro clientes solicitan televisor y α está entre los tres primeros.
A_5 = cinco clientes piden televisor y α está entre los tres primeros.

3° De aquí resulta de inmediato:

$$P(A_v) = \binom{5}{1} p(1-p)^4 = 5x\left(\frac{2}{3}\right)x\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$$

$$P(A_1) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10x\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

$$P(A_2) = \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 = 10x\left(\frac{2}{3}\right)^3 x\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

$$P(A_4) = \binom{5}{4} p^4(1-p)\ x\frac{3}{4} = 5x\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)x\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{60}{243}$$

$$P(A_5) = \binom{5}{5} p^5 x\frac{3}{5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{96}{1215}$$

Así la probabilidad que el cliente α obtenga un televisor al solicitarlo es:

$$P(A) = \frac{10}{243} + \frac{40}{243} + \frac{80}{243} + \frac{60}{243} + \frac{96}{1215} = \frac{1046}{1215} = 0.8609$$

Ejemplo 1.59 En el cuadrado: $S = \{(x, y) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1\}$ Se toma aleatoriamente un punto (x, y) y se define un nuevo punto $(\bar{x}, \bar{y})$ por:

$$\bar{x} = 4x^2 - y \qquad\qquad \bar{y} = 1{,}5x - y$$

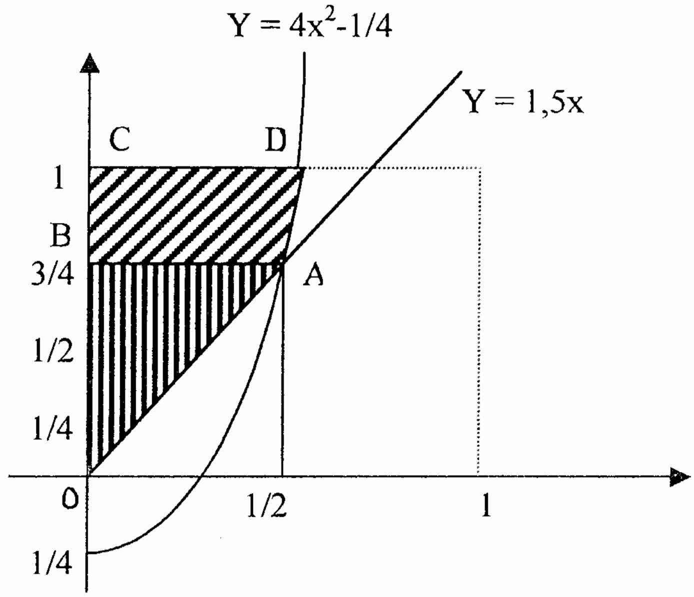
Calcular: $P(\bar{x} \leq 4 \wedge \bar{y} \leq 0)$

Solución:

1º $\quad \bar{x} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 - y \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y \geq 4x^2 - \frac{1}{4}$

2º $\quad \bar{y} \leq 0 \Rightarrow 1{,}5x - y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 1{,}5x$

2º Graficamos $y = 4x^2 - \frac{1}{4}$ e $y = \frac{3}{2}x$



El área encerrada por $\bar{x} \leq \frac{1}{4}$ e $\bar{y} \leq 0$ es el área achurada cuyo valor es:

A = área Δ AOB + área ΔBCD

Área ΔOAB = 0.5 x 0.5 x 0.75 = 0.1875

Ärea ΔBCD = $\int_{0.75}^{1} x\, dy = \int_{0.75}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{0.25+y}\, dy = 0.133$

Y como la medida del espacio es: m(S) = 1 la probabilidad pedida es:

$$P(\bar{x} \leq \frac{1}{4} \wedge \bar{y} \leq 0) = 0.1875 + 0.133 = 0.3205$$

Ejemplo 1.60 Se sabe que las afirmaciones de dos testigos son tales que las veracidades de B son el doble de las veracidades de A. Determinar la probabilidad que ambos digan la verdad si los dos afirman lo mismo.

Solución:

1° Sea x la probabilidad que una afirmación de A sea verdadera.

2° Entonces la probabilidad que una afirmación de B sea verdadera es: 2x

3° Así la probabilidad que ambos digan la verdad es: $x \cdot 2x = 2x^2$.

4° La probabilidad que ambos mientan es: $(1-x)(1-2x) = 1-2x+2x^2$.

5° Ahora para la veracidad de B que es la mayor deberá tenerse:

$$0 \leq 2x \leq 1 \quad \text{de donde:} \quad 0 \leq x \leq ½$$

6° Como x varía en el intervalo (0, ½) la probabilidad pedida es: (T.1.18)

$$p = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{2x^2 + (1-x)(1-2x)} dx$$

$$p = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{4x^2 + 3x + 1} \cdot \frac{16}{16} dx$$

$$p = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{32x^2}{64x^2 - 48x + 9 + 7} dx$$

$$p = 64 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(8x-3)^2 + 7} dx$$

haciendo: $8x - 3 = u$, resulta

$$p = \frac{1}{8} \int_{u=-3}^{1} \frac{(u+3)^2}{(u)^2 + 7} du$$

$$p = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\ln 2 + \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{7} = 0.3549$$

1.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea (A_j) una familia de acontecimientos de un espacio (S, S*, P), no necesariamente excluyentes. Demostrar que:

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

Ind: Usar inducción matemática.

2. Si A y B son acontecimientos excluyentes con probabilidades no nulas, demuestre que son dependientes.

3. Sea (A_j) una sucesión de acontecimientos disjuntos. Demuestre que la serie: $\sum P(A_j)$ es siempre convergente.

4. En un espacio (S, S*, P) los acontecimientos A y B son tales que: $P(A|B)>P(A)$. Demuestre que: $P(A \mid B) > P(B)$.

5. En un espacio (S, S*, P) se tiene que $P(A) = a$ y $P(B) = b \neq 0$. Demuestre que $P(A|B) > \dfrac{(a+b-1)}{b}$

6. Demostrar que: $P(A|B) = P(A)$ si y solo si $P(A^c|B^c) = P(A^c)$

7. En un espacio (S, S*, P) se tiene que $P(A|B^c) = P(A|B)$. Demuestre que A y B son sucesos independientes.

8. En el espacio (S, S*, P) los acontecimientos A, B y C son independientes. Demuestre que también son independientes los sistemas: (A, B^c, C), (A, B^c, C^c)

9. Demostrar que:

a) $P(A \cup B|X) = P(A|X) + P(B|X) - P(A \cap B|X)$

b) $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$

10. En un espacio medible de Borel $(\Re, \Re^*)$ se ha definido una probabilidad de P(*), tal que: $P(]-\infty,10])=1$. Demuestre que: P((50, 100)) = 0

11. En un espacio medible de Borel se ha definido una función probabilidad de P(*) por:

$$P(]-\infty,10]) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Calcular las probabilidades de los sucesos: $A =]-3,0]$ y $B =]0,3]$

12. Se coloca en un estante aleatoriamente 5 volúmenes de una obra. Probabilidad que queden en orden correlativo. (Resp. $\frac{2}{5!}$)

13. Se lanzan seis dados. Probabilidad que salgan seis números diferentes. (Resp.: $\frac{6!}{6^6}$)

14. Probabilidad de sacar 3 o más corazones al tomar al azar cuatro cartas de un naipe inglés. (Resp. $m(A) = \binom{13}{3}\binom{39}{1} + \binom{13}{4}\binom{89}{0}$

15. Un cierto tipo de motor puede fallar: por los rodamientos, por el embobinado o por las escobillas. La probabilidad del primer tipo de falla es el doble del segundo y esta es cuatro veces la tercera. Probabilidad de falla por cada uno de los tres mecanismos.

16. Una persona lanza sucesivamente dos dados. Gana si saca un 8 antes que 7. Probabilidad de ganar. (Resp.: $\frac{5}{11}$)

17. Una familia tiene tres hijos. Probabilidad condicional que los tres sean hombres, sabiendo que por lo menos uno de ellos es varón. Cada hijo tiene la misma probabilidad de ser niño o niña. (Resp.: $\frac{1}{4}$)

18. Una persona lanza dos monedas. Probabilidad de tener dos caras, dado que una moneda dio cara. (Resp.: $\frac{1}{4}$)

19. Un curso tiene un 60% de alumnos y 40% de alumnas. El 40% de los hombres y el 60% de las mujeres fuman. Probabilidad que, tomado al azar un estudiante que fume, sea hombre. (Bayes)

20. Una caja contiene 3 monedas, una de ellas con dos caras y las otras dos normales. Se saca una moneda al azar y se lanza cuatro veces sucesivas. Si cada vez sale cara determinar la probabilidad que la moneda tomada sea la de dos caras . (Bayes: 24/17)

21. Se toma al azar un grupo de n personas. Probabilidad que dos o mas personas tengan el mismo día de cumpleaños.

(Sol n=12, p=0.833 n=23, p=0.493)

22. Cuatro personas se ponen de acuerdo para encontrarse en el Hotel Savoy de París. Si en París hay cuatro hoteles con ese nombre, probabilidad que cada uno elija un hotel diferente. (Resp.: $\frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}$)

23. Dado un grupo de cuatro personas, determinar la probabilidad de que por lo menos dos hayan nacido el mismo mes. (Resp.: Idem 22)

24. Un dado está cargado de modo que la probabilidad de obtener un número es proporciona] a él. Se pide:

a) Probabilidad de sacar 6, sabiendo que se obtuvo un número par. (Resp.: 5/9)

b) Probabilidad de obtener un número par, sabiendo que se obtuvo un número menor que 5. (Resp.: 0.6)

25. Un jugador de brige dice que en su mano (13 cartas) le salió:
a) Un As b) El As de corazón.
Probabilidad que contenga otro As.

26. Un naipe inglés se divide en cuatro manos de 13 cartas cada una. Probabilidad que una de ellas contenga las cartas de la misma pinta. Resp.:

$$\frac{4}{\binom{52}{13}}$$

27. Determinar el menor número de hijos que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de que por lo menos dos sean varones sobrepase 0.75. (Resp.: n = 5)

28. La fabricación de fusibles eléctricos, entrega un 15% fallados. Probabilidad que en una muestra de 10 fusibles:

    a) No haya defectuosos (Resp.: 0.85^{10})
    b) Haya no más de un defectuoso. Resp.: 0.82

29. Una aerolínea ha constatado que el 4% de las personas que hacen reservaciones en un vuelo no se presentan. Por ello venden usualmente 75 pasajes, para aviones de 73 asientos. Probabilidad que cada pasajero que se presentase al vuelo encuentre asiento. Resp.: Idem 28.

30. Se lanza 9 veces un dado. ¿Cuál es el número más probable de veces en que aparecerá:
    a) Un seis. (Sol: n = 1) b) Un número par. (Solución: 4 ó 5)

31. Cada una de las personas, α, β, γ y δ dicen la verdad en una de cada tres afirmaciones. Si α dice que β niega que γ niega que δ es mentiroso. Prob. que δ no mienta. (Solución: 1/3)

32. (Craps) Se lanzan dos dados. Se gana si ocurre una de las dos alternativas:

    a) Se obtiene 7 u 11 puntos al primer lanzamiento.
    b) Se obtiene 4,5,6,8,9,10 puntos a la primera y dicho número se repite antes de obtener 7. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

33. La probabilidad que un neumático sea defectuoso es 1/4000 y que una cámara lo sea es 1/6000. Probabilidad que un coche tenga uno o mas ruedas defectuosas por estas fallas. (Solución: 4.2×10^{-5})

34. Se sabe que en una ciudad el 75% de las familias tienen televisor. Se toma una muestra de 15 familias. Probabilidad que:

    a) Exactamente 10 tengan televisor.
    b) Diez a lo menos tengan televisor.
    c) Ninguna tenga televisor.

35. Un comité de tres personas es seleccionado desde el grupo {A,B,C,D,F,G}. Probabilidad condicionada que A y B sean seleccionados, sabiendo que D y F no lo han sido.

36. La fábrica Ford inscribe en una carrera tres pilotos A, B y C. La probabilidad de llegar entre los tres primeros lugares son: P(A) = 0.1 P(B) = 0.2 y P(C) = 0.3. Probabilidad que:

    a) Ninguno de los tres se clasifique. Solución: 0.504
    b) Que los tres se clasifiquen. Solución: 0.006
    c) Que a lo menos dos se clasifiquen. Solución: 0.098

37. Un estudiante resuelve por término medio el 60% de los problemas que se le plantean. Si una interrogación contiene 8 problemas y es necesario resolver bien por lo menos 5 para aprobar se pide probabilidad que tiene el estudiante de salir bien.

38. En un examen con diez preguntas del tipo verdadero falso. Probabilidad de obtener 50% o más si solo se responde adivinando.

39. Supongamos que 3 restaurantes hacen competencia por los mismos 100 clientes. Determinar el numero de asientos que debe tener cada restaurante para obtener una probabilidad mayor de 95% de poder atender a dichos clientes, suponiendo que llegan a la misma hora y eligen independientemente uno del otro cada restaurant con igual probabilidad.

40. Cada torpedo lanzado desde un submarino tiene probabilidad: 0.7 de dar en un blanco. Se pide número mínimo de torpedos que es necesario disparar para tener probabilidad no inferior a: 0.9 de impactar el blanco.

41. Un estudiante estima que sí toma 4 cursos tiene probabilidad 0.8 de aprobar cada uno de ellos. Si toma 5 la probabilidad es 0,7 y si toma 6 la probabilidad es 0.5. La meta es aprobar 4 cursos a lo menos. ¿Cuántos cursos debe tomar para tener la mayor probabilidad de lograr su meta.

42. (Poker con dados). Se lanzan cinco dados, se pide probabilidad de:

a) Obtener un par: (a, a, b, c, d)
b) Obtener dos pares: (a, a, b, b, c)
c) Un trío: (a, a, a, b, c)
d) Cinco puntos diferentes: (a, b, c, d, e)
e) Un full: (a, a, a, b, b)
f) Cuatro cartas: (a, a, a, a, b)
g) Un poker: (a, a, a, a, a)

43. (Poker con naipes). De un mazo de 52 cartas se toman 5 al azar. Se pide probabilidad de obtener:

a) Escala máxima: un diez, una J, una Q. un K y un As, todos de la misma pinta. (Solución: 1.5×10^{-6})

b) Escala real: Cinco cartas de números consecutivos, de una misma pinta y no escala máxima. (Solución: 14×10^{-6})

c) Póker: Cuatro cartas de igual valor. (Solución: 24×10^{-5})

d) Full: Un par y un trío. (Solución: 0.0014)

e) Color: Cinco cartas de la misma pinta que no forman escala. (Solución: 0.002)

f) Escala: Cinco cartas de números consecutivos y no todas de la misma pinta. (Solución: 0.0039)

44. La probabilidad que haya un día con lluvia en mayo es: 0.2. En un día sin lluvia, Colo-Colo tiene probabilidad.0.7.de ganar y en un día lluvioso dicha probabilidad es: 0.4. Si Colo-Colo ganó un partido en mayo determinar la probabilidad que haya llovido ese día. (Solución: 0.125)

45. Un torpedo tiene probabilidad 1/2 de hundir un barco; 1/4 de dañarlo y 1/4 de errar el blanco. El barco se hunde con dos tiros que lo dañen. Probabilidad que con 4 torpedos se logre hundir el barco.

46. ¿Que es mas probable obtener: a lo menos un As lanzando 4 dados o a lo menos dos Ases lanzando 24 veces dos dados? (Problema del caballero de Méré). (Solución: 0.518 y 0.491)

47. Las probabilidades que tienen tres personas A, B y C de golpear un blanco son: 1/3, 1/4 y 1/5. Los tres disparan simultáneamente. Probabilidad que:

a) Solamente uno golpee el blanco. (Solución: 13/30)

b) Sabiendo que sólo uno, golpeó el blanco, que sea B. (Solución: 15/26)

48. Un señor tiene un llavero con n llaves. Ha olvidado cual es la de su casa. Por ello prueba ordenadamente una por una. Probabilidad que acierte en el k-ésimo intento ($1 \leq k \leq n$). (Sol: $((n-1)/n)^{k-1}(1/n)$.

49. Un montaje eléctrico consta de dos partes en serie en el orden: A seguido de B. La probabilidad de que A sea defectuosa es de 0.025 y la probabilidad de que B sea defectuosa es de 0.011. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un montaje defectuoso? ¿Un montaje no defectuoso? ¿Un montaje que falle únicamente por defectos de B? (Solución: 0.036 – 0.964 – 0.305)

50. Considere un avión de cuatro motores (dos en cada ala) en el que la probabilidad de falla de un motor es de 0.05. Suponga que la probabilidad de falla de un motor es independiente del funcionamiento de los otros. ¿Cuál es la probabilidad de un accidente si el avión puede volar con dos motores cualesquiera ¿Si el avión requiere que cuando menos un motor esté trabajando en cada lado, a fin de permanecer en el aire?

51. Un dado está cargado de modo que la probabilidad de sacar un 3 es el triple de cualquiera de los otros números. Calcular

    a) probabilidad que en tres tiradas salgan unos. (Solución: 1/8)
    b) Probabilidad que en dos lanzamientos no salga ningún tres. (Solución: 25/64)

52. Al examinar un lote de 100 artículos un empresario comprara si una muestra de tamaño 10, contiene como máximo 1 artículo defectuoso. Si el lote contiene un 10% de artículos defectuosos, cual es la probabilidad que se efectúe la compra.

    Solución: $\dfrac{\binom{90}{9}\binom{10}{1}}{\binom{100}{10}}$

53. Cuantas veces debe lanzarse por lo menos un par de dados para que la probabilidad de sacar 12 puntos sea: 0.5 (Solución: $n = 25$)

54. Calcular la probabilidad que un cartero que lleva tres cartas para destinatarios distintos entregue al menos una bien, si las reparte al azar. (Solución: 2/3)

55. Una caja contiene 6 fichas rojas y 4 negras. Se saca una y sale roja y sin devolverla se sacará otra. Probabilidad que este última sea roja también. (Solución: 5/9)

56. En una población el 70% de los habitantes son blancos (B), el 25% es negro (N) y el 5% amarillos (A). El 70% de los blancos son católicos (C) y lo mismo ocurre con el 60% de los negros y el 10% de los amarillos. Se toma una persona al azar, se pide probabilidad que:

    a) La persona sea católica (probabilidad Total).
    b) LA persona sea un blanco católico (Bayes).

57. En el cuadrado $S = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$ se toma un punto al azar. Probabilidad que $x \geq y$. Solución: ½

58. En el interior de un círculo de radio r se toma un punto al azar. Probabilidad que quede más cerca del centro que de la circunferencia. (Solución: ¼).

59. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente el 3%, el 2% y 1% de piezas defectuosas. Un determinado día han producido un total de 200; 100 y 50 piezas. De ellas se toma una al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad que haya sido producida por la máquina B. (Solución: 0.235)

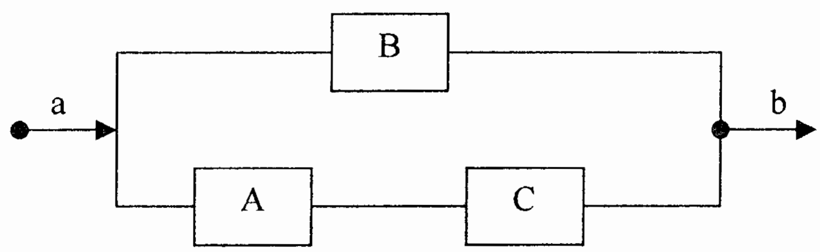
60. Un empresario tiene dos negocios N_1 y N_2. N_1 produce una ganancia de 20% y N_2 sólo un 4%. Se toma un balance al azar. ¿Probabilidad que sea del negocio N_1? (Solución: Usando Bayes: 5/6)

61. Una empresa de transportes cubre tres líneas: A, B y C con el 50, 30 y 20% de sus camiones. La probabilidad de que estos queden en pana son 3%, 4% y 1% respectivamente. Se pide:

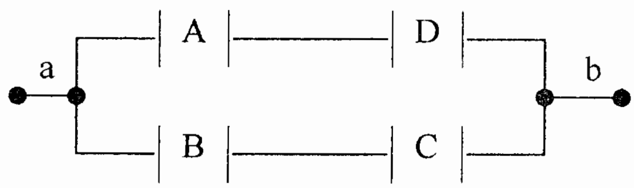
    a) Probabilidad que un día haya un camión en pana. (prob. Total: 0.029)
    b) Sabiendo que un camión está en pana, probabilidad que sea de la línea B. (Solución: Bayes: 0.4137).

62. En un círculo que tiene inscrito un cuadrado se toma un punto al azar. Probabilidad de que el punto no esté dentro del cuadrado. (Sol: $1-(2/\pi)$)

63. En el circuito que se indica los interruptores A, B y C tienen probabilidad de: 0.1; 0.2 y 0.3 de cortar la corriente. Se pide probabilidad de que pase corriente desde (a) al extremo (b). Solución: 0.926)



64. En el circuito que se indica, los interruptores A, B, C y D tienen respectivamente probabilidades: 0.1; 0.2; 0.3 y 0.4 de cortar la corriente. Probabilidad que haya corriente de (a) a (b).



65. Un examen consta de 10 preguntas para contestar; verdadero o falso. Se aprueba el examen contestando 7 o más preguntas bien. ¿Si un estudiante responde al azar que probabilidad tiene de aprobar: (Sol 11/64).

66. Una caja contiene dos tubos buenos y dos tubos malos. Se saca los tubos uno a uno hasta encontrar los defectuosos. Se pide:

a) Probabilidad de tomar el último malo en la segunda sacada. (Solución: 1/6)
b) Probabilidad de tomar el último malo en la tercera sacada. (Solución: 1/3)
c) Probabilidad de tomar el segundo malo en la cuarta sacada (Solución: ½)

67. Una caja contiene 4 pernos buenos y 6 defectuosos. Se saca al azar uno a uno, hasta encontrar el último malo. Probabilidad que ello ocurra en:

a)	En la quinta sacada	(Solución: 4/210)
b)	En la décima sacada	(Solución: 24/210)

68. Un bolso contiene 3 monedas, una de las cuales tiene dos caras, mientras las otras dos son normales. Se toma una moneda al azar y se lanza 4 veces sucesivamente obteniéndose 4 caras. Probabilidad que la moneda tomada sea la de dos caras. (Solución: Bayes: 8/9)

69. Tres componentes A, B y C de un mecanismo están colocados aleatoriamente en serie. Sea los acontecimientos:

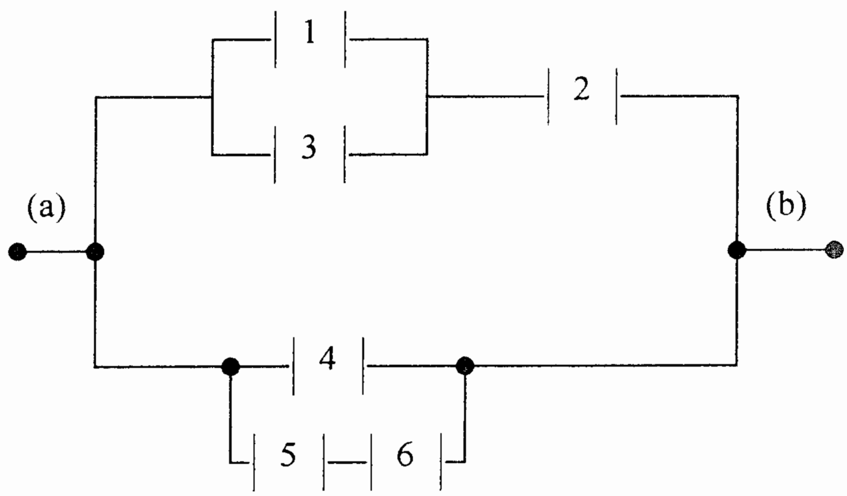
R = B está a la derecha de A.

S = C está a la derecha de A.

Determine si R y S son independientes o no. (Solución: no lo son)

70. Dos personas A y B lanzan 3 monedas cada una. Probabilidad que ambas obtengan igual número de caras. (Solución: 5/16)

71. En el circuito que se indica, la probabilidad que un interruptor automático este cerrado es: p. Si los interruptores se abren y cierran independientemente, determinar la probabilidad que pase corriente de (a) a (b). (Solución: $(p + 3p^2 - 4p^3 - p^4 + 3p^5 - p^6)$.



72. En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta muestra que: el 20% lee sólo A, el 16% lee sólo B, el 14% lee sólo C, el 8% lee A y B, el 5% lee A y C, el 4% lee B y C y el 2% lee; A, B y C, Tomada una persona al azar se pide la probabilidad que:

a) No lea ningún periódico. (Solución: 0.65)

b) Lea exactamente uno (Solución: 0.22)

c) Lea al menos A y B sabiendo que lee al menos uno de los periódicos. (Solución: 8/35)

73. Una moneda no cargada se lanza (2n) veces. Se pide:

a) Probabilidad de tener igual número de caras que sean sello.

b) Mostrar que la probabilidad calculada es función decreciente de n.

74. En una lotería de n números hay (m < n) premiados. Probabilidad de sacar un premio a lo menos si se compra k números (n – m > k).

Solución: $1-\frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$

75. En una lotería de 40.000 números hay 3 premiados. Determinar:

a) Probabilidad de tener a lo menos un premio si se compran 1.000 números. (Solución: 731/104)

b) Cuantos números deben comprarse para tener probabilidad (0.5) de sacar un premio a lo menos (Solución: 8.252).

76. En una comida participan 5 hombres y 10 mujeres. Se separan en 5 mesas de 3 personas cada una al azar. Probabilidad de que en cada mesa haya un hombre (Solución: 0.081)

77. En una comida participan n hombres y n mujeres. Determine la probabilidad que dos personas del mismo sexo no queden una al lado de la otra . Solución: $2(n!)^2 / (2n)!$.

78. Se tiene 10 cajas de idéntica apariencia. Nueve de ellas contienen 2 fichas blancas y dos fichas negras. La restante contiene 5 fichas blancas y 1 negra.

Se toma una caja aleatoriamente y se saca una ficha que resulta ser blanca. Probabilidad que ella venga de la caja que tiene 5 fichas blancas. (Solución: Bayes. 5/32)

79. Se reparten las 52 cartas de un naipe inglés entre 4 jugadores. Se pide probabilidad que cada una de las manos de 13 cartas contenga exactamente 1 as. (Solución: 0.1055).

80. En un tubo vertical se enfilan aleatoriamente 20 bolitas de las cuales 10 son blancas y 10 negras. Probabilidad que en la mitad inferior del tubo queden exactamente 7 bolitas blancas.

81. Se reparten las 52 cartas de un naipe entre 4 jugadores (13 para cada uno). Probabilidad que cada jugador tenga exactamente 1 as (Solución: 0.1055)

82. Cuatro personas dejan sus paraguas en la guardarropía. Suponiendo que se los devuelven al azar, cual es la probabilidad que cada uno reciba su propio paraguas. (Solución: 1/24)

83. Un equipo de fútbol tiene probabilidad: 0.7 de ganar cuando no llueve. Si llueve dicha probabilidad es: 0.4. En el mes de Mayo la probabilidad que llueva en un día es: 0.2. El equipo ganó un día del mes de Mayo. ¿Probabilidad que ese día haya llovido? (Solución: 1/8).

84. Una máquina automática tiene probabilidad (1/3) de entregar dinero o caramelos y probabilidad (1/2) de no entregar ni dinero ni caramelo. ¿Cuál es la probabilidad que la máquina entregue dinero y caramelo? (Solución: 1/8).

85. En una carrera de automóviles, los vehículos A, B, C y D tienen probabilidades: (0.4), (0.3), (0.2) y (0.1) respectivamente de ganar. Si C se

retira, ¿Cuál es la nueva chance que tienen de ganar: A, B y D. (Solución: $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.375$, $P(D) = 0.125$)

86. Se lanzan 12 dados. Probabilidad que cada uno de los números aparezca a lo menos una vez. (Solución: $m(S) = 6^{12}$).

87. Se lanzaron 5 monedas y aparecieron dos caras a lo menos. Probabilidad que el número exacto de caras sea: 3. (Solución: 13/16).

88. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 tubos buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno y se encuentra bueno. Probabilidad que el otro también sea bueno.

89. A tiene probabilidad 0.20 de hacer fama disparando a un blanco. Determinar el número de disparos necesarios para que la probabilidad de hacer por lo menos dos famas sea mayor que: 0.60.

90. Una familia tiene 4 hijos. La probabilidad de ser varón es: 0.51. Probabilidad que todos sean hombres sabiendo que:

a) El hijo mayor es varón
b) Por lo menos uno de los hijos es varón.

91. Un punto P de coordenadas (a, b) se toma al azar en el cuadrado $S = \{(x, y) / |x| \leq 1 \text{ y } |y| \leq 1\}$. Probabilidad que toda solución de la ecuación diferencial: $y'' + 2ay' + by = 0$, con $y = y(t)$, tienda a cero cuando $t \to \infty$.

92. Un punto (x, y) tiene siempre coordenadas enteras no negativas. Tiene probabilidad p de pasar de (x, y) a (x+1, y) y probabilidad: $q = 1-p$ de pasar de (x, y) a (x, y+1). Probabilidad que partiendo del punto (0, 0) llegue al punto (m, n).

93. Un vehículo A llega al azar a una bomba bencinera en el intervalo (0, 15). Otro vehículo B llega independientemente de A y al azar en el mismo intervalo (0, 15). Determinar la probabilidad de p_1 que A llegue antes que B. (Solución: $p_1 = 1/2$)

94. Si en el ejercicio anterior, A se detiene en la bomba 3 minutos y B durante 4 minutos, determine la probabilidad p_2 que ambos se encuentren en la bomba bencinera. (Solución: $p_2 = 0.41$)

95. Un sistema telegráfico transmite puntos y rayas en proporción 5:3. Interferencias cambiaron los 2/5 de los puntos transmitidos en rayas, y 1/3 de las rayas transmitidas en puntos. Probabilidad que:

a) Recibido un punto se ha transmitido punto. (Solución: ¾)
b) Recibido punto se haya transmitido raya (Solución: ¼)

96.- Un punto es tomado al azar en el rectángulo $0< x < 2$; $0 < y < 3$. Sea A el suceso: $x\ y < 1$ y B el suceso: $y < x^2$. Calcule la probabilidad de un acontecimiento: A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B^c$.

Resp.: $\frac{1}{6}(1+\ln 6)$; $\frac{1}{6}\left(6-2\sqrt{3}\right)$; $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\ln 2\right)$; $\frac{1}{6}\left(\frac{20}{3}+\ln 3-2\sqrt{3}\right)$

97.- Un satélite artificial cae a la tierra después de 4 años de la fecha de lanzamiento. Determinar la probabilidad que el satélite caiga entre las latitudes 40° N y 50° N, dado que él cayó entre las longitudes: 50° Oeste y 60ª oeste.

Resp.: $\frac{1}{6}(\text{sen}\,50^\circ - \text{sen}\,40^\circ)$), suponga la tierra esférica.

98.- Dos puntos son tomados al azar en un segmento de longitud L. Determine la probabilidad que la distancia entre los puntos sea menor que $\frac{L}{4}$.

(Resp.:7/16)

99.- Dos personas tienen la misma probabilidad de llegar a un determinado lugar en un intervalo de tiempo (0, T). Determine la probabilidad que una persona tenga que esperar a la otra a lo más un tiempo $t<T$

Resp: $p = (1-t / T)^2$

100.- Dos puntos son tomados al azar en la superficie de una esfera de radio R. Cual es la probabilidad que el arco de círculo máximo que pasa por ellas forme un ángulo menor de α ($\alpha < \pi$)

Resp.: $p = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

BIBLIOGRAFÍA

1.- BASS J. : "Calcul des Probabilites", Masson et Cie. París-1967

2.- FISZ MAREK, JOHN : "Probability Theory and Mathematical Statistics" Willey and Sons – 1963

3.- GNEDENKO, B. V. : Theory of Probability. Chelsea. New York – 1962

4.- KOLMOGOROV, A.N. : Fundation of the Theory of Probability. Chelsea Publishing Company. New York

5.- KRICKEBERG KLAUS : "Probability Theory", Addison – Wesley .- 1965

6.- LEVIME ARNOLD : "Theory of Probability" Addison – Wesley - 1971

7.- LOEVE MICHEL : "Probability Theory", D. Van Nostrand Company – 1955

8.- METIVIER M. : "Theorie des Probabilites", Dumond – París – 1968

9.- NEVEU JACQUES : "Calcul des Probabilites", Masson et Cie, París – 1964

10.- PARSEN E. : Modern Probability Theory and its Applications. Wiley, New York 1960

11.- RENYI ALFRED : "Probability Theory", North Holland – 1970.

12.- TORTRAT A. : "Calcul des Probabilites", Masson et Cie, París – 1971.

13.- TUCKER HOWARD G. : "A Graduate Course in Probability". Academic Press In., New York - 1967

ANEXO

RESUMEN DE ANÁLISIS COMBINATORIO.

DEFINICIÓN A.1:

Dados n elementos distintos: a_1, a_2, ..., a_n, se llama variación simple de orden p, siendo p natural menor que n, todo conjunto ordenado constituido por p de éstos, conviniendo en considerar diferentes a aquellos que difieran en algún elemento y si constan de los mismos cuando difieren en el orden de ellos.

***Ejemplo* A1** Las variaciones simples de los elementos: a_1. a_2, a_3 de orden 2, son:

$$\begin{array}{ccc} a_1\ a_2 & a_1\ a_3 & a_2\ a_3 \\ a_2\ a_1 & a_3\ a_1 & a_3\ a_2 \end{array}$$

TEOREMA. A1 El número de variaciones simples de n elementos, de orden p, está dado por:

$$V_p^n = n(n-1)(n-2).....(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

DEFINICIÓN. A.2 Dados n elementos distintos: a_1, a_2, ..., a_n, se llama permutación de ellos, a todo conjunto ordenado constituido por ellos, conviniendo en considerar diferentes a los grupos que difieren en el orden de sus elementos.

***Ejemplo* A.2** Las permutaciones de los elementos: a_1, a_2, a_3 son:

$$\begin{array}{ccc} a_1\ a_2\ a_3 & a_2\ a_1\ a_3 & a_3\ a_1\ a_2 \\ a_1\ a_3\ a_2 & a_2\ a_3\ a_1 & a_3\ a_2\ a_1 \end{array}$$

TEOREMA. A2 El número de permutaciones simples de n elementos esta dado por:

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots.. n = n!$

DEFINICIÓN. A.3 Dados n elementos distintos $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots. a_n$, se llama combinación de orden p (p < n y natural) a todo conjunto constituido por p de estos elementos y conviniendo en considerar como diferentes a aquellos que difieren en alguno de sus elementos.

***Ejemplo* A3** Las combinaciones de orden dos de los elementos: a_1, a_2, a_3 son:

$$a_1a_2 \qquad a_1a_3 \qquad a_2a_3$$

El número de combinaciones de n elementos, de orden p se designa por: C_p^n

TEOREMA A.3

$$V_p^n = C_p^n \times P_p$$

De este teorema se obtiene:

$$C_p^n = \frac{V_p^n}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

El número $\binom{n}{p}$ se llama número combinatorio y él entre muchas igualdades, verifica las siguientes:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{p} = 2^n$$

Además por definición $\binom{n}{0} = 1$

DEFINICIÓN. A.4 Dados n elementos distintos: a_1, a_2, ... a_n, se llama variación con repetición de orden p (p natural), todo conjunto ordenado formado por p de estos elementos, distintos o no, conviniendo en considerar diferentes, a aquellos que difieren en sus elementos y si constan de los mismos, cuando difieran en el orden de ellos.

***Ejemplo* A.4** Las variaciones de orden 3 con repetición de los elementos a y b son:

a a a	a a b	b a a	b a b
b b b	a b a	a b b	b b a

TEOREMA. A.4 El número de variaciones con repetición de orden p de n elementos, está dado por:

$$V_{pp}^{n} = n^p$$

Conviene observar que el número natural p, puede ser: menor, igual o mayor que n.

DEFINICIÓN. A.5 Dados n elementos, entre los cuales hay α iguales entre si, β iguales entre si pero diferentes de los anteriores y así sucesivamente:

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \lambda$$

se llama permutación con repetición de estos n elementos a todo conjunto ordenado y formado por todos ellos.

***Ejemplo* A.5** Las permutaciones con repetición de los elementos: a, a, b, b son:

aabb	abab	abba
bbaa	baba	baab

TEOREMA. A.5 El número de permutaciones con repetición de: $n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots. + \lambda$ elementos está dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\ldots\lambda!}$$

DEFINICIÓN. A.6 Dados n elementos distintos: a_1, a_2, ... a_n, se llama combinación con repetición de orden p (p = natural) todo conjunto formado por p de estos elementos, distintos o no, conviniendo en considerar diferentes a aquellos que contengan elementos diferentes.

TEOREMA A.6 El número de combinaciones de n elementos con repetición de orden p, esta dado por:

$$C_{pp}^{n} = \binom{n+p-1}{p} = C_p^{n+p-1}$$

Ejemplo A.6 Las combinaciones de: a, b, c de orden 3 con repetición son:

aaa	aab	aac	
bbb	bba	bbc	
ccc	cca	ccb	abc

INDICE

CONTENIDO Pág.