Problemas de Geometría

y cómo resolverlos

Por : Ernesto Quispe Rodríguez
Luis Ubaldo Caballero

COLECCIÓN RACSO

Problemas de

Geometría

y cómo resolverlos

Dirigido por:

FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú
Imprenta MAQUETI E.I.R.L. - Jr. Carlos Arrieta 1319 - Lima 1

SERIE DE LIBROS Y
COMPENDIOS
CIENTIFICOS
COLECCION RACSO

PROBLEMAS DE GEOMETRIA Y COMO RESOLVERLOS

1ra EDICION

COLABORADORES:

Lic.	Héctor Ortíz Becerra	UNI
Lic.	Javier Reynaga Alarcón.	UNI
Lic.	Juan C. Sandoval Peña	UNI
Ing.	James Monge Jurado	UNCP
Ing.	Manuel Inga de la Cruz	UNPRG
Ing.	Carlos Carbonell Romero	UNPRG
Lic.	Roberto Choquehuayta M.	UNSA

RACSOEDITORES LIMA

Título Original de la obra:
Problemas de Geometría y cómo resolverlos
© 2000, por *RACSO EDITORES*

Primera edición
Publicada por *RACSO EDITORES* - ABRIL 2000

Supervisión general:
Ing. *Martín Casado Marquez* (UNI)
Profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingenieria

Revisión de estilo:
Dr. Carlos Chávez Vega

Revisión Técnica:
Javier Reynaga Alarcón
Luis Vallejos Velásquez

Composición, Diagramación e Ilustraciones:
Compañia Editorial: ***RACSO EDITORES***

Supervisión de la edición:
Miguel Angel Díaz Lorenzo

Compañia Editorial: *RACSO EDITORES*
Dirigida por: ***Félix Aucallanchi Velásquez***

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú

PRÓLOGO

Resulta importante reconocer las veces en que nuestros trabajos tienen un enorme significado en nuestra vida profesional, uno de ellos es, qué duda cabe, el culminar un libro y más aún cuando nos corresponde presentarlo. Por tanto es esta una excelente oportunidad para dar testimonio de nuestra dedicación ofreciendo a quienes nos leen, un trabajo académico de mucha importancia para quienes forman parte de aquel inmenso número de estudiantes que confiesan tener un especial interés por aprender los secretos de una ciencia tan interesante y útil como la Geometría.

Por centurias una de las dedicaciones favoritas de los matemáticos ha sido la Geometría, sus demostraciones y sus aplicaciones. A todo estudiante de secundaria en todos los tiempos, le ha sido imposible poder encontrar en una sola obra toda la información teórica y así mismo una enorme cantidad de ejercicios de fácil acceso para su solución. Al iniciar este trabajo la editorial nos propuso el reto de elaborar un texto con tales características, es decir, alcanzar el sueño dorado.

En principio, debemos reconocer que la tarea de selección tanto de los fundamentos teóricos como de las aplicaciones prácticas, fue ardua y prolongada. Muchas cosas han quedado en el tintero, entre ellas algunas demostraciones y también problemas, que las postergamos con la ilusión de verlas publicadas en un trabajo posterior y más especializado.

El presente texto ha sido elaborado pensando especialmente en los modelos de problemas que son en la actualidad los considerados en los exámenes de ingreso, por ello hemos establecido una gran relación entre la parte teórica expuesta y los ejercicios resueltos. Esto servirá para que el lector pueda recorrer un capítulo completo sin la engorrosa necesidad de memorizar o demostrar teoremas o algunas propiedades particulares.

Publicar un texto de esta envergadura en las actuales circunstancias, de abundante información y de contenidos cambiantes, provocó en nosotros una ambición tanto en el número de temas a desarrollar como el de aplicaciones a mostrar. Tal vez por esta razón, inicialmente pensamos que nuetro trabajo sería muy tedioso de leer, sin embargo al iniciar su lectura, el investigador se sentirá anímado de continuarla por que notará de nuestra parte un sutil "ablandamiento" de la parte axiomática del curso. Esto nos demuestra una vez más, que no existe una materia que pudiera considerarse imposible de aprender, pues todo depende de la voluntad que demuestren no solo el estudiante sino también la sencillez del material didáctico que se emplee.

Hemos tratado de incluir en esta obra todos los artificios, métodos y procedimientos en general que hemos logrado conocer, aplicar y dominar durante nuestros años dedicados a la docencia pre universitaria. Se apreciará en muchos casos que nuestra voluntad de pedagogos será insuficiente para los logros posteriores como es el dominar un tema para pasar al siguiente, si de parte del lector existe una notable deficiencia en el dominio de las materias básicas de un curso de Geometría Elemental.

Esperamos que nuestro trabajo pueda contribuir a mejorar el nivel académico de los estudiantes de nuestro país, en especial de aquellos que aspiran a lograr un ingreso a las instituciones educativas de prestigio, que son finalmente las más exigentes en sus exámenes de admisión.

Los autores.

PROLOGO DEL EDITOR

Como en cada oportunidad en que me toca el inmenso honor de presentar un trabajo nuevo, producido con muchísimo profesionalismo, esta es una muy especial, tanto por las características de la obra, como por el volumen que ella posee. Es que se trata de un trabajo que se inició con mucha anterioridad y se dejó de hacer por las divergencias en los enfoques de los autores con el editor, las mismas que se superaron con el diálogo tan paciente con este servidor.

Debo agradecer a los autores que tuvieron a bien ser persuadidos por la filosofía de nuestra casa editorial, la que tiene por propósito elaborar una colección de textos con características especiales cuyo plato fuerte es la resolución de una variada y rica cantidad de ejercicios resueltos y propuestos. Nos es muy grato verlo culminado, y es un texto que estoy seguro marcará un hito entre la enorme producción nacional de textos de ciencias.

Luego de revisar los más exigentes prospectos de admisión y apreciar los exámenes de ingreso , nos propusimos elaborar un libro que reuniese las características de los de la misma colección , pero esta vez había que hacerlo sin tener muchas referencias de otros con similares características, pues es cierto, la mayor abundancia de trabajos en relación a cuestiones de Geometría se da en fascículos o bibliografía incompleta, tal vez por que los autores nacionales reconocen que hacer un libro completo de esta materia es una tarea muy ardua y por que no decirlo muy ambiciosa, la que muchas veces choca con nuestras posibilidades de tiempo por la dedicación que ella demanda. Nosotros nos la propusimos, y estamos orgullosos de presentarla ya terminada.

Nuestra misión de revisar el material antes de su publicación se volvió muchas veces impertinente , pues sin darnos cuenta nos veíamos contagiados de seleccionar lo mejor para su publicación , sin embargo la tolerancia y el buen ánimo de los autores nos hicieron ver en muchos casos las bondades de su trabajo y los horizontes de su estrategia. Celebro que todas estas circunstancias se hallan superado para dar paso a una obra verdaderamente completa en su concepción y estoy plenamente convencido que calará entre los lectores más exigentes.

Acerca de los autores debo decir que se trata de prestigiados profesionales que llevan muchos años de ejercicio docente y también como cuajados autores de libros y compendios de calidad probadas. Es una garantía que ellos elaboraran una obra como la que nos habíamos propuesto, nos entendieron y se pusieron a trabajar en este proyecto desde hace aproximadamente tres años, la tarea se ve culminada ahora y estamos seguros que formará parte de la bibliografía obligada de todos los estudiantes de esta materia.

Es nuestro propósito poner en vuestras manos, libros de excelente calidad y de gran nivel, tanto por la didáctica que estas transmiten, así como por la amplitud de los contenidos. Nuestra colección se ve ahora incrementada con un trabajo que contribuirá en la formación de nuevas mentes científicas , ahora en un momento en que nuestro país reclama de sus hombres y mujeres sus mejores cualidades, debiendo recordar y/o hacer saber que los años noventa han sido declarados como la "década del cerebro", por ende la riqueza de un país será en este nuevo siglo la que provenga del conocimiento.

Esperamos alcanzar el mismo éxito que tuvieron nuestras publicaciones anteriores y estaremos atentos a todas las observaciones y sugerencias que nos hagan llegar nuestros lectores.

El Editor

AL PROFESOR

El texto Problemas de Geometría y cómo resolverlos, es un trabajo que el profesor podrá emplear como complemento de sus sesiones teóricas, pues en ella se encontrará un abundante material de aplicaciones como los ejercicios de aplicación directa y los de mayor nivel de dificultad en la sección denominada Miscelánea.

Todos estos ejercicios han sido serenamente seleccionados, pues es fácil ser seducidos por aquellos problemas de gran dificultad y prolongadas resoluciones, sin embargo los que se encuentran aquí publicados son a nuestro juicio los mas adecuados por ser formativos y por que responden a las actuales tendencias en los exámenes de ingreso .

Usted podrá apreciar que las secciones teóricas se exponen de manera que cada tema ha quedado dividido en varias partes con la finalidad de insertar al final de cada una de ellas , un determinado grupo de problemas denominados "Ejercicios de aplicación". Esto se ha hecho así por que consideramos que la prolongada exposición de la teoría resulta agotadora para un estudiante ávido de ver las aplicaciones correspondientes, quién al hacerlo sentirá que lo recientemente expuesto es de fácil retención y uso.

Estamos convencidos que la secuencia de los items es el mismo que se emplea en la mayoría de institucioners educativas de nuestro país, muy especialmente en los centros de preparación preuniversitaria. Por ello creemos que este material puede ser utilizado independientemente del lugar de preparación así como de la especialidad a la que se va a postular.

En cuanto se refiere a los problemas resueltos de mayor nivel de dificultad, debemos indicar que éstos se encuentran expuestos en la sección denominada "Miscelánea ", allí los problemas se han ubicado tanto por el orden de la teoría como por su nivel de dificultad. Asimismo en cada resolución se hace referencia a los resúmenes teóricos, nombrándose la propiedad y/o el item al cual pertenece la propiedad a emplear.

Es importante destacar que uno de los principales obstáculos a los que nos solemos enfrentar los docentes de Geometría es a la variada aplicación que se puede encontrar en cada tema, por ello con la finalidad de abarcar el mayor número de problemas tipos, hemos creído conveniente resolver dichos ejercicios del modo mas breve posible sin omitir las rigurosidades que demanda una solución matemáticamente convincente y correcta posible.

El grupo de problemas propuestos se ha dividido en tres niveles de dificultad, lo cual es un estilo propio de esta casa editorial, empezando con los de nivel 1 que son siempre los mas sencillos, pasando luego a los de nivel 2 que son de mayor dificultad y finalmente los de nivel 3 que a nuestro juicio demandaran del estudiante una mayor dedicación y tiempo.

Todos los esfuerzos que hagamos para que nuestros alumnos puedan encarar con éxito sus pruebas nos harán merecedores de sus halagos y gratitudes, es este el fin que nos mueve a superarnos cada día mas, para estar a la altura de las nuevas exigencias y mirar con esperanza los nuevos retos de la enseñanza actual.

Atentamente:

Los Autores

AL ESTUDIANTE

Resulta interesante observar que uno de los cursos de mayor aceptación por parte de la mayoría de los postulantes es Geometría, tal vez por que ustedes tienden a relacionar rápidamente lo visto en el colegio con lo que observan en los Centros de Preparación Preuniversitaria, aunque también no es menos cierto afirmar que este inicial apego se va diluyendo a medida que van tocando temas nunca antes vistos por ustedes.

Debemos recomendarles que así como puede parecer fácil la primera parte del curso , lo son también los últimos, todo consiste en no perder la ilación de los temas iniciales en los que se sugiere ser atentos y no dejarse llevar por la opinión casi general de que aquello es fácil, pues como en toda ciencia, lo difícil se presenta cuando empezamos a relacionar temas, es decir, cuando los ejercicios se resuelven empleando propiedades anteriormente vistas.

El desarrollo de problemas en Geometría demanda del estudiante una visión especial de cada caso, pues en mas de una ocasión se comprobará que las resoluciones obedecen a un determinado patrón de procedimientos, los que solo con la práctica se vuelven rutinarios. Es menester de cada alumno estar siempre predispuestos a resolver primero cada ejercicio que aquí se presenta resuelto, pues debes saber que las resoluciones aquí mostradas son nuestras, es decir son la manera como nosotros hemos considerado resolverlas, sin embargo , tú tienes tu forma de ver las cosas que no tiene por qué coincidir con la nuestra, por lo demás solo debemos estar de acuerdo en que tu solución y la nuestra deben ser las mismas.

El texto "Problemas de Geometría y cómo resolverlos" se pone a tu disposición, con la finalidad de satisfacer tus requerimientos con respecto al curso. El resumen teórico que se expone en el inicio de cada capítulo no debe ser necesariamente memorizado, debes dejar esto al ejercicio continuo, para lo cual se han presentado una gran variedad de problemas resueltos y propuestos que han sido cuidadosamente ordenados teniendo en cuenta el nivel de dificultad que presentan cada uno de ellos; esto te permitirá tener un amplio dominio del capítulo tratado.

Recomendamos al estudiant, para un mejor manejo del texto, seguir las siguientes normas:

1°) Repasar atentamente el resumen teórico del capítulo a tratar.

2°) Repasar los ejercicios y problemas resueltos, observando en cada uno de ellos, la aplicación de su resumen teórico.

3°) Intentar por tu propia cuenta los ejercicios y problemas resueltos y luego comparar tus pasos con aciertos y/o desaciertos con la resolución que presentamos para cada problema.

4°) Entrenarse con los ejercicios y problemas propuestos y consultar con tu profesor sobre tus dificultades y nuevos métodos.

Finalmente esperando que "Problemas de Razonamiento Matemático y cómo resolverlos" logren en tí una mayor capacidad de raciocinio, no me queda mas que desearte éxitos en tu meta trazada.

Atentamente :

Los Autores

ÍNDICE GENERAL

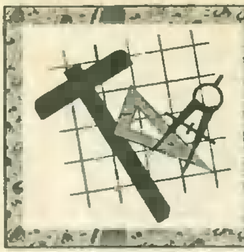
Página

SÍMBOLOS

$\{1; 2; 3\}$	conj. con elementos 1, 2 y 3
N	conj. de los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...
N*	conj. de los números naturales sin cero: 1; 2; 3; ...
Z	conj. de los números enteros:...; -2; -1; 0; 1;
Z^+	conj. de los números enteros positivos
Z^-	conj. de los números enteros negativos
Q	conj. de los números racionales
Q'	conj de los números irracionales
$\Re$	conj. de los números reales
$\Re^+$	conj. de los números reales positivos
$\Re^-$	conj. de los números reales negativos
C	conj. de los números complejos
i	símbolo que representa a $\sqrt{-1}$
$\{\}$ o $\emptyset$	conjunto nulo o vacío
$\in$	pertenece a ...
$\notin$	no pertenece a ...
$A \subset B$	A es subconjunto de B
$A \cap B$	A intersección B
$A \cup B$	A unión B
A', o, $\complement_A$	complemento del conj. A
$\exists$	existe
$\nexists$	no existe
$\exists!$	existe un único
$\nexists!$	no existe un único
$\forall$	para todo
$\not\forall$	no para todo
Σ	suma, o, sumatoria
$(x; y)$	un par ordenado de números
$d_{(A, B)}$	distancia entre los puntos A y B
$\rightarrow$ o $\therefore$	implica, luego, por lo tanto
$\leftrightarrow$	es equivalente a, implica en ambos sentidos
$\Rightarrow$	entonces

$\Leftrightarrow$	si y solo si
/	tal que
$=$	igual
$\neq$	desigual, distinto
$\equiv$	idéntico
$\approx$	aproximadamente
$2n$	número par $(n \neq 0)$
$2n + 1$	número impar $(n \in Z)$
$2n - 1$	número impar $(n \in N)$
$\propto$	proporcional *a*
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de *a*
$a > b$	*a* es mayor que *b*
$a < b$	*a* es menor que *b*
$a \geq b$	*a* es mayor o igual que *b*
$a \leq b$	*a* es menor o igual que *b*
$a \gg b$	*a* es mucho mayor que *b*
$a \ll b$	*a* es mucho menor que *b*
$a < c < b$	*c* es mayor que *a* y menor que *b*
$\sim$	semejante
$\cong$	congruente
$< >$	equivalente
$\wedge$	y
$\vee$	o
$f(x)$	función de x
$f^{-1}(x)$	función inversa de x
$n!$	factorial de $n = n.(n-1).(n-2)....2.1$
sen x	*seno* del número x
cos x	*coseno* del número x
tg x	*tangente* del número x
ctg x	*cotangente* del número x
sec x	*secante* del número x
csc x	*cosecante* del número x
lím	límite

CAP. 1



número de puntos de intersección (N.P.I.)

Intersectar es producir uno o más puntos comunes entre dos figuras geométricas, sin embargo cuando éstas son rectas, curvas cerradas o figuras poligonales, se generan un determinado número de puntos comunes llamados *puntos de intersección*.

Una adecuada disposición de figuras geométricas puede producir un máximo número de puntos de intersección . Será nuestra tarea atender todas aquellas situaciones en las que se presenten dichos casos.

Los problemas que se desarrollaran en este capítulo son aquellos en los que generalmente se buscará encontrar un Número de Puntos de Intersección Máximo ($N.P.I._{máx}$), para un conjunto definido de figuras geométricas.

Para el estudio del presente capítulo, utilizaremos las siguientes fórmulas :

1.1 FÓRMULAS PRINCIPALES

A) PARA "n" RECTAS SECANTES.-

Contabilizando los puntos de intersección entre dos rectas, se tendrá que para "n" rectas el máximo número de puntos de intersección estará dado por :

$$N.P.I._{máx} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{... (1.1)}$$

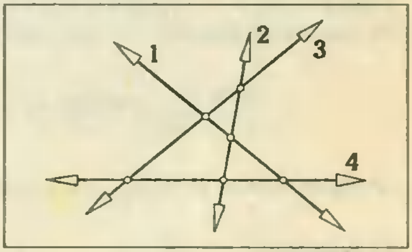


Fig. 1.1

Ejemplo : Hallar el $N.P.I._{máx}$ de cuatro rectas secantes.

<u>Resolución</u> :

En el gráfico mostrado se ilustra el caso de $n = 4$ rectas secantes, las cuales se han dispuesto de modo que el número de puntos de corte sea máximo, contabilizándose 6 :

$$N.P.I._{máx} = 6$$

Si aplicamos la relación (1.1) tendremos para $n = 4$ rectas secantes :

$$N.P.I._{máx} = \frac{4(4-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad N.P.I._{máx} = 6$$

Este resultado nos permite comprobar la veracidad de la relación dada.

B) PARA "n" CIRCUNFERENCIAS SECANTES.-

En este caso los puntos se obtienen intersectando las circunferencias de dos en dos, de este modo para "n" de ellas el máximo número de puntos de intersección estará dado por :

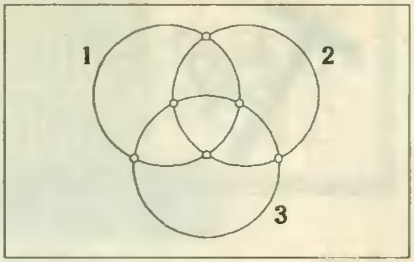


Fig. 1.2

$$\text{N. P.I.}_{\text{máx}} = n\,(n - 1) \qquad \text{... (1.2)}$$

Ejemplo : Hallar el N.P.I $_{\text{máx}}$ de 3 circunferencias secantes .

<u>**Resolución**</u>.-

En el grafico se puede observar que el N.P.I. $_{\text{máx}}$ =6 .

A continuación, aplicamos la relación (1.2) , para $n = 3$ circunferencias secantes, en donde tendremos que :

$$\text{N.P.I}_{\text{máx}} = 3\,(3 - 1) \quad \Rightarrow \quad \text{N.P.I}_{\text{máx}} = 6$$

Resultado que nos permite confirmar la veracidad de la ralación dada .

C) PARA "n" TRIÁNGULOS SECANTES.-

Dos triángulos tienen como máximo 6 puntos de intersección, y "n" triángulos tiene un máximo número de puntos de intersección que está dado por :

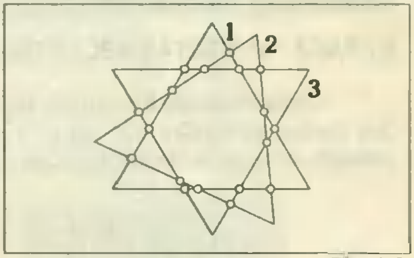


Fig. 1.3

$$\text{N. P. I.}_{\text{máx}} = 3n\,(n - 1) \qquad \text{... (1.3)}$$

Ejemplo : Hallar el N.P.I $_{\text{máx}}$ de 3 triángulos secantes .

<u>**Resolución**</u>.-

En el gráfico mostrado se puede observar que el N.P.I. $_{\text{máx}}$ =18

Ahora si aplicamos la relación (1.3) para $n = 3$ triángulos secantes, tendremos.

$$\text{N.P.I}_{\text{máx}} = 3.3\,(3 - 1) \quad \Rightarrow \quad \text{N.P.I}_{\text{máx}} = 18$$

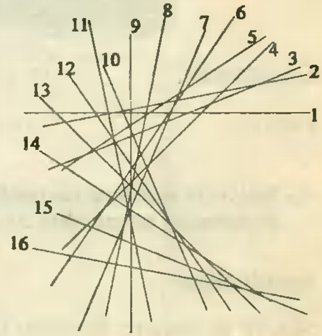
EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1ra PARTE)

$\frac{16(15)}{2}$

1.- *Hallar el máximo número de puntos de intersección de 16 rectas secantes.*

Resolución.-

Para calcular el máximo número de puntos de intersección de "n" rectas secantes se utiliza la relación (1.1):



$$NPI_{máx} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ puntos}$$

Luego para nuestro problema se trata de : $n = 16$ rectas secantes, de este modo el máximo número de puntos de intersección, se obtendrá así :

$$NPI_{máx} = \frac{16\ (16-1)}{2} = \quad \textbf{120 puntos}$$

2.- *Si se retira una recta de n rectas secantes, el máximo número de puntos de intersección disminuirá en 14. Hallar "n".*

$NP - 14 = \frac{n-1((n-1)-1)}{2}$ $\quad n.p - 14 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Resolución.-

Para "n" rectas, el máximo número de puntos de intersección estará dado por la relacion (1.1):

$np - 14 = \frac{n^2 - n - n + 2}{2}$

$$NPI^{I}_{máx} = n\ (n-1)/2$$

Pero si se retira una (1) de estas rectas, entonces empleando la misma relación diremos que el máximo número de intersecciones, está dado así :

$np - 14 = \frac{n^2 - 2n + 2}{2}$

$$NPI^{F}_{máx} = (n-1)\ (n-2)/2$$

$2np - 28 = n^2 - 2n + 2$

De acuerdo con la condición del problema se debe verificar que :

$2np = n^2 - 2n + 30$

$np = \frac{n^2 - 2n + 30}{2}$

$$NPI^{I}_{máx} - NPI^{F}_{máx} = 14$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n\ (n-1)}{2} - \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} = 14$$

Efectuando las operaciones indicadas : $\quad (n-1)\ (n-n+2) = 28$

De donde : $\quad 2\ (n-1) = 28 \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 14$

$$\therefore \quad \boldsymbol{n = 15}$$

3.- Hallar el número de rectas secantes, tal que al aumentar una de ellas, el máximo número de puntos de intersección se duplica.

$2np = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \rightarrow 4np = n^2 + n$

<u>Resolución</u>.-

Según el dato del problema, al aumentar una recta el máximo número de puntos de intersección se duplica, esto quiere decirque si n es el número de rectas, tendremos :

$$\frac{(n+1)\,(n+1-1)}{2} = 2 \cdot \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Efectuando : $n\,(n + 1) = 2\,n\,(n - 1)$

Luego : $n + 1 = 2n - 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n = 3}$

4.- Hallar el número de rectas que se intersectan entre si, sabiendo que si se quitara una, el número de puntos de intersección disminuirá en 4.

<u>Resolución</u>.-

Sea "n" el número de rectas que se intersectan entre si, luego de la relación (1.1) tendremos :

$$\frac{(n-1)\,(n-1-1)}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2} - 4$$

Efectuando : $(n - 1)\,(n - 2) = n\,(n - 1) - 8$

De donde : $n - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n = 5}$

5.- El máximo número de puntos de intersección más el número de vértices de "n" triángulos que se intersectan entre si es 588. Hallar n.

<u>Resolución</u>.-

El máximo número de puntos de intersección en que se intersectan "n" triángulos se obtiene utilizando la relación (1.3) :

$$NPI_{max} = 3n\,(n - 1)$$

Puesto que el número de vértices de "n" triángulos es $3n$, según el dato del problema planteamos la siguiente ecuación :

$$3\,n\,(n - 1) + 3\,n = 588$$

Efectuando : $n^2 - n + n = 196 \quad .... (196 = 14^2)$

Luego : $n^2 = 14^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{n = 14}$

1.2 INTERSECCIONES ESPECIALES

D) PARA "n" POLÍGONOS CONVEXOS DE "L" LADOS

Al observar la relación (1.3) encontramos que en ésta se presenta el coeficiente 3 que representa al número de lados del polígono. Por lo tanto cuando dicho número sea L, tendremos :

$$\mathbf{N.P.I.}_{máx} = \mathbf{L}n(n-1) \qquad ...(1.4)$$

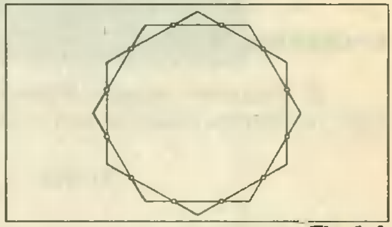


Fig. 1.4

Donde : n = número de polígonos secantes

L = número de lados

Ejemplo : Hallar el $N.P.I_{máx}$ de 2 polígonos de 6 lados.

Resolución.-

En el gráfico mostrado observamos que hay 12 puntos de interseción. Si a continuación empleamos la relación (1.4), tendremos :

$$N.P.I._{máx} = 6 \cdot 2\,(2-1) \qquad \Rightarrow \qquad N.P.I_{máx} = 12$$

E) PARA "n" ELIPSES SECANTES

Si observamos la intersección de dos elipses comprobaremos que el número de puntos de intersección es el doble del que se presenta entre dos circunferencias, por lo tanto y en base a la relación (1.2), tendremos que :

$$\mathbf{N.P.I.}_{máx} = \mathbf{2}n(n-1) \qquad ...(1.5)$$

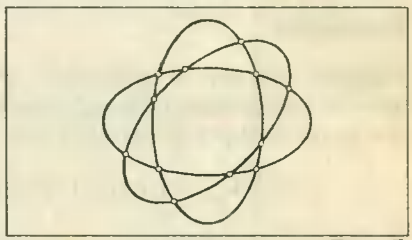


Fig. 1.5

Donde : n = número de elipses secantes.

Ejemplo : Hallar el $N.P.I_{máx}$ de 3 elipses secantes

Resolución.-

El gráfico muestra que hay 12 puntos, luego en la relación (1.5)

$$N.P.I._{máx} = 2.3\,(3-1) \qquad \Rightarrow \qquad N.P.I_{máx} = 12$$

F) PARA "n" CUADRILÁTEROS NO CONVEXOS SECANTES

Al observar la interseccción de dos cuadriláteros no convexos , comprobamos que estos lo hacen hasta en 8 puntos como máximo , luego para n figuras como éstas se tendrá que :

$$\mathbf{N.P.I.}_{máx} = \mathbf{8}n(n-1) \qquad ...(1.6)$$

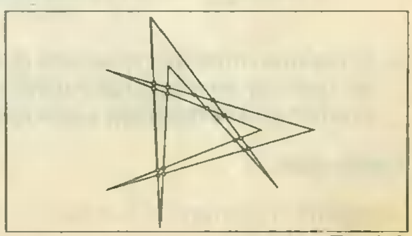


Fig. 1.6

Ejemplo : Hallar el N.P.I $_{máx}$ de 2 cuadriláteros convexos no secantes

Resolución.-

Como se puede observar, en el gráfico dado hay 16 puntos. Si empleamos la relación (1.6) para $n = 4$, tendremos que :

$$N.P.I._{máx} = 8 \cdot 2\,(2 - 1) \quad \Rightarrow \quad N.P.I_{máx} = 16$$

SUGERENCIAS.

Es frecuente encontrar problemas en los que los puntos de intersección lo producen varios conjuntos distintos de figuras geométricas.

Rectas + Circunferencias + Triángulos

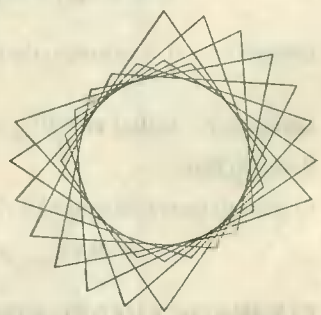
En estos casos se recomienda proceder a encontrar los puntos de intersección por parejas y por separado, para luego proceder a una adición entre todas las obtenidas.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1.ª PARTE)

6.- Hallar el máximo número de puntos de intersección de 8 cuadriláteros.

Resolución.-

Sabemos que con "n" polígonos convexos de "L" lados cada uno, se intersectan como máximo, en un número de puntos que viene dada por la relación (1.4):



$$N.\,P.\,I._{max} = L\,n\,(n - 1) \text{ puntos}$$

Por tratarse de cuadriláteros, entonces : $L = 4$, y por ser ocho las figuras que se intersectan, se tiene que : $n = 8$.

Luego el número máximo de puntos de intersección de 8 cuadriláteros será :

$$\mathbf{N.\,P.\,I._{máx} = 4\,(8)\,(8 - 1) = 224 \text{ puntos}}$$

7.- El máximo número de puntos de intersección de un grupo de circunferencias secantes es igual al décuplo del número de circunferencias. Calcular el máximo número de puntos de intersección entre igual número de icoságonos convexos secantes.

Resolución.-

Empleando la fórmula 1.2 se tiene : $NPI_{máx} = n\,(n - 1)$, donde n = N° de circunferencias

Igualando : $10n = n\,(n - 1)$

$\Rightarrow \quad n = 11$

Nos piden el $NPI_{máx}$ entre 11 incógnitas secantes para ello recurrimos a la fórmula 1.4

Donde : L = 20 (número de lados del icoságono) y $n = 11$

Luego : $NPI_{máx} = 20.11\,(11 - 1)$

$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = 2\,200}$

8.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 rectas secantes, 15 paralelas y 20 circunferencias secantes.

Resolución.-

En primer lugar, hallaremos el máximo número de puntos de intersección de cada conjunto de figuras iguales o semejantes. A continuación calcularemos el máximo número de puntos de intersección de la combinación de cada dos de estos conjuntos y finalmente sumaremos estos resultados, obteniéndose así el máximo número de puntos de intersección de todas las figuras dadas . Veamos :

a) Entre las 10 rectas secantes se encontrará el máximo número de puntos de intersección aplicando la relación (1.1), es decir :

$$NPI_{max} \quad \frac{10\,(10-1)}{2} = 45 \text{ puntos} \quad \Rightarrow \quad NPI_{máx} = 45 \text{ puntos}$$

b) Entre las 15 rectas paralelas no existe intersección alguna , luego el número de puntos de intersección se considera igual a Cero (0).

c) Entre las 20 circunferencias se sabe que el máximo número de puntos de intersección viene dada por la relación (1.2), donde $n = 20$, es decir :

$$NPI_{máx} = (20 - 1) = 380 \text{ puntos} \quad \Rightarrow \quad NPI_{máx} = 380 \text{ puntos}$$

A continuación nos corresponde efectuar las combinaciones entre estos grupos, tomados de dos en dos. Veamos :

1ro.- Entre (a) y (b) , el número máximo de interseciones viene dado por el siguiente producto:

$1 \cdot 10 \cdot 15 = 150$ puntos

15 → Número de rectas paralelas.

10 → Número de rectas secantes

1 → Número de puntos entre una recta y una paralela.

$\Rightarrow \quad NPI_{máx} = 150$ puntos

2do.- Entre (*b*) y (*c*) el número de intersecciones está dado por el siguiente producto :

$2 \cdot 15 \cdot 20 = 600$ puntos.

- 20: Número de circunferencias
- 15: Número de rectas paralelas
- 2: Número de puntos entre una paralela y una circunferencia

$\Rightarrow \quad NPI_{máx} = 600$ puntos

3ro.- Entre (*a*) y (*c*)el número de intersecciones lo da el siguiente producto :

$2 \cdot 10 \cdot 20 = 400$ puntos.

- 20: Número de circunferencias
- 10: Número de rectas secantes
- 2: Número de puntos entre una recta secante y una circunferencia

$\Rightarrow \quad NPI_{máx} = 400$ puntos

Finalmente, para obtener el máximo número de puntos de intersección de todas ellas, debemos efectuar la suma de los resultados obtenidos en los pasos anteriores :

$$N = 45 + 0 + 380 + 150 + 600 + 400$$

$$\mathbf{N = 1\,575}$$

9.- Si a un grupo de cuadriláteros se le quitan 4 entonces el N.P.I. máximo disminuye en 288 puntos, pero si se le agregan 4, el N.P.I. máximo aumentará en :

Resolución.-

Sea "*n*" el número de cuadriláteros no convexos, luego en base a la relación 1.6 tendremos que: $NPI_{máx} = 8n\ (n - 1)$ (1.1.f) al quitar 4 cuadriláteros no convexos quedarán $(n - 4)$ los cuales producirán : $8\ (n - 4)\ (n - 5)$ puntos

Luego : $8n\ (n - 1) - 8\ (n - 4)\ (n - 5) = 288$

$$n^2 - n - (n^2 - 9n + 20) = 36$$

$$8n - 20 = 36 \quad \Rightarrow \quad n = 7$$

El $N.P.I._{máx}$ para los 7 cuadriláteros no convexos es : $8 \cdot 7\ (7 - 1) = 336$

Y el $N.P.I._{máx}$ para 11 cuadriláteros no convexos es : $8 \cdot 11(11.1) = 880$

El aumento de puntos de puntos de intersección será : $880 - 336 =$ **544**

10.- Hallar el máximo número de puntos de intersección entre 5 octógonos y 6 decágonos convexos.

Resolución.-

a) Para los 5 octógonos secantes aplicaremos la relación 1.6 la cual permite determinar:

$$8 \cdot 5\,(5 - 1) = 160 \text{ puntos}$$

b) Para los 6 decágonos secantes aplicaremos la relación 1.6 la cual permite determinar:

$$10 \cdot 6\,(6 - 1) = 300 \text{ puntos}$$

Luego intersectando los octogonos con los decágonos , tendremos :

$$2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 = 480 \text{ puntos.}$$

La suma total nos dará el máximo número de puntos de intersección de todas ellas, es decir:

$$N = 160 + 300 + 480$$

$$\mathbf{N = 940}$$

11.- Se tienen "n" dodecágonos secantes con la característica de tener el mismo número de puntos de intersección máximo que 8 nonágonos. Hallar el valor de "n".

Resolución.-

Del enunciado podemos extrar los siguientes datos :

Dodecágonos : $L = 12$, $n = ?$

Nonágonos : $L = 9$, $n = 8$

A partir de la relación (1.4) se puede establecer que :

$$12 \,.\, n\,(n-1) = 9 \cdot 8\,(8-1)$$

$$n^2 - n = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$\begin{array}{ll} n & -7 \\ n & +6 \end{array}$$

Resolviendo encontramos que : $\mathbf{n = 7}$

1.3 PROPIEDADES COMPLEMENTARIAS

1ra) El *mínimo número de puntos de intersección* (N.P.I.$_{mín}$) entre "n" rectas secantes es 1 y esto ocurre cuando las rectas son concurrentes tal como se muestra en el gráfico adjunto.

$$\text{N.P.I.}_{\text{mín}} = 1 \qquad \ldots(1.7)$$

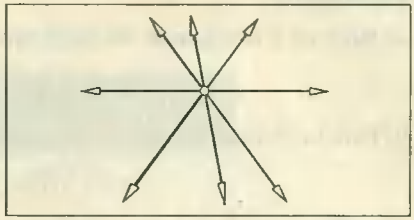


***Fig.* 1.7**

2da) El *mínimo número de puntos de intersección* (N.P. I.$_{mín}$) entre "n" circunferencias secantes es 2, tal como se muestra en el gráfico adjunto.

$$\text{N.P.I.}_{\text{mín}} = 2 \qquad \ldots(1.8)$$

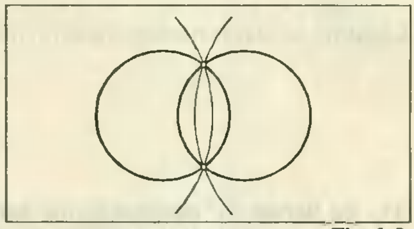


***Fig.* 1.8**

3ra) El N.P. I.$_{máx}$ que se produce al intersectar un polígono convexo de "m" lados, con otro polígono convexo de "n" lados ($m < n$), es $2m$. Esto se explica porque en cada uno de los m lados existen dos (2) puntos de intersección, luego :

$$\text{N.P.I.} = 2m \qquad \ldots(1.9)$$

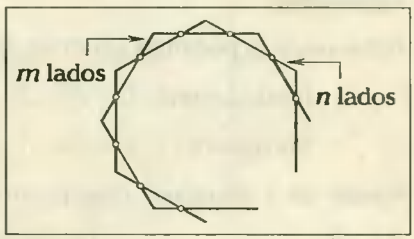


***Fig.* 1.9**

4ta) El N.P.I.$_{máx}$ entre un polígono convexo de "n" lados y una circunferencia o elipse, es $2n$. Esto es así dado que en cada uno de los n lados existen dos (2) puntos de intersección.

$$\text{N.P.I.}_{\text{máx}} = 2n \qquad \ldots(1.10)$$

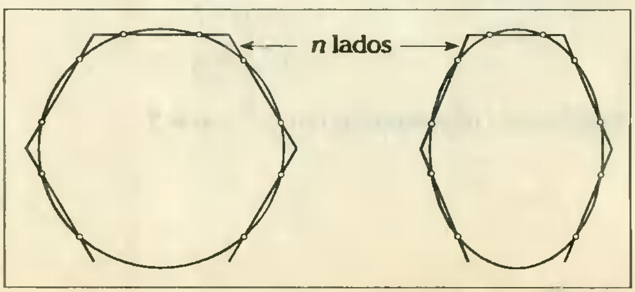


***Fig.* 1.10**

5ta) Si se agregan "m"rectas secantes a un grupo de "n" rectas secantes,se puede probar que el N.P.I.$_{max}$ aumentará en :

$$\Delta \text{ N.P.I.} = \frac{m}{2}(m-1)+mn \qquad \text{...(1.11)}$$

6ta) Si se quitan "m" rectas secantes a un grupo de "n" rectas secantes, entonces el N.P.I.$_{máx}$ disminuirá, de tal forma que el nuevo N.P.I.$_{máx}$, estará dado por :

$$\Delta \text{ N.P.I.} = mn - \frac{m}{2}(m+1) \qquad \text{...(1.12)}$$

7ma) El máximo número de rectas que determinan "n" puntos en los que no hay tres (3) colineales, de forma tal que cada recta pase solo por 2 puntos, está dado por :

$$\#\text{ rectas} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{...(1.13)}$$

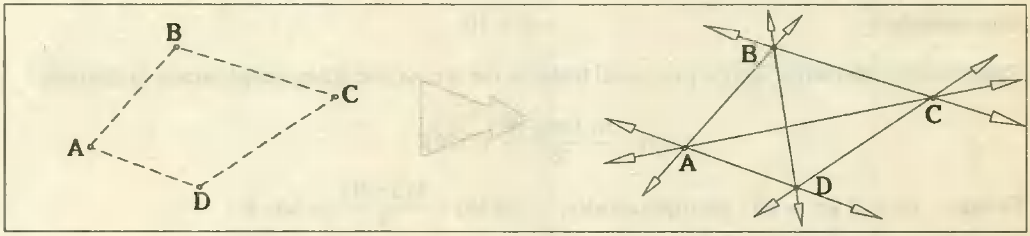


Fig. 1.11

8va) El máximo número de triángulos que se pueden determinar con "n" puntos o rectas, en los que no hay 3 puntos colineales, ni rectas concurrentes, está dado por :

$$\#\text{ triángulos} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \qquad \text{...(1.14)}$$

9na) El número de partes en que queda dividido el plano por "n" rectas secantes en los que no hay 3 rectas concurrentes, está dado por :

$$\#\text{ partes} = \frac{n}{2}(n+1)+1 \qquad \text{...(1.15)}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (3RA PARTE)

12.- Si se retiran 3 elipses de un grupo que se están intersectando, el N.P.I. máximo disminuirá en 96. Determinar cual sería la disminución de puntos si se trataran de rectas secantes.

Resolución.-

Para hallar el $NPI_{máx}$ entre las n elipses secantes emplearemos la fórmula 1.5 .

Luego : $NPI_{máx} = 2n\ (n - 1)$

Al retirarse 3 elipses, quedarán $(n - 3)$; las que producen :

$$NPI_{máx} = 2(n - 3)\ (n - 4)$$

La disminución de puntos se obtiene por la diferencia : $2n\ (n - 1) - 2\ (n - 3)\ (n - 4) = 96$

De donde : $2n^2 - 2n - 2n^2 + 14n - 24 = 96$

Resolviendo : $n = 10$

Para hallar la disminución de puntos al tratarse de rectas secantes empleamos la fórmula :

$$mn - \frac{m\ (m+1)}{2} \quad (1.12)$$

Donde : $m = 3$ y $n = 10$, reemplazando : $3(10) - \dfrac{3(3+n)}{2} = 30 - 6$

Disminución de puntos = **24**

13.- Hallar el máximo número de puntos de intersección entre 4 circunferencias secantes y 6 cuadriláteros no convexos secantes.

Resolución.-

a) 4 circunferencias secantes se intersectan en :

$$4\ (4 - 1) = 12 \text{ puntos.} \quad \text{(relación 1.2)}$$

b) 6 cuadriláteros no convexos secantes se intersectan en :

$$8 \cdot 6\ (6 - 1) = 240 \text{ puntos} \quad \text{(relación 1.6)}$$

Luego (a) y (b) : $8 \cdot 4 \cdot 6 = 192$ puntos

Finalmente la suma nos dará el máximo número de puntos de intersección entre todas ellas, es decir :

$$N = 12 + 240 + 192$$

$$\therefore \quad \mathbf{N = 444}$$

Observación : La fórmula general, para calcular el máximo número de puntos de intersección entre "n" cuadriláteros no convexos secantes será :

$$N = 8n\,(n - 1)$$

14.- El número de puntos de intersección máximo que producen un grupo de pentadecágonos secantes (incluyendo sus vértices) es 6 000. ¿Cuántos pentadecágonos hay en dicho grupo?

Resolución.-

Recorriendo a la fórmula 1.4

Se tiene : $NPI_{máx} = Ln\,(n - 1)$; $L = 15$

Luego : $NPI_{máx} = 15n(n - 1)$

Como hay que incluir sus vértices y teniendo en cuenta que cada pentadecágono posee 15 vértices, se tiene :

$$\#\text{ de vértices} = 15n$$

Luego : $15n\,(n - 1) + 15n = 6\,000$

Factorizando : $15n\,(n - 1 + 1) = 6\,000$

Por consiguiente : $15n^2 = 6\,000$

$$\therefore \quad \boldsymbol{n = 20}$$

15.- Se tienen "n" triángulos secantes. Si se quitan 3 triángulos, el número máximo de puntos de intersección, disminuye en 54. Hallar el valor de "n".

Resolución.-

Si a "n" triángulos secantes se quitan 3 triángulos, entonces quedarían (n - 3) triángulos.

De acuerdo con la relación (1.3), el máximo número de puntos de intersección de estos será:

$$3\,(n - 3)\,(n - 3 - 1) \text{ puntos}$$

Según las condiciones del problema se tiene que : $3\,(n - 3)\,(n - 4) = 3n\,(n - 1) - 54$

De donde : $3n^2 - 21\,n + 36 = 3n^2 - 3n - 54 \quad \Rightarrow \quad 18n = 90$

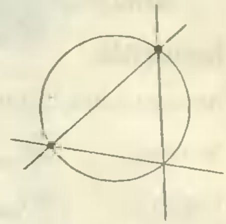
Simplificando : $\boldsymbol{n = 5}$

MISCELÁNEA

1.- Hallar el mínimo número de puntos de intersección entre 3 rectas y 1 circunferencia (las rectas deben ser secantes a la circunferencia).

Resolución.-

Tres rectas secantes determinan tres puntos de intersección y si por ellas hacemos pasar una sola circunferencia lograremos que el número de puntos de intersecciones sea mínimo, tal como lo muestra el gráfico:



En consecuencia, el mínimo número de puntos de intersección entre 3 rectas secantes y una circunferencia es de 3 puntos.

$$\therefore \qquad NPI_{máx} = 3$$

2.- Calcular el máximo número de puntos de intersección entre 3 circunferencias, 4 paralelas y 6 rectas secantes.

Resolución.-

a) 3 circunferencias se intersectan en : $3\,(3 - 1) = 6$ puntos

b) 4 rectas paralelas en : $= 0$ puntos.

c) 6 rectas secantes se intersectan en : $6\,(6 - 1)/2 = 15$ puntos.

Intersectando las circunferencias con las paralelas : $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ puntos

Intersectando las paralelas con las secantes : $1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ puntos

Intersectando las circunferencias con las secantes : $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ puntos

Luedo el máximo número de puntos de intersección estará dado por :

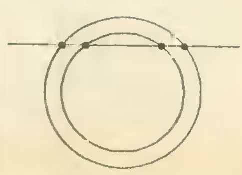
$$N = 6 + 0 + 15 + 24 + 24 + 36$$

En consecuencia : $\mathbf{N = 105}$ **puntos**

3.- Se tiene dos circunferencias concéntricas y 12 rectas paralelas. Hallar el máximo número de puntos de intersección.

Resolución.-

En el gráfico observamos que una recta y dos circunferencias concéntricas determinan 4 puntos de intersección :



$\therefore$ 1 recta y 2 circunferencias concéntricas < > 4 puntos de intersección

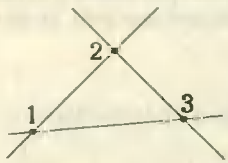
Esto significa que con dos rectas paralelas tendremos: 2 × 4 puntos; con tres (3) rectas paralelas: 3 × 4 puntos, . . . , etc. Este breve análisis nos permite concluir que 12 rectas paralelas y dos circunferencias concéntricas, determinarán :

$$12 \times 4 = \quad \textbf{48 puntos de intersección.}$$

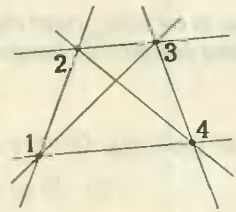
4.- ¿Cuál es el máximo número de rectas que pasan por 50 puntos sabiendo que no hay 3 de ellos alineados y que cada recta debe pasar por dos de estos puntos?

Resolución.-

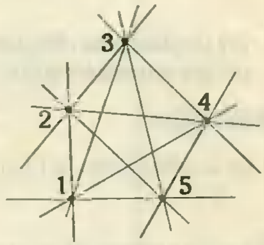
Con fines didácticos te muestro a continuación sucesivos conjuntos de puntos y rectas para poder deducir una reglade formación entre ellas :



Para 3 puntos, 3 rectas



Para 4 puntos , 6 rectas



Para 5 puntos , 10 rectas

Luego, para 50 puntos no alineados, el máximo número de rectas que pasan por ellas será obtenido respetando la condición de que éstas no pasen por 3 puntos alineados, lo que equivale a decir que debemos hacer combinaciones de 50 puntos tomados de 2 en 2. No cabe duda que esto amerita la utilización del número combinatorio, es decir:

$$C_2^{50} = \frac{50!}{2!\,(50-2)!} \qquad \Rightarrow \qquad C_2^{50} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48!}{2\,(48)!}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{C_2^{50} = 1\ 225\ rectas}$$

5.- Hallar el máximo número de puntos de intersección entre 30 triángulos secantes y 18 rectas secantes.

Resolución.-

a) Los 30 triángulos secantes generan: $3 \cdot 30 \cdot (30 - 1) = 2\,610$ puntos

b) Las 18 rectas secantes producen : $18\,(18 - 1)/2 = 153$ puntos

Intersectando los triángulos con las rectas : $2 \cdot 30 \cdot 18 = 1\,080$

De este modo el máximo número de puntos de intersección viene dado así :

$$N = 2\,610 + 153 + 1\,080$$

$$\therefore \qquad \mathbf{N = 3\ 843}$$

6.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 3 circunferencias secantes y 1 triángulo equilátero.

Resolución.-

a) 3 circunferencias secantes se intersectan en: $3(3-1) = 6$ puntos.

b) 1 triángulo equilátero por ser único genera : 0 puntos

Intersectando las circunferencias con el triángulo : $6 \cdot 3 \cdot 1 = 18$ puntos

Finalmente el máximo número de puntos de intersección entre ellas será :

$$N = 6 + 0 + 18 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N = 24\ puntos}$$

7.- En un plano se dibujan "n" rectas, si de este grupo de rectas 5 fuesen paralelas y el resto rectas secantes entre si, el máximo número de puntos de intersección sería 45. Hallar n.

Resolución.-

a) De acuerdo con la relación (1.1), se sabe que $(n-5)$ rectas secantes se intersectan en:

$(n-5)(n-6)/2$ puntos.

b) 5 rectas paralelas de intersección en : 0 puntos.

Intersectando las paralelas con las secantes : $1 \cdot (n-5) \cdot (5)$ puntos

Finalmente tendremos : $\dfrac{(n-5)(n-6)}{2} + 0 + 5(n-5) = 45$

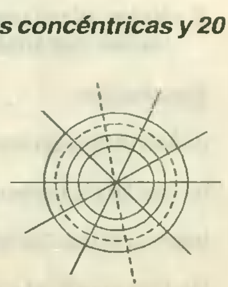
Efectuando las operaciones indicadas : $n^2 - n - 110 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} n & -11 \\ n & +10 \end{array}\right\} \Rightarrow (n-11)(n+10) = 0$$

$$\therefore \qquad \mathbf{n = 11}$$

8.- Hallar el número de puntos de intersección entre 10 circunferencias concéntricas y 20 rectas que pasan por el centro común.

Resolución.-



En el gráfico observamos que el máximo número de puntos de intersección de 10 circunferencias concéntricas y 20 rectas concurrentes en el centro común, estará dada por la siguiente expresión :

$2 \cdot 10 \cdot 20 + 1 = 401$

Las rectas concurrentes determinan este único punto.

Número de rectas concurrentes

Número de circunferencias concéntricas.

Número de puntos de intersección de una circunferencia y una secante

$\therefore$ **NPI = 401**

9.- 7 rectas secantes, 8 circunferencias y 9 triángulos se intersectan como máximo, en:

Resolución.-

a) Por la relación (1.1) 7 rectas secantes se intersectan en : $7\,(7-1)/2 = 21$ puntos

b) Por la relación (1.2) 8 circunferencias secantes se intersectan en : $8\,(8-1) = 56$ puntos

c) Por la relación (1.3) 9 triángulos secantes se intersectan en : $3\,(9)\,(9-1) = 216$ puntos

Intersectando rectas con circunferencias se obtienen : $2\cdot 7\cdot 8 = 112$ puntos

Intersectando circunferencias con triángulos se obtienen : $6\cdot 8\cdot 9 = 432$ puntos

Intersectando rectas con triángulos se obtienen : $2\cdot 7\cdot 9 = 126$ puntos

La suma nos dará el máximo número de puntos de intersección entre todas ellas, es decir :

$$N = 21 + 56 + 216 + 112 + 432 + 126$$

$$\mathbf{N = 963\ puntos}$$

10.- Si al máximo número de puntos de intersección entre "m" rectas secantes se le aumenta 16 puntos, el resultado equivale al número de rectas elevado al cuadrado y aumentado en uno. Determinar el máximo número de puntos de intersección de "m" hexágonos secantes:

Resolución.-

Según la relación (1.1) sabemos que m rectas se intersectan en : $\dfrac{m\,(m-1)}{3}$ puntos

Por condición del problema : $$\frac{m\,(m-1)}{3} + 16 = m^2 + 1$$

Resolviendo : $m\,(m-1) + 30 = 0$

De donde : $m^2 + m - 30 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} m & +6 \\ m & -5 \end{array}\right\} \Rightarrow (m-5)(m+6) = 0$$

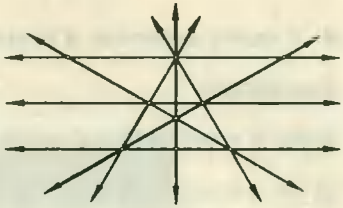
Luego el $NPI_{máx}$ de m hexágonos estará dado por la relación (1.4) :

$$6m\,(m-1) = 6\cdot 5\,(5-1) = 120$$

$$\therefore\ \mathbf{NPI_{máx} = 120}$$

11.- Calcular el mínimo número de puntos de intersección entre 3 rectas paralelas y 5 rectas secantes.

Resolución.-



Si ubicamos convenientemente las rectas secantes sobre las rectas paralelas como el que muestra el gráfico adjunto, obtendremos el menor número de puntos de corte, luego :

$$\mathbf{NPI_{mínimo} = 10}$$

12.- En un plano se tienen n rectas secantes; al duplicar el número de ellas el máximo número de puntos de intersección aumenta en 145. Calcular el número de rectas.

Resolución.-

Sabemos que si se duplica el número de rectas se obtendrán $2n$ rectas.Luego aplicando la relación (1.1) se tendrá :

$$N.P.I._{máx} = \frac{2n\,(2n-1)}{2} = n\,(2n-1).$$

Entonces : $N.P.I._{máx} = n\,(2n-1)$

A continuación el aumento de puntos se obtiene mediante la siguiente diferencia :

$$n\,(2n-1) - n\,\frac{(n-1)}{2} = 145$$

Efectuando operaciones : $2n\,(2n-1) - n\,(n-1) = 290$

Transponiendo términos : $3n^2 - n - 290 = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc} 3n & \searrow\!\!\!\nearrow & +\ 29 \\ n & \nearrow\!\!\!\searrow & -\ 10 \end{array}\right\} \Rightarrow (3n+29)(n-10) = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{n = 10}$$

13.- Si a un conjunto de "n" rectas secantes se le quitan 4 rectas, su NPI máx. disminuye en 90, pero si se agregan 4 rectas al conjunto, el número de puntos de intersección máximo aumentaría en :

Resolución.-

"n" rectas rectas secantes determinan un : $NPI_{máx} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ... (1)

$(n-4)$ rectas secantes determinan un : $NPI_{máx} = \dfrac{(n-4)\,(n-5)}{2}$ ... (2)

La disminución de puntos se obtiene por la diferencia entre (1) y (2) :

$$\frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{(n-4)\,(n-5)}{2} = 90$$

Efectuando laas operaciones indicadas : $n^2 - n - n^2 + 9n - 20 = 180$

De donde al resolver la ecuación, se obtiene : $n = 25$

De este modo encontramos que : $NPI_{máx} = \dfrac{25\ (25-1)}{2} = 300$

Al agregar 4 rectas se tendrán 29, luego : $NPI_{máx} = \dfrac{29\ (29-1)}{2} = 406$

Luego el $NPI_{máx}$ aumentará en : $406 - 300 = \mathbf{106}$

14.- Si a un número de elipses secantes se le aumenta cuatro, el número de puntos de intersección se incrementa en 184. Calcular cuántas elipses conforman dicho grupo.

Resolución.-

Según la relación (1.5) n elipses secantes determinan un : $NPI_{máx} = 2n(n - 1)$

Por la misma razón $(n + 4)$ elipses secantes determinan : $NPI_{máx} = 2\ (n + 4)\ (n + 3)$

El incremento del $NPI_{máx}$ se obtiene por la diferencia : $2(n + 4)\ (n + 3) - 2n\ (n - 1) = 184$

Resolviendo : $n^2 + 7n + 12 - n^2 + n = 92$

$\therefore \quad \mathbf{n = 10}$

15.- Si a un conjunto de k rectas secantes se le agrega una recta, el máximo número de puntos de intersección aumenta en un quinto del total. Calcular el máximo número de puntos de intersección.

Resolución.-

Por condición del problema se tiene que : $\overbrace{NPI_{max}}^{k+1\ rectas} = \overbrace{NPI_{max}}^{k\ rectas} + \dfrac{1}{5}\ \overbrace{NPI_{max}}^{k\ rectas}$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{NPI_{max}}^{k+1\ rectas} = \frac{6}{5}\ \overbrace{NPI_{max}}^{k\ rectas}$$

Sustituyendo cada término por la relación (1.1): $\overbrace{\dfrac{(k+1)\left[(k+1)-1\right]}{2}}^{k+1\ rectas} = \dfrac{6}{5}\ \overbrace{\dfrac{k(k-1)}{2}}^{k\ rectas}$

$$\Rightarrow \quad k\ (k + 1) = \frac{6}{5}\ k\ (k - 1)$$

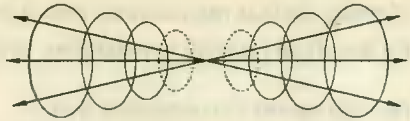
Simplificando "k" y efectuando operaciones : $6(k - 1) = 5\ (k + 1)$

Finalmente al despejar obtenemos : $k = 11$

Luego hallamos el $NPI_{máx}$ a partir de la relación (1.1): $NPI_{máx} = \dfrac{11(12)}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = 66}$$

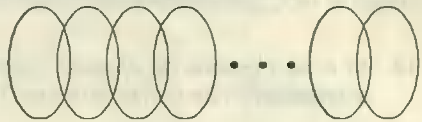
16.- En la figura se tienen "n" rectas concurrentes y 2n elipses . Si el número total de puntos de intersección es 21n + 12 ; calcular el valor de "n".



Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 1.3 sabemos que n rectas concurrentes se intersectan en 1 punto .

Asimismo podemos reconocer ,según el gráfico adjunto, que n elipses secantes dispuestas en forma de eslabones determinan :



$$2\,(n-1) \text{ puntos}$$

Además cada recta al interceptar a cada elipse en 2 puntos, nos permite deducir que cada recta determine : $2\,(2n) = 4n$ puntos sobre todas las elipses

De este modo es fácil predecir que con n rectas se obtendrán : $4n \,.\, n = 4\,n^2$ puntos.

Luego el $NPI_{\text{máx}}$ será : $1 + 2\,(n+1) + 2(n-1) + 4n^2 = 21n + 12$

Efectuando operaciones : $4n^2 + 4n - 3 = 21n + 12$

Transponiendo términos : $4n^2 - 17n - 15 = 0$

Factorizando :
$$\left.\begin{array}{ccc} 4n & \nearrow\!\!\!\!\searrow & +3 \\ n & & -5 \end{array}\right\} \Rightarrow (4n+3)(n-5) = 0$$

De donde : $\boldsymbol{n = 5}$

17.- Si a un grupo de triángulos secantes se le agregan 4, entonces el máximo número de puntos de intersección se le triplica. ¿Cuántos triángulos conforman dicho grupo?

Resolución.-

Según la relación (1.3) los "n" triángulos , producirán : $NPI_{\text{máx}} = 3n\,(n-1)$ ....(*)

Si se agregan 4 triángulos : $3\,(n+4)\,(n+4-1) = 3\,(n+4)\,(n+3)$ puntos

Según el problema esta última cantidad resulta ser el triple de (*).

Luego por condición del problema : $3\,(n+4)\,(n+3) = 3\,[3n\,(n-1)]$

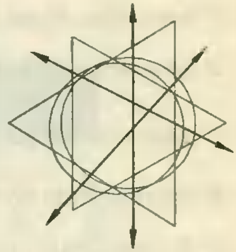
Efectuando operaciones obtenemos: $n^2 - 5n - 6 = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc} n & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -3 \\ n & & +2 \end{array}\right\} \Rightarrow (4n+3)(n-5) = 0$$

Resolviendo : $\boldsymbol{n = 6}$

18.- Calcular el número de puntos de intersección máximo entre 8 rectas secantes, 8 circunferencias secantes y 8 triángulos secantes.

<u>Resolución</u>.-



En el esquema adjunto se muestra la forma como se están intersectando las figuras . Primeramente calculamos los puntos que determinan solo las figuras de la misma especie, luego los puntos producidos por las figuras tomados de 2 en 2.

1° Por la relación 1.1 las 8 rectas tienen un máximo de puntos de intersección de :

$$NPI_{máx} = \frac{8\,(8-1)}{2} = 28 \text{ puntos}$$

2° Por la relación 1.2 las 8 circunferencias se intersectan en :

$$NPI_{máx} = 8\,(8-1) = 56 \text{ puntos}$$

3° Por la relación 1.3 los 8 Triángulos : $NPI_{máx} = 3 \cdot 8\,(8-1) = 168$ puntos

4° Intersectando las rectas con las circunferencias : $(2) \cdot 8 \cdot 8 = 128$ puntos

5° Intersectando las rectas con los triángulos : $(2) \cdot 8 \cdot 8 = 128$ puntos

6° Intersectando las circunferencias con los triángulos : $(6) \cdot 8 \cdot 8 = 384$ puntos

Los números ubicados entre paréntesis en los pasos 4°, 5° y 6°, representan el $NPI_{máx}$ entre una figura de cada clase ,para lo cual hemos recurrido al item 1.10. De este modo se tendrá que :

$$N = 28 + 56 + 168 + 128 + 128 + 384$$

Finalmente sumamos las cantidades parciales : $\mathbf{NPI_{máx} = 892}$

19.- Calcular la N.P.I. máximo entre 10 cuadriláteros convexos secantes, 12 hexágonos secantes y 6 circunferencias secantes.

<u>Resolución</u>.-

1° Por la relación 1.4 para los cuadriláteros : $NPI = 4.10\,(10-1) = 360$

2° Por la relación 1.3 para los hexágonos : $NPI = 6.12\,(12-1) = 792$

3° Por la relación 1.2 para las circunferencias : $NPI = 6\,(6-1) = 30$

4° Intersectando los cuadrados y los hexágonos : $(8) \cdot 10 \cdot 12 = 960$

5° Intersectando los cuadrados y las circunferencias : $(8) \cdot 10 \cdot 6 = 480$

6° Intersectando los hexágonos y las circunferencias : $(12) \cdot 12 \cdot 6 = 864$

Finalmente : $\mathbf{NPI_{máx} = 3486}$

20.- Calcular la N.P.I. máximo entre 5 cuadriláteros no convexos secantes, 6 elipses secantes y 7 rectas secantes.

Resolución.-

1° Intersectando los 5 cuadriláteros : $NPI = 8 \cdot 5(5-1) = 160$

2° Intersectando las 6 elipses : $NPI = 2 \cdot 6(6-1) = 60$

3° Intersectando las 7 rectas secantes : $NPI = 7\dfrac{(7-1)}{2} = 21$

4° Intersectando los cuadriláteros con las elipses : $NPI = (8) \cdot 5 \cdot 6 = 240$

5° Intersectando los cuadriláteros con las rectas : $NPI = (4) \cdot 5 \cdot 7 = 140$

6° Intersectando las elipses con las rectas : $NPI = (2) \cdot 6 \cdot 7 = 84$

$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = 705}$

21.- En un mismo plano, un número igual de rectas secantes y circunferencias secantes se intersectan determinando un N.P.I. máximo igual a 117. Calcular el número de figuras geométricas que se intersectan.

Resolución.-

Sea x el número de rectas, entonces x también será número de circunferencias. Para obtener el $NPI_{máx}$ entre ellas se deberan hacer 3 tipos de intesecciones :

1° Entre las x rectas : $NPI = \dfrac{x\,(x-1)}{2}$

2° Entre las x circunferencias : $NPI = x\,(x-1)$

3° Entre las x rectas y x circunferencias : $NPI = (2)\,(x)\,(x) = 2x^2$

Luego por condición : $\dfrac{x\,(x-1)}{2} + x\,(x-1) + 2x^2 = 117$

Efectuando operaciones : $\dfrac{3}{2}x(x-1) + 2x^2 = 117$

Despejando se obtiene : $7x^2 - 3x - 234 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} 7x & +39 \\ x & -6 \end{array}\right\} \Rightarrow (7x+39)(x-6) = 0$$

$\therefore \quad x = 6$

Finalmente el número de figuras geométricas será : $2(6) =$ **12**

22.- Se dan "m" rectas coplanares de las cuales "n" son paralelas. Calcular $NPI_{máx}$ que pueden producir al intersectarse estas rectas.

Resolución.-

Si n rectas son paralelas, entonces $(m - n)$ serán secantes luego nuestro problema se reduce a calcular el $NPI_{máx}$ que producen n rectas paralelas y $(m - n)$ rectas secantes.

1° La intersección de las paralelas produce : $NPI = 0$

2° La intersección de las rectas secantes : $NPI = \dfrac{(m-n)\,(m-n-1)}{2}$

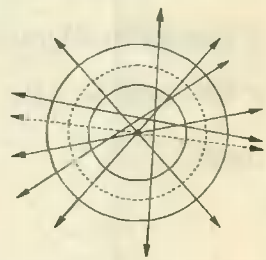
3° La intersección de las rectas paralelas y las secantes : $NPI = (1)\,(n)\,(m - n)$

Finalmente : $$NPI_{máx} = \frac{(m-n)\,(m-n-1)}{2} + n\,(m - n)$$

$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = \frac{(m - n)\,(m + n - 1)}{2}}$$

23.- Calcular el N.P.I. máximo entre "n" circunferencias concéntricas y "n" rectas secantes de las cuales "m" pasan por el centro de las circunferencias.

Resolución.-



Es fácil reconocer que si m rectas son concurrentes entonces de las n rectas secantes dadas ,existen $(n\text{-}m)$ rectas que son secantes pero no concurrentes. Para ello el gráfico adjunto nos da una idea de las intersecciones establecidas. A continuación estableceremos 6 tipos de intersecciones entre estas figuras :

1° Entre las n circunferencias : $NPI = 0$

2° Entre las m rectas concurrentes (R.C) : $NPI = 1$

3° Entre las $(n - m)$ rectas no concurrentes : $NPI = \dfrac{(n-m)\,(n-m-1)}{2}$

4° Entre las n circunferencias y m R.C : $NPI = (2).n.m$

5° Entre las n circunferencias y $(n - m)$ rectas : $NPI = (2).n\,(n - m)$

6° Entre las m R.C y $(n - m)$ rectas : $NPI = (1).m\,(n - m)$

Luego : $$NPI_{máx} = 1 + \frac{(n-m)\,(n-m-1)}{2} + 2mn + 2n(n - m) + m(n - m)$$

$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = \frac{n(5n-1) - m(m-1)}{2} + 1}$$

24.- Si a un conjunto de rectas secantes se le agregase una cantidad igual de rectas, su número máximo de puntos de intersección aumentará en 330. Calcular el número de rectas del conjunto.

Resolución.-

Sea "n" el número de rectas dado; si a éste le agregamos la misma cantidad, es decir "n", entonces por condición del problema se tendrá que :

$$\overbrace{\frac{2n(2n-1)}{2}}^{2n\text{ rectas}} = \overbrace{\frac{n(n-1)}{2}}^{n\text{ rectas}} + 330$$

Efectuando operaciones : $3n^2 - n - 660 = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc} n & & -15 \\ 3n & & +44 \end{array}\right\} \Rightarrow (n-15)(3n+44)=0$$

En consecuencia el número de rectas será : $n = 15$

25.- Determinar el $NPI_{máx}$ entre m rectas secantes si k de ellas son concurrentes.

Resolución.-

Se trata de calcular el $NPI_{máx}$ entre $(m - k)$ rectas secantes y k rectas concurrentes.

1° Entre las k rectas concurrentes (R.C.) : NPI $= 1$

2° Entre las $(m - k)$ rectas secantes : NPI $= \dfrac{(m-k)\ (m-k-1)}{2}$

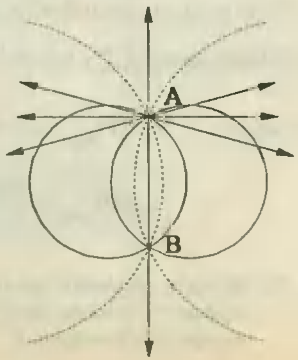
3° Entre las "k" R.C. y $(m - k)$ rectas secantes : NPI $= (1)\,k\,(m - k) = k\,(m - k)$

Luego : $NPI_{máx} = \dfrac{(m-k)\ (m-k-1)}{2} + k\,(m - k)$

$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = \frac{(m-k)\ (m+k-1)}{2} + 1}$$

26.- Calcular el mínimo número de puntos de intersección entre "n" rectas secantes y "n" circunferencias secantes.

Resolución.-



Para obtener el $NPI_{mín}$, debemos hacer que las "n" circunferencias se intersecten en los mismos puntos, los que como sabemos serán como mínimo dos. Sean estos puntos A y B,ahora dichos puntos serán a su vez pertenecientes a una de las n rectas dadas y si la condición es que el número de puntos de intersección sea el mínimo posible , entonces las $(n - 1)$ rectas restantes las haremos pasar por uno de dichos puntos , por ejemplo A , tal como se indica en el gráfico adjunto. Luego los puntos de intersección estarían distribuidos así :

1° n circunferencia : NPI = 2

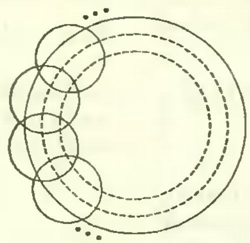
2º n rectas : NPI $= 1$ (A)

3º n circunferencias y n rectas : NPI $= (1)\,(n-1)\,n$

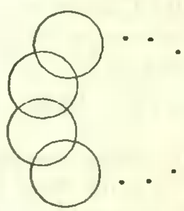
$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{mín} = n\,(n-1) + 2}$$

27.- Hallar el máximo número de puntos de corte en la figura mostrada. Si hay "n" circunferencias concéntricas y otras "n" circunferencias menores formando una argolla.

Resolución.-



1º El número de puntos de corte entre las "n" circunferencias que forman la argolla se obtiene así :



$\Rightarrow$ NPI $= 2\,n$

"n" circunferencias

2º Una circunferencia de la argolla corta en dos puntos en a una de las concéntricas. Entonces "n" circunferencias de la argolla cortan a las "n" concéntricas en :

NPI $= 2.n\,.n = 2\,n^2$

Luego : $\text{NPI}_{máx} = 2\,n + 2\,n^2$

$$\therefore \quad \mathbf{NPI_{máx} = 2\,n\,(n+1)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar el máximo número de puntos de intersección para 2 triángulos, 6 circunferencias y 10 rectas si conocemos que todas las figuras tienen 1 punto común.

A) 139 B) 143 C) 156 D) 161 E) 179

2.- Hallar el máximo número de puntos de intersección de 10 cuadriláteros convexos secantes y 20 circunferencias que no se intersectan entre si.

A) 1 960 B) 1 940 C) 1 950
D) 1 830 E) 1 770

3.- Se tiene "n" triángulos y "n" cuadriláteros convexos. Si al máximo número de puntos de intersección de los triángulos se aumenta el número total de los lados de los triángulos, más el máximo número de puntos de intersección de los cuadriláteros, más el número total de los ángulos de los cuadriláteros se obtiene 1 008. Hallar "n".

A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

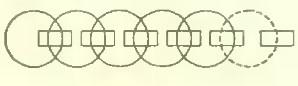
4.- ¿Con cuántos triángulos deben intersectarse 8 circunferencias para que el máximo número de intersección sea 806?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

5.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 triángulos con 6 circunferencias secantes.

A) 900 B) 930 C) 940 D) 960 E) 980

6.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 100 circunferencias con 100 cuadriláteros como se muestra en la figura.



A) 80 198 B) 80 140 C) 70 130
D) 90 170 E) 8 030

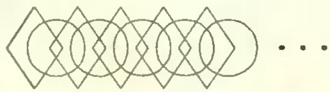
7.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 8 rectas secantes con 11 paralelas y con 6 circunferencias secantes.

A) 370 B) 371 C) 372 D) 373 E) 374

8.- Si el máximo número de puntos de intersección de "N" polígonos de 5 lados más el número de vértices es 500. Calcular N.

A) 5 B) 10 C) 12 D) 18 E) 30

9.- Calcular el número total de puntos de intersección de 100 circunferencias con 100 cuadriláteros tal como los mostramos.



A) 746 B) 750 C) 784 D) 794 E) 840

10.- Cuántas rectas se intersectan sabiendo que si se quitan 4, el número de puntos disminuye en 54.

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) [illegible]

11.- Hallar el máximo número de puntos de intersección entre 5 elipses y 11 cuadriláteros no convexos.

A) 1 360 B) 1 260 C) 1 460
D) 1560 E) 960

12.- Si a un conjunto de rectas secantes, se le agrega una cantidad igual de rectas, su número máximo de puntos de intersección aumentaría en 330. Calcular cuántas rectas tiene el conjunto.

A) 10 B) 25 C) 15 D) 12 E) 18

13.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 rectas paralelas, 12 rectas secantes y 16 circunferencias.

A) 1 130 B) 3 006 C) 1 240
D) 1 314 E) 1 017

14.- Se tienen "n" circunferencias secantes. Si se quitan 2 circunferencias, el número máximo de puntos de intersección disminuye en 30. Hallar n.

A) 9 B) 8 C) 6 D) 10 E) 12

15.- Calcular el máximo número de puntos de intersección que producen 2 polígonos convexos: Uno de 2 y otro de 2^{n+2} lados ($n > 1$).

A) 2^{n+1} B) 2^{n-1} C) 2^{n^n} D) 2^{n+2} E) 2^{2+n}

16.- En un plano se dibujan "k" elipses secantes y $2k$ cuadriláteros cóncavos secantes. Si el máximo número de puntos de intersección es $182k$. Hallar k.

A) 4 B) 6 C) 9 D) 5 E) 8

17.- En un plano el máximo número de puntos de intersección entre n elipces secantes, n triángulos secantes, y n cuadriláteros secantes es $339n$. Hallar n.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 26

18.- Si a un conjunto de "n" rectas secantes se le quita 4 rectas, su máximo número de puntos de intersección disminuirá en 90, pero si se agregan 4 rectas al conjunto el máximo número de puntos de intersección aumentaría en:

A) 90 B) 96 C) 100 D) 106 E) 108

19.- En un plano se dibujan "n" rectas secantes, si el máximo número de puntos de intersección que determinaron (n - 4) rectas secantes es $6n$. Hallar el máximo número de puntos de intersección entre n triángulos secantes.

A) 2 960 B) 1 960 C) 3 960

D) 3 660 E) 1 140

20.- Hallar el máximo número de puntos de intersección entre "n" circunferencias, "$2n$" rectas secantes, y "n" triángulos al intersectarse todas esta figuras entre si.

A) $5n(4n-1)$ B) $4n(5n-1)$ C) $5n(4n+1)$

D) $4n(5n+1)$ E) $n(6n+2)$

21.- Calcular el N.P.I. máx entre 10 rectas secantes, 10 circunferencias secantes y 10 elipces secantes.

A) 100 B) 1005 C) 1015

D) 1115 E) 1111

22.- El N.P.I. entre 8 triángulos secantes y n cuadriláteros no convexos secantes, incluyendo los vértices es 560. Hallar n.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

23.- Determínese el máximo número de circunferencias que se pueden forman con 10 puntos coplanares, donde no hay 3 alineados.

A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

24.- Calcular cuántos pentágonos convexos se pueden determinar con 10 puntos, donde no hay 3 alineados.

A) 152 B) 176 C) 202 D) 222 E) 211

25.- ¿En cuántas partes queda dividido el plano por 20 rectas secantes donde no hay 3 rectas concurrentes?

A) 200 B) 201 C) 209 D) 210 E) 211

26.- Calcular el N.P.I. máx entre 12 rectas coplanares de las cuales son paralelas.

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

27.- Calcular el N.P.I.$_{\text{máx}}$ entre 20 circunferencias concéntricas y 20 rectas secantes de las cuales 10 pasan por el centro de la circunferencia.

A) 946 B) 947 C) 948 D) 949 E) 950

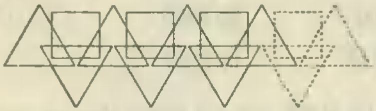
28.- Hallar el N.P.I. máx entre 15 rectas secantes si 8 de ellas son concurrentes.

A) 74 B) 75 C) 76 D) 77 E) 78

29.- Calcular el N.P.I. mín de 7 rectas secantes y 8 circunferencias secantes.

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

30.- Del gráfico adjunto calcular el número de puntos de intersección si hay 30 triángulos y 15 cuadrados.



A) 146 B) 147 C) 148 D) 149 E) 150

31.- Calcular el máximo número de circunferencias que pueden determinar 20 rectas secantes, donde no hay 3 concurrentes

A) 1140 B) 1 260 C) 1 310

D) 410 E) 1520

32.- Si a un grupo de rectas secantes se le agregan "k" entonces el N.P.I. máx aumentará en "A" si a este mismo grupo se le disminuye "k" rectas secantes, entonces el N.P.I. disminuye en "D". Calcular : A - D

A) $k+1$ B) $k(k-1)$ C) $\frac{k(k+1)}{2}$

D) k^2-1 E) k^2

33.- Hallar el N.P.I. máx entre "n" rectas secantes, $\frac{n}{2}$ rectas concurrentes y $\frac{n}{3}$ rectas paralelas.

A) $\frac{n}{2}(3n-1)+1$ D) $\frac{n}{2}(5n-1)+1$

B) $\frac{n}{2}(2n+1)+1$ E) $\frac{n}{2}(5n+1)+1$

C) $\frac{n}{2}(n+1)+2$

34.- Calcular el N.P.I.$_{max}$ entre 3 rectas secantes, 3 circunferencias secantes, 3 triángulos secantes, 3 elipces secantes y 3 cuadriláteros no convexos secantes.

A) 527 B) 537 C) 547 D) 557 E) 567

35.- Si el N.P.I. máx entre k polígonos de $(k+2)$ lados y $(k+2)$ polígonos de k lados cada uno es 8064 puntos. Calcular k

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

36.- Se toman "m" puntos sobre una circunferencia y "k" puntos sobre otra circunferencia, interior a la primera. Si el máximo número de rectas determinadas al unir todos los puntos tomados es $4(m+k)$. Calcular el número total de triángulos que se podrán forman con dichos puntos.

A) 92 B) 84 C) 80 D) 70 E) 64

37.- En un mismo plano, circunferencias y triángulos se están intersectando, se sabe que el NPI $_{máx}$ disminuye en 96 si se retiran a la vez 5 de éstas figuras de las cuales 3 no son polígonos y se sabe además que si se aumentan igual cantidad de figuras retiradas de las cuales 3 no son circunferencias entonces el N.P.I. $_{máx}$ aumenta en 234, calcular el N.P.I. $_{máx}$.

A) 99 B) 102 C) 122 D) 130 E) 136

38.- Hallar el N.P.I. que existen en la figura adjunta asumiendo que hay n pentágonos y n circunferencias concéntricas.

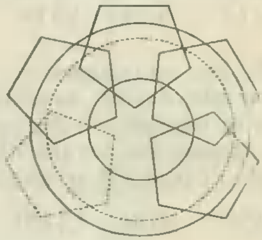
A) $2n(n-1)$

B) $n(n+1)$

C) $2n(n+1)$

D) $3n(n+1)$

E) $4n(n+1)$

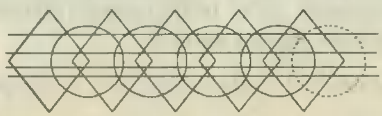


39.- Calcular el máximo número de puntos de intersección de 10 rectas secantes, 15 paralelas y 20 circunferencias secantes.

A) 1675 B) 1775 C) 1875

D) 1975 E) 1575

40.- En la siguiente figura se tienen "n" cuadriláteros, "n" circunferencias y "n" rectas paralelas, si el número total de puntos de intersección es $(61n+9)$. Hallar n

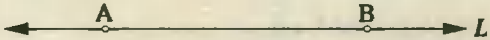


A) 40 B) 30 C) 20 D) 15 E) 10

CAP. 2

segmentos de recta

2.1 LÍNEA RECTA



2.1A) NOTACIÓN :

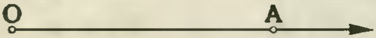
$\overleftrightarrow{AB}$; se lee "recta $\overleftrightarrow{AB}$" , ó , $\overleftrightarrow{L}$ que se lee "recta L"

2.1B) CARACTERÍSTICAS :

- Dos puntos determinan una recta .
- Toda recta contiene infinitos puntos .
- Una recta es ilimitada en extensión .
- Todos los puntos de una recta siguen una misma dirección.

2.2 RAYO

Porción de línea recta limitada en un extremo e ilimitada por el otro.



2.2A) NOTACIÓN :

$\overrightarrow{OA}$; se lee "rayo OA"

2.2B) CARACTERÍSTICAS :

- Se origina a partir de un punto (O) llamado origen.
- Es limitada en extensión
- Todos sus puntos siguen una misma dirección.

OBSERVACIÓN :

La figura formada por todos los puntos del rayo OA sin el punto "O" se llama semirecta OA y se denota así $\overrightarrow{OA}$.

2.3 SEGMENTO DE RECTA

Porción de línea recta limitada por ambos extremos.

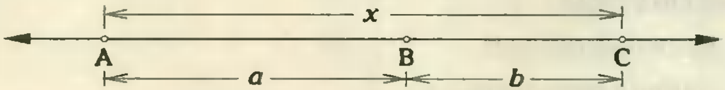
2.3A) NOTACIÓN :

$\overline{AB}$, se lee "segmento de recta $\overline{AB}$".

2.3B) CARACTERÍSTICAS :

- Es una porción limitada de una recta.
- Los extremos de $\overline{AB}$ son los puntos A y B .
- La medida de $\overline{AB}$ es un número real y positivo representado así : $m\overline{AB}$ ó **AB** .

2.4 OPERACIONES CON SEGMENTOS COLINEALES



Ubiquemos en una recta 3 puntos A, B y C en forma consecutiva , determinandose entonces 2 segmentos consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con lo cual quedan establecidos tres segmentos : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, tal como se muestra en la figura . Si a continuación utilizamos las medidas de cada uno de estos segmentos , se podrán establecer las siguientes relaciones :

a) ADICIÓN : $AC = AB = BC \quad \Rightarrow \quad x = a + b$ ... (*)

b) SUSTRACCIÓN : $AB = AC - BC \quad \Rightarrow \quad a = x - b$

$BC = AC - AB \quad \Rightarrow \quad b = x - a$

Donde : $AC = x$, $AB = a$ $\wedge$ $BC = b$

Observaciones :

a) Si en una recta se consideran "n" puntos consecutivos, el número de *segmentos* (N) que quedan determinados por dichos puntos, est á dado por la siguiente relación :

$$N = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{... (2.1)}$$

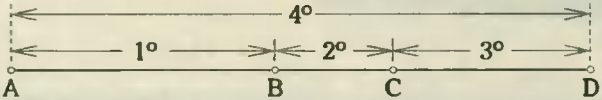
b) La relación de Adición se puede generalizar así : Tomemos "n" puntos consecutivos A_1, A_2, A_3, ... A_n en una misma recta, entonces se verificará la siguiente relación :

$$A_1A_n = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n \qquad \text{... (2.2)}$$

A este resultado se conoce como la "regla de la cadena" ó el Teorema de Charles . Debemos notar que los segmentos considerados son consecutivos.

c) Se establece que B es el punto medio de $\overline{AC}$, si y solo si : $$\mathbf{AB = BC = \frac{AC}{2}} \qquad \text{... (2.3)}$$

2.5 CUATERNA ARMÓNICA



Los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D forman una cuaterna armónica si y solo si se cumple :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \qquad \text{... (2.4)}$$

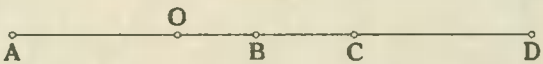
Observación :

Si consideramos los segmentos determinados (en el gráfico mostrado) de izquierda a derecha, entonces $\overline{AB}$ es el 1^{ro} ; $\overline{BC}$ el 2^{do}, $\overline{CD}$ el 3^{ro} y $\overline{AD}$ el 4^{to} , luego la relación anterior se podrá expresar también como :

$$\frac{1^o}{2^o} = \frac{4^o}{3^o} \qquad \text{... (2.5)}$$

2.6 PROPIEDADES DE LA CUATERNA ARMÓNICA

Sabiendo que A, B, C y D forman una cuaterna armónica se cumplen las siguientes propiedades :



a) AB > BC

b) **Relación de Descartes** : $\dfrac{2}{AC} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}$

c) **Relación de Newton** . Si "O" es el punto medio de $\overline{AC}$ entonces :

$$(OC)^2 = OB \,.\, OD$$

d) Silos segmento determinados por la cuatema armónica verifica la siguiente relación :

$$\frac{AB}{BC} = n\,\frac{AD}{CD} \text{ , donde } n > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n+1}{AC} = \frac{n}{AB} + \frac{1}{AD}$$

2.7 SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

El segmento $\overline{AP}$ del gráfico adjunto se dice que es la sección áurea del segmento $\overline{AB}$, si y sólo sí se verifican las siguientes relaciones :

- $AP > PB$

- $(AP)^2 = AB \, . \, PB$

2.8 PROPIEDADES DE LA SECCIÓN ÁUREA

Siendo $\overline{AP}$ la sección áurea de $\overline{AB}$, se cumplen las siguientes propiedades :

a) $AP > \dfrac{AB}{2}$

b) $AB = AP \, \dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

c) $AP = AB \, \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

d) PB , es la sección áurea de AP

e) $AP = PB \, \dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

f) Número Áureo : $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

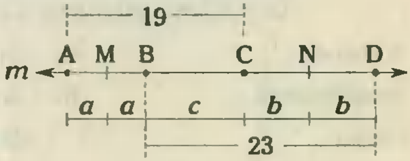
MISCELÁNEA

1.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C, y D; tal que AC = 19 y BD = 23. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

AC = 19
BD = 23

Resolución.-

Primero ubicamos los puntos dados sobre la línea recta, luego los datos en el mismo gráfico y lo que nos piden para tener mayor visualidad.



Así, en el gráfico, se pide hallar : MN = $a + b + c$ ... (α)

Datos : $2a + c = 19$ ... (1)

También : $2b + c = 23$ ... (2)

Sumando (1) y (2) : $2a + 2b + 2c = 42 \Rightarrow a + b + c = 21$

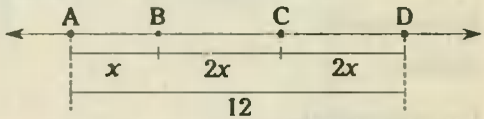
Luego reemplazando en (α) : **MN = 21 *u***

2.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D; siendo C punto medio de $\overline{BD}$; $\dfrac{\overline{CB}}{CA} = \dfrac{2}{3}$ y AD = 12. Hallar CD.

Resolución.-

Por condición $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{2}{3}$ esto se puede descomponer así : CB = $2x$ y CA = $3x$

Entonces AB = x, todo esto colocamos en el gráfico luego observamos que :



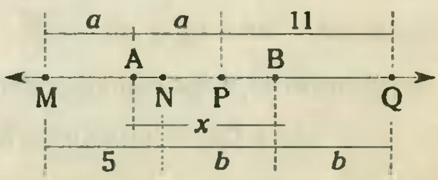
$$x + 2x + 2x = 12$$

Ahora : $5x = 12 \Rightarrow x = 2{,}4$

Como : CD = $2x$ $\therefore$ **CD = 4,8**

3.- Sobre una línea recta se toman los puntos colineales M, N, P y Q; luego los puntos A y B puntos medios de $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$ respectivamente, si : MN = 5 y PQ = 11. Hallar AB.

Resolución.-



Del gráfico : $x = a + 11 - b$ ... (1)

$x = 5 + b - a$ ... (2)

Sumando (1) y (2) : $2x = 5 + 11$

Ahora : $2x = 16$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 8}$

4.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D tal que :

$$AC + 2\,DC + BD = 28 \quad y \quad AB = DC. \text{ Hallar } AD.$$

Resolución.-

Por dato : AC + 2 . DC . + BD = 28, nos piden hallar AD.

Según la condición del problema colocamos en el gráfico letras minúsculas, luego reemplazamos en el dato:

$(a + n) + 2(a) + (n + a) = 28$

Sumando : $4a + 2n = 28$

Simplificando : $2a + n = 14$

Luego : $AD = 2a + n = 14$

$\therefore$ **AD = 14**

5.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B y C, tal que :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \quad y \quad 2\,AB + 3\,BC = AC + 96. \text{ Hallar } AB.$$

Resolución.-

Si $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} = a$ este puede ser : $AB = 2a$ y $BC = 3a$

Colocamos estos valores en el gráfico.

Luego en el dato reemplazamos : $2(2a) + 3(3a) = (2a + 3a) + 96$

Efectuando : $13a = 5a + 96$

Donde : $8a = 96 \Rightarrow a = 12$

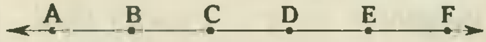
En consecuencia : **AB = 24**

6.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F. Hallar AF, si : DE = AB; AD = $\frac{2}{5}$ AF y AC + BD + CE + DF = 35.

Resolución.-

Dato: $AC + BD + CE + DF = 35$

Condición : $AB = DE$ y $AD = \frac{2AF}{5}$



Se pide hallar AF, el dato agrupamos convenientemente :

$\underbrace{(AC + CE)}_{} = \underbrace{(BD + DF)}_{} = 35$; $AC + CE = AE$ y $BD + CE = AE$ y $BD + DF = BF$

También : $AE = AD + DE$ (Ver gráfico)

Entonces : $(AD + DE) + BF = 35$

Pero : $DE = AB$

Luego : $AD + \underbrace{AB + BF} = 35$

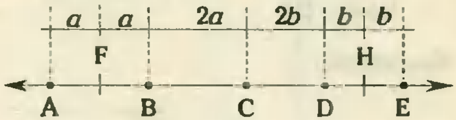
Reemplazando : $\frac{2}{5}AF + AF = 35$

Efectuando : $\frac{7}{5}AF = 35$

$\therefore$ **AF = 25**

7.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E tal que F sea punto medio de $\overline{AB}$ y H punto medio de $\overline{DE}$. Si : AB = BC , CD = DE y AB + DE = 40. Hallar FH.

Resolución.-



Dato : AB + DE = 40, nos piden hallar FH.

Del gráfico en el dato : $2a + 2b = 40$

$\Rightarrow \quad a + b = 20$

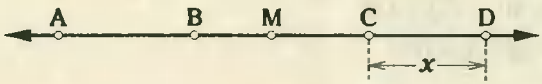
Luego : $FH = a + 2a + 2b + b$

Entonces : $FH = 3\underbrace{(a+b)}_{20}$

$\therefore$ **FH = 60**

8.- A, B, C y D son puntos colineales y consecutivos. Si M es el punto medio de $\overline{AD}$, y se verifica que : AB + CD = 10 m y BM - MC = 2m; calcular CD.

Resolución.-



Por dato del problema : $AM = MD \quad \Rightarrow \quad AB + BM = MC + x$ ... (1)

Por dato, podemos deducir que : $AB = 10 - CD \quad \Rightarrow \quad AB = 10 - x$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) y transponiendo MC al primer miembro : $10 - x + \overbrace{BM - MC} = x$

Sustituyendo lo indicado por el dato, tendremos : $10 + 2 = 2x$

Efectuando, obtenemos : $\boldsymbol{x = 6m}$

9.- Sobre un recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, luego se toman los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Hallar MB + NC en función de AN.

Resolución.-

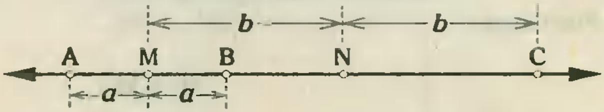
Sea: $k = AB + NC - AM$

Del gráfico: $AB = 2a$; $NC = b$ y $AM = a$

Luego: $k = 2a + b - a = a + b$

Donde: $k = a + b$

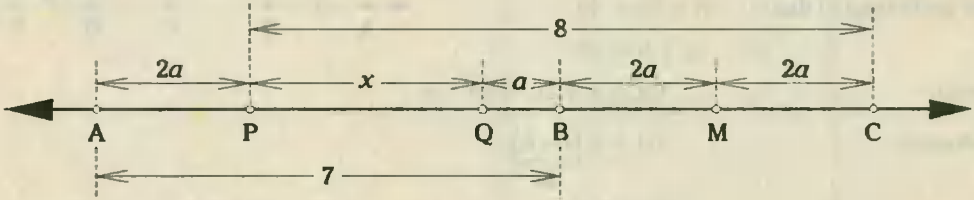
Pero: $AN = a + b$



$\therefore$ $\boldsymbol{k = AN}$

10.- A, B y C son puntos colineales y consecutivos. Sobre $\overline{AB}$ se ubican los puntos P y Q y sobre $\overline{BC}$ se ubica el punto medio M de modo que : AP = BM, $QB = \dfrac{BM}{2}$, AB = 7 y PC = 8. Hallar: QP.

Resolución.-



Hacemos: $QB = a \Rightarrow BM = MC = AP = 2a$

Además: $PQ = x$

Del gráfico: $AC = 2a + 8 = 7 + 4a \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

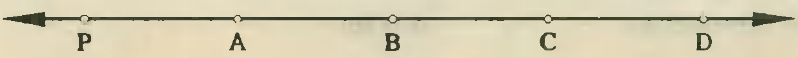
De otro lado: $AB = AP + PQ + QB$

Reemplazando: $7 = 2a + x + a$

Luego: $7 = 3\left(\dfrac{1}{2}\right) + x$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 5{,}5}$

11.- Dado los puntos colineales y consecutivos P, A, B, C y D tal que : 7PD = 5PC + 2PB, y, 5AC + 2AB = 14 ; calcular : AD.

Resolución.-



Inculcaremos nuestra resolución con la expresión : $7PD = 5PC + 2PB$

Y del gráfico : $7(PA + AD) = 5(PA + AC) + 2(PA + AB)$

Efectuando las operaciones indicadas : $7AD = 5AC + 2AB \quad ...(*)$

Pero por condición se sabe que : $5AC + 2AB = 14$

Reemplazando en (*) : $7AD = 14$

$$\therefore \quad \boxed{AD = 2}$$

12.- Sobre una semirecta OX , se toman los puntos A, B y C consecutivamente, de modo que los puntos A y B disten del origen 0 : a y b metros respectivamente. Hallar la longitud de OC, si : 2 (AC + BC) = 3 AB.

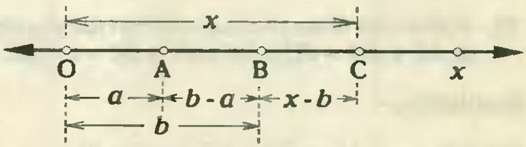
Resolución.-

Hagamos : $OC = x$

En el dato : $2(b - a + x - b + x - b) = 3(b - a)$

Luego : $4x - 2a - 2b = 3b - 3a$

En consecuencia : $4x = 5b - a$



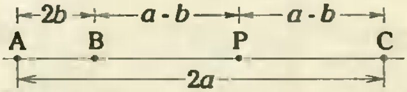
$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{5b - a}{4}}$$

13.- En una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, P y C de modo que P es el punto medio se $\overline{BC}$. Si $(AB)^2 + (AC)^2 = 40$. Hallar $(AP)^2 + (BP)^2$.

Resolución.-

Hacemos : $AB = 2b$ y $AC = 2a$

Luego : $BP = PC = a - b$



Por dato del problema : $AB^2 + AC^2 = 40$

Reemplazando : $4b^2 + 4a^2 = 40 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 10$

Nos piden : $AP^2 + BP^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$

$$AP^2 + BP^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab$$

Finalmente : $AP^2 + BP^2 = 2(\underbrace{a^2 + b^2}_{10})$

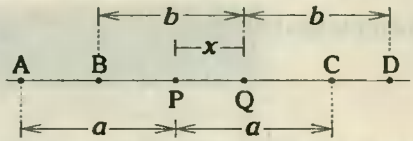
$$\therefore \quad \boxed{AP^2 + BP^2 = 20}$$

14.- En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que AB + CD = 20. Calcular la medida del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Resolución.-

Sean P y Q los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Luego : $AP = PC = a \quad \wedge \quad BQ = QD = b$



Del dato : $AB + CD = 20 \quad \dots (\alpha)$

Pero : $AB = a - BP = a - (b - x)$

$CD = b - QC = b - (a - x)$

Sustituyendo en (α) : $a - b + x + b - a + x = 20$

Donde : $2x = 20$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 10}$

15.- Sobre una línea recta se ubican los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F. Si AC + BD + CE + DF = 91 y BE = 5/8 AF. Hallar AF.

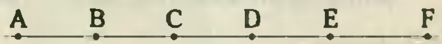
Resolución.-

Del dato : $AC + BD + CE + DF = 91$

Pero : $DF = DE + EF$

Entonces : $AC + BD + CE + DE + EF$

Luego : $\underbrace{(AC + CE + EF)}_{AF} + \underbrace{(BD + DE)}_{BE} = 91$



$AF + BE = 91$

Ya que : $BE = \dfrac{5}{8}AF$

Se tiene : $AF + \dfrac{5}{8}AF = 91$

En consecuencia : $\dfrac{13AF}{88} = 91 \quad \Rightarrow \quad 13\,AF = 91(8)$

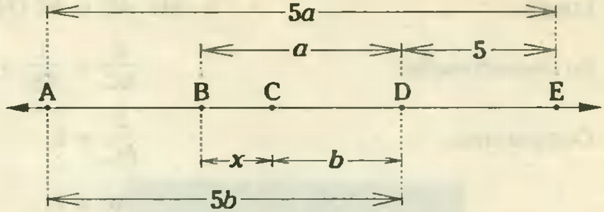
$\therefore \quad \textbf{AF = 56}$

16.- A, B, C, D y E son puntos colineles y consecutivos. Si AE = 5 BD, AD = 5 CD y DE = 5. Hallar : BC.

Resolución.-

Hacemos : $BD = a$ y $CD = b \quad \Rightarrow \quad AE = 5a \quad \wedge \quad AD = 5b$

Del gráfico obtenemos :



$x = a - b$ ... (1)

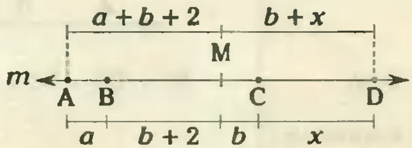
También : $5 = 5a - 5b$ ... (2)

De (2) : $1 = a - b$ ... (3)

De (1) y (3) : $\mathbf{x = 1}$

17.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D. Si M es punto medio de $\overline{AD}$; si AB + CD = 10 y BM - MC = 2. Hallar CD.

Resolución.-



Si : $AB = a$, $MC = b$ y $CD = x$

Por dato : $a + x = 10$

Despejando : $a = 10 - x$ ... (1)

También : $BM = 2 + MC \Rightarrow BM = 2 + b$

Luego : $AM = MD \Rightarrow a + b + 2 = b + x$

Simplificando : $a = x - 2$ ... (2)

De (1) y (2) : $x - 2 = 10 - x \Rightarrow 2x = 12$

$\therefore$ $\mathbf{x = 6u}$

18.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D tal que : AB . CD = AD . BC
Si además : AB + AD = 2 AB . AD
Hallar : AC

Resolución.-

Dado el siguiente esquema :

Nos dicen que : $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ ... (1)

Asimismo se sabe que : $AB + AD = 2 \cdot AB \cdot AD$ ... (2)

De (2) : $$\frac{AB}{AB.AD} + \frac{AD}{AB.AD} = 2 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = 2$$

Del gráfico : $BC = AC - AB$

$CD = AD - AC$

Reemplazando en (1) : $AB\,(AD - AC) = AD\,(AC - AB)$

Efectuando : $AB \cdot AD - AB \cdot AC = AD \cdot AC - AB \cdot AD$

Luego : $2 \,.\, AB \,.\, AD = AC\,(AB + AD)$

En consecuencia : $$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

Comparando : $$\frac{2}{AC} = 2$$

$$\therefore \quad \mathbf{AC = 1}$$

19.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F ; sabiendo que : AB = EF = $\frac{BE}{3}$. Hallar BE, si además : AC + BC + CE + DF = 24.

Resolución.-

Dato : $AC + BD + CE + DF = 24$

Condición : $AB = EF = \dfrac{BE}{3}$

Del dato : $\underbrace{AC + CE} + \underbrace{BD + DF} = 24$

Se escribe como : $\underbrace{AB + BE} + \underbrace{BE + EF} = 24$

Agrupando : $\underbrace{AB} + 2\,.\,BE + \underbrace{EF} = 24$

Reemplazando : $\dfrac{BE}{3} + 2\,.\,BE + \dfrac{BE}{3} = 24$

Efectuando : $2\,BE + 6\,BE = 3\,.\,\underbrace{24}$

Luego : $8\,.\,BE = 3\,.\,\underbrace{8.3}$

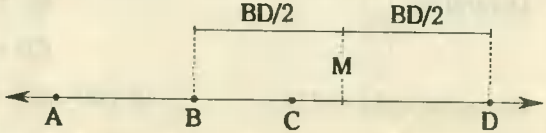
$$\therefore \quad \mathbf{BE = 9}$$

20.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D ; siendo "M" punto medio de BD ; AB . CD = AD . BC y 9 (AD - BM) = 2 . AD . AB. Hallar AC.

Resolución.-

Dato : $9\,(AD - BM) = 2\,.\,AD\,.\,AB$

Condición : $AB\,.\,CD = AD\,.\,BC$



Del dato : $9\left(\overline{AD} - \dfrac{\overline{BD}}{2}\right) = 2\,.\,AD\,.\,AB$

En el paréntesis : $9\,(2\,.\,AD - BD) = 4\,.\,AD\,.\,AB$; $BD = AD - AB$

Reemplazando : $9\,(2\,.\,AD - AD + AB) = 4\,.\,AD\,.\,AB$

Donde : $$\frac{AB}{AD.AB} + \frac{AB}{AD.AB} = \frac{4}{9}$$

Simplificando : $$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{4}{9}$$

Pero si los puntos A, B, C y D son armónicos entonces resulta la proporción armónica $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ de los cual se obtiene la relación siguiente :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}$$

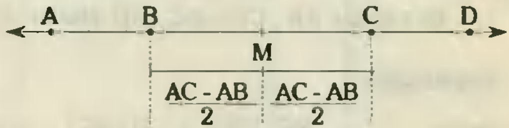
A esto se le llama *Relación de Descartes*, en honor al geómetra Francés René Descartes.

En consecuencia obtenemos por comparación : $$\frac{4}{9} = \frac{2}{AC}$$

$$\therefore \quad \overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{4{,}5}$$

21.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, M y C tal que M es punto medio de BC. Siendo: $AM^2 + BM^2 = 17$. Hallar $AB^2 + AC^2$.

<u>**Resolución.-**</u>



Dato : $AM^2 + BM^2 = 17$

Nos piden hallar : $AB^2 + AC^2 = ?$

Donde : $AM = AB + BM$

Del gráfico reemplazamos en el dato : $\left[AB + \frac{AC - AB}{2}\right]^2 + \left[\frac{AC - AB}{2}\right]^2 = 17$

Resolviendo $\frac{(AB+AC)^2 + (AC-AB)^2}{4} = 17$, sabemos que : $(AC-AB)^2 = (AB-AC)^2$

Luego : $\underbrace{(AB + AC)^2 + (AB - AC)^2} = 68$

Efectuando : $2AB^2 + 2AC^2 = 68$

$$\therefore \quad \mathbf{AB^2 + AC^2 = 34}$$

22.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos P, A, B, C y D; tal que :

$$7\,PC = 2\,PD + 5\,PB \quad y \quad 2\,AD + 5\,AB = 7$$

Hallar AC.

Resolución.-

Datos : $7 \,.\, PC = 2 \,.\, PD + 5 \,.\, PB$ ... (1)

$2 \,.\, AD + 5 \,.\, AB = 7$ ... (2)

Nos piden hallar AC.

Del gráfico : $AD = PD - PA$

También : $AB = PB - PA$

Reemplazando en (2): $2\,(PD - PA) + 5\,(PB - PA) = 7$

Multiplicando : $2 \,.\, PD - 2 \,.\, PA + 5 \,.\, PB - 5 \,.\, PA = 7$

Luego : $2 \,.\, PD + 5 \,.\, PB = 7 + 7 \,.\, PA$ ... (3)

Reemplazando (1) en (3) : $7 \,.\, PC = 7 + 7 \,.\, PA$

Simplificando : $PC = PA + 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{PC - PA} = 1$

Pero : $AC = PC - PA$

$\therefore \quad$ **AC = 1**

23.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D; tal que AB . CD = BC . AD. Hallar AC , Si : $\dfrac{BC \,.\, CD}{CD - BC} = 4$.

Resolución.-

Dato : $BC \,.\, CD = 4\,(CD - BC)$ ... (1)

Condición : $AB \,.\, CD = BC \,.\, AD$

Nos piden hallar AC.

Del gráfico : $AB = AC - BC$

$AD = AC + CD$

Reemplazando en la condición : $CD\,(AC - BC) = BC\,(AC + CD)$

Multiplicando : $CD \,.\, AC - CD \,.\, BC = BC \,.\, AC + BC \,.\, CD$

Donde : $AC\,(CD - BC) = 2 \,.\, BC \,.\, CD$

Luego : $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{BC.CD}{CD - BC}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{AC}{2} = 4$

$\therefore \quad$ **AC = 8**

24.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos : A, B, C, D, E y F, tal que :

AC + BD + CE + DF = 40 y 5 BE = 3 AF . Hallar AF.

Resolución.-

Dato : $AC + BD + CE + DF = 40$

Condición : $5 . BE = 3 . AF$

Se escribe como : $BE = \frac{3}{5} . AF$

Del dato : $\underbrace{(AC + CE)} + \underbrace{(BD + DF)} = 40$; $AC + CE = AE$ y $BD + DF = BF$

También : $AE = AB + BE$ (Ver gráfico)

Entonces : $AB + BE + BF = 40$

Agrupando : $\underbrace{BE} + (\underbrace{AB + BF}) = 40$

Reemplazando : $\frac{3AF}{5} + AF = 40$

Efectuando : $\frac{8AF}{5} = 40$

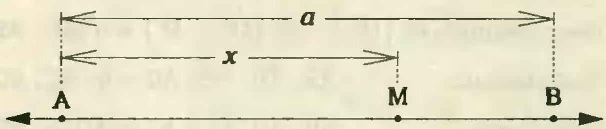
$$\boxed{AF = 25}$$

25.- Dado el segmento $\overline{AB}$ y un punto M, interior a el. Demostrar que si el producto AM. MB, es máximo entonces M es el punto medio de $\overline{AB}$.

Resolución.-

Dato : $AB = a$ y $AM = x$, luego bastará demostrar que :

$$x = \frac{a}{2}$$



Sea : $k = AM . MB$; pero : $AM = x$ y $MB = a - x$

Luego : $k = x\,(a - x) = -\,(x^2 - ax) \Rightarrow k = -\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$

Observamos que como $\frac{a^2}{4}$ es constante el valor de k depende de $x - \frac{a}{2}$ y para que éste sea máximo entonces :

$$x - \frac{a}{2} = 0$$

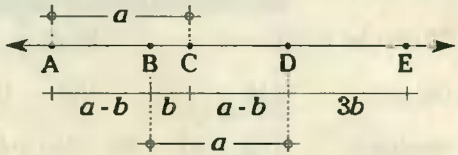
$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{a}{2}} \qquad \textit{l.q.q.d}$$

26.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E; tal que : AC = BD; BC = $\frac{1}{3}$ DE y $\frac{3}{2}$ AB + DE = 36. Hallar AE.

Resolución.-

Luego de hacer el gráfico, según las condiciones del problema, reemplazamos sus valores según en el dato :

$$\frac{3}{2}(a-b)+3b=36$$



Efectuando : $3a-3b+6b=72$

Donde : $3(a+b)=72$

En consecuencia : $a+b=24$

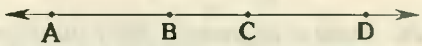
Luego : $AE=a+a-b+3b \Rightarrow AE=2(a+b)$

$\therefore$ $\mathbf{AE=48}$

27.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D tal que AB . CD = n . BC . AD ; además se cumple : $\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}=\frac{7}{AC}$. Hallar n.

Resolución.-

Condición : $AB \cdot CD = n \cdot BC \cdot AD$ ... (1)



Nos piden "n" en : $\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}=\frac{7}{AC}$ ... (2)

Del gráfico : $CD = AD - AC$ y $BC = AC - AB$

Reemplazando en (1) : $AB(AD-AC)=n(AC-AB) \cdot AD$

Multiplicando : $AB \cdot AD - AB \cdot AC = n \cdot AC \cdot AD - n \cdot AB \cdot AD$

Factorizando : $AB \cdot AD(1+n) = AC(n \cdot AD + AB)$

Luego : $$\frac{1+n}{AC}=\frac{n \cdot AD}{AB \cdot AD}+\frac{AB}{AB \cdot AD}$$

Y simplificando de esto resulta : $$\underbrace{\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}}=\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}=\frac{1+n}{AC} \quad ... (3)$$

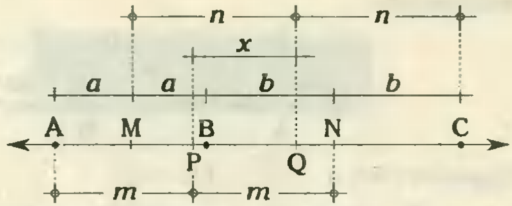
De (2) y (3) : $$\frac{7}{AC}=\frac{1+n}{AC}$$

En consecuencia : $1+n=7$

$\therefore$ $\mathbf{n=6}$

28.- Sobre una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B y C cuyos puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son M y N respectivamente. Si AC = 32, hallar el valor del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MC}$.

<u>**Resolución**</u>.-



Del gráfico : $x + n - b = m$

$\Rightarrow \quad x = m + b - n$ ... (1)

También : $n = x + m - a$

$\Rightarrow \quad x = n + a - m$ ... (2)

Sumando (1) y (2) : $2x = a + b$ ... (3)

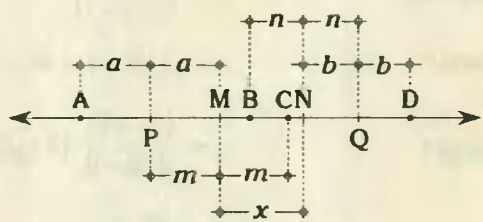
Pero por dato : AC = 32 = $2a + 2b \quad \Rightarrow \quad a + b = 16$ ... (4)

Reemplazando (4) en (3) : $2x = 16$

$\therefore \quad \mathbf{x = 8}$

29.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D. Se sabe que AB = 30 y CD = 10, además se toman los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que son P y Q respectivamente. Hallar la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$.

<u>**Resolución**</u>.-



Del gráfico : $x = m +$ CN ... (1)

$x = n +$ MB ... (2)

Pero : CN = $b - n$ + MB = $a - m$

Reemplazando y sumando (1) y (2):

$2x = m + n + b - n + a - m$

Donde : $2x = a + b$

También sabemos que : $2a = 30 \quad \Rightarrow \quad a = 15$

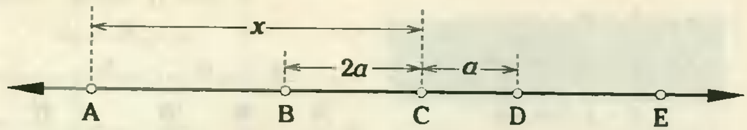
$2b = 10 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Luego : $2x = 15 + 5$

En consecuencia : $2x = 20 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 10}$

30.- Dados los puntos A, B, C, D y E son puntos colineales y consecutivos de modo que AB > BC y BD > DE. Se sabe que AB y BD son secciones áureas de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ respectivamente. Si BC = 2 CD y AE = $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$; calcular AC.

Resolución.-



Hagamos CD = a $\Rightarrow$ BC = $2a$

Ya que $\overline{AB}$ es la sección áurea de $\overline{AC}$,entonces $\overline{BC}$ será también la sección áurea de $\overline{BE}$, de ello se tendrá que : $\quad \mathrm{BD} = \mathrm{DE}\,\dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

Es decir : $\quad \mathrm{AB} = a\,(\sqrt{5}+1)$

Análogamente como $\overline{BD}$ es la sección áurea de $\overline{BE}$, tendremos : $\quad \mathrm{BD} = \mathrm{DE}\,\dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

$\Rightarrow \quad 3a = \mathrm{DE}\,\dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$, de donde : $\quad \mathrm{DE} = \dfrac{3a}{2}(\sqrt{5}-1)$

Del gráfico : $\quad$ AE = AB + BD + DE

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = a\,(\sqrt{5}+1) + 3a + \frac{3a}{2}\,(\sqrt{5}-1)$$

De donde : $\quad a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{5(\sqrt{5}+1)}$

Como : $\quad x = a(\sqrt{5}+1) + 2a = a\,(3+\sqrt{5})$

Luego : $\quad x = \dfrac{(3-\sqrt{5})}{5(\sqrt{5}+1)}\,(3+\sqrt{5})$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{\sqrt{5}-1}{5}}$$

31.- A, B, C y D son puntos colineales y consecutivos tal que : AB.CD = AD .BC ; AB . BC = x; AD. CD = y . Calcular BD.

Resolución.-

De la 1ra expresión : $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}$

Se tiene : $\quad \dfrac{\mathrm{AB}}{a-\mathrm{CD}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{a-\mathrm{BC}}$

Efectuando : $AB \,.\, a - AB \,.\, BC = AD \,.\, a - AD \,.\, CD$

Reemplazando : $AB \,.\, a - x = AD.a - y$

De donde : $y - x = (AD - AB)\, a$

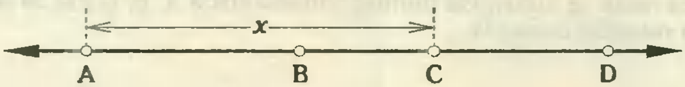
Pero : $AD - AB = a$

Luego : $y - x = a^2$

$$\therefore \quad a = \sqrt{y-x}$$

32.- En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D de tal manera que: $AB = 2CD$; $BC^2 = AB \,.\, CD$ y $\dfrac{1}{CD} - \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{5}$. Calcular AC.

<u>Resolución</u>.-



Por dato : $AB = 2CD \quad \Rightarrow \quad CD = \dfrac{AB}{2}$

Además : $BC^2 = AB \,.\, CD \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AB}{BC} \quad ...\ (*)$

Como : $\dfrac{1}{CD} - \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BD-CD}{CD.BD} = \dfrac{1}{5}$

De donde: $\dfrac{BC}{CD.BD} = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BC}{CD} \cdot \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{5}$

Y de (*) : $\dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad 5AB = BC.BD$

Como : $BD = BC + CD \quad \Rightarrow \quad 5AB = BC\,(BC + CD)$

Luego : $5AB = BC^2 + BC \cdot \dfrac{AB}{2}$, ya que : $CD = \dfrac{AB}{2}$

Reemplazando : $5AB = AB \cdot \dfrac{AB}{2} + BC \cdot \dfrac{AB}{2}$

Factorizando : $5AB = \dfrac{AB}{2}(AB + BC)$

Simplificando : $5 = \dfrac{AB+BC}{2} = \dfrac{AC}{2}$

$$\therefore \quad AC = 10$$

33.- Los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica. Si : $\dfrac{a}{AB} + \dfrac{b}{AD} = \dfrac{c}{AC}$; hallar: $a + b + c$.

Resolución.-

Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica entonces : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$

Pero : $BC = AC - AB$ y $CD = AD - AC$

Reemplazando : $\dfrac{AB}{AC-AB} = \dfrac{AD}{AD-AC} \Rightarrow AB\,.\,AD - AB\,.\,AC = AD\,.\,AC - AD\,.\,AB$

Agrupando y factorizando : $2\,AB\,AD = AC\,(AD + AB)$

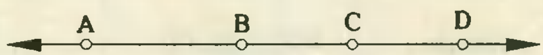
De donde : $\dfrac{2}{AC} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}$; pero : $\dfrac{c}{AC} = \dfrac{a}{AB} + \dfrac{b}{AD}$

Comprobando : $c = 2$; $a = 1$ y $b = 1$ $\quad\therefore\quad$ $\boldsymbol{a + b + c = 4}$

34.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D. Si AC . CD = AB . BD, indicar la relación correcta.

Resolución.-

Por condición del problema : $AC\,.\,CD = AB\,.\,BD$



Pero : $AC = AB + BC$

También : $BD = BC + CD$

Luego : $(AB + BC)\,CD = AB\,(BC + CD)$

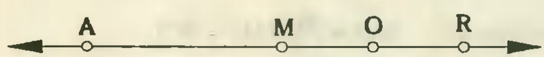
$$AB\,.\,CD + BC\,.\,CD = AB\,.\,BC + AB\,.\,CD$$

$$BC\,.\,CD = AB\,.\,BC$$

Simplificando : $\mathbf{CD = AB}$

35.- En una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, M, O y R; tal que : AM . AR = 3 MO . OR , y : $\dfrac{a}{OR} = \dfrac{b}{AM} = \dfrac{c}{AO}$. Calcular : $\dfrac{a}{b+c}$.

Resolución.-



Del dato : $AM\,.\,AR = 3\,MO\,.\,OR$

Reemplazamos : $AR = AO + OR$ y $MO = AO - AM$

Luego : $AM\,(AO + OR) = 3\,(AO - AM)\,OR$

$$AM\,.\,AO + AM\,.\,OR = 3\,AO\,.\,OR - 3AM\,.\,OR \quad\Rightarrow\quad 4\,AM\,.\,OR - AM\,.\,AO$$

$$AM\,.\,AO = 3\,AO\,.\,OR - 4\,AM\,.\,OR$$

Dividiendo por : AM . AO . OR

$$\frac{AM.AO}{AM.AO.OR} = \frac{3AO.OR}{AM.AO.OR} - \frac{4AM.OR}{AM.AO.OR}$$

Simplificando : $\frac{1}{OR} = \frac{3}{AM} = \frac{4}{AO}$ ... (1)

Por dato : $\frac{a}{OR} = \frac{b}{AM} - \frac{c}{AO}$ ... (2)

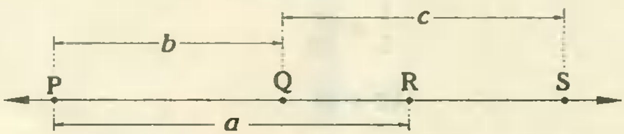
Comprobando (1) y (2) : $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b+c} = \frac{1}{7}$$

36.- P, Q, R y S son puntos colineales ubicados en forma consecutiva. Si PR es media proporcional entre PS y QS. Hallar M si :

$$M = \frac{7(RS)(PR)+(PQ)(PR)-(QS)(RS)}{(RS)(PR)}$$

<u>Resolución</u>.-



Pero PR es media proporcional entre PS y QS $\Rightarrow$ $(PR)^2 = PS . QS$ o lo que es lo mismo :

$$b^2 = a.c$$

Nos piden : $M = \frac{7(RS)\,(PR)+(PQ)\,(PR)-(QS)\,(RS)}{(RS)\,(PR)} = 7 + \frac{PQ.PR-QS.RS}{RS.PR}$

Reemplazando : $M = 7 + \frac{(a-c)\,(b)-(c)\,(a-b)}{(a-b)b} = 7 + \frac{ab-bc-ac+bc}{(a-b)b}$

Luego : $M = 7 + \frac{ab-ac}{(a-b)b} = 7 + \frac{ab-b^2}{(a-b)b}$; ya que : $b^2 = ac$

Entonces : $M = 7 + \frac{b\,(a-b)}{(a-b)\,b} = 7 + 1$

$$\therefore \quad \mathbf{M = 8}$$

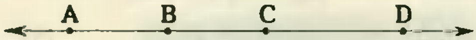
37.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que: AB . CD = BC . AD y 5 (2 . AB + BD) = AB . AD. Hallar AC.

<u>Resolución</u>.-

Condición : $AB \,.\, CD = BC \,.\, AD$ ... (Cuaterna armónica)

Dato : $5\,(2 \,.\, AB + BD) = AB \,.\, AD$

Nos piden hallar : AC



Del gráfico : $BD = AD - AB$

Reemplazamos en el dato : $5\,(2 \,.\, AB + AD - AB) = AB \,.\, AD$

$$5\,(AB + AD) = AB \,.\, AD \quad \text{... (1)}$$

Del gráfico también : $BC = AC - AB$ y $CD = AD - AC$

Reemplazamos estas dos últimas en la condición : $AB\,(AD - AC) = AD\,(AC - AB)$

Multiplicando : $AB \,.\, AD - AB \,.\, AC = AD \,.\, AC - AD \,.\, AB$

Donde : $2 \,.\, AB \,.\, AD = AC\,(AB + AD)$

Luego :
$$\frac{2}{AC} = \frac{(AB+AD)}{AB \cdot AD} \quad \text{... (2)}$$

De (1) y (2) :
$$\frac{1}{5} = \frac{2}{AC}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AC = 10}$$

38.- En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D que forman una cuaterna armónica. Si se cumple que :

$$\frac{2k+1}{AD.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} - \frac{2}{k+2}$$

Hallar AC, sabiendo que la medida AC y k son números primos.

<u>Resolución</u>.-

Por condición del problema : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$ (Cuaterna armónica) ... (*)

Del gráfico se observa que : $AB = AC - BC$ y $CD = AD - AC$

Entonces al reemplazar en (*) : $\dfrac{AC - BC}{BC} = \dfrac{AD}{AD - AC}$

$$\Rightarrow \quad AD \,.\, AC - AC^2 - AD \,.\, BC + BC \,.\, AC = AD \,.\, BC$$

Ubicamos los sumandos convenientemente y factorizamos AC :

$$(AC)^2 = AC\,(AD + BC) - 2AD\,.\,BC$$

Dividiendo ambos miembros por : $AC\,.\,BC\,.\,AD$

Se tendrá : $$\frac{AC}{AD.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} - \frac{2}{AC}$$

Comparando esta expresión con el dato : $$\frac{2k+1}{AD.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} - \frac{2}{k+2}$$

Se tiene : $AC = 2k + 1 = k + 2 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

$\therefore$ $\mathbf{AC = 3}$

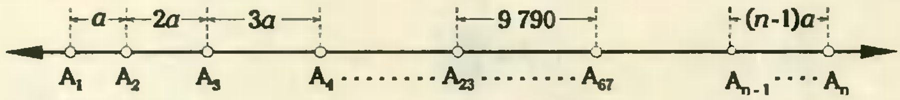
39.- En una recta se consideran los puntos A_1 , A_2 , A_3 , ... A_n en forma consecutiva de modo que se determinan (3n - 201) segmentos consecutivos los cuales tienen sus medidas relacionadas por :

$$A_1A_2 = \frac{1}{3}(A_2A_3) = \frac{1}{3}(A_3A_4) = ... = \frac{1}{n-1}(A_{n-1}A_n)$$

Si : $A_{23}A_{67}$ = 9 790 m ; calcular A_1A_n

<u>Resolución</u>.-

Hagamos : $A_1A_2 = a \;\Rightarrow\; A_2A_3 = 2a \;;\; A_3A_4 = 3a \;;\; \ldots\ldots A_{n-1}A_n = (n-1)\,a$



Nos piden : $A_1A_n = a + 2a + 3a + ... + (n-1)\,a \quad \Rightarrow \quad A_1A_n = \frac{a}{2}\,n\,(n-1) \quad ...\,(1)$

Por dato : $A_{23}A_{67} = 9\,790$

$A_1A_{67} - A_1A_{23} = 9\,790$

Para hallar : A_1A_{67} y A_1A_{23} empleamos la fórmula ... (1)

Luego : $\frac{a}{2}(67)(66) - \frac{a}{2}(23)(22) = 9\,790 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad ...\,(2)$

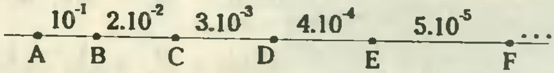
Por dato : $3n - 201 = n - 1 \quad \Rightarrow \quad n = 100 \quad ...\,(3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $A_1A_n = \frac{5}{2}\,.\,100\,(100-1) \quad \Rightarrow \quad A_1A_n = 250\,(99)$

$\therefore$ $\mathbf{A_1A_n = 24750}$

40.- En una línea recta se consideran en forma consecutiva los puntos A, B, C, D, E, F... y así indefinidamente de modo que $AB = 10^{-1}$; $BC = 2.10^{-2}$; $CD = 3.10^{-3}$; $DE = 4.10^{-4}$; $EF = 5.10^{-5}$ y así sucesivamente. Hallar el límite de la suma de medidas de estos segmentos.

<u>Resolución</u>.-



Sea "S" la suma de pedida, luego : $S = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Multiplicamos por 10 a a/m : $10S = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Descomponemos convenientemente :

$$10S = 1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^2}\right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{3}{10^3}\right) + \ldots$$

Agrupando : $$10S = \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots\right)$$

El primer sumando es : $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{10}{9}$ y el segundo sumando es "S".

Luego : $10S = \frac{10}{9} + S \quad \Rightarrow \quad 9S = \frac{10}{9}$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{10}{81}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos M,N, P, Q tal que : PQ=3NP y 3MN+MQ=4. Hallar la longitud del segmento $\overline{MP}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 0,5

2.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B y C y luego se ubican los puntos medios M y F de $\overline{AB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Hallar la longitud de AF. Si $AB + FC - AM = 2\sqrt{5}$

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 10 E) 5

3.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y luego se toman M y F puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Hallar MF, si : AC = 18 y BD = 34

A) 21 B) 23 C) 26 D) 28 E) 32

4.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D tal que : CD = 4 AC y BD - 4 AB = 20. Hallar BC.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, F, C tal que B es el punto medio de $\overline{AC}$. Calcular el valor numérico de la siguiente expresión : (AF - FC)/BF.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, D y luego se toman M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Hallar FN, siendo F el punto medio de $\overline{MD}$ y AB = 12

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C ; de forma que Q es el punto medio de $\overline{AC}$.

Hallar BQ, si : BC - AB = 6

A) 1 B) 2,5 C) 2 D) 3 E) 6

8.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que : BC = CD y AC . BC = 20. Hallar : $AD^2 - AB^2$

A) 50 B) 60 C) 70 D) 75 E) 80

9.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que se cumple: AB . BD = AC . CD y AB = 8. Hallar CD.

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

10.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que : DC = 2.AB ; AB = a y BD = b. Hallar AC.

A) $a - b$ B) $a + b$ C) $b - a$

D) $\sqrt{ab}$ E) $(a+b)/2$

11.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F tal que:

$AC + BD + CE + DF = 91$ y $BE = \frac{5}{8}AF$.

Hallar AF

A) 56 B) 54 C) 52 D) 48 E) 36

12.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que : AB + CD = 12, luego se ubican M y N que son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Hallar MN.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

13.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E; calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, si: CE = 8 ; BD = 12 y AC = 10

A) 5 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

14.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D. Si M es un punto medio de $\overline{AD}$ y AB + CD = 10 y BM - MC = 2. Hallar CD.

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

15.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; tal que : AC + BD = 5 (AB + CD) y AD = 12. Hallar BC.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

16.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y luego se toman los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que : 3.MN = 2.MC. Hallar AC, si : AB - BN = 8.

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

17.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que :

$\dfrac{AB}{AC} + \dfrac{CD}{BD} = 1$; AB = a y CD = b. Hallar BC.

A) $a + b$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $(a + b)/2$

D) $\sqrt{ab}$ E) N.A.

18.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D.

Si : m.AB.BD = n . CD . AC.

Hallar "x", en la siguiente expresión :

$$\frac{n}{BD} - \frac{m}{AC} = \frac{x}{BC}$$

A) $n - m$ B) $m - n$ C) $m + n$

D) $\sqrt{mn}$ E) $2\sqrt{mn}$

19.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; tal que : CD = 2.BC. Hallar AC, siendo:

$$AB + AD - BC = 16$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

20.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E; tal que: BC = 2.AB ; CE = 4.BC y "C" es punto medio de $\overline{AD}$. Hallar AD, siendo: AE = 33.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 26

21.- Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D; se sabe que AB + CD = k; hallar la medida del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) k B) $\dfrac{k}{2}$ C) $\dfrac{k}{3}$ D) $\dfrac{k}{4}$ E) $\dfrac{k}{6}$

22.- Los puntos A, B, C y D son colineales y consecutivos de modo que : AB.CD = k , AD.BC y : $\dfrac{2k-6}{AC} = \dfrac{k}{AB} + \dfrac{1}{AD}$ (k es primo)

Calcular : k.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

23.- Los puntos A, B, C y D son colineales y consecutivos forman una cuaterna armónica si : $\dfrac{a}{AC} = \dfrac{b}{BC} - \dfrac{d}{DC}$

Calcular : $a + b + d$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24.- A, B, C y D son puntos colineales y consecutivos. Si AC es la media proporcional entre AD y BD.

Calcular el valor de C, si : $C = 2\dfrac{AD}{AC}\left(\dfrac{AB}{CD} - 1\right)$

A) 0,5 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

25.- En una recta se consideran los puntos consecutivos P, Q, R y S los cuales forman una cuaterna armónica.

Si : $QR = \dfrac{47}{RS}$ y $PS = \dfrac{96}{PQ}$

Calcular : PR.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

26.- En una recta se ubican en forma consecutiva los puntos A, B, C y D de modo que :

$AB.CD = KBC.AD$ y $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{K}{AB} = \dfrac{K^2-1}{AC}$

Calcular K

A) 1,5 B) 1,55 C) 2
D) 2,5 E) 1,66

27.- Sobre una línea recta se consideran los puntos A, B, C y D en forma consecutiva de modo que formen una cuaterna armónica; sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, se ubican sus puntos medios P, Q y R respectivamente.

Calcular : $\dfrac{AP}{BQ} - \dfrac{AQ}{CR}$

A) 1 B) 2/5 C) 2 D) 3/2 E) 3

28.- Se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $AB = 2CD$; $BC^2 = AB.CD$

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calcular : AB.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

29.- A, C, M y B son puntos colineales y consecutivos. Si $AC = CB$, $AM.AB = 8$ y $\dfrac{1}{2MB} = \dfrac{2}{AM} - \dfrac{1}{AC}$.

Calcular : MB.

A) 4 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 6 E) $2\sqrt{2}$

30.- Sobre una recta XX' se ubican en forma consecutiva los puntos : A_1 , A_2 , A_3 , A_4.... A_n de modo que : $A_1A_n = 1\,800$ y $A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5 + ... A_{n-2}A_n = 3\,000$. Calcular la medida del segmento que tiene por extremos los puntos medios de los segmentos A_1A_{n-1} y A_2A_n

A) 200 B) 300 C) 400
D) 500 E) 600

31.- Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$ y $36\,CD = 5AB$; si $BC = 8$. Hallar AD .

A) 120 B) 85 C) 100 D) 90 E) 110

32.- Los puntos P, Q, R, S y T están sobre una recta en forma consecutiva; PR = 20 y $PQ = \dfrac{QR}{3} = RS = \dfrac{ST}{2}$. Hallar PT

A) 34 B) 32 C) 35 D) 38 E) 40

33.- Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

Si : $BI = \dfrac{5AJ}{7}$, $CH = \dfrac{3BI}{4}$.

Y : $AD+BE+CF+DG+DG+EH+FI+GJ=63$.

Hallar AJ .

A) 20 B) 25 C) 28 D) 30 E) 32

34.- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D ; si $AB . AD = 3\,BC . CD$ y $\dfrac{\alpha}{CD} + \dfrac{B}{AC} = \dfrac{\gamma}{AB}$. Hallar : $\alpha + \beta + \gamma$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

35.- Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D se sabe que : AC = 8 y BD = 4. Calcular BC, si además :

$$2(AC)(CD) + (AB)(BD) = 4(BC)(BC).$$

A) 1,75 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,25

36.- Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D se sabe que :

$$2\frac{AB}{AD}=3\frac{BC}{CD} \text{ y } \frac{2}{BC}-\frac{5}{AC}=1$$

Hallar CD.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

37.- En una línea recta se consideran los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D de modo que :

$$(2x-3)\,AB\,.\,CD=AD\,.\,BC$$

$$\text{y} \quad \frac{3y+2}{AC}=\frac{3x-14}{AB}+\frac{5z-13}{AD}.$$

Hallar x, y, z.

A) 1; 2; 3 B) 4; 3; 2 C) 5; 2; 4

D) 3; 4; 5 E) 4; 6; 8

38.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que forman una cuaterna armónica

$$\text{Si:} \quad \frac{a}{AC}+\frac{b}{CD}=\frac{c}{BD}+\frac{d}{AB}.$$

Hallar : $a+b+c+d$

A) 6 B) 3 C) 2 D) 5 E) 8

39.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C; de manera que AB - BC = 12 . Hallar la longitud del segmento que tiene por extremos el punto B y el punto medio del segmento que se forma al unir los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

A) 3 B) 2 C) 4 D) 7 E) 8

40.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos S, I, O, N siendo O, punto medio de $\overline{IN}$.

$$\text{Simplificar : } K=\frac{(SI)^2+(SN)^2}{(SO)^2+(IO)^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

41.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D y E. Además "M" es punto medio de $\overline{AD}$ y "N" punto medio de $\overline{BE}$. Se sabe además que : MC = NC.
Hallar MC, si : AB + DE = 24.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

42.- Se dan los puntos consecutivos A, B, C y D sobre una recta, de modo que :

$$AC^2=AD\,.\,BD$$

$$\text{Calcular:} \quad \frac{AB}{CD}-\frac{BD}{AC}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0,5

43.- Se dan los puntos consecutivos A, B, C, D, E, ..., de modo que :

$$AB=\frac{1}{2}, BC=\frac{1}{3}, CD=\frac{1}{4}, DE=\frac{1}{9}, EF=\frac{1}{8}.....$$

Calcular la suma límite de x donde :

$$x=AB+BC+CD+DE+.........$$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

44.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos O, A, B, M de modo que :

$$\overline{MA}+\overline{MB}=1,5\,\overline{AB}.$$

Hallar $\overline{OM}$ en función de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

A) $\dfrac{4\,\overline{OB}+2\,\overline{OA}}{4}$ D) $\dfrac{3\,\overline{OB}-\overline{OA}}{4}$

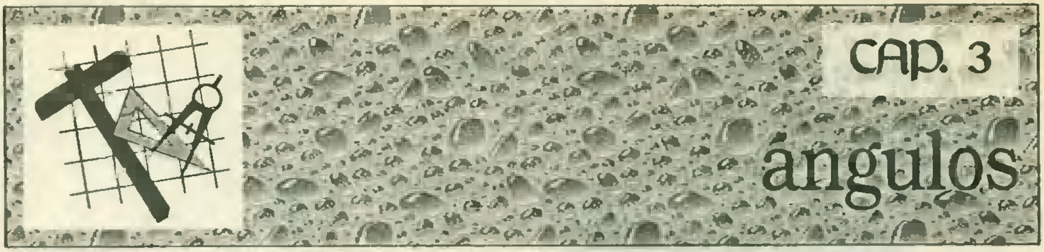
B) $\dfrac{3\,\overline{OB}-2\,\overline{OA}}{4}$ E) $\dfrac{5\,\overline{OB}+\overline{OA}}{4}$

C) $\dfrac{5\,\overline{OB}-\overline{OA}}{4}$

45.- Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, si "D" es punto medio de $\overline{CE}$, AC = CE y BD = DF. Calcular :

$$E=\frac{AB^2+BE^2}{AC^2+EF^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



CAP. 3

ángulos

3.1 DEFINICIÓN

Angulo es la reunión de dos rayos de origen común y no colineales. En la figura adjunta se observa la representación gráfica de un ángulo y sus elementos.

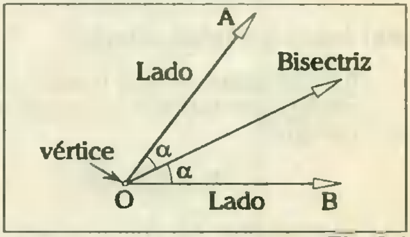


Fig. 3.1

NOTACIONES :

$\measuredangle$ AOB , ó , $\measuredangle$ $A\hat{O}B$ se lee : "ángulo AOB"

$m\measuredangle$ AOB se lee : Medida del ángulo AOB.

CARACTERÍSTICAS :

- Simbólicamente se representa por : $\measuredangle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$
- Su medida es un número real y positivo comprendido entre 0 y 180° es decir :

$$0 < m\measuredangle AOB < 180$$

3.2 EQUIVALENCIAS

1° < > 60' ... (3.1) , **1' < > 60"** ... (3.2) $\wedge$ **1° < > 3600"** ... (3.3)

3.3 CLASIFICACIÓN

A) SEGÚN SU MEDIDA.

A1) Ángulo Agudo.- (*Fig*. 3.2a)
Es aquel ángulo cuya medida es menor que 90; es decir : $0 < \alpha < 90$ ... (3.4)

A2) Ángulo Recto.- (*Fig*. 3.2a)
Es aquel ángulo cuya medida es igual a 90; es decir : $\alpha = 90$ ... (3.5)

A3) Ángulo Obtuso.- (*Fig*. 3.2a)
Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 90; es decir : $90 < \alpha < 180$ ... (3.6)

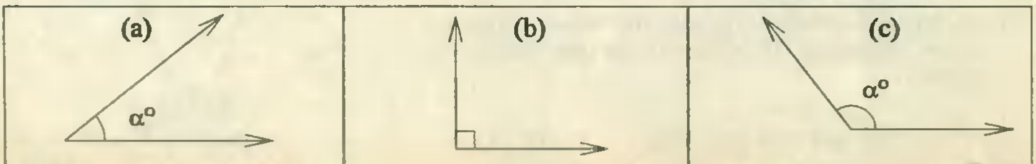


Fig. 3.2

B) DE ACUERDO A SU POSICIÓN Y CARACTERÍSTICAS.

B1) Angulos Complementarios.-

Son dos ángulos cuyas medidas suman 90°. Si los ángulos mostrados son complementarios, entonces:

$$\alpha + \theta = 90 \qquad \text{... (3.7)}$$

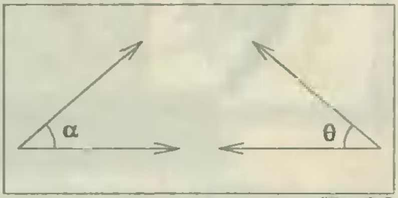


Fig. 3.3

Observación: A la medida del complemento de un ángulo lo denotaremos por : $C\alpha$; verificándose que:

$$C\alpha = 90 - \alpha \qquad \text{... (3.8)} \qquad (0 < \alpha < 90)$$

B2) Angulos Suplementarios.-

Son dos ángulos cuyas medidas suman 180°. Ya que los ángulos mostrados son suplementarios se cumple que:

$$\alpha + \theta = 180 \qquad \text{... (3.9)}$$

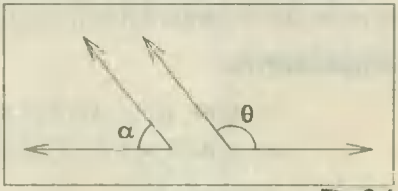


Fig. 3.4

Observación: A la medida del suplementario de un ángulo lo denotaremos por : $S\alpha$; cumpliéndose que:

$$S\alpha = 180 - \alpha \qquad \text{... (3.10)} \qquad (0 < \alpha < 180)$$

B3) Angulos Adyacentes.-

Son dos ángulos de vértices común y lado común, además estan situados a uno y otro semiplano determinados por el lado común. En la figura adjunta los ángulos AOB y BOC son ángulos adyacentes, además considerando las medidas asumidas se verifican las siguientes relaciones :

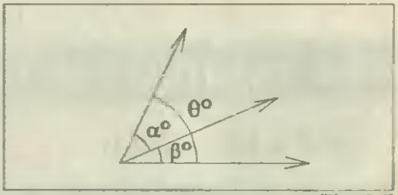


Fig. 3.5

C_1 = Adición : $\theta = \alpha + \beta$

C_2 = Sustracción : $\beta = \theta - \alpha$ y $\alpha = \theta - \beta$

B4) Angulos Consecutivos.-

Son tres o más ángulos de vértice común que de dos en dos son adyacentes tal como los ángulos AOB, BOC, COD y DOE mostrados en la figura adjunta.

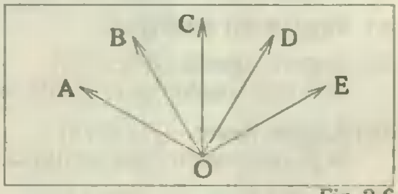


Fig. 3.6

***Observaciones* :**

1) Los ángulos consecutivos que en conjunto completan un semiplano tienen medidas que verfican la relación :

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + \varnothing = 180 \qquad \text{... (3.11)}$$

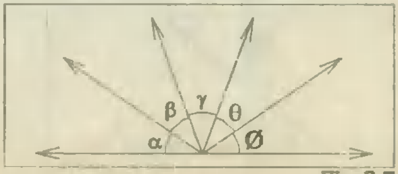


Fig. 3.7

2) Los ángulos consecutivos situados alrededor de un punto (completando el plano) tienen sus medidas que cumplen la relación :

$$\alpha + \theta + \beta + \gamma + \varnothing = 180 \quad \ldots (3.12)$$

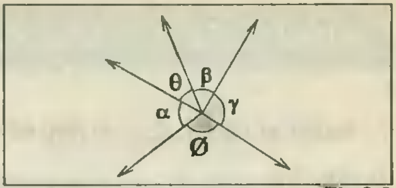


*Fig.*3.8

3.4 COMPLEMENTO Y SUPLEMENTO DE UN ANGULO

DEFINICION :

Complemento de : $\alpha = C\alpha = 90 - \alpha$; $(\alpha < 90°)$

Suplemento de α : $S_\alpha = 180 - \alpha$; $(\alpha < 180°)$

A) Angulos Adyacentes :

Son 2 ángulos tales como : AOB y BOC .

Se cumplen las siguientes relaciones:

ADICIÓN : $\theta = \alpha + \beta$

SUSTRACCION : $\beta = \theta - \alpha$

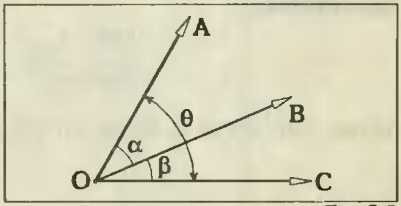


Fig. 3.9

B) **∡s Adyacentes Suplementarios :** Son 2 ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180°, tales como AOB y BOC .

$$\alpha + \theta = 180° \quad \ldots (3.13)$$

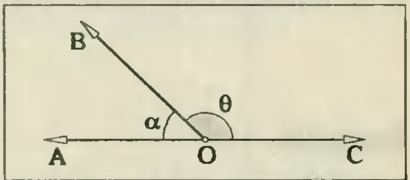


Fig. 3.10

C) **∡s Opuestos por el Vértice :** Son ángulos determinados al intersectarse 2 rectas.

$$\alpha = \theta \quad \ldots (3.14)$$

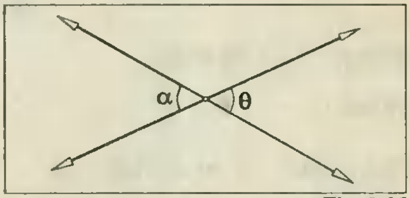


Fig. 3.11

D) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo de 90°

$$m\measuredangle POQ = 90° \quad \ldots (3.15)$$

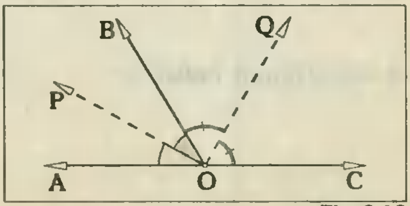


Fig. 3.12

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1ra PARTE)

1.- Hallar el CCC....C_{50} ; si hay 50 veces complemento (C $\rightarrow$ Complemento).

Resolución.-

$$\underbrace{CCC...C_{50}}_{50\ veces}$$

Ya que 50 veces es par, entonces por propiedad : $\mathbf{CCC ... C_{50} = 50^\circ}$

2.- Hallar el SSS....S_{100} ; si hay 1001 veces suplemento (S $\rightarrow$ Suplemento).

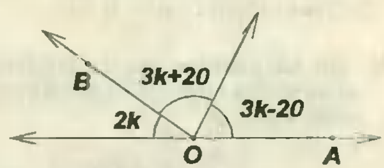
Resolución.-

$$\underbrace{SSS...S_{100}}_{1001\ veces}$$

Ya que 1001 veces es impar, entonces por propiedad : $SSS ... S_{100} = 180^\circ - 100^\circ$

$$\mathbf{SSS ... S_{100} = 80^\circ}$$

3.- En el gráfico calcular la m ∡ AOB.



Resolución.-

En el gráfico, por ángulos adyacentes suplementarios, tenemos :

$$2k + 3k + 20 + 3k - 20 = 180$$

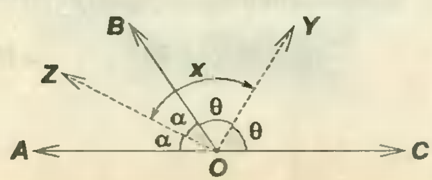
Donde : $8k = 180$

Ahora : $k = \dfrac{45}{2}$

Nos piden : $m \measuredangle AOB = 6k \quad \Rightarrow \quad m \measuredangle AOB = 6\left(\dfrac{45}{2}\right)$

$$\therefore \quad \mathbf{m \measuredangle AOB = 135^\circ}$$

4.- En la figura, hallar "x".



Resolución.-

Por ángulos adyacentes suplementarios, tenemos : $2\alpha + 2\theta = 180$

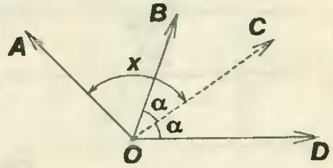
En consecuencia : $\alpha + \theta = 90$ ... (1)

Ahora : $x = \alpha + \theta$ ... (2)

De la expresión (1) y (2) : $\boldsymbol{x = 90^o}$

5.- En el gráfico, hallar la m ∡ AOC, si :

m ∡ AOB + m ∡ AOD = 56º.



x - α + x + α = 56
2α = 56
x = 28

Resolución.-

Del gráfico : $m ∡ \text{AOC} = m ∡ \text{AOB} + m ∡ \text{BOC}$

Entonces : $m ∡ \text{AOB} = m ∡ \text{AOC} - m ∡ \text{BOC}$

Reemplazando : $m ∡ \text{AOB} = x - \alpha$

Por dato : $m ∡ \text{AOB} + m ∡ \text{AOD} = 56$

$$\underbrace{x - \alpha}_{\downarrow} + \underbrace{x + \alpha}_{\downarrow} = 56$$

Reemplazando : $x - \alpha + x + \alpha = 56$

Luego : $2x = 56$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 28^o}$

3.6 ANGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL

A) Angulos Alternos : Son de igual medida.

A1. Alternos internos

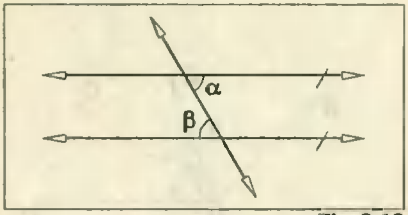


***Fig.* 3.13**

$\alpha = \beta$

A2. Alternos externos

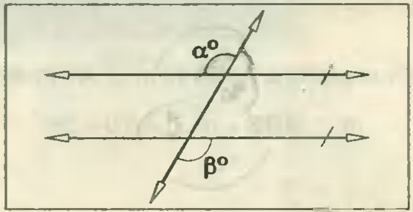


***Fig.* 3.14**

$\alpha = \beta$

B) Angulos Correspondientes : Son de igual medida.

B1. Correspondientes obtusos

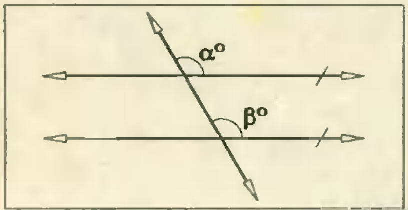


***Fig.*3.15**

$\alpha = \beta$

B2. Correspondientes agudos

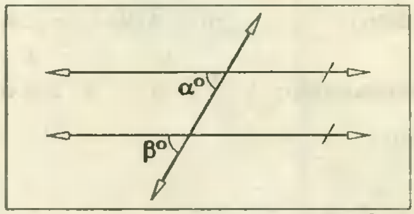


***Fig.* 3.16**

$\alpha = \beta$

C) Angulos Conjugados : Son suplementarios

C1. Conjugados internos

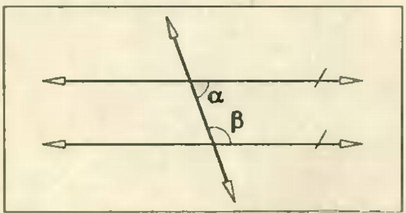


***Fig.* 3.17**

$\alpha + \beta = 180$ **... (3.16)**

C2. Conjugados externos

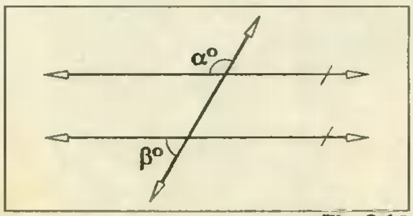


***Fig.* 3.18**

$\alpha + \beta = 180$ **... (3.17)**

3.7 ANGULOS DE LADOS PARALELOS

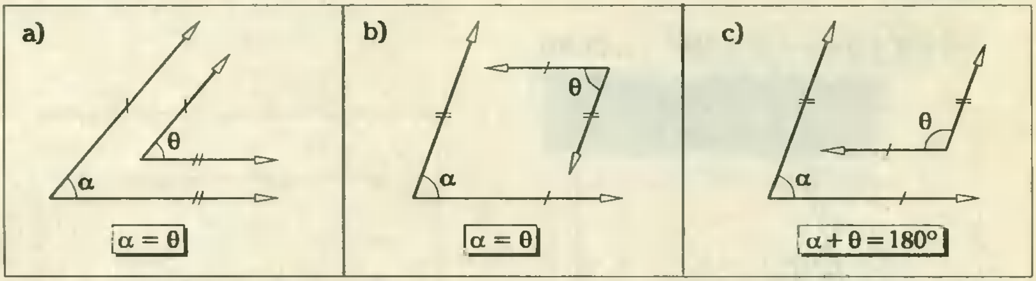


Fig. 3.19

3.8 ANGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

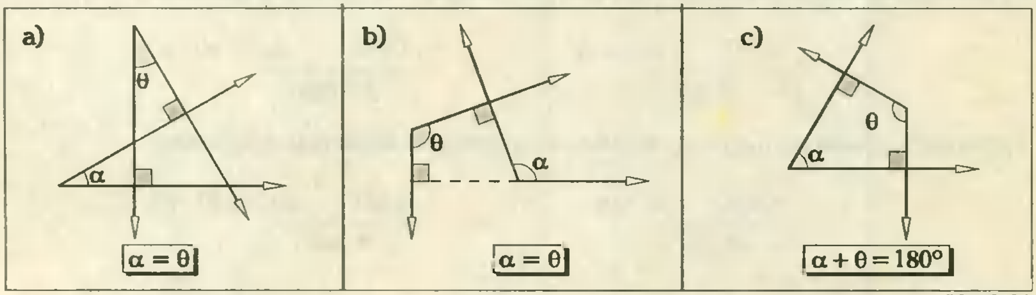


Fig. 3.20

3.9 PROPIEDADES ESPECIALES

A) Si el vértice del $\measuredangle$ AOB se sitúa entre las paralelas a y b, luego su medida estará expresada por :

$$x = \alpha + \beta \qquad \text{... (3.18)}$$

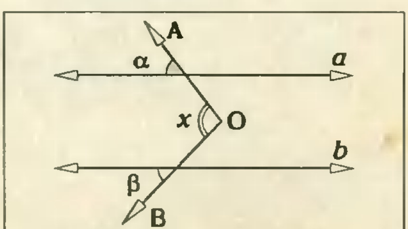


Fig. 3.21

B) **Teorema de Sarrus :** Para toda poligonal cuyos extremos pertenecen a las paralelas a y b se verifica la relación :

$$\alpha + \theta + \rho = \beta + \varepsilon \qquad \text{... (3.19)}$$

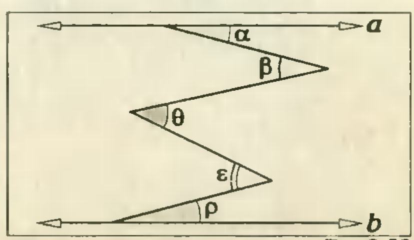


Fig. 3.22

C) Del conjunto de ángulos mostrados en la *Fig.* 3.23 se verifica la relación, si : $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{PQ}$, entonces :

$$\alpha + \beta + \theta + \varepsilon + \omega = 180^\circ \quad \text{... (3.20)}$$

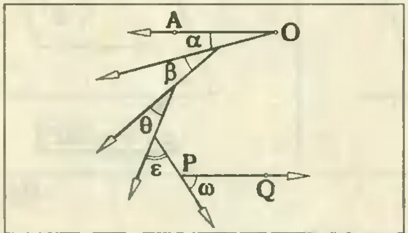


Fig. 3.23

D) Si a y b son dos rectas tales que : $a \parallel b$, entonces se dice que los ángulos que ellos determinan miden 0 y 180. (*Fig.* 3.24)

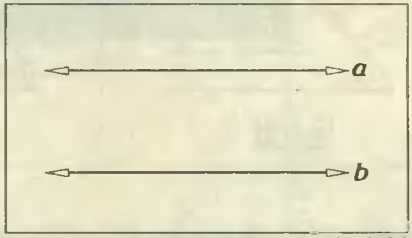


Fig. 3.24

E) Siendo C el complemento de un ángulo, se cumplen las siguientes relaciones :

$$- \underbrace{CCC\ ...\ C}_{\#\ \text{par}}\alpha = \alpha \quad \wedge \quad - \underbrace{CCC\ ...\ C}_{\#\ \text{impar}}\alpha = 90 - \alpha$$

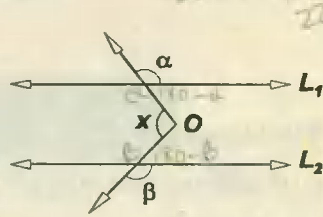
F) Siendo S el suplemento de un ángulo; se cumplen las siguientes relaciones :

$$- \underbrace{SSSS\ ...\ S}_{\#\ \text{par}}\theta = \theta \quad \wedge \quad - \underbrace{SSSS\ ...\ S}_{\#\ \text{par}}\theta = 180 - \theta$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

360 = x+α+β
225

6.- Si : $L_1 // L_2$ y $\alpha + \beta = 225$, hallar "x".



Resolución.-

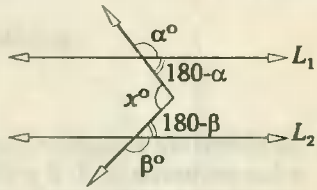
En el gráfico por propiedad : $x = 180 - \alpha + 180 - \beta$

Luego : $x = 360 - (\alpha + \beta)$ ... (1)

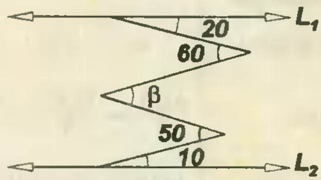
Dato : $\alpha + \beta = 225$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $x = 360 - 225$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 135°}$



7.- En la figura $L_1 // L_2$, hallar "β".



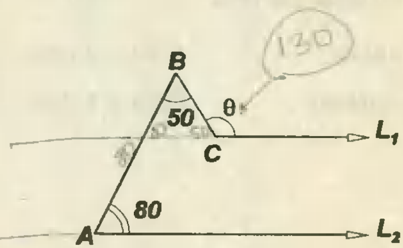
Resolución.-

Por el teorema de Sarrus : $20 + \beta + 10 = 60 + 50$

En consecuencia : $\beta + 30 = 110$

$\therefore$ $\boldsymbol{\beta = 80}$

8.- Si : $L_1 // L_2$, calcular "θ".



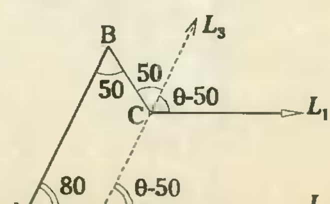
Resolución.-

Por el vértice "C" se traza $L_3 // \overline{AB}$.

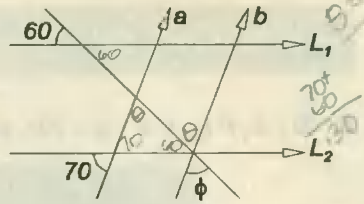
Luego por ángulos correspondientes :

$\theta - 50 = 80$

$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 130°}$

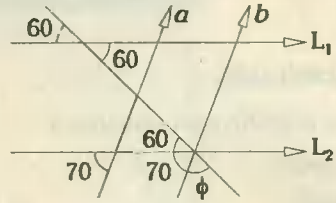


9.- Si : $L_1 // L_2$ y $\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b}$, calcular "ϕ".



Resolución.-

En el gráfico : $60 + 70 + \phi = 180$ ... ($\measuredangle_s$ Suplementarios)



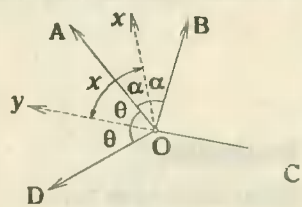
Entonces : $\phi = 180 - 130$

$\therefore$ $\boldsymbol{\phi = 50°}$

10.- Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ y $D\hat{O}A$ que son proporcionales a los números 2, 3, 4 y 8 respectivamente. Hallar el menor ángulo que forman las bisectrices del primer y último ángulo.

Resolución.-

Del gráfico : $x = \alpha + \theta$ ... (1)



Ahora : $\dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{B\hat{O}C}{3} = \dfrac{C\hat{O}D}{5} = \dfrac{D\hat{O}A}{8} = k$

Entonces : $A\hat{O}B = 2k$, $B\hat{O}C = 3k$, $C\hat{O}D = 5k$, $D\hat{O}A = 8k$

Luego : $\underbrace{A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}A}$ $= 18k$

En consecuencia : $360 = 18k \Rightarrow k = 20$

Ahora : $A\hat{O}B = 2\,(20) \Rightarrow A\hat{O}B = 40$; pero $A\hat{O}B = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 20$

También : $D\hat{O}A = 8\,(20) \Rightarrow D\hat{O}A = 160$; pero $D\hat{O}A = 2\theta \Rightarrow \theta = 80$

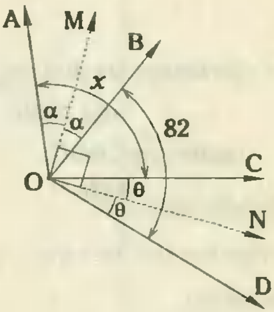
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 100°}$

MISCELÁNEA

1.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ de los ángulos AOB y COD respectivamente. Hallar la medida del ángulo AOC sabiendo que : m ∡ MON = 90º y m ∡ BOD = 82º.

Resolución.-

Del gráfico :



$* \ x = \alpha + 82^\circ - 2\theta + \theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha - \theta = 8^\circ \quad ... (1)$

$* \ x = 2\alpha + 82^\circ - 2\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha - \theta = \frac{x}{2} - 41^\circ \quad ... (2)$

De (1) en (2), tenemos : $8^\circ = \frac{x}{2} - 41^\circ$

Entonces : $\frac{x}{2} = 49^\circ$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 98^\circ}$

2.- El suplemento del complemento de la medida de un ángulo, es igual al doble del complemento de la medida de dicho ángulo. Calcular el complemento de la mitad de la medida de dicho ángulo.

Resolución.-

Sea x la medida del ángulo, según los datos del problema planteamos la ecuación : $SC_x = 2C_x$

Entonces : $180^\circ - (90^\circ - x) = 2(90 - x)$

Resolviendo : $90^\circ + x = 180^\circ - 2x$

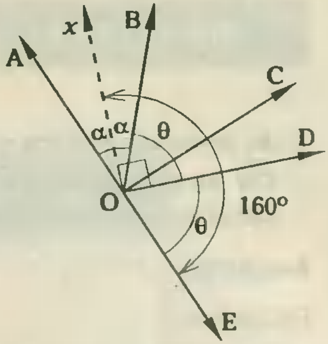
Donde : $3x = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 30^\circ}$

Pero nos piden : $= C\left(\frac{x}{2}\right)$

Luego : $= 90 - \frac{30}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{= 75^\circ}$

3.- Los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$ se encuentran ubicados en un mismo plano, de modo que la bisectriz $\overrightarrow{OX}$ del ángulo AOB es perpendicular a la bisectriz $\overrightarrow{OD}$ del ángulo BOE. Si m ∡XOE = 160º, calcular la medida del ángulo BOD.



Resolución.-

Del gráfico : $\alpha + 2\theta = 160°$ ... (1)

También se sabe que : $\alpha = 90° - \theta$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $90° - \theta + 2\,\theta = 160°$

Luego nos queda : $\theta = 160° - 90°$

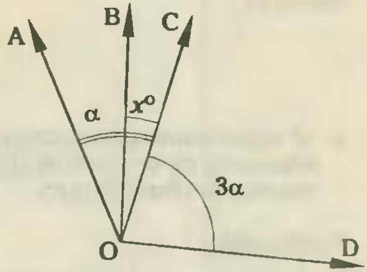
$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 70°}$

4.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que :

$$m\measuredangle BOD - 3.m\measuredangle AOB = 60° \quad \wedge \quad m\measuredangle COD = 3.m\measuredangle AOC.$$

Hallar : m∡BOC.

Resolución.-



Sabemos por dato que : $m\measuredangle COD = 3.m\measuredangle AOC = 3\,\alpha$

También : $m\measuredangle BOD - 3m\,\measuredangle AOB = 60°$

Del gráfico : $(x + 3\alpha) - 3\,(\alpha - x) = 60°$

De donde : $x + 3\alpha - 3\alpha + 3\,x = 60°$

En consecuencia : $4x = 60°$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 15°}$

5.- La tercera parte de la mitad del complemento del suplemento de la medida de un ángulo excede en 8° a los tres quintos del complemento de la mitad de la medida del mismo ángulo. Hallar la medida de dicho ángulo.

Resolución.-

Sea x la medida del ángulo.

Por dato tenemos : $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\,[90 - (180 - x)] - \frac{3}{5}\left[90° - \frac{x}{2}\right] = 8°$

Resolviendo, nos queda : $\frac{(x-90)}{6} - \frac{(540-3x)}{10} = 8°$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 165°}$

6.- Hallar el complemento de la diferencia de las medidas de dos ángulos tales que la medida del primero excede en 60º al complemento de la medida del segundo y la medida del segundo ángulo sea igual a la mitad del suplemento de la medida del primer ángulo.

Resolución.-

Sean α y θ las medidas de los ángulos.

Se pide : $x = 90° - (\alpha - \theta)$

Sabemos que : $\alpha - (90° - \theta) = 60° \Rightarrow \alpha + \theta = 150°$ ... (1)

También : $\theta = \frac{1}{2}(180° - \alpha) \Rightarrow \alpha + 2\theta = 180°$ ... (2)

Restando (2) y (1) : $\theta = 30°$

En (1) : $\alpha = 120°$

Finalmente : $x = 90° - (120° - 30°)$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 0°}$

7.- La suma de las medidas de dos ángulos es 80º y el complemento de la medida del primero es el doble del segundo. Hallar la diferencia de las medidas de dichos ángulos.

Resolución.-

Sean "α" y "θ" las medidas de los ángulos; se pide hallar : $\alpha - \theta$

Por condición del problema sabemos que : $\alpha + \theta = 80°$ ... (1)

También se sabe que : $90° - \alpha = 2\theta$

Entonces : $\alpha + 2\theta = 90°$ ... (2)

Restando (2) y (1) : $\theta = 10°$

En (1) : $\alpha = 70°$

En consecuencia : $\boldsymbol{\alpha - \theta = 60°}$

8.- Si a la medida de un ángulo le disminuimos su cuarta parte más que la mitad que su complemento, resulta un tercio de la diferencia entre el complemento y el suplemento de la medida del mismo ángulo. Hallar dicho ángulo.

Resolución.-

Sea x la medida del ángulo pedido.

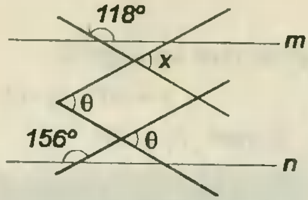
Por condición del problema : $x - \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}(90 - x)\right] = \frac{1}{3}\left[(90 - x) - (180 - x)\right]$

De donde : $\underbrace{x - \frac{x}{4} + \frac{x}{2}} - 45 = -30$

Luego nos queda : $5x = 15 \times 4$

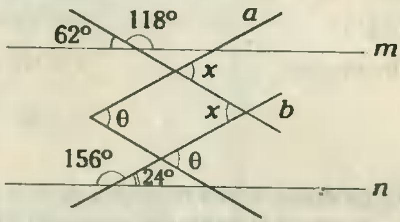
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 12°}$

9.- Si m // n ; calcular : x .



Resolución.-

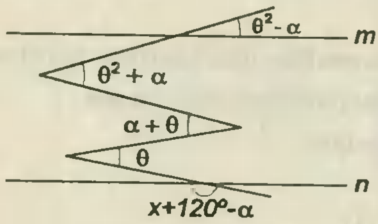
En el gráfico observamos que $a \parallel b$. Luego x se mueve a otro ángulo como vemos en la figura :



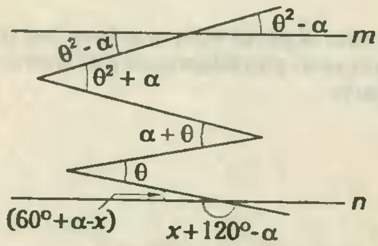
En ese ángulo : $x = 62° + 24°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 86°}$

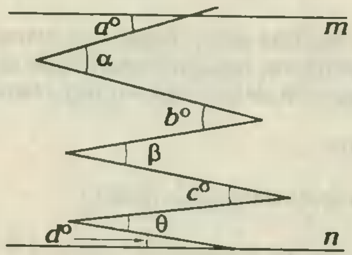
10.- Si m // n ; calcular : x .



Resolución.-



Recordemos la propiedad :



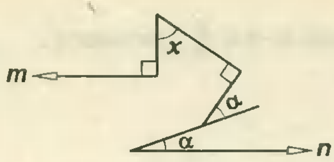
Si $m \parallel n$ se cumple : $\mathbf{a + b + c + d = \alpha + \beta + \theta}$

Según esta propiedad, para nuestro problema tenemos :

$$\theta^2 - \alpha + \alpha + \theta + 60° + \alpha - x = \theta^2 + \alpha + \theta$$

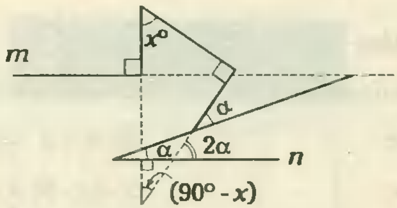
$\therefore$ $\mathbf{x = 60°}$

11.- Si $m // n$; calcular x^o.



Resolución.-

En el gráfico se cumple :



$$x + 180 - 2\alpha = 180$$

Donde : $\boldsymbol{x = 2\alpha}$

12.- Un tercio de la diferencia entre el suplemento y el suplemento de un ángulo es igual al doble de su complemento. Calcular su medida.

Resolución.-

Sea "α" la medida del ángulo entonces la diferencia entre el suplemento y el complemento de α es : $(180 - \alpha) - (90 - \alpha) = 180 - \alpha - 90 + \alpha = 90$

Un tercio de esta diferencia será : $\frac{1}{3}(90) = 30°$

Según el problema, este último reultado es igual a : $2(90 - \alpha)$

Luego : $30 = 2(90 - \alpha)$

En consecuencia : $15 = 90 - \alpha$

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha = 75°}$

13.- La suma de las medidas del suplemento y complemento de un ángulo es igual a "n" veces la medida del complemento de dicho ángulo. Calcular su medida, si ésta es la menor de todas las posibles ($n \in Z^+$).

Resolución.-

Sea "θ" la medida del ángulo, entonces complemento de : $\theta = 90 - \theta$

Suplemento de : $\theta = 180 - \theta$

Según el problema : $(180 - \theta) + (90 - \theta) = n(90 - \theta)$

Entonces : $270 - 2\theta = 90n - n\theta$

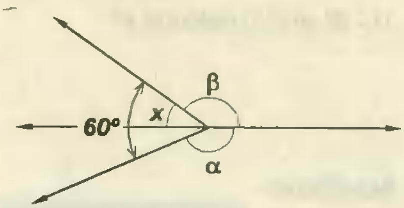
Despejando θ : $\theta = 90\,\dfrac{(n-3)}{n-2}$ ... (*)

De (*) : $n - 2 > 0 \Rightarrow n > 2$

Si : $n = 3 \Rightarrow \theta = 0°$ (no es posible ya que $0° < \theta < 90°$)

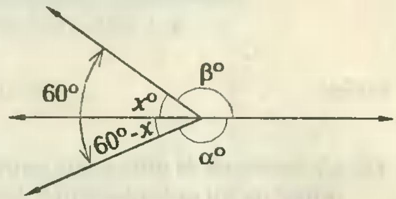
Si : $n = 4 \Rightarrow \boldsymbol{\theta = 45°}$

14.- En la figura $\alpha - \beta = \dfrac{x}{3}$; calcular x .



Resolución.-

Del gráfico sabemos que : $x + \beta = 60 - x + \alpha$



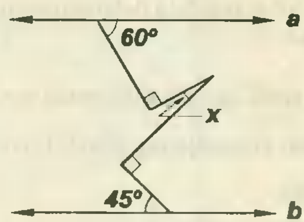
De donde : $2x - \alpha + \beta = 60$

Entonces : $2x - (\alpha - \beta) = 60$

Reemplazando : $2x - \dfrac{x}{3} = 60$

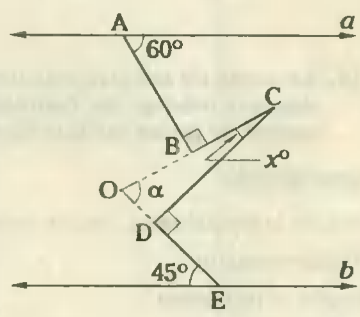
$\therefore \quad \boldsymbol{x = 36}$

15.- En la figura : a // b; calcular : x .



Resolución.-

Prolongamos $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{ED}$ hasta intersectarse en O, luego :



$$\alpha = 90 - x$$

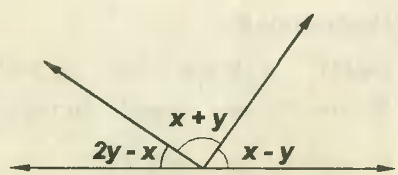
Empleando el teorema de Sarrus para la poligonal ABOE :

$$60 + \alpha = 90 + 45$$

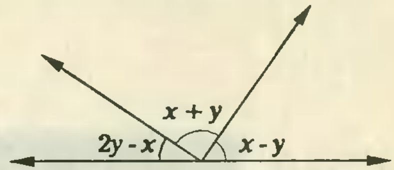
Reemplazando : $60 + 90 - x = 90 + 45$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 15}$

16.- De gráfico mostrado determinar el valor entero de "x" cuando "y" tome su máximo valor entero.



Resolución.-



Del gráfico : $(2y - x) + (x + y) + (x - y) = 180$

$\Rightarrow \quad 2y + x = 180 \quad ... (1)$

Pero : $x - y > 0$ (definición de $\measuredangle$)

$\Rightarrow \quad y < x \quad ... (2)$

Donde reemplazando tenemos : $y < 180 - 2y$

Luego : $3y < 180 \Rightarrow y < 60°$

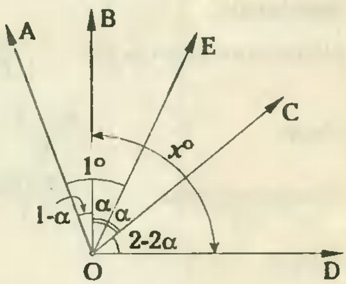
El mayor valor entero de "y" será : 59°

Sustituyendo en (1) : $2(59) + x = 180$

$\therefore \quad \mathbf{x = 62}$

17.- Se consideran los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD de modo que la medida del ángulo COD es el doble de la medida del ángulo AOB.
Calcular la medida del ángulo BOD si el ángulo AOE mide 1º, siendo $\overrightarrow{OE}$ bisectriz del ángulo BOC.

Resolución.-



Del dato : $m \measuredangle COD = 2m \measuredangle AOB$

En el gráfico : $m \measuredangle C\hat{O}D = 2(1 - \alpha)$

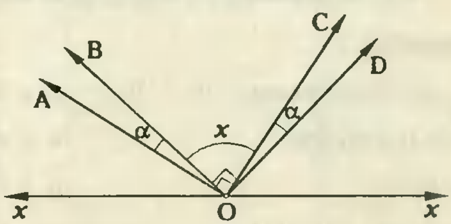
Entonces : $m \measuredangle C\hat{O}D = 2 - 2\alpha$

También : $x = \alpha + \alpha + 2 - 2 - \alpha$

$\therefore \quad \mathbf{x = 2°}$

18.- En una línea recta XX' se ubica el punto O, por dicho punto se trazan los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ en un mismo semiplano de modo que $m \measuredangle AOC = m \measuredangle BOD = 90º$.
Además $m \measuredangle AOB + m \measuredangle COD = 20º$. Calcular la $m \measuredangle BOC$.

Resolución.-



Sea $A\hat{O}B = \alpha \Rightarrow C\hat{O}D = \alpha$, ya que :

$x + \alpha = 90 \quad ... (*)$

Dato : $m \measuredangle A\hat{O}B + m \measuredangle COD = 20°$

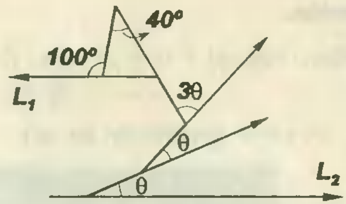
Reemplazando : $\alpha + \alpha = 20°$

Entonces : $\alpha = 10°$

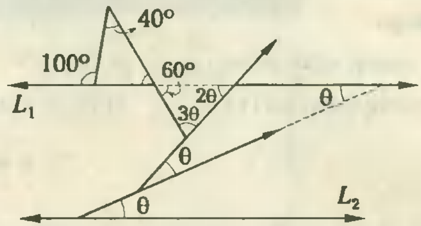
En (*) : $x + 10° = 90°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 80°}$

19.- En el gráfico $L_1 // L_2$. Calcular θ.



Resolución.-



Del gráfico : $60° + 2\theta + 3\theta = 180°$

Entonces : $5\theta + 6\theta = 180°$

Luego sabemos que : $5\theta = 120°$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 24°}$

20.- La medida de un ángulo es θº. Si la diferencia entre los 5/6 del suplemento de θ y el complemento de $\theta/2$ excede en $\theta/15$ el doble del complemento de θ. Hallar el suplemento del complemento de θ.

Resolución.-

Planteamos la ecuación : $\left\{\left[\frac{5}{6}(180° - \theta)\right] - \left[90° - \frac{\theta}{2}\right]\right\} - 2(90 - \theta) = \frac{\theta}{15}$

Luego : $\frac{900 - 5\theta}{6} - 90 + \frac{\theta}{2} - 180 + 2\theta = \frac{\theta}{15}$

Homogenizando : $\frac{900 - 5\theta}{6} + \frac{3\theta}{6} + \frac{12\theta}{6} - 270 = \frac{\theta}{15}$

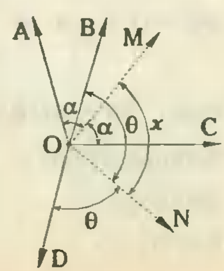
Luego : $\frac{900 + 10\theta}{6} - \frac{\theta}{15} = 270°$

En consecuencia : $4500 + 50\theta - 2\theta = 8100 \Rightarrow \theta = 75$

Nos piden SC_{75} : $= 180 - (90 - 75) =$ **165°**

21.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, y COD. Se trazan las bisectrices; $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ de los ángulos AOC y BOD. Hallar m ∡ MON, si m ∡ AOB + m ∡ COD = 186º.

Resolución.-



Por dato tenemos que : $m \measuredangle AOB + m \measuredangle COD = 186$ ... (1)

Pero en el gráfico : $m \measuredangle AOB = \alpha + x - \theta$ ... (2)

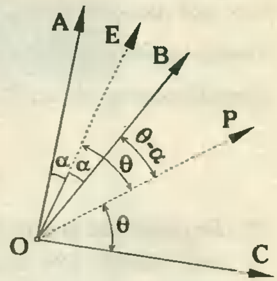
También : $m \measuredangle COD = \theta + x - \alpha$ ... (3)

Luego (2) y (3) en (1) : $\alpha + x - \theta + \theta + x - \alpha = 186°$

De donde : $2x = 186° \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 93°}$

22.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC (m ∡ AOB < m∡ BOC) tal que: m ∡ AOB + 2.m ∡ BOC = 148º. Se traza el rayo $\overrightarrow{OE}$ bisectriz del ángulo AOB y $\overrightarrow{OP}$ bisectriz del ángulo EOC. Hallar la medida del ángulo EOP.

Resolución.-



Tenemos como dato : $m\measuredangle AOB + 2.m\measuredangle BOC = 148^\circ$ ... (*)

Según el gráfico : $m\measuredangle AOB = 2\alpha$ ... (1)

También se sabe que : $m\measuredangle BOC = 2\theta - \alpha$ ... (2)

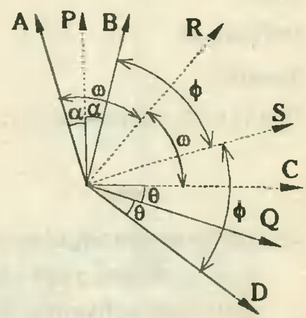
Reemplazando en (*) : $(2\alpha) + 2(2\theta - \alpha) = 148^\circ$

De donde : $2\alpha + 4\theta - 2\alpha = 148^\circ$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 37^\circ}$

23.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ son las bisectrices de los ángulos AOB, COD, AOC y BOD respectivamente. Si m ∡ POQ + m ∡ ROS = 144º, calcular m∡AOD.

Resolución.-



Tenemos por dato : $m\measuredangle POQ + m\measuredangle ROS = 144^\circ$

Del gráfico : $m\measuredangle POQ = \omega - \alpha + \omega + \theta$ ... (1)

También sabemos que : $m\measuredangle ROS = \phi + 2\alpha - \omega$ ... (2)

De igual manera : $m\measuredangle ROS = \omega + 2\theta - \phi$ ... (3)

Sumando (2) y (3) : $2 \,.\, m\measuredangle ROS = 2\alpha + 2\theta$

De donde : $m\measuredangle ROS = \alpha + \theta$ ... (4)

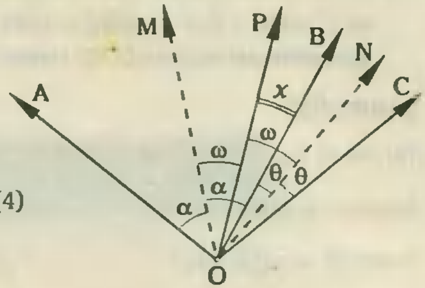
Reemplazando (1) y (4) : $(\omega - \alpha + \omega + \theta) + (\alpha + \theta) = 144^\circ$

Sumando : $2(\theta + \omega) = 144^\circ$

$\therefore \quad \boldsymbol{m\measuredangle AOD = 144^\circ}$

24.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC tal que : m ∡AOB - m ∡BOC = 56º. Los rayos $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ bisecan a los ángulos AOB, BOC y MON respectivamente. Hallar m ∡ POB.

Resolución.-



Del gráfico : $x = \omega - \theta$ ... (1)

También : $x = \alpha - \omega$ ... (2)

Sumando (2) y (1) : $2x = \alpha - \theta$ ... (3)

Pero por dato nos dan : $m\measuredangle AOB - m\measuredangle BOC = 56^\circ$

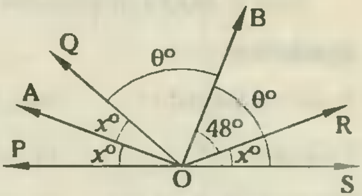
Reemplazando : $2\alpha - 2\theta = 56^\circ \Rightarrow \alpha - \theta = 28^\circ$ ... (4)

Reemplazando (4) en (3) : $2x = 28^\circ$

$\therefore$ $\mathbf{x = 14^\circ}$

25.- Se tienen los ángulos consecutivos POA, AOQ, QOB, BOR y ROS; tal que : m $\measuredangle$ POS = 180º, m $\measuredangle$ BOR = 48º, m $\measuredangle$ ROS = m $\measuredangle$ AOP y el ángulo POQ es menor que el ángulo QOS. Hallar la m $\measuredangle$ AOQ; sabiendo además que los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son las bisectrices POQ y QOS respectivamente.

Resolución.-



Nos dicen que : $m\measuredangle QOS > m\measuredangle POQ = 180^\circ$

Entonces : $m\measuredangle AOQ = m\measuredangle ROS = x$

Dato : $m\measuredangle BOR = 48^\circ$

Del gráfico : $x + \theta = 90^\circ$ ... (1)

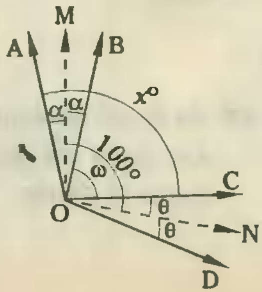
También : $\theta - x = 48^\circ$ ... (2)

De (1) y (2) restando m.a.m. : $2x = 90^\circ - 48^\circ$

$2x = 42^\circ$ $\therefore$ $\mathbf{x = 21^\circ}$

26.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que : m $\measuredangle$ AOC - m $\measuredangle$ BOD = 10º y m $\measuredangle$ MON = 100º; siendo los rayos $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ las bisectrices de los ángulos AOB y COD respectivamente. Hallar la m $\measuredangle$ AOC.

Resolución.-



Por dato tenemos : $m\measuredangle AOC - m\measuredangle BOD = 10^\circ$ ... (1)

Del gráfico : $m\measuredangle AOC = 2\alpha + \omega$ ... (2)

También : $m\measuredangle BOD = \omega + 2\theta$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $2\alpha + \omega - (\omega + 2\theta) = 10^\circ$

De donde : $2\alpha - 2\theta = 10^\circ$

Simplificando : $\alpha - \theta = 5^\circ$ ... (4)

También por dato : $\alpha + \omega + \theta = 100°$ ... (5)

Sumando las dos últimas ecuaciones (4) y (5) : $2\alpha + \omega = 105°$

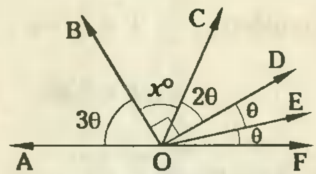
Pero del gráfico : $x = 2\alpha + \omega$

En consecuencia : $\mathbf{x = 105°}$

27.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE y EOF; tal que : m ∡ AOF = 180º, m ∡ BOD = 90º y m ∡ AOB = 3.m ∡ DOE. Hallar la m ∡ BOC, sabiendo además que los rayos $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OD}$ son las bisectrices de los ángulos DOF y COF respectivamente.

Resolución.-

Luego de dibujar la figura según las condiciones del problema, pasamos a establecer las ecuaciones :



$$3\theta + 90° + 2\theta = 180°$$

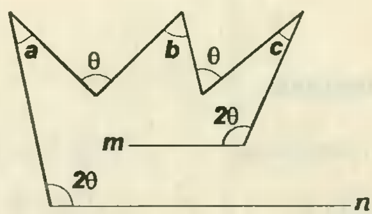
Luego : $5\theta = 90° \Rightarrow \theta = 18°$

$$x + 2\theta = 90°$$

Reemplazando : $x + 2(18°) = 90° \Rightarrow x = 90° - 36°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 54°}$

28.- Si m // n ; calcular aº + bº + cº. Siendo θ = 50º.



Resolución.-

Por ángulos de lados paralelos movemos 2θ al trazar la recta " l " paralela a $\overline{AB}$.

Luego : $2\theta + 2\theta = 180° + \omega \Rightarrow \omega = 4\theta - 180°$ ... (1)

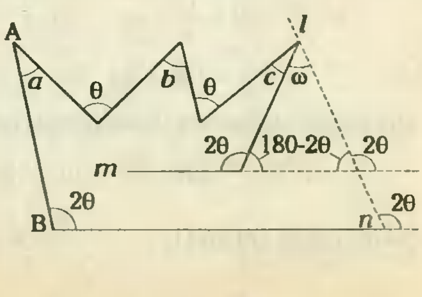
Ahora por propiedad : $a + b + c + \omega = \theta + \theta$

Reemplazando (1) en (2) : $a + b + c + 4\theta - 180° = 2\theta$

Entonces : $a + b + c = 180° - 2\theta$

Pero : $\theta = 50°$

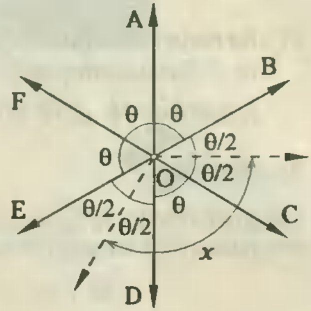
En consecuencia : $\mathbf{a + b + c = 80°}$



29.- Alrededor de un punto "O" se trazan en forma consecutiva los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ de modo que cualquiera de estos rayos es bisectriz del ángulo formado por los rayos anterior y posterior a esta bisectriz. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos EOD y BOC.

Resolución.-

Ya que cualquier rayo es bisectriz de los otros dos rayos más próximos entonces los 6 ángulos determinados al rededor del punto "O" serán congruentes.



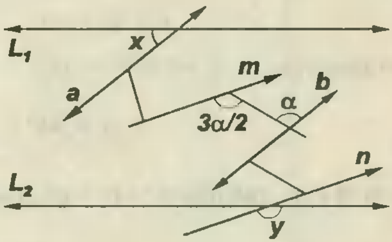
Sea "θ" la medida de estos ángulos.

Luego : $6\theta = 360 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60$

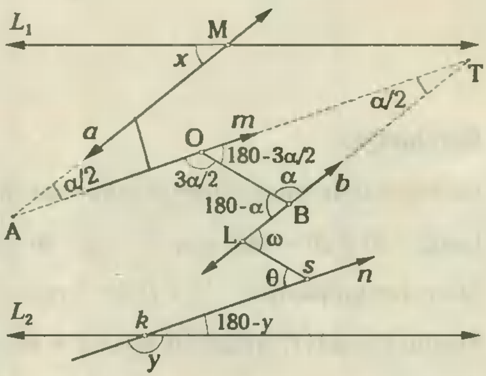
Nos piden : $x = \dfrac{\theta}{2} + \theta + \dfrac{\theta}{2} = 2$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 120^{o}}$

30.- En la figura: $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$; a // b y m // n. Calcular : x + y.



Resolución.-



Por propiedad : $\dfrac{3\alpha}{2} = m \measuredangle A + \alpha$

De donde : $m \measuredangle A = \dfrac{\alpha}{2}$

Por ángulos alternos : $m \measuredangle T = m \measuredangle A = \dfrac{\alpha}{2}$

Por Sarrus para la poligonal MATLSK se tiene :

$$x + \frac{\alpha}{2} + \theta = \frac{\alpha}{2} + \omega + 180 - y$$

$$\Rightarrow \qquad x + y = 180 + (\omega - \theta) \quad \ldots (1)$$

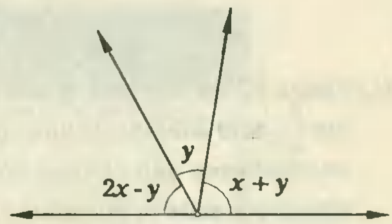
Empleando nuevamente Sarrus para la poligonal OBLS :

$$180 - \frac{3\alpha}{2} + \omega = 180 - \alpha + \theta \quad \Rightarrow \quad \omega - \theta = \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) : $\boldsymbol{x + y = 180 + \dfrac{\alpha}{2}}$

31.- En la figura, hallar el menor valor entero expresado en grados sexagesimales que puede tomar x.

Resolución.-



Del gráfico : $2x - y + y + x + y = 180 \quad \Rightarrow \quad 3x + y = 180$

De donde : $y = 180 - 3x$

Pero sabemos que : $2x - y > 0$

Luego : $2x > y$

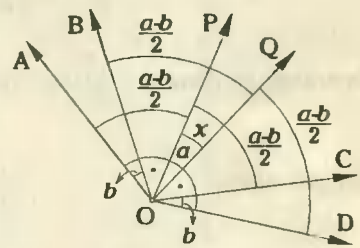
Reemplazando : $2x > 180 - 3x$

Entonces : $5x > 180 \quad \Rightarrow \quad x > 36$

$\therefore \quad \mathbf{x = 37^o}$

32.- Se trazan los ángulos adyacentes AOB, BOC, COD. Si m∢ AOB = m∢ COD = bº y m ∢ AOD = aº. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

Resolución.-



Del gráfico : $Q\hat{O}C + b = \dfrac{a-b}{2} \quad \Rightarrow \quad Q\hat{O}C = \dfrac{a-3b}{2}$

También : $B\hat{O}P + b = \dfrac{a-b}{2} \quad \Rightarrow \quad B\hat{O}P = \dfrac{a-3b}{2} = \bullet$

Luego : $B\hat{O}Q = \bullet + x$

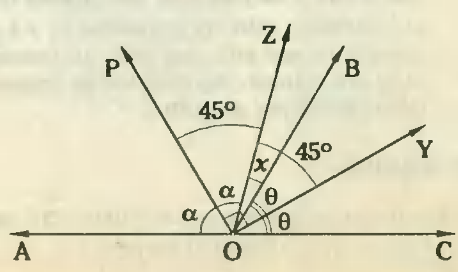
Reemplazando : $\dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a-3b}{2} + x$

Entonces : $x = \dfrac{(a-b)}{2} - \dfrac{(a-3b)}{2}$

En consecuencia : $x = \dfrac{a-b-a+3b}{2} \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = b}$

33.- Se consideran los ángulos adyacentessuplementarios AOB y BOC se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OY}$ de los ángulos AOB y BOC, luego se traza $\overline{OZ}$, bisectriz del ∢ POY, si m∢ AOB - m∢ BOC = 60º. Hallar la medida del∢ BOZ.

Resolución.-



Del gráfico por propiedad : $\alpha + \theta = 90 \quad ... (1)$

Dato : $m\sphericalangle AOB - m\sphericalangle BOC = 60$

Reemplazando : $2\alpha - 2\theta = 60$

De donde : $\alpha - \theta = 30 \quad ... (2)$

Sumando (1) y (2) m.a.m. : $2\alpha = 120$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 60 \; ; \theta = 30$$

Del gráfico : $x + \theta = 45$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 15^o}$$

34.- Sean α y β las medidas de dos ángulos. Si los $\frac{\alpha}{\beta}$ del suplemento del complemento de los $\frac{\beta}{\alpha}$ de la diferencia entre el suplemento del suplemento de α y el complemento del complemento de β es igual a los $\frac{\beta}{\alpha}$ del suplemento del complemento de los $\frac{\alpha}{\beta}$ de la diferencia entre el complemento del complemento de α y el suplemento del suplemento de β, luego :

<u>**Resolución**</u>.-

Expresemos simbólicamente el enunciado del problema :

$$\frac{\alpha}{\beta}\left\{SC\left[\frac{\beta}{\alpha}SS\alpha - CC\beta\right]\right\} = \frac{\beta}{\alpha}\left\{SC\left[\frac{\alpha}{\beta}(CC\alpha - SS\beta)\right]\right\}$$

Operando se tiene : $$\frac{\alpha}{\beta}\left\{180-90+\left[\frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\beta)\right]\right\} = \frac{\beta}{\alpha}\left\{180-90+\left[\frac{\alpha}{\beta}(\alpha-\beta)\right]\right\}$$

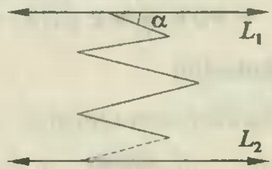
Simplificando : $$\frac{\alpha}{\beta}\left\{90+\beta-\frac{\beta^2}{\alpha}\right\} = \frac{\beta}{\alpha}\left\{90+\frac{\alpha^2}{\beta}-\alpha\right\}$$

Entonces : $$90\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \alpha - \beta = 90\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \alpha - \beta$$

De donde : $$90\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 90\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

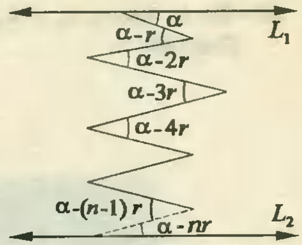
Finalmente : $\alpha = \beta$

35.- En la figura adjunta se muestran una línea poligonal formada por n segmentos los cuales forman ángulos entre si y también con las paralelas L_1 y L_2. Si los ángulos formados tienen sus medidas que determinan una progresión aritmética decreciente de razón "r". Calcular la medida del mayor ángulo α.



<u>**Resolución**</u>.-

Del gráfico deducimos que como hay "n" segmentos que conforman la línea poligonal, entonces habrán $(n + 1)$ ángulo donde :



El penúltimo ∢ : $\alpha - (n-1)r$

Y el último ∢ : $\alpha - nr$

Por Sarrus :

$$\alpha + \alpha - 2r + ... + \alpha - nr = \alpha - r + \alpha - 3r + ... \alpha - (n-1)r$$

$$\alpha + \frac{\alpha n}{2} - 2r\left(1 + 2 + \ldots + \frac{n}{2}\right) = \frac{\alpha n}{2} - r\ (1 + 3 + 5 + ... + n - 1)$$

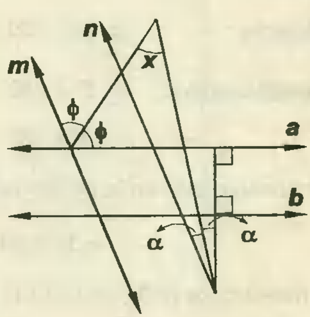
De donde : $$\alpha - \frac{2r\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = -r\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Ahora : $$\alpha = \frac{rn}{4}\ (n+2) = -\frac{rn^2}{4}$$

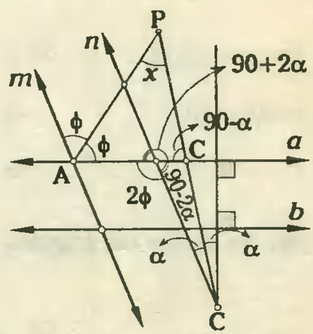
Luego : $$\alpha = \frac{rn}{4}(n+2) - \frac{rn^2}{4} \qquad \therefore \qquad \alpha = \frac{rn}{2}$$

36.- En la figura mostrada: $\overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$; a // b y m // n.

Calcular : x + y.



<u>Resolución</u>.-



Del gráfico : $2\phi = 90 + 2\alpha$

Entonces : $2\phi - 2\alpha = 90$

Luego : $\phi - \alpha = 45$

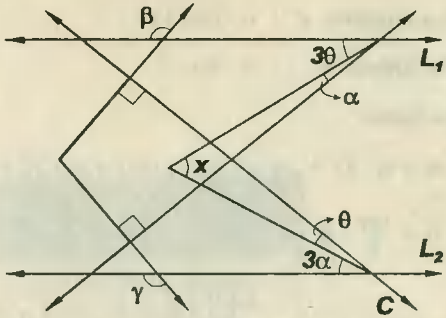
También en la poligonal ABC : $x + \phi + 90 - \alpha = 180$

Ordenando : $x + \underbrace{\phi - \alpha} + 90 = 180$

Reemplazando : $x + 135 \qquad = 180$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 45}$

37.- En la figura $L_1 // L_2$ y $\gamma + \beta = 260º$. Calcular x.



Resolución.-

En el gráfico por Sarrus : $x = 3\alpha + 3\theta$

Luego : $\frac{x}{3} = \alpha + \theta$

También : $\measuredangle\ P = 180 - \gamma + 180 - \beta$

Entonces : $\measuredangle\ P = 360 - (\underbrace{\gamma+\beta})$

Reemplazando : $\measuredangle\ P = 360 - 260$

$\Rightarrow \quad \measuredangle\ P = 100$

Por consiguente en la poligonal PQBR :

$$\measuredangle\ \hat{B} = 80$$

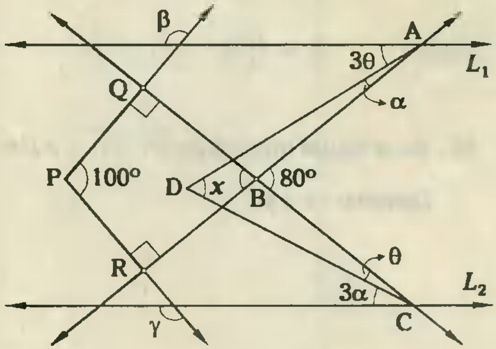
También en la poligonal ABCD, tenemos :

$$80 = x + \underbrace{\alpha+\theta}$$

Reemplazando : $80 = x + \frac{x}{3}$

Finalmente : $4x = 240$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60}$$



38.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que :

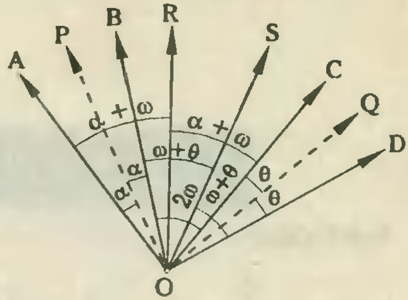
$$m \measuredangle\ POQ + m \measuredangle\ ROS = 140º,$$

siendo los rayos $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ las bisectrices de los ángulos AOB, COD, AOC y BOD respectivamente. Hallar la : $m \measuredangle\ AOD$.

Resolución.-

Por dato tenemos :

$$m \measuredangle POQ + m\measuredangle ROS = 140^o$$



Del gráfico : $m \measuredangle POQ = \alpha + 2\omega + \theta$

También : $m \measuredangle ROS = \omega + \theta - (\alpha + \omega - 2\alpha)$

Reemplazando en el dato :

$$(\alpha + 2\omega + \theta) + [\omega = \theta - (\alpha + \omega - 2\alpha)] = 140^o$$

De donde : $2\alpha + 2\theta + 2\omega = 140^o$

Pero la $m\measuredangle AOD$: $2\alpha + 2\theta + 2\omega = 140^o$

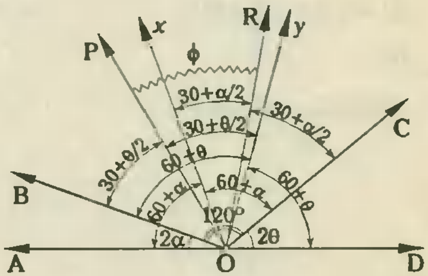
$$\therefore \quad m \measuredangle AOD = 140^o$$

39.- Se tienen los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD de modo que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ son rayos opuestos, además la $m \measuredangle BOC = 120^o$. Se trazan los rayos $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OR}$ bisectrices de los ángulos AOC, BOD, BOY y XOC respectivamente. Calcular la $m \measuredangle POR$.

Resolución.-

Sean $m \measuredangle AOB = 2\alpha$ y $m \measuredangle COD = 2\theta$

Luego : $2\alpha + 120 + 2\theta = 180 \Rightarrow \alpha + \theta = 30^o$



Ya que : $\overrightarrow{OX}$ es bisectriz del $\measuredangle AOC$

$\Rightarrow \quad m \measuredangle AOX = m \measuredangle XOC = 60 + \alpha$

$\overrightarrow{OY}$ es bisectriz del $\measuredangle BOD$

$\Rightarrow \quad m \measuredangle BOY = m \measuredangle YOD = 60 + \theta$

$\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\measuredangle BOY$

$\Rightarrow \quad m \measuredangle BOP = m \measuredangle POY = 30 + \frac{\theta}{2}$

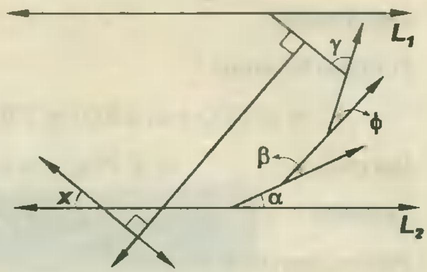
$\overrightarrow{OR}$ es bisectriz del $\measuredangle XOC \Rightarrow m \measuredangle XOR = m \measuredangle ROC = 30 + \frac{\alpha}{2}$

Del gráfico observamos que : $2\alpha + 30 + \frac{\theta}{2} + \phi + 30 + \frac{\alpha}{2} + 2\theta = 180$

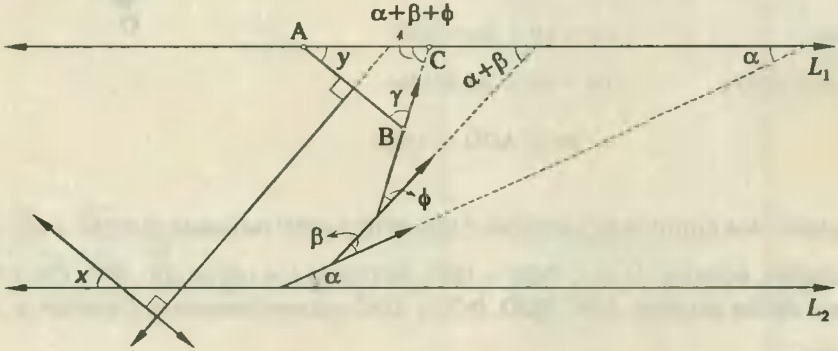
$$\phi + 60 + \frac{5}{2}(\alpha + \theta) = 180 \quad \Rightarrow \quad \phi = 120 - \frac{5}{2}(30)$$

$$\therefore \quad \phi = 120 - \frac{5}{2}(30)$$

40.- En la figura $L_1 // L_2$, si $\alpha + \beta + \phi + \gamma = 140º$, calcular : x .



<u>Resolución</u>.-



En la poligonal ABC : $x + \alpha + \beta + \phi + \gamma = 180$ ... (*)

Dato : $\alpha + \beta + \phi + \gamma = 140$

Reemplazando en (*) : $x + 140 = 180$

$\therefore$ $\mathbf{x = 40}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- La diferencia entre las medidas de los ángulos consecutivos AOB y BOC es 30°. Hallar la medida del ángulo que forman el rayo $\overrightarrow{OB}$ y la bisectriz del ángulo AOC.

A) 5° B) 10° C) 12° D) 15° E) 18°

2.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC ($m\ \hat{AOB} > \hat{BOC}m$). Hallar la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y AOC. Si $m\measuredangle$ BOC = 40°.

A) 5° B) 7,5° C) 10° D) 15° E) 20°

3.- Se tienen los ángulos consecutivos ABC, CBD y DBE, siendo $\overrightarrow{BD}$ la bisectriz del ángulo CBE. Calcular la medida del ángulo ABD si la suma de los ángulos ABC y ABE es 62°.

A) 27° B) 29° C) 31° D) 35° E) 38°

4.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que la $m\measuredangle$ AOC = $m\measuredangle$ BOD = 70°. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y COD.

A) 35° B) 40° C) 45° D) 50° E) 70°

5.- La suma del complemento de la medida de un ángulo, con el suplemento de la medida de otro ángulo es 140°. Calcular el suplemento de la suma de las medidas de ambos ángulos.

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

6.- Si a uno de dos ángulos suplementarios se le disminuye 35° para agregarse al otro; da como resultado que el segundo es 8 veces lo que queda del primero. Hallar la diferencia de estos ángulos suplementarios.

A) 70° B) 65° C) 60° D) 55° E) 50°

7.- Si el complemento del suplemento del suplemento del complemento de un ángulo mide 15°. Hallar el suplemento del complemento, del complemento del suplemento de dicho ángulo.

A) 7,5° B) 9° C) 10° D) 12° E) 15°

8.- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, siendo $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OL}$ las bisectrices de los ángulos AOB, COD y MON recpectivamente. Hallar la medida del ángulo COL. Si $m\measuredangle$MOC - $m\measuredangle$NOD = 83°

A) 41° 30' B) 40° C) 38° 30'

D) 37° E) 53°

9.- Si $m // n$ y $a // b$; calcular $x°$.

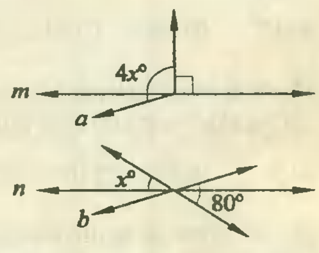
A) 31°

B) 32°

C) 33°

D) 34°

E) 35°



10.- Si $m // n$ y θ° es la medida de un ángulo agudo y mayor de 50°. Calcular el máximo valor entero de $x°$.

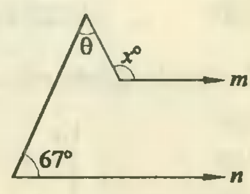
A) 109°

B) 112°

C) 116°

D) 118°

E) 120°



11.- La diferencia de las medida de dos ángulos consecutivos AOB y BOC es 60°.

Calcular la $m\measuredangle$DOB. Si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo AOC.

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

12.- Dados los ángulos consecutivos DOA, AOB y BOC; de manera que el ángulo DOB mide 80°, se trazan las bisectrices $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OM}$ de los ángulos DOA y BOC respectivamente. Calcular la $m\measuredangle$DOM. Si el ángulo BOC mide 60°.

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

13.- De qué ángulo debe restarse los 2/3 de su complemento para obtener 52°.

A) 25° B) 38° C) 72° D) 54° E) 67,2°

14.- De qué ángulo se debe restar la quinceava parte del triple de su complemento para obtener 6°.

A) 15° B) 12° C) 20° D) 30° E) 45°

15.- Si C → complemento: calcular "n" en :

$$2C_n + C2C_n + C2\,C2\,C_n = 160°$$

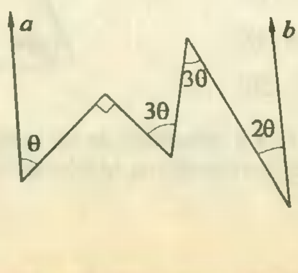
A) 5° B) 8° C) 10° D) 12° E) 15°

16.- El triple de la diferencia entre el suplemento de $x°$ y el complemento de $x°$ es igual al doble del suplemento del complemento del doble de $x°$.

A) 90° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 22° 30'

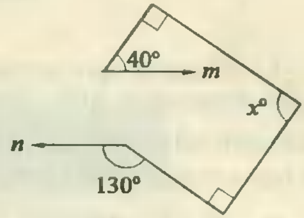
17.- Si $a // b$; calcular el complemento de θ°.

A) 40°
B) 50°
C) 70°
D) 20°
E) 60°

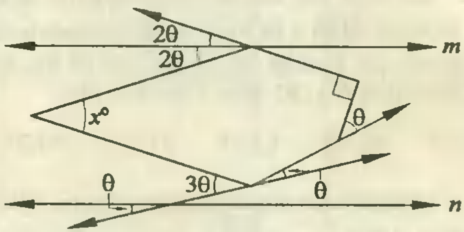


18.- Si $m // n$; calcular $x°$

A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°



19.- Si $m // n$; calcular $x°$



A) 90° B) 60° C) 45° + α
D) 90° - α E) 72°

20.- La suma de las medidas de los ángulos es 140°; y el duplo del complemento del primero es igual al triple del complemento del complemento del suplemento de su ángulo doble del segundo. Hallar la medida de dichos ángulos.

A) 100° y 40° D) 60° y 80°
B) 90° y 50° E) N.A.
C) 70° y 70°

21.- Sea "α" la medida de un ángulo si la diferencie entre los $\frac{5}{6}$ del suplemento de α y el complemento de la mitad de la medida de dicho ángulo excede en $\frac{\alpha}{15}$ al doble del complemento de α. Calcular el complemente del suplemento de α.

A) 140° B) 145° C) 148°
D) 165° E) 170°

22.- Se considera los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOD y BOC, si : $m\angle AOB - m\angle COB = \theta$.

A) θ B) $\frac{\theta}{2}$ C) $\frac{\theta}{3}$ D) $\frac{\theta}{4}$ E) $\frac{2}{3}\theta$

23.- Se consideran los ángulos adyacentes AOB y BOC, si se trazan las bisectrices $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{OH}$, de los ángulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, y $M\hat{O}F$ respectivamente. Calcular la $m\angle BOH$, si $m\angle BOC - m\,AOB = 40°$

A) 5° B) 7,5° C) 10° D) 12° 30' E) 20°

24.- Si a la medida de un ángulo le disminuimos su cuarta parte más que la mitad que su complemento, resulta un tercio de la diferencia entre el complemento y el suplemento del mismo ángulo. Calcular la medida de dicho ángulo.

A) 12° B) 14° C) 16° D) 18° E) 20°

25.- Calcular el complemento de la semidiferencia de las medidas de dos ángulos tales que la medida del primero excede en 60° al complemento de la medida del segundo y la medida del segundo sea igual a la mitad del suplemento de la medida del primer ángulo.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 60° E) 75°

26.- Se consideran los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD, se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ de los ángulos AOB, COD y XOY respectivamente. Calcular la $m\angle AOB$, si $m\angle XOC + m\angle XOD - 4m\angle BOZ = 80°$.

A) 80° B) 60° C) 40° D) 50° E) 20°

27.- Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ de tal manera que :

$$m\angle AOB + m\angle BOC = 300°$$

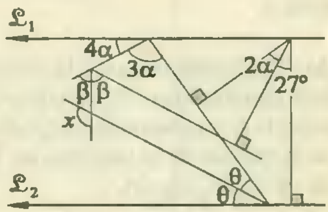
Se trazan los rayos $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ bisectrices de los ángulos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ respectivamente; luego $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ bisectrices de los ángulos $A\hat{O}Q$ y $C\hat{O}P$. Calcular la medida del ángulo $R\hat{O}S$.

A) 60° B) 65° C) 75° D) 80° E) 105°

28.- Al rededor de un punto O se trazan los rayos OA, OB, OD y OE, de modo que las medidas de los ángulos AOB, BOC, COD y DOE sean proporcionales a 1, 3, 4, y 5. Si $\overrightarrow{OD}$ es la prolongación de la bisectriz del $\angle AOB$. Calcular la medida del ángulo que forma dicha bisectriz con el rayo OE.

A) 12° B) 60° C) 48° D) 120° E) 72°

29.- Hallar x, si $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$.



A) 137°

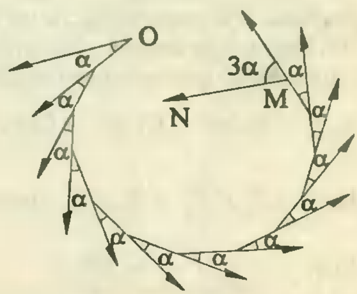
B) 138° 30'

C) 140°

D) 141° 30'

E) 141°

30.- En la figura $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{MN}$, calcular α



A) 15°

B) 18°

C) 20°

D) 24°

E) 27°

31.- Calcular la medida del mayor de tres ángulos que están en la relación de 3, 5 y 7, sabiendo que el complemento de la suma de las medidas de los ángulos es 15°.

A) 48° B) 25° C) 30° D) 35° E) 45°

32.- Si a la medida de un ángulo se le aumentase el cuadrado de la medida de su complemento se obtendrá 180°. Hallar la medida de dicho ángulo.

A) 100° B) 99° C) 80° D) 60° E) N. A.

33.- En la figura mostrada : hallar $m\measuredangle$ COM si $m\measuredangle$ BOC - $m\measuredangle$ AOC = 24°. $\overrightarrow{OM}$ bisectriz del $\measuredangle$ AOB.

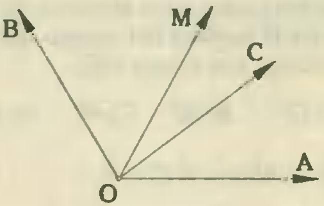
A) 12°

B) 18°

C) 20°

D) 24°

E) N.A



34.- Si al suplemento de la medida de un ángulo le disminuimos 30° menos que el doble de la medida de su complemento, esto es igual a 3/11 de la medida de su suplemento. Hallar la medida de dicho ángulo.

A) 10° B) 15° C) 30° D) 40° E) N.A.

35.- Si el complemento del suplemento del suplemento del complemento de un ángulo mide 10°. Hallar el suplemento del complemento del complemento del suplemento de dicho ángulo.

A) 5° B) 20° C) 36° D) 80° E) 10°

36.- Si : $\overline{\mathfrak{L}_1} \,//\, \overline{\mathfrak{L}_2}$ y $\overline{\mathfrak{L}_3} \,//\, \overline{\mathfrak{L}_4}$; hallar : x.

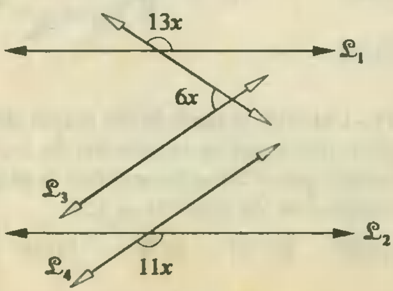
A) 6°

B) 8°

C) 12°

D) 16°

E) 18°



37.- Sean los ángulos adyacentes suplementarios AOB y BOC; se trazan los rayos $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ bisectrices de los ángulos AOB y BOC; además se trazan los rayos $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ con la condición : $2m\measuredangle$ AOP = $m\measuredangle$ POM y

$2m\measuredangle$ COQ = $m\measuredangle$ QOM

Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos MON y POQ. Si : $m\measuredangle$ AOB - $m\measuredangle$ BOC = 72°

A) 8° B) 10° C) 12° D) 14° E) 16°

38.- Hallar : x ; si : $\mathfrak{L}_1 \,//\, \mathfrak{L}_2$

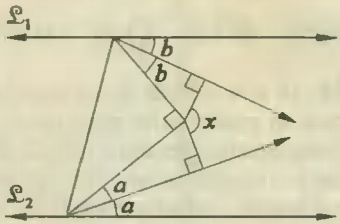
A) 60°

B) 75°

C) 105°

D) 135°

E) N.A.



39.- Si : $\overline{\mathfrak{L}_1} \,//\, \overline{\mathfrak{L}_2}$; hallar x.

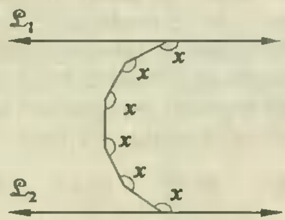
A) 100°

B) 120°

C) 130°

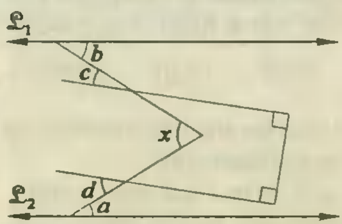
D) 140°

E) 150°



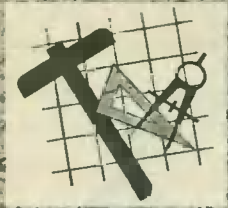
40.- Si : $\overline{\mathfrak{L}_1} \,//\, \overline{\mathfrak{L}_2}$.

Hallar x ; si : $a + b + c + d = 122°$



A) 41° B) 51° C) 60° D) 61 E) N.A.

CAP. 4



triángulos I

4.1 DEFINICIÓN

Es la reunión de 3 segmentos determinados por 3 puntos no colineales.

NOTACIÓN:

Δ ABC; se lee "triángulo ABC"

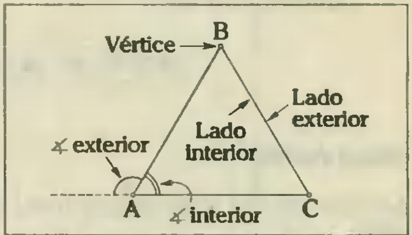


Fig. 4.1

CARACTERÍSTICAS :

- Posee tres lados, tres vértices , 3 ∡ interiores y 6 ∡s exteriores.
- Simbólicamente : $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$
- Perímetro : $2p = AB + BC + AC$

La Región triangular es la reunión del triángulo con todos sus puntos interiores.

4.2 TEOREMAS FUNDAMENTALES

TEOREMA 1.

La suma de las medidas de sus 3 ángulos interiores es 180°.

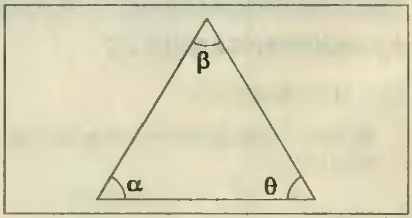


Fig. 4.2

En el gráfico, podemos observar que :

$$\alpha + \beta + \theta = 180 \qquad \text{... (4.1)}$$

TEOREMA 2.

La medida de un ángulo exterior (ϕ) es igual a la suma de 2 ángulos interiores (α) y (β) no adyacentes a él.

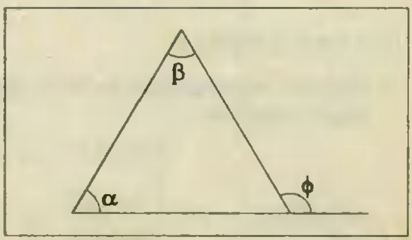


Fig. 4.3

Es decir

$$\phi = \alpha + \beta \qquad \text{... (4.2)}$$

TEOREMA 3

Un lado está comprendido entre la suma y la diferencia de los otros lados.

A este teorema se le llama "Teorema de la Desigualdad triangular"

Entonces : $a - c < b < a + c$ ... (4.3)

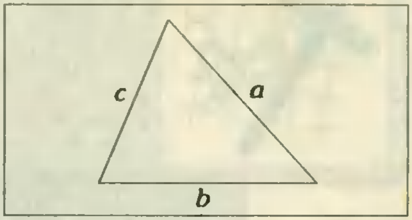


Fig. 4.4

TEOREMA 4

A mayor ángulo se le opone mayor lado y viceversa.

Quiere decir que :

$$\alpha > \theta \;\Leftrightarrow\; a > c \qquad \text{... (4.4)}$$

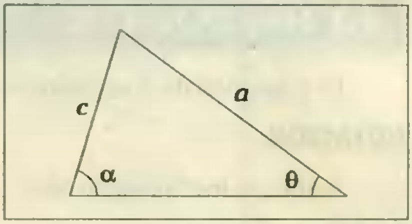


Fig. 4.5

Observación:

La suma de tres ángulos exteriores de un triángulo es 360°.

Entonces :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 360° \qquad \text{... (4.5)}$$

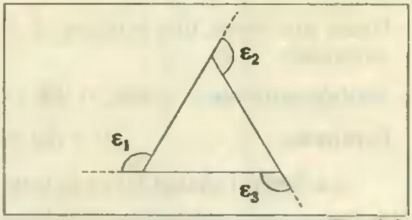


Fig. 4.6

4.3 CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

A) SEGÚN SUS ÁNGULOS

a) Δ ACUTÁNGULO :

Es aquel que tiene tres ángulos agudos, o sea menores de 90°.

Así : $\begin{cases} \alpha < 90° \\ \beta < 90° \\ \theta < 90° \end{cases}$

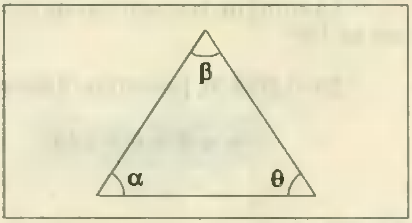


Fig. 4.7

b) Δ OBTUSÁNGULO :

Es aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.

Así tenemos : $\begin{cases} \theta > 90° \;\rightarrow\; \text{obtuso} \\ \left.\begin{array}{l} \alpha < 90° \\ \beta < 90° \end{array}\right\rangle \text{agudos} \end{cases}$

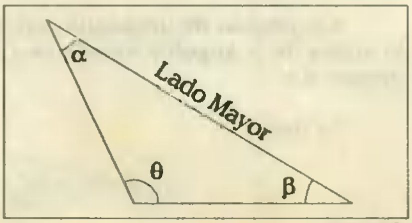


Fig. 4.8

c) Δ RECTÁNGULO :

Es aquel triángulo que tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos.

Así :

$$\alpha + \theta = 90^\circ \qquad \text{... (4.6)}$$

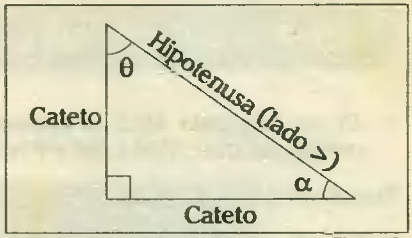


Fig. 4.9

B. SEGÚN SUS LADOS.

d) Δ ESCALENO :

Es aquel triángulo que tiene sus tres lados diferentes y sus tres ángulos interiores diferentes.

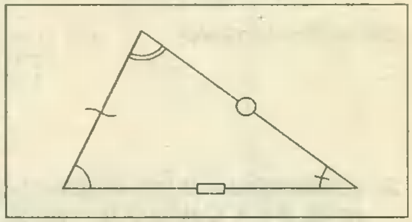


Fig. 4.10

e) Δ ISÓSCELES :

Es aquel triángulo que tiene dos lados congruentes y los ángulos que se oponen a dichos lados son también congruentes.

Del gráfico : $2\alpha + \theta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{180 - \theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - \frac{\theta}{2} \quad \therefore \quad \alpha < 90^\circ \qquad \text{... (4.7)}$$

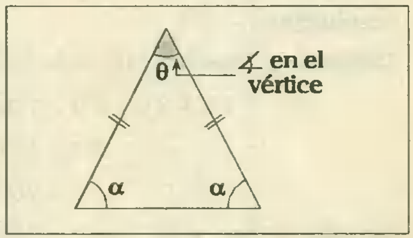


Fig. 4.11

f) Δ EQUILÁTERO :

Es aquel triángulo que tiene sus tres lados congruentes y sus tres ángulos interiores que miden 60° cada uno.

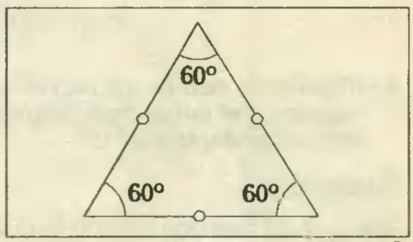


Fig. 4.12

g) OBSERVACIÓN :

Si en el Δ ABC mostrado se cumple que :

$$\begin{cases} AB = BC \quad \text{y} \\ m\measuredangle B = 60^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Δ ABC, es Equilátero

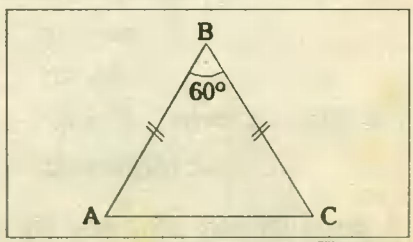


Fig. 4.13

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1ra PARTE)

1.- En un triángulo ABC, se toman los puntos M, P y N sobre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que : AM = MP y PN = NC. Hallar la m ∢ MPN , si m ∢ B = 70º

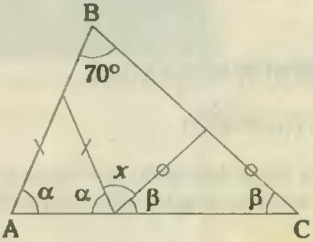
Resolución.-

Aplicando el Teorema 1 del item (4.2) tenemos :

$$\alpha + \beta + 70^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 110^\circ \;.... \text{(I)}$$

Del gráfico también : $x + \underbrace{\alpha + \beta}_{110^\circ} = 180^\circ$

$\therefore \qquad \mathbf{x = 70^\circ}$



2.- Las medidas de los ángulos internos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 3 y 4. Calcular la medida del suplemento del complemento del ángulo intermedio del triángulo.

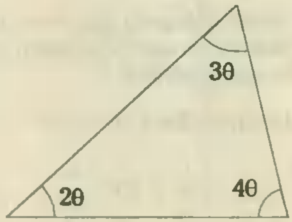
Resolución.-

Aplicando el Teorema 1 del item (4.2) tenemos :

$$2\,\theta + 3\,\theta + 4\,\theta = 180^\circ$$
$$9\,\theta = 180^\circ$$
$$\theta = 20^\circ$$

Nos piden : $Sc_{3\theta} = Sc_{60} = S_{30} = 150^\circ$

$\therefore \qquad \mathbf{Sc_{60^\circ} = 150^\circ}$



3.- Calcular la medida del mayor ángulo de un triángulo, en el cual la medida del mayor ángulo es el duplo de la medida del menor y la medida del tercer ángulo excede a la del menor ángulo en 16º

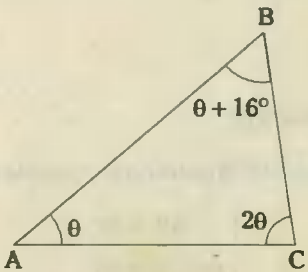
Resolución.-

Aplicando el Teorema 1 del item (4.2)

$$\theta + 2\theta + \theta + 16^\circ = 180^\circ$$
$$4\theta = 164^\circ$$
$$\theta = 41^\circ$$

Nos piden : ∢ mayor = $2\theta = 82^\circ$

$\therefore \qquad$ **∢ mayor = 82º**



4.- En un triángulo ABC, AC = BC, sobre $\overline{AC}$ se toma el punto "E", tal que : AB = BE = EC. Hallar la m ∢ ACB.

Resolución.-

Δ BEC por el Teorema 2 del item (4.2)

$$m \measuredangle BEA = x + x = 2x$$

Δ EBA isósceles : $m \measuredangle A = m \measuredangle BEA = 2x$

Δ ACB isósceles :

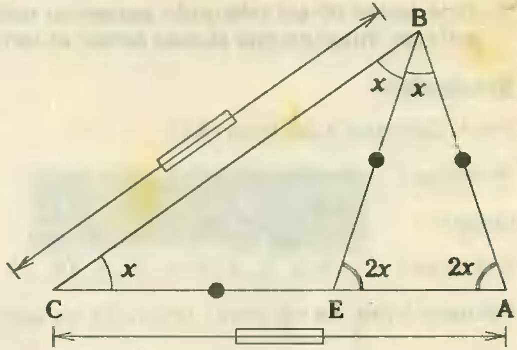
$m \measuredangle A = m \measuredangle B = 2x \quad \Rightarrow \quad m \measuredangle EBA = x$

Por el Teorema 1 del item (4.2)

$$2x + 2x + x = 180^\circ$$

$$5x = 180^\circ$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 36^\circ}$$



5.- En un triángulo PBR (PB = BR), se prolongan $\overline{BP}$ y $\overline{PR}$ hasta los puntos C y A respectivamente, tal que AB = BC. Hallar m $\measuredangle$ PCA si m $\measuredangle$ RBC = 30°

Resolución.-

Δ ABC isósceles : $m \measuredangle A = m \measuredangle C = x + \theta$

Δ APC por el Teorema 2 del item (4.2)

$$m \measuredangle BPC = x + \theta + x = 2x + \theta$$

También en el Δ BRC por el mismo Teorema

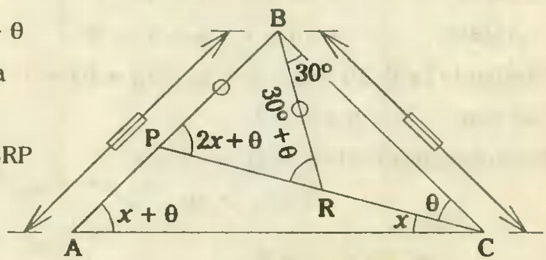
$$m \measuredangle BRP = 30^\circ + \theta$$

Como Δ PBR isósceles : $m \measuredangle BPR = m \measuredangle BRP$

$$2x + \theta = 30 + \theta$$

$$\Rightarrow \qquad 2x = 30$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 15^\circ}$$



6.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se toman los puntos E y F, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que el triángulo CEF es equilátero. Hallar la m $\measuredangle$ FEB, si m $\measuredangle$ ACE = θ

Resolución.-

Como Δ EFC es equilátero :

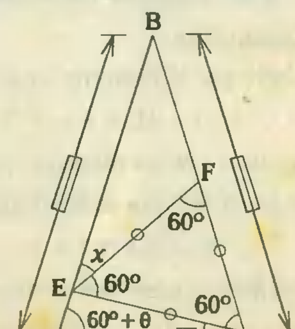
$$m \measuredangle EFC = m \measuredangle FEC = m \measuredangle FCE = 60^\circ$$

Además Δ ABC, isósceles : $m \measuredangle A = m \measuredangle C = 60^\circ + \theta$

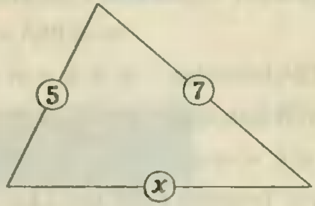
Luego Δ AEC por el Teorema 2 del item (4.2) :

$$60^\circ + x = 60^\circ + \theta + \theta$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 2\theta}$$



7.- *Dos lados de un triángulo escaleno miden 5 y 7 m, calcular la suma de los valores enteros impares que puede tomar el tercer lado.*



Resolución.-

Por el Teorema 3 del item (4.2)

Tenemos : $7 - 5 < x < 5 + 7$

Luego : $2 < x < 12$

Entonces : $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

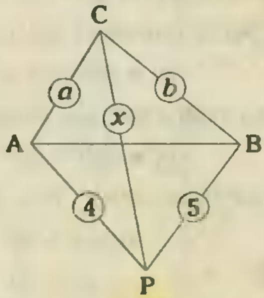
Por dato Δ ABC es escaleno, entonces los valores que puede tomar x será :

$$x = 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11 \quad \therefore \quad \mathbf{\Sigma x = 51\ m}$$

8.- *En un triángulo ABC, se sabe que AC + BC = 11, exterior y relativo a $\overline{AB}$ se toma el punto "P" tal que : PA = 4 y PB = 5. Calcular la diferencia entre el mayor y el menor valor entero que toma PC.*

Resolución.-

Aplicando el Teorema 3 del item (4.2)



Δ CAP : $a - 4 < x < a + 4$ ... I

Δ OBP : $b - 5 < x < b + 5$ ... II

Sumando I y II : $(a + b) - 9 < 2x < (a + b) + 9$

Por dato : $a + b = 11$

Reemplazando : $11 - 9 < 2x < 11 + 9$

$2 < x < 10$ $\to$ $x_{máx} = 9$; $x_{mín} = 3$

$\therefore \quad \mathbf{x_{máx} - x_{mín} = 6}$

9.- *En un triángulo ABC, en la región exterior y relativa a $\overline{AC}$ se ubica el punto "P". Calcular el valor entero de AP. Sabiendo que la recta perpendicular a $\overline{AC}$ trazada por C interseca a $\overline{AP}$; además $\overline{AC}$ toma su máximo valor entero, AB = 3 m, BC = 6m y PC = 2m.*

Resolución.-

Δ ABC por el Teorema 3 del item (4.2) :

$6 - 3 < AC < 6 + 3 \Rightarrow 3 < AC < 9$

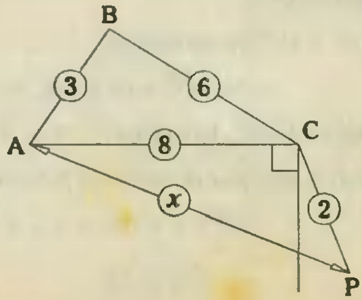
Por dato : AC es máximo $\Rightarrow$ AC = 8

Ahora Δ ACP por el Teorema 3 del item (4.2)

$8 - 2 < x < 8 + 2 \Rightarrow 6 < x < 10$ ... I

Del gráfico podemos darnos cuenta que $x > 8$ ... II

De I y II $\quad \mathbf{x = 9\ m}$



4.4 LÍNEAS NOTABLES

a) Mediana : $\overline{BM}$ Las medianas concurren en el baricentro "G"

Propiedad : **AG = 2GN**

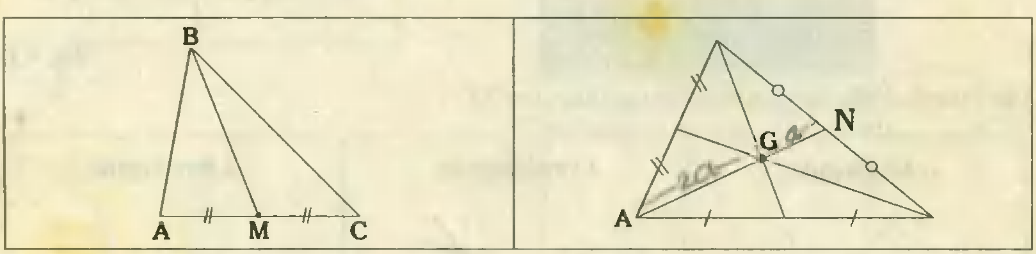


Fig. **4.14**

b) Altura : $\overline{BH}$ Las 3 alturas concurren en el ortocentro "H".

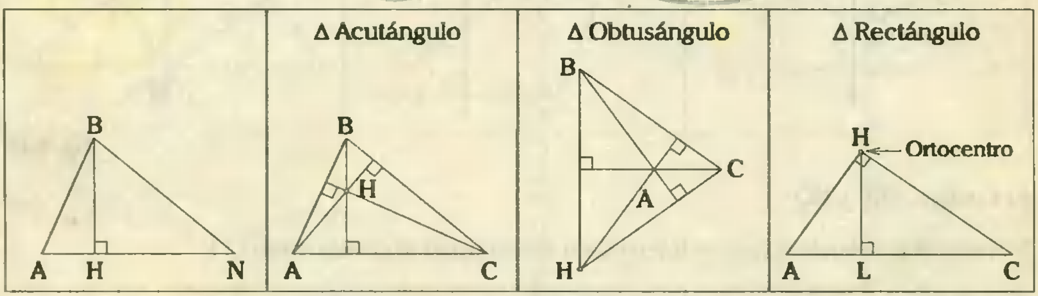


Fig. **4.15**

c) Bisectríz : $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$. Las bisectrices interiores concurren en el punto (I), llamado incentro.

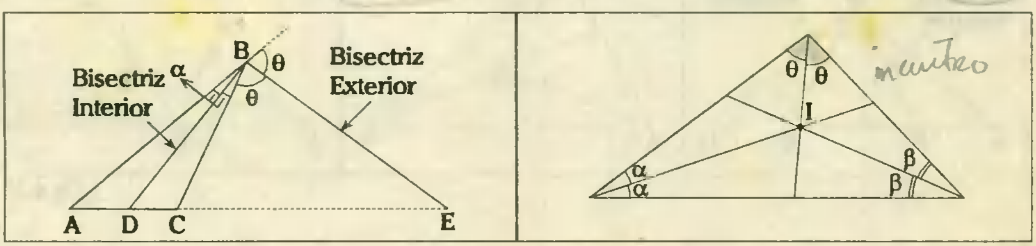


Fig. **4.16**

Observación :

Para el triángulo ABC "E" es uno de sus 3 excentros y éste es relativo al lado $\overline{BC}$.

Entonces el excentro es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores con una bisectriz interior.

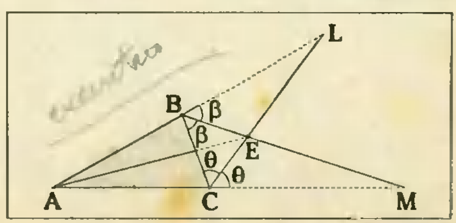


Fig. **4.17**

d) Mediatriz : $\overrightarrow{\mathscr{L}}$

Es aquella perpendicular trazada por el punto medio de un lado de un triángulo.

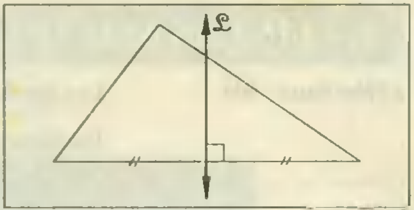


Fig. 4.18

Las 3 mediatrices concurren en el circuncentro "O".

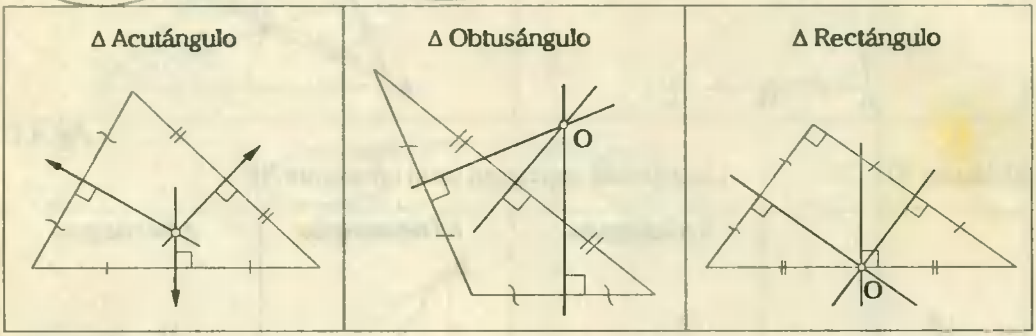


Fig. 4.19

e) Ceviana : $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$

3 cevianas culesquiera que se intersecten determinan el cevencentro (T)

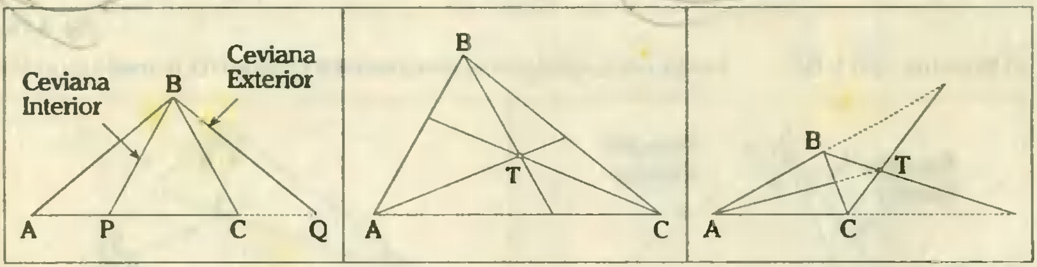


*Fig.*4.20

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

10.- El segmento de recta que un vértice de un triángulo en el punto medio de su lado opuesto se llama :

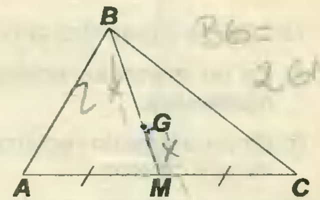
A) Mediatriz ***B) Bisectriz*** ***C) Mediana*** ***D) Altura*** ***E) Ceviana***

Resolución.-

Aplicamos el caso "a" del punto 4.4 y nos damos cuenta que dicho segmento se llama mediana.

RPTA. C

11.- En la figura, $\overline{BM}$ es mediana, si "G" es el baricentro, hallar $\overline{BG}$; BM = 24.



Resolución.-

Si : $\overline{BM}$ es mediana $\Rightarrow$ BG = 2 GM

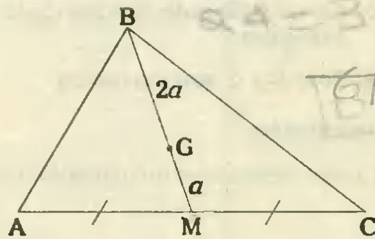
Luego sea : GM = a $\Rightarrow$ BG = 2a ..... (1)

Ahora : BM = 24 $\Rightarrow$ 2a + a = 24

Por consiguiente : a = 8 ..... (2)

Reemplazando (2) en (1) : BG = 2(8)

$\therefore$ **BG = 16**



BG =
2GM
24 = BG + 2GM
24 = 3GM
GM = 8
16

12.- Las tres alturas de un triángulo, concurren en un punto llamado : .

A) Baricentro ***B) Excentro*** ***C) Ortocentro*** ***D) Circuncentro*** ***E) Incentro***

Resolución.-

El ortocentro, es el punto de intersección o punto de concurrencia de tres alturas del triángulo.

RPTA. C

13.- En un triángulo obtusángulo, el ortocentro se encuentra en :

A) Un punto interior del triángulo

B) Un punto exterior del triángulo

C) El punto medio de un lado del triángulo

D) Un vértice del triángulo

E) N.A.

Resolución.-

En un triángulo obtusángulo el ortocentro se encuentra en un punto exterior del triángulo.

RPTA. B

14.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A) En un triángulo rectángulo, el ortocentro se halla en el vértice del ángulo recto.

B) El punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo se llama incentro.

C) Las mediatrices concurren en el punto llamado excentro.

D) Una bisectriz interior con dos bisectrices exteriores concurren en el excentro.

E) El punto de intersección de tres cevianas se llama cevencentro.

Resolución.-

El circuncentro es el punto de concurrencia de tres mediatrices. **RPTA. C**

15.- De las siguientes afirmaciones, diga Ud. cuál es la verdadera :

A) En un triángulo rectángulo, las mediatrices se encuentran en el punto medio de la hipotenusa.

B) En un triángulo rectángulo, las mediatrices se encuentran en el punto medio de uno de sus catetos.

C) En un triángulo acutángulo, las mediatrices se encuentran en un punto exterior al triángulo.

D) En un triángulo obtusángulo, las mediatrices se encuentran en un punto interior al triángulo.

E) Sólo B y C son correctas.

Resolución.-

Las mediatrices en un triángulo rectángulo se encuentran en el punto medio de su hipotenusa.

RPTA. A

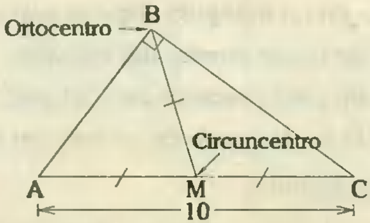
16.- En un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 10cm, hallar la distancia del ortocentro al circuncentro.

Resolución.-

Según lo estudiado anteriormente el ortocentro se encuentra en "B" y el circuncentro en "M", entonces :

Propiedad que estudiaremos más adelante.

Entonces : $\overline{BM} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$



Ahora $\overline{BM}$ es la distancia pedida, entonces :

$$BM = \frac{10}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{BM = 5\ cm}$$

17.- El punto de intersección de tres cevianas de un triángulo, también se le llama :

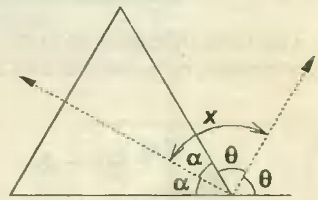
A) Gravicentro ***B) Centro de Gravedad*** ***C) Punto Aferente***

D) Punto de Menelao ***E) Punto Ceviano.***

Resolución.-

En honor al gran matemático Ceva, el punto de concurrencia de tres cevianas, también se le llama punto ceviano. **RPTA. E**

18.- En la siguiente figura, hallar "x".



Resolución.-

Del gráfico : $x = \alpha + \theta$ ... (1)

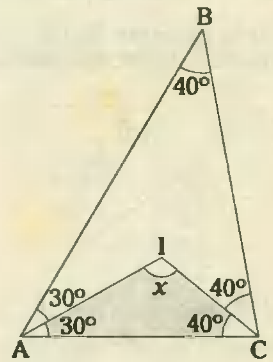
También : $2\alpha + 2\theta = 180°$

Luego : $\alpha + \theta = 90°$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $\mathbf{x = 90°}$

19.- En un triángulo los ángulos A, B y C miden 60°, 40° y 80° respectivamente, hallar el ángulo que forma las bisectrices de los ángulos A y C.

Resolución.-



En el triángulo AIC : $x + 30 + 40 = 180°$

En consecuencia : $x = 180 - 70$

$\therefore \quad \mathbf{x = 110}$

4.5 PROPIEDADES GENERALES

a) En un triángulo, el ángulo formado por las bisectrices interiores de dos ángulos, se puede calcular con la siguiente relación (*Fig.* 4.21a):

$$x = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (4.8)$$

b) En todo triángulo, el ángulo formado por una bisectriz interior y una exterior, está dado por la siguiente relación (*Fig.* 4.21b):

$$x = \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (4.9)$$

c) En todo triángulo, el ángulo formado por dos bisectrices exteriores, está dado por la siguiente relación (*Fig.* 4.21c):

$$x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (4.10)$$

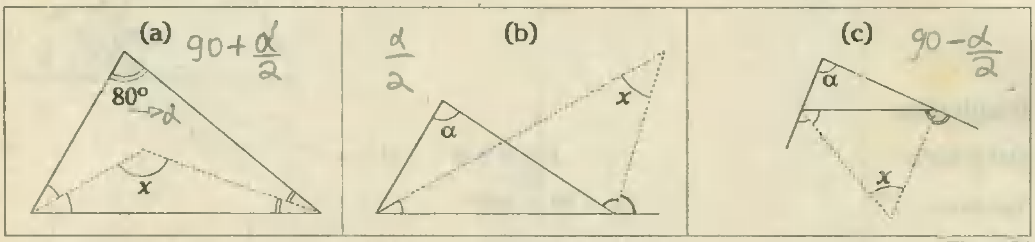


Fig. 4.21

d) En un triángulo, el ángulo formado por una altura y una bisectriz trazadas desde un mismo vértice, está dado por la siguiente relación :

$$x = \left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right) \quad \ldots (4.11)$$

e) En la siguiente figura si $\overline{BD}$ es bisectriz la medida del ángulo "x" está dado por la siguiente relación :

$$x = 90^\circ \left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right) \quad \ldots (4.12)$$

f) En la siguiente figura (cuadrilátero cóncavo), el ángulo convexo exterior, está dado por la siguiente relación :

$$x = \alpha + \beta + \theta \quad \ldots (4.13)$$

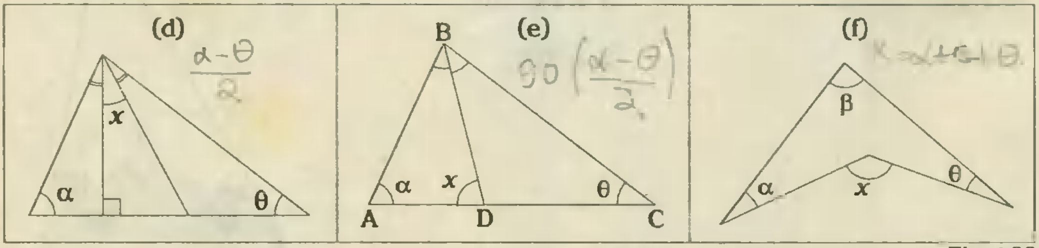


Fig. 4.22

g) En la siguiente figura, el ángulo "x" está dado por la siguiente relación :

$$x = \left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) \quad \ldots (4.14)$$

h) En la siguiente figura, el ángulo "x" está dado por la siguiente relación :

$$x = \left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) \quad \ldots (4.15)$$

i) En la siguiente figura, el ángulo "x" está dado por la siguiente relación :

$$x = 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \quad \text{... (4.16)}$$

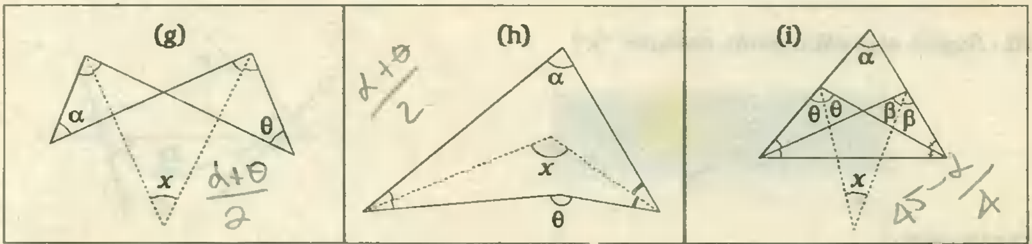


Fig. 4.23

j) Si $m \measuredangle$ EBC = α ⇒ AB = BE = EC

También : Si $m \measuredangle$ ABF = α ⇒ BF = BC

Luego : **AB = AF**

k) En la siguiente figura, si $\overline{BD}$ es bisectríz y $m \measuredangle$ A = 2$m \measuredangle$ C, entonces el lado $\overline{BC}$, está dado por la siguiente relación :

BC = AB + AD **... (4.17)**

l) En la siguiente figura, si $\overline{BE}$ es bisectríz y $m \measuredangle$ A = 2$m \measuredangle$ C, entonces el lado $\overline{BC}$, está dado por la siguiente relación :

BC = AE - AB **... (4.18)**

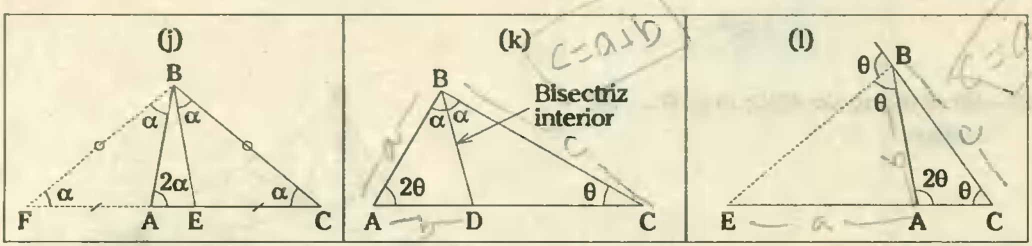


Fig. 4.24

m) En el triángulo rectángulo mostrado, $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BE}$ bisectríz del $\measuredangle$ HBC , entonces se cumple lo siguiente :

AB = AE **... (4.19)**

n) En el triángulo rectángulo $\overline{BH}$ es altura, $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices de los ángulos ABH y HBC respectivamente, entonces se cumple lo siguiente :

DE = AB + BC - AC

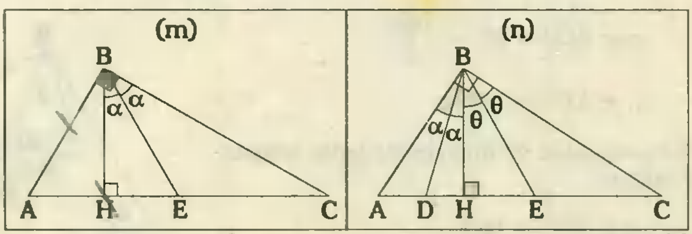
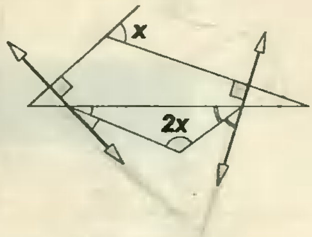


Fig. 4.25

... (4.20)

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (3ra PARTE)

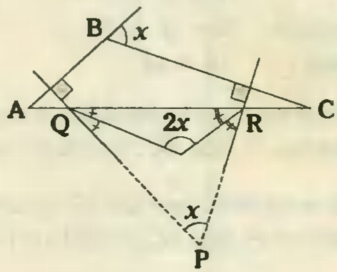
20.- Según el gráfico dado, calcular "x"



Resolución.-

Por propiedad de ángulos de lados perpendiculares :

$m\sphericalangle B = m\sphericalangle P = x$



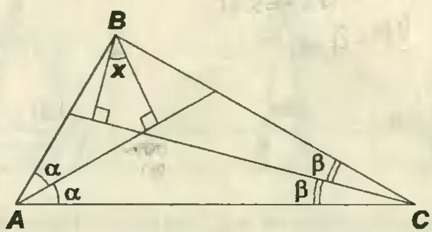
Δ QPR por el Teorema "a" del item (4.5)

$$2x = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

$$\frac{3x}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 60^\circ}$$

21.- En el triángulo ABC; m $\sphericalangle$ B = 100°.
Hallar x

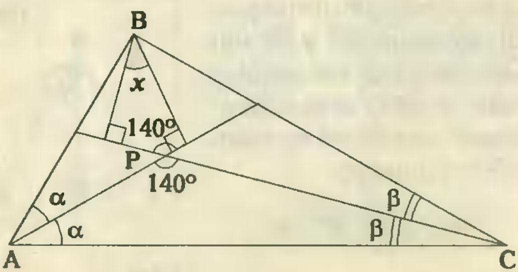


Resolución.-

En el Δ ABC por el Teorema "a" del item (4.5)

$$m\sphericalangle ADC = 90^\circ + \frac{100^\circ}{2}$$

$$m\sphericalangle APC = 140^\circ$$

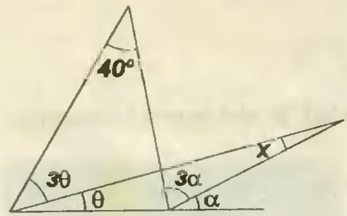


Por propiedad de ángulos de lados perpendiculares :

$$x + 140^\circ = 180^\circ$$

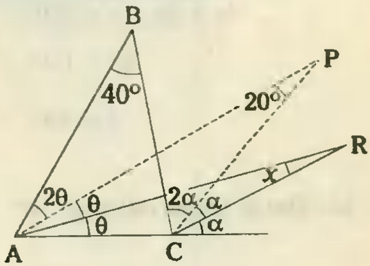
$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 40^\circ}$$

22.- Hallar "x" de la figura



Resolución.-

Haciendo los trazos indicados y aplicando el Teorema "b" del item (4.5)

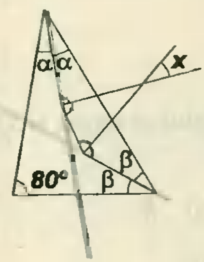


Δ ABC tenemos : $m\sphericalangle P = 20°$

Luego Δ APC tenemos : $m\sphericalangle x = 10°$

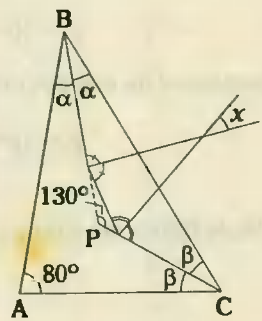
$\therefore$ $\quad$ $\boldsymbol{x = 10°}$

23.- Del gráfico calcular "x"



Resolución.-

Haciendo los trazos indicados :



Δ ABC por el Teorema "a" del item (4.5).

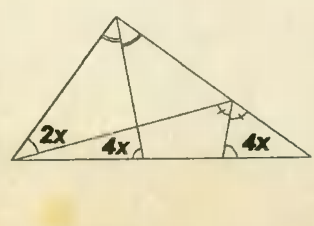
$$m\sphericalangle BPC = 90 + \frac{80}{20} = 130°$$

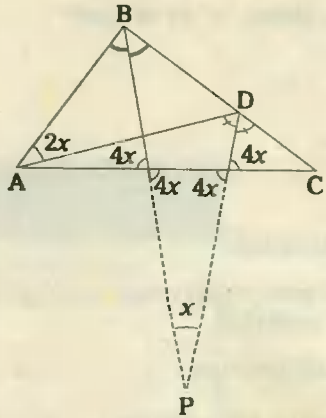
Luego Δ BPC por e l Teorema "c" del item (4.5)

$$m\sphericalangle x = 90 - \frac{130°}{2}$$

$\therefore$ $\quad$ $\boldsymbol{x = 35°}$

24.- Del gráfico calcular "x"





Resolución.-

Por la propiedad "b" del item 4.5, tenemos :

$$m\measuredangle P = x$$

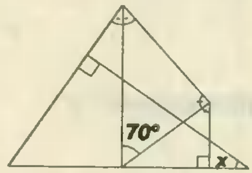
También :

$$4x + 4x + x = 180^o$$

$$9x = 180^o$$

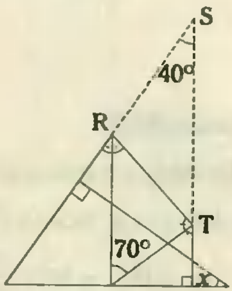
$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 20^o}$$

25.- Del la figura calcular "x"



Resolución.-

Haciendo los trazos indicados se forma el Δ RST, aplicando el Teorema "c" del item (4.5)



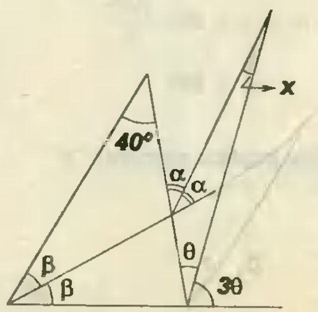
$$70^o = 90 - \frac{S}{2}$$

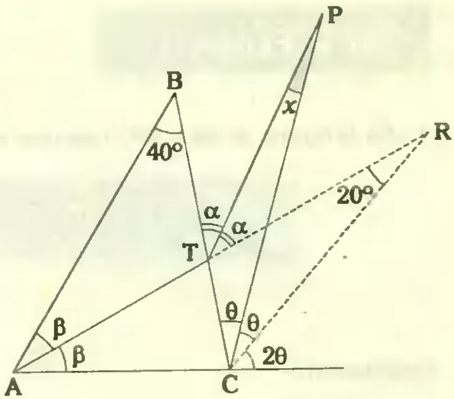
$$S = 40^o$$

Por propiedad de ángulos de lados perpendiculares :

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 40^o}$$

26.- De la figura mostrada calcular el valor de "x"





Resolución.-

Aplicando el Teorema "b" del item (4.5), hacemos los trazos indicados en el Δ ABC.

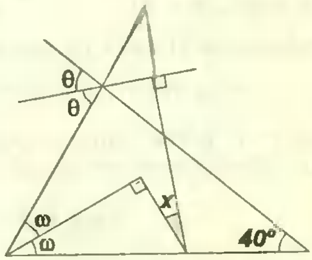
$$m\sphericalangle R = \frac{m\sphericalangle B}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

Ahora en el Δ TCR, aplicando el Teorema anterior :

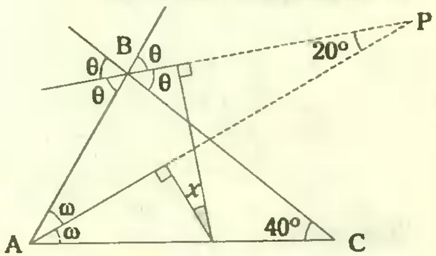
$$m\sphericalangle x = \frac{m\sphericalangle R}{2} = \frac{20^\circ}{2}$$

$\therefore \quad m\sphericalangle x = 10^\circ$

27.- En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo "x"



Resolución.-



Por la propiedad "b" del item 4.5 tenemos que :

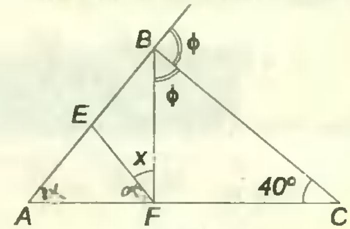
$$m\sphericalangle APB = 20^\circ$$

Por ángulos de lados perpendiculares :

$\therefore \quad x = 20^\circ$

MISCELÁNEA

1.- En la figura, si AE = EF ; calcular x°



$40+\theta = x+\alpha$

$40+x\ 40 = x+\alpha$

$\boxed{80 = x}$

Resolución.-

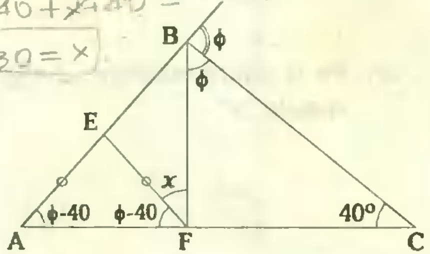
En el Δ ABC, por el teorema del ángulo exterior :

$$\phi = m\measuredangle A + 40^\circ \quad\Rightarrow\quad m\measuredangle A = \phi - 40^\circ$$

Pero dado que el Δ AEF es isósceles, tendremos :

$$m\measuredangle A = m\measuredangle AFE = \phi - 40^\circ$$

Luego en el Δ FBC, también por el teorema del ángulo exterior tenemos : $\phi - 40^\circ + x = \phi + 40^\circ$



$$\therefore \qquad x = 80^\circ$$

$a+x = 2n$

$a+2b=$

2.- En la figura; calcular x°.

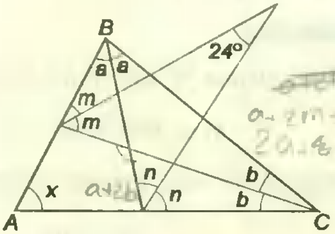
$a + x + a + 2b = 180$

$2a + 2b + x = 180.$

$2a + 2b + 2m = 180$

~~$4a+3b+x+2m=360$~~

$2a + m + n$



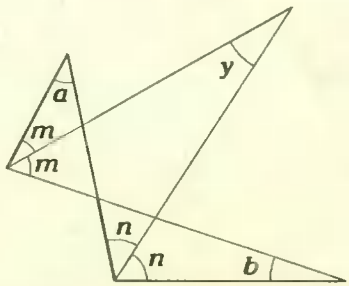
$a + 2m + a + b = 180$

$2a + 4b + 2m = 180$

Resolución.-

Recordemos la propiedad : $\quad y = \dfrac{a+b}{2}$

Al aplicar esta propiedad en nuestro problema, observamos que:



$$24^\circ = \frac{a+b}{2} \quad\Rightarrow\quad a + b = 48^\circ \quad ...\ (1)$$

Finalmente en el ΔABC : $\quad x + 2\,(a + b) = 180^\circ \quad ...\ (2)$

Reemplazando (1) en (2) : $\quad x + 2\,(48^\circ) = 180^\circ$

En consecuencia : $\quad x = 180^\circ - 96$

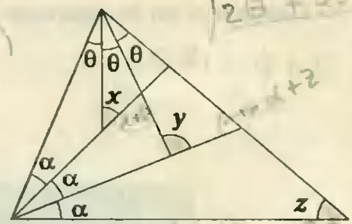
$$\therefore \qquad x = 84^\circ$$

3.- Calcular : x + y + z , en el gráfico siguiente :

$x = \theta + \alpha$
$y = 2\theta + 2\alpha$
$z = 180 - 3\alpha - 3\theta$
$x + y + z = 180$

$3\alpha + 3\theta + z = 180$
$z = 180 - (3\alpha + 3\theta)$

$2\theta + 2\alpha = y$



Resolución.-

Del gráfico, por el teorema del ángulo exterior :

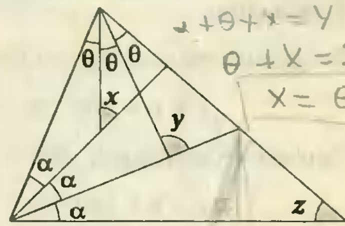
$x = \alpha + \theta$ ... (1)

También : $y = 2\alpha + 2\theta$ ... (2)

De igual manera : $z = 180° - (3\alpha + 3\theta)$ ... (3)

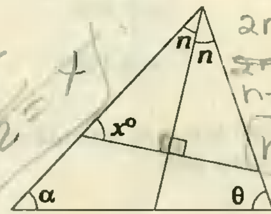
Sumando (1), (2) y (3) : $x + y + z = 3\alpha + 3\theta + 180° - 3\alpha - 3\theta$

$\therefore \quad \boldsymbol{x + y + z = 180°}$



$\alpha + \theta + x = y$
$\theta + x = 2\theta + \alpha$
$x = \theta + \alpha$
$2\theta + 2\alpha = \alpha + \theta + y$

***4.- Calcular x^o ; si** : $\alpha + \theta = 124°$*



$2n + 124 = 18$
$n + 62 = 9$
$n = 28$
$180 - 118 = 62$

Resolución.-

En el ΔMBH : $x + n = 90°$

Multiplicando por 2 miembro a miembro : $2x + 2n = 180°$

Transponiendo términos, tendremos que :

$2n = 180° - 2x$ ... (1)

En el Δ ABC : $2n + \alpha + \theta = 180°$

Despejando el término $2n$, tendremos :

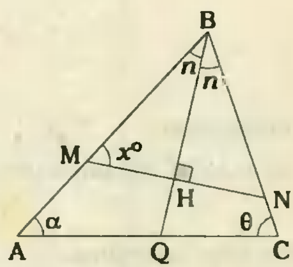
$2n = 180° - (\alpha + \theta)$ ... (2)

Igualando (1) y (2): $180° - 2x = 180° - (\alpha + \theta)$

Eliminando 180° y despejando encontramos que : $x = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$

Reemplazando el dato : $x = \dfrac{124°}{2}$

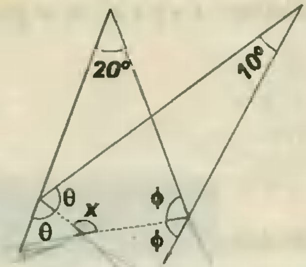
$\therefore \quad \boldsymbol{x = 62°}$



5.- Calcular x, en la siguiente figura.

$20 + \theta + \phi = 180$

$+ \phi = 160$



Resolución.-

Del gráfico, en el triángulo CDE ($\measuredangle$ exterior):

$$x = \phi + 170^\circ - \theta \quad ... (1)$$

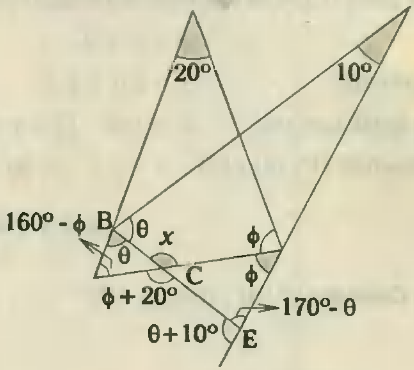
También en el triángulo ABC :

$$x = \theta + 160^\circ - \phi \quad ... (2)$$

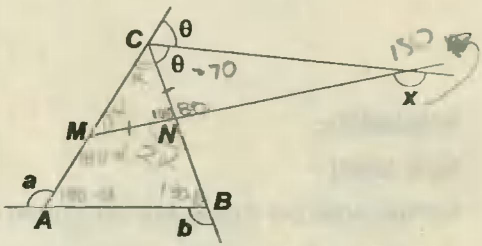
Sumando miembro a miembro (1) y (2) :

$$2x = 330$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 165^\circ}$$



6.- En la figura, calcular x°, si : a + b = 220° , y, CN = NM .



Resolución.-

En el Δ ABC, sabemos por teoría que :

$$\underbrace{a + b} + 2\theta = 360^\circ$$

Por dato, tendremos : $220^\circ + 2\theta = 360^\circ$

Ahora : $2\theta = 360^\circ - 220^\circ \Rightarrow 2\theta = 140^\circ$

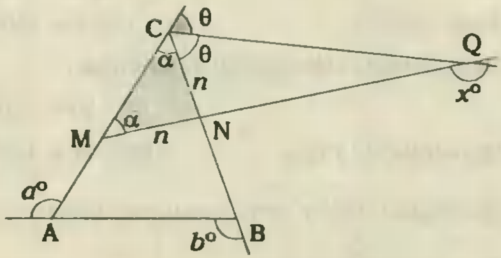
$$\therefore \quad \theta = 70^\circ$$

Entonces en el vértice C, se tendrá que :

$$\alpha = 40^\circ$$

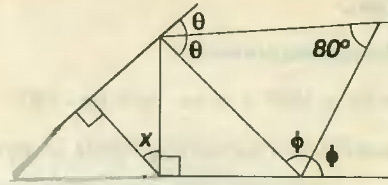
Finalmente en el Δ MCQ : $x = \alpha + \alpha + \theta$

Reemplazando : $x = 40^\circ + 40^\circ + 70^\circ$ $\quad \therefore \quad \mathbf{x = 150^\circ}$



$\theta + \phi + 80 = 18$
$\boxed{\theta + \phi = 100}$

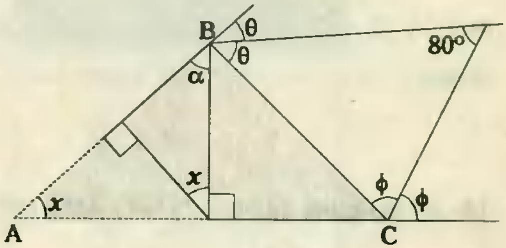
7.- Calcular x, en el gráfico mostrado.



Resolución.-

Recordemos la siguiente propiedad :

$$x = 90^o - \frac{\omega}{2}$$



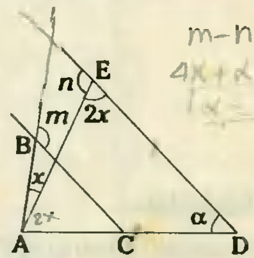
Para nuestro problema : $80^o = 90^o - \frac{x}{2}$

Donde : $\frac{x}{2} = 90^o - 80^o \Rightarrow \frac{x}{2} = 10^o$

$\therefore \quad \boxed{x = 20^o}$

8.- En la figura, se sabe que : $\overline{BC} \,//\, \overline{DE}$, además AD = DE , y: $m - n = 36^o$; calcular α .

$m - n = 36.$
$4x + \alpha = 180$
$\alpha = 180 - 4$



Resolución.-

$n + 2x = 180$
$\boxed{2x = 180 - n}$

Si $\overline{BC} \,//\, \overline{DE}$, entonces la $m \measuredangle D = m \measuredangle ACB = \alpha$

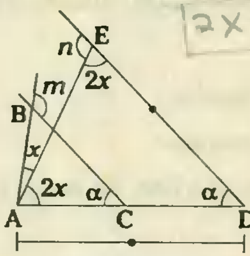
En el Δ ABC : $m = 3x + \alpha$ ... (1)

En el Δ AED : $n = 2x + \alpha$ ... (2)

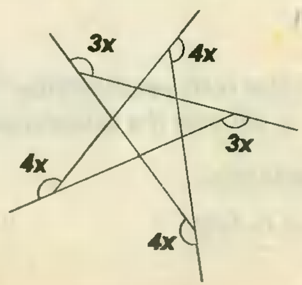
Restando (1) y (2) miembro a miembro : $\underbrace{m - n}_{} = x$

Del dato se sabe que : $36^o = x$

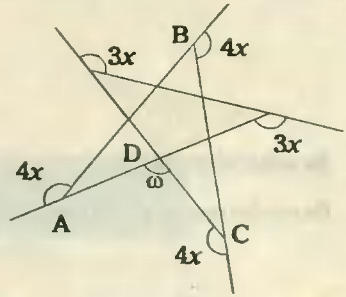
$\therefore \quad \boxed{\alpha = 36^o}$



9.- Del gráfico se pide calcular x.



Resolución.-



En el triángulo sombreado :

$$3x + 3x = 180^\circ + \omega \Rightarrow \omega = 6x - 180^\circ \quad \dots (1)$$

En el cuadrilátero no convexo ABCD, se tiene :

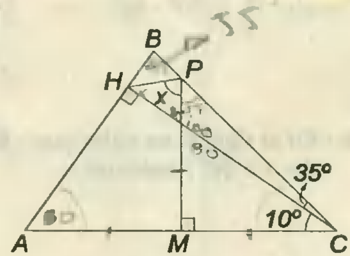
$$\omega = 3\,(180^\circ - 4x) \quad \dots (2)$$

De (1) y (2) : $6x - 180^\circ = 3\,(180^\circ) - 12x$

Donde : $18x = 720$

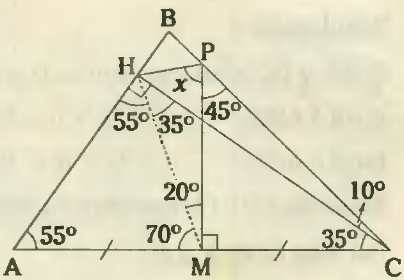
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 40^\circ}$$

10.- En la figura, calcular "x" si : AM = MC



$\alpha + x = 100.$

Resolución.-



El triángulo rectángulo PMC es isósceles : PM = MC

En el ⊿ AHC, trazamos la mediana HM, entonces :

$$HM = AM = MC$$

También : $m\sphericalangle HAC = 55^\circ$

Entonces : $m\sphericalangle AHM = 55^\circ$

En el Δ HMC ($\sphericalangle$ exterior) : $m\sphericalangle AMH = 70^\circ$

$\Rightarrow m\sphericalangle PMH = 20^\circ$

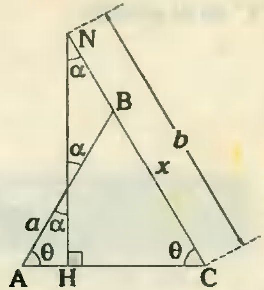
El triángulo PMH es isósceles : HM = PM

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 80^\circ}$$

11.- Una recta perpendicular a la base $\overline{AC}$ de un triángulo isósceles ABC, intersecta en M a $\overline{AB}$ y en N a la prolongación de $\overline{CB}$. Si AM = a y NC = b. Hallar : BC.

Resolución.-

En el ⊿ AHM: $\theta + \alpha = 90^\circ$



En el ⊾ NHC : $m\measuredangle HNC = 90 - \theta = \alpha$

Luego el triángulo NBM resulta ser isósceles.

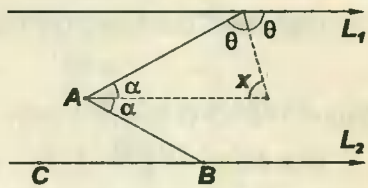
Entonces : BN = BM

Pero : $BN = b - x$ y $BM = x - a$

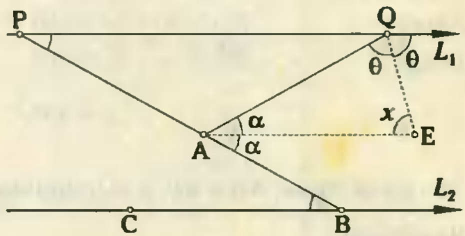
De donde : $b - x = x - a$

$$\therefore \quad x = \frac{a+b}{2}$$

12.- En la figura: $L_1 // L_2$. Calcular el menor valor entero de x, si el ángulo ABC es agudo.



Resolución.-



Prolongamos $\overline{BA}$ hasta cortar L_1, en P, luego :

$m\measuredangle CBP = m\measuredangle APQ$ ($\measuredangle$ alternos)

En el Δ APQ; E es excentro, luego :

$$x = 90 - \frac{m\measuredangle P}{2} \quad \text{(Propiedad)}$$

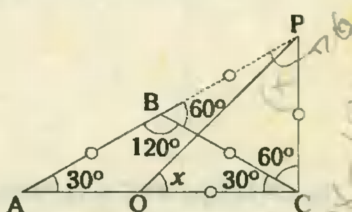
De donde : $m\measuredangle P = 180 - 2x$

Pero : $m\measuredangle CBP = 180 - 2x < 90$ ($\measuredangle$ agudo)

Resolviendo : $x > 45°$ $\quad\therefore$ **El menor valor entero de x es 46°**

13.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle A = 30^{\circ}$ y $m\measuredangle B = 120^{\circ}$. Sobre la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto "P" y sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto "p", tal que : AB = BP = QC. Hallar la $m\measuredangle PQC$.

Resolución.-



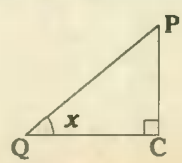
En el Δ ABC : AB = BC y $m\measuredangle C = 30°$

El Δ PBC es equilátero, entonces :

$$PC = BP = BC \quad y \quad m\measuredangle BCP = 60°$$

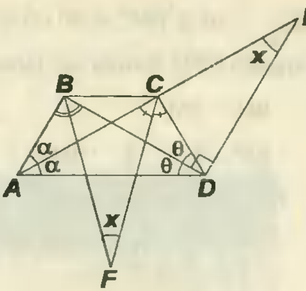
En el Δ QCP, que es rectángulo isósceles :

$$\overline{QC} = \overline{PC}$$

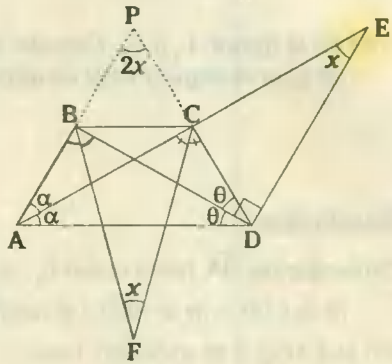


$$\therefore \quad x = 45°$$

14.- Hallar "x" en el gráfico :



Resolución.-



En la figura ABCD, empleamos la propiedad 3.5 g :

$$x = \frac{\alpha+\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \theta = 2x$$

Para el Δ APD, E es excentro, luego :

$$m\measuredangle AED = \frac{m\measuredangle P}{2} \text{ (3.5 b)} \quad \Rightarrow \quad 2x = m\measuredangle P$$

En el Δ APD : $2\alpha + 2\theta + 2x = 180$

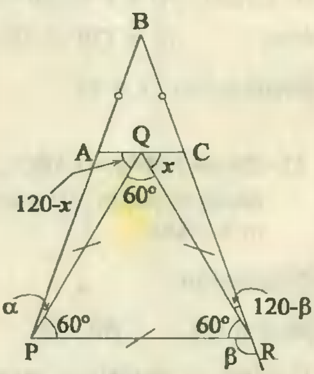
Ahora : $2(\alpha + \theta) + 2x = 180$

Luego : $2(2x) + 2x = 180$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30^\circ}$$

15.- En la figura, AB = BC, y el triángulo PQR es equilátero. Hallar x, si: α + β = 142.

Resolución.-



En el triángulo isósceles ABC : $m\measuredangle A = m\measuredangle C$ ... (1)

En el Δ PAQ : $m\measuredangle A = \alpha + 120 - x$ (ángulo exterior)

En el Δ QCR : $m\measuredangle C = 120 - \beta + x$ (ángulo exterior)

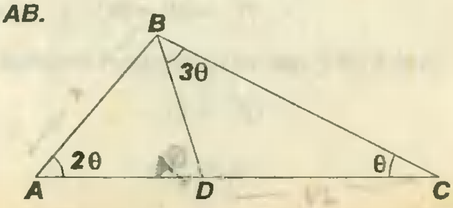
Reemplazando en (1) : $\alpha + 120 - x = 120 - \beta + x$

$$\alpha + \beta = 2x$$

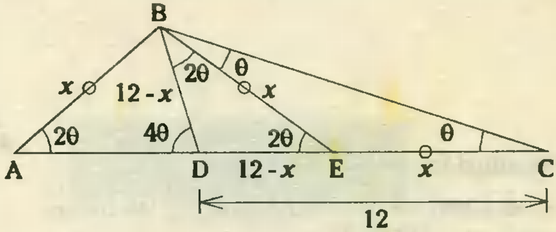
$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{142}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\theta = 71}$$

16.- En la figura DC = 12 ; hallar el valor entero de AB.



Resolución.-



En el Δ DBC trazamos la ceviana $\overline{BE}$, de modo que la $m\measuredangle$ EBC = θ. Entonces : BE = EC = AB x.

Luego el Δ DBE es también isósceles : DB = DE = 12 - x.

Ahora por el teorema de la desigualdad triangular en el Δ DBE :

$$0 < x < 12 - x + 12 - x \quad \Rightarrow \quad x < 24 - 2x$$

Luego : $\quad 3x < 24 \quad \Rightarrow \quad x < 8 \quad ...(1)$

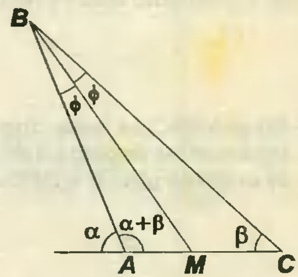
En el Δ ABD y de acuerdo con la magnitud de los ángulos opuestos, se tiene que : AB > BD , es decir : $x > 12 - x$

Donde : $\quad 12 < 2x \quad \Rightarrow \quad 6 < x \quad ...(2)$

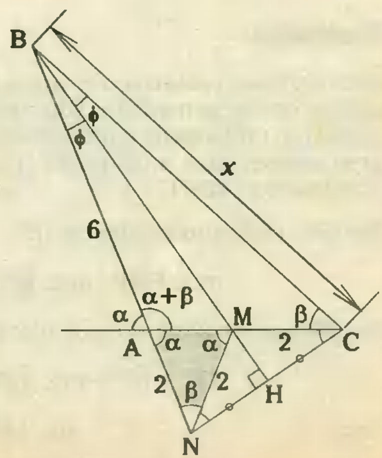
De (1) y (2) tenemos : $\quad 6 < x < 8$

En consecuencia, el único valor entero que adopta x es : $\quad$ **$x = 7$**

17.- En la figura ; hallar BC , si : AB = 6 y MC = 2.



Resolución.-



A partir del Δ ABC prolonguemos el lado BA y construyamos el triángulo isósceles NBC, en el cual : BN = BC = x.

Ahora centremos nuestra atención en el Δ NAM, donde :

$m\measuredangle$ ANM = $m\measuredangle$ BCM = β , y , $m\measuredangle$ BAM = α + β

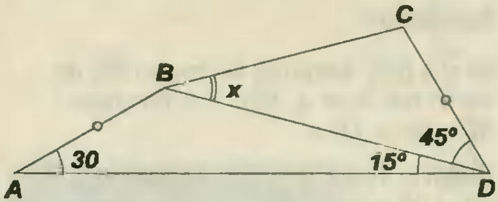
Entonces : $\quad m\measuredangle$ AMN = α

Luego este triángulo NAM es isósceles NA = NM = 2.

En consecuencia : $\quad x = 6 + 2$

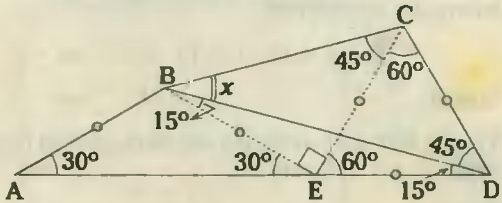
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 8}$$

18.- Calcular x , en la figura mostrada.



Resolución.-

En el ΔABD, se traza la ceviana $\overline{BE}$, de modo que : $m\measuredangle EBD = 15$



Este trazo nos permite reconocer que el ΔEBD, es isósceles. Asimismo podemos reconocer que el ∡ AEB es un ángulo exterior cuya medida viene dada por : $m\measuredangle AEB = 15 + 15 = 30$

Este resultado permite estabecer que el ΔABE es también isósceles, por ello afirmaremos que :

$$AB = BE = ED$$

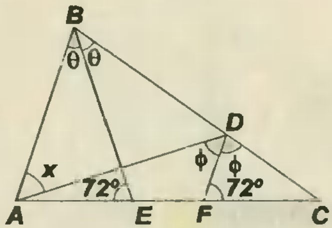
Esta última conclusión nos permite asegurar que, el ΔECD es equilátero EC = CD = ED.

Observando el vértice B, podemos descubrir que : $m\measuredangle BEC = 90$

Luego el triángulo BEC es rectángulo isósceles (recto en E), en el cual : $x + 15° = 45°$

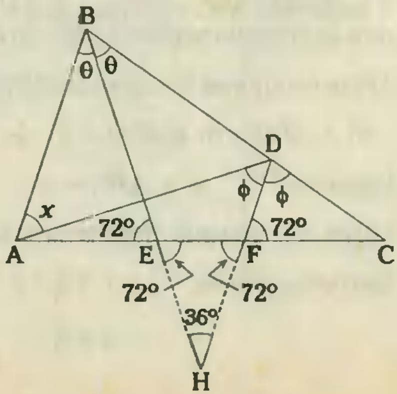
$$\therefore \qquad x = 30°$$

19.- En el ΔABC,se sabe que BE y DF son las bisectrices de los ángulos ABC y ADC respectivamente. Si además :∡AEB =∡DFC = 72°, calcular : x.



Resolución.-

Elaboremos un gráfico en el que se indiquen los ángulos iguales que se generan debido a las bisectrices BE y DF, asimismo prolongemos dichas bisectrices hasta que logren intersectarse en el punto H, con lo cual se habrá construído el ΔEFH .



Por dato podemos establecer que :

$$m\measuredangle FEH = m\measuredangle EFH = 72°$$

A continuación podemos calcular la medida del ∡ EHF:

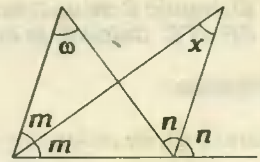
$$72° + 72° + m\measuredangle EFH = 180°$$

Luego : $m\measuredangle EFH = 36°$

Recordemos la siguiente propiedad : $x = \frac{\omega}{2}$

Para nuestro problema en el triángulo ABD : $36^{o} = \frac{x}{2}$

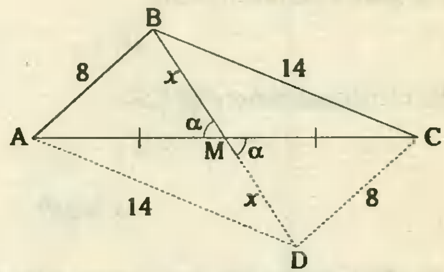
$\therefore \quad \mathbf{x = 72^{o}}$



20.- Dos lados de un triángulo miden 8 y 14 m . Hallar el mínimo valor entero de la mediana relativa al tercer lado.

Resolución.-

A partir del Δ ABC, prolongamos las mediana BM hasta D, tal que BM= MD. De este modo y por una simple inspección, habremos provocado que el cuadrilátero ABCD sea un romboide.



En el Δ BCD por el teorema de la desigualdad triangular tenemos :

$$14 - 8 < 2x < 14 + 8$$

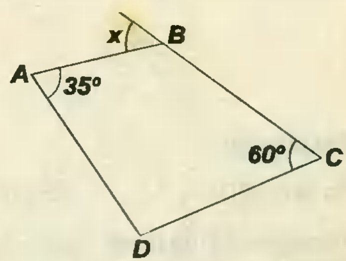
Efectuando, tendremos : $6 < 2x < 22$

Dividiendo por 2 : $3 < x < 11$

Los valores enteros de x serán : $x = \{4 ; 5 ; ....; 10\}$

Luego el mínimo de estos valores enteros es : $\mathbf{x_{mín} = 4}$

21.- Si AD = DC = BC ; calcular x , en la figura :



Resolución.-

El triángulo DBC es equilátero : BC = CD = BD

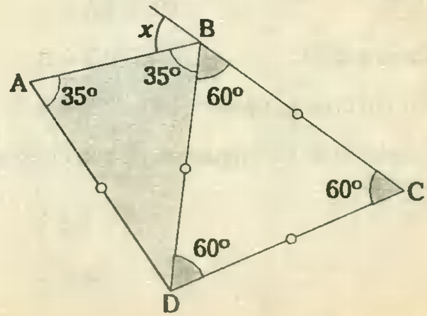
El triángulo ABD es isósceles AD = BD

Luego en el vértice B, se tendrá que :

$$x + 35^{o} + 60^{o} = 180^{o}$$

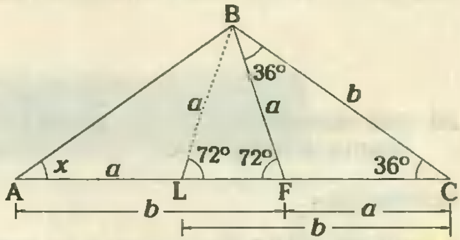
En consecuencia : $x = 180^{o} - 95^{o}$

$\therefore \quad \mathbf{x = 85^{o}}$



22.- El ángulo C de un triángulo ABC mide 36º. Se traza la ceviana $\overline{BF}$ de modo AF = BC y BF = FC. Calcular la m ∢ A.

<u>**Resolución.-**</u>



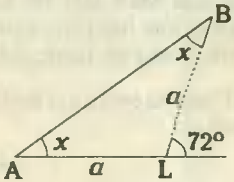
Trazamos $\overline{BL}$ de modo que : $m\sphericalangle BLC = 72°$

Luego los triángulos BLF y BLC resultan ser isósceles con lo cual se tiene :

$$BL = BF = a \quad y \quad BC = CL = b$$

Del gráfico deducimos que :

$$AL = a$$

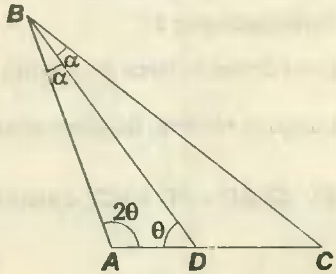


En el triángulo isósceles ALB :

$$x + x = 72$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 36°}$$

23.- En la figura adjunta se tiene AB = 6 y BC = 9. Calcular : CD.



<u>**Resolución.-**</u>

En el Δ ABD : $3\theta + \alpha = 180$

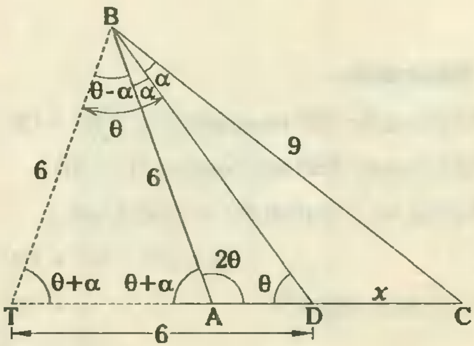
Trazamos $\overline{BT}$ de modo que : $m\sphericalangle BTA = \theta + \alpha$, luego :

$$BT = BA = 6$$

En el Δ BTD : $m\sphericalangle TBD = \theta$

Con lo cual se tiene : $BT = TD = 6$

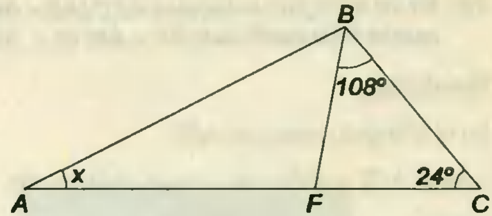
En el Δ TCB, los ángulos T y B son congruentes de donde :



$$6 + x = 9$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 3}$$

24.- Calcular "x", si : AF = BF + BC.



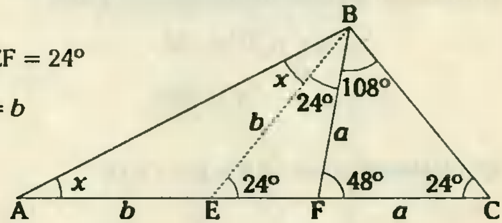
Resolución.-

En el Δ FBD : $m \measuredangle F = 2m \measuredangle C = 48°$

Trazamos la ceviana $\overline{BE}$, de modo que : $m \measuredangle BEF = 24°$

Luego : $BE = BC = b$; $BF = EF = a$; $EA = EB = b$

En el triángulo isósceles AEB : $2x = 24$

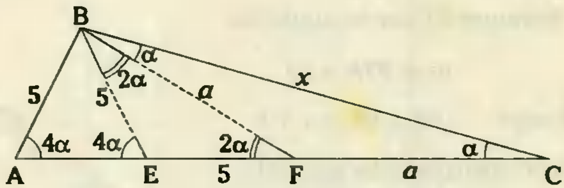


$\therefore$ $\quad x = 12$

25.- Se tiene un triángulo ABC , tal que : AB = 5 ; m ∡BAC = 4 m ∡BCA . Calcular el máximo valor entero de BC.

Resolución.-

En el triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BF}$, de modo que la $m \measuredangle FBC = m \measuredangle C = \alpha$



Entonces : $BF = FC = a$

Luego trazamos $\overline{BE}$, de modo que :

$m \measuredangle EBF = 2\alpha \Rightarrow BE = EF = AB = 5$

En el Δ EBF isósceles : $a < 10$ ... (1)

En el Δ ABF : $5 < a$ ... (2)

De (1) y (2) : $5 < a < 10$

Valores enteros de $a = \{6; 7; 8; 9\}$

El máximo valor de $a_{máx} = 9$

Finalmente en el ΔFBC isósceles : $x < a_{máx} + a_{máx}$

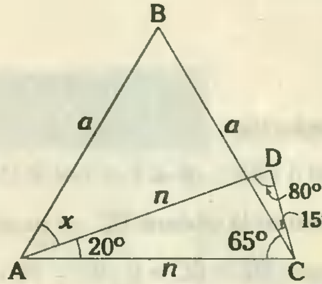
Reemplazando : $x < 9 + 9$

Luego : $x < 18$

$\therefore$ $\quad x_{máx}$. entero = 17°

26.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica exteriormente y relativo al lado $\overline{BC}$ el punto D de modo que AC = AD; m ∡ ADC = 80° y m ∡ BCD = 15°. Calcular la m ∡ BAD.

Resolución.-



En el triángulo isósceles ADC :

$m\measuredangle ACD = 80° \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle ACB = 65°$

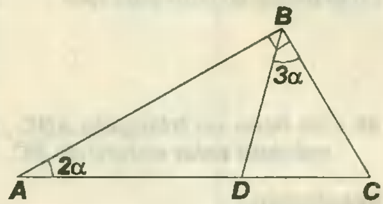
Luego : $m\measuredangle DAC = 20°$.

Finalmente en el triángulo isósceles ABC :

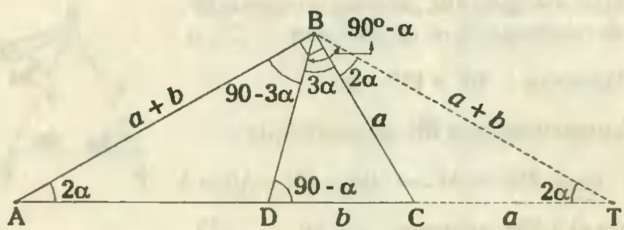
$$x + 20° = 65°$$

$$\therefore \quad x = 45°$$

27.- Calcular α; si : AB = BC + CD



Resolución.-



Trazamos $\overline{BT}$ con la condición :

$m\measuredangle BTA = 2a$,

Luego : $AB = BT = a + b$

En el triángulo isósceles BTD :

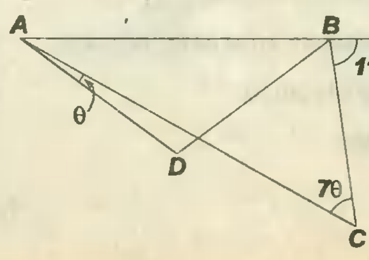
$BT = TD = a + b \Rightarrow CT = a$

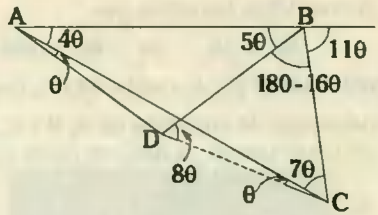
En el triángulo isósceles BCT : $m\measuredangle CBT = 2\alpha$

Luego : $3\alpha + 2\alpha = 90 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 6\alpha = 90$

$$\therefore \quad \alpha = 15°$$

28.- En la figura : AD = BD = BC ; calcular θ





Resolución.-

En el Δ ABC, por $\measuredangle$ exterior :

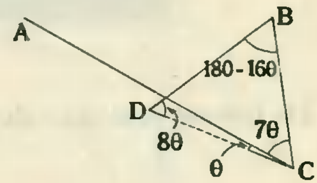
$$m\measuredangle BAC = 4\theta$$

En el Δ ADB: $m\ \ ABD = 5\theta$

En el triángulo isósceles DBC :

$$m\ \ DCB = 8\theta$$

De donde : $m\measuredangle ACD = \theta$



El Δ ADC es isósceles entonces : AD = DC

El triángulo DBC en realidad es equilátero con lo cual se tiene :

$$8\theta = 60 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{\theta = 7{,}5}$$

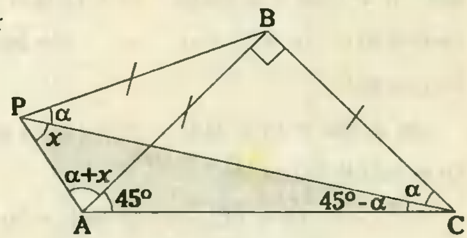
29.- Sobre el cateto $\overline{AB}$ de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se construye exteriormente el triángulo APB; de tal manera que : PB = AB = BC. Calcular : m $\measuredangle$ CPA.

Resolución.-

Si $m\measuredangle BPC = \alpha$, entonces la $m\measuredangle PCB = \alpha$

En el Δ PBA isósceles : $m\measuredangle P = m\measuredangle PAB = \alpha + x$

Finalmente en el Δ APC :



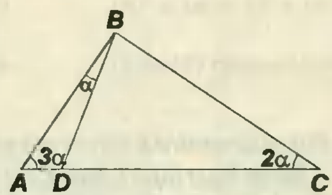
$$x + \alpha + x + 45^o + 45^o - \alpha = 180^o$$

Operando : $2x + 90^o = 180^o$

Donde : $2x = 180^o - 90^o \Rightarrow 2x = 90^o$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 45^o}$$

30.- En la figura; calcular "α^o", si : AC = 2 BD



Resolución.-

Se traza la ceviana $\overline{BM}$, de modo que : $m\measuredangle MBC = 2\alpha$

De este modo el Δ MBC es isósceles con : $BM = MC = BD = a$

Aplicando el teorema del ángulo exterior en el vértice M : $m\measuredangle DMB = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$

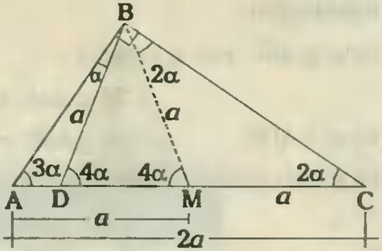
Por la misma razón, podemos concluir que en el vértice D : $m\measuredangle BDM = 4\alpha$

Podemos reconocer que el Δ DBM es isósceles, dado que : $m\measuredangle BMD = m\measuredangle BDM = 4\alpha$

Luego de la condición haremos que :

$$AC = 2a \quad \Rightarrow \quad BD = BM = MC = a.$$

En consecuencia M es punto medio de AC, luego : AM = a.

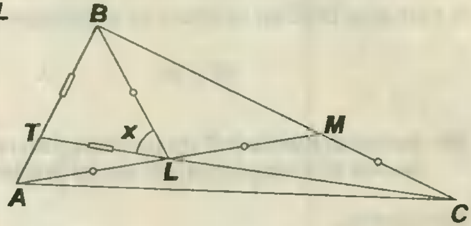


Esto nos indica que M equidista de A, B y C, por lo tanto podemos concluir que el Δ ABC es recto en B, de este modo :

$$3\alpha + 2\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad 5\alpha = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \alpha = 18^\circ$$

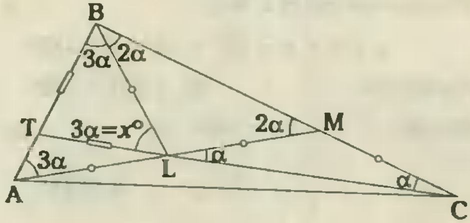
31.- Calcular x, si : AL = BL = LM = MC y BT = TL



Resolución.-

Sea : $m \measuredangle$ LCM = α, luego : $m \measuredangle$ LCM = α ; $m \measuredangle$ BML = 2α ; $m \measuredangle$ LBM = 2α

En el Δ BLC : $x = 2\alpha + \alpha \quad \Rightarrow \quad x = 3\alpha$ ... (1)



En el Δ BLC :

$m \measuredangle$ TBL = $m \measuredangle$ TLB = 3α (ángulo exterior)

En el Δ ALB; isósceles :

$m \measuredangle$ ABL = $m \measuredangle$ BAL = 3α

En el Δ ABM :

$3\alpha + 5\alpha + 2\alpha = 180 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18^\circ$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $\quad x = 54^\circ$

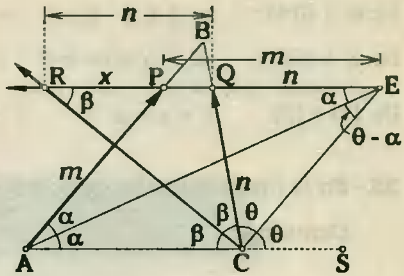
32.- Por el excentro E referente a $\overline{BC}$, lado de un triángulo ABC. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ la cual intersecta en Q a $\overline{BC}$, en P $\overline{AB}$ y en R a la bisectriz del ángulo A. Si AP = m y QC = n. Calcular RP.

Resolución.-

Por propiedad 2.4a del capítulo 2, se tiene : $\quad m \measuredangle$ QEC = $m \measuredangle$ ECS = θ

También : $\quad m \measuredangle$ EAC = $m \measuredangle$ PEA = α

De igual manera : $\quad m \measuredangle$ QRC = $m \measuredangle$ QCR = β



Resultando los triángulos isósceles :

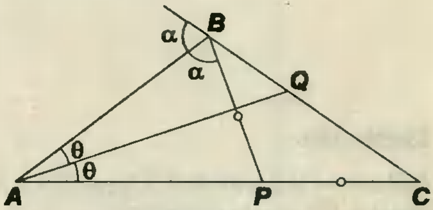
EQC, APE y RQC

Donde : QE = QC = n ; AP = PE = m ; RQ = QC = n

Del gráfico : RE = $2n = m + x$

$\therefore$ $x = 2n - m$

33.- Si : BP = PC ; AB = 6 y QC = 2, hallar AC.



Resolución.-

Trazamos $\overline{AS}$ tal que :

AS = AB = 6 y $m\measuredangle$ BCP = β ⇒ PBC = β

Luego : $m\measuredangle$ ASB = $m\measuredangle$ ABS = α

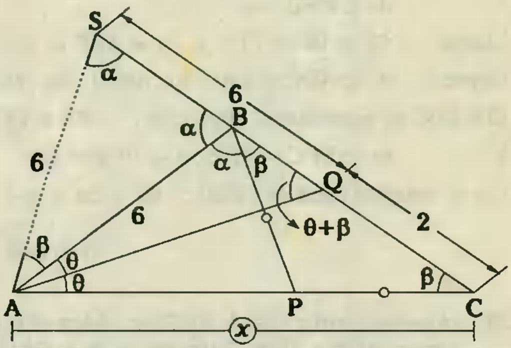
En el Δ SAB; por $\measuredangle$ exterior la $m\measuredangle$ SAB = β

El Δ ASQ es isósceles, entonces : SA = SQ = 6

Finalmente el Δ SCA es isósceles ya que :

α = β + 2θ ⇒ AC = CS

$\therefore$ $x = 8$



34.- En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BP}$. Si las medidas de los ángulos ACB, BAC y PBC son proporcionales a los números 1, 2 y 3 y AB = 4. Calcular el valor de PC.

Resolución.-

Sea $m\measuredangle$ ACB = α ⇒ $m\measuredangle$ BAC = 2α y $m\measuredangle$ PBC = 3α

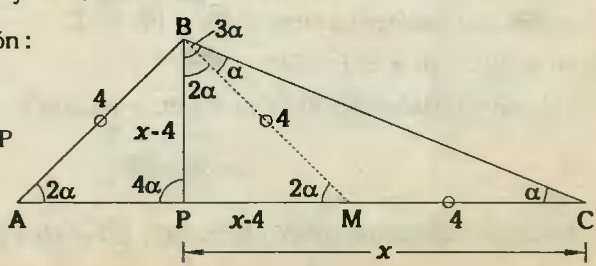
Trazamos la ceviana $\overline{BM}$ con la condición :

$m\measuredangle$ MBC = α

Luego : $m\measuredangle$ PBM = 2α = $m\measuredangle$ BMP

Entonces : AB = BM = MC = 4

Además : BP = PM = x - 4



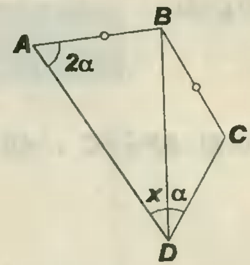
En el Δ BPM : $x - 4 + x - 4 > 4 \Rightarrow 6 < x$ ... (1)

En el Δ ABP : $m \measuredangle A < m \measuredangle P \Rightarrow x - 4 < 4 \Rightarrow x < 8$ ... (2)

De (1) y (2) : $6 < x < 8 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 7^o}$

35.- En la figura se sabe que : AB = BC y m ∡ ABC = 240 - 4α.

Calcular x.



Resolución.-

Aplicamos la propiedad 3.5j para el Δ ABD, trazando la ceviana interior $\overline{BP}$ con la condición :

$m \measuredangle PBD = \alpha$

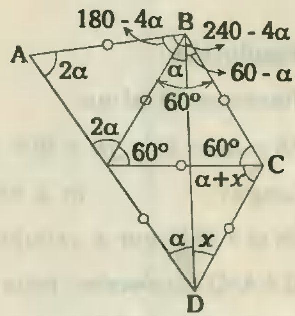
Luego : AB = BP = PD y $m \measuredangle ABP = 180 - 4\alpha$

Como : $m \measuredangle ABC = 240 - 4\alpha$ (dato) $\Rightarrow m \measuredangle PBC = 60^o$

El Δ PBC es equilátero, entonces : PB = BC = PC

Y : $m \measuredangle BPC = m \measuredangle m \measuredangle BCP = 60^o$

Por ∡ exterior para el Δ PCD : $60 + 2\alpha = \alpha + x + \alpha + x$



$\therefore \quad \mathbf{x = 30^o}$

36.- Interiormente a un Δ ABC se ubica el punto P tal que m ∡ PAC = 48º ; m ∡ PCA = 18º y m ∡ APB = 120º. Calcular la m ∡ PBC si AC = BP.

Resolución.-

Prolongamos $\overline{AP}$ hasta *L*, de modo que $m \measuredangle PCL = 66^o$

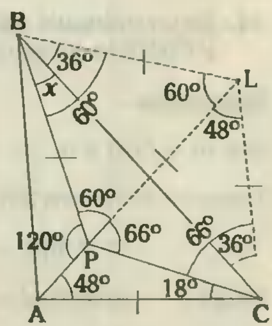
Luego $m \measuredangle PLC = 48^o$

Resultando que : AC = CL = PL = BP

El Δ BPL es equilátero, entonces BL = BP = PL

y $m \measuredangle PBL = m \measuredangle BLP = 60^o$

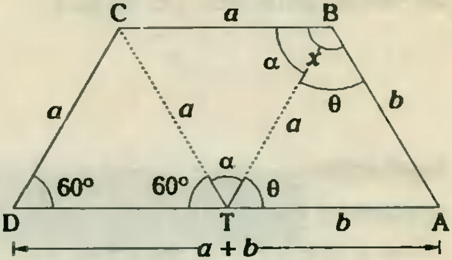
En el triángulo isósceles BLC : $m \measuredangle LBC = m \measuredangle LCB = 36^o$



$\therefore \quad \mathbf{x = 24^o}$

37.- En un trapezoide ABCD: BC = CD ; AD = AB + BC y m ∡ D = 60 º. Calcular : m ∡ B.

Resolución.-



Trazamos $\overline{CT}$ de modo que : DT = CD = a

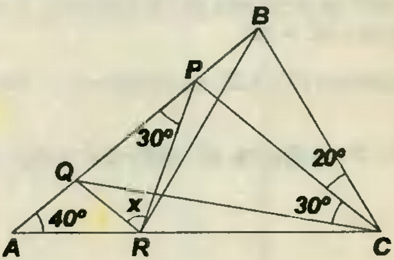
Luego el Δ CDT resulta ser equilátero con lo cual $m\measuredangle DTC = 60°$ y CT = a.

Del gráfico observamos los triángulos isósceles BCT y BAT resultando las siguientes igualdades.

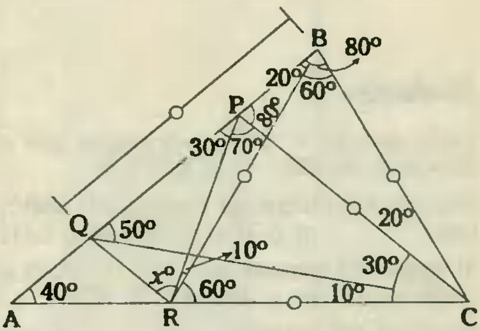
$$m\measuredangle CTB = \alpha \quad y \quad m\measuredangle BTA = \theta$$

Como : $x = \alpha + \theta$ y $\alpha + \theta = 120°$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{x = 120°}$

38.- Calcular x; si se sabe que AP = PC.



Resolución.-



El Δ APC es isósceles, entonces :

$$m\measuredangle PCA = 40$$

Luego : $m\measuredangle QCA = 40 - 30 = 10°$

Por $\measuredangle$ exterior : $m\measuredangle BPC = 40 + 40 = 80°$

El Δ PCB es isósceles, entonces : CP = CB

El Δ QBC es isósceles, entonces : BQ = BC

En el vértice P :

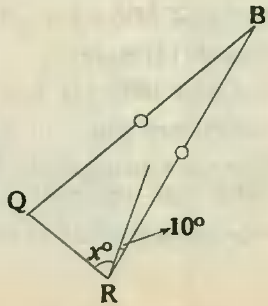
$$m\measuredangle RPC = 180 - (30 + 80) = 70°$$

El Δ PCR es isósceles, entonces : PC = RC

El Δ BCR resultó ser equilátero en consecuencia:

$$BR = BC = RC \text{ y } m\measuredangle RBC = m\measuredangle BRC = 60°$$

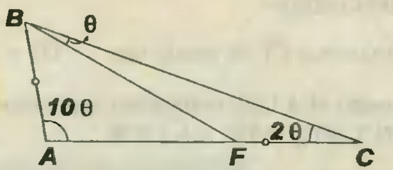
Finalmente en el Δ QBR isósceles :



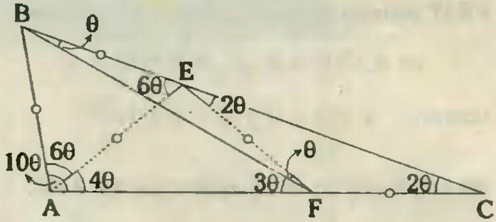
$$x + 10 = 80°$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 70°}$$

39.- En la figura: AB = FC. Hallar θ



Resolución.-



Trazamos la ceviana $\overline{FE}$ de modo que :

$m \measuredangle BFE = \theta \quad \wedge \quad m \measuredangle FEC = \theta$

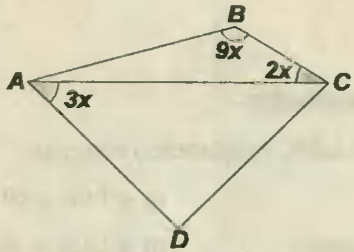
Resultando que : BE = EF = FC = AB

En el triángulo isósceles ABE $m \measuredangle ABE = 180 - 12\theta$ de donde : $m \measuredangle BAE = m \measuredangle BEA = 6\theta$

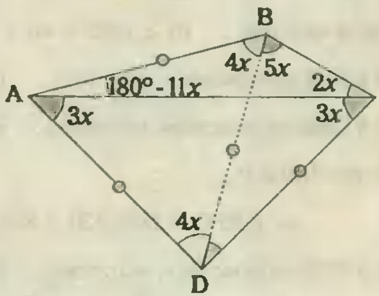
Δ AEF es isósceles ($m \measuredangle EAF \cong m \measuredangle EFA$) entonces AE = EF.

Entonces el Δ ABE es equilátero : $6\theta = 60$ $\therefore$ $\theta = 10°$

40.- En la figura, si : AB = DC = AD ; calcular x.



Resolución.-



Dado que AD = DC, concluímos que el ΔACD, es isósceles, por ello : $m \measuredangle ACD = 3x$

Completando todos los ángulos del ΔABC, tendremos que : $m \measuredangle BAC = 180° - 11x$ ...(1)

Al trazar $\overline{BD}$,encontramos que el ΔABD es isósceles, con lo cual : $m \measuredangle ABD = m \measuredangle ADB$

Completando todos sus ángulos, sabemos que se debe verificar que :

$m \measuredangle ABD + m \measuredangle ADB + (m \measuredangle BAC + 3x) = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) :

$2m \measuredangle ABD + 180° - 11x + 3x = 180° \Rightarrow m \measuredangle ABD = 4x$

Luego, concluímos que : $m \measuredangle ABD = m \measuredangle ADB = 4x$

De acuerdo con este resultado, podemos asegurar que en el Δ DBC : $m \measuredangle DBC = 5x$ y como la $m \measuredangle BCD = 5x$, entonces el triángulo DBC es isósceles, de modo que : BD = DC.

En consecuencia, el Δ ABD es equilátero, con lo cual : $4x = 60°$

$\therefore$ $x = 15°$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular la medida del ángulo θ

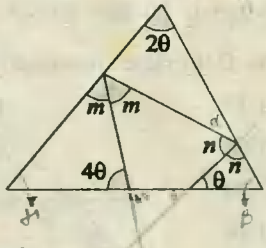
A) 22° 30'

B) 30°

C) 15°

D) 45°

E) 18°



2.- Calcular el ángulo *x*.

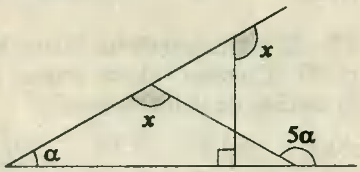
A) 100°

B) 110°

C) 115°

D) 130°

E) 120°



X + α = 5α   90 + α = X
X = 4α   90 + x/4 = x → 90 = 3x/4
x = 120

3.- Calcular *x* , si : *m // n* , y , *a // b*

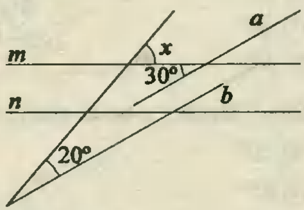
A) 20°

B) 25°

C) 30°

D) 40°

E) 50°



4.- En la figura, si la medida del ángulo ABC es obtuso, calcular el máximo valor entero de *x*.

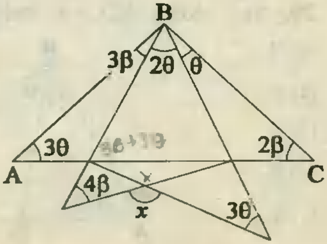
A) 105°

B) 145°

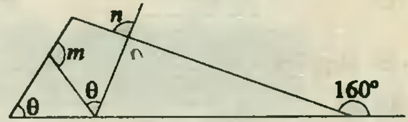
C) 132°

D) 149°

E) 138°



5.- Calcular "*m* - *n*", en la figura.



A) 10° B) 20° C) 30° D) 15° E) 18°

6.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), en $\overline{BC}$ se ubica el punto "D" tal que : AD = AC. Calcular la *m* ∡ ABC, si *m* ∡ BAD = 15°

A) 50° B) 30° C) 45° D) 40° E) 20°

7.- Si : *m // n* ; calcular *x*

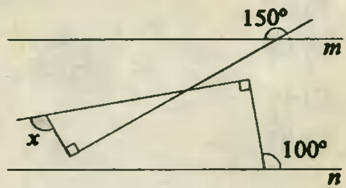
A) 100°

B) 110°

C) 120°

D) 130°

E) 140°



8.- Si : *m // n* ; calcular *x*

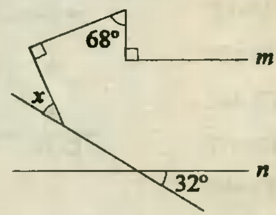
A) 23°

B) 36°

C) 42°

D) 48°

E) 30°



9.- Calcular *x*, en la figura.

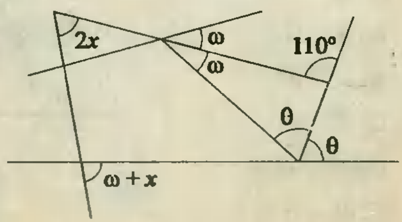
A) 40°

B) 50°

C) 70°

D) 60°

E) 45°

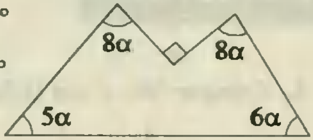


10.- Calcular α, en el gráfico.

A) 24° D) 15°

B) 20° E) 10°

C) 18°



11.- En el gráfico, hallar "x"

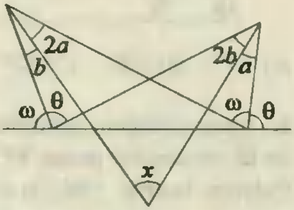
A) 30°

B) 45°

C) 60°

D) 75°

E) 90°



12.- Calcular x, en la figura.

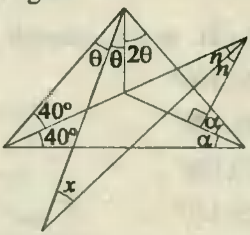
A) 80°

B) 60°

C) 40°

D) 45°

E) 30°



13.- En la figura : $\mathcal{L}_1 \,//\, \mathcal{L}_2$ y el ángulo ABC es obtuso. Calcular el mayor valor entero de x.

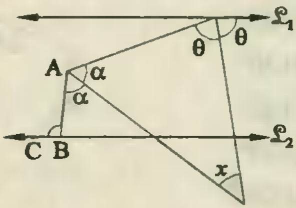
A) 44°

B) 45°

C) 46°

D) 47°

E) 48°



14.- En el gráfico; calcular "x" en función de "θ"

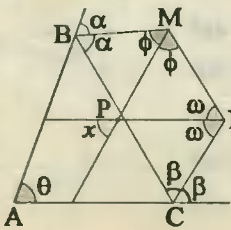
A) $60 - \theta$

B) $45 - \theta$

C) $90 - \theta$

D) $45 + \theta/4$

E) $45 + \theta/2$



15.- En el triángulo ABC, sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N respectivamente; de tal manera que :

AM = CN ; $m\measuredangle$ MAN = 10° y $m\measuredangle$ NAC = 50°

Calcular $m\measuredangle$ MNA; si : $m\measuredangle$ A = 40°

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

16.- Del gráfico mostrado; calcular "θ"

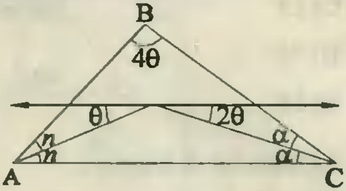
A) 15

B) 16°

C) 20

D) 18

E) 22



17.- El perímetro de un triángulo rectángulo es 30. ¿Cuántos valores enteros puede tomar la medida de la hipotenusa?

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2 E) 6

18.- Calcular x, en la figura.

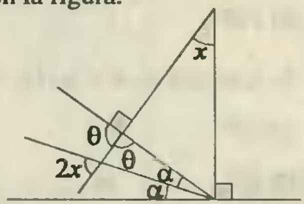
A) 24°

B) 30°

C) 32°

D) 36°

E) 45°



19.- Calcular x, en el gráfico

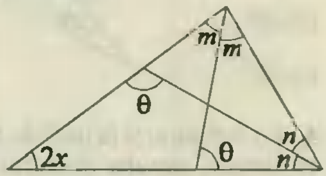
A) 20°

B) 25°

C) 30°

D) 35°

E) 40°



20.- Si : AB + AD = 4 ; hallar BC

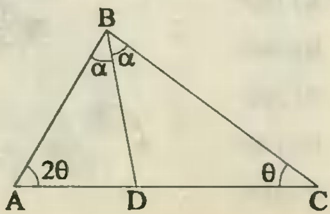
A) 3

B) 5

C) 7

D) 9

E) 4



21.- En la figura; calcular x.
Si : $2m\measuredangle ABD + m\measuredangle BCA = 130°$

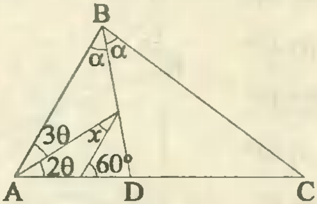
A) 40°

B) 50°

C) 30°

D) 45°

E) 35°



22.- En la figura mostrada; calcular $x + y$

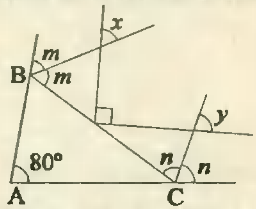
A) 110°

B) 115°

C) 120°

D) 130°

E) 140°



23.- Calcular x, en la figura.

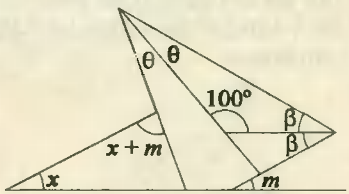
A) 8°

B) 10°

C) 12°

D) 13°

E) 15°



24.- Se tiene un triángulo ABC; si : AB = 5 ; $m\measuredangle BAC = 4(m\measuredangle BCA)$. Calcular el máximo valor entero de "BC"

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

25.- Las longitudes de los lados de un triángulo forma una progresión aritmética de razón r ($r \in \mathbb{Z}^+$). Hallar el mínimo valor entero que puede asumir el perímetro.

A) $6r - 1$ B) $6r$ C) $3(r - 1)$

D) $6r + 1$ E) $7r - 1$

26.- Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubican los puntos Q y P respectivamente y en el exterior relativo a $\overline{AB}$ se ubica en el punto R tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ y el triángulo QPR es equilátero. Calcular la $m\measuredangle BPR$; si $m\measuredangle RQA = 4\, m\measuredangle RPB$.

A) 10° B) 12° C) 20° D) 15° E) 14°

27.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) la bisectriz del ángulo exterior C intersecta en P a la prolongación de $\overline{BA}$. Calcular el máximo valor entero del $\measuredangle APC$

A) 46° B) 30° C) 60° D) 44° E) 51°

28.- En un triángulo ABC: $m\measuredangle A = 2m\measuredangle C$; si AB = a ($a \in \mathbb{Z}^+$) . Hallar la suma del mínimo y máximo valor entero de BC.

A) $2a$ B) $3a$ C) $4a$ D) $5a°$ E) $6a$

29.- Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC, (AC = BC), se ubican los puntos M y N respectivamente; de tal manera que: BM = MC , BN =AB y $m\measuredangle MBN = 20°$. Calcular $m\measuredangle BMN$.

A) 60° B) 40° C) 30° D) 20° E) 50°

30.- En la figura "I" es incentro y "E" es excentro relativo a $\overline{BC}$. Calcular "x".

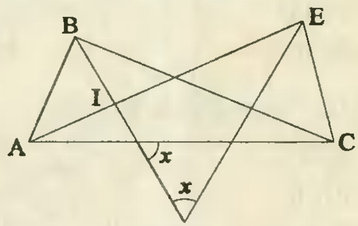
A) 45

B) 60

C) 75

D) 30

E) 50



31.- Las medidas de los ángulos internos de un triángulo escaleno son números enteros menores que 80°, la bisectriz de uno de sus ángulos interiores determina sobre el lado opuesto dos ángulos que son entre si como 7 a 13 es. Hallar la medida del menor ángulo del triángulo.

A) 25° B) 28° C) 24° D) 26° E) 27°

32.- En la figura las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ están expresados por números enteros . Si AB + BD = k. Hallar la suma del máximo y mínimo valor que toma BC.

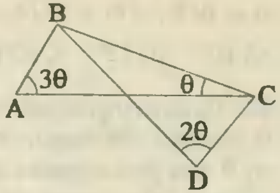
A) $2k + 1$

B) $2k - 1$

C) $2k + 2$

D) $k + 2$

E) k



33.- En la figura E es excentro de Δ ABC. Hallar el máximo valor entero de x.

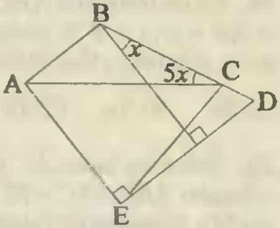
A) 21°

B) 22°

C) 23°

D) 24°

E) 25°



34.- Calcular x; si : AC = CB y MN = ML

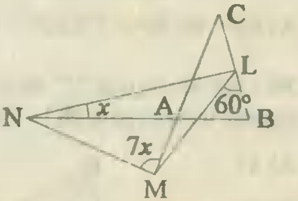
A) 8°

B) 10°

C) 12°

D) 14°

E) 16°



35.- Calcular x ; si AT = TQ.

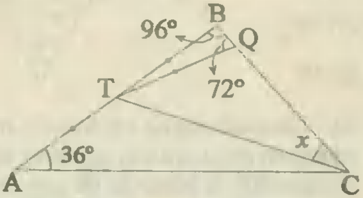
A) 20°

B) 30°

C) 40°

D) 50°

E) 60°



36.- Según el gráfico; AB = AD = DC , indicar que punto notables es "D" del triángulo ABC.

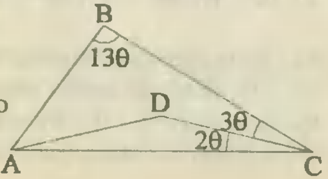
A) Baricentro

B) Ortocentro

C) Incentro

D) Circuncentro

E) Cevacentro



37.- Calcular x ($x \in \mathbb{Z}^+$) si : AC = AB = CD

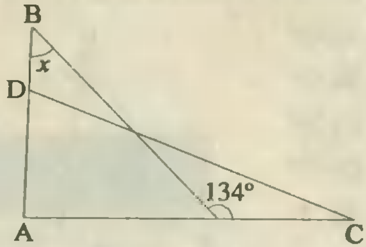
A) 39°

B) 41°

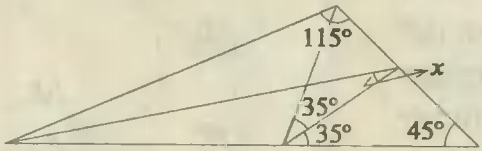
C) 43°

D) 45°

E) 46°

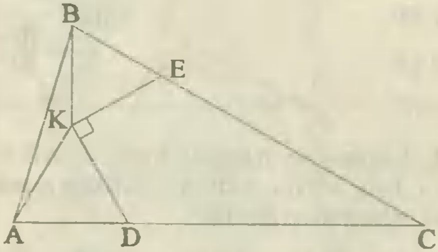


38.- Calcular x, en la figura.



A) 10° B) 15° C) 20° D) 25° E) 30°

39.- En la figura ¿Qué punto notable es "K" del Δ ABC, si los triángulos AKD Y BKE son equiláteros.



A) Incentro

B) Baricentro

C) Circuncentro

D) Ortocentro

E) Excentro

40.- Calcular x del gráfico.

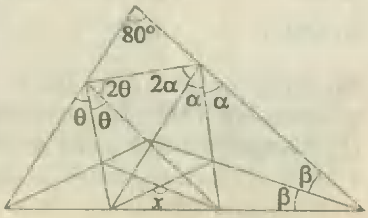
A) 105°

B) 100°

C) 115°

D) 125°

E) 160°



CAP. 5

triángulos II

5.1 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes, si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

5.2 CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS (≅)

1º CASO.- (A.L.A.)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes y el lado adyacente a ambos respectivamente congruentes.

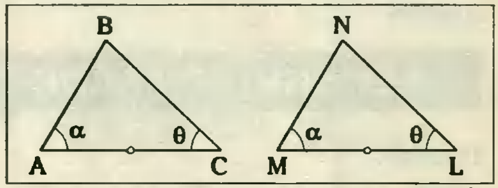


Fig. 5.1

$$\text{Si}: \begin{cases} AC = ML \\ \measuredangle A \cong \measuredangle M \\ \measuredangle C \cong \measuredangle L \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNL} \qquad \text{... (5.1)}$$

2º CASO.- (L.A.L.)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes.

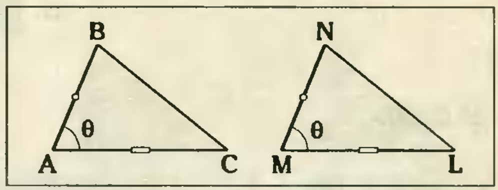


Fig. 5.2

$$\text{Si}: \begin{cases} AB = MN \\ \measuredangle A \cong \measuredangle M \\ AC = ML \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNL} \qquad \text{... (5.2)}$$

3º CASO.- (L.L.L.)

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.

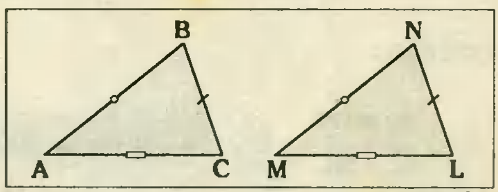


Fig. 5.3

$$\text{Si}: \begin{cases} AB = MN \\ BC = NL \\ AC = ML \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNL} \qquad \text{... (5.3)}$$

4º CASO.-

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y el ángulo que se opone al mayor de ellos respectivamente congruentes.

$$\text{Si}: \begin{cases} AB = MN \\ AC = ML \\ \measuredangle B \cong \measuredangle N \\ AC > AB \\ ML > MN \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNL} \quad \dots (5.4)$$

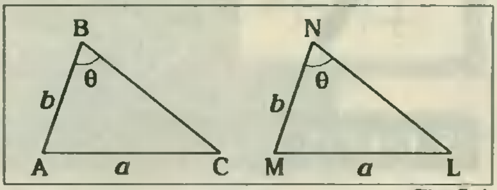


Fig. 5.4

Recomendación.-

Inmediatamente después de haber encontrado dos triángulos congruentes del gráfico de un problema, te recomiendo aplicar el criterio que dice : "A lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y recíprocamente a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes.

5.3 CONGRUENCIA DE TRIANGULOS RECTANGULOS

1º CASO.-

$$\text{Si}: \begin{cases} \measuredangle A \cong \measuredangle M \\ AC = ML \end{cases} \Rightarrow \boxed{⊿ ABC \cong ⊿ MNL} \quad \dots (5.5)$$

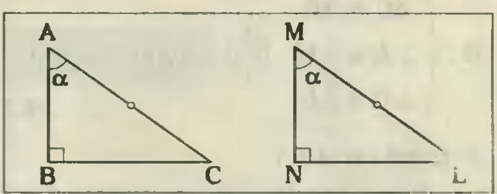


Fig. 5.5

2º CASO.-

$$\text{Si}: \begin{cases} AB \cong MN \\ \measuredangle C = \measuredangle L \end{cases} \Rightarrow \boxed{⊿ ABC \cong ⊿ MNL} \quad \dots (5.6)$$

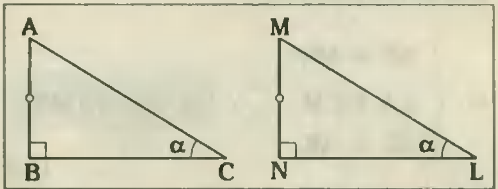


Fig. 5.6

3º CASO.-

$$\text{Si}: \begin{cases} AB = MN \\ AC = ML \end{cases} \Rightarrow \boxed{⊿ ABC \cong ⊿ MNL} \quad \dots (5.7)$$

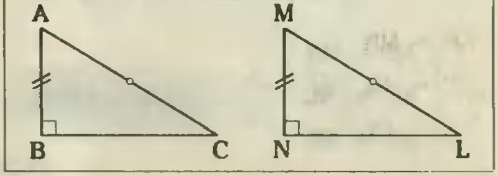


Fig. 5.7

4º CASO.-

Si : $\begin{cases} AB = MN \\ BC = NL \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle MNL}$ ... (5.8)

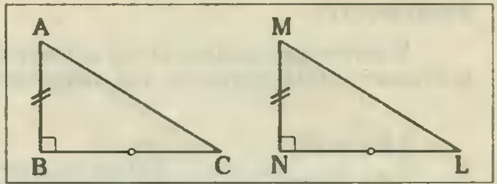


Fig. 5.8

Observación.-

Para la congruencia de los triángulos rectángulos nota que sólo es necesario que halla, dos elementos (2 lados ó 1 ángulo y 1 lado) iguales ó congruentes. A diferencia de la congruencia entre triángulos oblicuángulos donde se necesitan 3 elementos congruentes donde por lo menos un elemento debe ser lado.

5.4 TEOREMA DE LA BISECTRIZ DE UN ANGULO

«Todo punto de la bisectríz de un ángulo, equidista de sus lados».

Si : $\begin{cases} P \in \overrightarrow{OF} \\ \overline{PQ} \perp \overline{OA} \wedge \overline{PR} \perp \overline{OB} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{PQ = PR \text{ y } OR = OQ}$ ... (5.9)

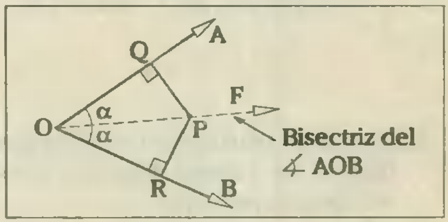


Fig. 5.9

RECIPROCO :

«Todo punto interior a un ángulo y que equidista de sus lados pertenece a su bisectríz ».

Si : $PQ = PR \Rightarrow \overrightarrow{OP}$ es bisectríz del ∡ AOB.

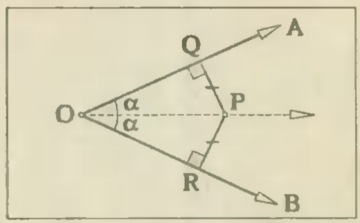


Fig. 5.10

5.5 TEOREMA DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

« Todo punto de la mediatríz de un segmento equidista de sus extremos ».

Sea $\mathcal{L}$ la mediatríz del segmento AB , entonces :

Si : $P \in \mathcal{L} \Rightarrow$ $\boxed{PA = PB}$ ... (5.10)

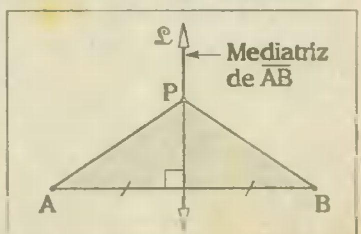


Fig. 5.11

RECIPROCO :

Si un punto equidista de los extremos de un segmento entonces, éste pertenece a la mediatríz del segmento.

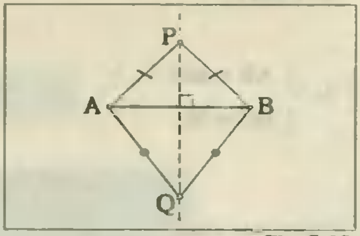


Fig. 5.12

$$\text{Si:}\ \begin{cases} PA = PB \\ QA = QB \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ} \text{ es mediatríz de } \overline{AB}$$

Consecuencias :

a) En un triángulo isósceles las líneas notables relativas a su base se confunden.

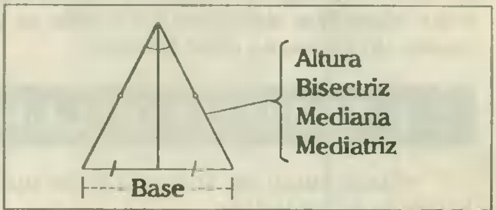


Fig. 5.13

b) Si en un triángulo una ceviana cumple con la función de 2 líneas notables, entonces el triángulo es isósceles.

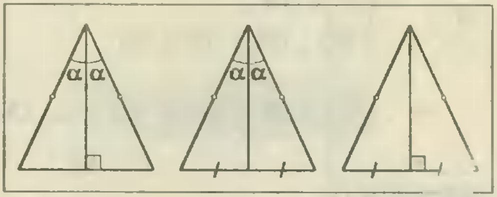
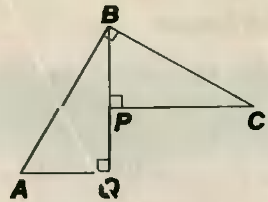


Fig. 5.14

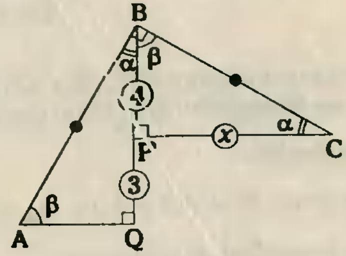
EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1ra PARTE)

1.- En la figura mostrada, si AB = BC ; BP = 4 y PQ = 3. Calcular PC.



Resolución.-

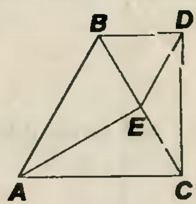
De la figura trasladando ángulos tenemos :



⊿ ABQ ≅ ⊿ BPC (caso A.L.A)

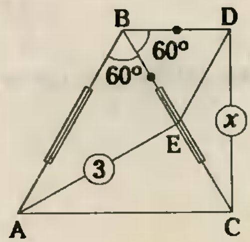
∴ $x = 7$

2.- En la figura los triángulos ABC y BDE son equiláteros. Calcular CD, si AE = 3



Resolución.-

Graficando los datos en la figura resulta que :

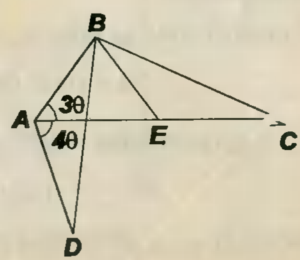


Δ ABE ≅ Δ DBC (caso L.A.L)

∴ $x = 3$

3.- De la figura si AB = BE, AD = EC y BD = BC.

Calcular θ



Resolución.-

Del gráfico : Δ BAD $\cong$ Δ BEC (caso L.L.L)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAD = m\measuredangle BEC = 7\theta$

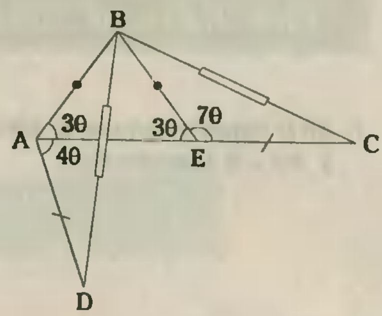
Además : Δ ABE isósceles

$m\measuredangle BAE = m\measuredangle BEA = 3\theta$

Entonces : $3\theta + 7\theta = 180^\circ$

$10\theta = 180^\circ$

$\therefore \quad \mathbf{\theta = 18^\circ}$



4.- En un triángulo ABC (B = 90º) la bisectriz exterior de Â y la prolongación de la altura $\overline{BH}$ se intersectan en "F" tal que : AB + AH = 4 y HF = 3. Calcular BH

Resolución.-

Por dato : AB + AH = 4 $\Rightarrow$ $a + b = 4$

Por propiedad de la bisectriz

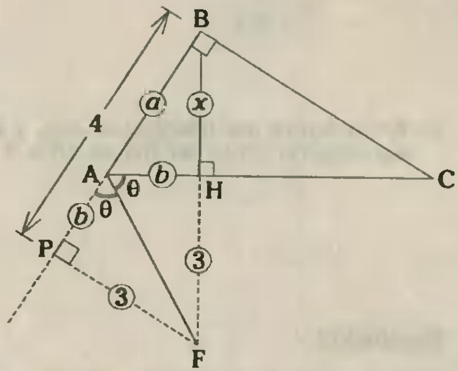
$AH = AP = b$

$HF = PF = 3$

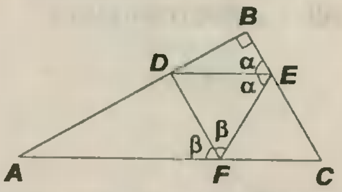
Luego ⊿ BPF es notable (37º y 53º)

$\Rightarrow \quad BF = 5 = x + 3$

$\therefore \quad \mathbf{x = 2}$



5.- En la figura AD = 2DB. Calcular m ∡ DF.



Resolución.-

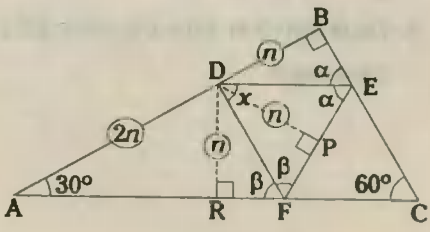
Aprovechando las bisectrices, por propiedad :

$DB = DP = DR = n$

⊿ ARD es notable : 30º ∧ 60º

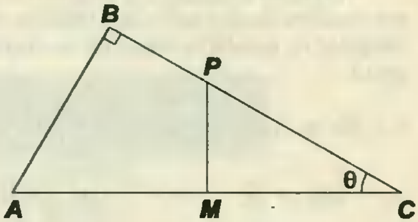
$\Rightarrow \quad m\measuredangle C = 60^\circ$

En el Δ FCE por propiedad dada en el capítulo anterior :



$$x = 90° - \frac{60°}{2} \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = 60°}$$

6.- De la figura si $\overline{PM}$ es mediatriz, PC = 2 BP, calcular θ



Resolución.-

Se une A y P, luego por propiedad de la mediatriz :

$$AP = PC = 2a$$

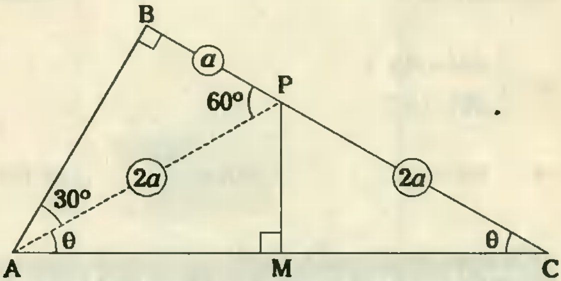
Δ APC isósceles :

$m \measuredangle PAC = m \measuredangle PCA = \theta$

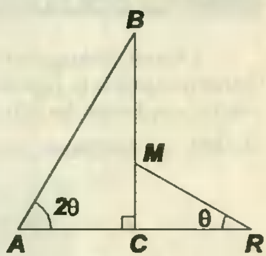
⊿ ABP es notable de 30° ∧ 60°

Por ∡ exterior : $\theta + \theta = 60°$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 30°}$



7.- De la figura adjunta BM = 2MC y AC = CR. Calcular θ



Resolución.-

Se une A y M, luego por propiedad de la mediatriz : AM = MC

Δ AMC isósceles : $m \measuredangle A = m \measuredangle R = \theta$

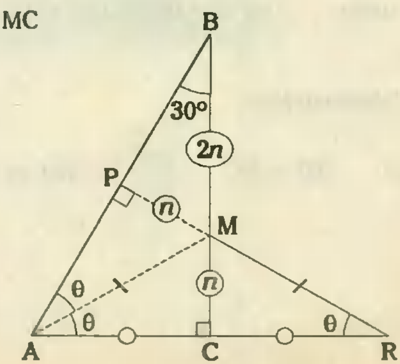
Luego por propiedad de la bisectriz : $MC = MP = n$

⊿ BPM es notable de 30° ∧ 60°

⊿ ACB : $2\theta + 30 = 90°$

$2\theta = 60°$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 30°}$



5.6 TEOREMA DE LA BASE MEDIA

En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de su correspondiente longitud .

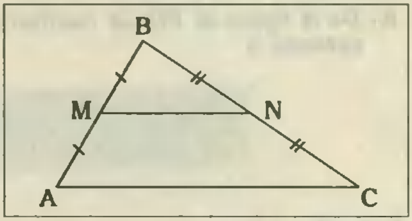


***Fig.* 5.15**

Si : $\overline{MN}$ es Base Media.

$\Rightarrow \quad \overline{MN} \,//\, \overline{AC} \quad \wedge \quad \mathbf{MN = \dfrac{AC}{2}}$ **... (5.11)**

Observación :

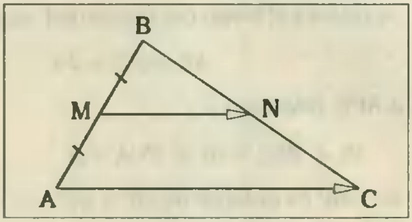


***Fig.* 5.16**

$$\text{Si : } \begin{cases} BM = MA \text{ y} \\ \overline{MN} // \overline{AC} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad BN = NC \quad \therefore \quad \mathbf{MN = \dfrac{AC}{2}}$ **... (5.12)**

5.7 TEOREMA DE LA MEDIANA EN UN TRIANGULO RECTANGULO

En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de su correspondiente longitud.

Si : $\overline{BM}$ es mediana , entonces :

$$\mathbf{BM = \frac{AC}{2}} \qquad \textbf{... (5.13)}$$

Luego : $\mathbf{m \measuredangle AMB = 2\, m \measuredangle C}$ **... (5.14)**

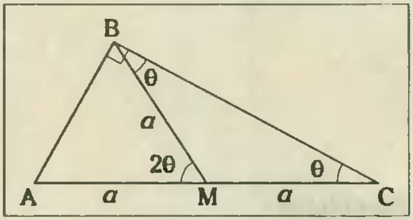


***Fig.* 5.17**

Observación :

Si : BM = MC ⇨ **$\overline{BM}$ es mediana**

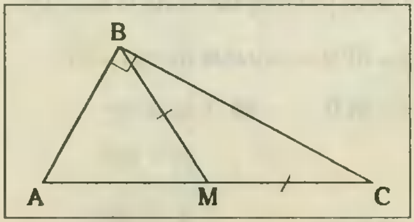


***Fig.* 5.18**

5.8 PROPIEDADES PARTICULARES EN LOS TRIANGULOS ISOSCELES

Dado el Δ ABC , donde : AB = BC , se cumple :

a) Si : $\begin{cases} P \in \overline{AC} \text{ (base)} \\ \overline{PM} \perp \overline{AB} \text{ y} \\ \overline{PN} \perp \overline{BC} \end{cases}$

$\Rightarrow$ **AH = PM + PN** ... **(5.15)**

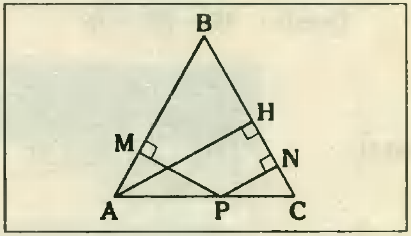


Fig. **5.19**

b) Si : $\begin{cases} P \in \text{ a la prolongación} \\ \text{de } \overline{AC} \text{ (base),} \\ \overline{PM} \perp \overline{AB} \wedge \overline{PN} \perp \overline{BC} \end{cases}$

$\Rightarrow$ **CH = PM - PN** ... **(5.16)**

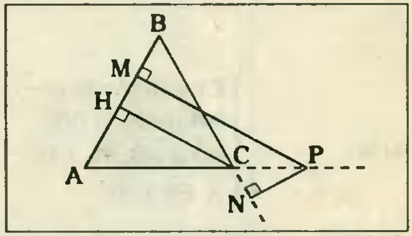


Fig. **5.20**

c) Si : $\begin{cases} P \in \overline{AC} \text{ (base)} \\ \overline{PM} \,//\, \overline{AB} \text{ y} \\ \overline{PM} \,//\, \overline{BC} \end{cases}$

$\Rightarrow$ **AB = BC = PM + PN** ... **(5.17)**

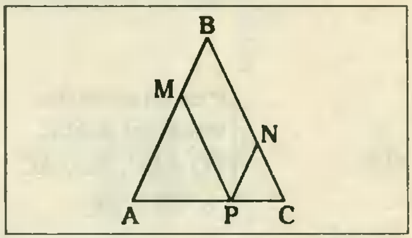


Fig. **5.21**

d) Si : $\begin{cases} \text{P es un punto de la pro-} \\ \text{longación de AC (base)} \\ \overline{PM} \,//\, \overline{BC} \wedge \overline{PN} \,//\, \overline{AB} \end{cases}$

$\Rightarrow$ **AB = BC = PM - PN** ... **(5.18)**

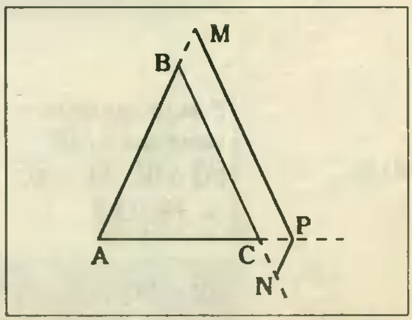


Fig. **5.22**

5.9 PROPIEDADES PARTICULARES EN LOS TRIANGULOS EQUILATEROS

Donde : AB = BC = AC

a) Si : P es un punto en el interior del Δ ABC; $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ $\wedge$ $\overline{PS} \perp \overline{AC}$

$\Rightarrow$ **BH = PQ + PL + PS** ... **(5.19)**

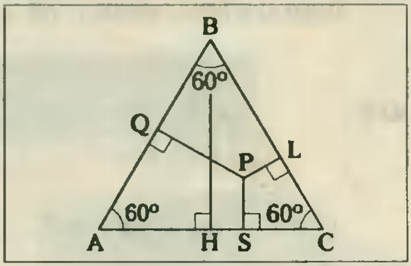


Fig. 5.23

b) Si : P es un punto exterior del Δ ABC; $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$; $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ $\wedge$ $\overline{PS} \perp \overline{AC}$

$\Rightarrow$ **BH=PQ + PS - PL** ... **(5.20)**

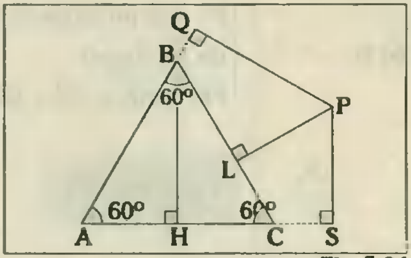


Fig. 5.24

c) Si : P es un punto interior del Δ ABC; $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$, $\overline{PL}$ // $\overline{AC}$ $\wedge$ $\overline{PS} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow$ **AB = PQ + PL + PS** ... **(5.21)**

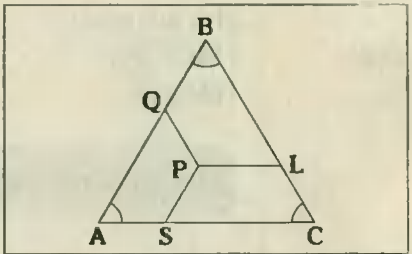


Fig. 5.25

d) Si : P es un punto exterior del Δ ABC; $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$; $\overline{PL}$ // $\overline{AC}$ $\wedge$ $\overline{PS}$ // $\overline{AB}$

$\Rightarrow$ **AB = PQ + PS - PL** ... **(5.22)**

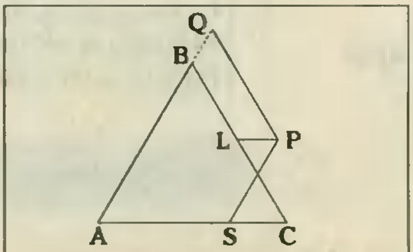
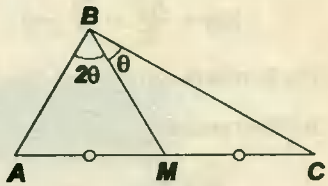


Fig. 5.26

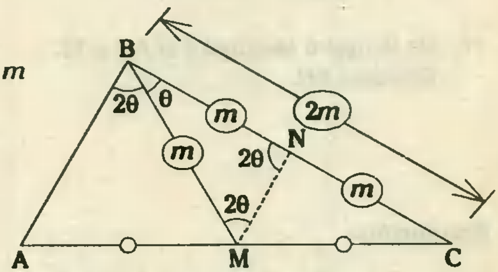
EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2DA PARTE)

8.- En la figura BC = 2BM. Calcular θ



Resolución.-

Se traza la base media $\overline{MN}$ entonces BN = NC = m

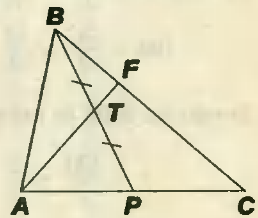


Δ MBN isósceles : $2\theta + 2\theta + \theta = 180°$

$$5\theta = 180°$$

∴ $\boxed{\theta = 36°}$

9.- Siendo $\overline{BP}$ una mediana. Hallar BC, si BF = 4

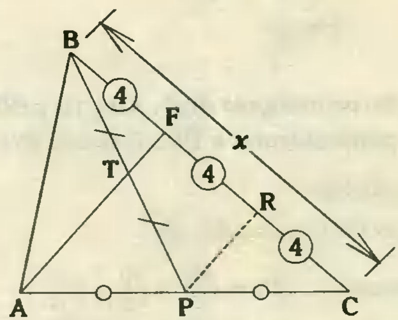


Resolución.-

Se traza $\overline{PR}$ // TF, por base media en Δ PBR :

F → punto medio de $\overline{BR}$

Entonces : BF = FR = 4

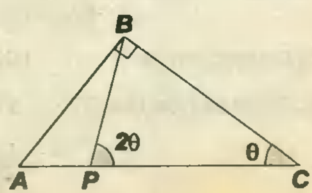


Δ AFC como $\overline{PR}$ // $\overline{AF}$ entonces $\overline{PR}$ es base media, entonces R es punto medio de FC.

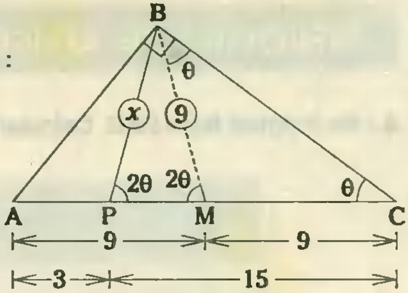
Entonces : FR = RC = 4

∴ $\boxed{x = 12}$

10.- Del gráfico calcular BP, Si AP = 3 y PC = 15.



<u>**Resolución.-**</u>



Se traza la mediana relativa a la hipotenusa $\overline{BM}$ entonces :

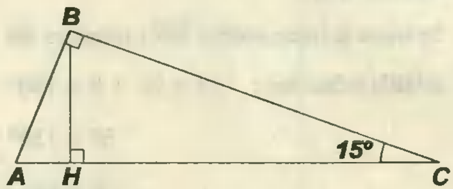
$$BM = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Por la misma propiedad : $m \measuredangle BMA = 2m \measuredangle C = 2\theta$

Δ PBM resulta isósceles

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 9}$

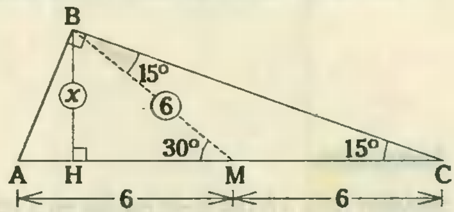
11.- De la figura mostrada si AC = 12. Calcular BH.



<u>**Resolución.-**</u>

Se traza la mediana relativa a la hipotenusa , por propiedad

$$BM = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



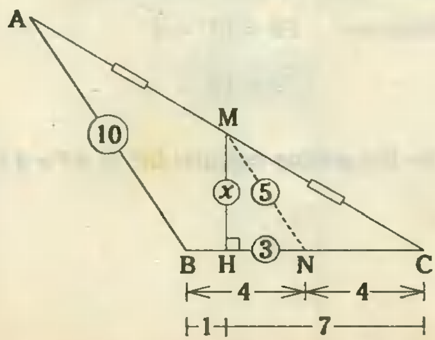
Luego ⊿ BHM es notable (30° ∧ 60°)

$$x = \frac{BM}{2} = \frac{6}{2}$$

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 3}$

12.- En un triángulo ABC : AB = 10 y BC = 8, desde el punto medio "M" de $\overline{AC}$ se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Calcular MH, si BH = 1.

<u>**Resolución.-**</u>



Se traza la base media $\overline{MN}$.

Entonces : $\quad MN = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Además "N" es punto medio de $\overline{BC}$

$\Rightarrow \quad BN = NC = 4$

En consecuencia : $\qquad HN = 3$

⊿ MHN es notable (37° ∧ 53°)

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 4}$

13.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle A = 50º$ y $m\measuredangle 70º$), calcular la longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas de A y C, sabiendo que AC = 8.

Resolución.-

⊾ ATC se traza la mediana relativa a la hipotenusa, por propiedad :

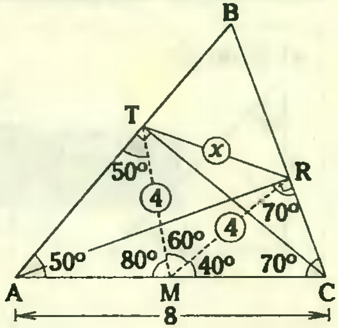
$$TM = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

⊾ ARC se traza la mediana relativa a la hipotenusa, por propiedad :

$$RM = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Luego Δ TMR es equilátero

$\therefore \quad x = 4$



14.- En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{CM}$. Si AB = 12, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{CM}$ y $\overline{HC}$.

Resolución.-

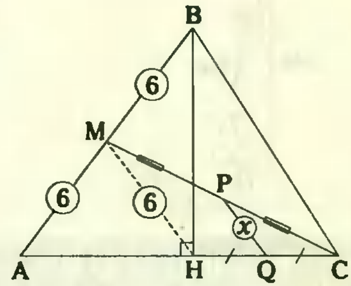
⊾ AHB se traza la mediana relativa a la hipotenusa, por propiedad :

$$HM = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Luego en el Δ MCH por base media

$$PQ = \frac{MH}{2} = \frac{6}{2}$$

$\therefore \quad x = 3$



15.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle A = 48º$ y $m\measuredangle C = 12º$), sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y F (puntos medios), luego se prolonga $\overline{AB}$ hasta el punto H, tal que : BH = BF. Hallar $m\measuredangle EHF$.

Resolución.-

Δ HBC es equilátero : $m\measuredangle B = m\measuredangle BHF = m\measuredangle BFH = 60°$

Al unir H con C el Δ HFC es isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle FHC = m\measuredangle HCF = 30°$$

⊾ AHC es rectángulo : $m\measuredangle AHC = 90°$

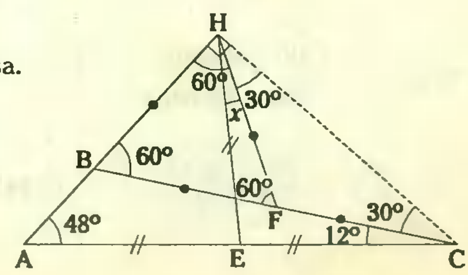
Por propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa.

$$AE = HE = EC$$

Luego Δ HEC isósceles : $m\measuredangle EHC = m\measuredangle HCE$

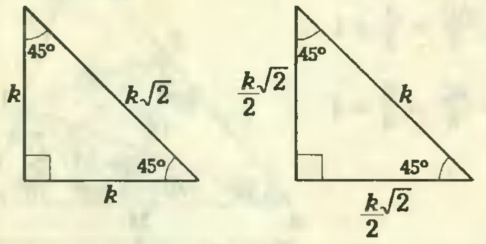
$$30° + x = 30° + 12$$

$\therefore \quad x = 12$

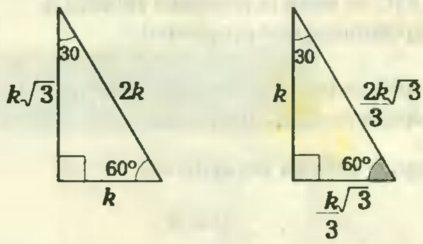


5.10 TRIANGULOS RECTANGULOS NOTABLES

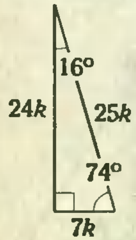
a) ◺ de 45°



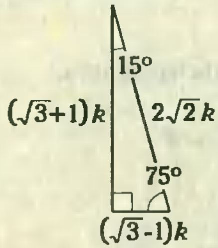
b) ◺ de 30° y 60°



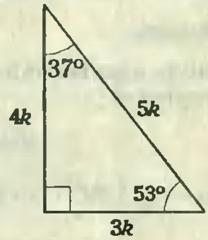
c) ◺ de 16° y 74°



d) ◺ de 15° y 75°



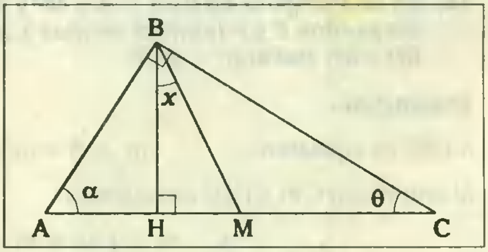
e) ◺ de 37° y 53°



5.11 PROPIEDADES EN LOS TRIANGULOS RECTANGULOS

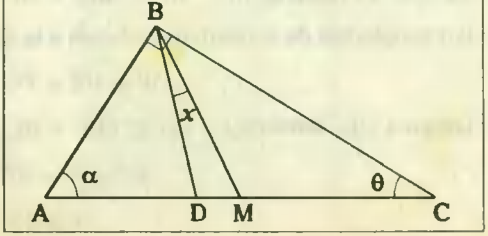
a) Si : $\begin{cases} \overline{BH} : \text{altura} \\ \overline{BM} : \text{mediana} \end{cases}$

⇨ $$x = \alpha - \theta \qquad \text{... (5.23)}$$

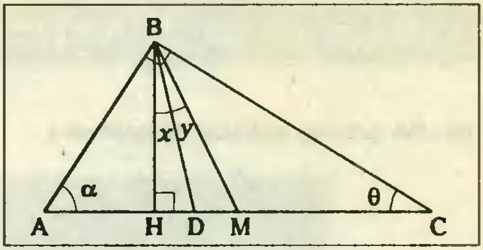


b) Si : $\begin{cases} \overline{BD} : \text{bisectríz} \\ \overline{BM} : \text{mediana} \end{cases}$

⇨ $$x = \frac{\alpha - \theta}{2} \qquad \text{... (5.24)}$$

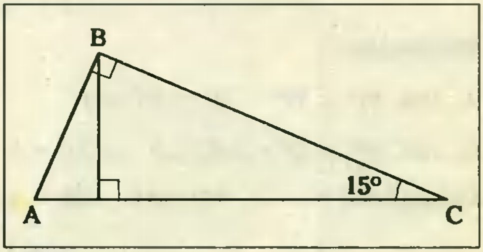


c) Si : $\begin{cases} \overline{BH} \text{ : altura} \\ \overline{BD} \text{ : bisectríz} \\ \overline{BM} \text{ : mediana} \end{cases}$



⇨ $\boxed{x = y}$ ... (5.25)

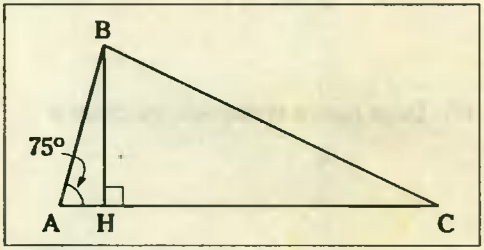
d) Si : $\begin{cases} m\measuredangle C = 15^\circ \\ \overline{BH} = \text{Altura} \end{cases}$



⇨ $\boxed{BH = \dfrac{AC}{4}}$ ... (5.26)

e) Consecuencia :

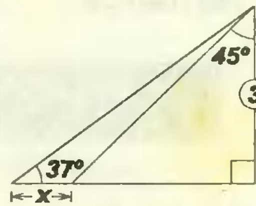
Si : $\begin{cases} BH = \dfrac{AC}{2} \\ m\measuredangle A = 75^\circ \end{cases}$



⇨ $\boxed{m\measuredangle C = 30^\circ}$ ... (5.27)

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (3RA PARTE)

16.- Del gráfico, calcular el valor de x



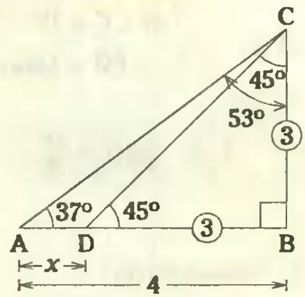
Resolución.-

⊾ DBC 45° ∧ 45° : BD = BC = 3

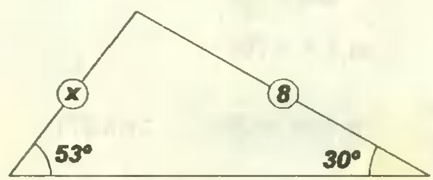
⊾ ABC 37° ∧ 53° : si BC = 3 ⇒ AB = 4

Del gráfico : AD = AB - DB = 4 - 3

∴ $x = 1$



17.- De la figura mostrada, calcular x



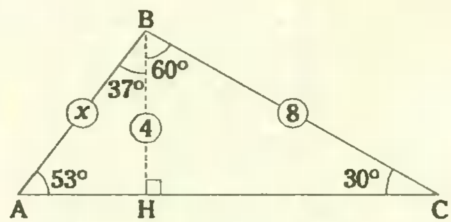
Resolución.-

Se traza la altura $\overline{BH}$ luego :

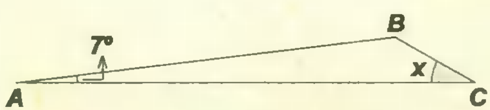
⊾ BHC 30° ∧ 60° : BH = 4

⊾ BHA 37° ∧ 53° : si BH = 4

∴ $x = 5$

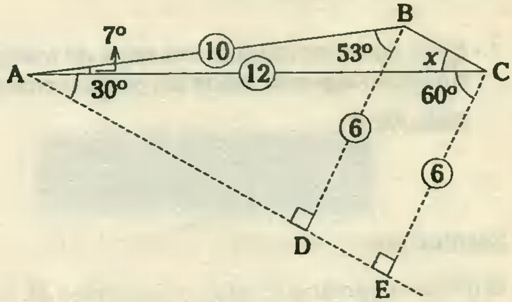


21.- En la figura mostrada, calcular x, si AB = 10 ∧ AC = 12



Resolución.-

Se construye 30° sobre $\overline{AC}$, luego se trazan las perpendiculares $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$.



⊾ ADB 37° ∧ 53° ⇒ BD = 6

⊾ ACE 30° ∧ 60° ⇒ CE = 6

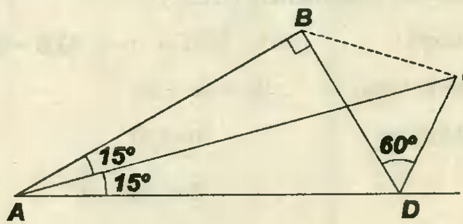
Del gráfico las distancias entre $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ son iguales.

Entonces : $\overline{BC} // \overline{AE}$

∴ **$x = 30°$**

22.- De la figura mostrada, calcular AD.

Si $AC = 7\sqrt{6}$



Resolución.-

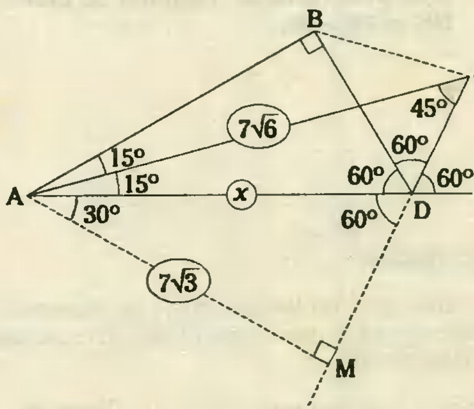
Se prolonga $\overline{CD}$ y se traza la perpendicular $\overline{AH}$

⊾ AHC 45° ∧ 45° : si $AC = 7\sqrt{6}$

⇒ $AH = HC = 7\sqrt{3}$

⊾ AHD 30° ∧ 60° : si $AH = 7\sqrt{3}$

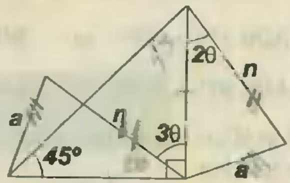
∴ **$x = 14$**



MISCELÁNEA

1.- En la figura se mestra una serie de triángulos e indican algunos datos del gráfico mostrado.

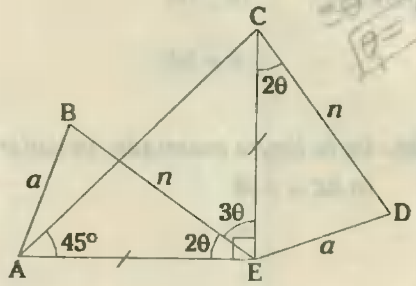
Calcular θ .



Resolución.-

El triángulo rectángulo AEC, es isósceles AE = CE

Ahora observamos que el Δ ECD, tienen las mismas características, que el Δ ABE entonces son congruentes. Es decir Δ ABE , $\cong$ Δ EDC, esto afirmamos por el caso de congruencia (L.L.L.)



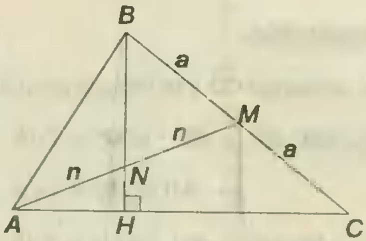
Luego : $m\measuredangle ECD = m\measuredangle AEB = 2\theta$

Por lo tanto : $2\theta + 3\theta = 90^o$

Entonces : $5\theta = 90^o$

$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 18^o}$

2.- A partir del gráfico mostrado, se pide calcular NH, si BH = 36.



Resolución.-

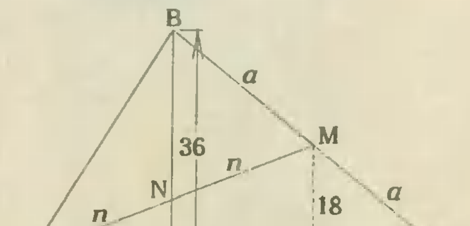
Siempre que en los triángulos se muestren varios puntos medios, te sugiero utilizar el teorema de los puntos medios.

En este caso trazamos $\overline{MQ} \perp \overline{AC}$, entonces : HQ = QC = m y MQ = 18.

En el ◺ AQM : AH = HQ = m

Luego : $NH = \dfrac{MQ}{2}$ $\Rightarrow$ $NH = \dfrac{18}{2}$

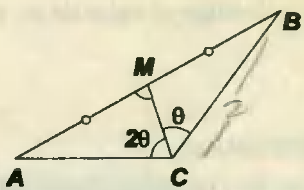
$\therefore$ **NH = 9**



3.- En la figura mostrada se sabe que :

AM = MB y BC = 2 CM

Con estros datos se pide calcular : θ



Resolución.-

Del dato hacemos : BC = 2 C M = 2*a*

Prolongamos $\overline{CM}$ hasta "Q" tal que : CM = MQ = *a*

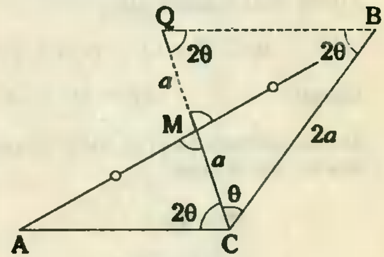
Ahora observamos que : Δ AMC≅ΔBMQ (L.A.L.)

Entonces : $m\measuredangle Q = m\measuredangle QBC = m\measuredangle ACM = 2\theta$

Finalmente en el Δ QBC : $\theta + 2\theta + 2\theta = 180°$

En consecuencia : $5\theta = 180°$

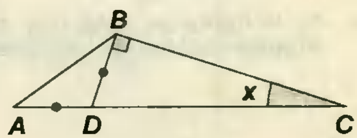
$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 36°}$



4.- En la figura mostrada se sabe que :

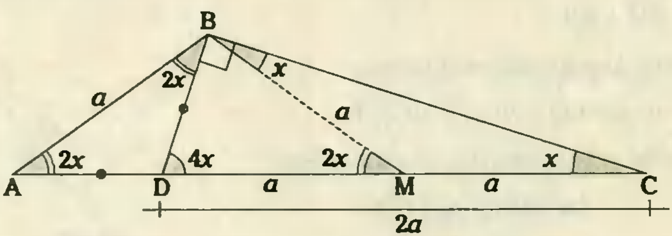
DC = 2.AB

Calcular la medida del ángulo ACB = x .



Resolución.-

Del dato hacemos : DC = 2 AB = 2*a* . Luego en el ⊾ DBC, trazamos la mediana $\overline{BM}$ relativa a la hipotenusa , entonces : BM = *a*.



Luego sabemos que : $m\measuredangle A = m\measuredangle BMD = 2x$

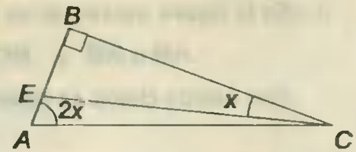
Pero : $m\measuredangle BDC = 2x + 2x = 4x$

Finalmente en el ⊾ DBC : $4x + x = 90°$

Por consiguiente : $5x = 90°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 18°}$

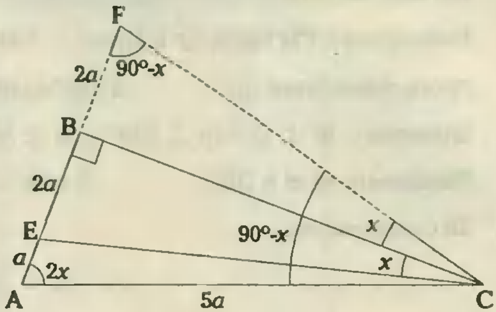
5.- Calcular el valor de x^o, si : BE = 2.AE



Resolución.-

Del dato hacemos : BE = 2.AE = $2a$ .Luego construimos el $\triangle$ BFC $\cong$ $\triangle$BEC, entonces :

BE = FB = $2a$ y $m\measuredangle$ BCE = $m\measuredangle$ FCB = x



Ahora observamos que :

$$m\measuredangle F = m\measuredangle FCA = 90^o - x$$

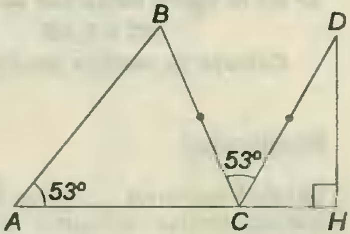
Luego : AF = AC = $5a$

En consecuencia el $\triangle$ ABC es notable aproximado , en el cual :

$$2x = 53^o$$

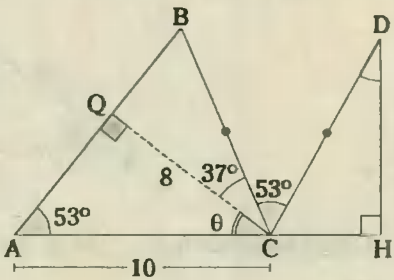
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 26^o\ 30'}$$

6.- En la figura se sabe que AC = 10 , además de los ángulos mostrados . Se pide hallar la medida de DH.



Resolución.-

Trazamos $\overline{CQ} \perp \overline{AB}$



Completando ángulos observamos que :

$$:m\measuredangle BCQ = m\measuredangle CDH = \theta$$

Pero como BC = CD, entonces se verifica que :

$$\triangle BQC \cong \triangle CHD$$

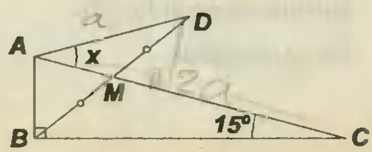
Luego : DH = QC

Pero en el $\triangle$ AQC : QC = 8

$$\therefore \quad \mathbf{DH = 8}$$

7.- En la figura mostrada se sabe que :

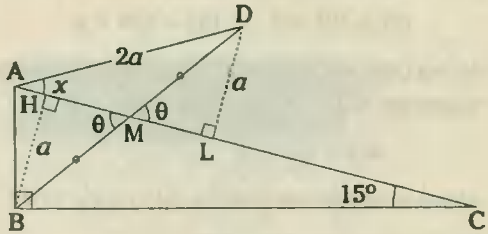
AC = 2 AD y BM = MD . Calcular : x .



Resolución.-

Hacemos : $AD = 2a \Rightarrow AC = 4a$. En el ⊿ ABC de 15° y 75°; la altura BH es :

$$BH = \frac{4a}{4} = a$$



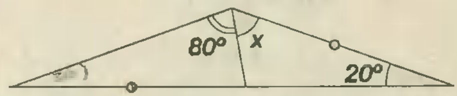
Si ahora trazamos : $\overline{DL} \perp \overline{AC}$, resulta que :

⊿ BHM ≅ ⊿ MLD $\Rightarrow$ BH = DL = a

Finalmente en el ⊿ ALD : AD = 2 DL

$\therefore \quad$ **x = 30°**

8.- Calcular el valor de «x» para la figura mostrada :



40+80+x=180

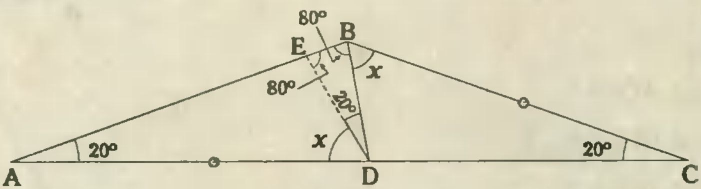
x = 60

Resolución.-

En el Δ ABD, trazamos la ceviana $\overline{DE}$, de manera que la $m \measuredangle BDE = 20°$.

Entonces : $m \measuredangle EDA = x$ ($\measuredangle$ exterior), ya que : $m \measuredangle ADB = 20° + x$

El Δ EBD, es isósceles dado que : BD = ED.



Ahora observamos que : Δ AED ≅ Δ CDB (L.A.L.)

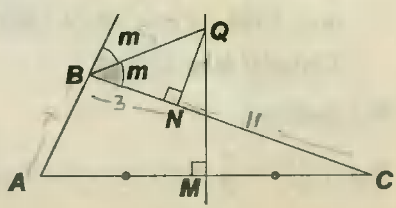
Luego se verifica que : $m \measuredangle C = m \measuredangle A = 20°$

Finalmente en el Δ ABC : $20° + 80° + x + 20° = 180°$

Donde : $x = 180° - 120° \Rightarrow$ **x = 60°**

9.- En la figurase pide calcular la medida de AB , si :

BN = 3 y NC = 11



Resolución.-

En primer lugar trazamos $\overline{QP}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que por propiedad de bisectríz, se sabe que :

$BN = PB = 3$ y $PQ = QN = b$

Ahora utilizando la propiedad de la mediatíz, trazamos $\overline{AQ}$ y $\overline{QC}$, verificándose que :

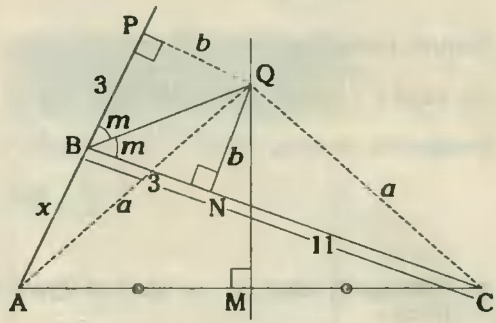
$AQ = QC = a$

Ahora observamos que ⊾ APQ ≅ ⊾ CNQ

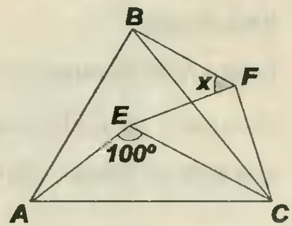
Luego : $AP = NC$

$\Rightarrow$ $AB + 3 = 11$

$\therefore$ $\mathbf{x = 8}$



10.- Sabiendo que los triángulos ABC y EFC son equiláteros, se pide calcular el valor de x .



Resolución.-

Sea $m\measuredangle ACE = \theta$

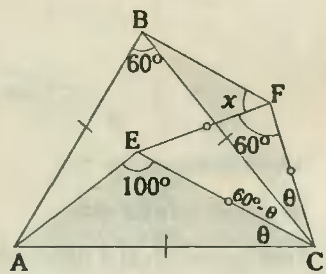
$\Rightarrow$ $m\measuredangle BCE = 60 - \theta$

Luego : $m\measuredangle BCF = \theta$

Entonces : $\Delta BFC \cong \Delta AEC$ (L. A. L)

Luego : $x + 60 = 100$

$\therefore$ $\mathbf{x = 40°}$



11.- En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ de tal manera que :

$m\measuredangle HBA = 2\,m\measuredangle C$, y , $3AH = 2HC$.

Calcular la $m\measuredangle C$.

Resolución.-

Dato : $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{2}{3}$; esto se puede desdoblar así : $AH = 2a$ y $HC = 3a$.

Prolongamos $\overline{AB}$ y luego trazamos $\overline{CQ}$ perpendicular a dicha prolongación.

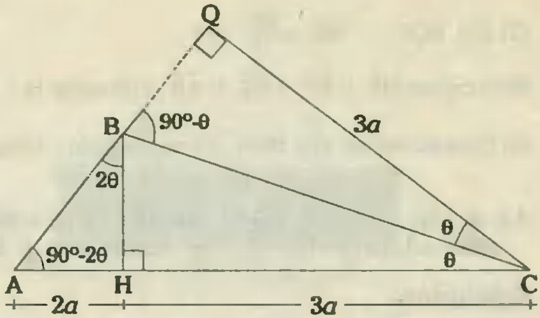
Ahora observamos que ⊿BHC ≅ ⊿ BQC.

Entonces : $QC = HC = 3a$

Luego el ⊿ AQC es notable aproximado, en el cual :

$$2\theta = 53^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 53^\circ/2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 26^\circ\,30'}$$



12.- En un triángulo ABC se sabe que : m $\measuredangle$ A = 37º y AC = 5 AB .Con estos datos se pide calcular la m $\measuredangle$ C .

<u>Resolución</u>.-

Del dato hacemos : $AC = 5\ AB = 5a$. A continuación prolongamos $\overline{AB}$, luego trazamos $\overline{CH}$ perpendicular a dicha prolongación.

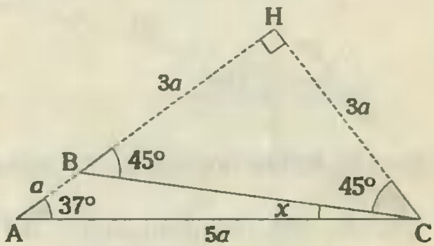
El ⊿ AHC es notable aproximado, entonces : $HC = 3a$ y $AH = 4a$

Pero : $AB = a \quad \Rightarrow \quad BH = 3a$

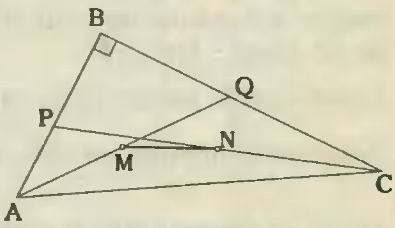
De esto resulta que el ⊿ BHC es isósceles

En consecuencia : $x + 37^\circ = 45^\circ$ ($\measuredangle$ exterior)

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 8^\circ}$$



13.- En la figura mostrada, se sabe que M es punto, medio de AQ, y N es punto medio de CP. Si además se sabe que : AP = 6 y QC = 8 ; se pide calcular la medida del segmento MN.

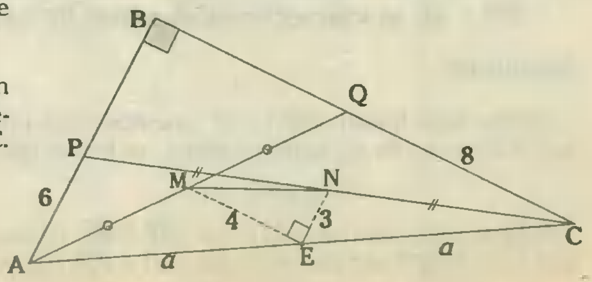


<u>Resolución</u>.-

Dado que se conocen las longitudes de AP y QC, ubicaremos el punto medio "E" de $\overline{AC}$, de modo que : $AE = EC = a$

Luego trazamos $\overline{ME}$ y $\overline{EN}$, con la intención de utilizar el teorema de los puntos medios en dos triángulos : Δ APC y Δ AQC. Veamos :

$$\Delta APC : \quad NE = \frac{AP}{2} = 3$$



En el Δ AQC : $ME = \dfrac{QC}{2} = 4$

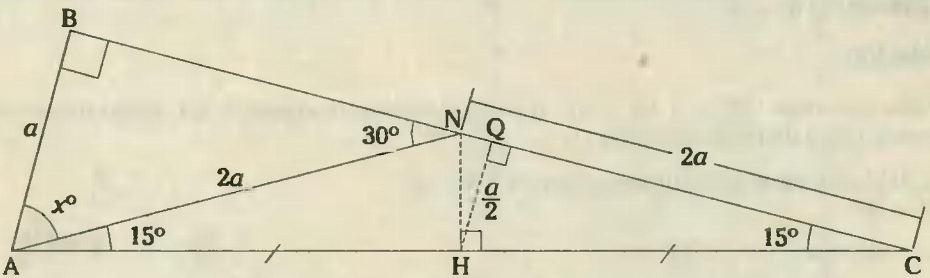
Pero como $\overline{ME}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{NE}$ // $\overline{AB}$, entonces la : $m \measuredangle MEN = 90°$

En consecuencia el Δ MEN , es rectángulo y Pitagórico : $\therefore$ **MN = 5**

14.- En un triángulo ABC , donde m ∡ B = 90º , se traza la ceviana interior $\overline{AN}$, tal que NC = 2.AB y m ∡ C = 15º. Hallar la m ∡ BAN

Resolución.-

Del dato , se sabe que : NC = 2.AB = 2 . A continuación trazamos $\overline{NH} \perp \overline{AC}$, luego $\overline{HQ} \perp \overline{NC}$, para lo cual mostramos el gráfico adjunto en el que se indican dichos trazos.



En el ⊿ HNCde ángulos 15°-75°, se sabe por propiedad , que: $HQ = \dfrac{2a}{4} \Rightarrow HQ = \dfrac{a}{2}$

En el ⊿ ABC, observamos que : $\overline{QH}$ // $\overline{AB}$, donde se reconoce que : $\overline{QH} = \dfrac{AB}{2}$ ... ( )

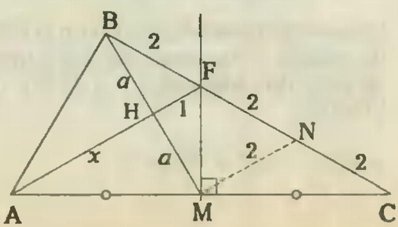
De acuerdo con el teorema de los puntos medios , deducimos que la relación (*) solo será posible , si H es punto medio de AC . Esto significa que : AH = HC, es decir $\overline{NH}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$. Luego : AN = 2a

A continuación , por ser ángulo exterior se reconoce que : $m \measuredangle ANC = 30°$.

Finalmente deducimos que el ⊿ ABN , es notable : $\boldsymbol{x = 60°}$

15.- En un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{BC}$ en F; asimismo, la mediana $\overline{BM}$ y $\overline{AF}$ se intersectan en H, siendo BF = 2 y BH = HM. Hallar la medida de AH.

Resolución.-



En primer lugar trazamos $\overline{MN}$ // $\overline{AF}$, entonces de acuerdo con el Teorema de los puntos medios , se tendrá que :

FN = NC

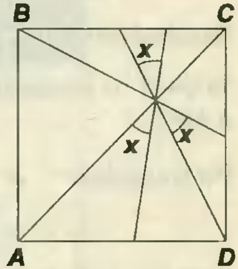
A continuación , reconocemos que : $\overline{HF}$ // $\overline{MN}$, de modo que en el Δ MBN, al conocerse que : BH = HM , deducimos que : BF = FN = 2 y NC = 2

Pero : MN = FN = NC = 2

Entonces sabemos que : HF = 1. Luego en el Δ AFC isósceles :

AF = FC ⇒ $x + 1 = 2 + 2$ ⇒ $\boldsymbol{x = 3}$

16.- A partir del gráfico mostrado, se pide calcular la medida de x, si ABCD es un cuadrado.



<u>Resolución</u>.-

Del gráfico observamos que AC es una diagonal del cuadrado y se verfica una congruencia de triángulos :

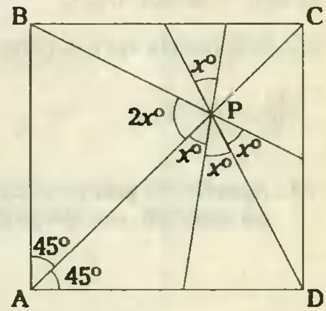
Δ BAP ≅ Δ PAD (L.A.L)

⇒ $m\measuredangle APD = m\measuredangle BPA = 2x$

En el punto P : $2x + x + x + x = 180$

Donde : $5x = 180$

∴ $\boldsymbol{x = 36}$



17.- Interiormente a un triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto P. Calcular la m∡BPC para que la suma PA + PB + PC sea mínima.

<u>Resolución</u>.-

Sean AP = a ; BP = b y CP = c , luego por condición del problema, la suma : $a + b + c$, debe ser lo mínimo posible. A contnuación construimos los triángulos equiláteros PBQ y ABT , luego :

ΔPBQ : PB = BQ = PQ = b

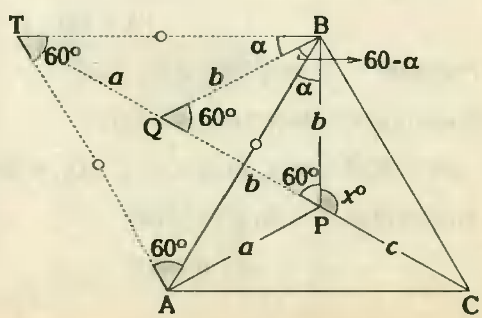
Δ ABT : AB = BT = AT

⇒ $m\measuredangle TBA = m\measuredangle PBQ = 60°$

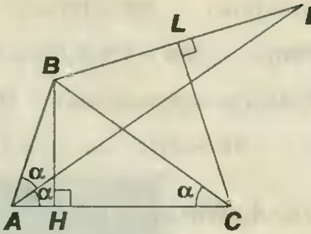
Y por (LAL) : Δ TBQ ≅ Δ ABP ⇒ TQ = AP = a

Entonces para que : $a + b + c$ sea mínimo los puntos C, P, Q y T deben ser colineales , con lo cual :

$x + 60 = 180$ ∴ $\boldsymbol{x = 120°}$

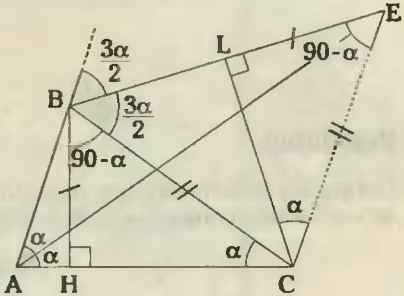


18.- En la figura mostrada se sabe que : BH = LE. Entonces es pide calculara la medida de «α» , si además se sabe que : E es el excentro del triángulo ABC .



Resolución.-

Ya que E es excentro, entonces $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices de los ángulos exteriores B y C, del Δ ABC .



Por propiedad : $m\measuredangle BEC = 90 - \dfrac{m\measuredangle A}{2}$

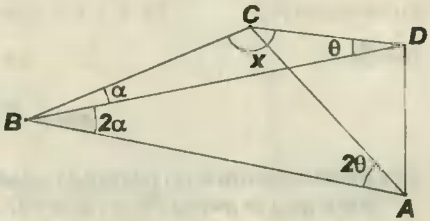
$\Rightarrow \quad m\measuredangle BEC = 90 - \alpha$

⊾ BHC ≅ ⊾ ELC (ALA) $\Rightarrow$ BC = EC

El Δ BCE resulta ser isósceles en donde :

$\dfrac{3\alpha}{2} = 90 - \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha = 36^o}$

19.- Apartir del gráfico mostrado se pide calcular lel valor de «x» del gráfico, si AB = BD



Resolución.-

Ubiquemos un punto P simétrico de C respecto de $\overline{BD}$, luego :

$m\measuredangle PBD = m\measuredangle DBC = \alpha \quad$ y $\quad m\measuredangle PDB = m\measuredangle BDC = \theta$

Además : BP = BC y PD = DC . Luego por el teorema de la mediatriz :

PA = PD y $m\measuredangle BAP = m\measuredangle BDP = \theta$

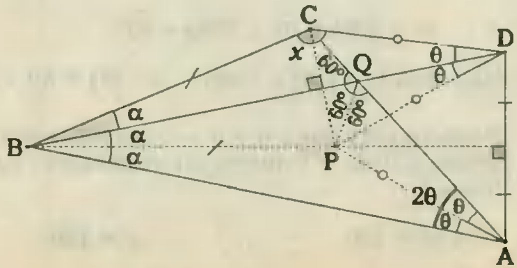
Además : $m\measuredangle PAC = \theta$

Dado que P es incentro del Δ ABQ :

$m\measuredangle BQP = m\measuredangle PQA = m\measuredangle BQC = 60^o$

En el Δ BQA : $2\alpha + 2\theta = 60^o$

$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = 30^o$



Finalmente en el Δ BCD : $\alpha + \theta + x = 180$

$\therefore \quad x = 150$

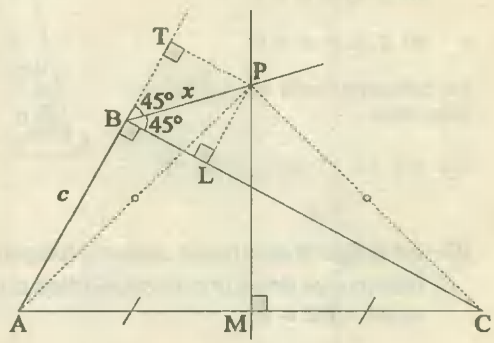
20.- En un triángulo ABC : m $\measuredangle$ B = 90º. La mediatriz de $\overline{AC}$ se intersecta en P con la bisectriz del ángulo exterior B . Si : BC - AB = k ; calcular BP.

Resolución.-

Sean : AB = c y BC = a $\Rightarrow$ $a - c = k$

Por el teorema de la mediatriz se debe cumplir que : PA = PC

Trazamos $\overline{PT}$ y $\overline{PL}$ perpendiculares a la prolongación de $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$ respectivamente, resultando el cuadrado BTPL, donde : BT = BL = PL = PT



⊿ ATP ≅ ⊿ PLC (4to caso)

Luego : AT = LC = c + BT

Del gráfico : BC = BL + LC

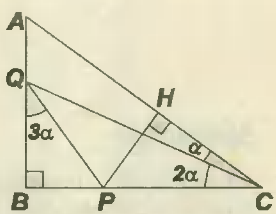
$\Rightarrow \quad a = BT + c + BT$

De donde : $BT = \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{k}{2} \Rightarrow BT = \dfrac{k}{2}$

En el ⊿ BTP de 45º : $x = BT\sqrt{2}$

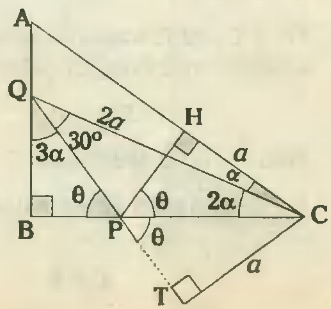
$\therefore \quad x = \dfrac{k}{2}\sqrt{2}$

21.- En la figura mostrada se sabe que : QC=2HC. Entonces se pide determinar : α .



Resolución.-

Observamos que en los triángulos QBP y PHC, los ángulos BPQ y HPC son congruentes, luego prolongamos $\overline{QP}$ y desde C trazamos $\overline{CT} \perp \overline{QP}$.



Entonces por el teorema de la bisectriz : CH = CT = a

En el ⊿QTC : $m \measuredangle TQC = 30°$

En el ⊿QBC : $3\alpha + 30 + 2\alpha = 90$

$\therefore \quad \alpha = 12°$

22.- En el interior de un triángulo ABC, se ubica el punto P, de tal manera que : m ∡ PBA = m ∡ BAC; m ∡ PBC = 2, m ∡ PAB y PB = 4.

Hallar AC, si BC = 15.

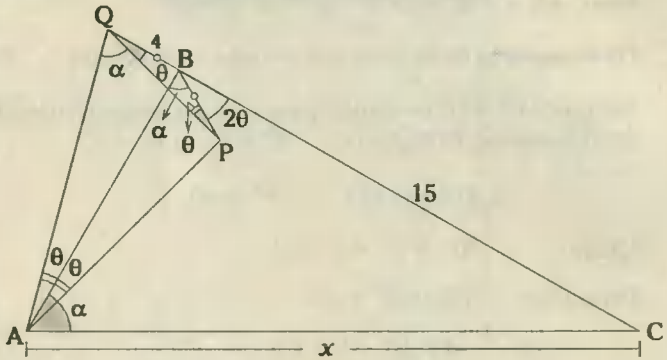
<u>Resolución</u>.-

Prolongamos $\overline{CB}$ hasta "Q" de manera que QB = BP = 4. El triángulo QBP es isósceles:

$$m\measuredangle BQP = m\measuredangle BPQ = \theta .$$

Pero por dato : $m\measuredangle BAP = \theta$, entonces por teoría sabemos que :

$$m\measuredangle ABP = m\measuredangle AQP = \alpha .$$



Ahora observamos que:

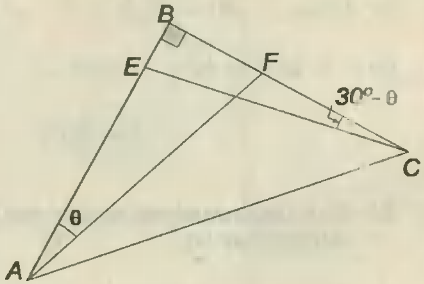
$$m\measuredangle Q = \alpha + \theta$$

y $\quad m\measuredangle A = \alpha + \theta$

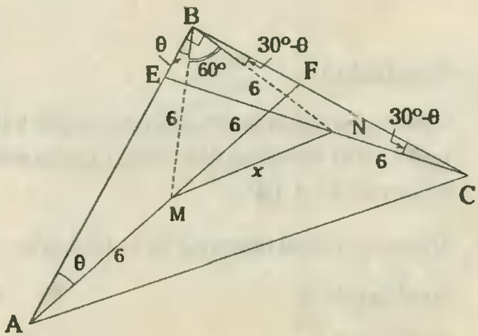
En consecuencia el Δ AQC es isósceles :

$x = 4 + 15 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 19}$

23.- En la figura mostrada, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$; si AF = CE = 12.



<u>Resolución</u>.-



En el ⊿ EBC, trazamos la mediana $\overline{BN}$, en el cual se reconoce que : BN = 6

En el ⊿ ABF, trazamos la mediana $\overline{BM}$, el que además tiene como medida a :

$$BM = 6$$

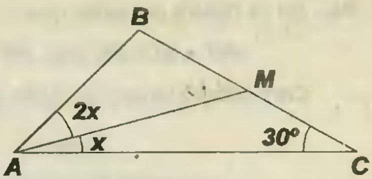
Pero : $\quad m\measuredangle MBN = 60^{o}$

Luego el Δ MBN es equilátero , de donde :

$$\boldsymbol{x = 6}$$

24.- A partir del gráfico mostrado, calcular «x» .

Si BM = MC .



Resolución.-

Creo oportuno recomendarte que cuando veas dos ángulos adyacentes cuyas medidas estén en la relación de 2 a 1 (como el caso de los ángulos $\measuredangle$ BAM y $\measuredangle$ MAC) , debes trazar la bisectríz del $\measuredangle$ doble y a continuación aplicar el teorema de la bisectríz .

Siguiendo este procedimiento, trazamos la bisectríz $\overline{AH}$ del $\measuredangle$ BAM . Luego , trazamos $\overline{MN} \perp \overline{AH}$ y $\overline{MP} \perp \overline{AC}$. Y puesto que $\overline{AM}$ es bisectríz del $\measuredangle$ HAC, deducimos que : $MH = MP = \frac{a}{2}$

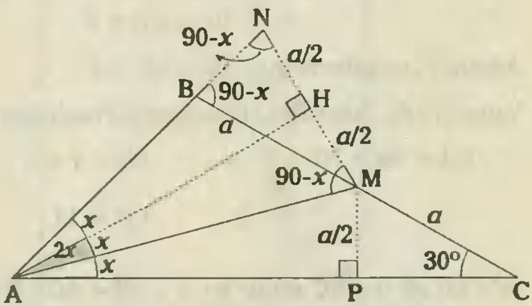
En el ΔNAM isósceles : $MH = HN = a/2$

Por dato se sabe que : $BM = MC = a$. Asimismo se observa que $BM = MN = a$, luego el Δ NMB es isósceles .En consecuencia :

$$m \measuredangle NBM = m \measuredangle BNM = 90 - x$$

Dado que el $\measuredangle$ NBM es ángulo exterior del Δ ABC , podemos establecer la relación :

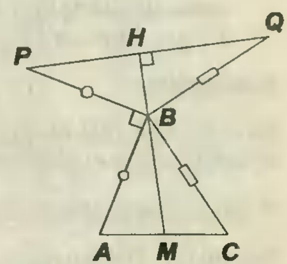
$$90 - x = 3x + 30 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 15^\circ}$$



25.- En la figura se sabe que :

AB = BP , BC =BQ y PQ = 12

Con estos datos , se pide calcular : BM



Resolución.-

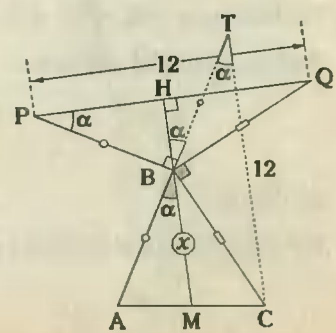
Prolongamos $\overline{AB}$ hasta T de modo que : AB = BT , resultando que : Δ PBQ $\cong$ Δ TBC (L.A.L)

De donde : PQ = TC = 12 y $m \measuredangle QPB = m \measuredangle BTC = \alpha$

Por otro lado notar que $m \measuredangle HBT = \alpha$

En el Δ ATC : B es el punto medio de $\overline{AT}$ y $\overline{BM} // \overline{TC}$; luego $\overline{BM}$ es base media.

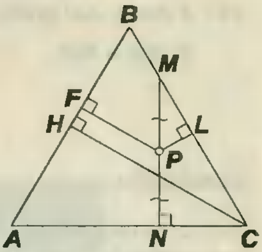
$$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{2} = 6 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 6}$$



26.- En la figura se sabe que :

AB = BC , PL = 2 , PF = 5 , MP = PN.

Con estos datos , se pide calcular : CH .



Resolución.-

Trazamos : $\overline{NT} \perp \overline{BC}$; $\overline{NE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PQ} \perp \overline{NE}$

Luego en el Δ MTN, $\overline{PL}$ es base media , tal que : NT = 4

Reconociendo que : ⊿ PQN ≅ ⊿ MPL (A.L.A.)

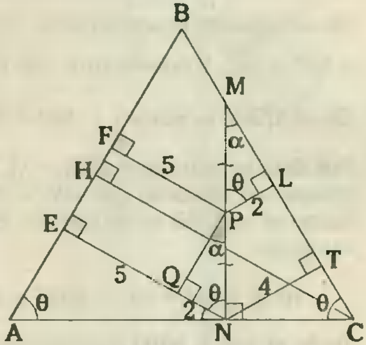
$$\Rightarrow \quad PL = QN = 2$$

Además , se aprecia que : PF = QE = 5

Y en el Δ ABC, isósceles aplicamos la Propiedad 5.7a :

$$CH = NE + NT \quad \Rightarrow \quad CH = 7 + 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{CH = 11}$$



27.- En un Δ ABC recto en A , AB < AC . Por M , punto medio de $\overline{BC}$, se levanta una perpendicular a este lado , la cual corta a $\overline{AC}$ en D . En la prolongación de $\overline{CA}$ se toma una longitud AE = AD . También , las prolongaciones de $\overline{BE}$ y $\overline{MA}$ se cortan en F ; si : 4 BF = 3 EC ; calcular m ∡ ACB.

Resolución.-

En el ⊿ ABC, $\overline{AM}$ es mediana, luego : BM = AM = MC . Y puesto que $\overline{MD}$ es mediatríz de $\overline{BC}$, se deduce que el ΔBDC es isósceles , por lo tanto : m ∡ MBC = m ∡ ACB = α .

Y con respecto al segmento $\overline{ED}$: BE = BD y m ∡ BED = m ∡ BDE = 2α .

Siendo el Δ FEA isósceles, hacemos : EF = EA = a

Y si hacemos : BE = BD = b , entonces : DC = b.

Por condición del problema : 4 BF = 3 EC

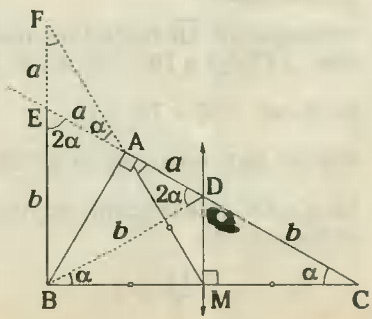
$$4(a + b) = 3(2a + b)$$

$$\Rightarrow \quad 4a + 4b = 6a + 3b$$

De donde : $b = 2a$

Por consiguiente el Δ EBD es equilátero, entonces :

$$2\alpha = 60 \quad \therefore \quad \alpha = 30^\circ$$

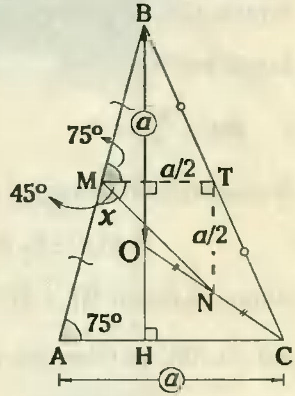


28.- El ángulo A de un triángulo ABC mide 75º sobre la altura $\overline{BH}$ se ubica el punto O de modo que $\overline{AC} \equiv \overline{BO}$ respectivamente. Siendo M y N puntos medios de AB y OC respectivamente. Calcular la m ∡ AMN .

Resolución.-

Empleando el teorema de la base media (item 5.5) en el ΔABC , trazamos $\overline{MT}$, resultando :

$$MT = \frac{a}{2} \quad y \quad m\measuredangle BMT = 75^o$$



Además : $\overline{MT} \perp \overline{BH}$.

En el Δ BOC, $\overline{TN}$ es base media luego :

$$TN = \frac{a}{2} \quad y \quad m\measuredangle MTN = 90^o.$$

Observa que el ⊿MTN es isósceles; entonces :

$$m\measuredangle TMN = 45^o.$$

Finalmente en el punto M : $x + 45 + 75 = 180^o$

$$\therefore \quad x = 60^o$$

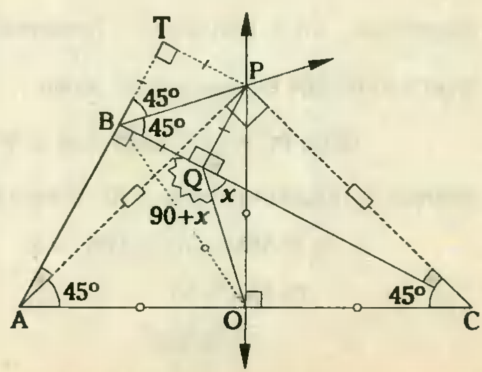
29.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B la mediatríz de $\overline{AC}$ y la bisectríz del ángulo exterior B se intersectan en P; se traza $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$. Calcular la m ∡ OQC ; siendo "O" el circuncentro del triángulo ABC (AB < BC).

Resolución.-

Prolongamos $\overline{AB}$ y trazamos $\overline{PT} \perp \overline{AB}$, asimismo $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$. Luego , empleando el teorema de la mediatríz , deducimos que : PA = PC . Por otro lado la figura BTPQ es un cuadrado , en consecuencia : PT = PQ = BQ = TB . Por tal razón :

⊿ ATP ≅ ⊿ PQC $\Rightarrow$ ∡ TAP ≅ ∡ PCQ

Esto último trae como consecuencia que el ∡ APC sea recto, resultando el triángulo APC de 45º donde : AO = PO = OC.



En el ⊿ ABC, $\overline{BO}$ es mediana, luego se tendrá :

$$BO = OC = AO.$$

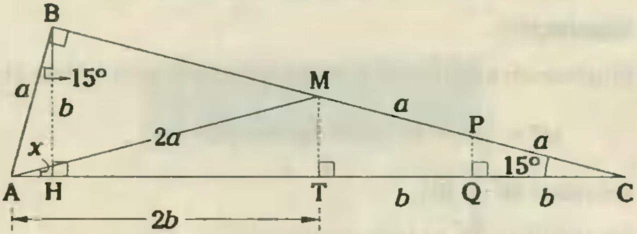
Finalmente nótese que Δ BQO ≅ Δ PQO (L.L.L.)

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BQO = m\measuredangle PQO = 90 + x$$

Luego : $90 + x + x = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 45^o$

30.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la m ∡ C = 15º. Se traza la ceviana $\overline{AM}$ con la condición que : MC = 2 AB. Calcular la m ∡ MAC.

Resolución.-



Sea : AB = a $\Rightarrow$ MC = $2a$

En el ⊿ ABC, trazamos la altura $\overline{BH}$.

Luego por Propiedad :

$$BH = \frac{AC}{4} = b$$

A continuación ubicamos el punto medio «P» de $\overline{MC}$ y trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$. De este modo :

⊿ PQC ≅ ⊿ BHA $\Rightarrow$ BH = QC = TQ = b

Ahora, trazamos $\overline{MT} \perp \overline{AC}$, luego para el ⊿ MTC ; $\overline{PQ}$ es base media, de donde : TQ = QC = b

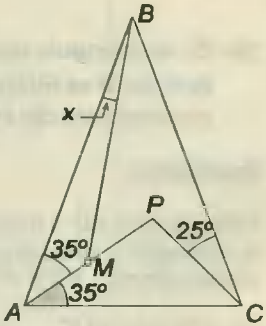
Asi , ⊿ AMC es isósceles, ya que $\overline{MT}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

$\therefore$ $x = 15°$

31.- En la figura se muestra un triángulo isósceles , en donde :

AB = BC . Además se sabe que : AM = MP .

De acuerdo con estos datos se pide calcular x



Resolución.-

Del gráfico : m ∡ PCA = 45° . Trazamos $\overline{BH}$, mediatriz de $\overline{AC}$

En el Δ APC : $\overline{MH}$ es base media , luego :

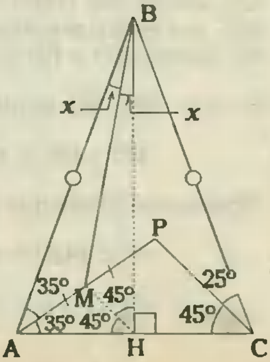
$\overline{MH}$ // $\overline{PC}$ y m ∡ MHA = m ∡ PCA = 45°

Además M es incentro del ⊿ AHB , lo cual significa que :

m ∡ ABM = m ∡ MBH = x

$\Rightarrow$ 70 + 2x = 90

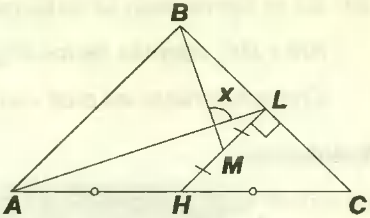
$\therefore$ $x = 10°$



32.- En la figura dada se sabe que :

$AB = BC$; $AH = HC$ y $HM = ML$

De acuerdo ocn estos datos, se pide calcular «x».



<u>Resolución</u>.-

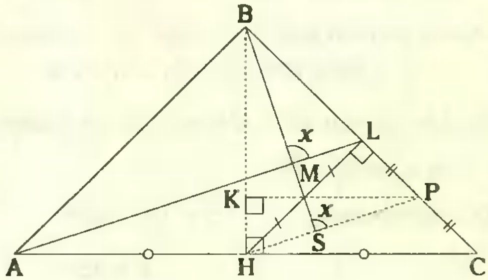
En el triángulo isósceles ABC, $\overline{BH}$ es mediana y también altura , entonces : $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. En el ⊿ HLC, trazamos la base media $\overline{MP}$, donde P es punto medio de $\overline{LC}$. Luego : $\overline{PK} \perp \overline{BH}$

En el Δ ALC, $\overline{HP}$ es base media , luego :

$\overline{PH} \parallel \overline{AL}$ y $m\measuredangle BSP = x$

Finalmente reconocemos que en el Δ HLP, M es el ortocentro, por consiguiente :

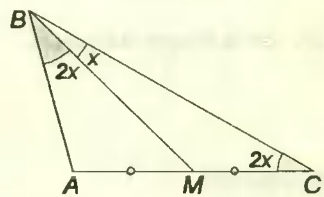
$$x = 90°$$



33.- A partir del gráfico mostrado , se sabe que :

$AM = MC$, además de la relación que guardan entre sí los ángulos indicados .

Se pide calcular el valor de x .



<u>Resolución</u>.-

En primer lugar trazamos $\overline{MN}$, de modo que la $m\measuredangle BMN = x$, entonces el Δ BNM y el Δ MNC son isósceles.

A continuación construimos el Δ EBM, de modo que : Δ EBM ≅ Δ NBM (A.L.A.):

$$\Rightarrow \quad BE = EM = BN = MN = a.$$

En el cuadrilátero no convexo ABEM, aplicamos la propiedad que establece que :

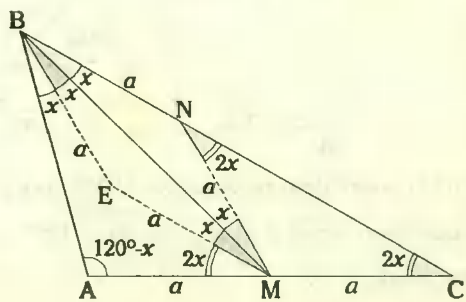
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle A = 120° - x$$

Finalmente en el Δ ABM :

$$120° - x + 2x + 3x = 180°$$

En consecuencia : $\quad 4x = 60°$

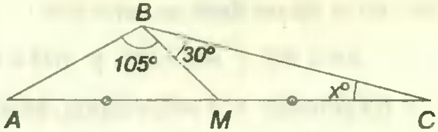
$$\therefore \quad x = 15°$$



34.- En la figura dada se sabe que :

AM = MC, además de los ángulos indicados.

Con estos datos es pide calcular x.



Resolución.-

En primer lugar construimos el Δ NBC equilátero, en el cual : MN = MC . Trazando $\overline{AN}$, se observa que el Δ ANC , es recto en N , dado que : AM = MN = MC ; luego :

$m \measuredangle$ ANC = 90°.

Luego : $m \measuredangle$ BNC = 60° y $m \measuredangle$ ANB = 30°

Es fácil deducir que : $m \measuredangle$ ABN = 75°, entonces :

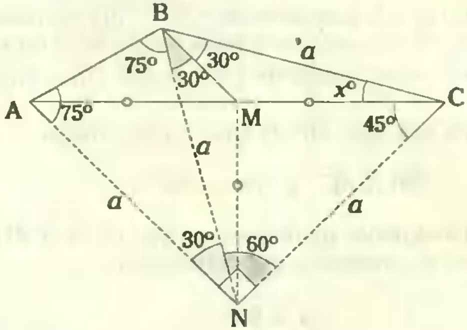
$m \measuredangle$ BAN = 75° y AN = BN = a.

Establecido que el ⊿ ANC es isósceles ,diremos:

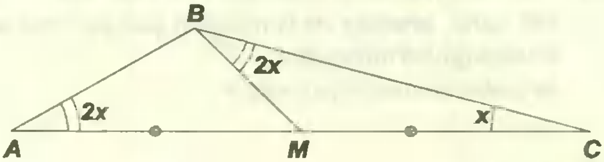
$m \measuredangle$ ACN = 45°

En consecuencia : $x + 45° = 60°$

$\therefore$ **$x = 15°$**



35.- En la figura, calcular x .

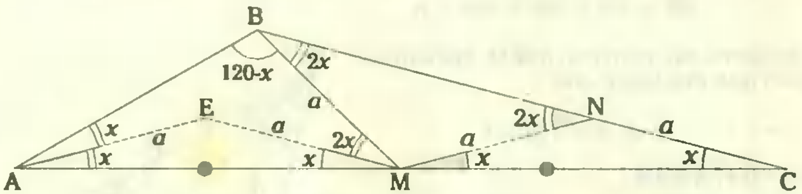


Resolución.-

En primer lugar trazamos $\overline{MN}$, de modo que $m \measuredangle$ NMC = x, entonces : MN = NC = a .

Luego el Δ BMN es isósceles , por lo tanto : BM = MN = a. A continuación construimos el Δ AEM de modo que :

Δ AEM ≅ Δ MNC (A.L.A.) ⇒ AE = EM = MN = NC = a.

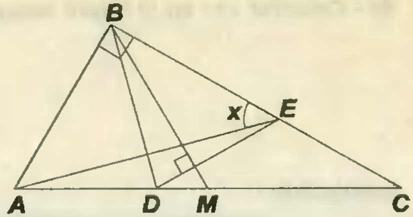


En el cuadrilátero no convexo ABME ; por propiedad se sabe que : $m \measuredangle$ ABM = 120° - x

Finalmente en el Δ ABM : $2x + 120° - x + 3x = 180°$

De donde : **$x = 15°$**

36.- En la figura se sabe que $\overline{BD}$ es bisectríz del ángulo B y $\overline{BM}$ es la mediana relativa a la hipotenusa. Calcular el valor de x.



Resolución.-

Como $\overline{BM}$ es mediana, entonces: $m\measuredangle MBC = m\measuredangle ACB = \alpha$

Y al trazar la altura $\overline{BH}$ resulta también que: $m\measuredangle ABH = \alpha$

Empleando la propiedad: 5.10c, resulta que:

$m\measuredangle HBD = m\measuredangle DBM = \theta$

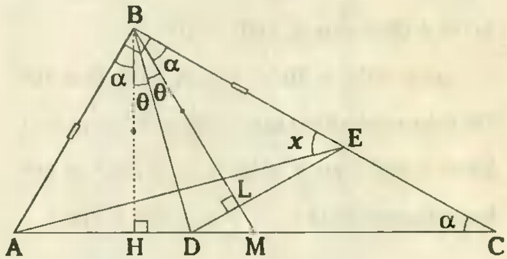
Por el teorema de la bisectríz (5.5): BH = BL

Observese que: ⊿ AHB ≅ ⊿ BLE

$\Rightarrow$ AB = BE

Finalmente en el ⊿ ABE isósceles:

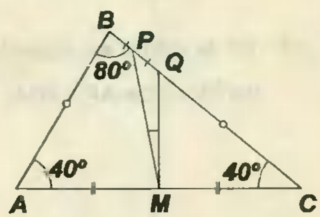
$x = 45°$



37.- En la figura mostrada se sabe que:

AB = QC, BP = PQ, AM = MC

Calcular: $m\measuredangle$ PMQ.



Resolución.-

Prolongamos $\overline{CB}$ hasta T, tal que BT = AB, luego Δ ABT y Δ TAC son isósceles, donde:

$m\measuredangle BTA = m\measuredangle BAT = 40°$ y $AT = AC = 2a$

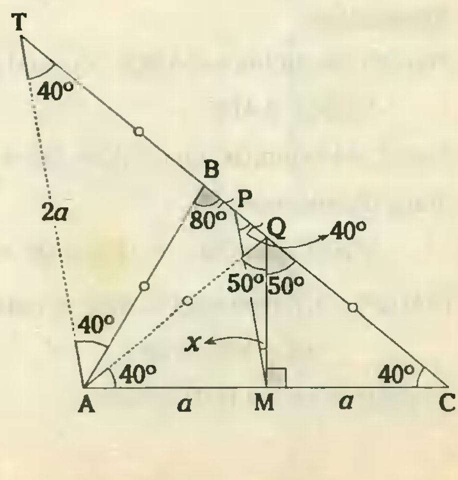
Luego: Δ ATB ≅ Δ AQC (L.A.L.) $\Rightarrow$ AQ = AB.

En el Δ AQC isósc.: $m\measuredangle AQM = m\measuredangle MQC = 50°$.

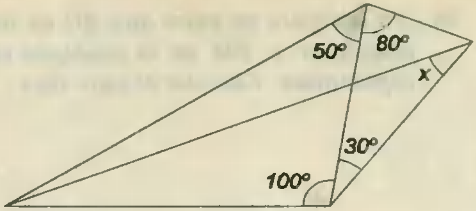
En el Δ TAC: $\overline{PM}$ es base media. Luego: $\overline{PM}$ // AT

$\Rightarrow m\measuredangle ATC = m\measuredangle MPC = 40°$

Y en el Δ MPQ: $50 = 40 + x$ ∴ $x = 10°$



38.- Calcular «x» en la figura mostrada.



Resolución.-

En primer lugar prolongamos $\overline{CB}$, luego trazamos $\overline{AE}$ de manera que : $m \measuredangle EAB = 30°$.

Entonces : $\Delta AEB \cong \Delta ADB$ (A.L.A.), luego :

$AE = AD = a$ y $EB = BD = n$.

El ΔAED es equilátero : $AE = ED = AD = a$.

En el ΔDEC : $m \measuredangle DEC = 40°$

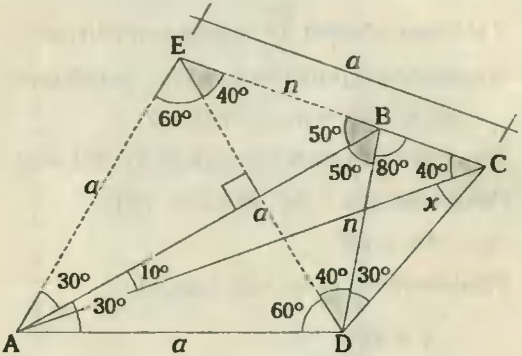
$m \measuredangle EDC = 70°$ y $m \measuredangle ECD = 70°$

De esto se deduce que : $AE = EC = a$.

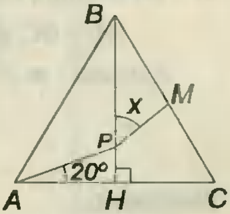
En el ΔAEC : $m \measuredangle EAC = m \measuredangle ECA = 40°$

En consecuencia : $x + 40° = 70°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 30°}$



39.- En la figura se muestra un D ABC equilátero , en el que se verifica que AP = BM . Con estos datos , se pide calcular x°.



Resolución.-

Primero construimos el ΔBQC, de modo que :

$\Delta BQC \cong \Delta APC$

Entonces se cumplirá que : $BQ = QC = AP = PC$.

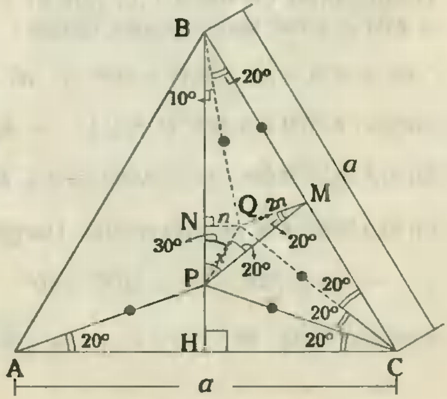
Ahora observamos que :

$\Delta QBM \cong \Delta PCQ \Rightarrow MQ = QP = 2n$.

Pero $QN = n$, entonces el ⊾ PNQ es notable, *con* ;

$m \measuredangle NPQ = 30°$

Finalmente en el ΔPQM isósceles :



$m \measuredangle PQM = 140°$ $\Rightarrow$ $m \measuredangle QPM = m \measuredangle QMP = 20°$

En consecuencia : $x = 30° + 20°$

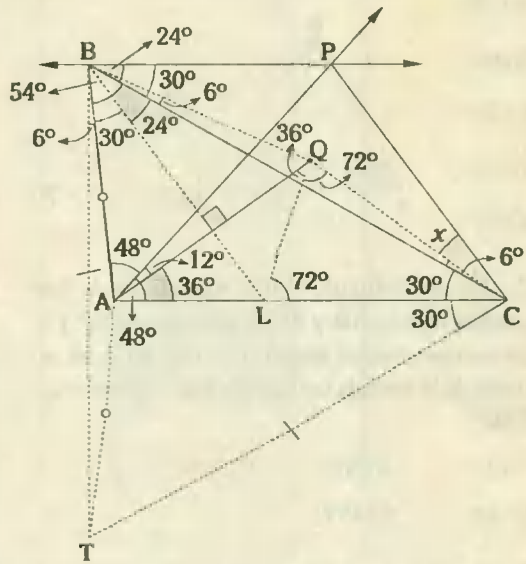
$\therefore$ $\mathbf{x = 50°}$

40.- Dado un triángulo ABC , donde : m ∡ B = 54º y m ∡ C = 30º. Por B se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que intersecta a la bisectriz interior del ángulo A en P. Calcular la m ∡ PCB

Resolución.-

Construimos los triángulos equiláteros ABQ y BTC, de donde resulta :

$m \measuredangle QBC = 6°$ y $AB = BQ = AQ$ y $m \measuredangle TBA = 6°$ y $BC = CT = BT$



Por otro lado en el Δ BCT, $\overline{CA}$ es bisectriz, mediatriz, etc ; luego AB = AT.

Los triángulos ABT y BQC resultan ser congruentes (L.A.L.) de donde :

$QC = BQ$ y $m \measuredangle QCB = 6°$

En el triángulo equilátero ABQ trazamos la mediatriz $\overline{BL}$ de $\overline{AQ}$, de donde :

$LA = LQ$ y $m \measuredangle QLC = 72°$.

El Δ QCL resulta ser isósceles, entonces :

$QC = LC$

Finalmente : Δ BCP ≅ Δ BCL (L.A.L.)

$\therefore$ $\mathbf{x = 24°}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{BC}$ en "P", de tal manera PB = 12 y $m\measuredangle A = 3 . m\measuredangle PCA$; calcular AB.

A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

2.- En la figura, con respecto al triángulo ABC $\overline{BD}$ es bisectriz y $\overline{BM}$ es mediana. Calcular x.

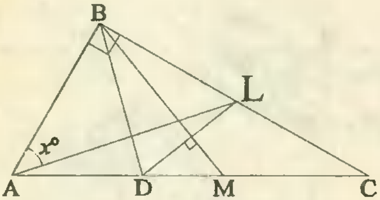
A) 45°

B) 60°

C) 30°

D) 53°

E) 75°



3.- En un triángulo ABC, obtuso en A, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en "T", de manera que el ángulo exterior en A es el triple de la medida del ángulo TBC; hallar $m\measuredangle$ TBC.

A) 37° B) 30° C) 37°/2

D) 15° E) 45°/2

4.- Hallar x, si los triángulos ABC y BMN son equiláteros.

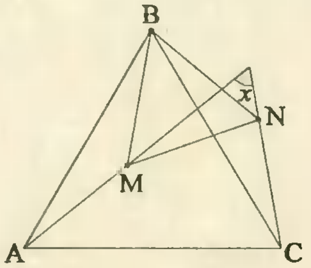
A) 30°

B) 37°

C) 45°

D) 53

E) 60°



5.- En un triángulo escaleno ABC, se traza la mediana $\overline{CM}$; en el triángulo BMC se traza la mediana $\overline{BN}$, de manera que BN = 18 obtuso.

Sobre $\overline{AC}$ se ubica un punto "P" de modo que $\overline{MP} \parallel \overline{BN}$; calcular MP.

A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 6

6.- En la figura BP = AC.

Hallar x, si AM = MB y PN = NC

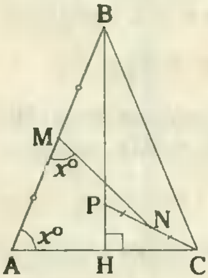
A) 60°

B) 45°

C) 53°

D) 75°

E) 67° 30'



7.- Los lados de un triángulo miden 13; 14 y 15 unidades, se trazan dos bisectrices exteriores de ángulos diferentes y desde el tercer vértice se trazan perpendiculares a esta bisectrices.

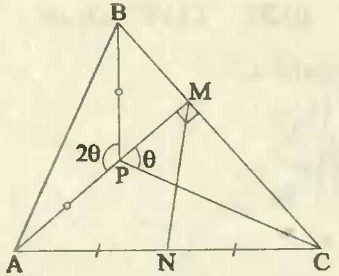
Calcular la longitud del segmento que une los pies de las perpendiculares.

A) 15 B) 16 C) 18 D) 21 E) 24

8.- En la figura se sabe que:

$$AP = PB\ ,\ AN = NC\ \ y\ \ BC = 6\sqrt{2}\ .$$

Hallar MN .

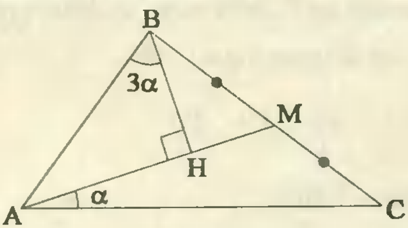


A) $6\sqrt{2}$ B) 6 C) 3 D) 4,5 E) $3\sqrt{2}$

9.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BM}$ de tal manera que BM = 36 y $m \measuredangle$ MBA = 30°; hallar AC, si $m \measuredangle$ A = 50°

A) 36 B) 54 C) 64 D) 72 E) 90

10.- Calcular α, si AB = 2. HM



A) 24° B) 18° C) 16° D) 15° E) 10°

11.- En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$, de tal manera que $m \measuredangle$ MBA = 2 . $m \measuredangle$ MBC ; hallar $m \measuredangle$ MBC, si BC = 2 . BM

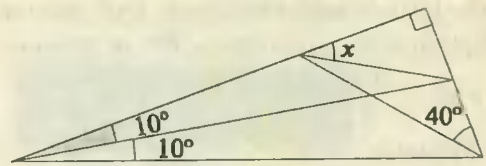
A) 18° B) 24° C) 30° D) 36° E) 45°

12.- En la bisectriz exterior del ángulo A de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica el punto "P" de manera que dista en 6 unidades de $\overline{AC}$ y en 8 unidades de $\overline{BC}$.

Hallar PB.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 5

13.- Calcular $x°$, en la figura.

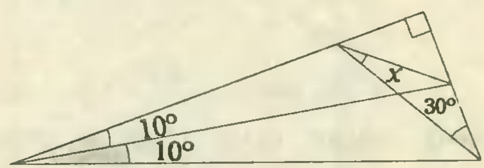


A) 15° B) 20° C) 25° D) 30° E) 35°

14.- En el interior del un triángulo ABC, se ubica el punto "P" de tal manera que : PC = BC y $m \measuredangle$ PAB = $m \measuredangle$ PAC = 17°. Hallar $m \measuredangle$ PCB, si $m \measuredangle$ B = 107°.

A) 13° B) 17° C) 20° D) 21° E) 26°

15.- Calcular $x°$

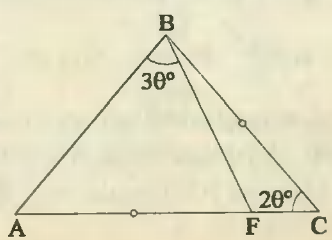


A) 10° B) 15° C) 20° D) 25° E) 30°

16.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BM}$; de tal manera que AM = BC y $m \measuredangle$ C = 2 . $m \measuredangle$ MBC. Hallar $m \measuredangle$ MBC, si $m \measuredangle$ A = 2 . $m \measuredangle$ C

A) 10° B) 12° C) 15° D) 16° E) 20°

17.- En la figura: AF = BC. Hallar θ.



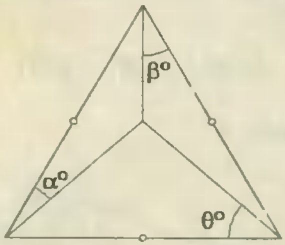
A) 15° B) 18° C) 22°30'
D) 20° E) 30°

18.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BP}$, de tal manera que : $\dfrac{BP}{5} = \dfrac{AP}{1} = \dfrac{PC}{7}$.

Calcular $m\measuredangle$ BPC.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

19.- En la figura: α, β y θ forman una progresión aritmética. Calcular "β"



A) 10° B) 20° C) 15° D) 30° E) 22°30'

20.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{CM}$, de modo que CM = AB; además se conoce $m\measuredangle$ A = 30° y $m\measuredangle$ B = 100°. Calcular $m\measuredangle$ MCB.

A) 30° B) 40° C) 50° D) 25° E) 35°

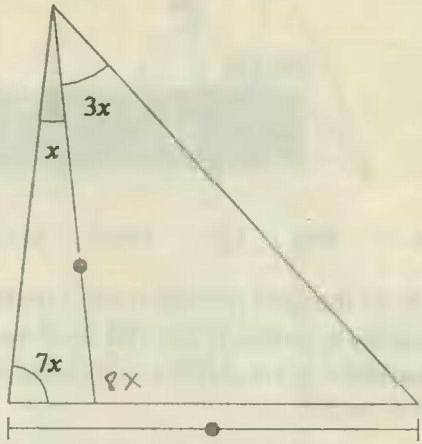
21.- En el interior de un triángulo equilátero ABC, se ubica el punto "P", de tal manera que: $\dfrac{PA}{3} = \dfrac{PB}{4} = \dfrac{PC}{5}$. Hallar $m\measuredangle$ PBC

A) 90° B) 97° C) 120° D) 135° E) 150°

22.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, de tal manera que: AM = BM + BC y $m\measuredangle$ MBC = 120°; calcular $m\measuredangle$ ABM, si $m\measuredangle$ C = 20°.

A) 10° B) 20° C) 15° D) 25° E) 30°

23.- Calcular *x*.



A) 10° B) 12° C) 15° D) 16° E) 18°

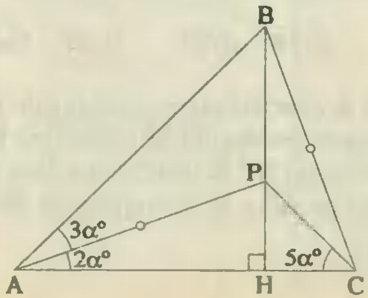
24.- En el interior de un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, se ubica el punto "P", de tal manera que :

$$\frac{PC}{1} = \frac{PB}{2} = \frac{PA}{3}$$

Hallar $m\measuredangle$ BPC.

A) 90° B) 105° C) 115°
D) 135° E) 150°

25.- Del gráfico mostrado; calcular α si AP = BC.



26.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BF}$, de modo que AB = FC y las medidas de los ángulos ABF ; FBC y ACB son directamente proporcionales a : 3, 7 y 4 respectivamente. Hallar la razón de proporcionalidad.

A) 8° B) 9° C) 15° D) 10° E) 12°

27.- En un triángulo ABC se traza las alturas $\overline{AM}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BG}$ determinándose el ortocentro H. Por H se traza una paralela a $\overline{FM}$ la cual intersecta en P, L, R y Q a $\overline{AB}$, $\overline{FG}$, $\overline{MG}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si FL = 4 y MR = 7. Hallar PQ.

A) 11 B) 15 C) 19 D) 22 E) 27

28.- Interiormente a un triángulo acutángulo escaleno ABC se ubica el punto P.

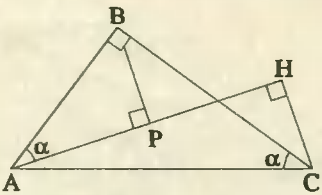
Si: AB = 38 ; BC = 30 y AC = 23

La suma PA + PB + PC máxima es :

A) 60 B) 90 C) 105

D) 120 E) 150

29.- En la figura: AC - HC = $12\sqrt{3}$. Calcular BP.



A) 4 B) 6 C) $3\sqrt{3}$

D) $6\sqrt{3}$ E) 9

30.- En un triángulo ABC, se traza la mediana BM , luego AH ⊥ BM .

Si : BC = 2 AH , calcular $m\measuredangle$ MBC.

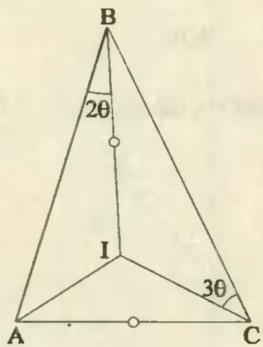
A) 50° B) 20° C) 15° D) 40° E) 30°

31.- Sobre el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se ubica el punto R de tal manera que : AB = CR = 10. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$. Si $m\measuredangle$ B = 60°

A) 2,5 B) 4 C) 5 D) 3 E) 6

32.- Hallar θ; si I es incentro del Δ ABC.

Además BI = AC.



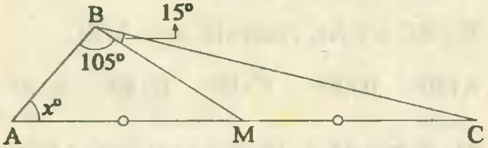
A) 5° B) 8° C) 10° D) 12° E) 15°

33.- Sobre la bisectriz del ángulo interior C de un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica exteriormente el punto T, de tal manera que: $m\measuredangle$CTA = $m\measuredangle$ TAB = 30°.

Calcular la $m\measuredangle$ TBA

A) 8° B) 10° C) 12° D) 15° E) 20°

34.- Calcular x, si AM = MC



A) 37° B) 45° C) 48,5°

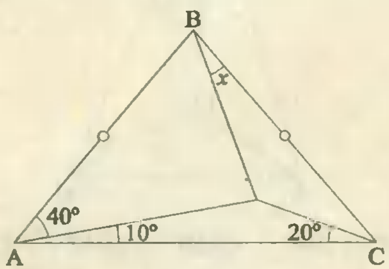
D) 50° E) 60°

35.- Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en B. La mediatríz de $\overline{AC}$ se intersecta en P con la bisectríz del ángulo exterior B; luego se traza $\overline{AF} \parallel \overline{BP}$ ($F \in \overline{BC}$); si FC = a. Calcular BP.

A) $\frac{a}{2}$ B) $a\sqrt{2}$ C) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

D) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ E) a

36.- Del gráfico; calcular x. Si : AB = BC



A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 25°

37.- Dado el triángulo rectángulo ABC recto en B. Sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto P de modo que: AB = PC la mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en Q.
Hallar la $m\measuredangle$ BQT, si $m\measuredangle$ ACB = 20° y T es el punto medio de

A) 10° B) 5° C) 15° D) 20° E) 7,5°

38.- Dado el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ intersecta en P a la prolongación de $\overline{CA}$ y en Q a la mediatríz de $\overline{BC}$.

Calcular la $m\measuredangle$ PBQ.

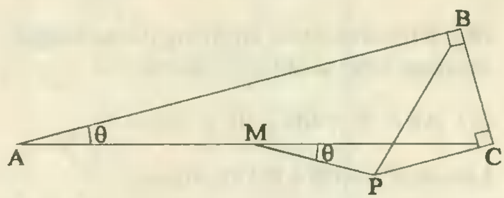
A) 105° B) 115° C) 125°

D) 120° E) 135°

39.- En la figura mostrada se sabe que:

AM = MC y PM = BC

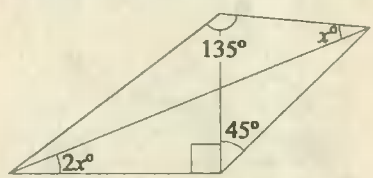
Calcular la $m\measuredangle$ BPM



A) 7,5° B) 8° C) 16°

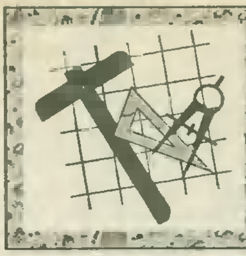
D) 15° E) 22° 30'

40.- Calcular x del gráfico.



A) 7° 30' B) 9° C) 12°

D) 18° 30' E) 26° 30'



CAP. 6 polígonos

DEFINICIÓN.-

Es aquella figura geométrica determinada por una línea quebrada y cerrada.

6.1 ELEMENTOS

a) Vértices : A, B, ..., E

b) Lados : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{AE}$

c) Angulos Interiores : $\measuredangle$ A, $\measuredangle$ B, ... ,$\measuredangle$ E

d) Angulos Exteriores : $\measuredangle$ LAB, $\measuredangle$ TBC, ..., $\measuredangle$ KEA

e) Diagonal : $\overline{BE}$

f) Diagonal Media : $\overline{MN}$

g) Perímetro : $2p = AB + BC + ... + AE$

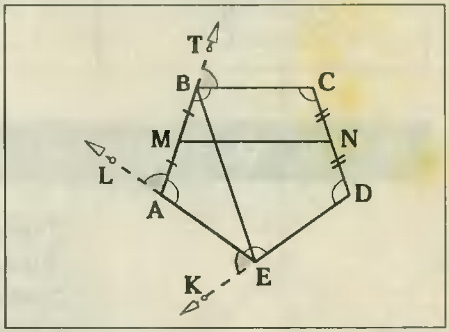


Fig. 6.1

6.2 CLASIFICACIÓN

6.2.1 DE ACUERDO A SU CONVEXIDAD

a) Polígono Convexo.-

Si toda recta que contiene a uno de sus lados lo ubica en un mismo semiplano.

Ejm : Hexágono convexo.

b) Polígono no Convexo.-

Si por lo menos existe una recta que conteniendo a uno de sus lados lo ubica en uno y otro semiplano.

Ejm : Pentágono no convexo.

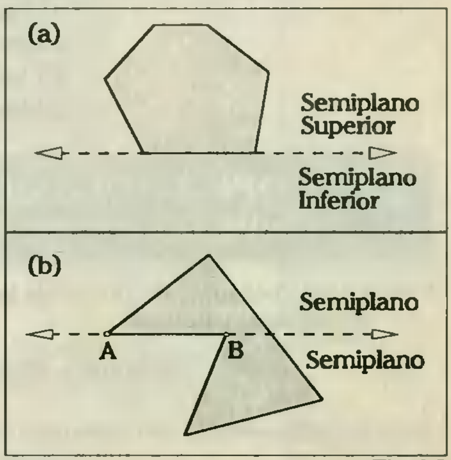


Fig. 6.2

6.2.2 Atendiendo a la Regularidad de sus elementos.

a) Polígono Equiángulo.- Aquel que tiene sus ángulos congruentes.

b) Polígono Equilátero.- Aquel que tiene sus lados congruentes.

c) Polígono Regular.- Aquel que es equiángulo y equilátero a la vez.

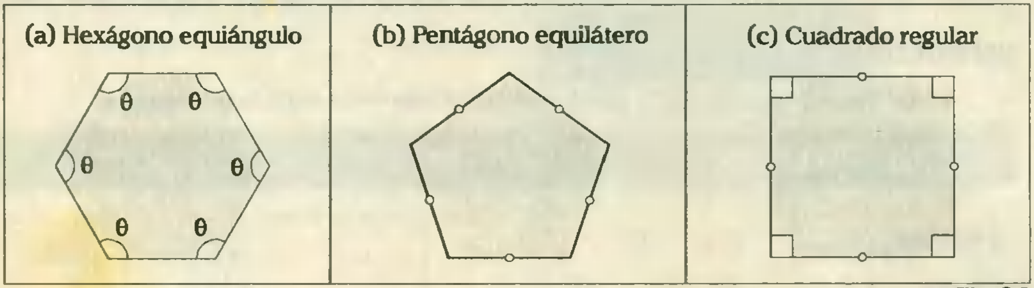


***Fig.* 6.3**

6.3 DE ACUERDO AL NÚMERO DE SUS LADOS

3 lados	→	**Triángulo**
4 lados	→	**Cuadrilátero**
5 lados	→	**Pentágono**
6 lados	→	**Exágono**
7 lados	→	**Heptágono**
8 lados	→	**Octógono**
9 lados	→	**Nonágono**
10 lados	→	**Decágono**
11 lados	→	**Undecágono**
12 lados	→	**Dodecágono**
15 lados	→	**Pentadecágono**
20 lados	→	**Icoságono**

6.4 PROPIEDADES GENERALES DE UN POLÍGONO CONVEXO DE "n" LADOS

6.4a) En todo polígono, el número de lados es igual al número de vértices ,e , igual al número de ángulos interiores.

$$\text{N° lados} = \text{N° vértices} = \text{N° } \measuredangle \text{ interiores} = n \qquad \text{... (6.1)}$$

6.4b) En todo polígono, el número de ángulos exteriores es el doble del número de lados.

$$\text{N° } \measuredangle \text{ exteriores} = 2n \qquad \text{... (6.2)}$$

6.4c) En todo polígono, el número de diagonales trazadas desde un vértice, está dado por la siguiente relación :

$$\text{N}^{\circ}\ \text{d}_{1v.} = n - 3 \qquad \dots (6.3)$$

6.4d) En todo polígono, el número de diagonales medias trazadas desde un lado, está dado por la siguiente relación. :

$$\text{N}^{\circ}\ \text{d}\,.\,m = n - 1 \qquad \dots (6.4)$$

6.4e) En todo polígono, el número de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice, está dado por la siguiente relación :

(6.5) ... $\text{N}^{\circ}\ \Delta\text{s} = n - 2$; **N° Δs : Número de triángulos**

6.4f) En todo polígono, el número de cuadriláteros determinados al trazar las diagonales medias desde un lado, está dado por la siguiente relación :

(6.6) ... $\text{N}^{\circ}\ \square\ \text{s} = n - 2$; **N° □s Número de cuadriláteros**

6.4g) En todo polígono, la suma de las medidas de los ángulos interiores, está dada por la siguiente relación :

$$\text{S}\ \measuredangle\ i = 180(n - 2) \qquad \dots (6.7)$$

6.4h) En todo polígono, la suma de las medidas de los ángulos exteriores es 360° :

$$\text{S}\ \measuredangle\ e = 360^{\circ} \qquad \dots (6.8)$$

6.4i) En todo polígono, el número total de diagonales, está dado por la siguiente relación :

$$\text{N}^{\circ}\ \text{D} = \frac{n(n-3)}{2} \qquad \dots (6.9)$$

6.4j) En todo polígono, el número total de diagonales medias, está dado por la siguiente relación :

$$\text{N}^{\circ}\ \text{D.M.} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \dots (6.10)$$

6.4k) En todo polígono, el número de diagonales trazadas a partir de "m" vértices consecutivos, está dado por la siguiente relación :

$$\text{N}^{\circ}\ d = mn - \frac{(m+1)(m+2)}{2} \qquad \dots (6.11)$$

6.4l) En todo polígono, el número de diagonales medias trazadas a partir de "m" lados consecutivos, está dado por la siguiente relación :

$$\text{N}^{\circ}\ d.\ m. = mn - \frac{m(m+1)}{2} \qquad \dots (6.12)$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1RA PARTE)

1.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de 8 lados.

Resolución.-

Aplicando la propiedad "6.4 *g*", tendremos : $S\measuredangle int. = 180\,(n-2)$; donde $n = 8$

Reemplazando : $S\measuredangle int. = 180\,(8-2)$

Luego : $S\measuredangle int. = 180\,(6)$

$\therefore$ $\mathbf{S\measuredangle int. = 1080}$

2.- Calcular el número total de diagonales de un polígono de 12 lados.

Resolución.-

De acuerdo con la propiedad "6.4 *i*", tendremos : $N.D. = \dfrac{n(n-3)}{2}$; donde $n = 12$

Reemplazando : $N.D. = \dfrac{12(12-3)}{2}$

Luego : $N.D. = \dfrac{12(9)}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{N^o\,D. = 54}$

3.- En un endecágono, hallar el número total de diagonales medias.

Resolución.-

El nombre de Endecágono es sinónimo de undecágono y es el polígono que tiene 11 lados, luego, de acuerdo con el item 6.3, podemos establecer que :

$$N^oD.M. = \frac{n(n-1)}{2} \text{ ; donde } n = 11$$

Reemplazando : $N^oD.M. = \dfrac{11\,(10)}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{N^o\,D.M. = 55}$

4.- En un hexágono, calcular el número de diagonales trazadas desde un sólo vértice.

Resolución.-

Si aplicamos la propiedad "6.4c", tendremos :

$N^oD.M. = n - 3$; donde $n = 6$

Reemplazando : $N^oD.M. = 6 - 3$

$\therefore$ **$N^o\ D.M. = 3$**

5.- Dado un dodecágono, se pide calcular el número de diagonales trazadas a partir de cuatro vértices consecutivos.

Resolución.-

De acuerdo con la propiedad "6.4 k" , se logra establecer que :

Tenemos que : $N^od = mn - \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

Donde : $n = 12$; $m = 4$

Reemplazando : $N^od = (4)(12) - \dfrac{(4+1)(4+2)}{2}$

Entonces : $N^od = 48 - 15$

$\therefore$ **$N^o\ d = 33$**

6.- En un heptágono, calcular el número de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice.

Resolución.-

Según la propiedad "6.4e" , se puede establecer que :

$N^o\ \Delta_S = n - 2$

Donde : $n = 7$ (heptágono)

Reemplazando : $N^o\ \Delta_S = 7 - 2$

$\therefore$ **$N^o\ \Delta_S = 5$**

6.5 PROPIEDADES EN UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS.

6.5a) La medida del ángulo interior, está dado por la siguiente relación :

$$i = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{... (6.13)}$$

6.5b) La medida del ángulo exterior, está dado por la siguiente relación :

$$e = \frac{360}{n} \quad \text{... (6.14)}$$

6.5c) La medida del ángulo central, está dado por la siguiente relación :

$$c = \frac{360}{n} \quad \text{... (6.15)}$$

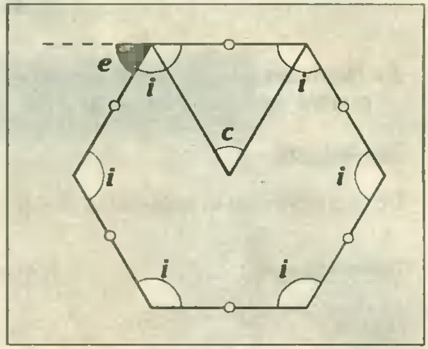


***Fig.* 6.4**

6.5d) La medida de la suma de ángulos centrales es 360°.

$$S\measuredangle \text{centrales} = 360° \quad \text{... (6.16)}$$

6.5e) Las propiedades *a* y *b* se cumplen también para un polígono equiángulo.

6.6 PROPIEDADES ESPECIALES

6.6a) El máximo número de ángulos interiores agudos de un polígono convexo es : **3**

6.6b) El mínimo número de ángulos interiores obtusos de un polígono convexo es : **n - 3**

6.6c) El número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos interiores es : **2 (n - 2)**

6.6d) Si el número de lados de un polígono disminuye en "m" ($m < n$) , su número de diagonales disminuye en "d" cumpliéndose :

$$\underbrace{(n-2)+(n-3)+(n-4)+...+[n-(m+1)]}_{\text{"}m\text{" sumandos}} = d \quad \text{... (6.17)}$$

6.6e) Si el número de lados de un polígono aumenta en "m" su número de diagonales aumenta en "d", cumpliéndose :

$$\underbrace{(n-1)+(n)+(n+1)+...+[n+(m-2)]}_{\text{"}m\text{" sumandos}} = d \quad \text{... (6.18)}$$

6.6f) Si las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo están en progresión aritmética de razón "r" y el menor ángulo interior es "α", entonces :

$$180\,(n-2) = \alpha n + \frac{rn(n-1)}{2} \quad \text{... (6.19)}$$

6.6g) Si las medidas de los ángulos externos de un polígono convexo forman una progresión aritmética de razón "r" y el menor ángulo exterior mide "α" , entonces :

$$360 = \alpha n + \frac{rn(n-1)}{2} \qquad \text{... (6.20)}$$

6.6h) Para dos polígonos regulares de n_1 y n_2 lados cuya diferencia de las medidas de susángulos internos, externos o centrales es "α", se cumple :

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 \cdot n_2} \qquad (n_1 > n_2) \qquad \text{... (6.21)}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

7.- Calcular el número de lados que tiene un polígono regular si se sabe que de la medida de uno de sus ángulos interiores es 144º.

<u>Resolución</u>.-

Según la propiedad 6.5a , tendremos que : $\measuredangle \text{int.} = \frac{180\,(n-2)}{n}$

Reemplazando : $144 = \frac{180(n-2)}{n}$

Luego : $144n = 180(n-2)$

.Al efectuar operaciones , se tendrá que : $4n = 5n - 10$

$\therefore \quad \boldsymbol{n = 10}$

8.- Si la medida del ángulo exteriorde un polígono regular es 24º , ¿ De qué polígono se trata ?

<u>Resolución</u>.-

Según la propiedad vista en el item 6.5b , tenemos que : $\measuredangle \text{ext.} = \frac{360}{n}$

Reemplazando datos : $24 = \frac{360}{n}$

$\therefore \quad \boldsymbol{n = 15}$

9.- En un polígono regular la medida de su ángulo central es 24º. Determinar el número de lados de dicho polígono .

__Resolución__.-

De acuerdo con la propiedad 6.5c , tenemos que : $\measuredangle \text{central} = \dfrac{360}{n}$

Reemplazando el dato : $24^\circ = \dfrac{360^\circ}{n}$

Luego , al despejar tendremos : $\therefore \quad \mathbf{n = 15}$

10.- Calcular el mínimo número de ángulos interiores obtusos que puede haber en un polígono convexo de veinte lados.

__Resolución__.-

Sea : Min Nº$\measuredangle$obt. : Mínimo número de ángulos obtusos , entonces de acuerdo con la propiedad especial vista en el item 6.6a , tendremos que :

$$\text{Min N}^\circ\measuredangle\text{obt.} = n - 3 \quad ; \quad \text{donde : } n = 20.$$

Reemplazando : $\text{Min N}^\circ\measuredangle\text{obt.} = 20 - 3$

$$\therefore \quad \textbf{Min N}^\circ\measuredangle\textbf{obt. = 17}$$

11.- ¿Cuál es el número de lados de un polígono , si se sabe que la suma de las medidas de los ángulos interiores equivale a 12 ángulos rectos ?

__Resolución__.-

Según la propiedad especial 6.6c , tenemos que : $\text{N}^\circ\measuredangle\text{rect.} = 2\,(n - 2)$

Donde al sustituir datos tendremos : $12 = 2\,(n - 2)$

$$\therefore \quad \mathbf{n = 8}$$

12.- Del ejercicio anterior ¿Cuál es el número de ángulos llanos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos interiores?.

__Resolución__.-

La suma de los ángulos interiores es : $S\measuredangle\text{int.} = 180\ \underbrace{(n-2)}$

Como un ángulo llano equivale a 180° , entonces la parte señalada con paréntesis representa el el número de ángulos llanos.Pero del resultado anterior se sabe que $n = 8$, luego :

$$S\measuredangle\text{int.} = 8 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{S\measuredangle int. = 6}$$

MISCELÁNEA

1.- En un octógono, ¿En cuánto excede el número de diagonales al número de vértices ?

Resolución.-

El número de diagonales, lo hallamos utilizando la propiedad 6.4i : $N^o D = \frac{n(n-3)}{2}$

El octógono tiene 8 lados, luego el número de sus diagonales es : $\frac{8(8-3)}{2} = 20$

Entonces al operar nos queda : $N^o D = 20$

Según condición del problema : $\underbrace{N^o \text{ diagonales}} = \underbrace{N^o \text{ vértices}} + x$;

Donde x es el exceso, luego : $20 = 8 + x$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 12}$

2.- En cierto polígono el número de diagonales medias y el número de diagonales se encuentran en la relación de 7 a 5. ¿De qué polígono se trata?

Resolución.-

Si el polígono tiene "n" lados, entonces el número de sus diagonales medias y el de sus diagonales respectivamente viene dado por las siguientes relaciones :

$$N^o DM = n(n-1)/2 \quad \wedge \quad N^o D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Según condición del problema se tiene que : $\frac{n(n-1)/2}{n(n-3)/2} = \frac{7}{5}$

Simplificando y efectuando operaciones se tendrá que : $5n - 5 = 7n - 21 \Rightarrow n = 8$

En consecuencia, el polígono es un : **octógono**

3.- ¿Cuál es el polígono convexo en el que el número de diagonales es mayor en 133 al número de sus lados?

Resolución.-

Sea "n" el número de sus lados, entonces por dato se tendrá que : $N^o D = 133 + n$

Sustituyendo el primer miembro por la relación 6.4i : $\frac{n(n-3)}{2} = 133 + n$

$$\Rightarrow \qquad n^2 - 5n - 266 = 0$$

Factorizando : $(n - 19)(n + 14) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ $\boldsymbol{n = 19}$

4.- La suma de las medidas de los ángulos internos, centrales y externos de un polígono regular es igual a 2520º; hallar la medida de su ángulo central.

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono regular convexo que buscamos , luego según la condición del problema tendremos que :

$$\underbrace{\Sigma m \measuredangle i}_{180^\circ (n-2)} + \underbrace{\Sigma m \measuredangle c}_{360^\circ} + \underbrace{\Sigma m \measuredangle e}_{360^\circ} = 2520^\circ$$

$$180^\circ (n-2) + 360^\circ + 360^\circ = 2520^\circ$$

Efectuando , se obtiene : $180(n-2) = 1800$

De donde : $n = 12$

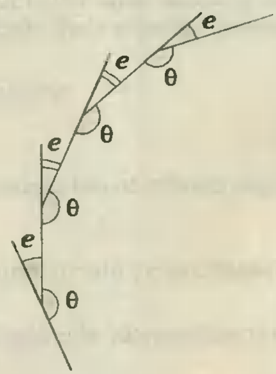
En consecuencia su ángulo central "c" medirá : $c = \dfrac{360}{12}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{c = 30^\circ}$$

5.- En un polígono equiángulo, desde 5 vértices consecutivos se han trazado 54 diagonales, hallar el valor del ángulo exterior.

Resolución.-

Calcularemos el número de lados "n" del polígono , para lo cual se utilizará la relación 6.4k :



$$N^\circ d = mn - \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad ; \quad \text{donde} : m = 5$$

$$\Rightarrow \qquad N^\circ d = \left[5n - \frac{(5+1)(5+2)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad 54 = [5n - 21] \qquad \Rightarrow \qquad n = 15$$

Luego el ángulo interior medirá : $\theta = 180(15-2)/15$

$$\Rightarrow \quad \theta = 156$$

Pero : $e + \theta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad e = 180 - 156$

$$\therefore \quad \boldsymbol{e = 24^\circ}$$

6.- El número de vértices y el número de diagonales totales de un polígono regular son iguales, cuál será la medida de su ángulo central.

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono regular. Luego , según las condiciones del problema tendremos : $\underbrace{\text{N° vértices}} = \underbrace{\text{N° diagonales totales}}$

Reemplazando : $n = n\,(n-3)/2$

Donde : $n = 5$

Luego por la relación 6.5c, su ángulo central medirá : $\measuredangle c = \dfrac{360}{n}$

Reemplazando datos : $\measuredangle c = 360/5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 72°}$

7.- En un polígono el número de diagonales medias es 15. ¿Cuántas diagonales se podrán trazar desde 3 vértices consecutivos en dicho polígono?

<u>Resolución</u>.-

En un polígono de "n" lados la expresión, que nos lleva a calcular su número de diagonales medias es :

$$\text{N° DM} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Según las condiciones del problema : $\dfrac{n(n-1)}{2} = 15$

De donde al efectuar operaciones : $n^2 - n - 30 = 0$

$$\begin{array}{ll} n & -6 \\ n & +5 \end{array}$$

$$(n-6)(n+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Luego de la propiedad 6.4k : $\text{N°}\,d = mn - \dfrac{(m+1)(m+2)}{2} \quad ; \quad m = 3$

Reemplazando datos : $\text{N°}\,d = (3)(6) - \dfrac{(4)(5)}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{N°\,d = 8}$$

8.- La diferencia entre el número de diagonales y el número de ángulos llanos a que equivale la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es 119. Calcular el número de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice.

<u>Resolución</u>.-

Sea "n" el número de lados del polígono. Luego según las condiciones del problema , se tendrá:

$$\frac{n(n-3)}{2} - (n-2) = 119$$

Efectuando : $n^2 - 3n - 2n + 4 = 238$

Donde : $n^2 - 5n - 234 = 0$

$$\begin{array}{ccc} n & & -18 \\ & \times & \\ n & & +13 \end{array}$$

$$(n - 18)(n + 13) = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 18$$

Luego el número N de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice es $(n - 2)$

Reemplazando : $N = n - 2 = 18 - 2$

$$\mathbf{N = 16}$$

9.- Calcular el número de diagonales de un polígono regular sabiendo que el cuadrado de la medida de su ángulo central equivale a 9 veces la medida de su ángulo interior.

Resolución.-

Sea "n" su número de lados del polígono regular. Luego según las condiciones del problema :

$$\left(\frac{360}{n}\right)^2 = 9 \cdot \frac{180(n-2)}{n}$$

Al efectuar operaciones , se tendrá : $2 \,.\, 9 \,.\, 40 = 9\,n\,(n - 2)$

Simplificando : $80 = n^2 - 2n$

Por aspa simple : $n^2 - 2n - 80 = 0$

$$\begin{array}{ccc} n & & -10 \\ & \times & \\ n & & +8 \end{array}$$

Luego : $(n - 10)(n + 8) = 0$

Entonces : $n = 10$ (si) $\vee$ $n = -8$ (no)

Luego : $N^o D = \dfrac{10(10-3)}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{N^o D = 35}$$

10.- Si el número de lados de un polígono convexo se duplica, el número de sus diagonales aumenta en 234. ¿Cuántos lados tiene ?

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono convexo.

Luego por condiciónes del problema : $\dfrac{n(n-3)}{2} + 234 = \dfrac{2n(2n-3)}{2}$

Resolviendo : $n^2 - 3n + 468 = 4n^2 - 6n$

Ahora : $0 = 3n^2 - 3n - 468$

Factorizando , se tendrá que : $n^2 - n - 156 = 0$

$$\begin{array}{ccc} n & \searrow\nearrow & -13 \\ n & \nearrow\searrow & +12 \end{array}$$

Luego : $(n-13)(n+12) = 0$

Entonces : $n = -12 \;\vee\; n = 13$

$\therefore$ $\boxed{n = 13}$

11.- En un polígono equiángulo se conoce que la suma entre el número de diagonales trazadas desde un vértice, el número de triángulos que se forman y el número de diagonales medias que se determinan al trazarlas desde un lado es igual a 48. ¿Cuánto mide un ángulo exterior de este polígono?

Resolución.-

Por propiedad se sabe que :

- Nº de diagonales trazadas desde un vértice $= n - 3$
- Nº de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice $= n - 2$
- Números de diagonales medias trazadas desde el punto medio de un lado $= n - 1$

Luego según el problema : $(n-3) + (n-2) + (n-1) = 48$

Resolviendo : $n = 18$

Luego la medida del ángulo exterior será : $m\measuredangle\text{exterior} = \dfrac{360}{18}$

$\therefore$ $\boxed{m\measuredangle\textbf{exterior} = 20^\circ}$

12.- Si a la medida del ángulo exterior de un polígono regular se le disminuye 60º, el resultado es numéricamente igual al número de diagonales aumentado en 7. Calcular el número de sus lados.

Resolución.-

Según el enunciado del problema se tiene que :

$$\frac{360}{n} - 60^\circ = \frac{n(n-3)}{2} + 7 \quad \Rightarrow \quad 720 - n^2(n-3) = 134n$$

De la expresión anterior : $n^3 - 3n^2 + 134n - 720 = 0$

Resolviendo : $(n^2 + 2n + 144)(n-5) = 0$

$\therefore$ $\boxed{n = 5}$

13.- ¿Cuántos lados tiene aquel polígono regular tal que la medida de su ángulo interior es (m + 11) veces la medida de su ángulo central? Por otro lado se sabe que el número de sus diagonales es 110 m (m ∈ Z).

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono.

Luego : $\dfrac{180(n-2)}{n} = (m+11)\dfrac{360}{n} \Rightarrow m = \dfrac{n-24}{2}$ ... (1)

Por otro lado : $\dfrac{n(n-3)}{2} = 110m \Rightarrow m = \dfrac{n(n-3)}{220}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{n-24}{2} = \dfrac{n(n-3)}{220}$

De esta expresión se llega a la ecuación cuadrática : $n^2 - 113n + 2\,640 = 0$

Resolviendo se logra encontrar dos valores para n : $n = 80 \wedge n = 33$

Si: $n = 33$ $\quad m = \dfrac{33-24}{2} = 4{,}5$ (en este caso $m \notin \mathbb{Z}$)

Si: $n = 80 \Rightarrow m = \dfrac{80-24}{2} = 28$ (si es posible ya que $m \in \mathbb{Z}$)

$\therefore \quad \boldsymbol{n = 80}$

14.- Si a la medida del ángulo interior de un polígono regular se le disminuye en 9º, el número de sus lados se reduce en 2. ¿Cuántas diagonales quedan?

Resolución.-

De acuerdo a la propiedad 6.6h, tendremos : $\dfrac{\theta}{360} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 \cdot n_2}$

Donde los datos son : $\theta = 9^o \wedge n_2 = n_1 - 2$

Reemplazando datos se tendrá : $\dfrac{9}{360} = \dfrac{2}{(n_1)(n_1-2)}$

De donde : $(n_1)(n_1 - 2) = 80$

Resolviendo : $n_1 = 10 \wedge n_2 = 8$

Luego el número de diagonales que quedan se obtendrá a partir de $n_2 = 8$, en la relación 6.4i:

$$x = \frac{8(8-3)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = 20}$$

15.- La diferencia entre el número de diagonales y el número de ángulos llanos a que equivale la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es 119. Calcular el número de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un vértice.

Resolución.-

Sea "n"el número de lados del polígono dado ; luego :

$$N^o\ D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \wedge \quad N^o \text{ de ángulos llanos} = (n - 2)$$

Según condición del problema : $\dfrac{n(n-3)}{2} - n - 2 = 119$

Efectuando operaciones : $n^2 - 3n - 2n + 4 = 238$

Por aspa simple : $n^2 - 5n - 234 = 0$

$$\begin{array}{ll} n & -18 \\ n & +13 \end{array}$$

Resolviendo ,tendremos : $n = 18$

Nos piden N° de triángulos desde un solo vértice : $x = n - 2 \Rightarrow x = 18 - 2$

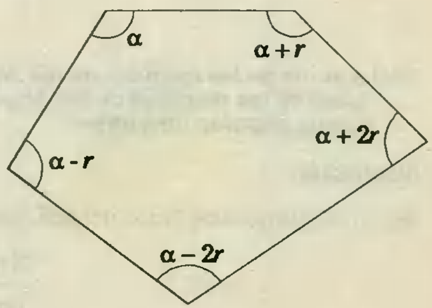
$\therefore$ $\mathbf{x = 16}$

16.- Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Calcular el mayor valor entero de la razón .

Resolución.-

Sean r la razón de la progresión y $\alpha - 2r$ la medida del menor ángulo interior del pentágono; luego el mayor ángulo será : $\alpha + 2r$

De acuerdo con la figura :



$(\alpha - 2r) + (\alpha - r) + (\alpha) + (\alpha + r) + (\alpha + 2r) = 180(5 - 2)$

Simplificando : $5\alpha = 540$

De donde : $\alpha = 108^o$ ... (1)

Además : $\alpha + 2r < 180^o$ ... (2)

Sustituyendo (1) en (2) : $108 + 2r < 180$

Ahora : $2r < 72$

Finalmente : $r < 36^o \Rightarrow r = 35 ; 34 ; 33 ; ...$

$\therefore$ **El máximo valor entero de r será 35°**

17.- En un polígono equilátero se conoce que desde 3 vértices consecutivos se pueden trazar 50 diagonales. Calcular su perímetro, si uno de sus lados mide 5.

Resolución.-

Se logrará determinar el número n de lados del polígono , emplearemos la propiedad 6.4k :

$$N^o d = mn - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Donde los datos son : $m = 3 \quad \wedge \quad N^o d = 50$

Reemplazando se tiene : $50 = 3n - \dfrac{(3+1)(3+2)}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 20$

Luego su perímetro ($2p$), será : $2p = 20\ (5)$

$$\therefore \quad \mathbf{2p = 100}$$

18.- ¿En qué polígono convexo se cumple que el cuadrado del número de sus vértices es igual a la suma de su número de diagonales, número de diagonales medias y seis veces el máximo número de ángulos interiores agudos que puede tener?

Resolución.-

Sea "n" el número de vértices, luego el polígono tendrá "n" lados . Ahora por condición del problema se tendrá que :

$$[\text{Número de vértices}]^2 = N^o D + N^o D.M + 6[\text{máximo } N^o \text{de ángulos interiores}]$$

$$(n)^2 = \frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 6\ (3)$$

Luego : $2n^2 = n^2 - 3n + n^2 - n + 36$

Simplificando : $4n = 36 \quad \Rightarrow \quad n = 9$

$\therefore$ **Es el Nonágono**

19- La suma de las medidas de los ángulos internos de cierto polígono regular excede a la suma de las medidas de los ángulos externos en 900º. ¿Cuánto sumarán las medidas de sus ángulos interiores?

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono regular dado . Lurgo por condición del problema :

$$\underbrace{\Sigma m \measuredangle i}_{180^o(n-2)} = \underbrace{\Sigma m \measuredangle e}_{360^o} + 900^o$$

Simplificando se obtiene : $n - 2 = 2 + 5$

Ahora : $n = 9$

Luego la suma pedida será : $\Sigma m \measuredangle i = 180° (9 - 2)$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\Sigma m \measuredangle i = 1260°}$$

20.- ¿Cuál es el polígono convexo en el que el número de diagonales es mayor en 133 a su número de vértices?

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono convexo. Entonces por condición del problema :

$$\frac{n(n-3)}{2} = \text{\# de vértices} + 133$$

Pero : $\quad$ # de vértices = # de lados = n

Entonces : $\quad \dfrac{n(n-3)}{2} = n + 133$

Operando : $\quad n^2 - 5n - 266 = 0$

Factorizando : $\quad n = 19$

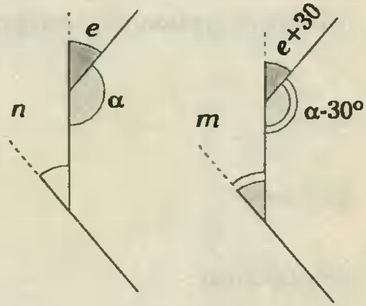
$\therefore$ **El polígono es de 19 lados**

21.- ¿ En qué polígono regular se cumple que al aumentar 30º a la medida de su ángulo externo, se obtiene otro polígono regular en el cual su ángulo externo es a su ángulo interior como 2 es a 7 ?

Resolución.-

Sean "n" y "m" los números que expresan la cantidad de lados de cada polígono regular buscado . Luego si consideramos al polígono original a aquel cuyo número de lados es "n" , según los datos dados , elaboraremos los gráficos adjuntos , los que según las codiciones del problema , deberán verificar la siguiente relación :

$$\frac{e+30°}{\alpha-30°} = \frac{2}{7}$$



De donde al efectuar las operacionescorrespondientes , tendremos :

$$\Rightarrow \quad 2\alpha - 7e = 270° \qquad \ldots (1)$$

Pero observando el primer esquema , se puede establecer que :

$$\alpha + e = 180° \qquad \ldots (2)$$

A continuación resolveremos (1) y (2), obteniéndose :

$$e = 10° \quad \wedge \quad \alpha = 170°$$

Luego : $\quad e = \dfrac{360}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{360}{10}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{n = 36}$$

22.- Calcular la medida del ángulo interior de un polígono regular sabiendo que excede en 20º a la de otro que tiene tres lados menos.

Resolución.-

Sean n_1 y n_2 los números de lados de los polígonos y α la diferencia de las medidas de sus ángulos interiores (pudiendo ser también las exteriores o centrales).

Luego según la propiedad 6.6h, se cumple : $\dfrac{\alpha}{360} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 . n_2}$ ...... (*)

De los datos del problema , se sabe que : $\alpha = 20°$ $\wedge$ $n_2 = n_1 - 3$

Luego , al reemplazar en (*) , se tiene : $\dfrac{20}{360} = \dfrac{3}{n_1(n_1 - 3)}$

Entonces , al despejar y resolver , se obtiene : $n_1 = 9$

Ahora , por la relación 6.5a , el ángulo interior será : $i = \dfrac{180\,(9-2)}{9}$

$\therefore$ $\mathbf{i = 140°}$

23.- Los 5/2 de la medida del ángulo interior de un polígono regular es igual al cuadrado de la medida de un ángulo exterior. Hallar el número de sus lados .

Resolución.-

Sea "n" el número de lados de este polígono , luego según condición del problema se debe establecer que :

$$\frac{5}{2} \text{ medida } \measuredangle \text{ interior} = [\text{medida } \measuredangle \text{ exterior }]^2 \quad ....(*)$$

Si ahora reemplazamos cada expresión de (*) por las relaciones 6.5a y 6.5b , tendremos :

$$\frac{5}{2}\left[\frac{180(n-2)}{n}\right] = \left(\frac{360}{n}\right)^2$$

De donde : $\dfrac{450(n-2)}{n} = \dfrac{360}{n} \cdot \dfrac{360}{n}$

Simplificando : $5\,(n-2) = \dfrac{4 \times 360}{n}$

Ordenando se establece que : $n\,(n-2) = 288 = 18\,(18-2)$

Finalmente por comparación : $\mathbf{n = 18}$

24.- La cantidad de diagonales de dos polígonos regulares se diferencian en 36 y las medidas de sus ángulos centrales están en la relación de 4 a 5. Calcular la diferencia de las medidas de sus ángulos interiores.

Resolución.-

Sean n y n_1 los números de lados de dichos polígonos , tal que $n_1 > n$, luego por condición del problema se tendrá :

$$\frac{n_1(n_1-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 36 \qquad \text{... (1)}$$

Pues bien , si ahora deseamos establecer la relación que guardan entre si los números n y n_1, emplearemos la segunda condición :

$$\frac{\frac{360}{n_1}}{\frac{360}{n}} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad n_1 = \frac{5}{4}n \qquad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) : $$\frac{\frac{5}{4}n\left(\frac{5}{4}n-3\right)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 36$$

Efectuando : $3n^2 - 4n - 384 = 0$

De donde al resolver : $n = 12 \quad \wedge \quad n_1 = 15$

Ahora la diferencia pedida será : $$\frac{180(15-2)}{15} - \frac{180(12-2)}{12} = \boxed{6}$$

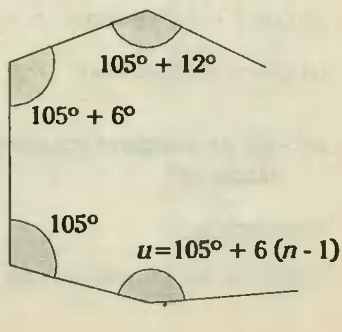
25.- Las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo están en progresión aritmética de razón 6º. Si el menor angulo mide 105º ; hallar el número de diagonales del polígono.

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono, luego por la propiedad 6.6f , tendremos :

$$180\,(n-2) = \alpha n + \frac{rn(n-1)}{2}$$

Donde : $\alpha = 105 \quad \wedge \quad r = 6$



Reemplazando : $180\,(n-2) = 105\,n + \dfrac{6n(n-1)}{2}$

Ahora : $180\,n - 360 = 105\,n + 3n^2 - 3n$

Simplificando : $3n^2 - 78\,n + 360 = 0$

También : $n^2 - 26\,n + 120 = 0$

Factorizando : $n = 6$ y $n = 20$

Donde el primer valor es el que corresponde a "n" ya que el segundo no satisface las condiciones del problema.

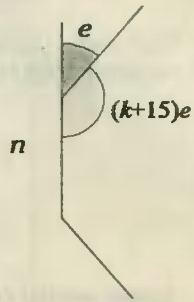
Ahora , el número de diagonales será : $N^oD = \dfrac{n(n-3)}{2} \Rightarrow N^oD = \dfrac{6(6-3)}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{N^oD = 9}$$

26.- ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno es (k + 15) veces el ángulo exterior, y además se sabe que el número de diagonales es 135k.

Resolución.-

Sea "n" el número de lados del polígono, luego por condición del problema se sabe que el número de diagonales está dado así :



$$\frac{n(n-3)}{2} = 135\,k \quad \text{.... (1)}$$

Pero el ángulo exterior está dado por : $e = \dfrac{360}{n}$ .... (2)

Del gráfico : $e + e\,(k + 15) = 180^o$

Factorizando : $e\,(k + 16) = 180^o$ .... (3)

Reemplazando (2) en (3) : $\dfrac{360^o}{n} \,.\, (k + 16) = 180^o$

Donde : $2\,(k + 16) = n$ .... (4)

Reemplazando (4) en (1) : $\dfrac{2(k+16)[2(k+16)-3]}{2} = 135\,k$

Simplificando y acomodando : $k^2 - 37k + 232 = 0$

$$\begin{array}{ccc} k & \diagdown\!\!\!\diagup & -29 \\ k & & -8 \end{array}$$

$$(k - 29)\,(k - 8) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 29 \;\wedge\; k = 8$$

Reemplazando estos valores en (4) :

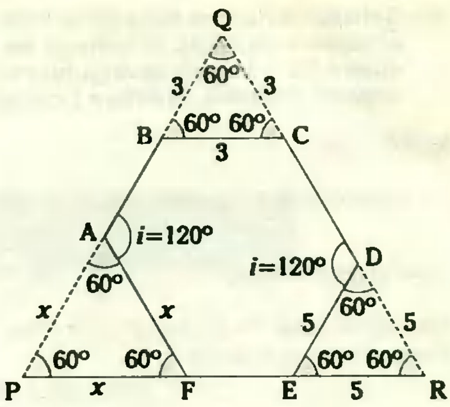
a) Con $k = 8$, se tiene : $n = 2\,(29 + 16) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 90}$

b) Con $k = 29$, se tiene : $n = 2\,(8 + 16) \quad \Rightarrow \quad n = 48$

27.- En un exágono equiángulo ABCDEF, se sabe que : AB = 2, BC = 3, CD = 4, DE = 5 . Hallar AF.

Resolución.-

Según los datos , elaboramos el gráfico correspondiente :



Calculamos su ángulo interior : ($n = 6$)

$$i = \frac{180(6-2)}{6}$$

Entonces : $i = 120°$

Formamos el triángulo equilátero PQR , donde :

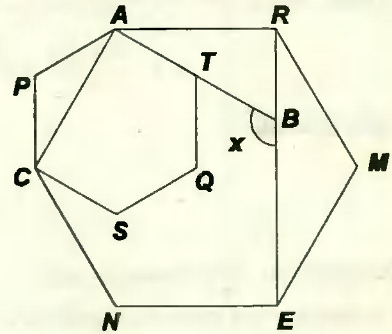
$$PQ = QR = PR$$

Ahora : PQ = QR

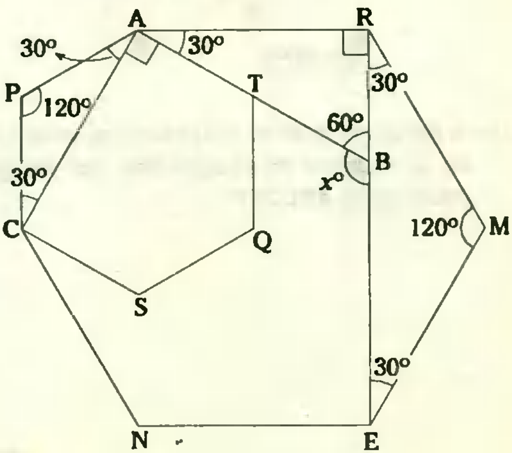
$$x + 2 + 3 = 3 + 4 + 5$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 7}$$

28.- En la figura los polígonos CARMEN y CPATQS son hexágonos regulares ; calcular la medida del ángulo TBE .



Resolución.-



Cada ángulo interior de un hexágono regular mide :

$$\frac{180(6-2)}{6} = 120°$$

En el Triángulo isósceles CPA :

$$m \measuredangle \text{ CAP} = m \measuredangle \text{ PCA} = 30° \,;$$

De donde : $m \measuredangle \text{CAT} = 90°$

En el hexágono CARMEN :

$$m \measuredangle \text{ ERM} = 30° \Rightarrow m \measuredangle \text{ ARB} = 90°$$

Además : $m \measuredangle$ BAR = 120 - 90° = 30°

En el punto B : $x = 180 - 60 \Rightarrow \boxed{x = 120°}$

29.- Calcular la medida del ángulo interior de un polígono regular, en el cual la suma entre el número de lados, el número de diagonales y el número de diagonales medias es igual a los números de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos internos, externos y centrales .

<u>**Resolución**</u>.-

Por la relación 6.4i , se sabe que : $N^o\, D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Y por la relación 6.4j : $N^o\, D\, M = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Además la suma de los ángulos internos, externos y centrales = 180 (n - 2) + 720 y su equivalencia en ángulos rectos será :

$$\frac{180(n-2)+720}{90} = 2\,(n-2) + 8 = 2n + 4$$

Luego , según condición del problema , se establece que :

$$n + \frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 4$$

Simplificando : $n^2 - 3n - 4 = 0$

$$\begin{array}{ccc} n & & -4 \\ & \times & \\ n & & +1 \end{array}$$

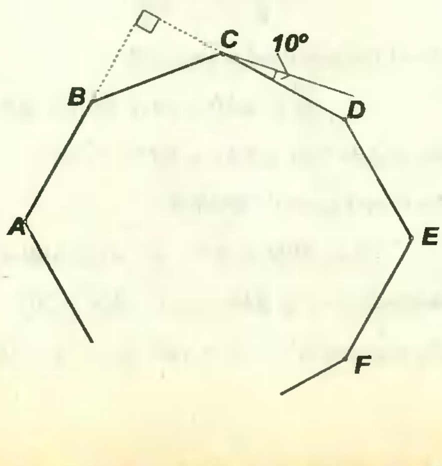
Resolviendo , encontramos que : $n = 4$

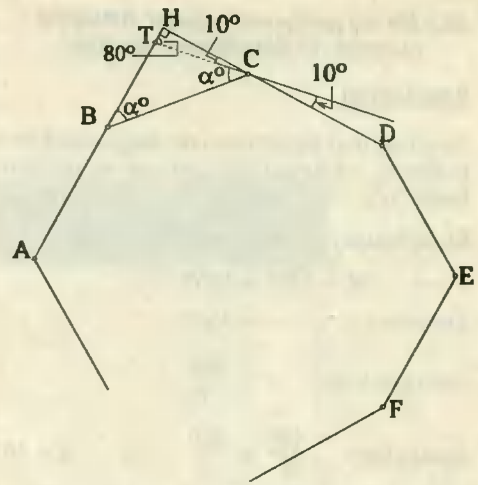
Finalmente nos piden la medida del ángulo interior , el cual viene dado por la relación 6.5a .

$$i = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(4-2)}{4}$$

$\therefore$ $\mathbf{i = 90^o}$

30.- A partir del gráfico mostrado, se pide calcular el número de diagonales del polígono equiángulo ABCDEF . . . .





Resolución.-

Para el polígono equiángulo sus ángulos exteriores son congruentes. Sea "α" la medida de estos ángulos, luego :

$$\alpha = \frac{360}{n} \quad ... (1)$$

En el Δ BTC; por ∢ exterior :

$$80 = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 40^\circ \quad ... (2)$$

De (2) en (1) : $40 = \dfrac{360}{n}$

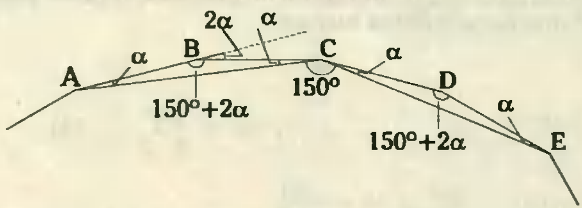
Entonces : $n = 9$

Entonces : N° de Diagonales $= \dfrac{9(9-3)}{2}$

$$\therefore \qquad \mathbf{N^oD = 27}$$

31.- ABCD . . . . es un polígono regular si a la medida del ángulo ACE es 150º. Hallar su número de diagonales.

Resolución.-



En el gráfico : Δ ABC ≅ Δ CDE (LAL)

$$\Rightarrow \qquad m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = m\measuredangle DCE = m\measuredangle DEC = \alpha$$

Ya que el polígono es regular : $m\measuredangle B = m\measuredangle C = 150 + 2\alpha$

En el Δ ABC : $4\alpha + 150 = 180$

De donde : $2\alpha = 15^\circ$

Como el ∢ exterior del polígono mide : $2\alpha = \dfrac{360}{n} = 15$

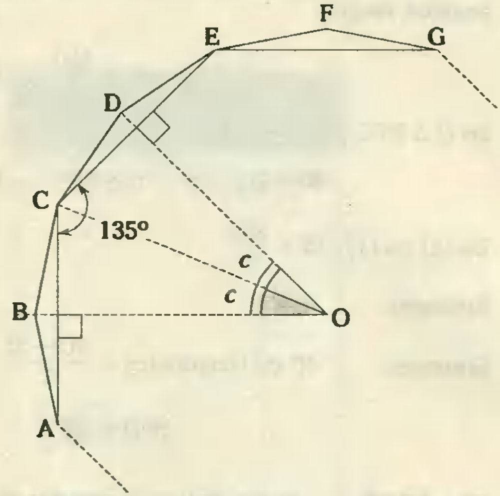
De donde : $n = 24$

$$\therefore \qquad N^oD = \frac{24(24-3)}{2} = \mathbf{252}$$

32.- En un polígono regular ABCDEF ...... de "n" lados, la m ∡ ACE = 135º. Calcular su número de diagonales medias.

<u>**Resolución.-**</u>

Para calcular su número de diagonales de este polígono, es necesario calcular su número de lados "n".



En la figura, $2c$ es un ángulo central :

$\Rightarrow \quad 2c + 135º = 180º$

Entonces : $\quad c = 45º/2$

Pero por 6.5c : $\quad c = \dfrac{360}{n}$

Igualando : $\quad \dfrac{45º}{2} = \dfrac{360}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 16$

Su número de diagonales medias será :

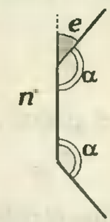
$$N^o\ DM = \frac{16(16-1)}{2}$$

$\therefore \quad$ **Nº DM = 120**

33.- Calcular la medida del ángulo interior de un polígono regular sabiendo que excede en 20º a la de otro que tiene 3 lados menos.

<u>**Resolución.-**</u>

Primer Polígono



Del gráfico : $\quad e = \dfrac{360º}{n}$ .... (1) $\quad \wedge \quad e + 20º = \dfrac{360º}{n-3}$ .... (2)

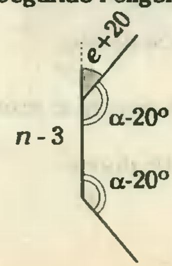
Reemplazando (1) en (2) : $\quad \dfrac{360}{n} + 20 = \dfrac{360}{n-3}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{360}{n-3} - \dfrac{360}{n} = 20$

$\Rightarrow \quad 360 \cdot 3 = 20n\,(n-3)$

Simplificando : $\quad n = 9$

Segundo Polígono



Luego por propiedad 6.5a : $\quad i = \dfrac{180(n-2)}{n}$

Reemplazando : $\quad i = \dfrac{180(9-2)}{9}$

$\therefore \quad$ $\boldsymbol{i = 140º}$

34.- En cierto polígono se cumple que el número de diagonales excede en 30 al número de diagonales de otro polígono cuyo número de lados es la mitad del primero. Calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores del primer polígono.

Resolución.-

Primer Polígono

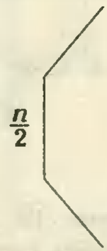
Del primer polígono : $N^oD = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Del segundo polígono : $N^oD = \dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-3\right)}{2}$

Según las condiciones del problema , se tiene que :

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-3\right)}{2} + 30 \quad \Rightarrow \quad \frac{n(n-3)}{2} - \frac{n(n-6)}{8} = 30$$

Segundo Polígono



Por consiguiente : $3n^2 - 6n - 240 = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 2n - 80 = 0$

Factorizando y resolviendo : $n = 10$

Luego la suma de las medidas de los ángulos interiores del 1er polígono.

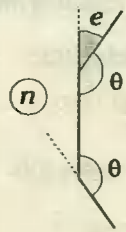
Será: $\Sigma m \measuredangle i = 180^o (n - 2)$

Reemplazando : $\Sigma m \measuredangle i = 180^o (10 - 2)$

$\therefore \quad \boldsymbol{\Sigma m \measuredangle i = 1440^o}$

35.- En un polígono regular, se desea saber en cuánto aumenta el número de diagonales, cuando el número de lados aumenta en 2, si se sabe que el ángulo interior aumenta en 2:

Resolución.-

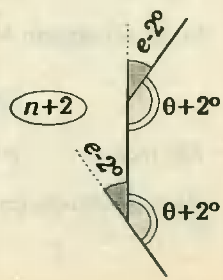


Al aumentar el número de lados de un polígono, también aumenta su número de diagonales. Si x representa a este aumento, por condición del problema se deberá cumplir que :

$$N^oD_1 + x = N^oD_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{n(n-3)}{2} + x = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \quad ..... (1)$$

Del mismo modo , los ángulos exteriores sufren un cambio , tal que :

$$e_1 - 2^o = e_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{360}{n} - 2^o = \frac{360}{n+2}$$



Efectuando y despejando : $n = 18 \quad ...(*)$

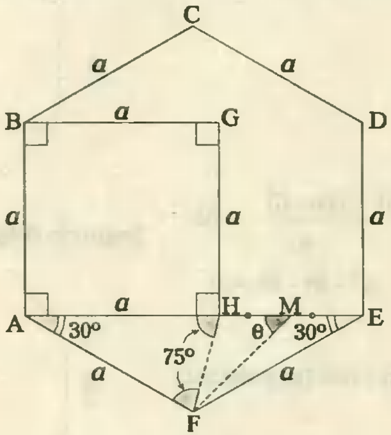
Luego reemplazamos (*)en (1) : $\dfrac{18(18-3)}{2} + x = \dfrac{(18+2)(18-1)}{2}$

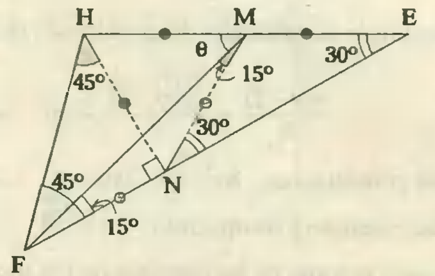
Resolviendo : $\boldsymbol{x = 35}$

36.- En un exágono regular ABCDEF, sobre $\overline{AB}$ se construye Interiormente el cuadrado ABGH, se ubica el punto medio "M" de $\overline{HE}$; hallar la medida del ángulo AMF.

Resolución.-

En principio elaboraremos dos gráficos , en el 1ro el exágono y cuadrado interior y el 2do. en el que ampliaremos el Δ FHE en el que podamos apreciar las carácterísticas del ángulo θ buscado





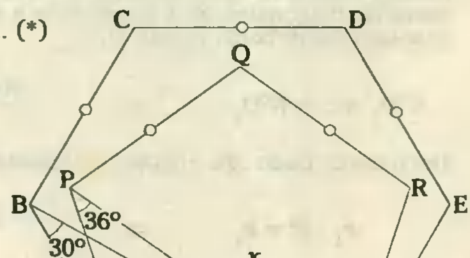
Se traza $\overline{HN} \perp \overline{FE}$, luego trazamos $\overline{NM}$, entonces el Δ HNM es equilátero y el Δ FNM es isósceles. Luego :

$$\theta + 15° = 60° \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\theta = 45°}$$

37.- Interiormente a un exágono regular ABCDEF se construye el pentágono regular APQRF. Hallar la medida del ángulo BFP.

Resolución.-

Del gráfico : $x = m\measuredangle PFA - m\measuredangle BFA$ ... (*)



En el exágono: $m\measuredangle A = \dfrac{180(6-2)}{6} = 120°$

Además : $m\measuredangle ABF = m\measuredangle AFB = 30°$

En el pentágono APQRF :

$$m\measuredangle PAF = \frac{180(5-2)}{5} = 108°$$

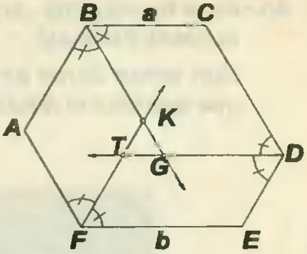
Además : $m\measuredangle APF = m\measuredangle AFP = 36°$

Reemplazando en (*) : $x = 36° - 30°$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 6°}$$

38.- La figura ABCDEF es un exágono equiángulo. Hallar el perímetro del ΔTKG, si se sabe que :

$BC = a$ y $EF = b$ $(b > a)$.



Resolución.-

Ya que el exágono es equiángulo entonces la medida de su ángulo interior estará dado así :

$$\frac{180(6-2)}{6} = 120^\circ$$

Si BCDG es un paralelogramo, entonces :

$$BC = GD = a$$

Además : $m\measuredangle TGK = m\measuredangle GBC = 60^\circ$

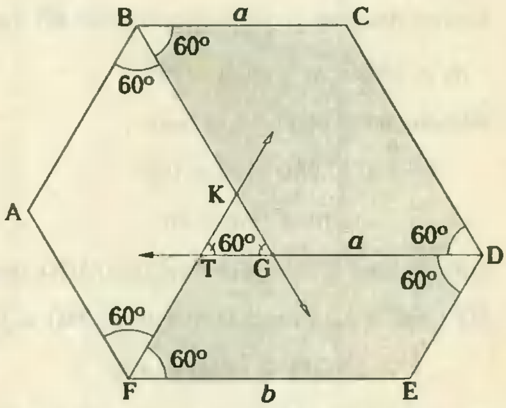
Como FTDE es un paralelogramo, entonces :

$$TD = FE = b$$

Y: $m\measuredangle KTD = m\measuredangle TFE = 60^\circ$

El Δ TKG es equilátero: $TG = GK = KT = b - a$

$$\therefore \quad 2P(\Delta TKG) = \mathbf{3(b - a)}$$



39.- En la figura adjunta : ABCDE es un pentágono regular y FGHIJ es un pentágono equilátero. Calcular AK, si KH = 12 ; además : GD = GF

Resolución.-

Por ser "θ" la medida del ángulo exterior del pentágono regular ABCDE

Se tiene : $\theta = \dfrac{360}{5} = 72^\circ$

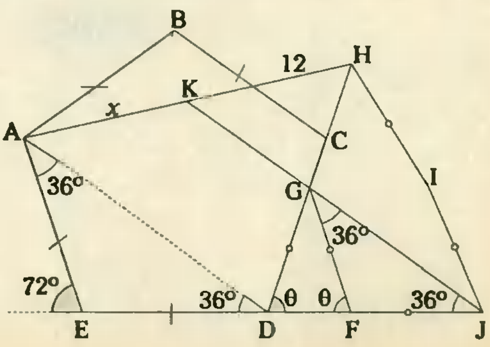
Además : $m\measuredangle ADE = 36^\circ$

En el pentágono equilátero FGHIJ :

$$m\measuredangle GJF = 36^\circ$$

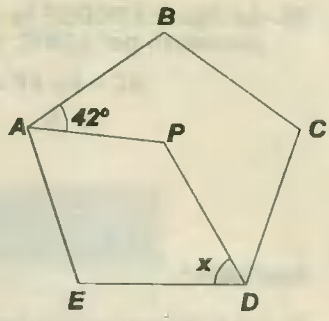
De donde : $\overline{AD} \,//\, \overline{KJ}$, luego en el triángulo AHD : KG es base media.

$$\therefore \quad \mathbf{x = 12}$$



40.- En la figura dada , el pentágono ABCDE es regular y además PD = AB .

Con estos datos se pide calcular el valor de " x", que expresa la medida del ángulo indicado .



Resolución.-

A partir del gráfico oeiginal, trazamos $\overline{AD}$, luego en el triángulo isósceles AED :

$m\measuredangle EAD = m\measuredangle EDA = 36°$

Además en el vértice A se tiene :

$42 + m\measuredangle PAD + 36 = 108°$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle PAD = 30°$

Construímos el triángulo equilátero AQD, luego :

$AQ = QC = AD$ y $m\measuredangle QAP = m\measuredangle PAD = 30°$

$\therefore \quad \Delta QAP \cong \Delta PAD$ (L.A.L)

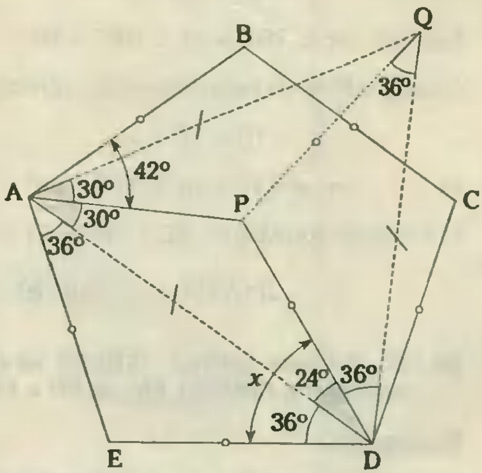
$\Rightarrow \quad PQ = PD$ ($\overline{AP}$ común a ambos triángulos)

$\therefore \quad \Delta AED \cong \Delta QPD$ (L.L.L.)

De donde : $m\measuredangle PQD = m\measuredangle PDQ = 36°$

En consecuencia : $m\measuredangle ADP = 60 - 36 = 24°$

Entonces : $x = 36 + 24 = 60°$



$\therefore \quad \boxed{x = 60°}$

PROBLEMAS POPUESTOS

1.- ¿Cuántos diagonales tiene aquel polígono regular que tiene 165° como medida de su ángulo interior.

A) 125 B) 168 C) 225 D) 252 E) 325

2.- Calcular el número de diagonales totales de aquel polígono en el cual al duplicar su número de lados, la suma de las medidas de sus ángulos internos se cuadruplica.

A) 0 B) 2 C) 5 D) 9 E) 4

3.- ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar 21 diagonales desde 4 vértices consecutivos?

A) El pentágono D) El icoságono

B) El decágono E) El pentadecágono

C) El nonágono

4.- Se tiene un heptágono regular ABCDEFG; hallar la medida del ángulo que forma la diagonal $\overline{EG}$ con la bisectriz del ángulo DAG.

A) 60° B) 80° C) $\left(\frac{275}{13}\right)^\circ$

D) $\left(\frac{310}{7}\right)^\circ$ E) $\left(\frac{270}{7}\right)^\circ$

5.- En la figura, hallar PF, si $\overline{PD}$ // $\overline{EF}$; $\overline{PE}$ // $\overline{CD}$ y ABCDEF es un exágono equiángulo AB = 1, BC = 5, CD = 2 y AF = 4.

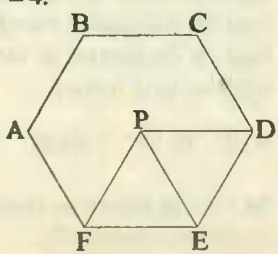
A) 3

B) 4

C) $3\sqrt{3}$

D) 6

E) 1



6.- Si la diferencia entre el número de lados de dos polígonos es 3 y la diferencia entre el número de diagonales es 15; hallar el número de lados del polígono de menor número de lados.

A) 8 B) 6 C) 5 D) 10 E) 4

7.- ¿Cuál es el polígono regular convexo en el que el número de diagonales es igual al número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de los ángulos internos dividido entre 2.

A) El triángulo D) El exágono

B) El cuadrado E) N.A.

C) El pentágono

8.- Calcular el número de lados de aquel polígono en el cual su número de lados más su número de diagonales es 28.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

9.- Determinar el número de lados de aquel polígono en el cual al aumentar un lado, su número de diagonales aumenta en 6.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 14

10.- Las medidas de un ángulo interior y un ángulo exterior de un polígono regular, son entre si como 11 es a 2; hallar el número de diagonales medias.

A) 65 B) 68 C) 72 D) 78 E) 84

11.- Calcular el número de lados de aquel polígono en el cual al disminuir dos lados su número de diagonales disminuye en 19.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

12.- La suma de las perpendiculares bajadas por los vértices de un exágono regular a una recta exterior es 18; hallar la distancia del centro del polígono a dicha recta.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

13.- Interiormente a un pentágono regular ABCDE, se construye un triángulo equilátero AMB; hallar la $m\measuredangle$ DME.

A) 86° B) 84° C) 66° D) 54° E) 42°

14.- Se tiene el polígono regular ABCDE..., calcular el número de diagonales sabiendo que $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ forman un ángulo cuya medida es 135°.

A) 55 B) 54 C) 45 D) 56 E) 108

15.- La suma de las medidas de los ángulos internos, externos y centrales de un polígono regular convexo, es 1260°. Calcular el número de lados del polígono.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

16.- ¿Cuál es el polígono regular covexo tal que si su ángulo interno disminuye 10° resultaría otro polígono regular cuyo número de lados sería 2/3 del número de lados del polígono original?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 15 E) 24

17.- Hallar el número de lados de un polígono, cuyo número de diagonales medias es el doble del número de diagonales de dicho poligono.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

18.- Las medidas de los ángulos interiores de un endecágono convexo forman una progresión aritmética de razón *r*. Hallar el máximo valor entero de *r*.

A) 4° B) 5° C) 6° D) 8° E) 9°

19.- Calcular el número de lados de un polígono equiángulo ABCDEF . . . si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ forman un ángulo de 36°.

A) 15 B) 20 C) 10 D) 40 E) 10.40

20.- De 4 lados consecutivos de un polígono equiángulo se han trazado 50 diagonales medias. ¿Cuánto mide un ángulo exterior del polígono?

A) 12 B) 15 C) 20 D) 24 E) 30

21.- Dados dos polígonos regulares cuyos números de lados son consecutivos. Calcular el número de lados del polígono de mayor ángulo central, si la diferencia entre las medidas de sus ángulos exteriores es 12.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

22.- En la figura, hallar : $\alpha+\beta+\theta+\omega$

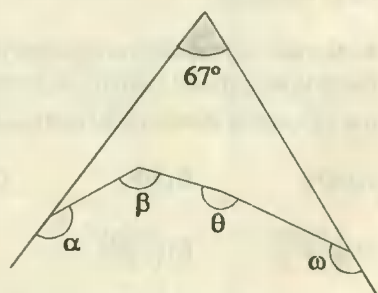
A) 360°

B) 463°

C) 607°

D) 630°

E) 720°



23.- Calcular la medida del ángulo interno de aquel polígono regular convexo cuyo número total de diagonales excede en siete al número total de diagonales de otro polígono convexo tiene un lado menos.

A) 9° B) 120° C) 90° D) 140° E) 144°

24.- En la figura se muestra dos pentágonos regulares, calcular "*x*".

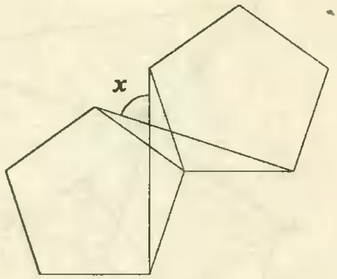
A) 58°

B) 27°

C) 72°

D) 80°

E) 60°



25.- En un campeonato de futbol participaron "n" equipos, sabiendo $(n - 4)$ equipos jugaron $5n$ partidos. Hallar n.

A) 9   B) 10   C) 11   D) 12   E) 15

26.- En la diagonal $\overline{AE}$ de un octógono regular ABCDEFGH se ubica el punto P talque el $\measuredangle$ FPE mide 30°. Calcular la medida del ángulo HPF.

A) 30°   B) 45°   C) 60°   D) 75°   E) 90°

27.- Hallar el número de vértices de aquel polígono donde el número de diagonales es el doble de la suma del número de lados mas dos.

A) 4   B) 8   C) 10   D) 12   E) 14

28.- En un polígono regular ABCDE.... de n lados. Hallar el menor valor que puede tener el ángulo ACE.

A) $\dfrac{360}{n}$ B) $\dfrac{720°}{n}$ C) 36°

D) 60°   E) $\dfrac{180°}{n}$

29.- Al disminuir en 6° la medida de cada ángulo interno de un polígono regular resulta otro polígono regular, resulta otro polígono regular cuyo número de diagonales es los 3/5 del número de lados de dicho polígono.

A) 14   B) 15   C) 10   D) 20   E) 15

30.- De 2 polígonos regulares, uno de ellos tiene 3 lados menos que el otro pero el ángulo exterior de uno de ellos mide 27° menos que la medida del ángulo exterior del otro. Hallar la suma de las medidas de los ángulos internos de dichos polígonos.

A) 1 500°   B) 1 520°   C) 1 600°

D) 1620°   E) 1 800°

31.- En un polígono de "n" lados la suma del número de diagonales medias y el triple del número de lados es 1650. Calcular la diferencia entre el número de diagonales trazadas desde 5 vértices consecutivos y de un vértice.

A) 198   B) 200   C) 205   D) 203   E) 202

32.- Se tiene un polígono convexo de "n" lados cuyo número de diagonales se encuentra entre 22 y 34 . Hallar n.

A) 8   B) 9   C) 10   D) 11   E) 12

33.- En cierto polígono al aumentar el número de lados en "K", el número de diagonales aumenta en 6K. ¿Cuántos polígonos cumplen estas condiciones? :

A) 2   B) 6   C) 5   D) 15   E) 14

34.- Dado un hexágono convexo ABCDEF tal que : $m\measuredangle B = 40°$; $m\measuredangle E = 150°$ y $m\measuredangle C + m\measuredangle D = 330°$. Calcular la medida del ángulo que forman las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{FE}$ al intersectarse.

A) 60°   B) 70°   C) 80°   D) 20°   E) 100°

35.- El perímetro de un octógono equiángulo ABCDFGH es $4(1+\sqrt{2})$ dicho polígono tiene 2 tipos diferentes de lados de los cuales se presentan en forma alternada. Calcular : $\sqrt{AF+BG}$

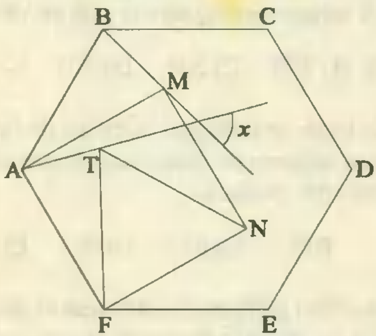
A) $\sqrt{2}-1$ B) $3+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}+1$

D) $3-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}+1$

36.- El menor ángulo de un polígono convexo mide 139° y las medidas de los otros ángulos con la del primero una progresión aritmética de razón 2°. Calcular el número de lados del polígono.

A) 10 B) 15 C) 9 D) 12 E) 20

37.- En la figura: ABCDEF ; AMNF y FTN son polígonos regulares. Hallar x



A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 53°

38.- En la figura los polígonos mostrados son regulares; hallar x.

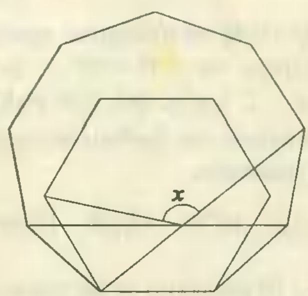
A) 120°

B) 110°

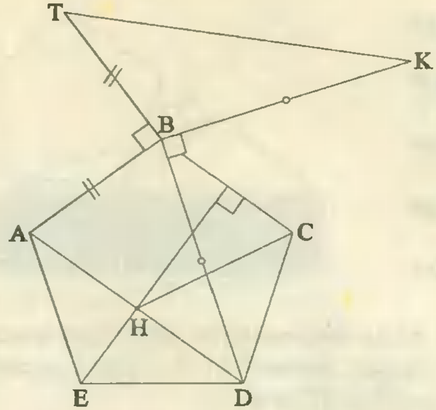
C) 115°

D) 130°

E) 135°



39.- En la figura ABCDE, es un pentágono regular BD = BK ; AB = BT ; TK = $2\sqrt{5}$.
Calcular CH.



A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 5

D) 2,5 E) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

40.- En la figura ABCDE es un pentágono regular AP = EC y PB = KD; hallar x.

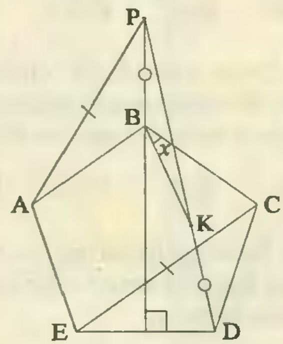
A) 15°

B) 20°

C) 22,5°

D) 30°

E) 36°



41.- La diagonal de un polígono viene hacer :

A) El segmento que une dos vértices consecutivos.

B) El segmento que une los puntos medios de dos de sus lados.

C) El segmento que une un vértice con el punto medio de otro lado del polígono.

D) El segmento que une dos vértices no consecutivos.

E) B y D son correctas

CAP. 7

cuadriláteros

DEFINICIÓN :

Es aquel polígono que tiene cuatro lados.

7.1 LOS CUADRILÁTEROS PUEDEN SER :

A) CUADRILÁTERO CONVEXO

Cuando sus ángulos interiores son convexos, se cumple que :

$$\alpha + \beta + \theta + \rho = 360 \qquad \text{... (7.1)}$$

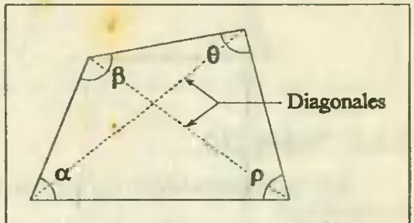


Fig. 7.1

B) CUADRILÁTERO NO CONVEXO

Cuando tiene por lo menos un ángulo no convexo (mayor de (90°), también se le llama cuadrilátero cóncavo.

$$x = \alpha + \beta + \theta \qquad \text{... (7.2)}$$

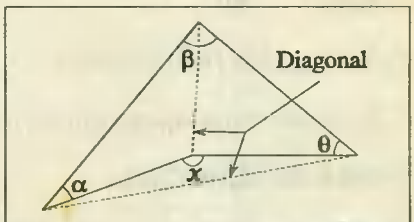


Fig. 7.2

C) CUADRILÁTERO ALABEADO

Es aquel cuyos puntos se encuentran en dos o más planos.

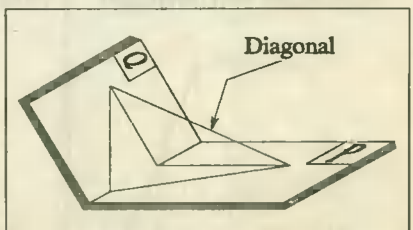


*Fig.*7.3

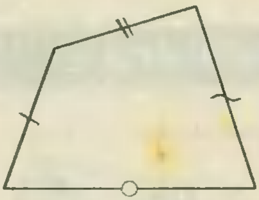
7.2 CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

7.2.1 TRAPEZOIDE

No tiene lados paralelos. Pueden ser :

A) Trapezoide Asimétrico.-

Cuando todos sus lados tienen diferente longitud.



B) Trapezoide Simétrico.-

Llamado también trapezoide bisósceles o contraparalelogramo.

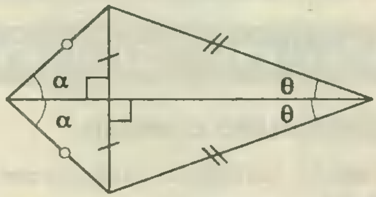


Fig. 7.4

7.2.2 TRAPECIO.

Es aquel cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.

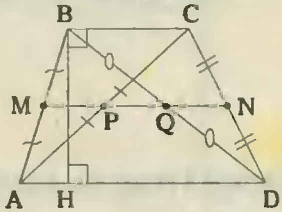


Fig. 7.5

Elementos :

a) Bases : $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$)

b) Altura : $\overline{BH}$

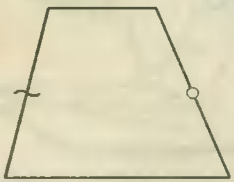
c) Mediana : $\overline{MN}$ ($\overline{MN}//\overline{BC}//\overline{AD}$) $\wedge$ $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$ **... (7.3)**

d) El segmento que une los puntos medios de las diagonales : $PQ = \dfrac{AD - BC}{2}$ **... (7.4)**

CLASES DE TRAPECIOS :

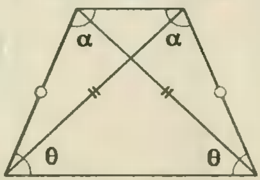
1. Trapecio Escaleno.-

Es aquel cuyos lados no paralelos son diferentes.



2. Trapecio Isósceles.-

Es aquel cuyos lados paralelos son congruentes.



3. Trapecio Rectángulo.-

Es aquel en el que uno de los lados no paralelos es la altura del trapecio.

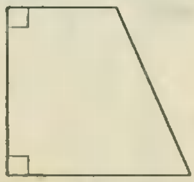


*Fig.*7.6

7.2.3 PARALELOGRAMO.-

Es aquel cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y congruentes.

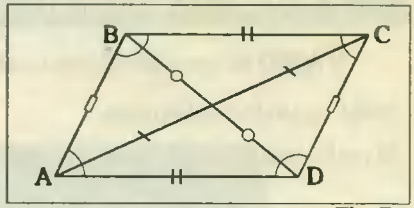


Fig. 7.7

Características :

* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
* $AO = OC$; $BO = OD$
* $\overline{AC} \neq \overline{BD}$
* $\measuredangle A \cong \measuredangle C$; $\measuredangle B \cong \measuredangle D$
* $\alpha + \theta = 180$

CLASES DE PARALELOGRAMOS :

1. Rectángulo (Cuadrilongo)

También llamado cuadrilongo, es aquel paralelogramo cuyos ángulos interiores miden 90°, sus diagonales son iguales y se bisecan (cortan en su punto medio). Sus lados opuestos son iguales.

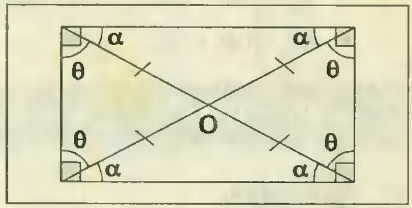


Fig. 7.8

2. Rombo (Losange)

También llamado Losange, es aquel paralelo-gramo cuyos lados tienen igual longitud, sus diagonales se cortan perpendicularmente, se bisecan y son bisectrices de sus ángulos interiores.

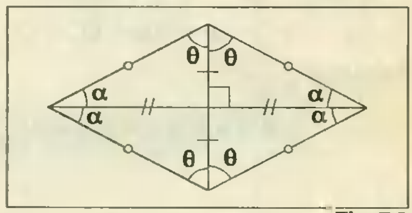


Fig. 7.9

3. Cuadrado

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de igual longitud, sus ángulos interiores miden 90°; sus diagonales son iguales. Se cortan perpendicularmente, se bisecan y son bisectrices de sus ángulos interiores.

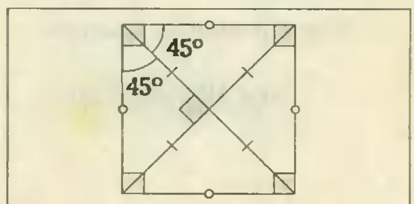


Fig. 7.10

4. Romboide

Es el paralelogramo propiamente dicho.

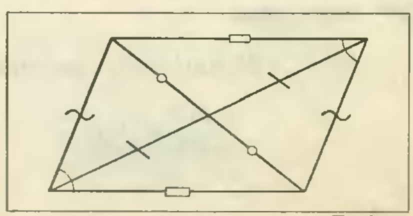


Fig.7.11

7.3 PROPIEDAD GENERAL

Si ABCD es un cuadrilátero cualquiera, entonces se cumple que :

- MNLF es un Paralelogramo.
- El perímetro ($2p$) del cuadrilátero MNLF es : AC + BD

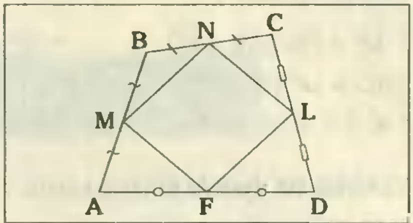


Fig. 7.12

Observación :

Si : * AC = BD $\Rightarrow$ MNLF es un Rombo

* $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\Rightarrow$ MNLF es un Rectángulo

* AC = BD y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\Rightarrow$ es un Cuadrado.

7.4 PROPIEDADES EN TRAPEZOIDES

1ra Propiedad.

Si $2p$ = perímetro, entonces :

$$2p = AB + BC + CD + AD$$

Y además :

$$p < a + b + c + d < 3p \qquad ...(7.5)$$

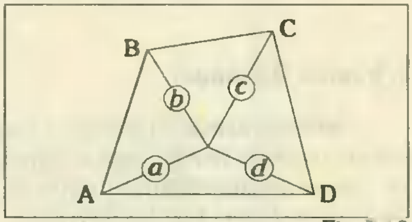


Fig. 7.13

2da Propiedad.

Si $2p$ = perímetro, entonces :

$$p < AC + BD < 2p \qquad ...(7.6)$$

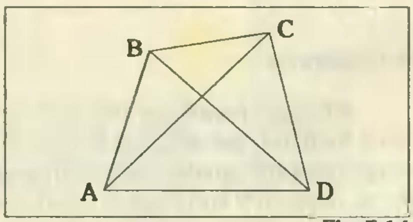


Fig. 7.14

3ra Propiedad.

Si : AE y BE son bisectrices, entonces :

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad ...(7.7)$$

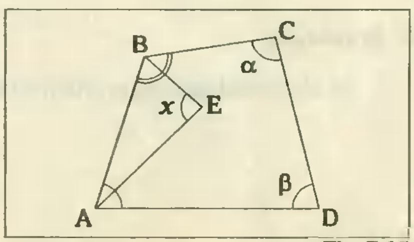


Fig. 7.15

4ta Propiedad.

Si : BE y DE son bisectrices, entonces :

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2} \qquad \text{... (7.8)}$$

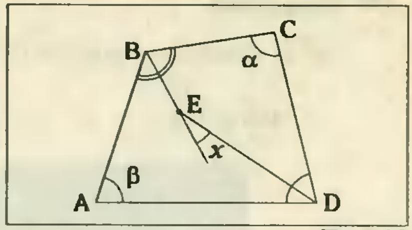


Fig. 7.16

5ta Propiedad.

Si : BE y DE son bisectrices, entonces :

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \text{... (7.9)}$$

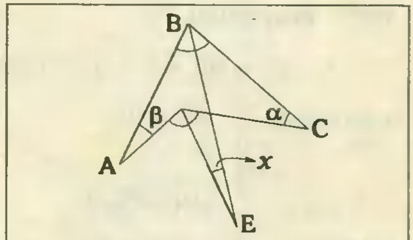


Fig. 7.17

6ta Propiedad.

Si : BF, CF, AE y DE son bisectrices, entonces :

$$\alpha + \beta = 180 \qquad \text{... (7.10)}$$

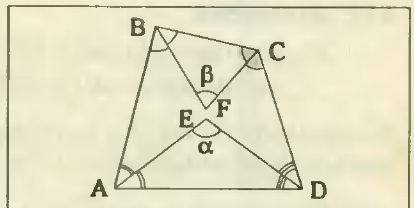


Fig. 7.18

7ma Propiedad.

En la figura se cumple que :

$$\alpha + \beta + \phi - \theta = 360 \qquad \text{... (7.11)}$$

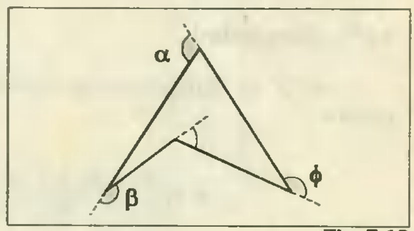


Fig. 7.19

8va Propiedad.

Si : M, L, N, F son puntos medios, entonces :

$$MO = ON \quad \wedge \quad LO = OF \qquad \text{... (7.12)}$$

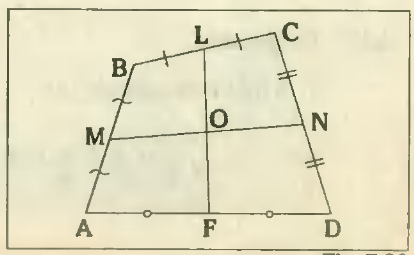


Fig. 7.20

9na Propiedad.

Si : M, F, N, L son puntos medios, entonces :

MO = ON $\wedge$ LO = OF

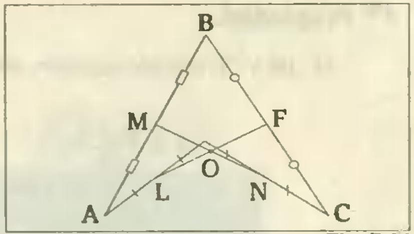


Fig. 7.21

10ma Propiedad.

Si : AC = BD = a ; M y N puntos medios.

Y además : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\Rightarrow$ $MN = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ... (7.13)

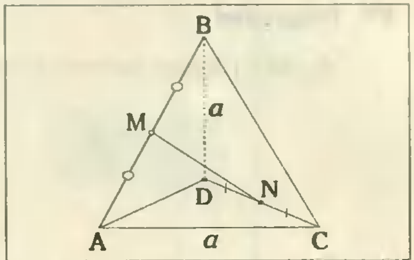


Fig. 7.22

11ra Propiedad.

Si : G_1 : Baricentro del Δ ABC
G_2 : Baricentro del Δ BAD

Se cumple que $\overline{DG_1}$ y $\overline{CG_2}$ son medianas del cuadrilátero ABCD; "O" es baricentro del cuadrilátero ABCD.

$CO = 3\,(OG_2) \;\wedge\; DO = 3\,(OG_1)$ ... (7.14)

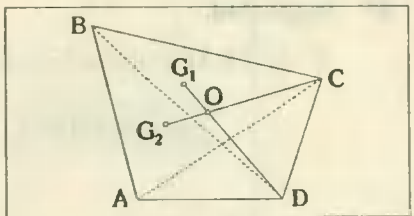


Fig. 7.23

12da Propiedad.

Si "O" es Baricentro del cuadrilátero ABCD, entonces :

$$x = \frac{a+b+c+d}{4} \quad ... (7.15)$$

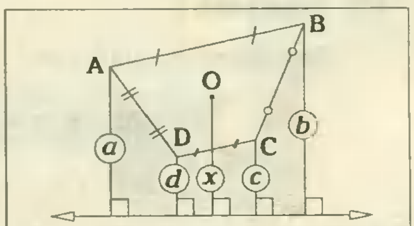


Fig. 7.24

13ra Propiedad.

En la figura se cumple que :

$$x = \frac{a+b+c+d}{4} \quad ... (7.16)$$

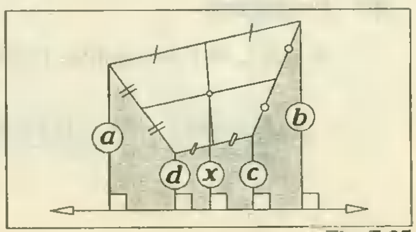


Fig. 7.25

14ta Propiedad.

En el triángulo ABC, si se cumple que "G" es Baricentro.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{a+b+c}{3}} \qquad \dots (7.17)$$

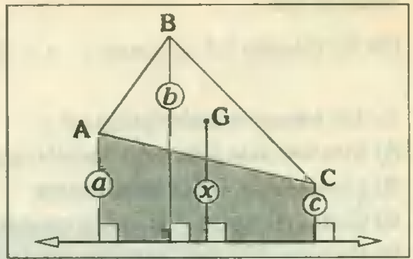


Fig. 7.26

15ta Propiedad.

En el triángulo ABC, si se cumple que "G" es Baricentro.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{b = a + c} \qquad \dots (7.18)$$

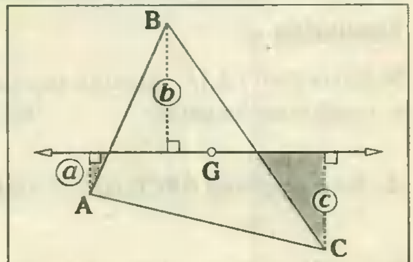
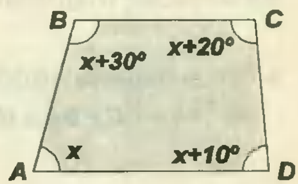


Fig. 7.27

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1RA PARTE)

1.- En el cuadrilátero convexo, hallar la m ∡ BAD.



Resolución.-

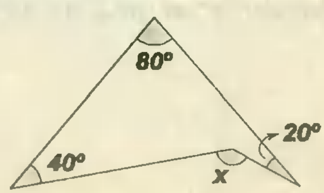
Por la relación 7.1, tenemos : $x + x + 10 + x + 20 + x + 30 = 360$

En consecuencia : $4x + 60 = 360$

Ahora : $4x = 360$

$$\therefore \qquad m \measuredangle \text{BAD} = x = 75^\circ$$

2.- En el cuadrilátero cóncavo, hallar "x".



Resolución.-

Por la relación 7.2, tenemos : $x = 40 + 80 + 20$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 140°}$

3.- Un trapecio asimétrico es :

A) Cuando sus lados no paralelos son de diferente longitud

B) Llamado también bisósceles

C) Cuando uno de los lados no paralelos es la altura del trapecio.

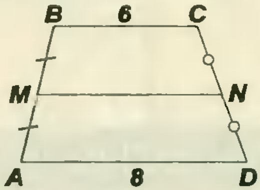
D) Cuando sus lados no paralelos son de longitudes congruentes

E) Cuando todos sus lados tienen diferente medida de longitud.

Resolución.-

Según el item 7.2.1A, sabemos que un trapecio asimétrico es aquel cuyos lados tienen diferente medida de longitud. **RPTA. E**

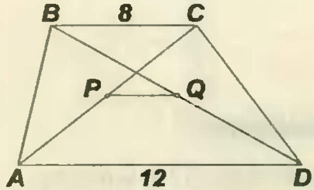
4.- En el trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), calcular MN.



Resolución.-

Por la relación (7.3), tendremos : $MN = \dfrac{8+6}{2}$ $\therefore$ $\mathbf{MN = 7}$

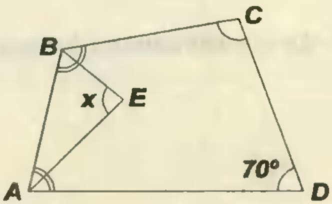
5.- En el trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), calcular PQ.
Si : AP = PC y BQ = QD.



Resolución.-

Según la relación (7.4), sabemos que : $PQ = \dfrac{12-8}{2}$ $\therefore$ $\mathbf{PQ = 2}$

6.- En el cuadrilátero BE y AE son bisectrices.
Calcular "x", si : m ∡ A = 1/2 m ∡ C = 50º.



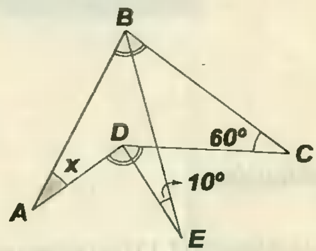
Resolución.-

Del dato : $m\measuredangle C = 2\,(50^\circ)\,.\,100^\circ$

Según la relación (7.7), se sabe que : $x = \dfrac{100+70}{2}$

De donde : $\boldsymbol{x = 85^\circ}$

7.- En el gráfico mostrado, BE y DE son bisectrices, hallar "x", si además : x < 60º

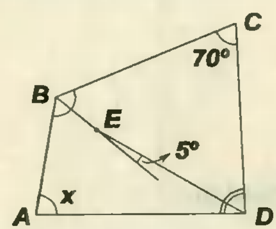


Resolución.-

De acuerdo con la relación (7.9), tenemos : $10^\circ = \dfrac{60-x}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 40^\circ}$

8.- En la figura, BE y DE son bisectrices, calcular el valor de "x", siendo : x >70º.

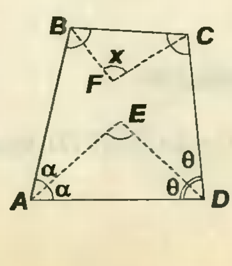


Resolución.-

Según la relación (7.8) se sabe que : $5^\circ = \dfrac{x-70}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 80^\circ}$

9.- Si BF y CF son bisectrices, hallar "x", si además : α = 50º y θ = 45º.

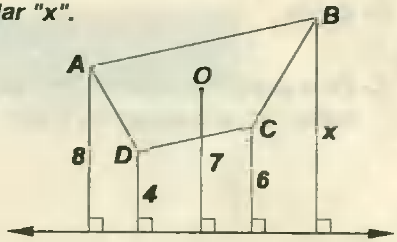


Resolución.-

Se puede reconocer que : $m \measuredangle B = 85°$

Luego por la relación (7.10), se tendrá : $x + 85 = 180$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 95°}$

10.- En el cuadrilátero ABCD, "O" es el baricentro; hallar "x".

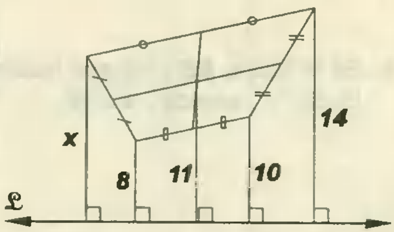


Resolución.-

De la relación (7.15) sabemos que : $7 = \dfrac{8+4+6+x}{4}$

De donde : $\boldsymbol{x = 10}$

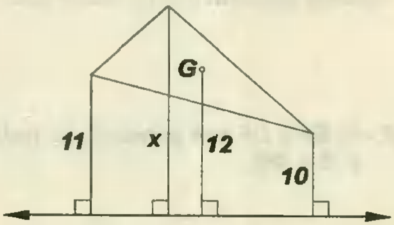
11.- A partir del gráfico mostrado, se pide hallar "x"



Resolución.-

Según la relación (7.16), se tiene : $11 = \dfrac{x+8+10+14}{4}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 12}$

12.- En el triángulo mostrado, se sabe que "G" es baricentro, entonces se pide hallar "x".



Resolución.-

Por la relación (7.17), tendremos : $12 = \dfrac{11+x+10}{3}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 15}$

7.5 PROPIEDADES EN TRAPECIOS

1RA PROPIEDAD

Si : $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{AD}$

$\Rightarrow$ Δ BAF : Isósceles y

AB = AF

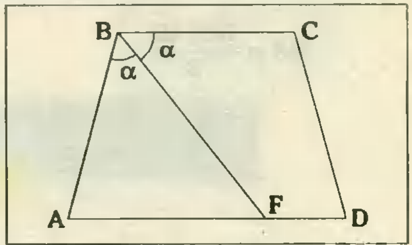


Fig. 7.28

2DA PROPIEDAD

Si : $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{AD}$ y $\overline{BE}$, $\overline{AE}$ son bisectrices, en-tonces:

$x = 90°$

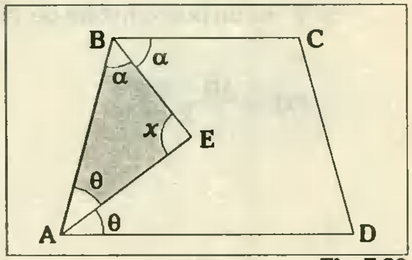


Fig. 7.29

3RA PROPIEDAD

Si : $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{AD} \wedge m\measuredangle B = 2m\measuredangle D$

$\Rightarrow$ **AD = AB + BC**

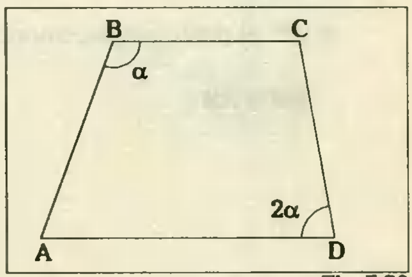


Fig. 7.30

4TA PROPIEDAD

Si : $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{AD}$; $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices exteriores, entonces :

$x = 90°$

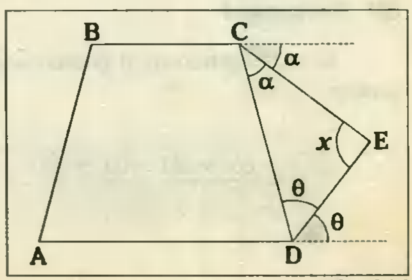


Fig. 7.31

5ta Propiedad

Si :"M" es punto medio, entonces :

$$MN = \frac{BC+AD}{2} \quad \text{... (7.19)}$$

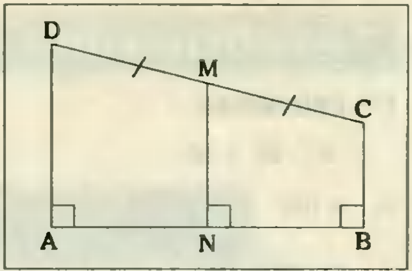


Fig. 7.32

6ta Propiedad

Si "P" es un punto medio de $\overline{AC}$, entonces :

$$PQ = \frac{AD - BC}{2} \quad \text{... (7.20)}$$

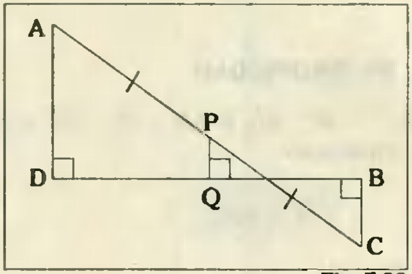


Fig. 7.33

7ma Propiedad

Si "M" es punto medio, entonces :

$$BM = AM$$

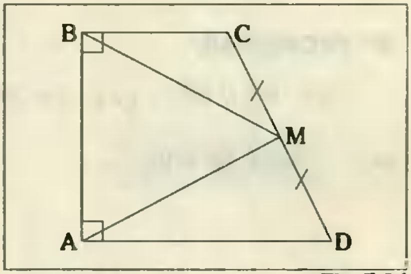


Fig. 7.34

8va Propiedad

Si los segmentos trazados son bisectrices, entonces :

$$x = \frac{(b + d) - (a + c)}{2} \quad \text{... (7.21)}$$

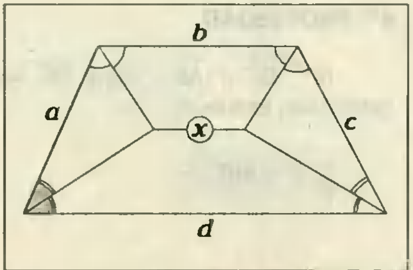


Fig. 7.35

9na Propiedad

Si : $\overline{BE}$, $\overline{AE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ son bisectrices y hacemos EF = x , entonces :

$$x = \frac{a+b+c+d}{2} \qquad \text{... (7.22)}$$

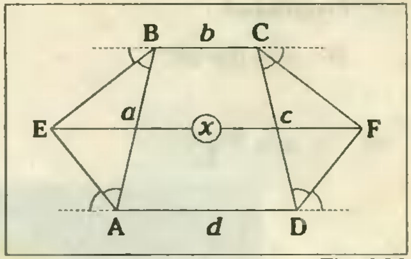


Fig. 7.36

10ma Propiedad

Si : $\overline{AO}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{DO}$ son bisectrices, entonces se cumple que :

$$a + c = b + d \qquad \text{... (7.23)}$$

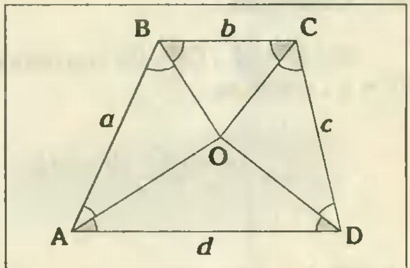


Fig. 7.37

11ra Propiedad

Si : AB = BC = CD = a y $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

$\Rightarrow$ $\boxed{AD = 2a}$

Y además : $\theta = 60°$

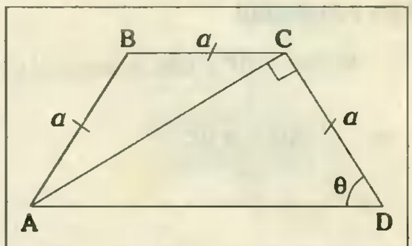


Fig. 7.38

12da Propiedad

Si : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (b + d)^2 \qquad \text{... (7.24)}$$

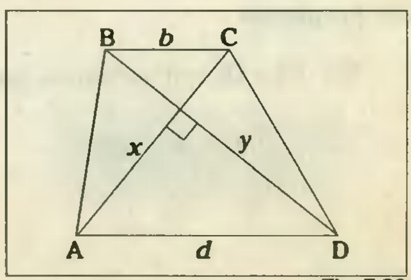


Fig. 7.39

13ra Propiedad

Si: $\alpha + \theta = 90$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{d - b}{2} \qquad \text{... (7.25)}$$

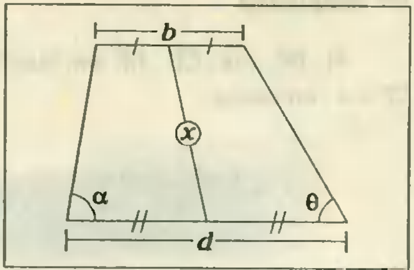


Fig. 7.40

14ta Propiedad

Si : $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices y hacemos EF = x , entonces :

$$x = \frac{(a + c) - (b + d)}{2} \qquad \text{... (7.26)}$$

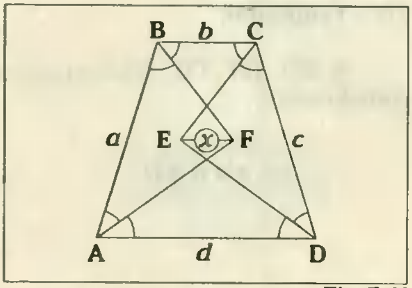


Fig. 7.41

15ta Propiedad

Si : MP = QP = QN , además M y N puntos medios.

$$\Rightarrow \quad AD = 2\,BC \qquad \text{... (7.27)}$$

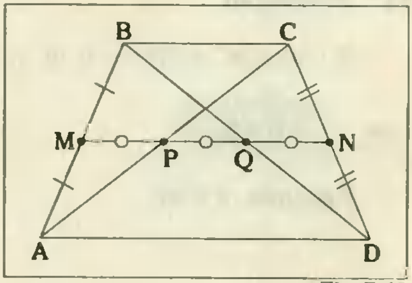


Fig. 7.42

16ta Propiedad

Si : $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices, entonces :

$$x = \frac{AD + BC - CD}{2} \qquad \text{... (7.28)}$$

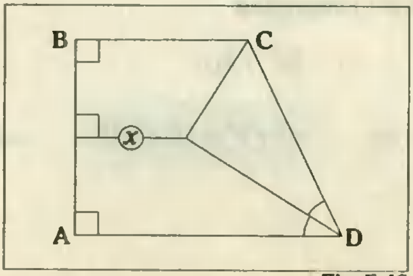
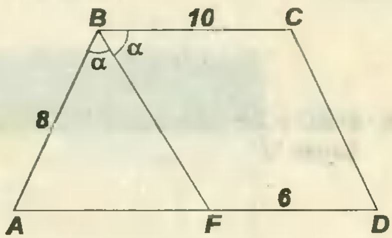


Fig. 7.43

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

13.- En el trapecio ABCD, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{AD}$, calcular AD.

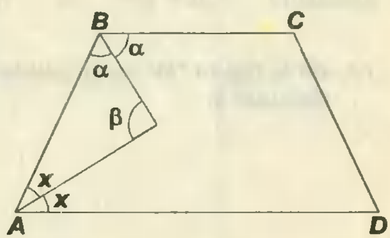


Resolución.-

De acuerdo con la 1ra propiedad del item 7.5, tenemos que el triángulo BAF es isósceles, entonces :

Luego : AD = AF + FD $\Rightarrow$ AD = 8 + 6 $\Rightarrow$ **AD = 14**

14.- Si : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y además $\overline{BE}$ y $\overline{AE}$ son bisectrices . Calcular "x", si α = 32º

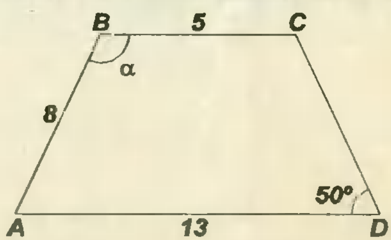


Resolución.-

De acuerdo con la 2da propiedad del item 7.5, tenemos que : $\beta = 90^\circ$

Luego : $x + 32^\circ = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 58^\circ}$

15.- En la figura se sabe que : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$; AB = 8 , BC = 5 ∧ AO = 13. De acuerdo con estos datos calcular α.



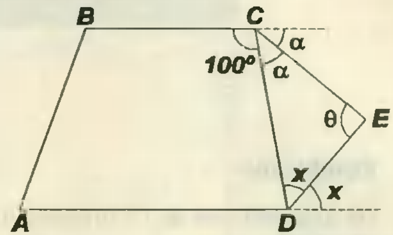
Resolución.-

Según la 3[ra] propiedad del item 7.5, se verifica que : AD = AB + BC

Luego : $m\measuredangle B = 2m\measuredangle D = 2(50°)$

$\therefore$ $\boldsymbol{m\measuredangle B = 100°}$

16.- Si $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y además $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices, hallar "x"

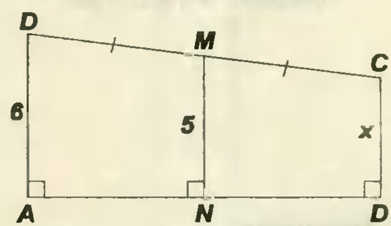


Resolución.-

Por la 4[ta] propiedad del item de 7.5, tenemos que : $\theta = 90°$

Asimismo : $2\alpha = 80°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 40°$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 50°}$

17.- En la figura "M" es un punto medio de $\overline{DC}$. Calcular x.

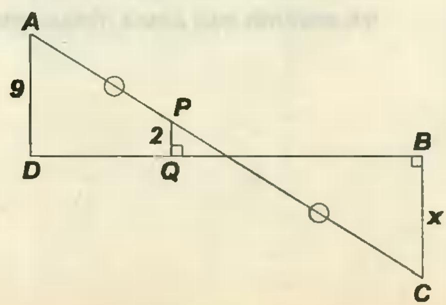


Resolución.-

Por la 5[ta] propiedad del item 7.5, tenemos : $5 = \dfrac{6+x}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 4}$

18.- En el gráfico, hallar x si : AP = PC

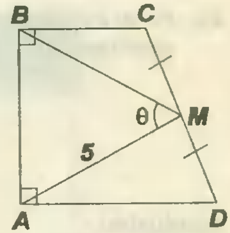


Resolución.-

Según la 6ta propiedad del item 7.5 , tenemos : $2 = \dfrac{9-x}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 5}$

19.- En el trapecio rectángulo ABCD, se sabe que : CM = MD. Calcular BM , si : AM = 5 ∧ θ = 90º



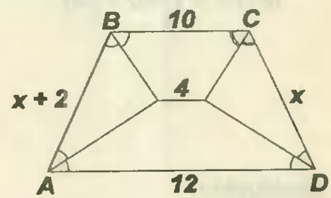
Resolución.-

Por la 7ma propiedad de 7.5, tenemos : BM = AM ⇒ BM = 5

Luego del ⊿ AMB : $AB = AM\sqrt{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{BM = 5\sqrt{2}}$

20.- En el trapecio ABCD, se tiene que : $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$; si los segmentos trazados en su interior son bisectrices, calcular "x".



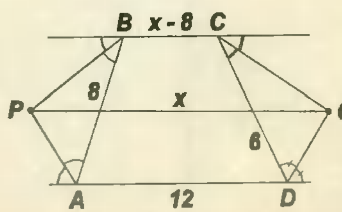
Resolución.-

Por la 8va propiedad del item 7.4, tenemos : $4 = \dfrac{(10+12)-(x+2+x)}{2}$

Entonces : $4 = \dfrac{20-2x}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6}$

21.- En el trapecio ABCD, se sabe que : $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$. Si los segmentos trazados son bisectrices, hallar PQ = x, si además : AB = 8 ∧ CD = 6

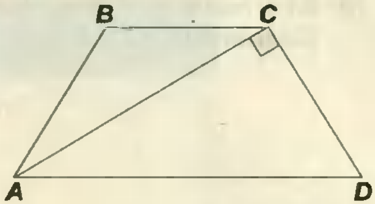


Resolución.-

Por la 9^{na} propiedad de 7.5 , tenemos : $x = \dfrac{8+x-8+6+12}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{x = 18}$

22.- En el trapecio ABCD, se sabe que : $\overline{BC}$ // AD. Si además : AB = BC = CD = 6 , se pide calcular AC.

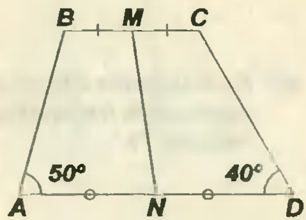


Resolución.-

Por la 11^{ra} propiedad del item 7.5 , tenemos : AD = 2(6)

Luego en el ⊿ ACD : $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} \Rightarrow$ $\mathbf{AC = 6\sqrt{3}}$

23.- Si se cumple que $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, M y N puntos medios de BC y AD respectivamente. Calcular BC; además α + θ = 90º (MN = 3 y AD = 12)



Resolución.-

Según la 13^{ra} propiedad del item 7.5 , tenemos : $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Reemplazando : $3 = \dfrac{12 - BC}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{BC = 6}$

7.6 PROPIEDADES EN PARALELOGRAMOS

1ra Propiedad

Si : $\overline{BF}$ es bisectriz, entonces

Δ BAF es isósceles, donde :

AB = AF

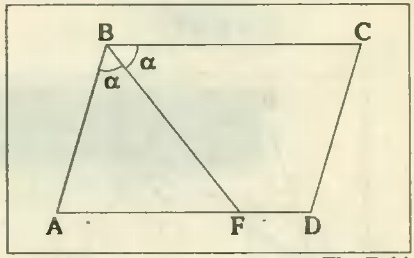


Fig. 7.44

2da Propiedad

Si : AB = CD y

BC = AD

$\Rightarrow$ **▱ ABCD es un paralelogramo**

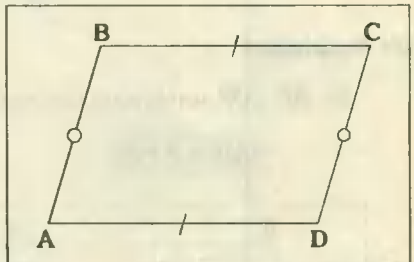


Fig. 7.45

3ra Propiedad

$$\text{Si : }\begin{cases} BC = AD \\ \overline{BC} \,//\, \overline{AD} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **▱ ABCD es un paralelogramo**

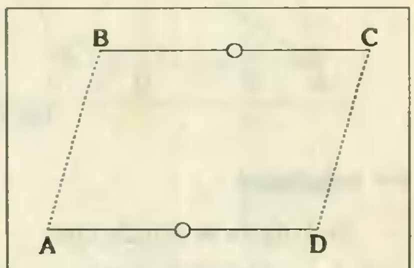


Fig. 7.46

4ta Propiedad

Si : $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices $\wedge$ $x = 90$

$\Rightarrow$ **AD = 2AB**

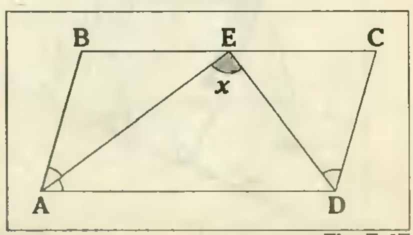


Fig. 7.47

5ta Propiedad

Si : $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices, entonces :

$$x = 90^\circ$$

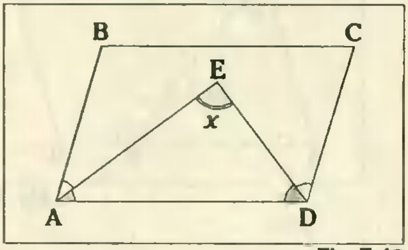


Fig. 7.48

6ta Propiedad

Si : $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ son bisectrices, entonces :

$$BH = 2\,PQ$$

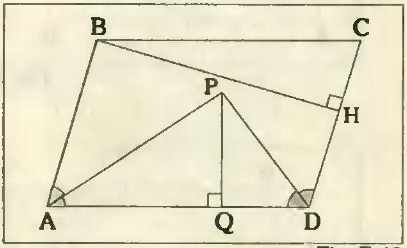


Fig. 7.49

7ma Propiedad

En la figura se cumple que :

$$a + c = b + d$$

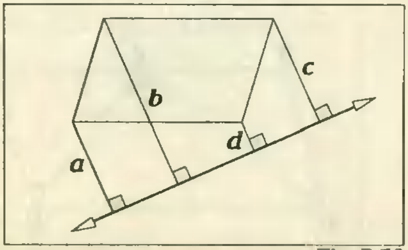


Fig. 7.50

8va Propiedad

En la figura se cumple que :

$$b = a + c$$

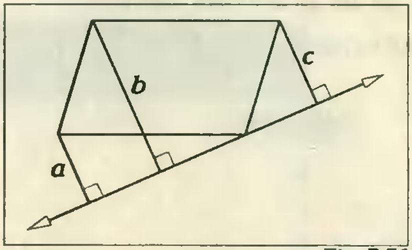


Fig. 7.51

9na Propiedad

En la figura se cumple que :

$$b - d = a + c$$

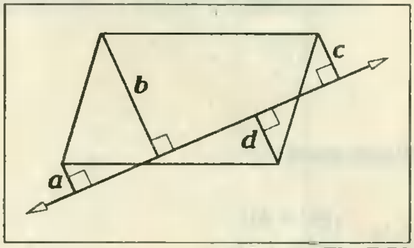


Fig. 7.52

10ma Propiedad

En la figura se cumple que :

$$b - d = c$$

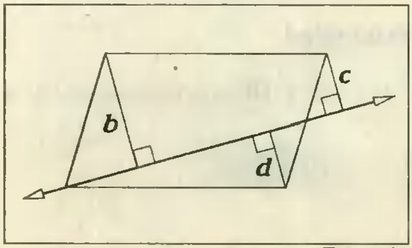


Fig. 7.53

11ra Propiedad

En la figura : El ▭ MNLF : Rectángulo

$\Rightarrow$ **ML = BC - AB**

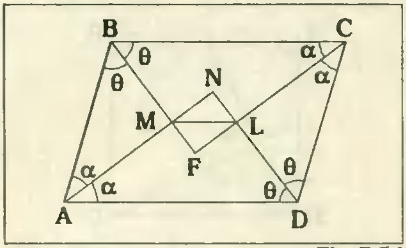


Fig. 7.54

12da Propiedad

En la figura : ▭ MNLF : Rectángulo

$\Rightarrow$ **ML = AB + BC**

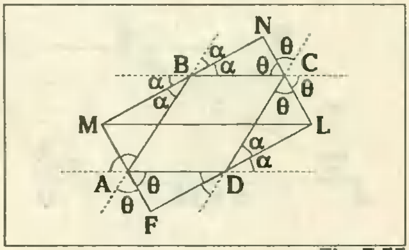


Fig. 7.55

13ra Propiedad

Si : M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces:

PD = 2 BP

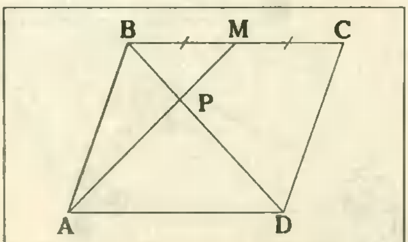


Fig. 7.56

14ta Propiedad

Si : E y F son puntos medios, entonces :

BP = PQ = QD

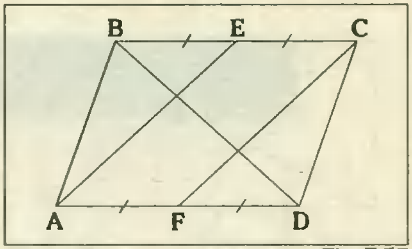


Fig. 7.57

15ta Propiedad

Si : E y F son puntos medios, entonces :

BP = PQ = QD

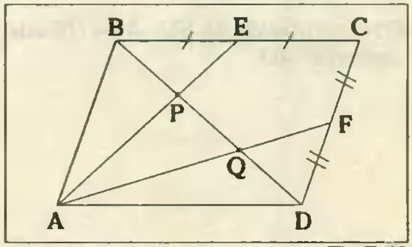


*Fig.*7.58

16ta Propiedad

Si : ▭ ABCD : ROMBO

$\Rightarrow$ $$L = \frac{a+b}{2}$$

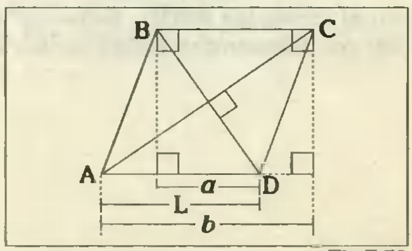


*Fig.*7.59

17ma Propiedad

En el rectángulo se cumple que :

$$\alpha = \theta$$

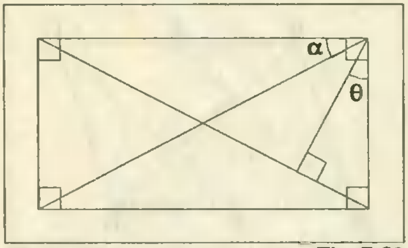


Fig. 7.60

18va Propiedad

□ ABCD : Cuadrado

$$\Rightarrow \quad x = 90^{o}$$

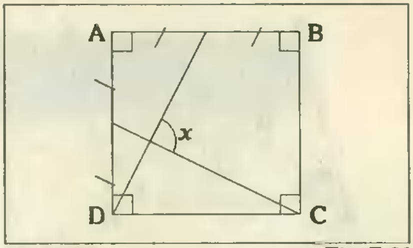
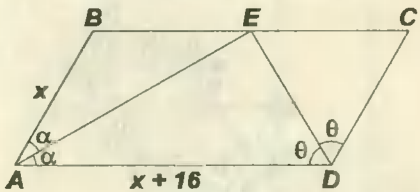


Fig. 7.61

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (3ra PARTE)

24.- En el romboide ABCD , AE y DE son bisectrices. Calcular AD.



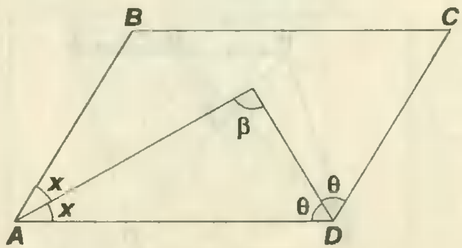
<u>Resolución</u>.-

Por la 4ta propiedad del item 7.6 , tenemos : $AD = 2\,AB \Rightarrow x + 16 = 2x \Rightarrow x = 16$

Reemplazando : $AD = 2(16)$

$$\therefore \quad AD = 32$$

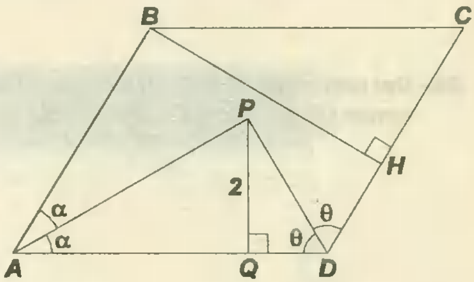
25.- En el romboide ABCD , hallar "x" si : AE y DE son bisectrices. Además ; $\theta = 65^{o}$



Resolución.-

Por la 5^{ta} propiedad del item 7.6, sabemos que : $\beta = 90°$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 25°}$

26.- En el gráfico. Hallar BH si PQ = 2 ; se sabe que ABCD es un romboide.



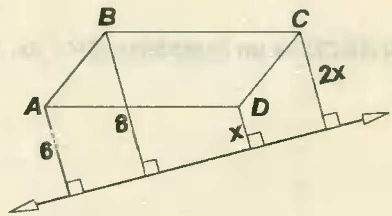
Resolución.-

Por la 6ta propiedad de 7.6 , tenemos que : BH = 2 PQ ; PQ = 2

Reemplazando : BH = 2(2)

$\therefore$ **BH = 4**

27.- Si ABCD es un romboide, hallar x

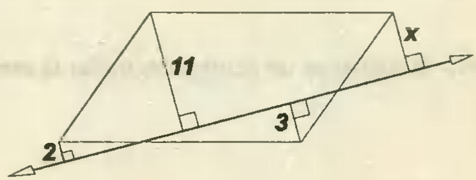


Resolución.-

Por la 7^{ma} propiedad del item 7.6, tenemos : $6 + 2x = 8 + x$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 2}$

28.- Si la figura es un romboide, hallar "x".

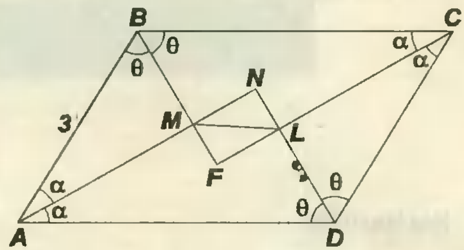


Resolución.-

Por la 9^{na} propiedad del item 7.6 , tenemos : $11 - 3 = 2 + x$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 6}$

29.- Del romboide ABCD, MNLF es un rectángulo, hallar ML, si además : BC = 4 ML



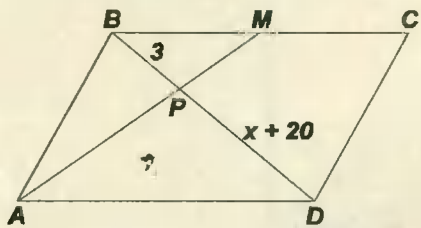
Resolución.-

Por la 11a propiedad del punto 7.6, tenemos : ML = BC - AB

Reemplazando : ML = 4 ML - 3

$\therefore$ **ML = 1**

30.- Si ABCD es un romboide, BP = 3x, hallar PD.



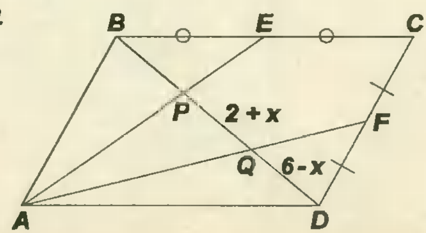
Resolución.-

Por la 13^{ra} propiedad del item 7.6 , tenemos : PD = 2 BP $\Rightarrow$ $x + 20 = 2\,(3x)$

De donde : $x = 4$

$\therefore$ **PD = 24**

31.- Si ABCD es un romboide, hallar la medida de BP.



Resolución.-

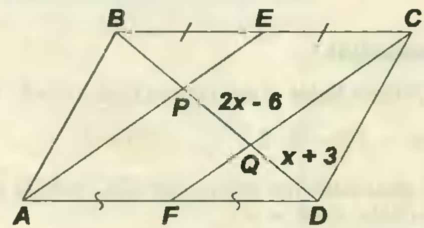
Por la 15[ta] propiedad del item 7.6, tenemos :

$$BP = PQ = QD \quad \Rightarrow \quad 2 + x = 6 - x$$

De donde : $x = 2$

Luego : $BP = 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad$ **BP = 4**

32.- En el romboide ABCD, hallar BD.



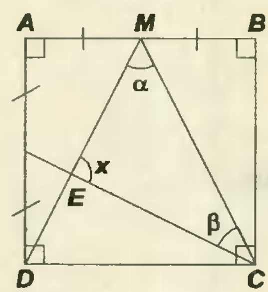
Resolución.-

Por la 14[ta] propiedad del item 7.6, tenemos : $BP = PQ = QD \Rightarrow 2x - 6 = x + 3$

De donde : $x = 9$

Finalmente : $BD = 3(9 + 3) \quad \Rightarrow \quad$ **BD = 36**

33.- Si ABCD es un cuadrado, hallar $\alpha + \beta = ?$



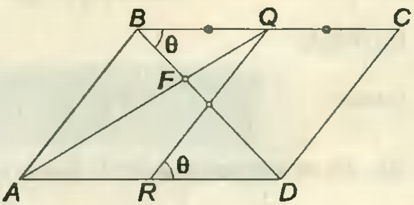
Resolución.-

Por la propiedad número 18 del punto 7.6 tenemos : $x = 90^o$

En el ⊿ CEM : $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^o}$

MISCELÁNEA

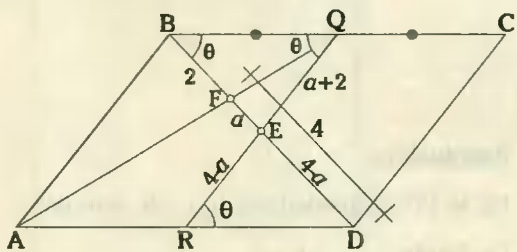
1.- Si ABCD es un romboide, donde FB = 2; hallar QR.



Resolución.-

En primer lugar observamos que AD =2 . BQ y FD = 2 . BF (Propiedad 14(7.6))

$\Rightarrow$ FD = 2 . 2 $\Rightarrow$ FD = 4



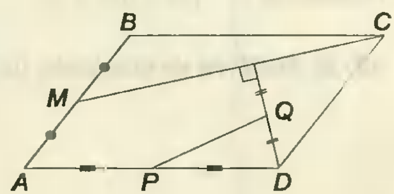
Por otro lado los triángulos EBQ y RED son isósceles, si FE = a

Entonces EQ = a + 2 y RE = ED = 4 - a

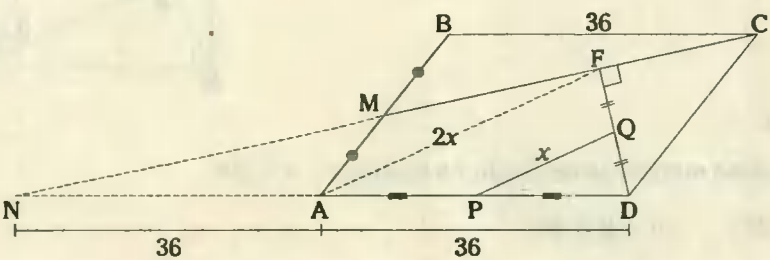
Finalmente : QR = 4 - a + a + 2

$\therefore$ **QR = 6**

2.- Si ABCD es un romboide con BC = 36; hallar PQ



Resolución.-



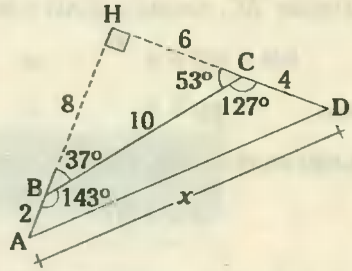
En primer lugar prolongamos $\overline{CM}$ y $\overline{DA}$ hasta N.

Ahora observamos que el Δ MBC $\cong$ Δ MAN (A.L.A.), entonces : BC = NA = 36

En el ⊿ NFD : $2x$ = 36 (Mediana) $\therefore$ $\boldsymbol{x = 18}$

3.- En un trapezoide ABCD, si AB = 2, BC = 10 y CD = 4, m∡ B = 143 y m∡ C = 127; hallar AD

Resolución.-



Al prolongar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ obtenemos el ⊿ AHD, en el cual BH = 8 y HC = 6.

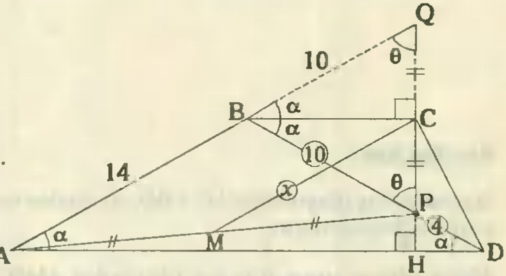
En este triángulo rectángulo tenemos :

$$x^2 = 10^2 + 10^2$$

$$\therefore \qquad x = 10\sqrt{2}$$

4.- En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, se traza la altura $\overline{CH}$ que intersecta a la diagonal $\overline{BD}$ en P. Calcular CM, si "M" es punto medio de $\overline{AP}$, AB = BD, BP = 10 y PD = 4.

Resolución.-



Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{HC}$ hasta "Q".

El Δ BQP resulta ser isósceles BQ = BP = 10

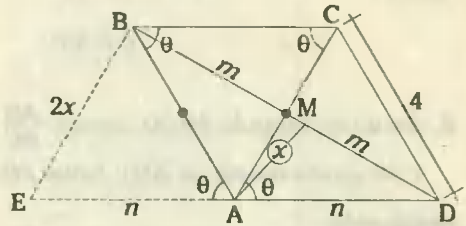
En el Δ AQP, por el teorema de los puntos medios.

$$MC = x = \frac{14+10}{2}$$

$$\therefore \qquad x = 12$$

5.- En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, AB = AC y CD = 4. Hallar AM, siendo "M" punto medio de $\overline{BD}$.

Resolución.-



Prolongamos $\overline{DA}$ de modo que AD = AE = n. Pero BM = MD = m por dato, entonces EB = $2x$.

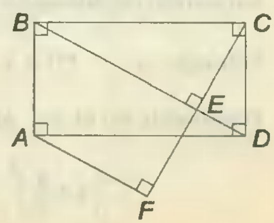
Por otro lado el Δ EBA ≅ Δ DCA (L.A.L), entonces:

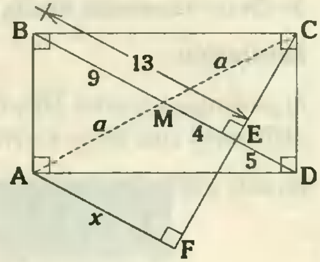
$$EB = CD = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4$$

$$\therefore \qquad x = 2$$

6.- En la figura ; ABCD es un rectángulo, FE = EC, BE = 13 y DE = 5.

Hallar AF.





Resolución.-

Al trazar $\overline{AC}$, resulta que AM = MC = a

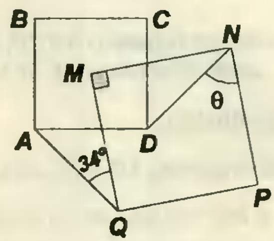
y BM = MD = 9 $\Rightarrow$ $a = 9$

Pero : ED = 5 $\Rightarrow$ ME = 4

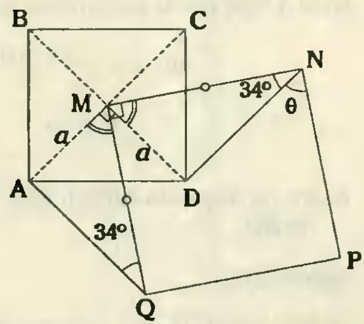
Luego en el ⊿ ACF, por el Teorema de los puntos medios :

$$x = 2\,(4) \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 8}$$

7.- En la figura mostrada, ABCD y MNPQ son cuadrados "M" es centro del cuadrado ABCD. Hallar el ángulo "θ"



Resolución.-



Trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ las cuales se intersectan perpendicularmente.

Ahora observamos que los triángulos AMQ y DMN son congruentes, el caso de congruencia es : (L.A.L)

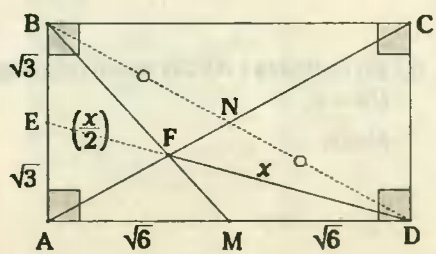
$\Rightarrow$ $m\measuredangle$ AQM = $m\measuredangle$ MND = 34°

Luego : $34° + \theta = 90°$

$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 56°}$

8.- En un rectángulo ABCD, donde $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la diagonal $\overline{AC}$ y $\overline{BM}$ se intersectan en "F" ("M" punto medio de $\overline{AD}$); hallar FD, si AB = $2\sqrt{3}$

Resolución.-



Al trazar $\overline{BD}$, observamos que el punto " F" es baricentro del triángulo rectángulo ABD .

Entonces si : FD = x $\Rightarrow$ FE = $\dfrac{x}{2}$

Finalmente en el ⊿ AED :

$$\left(x + \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2$$

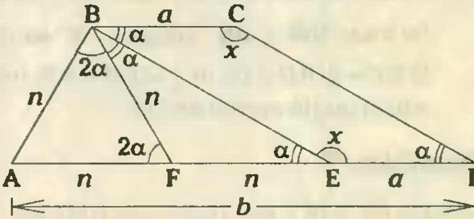
Donde : $\dfrac{9x^2}{4} = 3 + 24 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3\,.\,4$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$

9.- En un trapecio ABCD $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ se sabe que AD - BC = 2. AB y m ∡ B = 4. m ∡ D. Calcular la m ∡ C.

<u>Resolución</u>.-

Dato : $b - a = 2n$



En primer lugar trazamos $\overline{BE}$ // $\overline{CD}$, entonces EBCD es un romboide BC = ED = a.

Luego trazamos $\overline{BF}$ con la condición que el Δ FBE sea isósceles.

Pero el Δ ABF también es isósceles AB = AF = n, pero como FE = n, entonces BF = n.

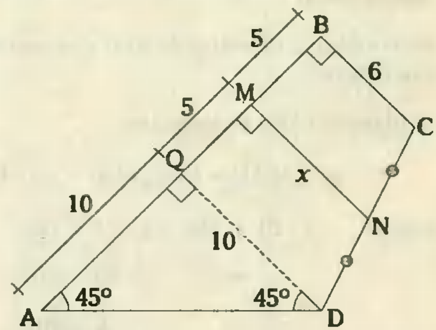
En consecuencia el Δ ABF es equilátero : $2\alpha = 60 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^o$

Luego : m ∡ BCD = m∡ BED = x

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 150^o}$

10.- En un trapezoide ABCD, m ∡ A = 45º, m ∡ B = 90º, AB = 20 y BC = 6. Desde "N" punto medio de $\overline{CD}$, se traza perpendicular a $\overline{AB}$. Siendo MB = 5. Hallar MN.

<u>Resolución</u>.-



En primer lugar trazamos $\overline{DQ}$ ⊥ $\overline{AB}$

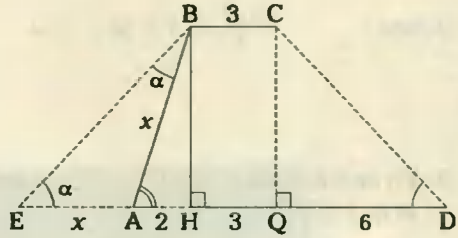
Entonces : AQ = QD = 10

En el trapecio rectángulo QBCD, $\overline{MN}$ es mediana.

Luego por propiedad : $x = \dfrac{10+6}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 8}$

11.- En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$//$\overline{AD}$), se traza la altura $\overline{BH}$, siendo AH = 2, HD = 9 y BC = 3 y m ∡ A = 2 . m ∡ D ; hallar : AB.



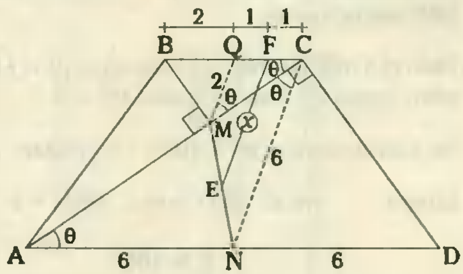
Resolución.-

Construimos el trapecio isósceles EBCD, en el cual EH = QD = 6.

Es decir : $x + 2 = 6$

$\therefore \quad x = 4$

12.- En un trapecio ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$), se considera el punto F en $\overline{BC}$, tal que : $FC = \frac{BC}{4}$. Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, además "N" es punto medio de $\overline{AD}$. Si BC = 4, AD = 12, m ∡ ACD = 90º; hallar la longitud del segmento que une el punto F con el punto medio de $\overline{MN}$.



Resolución.-

Se traza $\overline{NC}$ y $\overline{MQ}$, los cuales son paralelos

Pero : MQ = 2 y NC = 6

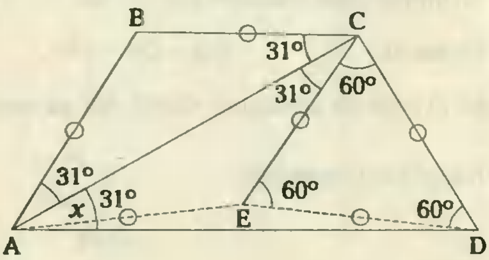
Luego por Propiedad : $x = \dfrac{2+6}{2}$

$\therefore \quad x = 4$

13.- En un cuadrilátero convexo ABCD, AB = BC = CD, m ∡ BCA = 31º y m ∡ ACD = 91º; hallar m ∡ CAD.

Resolución.-

Se construye el triángulo AEC que es congruente al triángulo ABC , luego el triángulo ECD es equilátero.



El triángulo AED es isósceles :

m ∡ EAD = m ∡ ADE = x - 31

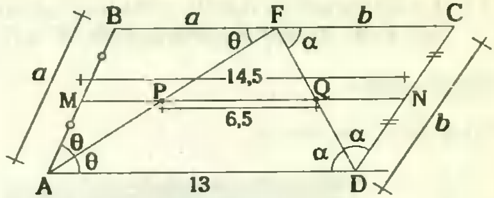
Luego : $x - 31 + 182 + x - 31 = 180$

$\Rightarrow \quad 2x = 60°$

$\therefore \quad x = 30°$

14.- En un trapecio escaleno ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) , las bisectrices interiores de A y D se intersectan en un punto de $\overline{BC}$; hallar el perímetro del trapecio si su mediana mide 14,5 y el segmento que une los puntos medios de los lados $\overline{AF}$ y $\overline{FD}$ mide 6,5.

Resolución.-



En el Δ AFD, por el Teorema de los puntos medios : AD = 2 (6,5) y AD = 13

Los triángulos ABF y FCD son isósceles :

$$AB = BF = a \ \wedge \ FC = CD = b$$

Por propiedad en el trapecio ABCD :

$$14{,}5 = \frac{a+b+13}{2}$$

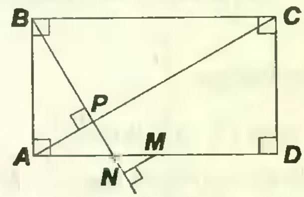
Donde : $a + b = 16$

En consecuencia el perímetro (2p) del trapecio ABCD será : $2p = 2\,(a + b) + 13$

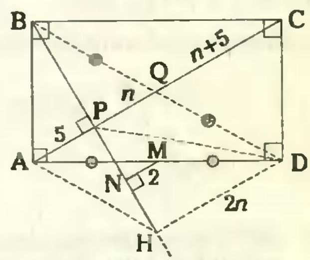
Reemplazando : $2p = 2\,(16) + 13$

$\therefore$ $\mathbf{2p = 45}$

15.- En la figura mostrada ABCD es un rectángulo, "M" es punto medio de $\overline{AD}$; además se sabe que: AP = 5 , MN = 2. Hallar PC.



Resolución.-



Trazamos $\overline{BD}$, entonces : AQ = QC = n + 5.

En el trapecio rectángulo APDH :

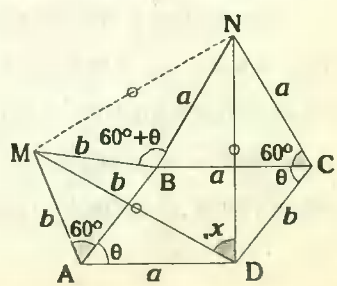
$$2 = \frac{2n-5}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 + 5 = 2n \quad \Rightarrow \quad 2n = 9$$

Luego : PC = $2n$ + 5

Reemplazando : PC = 9 + 5 $\therefore$ **PC = 14**

16.- En un romboide ABCD se construye exteriormente los triángulos equiláteros ABM y BCN. Hallar : m $\measuredangle$ MDN

Resolución.-



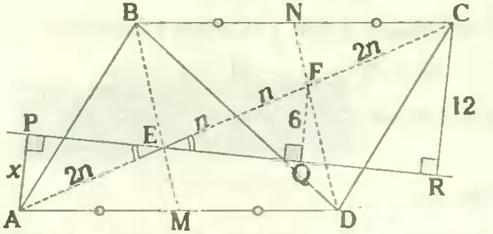
En el gráfico observamos que los triángulos MAD, NCD y NBM son congruentes.

Luego : MD = ND = MN

En consecuencia : $\boldsymbol{x = 60°}$

17.- En un romboide ABCD, por el baricentro del triángulo ABD se traza una recta secante a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Hallar la distancia de "A" a la recta, si la distancia de "C" a dicha recta es 12.

Resolución.-



En el gráfico tenemos :

E → baricentro del Δ ABD

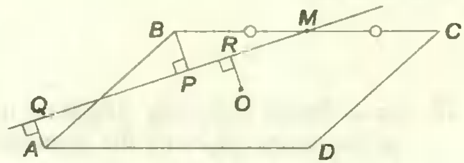
F → baricentro del Δ BCD

En el ⊿ ECR, por el T.P.M. :· FQ = 6

Finalmente : ⊿ APE ≅ ⊿ FQE

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6}$

18.- En la figura se sabe que : BM = MC ; AQ = 6 ; BP = 8 y "O" es centro del romboide ABCD; hallar OR.



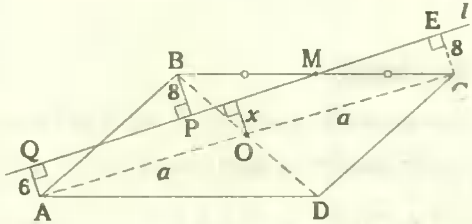
Resolución.-

Se traza $\overline{CE}$ ⊥ a la recta "*l*"

Ahora observamos que el ⊿ BPM ≅ ⊿ CEM, entonces PB = EC = 8

Finalmente en el trapecio rectángulo AQEC:

$$x = \frac{6+8}{2} \quad \text{(Mediana del Trapecio)}$$



$\therefore \quad \boldsymbol{x = 7}$

19.- ABCD es un rectángulo cuyas diagonales se cortan en "O", se construye el triángulo equilátero AOM. Si m ∢ ADO = 25º. Calcular la m ∢ AMB.

Resolución.-

En el ▭ ABCD tenemos : AO = OB = OC = OD y

$m\sphericalangle OAD = m\sphericalangle ADO = 25°$

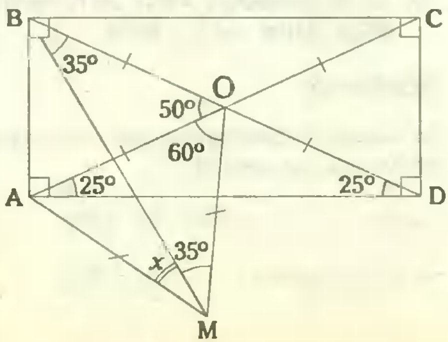
En el Δ AOD : $m\sphericalangle AOB = 50°$ (∢ exterior.)

En el Δ equilátero AOM : AO = OM = AM y

$m\sphericalangle AMO = m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle OAM = 60°$

En el Δ BOM: $m\sphericalangle OBM = m\sphericalangle BMO = 35°$

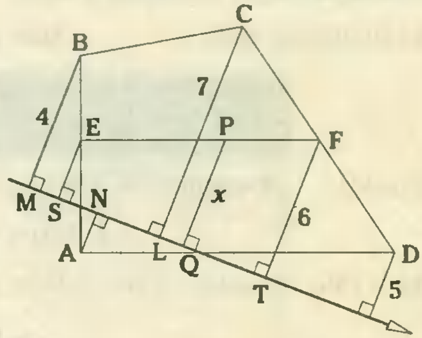
$\therefore \quad \boldsymbol{x = 25°}$



20.- Las distancias de los vértice A, B, C y D de un trapezoide ABCD a una recta secante a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son 1, 4, 7 y 5. Hallar la distancia del centro de gravedad del trapezoide a dicha recta.

Resolución

El punto medio "P" de $\overline{EF}$ es el centro de gravedad del trapezoide; trazamos $\overline{ES}$ y $\overline{FT}$ perpendiculares a la recta secante.

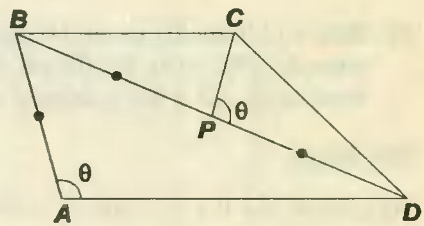


Luego : $ES = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$ y $FT = \dfrac{7+5}{2} = 6$

En el trapecio SETF : $x = \dfrac{\frac{3}{2}+6}{2}$ (mediana)

$\therefore \quad \mathbf{x = 4{,}25}$

21.- En la figura $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, AB = BP = PD.
Calcular $\overline{CP}$, AD = a



Resolución.-

Prolongamos $\overline{CP}$ hasta cortar a $\overline{AD}$ en L

Luego el cuadrilátero LBCD resulta ser un romboide donde : CP = PL = x y BL = CD

Δ BAL $\cong$ Δ CPD (4$^{\underline{o}}$ caso) $\Rightarrow$ AL = CP = x y $m\angle$ PCD = $m\angle$ ALB = α

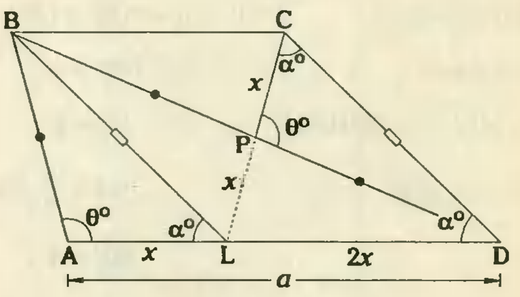
Por ángulos correspondientes :

$m\angle$ BLA = $m\angle$ CDL = α

Δ CLD es isósceles, entonces :

CL = LD = 2x

Finalmente: $3x = a$



$\therefore \quad \boldsymbol{x = \dfrac{a}{3}}$

22.- El ángulo A de un romboide ABCD mide 80º. Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se cortan en "O" , punto interior al romboide. Si la m$\angle$ OAD = 20º. Hallar la m$\angle$ ODC

Resolución.-

Por el teorema de la mediatriz : OA = OB = OC y $m \measuredangle BAO = m \measuredangle ABO = 60^o$

El triángulo ABO es equilátero, donde : AO = OB = AB

En el romboide ABCD : AB = CD

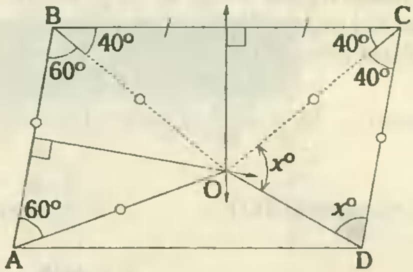
$m \measuredangle BAD = m \measuredangle BCD = 80^o$

$m \measuredangle ABC = 100^o$

de donde: $m \measuredangle OBC = m \measuredangle BCO = 40^o$

$m \measuredangle OCD = 40^o$

En el Δ OCD, isósceles : $x + x + 40^o = 180^o$



$\therefore$ $\boldsymbol{x = 70^o}$

23.- Sobre el lado $\overline{AD}$ de un trapezoide ABCD se ubica el punto P de tal manera que AB = BP y PC = CD. Si : BC = 8 ; calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sabiendo que $\overline{BD}$ biseca a $\overline{AC}$.

Resolución.-

Del gráfico : $\alpha + \theta + \beta = 180^o$ y BN = ND

Prolongamos $\overline{CN}$ hasta Q tal que : CN = NQ

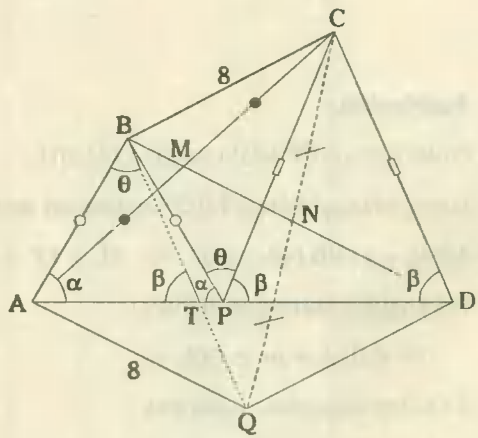
Luego el cuadrilátero BCDQ resulta ser un romboide, donde :

CD = BQ y $m \measuredangle ATB = m \measuredangle PDC = \beta$

En el Δ ABT : $\alpha + \beta + m \measuredangle ABT = 180^o$

De donde : $m \measuredangle ABT = \theta$

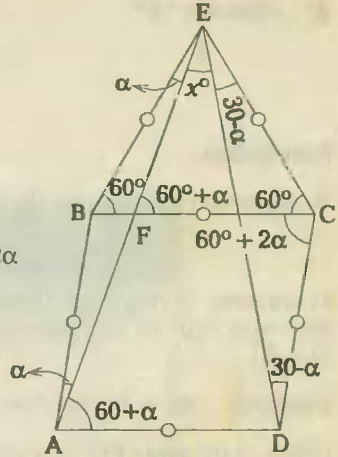
Δ ABQ ≅ Δ BPC (LAL) $\Rightarrow$ BC = AQ = 8



En el Δ ACQ : $MN = \dfrac{8}{2}$ (Base Media)

$\therefore$ MN = 4

24.- Externamente a un rombo ABCD se construye el triángulo equilátero BEC. Calcular la $m \measuredangle AED$



Resolución.-

En el triángulo isósceles ABE : $m\measuredangle BAE = m\measuredangle BEA = \alpha$

Luego : $m\measuredangle EFC = 60 + \alpha$

Por ángulos correspondientes : $m\measuredangle EFC = m\measuredangle EAD = 60 + \alpha$

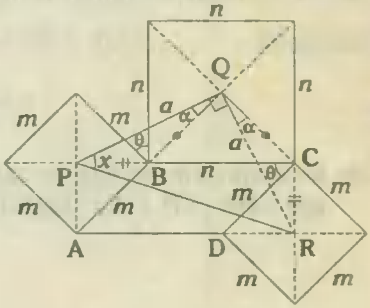
En el rombo ABCD : $m\measuredangle BAD = m\measuredangle BCD = 60 + 2\alpha$

En el Δ ECD : $m\measuredangle DEC = m\measuredangle EDC = 30 - \alpha$

Finalmente en el vértice E : $\alpha + x + 30 - \alpha = 60^\circ$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 30^\circ}$

25.- Sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un romboide ABCD se construyen exteriormente los cuadrados de centros P, Q y R respectivamente; hallar m $\measuredangle$ QPR.



Resolución.-

En el gráfico observamos que el Δ PBQ $\cong$ Δ RCQ (L.A.L)

Entonces : $PQ = QR = a$

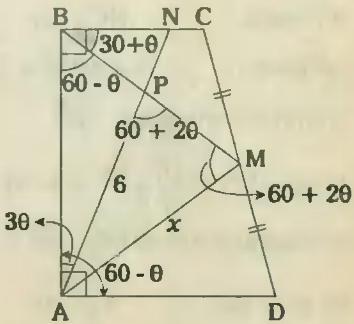
$m\measuredangle PQB = m\measuredangle CQR = \alpha$

Luego : $m\measuredangle PQR = 90^\circ$

En consecuencia : $\boldsymbol{x = 45^\circ}$

26.- En un trapecio rectángulo ABCD recto en A y B; M es un punto medio de $\overline{CD}$ y N$\in$ $\overline{BC}$, además $\overline{AN} \cap \overline{BM}$: P .

Si AP = 6 , m $\measuredangle$ BAN = 3θ y m $\measuredangle$ CBM = 30º + θ . Calcular BM .



Resolución.-

Trazamos $\overline{AM}$; luego : $BM = AM = x$

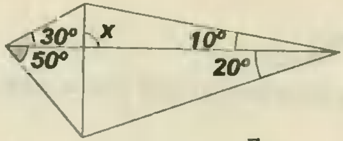
Además : $m\measuredangle MBA = m\measuredangle MAB = 60 - \theta$

$m\measuredangle BMA = 60 + 2\theta$

Δ BPA : $m\measuredangle MPA = 60 - \theta + 3\theta = 60 + 2\theta$ ($\measuredangle$ exterior)

Δ PAM es isósceles. $\therefore$ $\boldsymbol{x = 6}$

27.- Calcular "x"



Resolución.-

Se construye el triángulo AEC equilátero :

$$AE = EC = AC = a$$

Al construir el triángulo AFC isósceles, observamos que éste es congruente al triángulo BEC (A.L.A)

Entonces : $BE = BC = AF = FC = b$

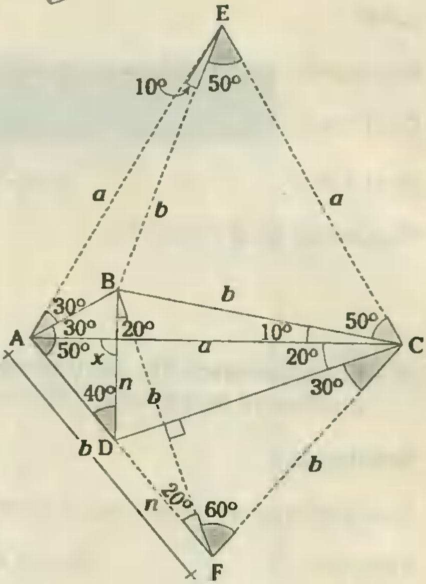
Luego el triángulo FBC es equilátero :

$$FB = BC = FC = b$$

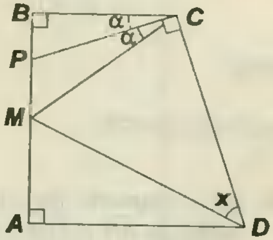
Donde $\overline{CD}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, entonces el Δ DBF es isósceles, en donde la $m \measuredangle ADB = 40°$

Finalmente : $x + 40° + 50° = 180°$

$$\therefore \quad x = 90°$$



28.- En la figura mostrada, se sabe que : 2AD = 3BC ; BM = MA ; $\overline{CP} \perp \overline{CD}$. Calcular x.



Resolución.-

Hacemos : $HC = 4a \quad \Rightarrow \quad AD = 6a$

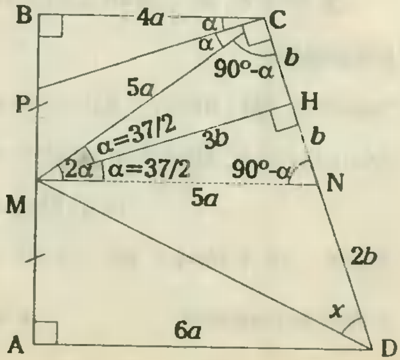
Del gráfico : $m \measuredangle MCD = 90 - \alpha$

Trazamos la mediana : $\overline{MN}$

Luego : $MN = \dfrac{4a+6a}{2} = 5a$ y $m \measuredangle CMN = 2\alpha$

El triángulo CMN es isósceles : $\Rightarrow \quad MC = MN = 5a$

En el $\triangle$ MBC : $2\alpha = 37° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{37}{2}$

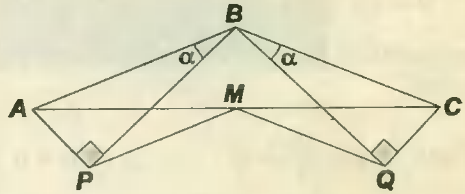


Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{CN}$, luego : $CH = HN = b$ y $ND = 2b$

En el ⊿ MHN de $\frac{37}{2}$: $MH = 3b$

En el ⊿ MHD : $MH = HD$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 45^\circ}$

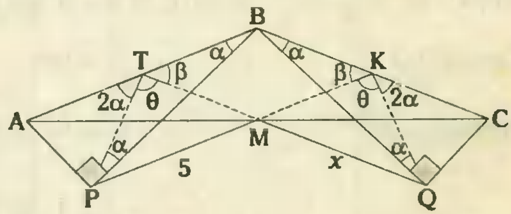
29.- En la figura AB < BC ; AM = MC y PM = 5. Calcular MQ



Resolución.-

En los triángulos rectángulos APB y BQC

Se trazan las medianas $\overline{PT}$ y $\overline{QK}$



Luego : $PT = TB = AT$

$\measuredangle$ exterior : $m\measuredangle ATP = 2\alpha$

También : $QK = BK = KC$

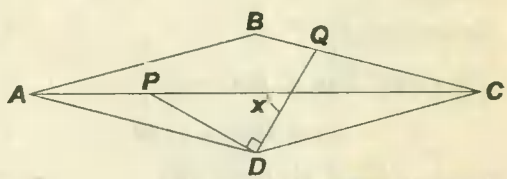
$\measuredangle$ exterior : $m\measuredangle QKC = 2\alpha$

TBKM es un romboide entonces : $TB = MK$; $BK = TM$ y $m\measuredangle BTM = m\measuredangle BKM = \beta$

$\triangle PTM \cong \triangle MKQ$ (LAL) $\therefore$ $\boldsymbol{x = 5}$

30.- En la figura ABCD es un rombo.

Hallar x, si AP = PD = DQ.



Resolución.-

En el $\triangle$ ADC : $\alpha + \alpha + 90 + m\measuredangle QDC + \alpha = 180$

De donde : $m\measuredangle QDC = 90 - 3\alpha$

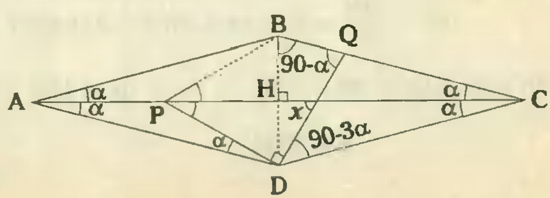
En el $\triangle$ DQC, por $\measuredangle$ exterior : $m\measuredangle BQD = 90 - 3\alpha + 2\alpha = 90 - \alpha$

El $\triangle$ BDQ es isósceles $\Rightarrow$ $BD = DQ$

Por el teorema de la mediatriz $PB = PD$

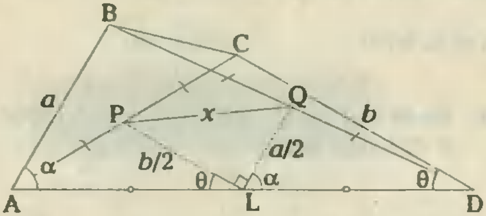
El $\triangle$ BPD es equilátero $\Rightarrow$ $2\alpha + 2\alpha = 60^\circ$

Luego : $\alpha = 15$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 60^\circ}$



31.- En un trapezoide ABCD : m ∡ B + m ∡ C = 270º ; AB = a y CD = b . Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales .

Resolución.-



En el trapezoide ABCD :

$\alpha + \theta = 360 - 270 = 90°$

Aplicando el Teorema de la base media, tenemos :

Δ ABD : $LQ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ y $m \measuredangle QLD = \alpha$ (∡s correspondientes)

Δ ACD : $LP = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{b}{2}$ y $m \measuredangle PLA = \theta$ (∡s correspondientes)

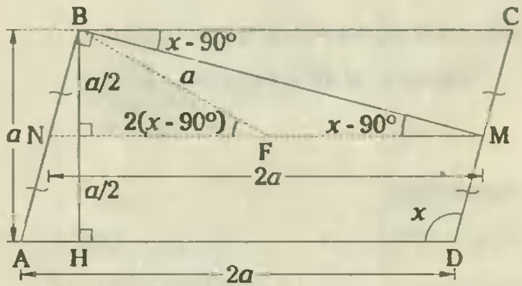
En el Δ PLQ : $m \measuredangle L = 90°$

Por Pitágoras : $x^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$

32.- En un romboide ABCD, M es el punto medio de $\overline{CD}$; además se sabe que : $\overline{BM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BH} \perp \overline{AD}$ ($H \in \overline{AD}$). Calcular la m ∡ ADC; si AD = 2 BH .

Resolución.-



Por propiedad ...

$m \measuredangle ABC = m \measuredangle ADC = x$

$\Rightarrow$ $m \measuredangle MBC = x - 90$

Trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ (N en $\overline{AB}$)

Luego : MN = AD = 2a y $BL = LH = \dfrac{a}{2}$

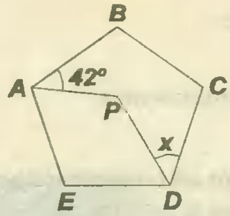
En el ⊿ NBM : BF ; luego :

$BF = \dfrac{MN}{2} = a$ y $m \measuredangle NFB = 2(x - 90)$

En el ⊿ BLF : BF = 2 BL $\Rightarrow$ $m \measuredangle LFB = 30 = 2(x - 90)$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 105°}$

33.- Calcular x, si ABCDE es un pentágono regular.



Resolución.-

Trazamos $\overline{AD}$, luego en el triángulo isósceles :

AED $m \measuredangle$ EAD = $m \measuredangle$ EDA = 36°

De donde : $m \measuredangle$ PAD = 30°

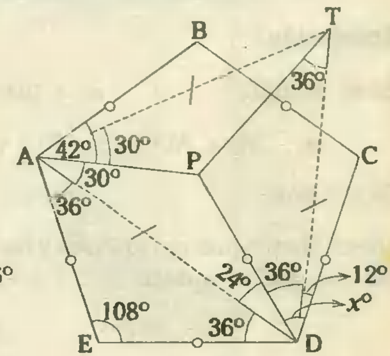
Construimos el triángulo equilátero ATD, luego :

$m \measuredangle$ TAP = 30° y PT = PD

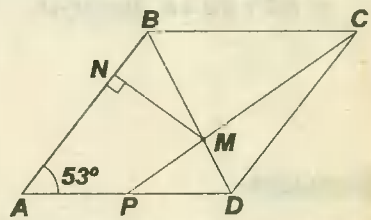
Δ AED $\cong \Delta \measuredangle$ TPD (L. L. L.) $\Rightarrow$ $m \measuredangle$ EAD = $m \measuredangle$ PTD = 36°

En el vértice D : 36° + 24° + x = 108°

$\therefore$ x = 48°



34.- En la figura, ABCD es un paralelogramo; se sabe que : BC = 20 ; además: AP = PD . Hallar MN



Resolución.-

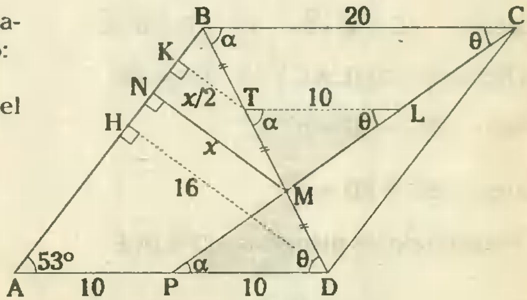
Por T, punto medio de $\overline{BM}$ y por el vértice D, trazamos $\overline{TK}$ y $\overline{DH}$ perpendiculares a $\overline{AB}$; luego:

En el ⊿ AHD : de 37° y 53° HD = 16 y en el ⊿ BNM : TK = $x/2$

En el Δ BMC trazamos la base media $\overline{TL}$

Luego : $\text{TL} = \dfrac{20}{2} = 10$

Δ TML $\cong \Delta$ PMD (A.L.A.) $\Rightarrow$ TM = MD = BT

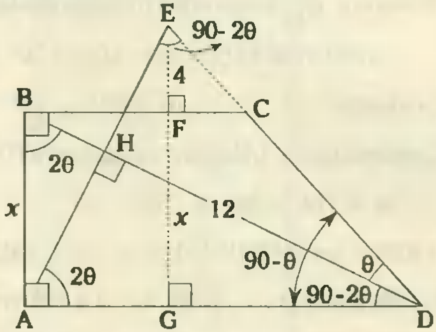


En el trapecio rectángulo HKTD : $x = \dfrac{\dfrac{x}{2}+16}{2}$ (Mediana del trapecio)

Luego : $2x = \frac{x}{2} + 16$

En consecuencia : $\frac{3x}{2} = 16$ $\therefore$ $x = \frac{32}{3}$

35.- En un trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B) se cumple : m$\measuredangle$ ABD = 2m$\measuredangle$ BDC; en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica el punto E, tal que $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ en H. Calcular AB , si la distancia de E a $\overline{BC}$ es 4m y HD = 12m .



Resolución.-

En el $\triangle$ BAD : $m\measuredangle BDA = 90 - 2\theta$

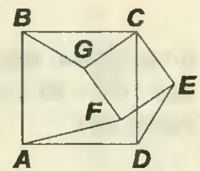
$\Rightarrow$ $m\measuredangle ADC = 90 - 2\theta + \theta = 90 - \theta$

En el Δ EAD : $m\measuredangle E = 90 - \theta$

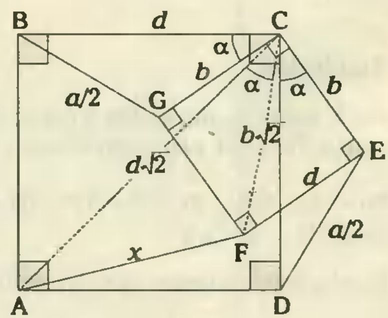
Luego el triángulo es isósceles y las alturas $\overline{EG}$ y DH son iguales es decir : $4 + x = 12$

$\therefore$ $x = 8$

36.- En la figura se muestran los cuadrados ABCD y CEFG ; si BG + ED = a . Hallar AF .



Resolución.-



Sean : BC = d y CE = b

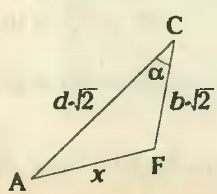
Luego AC = $d\sqrt{2}$ y CF = $b\sqrt{2}$

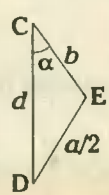
Δ BCG $\cong$ Δ CED (L.A.L.) $\Rightarrow$ BG = ED

Pero : BG + ED = a

Luego : BG = ED = $\frac{a}{2}$

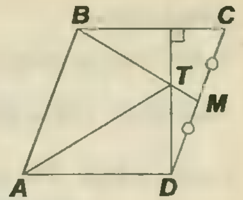
Comparando los triángulos ACF y DCE





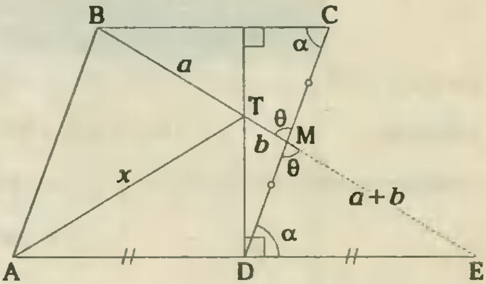
$\therefore$ $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

37.- En la figura ABCD es un romboide; si BT = a y TM = b. Hallar AT.



Resolución.-

Prolongamos $\overline{BM}$ hasta intersectar en E a la prolongación de $\overline{AD}$



Luego : Δ BMC ≅ Δ DMC (A.L.A.)

Entonces : BC = DE y ME = BM = $a + b$

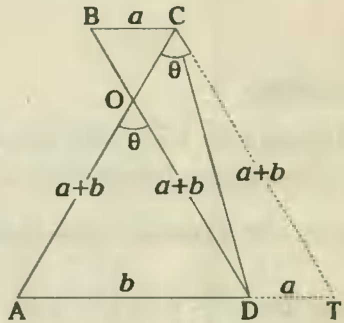
Δ ATE es isósceles :

$\therefore \quad x = a + 2b$

38.- Calcular la medida del menor ángulo que forman las diagonales de un trapecio isósceles en el cual su mediana es la mitad de una de sus diagonales .

Resolución.-

Sean las bases del trapecio ABCD : BC = a y AD = b



Luego su mediana será $\dfrac{a+b}{2}$ y sus diagonales :

BD = AC = $a + b$

Trazamos $\overline{CT}$ // $\overline{CD}$ (T en la prolongación de $\overline{AD}$

Luego : BCTD es un romboide

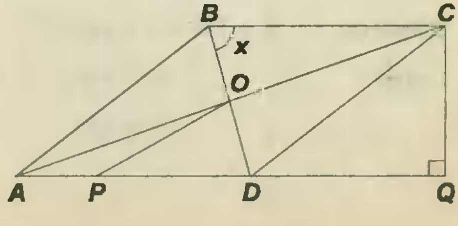
Donde : BC = DT = a y BD = CT = $a + b$

Además : $m\measuredangle$ ACT = $m\measuredangle$ AOD = θ

Como el Δ ACT tiene sus 3 lados que miden $a + b$; luego este es equilátero.

$\therefore \quad \theta = 60°$

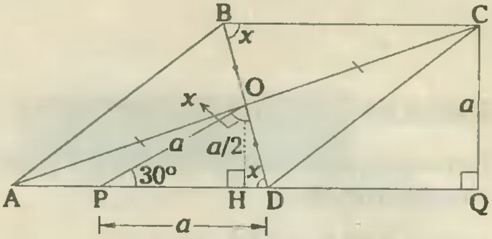
39.- Del gráfico, calcular x . Si ABCD es un romboide; además : OP = PD = CQ .



Resolución.-

Si ABCD es un romboide; entonces AO = OC y BO = OD

Trazamos : $\overline{OH} \perp \overline{AQ}$



Luego; Δ AQC : $\overline{OH}$ es base media de donde :

$$OH = \frac{a}{2}$$

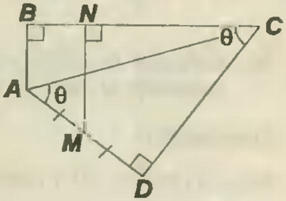
En el ⊿ PHO : OP = 2OH

Entonces : $m\measuredangle\ OPH = 30°$

Finalmente en el Δ OPD : $30° + x + x = 180°$

$$\therefore \qquad \mathbf{x = 75°}$$

40.- En la figura mostrada, se sabe que : AC = 25 y MN = 11,5. Hallar θ

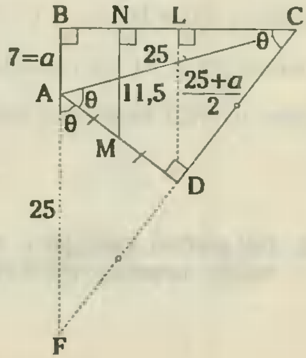


Resolución.-

Prolongamos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ hasta que se intersecten en F ; luego el Δ CAF resulta ser isósceles ya que $\overline{AD}$ es altura y bisectriz a la vez de donde : AC = AF = 25

En el ⊿ CBF trazamos la base media $\overline{DL}$

Luego : $DL = \frac{\overline{BF}}{2} = \frac{25+a}{2}$ y $\overline{DL} \perp \overline{BC}$



En el trapecio ABLD : $11{,}5 = \dfrac{a + \dfrac{25+a}{2}}{2}$ de donde $a = 7$

En el ⊿ ABC : $m\measuredangle\ BAC = 74°$ (notable)

Entonces : $\theta + 74° + \theta = 180°$

Luego : $2\theta = 106°$

$$\therefore \qquad \mathbf{\theta = 53°}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- El cuadrilátero que se determina al unir los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles de diagonales perpendiculares es un:

A) Cuadrado B) Rectángulo C) Rombo

D) Romboide E) Trapecio

2.- Las mediatrices de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ de un paralelogramo ABCD se intersectan en un punto "M" que pertenece a $\overline{BC}$. Hallar la $m\measuredangle MAD$. Si : $m\measuredangle B = 110°$

A) 10° B) 30° C) 40° D) 60° E) 50°

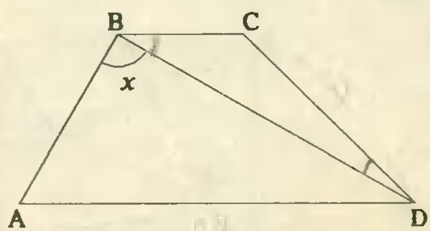
3.- En un cuadrilátero no convexo ABCD, (no convexo en "C") al prolongar los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ intersectan perpendicularmente a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Calcular la medida del ángulo que forman las diagonales del cuadrado.

A) 60° B) 40° C) 80° D) 90° E) 100°

4.- En un triángulo ABC de baricentro "G", se traza una recta "$\mathcal{L}$" secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y perpendicular en "M" a $\overline{BG}$. Si BM = 3 y las distancias de A y C a dicha recta son 2 y 16; calcular MG.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2,5

5.- En el gráfico ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) AD = 2 . CD y $m\measuredangle CBD = m\measuredangle BDC$; calcular x.



A) 60° B) 80° C) 90° D) 100° E) 105°

6.- Por el vértice A de un paralelogramo ABCD se traza $\overline{AP}$ (P en $\overline{BC}$) de tal manera que : $m\measuredangle BAP = 2m\measuredangle PAD$. La altura $\overline{BH}$ intersecta a $\overline{AP}$ en "Q" ; hallar : AB, si : PQ = 20

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 116

7.- En un rectángulo ABCD, del vértice B se traza la perpendicular $\overline{BF}$ a la diagonal $\overline{AC}$, la bisectriz del ángulo DBF intersecta al lado $\overline{DC}$ en "E". Hallar la $m\measuredangle BEC$.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 53° E) 37°

8.- La suma de las longitudes de las perpendiculares bajadas por los vértices de un hexágono regular a una recta exterior es 18. Hallar la distancia del centro del polígono a dicha recta.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

9.- En un trapecio ABCD se tiene ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), $m\measuredangle ABC = 2\times m\measuredangle CDA$, si : AB + 2 . BC = 18. Hallar la longitud de la mediana del trapecio.

A) 18 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

10.- Los lados de un rectángulo miden 6 y 8, hallar la longitud de la diagonal del cuadrilátero que se forma al intersectarse sus bisectrices exteriores.

A) 10 B) 14 C) 12 D) 20 E) 21

11.- En un cuadrado ABCD; M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ ¿Cuál es la medida del ángulo que forman al intersectar $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$?

A) 90° B) 70° C) 60° D) 50° E) 75°

12.- En un cuadrilátero ABCD, P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Calcular MN. Si : $m\measuredangle PNQ = 90°$ y AB = CD = $4\sqrt{2}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 4

13.- Las proyecciones de las diagonales de un rombo sobre uno de sus lados miden 1 y 9. Calcular la medida del lado del rombo.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 5

14.- En un romboide ABCD, se consideran los puntos medios M y N de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{BM}$ y $\overline{DN}$ en P y Q respectivamente. Hallar PQ, si AC = 18.

A) 4 B) 6 C) 9 D) 5 E) 8

15.- Dado un triángulo ABC, cuyos puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son M y N respectivamente, se traza una recta exterior tal que las distancias de A, M y N a dicha recta miden 7; 9 y 6 respectivamente. Hallar la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a dicha recta.

A) 4 B) 6 C) 5 D) 3 E) 1

16.- En un trapecio ABCD : $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, $m\measuredangle A = 2.m\measuredangle C$, AD = 10. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 4 D) 8 E) 10

17.- En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se traza $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$), si : $m\measuredangle BCH = 2.m\measuredangle BDC$ y 3 . AD = 8 . CH; calcular la $m\measuredangle BDC$.

A) 53° B) 37° C) 15° D) 26°30' E) 18°30

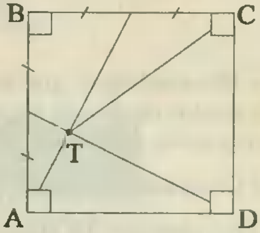
18.- La base menor $\overline{AB}$ de un trapecio ABCD mide 5, por A y B se trazan paralelas a los lados no paralelos. Hallar la medida de la base mayor sabiendo que dichas paralelas se intersectan en un punto de la mediana del trapecio.

A) 10 B) 13 C) 15 D) 18 E) 20

19.- Sobre los lados de un romboide se construyen cuadrados. Al unir los centros de dichos cuadrados se obtiene un :

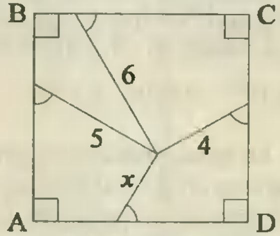
A) Rombo B) Rectángulo C) Trapecio
D) Cuadrado E) No se sabe

20.- El lado del cuadrado ABCD mide 4. Calcular TC



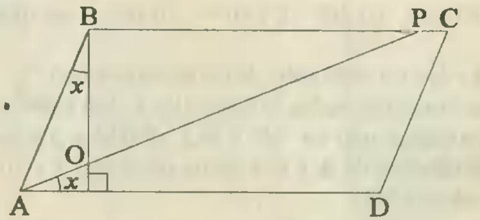
A) 2
B) $2\sqrt{2}$
C) 4
D) $4\sqrt{2}$
E) 5

21.- Calcular *x* del gráfico, si ABCD es un cuadrado :



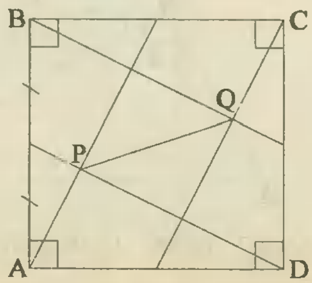
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 2,5

22.- Siendo ABCD un romboide, donde OP = 2CD; calcular *x*.



A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 22°30'

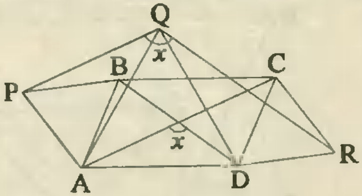
23.- Si el lado del cuadrado ABCD mide $\sqrt{10}$; hallar PQ.



A) 1
B) 2
C) $\sqrt{5}$
D) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
E) 30

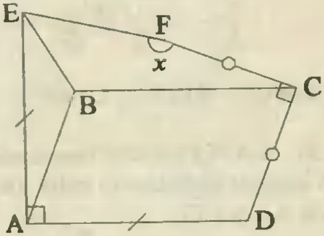
24.- En la figura: ABCD es un romboide y los triángulos APB, AQD y CRD son equiláteros. Hallar x

A) 100°
B) 90°
C) 105°
D) 120°
E) 150°



25.- En la figura ABCD es un romboide y $m \measuredangle$ ABE = 100° ; AE = AD y FC = CD. Calcular x.

A) 120°
B) 135°
C) 145°
D) 155°
E) 175°



26.- Se tiene un trapezoide ABCD, tal que : AB = CD = 6; $m \measuredangle$ ABD = 75, $m \measuredangle$ BDC = 15. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

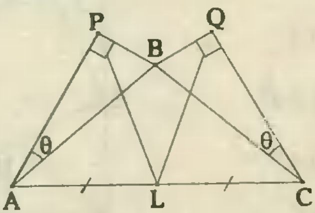
A) 6 B) 8 C) 3 D) 4,5 E) 9

27.- En un trapecio ABCD.
($\overline{CB}$ // $\overline{AD}$) $m \measuredangle$ B = 4 $m \measuredangle$ D y
11 AB + 5BC = 5 AD. Calcular la $m \measuredangle$ D.

A) 18,5 B) 22,5 C) 26,5 D) 30 E) 27,5

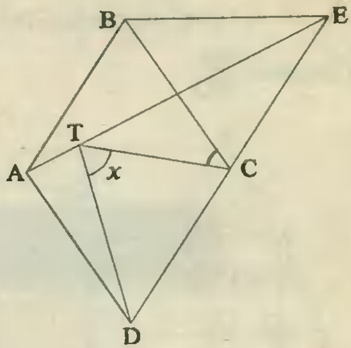
28.- Del gráfico, hallar PL, si: QL = 12

A) 12
B) 6
C) 9
D) 15
E) 13



29.- Calcular x del gráfico, si ABCD es un rombo, Δ BEC es equilátero y además :
$m \measuredangle$ BCT = 2$m \measuredangle$ BAE.

A) 60°
B) 45°
C) 75°
D) 53°
E) 30°



30.- Sean los cuadrados ABCD y EFGC, tal que : G, E y D son colineales, GE = ED . Calcular la $m \measuredangle$ EAD (E es exterior al cuadrado ABCD).

A) 15° B) 30° C) 18,5°
D) 22,5° E) 26,5°

31.- Dado un rectángulo ABCD ($\overline{AB} > \overline{BC}$) por B se traza la perpendicular a $\overline{AC}$ la cual interseca en "P" a $\overline{CD}$ y en "M" a la perpendicular a $\overline{BD}$ trazada por D. Las prolongaciones de $\overline{DM}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en "Q". Calcular "PM"; si DQ = 17 y BP = 9.

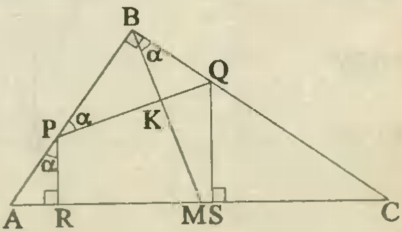
A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) $4\sqrt{2}$

32.- En un trapecio ABCD, ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$); siendo $\overline{BD}$ su altura. Se traza $\overline{AM}$, siendo "M" punto medio de $\overline{BC}$, tal que AM = BC; además $m \measuredangle$ ADB = $m \measuredangle$ C. Calcular : $m \measuredangle$ MAD.

A) 45 B) 37 C) 53 D) 30 E) 60

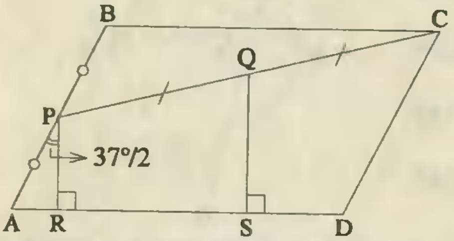
33.- En la figura RM = 6 y MS = 1. Calcular BK.

A) 5
B) 4
C) 3,5
D) 3
E) 2,5



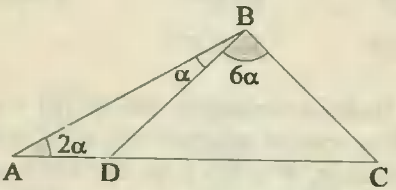
34.- En la figura mostrada, SD = 2 (AR).

Calcular : $\dfrac{BS}{RQ}$



A) 4/5 B) 5/4 C) 6/5 D) 5/6 E) 1

35.- Calcular el valor de α , si AB = CD



A) 7°30 B) 10° C) 12° D) 15° E) 18°

36.- Si ABCD es un trapezoide simétrico, (AB = BC); M, N, L, F y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Calcular *x*.

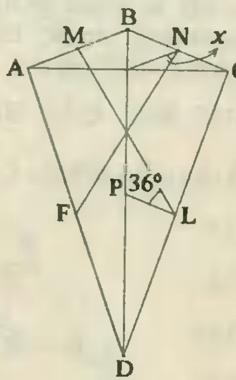
A) 12°

B) 18°

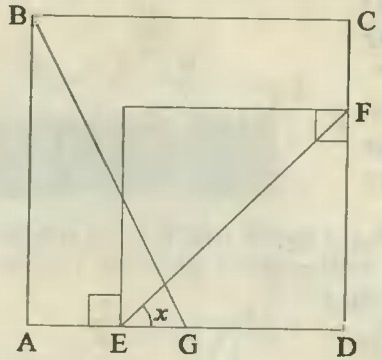
C) 24°

D) 36°

E) 15°



37.- Si : ABCD es un cuadrado, EF = AB y AG = GD; calcular "*x*"



A) 30° B) 15° C) 45° D) 57° E) 53°

38.- Si ABCD y GFED son cuadrados y AG = 10. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$.

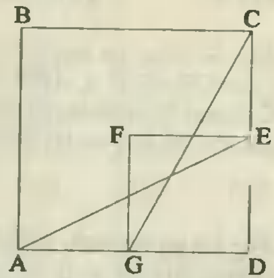
A) 5

B) $5\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) $10\sqrt{3}/2$

E) $10\sqrt{2}/3$



39.- Si ABCD y EFGH son cuadrados, HG = 2 y GN = $\sqrt{5}$; calcular "EH".

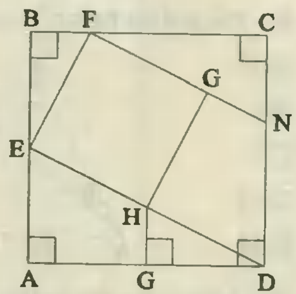
A) $2\sqrt{6}$

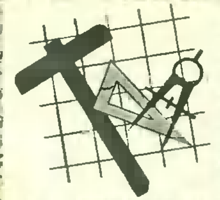
B) 2

C) $2\sqrt{5}$

D) 4

E) 5





CAP. 8
circunferencia I

8.1 ELEMENTOS

1. Centro : O
2. Radio : $\overline{OQ}$ $(OQ = R)$
3. Cuerda : $\overline{MN}$
4. Diámetro : $\overline{AB}$ $(AB = 2R)$
5. Arco : $\overset{\frown}{MN}$ o $\overset{\frown}{MQN}$
6. Flecha o Sagita : $\overline{PQ}$
7. Puntos
   * Exterior : P_1
   * Aferente : P_2
   * Interior : P_3
8. Rectas
   * Exterior : $\mathscr{L}_1$
   * Tangente : $\mathscr{L}_2$ (E : Punto de tangencia)
   * Secante : $\mathscr{L}_3$

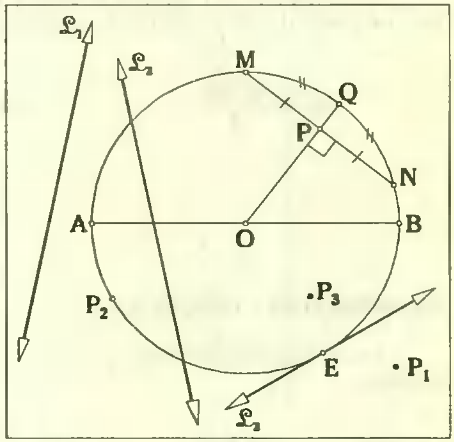


Fig. 8.1

8.2 ÁNGULOS CON RELACION A UNA CIRCUNFERENCIA

A) ÁNGULO CENTRAL

Es aquel ángulo formado por la abertura de dos radios de una circunferencia y viene a ser igual al arco que subtienden dichos radios.

$$\alpha = m\,\overset{\frown}{AB} \qquad \text{... (8.1)}$$

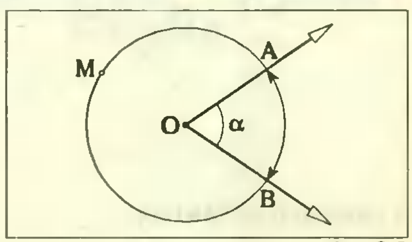


Fig. 8.2

B) ANGULO INSCRITO

Es aquel ángulo formado por dos secantes que parten desde un punto de la circunferencia.

$$\alpha = \frac{m\widehat{AB}}{2} \qquad \text{... (8.2)}$$

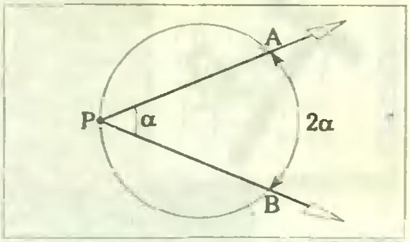


Fig. 8.3

C) ANGULO SEMI - INSCRITO

Es el ángulo formado por una tangente y una cuerda que parte desde el punto de tangencia.

$$\alpha = \frac{m\widehat{AB}}{2} \qquad \text{... (8.3)}$$

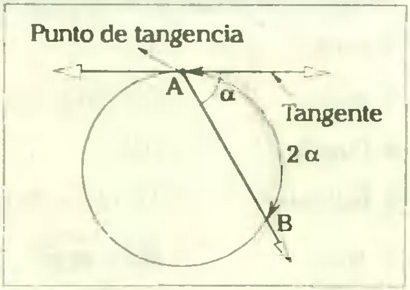


Fig. 8.4

D) ANGULO EX - INSCRITO

Es el ángulo formado por una secante y una cuerda

$$\alpha = \frac{m\widehat{ABP}}{2} \qquad \text{... (8.4)}$$

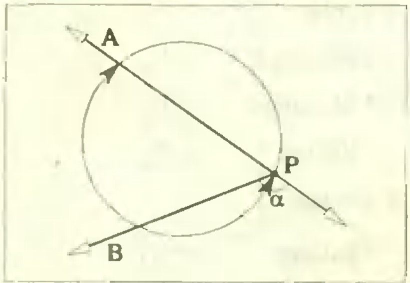


Fig. 8.5

E) ANGULO INTERIOR

Es el ángulo formado por dos cuerdas secantes de una circunferencia.

$$\alpha = \frac{m\widehat{AB} + m\widehat{CD}}{2} \qquad \text{... (8.5)}$$

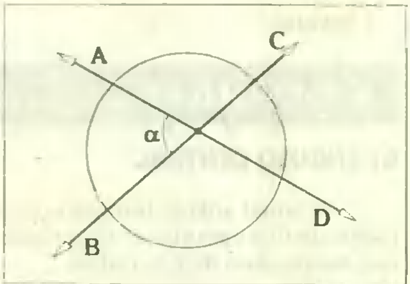


Fig. 8.6

F) ANGULO EXTERIOR

Es el ángulo formado por las secantes desde un punto exterior a la circunferencia, tenemos :

1) Angulo formado por dos rectas secantes. $\alpha = \dfrac{m\,\widehat{CD} - m\,\widehat{AB}}{2}$ ... (8.6)

2) Formado por una secante y una tangente. $\alpha = \dfrac{m\,\widehat{AB} - m\,\widehat{AC}}{2}$ ... (8.7)

3) Formado por dos tangentes. $\alpha = \dfrac{m\,\widehat{AMB} - m\,\widehat{AB}}{2}$ ... (8.8)

Observación :

Solo para dos rectas tangentes, se cumple que : $\alpha + m\,\widehat{AB} = 180°$ ... (8.9)

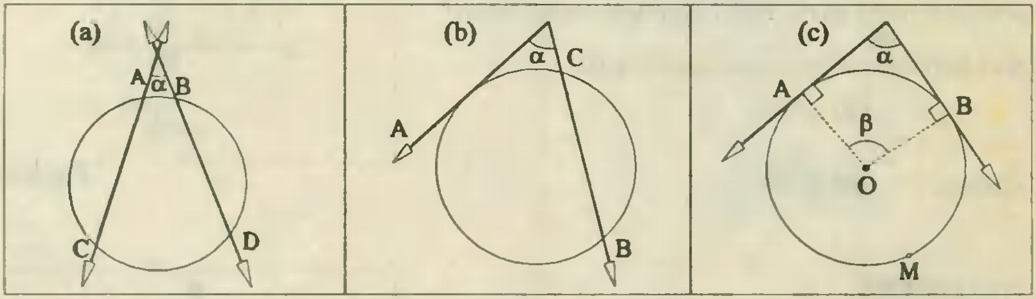


Fig. 8.7

8.3 TEOREMAS GENERALES

1ER TEOREMA

"Si en una circunferencia, trazamos dos cuerdas paralelas, éstas forman dos arcos congruentes"

Si : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\Rightarrow \quad \widehat{AC} \cong \widehat{BD}$

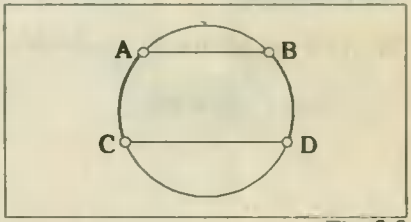


Fig. 8.8

2DO TEOREMA

"Si trazamos dos cuerdas de longitudes congruentes, entonces los arcos que subtienden cada uno son congruentes"

Si : $\overline{MN} \cong \overline{EF}$

$\Rightarrow \quad \widehat{MN} \cong \widehat{EF}$

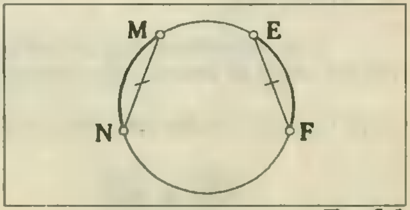


Fig. 8.9

3ER TEOREMA

"En una circunferencia se traza una tangente, al unir el centro de la circunferencia con el punto de tangencia, ésta caerá perpendicularmente a ella"

Si : "M" es un punto de tangencia

$$\Rightarrow \quad \overline{OM} \perp \mathscr{L}$$

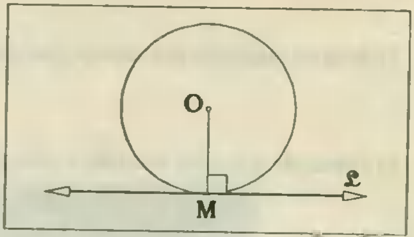


Fig. 8.10

4TO TEOREMA

"Si en una circunferencia se traza una cuerda perpendicular a su diámetro, entonces ésta se biseca"

Si el diámetro $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{MN}$:

$$\Rightarrow \quad \overline{MH} \cong \overline{HN}$$

Además : $\widehat{MB} \cong \widehat{BN}$

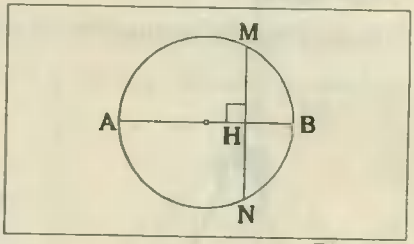


Fig. 8.11

5TO TEOREMA

"Si por un punto exterior de una circunferencia, se trazan dos tangentes, entonces la bisectriz del ángulo formado por éstas coincide con el centro de la circunferencia"

Si : A y B son puntos de tangencia :

$$\Rightarrow \quad PA = PB$$

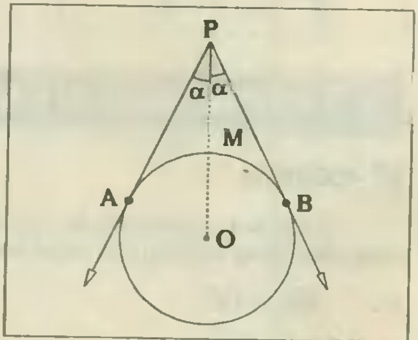


Fig. 8.12

6TO TEOREMA

"Si se intersectan dos circunferencias congruentes, los arcos de intersección son congruentes"

Si las circunferencias son congruentes.

$$\Rightarrow \quad \widehat{APB} \cong \widehat{AQB}$$

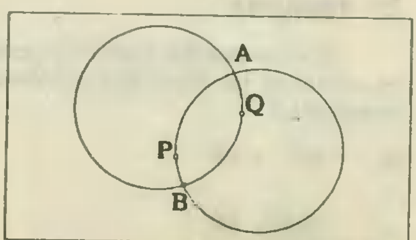
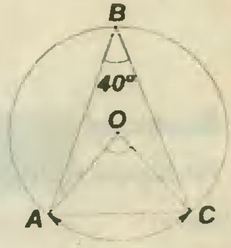


Fig. 8.13

1.- *Dado el triángulo ABC inscrito en la circunferencia de centro "O", calcular la m ∡ AOC*



Resolución.-

En la circunferencia nos damos cuenta que el ∡ ABC es inscrito, entonces por la relación (8.2):

Donde : $m\ \widehat{AC} = 2\,m\ ∡\ ABC$

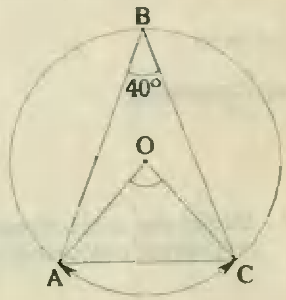
Ahora : $m\ \widehat{AC} = 2\,(40^\circ)$

Luego : $m\ \widehat{AC} = 80^\circ$

Aprovechando este resultado diremos que la m ∡ AOC, por ser un ángulo central, estará dada por la relación (8.1):

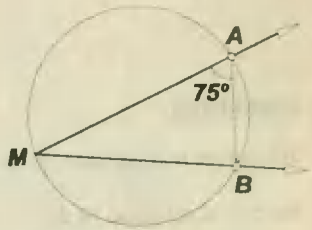
$$m\ ∡\ AOC = m\ \widehat{AC} = 80^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\ ∡\ AOC = 80^\circ}$$



2.- *En la figura mostrada MA = MB, si la m ∡ MAB = 75º*

Calcular la m $\widehat{AB}$



Resolución.-

Si AM = MB, entonces el triángulo MAB es isósceles.

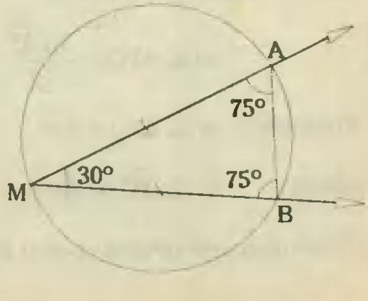
Luego : $m\ ∡\ MAB = m\ ∡\ MBA = 75^\circ$

En consecuencia : $m\ ∡\ AMB = 30^\circ$

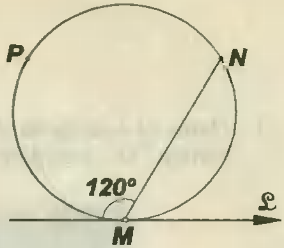
Ahora por ser ángulo inscrito, de la relación (8.2) :

$$m\ ∡\ AMB = \frac{m\ \widehat{AB}}{2} \quad \Rightarrow \quad m\ \widehat{AB} = 2m\ ∡\ AMB$$

Reemplazando : $\mathbf{m\ \widehat{AB} = 60^\circ}$



3.- Si la recta "£" es tangente a la circunferencia en "M", calcular a la medida de $\widehat{MN}$.



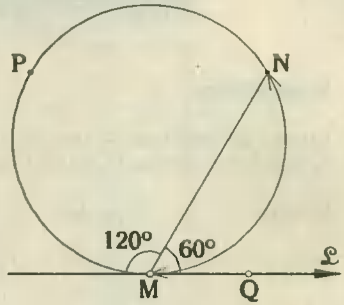
Resolución.-

Por ángulos suplementarios : $120° + m\measuredangle NMQ = 180°$

Luego : $m\measuredangle NMQ = 60°$

Ahora por ser ángulo semi-inscrito, emplearemos la relación (8.3) :

$$m\measuredangle NMQ = \frac{m\widehat{MN}}{2}$$

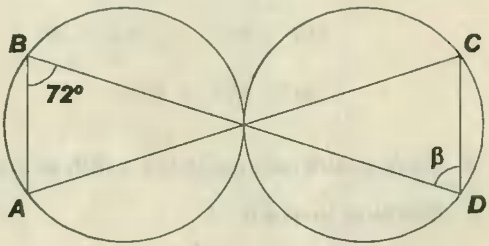


Entonces : $m\widehat{MN} = 2m\measuredangle NMQ$

Reemplazando : $m\widehat{MN} = 2\,(60°)$

$$\therefore \quad m\widehat{MN} = 120°$$

4.- Dadas las circunferencias tangentes exteriores, calcular la $m\measuredangle\beta$



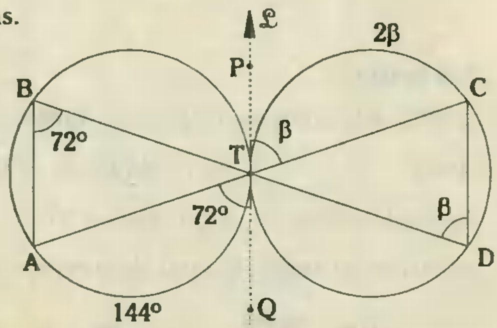
Resolución.-

Trazamos la tangente " £ " a las dos circunferencias.

Así por la relación (8.2) : $m\widehat{AT} = 144°$

Ahora por la relación (8.3) :

$$m\measuredangle ATQ = \frac{m\widehat{AT}}{2} = \frac{144°}{2}$$

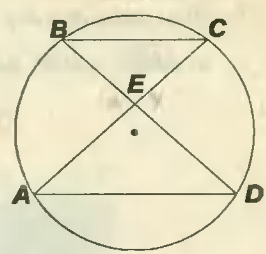


Entonces : $m\measuredangle ATQ = 72°$

Luego : $m\measuredangle\ \widehat{TC} = 2\beta \quad \wedge \quad m\measuredangle PTC = \beta$

Finalmente por opuesto por el vértice : $\beta = 72°$

5.- En la siguiente figura $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, además si m $\widehat{BC}$ = 100º y m $\widehat{AD}$ = 160º, calcular la m ∡ AEB



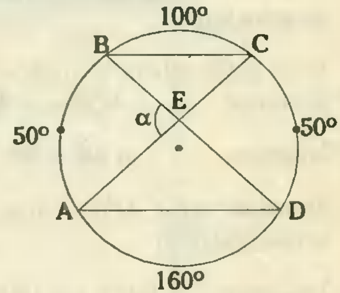
Resolución.-

Sea la m ∡ AEB = α , ahora como $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, entonces del Primer Teorema del item 8.3 :

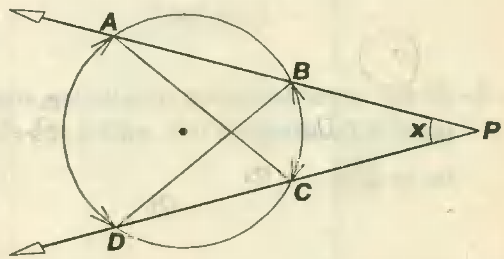
$$m\ \widehat{AB} = m\ \widehat{CD} = 50^\circ$$

Luego por la relación (8.5) : $\alpha = \dfrac{50^\circ + 50^\circ}{2}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{\alpha = 50^\circ}$$



6.- En el gráfico mostrado la m ∡ ACD = 50º, m ∡ BDC = 20º, hallar "x".



100 - 40
60/2
30

Resolución.-

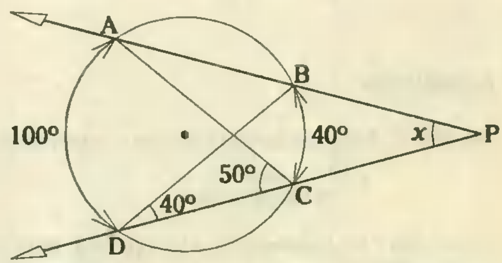
Por ser ángulo inscrito de la relación (8.2), tendremos :

$$m\measuredangle\ \widehat{AD} = 2m\measuredangle\ \text{ACD}$$

Reemplazando datos : $m\ \widehat{AD} = 50\ (2)$

$$\Rightarrow \qquad m\ \widehat{AD} = 100^\circ$$

Análogamente : $m\ \widehat{BC} = 40^\circ$

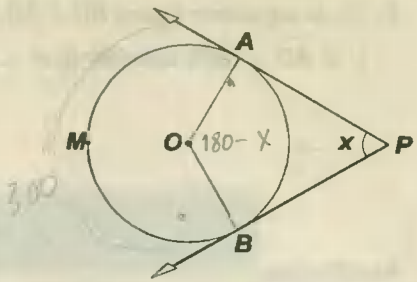


Por ser ∡ APB un ángulo exterior, aplicaremos la relación (8.6) :

$$x = \frac{100^\circ - 40^\circ}{2}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 30^\circ}$$

7.- Si se sabe que A y B son puntos de tangencia, y $m\ \widehat{AMB} = 300^\circ$, calcular "x" (0 → centro)



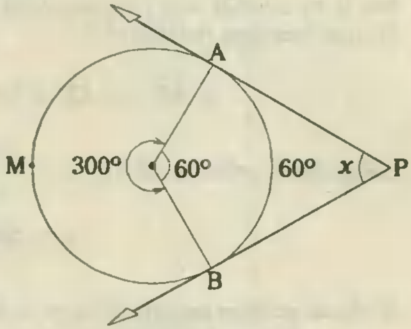
180 - x = 60
120 = x

Resolución.-

En el gráfico la $m \measuredangle$ AOB = 60 , luego por ser ángulo central : $m \measuredangle \text{AOB} = m\ \widehat{\text{AB}}$

Entonces : $m\ \widehat{\text{AB}} = 60^\circ$

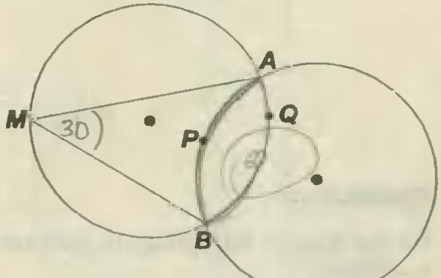
Ahora por ser $\measuredangle$ APB un ángulo exterior, aplicaremos la relación (8.9)



Tenemos : $60^\circ + x = 180^\circ$

$\therefore$ $\mathbf{x = 120^\circ}$

8.- Si las circunferencias mostradas son de igual radio, donde la $m \measuredangle AMB = 30^\circ$, calcular $m\ \widehat{APB}$

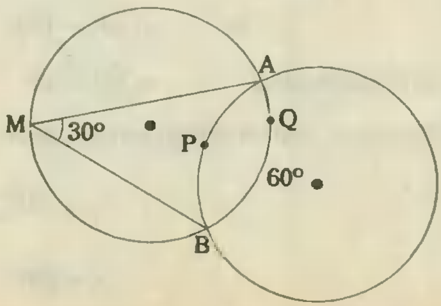


Resolución.-

Por ser $\measuredangle$ AMB un ángulo inscrito, tendremos que :

$m\ \widehat{\text{AQB}} = 60^\circ$

Como las circunferencias son iguales, entonces según el 6[to] teorema expuesto en el item 8.3, se tendrá que :



$m\ \widehat{\text{APB}} = m\ \widehat{\text{AQB}}$

$\therefore$ $\mathbf{m\ \widehat{APB} = 60^\circ}$

8.4 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

a) Circunferencias Exteriores

Si las circunferencias son exteriores el segmento que une sus centros, será mayor que la suma de sus radios, es decir :

$$PQ > R + r$$

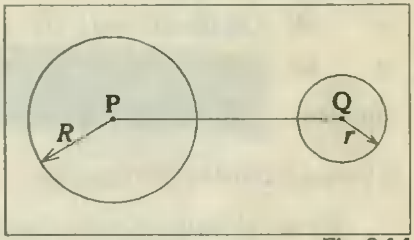


Fig. 8.14

b) Circunferencias Interiores

Si las circunferencias son interiores, el segmento que une sus centros, será menor que la diferencia de sus radios, es decir :

$$PQ < R - r$$

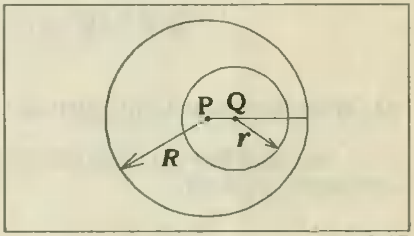


Fig. 8.15

c) Circunferencias Tangentes Interiores

Si las circunferencias son tangentes interiores el segmento que une sus centros es igual a la diferencia de sus radios, es decir :

$$PQ = R - r$$

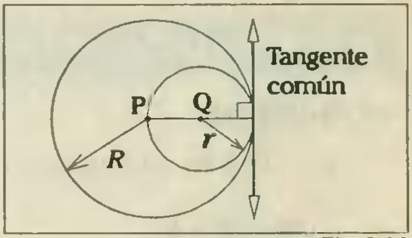


Fig. 8.16

d) Circunferencias Tangentes Exteriores

En dos circunferencias tangentes exteriormente el segmento que une sus centros, es igual a la suma de sus radios, es decir :

$$PQ = R + r$$

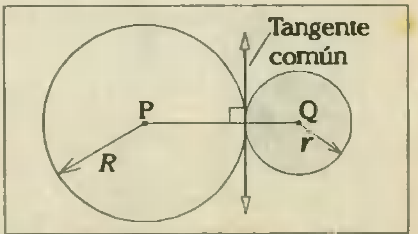


Fig. 8.17

e) Circunferencias Secantes

En dos circunferencias secantes, si el segmento que une sus centros es perpendicular a la cuerda común, entonces divide a dicha cuerda en dos partes congruentes, es decir :

Si: $\overline{AB}$: Cuerda Común y $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow$ $AH = HB$

También : $R - r < PQ < R + r$

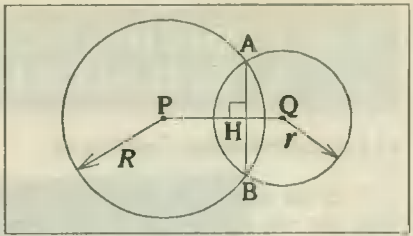


*Fig.*8.18

f) Circunferencias Ortogonales

En dos circunferencias ortogonales, el cuadrado del segmento que une sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios, es decir:

$$PQ^2 = R^2 + r^2$$

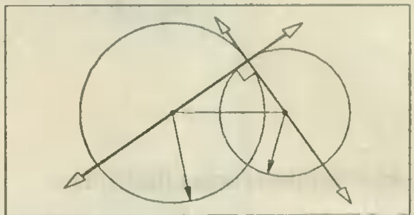


Fig. 8.19

g) Circunferencias Concéntricas

Son aquellas circunferencias que tienen el mismo centro, es decir :

$$PQ = 0$$

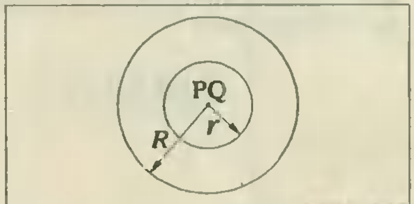


Fig. 8.20

8.5 ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES

1RA PROPIEDAD

Si: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes y $\perp$s

$\Rightarrow$ $PA = PB = R$

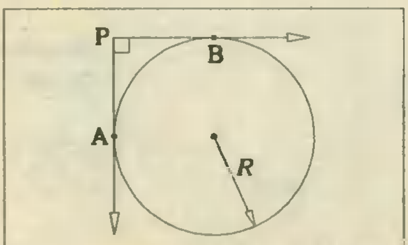


Fig. 8.21

2DA PROPIEDAD

Si: $AB = R$

$\Rightarrow$ $m\,\widehat{AB} = 60$

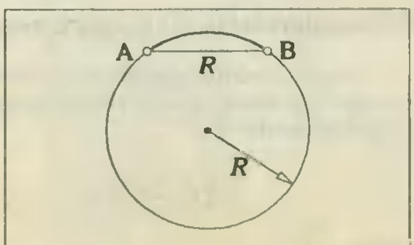


Fig. 8.22

3RA PROPIEDAD

Si P y Q son centros como en la *Fig*. 8.23

$\Rightarrow \quad m\ \overset{\frown}{APB} = m\ \overset{\frown}{AQB} = 120°$

$\Rightarrow \quad m\ \overset{\frown}{APB} = m\ \overset{\frown}{AQB} = 120°$

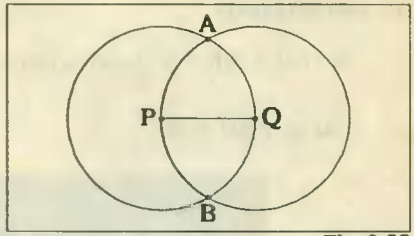


Fig. 8.23

4TA PROPIEDAD

Si las dos circunferencias idénticas son concéntricas (tienen el mismo centro).

$\Rightarrow \quad AB = CD = EF$

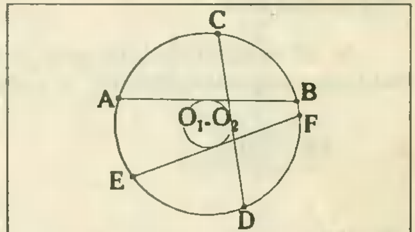


Fig. 8.24

5TA PROPIEDAD

Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros se cumple que B, P y C son colineales, es decir, los puntos B, P y C están en una misma recta.

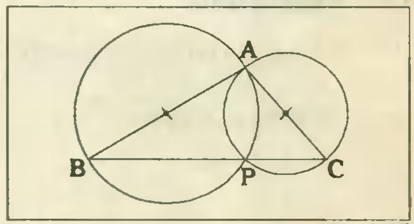


Fig. 8.25

6TA PROPIEDAD

Si : A, P y B son puntos de tangencia :

$\Rightarrow \quad m \measuredangle APB = 90$

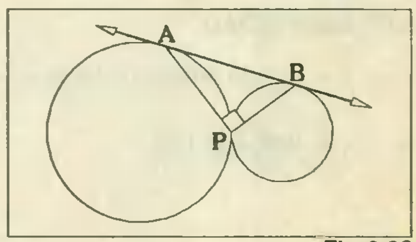


Fig. 8.26

7MA PROPIEDAD

Si : "P" es punto de tangencia

$$\Rightarrow \quad m \measuredangle APB = \frac{m\ \overset{\frown}{AP} + m\ \overset{\frown}{PB}}{2} \qquad \text{... (8.10)}$$

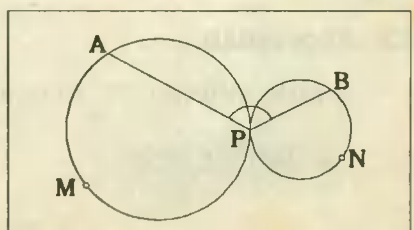


Fig. 8.27

8^{VA} PROPIEDAD

Si : AM = MB, P y Q son centros :

$\Rightarrow \quad m\measuredangle PMQ = 90$

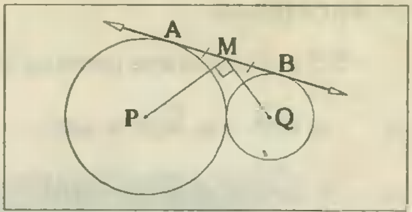


Fig. 8.28

9^{NA} PROPIEDAD

Si "P" es punto de tangencia de dos circunferencias tangentes exteriormente, se cumplirá que :

$\Rightarrow \quad \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

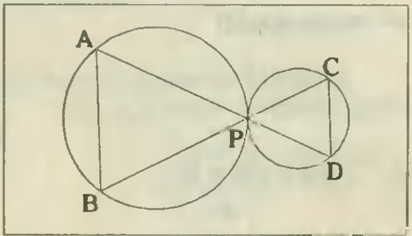


Fig. 8.29

10^{MA} PROPIEDAD

Si A y B son puntos de tangencia

$\Rightarrow \quad \measuredangle MBA \cong \measuredangle ABL$

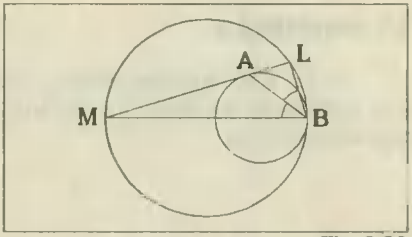


Fig. 8.30

11^{RA} PROPIEDAD

Si P y C son puntos de tangencia :

$\Rightarrow \quad \measuredangle BPC \cong \measuredangle CPL$

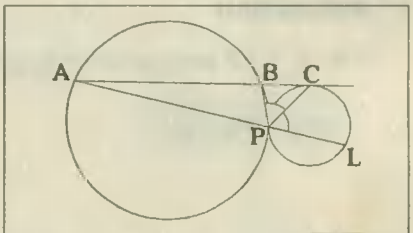


Fig. 8.31

12^{DA} PROPIEDAD

Si $\overline{AB}$ es diámetro y "Q" punto de tangencia

$\Rightarrow \quad \measuredangle HQB \cong \measuredangle BQP$

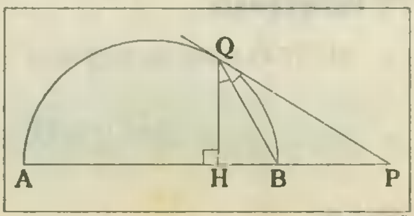


Fig. 8.32

13RA PROPIEDAD

Si : M, N, y L son puntos de tangencia y "p" el semiperímetro.

$\Rightarrow$ AM = p - BC

BN = p - AC

CL = p - AB

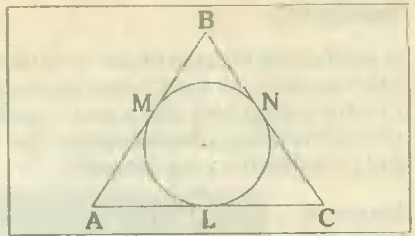
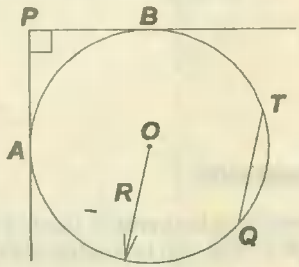


Fig. 8.33

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (5ta PARTE)

9.- Dada la figura siguiente, donde A y B son puntos de tangencia, calcular PA, si se cumple que :

$m\ \widehat{TQ} = 60^\circ$ y $OQ = 3$.



Resolución.-

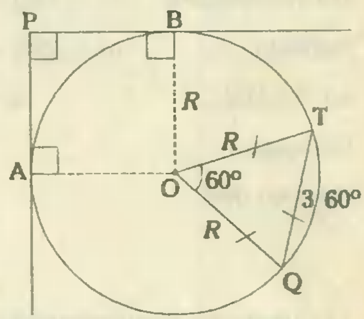
Por ángulo central la $m\measuredangle$ TOQ = 60°, luego por propiedad de triángulos, anteriormente estudiados vemos que el Δ TOQ es equilátero, entonces :

$$OT = OQ = TQ = R = 3$$

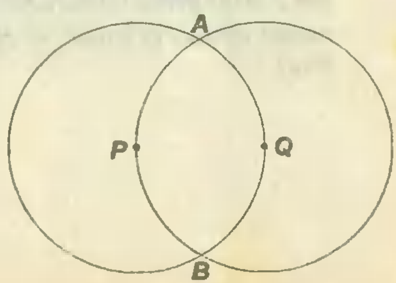
Luego, por la 1ra propiedad del item 8.5, tenemos :

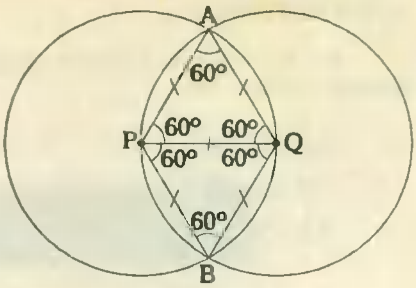
$$PA = PB = R$$

$$\therefore \quad \mathbf{PA = 3}$$



10.- En la siguiente figura, las circunferencias son iguales; si P y Q son sus centros, calcular la m $\widehat{AQB}$.





Resolución.-

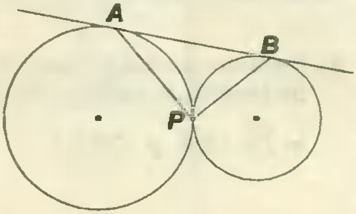
Si unimos los centros de las circunferencias y además estos puntos con A y B, observaremos que dichos segmentos son iguales uno a uno e iguales al radio de las circunferencias, obteniéndose dos triángulos PAQ y PBQ equiláteros y equiángulos.

Entonces : $m \measuredangle APB = 120°$

También : $m \measuredangle APB = m \widehat{AQB}$ (ángulo central)

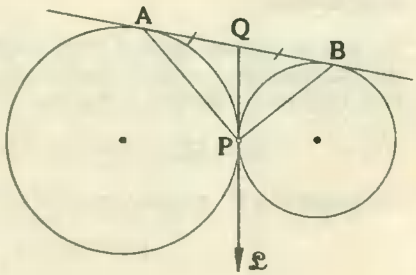
$\therefore$ $\boldsymbol{m \widehat{AQB} = 120°}$

11.- Si A, P y B son puntos de tangencia, calcula la $m \measuredangle APB$



Resolución.-

Al trazar la tangente $\mathcal{L}$ por el punto "P", interceptando a $\overline{AB}$ en Q, resultando que los triángulos AQP y PQB son isósceles donde :



Por consiguiente : $m \measuredangle PAQ = m \measuredangle APQ = \alpha$

También : $m \measuredangle QPB = m \measuredangle PBQ = \theta$

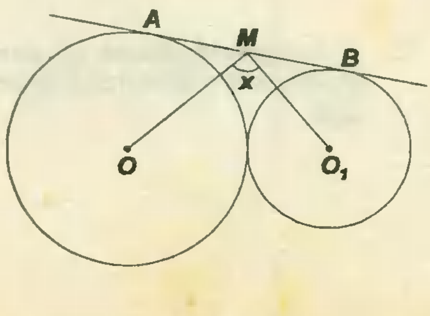
En el Δ APB : $\alpha + \alpha + \theta + \theta = 180°$

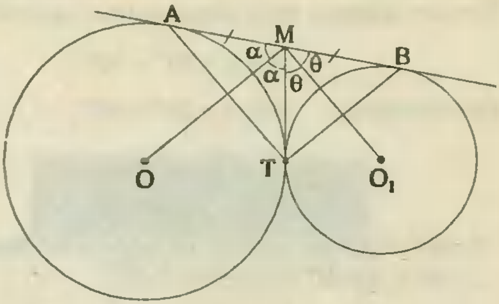
De donde : $\alpha + \theta = 90°$

Y puesto que : $m \measuredangle APB = \alpha + \theta$

$\therefore$ $\boldsymbol{m \measuredangle APB = 90°}$

12.- Dadas las circunferencias tangentes exteriores y la tangente común $\overline{AB}$, siendo M punto medio de AB, calcular "x" (O y O_1 son centros)





Resolución.-

Sea "T" el punto de tangencia de las dos circunferencias, al trazar $\overline{MT}$, nos damos cuenta que MO es bisectriz del $\measuredangle$ ATM.

Entonces : $m\measuredangle AMO = m\measuredangle OMT = \alpha$

Esto debido al 5to teorema del item 8.3

De igual manera : $m\measuredangle TMO_1 = m\measuredangle O_1TB = \theta$

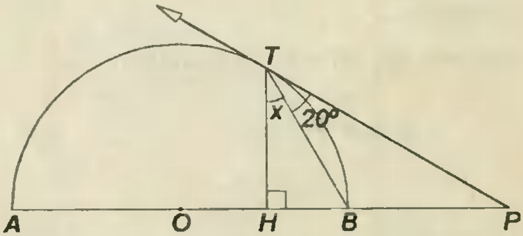
Ahora, recordemos que : $x = \alpha + \theta$ ... (1)

También : $2\alpha + 2\theta = 180^o$

De donde : $\alpha + \theta = 90^o$ ... (2)

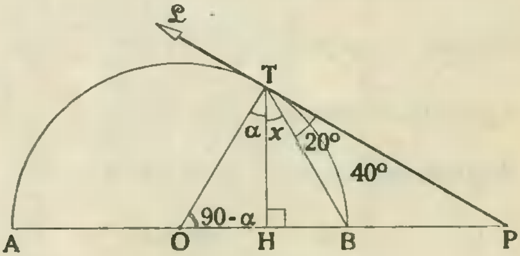
Finalmente de (1) y (2), concluimos que : $\boldsymbol{x = 90^o}$

13.- En la figura mostrada, se tiene una semicircunferencia de centro "O"; si T es punto de tangencia, calcular "x".



Resolución.-

Trazamos $\overline{OT}$ perpendicular a "$\mathfrak{L}$" (propiedad)



Sea: $m\measuredangle OTH = \alpha$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle TOH = 90 - \alpha$

Ahora : $m\measuredangle TOB = m\measuredangle \widehat{TB}$

Entonces : $m\,\widehat{TB} = 90 - \alpha$ ... (1)

Por ángulo semi-inscrito, tendremos que :

$$m\measuredangle PTB = 20^o = \frac{m\,\widehat{TB}}{2}$$

Luego : $m\,\widehat{TB} = 40^o$ ... (2)

De (1) y (2) : $40^o = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$ $\alpha = 50^o$

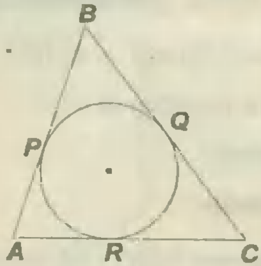
Por consiguiente, en el triángulo rectángulo BTO, en el ángulo recto T, tendremos que :

$$\alpha + x + 20^\circ = 90^\circ$$

Reemplazando : $50 + x + 20^\circ = 90^\circ$

$\therefore \qquad x = 20^\circ$

14.- Si P, Q y R son puntos de tangencia, donde AB = 8, BC = 6 y AC = 4, calcular AP.



Resolución.-

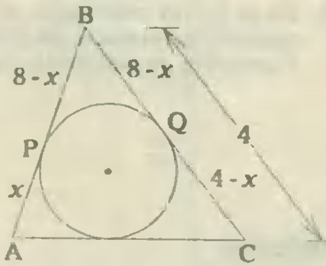
1^{er} Método :

Sabemos que BC = 6, reemplazando

$$\downarrow$$

$$8 - x + 4 - x = 6$$

$\therefore \qquad x = 3$



2^{do} Método :

Aplicamos la 13^{ra} propiedad del item 8.5 : AP = p - BC

Donde : $p = \dfrac{8+6+4}{2} \quad \Rightarrow \quad p = 9$

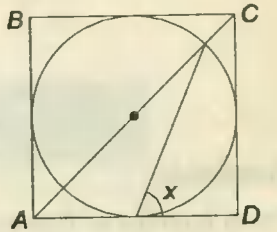
Y por dato del problema : BC = 6

Reemplazando : AP = 9 - 6

$\therefore \qquad$ **AP = 3**

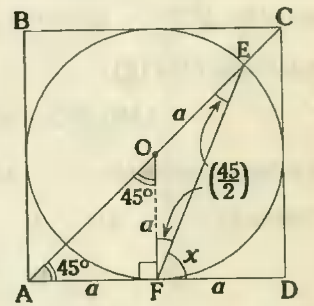
MISCELÁNEA

1.- En el gráfico adjunto, ABCD es un cuadrado; hallar "x".



Resolución.-

Trazamos el radio $\overline{OF}$, entonces el Δ FOE es isósceles, en donde los ángulos miden (45°/2)



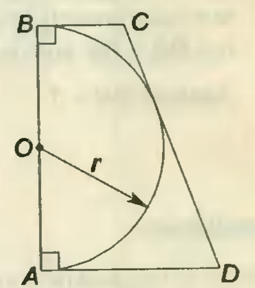
Finalmente en el Δ AEF : $45^\circ + \dfrac{45^\circ}{2} = x$

$$x = \frac{135^\circ}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 67^\circ\ 30'}$$

2.- En la figura mostrada, hallar "r" ; si :

BC + AD = 12 y AB + CD = 20



Resolución.-

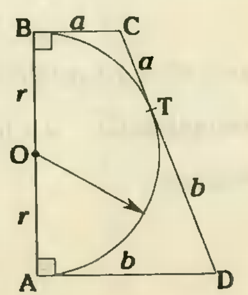
Por dato : $a + b = 12$ ... (1)

También : $2r + (a + b) = 20$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $2r + 12 = 20$

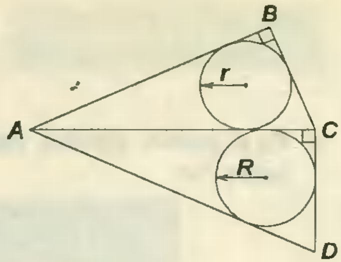
De donde : $2r = 8$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r = 4}$$



3.- En la figura mostrada, se sabe que : $AB + BC = AD$.

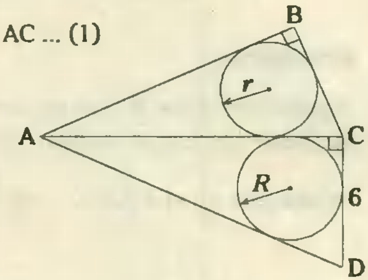
Además, si $CD = 6$, hallar: $(R + r)$



Resolución.-

Por el Teorema de Poncelet en el ⊿ ABC : $AB + BC = 2r + AC$ ... (1)

En el ⊿ ACD : $AC + CD = 2R + AD$ ... (2)



Sumando (1) y (2) :

$$\underbrace{(AB+BC)} + \cancel{AC} + CD = 2(R + r) + \cancel{AC} + AD$$

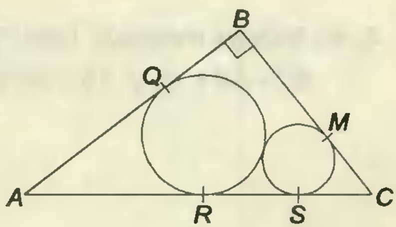
En donde por dato : $AB + BC = AD \wedge CD = 6$

Entonces : $\cancel{AD} + 6 = 2(R + r) + \cancel{AD}$

$$\therefore \quad \mathbf{R + r = 3}$$

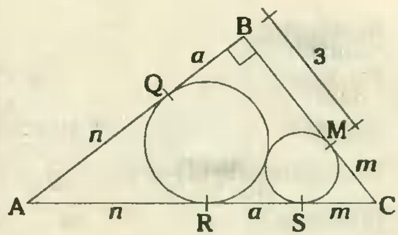
4.- En el triángulo ABC, calcular la longitud del radio de la circunferencia inscrita sabiendo que los segmentos $\overline{BQ}$ y $\overline{RS}$ son congruentes.

Además $BM = 3$



Resolución.-

Sea "x" la longitud del inradio del ⊿ ABC, entonces por el Teorema de Poncelet :



$$AB + BC = 2x + AC$$

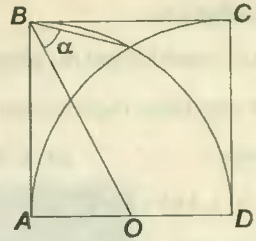
Pero : $AB = a + n$; $BC = 3 + m$ y $AC = n + a + m$

Reemplazando : $a + n + 3 + m = 2x + n + a + m$

De donde : $3 = 2x$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 1{,}5}$$

5.- En la figura dada, ABCD es un cuadrado tal que AO = OD. Calcular α.



Resolución.-

El Δ AED es equilátero $\Rightarrow$ AD = AE = ED = 2a

El Δ ABE es isósceles $\Rightarrow$ AB = AE = 2a

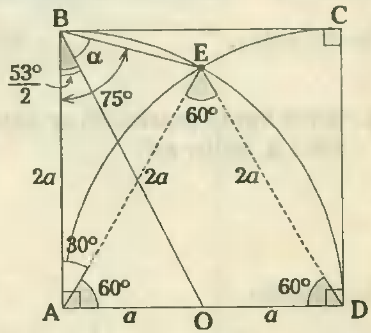
El ⊾ BAO es notable aproximado (53°/2) :

$\Rightarrow$ $m\measuredangle$ ABO = 53°/2

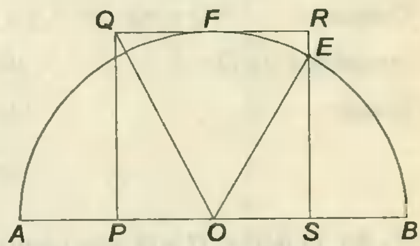
Luego en el Δ ABE : $\alpha + \dfrac{53^\circ}{2} = 75^\circ$

De donde : $\alpha = 75^\circ - 26{,}5^\circ$

$\therefore$ **α = 48° 30'**



6.- En la figura PQRS es un cuadrado, "O" es centro de la semicircunferencia y PO = OS; calcular : m ∡ QOE, siendo F punto de tangencia.



Resolución.-

El ⊾ OES $\rightarrow$ notable (30° y 60°); donde : PQ = OF = OE = 2a (radio de la circunferencia)

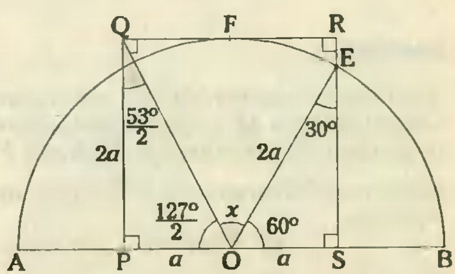
El ⊾ OQP $\rightarrow$ notable aproximado de : 53°/2 $\Rightarrow$ $m\measuredangle$ PQO = 53°/2

Luego : $\dfrac{127^\circ}{2} + x + 60^\circ = 180^\circ$

Ahora : $x = 120^\circ - \dfrac{127}{2}$

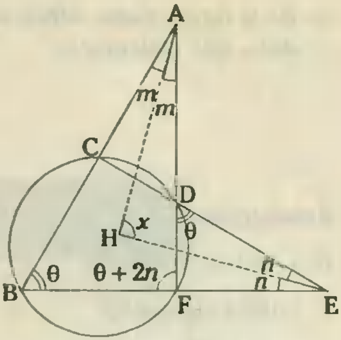
Donde : $x = \dfrac{240-127}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 56^\circ\, 30'}$



7.- En un cuadrilátero convexo BCDF inscrito en una circunferencia, se prolongan los lados opuestos hasta intersectarse en A y E. ¿Qué ángulo formarán las bisectrices interiores de los ángulos A y E?

Resolución.-



En el cuadrilátero no convexo ABEH : $x = m + \theta + n$ ... (1)

Por otro lado, reconocemos que la : $m\measuredangle$ FDE = θ

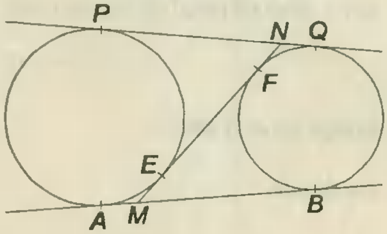
Ahora : $m\measuredangle$ BFA = $\theta + 2n$ ($\measuredangle$ exterior)

En el Δ ABF : $2m + 2\theta + 2n = 180°$

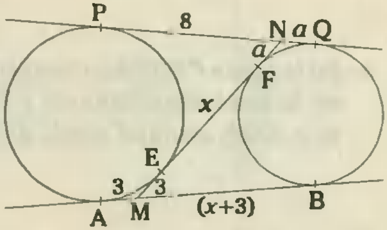
Entonces : $m + \theta + n = 90°$ ... (2)

De (1) y (2) : $\boldsymbol{x = 90°}$

8.- En la figura mostrada, se sabe que : AM = 3 y NP = 8. Hallar EF .



Resolución.-



Por teoría sabemos que : NP = NE $\rightarrow$ $8 = a + x$ ... (1)

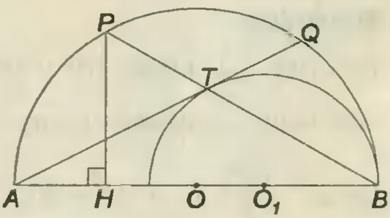
También : PQ = AB $\rightarrow$ $8 + a = 3 + 3 + x$ ... (2)

Sumando (1) y (2) : $16 = 6 + 2x$

Donde : $10 = 2x$

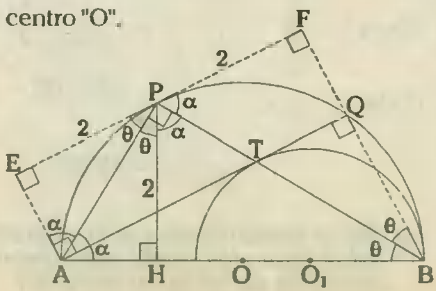
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 5}$

9.- En la figura, O y O_1 son centros, T es punto de tangencia, si PH = 2 ; hallar AQ.



Resolución.-

Trazamos la tangente por "P" a la semicircunferencia de centro "O". Luego trazamos $\overline{AE}$ perpendicular a dicha tangente y prolongamos a continuación $\overline{BQ}$ hasta "F".



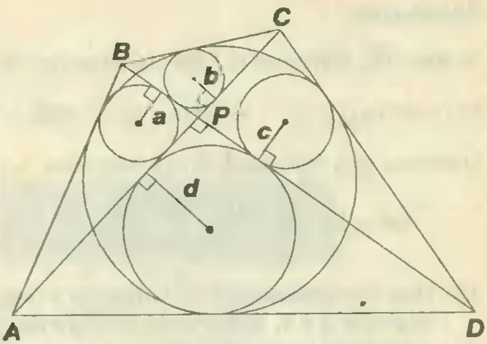
Ahora por el Teorema de la bisectríz de un ángulo tenemos :

EP = PH = 2 ; PF = PH = 2

Luego : EF = AQ = 2 + 2

$\therefore$ AQ = 4

10.- A partir del gráfico mostrado, se pide encontrar una relación entre a; b; c y d (a; b; c; d son las longitudes de los inradios de los triángulos rectángulos).



<u>**Resolución**</u>.-

Por el Teorema de Poncelet en el ⊿ ABP :

$$PB + PA = 2a + AB \qquad ... (1)$$

También en el ⊿ CPD : $PC + PD = 2c + CD \qquad ... (2)$

Sumando (1) y (2) : $\underbrace{PA + PC} + \underbrace{PB + PD} = 2a + 2c + AB + CD$

Donde : $AC \quad + \quad BD \quad = 2(a + c) + AB + CD \qquad ... (3)$

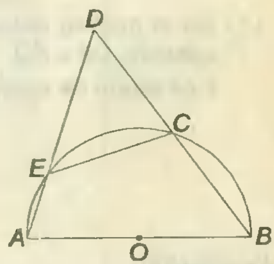
También : $PB + PC = 2b + BC \quad ... (\alpha) \quad \wedge \quad PA + PD = 2d + AD \quad ... (\beta)$

Sumando (α) y (β) : $AC + BD = 2(b + d) + BC + AD \quad ... (4)$

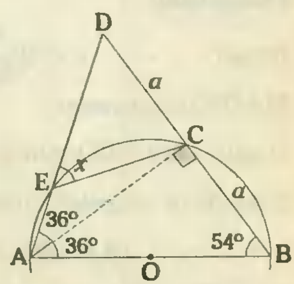
Observamos que (3) y (4) son iguales : $2(a + c) + AB + CD = 2(b + d) + BC + AD$

Luego la relación buscada es : $\boldsymbol{a + c = b + d}$

11.- En el gráfico, calcular la m ∡ DEC, si DC = CB y m ∡ DAB = 72º



<u>**Resolución**</u>.-



Al trazar $\overline{AC}$, resulta que el Δ ADB es isósceles, ya que es mediatriz.

Entonces : m ∡ DAC = m ∡ BAC = 36º y m ∡ ABC = 54º

Luego; como el cuadrilátero AECB es inscrito, se concluye que :

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 54^o}$$

12.- En un triángulo ABC , m ∡ A = 2 m ∡ C; se traza la bisectríz interior $\overline{AD}$, la circunferencia circunscrita al triángulo ABD intersecta a $\overline{AC}$ en "E", calcular EC ; si AB = 7.

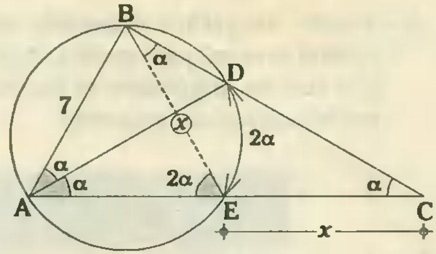
Resolución.-

Se traza $\overline{BE}$, entonces el Δ EBC es isósceles BE = EC = x

Se observa que : $m\measuredangle A = m\measuredangle AEB = 2\alpha$

Entonces el Δ ABE también es isósceles, en donde :

AB = BE $\therefore$ $x = 7$



13.- Una circunferencia es tangente a tres lados de un romboide. Si sus alturas son entre si como 4 a 5, calcular la medida del arco que determina el cuarto lado al intersectar a dicha circunferencia.

Resolución.-

Sean las alturas : TQ = $10k$ y HK = $8k$

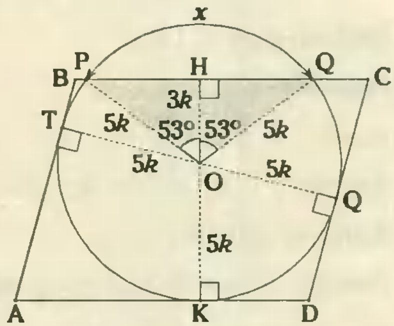
Luego : OT = OQ = $5k$; OK = $5k$ y OH = $3k$

En el ⊿ OHQ : $m\measuredangle$ HOQ = 53°

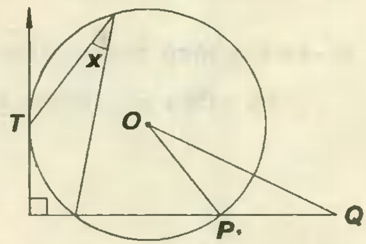
También : $m\measuredangle$ POH = 53°

Finalmente, por ángulo central :

$x = 106°$



14.- En el gráfico calcular "x", si "O" es centro y además, OP = PQ.
T es punto de tangencia y m ∡ OQP = 26º



Resolución.-

Por ser : $x = \dfrac{m\widehat{TL}}{2}$ ... (1)

El Δ OPQ es isósceles

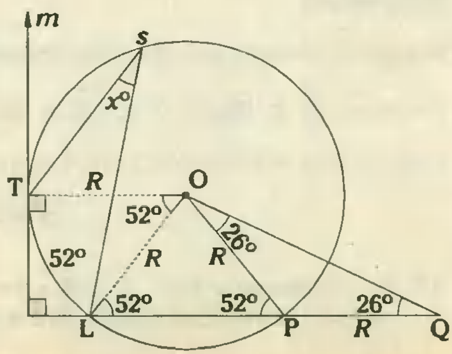
Luego : $m\measuredangle POQ = m\measuredangle PQO = 26°$

El Δ LOP es isósceles, entonces :

$m\measuredangle OLP = m\measuredangle OPL = 52°$

$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{m}$ (propiedad) entonces $\overline{OT}$ // $\overline{LP}$ de donde :

$m\measuredangle TOL = 52°$

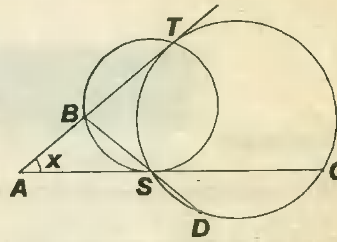


Por ∡ central : $m\ \overset{\frown}{TL} = 52°$

En (1) : $x = \dfrac{52}{2}$ $\therefore$ $\mathbf{x = 26°}$

15.- En la figura, calcular "x" si "T" y "S" son puntos de tangencia.

Además : m $\overset{\frown}{DC}$ = 80º y m $\overset{\frown}{DS}$ = 40º.



Resolución.-

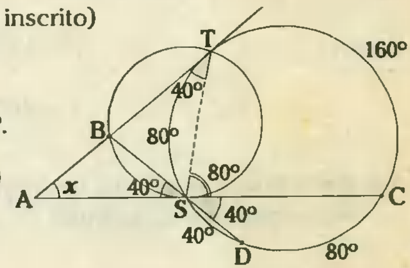
Por dato la $m\ \overset{\frown}{DC} = 80°$, entonces la m ∡ CSD = 40° (∡ inscrito)

Luego la m ∡ BTS = 40°, entonces la $m\ \overset{\frown}{TS} = 80°$.

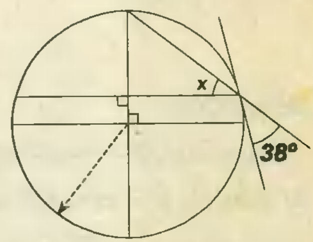
El arco $\overset{\frown}{TC}$ mide ahora 160°; entonces la m ∡ TSC = 80°.

Finalmente en el Δ ATS : $x + 40° = 80°$ (∡ exterior)

$\therefore$ $\mathbf{x = 40°}$



16.- En la figura mostrada, calcular "x"



Resolución.-

La $m\ \overset{\frown}{AB} = 2\ .\ (38) = 76°$ (∡ semi-inscrito)

La m ∡ AOB = 76°

Pero $\overline{OM}$ es bisectriz del ∡ AOB, entonces la :

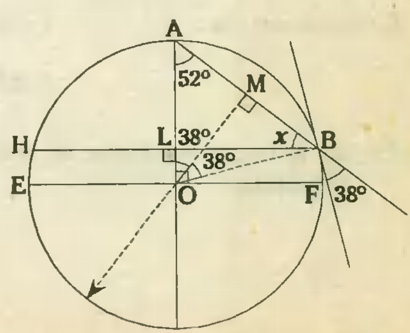
m ∡ AOM = m ∡ MOB = 38°

Entonces en el triángulo rectángulo ALB la :

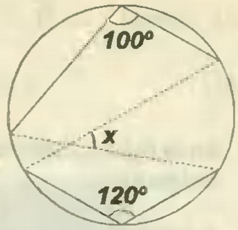
m ∡ OAM = 52°

Finalmente en el ALB : $x + 52° = 90°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 38°}$



17.- Del gráfico mostrado, calcular "x"



Resolución.-

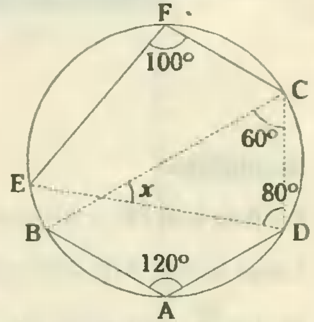
En el cuadrilátero inscrito EFCD : $m\measuredangle EDC = 80^o$

En el cuadrilátero inscrito ABCD : $m\measuredangle BCD = 60^o$

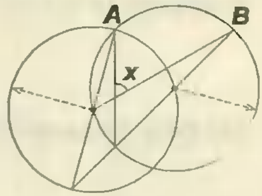
Luego : $x + 60^o + 80^o = 180^o$

Donde : $x = 180^o - 140^o$

$\boldsymbol{x = 40^o}$



18.- En la figura mostrada, las circunferencias son del mismo radio, se pide calcular "x", si m $\overset{\frown}{AB}$ = 90º.



Resolución.-

El triángulo EAF es equilátero.

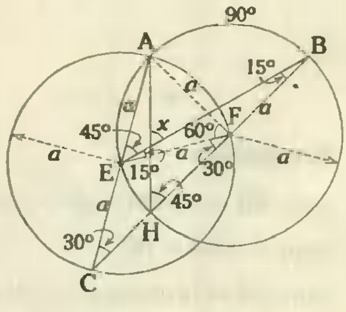
El triángulo AFC es rectángulo.

Entonces la $m\measuredangle EFC = 30^o$ y la $m\measuredangle FEB = m\measuredangle EBF = 15^o$

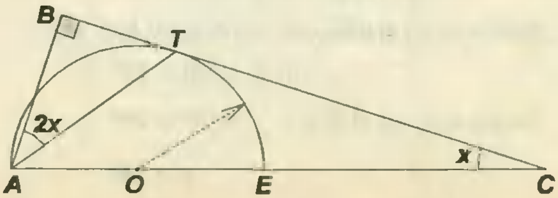
Luego la $m\measuredangle AEB = m\measuredangle AHB = 45^o$

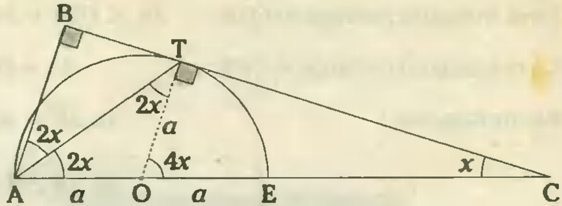
En consecuencia : $x = 45^o + 15^o$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 60^o}$



19.- En la figura mostrada, se pide calcular xº





Resolución.-

Trazamos $\overline{OT} \perp \overline{BC}$.

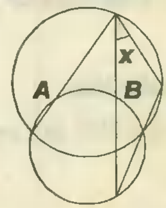
Ahora como $\overline{AB} \parallel \overline{OT}$, entonces por ángulos alternos internos :

$$m \measuredangle BAT = m \measuredangle ATO = 2x.$$

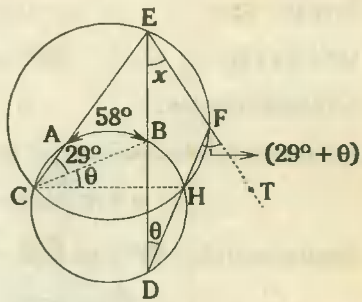
En el Δ ATO isósceles : $m \measuredangle TOC = 4x$ ($\measuredangle$ exterior)

Finalmente en el ⊿ OTC : $4x + x = 90^o$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 18^o}$

20.- En la figura, se muestra dos circunferencias de distinto radio, se pide calcular x^o; si m $\overset{\frown}{AB} = 58^o$.



Resolución.-



Trazamos $\overline{BC}$ y $\overline{CH}$. Ahora si la $m \measuredangle BDH = \theta$,

$\Rightarrow$ $m \measuredangle BCH = \theta$

También la $m \measuredangle ACB = 29^o$ ($\measuredangle$ inscrito)

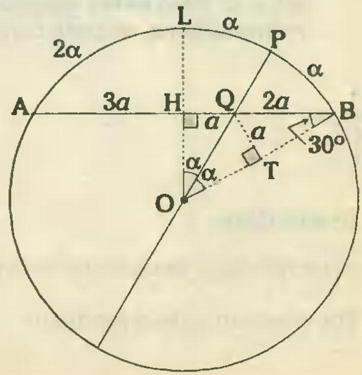
En el cuadrilátero inscrito CEFH : $m \measuredangle HFT = 29^o + \theta$

Finalmente en el Δ DEF, por el Teorema del ángulo exterior :

$$x + \theta = 29^o + \theta \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 29^o}$$

21.- En una circunferencia de centro O se traza la cuerda $\overline{AB}$. Calcular la medida del arco AB, si un diámetro que divide al arco AB en la razón de 3 a 1, divide a la cuerda $\overline{AB}$ en la razón de 2 a 1.

Resolución.-



Sea : $m \overset{\frown}{PB} = \alpha \quad \Rightarrow \quad m \overset{\frown}{AP} = 3\alpha$

Además si : $QB = 2a \quad \Rightarrow \quad AQ = 4a$

Trazamos $\overline{OL} \perp \overline{AB}$, de donde : $m \overset{\frown}{AL} = m \overset{\frown}{LB} = 2\alpha$

Luego AH = HB = $3a$, con lo cual : HQ = a ($\overline{OL} \cap \overline{AB}$: H)

Trazamos $\overline{QT} \perp \overline{OB}$, luego por el teorema de la bisectríz :

$$QH = QT = a$$

En el triángulo rectángulo QTB : $m\measuredangle QBT = 30^\circ$

En el triángulo rectángulo OHB : $2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$; $m\,\widehat{AB} = 4\alpha$

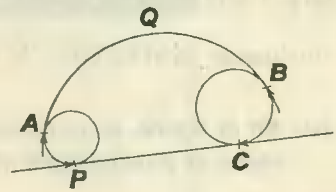
Reemplazando : $m\,\widehat{AB} = 4(30)$

$\therefore \quad m\,\widehat{AB} = 120^\circ$

22.- En la figura dada se sabe que :

$$m\,\widehat{AP} + m\,\widehat{BC} = 220^\circ.$$

Entonces se pide calcular la $m\,\widehat{AQB}$.



Resolución.-

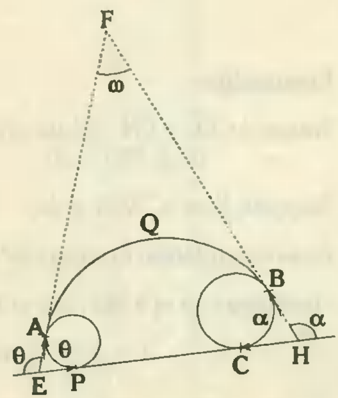
En el Δ EFH, por propiedad en triángulos se sabe que :

$$\alpha + \theta = 180^\circ + \omega \quad \text{... (1)}$$

Pero por dato : $\alpha + \theta = 220^\circ$ ... (2)

De (1) y (2) : $220^\circ = 180^\circ + \omega$

En consecuencia : $\omega = 40^\circ$



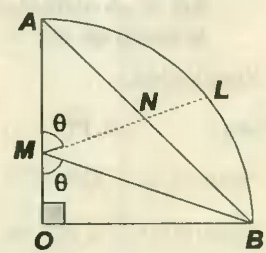
Aplicando la relación (8.9), se puede establecer que :

$$\omega + m\,\widehat{AQB} = 180^\circ$$

Reemplazando : $40^\circ + m\,\widehat{AQB} = 180^\circ$

$\therefore \quad m\,\widehat{AQB} = 140^\circ$

23.- En la figura AOB es un cuadrante en donde : MN = 5 y ML = 8. Bajo estas condiciones y las que muestra la misma figura, se pide calcular θ.



Resolución.-

Al completar la semicircunferencia se observa que L, M y C son colineales, luego $m\measuredangle CLB = 90^\circ$

Por el teorema de la mediatriz : MC = MB y AC = AB

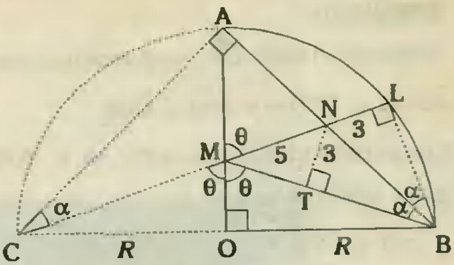
Luego : $\Delta ACM \cong \Delta ABM$ (LLL)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle ACM = m\measuredangle ABM = \alpha$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle ACL = m\measuredangle ABL = \alpha$

Por el Teorema de la bisectríz :

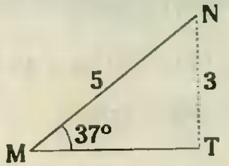
$$NL = NT = 3$$



En el ⊿ MTN, por sus lados es un triángulo 3 - 4 - 5 :

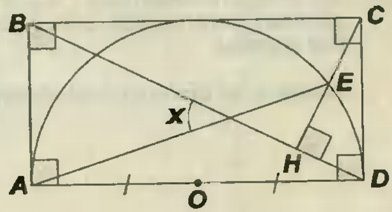
Luego en M : $2\theta + 37 = 180°$

$$\therefore \quad \theta = 71° \, 30'$$



$m\measuredangle M = 37°$

24.- En el gráfico se muestra un rectángulo y en él una semicircunferencia tangente en tres de los lados, de aquel. Bajo éstas condiciones y otras que aparecen en el gráfico, se pide calcular la medida de "x".



Resolución.-

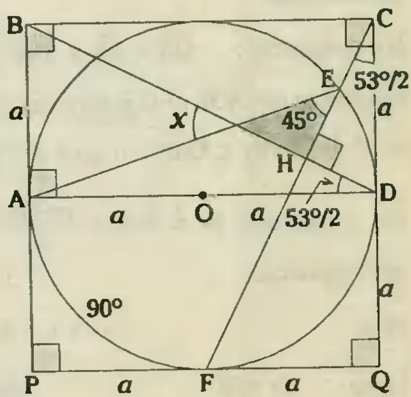
Duplicando la gráfica y completando la circunferencia, prolongamos CH, hasta llegar al punto de tangencia "F", de modo que :

$$m\measuredangle BDA = m\measuredangle HCD = 53°/2.$$

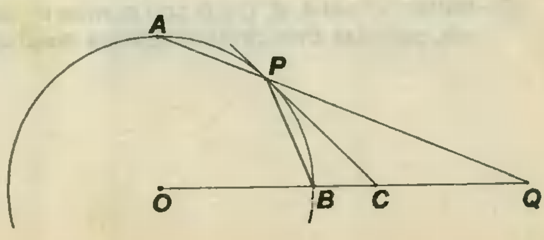
Entonces la $m\measuredangle AEF = \dfrac{90°}{2} = 45°$

En consecuencia, al observar el ⊿ sombreado, se concluye que :

$$x = 45°$$



25.- En la figura dada, O es centro, la tangente $\overline{CP}$ es congruente a $\overline{CQ}$. De acuerdo con estos datos se pide hallar la $m\measuredangle APB$.



Resolución.-

Trazamos el radio $\overline{OP}$, reconociendo que: $\overline{OP} \perp \overline{PC}$ (propiedad)

Sea $m \measuredangle CPQ = \alpha = m \measuredangle CQP$

Luego en el triángulo ⊾ OPC, $m \measuredangle POQ = 90 - 2\alpha$

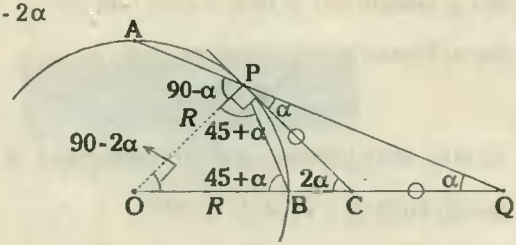
En el Δ OPB, isósceles :

$m \measuredangle OPB = m \measuredangle OBP = 45 + \alpha$

En el Δ OPQ : $m \measuredangle APO = 90 - \alpha$

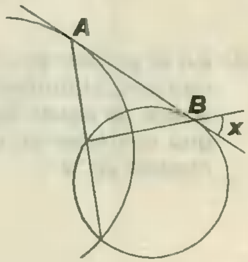
Luego : $m \measuredangle APB = 90 - \alpha + 45 + \alpha$

$\therefore$ $\boldsymbol{m \measuredangle APB = 135°}$



26.- En la figura mostrada : A y B son puntos de tangencia, de dos circunferencias, una de las cuales es mostrada en forma parcial.

Hallar x, si dichas circunferencias son ortogonales.



Resolución.-

Por propiedad : $\overline{OA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{O_1B} \perp \overline{AB}$

Los triángulos AOP y PO_1B son isósceles, luego :

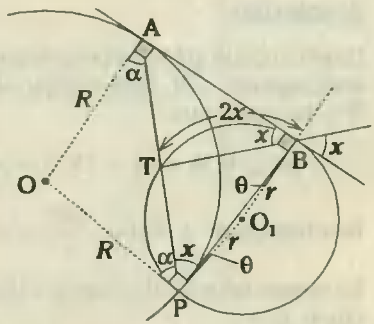
$m \measuredangle APO = m \measuredangle OAP = \alpha$, y, $m \measuredangle PBO_1 = m \measuredangle BPO_1 = \theta$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m \measuredangle APB = \dfrac{m\,\overset{\frown}{TB}}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

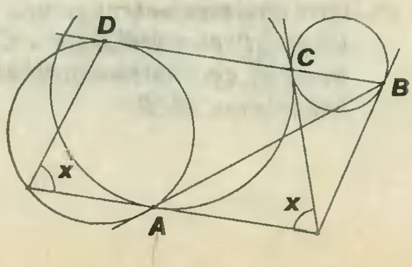
Por Propiedad : $x = \alpha + \theta$

Pero : $\alpha + x + \theta = 90$

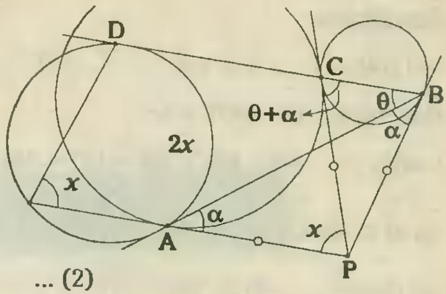
Luego : $2x = 90$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 45°}$



27.- Hallar "x" ; si A, B, C y D son puntos de tangencia, para las tres circunferencias mostradas.



Resolución.-



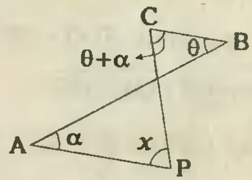
Del gráfico observamos que : $2x + \theta = 180^o$ ... (1)

Por propiedad de tangentes : $PA = PC = PB$

En el Δ APB (isósceles) : $m \measuredangle BAP = m \measuredangle ABP = \alpha$

En el Δ CPB (isósceles) : $m \measuredangle BCP = m \measuredangle CBP = \theta + \alpha$

En la figura interior : $\alpha + x = \alpha + \theta + \theta \Rightarrow \theta = \dfrac{x}{2}$ ... (2)

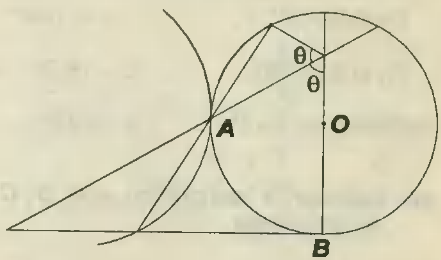


Sustituyendo (2) en (1) : $2x + \dfrac{x}{2} = 180$

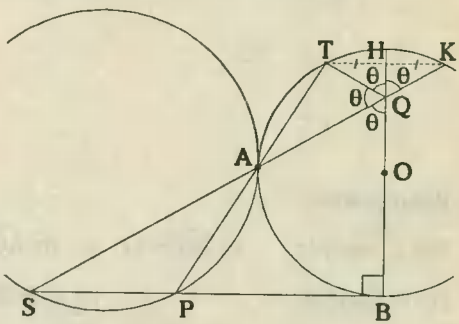
Donde : $\dfrac{5}{2}x = 180$

$$\boldsymbol{x = 72^o}$$

28.- En la figura A y B son puntos de tangencia de dos circunferencias de distinto radio. Calcular θ (si O es centro de una de las circunferencias dadas)



Resolución.-



Por Propiedad : $\overline{SP} \parallel \overline{TK}$, luego : $\overline{HB} \perp \overline{TK}$

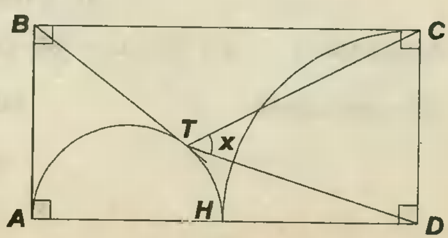
Δ TQK es isósceles ya que QH es mediatriz de $\overline{TK}$

Luego : $m \measuredangle TQH = m \measuredangle HQK = \theta$

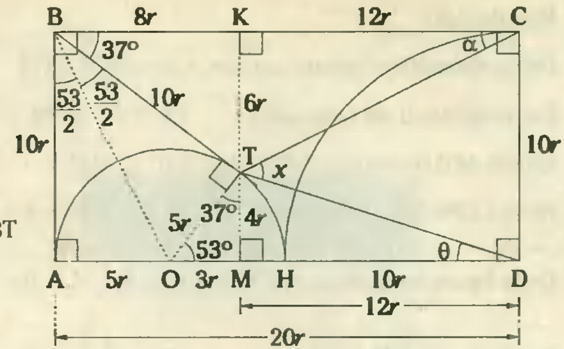
Del gráfico : $3\theta = 180^o$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 60^o}$

29.- Calcular la m ∡ CPD, si : AH = HD; además T es punto de tangencia.



Resolución.-



Del gráfico : $x = \alpha + \theta$ ... (1)

Hacemos : $OA = OT = 5r$

Luego : $AB = CD = AH = HD = 10r$

En el ⊾ BAO : $m\measuredangle ABO = \dfrac{53}{2} = m\measuredangle OBT$

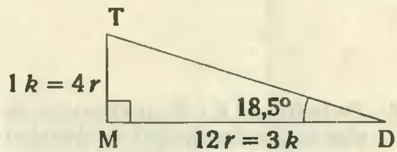
De donde : $m\measuredangle TBC = 37°$

y $m\measuredangle TOD = 53°$

Trazamos por T : $\overline{KM} \perp \overline{BC}$

Luego : ⊾ OMT de 37° y 53° : $TM = 4r$ y $OM = 3r$

En el ⊾ BKT de 37° y 53° : $TK = 6r$

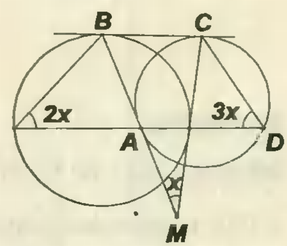


En el ⊾ TKC : $\alpha = 26{,}5°$

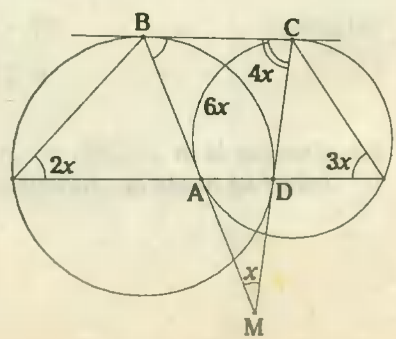
En el ⊾ TMD : $\theta = 18{,}5°$

Sustituyendo en (1) $\mathbf{x = 45°}$

30.- Calcular "x" del gráfico, si A , B , C y D son puntos de tangencia .



Resolución.-



Por ∡ inscrito : $m\,\overset{\frown}{BD} = 4x$ y $m\,\overset{\frown}{AC} = 6x$

Por Propiedad : $m\measuredangle BCD = 180 - 4x$

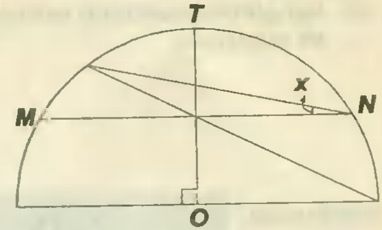
$m\measuredangle ABC = 180 - 6x$

En el Δ MBC : $x + 180 - 4x + 180 - 6x = 180$

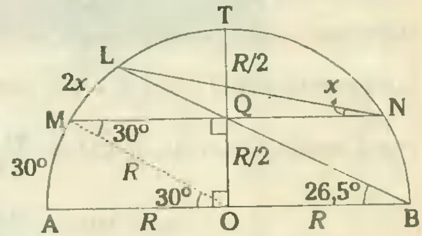
En consecuencia : $180 = 9x$

$\therefore \quad \mathbf{x = 20°}$

31.- En la figura "O" es centro y $\overline{MN}$ es mediatriz de $\overline{OT}$; hallar x .



Resolución.-

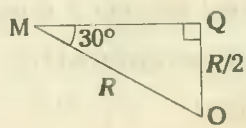


Sean : OA = OM = OB = R

Luego : $OQ = QT = \dfrac{R}{2}$ y $\overline{MQ} \perp \overline{OT}$

En el ⊿ MQO : $m \measuredangle QMO = 30°$

y : $m \measuredangle AOM = 30° = m\,\widehat{AM}$



En el ⊿ QOB : $m \measuredangle QBO = 26{,}5° = \dfrac{30+2x}{2}$

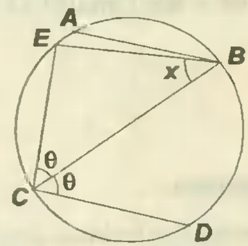
De donde resolviendo :

$$\therefore \quad x = 11{,}5°$$

32.- En la figura se muestra una circunferencia en la que :

$m\,\widehat{AB} = 82°$ y $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$.

Con estos datos se pide calcular x



Resolución.-

Dado que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, se puede establecer que :

$m \measuredangle ABC = m \measuredangle BCD = \theta$ (alternos internos)

Por ∡ inscrito : $m\,\widehat{EC} = 2x$

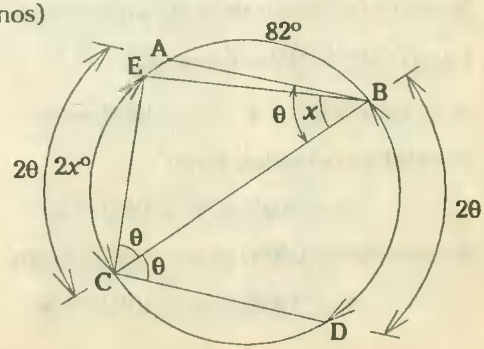
Ahora : $2\theta = 2x + m\,\widehat{AE}$

También : $2\theta = m\,\widehat{AE} + 82°$

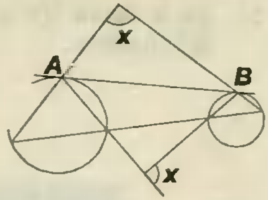
Igualando : $2x + m\,\widehat{AE} = m\,\widehat{AE} + 82°$

De donde : $2x = 82°$

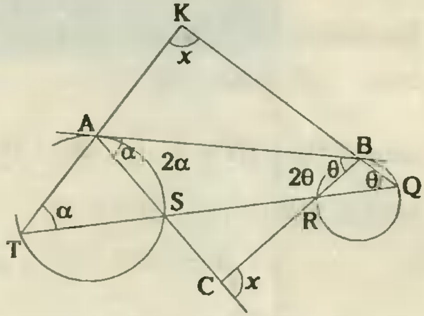
$$\therefore \quad x = 41°$$



33.- Del gráfico mostrado calcular "x", si A y B son puntos de tangencia.



Resolución.-



Hacemos : $m\measuredangle T = \alpha$ y $m\measuredangle Q = \theta$

Luego en el Δ TKQ : $\alpha + \theta + x = 180$ ... (1)

Por $\measuredangle$ semi-inscrito : $m\measuredangle BAS = \dfrac{m\overset{\frown}{AS}}{2} = \alpha$

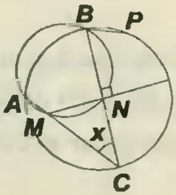
$$m\measuredangle ABC = \dfrac{m\overset{\frown}{RB}}{2} = \theta$$

En el Δ ABC, por $\measuredangle$ exterior : $x = \alpha + \theta$ ... (2)

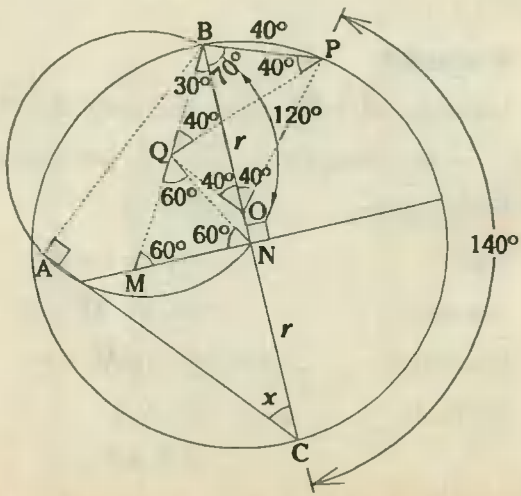
Sustituyendo (2) en (1) : $x + x = 180$

Luego : $2x = 180$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 90^\circ}$

34.- En la figura mostrada, $m\overset{\frown}{BN} = 120^\circ$, $m\overset{\frown}{BP} = 40^\circ$ y BP = MN. Calcular : x



Resolución.-



Del gráfico deducimos que : $m\measuredangle BAC = 90^\circ$ y $m\measuredangle BMN = 60^\circ$ con lo cual $\overline{BM}$ y $\overline{BC}$ son diámetros de las circunferencias.

Sean O y Q centros de la circunferencias

Luego : MQ = MN = QN = BQ

$m\measuredangle QBN = 30^\circ$ y $m\measuredangle BOP = 40^\circ$

El Δ QBP es isósceles, luego :

$$m\measuredangle BQP = m\measuredangle BPQ = 40^\circ$$

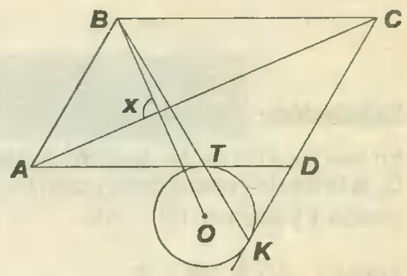
El cuadrilátero QBPO es inscriptible luego :

$$m\measuredangle QOB = m\measuredangle BPQ = 40^\circ$$

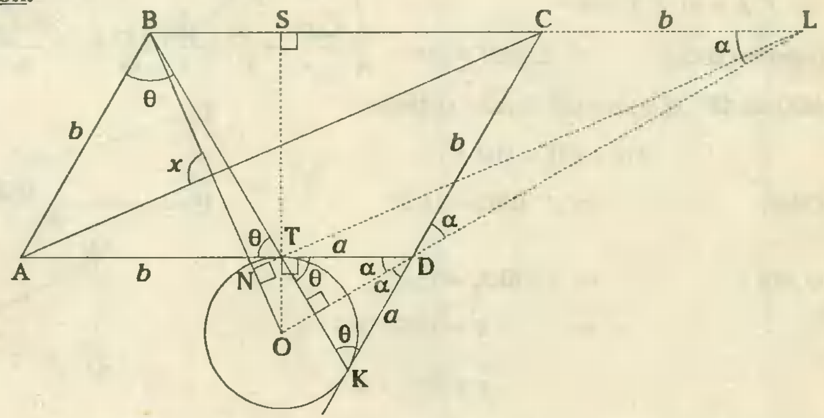
Para el Δ MBC, $\overline{QO}$ es base media, luego $\overline{QO} \parallel \overline{MC}$

$$\therefore \qquad x = 40^o$$

35.- ***En la figura, ABCD es un romboide, T y K son puntos de tangencia y O es centro. Demostrar que x = 90°***



Resolución.-



El Δ TDK es isósceles : TD = DK = a

El Δ BAT es isósceles : AB = AT = b ... (∡ ABT ≅ ∡ TKD alternos internos)

Prolongamos $\overline{OD}$ hasta intersectar a la prolongación de $\overline{BC}$ en "L", luego :

$$\overline{OD} \perp \overline{TK} \text{ y } CD = CL = b$$

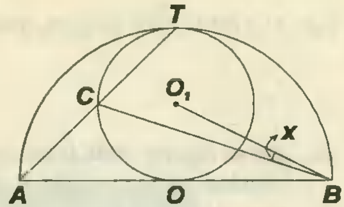
Ya que $\overline{OT} \perp \overline{AD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ⇒ $\overline{OS} \perp \overline{BC}$

Para el Δ OBL "T" es ortocentro ⇒ $\overline{LN} \perp \overline{OB}$

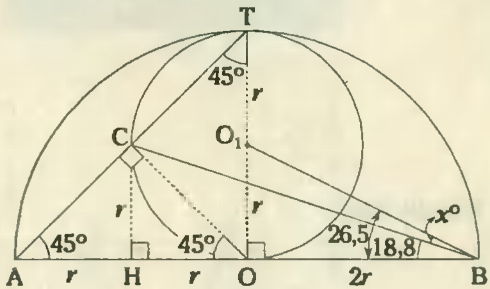
El cuadrilátero ACLT es un romboide luego : $\overline{AC} \parallel \overline{LN}$

$$x = 90^o$$

36.- Del gráfico; hallar x (O y O_1 son centros)



<u>Resolución</u>.-



En las circunferencias tangentes interiores O y O_1 la línea de centros pasa por el punto de tangencia T y además $\overline{OT} \perp \overline{AB}$

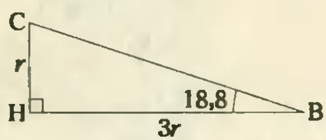
Luego : $OT = OA = 2r$

y $m\measuredangle A = m\measuredangle T = 45°$

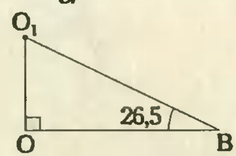
En la circunferencia O_1 : $m\measuredangle OCT = 90°$

En el ⊾ ACO de 45°, al trazar $\overline{CH} \perp \overline{AO}$; se tiene :

$$AH = CH = HO = r$$



En el ⊾ CHB : $m\measuredangle HBC = 18,5°$



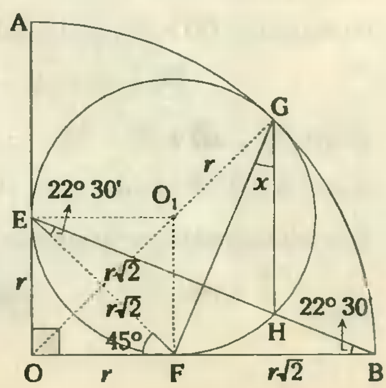
En el ⊾ O_1OB : $m\measuredangle OBO_1 = 26,5°$

$\Rightarrow$ $x = 26,5 - 18,5$

$\therefore$ $\boxed{x = 8°}$

37.- La circunferencia inscrita en el cuadrante AOB es tangente a $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overset{\frown}{AB}$ en los puntos E, F y G respectivamente. $\overline{BE}$ intersecta a la circunferencia en H. Calcular la medida del ángulo FGH.

<u>Resolución</u>.-



Sea r el radio de la circunferencia menor O_1

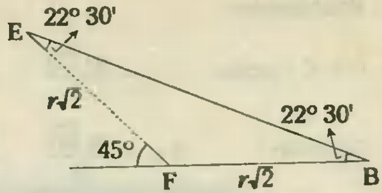
Luego en el cuadrado OEO_1F :

$$EF = OO_1 = r\sqrt{2}$$

y $m\measuredangle EFO = 45°$

En el cuadrante AOB : $OG = OB$

De donde : $r\sqrt{2} + r = r + FB$



$\Rightarrow$ FB = $r\sqrt{2}$

Δ EFB es isósceles

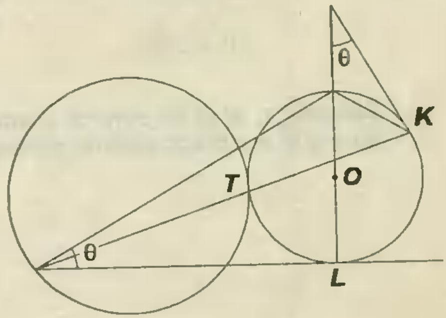
$\Rightarrow$ $m\measuredangle$ FEB = 22° 30'

Finalmente por $\measuredangle$ inscrito .

$\therefore$ **x = 22° 30'**

38.- En la figura T , K y L son puntos de tangencia .

Calcular θ (O es centro)



<u>Resolución</u>.-

Por Propiedad : $\overline{AK}$ // $\overline{SL}$

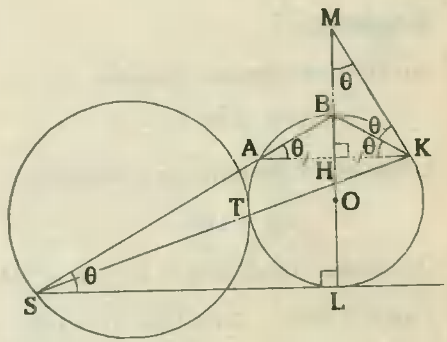
Luego : $m\measuredangle$ BAK = θ y $\overline{ML}$ es mediatriz de $\overline{AK}$

Con lo cual se tiene : $m\measuredangle$ BAK = $m\measuredangle$ BKA = θ

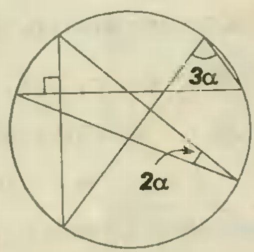
Por $\measuredangle$ seminscrito : $m\measuredangle$ MKB = θ

En el ⊿ MHK : θ + θ + θ = 90

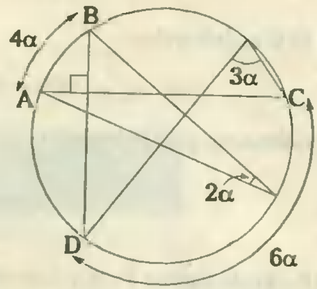
$\therefore$ **θ = 30°**



39.- A partir del gráfico mostrado, se pide calcular el valor de α .



Resolución.-



Por ∡ inscrito : $3\alpha = \dfrac{m\widehat{CD}}{2} \Rightarrow m\widehat{CD} = 6\alpha$

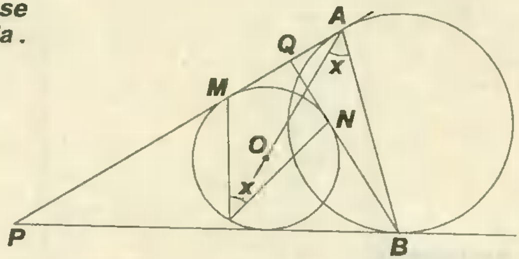
También : $2\alpha = \dfrac{m\widehat{AB}}{2} \Rightarrow m\widehat{AB} = 4\alpha$

Por ∡ interior : $90 = \dfrac{4\alpha + 6\alpha}{2}$

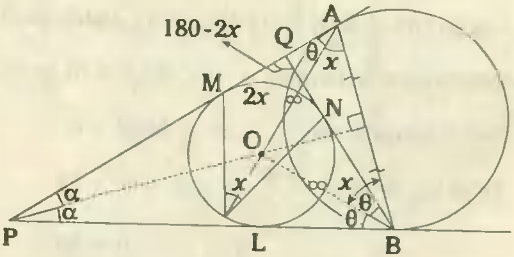
Donde : $90 = 5\alpha$

$\therefore \quad \alpha = 18°$

40.- Calcular x, si O es centro, y además se sabe que A y B son puntos de tangencia .



Resolución.-



Por Propiedad de las tangentes :

$PA = PB$

Luego por el Teorema de la mediatriz :

$OA = OB$

De donde : $m∡OBA = x$ y $m∡OAP = \theta$

Y en el Δ PAB : $2\alpha + 2\theta + 2x = 180$

$\Rightarrow \quad \alpha + \theta + x = 90 \quad ...(1)$

En la circunferencia de centro "O", se verifica que :

$m\widehat{MN} = 2x$, y , $m∡MQN = 180 - 2x$

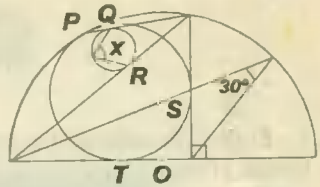
Δ PQB : $2\alpha + 2\theta + 180 - 2x = 180$

$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = x \quad ...(2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $x + x = 90$

$\therefore \quad x = 45°$

41.- De la figura calcular x, si P, Q, R, S y T son puntos de tangencia.



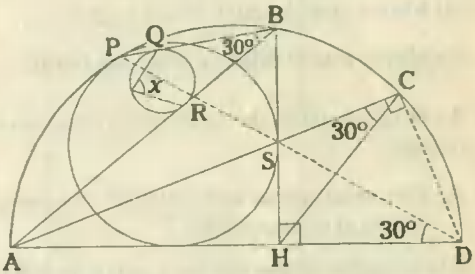
Resolución.-

Se demuestra que los puntos P, S, y D son colineales, se une "C" con "D" $\Rightarrow$ $m\measuredangle ADC = 90°$

El cuadrilátero SHDO es inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle SCH = m\measuredangle SDH = 30°$

Además : $m\measuredangle ADP = m\measuredangle ABP = 30°$

Ahora aplicaremos la relación (8.9)



$$m\,\overset{\frown}{QR} + 30° = 180°$$

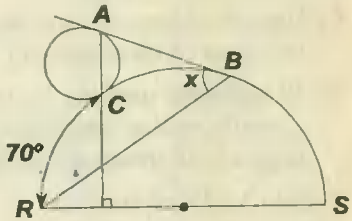
$$m\,\overset{\frown}{QR} = 150°$$

Por ángulo inscrito : $x = \dfrac{m\,\overset{\frown}{QR}}{2} = \dfrac{150}{2} = 75°$

$\therefore$ $\quad x = 75°$

42.- Según el gráfico, calcular el valor de "x".

Si $m\,\overset{\frown}{RC} = 70°$, siendo A, B y C puntos de tangencia.



Resolución.-

Se une "B" con "S" $\Rightarrow$ $m\measuredangle RBS = 90°$ (PROP)

Por $\measuredangle$ semi-inscrito : $m\,\overset{\frown}{BR} = 2x$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle RSB = x$

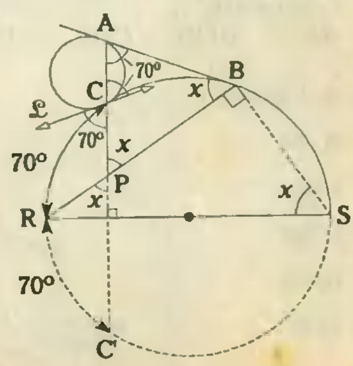
Del gráfico : $m\,\overset{\frown}{RC} = m\,\overset{\frown}{RC'} = 70°$

Luego por $\measuredangle$ semi-inscrito : $m\measuredangle C = 70°$

Además : $m\measuredangle A = 70°$ (PROP)

En el Δ PAB : $x + x + 70 = 180°$

$\therefore$ $\quad x = 55°$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Si dos circunferencias son exteriores, entonces el segmento que une sus centros es :

A) Menor que la suma de sus radios.

B) Igual a la diferencia de sus radios.

C) Menor que el radio mayor.

D) Mayor que la suma de sus radios.

E) Mayor que la diferencia de sus radios.

2.- ¿Cuál o cuáles de las afirmaciones son correctas?

A) Circunferencias concéntricas son las que tienen el mismo centro.

B) El segmento que une los centros de dos circunferencias interiores es mayor que la diferencia de sus radios.

C) Dos circunferencias son secantes cuando se cortan en un solo punto

D) El segmento que une los centros de dos circunferencias tangentes interiores es igual a la diferencia de sus radios.

E) Solo A y D son correctas

3.- En un triángulo rectángulo, los inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC suman 12. Siendo $\overline{BH}$ la altura relativa a la hipotenusa, calcular BH.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

4.- Calcular x.

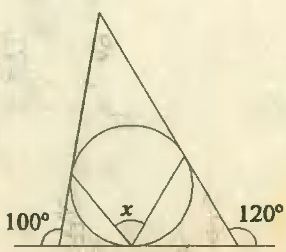
A) 30°

B) 40°

C) 60°

D) 70°

E) 75°



5.- Se tiene un triángulo ABC, en el cual la circunferencia que pasa por los puntos medios de sus tres lados pasa también por el vértice B. Calcular la $m\sphericalangle$ B.

A) 60° B) 70° C) 80° D) 90° E) 120°

6.- En la figura, si $m\ \widehat{AB} = 40°$. Calcular $x°$.

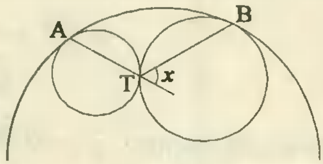
A) 70°

B) 45°

C) 40°

D) 50°

E) 60°



7.- En un triángulo rectángulo un cateto mide 28 y la suma de las longitudes de su inradio y circunradio es de 20. Hallar la longitud del otro cateto.

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

8.- En la figura dada calcular $x°$, si AB = BC ; $m\sphericalangle$ BPQ = 50° y $m\sphericalangle$ BCQ = 20°.

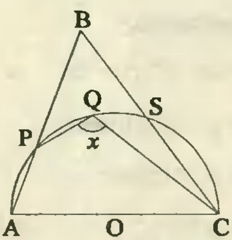
A) 100°

B) 110°

C) 140°

D) 150°

E) 120°



9.- Dado un triángulo de lados cuyas longitudes son 8; 15 y 17. Hallar la longitud del radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 4

10.- En la figura, hallar AP, si AB = 5 y BC = 3

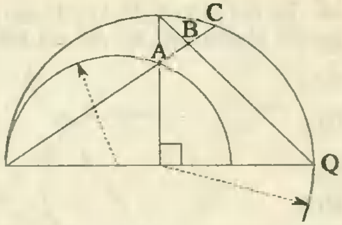
A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

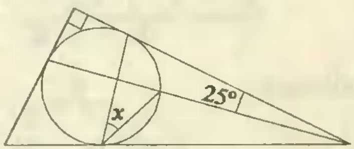
E) 15



11.- Se tiene un pentágono convexo ABCDE circunscrito a una circunferencia.
Si : $AB + CD + AE = 11$ y $BC + ED = 7$, hallar la longitud de la tangente trazada desde A a dicha circunferencia .

A) 2 B) 3 C) 4 D) 2,5 E) 3,5

12.- En la figura mostrada calcular $x°$.



A) 25° B) 20° C) 30° D) 50° E) 35°

13.- Las circunferencias ex-inscritas a los catetos de un triángulo tienen radios que miden 6 y 8. Hallar la longitud de la hipotenusa del triángulo.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 25

14.- En la figura, calcular : $a° + b° + c°$.

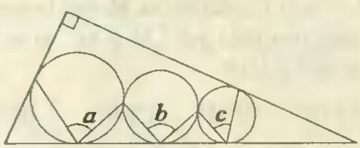
A) 180°

B) 225°

C) 60°

D) 50°

E) 75°



15.- En la figura, si $m\ \widehat{APC} = 240°$, calcular $x°$.

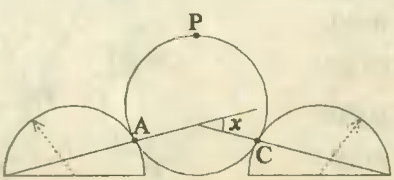
A) 45°

B) 60°

C) 75°

D) 30°

E) 36°



16.- Hallar R, si $BM = 2$ y $BN = 6$

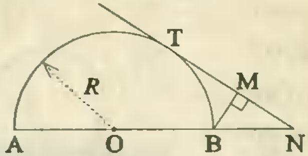
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



17.- En la figura "O" es el centro de la circunferencia y $AM = FM$, siendo M el punto de tangencia; calcular α.

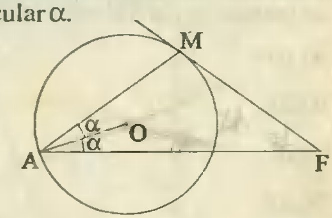
A) 19°

B) 15°

C) 25°

D) 18°

E) 20°



18.- En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$, se inscribe el triángulo ABC; se une los puntos medios de $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ con los vértices C y A que se intersectan en los puntos E y F con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, luego se traza $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, si : $HG = 4m$.

A) $1m$ B) $2m$ C) $3m$ D) $4m$ E) $8m$

19.- Calcular x, si $BC = BD = AB$.

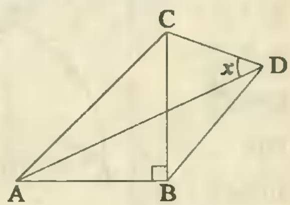
A) 40°

B) 47°

C) 45°

D) 60°

E) 30°



20.- Del gráfico, hallar x, si $m\ \widehat{MN} = 80°$, $MQ = QN$ y "O" es centro.

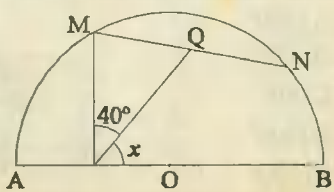
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 40°

E) 50°



21.- Calcular "x".

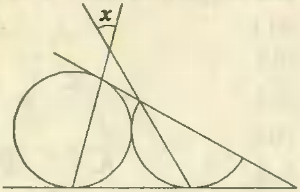
A) 45°

B) 60°

C) 30°

D) 53°

E) 75°



22.- En la figura "Q" es centro, T es un punto de tangencia y $m\ \overset{\frown}{TC} = 80°$. Calcular $x°$.

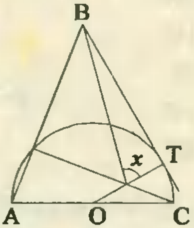
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 40°

E) 50°



23.- Calcular x, si O y O_1 son centros.

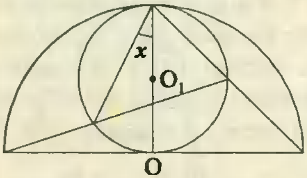
A) 22° 30'

B) 18° 30'

C) 26° 30'

D) 30°

E) 15°



24.- Calcular PH, si $AM = 8\sqrt{2}$

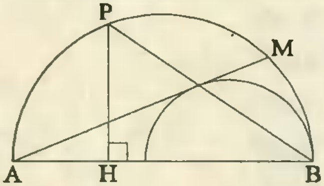
A) 4

B) $2\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) 8

E) $3\sqrt{2}$



25.- Del gráfico mostrado, calcular la $m\ \overset{\frown}{DEF}$, si $m\ \overset{\frown}{ABC} = 100°$

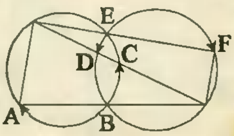
A) 200°

B) 150°

C) 90°

D) 100°

E) 120°



26.- En la figura F, M, G y H son puntos de tangencia. Hallar MC, si : AF = 4, FB = 6 y AM = 8.

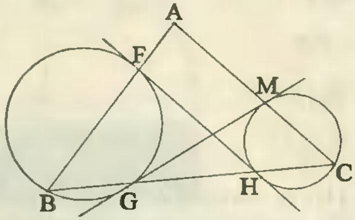
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



27.- Del gráfico calcular θ, si T, Q, K y L son puntos de tangencia.

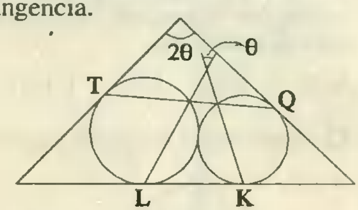
A) 30°

B) 36°

C) 45°

D) 53°

E) 60°



28.- Calcular x.

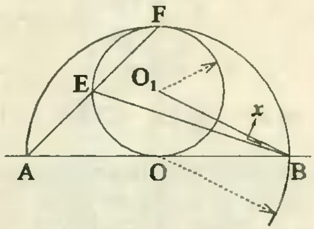
A) 1°

B) 9°

C) 15°

D) 14°

E) 8°



29.- En una circunferencia de centro "O" se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sean M y N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AC}$ respectivamente, $\overline{MO}$ prolongado intersecta en L a la circunferencia. Hallar la medida del ángulo formado por $\overline{LN}$ y $\overline{AC}$, si $m\ \overset{\frown}{AB} = 100°$ y $m\ \overset{\frown}{AC} = 120°$

A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

30.- Calcular "x"; si P, R, S, T y M son puntos de tangencia.

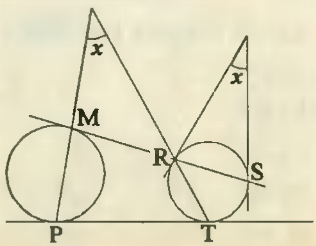
A) 18°

B) 30°

C) 45°

D) 60°

E) 36°



31.- En la figura, calcular α si $m\measuredangle$ MPF = 80

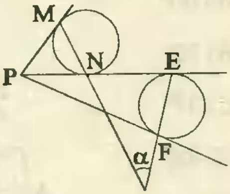
A) 20

B) 25

C) 30

D) 40

E) 50



32.- En la figura : A, B, C, D, M y N son puntos de tangencia. Calcular x, si $m\,\overset{\frown}{AB} - m\,\overset{\frown}{CD} = 110$.

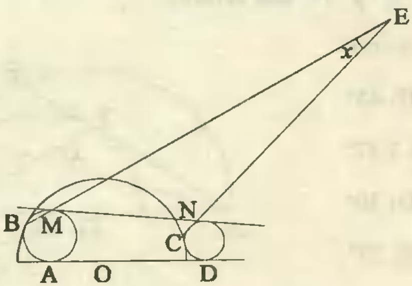
A) 35°

B) 45°

C) 55°

D) 65°

E) 70°



33.- En la figura : M, N y L son puntos de tangencia, calcular $m\measuredangle$ PBN

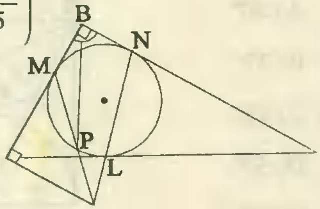
A) *Arc* sen $\left(\dfrac{6\sqrt{82}}{205}\right)$

B) 60°

C) 63° 30'

D) 72°

E) 75°



34.- En la figura : MT = TN, LG = GP y SK = KQ. Calcular x.

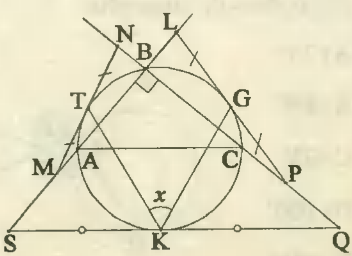
A) 30°

B) 60°

C) 75°

D) 45°

E) 53°



35.- Si P, Q, M y N son puntos de tangencia y $\alpha + \theta = 100$. Calcular "x"

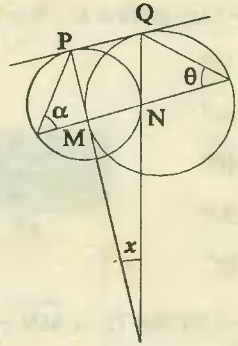
A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

E) 15



36.- En la figura : AOB es un cuadrante y los cuadriláteros OMNL y LTQK son cuadrados. Calcular x.

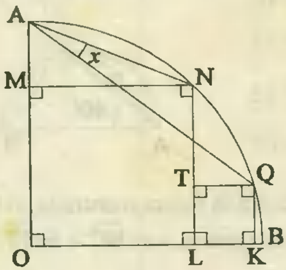
A) 5°

B) 10°

C) 15°

D) 18°

E) 20°



37.- En la figura : AM = MB y $m\,\overset{\frown}{CD} = 80$. Calcular "x"

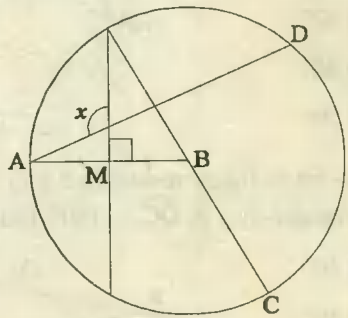
A) 100

B) 110

C) 115

D) 120

E) 150



38.- A partir de un punto P, exterior a una circunferencia se trazan las tangentes perpendiculares $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, luego se traza la secante PMN de modo que $m\,\overset{\frown}{AN} = 2\,m\,\overset{\frown}{AM}$. Calcular la $m\measuredangle$ NPB.

A) 60° B) 75° C) 53° D) 45° E) 63° 30'

39.- Del gráfico $\alpha - \theta = 20°$; hallar x.

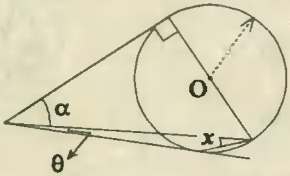
A) 10°

B) 20°

C) 40°

D) 30°

E) 36°



40.- Calcular α, si $\widehat{MN} = 80°$; $\widehat{NC} = 120°$ ($\overline{AB} \Rightarrow$ diámetro)

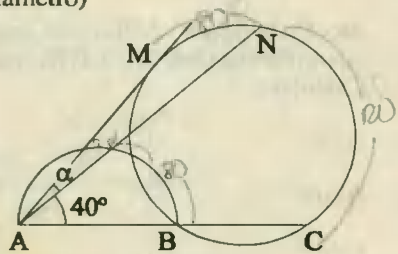
A) 20

B) 10

C) 15

D) 12

E) 18



41.- En la figura mostrada, si P y Q son puntos de tangencia y $m\ \widehat{BC} + m\ \widehat{FE} = 130°$, hallar x.

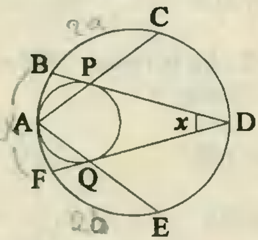
A) 20°

B) 25°

C) 30°

D) 80°

E) 50°



42.- En la figura mostrada P y Q son puntos de tangencia y $m\ \widehat{QC} = 140°$. Hallar x.

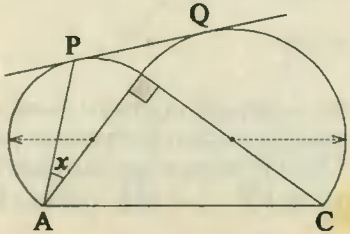
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 35°

E) 25°



43.- En la figura, AB = 2 MN. Calcular "x".

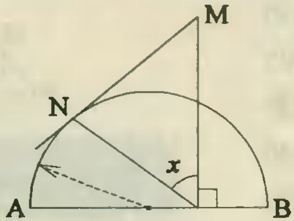
A) 60°

B) 75°

C) 37°

D) 45°

E) 53°



44.- Hallar "x", si $m\ \widehat{BM} = m\ \widehat{MC}$; donde "O" y "N" son centros.

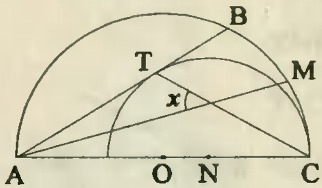
A) 60°

B) 45°

C) 37°

D) 30°

E) 53°



45.- Si ABCD es un cuadrado. Calcular "x", siendo "M" y "N" puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.

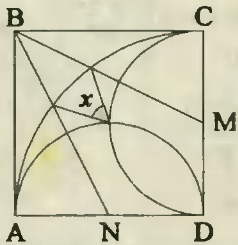
A) 30°

B) 37°

C) 45°

D) 53°

E) 60°



46.- Calcular "x" si $m\ \widehat{AC} = 80°$. Siendo A, B y C puntos de tangencia

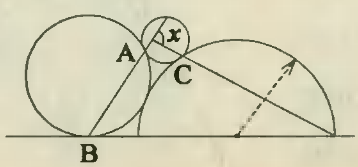
A) 75°

B) 85°

C) 95°

D) 100°

E) 105°



CAP. 9

circunferencia II

9.1 TEOREMA DE PONCELET

En todo triángulo rectángulo la suma de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa más la medida del diámetro de la circunferencia inscrita es el triángulo rectángulo.

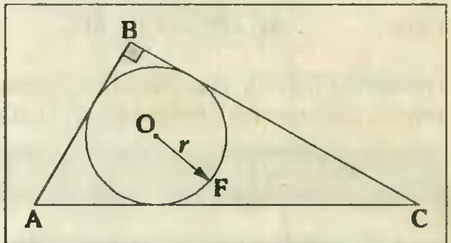


Fig. 9.1

Si : OF = r, es el Radio de la circunferencia inscrita (Inradio)

Entonces se cumple que :

$$AB + BC = AC + 2r \qquad \dots (9.1)$$

9.2 CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

Es aquel cuadrilátero cuyos lados son tangentes a una misma circunferencia.

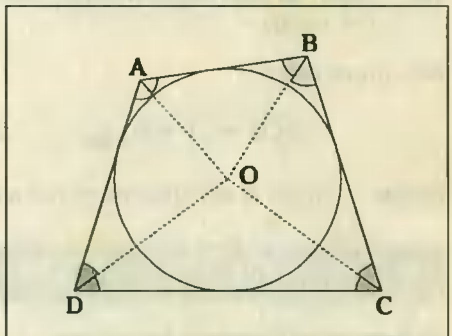


Fig. 9.2

ABCD: Es un cuadrilátero circunscrito como el mostrado en la *Fig*. 9.2, en el que se cumple :

1) Teorema de Pithot :

$$AB + CD = AD + BC \qquad \dots (9.2)$$

2) Las bisectrices de sus cuatro ángulos interiores son concurrentes en el centro de la circunferencia inscrita.

OBSERVACIÓN :

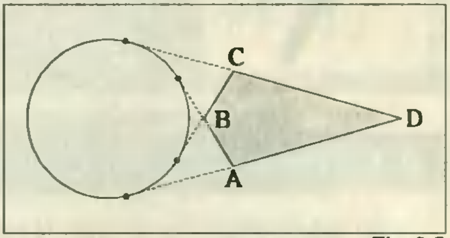
Un cuadrilátero será llamado circunscriptible, si puede circunscribirse a una circunferencia; para que esto suceda, dicho cuadrilátero deberá cumplir con cualquiera de las dos propiedades anteriormente señaladas.

9.3 CUADRILÁTERO EX-INSCRITO

Se llama así al cuadrilátero cuyas prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a una misma circunferencia.

ABCD: Cuadrilátero ex-inscrito

En todo cuadrilátero ex-inscrito se cumple el teorema de Steiner, el cual establece que :



Osea : $$AD - BC = CD - AB \qquad ...(9.3)$$

Fig. 9.3

OBSERVACION: Un cuadrilátero se llama ex-inscriptible si se puede ex-inscribir a una circunferencia; para que esto ocurra dicho cuadrilátero deberá cumplir con el teorema de Steiner.

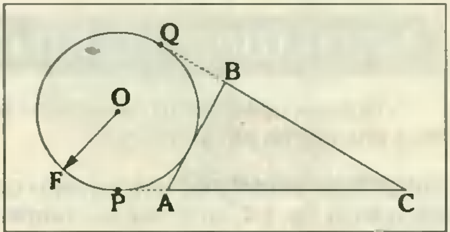
9.4 CIRCUNFERENCIA EX-INSCRITA A UN TRIÁNGULO

Es aquella circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados de un triángulo.

La circunferencia de centro "O" es la circunferencia ex-inscrita al triángulo ABC y referente a $\overline{AB}$.

$\overline{OF}$: Radio de la circunferencia ex-inscrita (ex-radio)

Se cumple que :



$$CQ = CP = p_{\Delta\ ABC} \qquad ...(9.4)$$

Fig. 9.4

Donde : "p" es el semiperímetro del Δ ABC

9.5 TANGENTES COMUNES

A) Tangentes Comunes Interiores

Dos tangentes comunes interiores a dos circunferencias son congruentes :

$$AB = CD$$

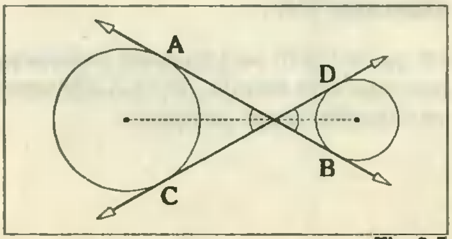


Fig. 9.5

B) Tangentes Comunes Exteriores

Dos tangentes comunes exteriores a dos circunferencias son congruentes :

$$AB = CD$$

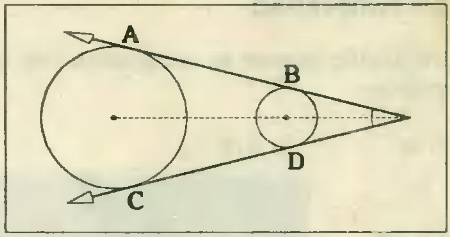


Fig. 9.6

9.6 CUADRILÁTERO INSCRITO CÍCLICO

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.

ABCD: Cuadrilátero inscrito o Cuadrilátero Cíclico

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$: Diagonales

En todo cuadrilátero inscrito se cumplen las siguientes propiedades :

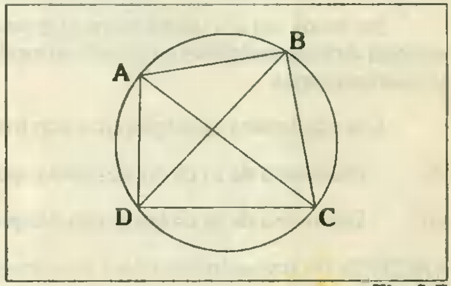


Fig. 9.7

1RA PROPIEDAD

Los ángulos opuestos son suplementarios.

$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = 180$

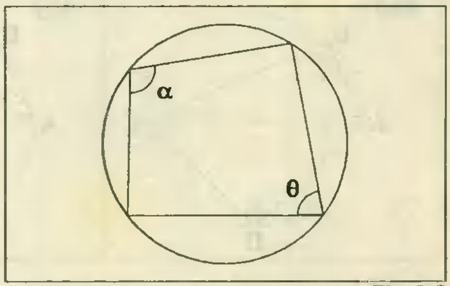


Fig. 9.8

2DA PROPIEDAD

Las diagonales forman con los lados opuestos ángulos congruentes.

$\Rightarrow \quad \alpha = \theta$

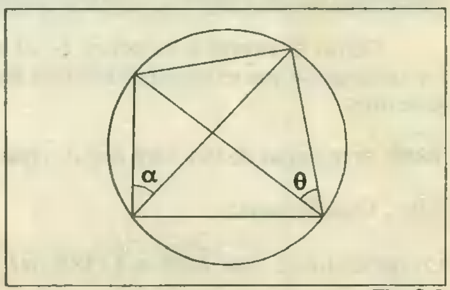


Fig. 9.9

3RA PROPIEDAD

Un ángulo interior es congruente con el opuesto exterior.

$\Rightarrow \qquad \alpha = \theta$

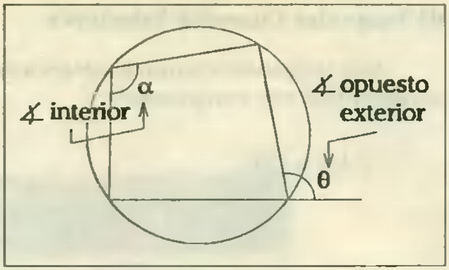


Fig. 9.10

9.7 CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Se llama así al cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia, para que esto suceda dicho cuadrilátero deberá cumplir con cualquiera de las tres propiedades anteriormente mencionadas.

Los siguientes cuadriláteros son inscriptibles importantes.

$\overline{AC}$: Diámetro de la circunferencia que pasaría por sus vértices. *Fig.* 9.11a

$\overline{AD}$: Diámetro de la circunferencia que pasaría por sus vértices. *Fig.* 9.11b

ABCD : Es un trapecio isósceles y es inscriptible porque : $\alpha + \theta = 180$ *Fig.* 9.11c

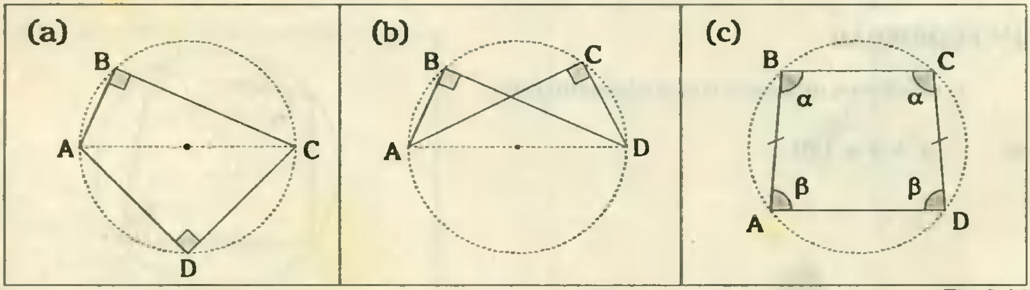


Fig. 9.11

9.8 ARCO CAPAZ

Como el nombre lo indica es el arco de la circunferencia que es capaz de inscribir ángulos congruentes.

$\overset{\frown}{AMB}$: Arco capaz de todos los ángulos que miden "α"

$\overline{AB}$: Cuerda capaz

Cumpliéndose : $m\,\overset{\frown}{AMB} = 2\,(180 - \alpha)$ ... (9.5)

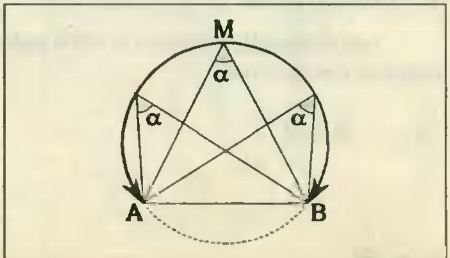


Fig. 9.12

1) Los puntos A, E, F, G y B son concíclicos, si pertenecen a una misma circunferencia. *Fig.* 9.13a.
2) Si la cuerda capaz $\overline{AB}$ es diámetro, entonces se cumple que : $\alpha = 90$ *Fig.* 9.13b

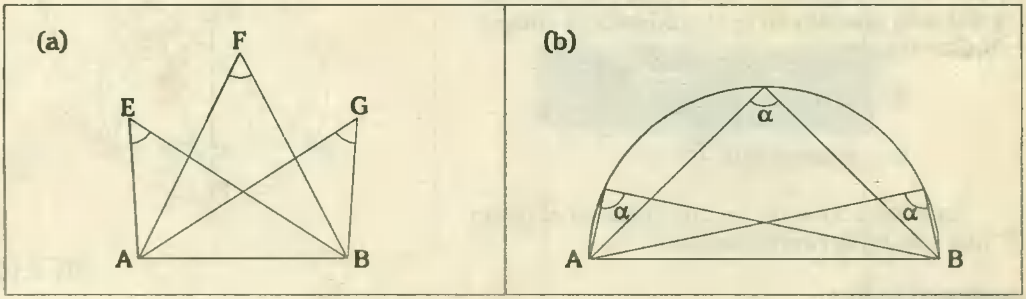


Fig. 9.13

9.9 TEOREMA DE SIMSON

«Si desde un punto situado en una circunferencia circunscrita a un triángulo se trazan perpendiculares a sus tres lados, entonces los pies de estas perpendiculares estarán contenidos en una misma línea recta llamada recta de Simson»

"P" es un punto aferente.

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PN} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PT} \perp \overline{AC}$ se cumple que M, N y T pertenecen a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ (Recta de Simson).

Además si prolongamos $\overline{PT}$ hasta intersectar a la circunferencia en F, se cumple que :

$$\overline{BF} \,//\, \mathscr{L}$$

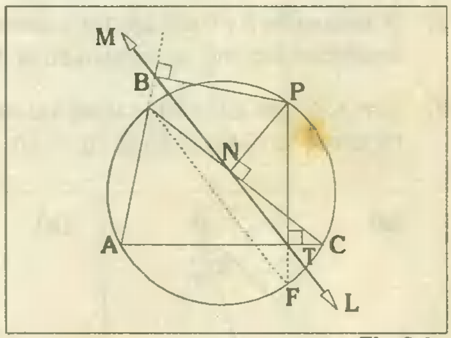


Fig. 9.14

9.10 TEOREMA DE NAGEL

En todo triángulo se cumple que el segmento que une los pies de dos alturas es perpendicular al diámetro de la circunferencia circunscrita trazada por el tercer vértice.

$\overline{BF}$: Diámetro de la circunferencia circunscrita al Δ ABC

$\overline{AN}$ y $\overline{CN}$: Alturas

Se cumple : $\overline{MN} \perp \overline{BF}$

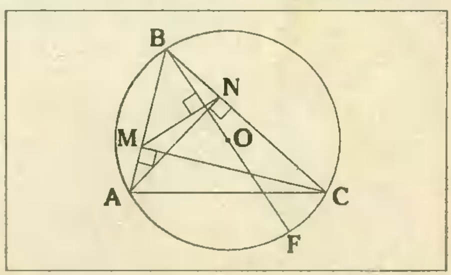


Fig. 9.15

9.11 TEOREMA

«En todo triángulo se cumple que la bisectriz de uno de sus ángulos se intersecta con la mediatriz del lado opuesto en la circunferencia circunscrita al triángulo»

$\overline{BF}$: Bisectriz del ángulo B

$\mathfrak{L}$: Mediatriz de $\overline{AC}$

La intersección de las dos líneas es el punto "F" que está en la circunferencia.

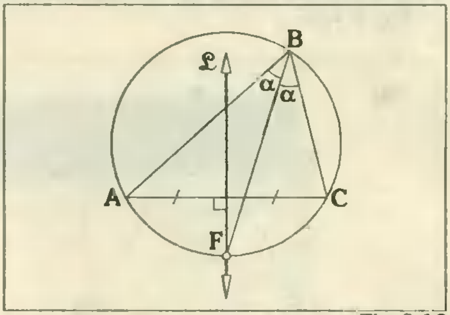


Fig. 9.16

OBSERVACIONES:

1) Si $m\measuredangle A < 90$ y $m\measuredangle C > 90$, entonces el cuadrilátero ABCD será inscriptible, tal como el mostrado en la *Fig.* 9.17a

2) Si los ángulos A y C son agudos u obtusos los dos, el cuadrilátero ABCD será un trapezoide simétrico tal como se observa en la *Fig.* 9.17b

3) Si $m\measuredangle A = m\measuredangle C = 90$, entonces el cuadrilátero ABCD será un trapezoide simétrico inscriptible tal como se observa en la *Fig.* 9.17c

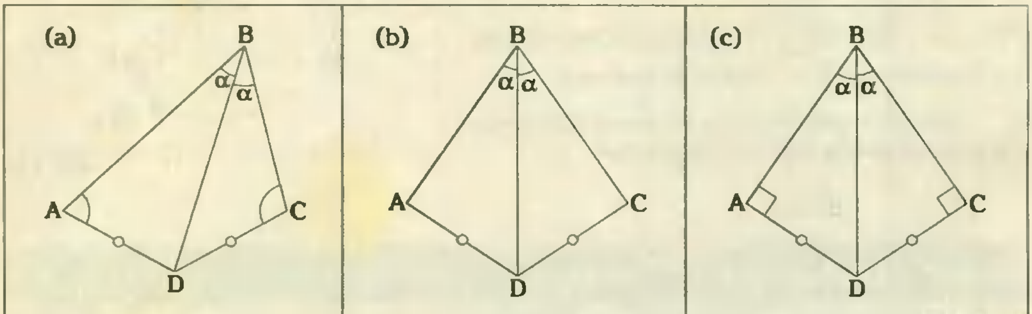
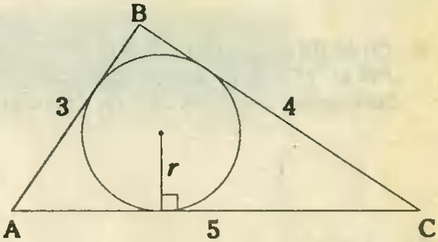


Fig. 9.17

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1ra PARTE)

1.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4, calcular el valor del inradio.

<u>**Resolución.-**</u>



Sea "r" la longitud del inradio siendo: AB = 3 y BC = 4

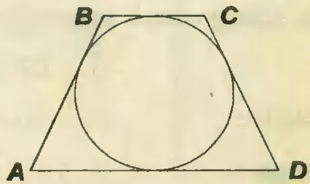
Entonces la hipotenusa medirá : AC = 5

Finalmente empleando el Teorema de Poncelet :

$$3 + 4 = 5 + 2r$$

$$\therefore \quad r = 1$$

2.- Dada la siguiente figura, donde el perímetro del cuadrilátero ABCD es 100. Calcular AD, si BC = 15.



<u>**Resolución.-**</u>

Por Pithot en el cuadrilátero ABCD, tenemos : AB + CD = BC + AD ... (1)

También por dato : AB + BC + CD + AD = 100 ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : BC + AD + BC + AD = 100

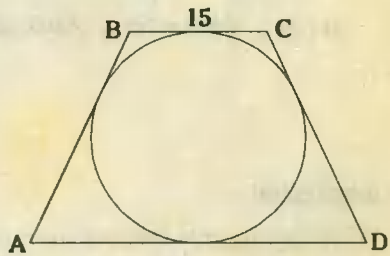
Donde : 2 (BC + AD) = 100

Ahora : BC + AD = 50

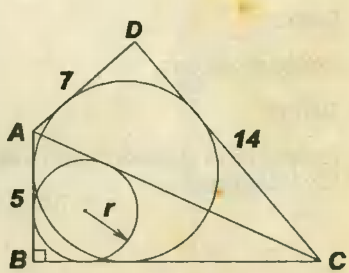
Pero por dato : BC = 15

Entonces : 15 + AD = 50

$$\therefore \quad AD = 35$$



3.- En la figura mostrada, calcular "r" si AB = 5, AD = 7 y CD = 14.



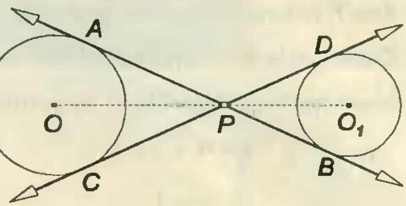
Resolución.-

Por Pithot en el cuadrilátero ABCD : $5 + 14 = 7 + BC$ $\Rightarrow$ $BC = 12$

⊾ ABC es notable : $AC = 13$

Luego por Poncelet en el ⊾ ABC : $5 + 12 = 13 + 2r$ $\therefore$ $\boldsymbol{r = 2}$

4.- En la figura mostrada AB = 8 y PC = 5, calcular PB si "P" es un punto exterior a ambas circunferencias, además O y O_1 son centros.



Resolución.-

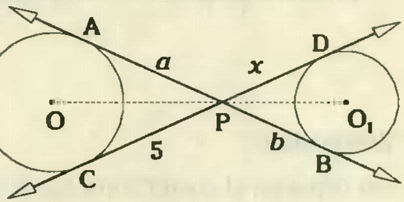
De acuerdo con la propiedad 9.5A, se puede establecer que :

$$CD = AB$$

Donde : $CD = 5 + x$

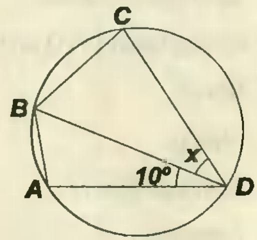
Luego : $5 + x = 8$

Entonces : $\boldsymbol{x = 3}$



5.- En el cuadrilátero ABCD mostrado, se pide calcular "x".

si : m ∡ CBD = 2m ∡ ABD, además m $\overset{\frown}{AD}$ = 100



Resolución.-

Por ángulo inscrito reconocemos que :

$$m\measuredangle ABD = 50°$$

Dato : $m\measuredangle CBD = 2\,m\measuredangle ABD$

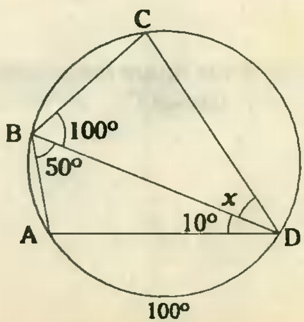
Reemplazando : $m\measuredangle CBD = 2\,(50°)$

Donde : $m\measuredangle CBD = 100°$

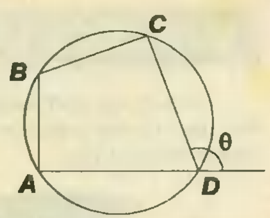
Ahora como el cuadrilátero ABCD es inscriptible por item 9.6.1, tenemos :

$$x + 10° + 50° + 100° = 180°$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 20°}$



6.- Dado el cuadrilátero inscrito ABCD, donde la m $\widehat{ABC}$ = 140º, calcular θ



Resolución.-

Aprovecharemos este ejercicio para demostrar que : $m\measuredangle ABC = \theta$

Sabemos que : $m\,\widehat{ABC} + m\,\widehat{ADC} = 360^\circ$

Reemplazando : $140^\circ + m\,\widehat{ADC} = 360^\circ$

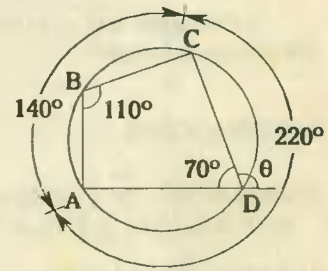
Donde : $m\,\widehat{ADC} = 220^\circ$

Ahora por ángulo inscrito : $m\measuredangle ABC = \dfrac{220^\circ}{2}$

En consecuencia : $m\measuredangle ABC = 110^\circ$

Finalmente en el vértice D, se tiene : $70^\circ + \theta = 180^\circ$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 110^\circ}$



7.- Dados los siguientes enunciados, decir ¿cuál de ellos es incorrecto?

A) Al cuadrilátero inscrito también se le llama cíclico.

B) Cuadrilátero ex-inscrito, es aquel cuyas prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a una misma circunferencia.

C) En un cuadrilátero inscriptible, los ángulos opuestos son complementarios.

D) En un cuadrilátero inscriptible, los ángulos opuestos son suplementarios.

E) Todas son correctas.

Resolución.-

Por propiedad, item 9.6.1, sabemos que en todo cuadrilátero inscriptible los ángulos opuestos son suplementarios.

Entonces la incorrecta es la alternativa "C".

8.- Dados los siguientes enunciados, decir ¿cuál de ellos es incorrecto?

A) En un cuadrilátero inscriptible, las diagonales forman con los lados opuestos ángulos congruentes.

B) En un cuadrilátero inscriptible, un ángulo interior es congruente con el opuesto.

C) Se llaman puntos concíclicos, a aquellos que pertenecen a una misma circunferencia.

D) El arco de la circunferencia que es capaz de inscribir ángulos congruentes se llama arco capaz.

E) Todas son correctas.

Resolución.-

Si analizamos los enunciados, nos damos cuenta que todas son correctas, la alternativa es la (E).

9.12 RECTAS ANTIPARALELAS

Las rectas antiparalelas son aquellas rectas que forman con los lados de un ángulo dado un cuadrilátero inscriptible.

$\measuredangle$ MON: Angulo dado

$\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PF}$: Rectas antiparalelas.

Se cumple que el cuadrilátero ABCD determinado es inscriptible.

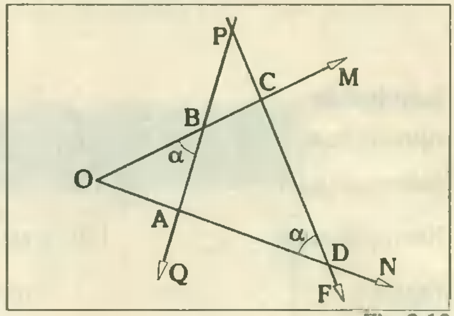


Fig. 9.18

OBSERVACIONES

1) En el Δ ABC, $\overleftrightarrow{BF}$ es antiparalela a $\overline{AB}$ con respecto a los lados del $\measuredangle$ C , cumpliéndose : $m\measuredangle$ BAC = $m\measuredangle$ FBC = α, tal como observamos en la *Fig*. 9. 19a

2) En todo triángulo rectángulo la altura referente a la hipotenusa es antiparalela con cada uno de los catetos.

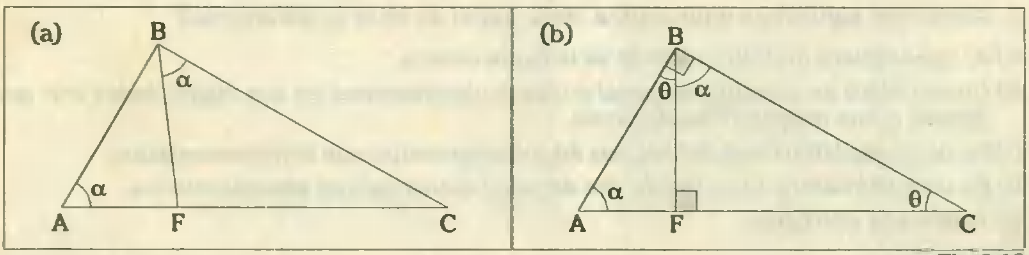


Fig. 9.19

9.13 ALGUNAS PROPIEDADES ESPECIALES

1RA PROPIEDAD

Si p es el semiperímetro del triángulo ABC , r_a, r_b, r_c, las medidas de los exradios y "r" la longitud del inradio.

Entonces : $r_b = r_a + r_c + r$

También : $AC = r_a + r_c$

Y : $r_b = p$

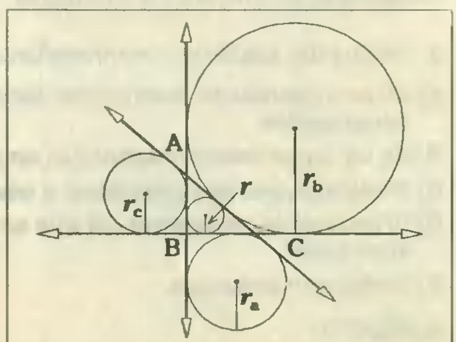


Fig. 9.20

2DA PROPIEDAD

Si r_a y r_c son las medidas de los ex-radios "M" es el punto de tangencia.

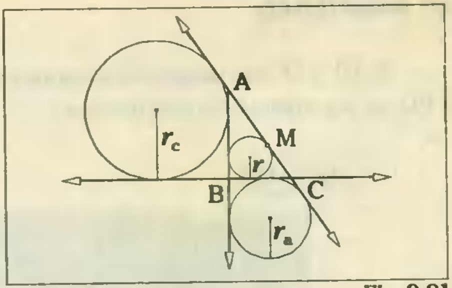


Fig. 9.21

$\Rightarrow$ $AM = r_a$

$MC = r_c$

3RA PROPIEDAD

Si ΔABC es un triángulo rectángulo y $\overline{BH}$ es altura:

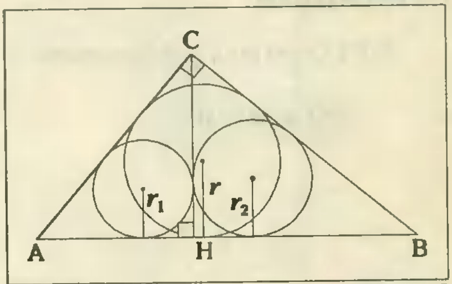


Fig. 9.22

$\Rightarrow$ $BH = r + r_1 + r_2$

4TA PROPIEDAD

Si $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son bisectrices de $\measuredangle$ ABH y $\measuredangle$ HBC respectivamente, se cumple que :

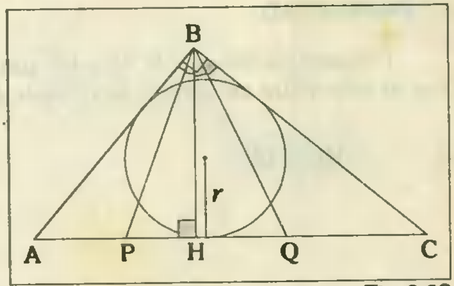


Fig. 9.23

$PQ = 2r$

5TA PROPIEDAD

Si $\overline{PB}$ y $\overline{DQ}$ son tangentes comunes interiores y $\overline{MN}$ es la tangente común exterior.

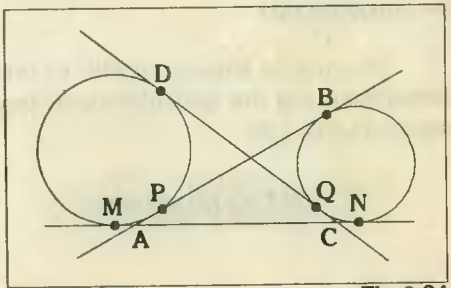


Fig. 9.24

$\Rightarrow$ $MA = CN$

6TA PROPIEDAD

Si $\overline{TB}$ y $\overline{EF}$ son tangentes comunes exteriores y $\overline{PQ}$ es la tangente común interior :

$$PA = QR$$

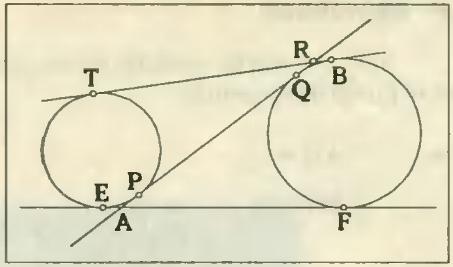


Fig. 9.25

7MA PROPIEDAD

Si P y Q son puntos de tangencia

$\Rightarrow$ $$PQ = BC - AB$$

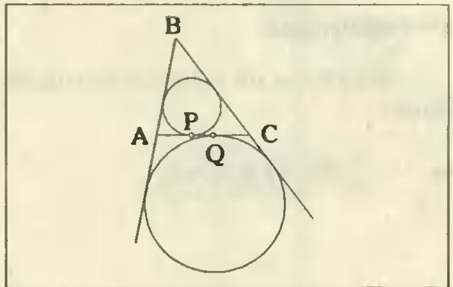


Fig. 9.26

8VA PROPIEDAD

Teorema de Besant : Si $\overline{AE}$ y $\overline{BL}$ son alturas y H es el ortocentro del Δ ABC, se cumple que :

$\Rightarrow$ $$HL = LF$$

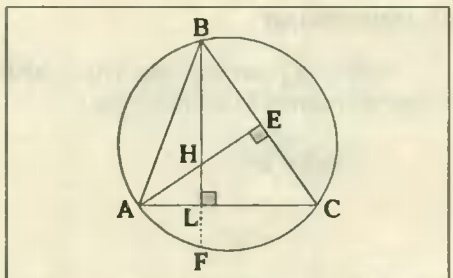


Fig. 9.27

9NA PROPIEDAD

Teorema de Miguel : Si ABC es un triángulo intersectado por dos circunferencias según como muestra la *Fig.* 9.28

$\square$ MBLF es inscriptible

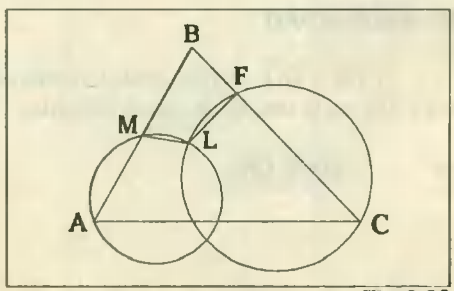


Fig. 9.28

10^{MA} PROPIEDAD

Teorema de Taylor : Si M y N son proyecciones de "H" sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

$\Rightarrow$ **⏢ AMNC es inscriptible**

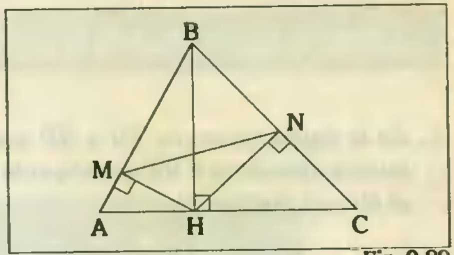


Fig. 9.29

11^{RA} PROPIEDAD

Si $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son secantes para dos circunferencias como las mostradas en la *Fig.* 9.30

$\Rightarrow$ **$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$**

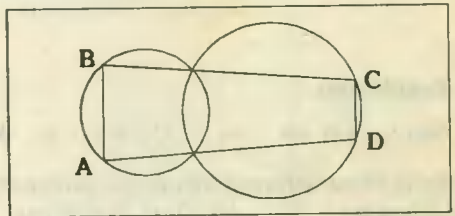


Fig. 9.30

12^{DA} PROPIEDAD

Si $\overline{BM}$ es mediana, $\overline{BH}$ es altura y :
$\measuredangle$ ABH $\cong$ $\measuredangle$ MBC y $m\measuredangle A \neq m\measuredangle C$

$\Rightarrow$ **$m\measuredangle B = 90°$**

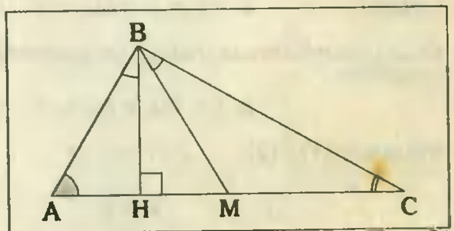


Fig. 9.31

13^{RA} PROPIEDAD

Si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BM}$ es mediana, tal que :
$\measuredangle$ ABH $\cong$ $\measuredangle$ MBC y el triángulo es oblicuángulo

$\Rightarrow$ **$\measuredangle A \cong \measuredangle C$**

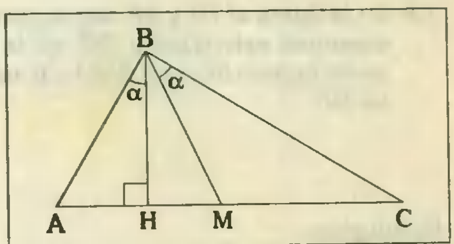


Fig. 9.32

14^{TA} PROPIEDAD

Si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BM}$ es mediana tal que :
$m\measuredangle C = 45$

$\Rightarrow$ **$m\measuredangle A = 45$**

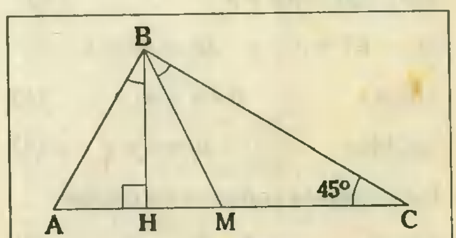
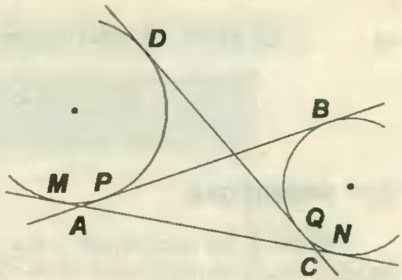


Fig. 9.33

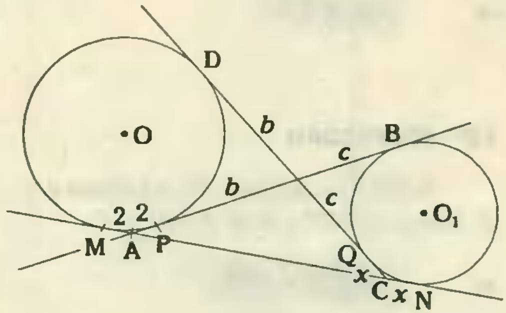
EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

9.- En la figura mostrada $\overline{PB}$ y $\overline{QD}$ son tangentes comunes interiores y $\overline{MN}$ es tangente común interior, si MA = 2, hallar CN.



Resolución.-

Sea: CN = x $\Rightarrow$ QC = x y MA = AP = z



En la circunferencia menor por propiedad de tangentes : AP +PB = AC + CN

Luego : $2 + b + c = AC + x$ ... (1)

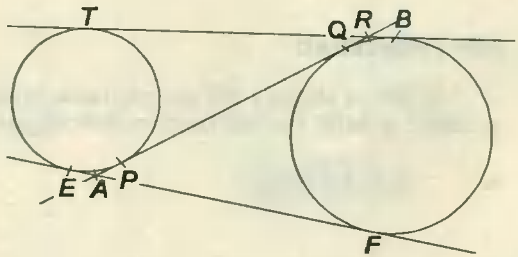
En la circunferencia mayor por propiedad de tangentes :

$b + c + x = AC + c$ ... (2)

Restando (1) - (2) : $2 - x = x - 2$

$\therefore$ $x = 2$

10.- En la figura si $\overline{TB}$ y $\overline{EF}$ son tangentes comunes exteriores y $\overline{PQ}$ es la tangente común interior. Si PA = 6, calcular QR.



Resolución.-

Sea: QR = RB = x

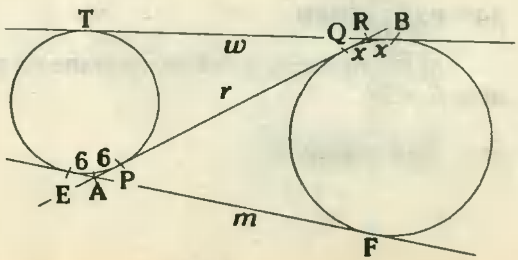
$\Rightarrow$ RT = w y AP = AE = 6

Ahora : $6 + r = m$ ... (1)

También : $w = r + x$ ... (2)

Por tangentes comunes exteriores :

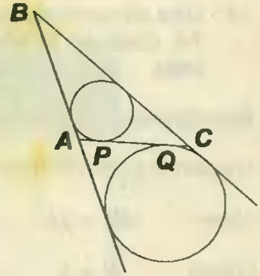
$6 + m = w + x$ ... (3)



Sumando (1), (2) y (3) : $12 + w + r + m = 2x + w + r + m$

$\therefore \quad \mathbf{x = 6}$

11.- En la siguiente figura, calcular el valor de PQ, si BC - AB = 3.



Resolución.-

Por propiedad de tangentes : $n + a + a + x = n + x + m + m$

Sustituyendo : BE = BD

Simplificando : $a = m$ ... (1)

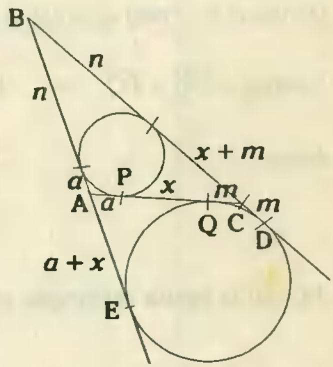
En la figura : $BC = n + x + m \quad \wedge \quad AB = n + a$

Luego : $BC - AB = (n + x + m) - (n + a)$ ... (2)

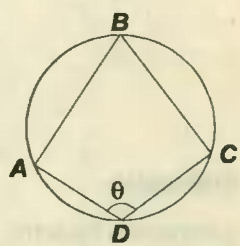
De (1) en (2) : $BC - AB = n + x + a - n - a = x$

De este modo : $x = PQ = BC - AB = 3$

$\therefore \quad \mathbf{PQ = 3}$



12.- En la figura mostrada, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Calcular "θ", si : m $\overset{\frown}{AD}$ = 100º y m $\overset{\frown}{CD}$ = 120º



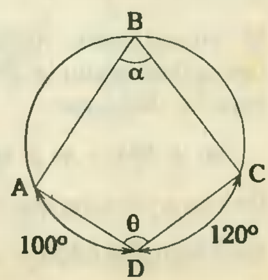
Resolución.-

Sea la : $m \measuredangle ABC = \alpha$

Ahora : $m\ \overset{\frown}{ADC} = 100° + 120°$

De donde : $m\ \overset{\frown}{ADC} = 220°$

Por ángulo inscrito : $\alpha = \dfrac{220°}{2} = 110°$



Finalmente por la 1[ra] propiedad del item 9.6, tenemos : $\alpha + \theta = 180°$

$$\Rightarrow \quad 110° + \theta = 180° \quad \therefore \quad \theta = 70°$$

13.- Una circunferencia es tangente a tres lados de un romboide cuyas alturas miden 8 y 10. Calcular la longitud de la cuerda determinada en la circunferencia por el cuarto lado.

Resolución.-

Trazamos por el centro "O" las alturas $\overline{MN}$ y $\overline{HL}$, donde MN = 10 y NL = 8

Ahora : $MN = 2R \quad \Rightarrow \quad 2R = 10$

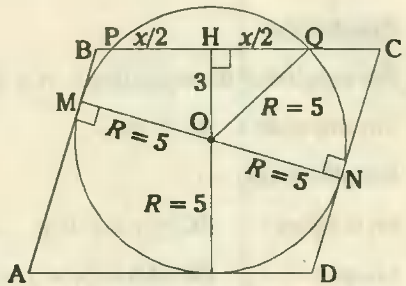
Luego : $R = 5 \quad \Rightarrow \quad OH = 3$

Donde el ⊿ OHQ es notable de 37° y 53°

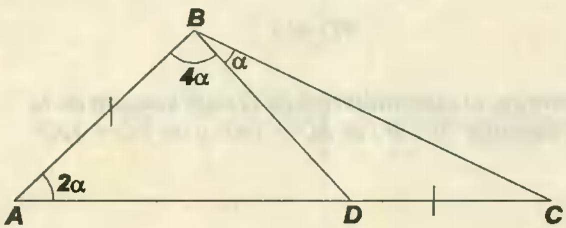
Y como $\overline{OH} \perp \overline{PQ} \quad \Rightarrow \quad PH = HQ = \dfrac{x}{2}$

Ahora : $\dfrac{x}{2} = 4$

$$\therefore \quad x = 8$$



14.- En la figura mostrada, calcular "α" si AB = CD.

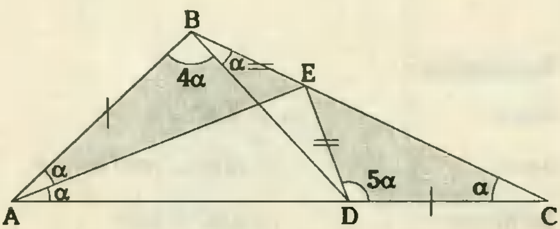


Resolución.-

Trazamos la bisectriz $\overline{AE}$ y si unimos los puntos E y D, entonces :

El cuadrilátero ABED resulta ser inscriptible según la 2[da] propiedad del item 9.6, dado que :

$$m\measuredangle BAE = m\measuredangle DBE = \alpha$$



De esto se deduce que : BE = ED , así el triángulo BED es isósceles

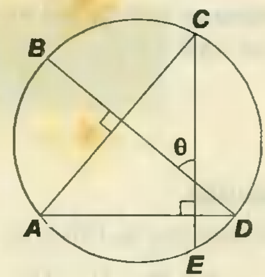
En el triángulo ABD por ángulo exterior : $m\measuredangle BDC = 6\alpha \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle EDC = 5\alpha$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta EDC$ (L.A.L.) $\Rightarrow \quad m\measuredangle BAE = m\measuredangle ECD = \alpha$

En el triángulo ABC : $2\alpha + 5\alpha + \alpha = 180°$

De Donde : $8\alpha = 180° \quad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha = 22{,}5°}$

15.- En la siguiente figura, se sabe que la m $\overset{\frown}{BDE}$ = 200º, calcular "θ"



<u>Resolución</u>.-

Del gráfico α y θ son complementarios, entonces :

$$\alpha + \theta = 90° \ldots (1)$$

Por ángulo inscrito, tenemos : $m\,\overset{\frown}{AE} = 2\alpha$

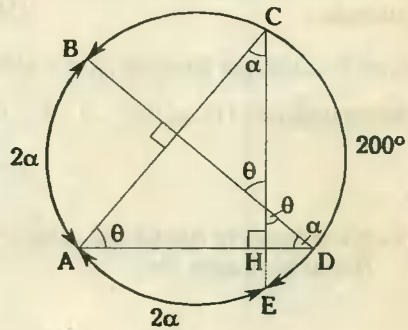
Por consiguiente : $m\,\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$

En la circunferencia : $2\alpha + 2\alpha + 200 = 360$

De donde : $\alpha = 40° \ldots (2)$

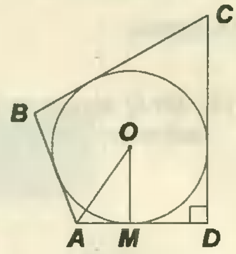
Reemplazando (2) en (1) : $40 + \theta = 90°$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 50°}$$

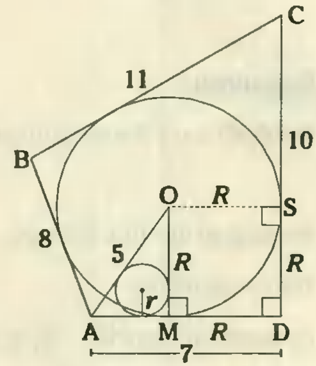


MISCELÁNEA

1.- En la figura AB = 8, BC = 11 y CD = 10, además "O" es centro de la circunferencia mostrada.
Hallar el inradio del triángulo AMO, si además se sabe que : AO = 5



Resolución.-



Por el Teorema de Pithot, en el ◻ ABCD :

$$8 + 10 = 11 + AD \quad \Rightarrow \quad AD = 7$$

◻ OSDM es un cuadrado, donde : OS = OM = MD = SD = R

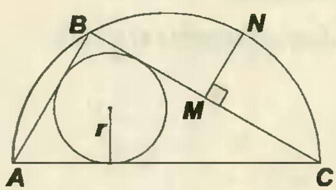
Además : $\quad AM = 7 - R \quad ...(1)$

En el ⊿ AMO, por Poncelet : $AM + MO = AO + 2r \quad ...(2)$

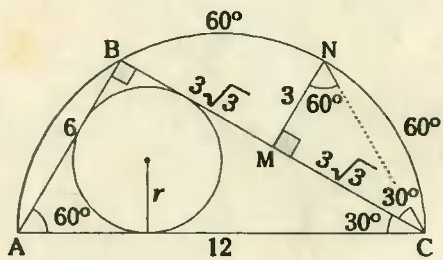
Reemplazando (1) en (2) : $\quad 7 - R + R = 5 + 2r$

$$\therefore \quad \boxed{r = 1}$$

2.- En la figura la flecha $\overline{MN}$ mide 3 cm y m ∡ ACB = 30º.
Hallar el inradio "r".



Resolución.-



En el ⊿ ABC : $\quad m\measuredangle A = 60º$

Del gráfico : $\quad m\,\overset{\frown}{BN} = m\,\overset{\frown}{NC} = 60º$

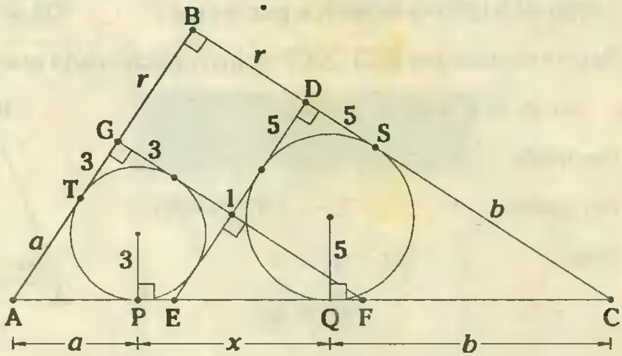
Por inscrito : $\quad m\measuredangle BCN = \dfrac{m\,\overset{\frown}{BN}}{2} = 30º$

En el ⊿ NMC de 30º y 60º : $MC = 3\sqrt{3}$ y $BM = 3\sqrt{3}$

En el ⊿ ABC de 30º y 60º : $AB = 6$ y $AC = 12$

Luego por Poncelet : $\quad 6 + 6\sqrt{3} = 12 + 2r \qquad \therefore \quad \boxed{r = 3(\sqrt{3} - 1)}$

3.- Por el incentro "I" de un triángulo rectángulo ABC se traza $\overline{ED}$ // $\overline{AB}$ (E en $\overline{AC}$ y D en $\overline{BC}$) y $\overline{GF}$ // $\overline{BC}$ (G en $\overline{AB}$ y F en $\overline{AC}$). Las circunferencias inscritas en los triángulos AGF y EDC tocan a $\overline{AC}$ en P y Q, si los radios de estas circunferencias miden 3 y 5.



Resolución.-

Por propiedad de las tangentes :

$$AP = AT = a \quad , \quad CQ = CS = b$$

Además : TG = 3 y DS = 5

También : BG = BD = r
(inradio del triángulo ABC).

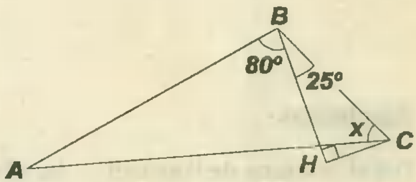
En el ⊾ ABC, por poncelet :

$$AB + BC = AC + 2r$$

$$a + 3 + r + r + 5 + b = a + x + b + 2r$$

$$\therefore \qquad \mathbf{x = 8}$$

4.- A partir del gráfico adjunto calcular x , si : AB = 2 BH .



Resolución.-

Sea : BH = a ⇒ AB = $2a$

Prolongamos $\overline{BH}$ hasta M de modo que :

$$BH = HM = a$$

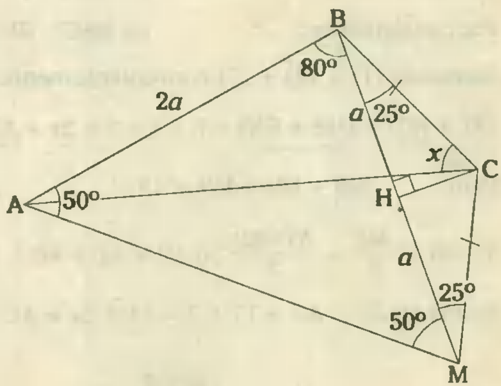
Luego los triángulos ABM y BCM resultan ser isósceles donde :

$m\measuredangle BAM = m\measuredangle AMB = 50°$ y

$m\measuredangle CBM = m\measuredangle CMB = 25°$

El cuadrilátero ABCM es inscriptible ya que :

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle AMC = 180$$



$$\therefore \qquad \mathbf{x = 50}$$

5.- Sobre el lado $\overline{AD}$ de un trapezoide ABCD, se considera el punto P , tal que : m∡ PBC = m∡ PDC y m∡ PAB = m∡ BCP, luego se trazan $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a $\overline{AD}$. Si EF = a , hallar AD.

Resolución.-

Trazamos $\overline{CQ}$ de modo que : $m\measuredangle CQD = m\measuredangle CDQ = \theta$

Luego el Δ QCD es isósceles, por lo cual : QF = FD

Reconocemos que el $\square$ QBCP es inscriptible, dado que :

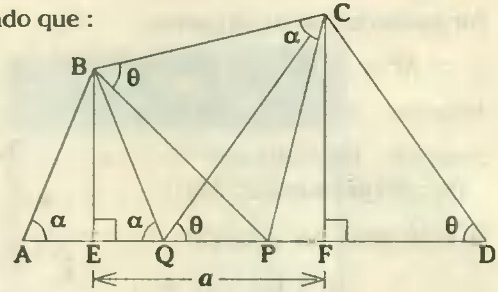
$m\measuredangle BCP = m\measuredangle BQA = \alpha$

De donde : AE = EQ

Del gráfico : AD = 2(EQ + QF)

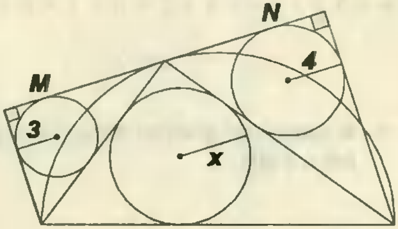
Pero : EQ + QF = a

$\therefore$ **AD = 2a**



6.- En la figura mostrada se sabe que : MN = 15

Calcular x



Resolución.-

Por el Teorema de Poncelet : ⊿ ABC : AB + BC = AC + 2x ... (1)

También : ⊿ ATB : AT + 3 + MB = AB + 6 ... (2)

Por consiguiente : ⊿ BKC : BN + 4 + KC = BC + 8 ... (3)

Sumando (1) + (2) + (3) convenientemente :

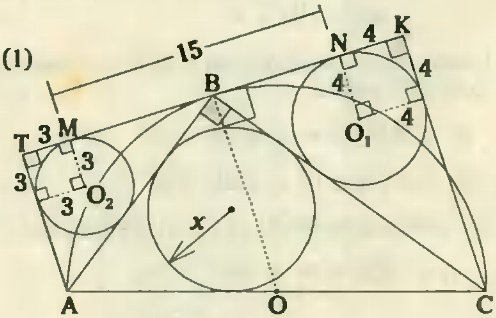
$\underbrace{(AT + KC)} + \underbrace{(MB + BN)} + 7 = 6 + 8 + 2x + AC$ ... (1)

Pero : MB + BN = MN = 15

Y : $OB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AT+KC}{2}$; ó AC = AT + KC ... (2)

De (1) en (2) : $AC + 15 + 7 = 14 + 2x + \cancel{AC}$

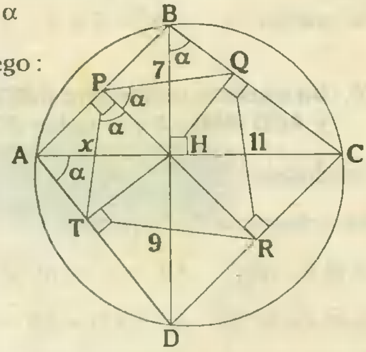
$\therefore$ **$x = 4$**



7.- En un cuadrilátero inscrito ABCD las diagonales se intersectan perpendicularmente en H. Se trazan $\overline{HP}$, $\overline{HQ}$, $\overline{HR}$ y $\overline{HT}$, perpendiculares a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si PQ = 7, QR = 11 y RT = 9; hallar PT.

<u>**Resolución**</u>.-

En el cuadrilátero inscrito ABCD : $m\measuredangle$ DBC = $m\measuredangle$ DAC = α



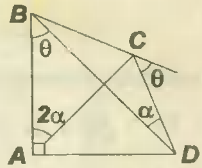
Reconocemos que : □ PBQH y □ APHT, son inscriptibles; luego :

$m\measuredangle$ HPQ = $m\measuredangle$ HBQ = α y $m\measuredangle$ TAH = $m\measuredangle$ TPH = α

Para el cuadrilátero PQRT, $\overline{PH}$ es bisectriz del $\measuredangle$ P, análogamente y por el mismo procedimiento anterior demostraremos que $\overline{QH}$, $\overline{RH}$ y $\overline{TH}$ son bisectrices de Q, R y T respectivamente, de donde el □ PQRT resulta ser circunscriptible por lo cual aplicamos el Teorema de Pithot.

$$x + 11 = 7 + 9 \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = 5}$$

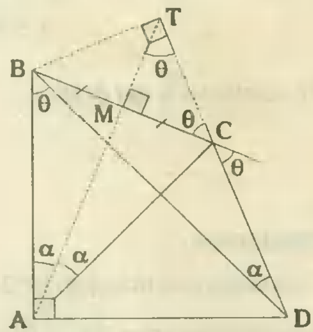
8.- En el gráfico mostrado; hallar "θ"



<u>**Resolución**</u>.-

Trazamos la bisectriz del $\measuredangle$ BAC, de modo que intersecte a la prolongación de $\overline{DC}$ en T, luego el □ ABTD es inscriptible de donde :

$$m\measuredangle \text{ ABD} = m\measuredangle \text{ ATD} = \theta$$



Para el ⊿ BAC, $\overline{AM}$ es mediana y bisectriz, luego también es altura, es decir $\overline{AM} \perp \overline{BC}$.

Para el ⊿ BTC, $\overline{TM}$ es mediana, luego : BM = MC

En el ⊿ TMC : $2\theta = 90$

$$\therefore \qquad \mathbf{\theta = 45^o}$$

9.- Se tiene el triángulo isósceles ABC inscrito en una circunferencia, sobre el arco $\widehat{AB}$, se ubica el punto P tal que PA = 2 y PB = 5. Calcular PC, si (AB = BC) y m A = 53º)

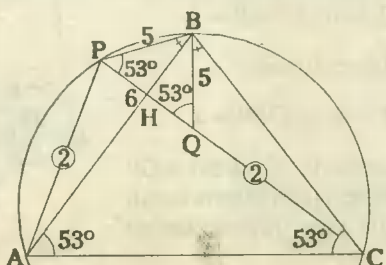
<u>**Resolución**</u>.-

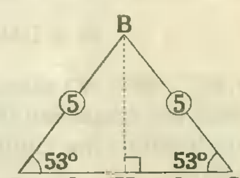
Trazamos $\overline{BQ}$ (Q en PC) con la condición : $m\measuredangle$ BQP = 53°

Luego PB = BQ y $\measuredangle$ PBA ≅ $\measuredangle$ QBC.

Δ APB ≅ Δ BQC (L.A.L.)

$\Rightarrow$ AP = QC = 2



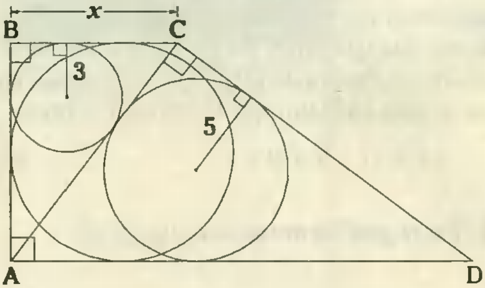


En el triángulo isósceles PBQ trazamos la altura $\overline{BH}$, luego : PH = HQ = 3 y PQ = 6

Del gráfico : PC = 6 + 2 $\therefore$ **PC = 8**

10.- Un trapecio rectángulo ABCD es recto en A y B. Si los inradios de los triángulos ABC y ACD miden 3 y 5, hallar BC ($\overline{AC} \perp \overline{CD}$)

<u>**Resolución**</u>.-



Por el teorema de Poncelet :

En el ⊿ ABC : AB + x = AC + 6 ... (1)

En el ⊿ ACD : AC + CD = AD + 10 ... (2)

Por el teorema de Pithot, en el ⏢ ABCD :

$$x + AD = AB + CD \quad ... (3)$$

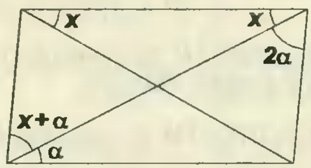
Sumando las expresiones (1) , (2) y (3) :

$\cancel{AB} + \cancel{AC} + \cancel{AD} + 2x + \cancel{CD} = \cancel{AC} + \cancel{AD} + \cancel{AB} + \cancel{CD} + 16$

En consecuencia : $2x = 16$

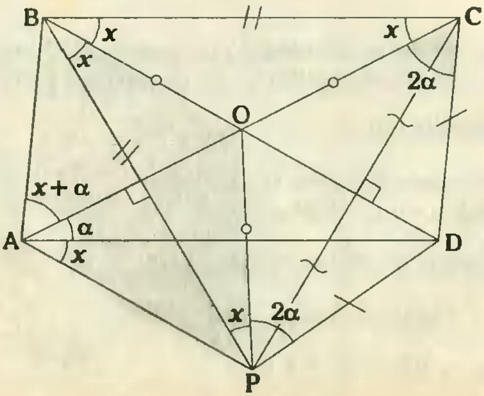
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 8}$

11.- Calcular x del gráfico.



<u>**Resolución**</u>.-

Construimos el triángulo BPD congruente al triángulo BCD.



Reconociendo que : OC = OP = OB concluimos que $\overline{BD}$ es mediatriz de $\overline{CP}$.

Luego : $m \measuredangle BPD = m \measuredangle BCD = x + 2\alpha$

Además: $m \measuredangle OPB = m \measuredangle OBP = x$

El ⏢ ABDP es inscriptible entonces :

$$m \measuredangle DAP = m \measuredangle OBP = x$$

En el ☐ ABOP, $\overline{AO}$ es bisectriz del $\measuredangle$ A y BO = OP, luego por propiedad dicho cuadrilátero es un cuadrilátero inscriptible tipo trapezoide simétrico.

Luego $\overline{AO}$ es mediatriz de $\overline{BP}$, de donde BC = CP y el Δ BCP es equilátero :

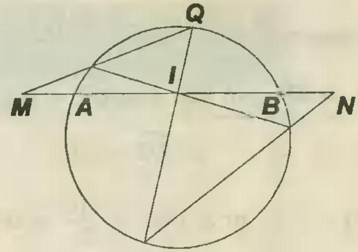
$$2x = 60$$

$$\therefore \qquad x = 30^\circ$$

12.- En la figura mostrada, se sabe que :

$BN = 2\sqrt{2}$ y $AI = IB$.

Hallar la medida de MA.



Resolución.-

Trazamos $\overline{PS}$ // $\overline{MN}$, luego el ⏢ SABP es un trapecio isósceles

De donde : AS = PB y $m\measuredangle$ SAM = $m\measuredangle$ PBN = β.

Además : SI = IP

$m\measuredangle$ ISP = $m\measuredangle$ IPS = α y $m\measuredangle$ MIS = α

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle$ SQT = $m\measuredangle$ SPT = α

⏢ MQIS es inscriptible dado que :

$$\measuredangle MQS \cong \measuredangle MIS$$

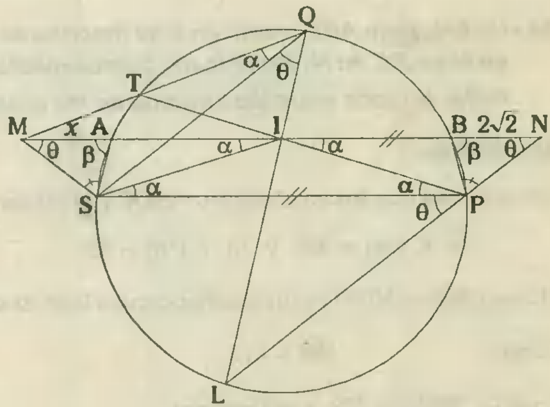
Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle$ IMS = $m\measuredangle$ SQI = θ

Como $\overline{MN}$ // $\overline{SP}$, entonces se cumplirá que:

$$m\measuredangle MNP = m\measuredangle SPL = \theta$$

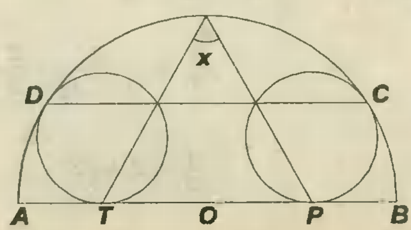
Luego : Δ MAS $\cong$ Δ BNP (ALA)

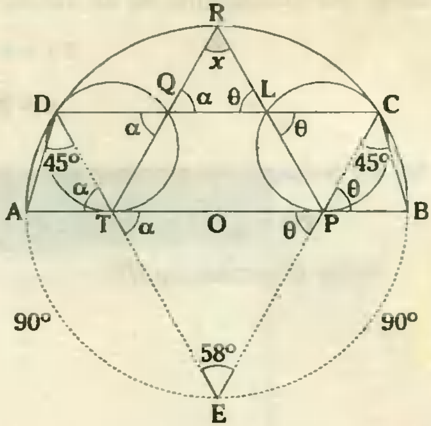
$$\therefore \qquad x = 2\sqrt{2}$$



13.- Calcular x, si m $\widehat{AD}$ + m $\widehat{BC}$ = 64º

Además $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$





Resolución.-

Por Propiedad : $m\measuredangle ADT = m\measuredangle PCB = 45°$

Al completar la circunferencia, las prolongaciones de $\overline{DT}$ y $\overline{CP}$ se cortan en el punto E que pertenece a ella.

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle DEC = \dfrac{m\overset{\frown}{DC}}{2}$ ... (*)

Pero : $\underbrace{m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{BC}} + m\overset{\frown}{DC} = 360 - 180$

$\Rightarrow \quad m\overset{\frown}{AC} = 116°$

Y en (*) : $m\measuredangle DEC = \dfrac{116}{2} = 58°$

En el Δ TEP : $\alpha + \theta = 122°$

En el Δ QRL : $\alpha + \theta + x = 180° \quad \Rightarrow \quad 122 + x = 180$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 58°}$

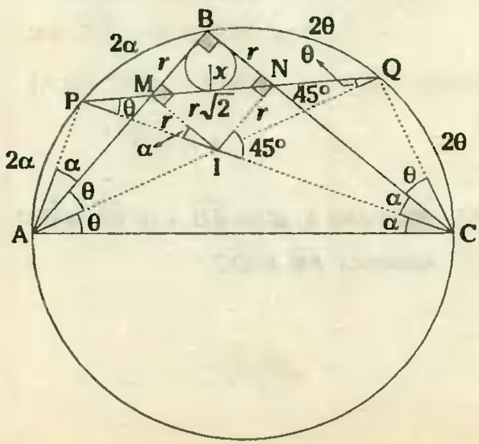
14.- Un triángulo ABC , recto en B se inscribe en una circunferencia ; $\overline{PQ}$ intersecta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N . Si P y Q son puntos medios de los arcos AB y BC respectivamente, hallar la razón entre los inradios de los triángulos ABC y MBN .

Resolución.-

Observamos que los cuadriláteros INQC y APMI son inscriptibles, de donde :

$m\measuredangle AMI = 90°$ y $m\measuredangle INC = 90°$

El cuadrilátero MBNI es un cuadrado cuyo lado es el inradio "r" del $\triangle$ ABC



Luego : $MN = r\sqrt{2}$

En el $\triangle$ MBN de 45° , por Poncelet :

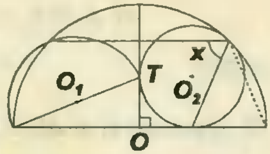
$$r + r = r\sqrt{2} + 2x$$

Ahora : $r(2 - \sqrt{2}) = 2x$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{x} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{r}{x} = 2 + \sqrt{2}}$$

15.- Del gráfico, calcular x , si O_1 y O_2 son centros de dos circunferencias y T es punto de tangencia .



Resolución.-

En la circunferencia O_2: $m \measuredangle TQL = \dfrac{m\,\widehat{TL}}{2} = 45°$ y como $m \measuredangle AQL = 45°$, por Propiedad se tiene que A, T y Q son colineales .

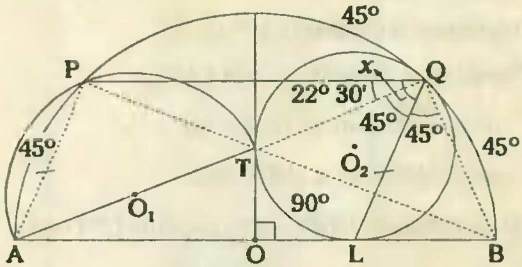
Análogamente deducimos que los puntos P , T y B son colineales pues $m \measuredangle APB = m \measuredangle APT = 90°$

Diremos que el cuadrilátero APQB es un trapecio isósceles porque AQ = PB.

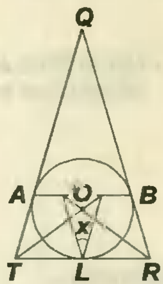
Luego : $m\,\widehat{AP} = m\,\widehat{QB} = 45°$

Por $\measuredangle$ inscrito $m \measuredangle PQA = \dfrac{m\,\widehat{AP}}{2} = 22°\,30'$

$\Rightarrow\ x = 45° + 22°\,30' \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = 67°\,30'}$



16.- En la figura A, B y L son puntos de tangencia, O es centro y $m\,\widehat{AB}$ = 148. Calcular x.



Resolución.-

Por Propiedad : $m \measuredangle TOR = 90 + \dfrac{m \measuredangle Q}{2} = 106°$

Luego por suplemento : $m \measuredangle KOR = 74°$

□ TASO y □ OKBR son inscriptibles, de donde :

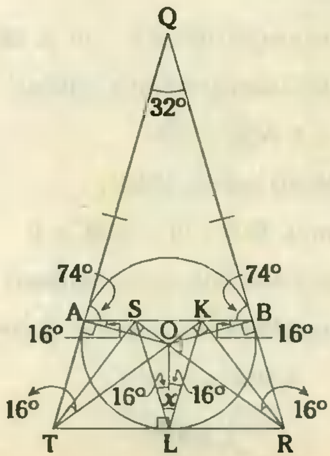
$m \measuredangle TSO = 90°$ y $m \measuredangle OKR = 90°$

Además : $m \measuredangle SAO = m \measuredangle STO = 16°$ y

$m \measuredangle KBO = m \measuredangle KRO = 16°$

□ TSOL y □ OKRL son inscriptibles :

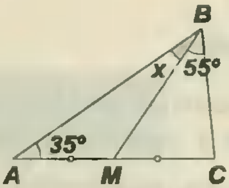
$\Rightarrow$ $m \measuredangle STO = m \measuredangle SLO = 16°$ y



$$m \measuredangle \text{OLK} = m \measuredangle \text{ORK} = 16^\circ$$

Luego : $x = 16^\circ + 16^\circ$ $\therefore$ $\mathbf{x = 32^\circ}$

17.- Calcular x, si AM = MC en el triángulo mostrado.



<u>Resolución</u>.-

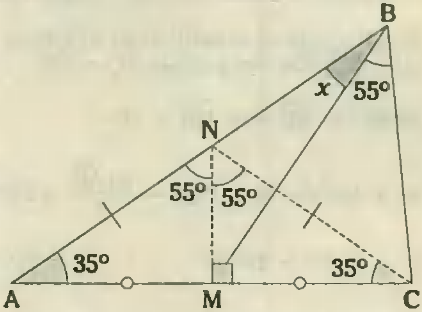
Trazamos la mediatriz $\overline{MN}$ de $\overline{AC}$

Luego en el triángulo isósceles ANC :

$m \measuredangle \text{NAC} = m \measuredangle \text{NCA} = 35^\circ$ y

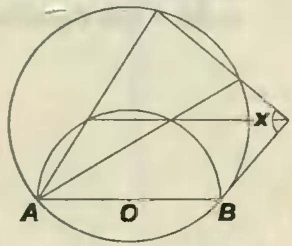
$m \measuredangle \text{ANM} = m \measuredangle \text{MNC} = 55^\circ$

El cuadrilátero MNBC es inscriptible (2° Prop.)



$\therefore$ $\mathbf{x = 55^\circ}$

18.- Del gráfico mostrado, si $\overline{AB}$ es diámetro se pide determinar el valor de "x".



<u>Resolución</u>.-

El cuadrilátero inscrito APQB : $m \measuredangle \text{PAB} = m \measuredangle \text{CQB} = \theta$

(Propiedad de Cuadriláteros inscriptibles)

Además : $m \measuredangle \text{AQB} = 90^\circ$

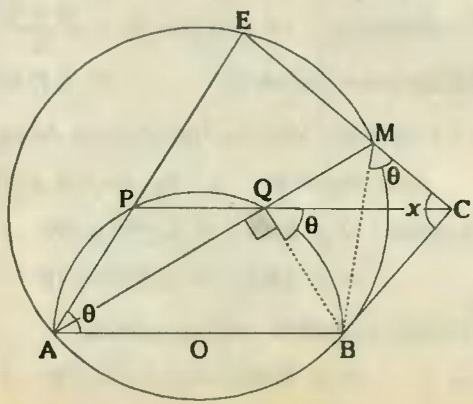
En el cuadrilátero inscrito AEMB :

$$m \measuredangle \text{EAB} = m \measuredangle \text{BMC} = \theta$$

(Propiedad de Cuadriláteros inscriptibles)

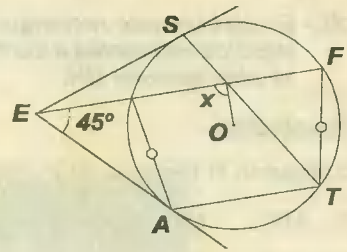
El cuadrilátero QMCB es inscriptible ya que :

$$\measuredangle \text{BQC} \cong \measuredangle \text{BMC}$$



$\therefore$ $\mathbf{x = 90^\circ}$

19.- En la figura mostrada se sabe que : $AE \cong TF$ y O es el centro de la circunferencia; con los datos indicados, hallar x .



Resolución.-

Ya que : $EA \cong TF \Rightarrow \overline{PF} // \overline{AT}$

Luego : $m\measuredangle FPA = m\measuredangle TAR = 45^o \Rightarrow m\,\widehat{AT} = 90^o$ ($\measuredangle$ semi - inscrito).

Al trazar la bisectriz $\overline{PO}$, se tiene :

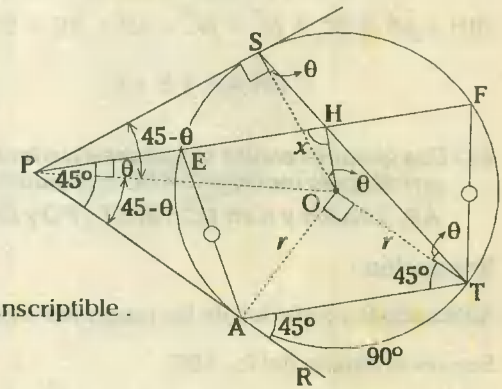
$$m\measuredangle SPO = m\measuredangle OPA = 45 - \theta$$

De donde : $m\,\widehat{AS} = 90 + 2\theta$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle STA = \dfrac{m\,\widehat{AS}}{2} = 45 + \theta$

En el ΔSOT : $m\measuredangle OST = m\measuredangle OTS = \theta$

De ello deducimos que el cuadrilátero PSHO es inscriptible .



$\therefore \quad x = 90^o$

20.- Hallar la medida del ángulo que forman las diagonales de un cuadrilátero circunscriptible ABCD, si los inradios de los triángulo ABC y ADC son congruentes. Además: m $\measuredangle$ ABC = m $\measuredangle$ ADC = 90

Resolución.-

Empleando el teorema de Poncelet en el $\triangle$ ABC :

$$a + b = AC + 2r \;...\; (1)$$

Y en el $\triangle$ ADC :

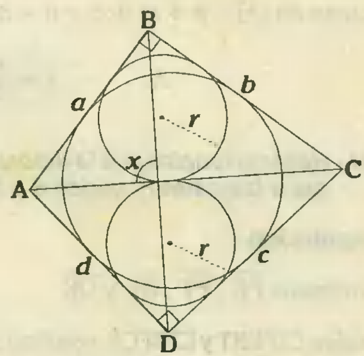
$$c + d = AC + 2r \;...\; (2)$$

De (1) y (2) : $a + b = c + d \quad ...\; (3)$

Por el teorema de Pithot : $a + c = b + d \quad ...\; (4)$

Sumando (3) y (4) : $2a = 2d \Rightarrow a = d$

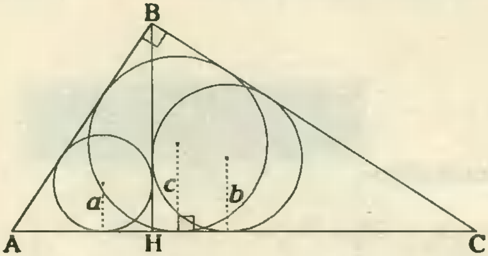
En (3) deducimos que : $b = c$



De donde el cuadrilátero ABCD es un trapezoide simétrico : $\therefore \quad x = 90$

21.- En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa; si los inradios referentes a los triángulos AHB, BHC y ABC miden a, b y c respectivamente, se pide calcular BH.

Resolución.-



Aplicando el Teorema de Poncelet en :

$\triangle$ ABC : $AB + BC = AC + 2c$ ... (1)

$\triangle$ AHB : $AH + BH = AB + 2a$ ... (2)

$\triangle$ BHC : $BH + HC = BC + 2b$ ... (3)

Sumando las expresiones (1) (2) y (3)

$2BH + \cancel{AB} + \cancel{BC} + \cancel{AC} = \cancel{AC} + \cancel{AB} + \cancel{BC} + 2(a + b + c) \quad \Rightarrow \quad 2\,BH = 2(a + b + c)$

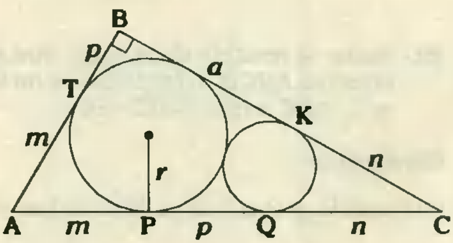
$$\therefore \qquad \boldsymbol{BH = a + b + c}$$

22.- Dos circunferencias tangentes exteriores de centros O y O_1 son tangentes a los lados de un triángulo rectángulo ABC. Los puntos de tangencia en la hipotenusa AC son P y Q en $\overline{AB}$, T en $\overline{AB}$ y K en $\overline{BC}$. Si BT = PQ y BK = a, hallar el inradio del triángulo ABC (BK > BT)

Resolución.-

Aplicando la propiedad de las tangentes tenemos : $AT = AP = m$ y $CK = CQ = n$

Sea «r» el inradio del $\triangle$ ABC



Luego por Poncelet : $AB + BC = AC + 2r$ ... (*)

Pero : $AB = p + m$; $BC = a + n$ y

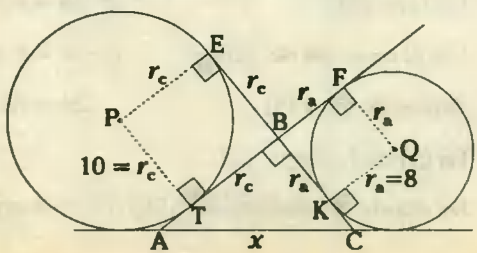
$AC = m + p + n$

Luego en (*) : $p + m + a + n = m + p + n + 2r$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{r = \frac{a}{2}}$$

23.- Hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos ex-radios referentes a los catetos miden 8 y 10

Resolución.-



Trazamos $\overline{PE}$, $\overline{PT}$, $\overline{QF}$ y $\overline{QK}$

Luego $\square$ PEBT y $\square$ BFQK resultan ser cuadrados

Donde : $PE = PT = BE = r_c$ y $BF = QK = QF = r_a$

Aplicando la propiedad de la circunferencia ex - inscrita en el ⊾ ABC : $CE = BC + r_c = p$ ... (1)

$AF = AB + r_a = p$ ... (2)

Sumando (1) y (2) : $AB + BC + r_c + r_a = 2p$

Sustituyendo $2p$: $AB + BC + r_a + r_c = AB + BC + x \Rightarrow x = r_a + r_c$ ... (Propiedad)

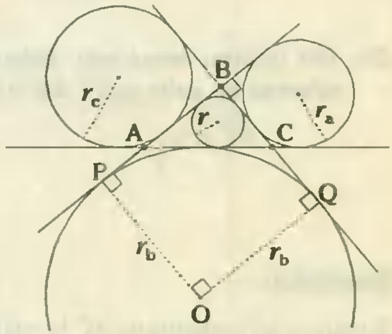
Para el problema : $x = 8 + 10 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 18}$

24.- Demostrar que en todo triángulo rectángulo la longitud del ex - radio referente a la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los ex-radios referentes a los catetos y del inradio.

<u>Resolución</u>.-

Sea «O» el centro de la circunferencia ex-inscrita al ⊾ ABC referente a la hipotenusa

Luego PBQO es un cuadrado, donde : $BP = r_b$



Pero por propiedad en el ⊾ ABC : $BP = BQ = p$

$\Rightarrow \quad r_b = \dfrac{AB+BC+AC}{2}$ ... (1)

Por Poncelet : $AB + BC = AC + 2r$

$\Rightarrow \quad AB + BC + AC = 2(AC + r)$ ... (*)

Además de acuerdo al problema anterior : $AC = r_a + r_c$

Luego en (*) : $AB + BC + AC = 2(r_a + r_c + r)$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $r_b = \dfrac{2(r_a + r_c + r)}{2} \quad \therefore \quad \boldsymbol{r_b = r_a + r_c + r}$

25.- En un triángulo ABC se ha trazado la altura $\overline{BH}$, luego $\overline{HN} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HM} \perp BC$. Si m ∡ AMN = 20, calcular la m ∡ NCA.

<u>Resolución</u>.-

En el ⊾ BHC , sea : $m\measuredangle BCH = \theta$

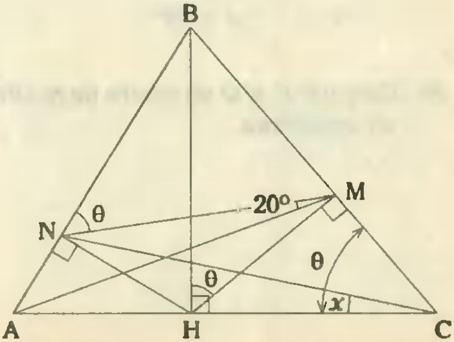
Luego : $m\measuredangle BHM = \theta$

En el cuadrilátero inscriptible NBMH , por 2[da] propiedad : $m\measuredangle BNM = m\measuredangle BHM = \theta$

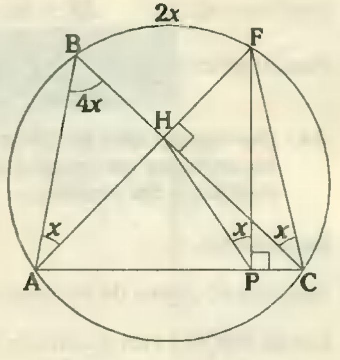
El cuadrilátero ANMC es inscriptible ya que :

$m\measuredangle BNM = m\measuredangle ACB = \theta$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 20}$



26.- Un triángulo ABC se encuentra inscrito en una circunferencia; la prolongación de la altura $\overline{AH}$ corta en F a la circunferencia; luego se traza $\overline{FP} \perp \overline{AC}$. Calcular la m ∡ HPF , si m ∡ ABC = 4m ∡ HPF



Resolución.-

Sea: $m \measuredangle \text{HPF} = x \Rightarrow m \measuredangle \text{ABC} = 4x$

En la circunferencia, por ∡ inscrito : $m \measuredangle \text{BAF} = m \measuredangle \text{BCF}$

En el cuadrilátero HFCP inscriptible, tendremos :

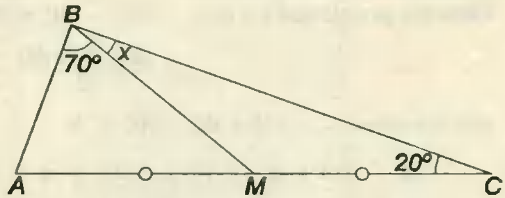
$m \measuredangle \text{HCF} = m \measuredangle \text{HPF} = x \Rightarrow m \measuredangle \text{BAH} = x$

En el ⊿ BHA : $x + 4x = 90°$

Donde : $5x = 90°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 18°}$

27.- Del gráfico mostrado, calcular x, si además se sabe que : AM = MC



Resolución.-

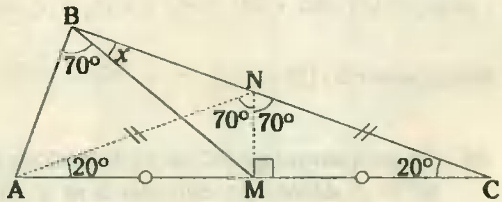
Trazamos la mediatriz de $\overline{AC}$ la cual intersecta a $\overline{BC}$ en N.

Luego : $m \measuredangle \text{ANM} = m \measuredangle \text{MNC} = 70$

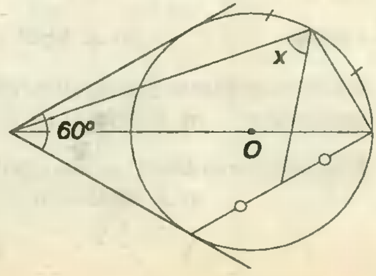
Por lo cual el cuadrilátero ABNM es inscriptible :

Como : $m \measuredangle \text{NAC} = 20°$

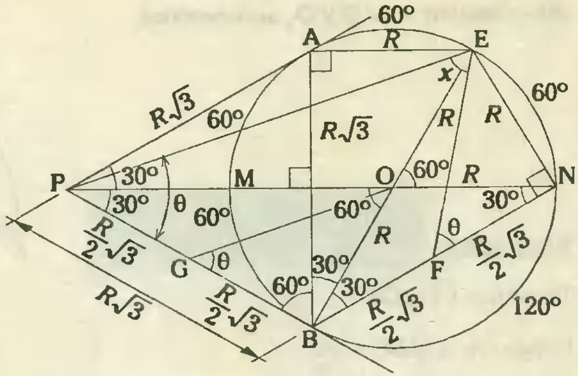
$\Rightarrow$ $\mathbf{x = 20°}$



28.- Calcular x, si O es centro de la circunferencia mostrada.



Resolución.-



Del gráfico observamos que : $\overline{AE} \parallel \overline{PN}$

$\Rightarrow\ m\ \widehat{AM} = m\ \widehat{MB} = m\ \widehat{AE} = m\ \widehat{EN} = 60°$

$\therefore\ \ m\ \widehat{BN} = 120°$

De donde $\overline{BE}$ es diámetro : BE = 2R

En el ⊿ EAB de 30° y 60° : AB = $R\sqrt{3}$

En el triángulo equilátero APB :

$$PA = PB = AB = R\sqrt{3}$$

$\triangle$PBN: isósceles $\Rightarrow$ PB = BN = $R\sqrt{3}$

De donde : $\quad BF = FN = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

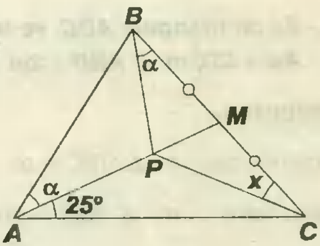
Sea "G" el punto medio de $\overline{PB}$ $\Rightarrow$ $PG = GB = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

⊿ GBO ≅ ⊿ FNE (L.A.L.) $\Rightarrow$ $m\measuredangle OGB = m\measuredangle EFN = \theta$

Por dicha razón el cuadrilátero PEFB es inscriptible $\Rightarrow$ $x + 120° = 180°$

$\therefore\quad$ **x = 60°**

29.- Del gráfico mostrado, hallar x , si BM = MC



Resolución.

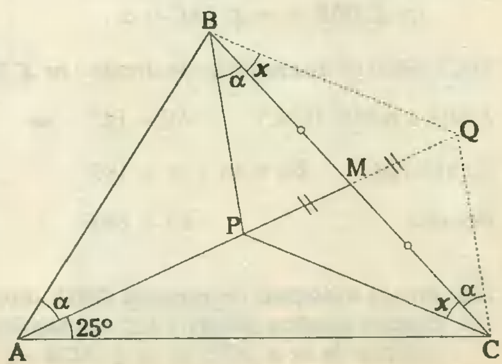
Prolongamos $\overline{PM}$ hasta Q de modo que :

$$PM = MQ$$

Luego PBQC es un romboide, donde :

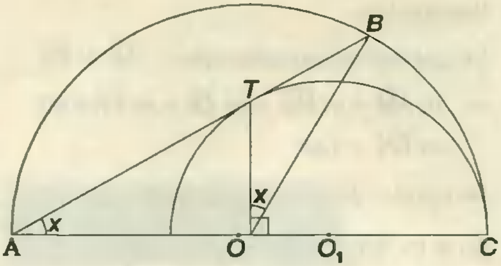
$m\measuredangle BCQ = \alpha\ $ y $\ m\measuredangle CBQ = x$

Dado que : $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle BCQ$, concluimos que el cuadrilátero ABQC es inscriptible



$\therefore\quad$ **x = 25°**

30.- Calcular x, si O y O_1 son centros.



Resolución.-

Trazamos $\overline{CT}$ y $\overline{CB}$

Luego : $m \measuredangle$ ABC = 90°

En el □ inscriptible TBCH : $m \measuredangle$ TCB = x

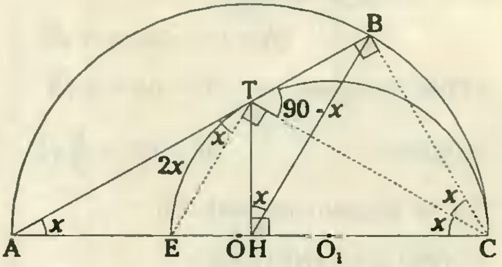
Trazamos $\overline{ET}$, luego en la circunferencia menor :

$m \measuredangle$ ETC = 90 y $m \measuredangle$ ATE = x

Por $\measuredangle$ inscrito : $m \measuredangle$ TCE = x

En el ⊿ ABC : $x + 2x = 90°$

$\therefore$ $\boxed{x = 30°}$



31.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ de modo que :
AB = CD, m $\measuredangle$ ABD = 2m $\measuredangle$ BAC = 4 m $\measuredangle$ DBC. Hallar la m $\measuredangle$ DBC

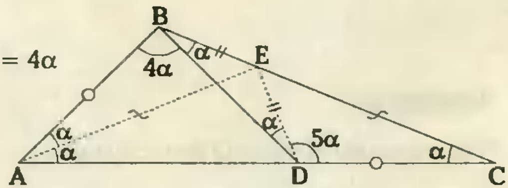
Resolución.-

Hacemos que : $m \measuredangle$ DBC = α

Según datos : $m \measuredangle$ BAC = 2α y $m \measuredangle$ ABD = 4α

Trazamos la bisectriz interior $\overline{AE}$, luego :

$m \measuredangle$ BAE = $m \measuredangle$ EAC = α



El ▱ ABED es inscriptible, de donde : $m \measuredangle$ BDE = α y BE = ED

Δ ABE ≅ Δ EDC (LAL) : AE = EC ⇒ $m \measuredangle$ BCA = α

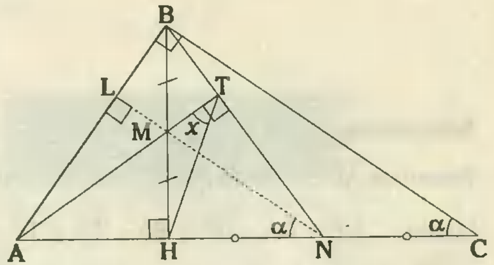
En el Δ ABC : $2\alpha + 5\alpha + \alpha = 180°$

Donde : $8\alpha = 180°$ $\therefore$ $\boxed{\alpha = 22{,}5°}$

32.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. Sean M y N los puntos medios de BH y HC respectivamente. AM prolongado intersecta en T a BN; calcular la m $\measuredangle$ ATH, si m $\measuredangle$ ACB = α

Resolución.-

En el ⊿ BHC, reconocemos que $\overline{MN}$ es base media



Luego $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y al prolongar $\overline{NM}$, ésta intersecta perpendicularmente en L a $\overline{AB}$

Asimismo: $m\measuredangle LNA = m\measuredangle BCA = \alpha$

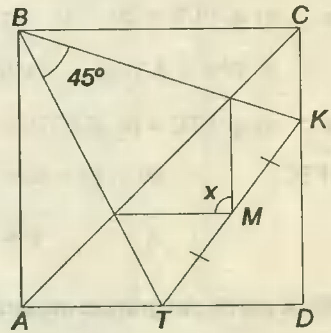
En el Δ ABN se observa que M es su ortocentro

Luego $\overline{AT}$ es altura, por lo tanto $\overline{AT} \perp \overline{BN}$

En el cuadrilátero inscriptible HMTN :

$$\therefore \qquad x = \alpha$$

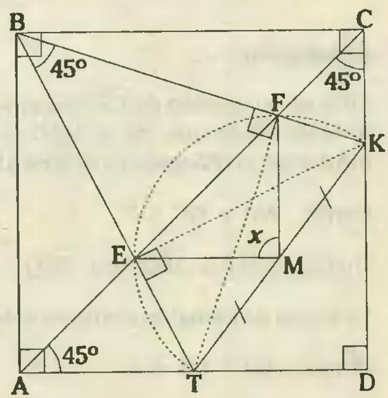
33.- La figura ABCD es un cuadrado, además se sabe que : TM = MK . Hallar : x



Resolución.-

La diagonal $\overline{AC}$ forma 45° con $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente

Al trazar $\overline{TF}$ y $\overline{KE}$ se determinan los cuadriláteros inscriptibles ABFT y EBCK ($\measuredangle TBF \cong \measuredangle FAT$)



Luego : $m\measuredangle BFT = 90°$ y

$m\measuredangle BEK = 90°$

En el Δ TBK : $\overline{KE}$ y $\overline{TF}$ son alturas y en consecuencia el cuadrilátero TEFK es inscriptible a una circunferencia de centro M.

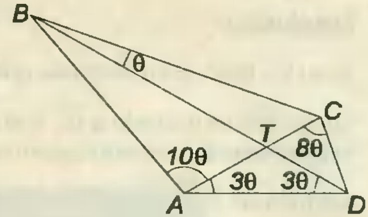
Luego $x = m\,\widehat{EF}$ ($\measuredangle$ central)

Pero : $45 = \dfrac{m\,\widehat{EF}}{2}$ ($\measuredangle$ inscrito)

$$\Rightarrow \qquad 45 = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \qquad x = 90°$$

34.- A partir de los datos del gráfico mostrado, se pide calcular θ



<u>Resolución</u>.-

Trazamos $\overline{AP}$ de modo que $\overline{BD}$ sea su mediatriz

Luego : DP = DA ; BP = BA ; TA = TP y $m\measuredangle PDT = m\,TDA = 3\theta$

$\Delta BPD \cong \Delta BAD$ (LLL) $\Rightarrow$ $m\measuredangle BPD = m\measuredangle BAD = 13\theta$

El $\square$ BPCD es inscriptible

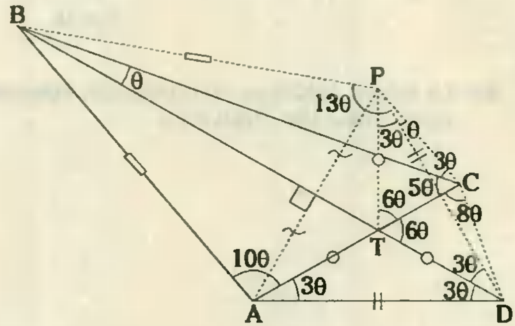
$\Rightarrow$ $m\measuredangle PCB = 3\theta$ y $m\measuredangle CPD = \theta$

Δ TPC $\cong$ Δ TCD (4to caso)

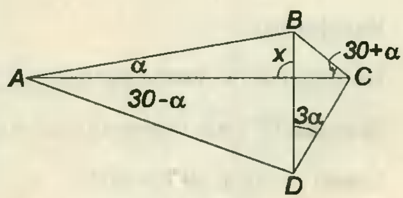
$\Rightarrow$ $m\measuredangle PTC = m\measuredangle CTD = 6\theta$

ΔPTC : $6\theta + 4\theta + 8\theta = 180$

$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 10°}$



35.- A partir del gráfico mostrado, calcular x.



<u>Resolución</u>.-

En la prolongación de $\overline{CB}$ ubicamos el punto M de modo que $m\measuredangle MAB = 30$, para formar asi el triángulo isósceles AMC

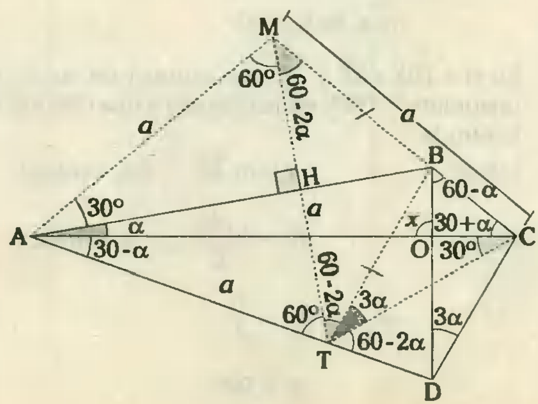
Donde : AM = MC = a

Trazamos $\overline{MT} \perp \overline{AB}$ (T en $\overline{AD}$)

Se forma el triángulo equilátero AMT

Donde : AM = MT = a

$m\measuredangle AMT = m\measuredangle ATM = 60°$



Además como $\overline{AB}$ es mediatriz de $\overline{HT}$, se tiene que :

$$BM = BT \quad y \quad m \measuredangle BMT = m \measuredangle BTM = 60^\circ - 2\alpha$$

El Δ TMC es isósceles : $m \measuredangle MTC = m \measuredangle MCT = 60^\circ + \alpha$;

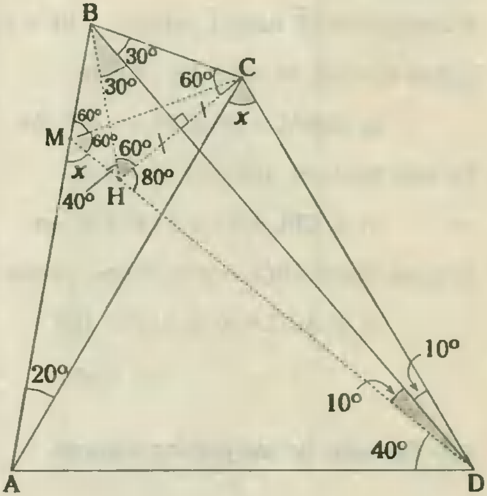
$m \measuredangle BTC = 60^\circ + \alpha - (60^\circ - 2\alpha) = 3\alpha$ y $m \measuredangle ACT = 30$

El cuadrilátero TBCD es inscriptible : $\Rightarrow$ $m \measuredangle CTD = m \measuredangle DBC = 60 - \alpha$

Finalmente en el Δ OBC : $x = 60^\circ - \alpha + 30 + \alpha$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 90^\circ}$

36.- En un trapezoide ABCD : m $\measuredangle$ BAC = 2m $\measuredangle$ BDC = 20º, m $\measuredangle$ DBC = 30º y m $\measuredangle$ BDA = 50º. Calcular la m ACD

<u>**Resolución.-**</u>



Trazamos $\overline{DM}$ de modo que $m \measuredangle MDB = 10^\circ$

Luego el cuadrilátero AMCD es inscriptible

De acuerdo con la 3ra. propiedad :

$m \measuredangle BMC = m \measuredangle ADC = 60^\circ$ y $m \measuredangle AMD = x$

Trazamos $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ (H en $\overline{DM}$)

Luego, el triángulo HBC es equilátero

Donde : $m \measuredangle BHC = m \measuredangle BCH = 60^\circ$

El cuadrilátero MBCH es inscriptible pues :

$$m \measuredangle BMC = m \measuredangle BHC = 60^\circ$$

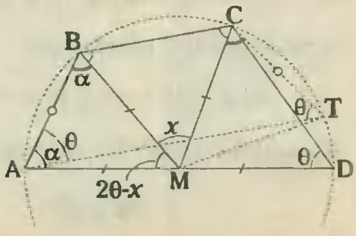
$\Rightarrow$ $m \measuredangle CMH = m \measuredangle HBC = 60^\circ$

Finalmente en el punto M : $60^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 60^\circ}$$

37.- En un cuadrilátero inscriptible ABCD, M es punto medio de $\overline{AD}$, m $\measuredangle$ BAD = a y m $\measuredangle$ ADC = θ . Calcular la m $\measuredangle$ BMC, si α > θ y BM = MC .

<u>**Resolución.-**</u>



Ubicamos el cuadrilátero ABCD en la circunferencia correspondiente . A continuación trazamos $\overline{AT}$ // $\overline{BC}$, resultando el trapecio isósceles ABCT.

Donde : $\overline{AB} = \overline{CT}$, $m \measuredangle BAT = m \measuredangle ATC = \theta$

Luego se verificará que : $\Delta ABM \cong \Delta MCT$

$\Rightarrow \quad AM = MT = MD$

Esto significa que «M» es el centro de la circunferencia , de donde : AM = BM= MC = MD

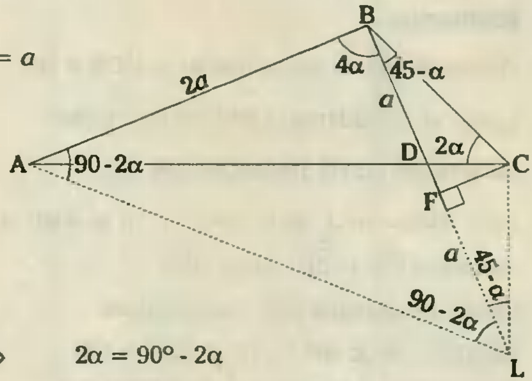
En el Δ AMB isósceles se verifica que : $m\measuredangle ABM = \alpha$

Además : $m\measuredangle AMC = 2\theta$ y $m\measuredangle AMB = 2\theta - x$

Luego : $2\theta - x + \alpha + \alpha = 180 \quad \therefore \quad$ $\mathbf{x = 2(\alpha + \theta) - 180°}$

38.- En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ y a continuación $\overline{CF}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{BD}$. Si AB = 2BF , m ∡ C = 2α , m ∡ ABD = 4α y m ∡ FBC = 45 - α ; calcular α

Resolución.-



Prolongamos $\overline{BF}$ hasta L, tal que : BF = FL = a

Luego el Δ ABL es isósceles , donde :

$m\measuredangle BAL = m\measuredangle BLA = 90 - 2\alpha$

De este modo el ΔBCL es isósceles .

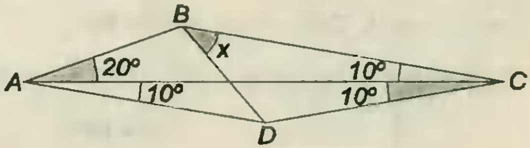
$\Rightarrow \quad m\measuredangle CBL = m\measuredangle CLB = 45 - \alpha$

El cuadrilátero ABCL es inscriptible ya que :

$m\measuredangle ABC + m\measuredangle ALC = 180 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 90° - 2\alpha$

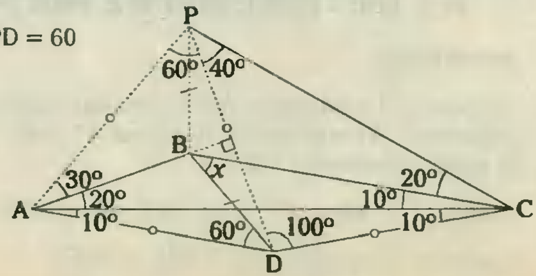
$4\alpha = 90° \quad \therefore \quad$ $\mathbf{\alpha = 22{,}5°}$

39.- Calcular "x" del gráfico adjunto.



Resolución.-

Por A trazamos una recta que forma 30° con $\overline{AB}$ y que se intersecta en P con la perpendicular trazada por D a la prolongación de $\overline{AB}$, formando el triángulo equilátero PAD



$\Rightarrow \quad AP = PD = AD$ y $m\measuredangle ADP = m\measuredangle APD = 60$

El triángulo PDC es isósceles

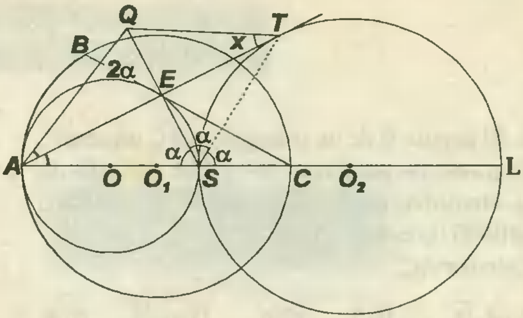
$\Rightarrow \quad m\measuredangle DPC = m\measuredangle PDC = 40°$

El cuadrilátero BPCD es inscriptible :

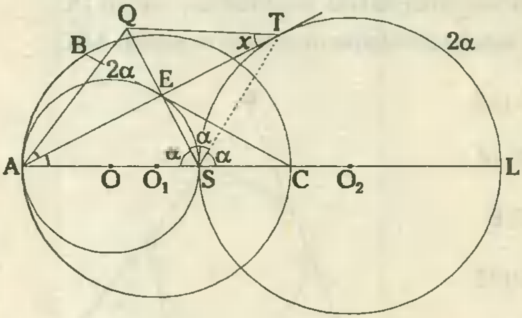
$\therefore \quad$ $\mathbf{x = 40°}$

40.- En el gráfico mostrado, se sabe que : A, E, T y S son puntos de tangencia, además : m $\widehat{AB}$ = m$\widehat{TL}$

Calcular x



Resolución.-



Con respecto a las circunferencias tangentes interiores de centros O y O_1.

$\overline{BC}$ es una cuerda de O_1 tangente en E a O

Luego por propiedad $\overline{AT}$ es bisectriz del ∡ BAC

Con relación a las circunferencias tangentes exteriores O y O_2

$\overline{ST}$ es bisectriz del ∡ ESC

Por inscrito : $m\measuredangle ASE = \dfrac{m\widehat{AE}}{2} = \alpha$

$m\measuredangle TSL = \dfrac{m\widehat{TL}}{2} = \alpha$

Luego : $3\alpha = 180 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$

Para el Δ AQS : T es excentro, luego $\overline{QT}$ es bisectriz : $x = \dfrac{\alpha}{2}$ (Propiedad)

$\therefore \quad x = 30$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El ángulo B de un triángulo ABC mide 60º. Se trazan las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$. El radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero MBNG (G es baricentro del ABC) mide $\sqrt{3}$. Calcular AC.

A) $4\sqrt{3}$ B) 8 C) 6 D) $6\sqrt{3}$ E) 3

2.- En la figura, los semiperímetros de las regiones triángulares sombreadas, suman 16. Calcular el semiperímetro del triángulo ABC.

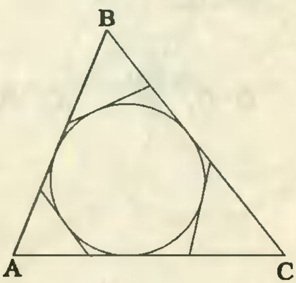
A) 12

B) 14

C) 8

D) 32

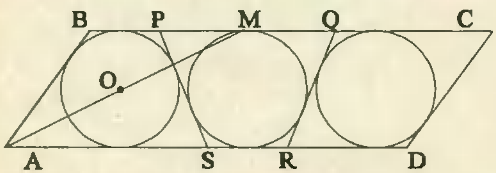
E) 16



3.- La circunferencia ex-inscrita a un triángulo ABC determina los puntos de tangencia F y G sobre $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{AB}$ respectivamente la prolongación de $\overline{GF}$ intersecta a $\overline{AO}$ en el punto H, siendo O el centro de la circunferencia ex-inscrita. Calcular la medida del ∡AHC.

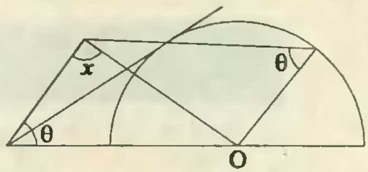
A) 60º B) 75º C) 45º D) 90º E) 53º

4.- ABCD es un romboide, O es centro MC = 8. Hallar el semiperímetro del cuadrilátero PQRS.



A) 16 B) 12 C) 16 D) 8 E) 10

5.- Del gráfico mostrado O es centro; hallar x



A) 45º B) 60º C) 53º D) 75º E) 90º

6.- En la figura AN = 8 y ND = 2. Calcular «AB»

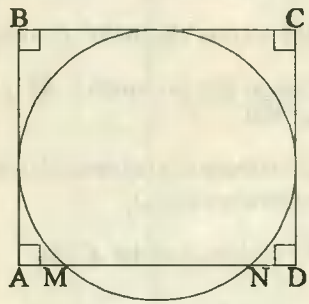
A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10



7.- En la figura «H» es ortocentro del Δ ABC, BM = MC y BC = $8\sqrt{2}$. Hallar : PQ

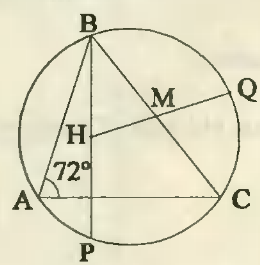
A) 4

B) 6

C) $8\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{3}$

E) 8

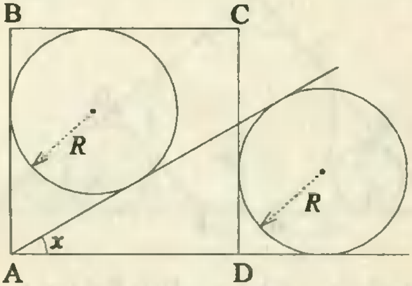


8.- Un cuadrilátero ABCD se encuentra circunscrito a una circunferencia de radio R. Se sabe que m ∡ ADB = 90 y la distancia entre los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ADB y BCD es 6. Calcular R.

A) $6\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 6

9.- En la figura ABCD es un cuadrado.

Calcular : x

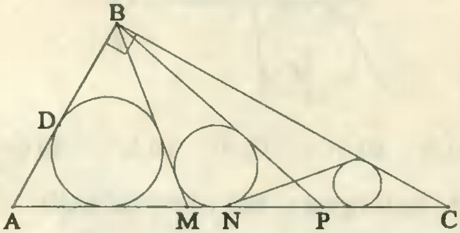


A) 26,5 B) 30 C) 37 D) 36 E) 22,5

10.- Dado un triángulo ABC recto en $\underline{A}$, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ en M, a $\overline{BC}$ en N y a $\overline{AC}$ en P. La recta que pasa por M y N intersecta a $\overline{CA}$ en «E» y en «F» a la perpendicular a $\overline{AC}$ trazada por C. Calcular la $m\measuredangle$ FEP, si la $m\measuredangle$ EFP = 20

A) 15 B) 30 C) 25 D) 26,5 E) 40

11.- Calcular MN, si BD = 8



A) 6 B) 4 C) 8 D) 5 E) 7

12.- El lado de un cuadrado ABCD mide "b". Sobre $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N respectivamente. El inradio del triángulo MDN mide "a". Hallar MN, si $m\measuredangle$ MBN = 45°

A) $a+b$ B) $b-a$ C) $b-2a$

D) $2b-a$ E) $2b+a$

13.- Si : AB + CD = 21 ; PQ = 10,

Calcular MN.

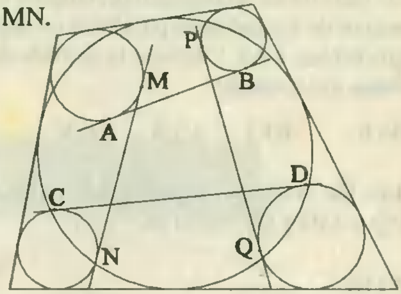
A) 19

B) 18

C) 17

D) 20

E) 11



14.- A partir de un punto P, exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{PA}$ y la secante PQL. Luego se une "L" con el punto medio M de $\overline{PA}$. $\overline{LM}$ intersecta en F a la circunferencia, calcular la $m\measuredangle$ FPA, si $m\widehat{QF} = 72°$.

A) 24° B) 28° C) 36° D) 48° E) 54°

15.- En la figura $m\widehat{MN} = 84°$; hallar x.

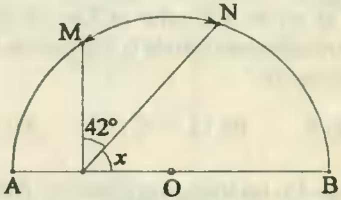
A) 42°

B) 44°

C) 46°

D) 48°

E) 38°



16.- Se tiene un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia, tal que : CD = 5, $m\measuredangle$ A = 37° y $m\measuredangle$ B = 90°.

Si : AD + BC = 21, calcular la medida del radio de la circunferencia.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 D) 5

17.- Del gráfico, calcular la $m\widehat{AB}$, si $m\widehat{BC} = 90°$

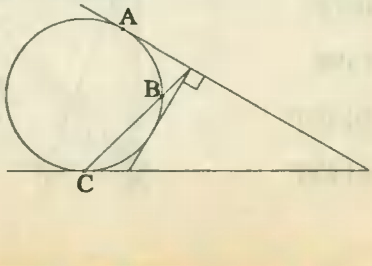
A) 30°

B) 45°

C) 53°

D) 60°

E) 75°



18.- El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo divide al mayor de los lados no paralelos en segmentos que miden 1 y 9. Calcular la medida de la mediana del trapecio.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19.- De la figura, calcular AM , si MQ = 5 y PQ = 3 (O y O_1 : centros)

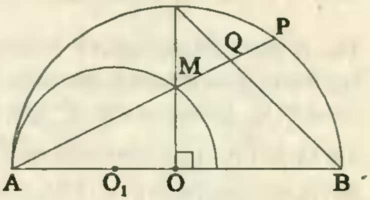
A) 16

B) 12

C) 10

D) $8\sqrt{2}$

E) $8\sqrt{3}$



20.- En un trapecio rectángulo $AB\overline{CD}$ recto en A y B, tomando como diámetro $\overline{AB}$ se construye una circunferencia que es tangente a $\overline{CD}$ en M. Calcular «CD» , si el radio de la circunferencia mide 6 y el perímetro del trapecio es 38.

A) 8 B) 11 C) 13 D) 15 E) 19

21.- En un triángulo isósceles ABC, AB = BC ; se traza la altura $\overline{AH}$ y en el triángulo ABH se inscribe una circunferencia de centro «O». Si OC = 6, calcular «AC»

A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 9 D) $6\sqrt{2}$ E) 12

22.- Calcular x , si ABCD es un cuadrado y TM = MQ.

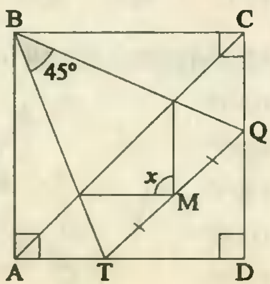
A) 60°

B) 75°

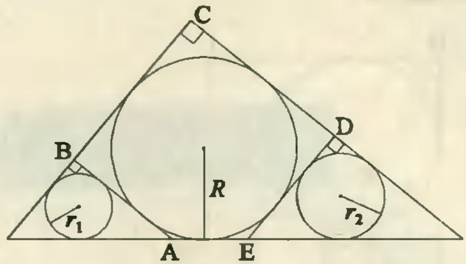
C) 90°

D) 105°

E) 120°



23.- Del gráfico hallar el semiperímetro del pentágono ABCDE.

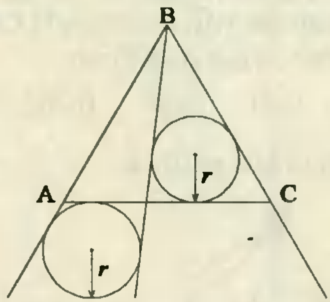


A) $2(3R + r_1 + r_2)$ D) $3R + r_1 + r_2$

B) $R + r_1 + r_2$ E) $3R + 2r_1 + r_2$

C) $2 + r_1 + r_2$

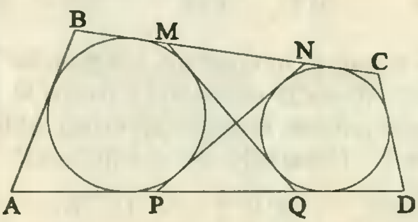
24.- En la figura, Δ ABC es equilátero. Hallar su altura.



A) $2r$ B) $3r$ C) $4r$ D) $5r$ E) $6r$

25.- En la figura : BM + AP = NC + QD.

Si : AB = 4 , hallar : CD



A) 8 B) 2 C) 4 D) 3 E) 5

26.- En un cuadrilátero ABCD :

$$m\measuredangle A = m\measuredangle B = m\measuredangle ACD = 90°$$

Las medidas de los inradios de los triángulos ABC y ACD suman 8 con AD.

Calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

27.- En la figura P, Q y T son puntos de tangencia PM = 4. Hallar MQ

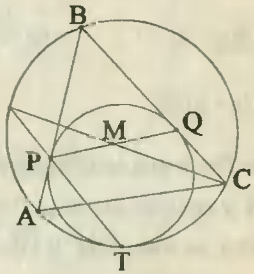
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



28.- En un trapezoide ABCD que es circunscriptible se sabe que :

$$AB = 7 \quad , \quad BC = 1$$

$$m\measuredangle CAD = 30$$

$$m\measuredangle ADC = 90$$

Calcular la medida del radio del triángulo ACD

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

29.- Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B. Por el incentro I se trazan $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$ y $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$ (P en $\overline{AB}$, N en $\overline{BC}$ y M , Q en $\overline{AC}$). En los triángulos APQ y MNC se inscriben circunferencias que son tangentes a $\overline{AC}$ en "E" y "F" respectivamente.
Calcular "EF" (los radios de las circunferencias miden 3 y 5)

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

30.- En la figura "I" es incentro del triángulo ABC , AB = 5 y AC = 12. Calcular "AN"

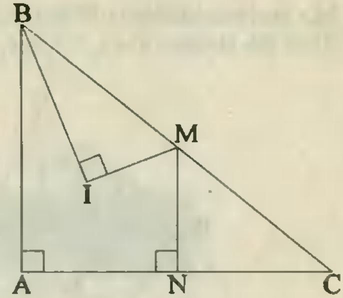
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



31.- En la figura, ABCD es un romboide. Además T y C son puntos de tangencia. Hallar x.

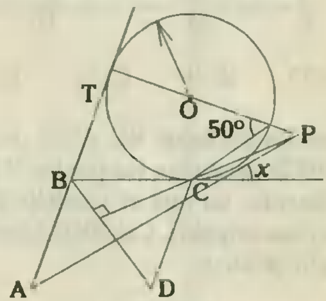
A) 50°

B) 25°

C) 40°

D) 55°

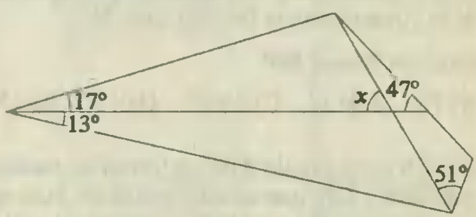
E) 45°



32.- Hallar x del gráfico.

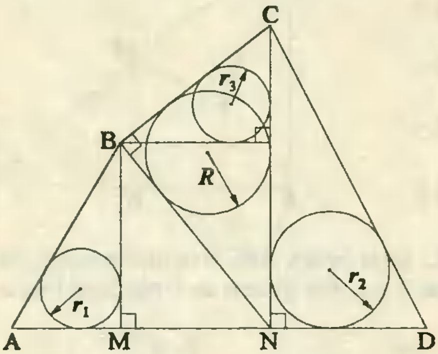
A) 68° B) 78° C) 88° D) 80° E) 90°

33.- Del gráfico adjunto, calcular x.



A) 48° B) 64° C) 57° D) 60° E) 67°

34.- Si el cuadrilátero ABCD es circunscriptible, BN = 20. Hallar : $K = r_1 + r_2 + r_3 + 2R$



A) 15 B) 20 C) 18 D) 10 E) 40

35.- En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de un romboide ABCD se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que el cuadrilátero ABPQ es circuns-criptible. Calcular el inradio del triángulo QCD, si :

$$m\measuredangle PCQ = 30$$

$$PC + PQ = 2(AQ)$$

$$QC = 4 + 2\sqrt{3}$$

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}/2$

36.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la $m\measuredangle C = 37$. Si «E» es excentro relativo a $\overline{BC}$, I es incentro y «P» es punto de tangencia de la circunferencia inscrita con $\overline{AC}$.

Calcular la $m\measuredangle$ IEP.

A) 7,5° B) 8° C) 10,5° D) 12° E) 15°

37.- En un triángulo ABC se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ que se intersectan en «G» tal que, el cuadrilátero BMGN es circunscriptible. ¿Qué clase de triángulo es el triángulo ABC?

A) Acutángulo D) Isósceles

B) Rectángulo E) Escaleno

C) Equilátero

38.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle A = 60$, el inradio mide «a» y el ex-radio relativo a $\overline{BC}$ mide «b». Calcular «BC»

A) $b - a$ D) $(b - a)\sqrt{3}$

B) $2(a + b)$ E) $\dfrac{2(b-a)}{\sqrt{3}}$

C) $(a - b)\sqrt{3}$

39.- Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro «O» sean P y Q puntos de dicha curva, se traza $\overline{QH} \perp \overline{OB}$ ($H \in \overline{OB}$).

Calcular «PQ», si : AP = 2;

$$QH = 6$$

$$\text{y} \quad m\measuredangle PAQ = 3\,(m\measuredangle QAB)$$

A) $3\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{6}$ E) 4,5

40.- En un triángulo escaleno ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BMC son tangentes a dicha mediana en P y Q y la circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a $\overline{AC}$ en N. Indique la relación correcta.

A) PQ = 2MN B) PQ = 3MN

C) PQ = MN D) $PQ = \dfrac{MN}{2}$

E) PQ > MN

CAP. 10

puntos notables

10.1 BARICENTRO (G)

a) Es el punto de concurrencia de las medianas del Δ ABC.

b) Divide a la mediana en la razón de 2 a 1.

Es decir : $BG = 2GL$ ... (10.1)

c) Es también baricentro del Δ MNL llamado triángulo mediano o complemento del Δ ABC.

d) Su posición es interior al Δ ABC.

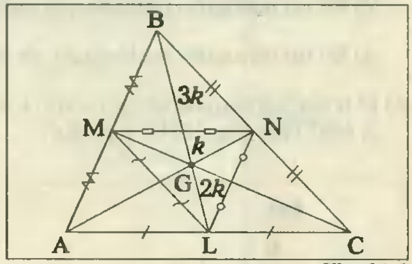


Fig. 10.1

10.2 INCENTRO (I)

a) Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores del Δ ABC.

b) Equidista de los lados del Δ ABC.

Es decir : $IM = IN = IL = r$ (inradio) ... (10.2)

c) Es el circuncentro del Δ MNL llamado triángulo tangencial.

d) Su posición es interior al Δ ABC

e) Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

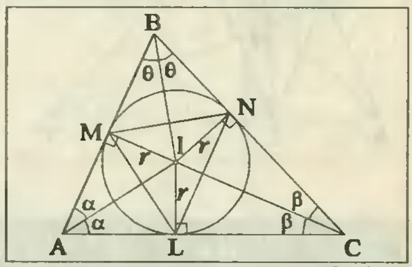


Fig. 10.2

10.3 EX-CENTRO (E)

a) Es el punto donde concurren las bisectrices exteriores de B y C y la bisectriz interior de A del Δ ABC.

b) Equidista de un lado y de las prolongaciones de los otros lados. Es decir :

$EH = EL = ET = r_a$ (ex-radio) ... (10.3)

c) Su posición es exterior al Δ ABC.

d) Es el centro de la circunferencia ex-inscrita al Δ ABC, relativa al lado $\overline{BC}$.

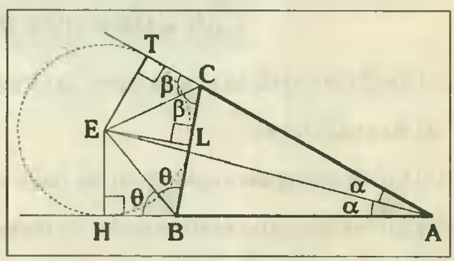


Fig. 10.3

10.4 ORTOCENTRO (H)

a) Es el punto donde concurren las 3 alturas del Δ ABC

b) Su posición varía según el tipo de triángulo .

Por ejemplo :

1) En un triángulo acutángulo, se halla en un punto interior (ver *Fig.* 10.4a)

2) En un triángulo obtusángulo, se halla en un punto exterior (ver *Fig.* 10.4b)

3) En un triángulo rectángulo, se halla en el vértice del ángulo recto. (ver *Fig.* 10.4c)

c) El triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas (Δ EFL) se llama triángulo pedal del Δ ABC (ver *Fig.* 10.4a y 10.4b).

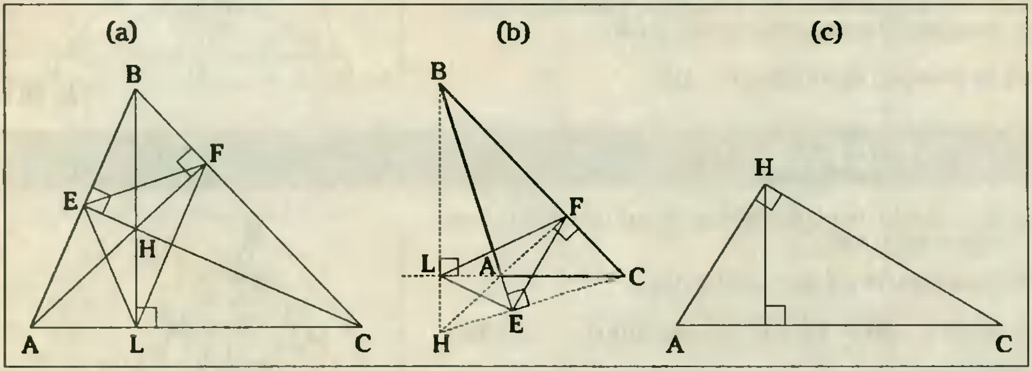


***Fig.* 10.4**

10.5 CIRCUNCENTRO (O)

a) Es el punto donde concurren las mediatrices de los tres lados de un triángulo.

b) Equidista de los vértices del Δ ABC. Es decir :

$$AO = OB = OC = R \quad \text{(circunradio)} \qquad \dots (10.4)$$

c) Es el centro de la circunferencia circunscrita.

d) Su posición es :

d1) En un triángulo acutángulo, se halla en un punto interior (Ver *Fig.* 10.5a)

d2) En un triángulo obtusángulo, se halla en un punto exterior (Ver *Fig.* 10.5b)

d3) En un triángulo rectángulo, se halla en el punto medio de la hipotenusa (Ver *Fig.* 10.5c)

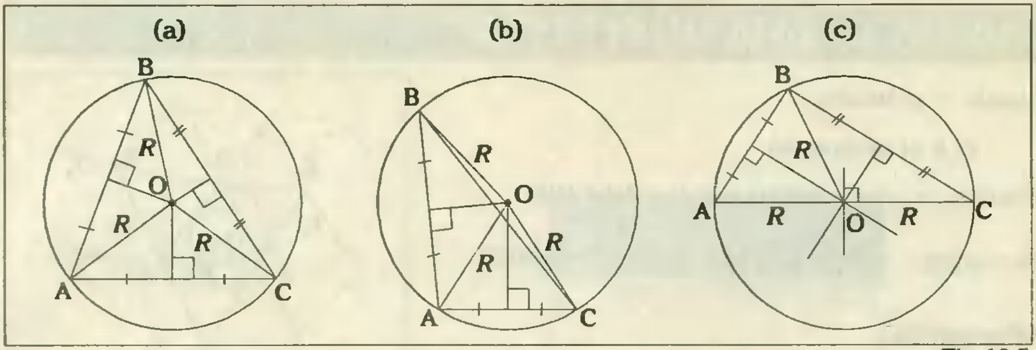


Fig. 10.5

10.6 RECTA DE EULER

A excepción del triángulo equilátero, todo triángulo tiene su Ortocentro (H), Baricentro (G) y Circuncentro (O) en una línea ($\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$) llamada recta de Euler, cumpliéndose que :

a) **HG = 2 (GO)** **... (10.5)**

b) **BH = 2 (OM)** **... (10.6)**

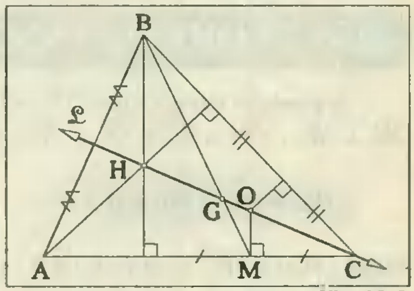


Fig. 10.6

10.7 CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

Los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices están en una circunferencia de radio R_1 y centro "J" cumpliéndose lo siguiente :

a) H, J, G y O forman una cuaterna armónica

b) HJ = JO

c) $R_1 = \dfrac{R}{2}$

d) "J" punto de Feuerbach

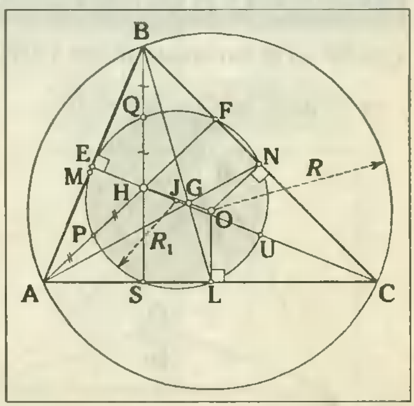


Fig. 10.7

10.8 TEOREMA DE STEINER

Siendo : r el inradio

y: R el circunradio

Además : r_a, r_b, r_c , son los exradios del Δ ABC

Se cumple : $$r_a + r_b + r_c = 4R + r \quad \text{... (10.7)}$$

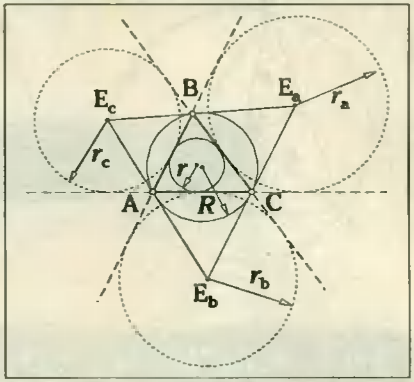


Fig. 10.8

Observación:

El triángulo E_a E_b E_c se denomina ex-incentral, el cual siempre es acutángulo.

10.9 TEOREMA DE CARNOT

Si desde el circuncentro "O" del Δ ABC se trazan : $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OL} \perp \overline{AC}$; se cumple que :

$$OM + ON + OL = R + r \quad \text{... (10.8)}$$

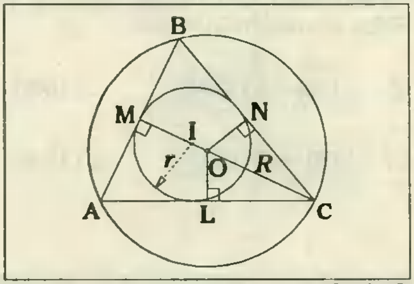


Fig. 10.9

NOTA : Si el Δ ABC es obtuso en B , se cumple :

$$OM + ON - OL = R + r \quad \text{... (10.9)}$$

10.10 ALGUNAS PROPIEDADES ESPECIALES

a) Si "O" es el circuncentro del Δ ABC

$\Rightarrow$ $m \measuredangle AOC = 2\, m \measuredangle B$ ... (10.10)

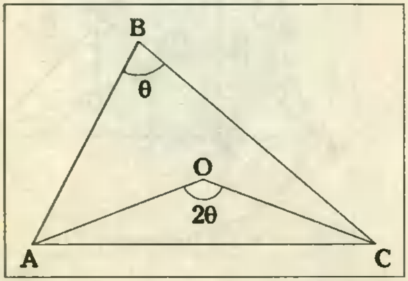


Fig. 10.10

b) Si OA = OC y $m \measuredangle AOC = 2\, m \measuredangle B$

$\Rightarrow$ "O" es circuncentro del Δ ABC

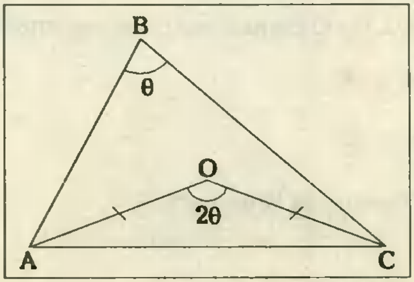


Fig. 10.11

c) En el Δ ABC, isósceles la recta de Euler ($\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$), es la mediatriz relativa a la base conteniendo además del baricentro, ortocentro y circuncentro, al incentro y al ex-centro relativos a la base.

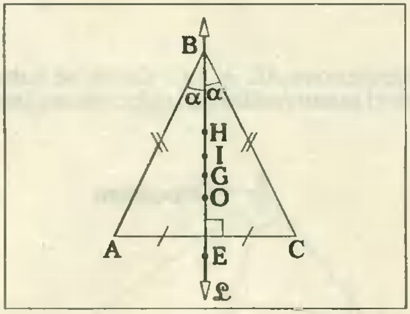


Fig. 10.12

d) En un triángulo rectángulo la recta de Euler ($\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$) contiene a la mediana relativa a la hipotenusa.

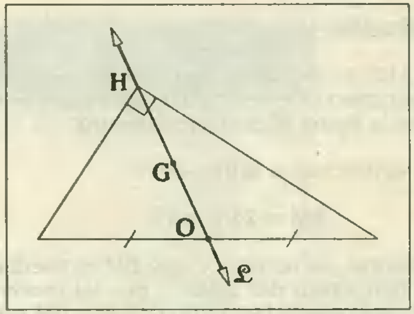


Fig. 10.13

e) En el Δ ABC acutángulo, para el Δ EFL, se cumple :

* H es el incentro
* A, B, C son ex-centros

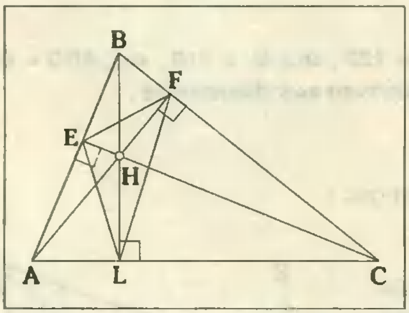


Fig. 10.14

f) En el Δ ABC obtusángulo para el Δ EFL se verifica que :

* A es el incentro
* H y C son ex-centros.

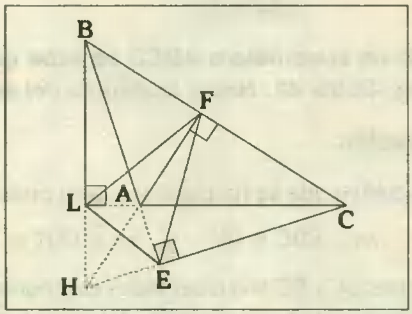


Fig. 10.15

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- En un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 24, calcular la distancia del ortocentro al baricentro.

Resolución.-

Sea ABC el triángulo rectángulo, recto en B y de hipotenusa AC = 24 . Como se sabe el circuncentro en un triángulo rectángulo, se encuentra en el punto medio de la hipotenusa, entonces en la figura M es el circuncentro.

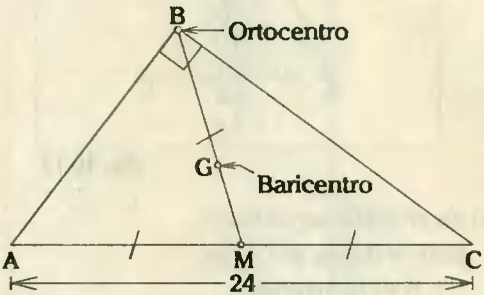
Esto significa que la distancia:

$$BM = 24/2 = 12 .$$

Asi mismo , se reconoce que BM es mediana y G el baricentro del ΔABC , por tal motivo se verificará que dicho punto divide a BM en dos segmentos tales que :

$$BG = 2x \quad \wedge \quad GM = x :$$

$$\Rightarrow \quad 2x + x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$



Finalmente la distancia entre el Ortocentro y el Baricentro será :

$$\boxed{2x = 8}$$

2.- En un cuadrilátero ABCD se sabe que $m\measuredangle B = 120$, $m\measuredangle D = 110$, $m\measuredangle ABD = 60$ y $m\measuredangle ADB = 40$. Hallar la medida del ángulo que forman sus diagonales .

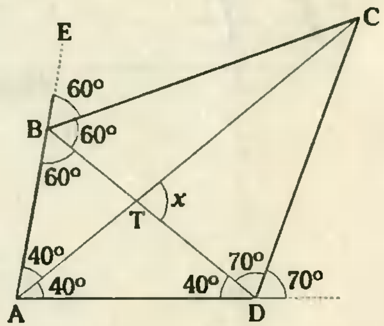
Resolución.-

En el gráfico que se ha elaborado , se puede reconocer que :

$$m\measuredangle\ EBC = 60° \quad y \quad m\measuredangle\ CDT = 70°$$

Entonces BC y DC son bisectrices exteriores del triángulo ABC, los que concurren en "C" . Asi mismo $\overline{AC}$ es bisectríz interior del ángulo A , por lo cual :

$$m\measuredangle\ BAC = m\measuredangle\ CAD = 40°$$



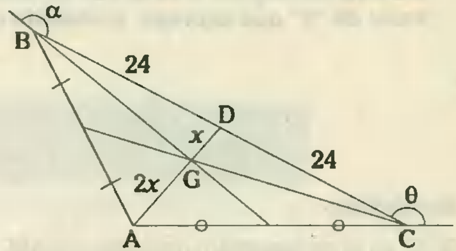
Puesto que "C" es el ex-centro del triángulo ABC relativo al lado $\overline{BD}$ (item 10.3a.), en el Δ ATD , por ángulo exterior tendremos :

$$x = 40° + 40°$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 80°}$$

3.- Si la suma de dos ángulos exteriores de un triángulo mide 270º y el lado mayor mide 48m ; hallar la distancia del baricentro al circuncentro.

Resolución.-



Sean "α" y "θ" los ángulos exteriores, entonces :

$$\alpha + \theta = 270° \qquad ...\ (1)$$

Reconocemos que el lado mayor es :

$$BC = 48\,m$$

Si "G" es el baricentro del Δ ABC , entonces :

$$AG = 2GD$$

Por consiguiente : $BD = DC = 24\,m$

En el triángulo ABC : $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$

Reemplazando : $m\measuredangle A + (180 - \alpha) + (180 - \theta) = 180$

Luego : $m\measuredangle A + 180 + 180 = 180 + \alpha + \theta$

Ahora : $m\measuredangle A = \underbrace{(\alpha + \theta)} - 180 \qquad ...\ (2)$

Reemplazando (1) en (2) : $m\measuredangle A = 270 - 180$

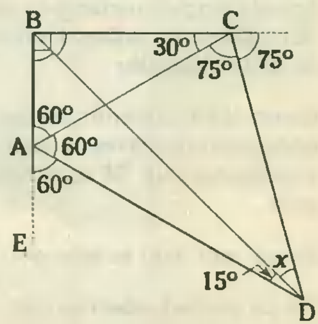
De donde : $m\measuredangle A = 90$

Entonces el triángulo ABC es rectángulo y recto en A, en consecuencia "D" será su circuncentro, de este modo por propiedad se tendrá que :

$$AD = \frac{BC}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = \frac{48}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 8m}$$

4.- En un cuadrilátero ABCD , $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son bisectrices de los ángulos $\measuredangle$A y $\measuredangle$B que miden 120º y 90º respectivamente. Hallar la medida del $\measuredangle$ BDC

Resolución.-



Del gráfico la $m\measuredangle$ EAD = 60 , entonces de acuerdo con el item 10.3a., "D" es el ex-centro del triángulo ABC.

En el triángulo ABD : $120 + 45 + m\measuredangle BDA = 180$

Entonces : $m\measuredangle BDA = 15$

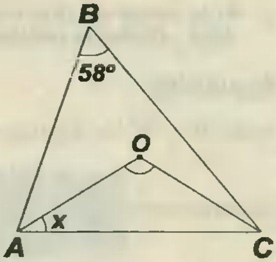
Como $\overline{CD}$ es bisectríz exterior, entonces : $m\measuredangle ACD = 75$

En el triángulo ADC : $60 + 75 + x + 15 = 180$

Luego : $150 + x = 180$

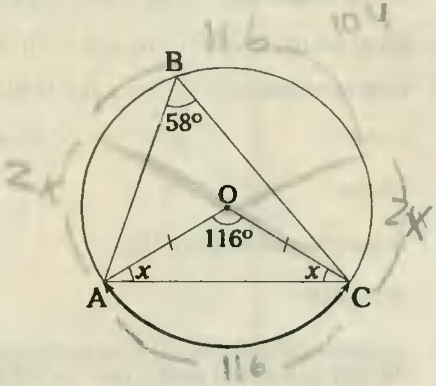
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 30°}$$

5.- En el triángulo ABC mostrado se sabe que "O" es el circuncentro del triángulo ABC . Sabiendo además que la medida del ángulo B es la que se indica , se pide calcular el valor de "x" que expresa la medida del ángulo OAC .



Resolución.-

Si "O" es el circuncentro del triángulo ABC, entonces será también centro de la circunferencia circunscrita al triángulo , tal como se indica en la figura adjunta .



Luego : $OA = OC$

Entonces la : $m\measuredangle OAC = m\measuredangle OCA = x$

Por ángulo inscrito : $m\,\overset{\frown}{AC} = 2\,m\measuredangle ABC$

Reemplazando : $m\,\overset{\frown}{AC} = 2(58)$

Entonces : $m\,\overset{\frown}{AC} = 116$

Por ángulo central : $m\measuredangle AOC = 116$

En el triángulo AOC : $x + 116 + x = 180$

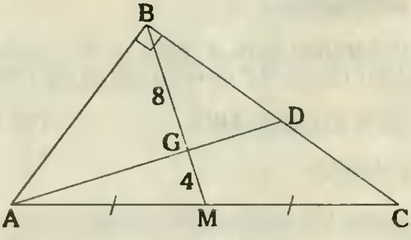
Donde : $2x = 64$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 32}$

6.- Se tiene un triángulo rectángulo, donde la distancia del baricentro al circuncentro es 4. Calcular la longitud de la hipotenusa.

Resolución.-

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en el que $\overline{AD}$ y $\overline{BM}$ son medianas, entonces "G" es el baricentro de dicho triángulo .



Como el circuncentro en un triángulo rectángulo, se encuentra ubicado en el punto medio de la hipotenusa , concluímos que "M" es el circuncentro de dicho triángulo .

Ahora , por dato se sabe que : $GM = 4$

Por propiedad sabemos que : $BG = 2\,GM$

Entoncesla medida de BG será : $BG = 2(4)$

Luego : $BG = 8$

En consecuencia : $BM = 12$

Por propiedad : $BM = \dfrac{AC}{2}$

De donde : $AC = 2\ BM$

Remplazando : $AC = 2\ (12)$

$\therefore$ **$AC = 24$**

7.- Se tiene un triángulo acutángulo ABC, $\overline{BH}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{AR}$ son alturas. Si m $\measuredangle$ A = 50 ; hallar la m $\measuredangle$ QRH.

<u>**Resolución**</u>.-

En el gráfico : $Q\hat{R}H = Q\hat{R}A + A\hat{R}H$ ... (α)

El cuadrilátero AQRC es inscriptible ;

Entonces : $m \measuredangle QRB = 50 = m \measuredangle A$

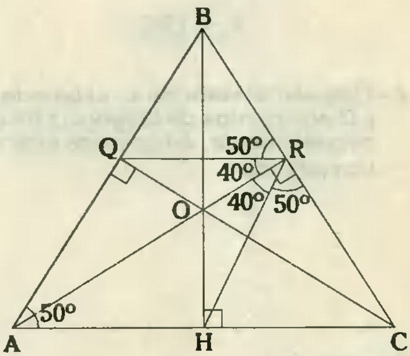
Luego : $m \measuredangle QRA = 40$ ... (1)

El cuadrilátero BRHA es inscriptible

Entonces : $m \measuredangle HRC = 50 = m \measuredangle A$

Luego : $m \measuredangle ARN = 40$ ... (2)

(1) y (2) en (α) : $m \measuredangle QRH = 40 + 40$

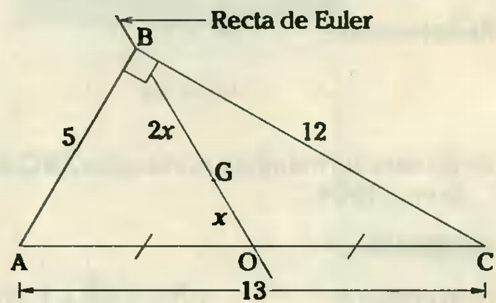


$\therefore$ **$m \measuredangle QRH = 80°$**

MISCELÁNEA

1.- *Hallar la distancia del circuncentro al baricentro en un triángulo si sus lados miden 5; 12 y 13.*

Resolución.-



Según las longitudes de los lados, el triángulo es rectángulo.

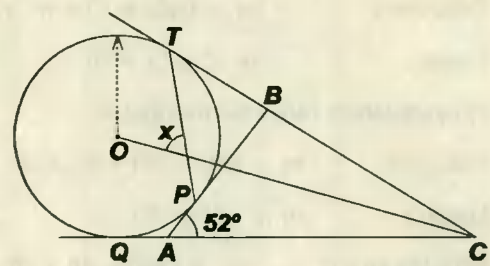
Además sabemos que el baricentro divide a toda mediana de un triángulo en una relación matemática como 2 es a 1.

Luego si : $OG = x$, entonces $BG = 2x$.

Finalmente : $3x = \dfrac{13}{2}$

$\therefore$ $x = 13/6$

2.- *Calcular el valor de x , sabiendo que : T , P y Q son puntos de tangencia de una misma circunferencia , tal como se indica en el gráfico adjunto.*



Resolución.-

En el Δ ABC , se puede reconocer que $\overline{CO}$ es bisectríz interior del $\measuredangle$C , luego :

$$2\alpha + 2\theta + 52° = 180°$$

De donde : $2(\alpha + \theta) = 180° - 52°$

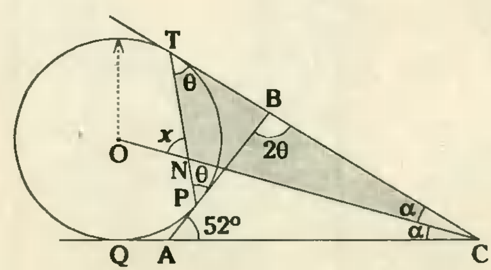
Ahora : $2(\alpha + \theta) = 128°$

Luego : $\alpha + \theta = 64°$

Finalmente en el Δ NTC por $\measuredangle$ exterior :

$$x = \alpha + \theta$$

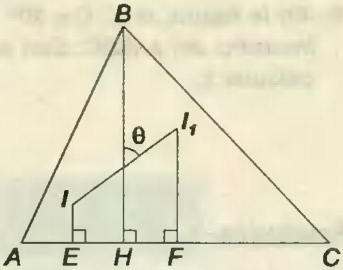
$\therefore$ $x = 64°$



3.- Si : I → Incentro del Δ ABH

I_1 → Incentro del Δ HBC.

Además : IE = 1 ∧ I_1F = 7 ; calcular el valor de "θ", que expresa la medida del ánguo indicado .



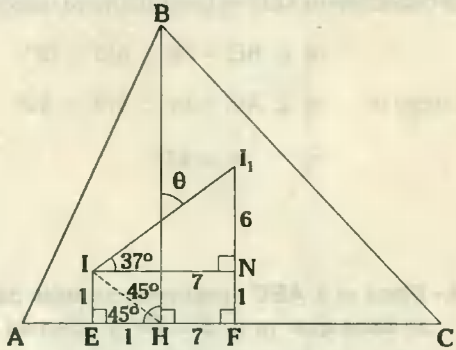
Resolución.-

Al trazar $\overline{IN}$ perpendicular a $\overline{I_1F}$, entonces se podrá reconocer que :

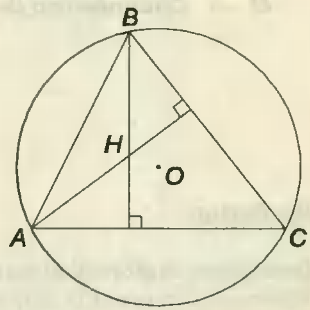
$$I_1N = 6 \;\; y \;\; IN = 8.$$

Luego la : $m \measuredangle I_1IN = 37^o$

En consecuencia : $\boldsymbol{\theta = 53^o}$



4.- En el gráfico "H" es ortocentro y "O" es el circuncentro. Si : HA + HB = 12 , hallar la suma de las distancias de "O" a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



Resolución.-

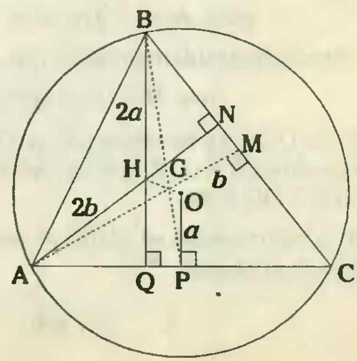
Por condición del problema se sabe que :

$$2a + 2b = 12 \quad \Rightarrow \quad a + b = 6$$

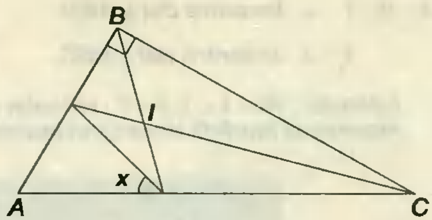
Pero por Propiedad : $OP = \dfrac{BH}{2} = a$ y $OM = \dfrac{AN}{2} = b.$

Luego la suma de las distancias de "O" a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ será :

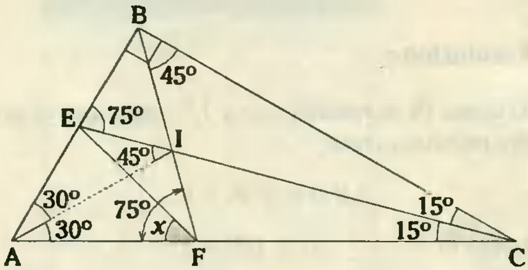
$$\therefore \quad \boldsymbol{a + b = 6}$$



5.- En la figura, m ∡ C = 30º , asi mismo I es el Incentro del Δ ABC. Con estos datos se pide calcular x.



Resolución.-



El cuadrilátero AEIF es inscriptible ya que la:

$$m\measuredangle BEI = m\measuredangle AFI = 75^\circ.$$

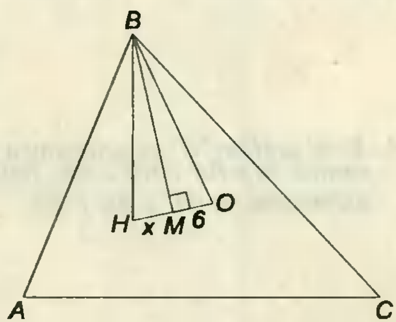
Luego la : $m\measuredangle AIE = m\measuredangle AFE = 45^\circ$

$\therefore \quad x = 45^\circ$

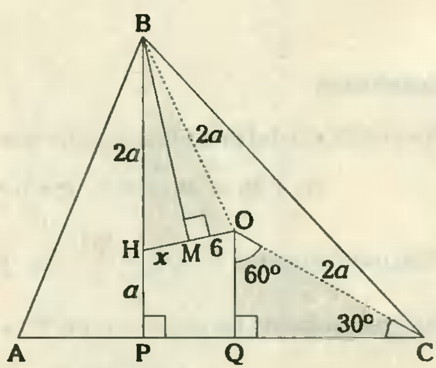
6.- Dado el Δ ABC mostrado, se pide calcular "x" si se sabe que m ∡ B = 60º y además :

H → Ortocentro del Δ ABC

O → Circuncentro del Δ ABC



Resolución.-



Recordando la propiedad expuesta en el item 9.10a , relativa al circuncentro , tendremos que :

$$m\measuredangle AOC = 2\,m\measuredangle B = m\measuredangle QOC$$

En nuestro problema resulta que :

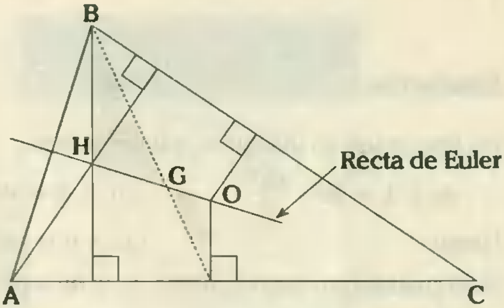
$$m\measuredangle B = m\measuredangle QOC = 60^\circ$$

El ⊿ OQC es notable (30 y 60º), por ello diremos que OC = 2 . OQ = $2a$. Además sabemos que BH = 2 OQ = $2a$.

En consecuencia, el Δ HBO es isósceles, en el cual $\overline{BM}$ es mediatríz.

$\therefore \quad x = 6$

7.- En un triángulo acutángulo la distancia del circuncentro al ortocentro es 24 m. Calcular la distancia del ortocentro al baricentro del triángulo mencionado.



<u>Resolución</u>.-

Del gráfico : H $\rightarrow$ ortocentro

G $\rightarrow$ baricentro

O $\rightarrow$ circuncentro

Por teoría sabemos que : HG = 2 . GO

Luego si : OH = 24 (dato)

Entonces : $24 = \underbrace{HG} + GO$

Ahora : $24 = 2 . GO + GO$

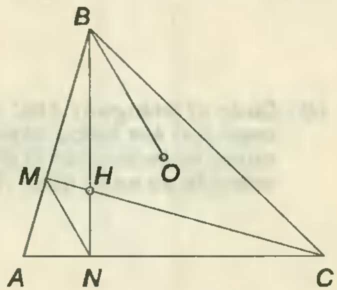
Luego : GO = 8

$\therefore$ **HG = 16**

8.- En la figura; $\overline{MN}$ // $\overline{OB}$, Calcular la m $\measuredangle$ C. Si :

"O" $\rightarrow$ Circuncentro del Δ ABC.

"H" $\rightarrow$ Ortocentro del Δ ABC.



<u>Resolución</u>.-

Si $m \measuredangle C = x$, entonces en el cuadrilátero inscriptible AMQC :

$m \measuredangle AMN = x$ y $m \measuredangle BMQ = x$

Pero por dato : $\overline{MN}$ // $\overline{OB}$, entonces se deduce que :

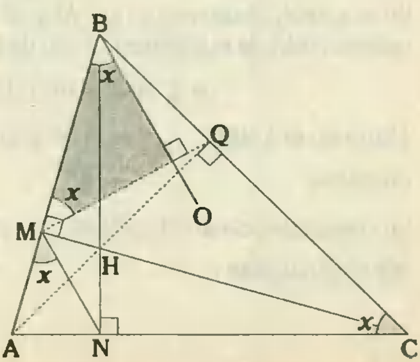
$m \measuredangle MBO = x$.

Además sabemos por propiedad que $\overline{MQ} \perp \overline{OB}$.

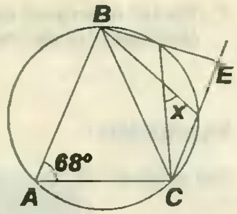
En consecuencia : $x + x = 90^o$

Donde : $2x = 90^o$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 45^o}$



9.- En la figura mostrada se sabe que "E" es el excentro del Δ ABC. Al trazar $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ se determinan dos puntos de corte los que permiten definir el ángulo x cuya medida se pide determinar.



Resolución.-

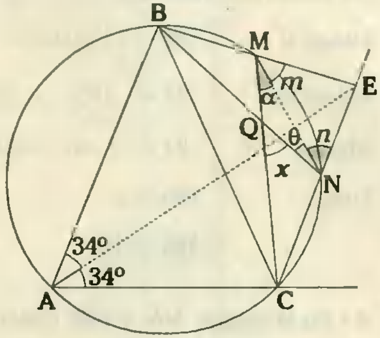
Por propiedad en triángulos, sabemos que :

$$m\measuredangle E = 90° - \frac{68°}{2} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle E = 56°$$

Luego : $m + n = 124°$

En el cuadrilátero inscrito ABMC : $\alpha + m = 68°$ ... (1)

En el cuadrilátero inscrito ABNC : $\theta + n = 68°$ ... (2)

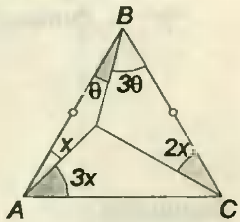


Sumando (1) y (2) : $\underbrace{\alpha + \theta}_{x} + \underbrace{m + n}_{124°} = 136°$

Donde : $x + 124° = 136°$

$$\therefore \quad \boxed{x = 12°}$$

10.- Dado el triángulo ABC se han trazado varias líneas que forman con los lados algunos ángulos característicos , según como se indican en el gráfico . Se pide calcular "x" ,en donde además se sabe que : AB = BC.



Resolución.-

En el ΔABC isósceles trazamos $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, entonces : $m\measuredangle NAM = m\measuredangle NCM = 2x$

En el Δ ABN, observamos que $\overline{AI}$ y $\overline{BI}$ son bisectrices que permiten ubicar el incentro " I " de dicho triángulo, luego :

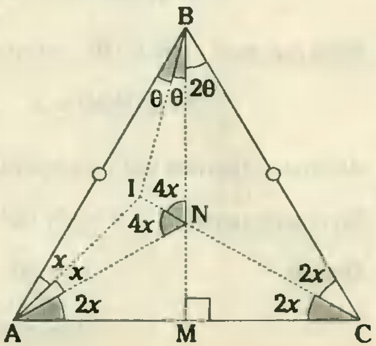
$$m\measuredangle ANI = m\measuredangle INB = 4x$$

Ahora en el Δ NBC : $4x = 2\theta + 2x$

Entonces : $x = \theta$

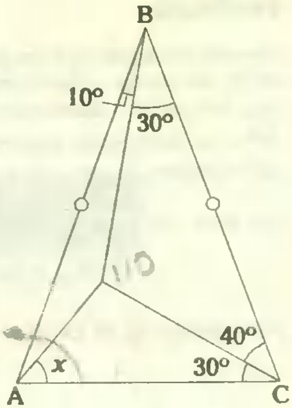
En consecuencia en el $\triangle$NMC : $m\measuredangle N + 4x = 90°$

Por consiguiente : $4x + 4x = 90°$



$$\therefore \quad \boxed{x = 15°}$$

11.- En el triángulo isósceles ABC, se han trazado varias líneas , las mismas que forman algunos ángulos de medidas conocidas e indicadas . Con estos datos se pide calcular "x"



<u>Resolución</u>.-

En el triángulo isósceles ABC se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, reconociéndose que $\overline{BH}$ es mediatriz del lado $\overline{AC}$.

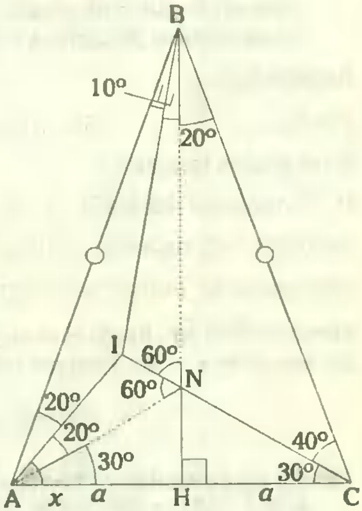
De este modo deducimos que AN = NC . Luego el Δ ANC es isósceles.

De acuerdo con esto se pueden deducir las medidas de los ángulos : ∡ANI y ∡BNI , los que a su vez son de igual medida , tal como se indica en el gráfico adjunto.

En el Δ ABN observamos que $\overline{BI}$ y $\overline{NI}$ son bisectrices, entonces "I" es incentro de dicho triángulo, luego $\overline{AI}$ también es bisectriz.

En consecuencia : $x + 20° \ 30°$

∴ $x = 50°$



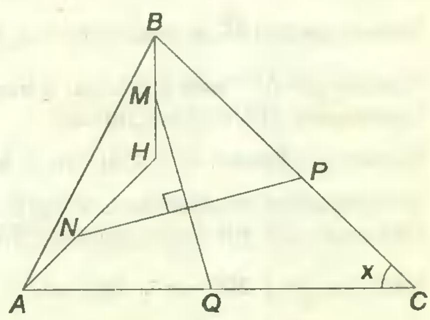
12.- En la figura se pide calcular "x ", sabiendo que :

"H" → Ortocentro del Δ ABC.

Además se sabe que :

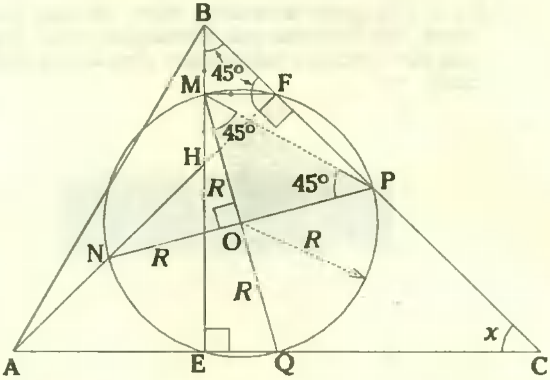
BM = MH , AN = NH,

BP = PC y AQ = QC.



Resolución.-

Resulta evidente que los puntos MNQ y P están en la circunferencia de los 9 puntos. Asi mismo observamos que $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$ son diámetros, entonces el ⊿ OMP es isósceles, luego : $m\measuredangle$ MPO = 45°.



Por ello : $m\measuredangle$ MFH = 45°

$m\measuredangle$ MFB = $m\measuredangle$ MBF = 45°.

Finalmente en el ⊿ EBC: **x = 45°**

13.- *En un triángulo ABC, la diferencia entre las longitudes de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ que forman un ángulo cuya medida es 60º, es igual a 8m. Hallar la distancia del ortocentro al circuncentro de dicho triángulo.*

Resolución.-

Por dato : BC - AB = 8 ... (1)

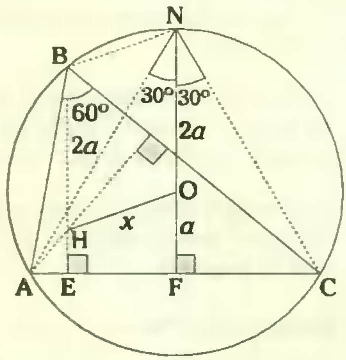
En el gráfico tenemos :

H : Ortocentro del Δ ABC y O : circuncentro del Δ ABC

Por teoría sabemos que : BH = 2 .OF = $2a$

Pero como "O" es baricentro del Δ ANC, entonces NO = $2a$

Además $\overline{BE}$ // $\overline{NF}$, luego el cuadrilátero HBNO es un romboide, entonces x = BN. Pero por propiedad : BN = BC - AB = 8.



∴ **x = 8 m**

14.- *En un cuadrilátero convexo ABCD, m∡ ABD = 45º, m∡ DBC = 20º, m∡ BDC = 25º y m∡ CAD = 40º. Hallar m∡ ACD.*

Resolución.-

Trazamos el rayo $\overrightarrow{BK}$ de modo que : $m\measuredangle$ CBK = 20°.

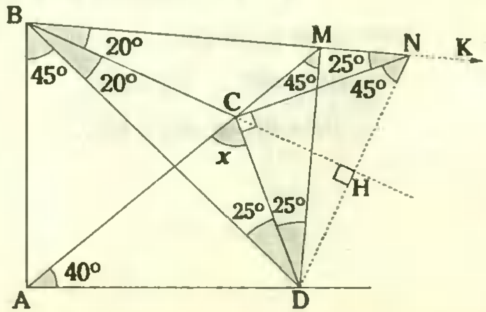
Al prolongar $\overline{AC}$ hasta M y luego al trazar $\overline{MD}$, el cuadrilátero ABMD es inscriptible.

En este cuadrilátero : $m\measuredangle$ ABD = $m\measuredangle$ AMD = 45°.

A continuación, construimos el triángulo isósceles DBN, en el que $\overline{BH}$ es mediatriz de $\overline{DN}$.

Entonces : $m\measuredangle$ BDC = $m\measuredangle$ BNC = 25° y DC = CN.

Luego el triángulo DCN es rectángulo isósceles.

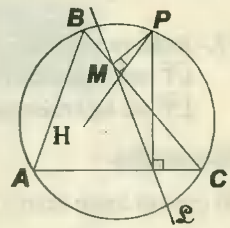


Por lo cual el cuadrilátero DCMN es inscriptible, entonces : $m\measuredangle$ CDM $= m\measuredangle$ CNM$= 25°$

Finalmente en el Δ DCM : $x = 25° + 45°$

$\therefore$ $x = 70°$

15.- En la figura adjunta se sabe que MP = 8 y asi mismo H → Ortocentro del Δ ABC . Con estos datos se pide calcular la longitud de HM.



<u>Resolución</u>.-

En primer lugar reconocemos que $\overline{AC}$ es mediatriz de $\overline{HL}$.

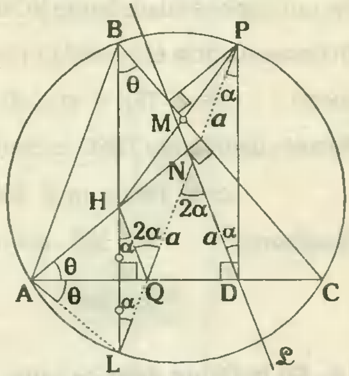
Ahora hacemos que :

$$m\measuredangle HQN = m\measuredangle QND = 2\alpha$$

Esto provocará que la recta £ sea paralela a $\overline{HQ}$. Por otro lado en el ⊿ QDP : $\overline{DN}$ es mediana relativa a la hipotenusa $\overline{PQ}$, entonces : QN = NP = a.

En consecuencia, por el Teorema de los puntos medios en el Δ HPQ se tendrá que : HM = MP

$\therefore$ **HM = 8**



16.- Se tiene un triángulo ABC (AB = BC) inscrito en una circunferencia. ¿Qué punto notable del triángulo es el punto medio de la cuerda que une los puntos de tangencia sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por la circunferencia tangente también a la primera.

<u>Resolución</u>.-

Al elaborar el gráfico correspondiente , en el Δ ABC, encontramos que $\overline{BT}$ es mediatriz de $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$.

También reconocemos que : $\overline{PQ}$ // $\overline{AC}$.

Por ángulos alternos internos :

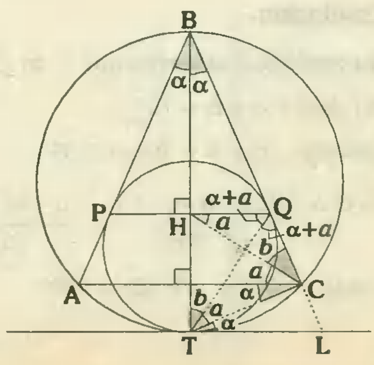
$$m\measuredangle CTL = m\measuredangle ACT = \alpha$$

También : $m\measuredangle QHC = m\measuredangle HCA = a$

En el cuadrilátero inscriptible THQC :

$$m\measuredangle QHC = m\measuredangle QTC = a$$

Pero : $m\measuredangle QTL = m\measuredangle TQL = \alpha + a$



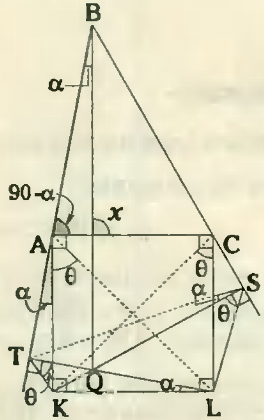
Luego en el ⊿ TQC : $\alpha + a + b = \alpha + 2a$

De donde : $a = b$

Esto nos lleva a afirmar que el punto H es el ***incentro*** del Δ ABC.

17.- Exteriormente a un triángulo ABC se construye el rectángulo ACLK, asi mismo $\overline{KS}$ y $\overline{LT}$ son perpendiculares a las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. Si $\overline{KS}$ y $\overline{LT}$ se intersectan en "Q" , se pide hallar la medida del ángulo entre $\overline{BQ}$ y $\overline{AC}$

Resolución.-



En primer lugar colocamos la medida del ángulo TAK igual a "α"

Luego en el cuadrilátero inscriptible TALK, $m \measuredangle$ TLK $= \alpha$

Por otro lado el cuadrilátero KCSL es inscriptible.

En consecuencia el cuadrilátero KTSL es inscriptible.

Luego : $m \measuredangle$ TSK $= m \measuredangle$ TLK $= \alpha$

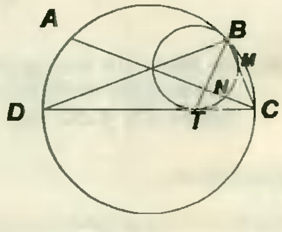
Pero el cuadrilátero TBSQ es inscriptible, entonces la :

$$m \measuredangle \text{TBQ} = m \measuredangle \text{TSQ} = \alpha$$

Finalmente : $x = 90^\circ - \alpha + \alpha$

$$\therefore \quad \boxed{x = 90^\circ}$$

18.- En la figura dada calcular α , si : m $\overset{\frown}{MN} = 2\alpha$. Además : m $\measuredangle$ BCA + m $\measuredangle$ BDC = 70º y m $\measuredangle$ DBC = 85º. (B y T son puntos de tangencia).

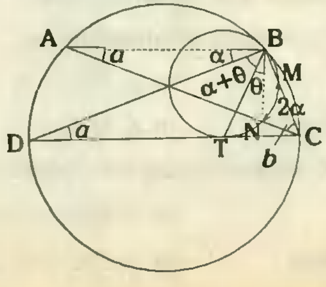


Resolución.-

Por propiedad sabemos que : $m \measuredangle$ ABD $= m \measuredangle$ NBC $= \alpha$ y $m \measuredangle$ DBT $= m \measuredangle$ TBC $= \alpha + \theta$

Por dato : $a + b = 70^\circ$

También : $\alpha + \theta + \theta + \alpha = 85^\circ$



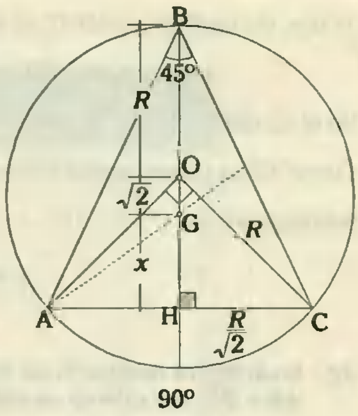
En el Δ ABC : $\underbrace{a+b}_{70^\circ} + \alpha + \underbrace{\alpha+\theta+\theta+\alpha}_{85^\circ} = 180^\circ$

Luego : $70^\circ + \alpha + 85^\circ = 180^\circ$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = 25^\circ}$$

19.- Se tiene un triángulo isósceles ABC inscrito en una circunferencia de radio "R". Hallar el valor R , si : AB = BC , OG = $\sqrt{2}$ y m ∡ ABC = 45º; siendo "G" el baricentro y "O" el circuncentro .

Resolución.-



Resulta predecible que el arco AC = 90° , por lo tanto el Δ AOC es recto en O

Luego : OH = AC = $2\sqrt{2}$

En el ⊿ OHC isósceles : OH = $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

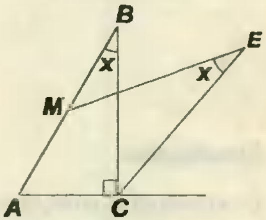
$$\Rightarrow \quad x = OH - OG = \frac{R}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \qquad (1)$$

Luego aplicando la propiedad del baricentro, tendremos :

$$\frac{R+\sqrt{2}}{x} = \frac{2}{1} \qquad \Rightarrow \qquad R + \sqrt{2} = 2x \qquad (2)$$

De (1) en (2) : $R + \sqrt{2} = 2\left[\dfrac{R}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R = 3(2+\sqrt{2})}$

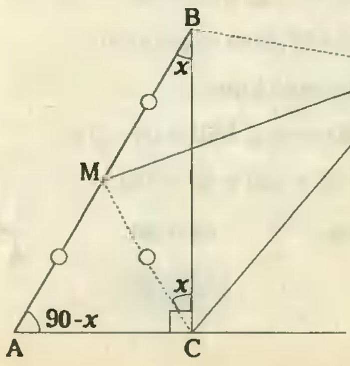
20.- Calcular el valor de x , si "E" es el excentro del triángulo ABC . Además se sabe que : AM = MB



Resolución.-

Trazamos $\overline{CM}$, entonces el cuadrilátero MBEC es inscriptible por que :

$$m ∡ \text{ MEB} = m ∡ \text{ MCB} = x$$



Aplicando la relación (4 .10) de Triángulos ,en el ΔAMC :

$$2x = 90° - \frac{m∡ A}{2}$$

De donde : $2(2x) = 180° - (90° - x)$

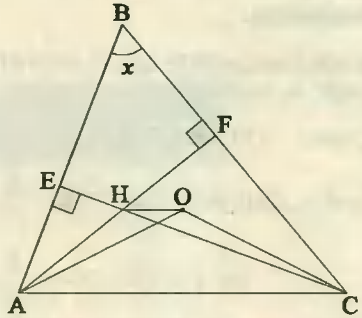
En consecuencia : $4x = 90° + x$

Ahora : $3x = 90°$

$$\therefore \quad \boxed{x = 30°}$$

21.- En un triángulo acutángulo ABC, H es el ortocentro y O es el circuncentro. Hallar la medida del ángulo B, para que el cuadrilátero AHOC sea inscriptible.

Resolución.-



Ya que el cuadrilátero AHOC es inscriptible, entonces :

$$m \measuredangle AHC = m \measuredangle AOC \quad ... (*)$$

En el □ EBFH : $m \measuredangle AHC = 180 - x$

Como "O" es circuncentro, entonces : $m \measuredangle AOC = 2x$

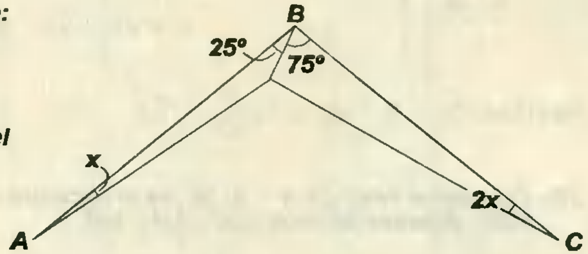
Sustituyendo en (*) : $180 - x = 2x$

$$\therefore \quad x = 60^\circ$$

22.- En la figura mostrada se tiene que: AB = BC. Asi mismo se sabe que :

$$m \measuredangle BCE = 2\, m \measuredangle BAE$$

Con estos datos se pide calcular el valor de x



Resolución.-

En el triángulo isósceles ABC que se muestra , hemos trazamos la altura $\overline{BH}$, luego :

$m \measuredangle ABD = m \measuredangle DBH = 25^\circ$

$$AE = EC$$

$m \measuredangle BAE = m \measuredangle DCB = 2x$

Para el Δ AEB, D es el incentro.

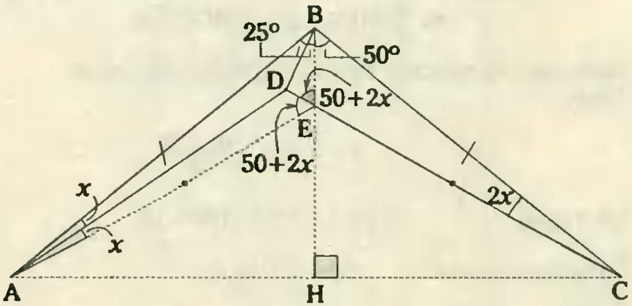
Luego se tendrá que :

$m \measuredangle AED = m \measuredangle DEB = 50 + 2x$

y $2x + 50 + 100 + 4x = 180$

De donde : $6x = 30$

$$\therefore \quad x = 5^\circ$$



23.- *En un triángulo isósceles ABC : m ∡ B = 120º. Si "I" es el incentro, O es el circuncentro y E el excentro relativo a uno de los lados iguales, calcular la medida del ángulo IEO.*

Resolución.-

De acuerdo con la relación (4.9), se tiene :

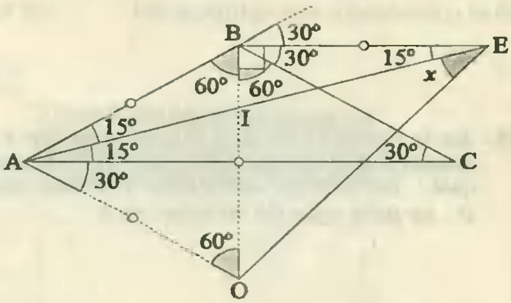
$$m\measuredangle \text{BEA} = \frac{m\measuredangle \text{C}}{2} = 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{AB} = \text{BE}$$

Por propiedad del circuncentro OB = OA, luego el Δ AOB resulta ser equilátero ,donde:

$$\text{OA} = \text{OB} = \text{AB}$$

El ⊿ OBE es isósceles , luego : $x + 15 + 45^\circ$

$$\therefore \qquad x = 30^\circ$$



24.- *En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la altura $\overline{BH}$ mide $5\sqrt{2}$. Calcular la distancia del vértice B a la recta que contiene a los incentros de los triángulos AHB y BHC.*

Resolución.-

En el Δ AFB : $\alpha + 2\theta + \alpha + m\measuredangle F = 180^\circ$, como : $2\alpha + 2\theta = 90 \Rightarrow m\measuredangle F = 90^\circ$

Por analogía en el Δ BEC ,logramos deducir que $m\measuredangle E = 90^\circ$

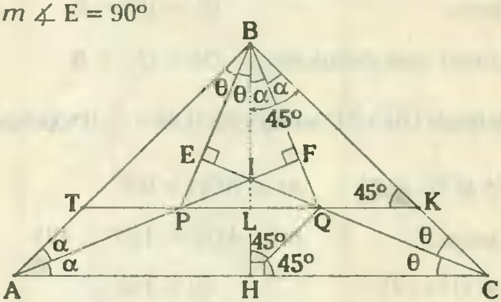
Con respecto al Δ PBQ, I es ortocentro, luego la altura $\overline{BL}$ pasa por I.

En el ⊿ BLK : $m\measuredangle K = 45^\circ$ y $BK = BL\sqrt{2}$

Ahora se tiene : Δ HQB ≅ Δ BQK (ALA)

$$\Rightarrow \quad BH = BK = 5\sqrt{2}$$

Luego : $5\sqrt{2} = BL\sqrt{2}$ $\quad\therefore\quad$ **BL = 5**



25.- *En un triángulo ABC , m ∡ A = 32º , m ∡ C = 88º. Si O es el circuncentro , I es el incentro y H es el ortocentro de dicho triángulo , se pide calcular m ∡ OIH.*

Resolución.-

En el Δ ABC : $\qquad m\measuredangle B = 60^\circ$

En el ⊿ AQC : $\qquad m\measuredangle QAC = 2^\circ$

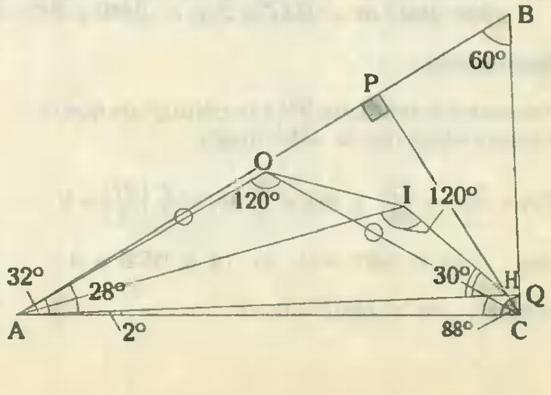
Por propiedad : $\qquad m\measuredangle AOC = 120^\circ$

Luego Δ AOC es isósceles , donde :

$m\measuredangle OAC = 30^\circ$ y $m\measuredangle OAH = 28^\circ$

Como I es incentro, entonces :

$$m\measuredangle AIC = 90 + \frac{60}{2} = 120^\circ$$



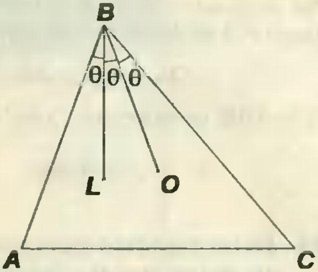
Si H es ortocentro, entonces : $m\measuredangle AHC = 120^\circ$

El Pentagono AOIHC es inscriptible ya que : $\measuredangle AOC \cong \measuredangle AIC \cong \measuredangle AHC$

En el cuadrilátero inscriptible AOIH : $28 + m\measuredangle OIH = 180$

$\therefore$ $\mathbf{m\measuredangle OIH = 152^\circ}$

26.- En la figura O y L son el circuncentro y el ortocentro respectivamente del triángulo ABC. Si además se sabe que : BO = BL , y que existe una trisección del ángulo B , se pide calcular el valor de θ.



Resolución.-

Por Propiedad : $m\measuredangle AOC = 2m\measuredangle B = 6\theta$ ... (1)

Sean : $BL = BO = R$

Luego , por definición : $OA = OC = R$

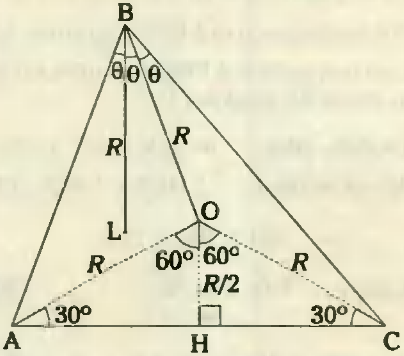
Al trazar $\overline{OH} \perp \overline{AC}$ tendremos : $OH = \dfrac{R}{2}$ (Propiedad 10.6a)

En el ⊿ AHO : $m\measuredangle AOH = 60^\circ$

Luego : $m\measuredangle AOC = 120^\circ$ ... (2)

De (1) y (2) : $6\theta = 120$

$\therefore$ $\mathbf{\theta = 20^\circ}$



27.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la mediana $\overline{AM}$, si además se sabe que : m ∡ BAC = 2 m ∡ AMB y AC = 27, calcular AB.

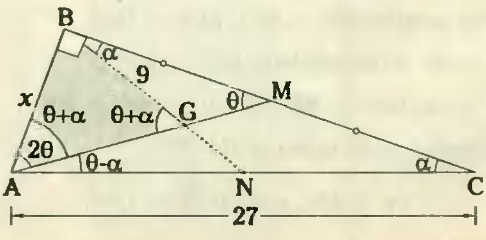
Resolución.-

Trazamos la mediana $\overline{BN}$ y encontramos que G es baricentro del ⊿ ABC, luego :

$BN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{27}{2}$ y $BG = \dfrac{2}{3}BN = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{27}{2}\right) = 9$

Sea : $m\measuredangle NBC = \alpha \Rightarrow m\measuredangle NCB = \alpha$

Δ AMC : $m\measuredangle MAC = \theta - \alpha$



Y en el Δ BGM : $m \measuredangle BGA = \theta + \alpha$

El Δ ABG es isósceles ($\measuredangle BAG \cong \measuredangle BGA$)

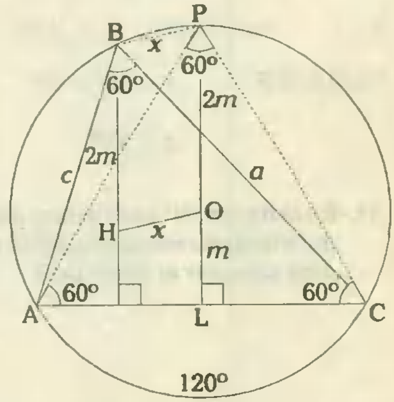
$\therefore \quad x = 9$

28.- En un triángulo acutángulo ABC, H es ortocentro y O el circuncentro. Calcular HO, si AB = c , BC = a y m $\measuredangle$ B = 60º (a > c).

<u>Resolución</u>.-

Si H es ortocentro y O circuncentro , hacemos :

OL = m $\Rightarrow$ BH = 2m (Propiedad 10.6a)



Prolongamos $\overline{LO}$ hasta intersectar a la circunferencia circunscrita en el punto P, luego PA = PC y ya que $m \measuredangle APC = 60^o$, entonces el Δ APC es equilátero.

"O" es baricentro del Δ APC , luego : PO = 2 OL = 2m

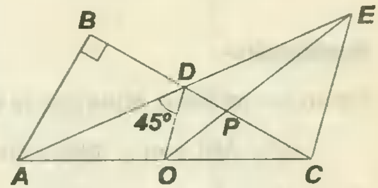
$\square$ HBPO es un romboide, entonces : BP = HO = x

Con respecto al triángulo equilátero APC aplicamos el Teorema de Chadu : BC = BA + BP

Luego : $a = c + x$

$\therefore \quad x = a - c$

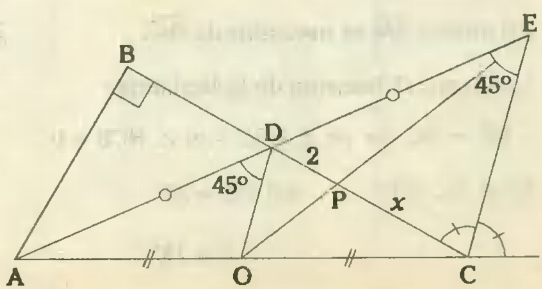
29.- En la figura E es el excentro del triángulo ABC y O el circuncentro. Hallar PC , si PD = 2



<u>Resolución</u>.-

Ya que "E" es el excentro del $\triangle$ ABC , entonces , por propiedad :

$$m \measuredangle AEC = \frac{90^o}{2} = 45^o$$



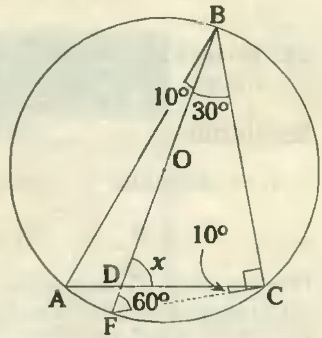
Para el Δ AEC : $\overline{DO}$ es base media, en consecuencia : AD = DE , con lo cual resulta que P es baricentro .

Entonces : $x = 2(2)$

$\therefore \quad x = 4$

30.- En un triángulo acutángulo ABC, O es el circuncentro; $\overline{BO}$ prolongado intersecta en D a $\overline{AC}$. Calcular la m ∡ BDC, si m ∡ ABO = 10º y m ∡ OBC = 30º

Resolución.-



Puesto que "O" es circuncentro del Δ ABC entonces será centro de la circunferencia circunscrita al Δ ABC.

Prolongamos $\overline{BD}$ hasta intersectar en F a la circunferencia; luego en el ⊿ BCF :

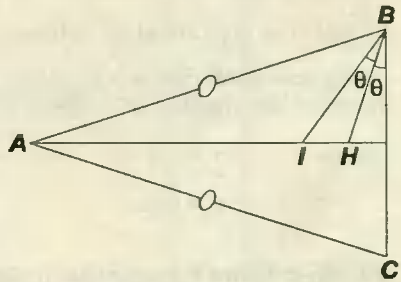
m ∡ BFC = 60°

Y m ∡ ACF = m ∡ ABF (∡ inscrito)

En el Δ DCF : $x = 10° + 60°$ (∡ exterior)

∴ $\boldsymbol{x = 70°}$

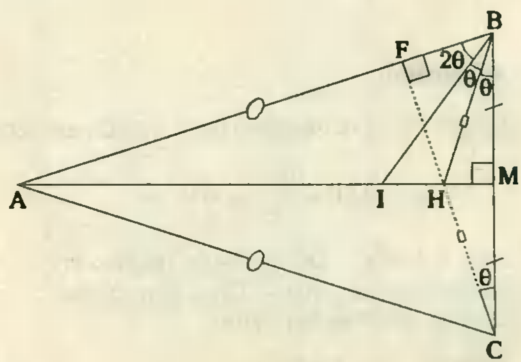
31.- En la figura "H" es el ortocentro e "I" es el incentro del triángulo isósceles ABC. Con estos datos, se pide calcular el valor de θ.



Resolución.-

Como I es incentro, entonces se deberá cumplir que :

m ∡ ABI = m ∡ IBM = 2θ



Como H es el ortocentro , entonces la prolongación de $\overline{CH}$ intersecta perpendicularmente a $\overline{AB}$ en F .

Asi mismo $\overline{AM}$ es mediatríz de $\overline{BC}$.

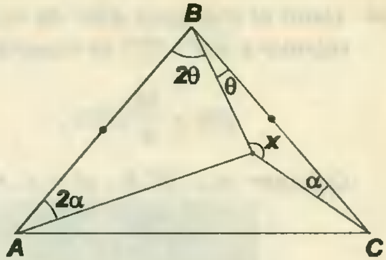
Luego por el Teorema de la Mediatríz :

HB = HC ⇒ m ∡ HBC = m ∡ HCB = θ

En el ⊿ BFC : $4\theta + \theta = 90°$

∴ $\boldsymbol{\theta = 18°}$

32.- Dado el triángulo ABC, donde AB = BC, calcular "x"



Resolución.-

En el triángulo isósceles ABC trazamos la altura $\overline{BH}$.

Luego : $m\measuredangle ABH = m\measuredangle HBC = 2\theta$

$m\measuredangle BAP = m\measuredangle TCB = 2\alpha$

Si "P" es incentro del Δ TBC :

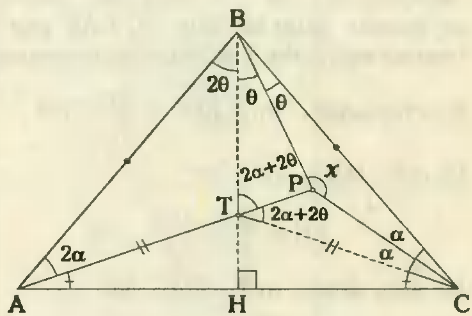
$\Rightarrow m\measuredangle BTP = m\measuredangle PTC = 2\alpha + 2\theta$

Δ TBC : $6(\alpha+\theta) = 180 \Rightarrow \alpha + \theta = 30$

Δ PBC : $\alpha + \theta + x = 180$

Reemplazando : $30 + x = 180$

$\therefore \quad \mathbf{x = 150^o}$



33.- Desde un punto "P" exterior a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Sobre $\overline{OP}$ se ubica el punto E de modo que $\measuredangle EAB \cong \measuredangle BAO$.
¿Qué punto notable es E del Δ PAB ?

Resolución.-

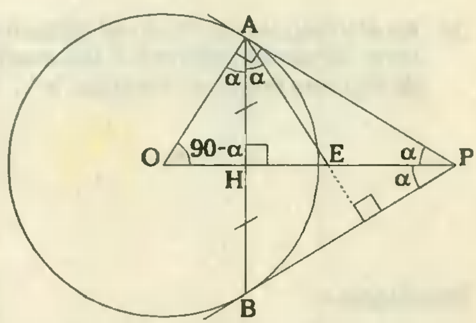
Del gráfico observamos que $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

Además se verifica que :

$m\measuredangle OAH = m\measuredangle APO = m\measuredangle OPB = \alpha$

Al prolongar $\overline{AE}$, éste intersecta perpendicularmente a PB.

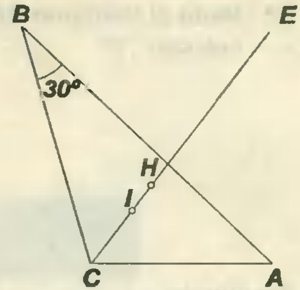
Luego para el triángulo PAB, "E" es el **ortocentro.**



34.- Dado el triángulo ABC de incentro I y excentro relativo a $\overline{AB}$: "E"; se cumple que :

$$(IE) = \frac{16}{5}\,(AC).$$

Calcular m ∡ BCA , si m ∡ ABC = 30º



Resolución.-

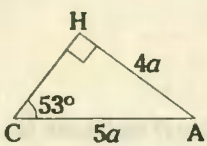
Hacemos AC = 5a ⇒ IE = 16a .Asi mismo se puede apreciar que $\overline{AI} \perp \overline{AE}$ por ser bisectrices interior y exterior respectivamente.

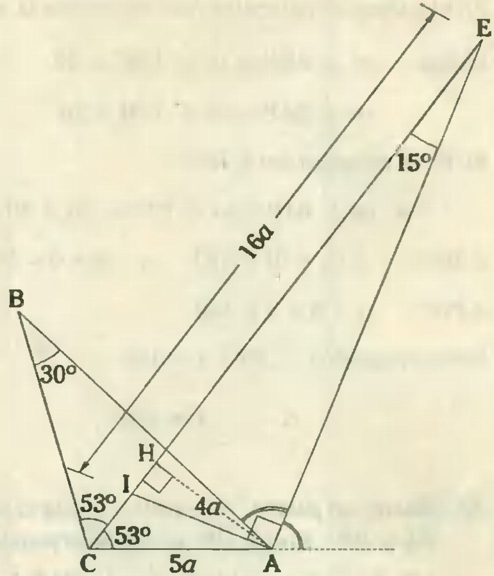
Por Propiedad : $m\measuredangle \text{AEC} = \frac{30}{2} = 15^\circ$

En el ⊿ IAE de 15º y 75º :

$$AH = \frac{IE}{4} = \frac{16a}{4} = 4a$$

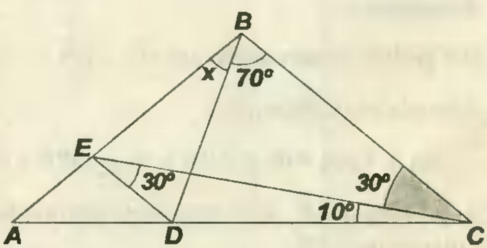
En el ⊿ AHC : $m\measuredangle \text{HCA} = 53^\circ$





En el Δ ABC : $m\measuredangle$ **BCA = 106º**

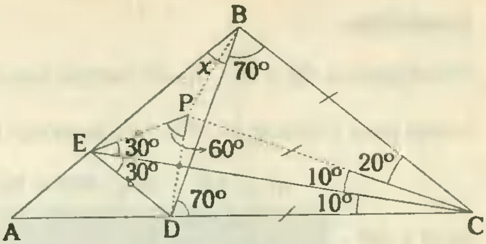
35.- En el triángulo mostrado se indican una serie de datos relativos a las medidas de algunos ángulos . Calcular "x" .



Resolución.-

En el triángulo isósceles BCD reconocemos que : BC = CD

A continuación construímos el triángulo equilátero PED



Luego : EP = ED = PD y $m \measuredangle$ EPD = 60°

Además por ser $\overline{EC}$ mediatríz de $\overline{PD}$:

CP = CD y $m \measuredangle$ PCD = 20°

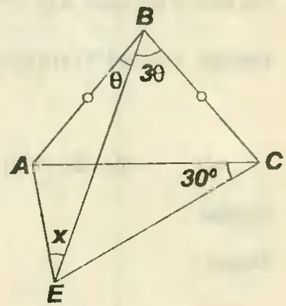
ΔPCB ≅ ΔPCD (L.A.L.) ⇒ PB = PD

P es circuncentro del ΔEBD ⇒ 60 = 2x

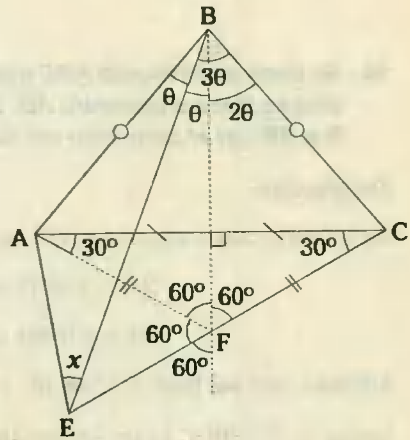
∴ $x = 30°$

36.- En la siguiente figura, calcular "x" si se sabe que el triángulo ABC, es isósceles , en donde además se sabe que :

AB = BC



Resolución.-



En el triángulo isósceles ABC, trazamos la bisectríz $\overline{BF}$

Asi mismo : $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ y FA = FC

Además : $m \measuredangle$ CAF = $m \measuredangle$ ACF = 30°,

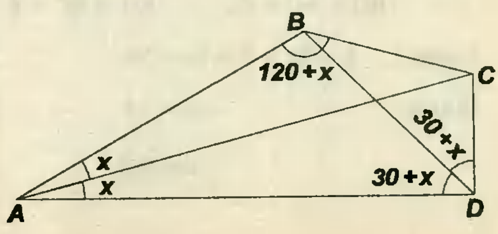
$m \measuredangle$ AFB = $m \measuredangle$ AFE = 60°

Para el ΔABF : E es excentro

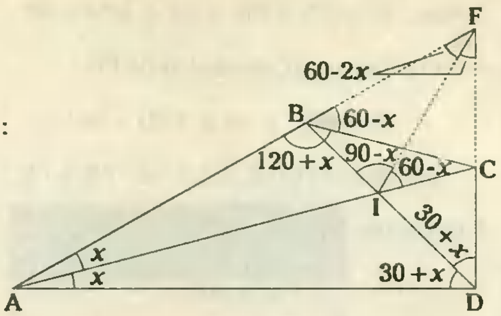
Entonces : $x = \dfrac{60}{2}$

∴ $x = 30°$

37.- Dado el cuadrilátero ABCD, y los valores indicados para algunos ángulos , se pide calcular "x".



Resolución.-



Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, hasta intersectarse en F

Luego para el triángulo AFD, I es incentro, luego :

$$m\measuredangle AFI = m\measuredangle IFD = 60 - 2x$$

En el Δ AIF : $\quad m\measuredangle FIC = 60 - 2x + x = 60 - x$

En el vértice B : $m\measuredangle FBC = 60 - x$

De esto y en base a la 2^{da} Propiedad del item 9.6 reconocemos que el $\square$ BFCI es inscriptible .

Luego , por la 1^{ra} Propiedad de cuadrilateros inscriptibles , se cumplirá que :

$$m\measuredangle F + m\measuredangle I = 180$$

$$\Rightarrow \quad 60 - 2x + 60 - 2x + 90 - x + 60 - x = 180$$

Donde : $\quad 270 - 6x = 180$

Ahora : $\quad 6x = 90$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 15^o}$$

38.- Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro "O" . A continuación se traza el diámetro $\overline{AD}$. Si H es el ortocentro del triángulo , hallar la distancia de O a $\overline{AB}$, si el perímetro del cuadilátero HBDC es 30 y la distancia de O a $\overline{AC}$ es 4.

Resolución.-

De acuerdo con la propiedad (10.6a) :

$$BH = 2\,(OT) = 8$$

$$CH = 2\,(OM) = 2x$$

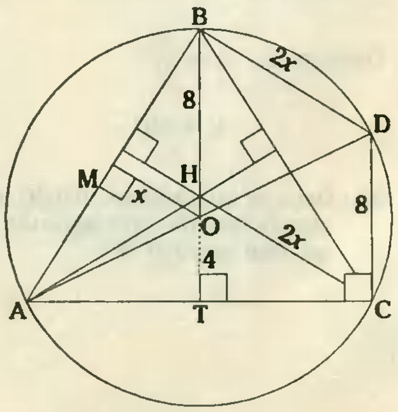
Además , por ser base media : DC = 2(OT) = 8

Luego el $\square$ HBDC es un Romboide, entonces :

$$BD = HC = 2x \quad \wedge \quad BH = DC = 8$$

Luego : $\quad 8 + 2x + 8 + 2x = 30$

Donde : $\quad 4x = 14$



$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3{,}5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un triángulo ABC: AB = BC, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{AM}$ que se intersectan en P; calcular BH, si : PM = $\sqrt{2}$ y $m\measuredangle$ BPM = 45°.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle$ B = 120°; calcular la medida del ángulo formado por $\overline{BC}$ y la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 15° E) 75°

3.- En un triángulo ABC se sabe que :

$m\measuredangle$ EIC - $m\measuredangle$ IEC = 36°

Siendo "I" y "E" incentro y excentro relativo $\overline{BC}$ a respectivamente; calcular la $m\measuredangle$ ABC.

A) 36° B) 54° C) 72° D) 48° E) 45°

4.- En una triángulo acutángulo ABC, se ubica su circuncentro "O" tal que la $m\measuredangle$ OCA = 10°, $m\measuredangle$ OCB = 20° y OC = 12; calcular la distancia del punto "O" hacia $\overline{AB}$.

A) 6 B) 8 C) 9 D) $6\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

5.- En un triángulo ABC :

"H" ⇒ Ortocentro del Δ ABC.
" I " ⇒ Incentro del Δ ABC.
"O" ⇒ Circuncentro del Δ ABC.

Calcular $m\measuredangle$ AIC, si $m\measuredangle$ AHC = $m\measuredangle$ AOC.

A) 135° B) 75° C) 90° D) 105° E) 120°

6.- Se tiene un triángulo obtusángulo ABD obtuso en "D" tal que AB = 18; se traza la bisectriz $\overrightarrow{AM}$, M en $\overline{BD}$, y luego se traza $\overline{BC} \perp \overrightarrow{AM}$, ("C" en la prolongación de $\overline{AM}$). Si : AM = 2. MC , calcular DC.

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) $6\sqrt{3}$

7.- En un triángulo ABC se conoce que $m\measuredangle$ B = 124°, una bisectriz exterior es paralela a uno de los lados del triángulo. Calcular la $m\measuredangle$ IAO , si "I" y "O" son incentro y ortocentro del Δ ABC.

A) 34° B) 33° C) 42° D) 46° E) 48°

8.- Se tiene el cuadrilátero ABCD no convexo en "C"; se sabe que al prolongar $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ intersectan perpendicularmente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en los puntos "M" y "N" respectivamente. Si AC = 2 CN ; calcular la $m\measuredangle$ ADB.

A) 30° B) 45° C) 53° D) 60° E) 75°

9.- En un triángulo ABC se traza la bisectriz $\overrightarrow{BD}$, D en $\overline{AC}$, que intersecta a la circunferencia circunscrita en "E".
Si AE = 4 y BE = 8, calcular BI . (I → incentro del Δ ABC).

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{3}$

10.- Se tiene un triángulo isósceles ABC (AB = BC) en el cual se traza la ceviana $\overline{CF}$ .Si "O" es el circuncentro del triángulo AFC. Calcular $m\measuredangle$ OCF. Además : $m\measuredangle$ ABC = 36°

A) 9° B) 18° C) 27° D) 36° E) 30°

11.- En un cuadrilátero ABCD, las diagonales se intersectan en "Q".
Si : $m\measuredangle$ BAD = 65° , $m\measuredangle$ ABD = 63° ,
$m\measuredangle$ BDC = 76° y $m\measuredangle$ BCD = 50°.
Calcular la $m\measuredangle$ AQD.

A) 96° B) 99° C) 104° D) 101° E) 109°

12.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle A = 20°$, $m\measuredangle B = 110°$. Si además :

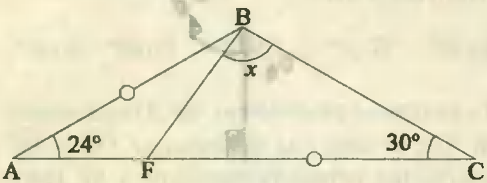
I $\rightarrow$ incentro del Δ ABC

O $\rightarrow$ circuncentro del Δ ABC.

Calcular la $m\measuredangle$ IAO.

A) 20° B) 25° C) 30° D) 40° E) 35°

13.- En la figura calcular $x°$.



A) 60° B) 75° C) 72° D) 84° E) 96°

14.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle A = 2m\measuredangle C$; se traza la mediana $\overline{BM}$ tal que la $m\measuredangle AMB = 45°$; calcular la $m\measuredangle C$.

A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 22° 30'

15.- En la figura, si :

H $\rightarrow$ Ortocentro del Δ ABC

Y además : AM = MH y BN = NC ; se pide calcular la $m\measuredangle$ BNM.

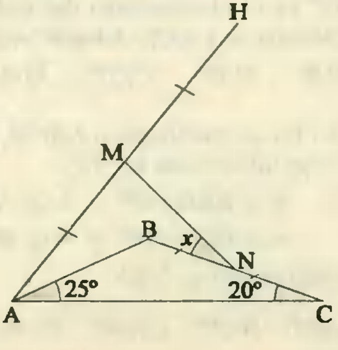
A) 25°

B) 20°

C) 15°

D) 12° 30'

E) 10°



16.- En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{AH}$, luego $\overline{HM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HN} \perp \overline{AC}$.

Calcular MN, si el perímetro del triángulo pedal del triángulo ABC es 26.

A) 10 B) 13 C) 14

D) 15 E) 6,5

17.- En un triángulo ABC : $m\measuredangle B = 120°$ $m\measuredangle C = 40°$. Si O es el circuncentro e I el incentro del triángulo; hallar la medida del $\measuredangle$ IAO.

A) 40° B) 20° C) 30° D) 10° E) 15°

18.- En un triángulo ABC, $m\measuredangle B = 120°$. Además se sabe que :

" I " $\Rightarrow$ Incentro del Δ ABC.

"O" $\Rightarrow$ Circuncentro del Δ ABC

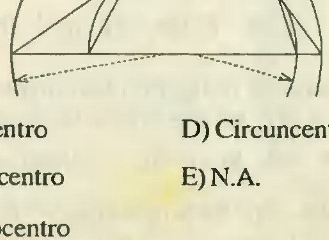
"E" $\Rightarrow$ Excentro del Δ ABC relativo al lado $\overline{BC}$.

Calcular la $m\measuredangle$ IEO.

A) 15° B) 22° 30' C) 30°

D) 45° E) 60°

19.- En la figura mostrada, qué punto notable es "E" para el triángulo ABC.



A) Incentro D) Circuncentro

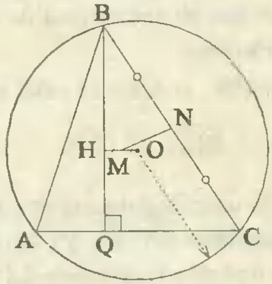
B) Baricentro E) N.A.

C) Ortocentro

20.- En un triángulo acutángulo ABC, H es el ortocentro y O el circuncentro.
Hallar la $m\measuredangle$ OBH, si $m\measuredangle$ A - $m\measuredangle$ C = 24°.

A) 18° B) 20° C) 22° D) 24° E) 30°

21.- En la figura mostrada : H → Ortocentro del Δ ABC; además : BH = 16 y AC = 30.
Hallar : MN



A) 15

B) 8,5

C) 7,5

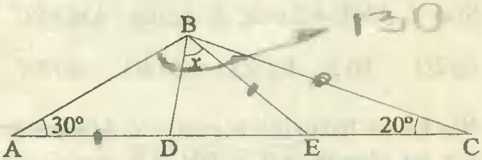
D) 9,5

E) 18

22.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$. Por el ortocentro H, del triángulo se traza $\overline{HD} \perp \overline{MN}$ y por C se traza $\overline{CE} \perp \overline{MN}$.
Si CE - HC = 7 y $m\measuredangle$ MLN = 90°, calcular MN.

A) 14 B) 12 C) 3,5 D) 7 E) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

23.- Calcular x, si : AE = BC y AD = BE



A) 60° B) 45° C) 40° D) 37° E) 30°

24.- En un triángulo rectángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, siendo I el incentro, $m\measuredangle$ B = 90° y 3(BI) = 4 (ID). Hallar la relación entre las longitudes del circunradio y el inradio del Δ ABC.

A) 3 B) 4 C) 1,5 D) 2 E) 4,5

25.- En un ⊿ ABC ($m\measuredangle$ B = 90°), AB < BC, se traza la altura $\overline{BH}$, siendo M, N e I los incentros de ABH, HBC y ABC. Además $m\measuredangle$ BCA = θ.
Calcular la $m\measuredangle$ IMN.

A) 45 - $\frac{\theta}{2}$ B) 45 - $\frac{\theta}{3}$ C) 22° 30'

D) $\frac{\theta}{2}$ E) θ

26.- Calcular la medida del ángulo "x". Si :
H → Ortocentro
M → Punto medio de $\overline{AB}$
N → Punto medio de $\overline{BC}$
Q → Punto medio de $\overline{AH}$

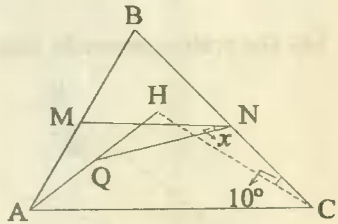
A) 5°

B) 7,5°

C) 10°

D) 15°

E) 20°



27.- En un cuadrilátero inscrito ABCD, P, Q y S son los incentros de los triángulos ABC, ABC y BCD respectivamente.
Calcular la $m\measuredangle$ PQS.

A) 45° B) 60° C) 75° D) 90° E) 120°

28.- En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$, luego se trazan $\overline{HM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HN} \perp \overline{BC}$. Hallar MN, si el perímetro del triángulo pedal correspondiente al triángulo ABC es 24m.

A) 12m B) 18m C) 20m

D) 24m E) 9m

29.- En un triángulo ABC, el ángulo B mide 135°. Se traza la ceviana $\overline{BF}$ de modo que AF = 7 y FC = 18.
Hallar la $m\measuredangle$ BAC; si $\measuredangle$ BAC ≅ $\measuredangle$ FBC.

A) 30° B) 36° C) 37° D) 45° E) 53°

30.- En un triángulo acutángulo ABC, H es ortocentro y O es circuncentro . Si BH = 6 y BO = 5 ; calcular AC.

A) 12 B) 10 C) 7 D) 8 E) 9

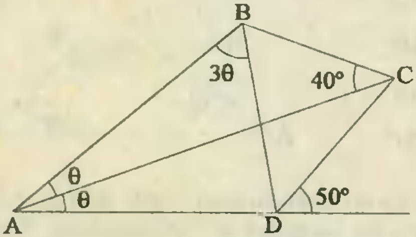
31.- Sobre la bisectriz del $\overrightarrow{BM}$ $\measuredangle$ B de un triángulo ABC, se toma interiormente el punto P. Sabiendo que : $m\measuredangle ABP = 2\theta$, $AB = BM$

$m\measuredangle APC = 90 + 2\theta$, y , $m\measuredangle PCB = 3\theta$.

Calcular : θ

A) 5° B) 7,5° C) 10° D) 12° E) 15°

32.- Del gráfico mostrado, hallar "θ"



A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 25°

33.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B; I es incentro y E es excentro referente a $\overline{BC}$. Si AI = IE , calcular la $m\measuredangle ACB$.

A) 37° B) 30° C) 45° D) 53° E) 60°

34.- El $\measuredangle$ B de un triángulo ABC mide 16°. I es incentro y E es excentro relativo a $\overline{BC}$. Si IE = 2 AC , calcular la $m\measuredangle ACB$.

A) 118° B) 108° C) 120°

D) 132° E) 135°

35.- En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcular la medida del ángulo que forman dicha recta de Euler y el circunradio que pasa por B.

A) 60° B) 53° C) 90° D) 75° E) 45°

36.- En un triángulo ABC "H" es el ortocentro, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BH}$ respectivamente.

Hallar MN , si AH = 14 y BC = 48.

A) 24 B) 25 C) 50 D) 40 E) 45

37.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$. Si $m\measuredangle C = 45°$, CM = 6 ; hallar la distancia del vértice C a $\overline{NL}$.

A) 3 B) 6 C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 4

38.- En un trapezoide ABCD : $m\measuredangle ABD = 80°$ $m\measuredangle CBD = 50°$ y $m\measuredangle ADB = m\measuredangle BDC = 60°$. Calcular la $m\measuredangle BAC$.

A) 20° B) 10° C) 30° D) 15° E) 25°

39.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B , se traza la mediana $\overline{AM}$.

Si $m\measuredangle AMB = 2\,m\measuredangle A$; hallar : AM / BC

A) 2/3 B) 2 C) 3/2 D) 4/3 E) 5/4

40.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{BN}$. $\overline{AH}$ prolongado intersecta a la circunferencia circunscrita en P. Calcular la $m\measuredangle PBN$, si $m\measuredangle AON = 30°$. (O es ortocentro del Δ ABC)

A) 60° B) 75° C) 90° D) 105° E) 120°

CAP. 11

proporcionalidad

11.1 TEOREMA DE THALES

"Tres o más rectas paralelas determinan sobre dos o más secantes segmentos proporcionales", es decir si en la figura adjunta $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b} \,//\, \overleftrightarrow{c}$; $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas secantes , entonces :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \text{... (11.1)}$$

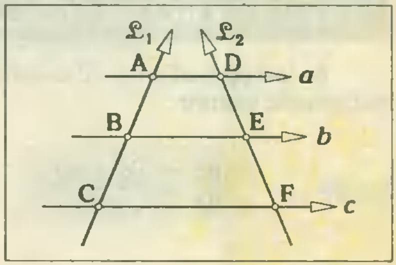


Fig. 11.1

11.2 THALES APLICADO A UN TRIÁNGULO

Si en la figura adjunta $\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overline{AC}$, entonces :

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \qquad \text{... (11.2)}$$

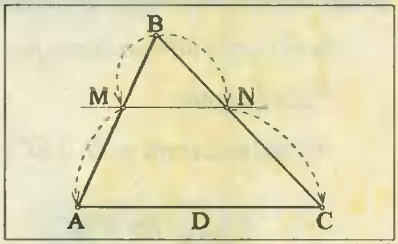


Fig. 11.2

11.3 TEOREMAS DE LA BISECTRIZ

A) TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR.

Si $\overline{BD}$ es bisectriz.

$$\Rightarrow \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \qquad \text{... (11.3)}$$

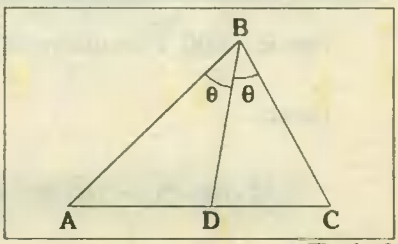


Fig. 11.3

B) TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

Si $\overline{BD}$ es bisectriz exterior :

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \qquad \text{... (11.4)}$$

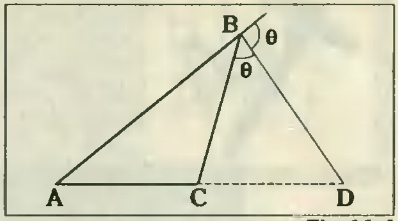


Fig. 11.4

11.4 TEOREMA DEL INCENTRO

En la figura adjunta : "I" es incentro del Δ ABC y $\overline{BD}$ es bisectriz interior .

Luego :

$$\frac{BI}{ID} = \frac{AB + BC}{AC} \qquad \text{... (11.5)}$$

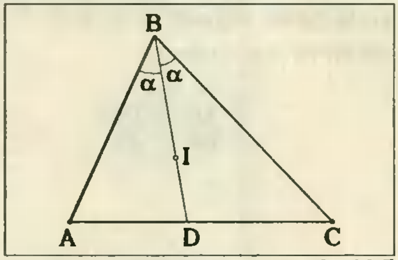


Fig. 11.5

11.5 TEOREMA DEL INCENTRO Y BARICENTRO

Si para el Δ ABC se tiene que :

"I" es incentro

"G" es baricentro e $\overline{IG}$ // $\overline{AC}$, entonces

$$AC = \frac{AB + BC}{2} \qquad \text{... (11.6)}$$

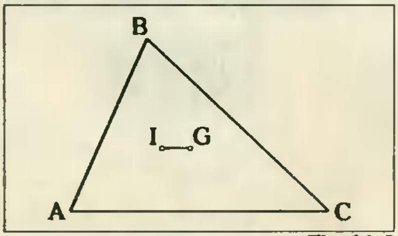


Fig. 11.6

11.6 TEOREMA DE MENELAO

Para el Δ ABC $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es una recta secante :

Luego :

$$AT \cdot BK \cdot CQ = TB \cdot KC \cdot AQ \qquad \text{... (11.7)}$$

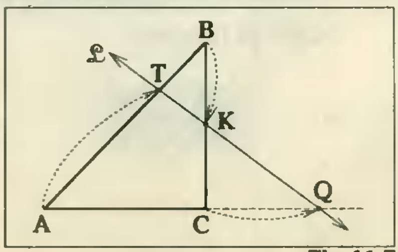


Fig. 11.7

11.7 TEOREMA DE CEVA

Con respecto al △ABC $\overline{AK}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CT}$ son cevianas concurrentes luego :

$$AT \cdot BK \cdot QC = TB \cdot KC \cdot AQ \qquad \text{... (11.8)}$$

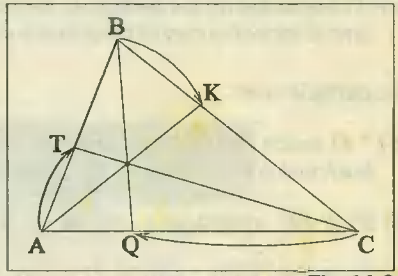


Fig. 11.8

OBSERVACIONES :

a) Las cevianas $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes

⇒ M, N y L son puntos de tangencia

b) Las cevianas $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes

⇒ M, N y L son puntos de tangencia

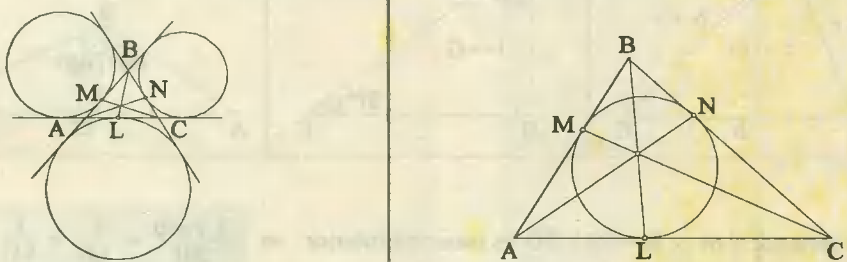


Fig. 11.19

1.8 HAZ ARMÓNICO

Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica, entonces $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ es un haz armónico.

Donde $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ se denominan rayos de haz.

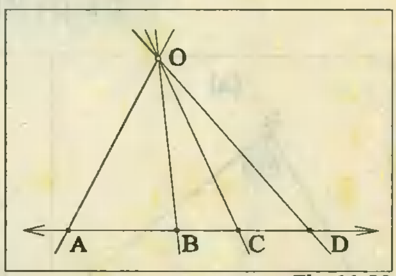


Fig. 11.20

11.9 PROPIEDADES ESPECIALES

a) *"Si los lados de un triángulo forman una progresión aritmética, entonces el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado de valor medio". Fig.*11.21a

Se cumple que : $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$

b) " *El único triángulo rectángulo donde se cumple que el segmento que une el incentro y baricentro es paralelo a un cateto , es el de* 37° *y* 53°. *Fig.*11.21b

Si $\overline{IG} \parallel \overline{BC}$, entonces : $m\measuredangle A = 53° \wedge m\measuredangle C = 37°$

c) En la *Fig.*11.21c , si $m\measuredangle B = 120°$ y $\overline{BD}$ es bisectriz interior, entonces :

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} \quad ...(11.9)$$

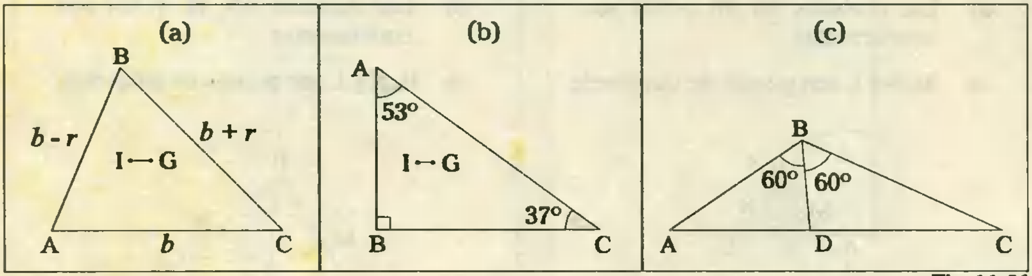


Fig. 11.21

d) En general, si $m\measuredangle B = 2\theta$ y $\overline{BD}$ es bisectriz interior $\Rightarrow$ $$\frac{2\cos\theta}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} \quad ..(11.10)$$

e) En la *Fig.*11.22b , si $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, entonces : $\overline{BL}$ **es mediana**

f) Si A, B, C y D en la *Fig.*11.21b , forman una cuaterna armónica y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es una recta cualquiera que intersecta a todos los rayos del haz, entonces

T, K, Q y H forman una cuaterna armónica

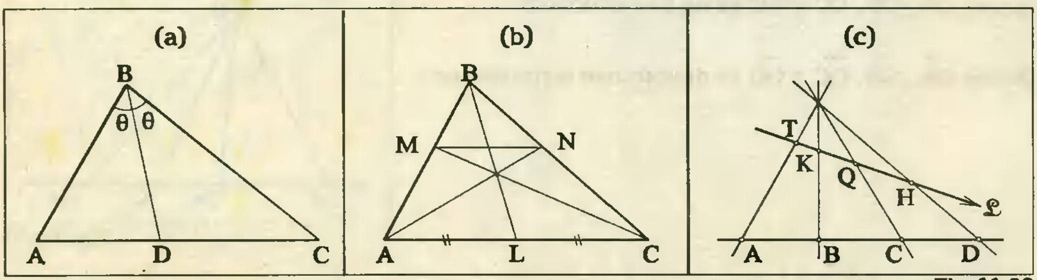


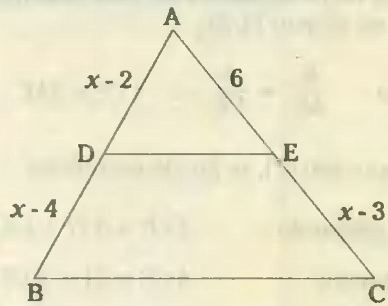
Fig. 11.22

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- *En un triángulo ABC, se toman los puntos D y E en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente de modo que : AD = x - 2, AE = 6 , BD = x - 4 , EC = x - 3*

¿Para qué valores de "x" se verifica que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$?

Resolución.-



Para este ejercicio vamos a aplicar el teorema de Thales, teniendo en cuenta el item 11.2, entonces :

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{6}{x-3}$$

Donde al multiplicar en aspa tendremos :

$$x^2 - 5x + 6 = 6x - 24$$

Pasando todo a un solo miembro y aplicando aspa simple, obtendremos : $(x - 5)(x - 6) = 0$

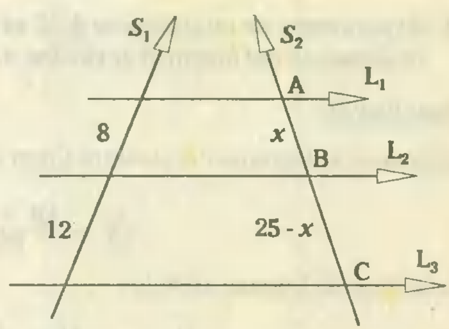
En consecuencia : $x - 5 = 0 \wedge x - 6 = 0$

Donde : $\mathbf{x = 5} \quad \wedge \quad \mathbf{x = 6}$

Los valores son 5 y 6

2.- *Se cumple que : L_1 // L_2 // L_3 y S_1 y S_2 son secantes, tal como se indica en la figura. Calcular la longitud del segmento AB*

Resolución.-



Por dato del problema, sabemos que L_1 // L_2 // L_3, nos damos cuenta que podemos aplicar el teorema de Thales, teniendo en cuenta el item. 11.1.

Entonces : $\dfrac{8}{12} = \dfrac{x}{25-x}$

Multiplicando en aspa, tendremos : $200 - 8x = 12x$

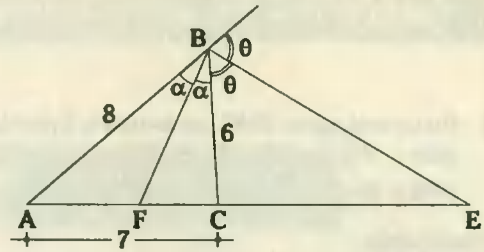
Donde : $20x = 200$

$\therefore \quad \mathbf{x = 10}$

3.- *En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior y la exterior del ángulo B, cortando al lado $\overline{AC}$ en F y E respectivamente, calcular FE, si AB = 8, BC = 6 y AC = 7*

Resolución.-

En el triángulo ABC, aplicaremos el teorema de la bisectriz interior, expuesto en el item 11.3a.



Entonces : $\dfrac{8}{AF} = \dfrac{6}{FC} \Rightarrow 4FC = 3AF \; ... \; (1)$

También en el mismo triángulo ABC, aplicaremos el teorema de la bisectriz interior, mencionado en el item 11.3b.

Luego : $\dfrac{8}{AE} = \dfrac{6}{CE} \Rightarrow 4\,CE = 3AE \; ... \; (2)$

La expresión (2), se puede escribir así : $4\,CE = 3\,(\underbrace{AC}_{7} + CE)$

Reemplazando : $4\,CE = 3\,(7 + CE)$

Efectuando : $4\,CE = 21 + 3\,CE \Rightarrow CE = 21$

En (1) : $4\,(AC - AF) = 3\,AF \Rightarrow 4\,AC = 7\,AF$

Ahora : $4(\cancel{7}) = \cancel{7}\,AF$

En consecuencia : $AF = 4$

Luego : $FC = 3$

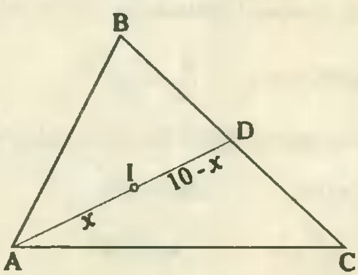
Nos piden : $FE = FC + CE$

Reemplazando : $FE = 3 + 21 \quad \therefore \quad \boxed{FE = 24}$

4.- El perímetro de un triángulo ABC es 25, la bisectriz interior AD = 10 y BC = 5, calcular la distancia del incentro al vértice A.

Resolución.-

Aplicando el teorema del incentro (item 11.4) :



$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}$$

Hagamos el siguiente artificio :

$$\frac{AI}{ID} + 1 = \frac{AB + AC}{BC} + \frac{BC}{BC}$$

Donde : $\dfrac{AI}{ID} + 1 = \dfrac{AB + BC + AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{AI}{ID} + 1 = \dfrac{25}{5}$

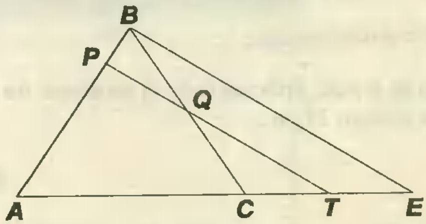
Ahora : $\dfrac{x}{10-x} = 4$

Luego : $x = 4\,(10 - x)$

Resolviendo : $5x = 40$

$\therefore$ **AI = 8**

5.- Dada la siguiente figura, donde AP = 2PB, QC = 4, BQ = 6 = 2CT , calcular AT.



Resolución.-

En el triángulo ABC, PT es una secante a sus tres lados, entonces aplicando el teorema de Menelao, tendremos :

$AP \cdot BQ \cdot CT = PB \cdot QC \cdot AT$ ... (1)

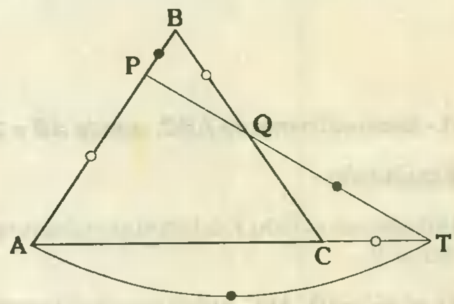
Por dato, sea : $PB = a \quad \Rightarrow \quad AP = 2a$ y $QC = 4$

Como : $6 = 2CT \quad \Rightarrow \quad CT = 3$ y $BQ = 6$

Reemplazando en (1) : $2a \cdot 6 \cdot 3 = a \cdot 4 \cdot AT$

Simplificando : $36 = 4\,AT$

$\therefore$ **AT = 9**



6.- En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CN}$ concurrentes en el punto "O", si se cumple que : AN = MC, AL = 2 y BN = 2 CL = 8, hallar BM

Resolución.-

Sea : $AN = a \quad \Rightarrow \quad MC = a$

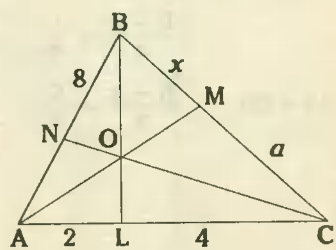
También $BN = 8$, pero : $2\,CL = 8 \quad \Rightarrow \quad CL = 4$

Para este problema aplicaremos el teorema de Ceva.

Donde : $a \cdot x \cdot 4 = 8 \cdot a \cdot 2$

Simplificando : $4x = 16$

$\therefore$ $\boxed{x = 4}$



7.- Se tiene un triángulo isósceles ABC, en el cual $m\measuredangle A = m\measuredangle C = m\measuredangle 2B$, además la mediatriz de $\overline{AB}$ corta a $\overline{BC}$ en E, siendo EC = 1 . Hallar AC.

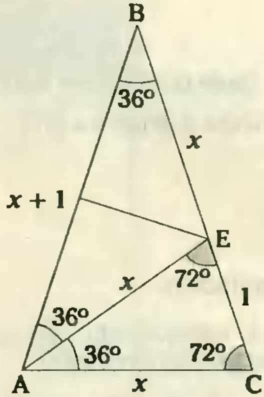
Resolución.-

De los datos es fácil deducir que : $m\measuredangle A = m\measuredangle C = 72°$, y, $m\measuredangle B = 36°$

Además del Δ AEC es isósceles : AE = x

También el Δ AEB es isósceles : BE = x

En consecuencia : BC = AB = $x + 1$



En el Δ ABC aplicaremos el teorema de la bisectriz interior vista en el item 11.3a :

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Donde : $x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Aplicando la fórmula general de una ecuación cuadrática :

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

8.- Dado el triángulo ABC, donde AB = 3 , BC = 6 ; hallar el lado del rombo inscrito BMNP.

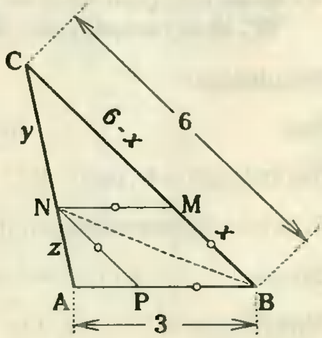
Resolución.-

Hallaremos el lado x del rombo, trazamos la diagonal $\overline{BN}$ del rombo que será bisectriz interior del $\measuredangle$ B.

En el triángulo ABC, aplicaremos el teorema de la bisectriz interior vista en el item 11.3a.

Entonces : $\frac{6}{3} = \frac{y}{z}$ ... (1)

Dado que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, aplicamos el teorema de Thales vista en el item 11.2



$$\frac{6-x}{x} = \frac{y}{z} \quad \text{... (2)}$$

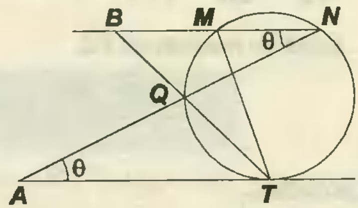
$$(1) = (2) : \quad \frac{6-x}{x} = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{6-x}{x} = 2$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2}$$

MISCELÁNEA

1.- En la figura mostrada se sabe que AT = 9 y además BM = 4.

Hallar MT.



Resolución.-

Por la teoría de ángulos en la circunferencia, tenemos que :

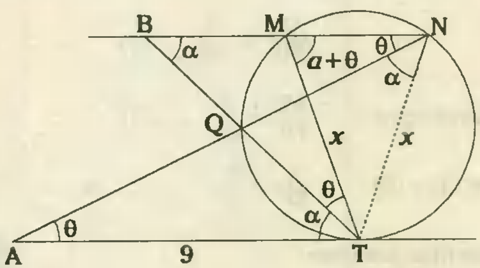
$$m\measuredangle MTQ = m\measuredangle MNQ = \theta$$

$$m\measuredangle ATQ = m\measuredangle QNT = \alpha$$

Por ángulos alternos internos, se tendrá :

$$m\measuredangle B = m\measuredangle ATQ = \alpha.$$

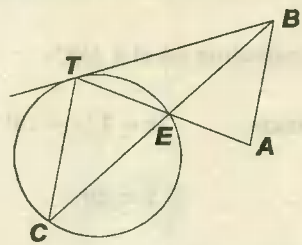
Luego $\Delta ANT \sim \Delta TBM$, entonces :



$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36$$

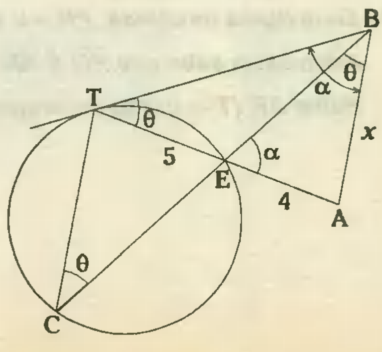
$$\therefore \quad \boxed{x = 6}$$

2.- En la figura se tiene que $\overline{TC} \parallel \overline{AB}$, además TE = 5 y EA = 4. Hallar AB (T→ Punto de tangencia)



Resolución.-

En la figura , luego de instalar los ángulos correspondientes observamos que el Δ TBA es semejante al Δ BEA , entonces :

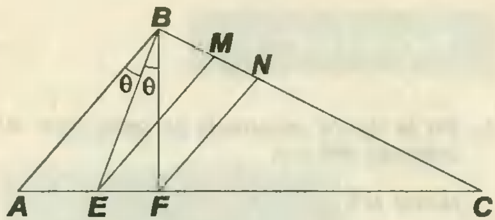


$$\frac{x}{4} = \frac{5+4}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4 \cdot 9$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 6}$$

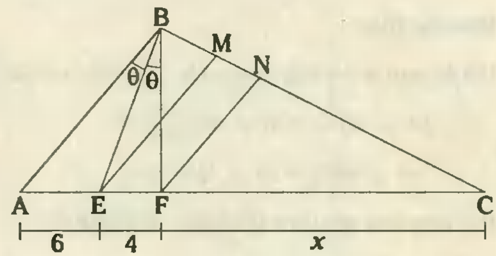
3.- En la figura mostrada, se sabe que :



$$\frac{AB}{FB} = \frac{BM}{MN} = \frac{3}{2} \text{ , y , } FB = FN \text{ y } AE = 6.$$

Hallar la medida de FC.

Resolución.-



Aplicando el primer teorema de la bisectriz en el Δ ABF, se tendrá :

$$\frac{AB}{FB} = \frac{6}{EF} \text{ .....(1)}$$

Puesto que : $\frac{AB}{FB} = \frac{3}{2}$ .....(2)

De (1) y (2) : $\frac{6}{EF} = \frac{3}{2} \Rightarrow EF = 4$

Además por dato : $\frac{BM}{MN} = \frac{3}{2}$

En el gráfico : $\frac{AE}{EF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BM}{MN} = \frac{AE}{EF}$

Esto implica que : $\overline{AB} \parallel \overline{EM} \parallel \overline{FN}$.

Finalmente en el Δ ABC : $\frac{x}{x+10} = \frac{FN}{AB} = \frac{FB}{AB} = \frac{2}{3}$

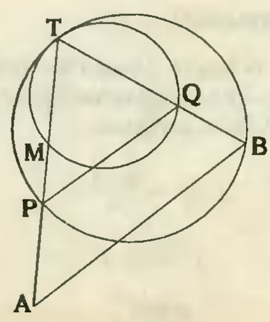
Donde : $3x = 2(x + 10)$

$\therefore \quad \boxed{x = 20}$

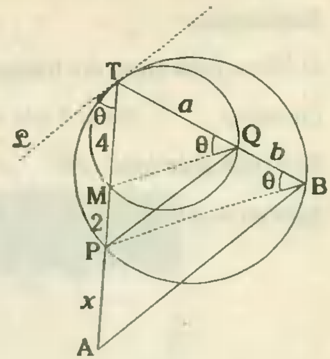
4.- En la figura mostrada; PM = 2 y MT = 4.

Además se sabe que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

Hallar AP. (T→ Punto de tangencia)



Resolución.-



Por dato sabemos que : $\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \dfrac{4+2}{x} = \dfrac{a}{b}$

De donde : $\dfrac{6}{x} = \dfrac{a}{b}$ ... (1)

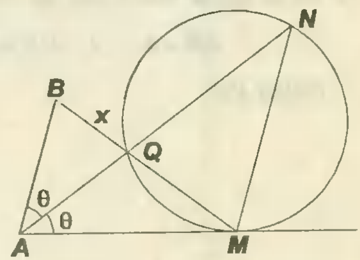
Además : $\overline{MQ} \parallel \overline{PB} \Rightarrow \dfrac{4}{2} = \dfrac{a}{b}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{6}{x} = \dfrac{4}{2}$

$\therefore \quad x = 3$

5.- En la figura mostrada se sabe que : MN = 24 y también $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{3}{8}$

Hallar "x".



Resolución.-

Por dato : $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{3}{8}$, esto podemos desdoblar así : $AB = 3a$ y $AN = 8a$.

Por otro lado observamos que : $\Delta ANM \sim \Delta AMQ$

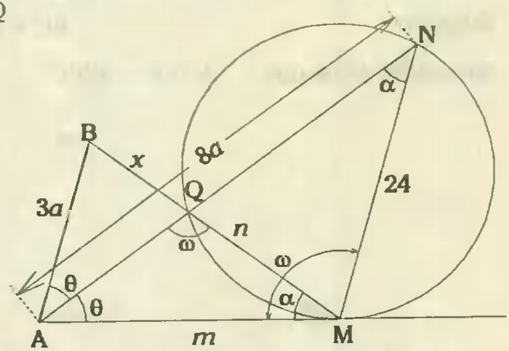
$\Rightarrow \quad \dfrac{8a}{m} = \dfrac{24}{n}$

De donde : $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a}{3}$ ... (1)

En el ΔABM : $\dfrac{3a}{x} = \dfrac{m}{n}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{a}{3} = \dfrac{3a}{x}$

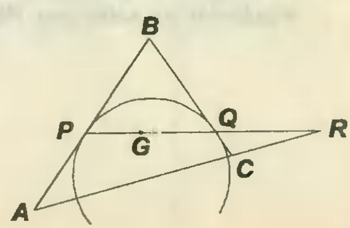
$\therefore \quad x = 9$



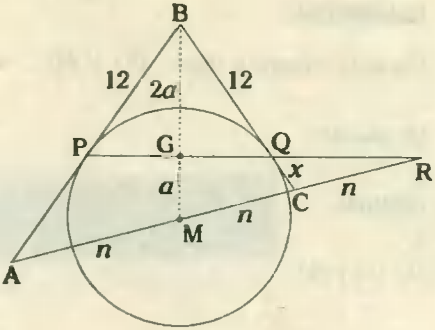
6.- En la figura "G" es baricentro del triángulo ABC.

Si : PB = 12 y AC = 2 CR

Hallar QC.



Resolución.-



Si "G" es baricentro del triángulo ABC

Entonces : $BG = 2\,GM = 2a$

En el triángulo MBC ($\overline{PR}$ → secante)

Aplicamos el Teorema de Menelao :

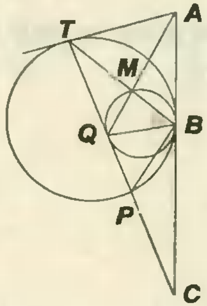
$$2\cancel{a}\cdot x\,.2n = \cancel{a}\cdot 12\cdot n$$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3}$

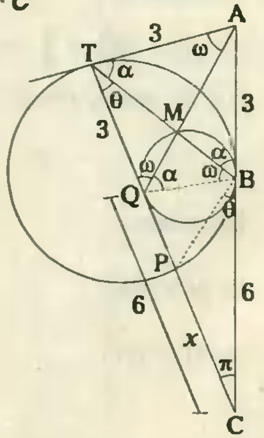
7.- En la figura mostrada, se sabe que :

AB = 3 y BC = 6

Hallar PC



Resolución.-



En el gráfico observamos que : AT = AB = TQ = 3

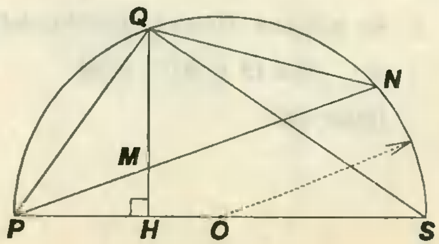
También : BC = QC = 6

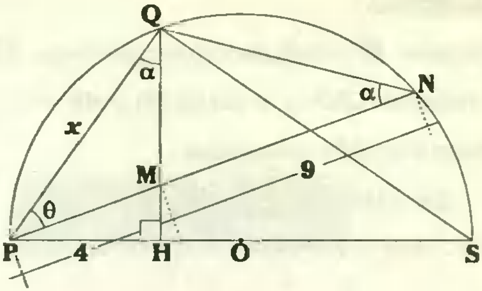
Además se tiene que : Δ TBC ~ ΔBPC

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{6} = \frac{6}{3+6}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$

8.- En la figura que se muestra , se pide hallar PQ, si además se sabe que PM = 4 y MN = 9





Resolución.-

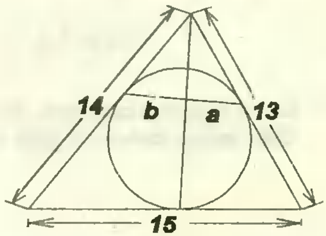
En el gráfico observamos que $\Delta PMQ \sim \Delta PNQ$, entonces establecemos la proporción:

$$\frac{x}{4+9} = \frac{4}{x}$$

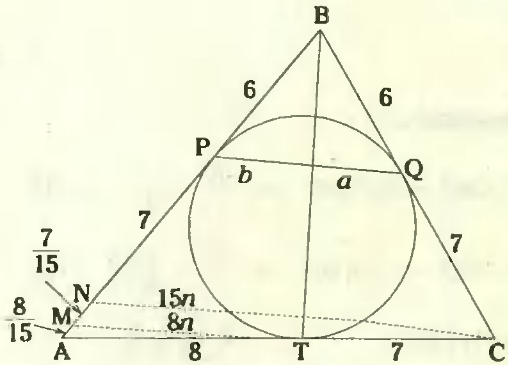
$$\Rightarrow \qquad x^2 = 4\,(13)$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 2\sqrt{13}}$$

9.- Dada la siguiente figura, calcular la razón $\left(\frac{a}{b}\right)$



Resolución.-



Por proporcionalidad : $\frac{AM}{MN} = \frac{8}{7}$; pero $AN = 1$

Entonces : $AM = 8/15$ y $MN = 7/15$

Además : $\Delta AMT \sim \Delta ANC$, por ello :

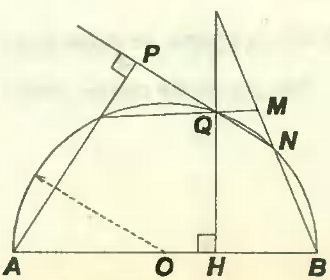
$$\frac{MT}{NC} = \frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad MT = 8n \;\; \text{y} \;\; NC = 15n$$

También : $\frac{a+b}{15n} = \frac{6}{13}$ ... (1)

Y : $\frac{b}{8n} = \frac{6}{13+\frac{7}{15}}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\frac{a}{b} = \frac{49}{52}$ $\qquad \therefore \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{49}{52}}$

10.- En la figura. se pide hallar MN , si : BN = 12 , NQ = 6 y PQ = 5



Resolución.-

Trazamos $\overline{BF}$, verificándose entonces que : $\overline{FB} \parallel \overline{PN}$

El trapecio FQNB es isósceles FQ = NB = 12

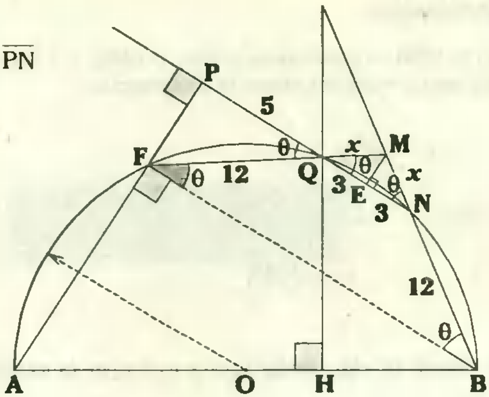
Luego el Δ QMN es isósceles :

$QM = MN = x$ y $QE = EN = 3$

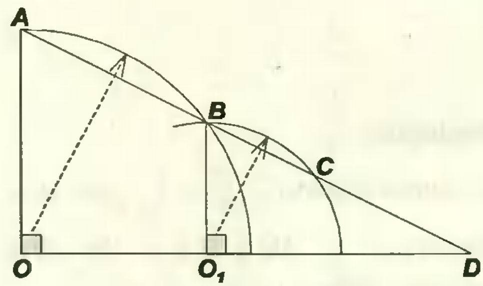
El ⊿ MEN ~ ⊿ FPQ

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{12} = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{36}{5}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 7{,}2}$



11.- En la figura mostrada, BC = 2 y AB = 3 . Con estos datos se pide hallar CD.



Resolución.-

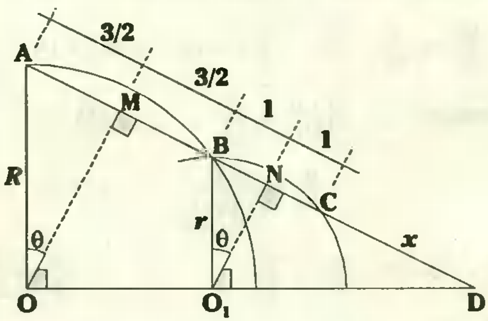
⊿ OMA ~ ⊿ O_1NB $\Rightarrow$ $\dfrac{R}{r} = \dfrac{3}{2}$ ... (1)

⊿ OAD ~ ⊿ O_1 BD $\Rightarrow$ $\dfrac{R}{r} = \dfrac{x+5}{x+2}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{x+5}{x+2} = \dfrac{3}{2}$

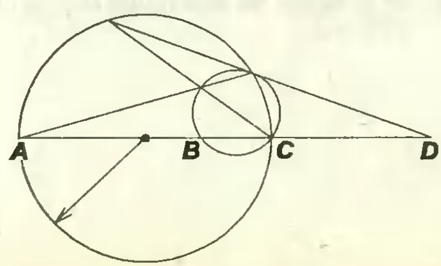
Donde : $2x + 10 = 3x + 6$

$\therefore$ $\boxed{x = 4}$

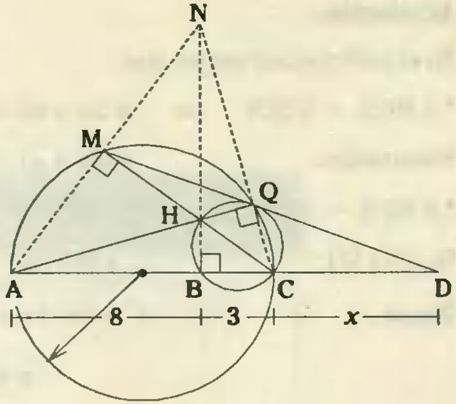


12.- En la figura, se sabe que : AB = 8 y BC = 3

Con los datos dados, hallar CD.



Resolución.-



Por el Teorema de Menelao en el ⊾ ABN :

$$AM \cdot NH \cdot 3 = MN \cdot HB\ (8 + 3)\ ...\ (1)$$

En el Δ ANC: $AM \cdot NQ \cdot x = MN \cdot QC\ (11 + x)$... (2)

Dividiendo (1) y (2) : $\frac{NH}{NQ} \cdot \frac{3}{x} = \frac{HB}{QC} \cdot \frac{11}{11+x}$

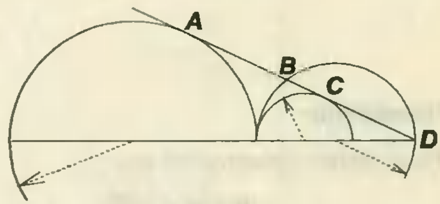
$$\Rightarrow \quad \frac{NH.QC}{NQ.HB} = \frac{11x}{3(11+x)}\ ...\ (\alpha)$$

Pero : $\frac{NH.QC}{NQ.HB} = \frac{11}{8}$ ... (θ)

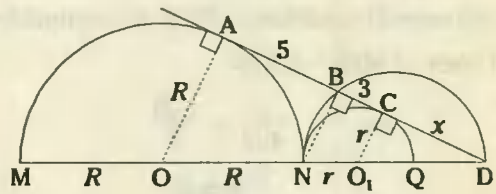
Reemplazando (θ) en (α) : $\frac{11x}{3(11+x)} = \frac{11}{8}$; $8x = 33 + 3x$

Donde : $5x = 33$ ∴ $\boldsymbol{x = 6{,}6}$

13.- En la figura, si AB = 5 y BC = 3 , se pide determinar la medida de CD.



Resolución.-



* ⊾ O_1CD ~ ⊾ OAD , entonces :

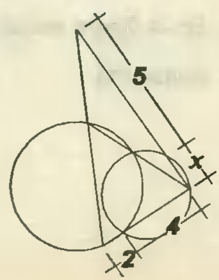
$$\frac{x}{8+x} = \frac{r}{R}\ ...\ (1)$$

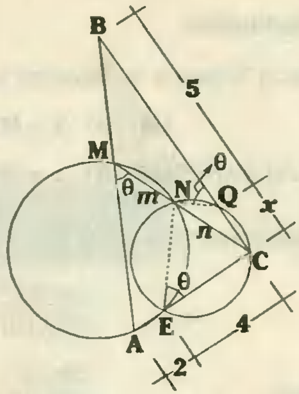
* Por proporcionalidad : $\frac{3}{5} = \frac{r}{R}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\frac{x}{8+x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x = 24 + 3x$

Donde : $2x = 24$ ∴ $\boldsymbol{x = 12}$

14.- En la figura mostrada se dan dos circunferencias y la longitud de algunos segmentos. Hallar "x"





Resolución.-

En el gráfico observamos que :

* Δ MCQ $\sim$ Δ ECN $\quad\Rightarrow\quad n(m+n) = 4 \cdot 6$

Efectuando : $\quad n(m+n) = 24 \quad$ ... (1)

* Δ MCQ $\sim$ Δ MCQ $\quad\Rightarrow\quad n(m+n) = x(x+5) \quad$ ... (2)

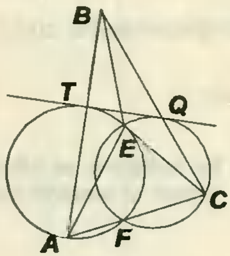
De (1) y (2) : $\quad x(x+5) = 24$

Donde : $\quad x^2 + 5x - 24 = 0 \quad$ (Aspa simple)

$\therefore \quad$ **$x = 3$**

15.- En la figura mostrada , hallar EC si AE = 6 y BE = $4\sqrt{3}$.

(T y Q son puntos de tangencia)



Resolución.-

En el gráfico observamos que :

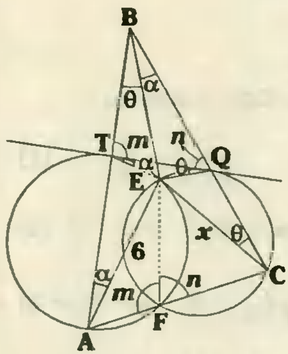
$$m + n = 180^o.$$

Entonces el cuadrilátero TBQE es inscriptible.

Luego : Δ ABE $\sim$ Δ BCE

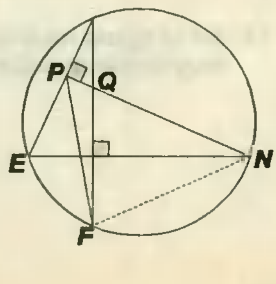
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{6}$$

$\therefore \quad$ **$x = 8$**

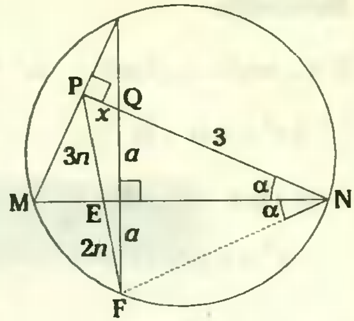


16.- En la figura mostrada se sabe que : 2 PE = 3 EF y QN = 3.

Hallar PQ.



Resolución.-



Según el dato : $\frac{PE}{EF} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad PE = 3n$ y $EF = 2n$.

En el gráfico : $PQ = x$ y $QN = 3$

En el Δ FPQ ($\overline{MN} \rightarrow$ es secante de dicho triángulo)

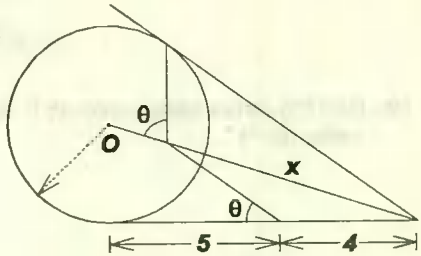
Aplicamos el Teorema de Menelao : $3n \,.\, a \,.\, 3 = 2n \,.\, a \,.\, (x+3)$

Simplificando : $9 = 2\,(x+3) \quad \Rightarrow \quad 2x + 6 = 9$

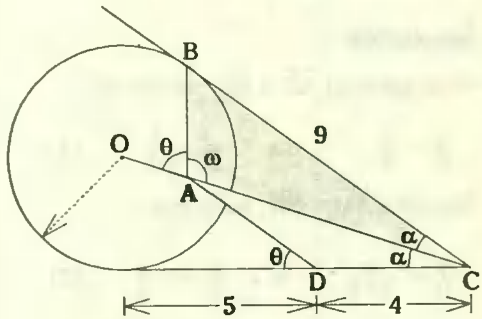
De donde : $2x = 3$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 1{,}5}$

17.- En la figura mostrada, calcular el valor de "x"



Resolución.-



En el gráfico observamos que el triángulo ABC es semejante al triángulo DAC.

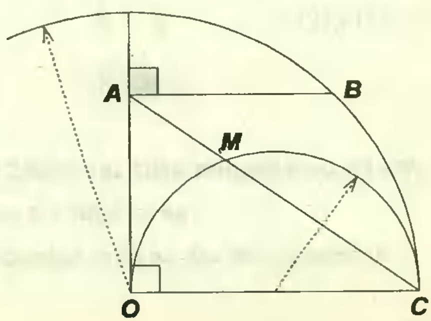
Entonces : $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$

$\Rightarrow \quad x^2 = 36$

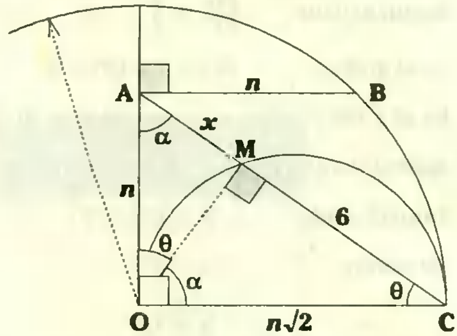
$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6}$

18.- En la figura mostrada, MC = 6 y OA = AB.

Hallar AM.



Resolución.-



El ⊾ AOC ~ ⊾ OMC $\Rightarrow$ $\dfrac{x+6}{n\sqrt{2}} = \dfrac{n\sqrt{2}}{6}$

$2n^2 = 6(x+6)$ .... (1)

El ⊾ OMA ~ ⊾ COA $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{n} = \dfrac{n}{x+6}$

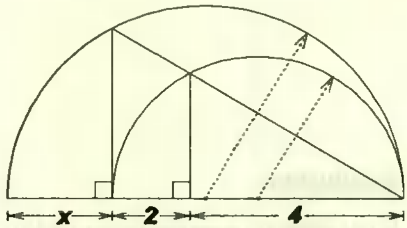
$n^2 = x(x+6)$ .... (2)

Dividiendo (1) ÷ (2) : $\dfrac{2n^2}{n^2} = \dfrac{6(x+6)}{x(x+6)}$

Donde : $2 = \dfrac{6}{x}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 3}$

19.- Con los datos señalados en la figura, calcular el valor de "x".



Resolución.-

En el gráfico : $\overline{AB} \parallel \overline{NC}$, entonces :

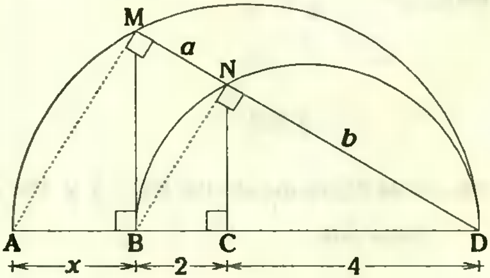
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{4}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$ ... (1)

También $\overline{AM} \parallel \overline{BN}$, entonces :

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{2+4}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{6}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 3}$

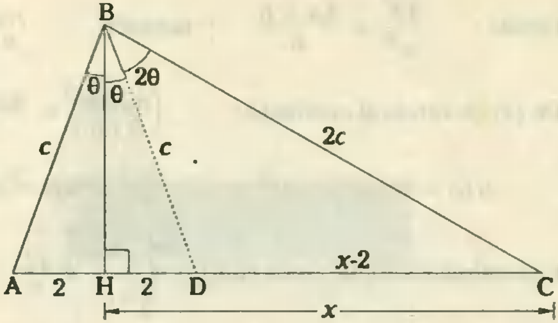


20.- En un triángulo ABC, donde BC = 2 AB, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que :

$$m\measuredangle HBC = 3\, m\measuredangle ABH$$

Si además AH =2, se pide calcular HC.

Resolución.-



Al trazar la bisectriz interior $\overline{BD}$ del triángulo ABC, resulta el triángulo isósceles ABD, donde :

$$AB = BD = c \quad \wedge \quad AH = HD = 2$$

Por el teorema de la bisectriz :

$$\frac{c}{4} = \frac{2c}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 8$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 10}$$

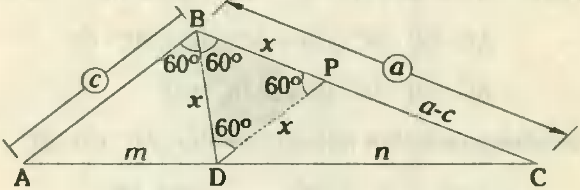
21.- En un triángulo ABC se verifica que : m ∡ B = 120º y además los lados a y c se relacionan así : $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 0,\hat{3}$. Calcular la longitud de la bisectríz interior BD.

Resolución.-

Por el Teorema de la bisectríz interior : $\dfrac{c}{m} = \dfrac{a}{n} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{a}$ ... (1)

Trazamos $\overline{DP} \parallel \overline{AB}$, luego el Δ BPD es equilátero donde : BP = PD = x

En el Δ ABC, por Thales : $\dfrac{x}{a-c} = \dfrac{m}{n}$ ... (2)

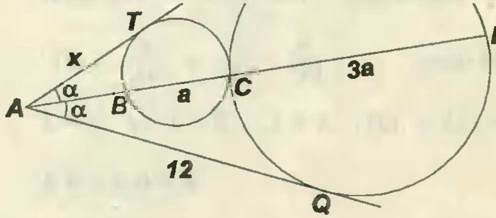


(1) en (2) : $\dfrac{x}{a-c} = \dfrac{c}{a}$

De donde : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} = 0,\hat{3} = \dfrac{1}{3}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 3}$$

22.- En la figura mostrada se dan circunferencias tangentes de radios a y 3a . Con estos datos se pide calcular el valor de " x".

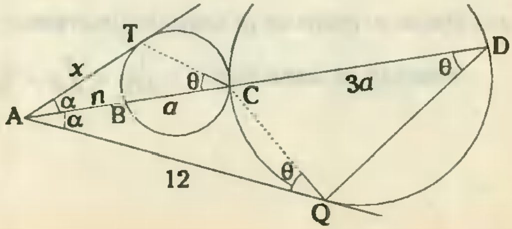


Resolución.-

El Δ ATC ~ Δ ACQ ~ Δ AQD

Entonces : $12^2 = (a + n) \, . \, (4a + n)$

Luego : $x^2 = n\,(a + n)$



Donde : $\dfrac{12^2}{x^2} = \dfrac{4a+b}{n}$; también : $\dfrac{n+4a}{n+a} = \dfrac{12}{x}$ ... (2)

De (2) elevando al cuadrado : $\left(\dfrac{n+4a}{n+a}\right)^2 = \dfrac{4a+n}{n} = \dfrac{12^2}{x^2} \Rightarrow \dfrac{n+4a}{(n+a)^2} = \dfrac{1}{n}$

$$n(n+4a) = (n+a)^2 \Rightarrow \cancel{n^2} + 4an = \cancel{n^2} + 2an + a^2 \Rightarrow n = \frac{a}{2}$$

Este último reemplazamos en (2) : $\dfrac{\frac{a}{2}+4a}{\frac{a}{2}+a} = \dfrac{12}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{3a}{9a} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $\boxed{x = 4}$

23.- Los puntos A, B C y D colineales y consecutivos ,forman una cuaterna armónica.

Si: $\dfrac{a}{BC} - \dfrac{b}{CD} = \dfrac{c}{AC}$

Calcular : a + b + c

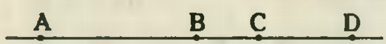
Resolución.-

Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica , entonces : AB · CD = AD · BC

Pero: AB = AC - BC y AD = AC + CD $\Rightarrow$ (AC - BC) CD = (AC + CD) BC

AC · CD - BC · CD = AC · BC + BC · CD

AC . CD - AC · BC = 2 BC · CD



Dividiendo a ambos miembros entre : AC · CD · BC

$$\frac{AC.CD}{AC.CD.BC} - \frac{AC.BC}{AC.CD.BC} = \frac{2BC.CD}{AC.CD.BC} \Rightarrow \frac{1}{BC} - \frac{1}{CD} = \frac{2}{AC} \text{ ... (1)}$$

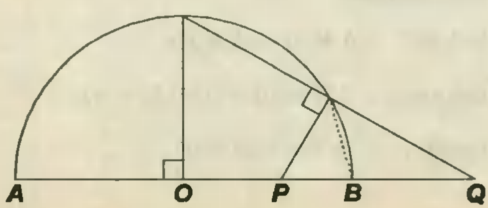
Del dato : $\dfrac{a}{BC} - \dfrac{b}{CD} = \dfrac{c}{AC}$ ... (2)

De (1) y (2): $a = 1$, $b = 1$ y $c = 2$

$\therefore$ $\boxed{a + b + c = 4}$

24.- Hallar el radio de la semicircunferencia.

Además se sabe que : $\dfrac{1}{AQ} + \dfrac{1}{AP} = \dfrac{1}{4}$

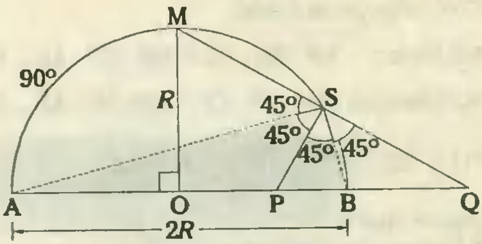


Resolución.-

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle\ MSA = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle\ ASP = 45^o$

$m\measuredangle\ ASB = 90^o \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle\ PSB = 45^o$

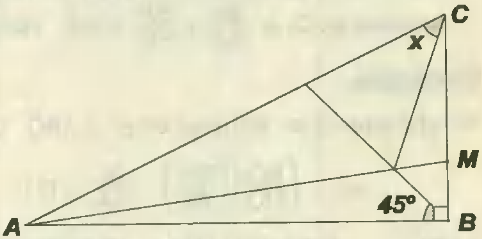


Para el ⊿ ASB : $\overline{SP}$ y $\overline{SQ}$ son bisectrices interior y exterior respectivamente .

Luego A, P, B y Q forman una cuaterna armónica cumpliéndose además : $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{AQ}$ (Descartes)

Luego : $\dfrac{2}{2R} = \dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore\quad$ $R = 4$

25.- En la figura se sabe que : AB = 2 BC , 2 CM = 5 BM . Hallar : x



Resolución.-

Hacemos : CM = $5a$ $\Rightarrow$ MB = $2a$ y AB = $14a$

⊿ ABC, por el Teorema de la bisectríz resulta : AD = 2 DC = $2b$

Prolongamos $\overline{CO}$ hasta L y aplicamos el Teorema de Ceva en el ⊿ ABC :

$$(2b)\,(5a)\,(LB) = (b)\,(2a)\,(14a - LB)$$

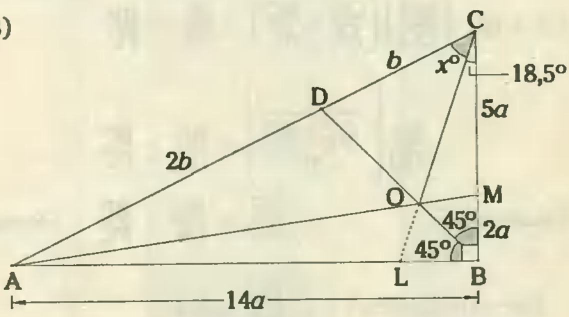
De donde : $LB = \dfrac{7a}{3}$

Esto significa que : $m\measuredangle\ LCB = 18{,}5^o$

Y puesto que la : $m\measuredangle\ ACB = 63{,}5^o$

Se tiene : $x = 63{,}5^o - 18{,}5^o$

$\therefore$ $x = 45^o$



26.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$. Las prolongaciones de $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ se cortan en P. Si : $\dfrac{1}{AL} + \dfrac{1}{AP} = \dfrac{1}{5}$. Finalmente calcular AC

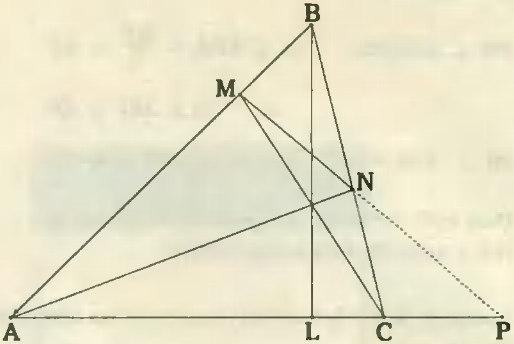
Resolución.-

Con respecto al Δ ABC :

Por Ceva : AM . BN . CL = MB . NC . AL ... (1)

Por Menelao : AM . BN . CP = MB . NC . AP ... (2)

$$(1) \div (2) : \frac{CL}{CP} = \frac{AL}{AP} \quad \Rightarrow \quad \frac{AL}{LC} = \frac{AP}{CP}$$



Con lo cual se deduce que los puntos A, L, C y P forman una cuaterna armónica

Luego por Descartes : $\dfrac{2}{AC} = \dfrac{1}{AL} + \dfrac{1}{AP} = \dfrac{1}{5}$

$$\boxed{AC = 10}$$

***27.-** En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CL}$ las cuales se cortan en O, si $\dfrac{BL}{LA} + \dfrac{BP}{PC} = 0{,}4$. Hallar $\dfrac{BO}{OQ}$*

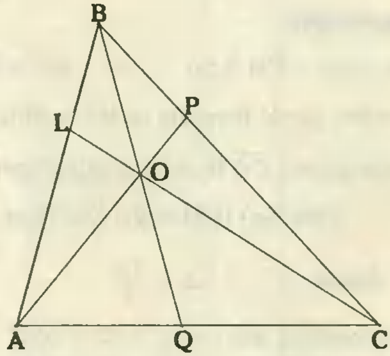
Resolución.-

Por el Teorema de Menelao en el Δ ABQ : (LA) (BO) (QC) = (BL) (OQ) (AC)

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{BO}{OQ}\right)\left(\frac{QC}{AC}\right) = \frac{BL}{LA} \; ... (1)$$

Δ QBC : (PC) (BO) (AQ) = (BP) (OQ) (AC)

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{BO}{OQ}\right)\left(\frac{AQ}{AC}\right) = \frac{BP}{PC} \; ... (2)$$



$$(1) + (2) : \left(\frac{BO}{OQ}\right)\left(\frac{QC}{AC} + \frac{AQ}{AC}\right) = \frac{BL}{LA} + \frac{BP}{PC}$$

$$\frac{BO}{OQ}\left(\frac{\overbrace{QC + AQ}^{1}}{AC}\right) = \frac{BL}{LA} + \frac{BP}{PC}$$

Finalmente : $\dfrac{BO}{OQ} = \dfrac{BL}{LA} + \dfrac{BP}{PC}$ Teorema de Van Aubel

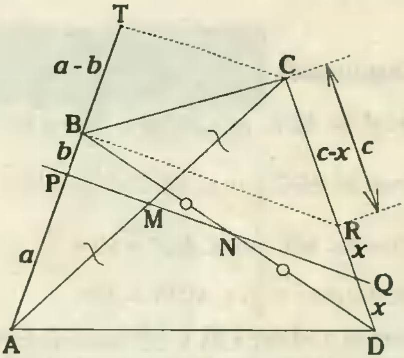
Para el problema : $\boxed{\dfrac{BO}{OQ} = 0{,}4}$

***28.-** Por los puntos medios de las diagonales de un trapezoide ABCD se traza una recta la cual intersecta en P a $\overline{AB}$ y en Q a $\overline{CD}$. Si AP = a; PB = b y CQ = c ; hallar QD*

Resolución.-

Por B y C trazamos : $\overline{BR}$ // $\overline{PQ}$ y $\overline{CT}$ // $\overline{PQ}$

Luego $\overline{PM}$ y $\overline{NQ}$ resultan ser bases medias de los triángulos ATC y BRD respectivamente.



De donde : AP = PT = a $\Rightarrow$ BT = $a - b$ y

RQ = QD = x $\Rightarrow$ CR = $c - x$

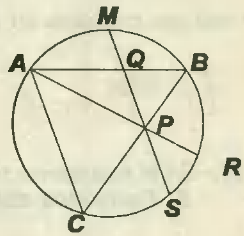
En el trapecio PTCQ, por Thales

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-x}{x}$$

Donde : $ax - xb = bc - bx$

$$\therefore \quad x = \frac{bc}{a}$$

29.- En la figura $\overset{\frown}{AM} \cong \overset{\frown}{MB}$, $\overset{\frown}{BR} \cong \overset{\frown}{CS}$; AC = 9 , CP = 6 y AQ = 4,5.
Hallar : QB



Resolución.-

Sea T : $\overline{AR} \cap \overline{CM}$

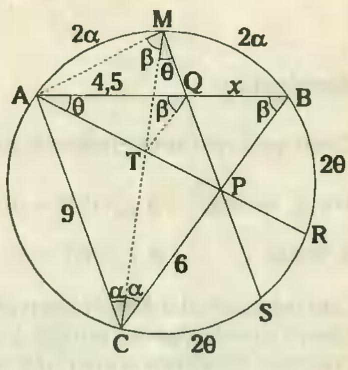
Luego en el Δ ACP : $\frac{AT}{TP} = \frac{9}{6}$ (Teorema de la bisectríz)

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle BAR = \frac{2\theta}{2} = \theta$

Y $m\measuredangle CMS = \frac{2\theta}{2} = \theta$

El $\square$ AMQT es inscriptible, donde :

$$m\measuredangle AMT = m\measuredangle AQT = \beta$$

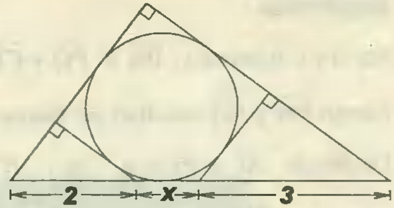


$\overline{QT}$ // $\overline{BC}$, luego por Thales en el Δ ABP : $\frac{AT}{TP} = \frac{4,5}{x}$

Donde : $\frac{9}{6} = \frac{4,5}{x}$

$$\therefore \quad x = 3$$

30.- A partir de los datos que se muestran en el gráfico adjunto , se pide calcular el valor de x .



Resolución.-

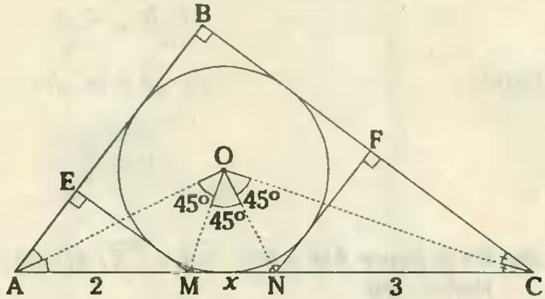
En el ⊿ AEM : $m\measuredangle$ AOM $= \dfrac{90}{2} = 45°$

En el ⊿ NFC : $m\measuredangle$ NOC $= \dfrac{90}{2} = 45°$

En el ⊿ ABC : $m\measuredangle$ AOC $= 90 + \dfrac{90}{2} = 135°$

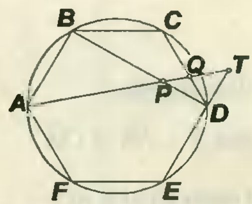
De donde : $m\measuredangle$ MON $= 45°$

Para el Δ AON : $\overline{OM}$ y $\overline{OC}$ son bisectrices interior y exterior, luego : A, M, N y C forman una cuaterna armónica de donde



$$\frac{2}{x} = \frac{5+x}{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{x = 1}$$

31.- En el hexágono regular mostrado se sabe que : AP = 8 y PQ = 2 . Con estos datos se pide hallar QT .



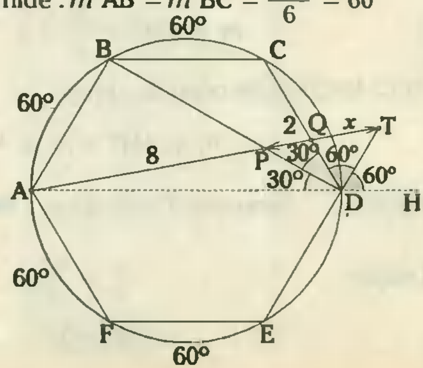
Resolución.-

Cada arco que subtiende el lado del hexágono regular mide : $m\ \overset{\frown}{AB} = m\ \overset{\frown}{BC} = \dfrac{360}{6} = 60°$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle$ ADB $= m\measuredangle$ BDC $= 30°$

Además : $m\measuredangle$ CDT $= m\measuredangle$ TDH $= 60°$

Con respecto al Δ ADQ, observamos que $\overline{DP}$ y $\overline{DT}$ son bisectrices .Luego los puntos A , P , Q y T forman una cuaterna armónica con lo cual se tiene :



$$\frac{8}{2} = \frac{10+x}{x} \qquad \Rightarrow \qquad 4x = 10 + x$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 10/3}$$

32.- Las medidas de los lados de un triángulo son números enteros y consecutivos .Hallar su perímetro si la medida del mayor ángulo es el doble de la medida del menor .

Resolución.-

Sea el triángulo ABC , donde : $AB = a - 1$, $AC = a$, $BC = a + 1$ y $m \measuredangle A = 2m \measuredangle C = \theta$

A continuación trazamos la bisectríz interior $\overline{BD}$. Luego por el Teorema de la bisectríz :

$$\frac{a-1}{AD} = \frac{a+1}{DC} \quad ... (*)$$

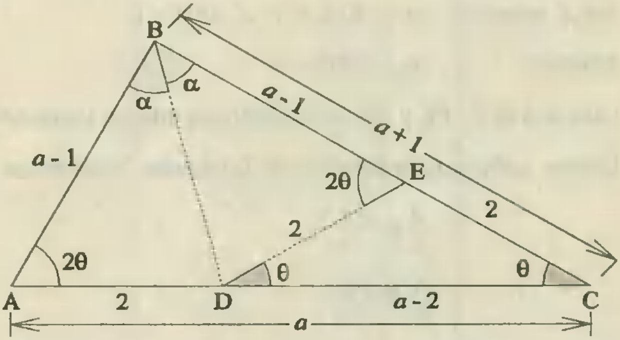
En el Δ BDC, trazamos la ceviana $\overline{DE}$ de modo que : $m \measuredangle EDC = \theta$

Luego : $\Delta ABD \cong \Delta BDE$

$\Rightarrow \quad AB = BE = a - 1$

y $\quad AD = DE = EC = 2$

Además : $\quad DC = a - 2$



Sustituyendo en (*) :

$$\frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{a-2}$$

Resolviendo : $a = 5$

$\therefore \quad$ **$2p\,(\Delta ABC) = 15$**

33.- "I" es el incentro de un triángulo rectángulo ABC ($m \measuredangle B = 90^{\circ}$) . Se traza la bisectríz interior $\overline{BD}$ estando D en $\overline{AC}$, calcular ID si el inradio mide 1 y AC = 10 .

Resolución.-

Por el Teorema del Incentro :

$$\frac{BI}{x} = \frac{AB+BC}{10} \quad ... (1)$$

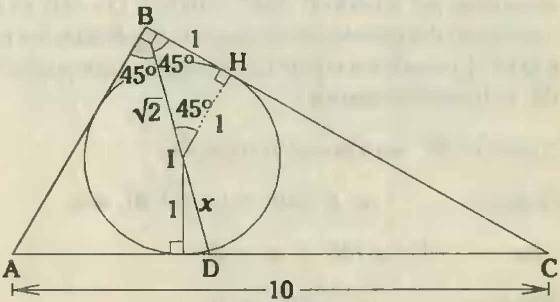
Por el Teorema de Poncelet :

$AB + BC = 10 + 2(1) = 12 \qquad ... (2)$

Trazamos $\overline{IH} \perp \overline{BC}$

Luego en el ⊿ BHI de 45° :

$$BI = \sqrt{2} \qquad ... (3)$$

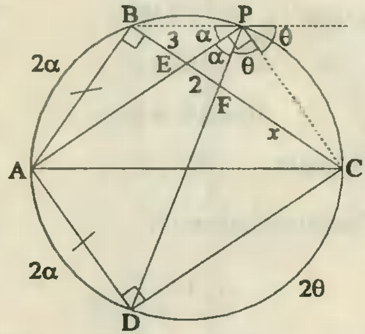


Reemplazando (2) y (3) en (1) : $\dfrac{\sqrt{2}}{x} = \dfrac{12}{10}$

$$\therefore \qquad x = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

34.- ABCD es un cuadrilátero inscrito donde $AB = AD$ y $\overline{AC}$ es diámetro. También se sabe que P es un punto del arco BC y además $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$ intersectan a $\overline{BC}$ en E y F respectivamente. Si BE = 3 y EF = 2, se pide determinar FC.

<u>Resolución</u>.-



Por ∡ inscrito : $m\measuredangle BPA = m\measuredangle APD = \alpha$

Además : $m\measuredangle DPC = \theta$

Para el Δ BPF : $\overline{PE}$ y $\overline{PC}$ son bisectrices interior y exterior

Luego, aplicando la Relación de Descartes, tendremos :

$$\frac{3}{2} = \frac{5+x}{x}$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 10}$$

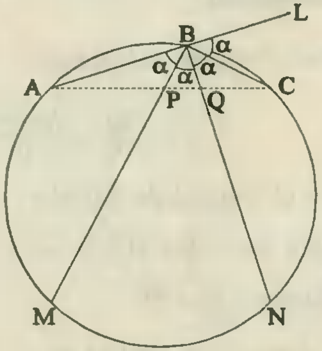
35.- Calcular la medida de un ángulo inscrito ABC, para que sus trisectrices formen con sus lados un haz armónico.

<u>Resolución</u>.-

Sean $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ las trisectrices del ángulo ABC . Luego :

$$m\measuredangle ABM = m\measuredangle MBN = m\measuredangle NBC = \alpha$$

Trazamos $\overline{AC}$ siendo P : $\overline{AC} \cap \overline{BM}$ y Q : $\overline{AC} \cap \overline{BN}$. Por condición del problema, se debe cumplir que los puntos A, P, Q y C forman una cuaterna armónica y que, para el Δ ABQ, BP es bisectríz interior .



Entonces $\overline{BC}$ será bisectríz exterior .

Es decir : $m\measuredangle QBC = m\measuredangle CBL = \alpha$

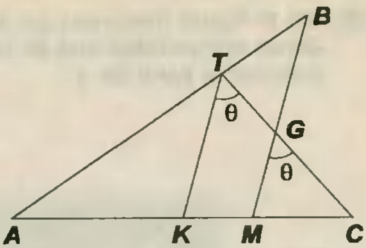
$\Rightarrow \qquad 4\alpha = 180$ y $\alpha = 45°$

Entonces : $m\measuredangle ABC = 3\alpha$

$$\therefore \qquad \boxed{m\measuredangle ABC = 135°}$$

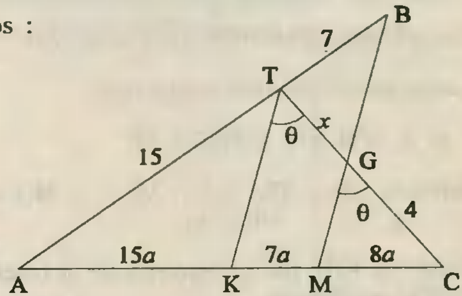
36.- En la figura, TB = 7 , AT = 15 , AK = KC y GC = 4 .

Calcular TG



Resolución.-

Aplicando el Teor. de Thales en el Δ ABM ,tendremos :



$$\frac{AK}{KM} = \frac{15}{7} \quad \Rightarrow \quad AK = 15a \;\text{ y }\; KM = 7a$$

Además : $MC = 15a - 7a = 8a$

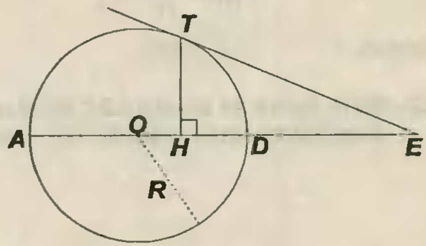
En el Δ TKC : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{7a}{8a}$

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 3{,}5}$

37.- En la figura "O" es el centro de la circunferencia y además se verifica la siguiente relación :

$$\frac{1}{AH} + \frac{1}{AE} = 0{,}5.$$

Calcular la medida de R .



Resolución.-

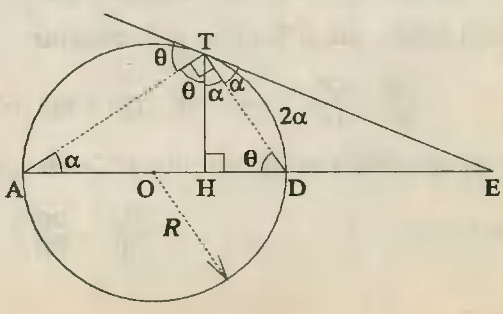
Hacemos : $m\,\overset{\frown}{TD} = 2\alpha$

Luego por ∡ inscrito : $m\measuredangle TAD = \alpha$

Luego por ∡ semi - inscrito : $m\measuredangle DTE = \alpha$

En el ⊿ ATD : $m\measuredangle HTD = m\measuredangle A = \alpha$ y $m\measuredangle ATH = m\measuredangle D = \theta$

De donde observamos que los puntos A, H, D y E forman una cuaterna armónica , luego de la Relación de Descartes :

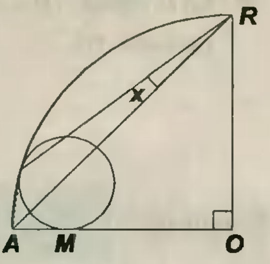


$$\frac{2}{AD} = \frac{1}{AH} + \frac{1}{AE}$$

$$\frac{2}{2R} = \frac{1}{2}$$

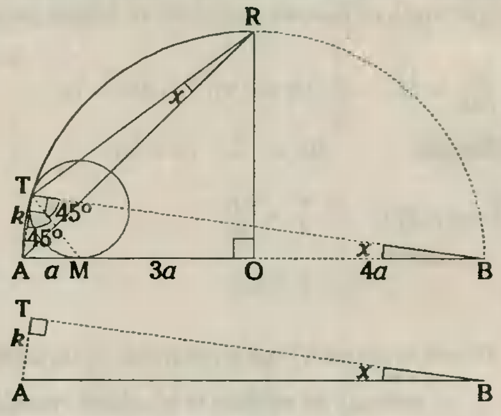
$\therefore \qquad \boldsymbol{R = 2}$

38.- En la figura mostrada se sabe que MO = 3 AM . Con los datos adicionales que se muestran en el gráfico , se pide calcular el valor de x .



Resolución.-

Completamos la semicircunferencia $\overline{AB}$



Luego por Propiedad se sabe que :

$m\measuredangle ATM = m\measuredangle MTB = 45°$

Además : $m\measuredangle TBA = x$, $AM = a$, $MO = 3a$

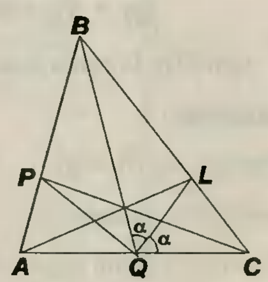
y : $OB = 4a$

En el ⊾ ATB, por el teorema de la bisectríz interior tendremos :

$$\frac{AT}{TB} = \frac{a}{7a} = \frac{1}{7}$$

Es decir : $\boldsymbol{x = 8°}$

39.- En la figura se da el ΔABC en el que se han indicado dos ángulos de igual medida "α" . Calcular m ∡ PQL .



Resolución.-

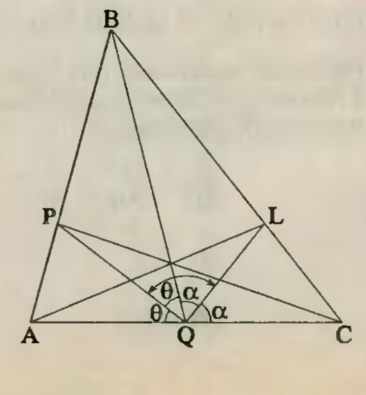
En el Δ ABC , por Ceva : $AP \cdot BL \cdot QC = PB \cdot LC \cdot AQ$ ... (1)

En el Δ BQC , por el Teorema de la bisectríz :

$$\frac{BQ}{BL} = \frac{QC}{LC} \quad \Rightarrow \quad BL \cdot QC = BQ \cdot LC \quad ... (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) : $AP \cdot BQ \cdot \cancel{LC} = PB \cdot \cancel{LC} \cdot AQ$

De donde : $$\frac{AQ}{AP} = \frac{BQ}{PB}$$

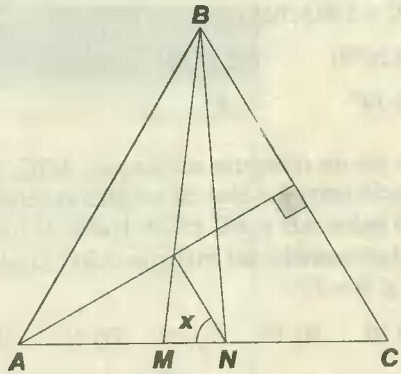


Esta expresión es el teorema de la bisectríz interior para el Δ AQB

Luego : $\overline{QP}$ es bisectríz interior.

$$\therefore \quad m\measuredangle PQL = 90^\circ$$

40.- En la figura, el triángulo ABC es equilátero y $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CB}$ forman un haz armónico. Hallar x.



Resolución.-

$$\frac{2\cos 30^\circ}{AP} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{l}$$

Para el Δ BAM : $\overline{AP}$ es bisectríz interior . Luego :

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{AP} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{l} \quad ...... (1)$$

Los puntos A, M, N y C forman una cuaterna armónica . Luego por Descartes :

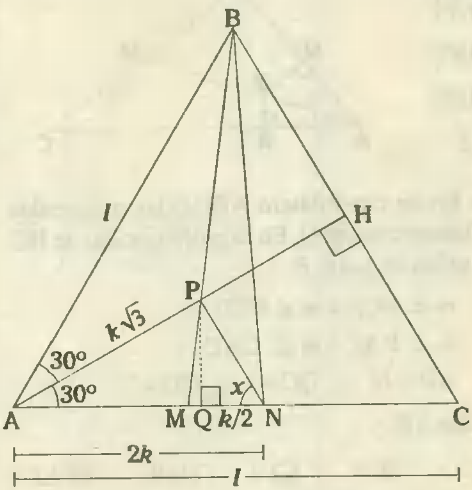
$$\frac{2}{AN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{l} \quad ...... (2)$$

De (1) y (2) : $\dfrac{\sqrt{3}}{AP} = \dfrac{2}{AN}$

$$\Rightarrow \quad AP = 3k \quad y \quad AN = 2k$$

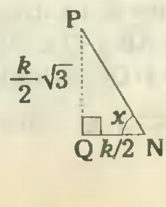
Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{AN}$, luego ⊿ AQP de 30° y 60° :

$$PQ = \frac{k}{2}\sqrt{3} \quad y \quad AQ = \frac{3}{2}k$$



De donde : $\quad QN = 2k - \dfrac{3}{2}k = \dfrac{k}{2}$

En el ⊿ PQN que mostramos : $\quad \boldsymbol{x = 60^\circ}$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{CN}$ intersectándose en Q. Si $AC = 3\,BQ$; hallar la $m\measuredangle HCQ$.

A) 26°30 B) 18°30 C) 26°30

D) 14° E) 8°

2.- En un triángulo acutángulo ABC, la distancia entre los pies de las alturas relativas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es 24. Hallar la longitud del circunradio del triángulo ABC, si además $m\measuredangle B = 37°$.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

3.- En la figura, $AB = 12$, $PQ = 4$ y $AC = 18$. Hallar PR.

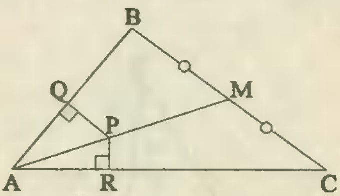
A) 8/3

B) 7/4

C) 8/7

D) 6/5

E) 3



4.- En un cuadrilátero ABCD las diagonales se intersectan en Q. En la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto F.

Si: $m\measuredangle BCA = m\measuredangle FCD$,
$m\measuredangle BAC = m\measuredangle CAD$,
$AD = 12$, $QC = 3$ y $CD = 7$

Hallar AB.

A) 3 B) 4 C) 7 D) 9 E) 12

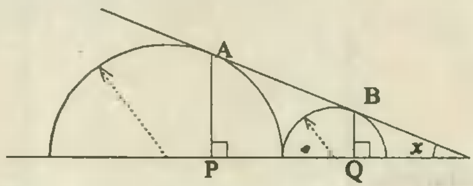
5.- Por el baricentro de un triángulo ABC se traza $\overline{PQ}$ ($P \in \overline{AB}$ y $Q \in \overline{AC}$), tal que: $AP = 10$ y $3 \cdot AQ = 5 \cdot QC$. Hallar PB.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.- En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia y tangente en T y Q respectivamente, $\overline{TQ}$ intersecta a $\overline{AC}$ en E. Si : $CE = 10$; $QC = 8$ y $AT = 4$; Hallar : AE

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.- En el gráfico, calcular "x", si : $AP = 3\,BQ$.



A) 18° B) 26° C) 30°

D) 37°/2 E) 53°/2

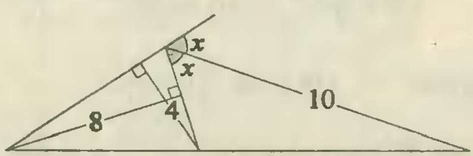
8.- En un triángulo ABC de baricentro "G", se traza la mediana $\overline{BM}$. Luego se traza la bisectríz interior $\overline{AE}$ en el triángulo ABM. La prolongación de $\overline{CG}$ intersecta a $\overline{AE}$ en D.
Si: $AB = 5$ y $AC = 8$; hallar : AD/DE

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

9.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$) se traza la mediana $\overline{BM}$. Por el punto medio N de dicha mediana se traza una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{BC}$ en los puntos Q y P. Si : $PQ = 5$, $QN = 4$, hallar AC.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

10.- Calcular $x°$.



A) 30° B) 37° C) 53° D) 60° E) 75°

11.- En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se considera el punto H, por H se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{AB}$ en Q.
Además : $m \measuredangle PAB = 53°$, $m \measuredangle ACB = 143°$,

$$AP = AB \quad y \quad AH = 12.$$

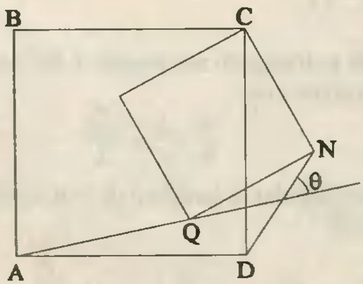
Hallar HC

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

12.- Desde un punto exterior "P" a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$, luego la secante PDB. Si BC = 7 CD y DA = 3. Hallar BA.

A) 25 B) 23 C) 21 D) 24 E) 28

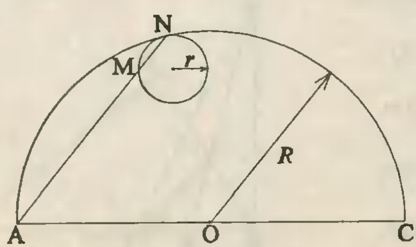
13.- Si ABCD y MCNQ son cuadrados , calcular el ángulo θ.



A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

14.- En la figura; hallar MN. Si : AN = 6, AB = 10 y $r = 1$



A) 1 B) 1,2 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

15.- En un cuadrilátero ABCD, AB = 12, AD = 10, BC = 6 y BD = 8.
Hallar CE, si "E" está en $\overline{BD}$ y EB = 5. Además $m \measuredangle BAD = m \measuredangle CBD$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

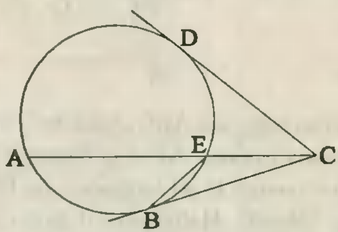
16.- En una circunferencia de diámetro $\overline{CE}$, las cuerdas $\overline{BE}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en F, el diámetro $\overline{BD}$ intersecta en G a $\overline{AC}$.
Hallar GC. Si AF = 3 , FG = 2 y AC = BE.

A) 5 B) 8 C) 10 D) 15 E) 20

17.- En la figura, si : DC = 3 , EC = 1 ,

$$m\,AD = m\,AB \quad y \quad AD = \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

Hallar EB. (B y D son puntos de tangencia).



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$

D) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$ E) $\frac{4}{5}\sqrt{10}$

18.- En un hexágono equiángulo ABCDEF en el cual : DE = 2 BC y EF = 2 CD. Hallar BF , si además se sabe que BD = $\sqrt{3}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.- En un triángulo ABC de baricentro G, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que BP = 4AP y BQ = 8. Calcular QC, si P, G y Q son colineales.

A) 2 B) 4/3 C) 8/3 D) 4 E) 16/3

20.- En un triángulo ABC se trazan la mediana $\overline{AM}$, la bisectriz interior $\overline{CN}$ y la ceviana $\overline{BD}$, concurrentes. Se traza $\overline{NT} \perp \overline{AC}$. Hallar TS si : CD = 6 (S : $\overline{AM} \cap \overline{ND}$)

A) 3 B) 2 C) 4 D) 6 E) $2\sqrt{3}$

21.- En un triángulo ABC en el cual se traza la altura $\overline{BH}$, la mediana $\overline{AM}$ y la ceviana $\overline{CN}$ concurrentes en "P". Si BP = 3 . PH y NB = 16. Hallar AN.

A) 8 B) 6 C) 4 D) 12 E) 16

22.- En la figura, O es centro. $\overline{OP}$ // AC ; hallar: PM , si : AB = 9 , BC = 11 y AC = 16

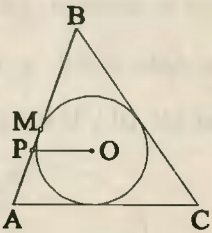
A) 3

B) 4

C) 2

D) 1

E) 1,5



23.- En un triángulo ABC (AB > BC) . Se trazan la bisectriz interior $\overline{AL}$ y la bisectriz exterior $\overline{BE}$. Asi mismo la prolongación de $\overline{BE}$ intersecta a $\overline{AB}$ en D . Hallar la medida del ángulo B para que el mayor ángulo formado por $\overline{AN}$ y $\overline{AN}$ sea congruente al ángulo exterior B.

A) 45° B) 90° C) 60° D) 53° E) 72°

24.- En la figura mostrada, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros de las semicircunferencias. Hallar AE. Si FP = 2 y PB = 3.

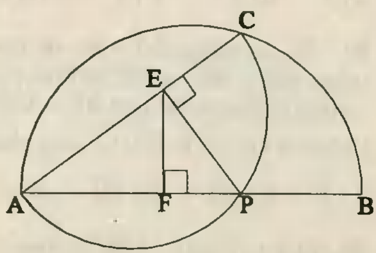
A) $2\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{3}$

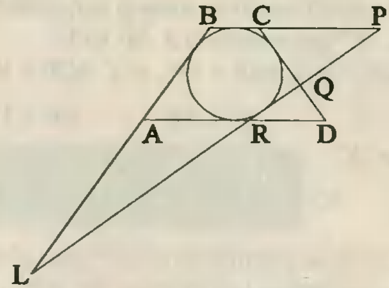
C) $6\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{6}$



25.- El gráfico mostrado es un trapecio isósceles, el lado QR mide *b* y el lado PQ mide *a*. Hallar LR



A) $\dfrac{ab(a+b)}{b-a}$

B) $\dfrac{ab}{a-b}$

C) $\dfrac{a^2b}{a^2-b^2}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b}$

E) $\dfrac{b(a+b)}{a-b}$

26.- En el triángulo rectángulo ABC recto en B se cumple que :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se pide calcular la longitud de la bisectriz exterior $\overline{BE}$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1 D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 4

27.- En la figura AB = BC, AM = MC. $\overline{AB}$, $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ forman un haz armónico. Calcular *x*.

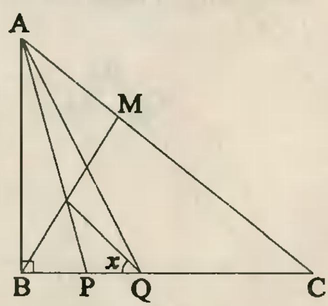
A) 22° 30'

B) 30°

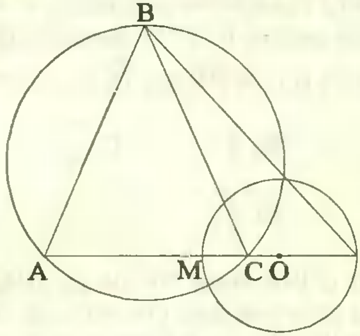
C) 37°

D) 45°

E) 60°



28.- En la figura "O" es centro AB = 8 , OL = 3. Calcular OC, si el triángulo ABC es equilátero.

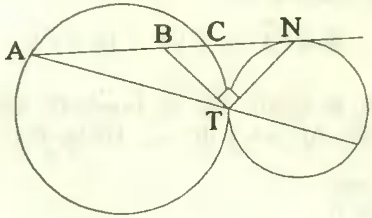


A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{6}$

29.- El triángulo ABC esta inscrito en una circunferencia. La mediatríz de $\overline{AC}$ intersecta en E a $\overline{AB}$ y su prolongación intersecta a la circunferencia en G; siendo $\overline{AB} \cap \overline{GC}$: F . Además se sabe que AE = 12, EF = 10 y FB = 11. Hallar BC.

A) 13 B) 13,2 C) 13,6 D) 13,8 E) 14

30.- En la figura T y N son puntos de tangencia , donde AB = 7 y BC = 3. Calcular CN.



A) 4 B) 4,5 C) 6 D) 6,5 E) 7,5

31.- El ángulo B de un triángulo isósceles ABC (AB = BC) mide 48°. Sobre la mediana $\overline{AM}$ se ubican los puntos P y Q. La prolongación de $\overline{AQ}$ intersecta en F a $\overline{BC}$. Si B, P, Q y M forman una cuaterna armónica , se pide calcular la $m\measuredangle$ PFB.

A) 66° B) 54° C) 72° D) 42° E) 36°

32.- En la figura, MC · HL = 54 , BL = 12 y BF = FC. Calcular BM

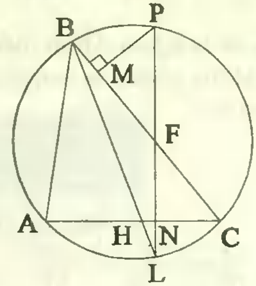
A) 3

B) 4

C) 4,5

D) 5

E) 6



33.- Dado el triángulo isósceles ABC (BC = AC) de incentro I . A continuación se traza la bisectríz interior $\overline{BD}$. Por I trazamos $\overline{IT}$ // $\overline{AB}$ (T en $\overline{AD}$) . Si AT = 4 y DC = 6 , hallar TD.

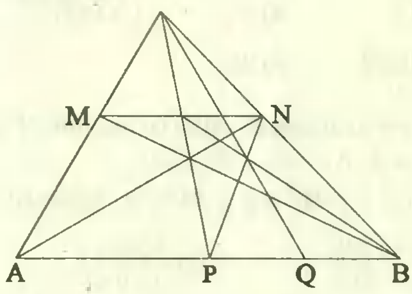
A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 0,5

34.- Dadas dos circunferencias ortogonales; la recta que contiene a sus centros determina sobre la primera circunferencia los puntos A y C, y sobre la segunda los puntos B y D.

Si BC = 3 CD = 6 , hallar AB (AD > AB)

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 8

35.- En la figura : $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ y AB = a. Se pide hallar PQ.



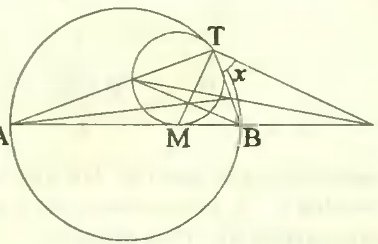
A) $\frac{a}{4}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{5}$ D) $\frac{2}{3}a$ E) $\frac{3}{5}a$

36.- En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y un punto M sobre la prolongación de $\overline{AB}$. Desde M se trazan las tangentes $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$. La cuerda $\overline{NP}$ intersecta en C al diámetro $\overline{AB}$.

Si 3CA = 5CB y MB = 6. Hallar MA

A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

37.- En la figura $\overline{AB}$ es diámetro , asi mismo T y M son puntos de tangencia. Determinar el valor de *x*.



A) 30° B) 53° C) 60° D) 45° E) 36°

38.- Hallar el menor ángulo agudo de un triángulo rectángulo en el cual el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo a un cateto.

A) 30° B) 36° C) 22° 30' D) 37° E) 15°

39.- El ángulo B de un triángulo ABC mide 16°, su perímetro es 56 y AB. BC = 600. Calcular la distancia del incentro del triángulo al vértice B.

A) 14 B) 21 C) $15\sqrt{2}$

D) $14\sqrt{2}$ E) 28

40.- En un triángulo ABC de incentro "I":

$m\measuredangle A = 73°$, $m\measuredangle 39°$.

Si : AB = c ,BC = a y AC = b ; hallar IB.

A) $\dfrac{(a+c)b}{a+b+c}$ D) $\dfrac{b(b+c)}{a+b+c}$

B) $\dfrac{c(a+c)}{a+b+c}$ E) $\dfrac{b(b+c)}{a+b+c}$

C) $\dfrac{bc}{a+c}$

41.- En un triángulo ABC, por B se traza una circunferencia que es tangente a $\overline{AC}$ en el punto T, dicha circunferencia interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos "R" y "S" respectivamente. Si 4 RB = 3 BS y $m\,\widehat{RT} = m\,\widehat{TS}$, calcular $\dfrac{AT}{TC}$

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{4}{3}$ C) $\dfrac{7}{4}$

D) $\dfrac{7}{3}$ E) $\dfrac{5}{4}$

42.- Por el baricentro "G" de un triángulo ABC, se traza una recta que interseca $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en "R" y "S" respectivamente; además a la prolongación de $\overline{BC}$ en "T". Calcular RG, si GS = a y ST = b

A) $\dfrac{ab}{a+b}$ B) $\dfrac{2ab}{a+b}$ C) $\dfrac{a-b}{ab}$

D) $\dfrac{3ab}{a+b}$ E) ab

43.- En un hexágono regular ABCDEF se traza en su región interior el cuadraddo AFGH, sobre $\overline{EF}$ se ubica el punto M; si $\overline{CM}$ interseca en N a $\overline{GF}$, calcular CN, si MN = 1 y $m\measuredangle NGM = 30°$

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) $3\sqrt{3}$ E) 4

44.- En la figura $\overline{CQ}$ es bisectriz, además PE = EC, AC = b y BC = a. Hallar PQ.

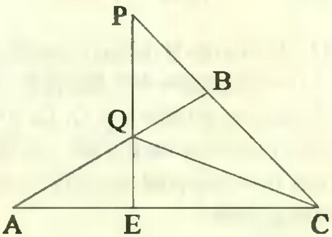
A) $\dfrac{2ab}{a+b}$

B) $\dfrac{ab}{a-b}$

C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{a+b}{ab}$

E) $\dfrac{a-b}{ab}$



CAP. 12

semejanza de triángulos

12.1 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En la figura adjunta, si las medidas de los lados de los triángulos ABC y MNL son proporcionales y sus ángulos son congruentes , entonces diremos que dichos triángulos son semejantes y escribiremos : $\Delta ABC \sim \Delta MNL$.

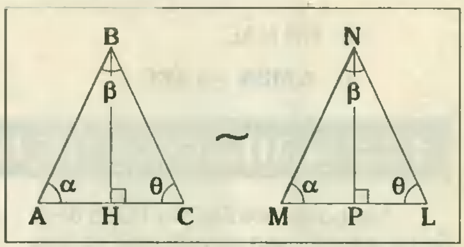


Fig. 12.1

Cumpliéndose : $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NL} = \dfrac{AC}{ML} = \dfrac{BH}{NP} = k$

donde : k = razón de semejanza.

Observación : Los lados opuestos a los ángulos iguales se llaman "*Lados homólogos*" y estos son proporcionales.

12.2 CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1^ER^ CASO

$$\text{Si}: \begin{cases} \measuredangle A \cong \measuredangle M \\ \measuredangle C \cong \measuredangle L \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta MNL$$

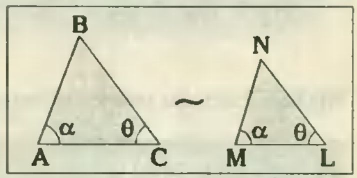


Fig. 12.2

2^DO^ CASO

$$\text{Si}: \begin{cases} \measuredangle A \cong \measuredangle M \\ \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{ML} \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta MNL$$

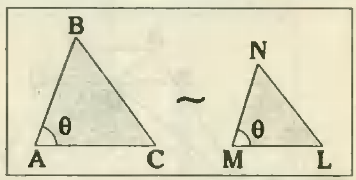


Fig. 12.3

3^ER^ CASO

$$\text{Si} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NL} = \frac{AC}{ML} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta MNL$$

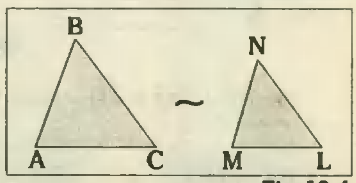


Fig. 12.4

CONSECUENCIAS :

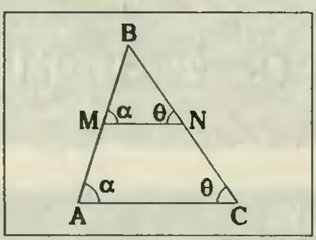
a) 

Fig. 12.5

Si : $\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$

$\Rightarrow$ **Δ MBN ~Δ ABC**

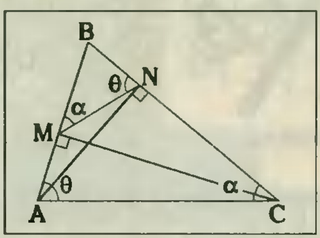
b) 

Fig. 12.6

Si : $\overline{AN}$ **y** $\overline{CM}$ **son alturas**

$\Rightarrow$ **Δ MBN ~Δ ABC**

12.3 SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Los polígonos ABCD y PQRS de la figura adjunta son semejantes ya que se pueden descomponer en un número igual de triángulos semejantes.

Cumpliéndose que :

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{AD}{PS} = \frac{AC}{PR}$$

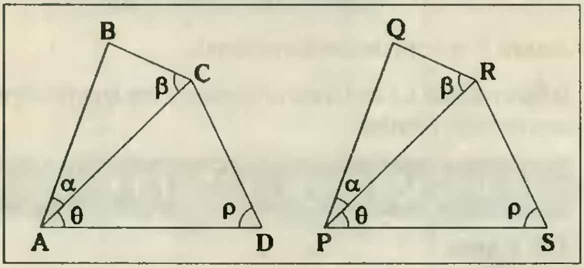


Fig. 12.7

NOTA.- Todos los polígonos semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

12.4 PROPIEDADES IMPORTANTES

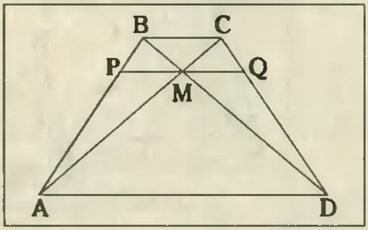
a) 

Fig. 12.8

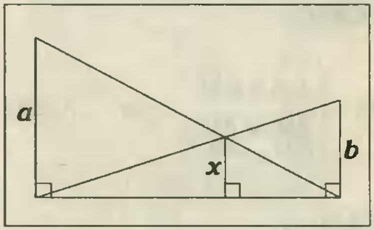
b) 

Fig. 12.9

Si : $\overline{BC} \,//\, \overline{PQ} \,//\, \overline{AD}$, entonces :

$$\boxed{PM = MQ} \quad \text{y} \quad \boxed{PQ = \frac{2\,(BC)\,(AD)}{BC + AD}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{ab}{a+b}}$$

c)

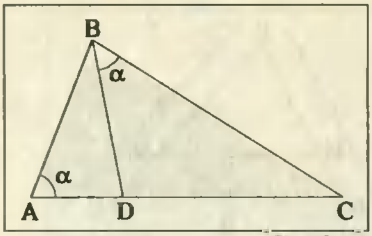


Fig. 12.10

Si : $\measuredangle$ BAC $\cong$ $\measuredangle$ DBC

$$\Rightarrow \quad (BC)^2 = (AC)\,(DC)$$

d)

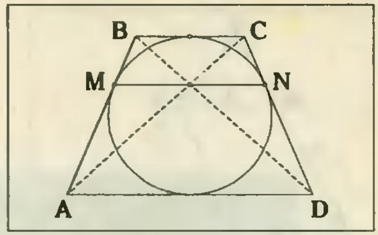


Fig. 12.11

Si : ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$)

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{2\,(BC)\,(AD)}{BC + AD}$$

e)

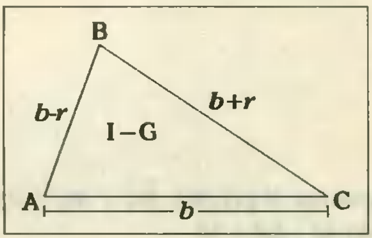


Fig. 12.12

Si para el Δ ABC : I es Incentro y G es Baricentro;

se cumple que : $IG = \dfrac{r}{3}$

f)

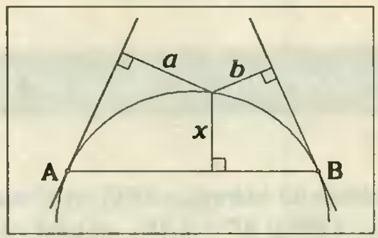


Fig. 12.13

Si A y B son puntos de tangencia, entonces:

$$x^2 = ab$$

g)

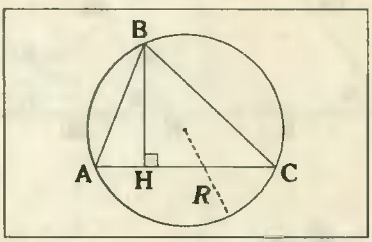


Fig. 12.14

Del gráfico, se cumple :

$$AB\,.\,BC = BH\,.\,2R$$

h)

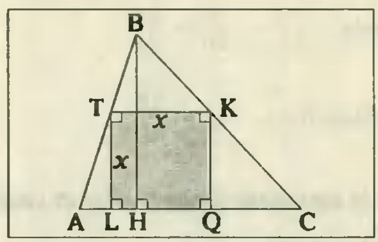


Fig. 12.15

Si $\square$ TKQL es un cuadrado :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{BH} + \frac{1}{AC}$$

i)

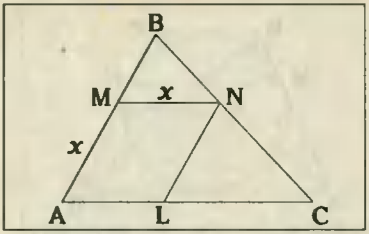


Fig. 12.16

Si ▱ MNLA es un rombo :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

j)

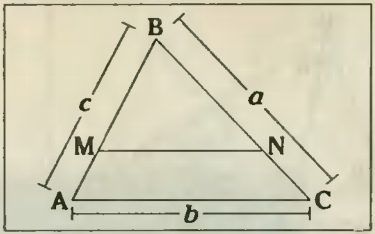


Fig. 12.17

Si $\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$ y $2p$ (Δ MBN) = $2p$ (▱ AMNC),

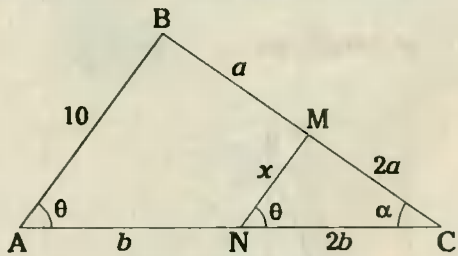
luego : $MN = \dfrac{bp}{a+c}$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Se tiene un triángulo ABC, en el cual se toman los puntos M y N ($M \in \overline{BC}$ y $N \in \overline{AC}$). Si BC = 3 BM y AC = 3 AN , se pide calcular MN si además : AB = 10

Resolución.-

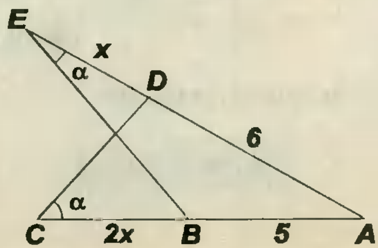
Al construir el gráfico trasladando en él todos los datos , apreciamos que los valores cumplen el Teorema de Thales, de modo que : $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$. También logramos reconocer que el Δ MNC es semejante con el triángulo ABC (item 12.2 → 1^er^ caso).



Entonces : $\dfrac{x}{10} = \dfrac{2a}{3a}$

Simplificando : $x = \dfrac{20}{3}$

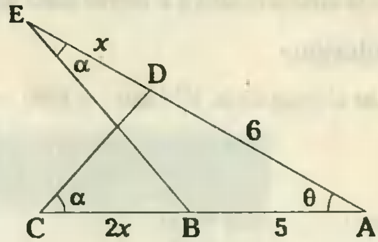
2.- En la siguiente figura, hallar el valor de "x"



Resolución.-

Del gráfico podemos observar que :

Δ CDA ~ Δ ABE (item 12.2)



Entonces : $\dfrac{6}{5} = \dfrac{2x+5}{x+6}$

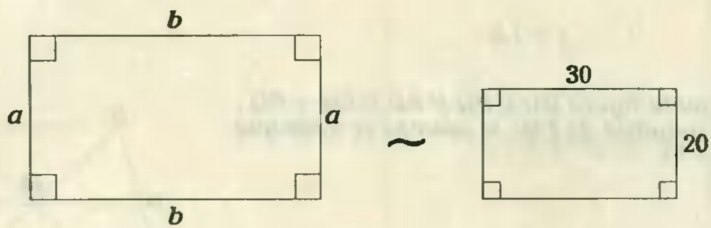
Luego : $6x + 36 = 10x + 25$

En consecuencia : $4x = 11$

$\therefore \quad x = \dfrac{11}{4}$

3.- Los lados de un rectángulo miden 20m y 30m respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de 360m de perímetro semejante al dado.

Resolución.-



Los rectángulos mostrados son semejantes , pues satisfacen el item 12.2 → 3er caso . Asi mismo esto está en concordancia con los datos del problema .

Ahora , se sabe que : $2a + 2b = 360$

De donde : $a + b = 180$ ... (*)

Si los rectángulos son semejantes, entonces : $\left.\begin{matrix} a = 20k \\ b = 3k \end{matrix}\right\}$ (**)

Reemplazando en (*) : $20k + 30k = 180$

Donde al despejar se obtiene : $k = \dfrac{18}{5}$

Ahora en (**) : $a = 20\left(\dfrac{18}{5}\right) \Rightarrow a = 72$

También : $b = 30\left(\dfrac{18}{5}\right) \Rightarrow b = 108$

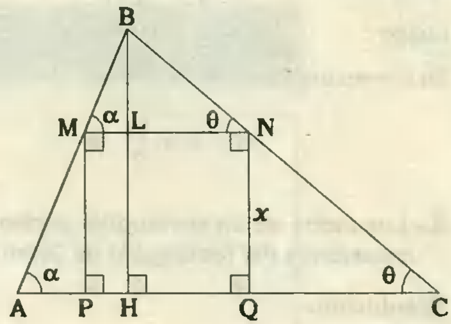
$\therefore$ **Las dimensiones son 72 y 108**

4.- Calcular la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un triángulo ABC, si la base $\overline{AC}$ y la altura relativa a dicho lado miden 6 y 2 respectivamente.

Resolución.-

Según el item 12.2, 1[er] caso , $\Delta ABC \sim \Delta MBN$:

$$\Rightarrow \quad \frac{AC}{MN} = \frac{BH}{BL} \quad ...(*)$$



Ahora : $MN = LH = x$

Entonces : $BL = BH - LH$

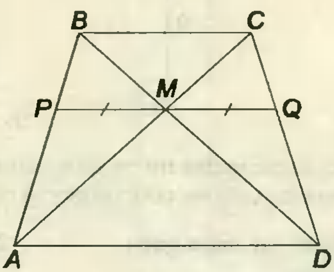
Luego : $BL = 2 - x$

Reemplazando en (*) : $\dfrac{6}{x} = \dfrac{2}{2-x}$

Donde : $12 - 6x = 2x$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 1,5}$

5.- En la siguiente figura BC // PQ // AD y PM = PQ , calcular la longitud de PQ , si además se sabe que AD = 2 BC = 18.

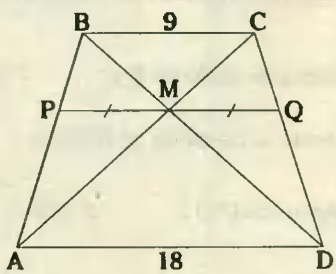


Resolución.-

De los datos : $AD = 2BC = 18 \quad \Rightarrow \quad BC = 9$

Reconociendo que : $PM = MQ$ y $\overline{BC} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{AD}$

Aplicaremos la propiedad 12.4a , la cual establece que :



$$PQ = \frac{2(9)(18)}{9+18}$$

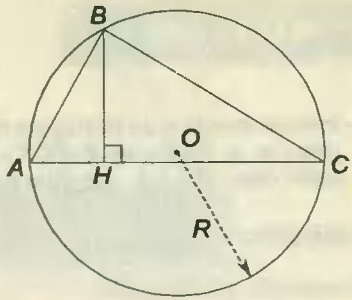
Ahora : $PQ = \dfrac{2\times 9\times 18}{27}$

Simplificando : $PQ = 2 \times 6$

$\therefore \quad \mathbf{PQ = 12}$

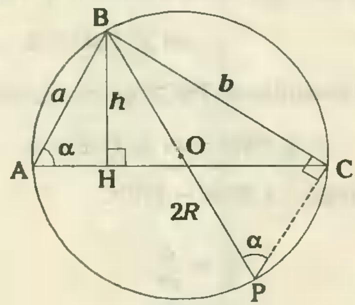
6.- En la siguiente figura, calcular "R", si se sabe que :

$$AB = 4 \quad , \quad BC = 6 \;\; y \;\; BH = 3$$



Resolución.-

Si graficamos un triángulo adicional al dado, como el ΔBCP, comprobaremos que será recto en C, se verificará una semejanza de triángulos, por lo que se podrá aplicar el TEOREMA DE NAGEL (rectas isogonales), vista en el item 12.4g ; veamos :



$$\triangle ABH \sim \triangle BCP$$

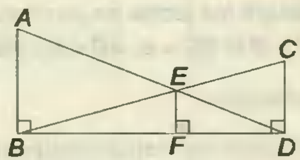
$$\frac{b}{h} = \frac{2R}{a} \quad \Rightarrow \quad ab = h \times 2R$$

En nuestro problema : $a = 4$, $b = 6$, $h = 3$

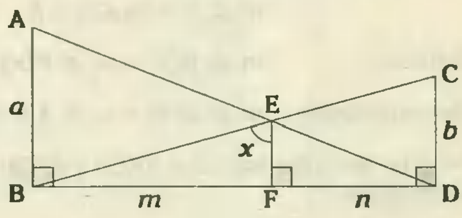
Reemplazando : $4 \times 6 = 3 \times 2R$

$$\therefore \quad R = 4$$

7.- Dado el siguiente gráfico, se pide calcular EF, si además se sabe que : AB = 6 y CD = 4



Resolución.-



Sea : $AB = a$, $CD = b$

$\triangle BFE \sim \triangle BDC$: $\dfrac{x}{b} = \dfrac{m}{m+n}$ ... (1)

$\triangle ABD \sim \triangle EFD$: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{n}{m+n}$ ... (2)

(1) + (2) : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{ab}{a+b}$ (Propiedad, item 12.4b)

Entonces como : $a = 6$ y $b = 4$

$$x = \frac{6 \times 4}{6+4} \qquad \therefore \qquad x = \frac{12}{5}$$

MISCELÁNEA

1.- Interiormente a un triángulo rectángulo ABC ($m\measuredangle B = 90$) se ubica el punto P de modo que : $m\measuredangle PAC = m\measuredangle PCB = \alpha$, $m\measuredangle PCA = \theta$ y $m\measuredangle PBC = 2\theta + \alpha$. Si además se sabe que : PC = 4 , se pide calcular BP.

Resolución.-

Trazamos la mediana $\overline{BM}$

Luego : $BM = AM = MC = a$ y $m\measuredangle MBC = \alpha + \theta$

$\Rightarrow \qquad m\measuredangle PBM = \theta$

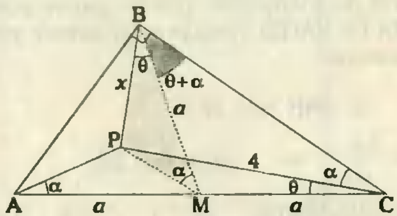
El cuadrilátero PBCM es inscriptible , dado que :

$m\measuredangle PMB = m\measuredangle PCB = \alpha$

Luego : $\Delta BPM \sim \Delta APC$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{x}{4} = \dfrac{a}{2a}$

$\therefore \qquad \boxed{x = 2}$



2.- Sobre los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio ABCD se consideran los puntos P y Q si BC = a, AD = b y $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$. Hallar PQ. (PQ // PD)

Resolución.-

Por ángulos correspondientes se puede establecer que :

$m\measuredangle C = m\measuredangle Q = \delta$

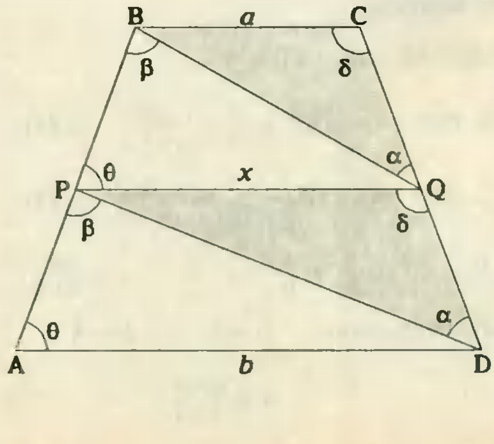
También : $m\measuredangle BQC = m\measuredangle PDQ = \alpha$

Por consiguiente : $m\measuredangle BPQ = m\measuredangle A = \theta$

De este modo los trapecios PBCQ y APQD son semejantes :

$\Rightarrow \qquad \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$

$\therefore \qquad \boxed{x = \sqrt{ab}}$



3.- En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$. Luego se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Por D se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$ la cual corta a la prolongación de $\overline{AF}$ en P y a $\overline{CE}$ en Q. Si LP = 3 , AD = 6 y DC = 9; calcular LQ (L es ortocentro)

Resolución.-

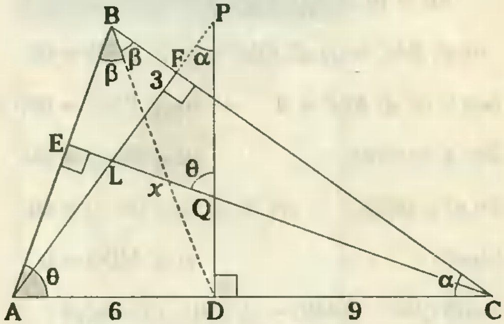
Por tener sus lados respectivamente perpendiculares , se tendrá que :

$$m\measuredangle EAD = m\measuredangle EQP = \theta$$

Además : $m\measuredangle LPD = m\measuredangle BCA = \alpha$

Luego se tendrá que : $\Delta LPQ \sim \Delta ABC$

$$\frac{x}{AB} = \frac{3}{BC} \Rightarrow x = 3\left(\frac{AB}{BC}\right) \quad ... (1)$$



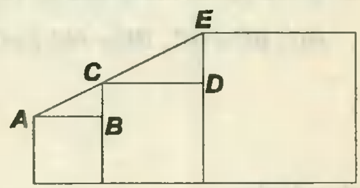
Por el teorema de la bisectríz :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{6}{9} \quad ... (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) : $x = 3\left(\frac{6}{9}\right)$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2}$$

4.- En la figura los lados de los cuadrados de menor a mayor miden 4, x y 9. Calcular : x



Resolución.-

Dado que : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EC}$)

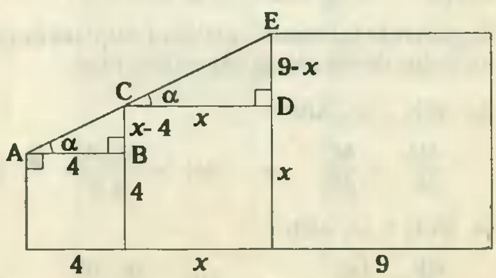
$\Rightarrow$ ⊿ ABC ~ ⊿ CDE

Luego : $\frac{x-4}{9-x} = \frac{4}{x}$

Efectuando : $x^2 - 4x = 36 - 4x$

Ahora : $x^2 = 36$

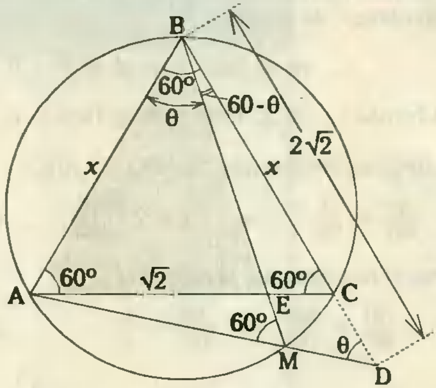
$\therefore$ $x = 6$



5.- El triángulo equilátero ABC se encuentra inscrito en una circunferencia. Sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto D; $\overline{AD}$ intersecta a la circunferencia en M y $\overline{AC} \cap \overline{BM}$: {E} . Si AE = $\sqrt{2}$ y BD = $2\sqrt{2}$, se pide calcular AB.

Resolución.-

Ya que el triángulo ABC es equilátero, entonces :



$$AB = BC = AC = x \quad y$$

$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACB = 60$$

Sea : $m\measuredangle ABE = \theta \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle EBC = 60 - \theta$

Por $\measuredangle$ inscrito : $\qquad m\measuredangle AMB = 60$

En el Δ MBD : $\qquad m\measuredangle MDB + 60 - \theta = 60$

Luego : $\qquad m\measuredangle MDB = \theta$

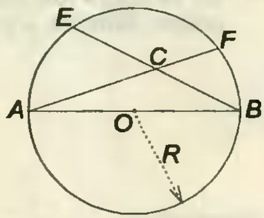
Dado que : $\Delta ABE \sim \Delta ABD$, entonces :

$$\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2}$$

6.- En la figura mostrada se verifica la siguiente relación :

AC . AF + BC . BE = 144 y «O» es centro . Hallar R.

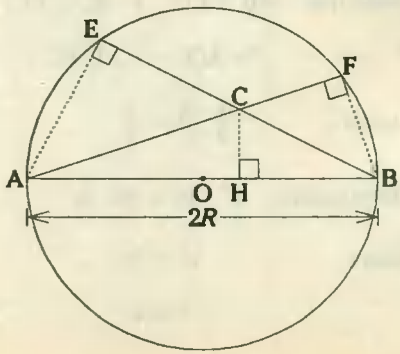


Resolución.-

Trazamos $\overline{AE} \perp \overline{BE}$, $\overline{BF} \perp \overline{AF}$ y $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

Luego : $m\measuredangle AEB = m\measuredangle AFB = 90$

Empleando la proporcionalidad entre las longitudes de los lados de los triángulos semejantes :



⊿ ACH ~ ⊿ ABF :

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AC}{2R} \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{AC.AF}{2R} \quad ... (1)$$

⊿ BCH ~ ⊿ ABE :

$$\frac{HB}{BE} = \frac{BC}{2R} \quad \Rightarrow \quad HB = \frac{BC.BE}{2R} \quad ... (2)$$

Sumando las expresiones (1) y (2) y teniendo en cuenta la condición del problema :

$$AH + HB = \frac{AC.AF+BC.BE}{2R} = \frac{144}{2R} \quad ; \text{ puesto que } : AH + HB = 2R$$

Entonces : $\quad 2R = \dfrac{72}{R} \quad \Rightarrow \quad R^2 = 36$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = 6}$$

7.- En un triángulo ABC, se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{BC}$ en P, trazándose luego la mediana $\overline{AM}$ que intersecta a dicha mediatriz en «O». Por O se traza una paralela a $\overline{BC}$ que corta en E a $\overline{AB}$ y en F a $\overline{AC}$. Si OM = 2 , OC = 6 y OF = 4 , calcular PM

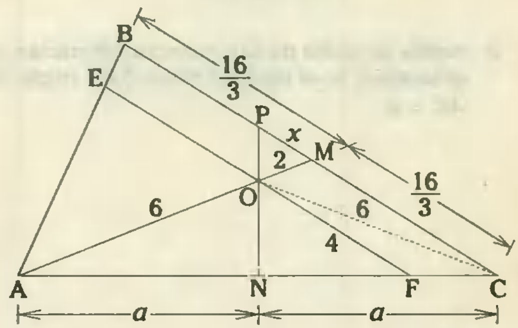
Resolución.-

Por el teorema de la mediatriz podemos asegurar que : $\quad OA = OC = 6$

Reconociendo que : Δ AOF ~ Δ AMC :

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{MC} = \frac{6}{8} \quad \Rightarrow \quad MC = \frac{16}{3}$$

Empleando el teorema de Menelao en el Δ AMC , tendremos :



$$a \,.\, 6 \,.\, x = a \,.\, 2 \,.\left(x + \frac{16}{3}\right)$$

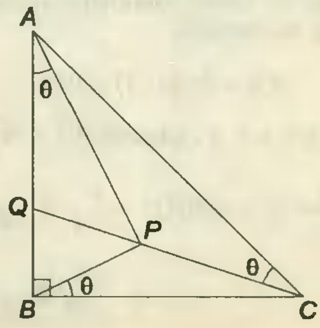
Donde : $\quad 6x = 2x + \dfrac{32}{3}$

Ahora : $\quad 4x = \dfrac{32}{3}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{8}{3}}$$

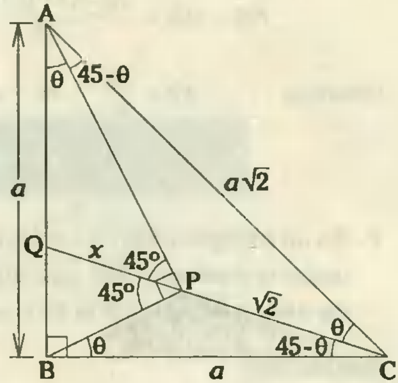
8.- Del gráfico mostrado se pide calcular la longitud de PQ , si se sabe que :

$$\boldsymbol{PC = \sqrt{2} \text{ y } AB = BC.}$$



Resolución.-

En el ⊿ APB, $\overline{PQ}$ es bisectriz.



Luego : $\dfrac{\sqrt{2}}{x} = \dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{PB}$ ... (1)

Hacemos : $AB = BC = a \quad \Rightarrow \quad AC = a\sqrt{2}$

Puesto que : $\Delta APC \sim \Delta BPC$:

$\dfrac{AP}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} \quad \Rightarrow \quad AP = 2$ ... (2)

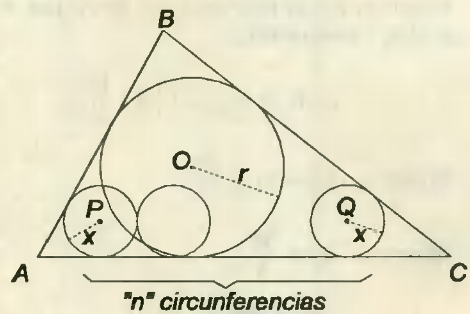
También : $\dfrac{\sqrt{2}}{PB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} \quad \Rightarrow \quad PB = 1$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) :

$$\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

9.- Hallar el radio de las n circunferencias congruentes, si el inradio del Δ ABC mide «r» y AC = a.

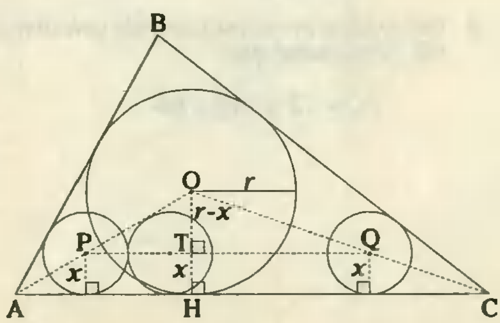


Resolución.-

Trazamos $\overline{PQ}$ y $\overline{OH} \perp \overline{AC}$ .Luego considerando los radios contenidos entre los puntos P y Q, tendremos :

$PQ = 2x(n-1)$, $OH = r$

y $OT = r - x$, además $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$



$\Delta AOC \sim \Delta POQ$: $\dfrac{r}{r-x} = \dfrac{a}{2x(n-1)}$

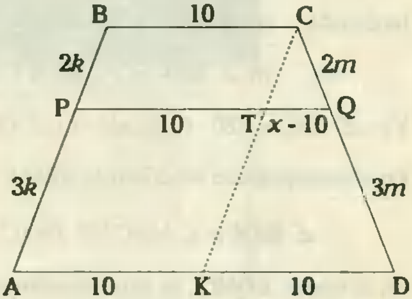
$$\therefore \quad x = \frac{a}{2(n-1)} + r$$

10.- Las bases de un trapecio miden 10 y 20 ; se traza una paralela a las bases que divide a los lados no paralelos en dos segmentos proporcionales a 2 y 3 . Calcular la longitud de dicha paralela.

Resolución.-

Sea el trapecio ABCD cuyas bases son :

BC = 10 y AD = 20.



Además la paralela $\overline{PQ}$ a las bases (PQ = x), hace que :

BP = $2k$, PA = $3k$, CQ = $2m$ y QD = $3m$

Por el vértice «C» trazamos $\overline{CK}$ // $\overline{AB}$, la cual intersecta a $\overline{PQ}$ en T .Luego se puede reconocer que :

BC = PT = AK = 10 y TQ = x - 10

Los triángulos TCQ y KCD son semejantes.

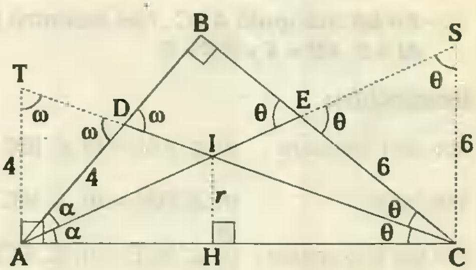
Luego : $$\frac{x-10}{10}=\frac{2m}{5m}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 14}$

11.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si se sabe que AD = 4 y CE = 6 , calcular el inradio del triángulo ABC.

Resolución.-

Al trazar las bisectrices interiores, estas se logran intersectar en el punto I . De este modo se puede reconocer que el inradio del ⊿ ABC es IH = r.

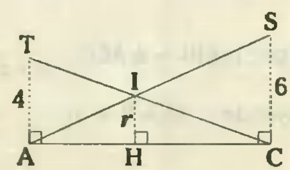


A continuación por A y C trazamos $\overline{AT}$ y $\overline{CS}$ perpendiculares a $\overline{AC}$, tal como se muestra en el gráfico adjunto . Luego :

AD = AT = 4 y CE = CS = 6

En la figura : ATISC , aplicaremos la propiedad 12.4b :

$$r=\frac{4\times 6}{4+6}$$



$\therefore$ $\boxed{r = 2,4}$

12.- En un triángulo obtusángulo ABC obtuso en B, O es el circuncentro y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ (M en $\overline{AC}$), las rectas perpendiculares a $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ que pasan por M intersectan a la prolongación de $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$ en Q y N respectivamente. Si MN = 4 y MQ = 9, hallar AC.

<u>**Resolución.**</u>

En el triángulo isósceles AOC (AO = OC),

hacemos : $m\measuredangle AOM = m\measuredangle MOC = \theta$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle AMK = m\measuredangle CMT = \theta$

Y $m\measuredangle ABC = 180 - \theta$, donde : $m\measuredangle QBC = \theta$

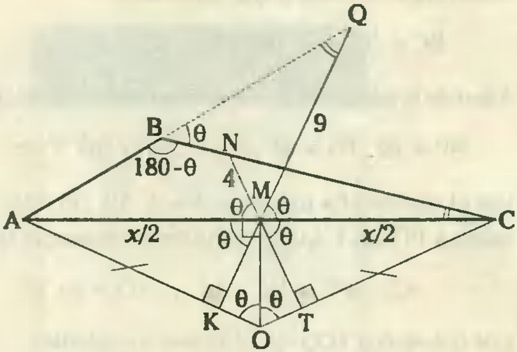
En el cuadrilátero inscriptible ABNM :

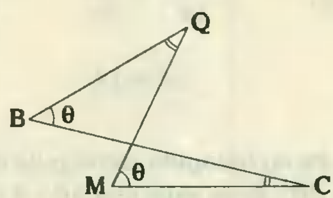
$\measuredangle BAM \cong \measuredangle MNC$ (3ª Prop.)

En la figura BQMC, se puede reconocer que :

$\measuredangle BQM \cong \measuredangle BCM$

Por esta razón diremos que : $\Delta AQM \sim \Delta MNC$





$$\frac{x/2}{4} = \frac{9}{x/2}$$

$\therefore \quad \boxed{x = 12}$

13.- En un triángulo ABC, I es incentro y E es el excentro relativo a $\overline{BC}$. Calcular IE, si AI = 3, AB = 5 y AC = 6.

<u>**Resolución.-**</u>

Por ser I incentro : $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \theta$

También : $m\measuredangle BAI = m\measuredangle IAC = \alpha$

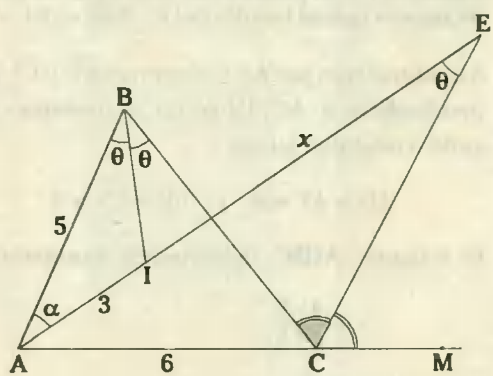
Por ser E excentro : $m\measuredangle BCE = m\measuredangle ECH$

Por Propiedad : $m\measuredangle AEC = \dfrac{m\measuredangle B}{2} = \theta$

Luego : $\Delta AIB \sim \Delta AEC$: $\dfrac{5}{3+x} = \dfrac{3}{6}$

De donde : $30 = 9 + 3x \quad \Rightarrow \quad 3x = 21$

$\therefore \quad \boxed{x = 7}$



14.- En el triángulo ABC escaleno, donde BC = 4 y AB + AC = 20 , se traza por E, excentro relativo a $\overline{BC}$, una paralela a $\overline{BC}$ que intersecta las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en P y Q respectivamente . Calcular PQ.

<u>**Resolución**</u>.-

Empleando la propiedad de los ángulos alternos internos :

$m\measuredangle CBE = m\measuredangle PEB = \alpha$

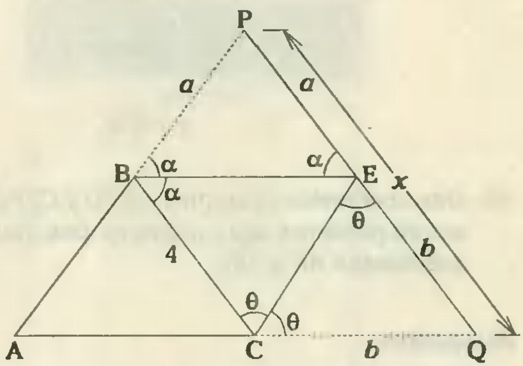
$m\measuredangle BCE = m\measuredangle CEQ = \theta$

El Δ BPE y Δ EQC son isósceles :

$\Rightarrow \quad PB = PE = a \;\; y \quad EQ = QC = b$

Asi mismo : Δ ABC ~ Δ PBQ .....($\overline{BC}$ // $\overline{PQ}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{a+b} = \frac{AB+BC}{AP+AQ} = \frac{20}{20+a+b}$$



De donde : $\dfrac{4}{x} = \dfrac{20}{20+x}$

Efectuando : $80 + 4x = 20x$

Por consiguiente : $16x = 80 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 5}$

15.- Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio 10. Calcular la longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas desde C y A , si m∡ B = 53.

<u>**Resolución**</u>.-

Sea «O» el centro de la circunferencia

Luego : OA = OP = 10 , $m\measuredangle APC = 53°$

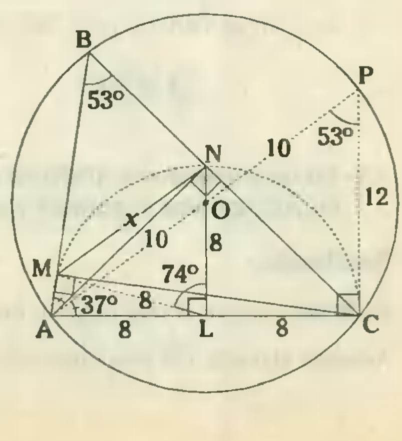
Asi mismo : AL = LC .....(L : punto medio de $\overline{AC}$)

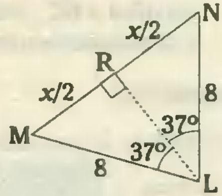
En el ⊿ ACP de 37° y 53° : AL = LC = 8 y PC = 12

También reconocemos que en el cuadrilátero inscriptible AMNC :

$m\measuredangle MLN = 74°$ y ML = LN = 8

Ahora, por razones pedagógicas , aislamos el Δ MLN isósceles, en el que trazamos la altura $\overline{LR}$, la que además será mediana, mediatriz y bisectríz del triángulo dado.





Luego : $MR = RN = \frac{x}{2}$,

También : $m \measuredangle MLP = 37°$

Asi mismo se reconoce que : ⊿ MRL ~ ⊿ APC

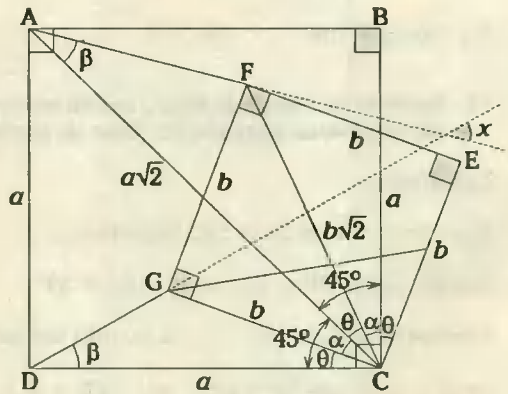
$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{x}{2}}{12} = \frac{8}{20}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 9{,}6}$$

16.- Dos cuadrados diferentes ABCD y CEFG están dispuestos de modo que el $\measuredangle$ BCG es agudo (G dentro del cuadrado). Calcular la medida del menor ángulo que forman los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{DG}$.

Resolución.-

Luego de elaborar el gráfico correspondiente , prolongamos $\overline{AF}$ y $\overline{DG}$, y señalamos el ángulo x buscado . Además se identifica que :



$m \measuredangle DCG = \theta$ y $m \measuredangle GCA = \alpha$

Luego , se puede apreciar que : $\alpha + \theta = 45$

En el cuadrado CEFG : $m \measuredangle ACF = \theta$

Además si : $CD = a$, $CG = b$

$$\Rightarrow \quad AC = a\sqrt{2} \quad y \quad FC = b\sqrt{2}$$

También : $\triangle DGC \sim \triangle ACF$ (2do CASO)

$$\Rightarrow \quad m \measuredangle GDC = m \measuredangle FAC = \beta$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 90}$$

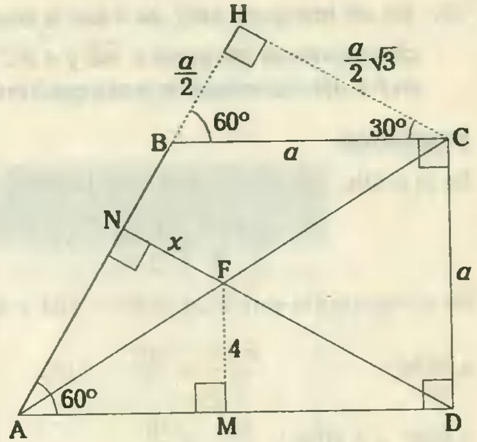
17.- En un cuadrilátero ABCD se tiene que $m \measuredangle A = 60$, $m \measuredangle C = m \measuredangle D = 90$ y $BC = CD$. En $\overline{AC}$ se ubica el punto F y se traza $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ y $\overline{FN} \perp \overline{AB}$; calcular FN , si FM = 4

Resolución.-

Observamos que el cuadrilátero ABCD es un trapecio rectángulo donde : $BC = CD = a$.

Además al trazar $\overline{CH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$ se tiene : $m \measuredangle HBC = 60$

En el $\triangle$ BHC de 30° y 60° : $HC = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



$\triangle$ ANF ~ $\triangle$ AHC : $\dfrac{x}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{AF}{AC}$ ... (1)

$\triangle$ AMF ~ $\triangle$ ADC : $\dfrac{4}{a} = \dfrac{AF}{AC}$ ... (2)

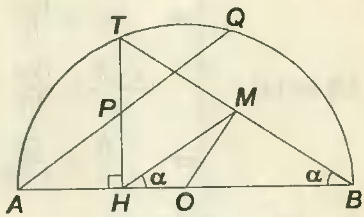
De (1) y (2) : $\dfrac{x}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{4}{a}$

$\therefore$ $\mathbf{x = 2\sqrt{3}}$

18.- En la figura mostrada se sabe que :

PQ = 5 y AP = 4 .

Calcular OM («O» es centro)



<u>Resolución</u>.-

Se reconoce que en el $\triangle$ THB : $\overline{HM}$ es mediana ; luego: TM = MB = HM.

Además siendo «O» centro , se tiene que : $\overline{OM} \perp \overline{TB}$

Trazamos $\overline{AT}$, luego : $\overline{AT} \perp \overline{TB}$

Y en el $\triangle$ ATB : $OM = \dfrac{AT}{2}$ (Base Media)

$\Rightarrow$ $AT = 2x$

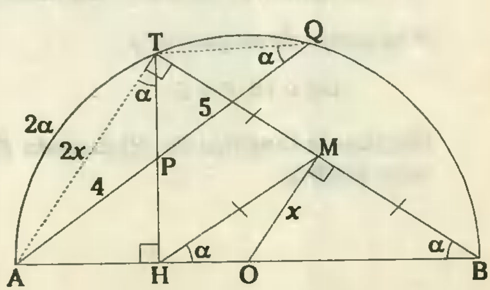
Por ángulo inscrito : $m\measuredangle TQA = \alpha$

En el $\triangle$ ATB : $m\measuredangle ATH = \alpha$

Δ ATQ ~ Δ ATP : $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{9}{2x}$

Donde : $4x^2 = 36$

$\therefore$ $\mathbf{x = 3}$

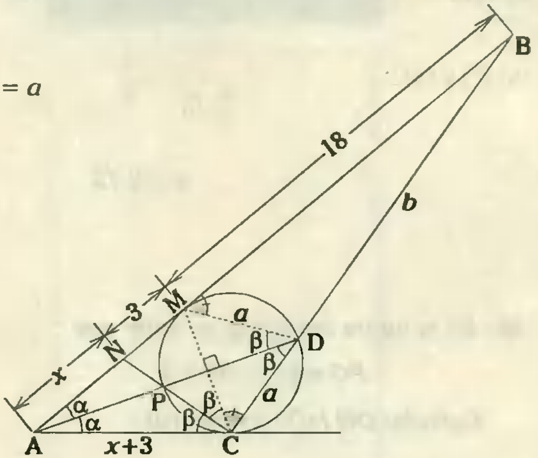


19.- En un triángulo ABC, se traza la bisectríz interior $\overline{AD}$ (D en $\overline{BC}$). Por D se traza una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ en M y C respectivamente de modo que intersecta en P a $\overline{AD}$. Asi mismo la prolongación $\overline{CP}$ corta a $\overline{AB}$ en N. Si MN = 3 , MB = 18, calcular AN.

Resolución.-

En el Δ ABC, por el teorema de la bisectríz interior :

$$\frac{x+21}{x+3} = \frac{b}{a} \quad ...\ (1)$$



En el trapezoide simétrico AMDC : DM = DC = a

Δ ACM : $$\frac{x+3}{x} = \frac{MC}{3} \quad ...\ (2)$$

Δ MBC ~ Δ MDB : $$\frac{MC}{a} = \frac{18}{b}$$

$$\Rightarrow \quad MC = \frac{18a}{b} \quad ...\ (3)$$

(3) en (2) : $$\frac{x+3}{x} = \frac{18a}{3b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{6x}{x+3} \quad ...\ (4)$$

Reemplazando (4) en (1) :

$$\frac{x+21}{x+3} = \frac{6x}{x+3}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 4{,}2}$$

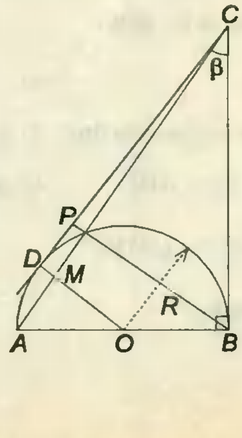
20.- En la figura mostrada se sabe que :

«O» es centro de la semicircunferencia ,

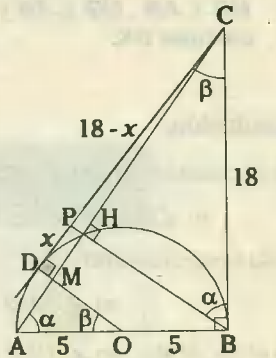
D es punto de tangencia y :

BC = 18, R = 5.

Calcular la longitud de PD cuando $\overline{OM}$ tome su máximo valor entero.



Resolución.-



El radio $\overline{OD}$ es perpendicular a la tangente $\overline{CD}$. En el □ ODCB inscriptible :

$$m\measuredangle DOA = m\measuredangle DCB = \beta \qquad (3^{ra}\ \text{Prop.})$$

Los ángulos CAB y CBH son congruentes por ser complementos del ∡ HBA. Luego :

$\Delta PCB \sim \Delta AMO$: $\dfrac{18-x}{OM} = \dfrac{18}{5}$ ... (*)

Del gráfico : $OM < OD \Rightarrow OM < 5$

El máximo valor entero de OM será : 4

Sustituyendo en (*) : $\dfrac{18-x}{4} = \dfrac{18}{5}$

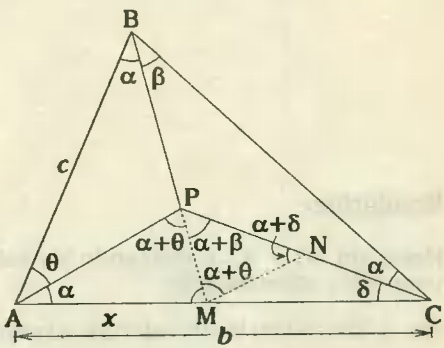
$$\therefore \qquad x = 3{,}6$$

21.- En el interior de un triángulo acutángulo ABC se ubica su punto P de «Brocard» (∡ ABP ≅ ∡ PAC ≅ ∡ PCB). Además $\overline{BP}$ prolongado intersecta en M a $\overline{AC}$. Si AB = c y AC = b ; calcular AM.

Resolución.-

Reconocemos que : $\Delta BAM \sim \Delta PAM$:

$$\frac{c}{AP} = \frac{x}{PM} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{c} = \frac{PM}{AP} \quad ...\ (1)$$



Trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AP}$, luego por ángulos alternos :

$$m\measuredangle PMN = m\measuredangle APM = \alpha + \theta$$

$\Delta PMN \sim \Delta ABC$: $\dfrac{PM}{c} = \dfrac{MN}{b}$ ... (2)

$\Delta APC \sim \Delta MNC$: $\dfrac{AP}{MN} = \dfrac{b}{b-x}$ ... (3)

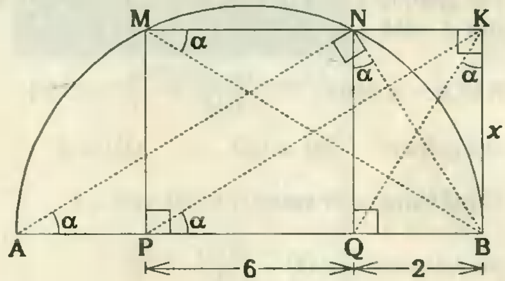
Dividiendo (2) entre (3) :

$$\frac{PM}{AP} \cdot \frac{MN}{c} = \frac{MN(b-x)}{b^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{PM}{AP} = \frac{c(b-x)}{b^2} \quad ...\ (4)$$

Igualando (1) y (4) : $\dfrac{x}{c} = \dfrac{c(b-x)}{b^2}$

Finalmente resolviendo : $x = \dfrac{c^2 b}{b^2 + c^2}$

22.- En una semicircunfencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza la cuerda $\overline{MN}$, luego se trazan $\overline{MP} \perp \overline{AB}$, $\overline{NQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BK}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{MN}$. Si : PQ = 6 y QB = 2 , calcular BK.



<u>Resolución</u>.-

En el cuadrilátero inscriptible PMKB :

$$m\measuredangle KMB = m\measuredangle KPB = \alpha$$

En la semicircunferencia :

$$m\measuredangle NMB = m\measuredangle NAB = \alpha$$

En el ⊾ ANB : $m\measuredangle NAB = m\measuredangle QNB = \alpha$

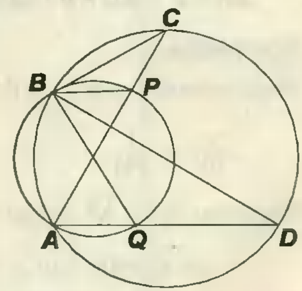
En el cuadrilátero inscriptible QNKB :

$$m\measuredangle QNB = m\measuredangle QKB = \alpha$$

$\Delta PKB \sim \Delta QKB \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{8}{x}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$$

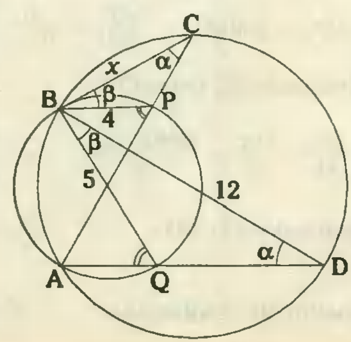
23.- En la figura se tiene dos circunferencias secantes , tales que : BP = 4 , BQ = 5 y BD = 12 . Con estos datos se pide hallar la longitud de BC .



<u>Resolución</u>.-

Haciendo BC = x , e indicando los valores de los lados conocidos , diremos que :

Por $\measuredangle$ inscrito en la circunferencia mayor , tendremos :



$$m\measuredangle BCP = m\measuredangle BDA = \alpha$$

Además resulta : $m\measuredangle CBP = m\measuredangle DBQ = \beta$

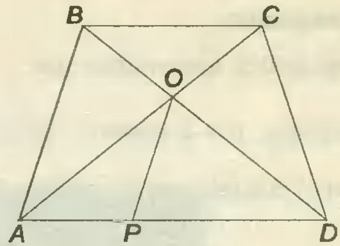
$\Delta BCP \sim \Delta BQD : \quad \dfrac{x}{12} = \dfrac{4}{5}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 9{,}6}$$

24.- En la figura se muestra un trapecio tal que :

$\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{OP} // \overline{AB}$, AP = 1 y PD = 3.

Con estos datos se pide calcular la longitud de BC.



<u>**Resolución.-**</u>

Al trazar $\overline{MN} // \overline{BC}$, se puede aplicar la propiedad :

$$MN = \frac{2BC.\,AD}{BC+AD}$$

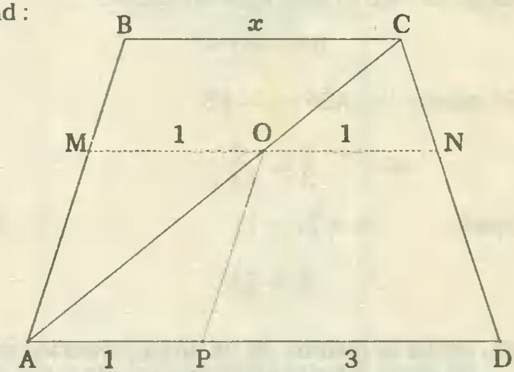
El ▱ AMOP es un romboide, luego :

$$MO = AP = 1 = ON$$

Reemplazando : $2 = \dfrac{2(x)(4)}{x+4}$

Donde : $2x + 8 = 8x$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$$



25.- En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura $\overline{BH}$, luego se ubican los puntos medios M de $\overline{BC}$ y N de $\overline{BH}$ tal que AM = 2 AN. Calcular m ∡ C.

<u>**Resolución.-**</u>

Al hacer la construcción correspondiente , se tiene :

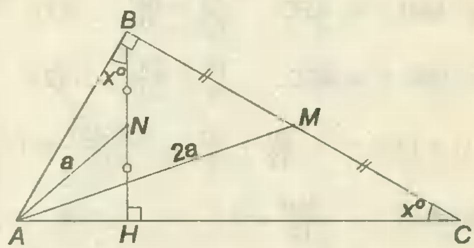
◺ AHB ~ ◺ ABC

$$\Rightarrow \quad \frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{AB}{AC}$$

Luego : AC = 2 AB

Esto significa que : ◺ ABC es notable.

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 30^\circ}$$



26.- En una semicircunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$ se traza el radio $\overline{OB}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Por B se traza una tangente sobre la cual se ubica el punto "E". $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{OB}$ en F y a la semicircunferencia en L. La prolongación de $\overline{CL}$ intersecta a $\overline{BE}$ en D. Si BF = 3 y FO = 2 , se pide calcular la longitud de DE.

Resolución.-

Del gráfico, observamos que : OB = OA = OC = 5

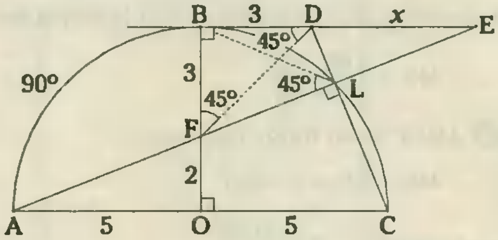
Además , por ∡ inscrito : $m\measuredangle BLA = \dfrac{m\widehat{AB}}{2} = 45^\circ$

En el cuadrilátero inscriptible FBDL :

$$m\measuredangle BDF = m\measuredangle BLF = 45^\circ$$

Luego ⊿ FBD es isósceles, entonces :

$$BF = BD = 3$$



Asi mismo : ⊿ AOF ~ ⊿ FBE :

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{5}{3+x}$$

Donde : $6 + 2x = 15$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4{,}5}$$

27.- Hallar la medida de un ángulo interior de un triángulo acutángulo , sabiendo que la bisectriz interior correspondiente a ese ángulo mide 5 . Además las alturas trazadas desde los otros dos vértices miden 4 y 12.

Resolución.-

Por el Teorema de la bisectríz se puede establecer que :

$$DK = DS = m$$

⊿ AKD ~ ⊿ AFC : $\dfrac{m}{12} = \dfrac{AD}{AC}$ ... (1)

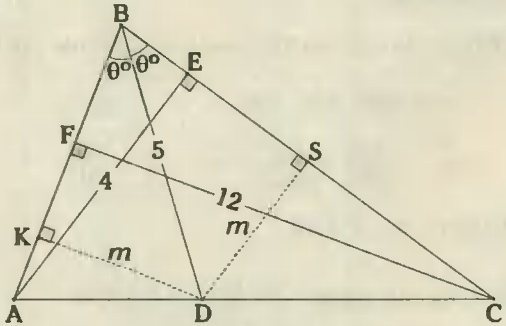
⊿ DSC ~ ⊿ AEC : $\dfrac{m}{4} = \dfrac{DC}{AC}$ ... (2)

(1) + (2) : $\dfrac{m}{12} + \dfrac{m}{4} = \dfrac{AD+DC}{AC} = 1$

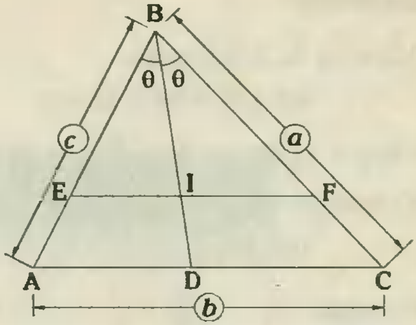
Donde : $\dfrac{4m}{12} = 1 \Rightarrow m = 3$

En el ⊿ BKD : $\theta = 37^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{m\measuredangle B = 74^\circ}$$



28.- Por el incentro de un triángulo ABC se traza una paralela a $\overline{AC}$. Calcular la longitud de dicha paralela, limitada por los otros dos lados ; si además se sabe que : AB = c, BC = a y AC = b.



Resolución.-

Δ EBF ~ Δ ABC : $\dfrac{EF}{b} = \dfrac{BE}{c}$ ... (1)

Por el Teorema de Thales en el Δ ABD : $\dfrac{BE}{c-BE} = \dfrac{BI}{ID}$

Por el Teorema del Incentro : $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{c+a}{b}$

Luego , al igualar se tiene : $\dfrac{BE}{c-BE} = \dfrac{c+a}{b}$

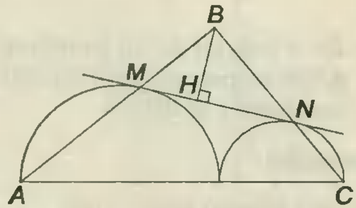
De donde : $\dfrac{BE}{c} = \dfrac{(c+a)}{a+b+c}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\dfrac{EF}{b} = \dfrac{(c+a)}{a+b+c}$ $\therefore$ **EF** $= \dfrac{b(c+a)}{a+b+c}$

29.- En la figura mostrada se sabe que :

BH = 2 y AC = 18

Con estos datos , se pide calcular MN.



Resolución.-

Por propiedad : $m\measuredangle$ MFN = 90º, luego el cuadrilátero MBNF es un rectángulo donde :

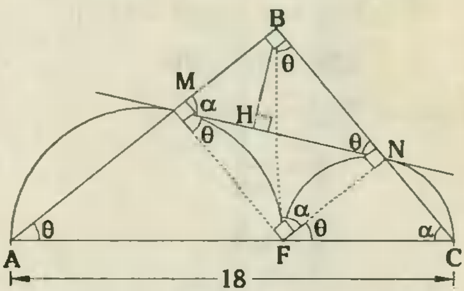
MN = BF = tangente común

Con lo cual se deduce que : $\overline{BF} \perp \overline{AC}$.

Por ello , se tiene que : $\triangle$ MBN ~ $\triangle$ ABC :

$\dfrac{MN}{18} = \dfrac{2}{BF}$ $\Rightarrow$ $(MN)^2 = 36$

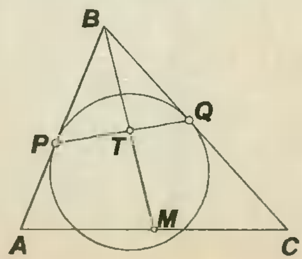
$\therefore$ **MN = 6**



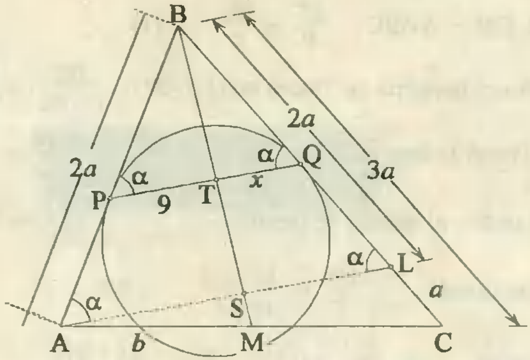
30.- En la figura se sabe que :

3 AB = 2 BC , AM = MC , PT = 9

De acuerdo con estos datos , se pide encontrar el valor de TQ.



Resolución.-



Trazamos $\overline{AL} \parallel \overline{PQ}$, luego :

$$AB = BL = 2a \text{ y } LC = a$$

Δ ABL ~ Δ PBQ : $\dfrac{x}{9} = \dfrac{SL}{AS}$ ... (1)

Por Menaleo en el Δ ALC :

$$(b)\,(AS)\,(2a) = (b)\,(SL)\,(3a)$$

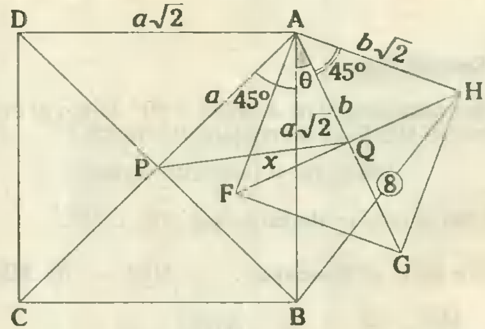
De donde : $\dfrac{SL}{AS} = \dfrac{2}{3}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\dfrac{x}{9} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 6}$

31.- En el interior de un cuadrado ABCD se ubica el punto F y se construye el cuadrado AFGH de manera que $\overline{FG}$ intersecta a $\overline{AB}$. Hallar la distancia entre los centros de los cuadrados, si BH = 8.

Resolución.-



Por tener ángulos congruentes

$$m\measuredangle PAQ = m\measuredangle BAH = 45 + \theta$$

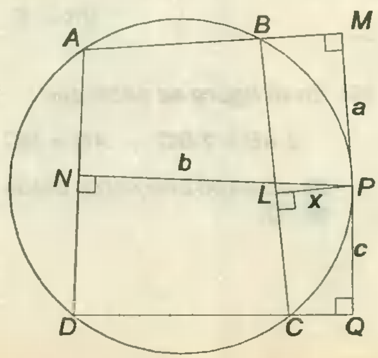
$\wedge$ $m\measuredangle AQP = m\measuredangle AHB$

Luego Δ PAQ ~ Δ BAH :

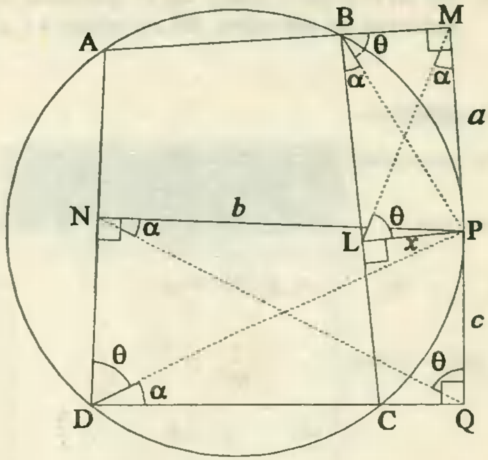
$$\frac{x}{8} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 4\sqrt{2}}$

32.- Dada la gráfica adjunta , se pide determinar el valor de x , en función de "a" y "b".



<u>**Resolución**</u>.-



En el cuadrilátero inscriptible DNPQ :

$m\measuredangle PNQ = m\measuredangle PDQ = \alpha$, y

$m\measuredangle PDN = m\measuredangle PQN = \theta$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle PBC = m\dfrac{\overset{\frown}{PC}}{2} = \theta$

En el cuadrilátero inscrito ABCD :

$m\measuredangle MBC = m\measuredangle ADC = \alpha + \theta$

De donde : $m\measuredangle MBP = \theta$

En el cuadrilátero inscriptible BMPL :

$m\measuredangle MBP = m\measuredangle MLP = \theta$ y

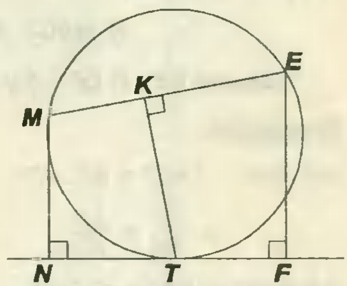
$m\measuredangle PBL = m\measuredangle PML = \alpha$

Luego : Δ MPL~ Δ NPQ :

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ac}{b}$$

33.- Del gráfico mostrado se pide calcular la medida de TK ; si además se sabe que :

MN = a y EF = b



<u>**Resolución**</u>.-

Por $\measuredangle$ inscrito y semi-inscrito : $m\measuredangle MET = m\measuredangle MTN = \alpha$

Asi mismo se puede deducir que : $m\measuredangle ETF = m\measuredangle EMT = \theta$

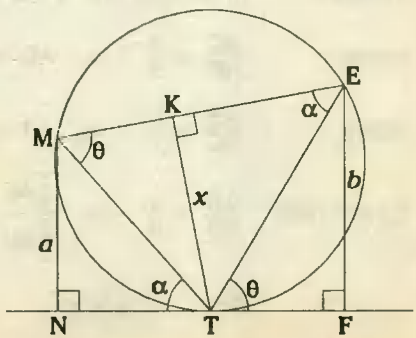
Luego se establece que : ⊿ MNT ~ ⊿ TKE

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{MT}{ET} \; ... (1)$$

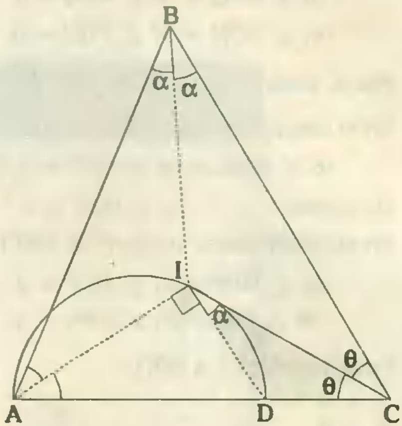
También : ⊿ MKT ~ ⊿ EFT $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{b} = \dfrac{MT}{ET} \; ... (2)$

Igualando (1) y (2) : $\quad \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$

$$\therefore \quad x = \sqrt{ab}$$



34.- En un triángulo ABC, I es su incentro. Sea "D" un punto de $\overline{AC}$, tal que la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ contiene a I, si BC.CD = k. Hallar IC.



Resolución.-

Por propiedad : $m\measuredangle AID = 90°$

Además : $m\measuredangle AIC = 90 + \frac{2\alpha}{2} = 90 + \alpha$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle DIC = d$

$\Delta DIC \sim \Delta BCI: \quad \frac{x}{BC} = \frac{CD}{x}$

$\Rightarrow \quad x^2 = k$

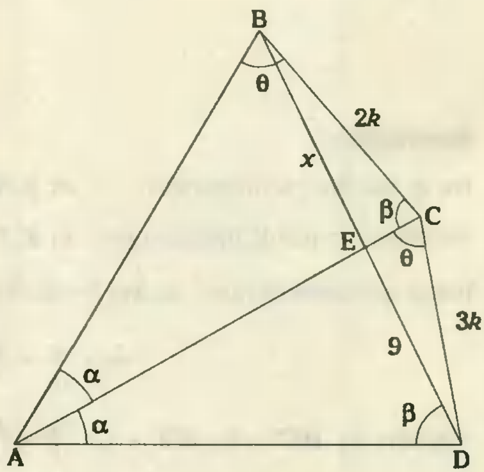
$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{k}}$

35.- En un trapezoide ABCD , se verifica que :

$$\measuredangle BAC \cong \measuredangle CAD \quad \wedge \quad (AC)^2 = AB.AD.$$

Calcular BE , si ED = 9 y 3 BC = 2 CD . Además se sabe que E = $\overline{AC} \cap \overline{BD}$)

Resolución.-



Del dato : $(AC)^2 = AB \cdot AD$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad \ldots (1)$

Además : $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CAD$

Entonces : $\Delta BAC \sim \Delta CAD$ (2do caso)

De donde : $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACD = \theta$

También : $m\measuredangle ACB = m\measuredangle ADC = \beta$

Luego : $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{3}{2}AC$

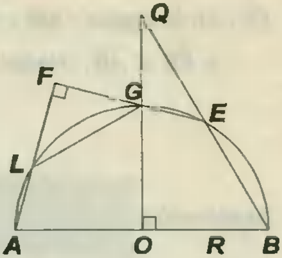
Ahora : $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = \frac{2}{3}AC$

En el ΔABD : $\frac{AB}{AD} = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{3}{2}AC} = \frac{x}{9}$

$\therefore \quad \boxed{x = 4}$

36.- En la figura O es centro de la semicircunferencia y además se sabe que : LF.QB = $8\sqrt{2}$.

Con estos datos se pide calcular el valor de R .



<u>Resolución</u>.-

Por ∡ ex-inscrito : $m\ ∡\ FLG = \dfrac{m\,\widehat{AG}}{2} = 45°$

También : $m\ ∡\ GEQ = \dfrac{m\,\widehat{GB}}{2} = 45°$

Dado que : $\overline{BL} \,//\, \overline{EF} \Rightarrow LG = BE = a\sqrt{2}$

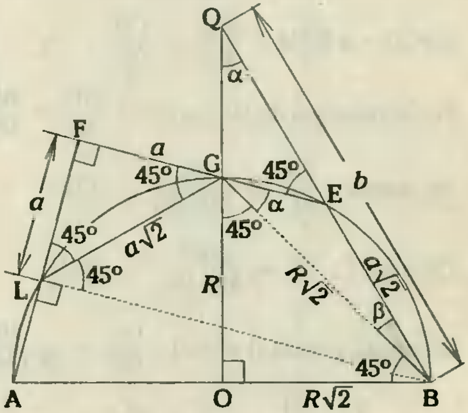
Δ QGB : $45 = \alpha + \beta$ ...(∡ exterior)

Δ GEB : $45 = \beta + ∡\ m\,EGB \Rightarrow m\ ∡\ EGB = \alpha$

$\Delta QGB \sim \Delta GEB \Rightarrow \dfrac{R\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{b}{R\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad 2R^2 = ab\sqrt{2}$, donde por dato : $ab = 8\sqrt{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{R = 2\sqrt{2}}$



37.- En un triángulo ABC (AB = BC) la mediatriz de $\overline{BC}$ corta en F a $\overline{AC}$. Por F se traza $\overline{FH} \,//\, \overline{BC}$ (H en $\overline{AB}$) . Hallar AB , si : FH = 1 y FC = $\sqrt{6}$

<u>Resolución</u>.-

Por el teorema de la mediatriz, FB = FC = $\sqrt{6}$

Δ AHF es isósceles $\Rightarrow$ AH = HF = 1

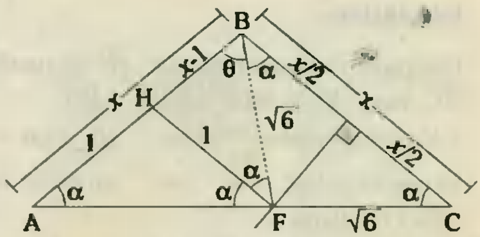
Además HB = x - 1 y m ∡ HFB = α

$\Delta ABF \sim \Delta HBF$

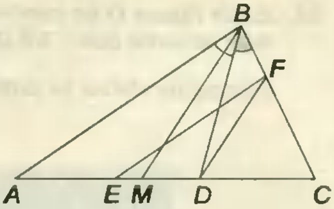
$$\frac{\sqrt{6}}{x-1} = \frac{\sqrt{6}}{x}$$

$\Rightarrow \quad x\,(x - 1) = 6$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3}$



38.- En la figura : AM = MC , $\measuredangle$ ABD $\cong$ $\measuredangle$ DBC , $\overline{DF}$ // $\overline{BM}$ y $\overline{FE}$ // $\overline{AB}$. Hallar EF, si : $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{6}$



<u>Resolución</u>.-

Δ ECF ~ Δ ABC : $\quad \dfrac{x}{AB} = \dfrac{FC}{BC} \qquad ...(1)$

Δ FCD ~ Δ BCM : $\quad \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{CD}{\frac{AC}{2}} \quad \Rightarrow \quad FC = \dfrac{2BC.CD}{AC} \quad ...(2)$

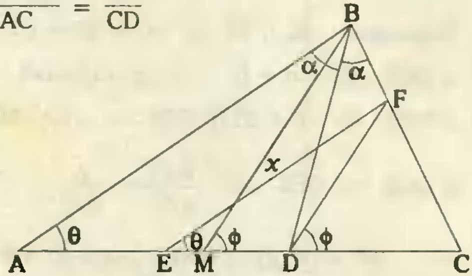
Por el teorema de la bisectriz : $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow \dfrac{AB+BC}{AC} = \dfrac{BC}{CD}$

De donde : $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BC}{AB+BC}$ ..... (3)

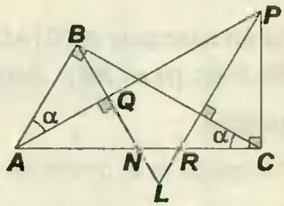
(3) en (2) : $FC = \dfrac{2BC^2}{AB+BC}$ ...... (4)

Reemplazando (4) en (1) : $\dfrac{x}{AB} = \dfrac{2BC^2}{BC(AB+BC)}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 12}$



39.- En la figura : LN = a , RC = b . Hallar QL.



<u>Resolución</u>.-

Del gráfico observamos que $\overline{PN}$ es mediatriz de $\overline{TC}$, luego RT = RC = b y $\overline{RT}$ // $\overline{BN}$

Δ NLR es isósceles $\quad \Rightarrow \quad$ NL = LR = a

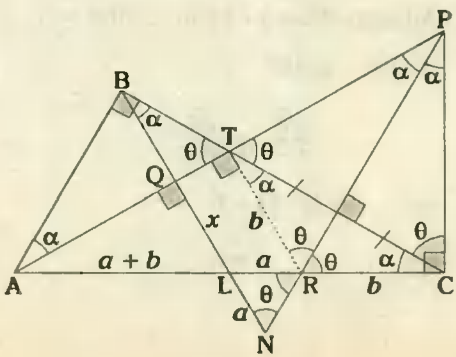
Ya que $m\measuredangle$LBC = a $\quad \Rightarrow \quad$ en el $⊿$ ABC

$\overline{BL}$ es mediana

$\Rightarrow \quad AL = BL = LC = a + b$

$\overline{BL}$ ATR ~ $\overline{BL}$ AQL : $\dfrac{x}{b} = \dfrac{a+b}{2a+b}$

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = \dfrac{b(a+b)}{2a+b}}$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y las cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ que trisecan al lado $\overline{AC}$.

Calcular TK, si AM = 10 (T : $\overline{AM} \cap \overline{BP}$ y K : $\overline{AM} \cap \overline{BQ}$).

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 D) 3

2.- En un trapezoide ABCD se conoce que AB = 4 ; BC = 9 ; AD = 36 ; AC = 12 y CD = 27. Si : $m\measuredangle BAD = \theta$, calcular la $m\measuredangle BAC$.

A) $\theta/2$ B) $\frac{2\theta}{3}$ C) $\frac{\theta}{4}$

D) $\theta - 15$ E) $\theta - 30$

3.- Por el incentro de un triángulo ABC se traza una paralela a $\overline{AC}$ que intersecta en P a $\overline{AB}$ y en Q a $\overline{BC}$. Hallar PQ, si : $\frac{1}{K} + \frac{1}{b} = 0{,}25$; donde AC = b y K es el perímetro del triángulo PBQ

A) $\frac{1}{4}$ B) 2 C) 4 D) 8 E) 5

4.- En la figura mostrada. Calcular FH, si BN = 1 y AM = 4.

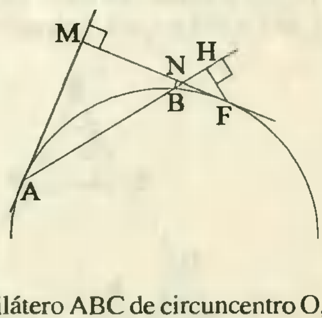
A) 2

B) 3

C) 1,5

D) 2,75

E) 2,5



5.- En un cuadrilátero ABC de circuncentro O, la mediatriz de $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q . Calcular la longitud del circunradio, si OP = 4 y QP = 5

A) $2\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 7 D) 6 E) 5

6.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CE}$. Si $m\measuredangle B = 60$ y el circunradio del triángulo ABC mide 8 , se pide calcular EH.

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4

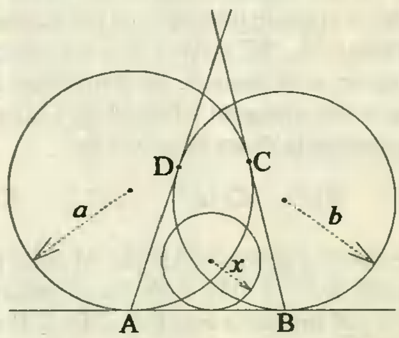
D) $4\sqrt{3}$ E) 8

7.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las bisectrices $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ (Q en $\overline{BC}$ y P en $\overline{AB}$) . Calcular QC , si AP = 2 , PB = 3 y BQ = 4.

A) 4,25 B) 4,57 C) 4,75

D) 4,21 E) 4,47

8.- En la figura A, B, C y D son puntos de tangencia . Hallar : x



A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{a-b}{2}$

D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

9.- En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CE}$; si $m\measuredangle = 60$ y el circunradio del triángulo ABC mide 8 . Calcular EH.

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 8

10.- Sobre el lado $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se consideran los puntos P y Q trazándose $\overline{PR}$ // $\overline{QS}$ // $\overline{BC}$ (R y S en $\overline{AC}$), luego se traza una paralela por R a $\overline{AB}$ la cual encuentra en E a $\overline{QS}$. Si PQ + RS = BC , AB = 8 , BC = 6 y AC = 7 , calcular ES.

A) 2/5 B) 6/5 C) 9/5

D) 12/5 E) 14/5

11.- En una circunferencia de centro O y diámetros perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se traza la cuerda $\overline{AE}$ (E en $\overset{\frown}{BC}$) tal que $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{BD}$ en M ; si BM = MO . Hallar ON, si OA = 12. ($\overline{ED} \cap \overline{AC}$: {N}).

A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) 4,5

12.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica el punto interior O cuyas distancias a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son 2, 3 y 5 respectivamente, si la suma de las longitudes de las alturas del triángulo ABC es 30. Calcular la longitud de la altura relativa a $\overline{BC}$.

A) 12 B) 15 C) 12,5 D) 7,5 E) 6,75

13.- En un romboide ABCD, M es el punto me-dio de $\overline{CD}$, $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en P. ¿A qué distancia esta P de $\overline{AD}$; si B esta a 12 de $\overline{AD}$.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

14.- En un trapecio rectángulo ABCD recto en A y B , M es punto de $\overline{CD}$ de modo que MC = 4 y MD = 12 . Las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{AD}$ se intersectan en E; calcular DE, si $\measuredangle$ BDC ≅ $\measuredangle$ BEA.

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

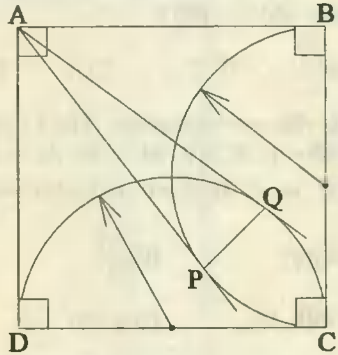
15.- En la figura : P y Q son puntos de tangencia. Hallar PQ , si el lado del cuadrado ABCD mide "a".

A) $a/5$

B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$

C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{10}$

D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

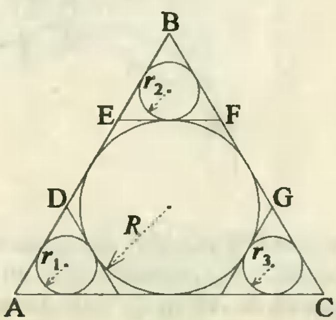


16.- En un triángulo ABC, donde $m\measuredangle A = 2m\measuredangle C$; se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$ de modo que BM = 4 y MC = 5. Sea I el incentro del Δ ABC la bisectriz $\measuredangle$ $\overline{BI}$ en P . Calcular PI.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 1,5

D) 0,5 E) $\sqrt{3}$

17.- En la figura : $\overline{EF}//\overline{AC}$, $\overline{DI}//\overline{BC}$, $\overline{GH}//\overline{AB}$, $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. Calcular : R.



A) $6\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) 6 D) $\sqrt{5}$ E) 9

18.- En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{CM}$; la bisectriz del $\measuredangle$ BCM biseca en N a $\overline{BD}$. Calcular la $m\measuredangle$ ABD, si AD = 2, DC = 1 y BC = $\sqrt{3}$

A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 37 E) 60

19.- En la figura: AB = 11 , BC = 5 y DE = 3. Hallar : x

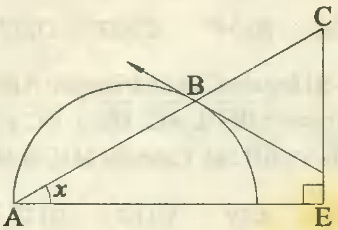
A) 30

B) 37

C) 45

D) 60

E) 22,5



20.- El ángulo B de un triángulo acutángulo ABC mide 60, en su interior se ubica el punto P de modo que PA + PB + PC es mínimo; sean I, e I_2 incentros de los triángulos ABP y BPC repectivamente. Por I, e I_2 se trazan paralelas a $\overline{BP}$ las cuales intersectan en M y N a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente; si BM = a. Hallar : BN.

A) $a\sqrt{3}$ B) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ C) $a/4$

D) $a/2$ E) a

21.- En la figura : ABCD es un cuadrado de lado 3; hallar : CF, si AN = 3CM.

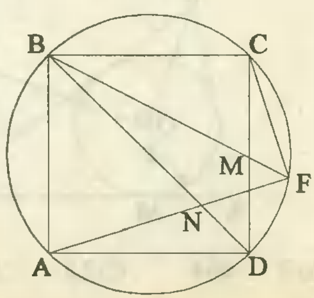
A) 1

B) $\sqrt{3}$

C) 2

D) 2/3

E) $\sqrt{3}/2$



22.- En un triángulo acutángulo ABC "O" es el circuncentro. La mediatriz de $\overline{AC}$ intersecta en P a $\overline{BC}$ y en Q a la prolongación de $\overline{AB}$. Si OP = 4 y PQ = 5. Calcular : OC.

A) 4 B) 5 C) 4,5 D) 6 E) 5,4

23.- En la figura: AB = a, CD = b. $\overline{MN}//\overline{AB}//\overline{CD}$; $\overline{AN}//\overline{MC}$. Hallar : MN.

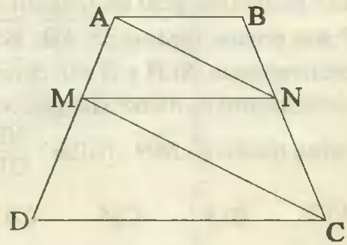
A) $\dfrac{ab}{a+b}$

B) $\sqrt{ab}$

C) $\dfrac{a+b}{2}$

D) $\sqrt[3]{a^2b}$

E) 15



24.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Sean P y Q los incentros de los triángulos AHB y BHC, $\overline{PQ}$ intersecta en E a $\overline{BH}$, siendo $\dfrac{BE}{EH} = 5\sqrt{2}$, el inradio del triángulo ABC mide 10. Calcular el inradio del triángulo PHQ.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

25.- En la figura AB = BC, PB = 1, PA = $\sqrt{6}$ y PC = $2\sqrt{2}$. Calcular x.

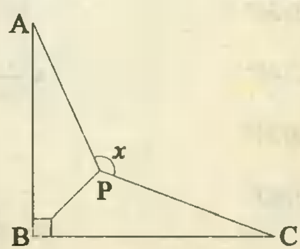
A) 105°

B) 120°

C) 135°

D) 150°

E) 165°



26.- En la figura, el Δ ABC es escaleno; hallar: BF/FQ.

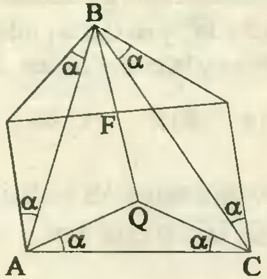
A) 1

B) 1/2

C) 2/3

D) 4/5

E) 1/3



27.- En un triángulo acutángulo ABC; M, N y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si H y O son el ortocentro y el circuncentro de dicho triángulo y además L es punto medio de $\overline{MN}$, hallar : $\dfrac{HP}{OL}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28.- En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Por D se levanta un perpendicular a $\overline{AC}$ la cual intersecta en Q a $\overline{HC}$ y en P a la prolongación de $\overline{AH}$. Si HP = 3, AD = 6 y DC = 9. Calcular : HQ.

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

29.- En la figura ABCD es un cuadrado AG = GF; hallar x

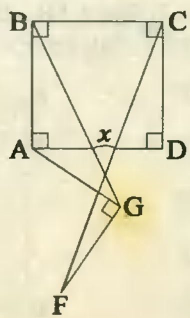
A) 30°

B) 36°

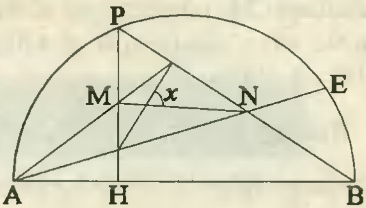
C) 45°

D) 54°

E) 60°



30.- En la figura $\overline{AB}$ es diámetro PM = MH y PN = NB. Si $m\,\overset{\frown}{PEB} = 108°$, hallar x.

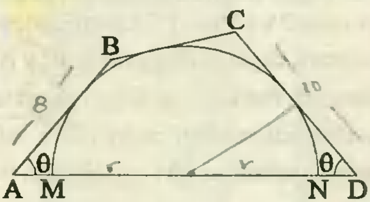


A) 36° B) 54° C) 60° D) 72° E) 53°

31.- El ángulo C de un triángulo ABC mide 53°. Se trazan : $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, $\overline{HL} \perp \overline{BC}$ y $\overline{LQ} \perp \overline{AB}$; si $\overline{QL} \cap \overline{BH}$: M. Calcular MH, si AC = 25.

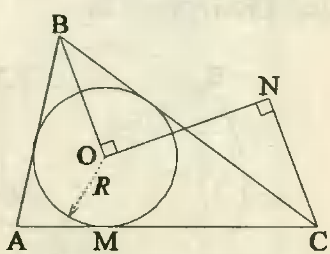
A) 6 B) 9 C) 12 D) 12,5 E) 15

32.- En la figura $\overline{MN}$ es diámetro AB = 8 y CD = 10. Calcular : AD.



A) 9 B) 18 C) 16 D) $8\sqrt{5}$ E) 20

33.- Del gráfico adjunto; hallar R ; si AM.NC = 12 y ON = 6



A) 3 B) 4 C) 2,5 D) 5 E) 2

34.- En el triángulo ABC: AB = BC = a, AC = b y $m\measuredangle$ B = 40°. Luego la relación correcta es :

A) $3ba^2 = a^3\sqrt{3} + b^3$

B) $ba^2 = a^3\sqrt{3} + b^3$

C) $3ba^2 = a^3 + b^3\sqrt{3}$

D) $3ab^2 = a^3\sqrt{3} + b^3$

E) $3ab^2 = a^3 + b^3\sqrt{3}$

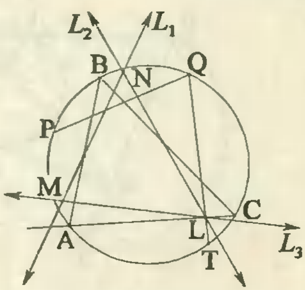
35.- El triángulo ABC se encuentra inscrito en una circunferencia; la mediatriz de $\overline{AB}$ intersecta en M a $\overline{BC}$ y en N a la prolongación de $\overline{AC}$. Hallar la $m\measuredangle$ OCB , si O es centro de la circunferencia; además OH = OM = MN (H es punto medio de $\overline{AB}$).

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18,5° E) 26,5°

36.- En la figura, las rectas L_1, L_2 y L_3 son rectas de Simpson trazadas a partir de los puntos P, Q y T respectivamente.

Si PQ = 6 , QT = 9 y MN = 4 , hallar : ML.



A) 6 B) 3 C) 8/3 D) 4 E) $2\sqrt{3}$

37.- En la figura M y N son puntos de tangencia; TK = 3 y TN = 3AP . Calcular PQ.

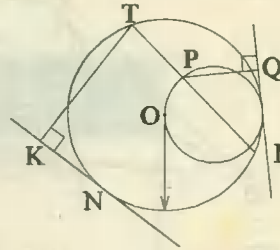
A) 2/5

B) 4/7

C) 5/6

D) 5/9

E) 2/3



38.- El trapecio ABCD, ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) está inscrito en una circunferencia . P es un punto del arco CD; si PD = 8; PB = 16 y PC = 12 ,calcular PM, si $\overline{AP} \cap \overline{DC}$: M.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

39.- Hallar el lado del cuadrado ABCD, si AM = a y BL = b (M y T son puntos de tangencia).

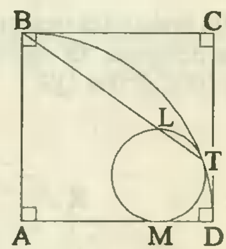
A) $\dfrac{a^2}{b}$

B) $\sqrt{ab}$

C) $\dfrac{a+b}{2}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$

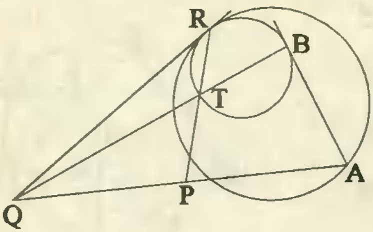
E) $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$



40.- T es un punto de $\overline{BC}$, quien a su vez es el lado del romboide ABCD . Sobre la prolongación de $\overline{AT}$ se ubica el punto K de tal manera que $\measuredangle$ KBT ≡ $\measuredangle$ KDC. Si además se sabe que : AB . BK = 18m^2 y KD = 2 BT ; hallar BT.

A) 2 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) 4.5

41.- En la figura R y B son puntos de tangencia PT = a y TR = b. Calcular PQ.



A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{b(a+b)}$

C) $\sqrt{a(a+b)}$

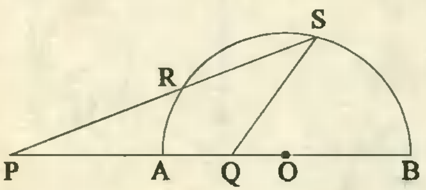
D) $\dfrac{ab}{a+b}$

E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

42.- Sean M y N puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ de un rombo ABCD. Se pide hallar PD, si MP = 6 (P = $\overline{MD} \cap \overline{CN}$)

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

43.- En la figura se muestra una semicircunferencia de centro "O", si PQ = QB, PA = AO y PS = 10. Calcular QS.

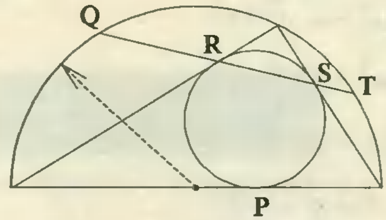


A) 6 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

44.- En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y la cevaiana $\overline{BR}$, la cual intersecta a $\overline{AM}$ en su punto medio N.
Calcular NR, si AC = 24; luego se traza la bisectriz del ángulo BAN intersecando a $\overline{BN}$ en P tal que : BP = 2 PN

A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 6

45.- Del gráfico mostrado : P, R y S son puntos de tangencia. Calcular ST, si QR = 9 y RS = 6.



A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

46.- En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se traza la cuerda $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$ en el punto "R", sobre el arco AQ se toma el punto "U" tal que $\overline{PU}$ intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{AQ}$ en S y T respectivamente, si PS.TU = 8 TS, calcular UQ.

A) 4 B) 6 C) 4,8 D) 7,8 E) 8

47.- En un triángulo ABC, la razón de los cuadrados de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ es igual a la razón de las proyecciones de estos lados sobre el lado $\overline{BC}$. Hallar la $m\measuredangle$ ABC, si m B$\hat{C}$A = 80º

A) 5º B) 7º 30' C) 8º D) 10º E) 15º

48.- Del gráfico mostrado, calcular ER, si AR = 4 e IE = 3 JA

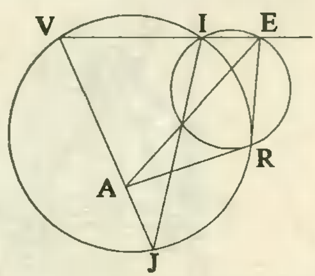
A) 6

B) 8

C) 9

D) 10

E) 12



49.- En un trapecio TONI ($\overline{TI}$ // $\overline{ON}$), si $m\measuredangle$ OIN es igual a la medida del ángulo exterior en "O". Calcular IO, si TI = 9 y ON = 4.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 13

CAP. 13 relaciones métricas en triángulos rectángulos

13.1 PROYECCIÓN ORTOGONAL

En general la proyección es el proceso mediante el cual los puntos que componen una figura geométrica se lanzan sobre otra figura de un modo determinado.

Un proyección será ortogonal si desde todos los puntos de la primera figura se trazan perpendiculares (proyectantes) a la segunda, siendo la *proyección* , el conjunto de puntos determinados por los pies de estas perpendiculares.

13.1A PROYECCIÓN SOBRE UNA RECTA EN UN MISMO PLANO

La proyección ortogonal sobre una recta es un ente geométrico bidimensional ubicado coplanarmente con la recta . El resultado de esta proyección puede ser un punto (*Fig.* 13.1a) , un segmento (*Fig.* 13.1b y 13.1c) o a lo más otra recta. (*Fig.* 13.1d).

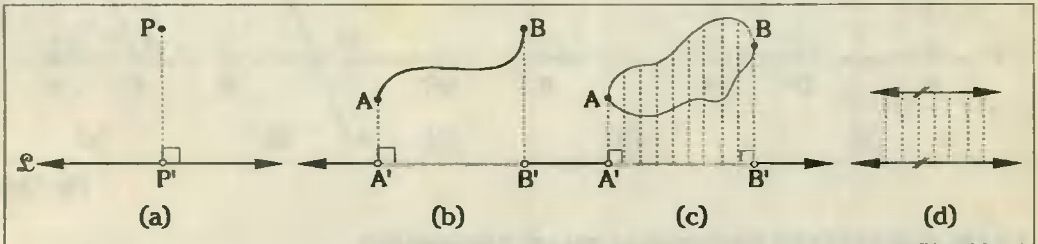


Fig. 13.1

13.1B PROYECCIÓN SOBRE UN PLANO

En este caso la proyección de cualquier ente geométrico sobre un plano P tiene connotaciones espaciales . Puede ser un punto (*Fig.* 13.2a), una porción de línea (*Fig.* 13.2b), un contorno cerrado (*Fig.* 13.2c), o una superficie (*Fig.* 13.2d).

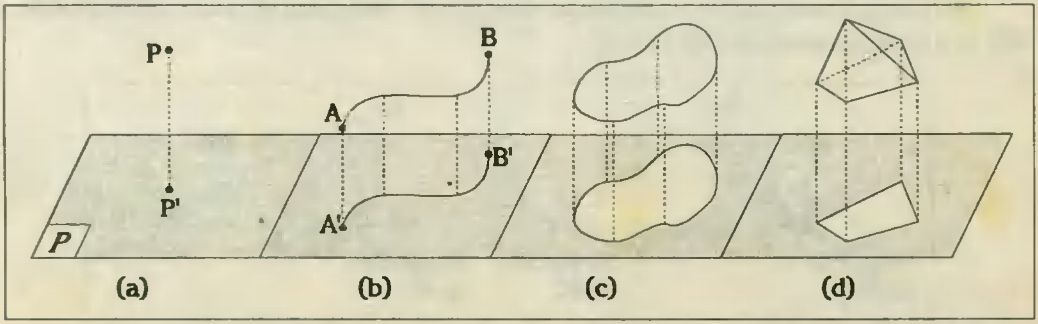


Fig. 13.2

13.1C PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA SOBRE UNA RECTA DADA

En todos los casos presentados, a continuación se ha proyectado el segmento de recta $\overline{AB}$ sobre la recta $\mathscr{L}$, obteniendose la proyección $\overline{A'B'}$. Veamos las siguientes variantes :

CASO 1 : El segmento $\overline{AB}$ es exterior a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ y no es paralelo a ella. (*Fig.*13.3a)

CASO 2 : El segmento $\overline{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ (*Fig.*13.3b)

CASO 3 : El segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ (*Fig.*13.3c)

CASO 4 : El segmento $\overline{AB}$ intersecta a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ (*Fig.*13.3d)

CASO 5 : El segmento $\overline{AB}$ intersecta a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ en el punto A (*Fig.*13.3e)

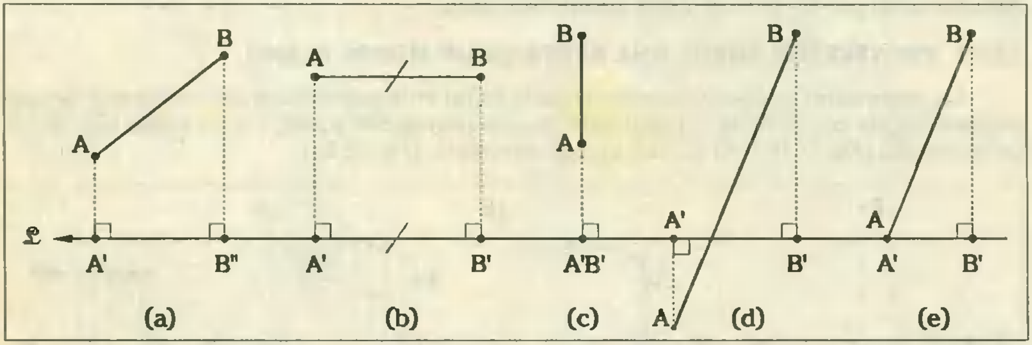


***Fig.* 13.3**

13.1D PROYECCIÓN ORTOGONAL EN UN TRIÁNGULO

En el triángulo ABC (*Fig.*13.4a) se ha trazado la altura $\overline{BH}$ obteniéndose los segmentos $\overline{AH}$ y $\overline{HC}$ que representan las proyecciones de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre el tercer lado $\overline{AC}$ respectivamente.

El criterio anteriormente mencionado , también es válido para el caso en el cual la altura $\overline{BH}$ es exterior al triángulo (*Fig.*13.4b).

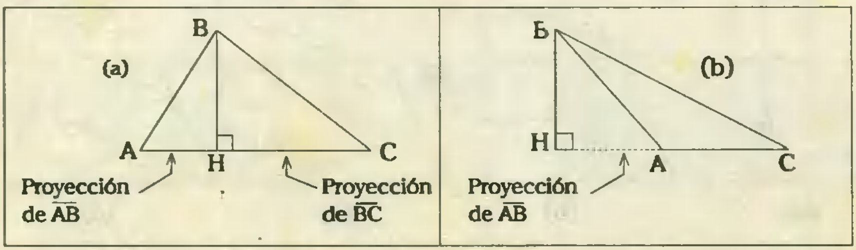


***Fig.* 13.4**

13.2 RELACIONES MÉTRICAS EN EL ⊿

Sea el triángulo rectángulo ABC recto en B (*Fig.*13.5) tal que las medidas de sus catetos e hipotenusa son a, c y b ; de la altura relativa a la hipotenusa "h" y de las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa m y n . Luego , se cumplen los siguientes teoremas :

TEOREMA 1 : $c^2 = bm \quad \wedge \quad a^2 = bn$

TEOREMA 2 : $h^2 = mn$

TEOREMA 3 : $a^2 + c^2 = b^2$

TEOREMA 4 : $c \cdot a = b \cdot h$

TEOREMA 5 : $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}$

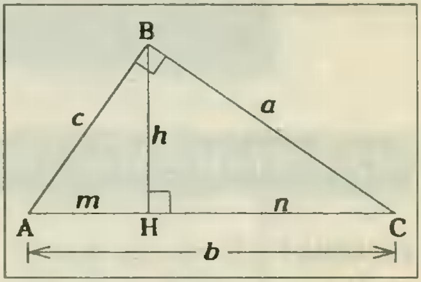


Fig. 13.5

13.3 ⊿ CUYOS LADOS SON NÚMEROS ENTEROS

13.3A ⊿ CUYAS MEDIDAS DE SUS LADOS SON DE LA FORMA :

$$m \ , \ \frac{m^2-1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{m^2+1}{2}$$

En la Fig.13.6 se muestra la ubicación de estas medidas siendo "m" un número *impar mayor o igual que* 3, obteniéndose las siguientes ternas :

(3; 4; 5) , (5; 12; 13) ,

(7; 24; 25) , (9; 40; 41), ... etc.

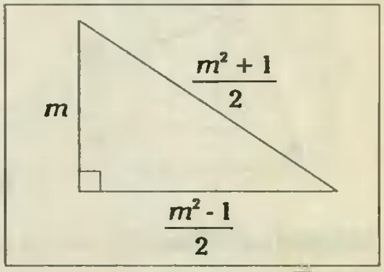


Fig. 13.6

13.3B ⊿ CUYAS MEDIDAS DE SUS LADOS SON DE LA FORMA :

$$m \ , \ \frac{m^2}{4}-1 \quad \text{y} \quad \frac{m^2}{4}+1$$

Los valores de "m" que hacen enteros las medidas de los lados de estos triángulos (Fig.13.7) son pares mayores o iguales a 4, obteniéndose las ternas:

(4; 3; 5) , (6; 8; 10) ,

(8; 15; 17) , (10; 24; 25) , ... etc..

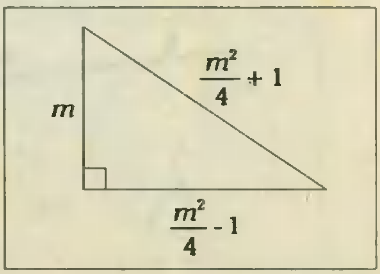


Fig. 13.7

13.3C ⊿ CUYAS MEDIDAS DE SUS LADOS SON DE LA FORMA :

$$x^2 - y^2 \ , \ 2xy \ , \ x^2 + y^2$$

En este caso (*Fig.*13.8) se obtienen ternas de números que no son derivados de las anteriores ; para ello los valores de x e y $(x > y)$ no deben tener factores comunes ni ser los dos impares.

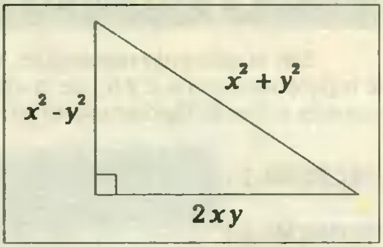


Fig. 13.8

13.4 TEOREMAS COMPLEMENTARIOS

TEOREMA 1 : (Teorema de Dostor).

Si "M" es punto medio de $\overline{BC}$.

$$(AB)^2 = (AH)^2 - (HC)^2$$

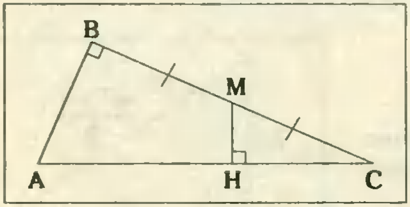


Fig. 13.9

TEOREMA 2 : (Tangente común exterior)

$$AB = 2\sqrt{Rr}$$

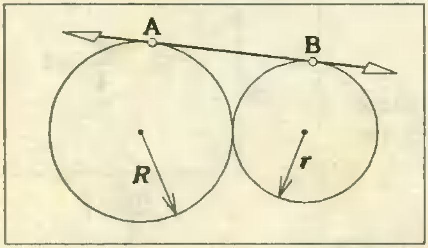


*Fig.*13.10

TEOREMA 3 :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

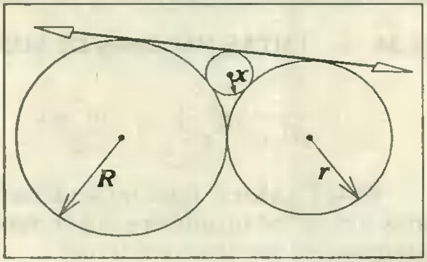


Fig. 13.11

TEOREMA 4 :

$$x = \frac{R}{4}$$

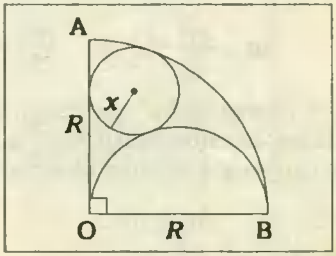


Fig. 13.12

TEOREMA 5 :

Independientemente de conocer o no a R, se cumple que :

$$AP = r\sqrt{2}$$

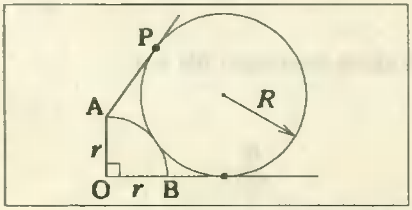


***Fig.* 13.13**

TEOREMA 6 : Independientemente de la ubicación de los puntos P y Q a lo largo de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente , se cumple :

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{AP^2 + QC^2}$$

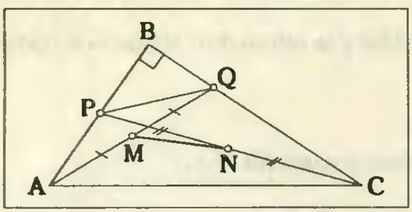


***Fig.*13.14**

TEOREMA 7 :

$$\sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$$

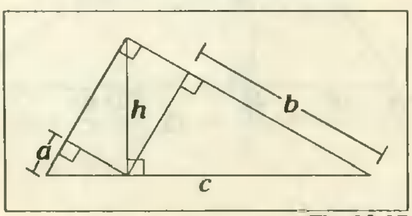


***Fig.* 13.15**

Nota : $h = \sqrt[3]{abc}$

TEOREMA 8 :

Si "O" es el centro, M y T son puntos de tangencia, se cumple :

A, M y T son colineales

$$AK = AC = \sqrt{AB \cdot AH}$$

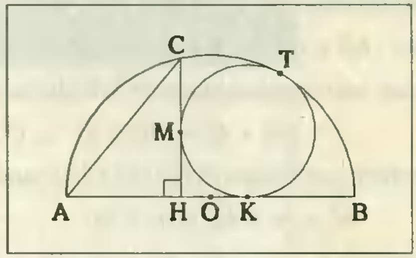


***Fig.*13.16**

TEOREMA 9 :

$$(AN)^2 + (MB)^2 = 4R^2$$

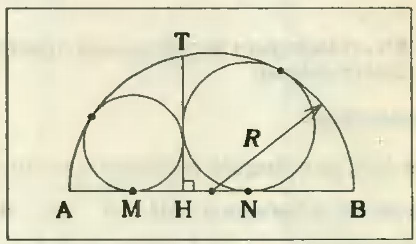


***Fig.*13.17**

TEOREMA 10 :

$$AB.\,BC = 2(BD)^2$$

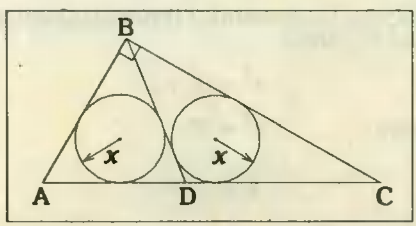


***Fig.* 13.18**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Los lados de un triángulo rectángulo se encuentran en progresión aritmética de razón igual a 4 . Hallar la altura relativa a la hipotenusa.

Resolución.-

Sean : AB = a , BC = $a + 4$ y AC = $a + 8$ y sea la altura buscada : BH = x.

Ahora, aplicando el teorema 4 del item 13.2 :

$$a(a + 4) = x(a + 8) \quad ... (*)$$

También por Pitágoras (item 13.2 - teorema 3) :

$$a^2 + (a + 4)^2 = (a + 8)^2$$

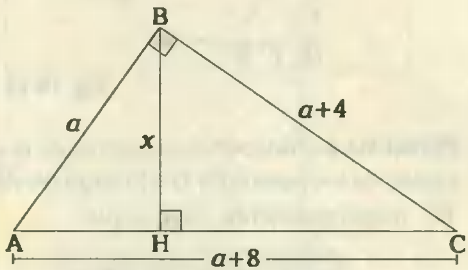
Donde : $a^2 = (a + 8)^2 - (a + 4)^2$

Ahora : $a^2 = 8a + 48$

Luego : $a^2 - 8a - 48 = 0 \Rightarrow a = 12$

Reemplazando en (*) : $12(16) = x . 20$

$\therefore$ $\boxed{x = 9,6}$



2.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15m y la altura 6m . Hallar la longitud del cateto menor.

Resolución.-

Sea ABC el triángulo rectángulo recto en B y el cateto menor AB = x .

Entonces; si hacemos : AH = a $\Rightarrow$ HC = $15 - a$

Aplicando el teorema 2 del item 13.2 tendremos :

$$6^2 = a(15 - a)$$

Es decir : $a^2 - 15a - 36 = 0$

Donde : $a = 12 \ \vee \ a = 3$

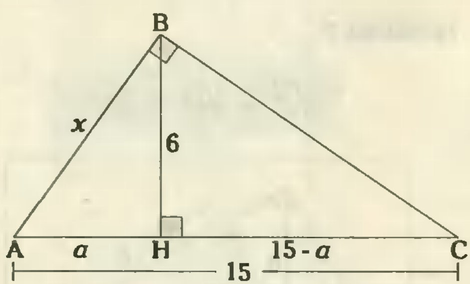
Ahora : $a = 3$

Aplicando el teorema 3 (Pitágoras) del item 13.2 en el ⊿ AHB :

$$x^2 = 6^2 + 3^2$$

Luego : $x^2 = 45$

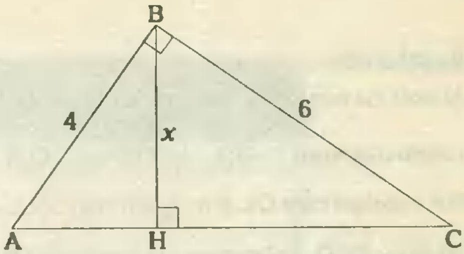
$\therefore$ $\boxed{x = 3\sqrt{5}}$



3.- *En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}$ = 90), AB = 4, BC = 6. Calcular la longitud de la altura BH (H ∈ $\overline{AC}$).*

Resolución.-

Aplicando el teorema 5 del item 13.2, tenemos :



$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2}$$

Luego : $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$

Donde : $\frac{1}{x^2} = \frac{9+4}{144}$

En consecuencia : $\frac{1}{x^2} = \frac{13}{144}$

Invirtiendo ambos miembros : $x^2 = \frac{144}{13}$

Ahora : $x = \frac{12}{\sqrt{13}}$

Racionalizando : $x = \frac{12}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

$\therefore$ $\mathbf{x = \frac{12\sqrt{13}}{13}}$

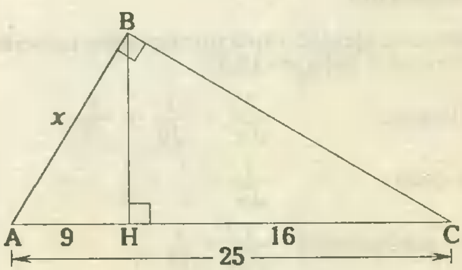
4.- *En un triángulo rectángulo, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Si AH = 9, HC = 16; calcular la longitud del cateto AB.*

Resolución.-

Sea AB = x, como : AH = 9 y HC = 16

Entonces : AC = 25

Aplicando el teorema 1 del item 13.2



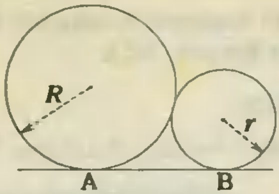
Tendremos : $x^2 = 25 \cdot 9$

Donde : $x^2 = 5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2$

Ahora : $x^2 = 15^2$

$\therefore$ $\mathbf{x = 15}$

5.- En la figura mostrada, calcular AB , si : R = 12 y r = 3.



Resolución.-

Al unir los centros , tendremos que : $OO_1 = R + r$

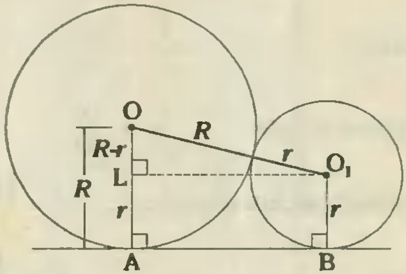
Luego trazamos : $\overline{O_1L} \perp \overline{OA} \Rightarrow O_1B = LA = r$

Por consiguiente $OL = R - r$, además : $O_1L = AB$

En el ⊿ OLO_1 aplicamos el teorema 3 (Pitágoras) del item 13.2 :

$$O_1L^2 = (R + r)^2 - (r - r)^2$$

Ahora : $O_1L^2 = 4Rr \Rightarrow O_1L = 2\sqrt{Rr}$ ... (*)

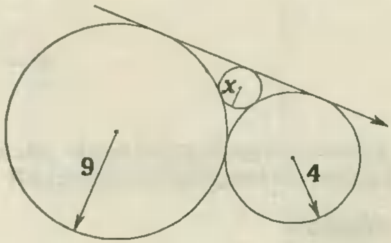


La expresión (*), es la demostración del teorema 2 del item 13.4 . Ahora al reemplazar datos se tiene :

$$AB = 2\sqrt{12 \times 3} \Rightarrow AB = 2 \times 6$$

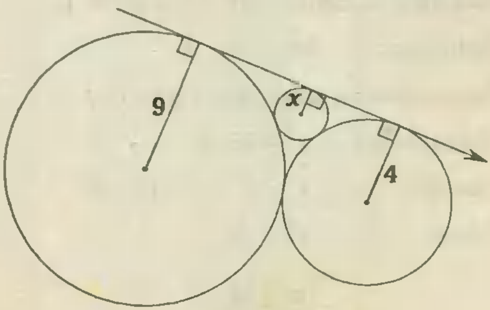
$$\therefore \quad \mathbf{AB = 12}$$

6.- En la figura mostrada, calcular la longitud "x" del radio de la circunferencia más pequeña.



Resolución.-

Para este ejercicio aplicaremos directamente el teorema 3 del item 13.4 :



Entonces : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

Es decir : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

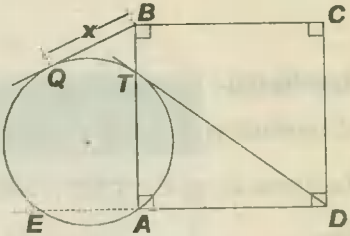
Por consiguiente : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{7}{12}$

Invirtiendo ambos miembros : $\sqrt{x} = \dfrac{12}{7}$

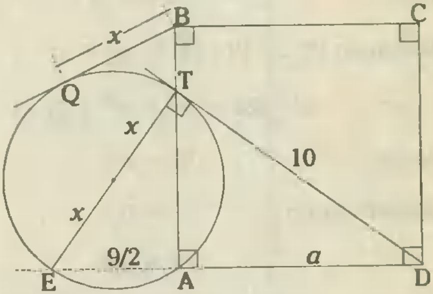
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{144}{49}}$$

MISCELÁNEA

1.- Hallar x , si ABCD es un cuadrado , siendo EA = 4,5 y TD = 10. Además T y Q son puntos de tangencia.



Resolución.-



Por teoría : $10^2 = a\left(a+\dfrac{9}{2}\right)$

Donde : $0 = 2a^2 + 9a - 200$

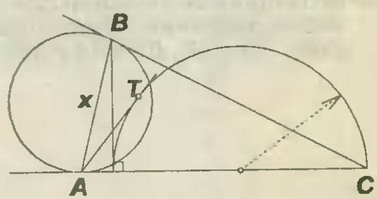
Ahora : $0 = (2a + 25)(a - 8)$

De donde resulta : $a = 8$

Luego : AT = 6 y BT = 2

Reemplazando : $x^2 = 2\,(8) \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 4}$

2.- Dado el siguiente gráfico , se pide hallar x , sabiendo que AT = $4\sqrt{2}$ .Asimismo se sabe que A, B y T puntos de tangencia.



Resolución.-

Trazando $\overline{CQ} \perp \overline{AB}$, se verificará que Q es punto medio de $\overline{AB}$, por ello : QA = QB = y

Aplicando el teorema "1" en el ⊿ AQC : y^2 = AP . AC ... (1)

También : AT^2 = AC . AH , donde : AH = 2 . AP

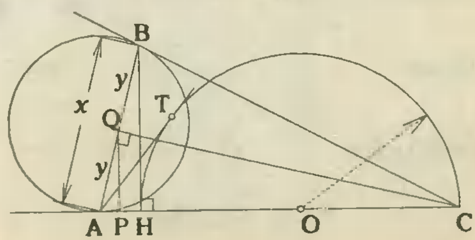
Entonces : AT^2 = AC . 2AP

Reemplazando : $(4\sqrt{2})^2$ = 2 . AP . AC ... (2)

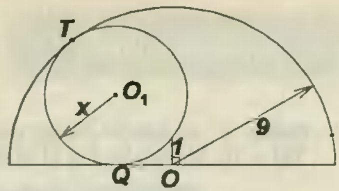
Y de (1) en (2) : $32 = 2.y^2 \Rightarrow y = 4$

En consecuencia : $x = 2y$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 8}$



3.- A partir del gráfico mostrado se pide hallar la medida del radio x , si además se sabe que T y Q son puntos de tangencia.



Resolución.-

Al construir el ⊿ O' HP , descubrimos que : HP = $\sqrt{2x-1}$

Asimismo en el ⊿ O' QO , sabemos que : $a^2 = x^2 + (\sqrt{2x-1})^2$ .....(*)

Pero : $a = 9 - x$

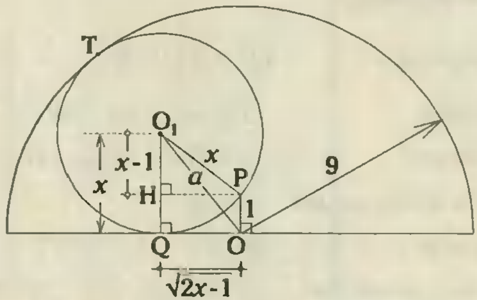
Luego en (*) : $(9-x)^2 = x^2 + 2x - 1$

$\Rightarrow$ $81 - 18x + x^2 = x^2 + 2x - 1$

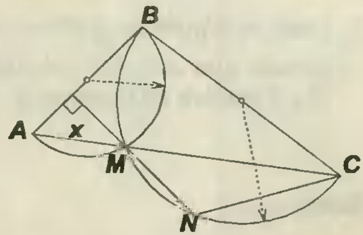
Ahora : $82 = 20x$

Simplificando : $41 = 10x$

$\therefore$ $x = 4,1$



4.- En la figura se muestran dos semicircunferencias de radios diferentes .Se pide hallar x , si además se sabe que : AB = 12 , BC = 16 y NC = 6.



Resolución.-

Trazando $\overline{BN}$ y $\overline{BM}$,se logran identificar varios ángulos congruentes y triángulos rectángulos en los que será posible aplicar las relaciones métricas conocidas . Veamos :

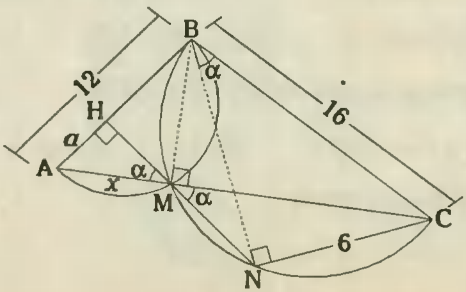
En el ⊿ AMB : $x^2 = a \, . \, 12$ ... (1)

Además : ⊿ AHM ~ ⊿ CNB $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{16} = \dfrac{a}{6}$

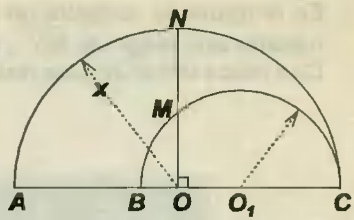
Donde : $a = \dfrac{3x}{8}$ ... (2)

De (1) y (2) : $x^2 = \dfrac{3x}{8} \, . \, 12$

$\therefore$ $x = 4,5$

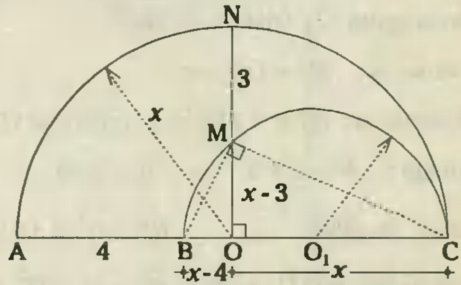


5.- En la figura mostrada se indican dos semicircunferencias de centros O y O_1 no concéntricas . Se pide calcular la medida del radio "x", si MN = 3 y AB = 4



Resolución.-

Lo que haremos es trazar dos segmentos perpendiculares como $\overline{BM}$ y $\overline{MC}$, tal que sea posible identificar un triángulo rectángulo . Veamos :



En el ⊿ BMC aplicaremos el Teorema "2" :

$$(x-3)^2 = (x-4)(x)$$

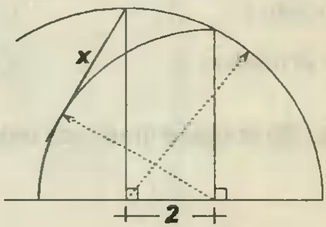
Efectuando : $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 4x$

Simplificando : $9 = 6x - 4x$

Ahora : $9 = 2x$

$\therefore$ $x = 4{,}5$

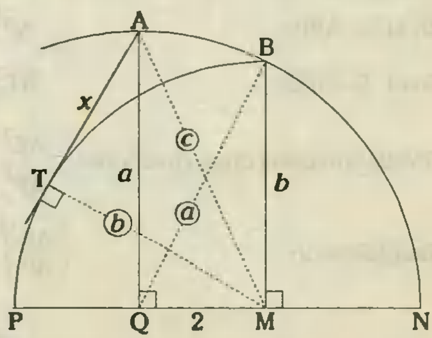
6.- A partir de los datos mostrados en el gráfico adjunto , se pide determinar el valor correspondiente de "x ".



Resolución.-

En primer lugar trazamos $\overline{AM}$, de modo que se logre identificar al ⊿ ATM , en el que aplicaremos el Teorema de Pitágoras :

$$c^2 = b^2 + x^2 \qquad \text{... (1)}$$



En el ⊿ AQM : $c^2 = a^2 + 2^2$ ... (2)

De (1) y (2) : $b^2 + x^2 = a^2 + 4$

Ahora : $x^2 = a^2 - b^2 + 4$ ... (3)

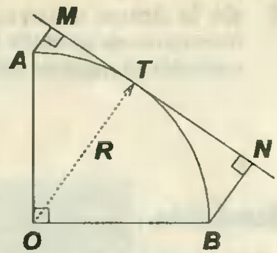
En el ⊿ QBM : $a^2 = b^2 + 2^2$

Donde : $a^2 - b^2 = 4$ ... (4)

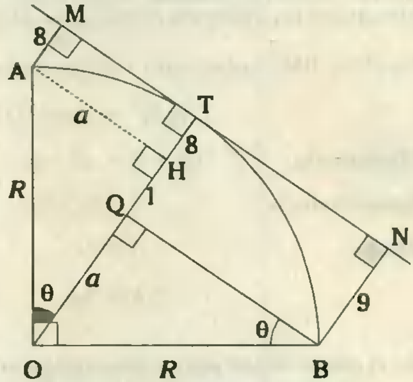
Reemplazando (4) en (3) : $x^2 = 4 + 4$

Por consiguiente : $x^2 = 8 \Rightarrow$ $x = 2\sqrt{2}$

7.- En la figura se muestra un cuadrante, sobre el que se ha trazado una tangente $\overline{MN}$, de modo que : AM = 8 y BN = 9. Con estos datos se pide hallar la medida de "R"



Resolución.-



En la figura : ⊿ OHA ≅ ⊿ BQO

Entonces : $AH = OQ = a$

Además si : $QT = 9$ y $HT = 8$, entonces $QH = 1$

Luego : $R = a + 9 \Rightarrow a = R - 9$ ... (1)

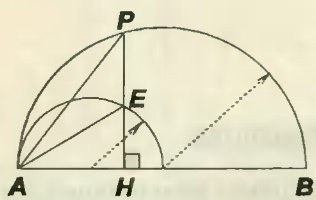
En el ⊿ OAH : $R^2 = a^2 + (a+1)^2$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $R^2 = (R-9)^2 + (R-8)^2$

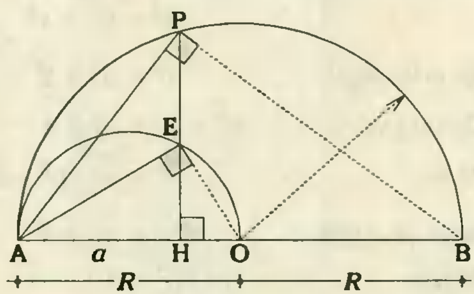
Donde : $0 = R^2 - 34R + 145$

Y al resolver : $\boldsymbol{x = 29}$

8.- En la figura mostrada hallar (AE/AP)



Resolución.-



En el ⊿ APB : $AP^2 = a \cdot 2R$

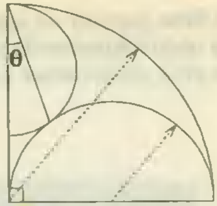
En el ⊿ AEO : $AE^2 = a \cdot R$

Dividiendo estas dos expresiones : $\dfrac{AE^2}{AP^2} = \dfrac{a.R}{a.2R}$

Simplificando : $\left(\dfrac{AE}{AP}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{AE}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9.- En la figura mostrada se pide hallar "θ".

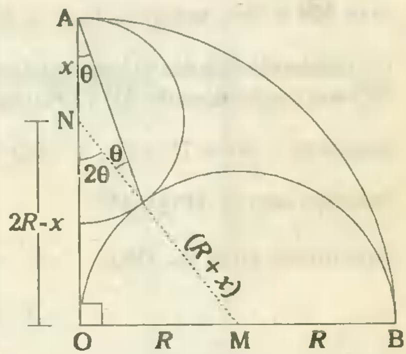


<u>**Resolución**</u>.-

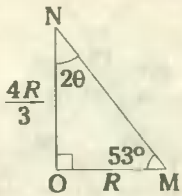
En el ⊿ ONM , por el teorema de Pitágoras : $(R+x)^2 = (2R-x)^2 + R^2$

Donde : $R^2 + 2Rx + x^2 = 4R^2 - 4Rx + x^2 + R^2$

Ahora : $6Rx = 4R^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}R$

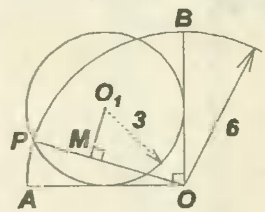


Luego :



En consecuencia : **θ = 37°/2**

10.- En la figura mostrada , calcular la medida de OM .



<u>**Resolución**</u>.-

En el ⊿ O'MN , por el teorema de Pitágoras : $x^2 = 9 - a^2$ ... (1)

En el ⊿ OMO' : $x^2 = (3\sqrt{2})^2 - MO^2$

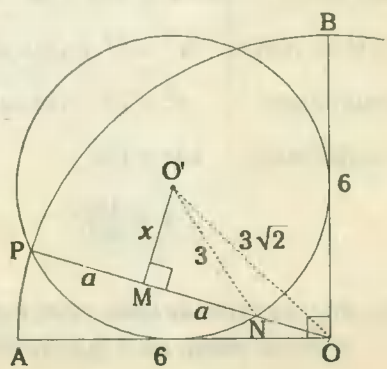
Pero : MO = (6 - a) $\Rightarrow$ $x^2 = 18 - (6-a)^2$ ... (2)

Igualando (1) y (2) : $9 - a^2 = 18 - (6-a)^2$

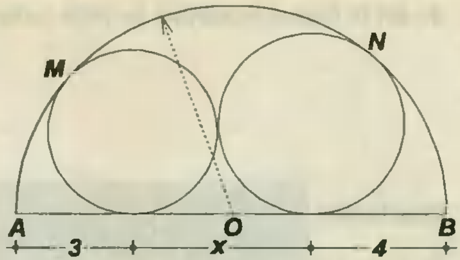
Simplificando : $a = 9/4$

En (1) : $x = \sqrt{9.81/16} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{63}{16}}$

$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{3}{4}\sqrt{7}}$



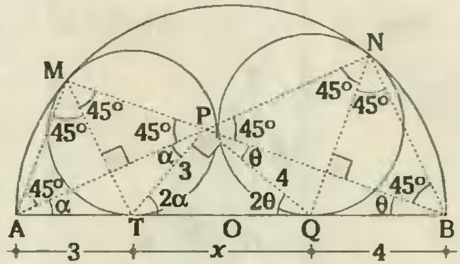
11.- En el gráfico adjunto se sabe que m$\overset{\frown}{MN}$ = 90. Con los datos adicionales que allí se observan, se pide determinar el valor de "x"



Resolución.-

Si $m\ \overset{\frown}{MN} = 90°$, entonces la $m\ \measuredangle$ MAP = $m\ \measuredangle$ NBP = 45°

Completando ángulos se logra establecer que $\overline{MT}$ y $\overline{NQ}$ son mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ respectivamente.



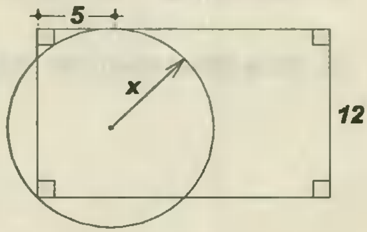
Entonces : AT = TP = 3 y PQ = QB = 4

Además la $m\ \measuredangle$ TPQ = 90°

Finalmente en el ⊿ TPQ : $x^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 5}$

12.- Dado el rectángulo, y con los datos señalados. Hallar "x"



Resolución.-

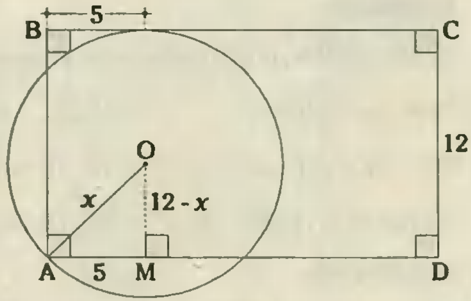
En la figura : AM = 5 y OM = 12 - x

En el ⊿ AMO : $x^2 = 5^2 + (12 - x)^2$

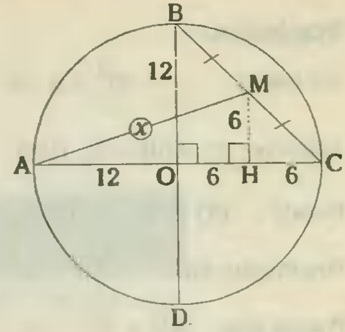
Resolviendo : $x^2 = 25 + 144 - 24x + x^2$

Simplificando : $24x = 169$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \dfrac{169}{24}}$



13.- En un círculo de radio 12 se trazan dos diámetros perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si M es el punto medio de la cuerda $\overline{BC}$, hallar AM.



Resolución.-

Se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{AC}$, entonces :

$$MH = \frac{12}{2} \quad \Rightarrow \quad MH = 6$$

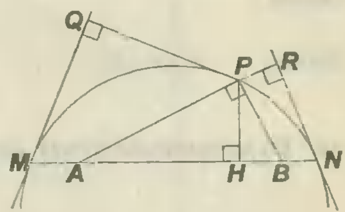
También : $\quad OH = HC = 6$

Finalmente en el ⊿ AHM : $\quad x^2 = 18^2 + 6^2$

$$\therefore \qquad x = 6\sqrt{10}$$

14.- Si PQ . PR = 9 m², se pide encontrar el valor de :

AH . HB .

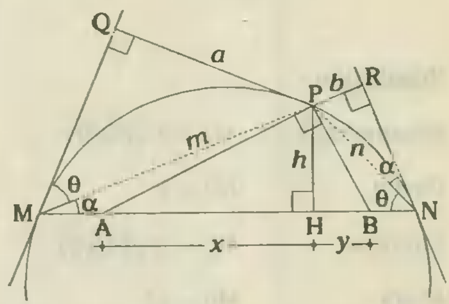


Resolución.-

En la figura mostrada, observamos que :

$$\text{⊿ MQP} \sim \text{⊿ NHP} \;\Rightarrow\; \frac{m}{n} = \frac{a}{h} \;...\;(1)$$

También : $\text{⊿ MPH} \sim \text{⊿ NPR} \;\Rightarrow\; \dfrac{m}{n} = \dfrac{h}{b} \;...\;(2)$



De (1) y (2) : $\quad \dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad a \,.\, b = h \,.\, h$

$$\Rightarrow \quad h^2 = a \,.\, b$$

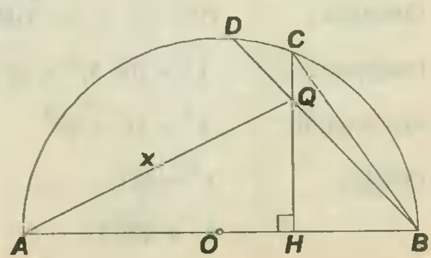
En el ⊿ APB : $\quad h^2 = x.y \quad \Rightarrow \quad x \,.\, y = a \,.\, b$

Puesto que : $\quad a \,.\, b = 9m^2$

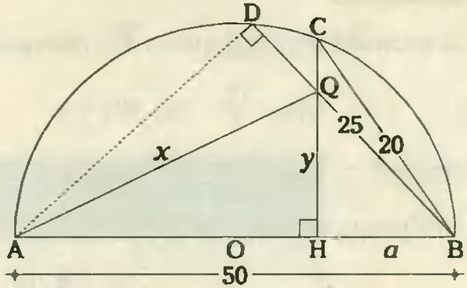
$$\therefore \qquad x \,.\, y = 9m^2$$

15.- En la figura mostrada se pide determinar x , si se sabe que : BC = 20 , BD = 25 y AB = 50

(O → centro)



Resolución.-



Por teoría : $20^2 = a \cdot 50 \Rightarrow a = 8$

Además : ⊾ ADB ~ ⊾ QHB $\Rightarrow \dfrac{50}{BQ} = \dfrac{25}{8}$

Donde : BQ = 16 ; luego : $y = 8\sqrt{3}$

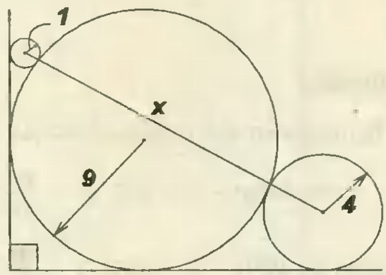
Finalmente en el ⊾ AQH : $x^2 = (8\sqrt{3})^2 + AH^2$

Puesto que: AH = 42 $\Rightarrow x^2 = 192 + 42^2$

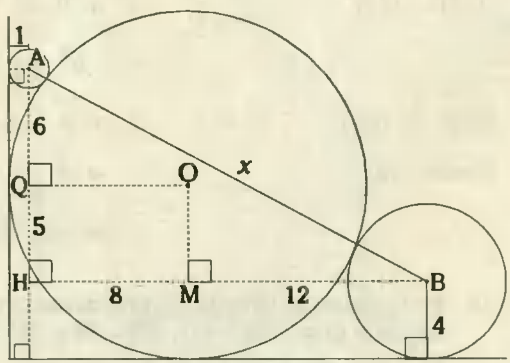
Donde : $x^2 = 192 + 1764$

Ahora : $x^2 = 1956$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 2\sqrt{489}}$

16.- En la figura mostrada, calcular "x"



Resolución.-



Sabemos que : $AQ = 2\sqrt{(1)(9)}$

Donde : $AQ = 6$

También : $MB = 2\sqrt{(4)(9)}$

Ahora : $MB = 12$

Puesto que : $QH = 9 - 4 \Rightarrow QH = 5$

Entonces : $HM = 9 - 1 \Rightarrow HM = 8$

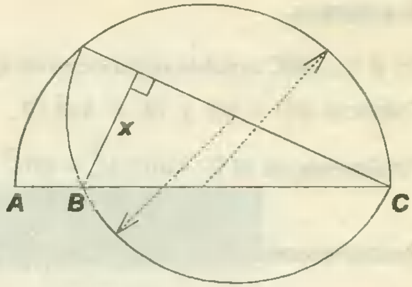
Finalmente : $x^2 = (6+5)^2 + (8+12)^2$

Resolviendo : $x^2 = 11^2 + 20^2$

Donde : $x^2 = 521$

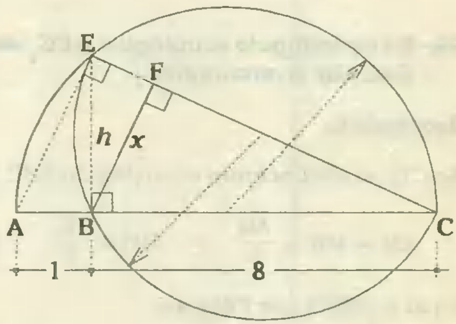
$\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt{521}}$

17.- Hallar "x", si : AB = 1 y BC = 8



Resolución.-

En el ⊿ AEC, por teoría : $h^2 = 1 . 8 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 8$



En el ⊿ EBC : $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{8^2}$

Reemplazando : $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8^2}$

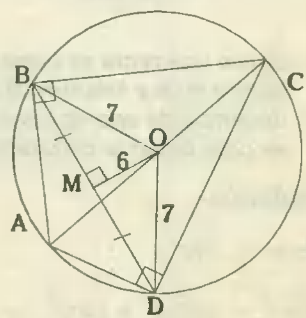
Factorizando : $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{8}\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$

Ahora : $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9}{8}\right)$

Donde : $x^2 = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = \dfrac{8}{3}}$

18.- Se tiene un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, donde una de sus diagonales es el diámetro que mide 14m. Si la distancia entre los puntos medios de dichas diagonales es 6m, entonces se pide calcular la longitud en m de la otra diagonal.

Resolución.-



El triángulo BOD es isósceles, entonces :

$$BM = MD$$

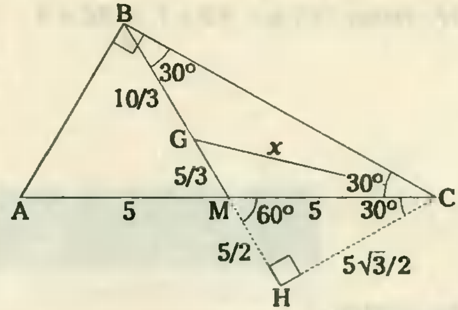
En el ⊿ BMO : $BM^2 + 6^2 = 7^2$

$$BM = \sqrt{13}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{BD = 2\sqrt{13}}$$

19.- Si la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm y forma un ángulo de 30º con el cateto mayor, se pide determinar la distancia en cm del baricentro al vértice opuesto al cateto menor.

Resolución.-



En el ⊾ MHC notable reconocemos que $MC = 5$

Entonces $MH = 5/2$ y $HC = 5\sqrt{3}/2$

Finalmente en el ⊾ GHC : $x^2 = GH^2 + HC^2$

Reemplazando : $$x^2 = \left(\frac{25}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

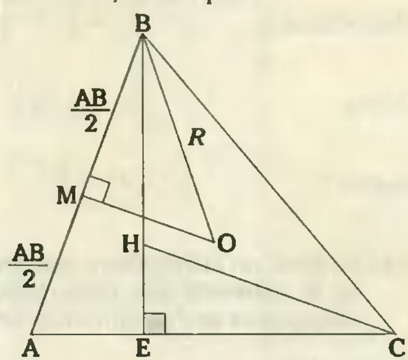
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{5\sqrt{13}}{3}}$$

20.- En un triángulo acutángulo ABC , se sabe que "H" es el ortocentro y $AB^2 + HC^2 = 100$. Calcular el circunradio.

Resolución.-

Sea "O" el circuncentro del triángulo ABC, luego al trazar $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, se cumple :

$$AM = MB = \frac{AB}{2} \quad y \quad OM = \frac{HC}{2} \qquad \text{(Propiedad)}$$



En el ⊾ BMO, por Pitágoras :

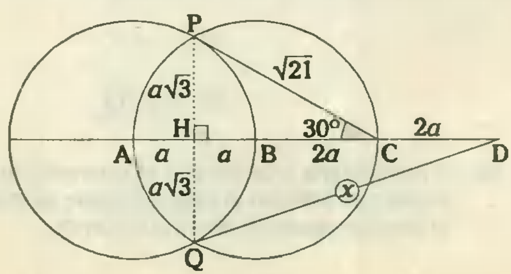
$$R^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{HC}{2}\right)^2 = \frac{AB^2 + HC^2}{4}$$

Donde : $R^2 = \dfrac{100}{4}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = 5}$$

21.- Sobre una recta se toman los puntos A, B, C y D tales que AB = BC = CD . Haciendo centro en A y luego en B , se trazan dos circunferencias de radios AB cada una . Si la distancia de uno de los puntos de intersección de las 2 circunferencias a C es $\sqrt{21}$ m, se pide hallar la distancia en metros del otro punto de intersección a D .

Resolución.-



* En el ⊾ PHC :

$$(\sqrt{21})^2 = (a\sqrt{3})^2 + (3a)^2 \Rightarrow a = \sqrt{7}/2$$

* Finalmente en el ⊾ QHD :

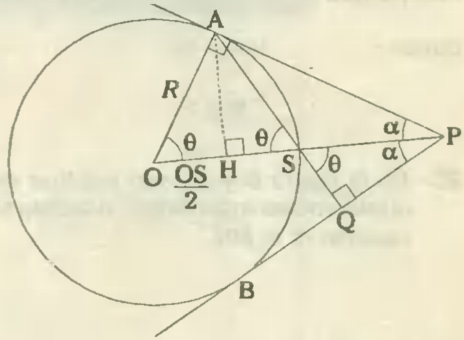
$$x^2 = (a\sqrt{3})^2 + (5a)^2$$

Donde : $x = 2a\sqrt{7}$

Reemplazando : $x = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{7}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 7}$

22.- A partir de un punto P exterior a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. A continuación se traza $\overline{AQ} \perp \overline{PB}$. Si : OS . OP = 50 , hallar el radio de la circunferencia ($\overline{OP} \cap \overline{AQ}$: S)

Resolución.-



El Δ OAS es isósceles ya que $\measuredangle$ AOS $\cong$ $\measuredangle$ ASO = θ.

Luego al trazar la altura $\overline{AH}$ se tiene :

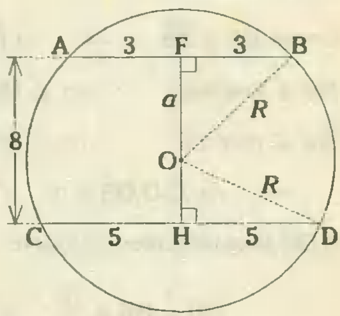
$$OH = HS = \frac{OS}{2}$$

En el $\triangle$ OAP : $R^2 = OP \cdot OH$ (Teorema)

$\Rightarrow$ $R^2 = OP \cdot \dfrac{OS}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$ $\therefore$ $\boldsymbol{R = 5}$

23.- Calcular el radio de una circunferencia; si dos cuerdas paralelas de 6 y 10 unidades de longitud distan 8 u.

Resolución.-



Por O, trazamos la perpendicular $\overline{FH}$ a las cuerdas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, luego : AF = FB = 3 y CH = HD = 5.

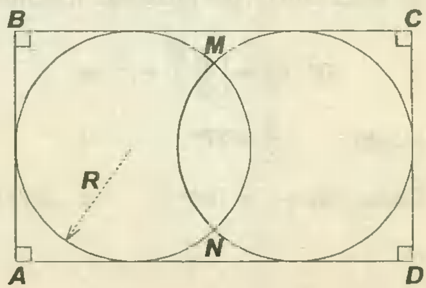
Por Pitágoras : $\triangle$ OFB : $R^2 = a^2 + 9$ .... (1)

$\triangle$ OHD : $R^2 = (8 - a)^2 + 25$

De donde : $a^2 + 9 = (8 - a)^2 + 25$ $\Rightarrow$ $a = 5$

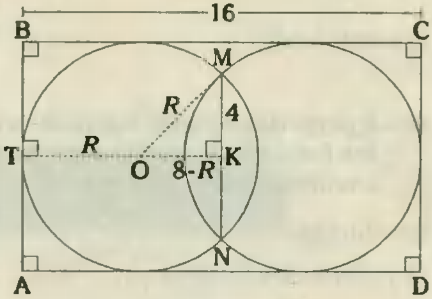
Sustituyendo en (1) : $R^2 = 5^2 + 9$ $\therefore$ $\boldsymbol{R = \sqrt{34}}$

24.- En el gráfico mostrado se muestra un rectángulo y se pide hallar R, si AD = 16 y además MN = 8



Resolución.-

Trazamos $\overline{TK} \perp \overline{MN}$, luego :



$TK = \dfrac{BC}{2} = 8$; $MK = KN = 4$ y $OK = 8 - R$

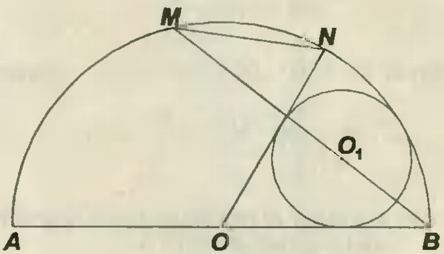
En el ⊿ OKM : $R^2 = (8 - R)^2 + 4^2$

Resolviendo : $R^2 = 64 - 16R + R^2 + 16$

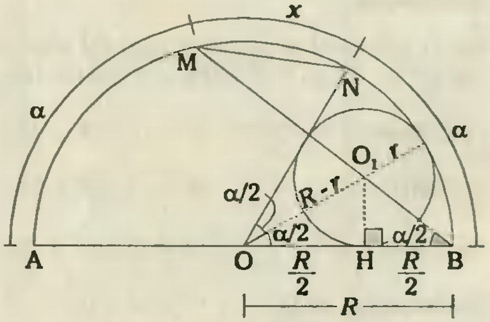
Donde : $16R = 80$

$\therefore$ $\boldsymbol{R = 5}$

25.- En la figura O y O_1 son centros de las circunferencias mostradas . Además $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$, calcular la m $\overset{\frown}{MN}$.



Resolución.-



Como $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ $\Rightarrow$ $m\ \overset{\frown}{AM} = m\ \overset{\frown}{NB} = \alpha$

Por ∡ inscrito : m ∡ $MBA = \alpha/2$

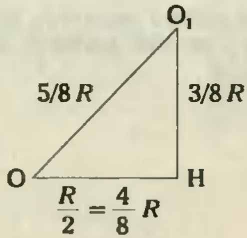
Por ∡ central : m ∡ $NOB = \alpha$

$\Rightarrow$ m ∡ $O_1OB = \alpha$ y $OO_1 = R - r$

Δ OO_1B es isósceles, entonces :

$OH = HB = \dfrac{R}{2}$ y $O_1H = r$

En el ⊿ OHO_1 , por Pitágoras tenemos:



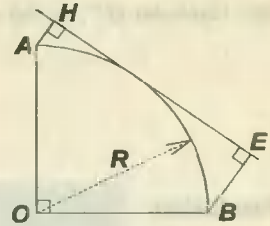
$$(R - r)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{3}{8}R$$

Luego : $\dfrac{\alpha}{2} = 37°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 74°$

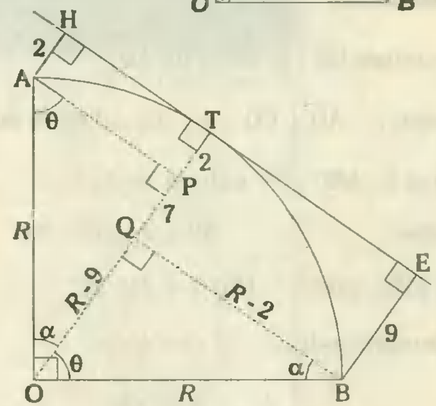
Como : $2\alpha + x = 180°$ $\Rightarrow$ $2(74) + x = 180°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 32°}$

26.- Hallar : R , si AH = 2 y BE = 9



Resolución.-



Trazamos : $\overline{OT} \perp \overline{HE}$, $\overline{AP} \perp \overline{OT}$ y $\overline{BQ} \perp \overline{OP}$.

Luego : AH = PT = 2 , TQ = BE = 9

Además OP = R - 2 y OQ = R - 9

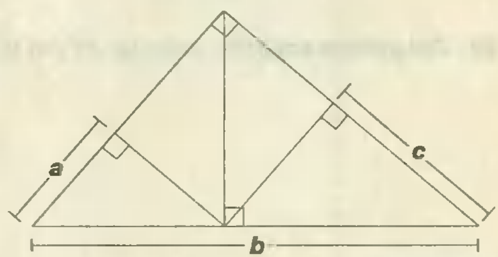
⊿ APO ≅ ⊿ OQB (ALA) $\Rightarrow$ BQ = OP = R - 2

En el ⊿ OQB : $R^2 = (R - 9)^2 + (R - 2)^2$

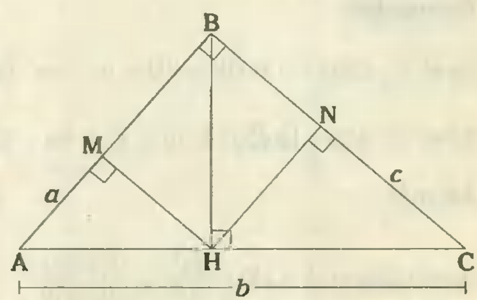
Resolviendo : $R = 17$ y $R = 5$

Como : $R > 9 \Rightarrow$ $\boldsymbol{R = 17}$

27.- De la figura adjunta determinar la relación entre a, b y c



Resolución.-



⊿ ABC : $AB^2 = b \cdot AH \Rightarrow AB = \sqrt{b \cdot AH}$ .... (1)

⊿ AHB : $AH^2 = AB \cdot a \Rightarrow AB = \dfrac{AH^2}{a}$ .... (2)

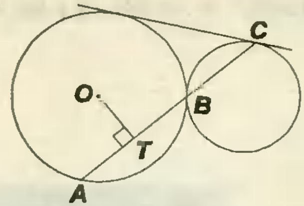
De (1) y (2) : $\sqrt{b\ AH} = \dfrac{AH^2}{a}$

$\Rightarrow b \cdot AH = \dfrac{AH^4}{a^2} \Rightarrow AH = \sqrt[3]{a^2 b}$

Análogamente : $HC = \sqrt[3]{c^2 b}$; puesto que : $b = AH + HC$

Entonces : $b = \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{c^2 b}$ $\therefore$ $\boldsymbol{\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{c^2}}$

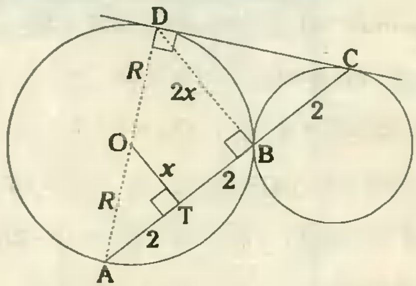
28.- Calcular OT , si AB = 4 y BC = 2



Resolución.-

Trazamos $\overline{BD}$ y el diámetro $\overline{AD}$

Luego : $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ y $m\measuredangle DBC = 90^o$



En el ⊾ ABD : $\overline{OT}$ es base media

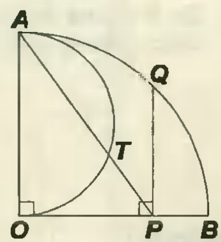
luego : BD = 2 (OT) = $2x$

En el ⊾ ADC : (BD)2 = AB . BC

Reemplazando : $4x^2 = 4 \cdot 2$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$

29.- Del gráfico adjunto , calcular AT , si PT = 6 y OP = PQ



Resolución.

En el ⊾ OPQ : si OP = PQ = a $\Rightarrow$ OQ = $a\sqrt{2}$ = OA = OB

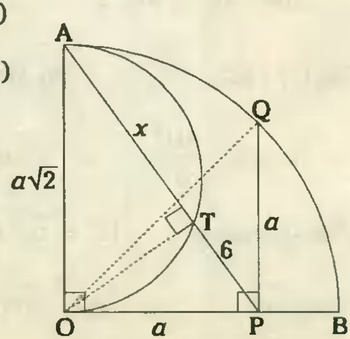
En el ⊾ AOP : $(a\sqrt{2})^2 = (6+x)\,x \Rightarrow 2a^2 = (6+x)x$ ... (1)

Además : $a^2 = (6+x)\,6$ ... (2)

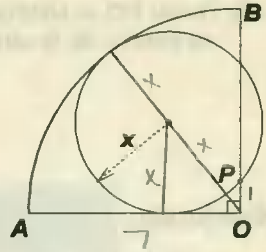
Dividiendo : (1) ÷ (2) : $\dfrac{2a^2}{a^2} = \dfrac{(6+x)x}{(6+x)6}$

Donde : $2 = \dfrac{x}{6}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 12}$



30.- En el gráfico dado se muestra un cuadrante y una circunferencia tangente a él en dos puntos . Además se sabe que : OP = 1 y AO = OB = 7 , calcular x



Resolución.-

Trazamos las líneas : OT = 7 - x ; $\overline{TH} \perp \overline{PQ}$ (TH = a) y $\overline{TK} \perp \overline{OA}$ (TK = x)

Además de OP = x

Aplicando Pitágoras en :

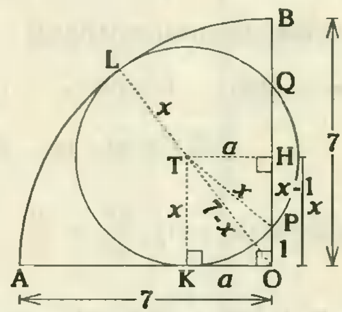
el ⊿ TKO : $a^2 - x^2 = (7 - x)^2$ ... (1)

⊿ THP : $x^2 = a^2 + (x - 1)^2$ ... (2)

(1) + (2) : $2x^2 = (7 - x)^2 + (x - 1)^2$

$\Rightarrow$ $2x^2 = 49 - 14x + x^2 + x^2 - 2x + 1$

Donde : $16x = 50$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 25/8}$



31.- Sea AOB un cuadrante de centro "O" y radio 2u . Además "P" es un punto del arco AB equidistante de A y de OB. Con estos datos , calcular AP

Resolución.-

Tracemos : OP = 2 , $\overline{PQ} \perp \overline{OA}$ y $\overline{PH} \perp \overline{OB}$

Luego : OQ = PH = x y PQ = HO = a . Además : AQ = 2 - x

Por Pitágoras en :

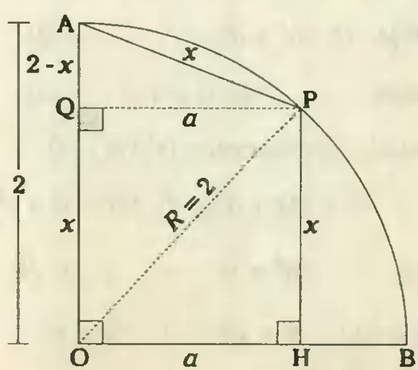
⊿ OHP : $a^2 = 2^2 - x^2$ ... (1)

⊿ AQP : $a^2 = x^2 - (2 - x)^2$ ... (2)

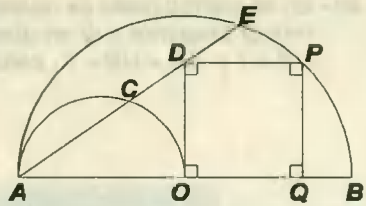
De (1) y (2) : $4 - x^2 = x^2 - 4 - x^2 + 4x$

De donde : $0 = x^2 - 4x - 8$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 1{,}46\ u}$



32.- Hallar CD, si ODPQ es un cuadrado. En el gráfico O es centro de la circunferencia mayor y AE = 20



<u>Resolución</u>.-

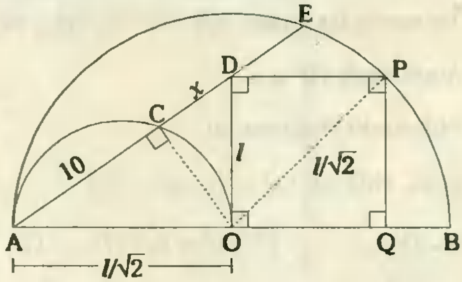
Como $\overline{OC} \perp \overline{AE}$ $\Rightarrow$ AC = CE = 10

Por otro lado : OA = OP = $l\sqrt{2}$

("l" es lado del cuadrado ODPQ)

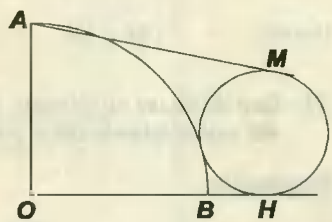
En el ⊿ AOD : $l^2 = AD \cdot x$ ... (1)

$\Rightarrow$ $(l\sqrt{2})^2 = AD \cdot 10$ ... (2)



Dividiendo (2) ÷ (1) : $\dfrac{2l^2}{l^2} = \dfrac{10}{x}$ $\therefore$ $\mathbf{x = 5}$

33.- En la figura se muestra un cuadrante y una circunferencia. Hallar AM, si el radio del cuadrante es $\sqrt{2}$



<u>Resolución</u>.-

Aplicando Pitágoras en :

⊿ OHP : $(R+r)^2 = r^2 + a^2$ $\Rightarrow$ $R^2 + 2Rr = a^2$ ... (1)

⊿ PQA : $(R-r)^2 + a^2 = b^2$ ... (2)

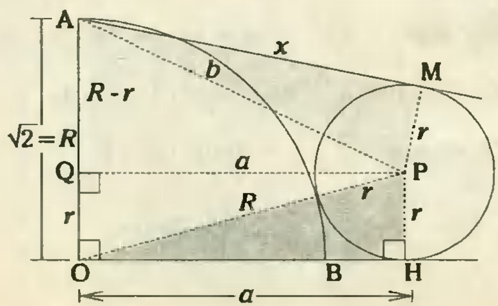
⊿ AMP : $b^2 = x^2 + r^2$ ... (3)

Sumando las ecuaciones (1) (2) y (3) :

$$R^2 + 2Rr + R^2 + r^2 - 2Rr = x^2 + r^2$$

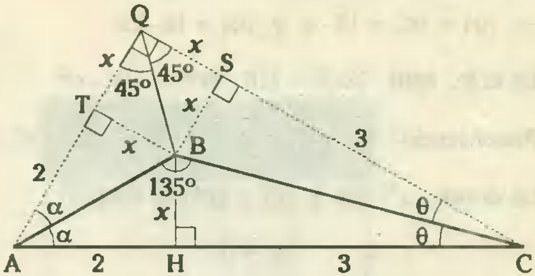
Donde : $2R^2 = x^2$ $\Rightarrow$ $x = R\sqrt{2}$

Puesto que : $R = \sqrt{2}$ $\therefore$ $\mathbf{x = 2}$



34.- El ángulo B de un triángulo ABC mide 135°. Se traza la altura $\overline{BH}$, si AH = 2 y CH = 3 ; hallar BH .

Resolución.-



En el Δ ABC : α + θ = 45°. Trazamos por A y C rectas que se cortan en Q , de modo que :

$m\measuredangle QAB = \alpha$ y $m\measuredangle QCB = \theta$

Luego : $m\measuredangle AQC = 90°$ y se reconoce que "B" es el incentro del ⊿ AQC.

Al trazar $\overline{BT} \perp \overline{AQ}$ y $\overline{BS} \perp \overline{QC}$, se tiene :

AT = 2 , TQ = QS = x y SC = 3

En el ⊿ AQC : $(2 + x)^2 + (3 + x)^2 = 5^2$

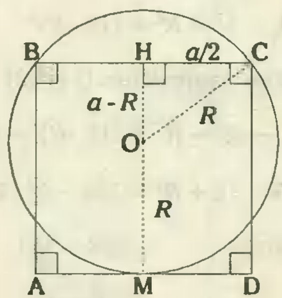
Luego : $4 + 4x + x^2 + 9 + 6x + x^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 + 10x = 12$

$\Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{x = 1}$

35.- Una circunferencia pasa por los vértices B y C de un cuadrado ABCD y es tangente en M al lado $\overline{AD}$. Si AB = a , hallar el radio de la circunferencia .

Resolución.-

Por el centro O del cuadrado, trazamos $\overline{OH} \perp \overline{BC}$.



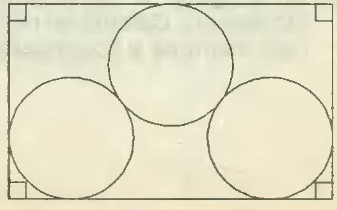
Luego : BH = HC = $a/2$; OM = R y OH = $a - R$

En el ⊿ OHC : $R^2 = (a - R)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

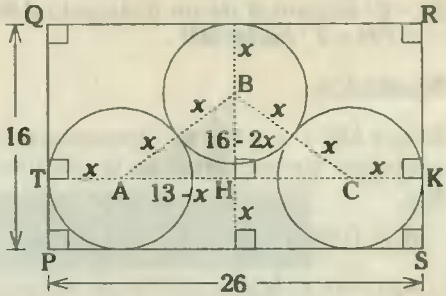
Resolviendo : $R^2 = a^2 + R^2 - 2aR + \frac{a^2}{4}$

Simplificando : $2aR = \frac{5}{4}a^2 \quad \therefore \quad \boxed{R = \frac{5}{8}a}$

36.- En un rectángulo de dimensiones 16m y 26m ; se inscriben tres circunferencias iguales tal como se muestra en la figura. Calcular el radio de las circunferencias .



Resolución.-



Del gráfico observamos : $AC = 26 - 2x$

$\Rightarrow$ $AH = HC = 13 - x$ y $BH = 16 - 2x$

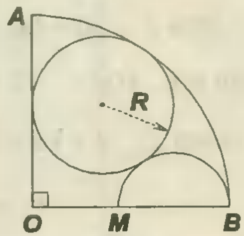
En el ⊿ AHB : $(2x)^2 = (16 - 2x)^2 + (13 - x)^2$

Resolviendo : $4x^2 = 256 + 4x^2 - 64x + 169 + x^2 - 26x$

De donde : $x^2 - 90x + 425 = 0$(Aspa simple)

$\therefore$ $\boxed{x = 5}$

37.- En el gráfico se muestran ,un cuadrante, una semicircunferencia hallar R ; si OA = OB = 16 y MO = MB

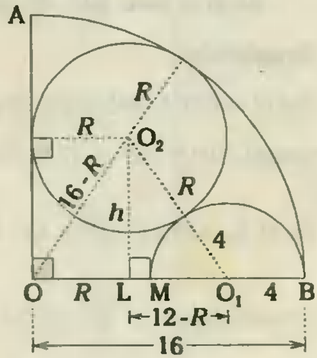


Resolución.-

Por Pitagoras en :

⊿ $O_2 L O_1$: $(R + 4)^2 = h^2 + (12 - R)^2$ ... (1)

⊿ $O L O_2$: $h^2 + R^2 = (16 - R)^2$ ... (2)



Sumando las expresiones (1) y (2) :

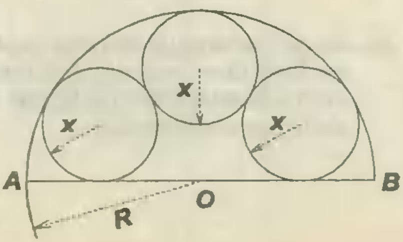
$$(R + 4)^2 + R^2 = (12 - R)^2 + (16 - R)^2$$

$$R^2 + 8R + 16 + R^2 = 144 + R^2 - 24R + 256 - 32R + R^2$$

Simplificando : $64R = 384$

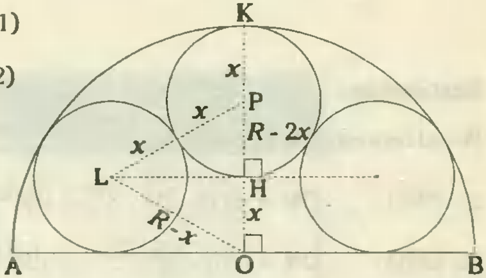
$\therefore$ $\boxed{R = 6}$

38.- En la figura "O" es el centro de la circunferencia mayor . Calcular el radio de las circunferencias menores y congruentes.



Resolución.-

Empleando el teorema de Pitágoras en :



⊾ LHO : $(LH)^2 = (R - x)^2 - x^2$ ... (1)

⊾ LHP : $(LH)^2 = (2x)^2 - (R - 2x)^2$ ... (2)

De (1) y (2) : $(R - x)^2 - x^2 = (2x)^2 - (R - 2x)^2$

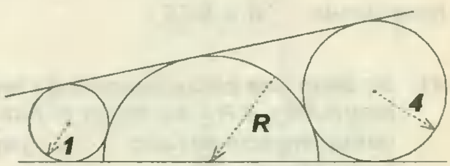
Donde :

$$R^2 - 2Rx + x^2 - x^2 = 4x^2 - R^2 - 4x^2 + 4Rx$$

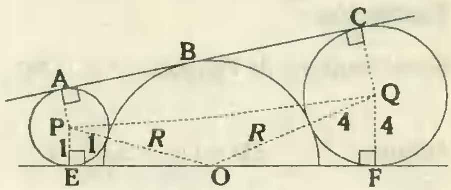
Simplificando : $2R^2 = 6Rx$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{R}{3}}$$

39.- En la figura se muestran dos circunferencias de radios 1 y 4 , tangentes a una semicircunferencia de radio R y a otras dos rectas. Con estos datos se pide hallar "R" .



Resolución.-



Por Pitagoras en el ⊾ PEO :

$$OE = \sqrt{(R+1)^2 - 1}$$

y : $$OF = \sqrt{(R+4)^2 - 16}$$

Entonces : $EF = AC = \sqrt{(R+1)^2 - 1} + \sqrt{(R+4)^2 - 16}$

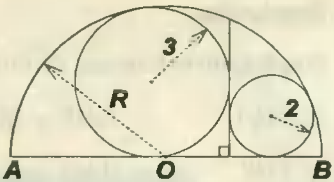
Por Propiedad : $AB = 2\sqrt{(1)R}$ y $BC = 2\sqrt{4R}$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{R} + 4\sqrt{R} = \sqrt{(R+1)^2 - 1} + \sqrt{(R+4)^2 - 16}$$

Donde : $6\sqrt{R} = \sqrt{R^2 + 2R} + \sqrt{R^2 + 8R}$ (Aplicando ecuaciones)

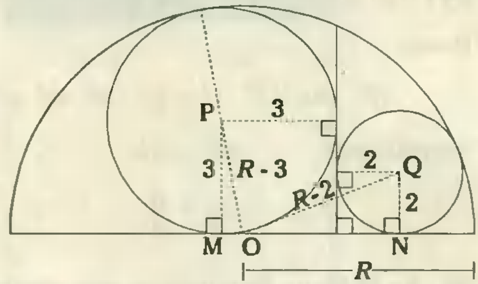
$$\therefore \quad \boldsymbol{R = 4{,}25}$$

40.- A partir del gráfico adjunto se pide calcular el valor del radio R conociendo los radios de las otras circunferencias .



Resolución.-

Por el teorema de Pitágoras en :



⊿ PMO : $OM = \sqrt{(R-3)^2 - 3^2} = \sqrt{R^2 - 6R}$

⊿ ONQ : $ON = \sqrt{(R-2)^2 - 2^2} = \sqrt{R^2 - 4R}$

Puesto que: $MN = OM + ON$

$\Rightarrow \quad 5 = \sqrt{R^2 - 6R} + \sqrt{R^2 - 4R}$

Resolviendo : $\boldsymbol{R = 6{,}25}$

41.- Se tiene una circunferencia de radio "r" inscrita en una semicircunferencia de diámetro AB = 2 R = 4 r. Hallar el radio de la circunferencia tangente exteriormente a la circunferencia de radio "r", tangente interiormente a la semicircunferencia y tangente al diámetro $\overline{AB}$

Resolución.-

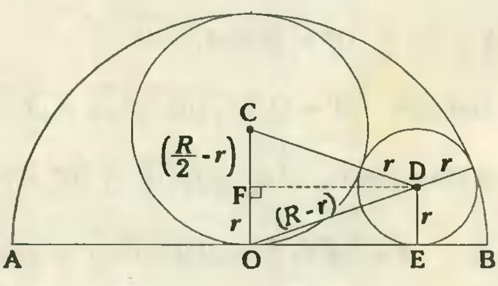
Por el Teorema de Pitágoras : ⊿ CFD : $FD = \sqrt{\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2} = 2\sqrt{\frac{R}{2} \cdot r}$

Además : $FD = OE = 2\sqrt{\frac{R}{2} \cdot r}$

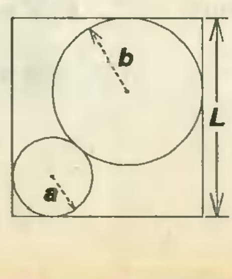
⊿ OED : $OD^2 = OE^2 + DE^2$

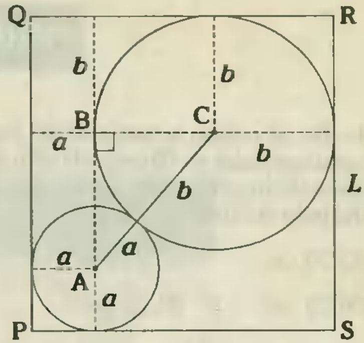
$\Rightarrow \quad (R - r)^2 = \left(2\sqrt{\frac{R}{2} \cdot r}\right)^2 + r^2$

Resolviendo : $\boldsymbol{r = \frac{R}{4}}$



42.- En la figura mostrada, encontrar la relación correcta entre L, a y b.





Resolución.-

Del gráfico : AC = $a + b$; BC = $L - a - b$; AB = $L - a$ y b

⊿ ABC resulta ser isósceles (45° y 45°)

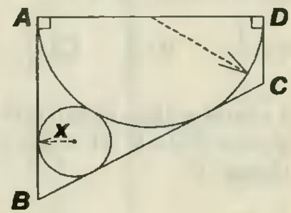
$\Rightarrow \quad (L - a - b)\sqrt{2} = a + b$

$L\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2} + b\sqrt{2}$

$L\sqrt{2} = (a + b)(1 + \sqrt{2})$

$\therefore \quad L = \dfrac{(a + b)(2 + \sqrt{2})}{2}$

43.- En la figura, hallar el radio de la circunferencia menor. Si AB = 8 y CD = 2.



Resolución.-

En el gráfico trazamos $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OP}$.

Por semejanza : ⊿ BAO ~ ⊿CDO : $\dfrac{R}{8} = \dfrac{R}{2} \;\rightarrow\; R = 4 \;\rightarrow\; a = 53°/2$

⊿ BTO_1 : $TO_1 = x$, BT = $2x$ y $BO_1 = x\sqrt{5}$

$\Rightarrow \quad BO_1 = \sqrt{TO_1^2 + BT^2}$ (T. de Pitágoras)

$\Rightarrow \quad BO = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$

Además $BO = \sqrt{8^2 + R^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$

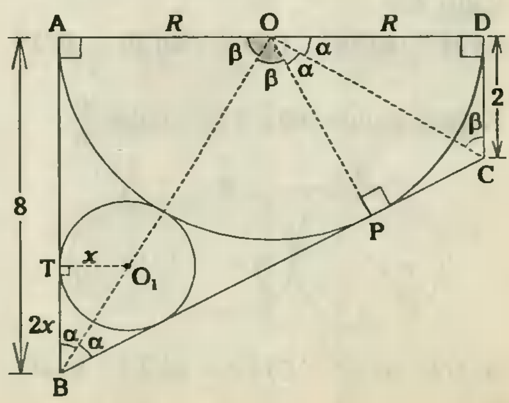
En el ⊿ BAO: $OB = BO_1 + O_1O$

$4\sqrt{5} = x\sqrt{5} + x + R$

$4\sqrt{5} = x\sqrt{5} + x + 4$

Resolviendo : $\quad x = 6 - 2\sqrt{5} <> 1,5$

$\therefore \quad$ **$x = 1,5$**



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un rombo la suma de las longitudes de sus diagonales es 70 *cm* y el radio de la circunferencia inscrita es 12 *cm*. Hallar la longitud del lado del rombo.

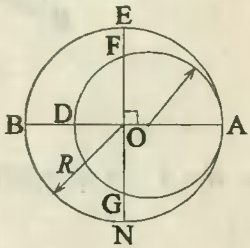
A) 20 *cm* B) 22 *cm* C) 24 *cm*
D) 25 *cm* E) 26 *cm*

2.- Hallar la longitud del radio de la circunferencia inscrita a un trapecio rectángulo cuyas bases miden 2 y 3 .

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

3.- En el gráfico mostrado "A" es punto de tangencia, BD = 9, EF = GN = 5 y "O" es centro. Hallar : *R*.

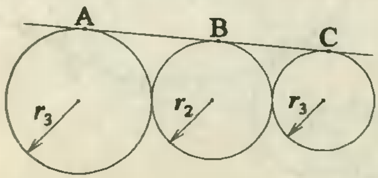
A) 17
B) 20
C) 22
D) 24
E) 25



4.- En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{AD} // \overline{BC}$), $m\measuredangle ACD = 90°$, BC = 7 y AC = 20 . Hallar AD.

A) 24 B) 25 C) 22 D) 26 E) 27

5.- En la figura : AB = 2 BC . Hallar $\frac{r_3}{r_1}$



A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 2/3 E) 2/5

6.- En un triángulo rectángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$) por el vértice "C" se levanta una perpendicular a $\overline{BC}$ hasta un punto "D" tal que $\overline{BD}$ intersecte a $\overline{AC}$ en "P". Hallar el circunradio del triángulo BPC , si AB = 4 ; BP = *n* ; PC = *m* y CD = 6.

A) $\frac{3mn}{25}$ B) $\frac{4mn}{25}$ C) $\frac{5mn}{24}$
D) $\frac{7mn}{24}$ E) $\frac{7mn}{25}$

7.- En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{AN}$. Si AN = 4, $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 6$; hallar BN . NC.

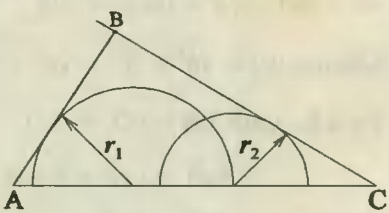
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

8.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$) por el punto "N" exterior a dicho triángulo se traza $\overline{NP}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ("P" es punto medio de $\overline{BC}$) . Hallar AN; si AB = $3\sqrt{29}$ y BC = $4\sqrt{29}$

A) 29 B) 28 C) 27 D) 25 E) 24

9.- En la figura $r_1 = 9$, $r_2 = 4$. Hallar el radio de la circunferencia tangente a las semicircunferencias y al lado $\overline{BC}$.

A) 0,32
B) 0,48
C) 0,56
D) 0,62
E) 0,64



10.- En la figura, el triángulo ABC es isósceles (AC = BC) "H" es ortocentro de dicho triángulo. Calcular MF , si : AM . MC = 20 ; EH = 2 y HC = 6

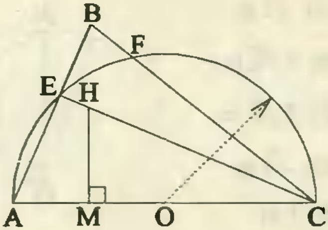
A) 4

B) 5

C) 3

D) 15/4

E) $4\sqrt{14}/3$



11.- En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB}$ = BC), la altura $\overline{AF}$, intersecta a la altura $\overline{BH}$ en "O". Si OB = 5, OH = 1, hallar OA.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $\sqrt{7}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

12.- En una circunferencia de radio 15 y centro "O", los diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares; la cuerda $\overline{AM}$ intersecta a $\overline{AC}$ en "N". Si OF= 3, hallar ON.

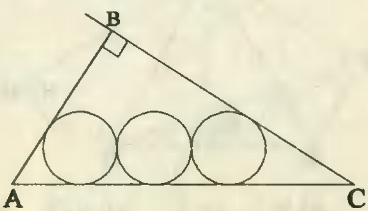
A) 8 B) 9 C) 10 D) 10,75 E) 12

13.- En un triángulo ABC ($m\angle B = 90°$), se traza la ceviana interior $\overline{BM}$; si AM = 8, MC = 10 y BM = AB. Hallar la distancia de "M" al lado $\overline{BC}$.

A) $3\sqrt{2}$ B) $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ C) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ E) $\dfrac{9\sqrt{5}}{7}$

14.- En la figura hallar el valor de uno de los radios de las circunferencias congruentes ,si AB = 20 y BC = 15.



A) 2,5 B) 3 C) 25/9 D) 25/7 E) 26/7

15.- Hallar el cateto mayor de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es $(2\sqrt{10} + 5)$ y la altura relativa a la hipotenusa la divide en la relación de 1 a 9.

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{10}/2$

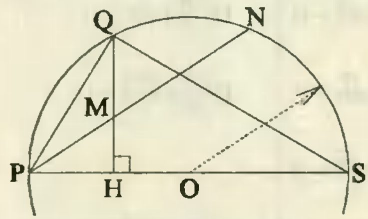
16.- En un triángulo acutángulo ABC, se han trazado las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$. Si AC . CE = 88 y AB . BD = 108, hallar BC.

A) 8 B) 11 C) 12 D) 14 E) 28

17.- Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide a cada uno de los otros dos lados en dos segmentos cuyas longitudes son 2 y 23. Hallar la longitud del radio de la circunferencia.

A) 15 B) 16 C) 17 D) 14 E) 19

18.- Hallar PQ, si : PM = 4 y MN = 9.



A) 4 B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{13}$ E) 12

19.- En un Δ ABC, la mediatriz del lado $\overline{AC}$ in tersecta al lado $\overline{BC}$ en el punto "P" y a la prolongación del lado $\overline{AB}$ en el punto "Q". Si "O" es el circuncentro del triángulo y OP. OQ = 200, hallar el circunradio del triángulo.

A) $5\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $9\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

20.- En la figura mostrada, las circunferencias son concéntricas y las medidas de sus radios son proporcionales a los números 1, 2 y 3 . Si AB = $\sqrt{10}$, hallar la longitud de la cuerda $\overline{CD}$.

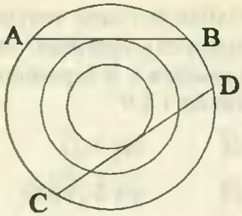
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) $2\sqrt{3}$



21.- El ángulo A de un paralelogramo ABCD mide 30°, las bisectrices interiores de "B" y "C" se intersectan en "O". Calcular la distancia del ortocentro al baricentro del triángulo BOC, si la distancia de "O" al lado $\overline{BC}$ mide 10,5.

A) 14 B) 12 C) 10 D) 9 E) 15

22.- Dos circunferencias cuyos radios miden R están situadas de tal forma que la distancia entre sus centros mide R. En la región común a ambos círculos se inscribe un cuadrado. Hallar la longitud del lado del cuadrado.

A) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ D) $\frac{R}{2}(\sqrt{7}-1)$

B) $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-1)$ E) $\frac{R}{2}(\sqrt{11}-1)$

C) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$

23.- En la figura: $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$ son diámetros BD = 4 , BC = 16 y AB = 8. Calcular EF.

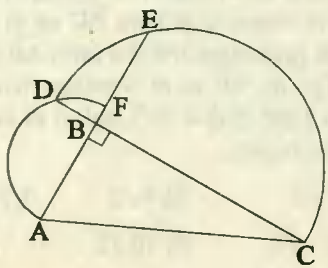
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



24.- En la figura, si : OM = 2m. Hallar AN

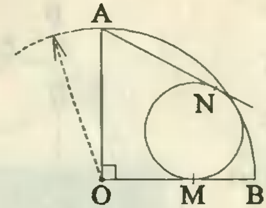
A) $\sqrt{2}\,m$

B) $2\sqrt{2}\,m$

C) $3\sqrt{2}\,m$

D) $\sqrt{3}\,m$

E) 1 m



25.- En la figura AB = 12 , BC = 16 y EC = 6. Calcular : AP.

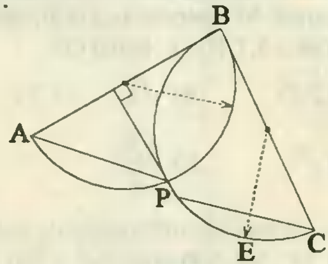
A) 4,1

B) 4,2

C) 4,3

D) 4,4

E) 4,5



26.- En la figura ABCD es un cuadrado AB = $\sqrt{7}$ y PQ = $\sqrt{3}$. Hallar QD.

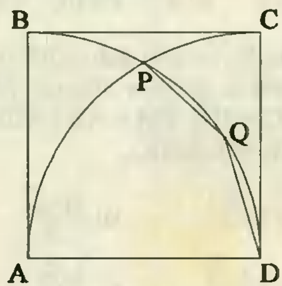
A) 1/2

B) 1

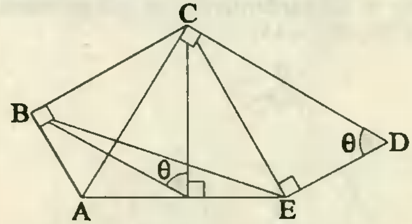
C) $\sqrt{2}/2$

D) 3/2

E) $\sqrt{3}/2$



27.- En la figura : AC = CD , DE = 2 ; AE = 10. Hallar BE.



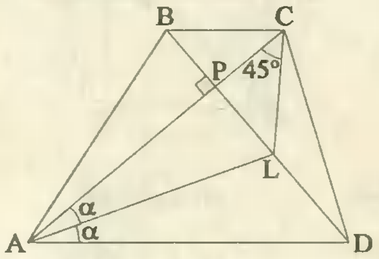
A) 6 B) 7 C) 8 D) $8\sqrt{2}$ E) 12

28.- En la figura: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Si:

$AP = 4$, $DL = a$, $CL = b$

y $\sqrt{2}\,a + \sqrt{2a^2 - b^2} = 6\sqrt{2}$.

Calcular : $3a + b\sqrt{2}$



A) 7 B) 12 C) 93 D) 14 E) 18

29.- En la figura : A y B son centros : $r = 3$ y $R = 6$. Calcular AB.

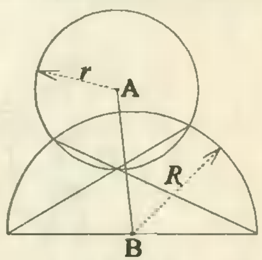
A) $3\sqrt{5}$

B) 6

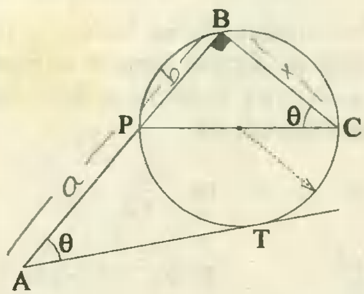
C) 4,5

D) $6\sqrt{5}$

E) $3\sqrt{3}$



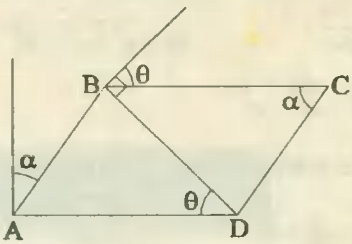
30.- Hallar BC , si $AP = a$ y $PB = b$



A) $\dfrac{ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $\sqrt{b(a+b)}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

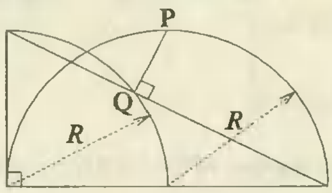
31.- Hallar BD; si $AD = a$ y $BC = b$.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$ C) $2\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{ab}{a+b}$

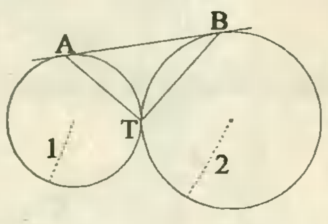
32.- Del gráfico; hallar PQ.



A) $\dfrac{R}{2}\sqrt{2}$ B) $\dfrac{R}{3}\sqrt{3}$ C) $\dfrac{R}{2}$

D) $\dfrac{R}{5}\sqrt{5}$ E) $\dfrac{R}{5}\sqrt{10}$

33.- Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ATB.



A) 0,35 B) 0,42 C) 0,55

D) 0,75 E) 0,8

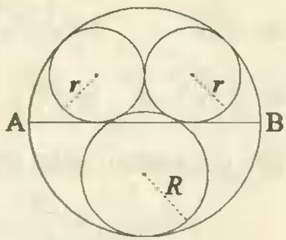
34.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la altura $\overline{BH}$, luego se trazan $\overline{HM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HN} \perp \overline{BC}$. Si $AM = a$, $AC = b$ y $NC = c$. hallar BH.

A) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ D) $\sqrt{2b^2-a^2-c^2}$

B) $\sqrt[3]{abc}$ E) $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$

C) $\sqrt{b^2-a^2-c^2}$

35.- Del gráfico adjunto calcular R, si AB = 8.



A) $\frac{4}{7}(2\sqrt{2}+1)$

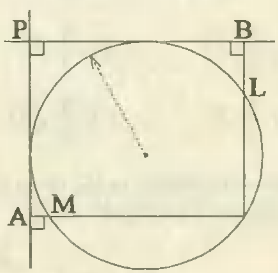
B) $\frac{2}{7}(\sqrt{2}+2)$

C) $\frac{4}{7}(2\sqrt{2}-1)$

D) $\frac{8}{7}(\sqrt{2}+1)$

E) $\frac{3}{7}(2\sqrt{2}+1)$

36.- En la figura ; AM = 1 y BL = 2 . Hallar : R



A) 3

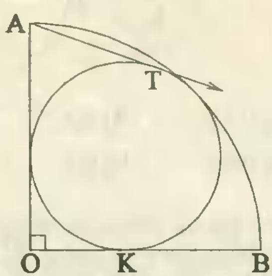
B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

37.- Hallar la longitud de la tangente $\overline{AT}$, si OK = 2



A) $2\sqrt{2}$

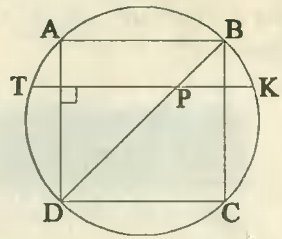
B) 4

C) 2

D) $2\sqrt{3}$

E) 3

38.- Calcular el lado del cuadrado ABCD. Si TP = a y PK = b.

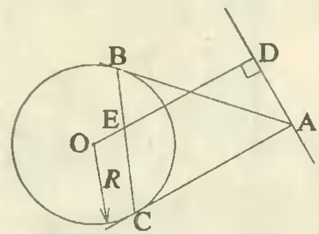


A) $\sqrt{ab}$ D) $\sqrt{a^2+2b^2}$

B) $\sqrt[3]{a^2b}$ E) $\sqrt{a^2-b^2}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$

39.- En la figura, OD = 16 y OE = 4. Hallar R.



A) $6\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) 8 D) $2\sqrt{5}$ E) 4

40.- Interiormente a un hexágono regular ABCDEF se ubica el punto P de modo que AP = a , PC = b y ∡ APC ≅ ∡ AFD. Calcular el menor valor de EF.

A) $\sqrt{ab}$ D) $\frac{ab}{a+b}$

B) $\frac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$

CAP. 14

relaciones métricas en triángulos oblicuángulos

14.1 TEOREMAS DE EUCLIDES

TEOREMA 1.

Si $\alpha < 90$, se cumple que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm \qquad \dots (14.1)$$

Donde : a es el lado opuesto al ángulo agudo

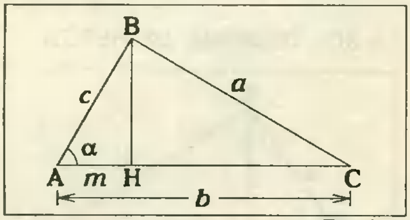


Fig. 14.1

TEOREMA 2.

Si $\theta > 90$, se cumple que :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm \qquad \dots (14.2)$$

Donde : a es el lado opuesto al ángulo obtuso

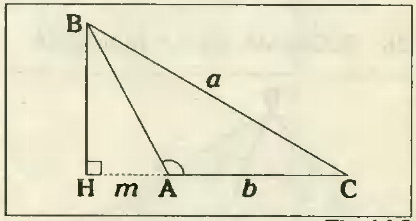


Fig. 14.2

OBSERVACIÓN :

De la *Fig.* 14.1 y en el triángulo AHB, se tiene que $m = c\cos\alpha$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \dots (14.3)$$

La cual es la llamada ley de cosenos; queda para el lector obtener también la ley de cosenos a partir de la *Fig.* 14.1b.

14.2 RECONOCIMIENTO DE LA NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

Si en el Δ ABC de la *Fig.* 14.3 , se verifica que : $a > b > c$, entonces , será posible identificar el tipo de triángulo a partir de sus lados, si :

a) $a^2 < b^2 + c^2$, el Δ ABC es Acutángulo

b) $a^2 = b^2 + c^2$, el Δ ABC es Rectángulo

c) $a^2 > b^2 + c^2$, el Δ ABC es Obtusángulo

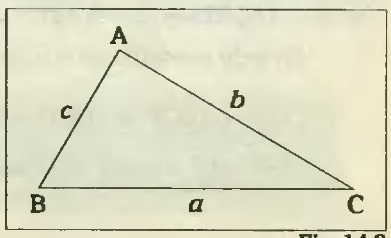


Fig. 14.3

14.3 TEOREMAS TRASCENDENTES

14.3A TEOREMA DE STEWARD

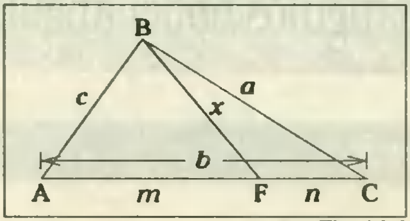


Fig. 14.4

Si $\overline{BF}$ es una Ceviana interior.

$$\Rightarrow \quad c^2 n + a^2 m = x^2 b + bmn \quad \text{... (14.4)}$$

NOTA : Si $a = c \Rightarrow a^2 = x^2 + mn$

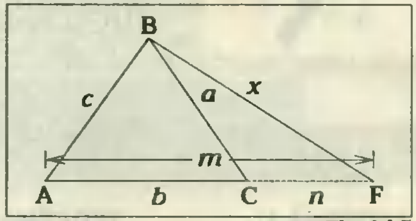


Fig. 14.5

Si $\overline{BF}$ es una Ceviana exterior

$$\Rightarrow \quad a^2 m - c^2 n = x^2 b - bmn \quad \text{... (14.5)}$$

NOTA : Si $a = c \Rightarrow a^2 = x^2 - mn$

14.3B TEOREMA DE LA MEDIANA

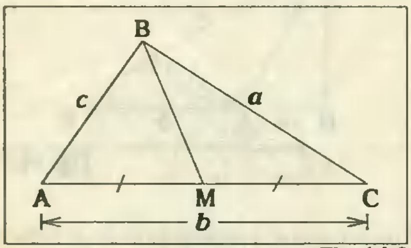


Fig. 14.6

Si $\overline{BM}$ es una Mediana

$$\Rightarrow \quad c^2 + a^2 = 2\,(BM)^2 + \frac{1}{2}\,b^2 \quad \text{... (14.6)}$$

14.3C TEOREMA DE HERÓN

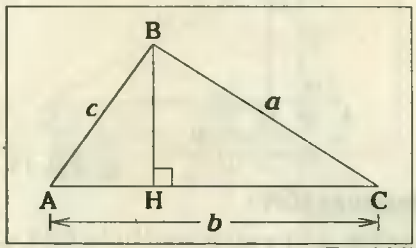


Fig. 14.7

Si $\overline{BH}$ es una Altura

$$\Rightarrow \quad BH = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{... (14.7)}$$

Donde : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

14.3D TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero se cumple :

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2 \quad \text{... (14.8)}$$

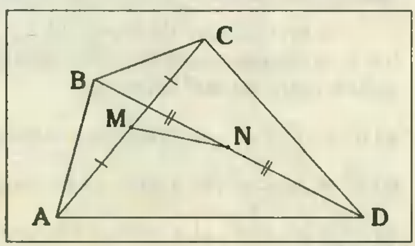


Fig. 14.8

14.3E TEOREMA DE ARQUÍMEDES

Si en el cuadrilátero ABCD, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, se verifica que :

$$(AB)^2 + (CD)^2 = (BC)^2 + (AD)^2 \quad \text{... (14.9)}$$

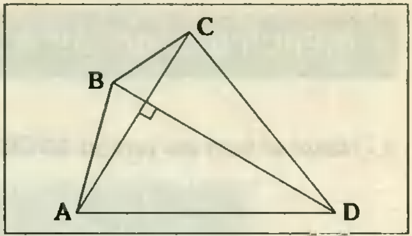


Fig. 14.9

14.4 TEOREMAS COMPLEMENTARIOS

TEOREMA 1. (TEOREMA DE PAPPUS)

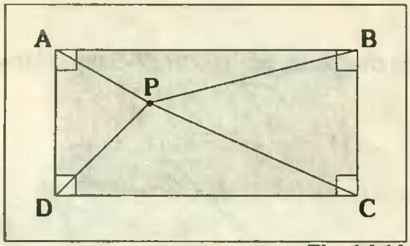


Fig. 14.10

Si "P" es un punto interior del rectángulo (cuadrado) ABCD, entonces :

$$(PA)^2 + (PC)^2 = (PB)^2 + (PD)^2 \quad \text{... (14.10)}$$

TEOREMA 2.

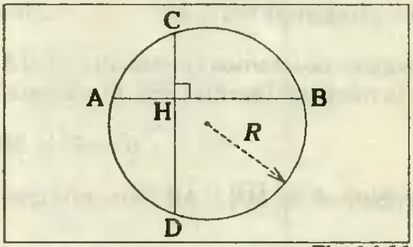


Fig. 14.11

$$AH^2 + HC^2 + HB^2 + HD^2 = 4R^2 \quad \text{... (14.11)}$$

TEOREMA 3.

En todo cuadrilátero inscriptible , se verifica que :

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = 8R^2 \quad \text{... (14.12)}$$

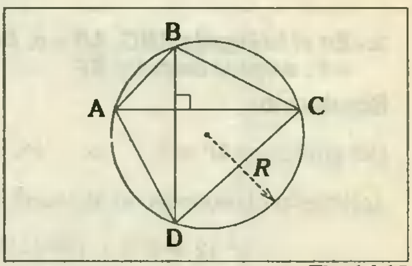
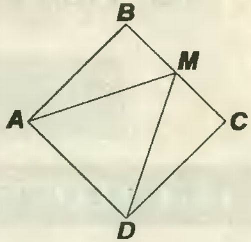


Fig. 14.12

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar el lado del rombo ABCD, si AM = 6, DM = 8 y BM = MC.



Resolución.-

Sea " l " el lado del rombo $\Rightarrow$ BM = MC = $l/2$

Ahora trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ $\Rightarrow$ AN = ND = $l/2$

Entonces nos damos cuenta que en el Δ AMD, $\overline{MN}$ es mediana, por tanto aplicando el teorema de la mediana (item 14.3B), tendremos :

$$6^2 + 8^2 = 2MN^2 + \frac{1}{2}l^2 \quad ... (1)$$

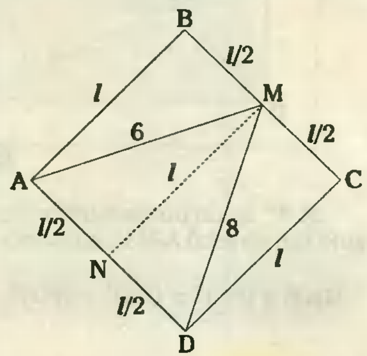
También al ser $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, tenemos que : AB = MN = l

Reemplazando en (1) : $36 + 64 = 2l^2 + \dfrac{l^2}{2}$

Donde : $100 = \dfrac{5l^2}{2}$

Ahora : $l^2 = \dfrac{200}{5} = 40$

$\therefore$ $\boxed{l = 2\sqrt{10}}$



2.- En el triángulo ABC, AB = 8, BC = 10, AC = 12 . Si se toma "P" en $\overline{AC}$ de modo que AP = 9 ; se pide calcular BP.

Resolución.-

Del gráfico, si AP = 9 $\Rightarrow$ PC = 3

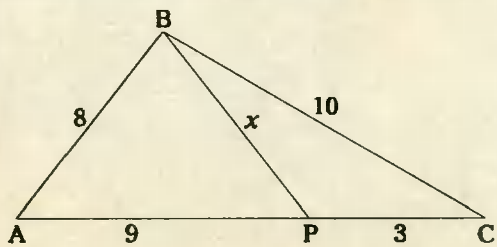
Aplicando el teorema de Steward (item 14.3A):

$$x^2 \cdot 12 = 8^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 9 - 9 \cdot 3 \cdot 12$$

Donde : $12 \cdot x^2 = 192 + 900 - 324$

Entonces : $x^2 = 64$

$\therefore$ $\boxed{x = 8}$



3.- En un paralelogramo ABCD, AB = 6, la diagonal AC = 8 y BD = 12. Hallar AD.

Resolución.-

Como es un paralelogramo, y nos dicen que AB = 6 $\Rightarrow$ CD = 6 . De igual manera BC = x

Aplicando el teorema de Euler (item 14.3D), tenemos :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

En este caso : $MN = 0$

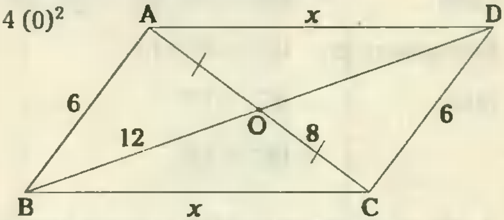
Reemplazando: $6^2 + x^2 + 6^2 + x^2 = 8^2 + 12^2 + 4\,(0)^2$

De donde : $36 + 36 + 2x^2 = 64 + 144$

Luego : $x^2 = \dfrac{208-72}{2}$

Entonces : $x^2 = 68$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 2\sqrt{17}}$



4.- Se tiene un triángulo cuyos lados miden 13, 14 y 15. Hallar la longitud de la altura relativa al lado que mide 14.

Resolución.-

En el gráfico sea "x" la altura relativa al lado que mide 14.

Aplicando el teorema de Herón (item 14.C3) : $p = \dfrac{13+14+15}{2} \Rightarrow p = 21$

Reemplazando en el teorema : $x = \dfrac{2}{4}\sqrt{21(21-13)\,(21-14)\,(21-15)}$

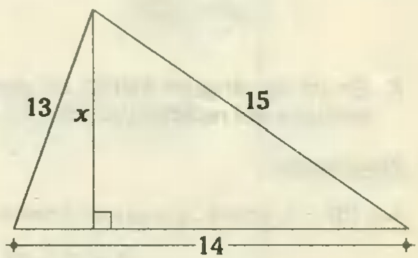
Luego : $x = \dfrac{1}{7}\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}$

Ahora : $x = \dfrac{1}{7}\sqrt{7\cdot 3\cdot 7\cdot 48}$

Donde : $x = \dfrac{1}{7}\sqrt{7^2\cdot 12^2}$

Entonces : $x = \dfrac{1}{7}\cdot 7\cdot 12$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 12}$



5.- En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas BE y CD, de modo que : AC · EC = 88 y AB · BD = 108 . Hallar la longitud de BC.

Resolución.-

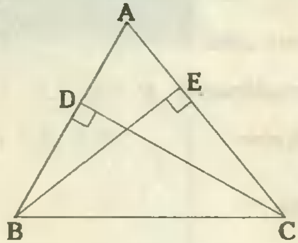
Aplicando el primer teorema de Euclides para el triángulo acutángulo, dado en el item 14.1, tenemos:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,AC \cdot EC \ldots (1)$$

También : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BD \ldots (2)$

Sumando las expresiones (1) y (2) : $AB^2 + AC^2 = 2BC^2 + AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot EC - 2AB \cdot BD$

Donde : $2(AC \cdot EC + AB \cdot BD) = 2BC^2$



Luego : $BC^2 = \underbrace{AC \cdot EC} + \underbrace{AB \cdot BD}$

Reemplazando : $BC^2 = 88 + 108$

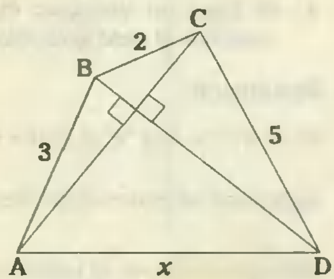
Ahora : $BC^2 = 196$

$\therefore$ $\mathbf{BC = 14}$

6.- En el cuadrilátero ABCD, donde sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan perpendicularmente, se cumple que : AB = 3, BC = 2 , CD = 5 .Calcular la longitud del cuarto lado.

Resolución.-

En la figura sea "x" el valor del cuarto lado :



Nos damos cuenta que en este cuadrilátero podemos aplicar directamente el teorema de Arquímedes dado en el item 14.3E.

$$3^2 + 5^2 = 2^2 + x^2$$

Donde : $x^2 = 9 + 25 - 4$

Ahora : $x^2 = 30$

$\therefore$ $\mathbf{x^2 = \sqrt{30}}$

7.- En un rectángulo ABCD, se ubica interiormente el punto "P" , el cual se une con los vértices del rectángulo . Si : PA = 1, PB = 2, PC = 5 , hallar PD.

Resolución.-

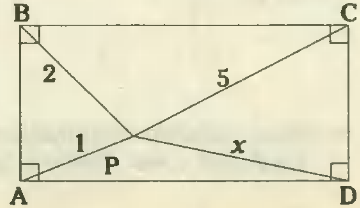
Sea PD = x, ahora aplicando el teorema de Pappus dado en el item 14.4.1, tenemos :

$$1^2 + 5^2 = 2^2 + x^2$$

Donde : $x^2 = 26 - 4$

Entonces : $x^2 = 22$

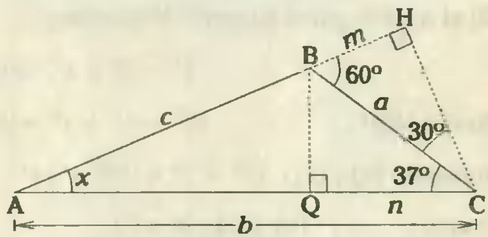
$\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{22}}$



MISCELÁNEA

1.- En un triangulo ABC se cumple que : $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{8}{5}ab$ ***y*** $b^2 = a^2 + c^2 + ac$ ***.Con estos datos se pide calcular la*** $m\measuredangle A$

Resolución.-



Por dato : $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{8}{5}ab$

Puesto que en el Δ ABC : $c^2 = a^2 + b^2 - 2nb$

Igualando : $2nb = \frac{8}{5}ab \Rightarrow \frac{a}{n} = \frac{5}{4}$

Luego la $m\measuredangle C = 37^\circ$

También por dato : $b^2 = a^2 + c^2 + ac$

Puesto que en el Δ ABC : $b^2 = a^2 + c^2 + 2mc$

Igualando : $2mc = ac \Rightarrow a = 2m$

Luego : $m\measuredangle BCH = 30^\circ$

En consecuencia : $x + 37^\circ = 60^\circ$ ($\measuredangle$ exterior)

$\therefore \quad x = 23^\circ$

2.- Desde un punto "P" exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ ***y*** $\overline{PB}$***. En el arco menor*** $\overset{\frown}{AB}$ ***se ubica el punto "T" tal que PT = AT. Calcular la distancia entre los puntos medios de*** $\overline{AT}$ ***y*** $\overline{PB}$ ***, si :*** $AB^2 + TB^2 = 16$.

Resolución.-

Por dato : $y^2 + z^2 = 16 \quad ...(1)$

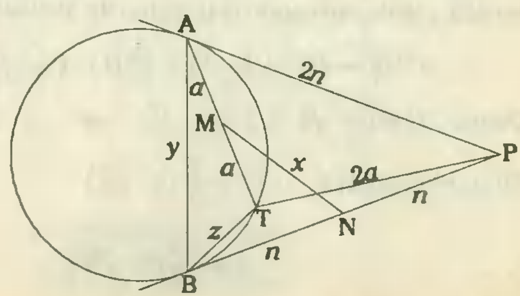
En el cuadrilátero no convexo ABTP , por el teorema de Euler, Simplificando tenemos :

$$y^2 + z^2 + 4a^2 + 4n^2 = 4x^2 + 4a^2 + 4n^2$$

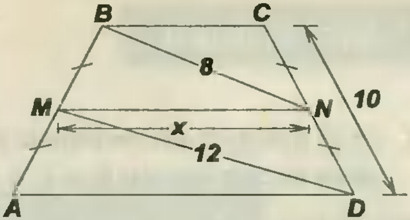
Simplificando : $y^2 + z^2 = 4x^2 \quad ...(2)$

Igualando (1) y (2) : $16 = 4x^2$

$\therefore \quad x = 2$



3.- Si ABCD es un trapecio isósceles , hallar "x"

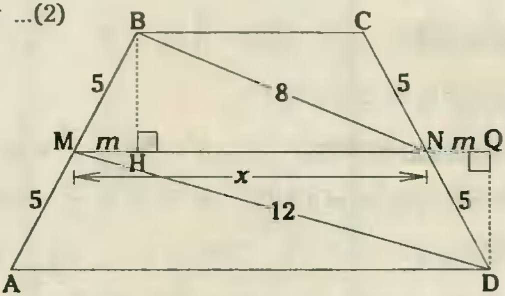


Resolución.-

En el Δ MBN, por el teorema de Euclides :

$$8^2 = 5^2 + x^2 - 2mx \quad ...(1)$$

En el Δ MND : $12^2 = 5^2 + x^2 + 2mx \quad ...(2)$



Sumando (1) y (2) : $12^2 + 8^2 = 2.5^2 + 2x^2$

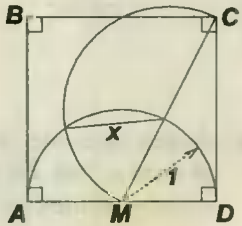
Donde : $144 + 64 - 50 = 2x^2$

Ahora : $158 = 2x^2$

Simplificando : $x^2 = 79$

$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{79}}$

4.- En la figura mostrada calcular "x", si ABCD es un cuadrado. Además se sabe que $\overline{MC}$ → Diámetro .



Resolución.-

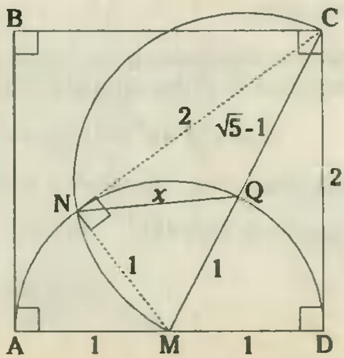
En la figura : MC = CD = 2

Además : $MC = \sqrt{5} \Rightarrow QC = \sqrt{5} - 1$

En el ⊿ MNC, aplicando el teorema de Stewart :

$$x^2\sqrt{5} = (1)^2(\sqrt{5} - 1) + 2^2(1) - (1)(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5})$$

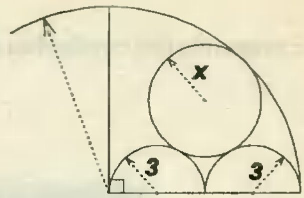
Donde : $x^2\sqrt{5} = \sqrt{5} + 3 - 5 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 2$



En consecuencia : $x^2 = \frac{2}{5}(5 - \sqrt{5})$

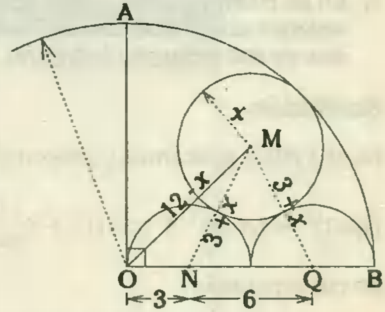
$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{2}{5}(5 - \sqrt{5})}}$

5.- En la figura mostrada se tiene un cuadrante en el que se han instalado dos semicircunferencias de radio 3 y una circunferencia cuyo radio "x", se pide hallar.



Resolución.-

En el triángulo OMQ, aplicamos el Teorema de Stewart :



$$(3+x)^2\,(9) = (12-x)^2\,(6) + (3+x)^2\,(3) - (3)\,(6)\,(9)$$

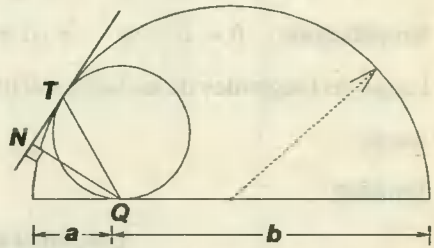
$$81 + 54x + 9x^2 = 864 - 144x + 6x^2 + 27 + 18x + 3x^2 - 162$$

Simplificando :

$$180x = 648$$

$$\therefore \qquad x = 3{,}6$$

6.- En la figura mostrada , se pide encontrar el valor de NQ.

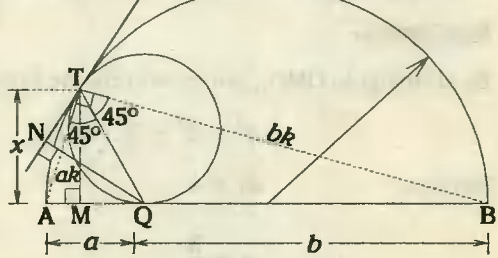


Resolución.-

En la figura : TM = NQ = x ; además $\overline{TQ}$ es bisectriz .

Luego : AT = ak y TB = bk

Por el teorema de Pitágoras :



$$k^2(a^2 + b^2) = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \qquad k^2 = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \qquad \text{... (1)}$$

También : $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \qquad \text{... (2)}$$

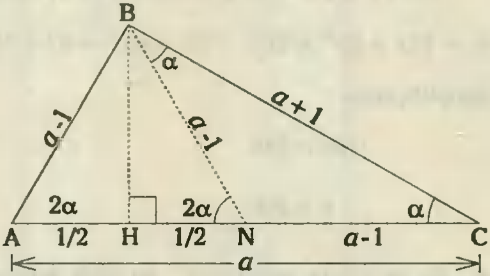
Reemplazando (1) en (2) : $$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{x^2.\,(a^2+b^2)}{(ab)^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros : $\dfrac{ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = x\sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore \qquad x = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

7.- En un triángulo ABC, las longitudes de los lados están representados por tres números enteros consecutivos. Si el ángulo mayor es el doble del menor , calcular las longitudes de los lados del triángulo.

Resolución.-



En el Δ NBC, aplicamos el teorema de Euclides :

$$(a+1)^2 = (a-1)^2 + (a-1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)(a-1)$$

En consecuencia :

$$a^2 + 2a + 1 = 2a^2 - 4a + 2 + a - 1$$

Simplificando : $0 = a^2 - 5a \quad \Rightarrow \quad a = 5$

Luego las longitudes de los lados del triángulo serán : AB = 5 - 1 = 4

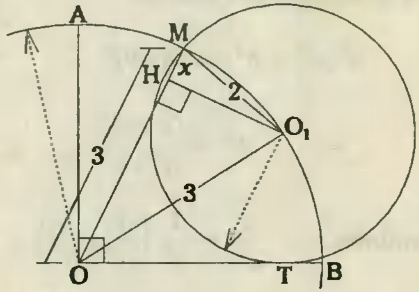
Luego : BC = 5 + 1 = 6

También : AC = 5

$\therefore$ **Los lados serán 4 ; 5 y 6**

8.- En un cuadrante AOB : AO = OB = 3. En el arco AB se ubica el punto O_1 el cual será centro de una circunferencia cuyo radio mide 2, tangente a $\overline{BO}$ en T. Dicha circunferencia intersecta al arco $\widehat{AB}$ en M, luego se traza $\overline{O_1H} \perp \overline{MO}$ ($H \in \overline{MO}$). Hallar MH.

Resolución.-



En el triángulo OMO_1, por el teorema de Euclides :

$$3^2 = 2^2 + 3^2 - 2x(3)$$

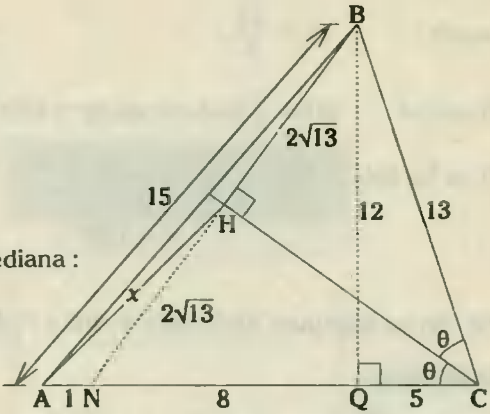
Donde : $6x = 4$

$$\therefore \qquad x = \frac{2}{3}$$

9.- En un triángulo ABC se traza $\overline{BH}$ perpendicular a la bisectriz interior trazada por "C". Hallar AH , si AB = 15 ; BC = 13 y AC = 14

Resolución.-

En el Δ ABC, por el teorema de Herón :



BQ = 12 ⇒ QC = 5

Puesto que : BC = NC = 13 ⇒ NQ = 8

Luego : AN = 14 - 13 ⇒ AN = 1

En el ⊿ NQB : BN = $4\sqrt{13}$

Finalmente en el Δ ABN, por el Teorema de la Mediana :

$$15^2 + 1^2 = 2x^2 + \frac{(4\sqrt{13})^2}{2}$$

En consecuencia : $226 = 2x^2 + 104$

Por consiguiente : $2x^2 = 122 \Rightarrow x^2 = 61$

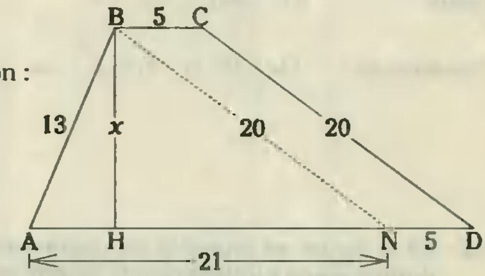
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{61}}$$

10.- En un trapecio ABCD, las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 5 y 26 respectivamente, además AB = 13 y CD = 20. Hallar la altura del trapecio.

Resolución.-

Trazamos $\overline{BN}$ // $\overline{CD}$, entonces : BN = CD = 20

En el triángulo ABN : AN = 21



Luego en dicho triángulo por el Teorema de Herón :

$$x = \frac{2}{21}\sqrt{27(27-20)(27-21)(27-13)}$$

Ahora : $x = \frac{2}{21}\sqrt{27 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 14}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 12}$

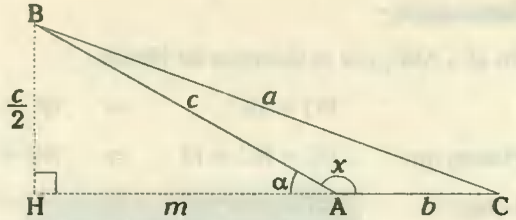
11.- En un triángulo ABC se sabe que: $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}\,bc$. Se pide calcular la m∡A , si dicho ángulo es obtuso.

Resolución.-

Aplicando el teorema de Euclides : $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \;...\;(1)$

Por dato tenemos : $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}\,bc \;...\;(2)$

De (1) y (2) : $2\,bm = \sqrt{3}\ bc$



Donde : $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,c$

Entonces : $BH = \dfrac{c}{2}$ (notable de 30° y 60°)

En el ⊿ BHA notable : $\alpha = 30°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 150°}$

12.- En un triángulo ABC, AB = 4 , BC = 7 . Hallar AC , si : m ∡ BAC = 2 m∡ BCA .

__Resolución.-__

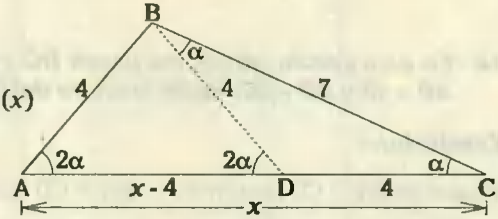
Trazamos $\overline{BD}$ de modo que la m ∡ DBC = α, entonces el Δ ABD es isósceles :

$$AB = BD = DC = 4$$

Luego : $AD = x - 4$

En el Δ ABC, aplicando el teorema de Stewart :

$$4^2 x = 4^2 \cdot 4 + 7^2 (x - 4) - 4\,(x - 4)\,(x)$$



Efectuando : $16x = 64 + 49x - 196 - 4x^2 + 16x$

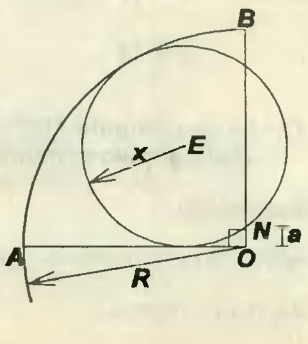
Donde : $4x^2 - 49x + 132 = 0$

Resolviendo : $(4x - 33)\,(x - 4) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{33}{4} \wedge x = 4$ (No puede ser)

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \dfrac{33}{4}}$

13.- En la figura se muestra un cuadrante tangente en dos puntos a una circunferencia según como se indica . Hallar x, sabiendo además que:

R = 9m y a = 1m

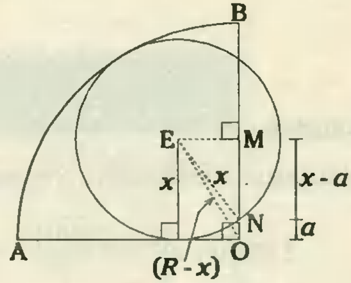


Resolución.-

Aplicando el teorema de Euclides en el Δ OEN obtusángulo : $(R-x)^2 = a^2 + x^2 + 2(x-a)(a)$

Reduciendo : $R^2 - 2Rx + x^2 = a^2 + x^2 + 2xa - 2a^2$

$\Rightarrow \quad R^2 + a^2 = 2xa + 2Rx$



Entonces : $x = \dfrac{a^2 + R^2}{2(a+R)}$

Ahora : $x = \dfrac{1^2 + 9^2}{2(1+9)}$

$\therefore \quad$ $\mathbf{x = 4,1}$

14.- Los lados de un triángulo ABC miden AB = 25 ; BC = 30 y AC = 35 . La circunferencia inscrita determina con BC el punto de tangencia "M". Si AM intersecta a la circunferencia en "P"; hallar BP.

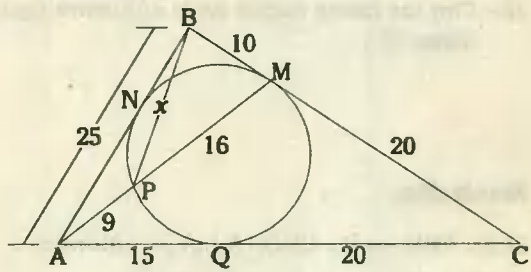
Resolución.-

Sabemos que : MC = QC = 45 - 25

$\Rightarrow$ MC = QC = 20

Entonces : AQ = 15 y BM = 10

Aplicando el teorema de Steward :



$AM^2 \cdot 30 = 25^2 \cdot 20 + 35^2 \cdot 10 - (10)(20)(30)$

Simplificando : AM = 25

En la circunferencia por teorema de la tangente : $15^2 = 25 \cdot AP$

De donde : AP = 9

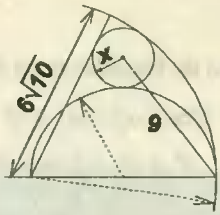
Entonces : PM = 16

Finalmente en el Δ ABM, aplicamos el teorema de Stewart :

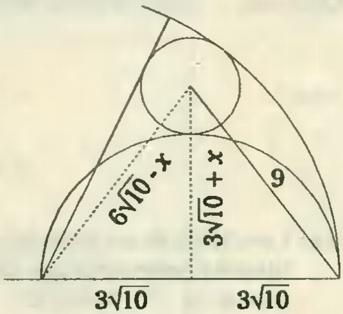
$$x^2 \cdot 25 = 25^2 \cdot 16 + 10^2 \cdot 9 - (9)(16)(25)$$

$\therefore \quad$ $\mathbf{x = 2\sqrt{73}}$

15.- En el gráfico mostrado calcular "x"



Resolución.-



En el triángulo sombreado, por el teorema de la mediana :

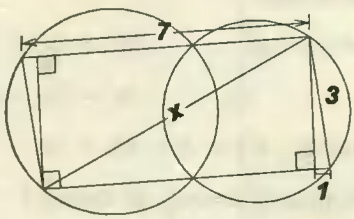
$$2\,(3\sqrt{10}+x)^2+\frac{(6\sqrt{10})^2}{2}=(6\sqrt{10}-x)^2+9^2$$

Donde : $180+12\sqrt{10}\,x+2x^2+90=360-12\sqrt{10}\,x+x^2+81$

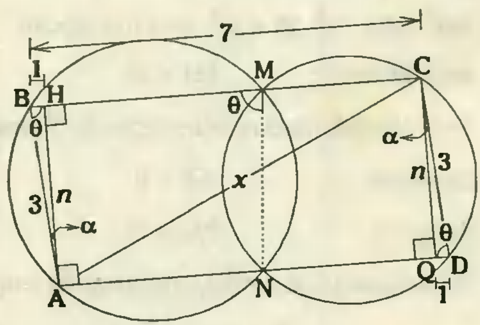
Simplificando : $x^2+24\sqrt{10}\,x-171=0$

Resolviendo : $\boldsymbol{x=2{,}215}$

16.- Con los datos dados en la siguiente figura, hallar "x".



Resolución.-



El ⊾ ABH ≡ ⊾ CDQ (A.L.A.) , entonces :

AB = CD = 3 y BH = QD = 1

En el Δ ABC por el teorema de Euclides :

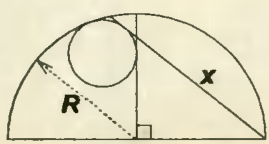
$$x^2=3^2+7^2-2\,(1)\,(7)$$

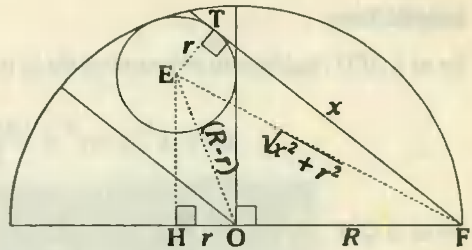
Efectuando : $x^2=9+49-14$

En consecuencia : $x^2=44$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=2\sqrt{11}}$

17.- En la figura mostrada se sabe que: R = $\sqrt{2}$ m . Se pide calcular el valor de "x".





Resolución.-

En el ⊾ ETF : $EF = \sqrt{x^2 + r^2}$

En el Δ OEF; aplicamos el teorema de Euclides :

$$(\sqrt{x^2+r^2})^2 = (R-r)^2 + R^2 + 2rR$$

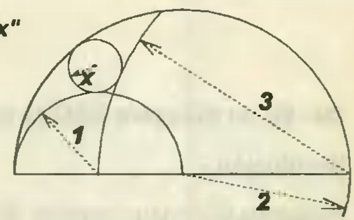
Resolviendo : $x^2 + r^2 = R^2 - 2rR + r^2 + R^2 + 2rR$

Donde : $x^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad x = R\sqrt{2}$

Puesto que : $R = \sqrt{2}\,m \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2m}$$

18.- Con los datos dados en la figura mostrada, calcular "x"



Resolución.-

En el triángulo sombreado, aplicando el teorema de Steward :

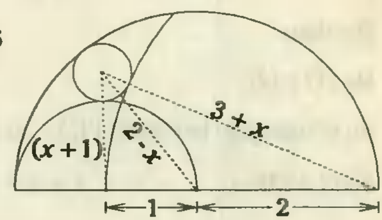
$$(2-x)^2 \cdot (3) = (3+x)^2 \cdot (1) + (x+1)^2 \cdot (2) - (1)\,(2)\,(3)$$

Donde : $12 - 12x + 3x^2 = 9 + 6x + x^2 + 2x^2 + 4x + 2 - 6$

Simplificando : $12 - 5 = 22x$

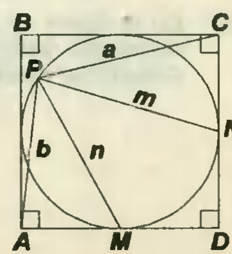
Ahora : $7 = 22x$

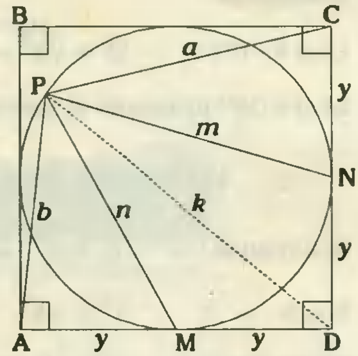
$$\therefore \quad x = \frac{7}{22}$$



19.- A partir del cuadrado dado, se pide hallar $m^2 - n^2$, si:

$a^2 - b^2 = 12$





Resolución.-

En el Δ APD , aplicando el teorema de la mediana :

$$b^2 + k^2 = 2n^2 + \frac{(2y)^2}{2} \quad \text{... (1)}$$

En el Δ OPC : $$k^2 + a^2 = 2m^2 + \frac{(2y)^2}{2} \quad \text{... (2)}$$

Restando (2) - (1) : $a^2 - b^2 = 2\,(m^2 - n^2)$

Donde : $$m^2 - n^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

Puesto que : $a^2 - b^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad m^2 - n^2 = \frac{12}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{m^2 - n^2 = 6}$$

20.- En un triángulo ABC se cumple que: $a^2 = c^2 + bc$ y $m\measuredangle B = 54º$. Calcular la $m\measuredangle C$.

Resolución.-

Trazamos la ceviana exterior $\overline{BP}$ tal que : BP = BC = a

Luego en el Δ PBC, aplicando el teorema de Steward :

$$a^2 = c^2 + b.\,AP \quad \text{... (1)}$$

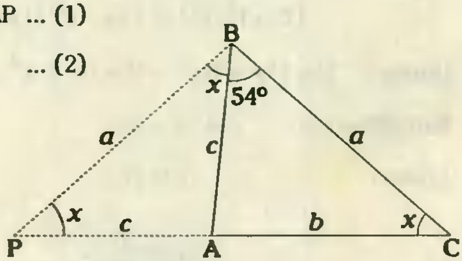
Por dato : $$a^2 = c^2 + bc \quad \text{... (2)}$$

De (1) y (2): AP = c

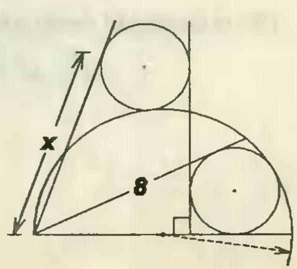
En el triángulo isósceles PBA : $m\measuredangle$ PBA = x

En el Δ PBC : $x + x + 54 + x = 180$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 42º}$$

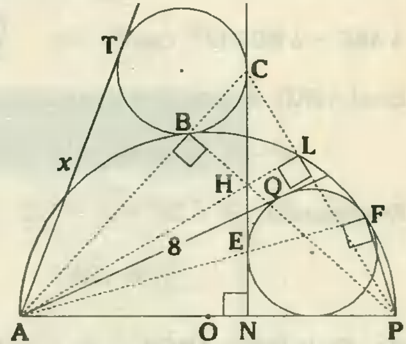


21.- En la figura se muestran dos circunferencias pequeñas del mismo radio en contacto con una semicircunferencia. Calcular el valor de "x".



Resolución.-

Sabemos por teoría , que los puntos A, B, C y A, E, F ; son colineales .



En el Δ ACP; aplicamos el teorema de la Secante :

$$AC \cdot AB = AP \cdot AN$$

Puesto que : $AC \cdot AB = x^2$ ... (1)

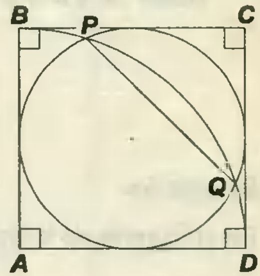
También : $AQ^2 = AP \cdot AN$ ... (2)

De (1) y (2) : $x^2 = AQ^2$

Donde : $x = AQ$

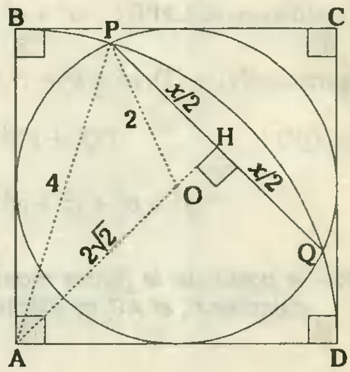
$\therefore \quad \mathbf{x = 8}$

22.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado 4 . En él se ha inscrito una circunferencia y un cuadrante . Se pide hallar la medida de PQ



Resolución.-

La línea de centros $\overline{AO}$, es mediatriz de la cuerda común $\overline{PQ}$



Luego : $PH = HQ = \dfrac{x}{2}$

En el Δ POA, por Herón :

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\sqrt{(3+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}$$

Resolviendo : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{14}}$

23.- En un trapezoide ABCD se sabe que : AB = 2 , BC = 12 , CD = 9 , BD = 6 y además

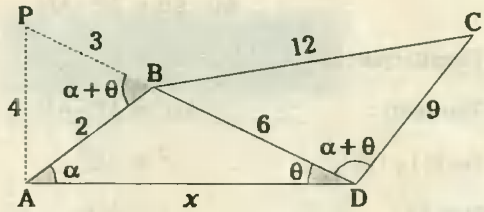
m ∡ BDC = m ∡ BAD + m ∡ ADB . Calcular AD.

Resolución.-

Prolongamos $\overline{DB}$ hasta P de modo que BP = 3 , con lo cual se tiene :

Δ ABP ~ Δ BDC (2do caso) $\Rightarrow$ $\dfrac{AP}{12} = \dfrac{3}{9}$ $\Rightarrow$ AP = 4

En el Δ PAD, aplicando el teorema de Steward :



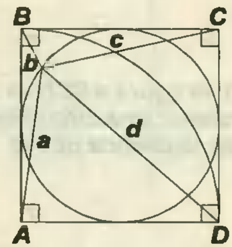
$$4^2 \cdot 6 + x^2 \cdot 3 = 2^2\,(9) + (9)\,(3)\,(6)$$

Resolviendo : $96 + 3x^2 = 36 + 162$

$\therefore$ $\qquad x = \sqrt{34}$

24.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado "l" .

Hallar : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$



Resolución.-

Por el teorema de la Mediana en Δ BPC :

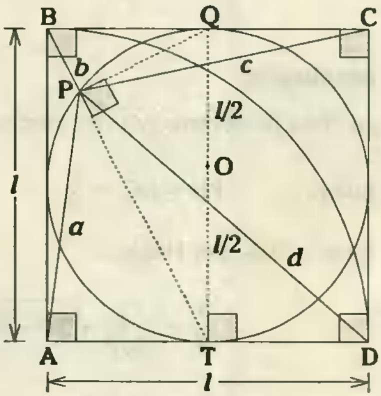
$$b^2 + c^2 = 2\,(PQ)^2 + \frac{l^2}{2} \quad \text{... (1)}$$

También en el Δ APD : $\quad a^2 + d^2 = 2\,(PT)^2 + \dfrac{l^2}{2} \quad$ ... (2)

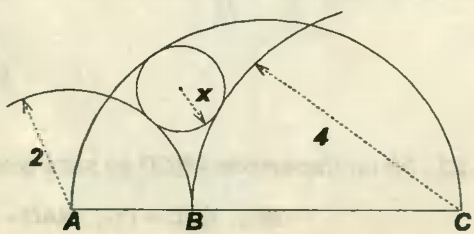
Sumando (1) + (2): $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\,(PQ^2 + PT^2) + l^2$

$\triangle$ QPT : $\qquad PQ^2 + PT^2 = l^2$ (Pitágoras)

$\therefore$ $\qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3l^2$

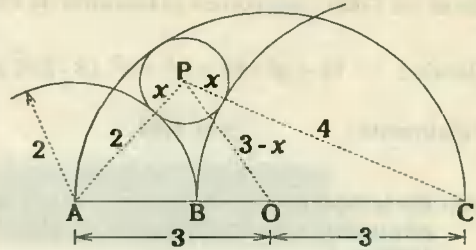


25.- A partir de la figura mostrada , se pide calcular x , si AC es diámetro .



Resolución.-

Aplicando el teorema de la mediana en el Δ APC :



$$(2+x)^2 + (4+x)^2 = 2\,(3-x)^2 + \frac{6^2}{2}$$

Donde :

$$4 + 4x + x^2 + 16 + 8x + x^2 = 18 + 2x^2 - 12x + 18$$

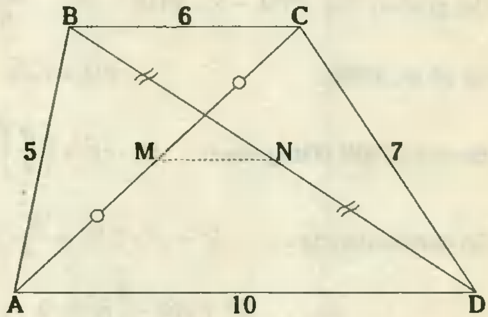
Simplificando : $\quad 24x = 16$

$$\therefore \qquad x = \frac{2}{3}$$

26.- En un trapecio ABCD : AB = 5 , BC = 6 , CD = 7 y AD = 10. Hallar $AC^2 + BD^2$, si $\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$.

Resolución.-

Aplicando el teorema de Euler :



$$5^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

Puesto que : $\quad MN = \dfrac{10-6}{2} = 2$

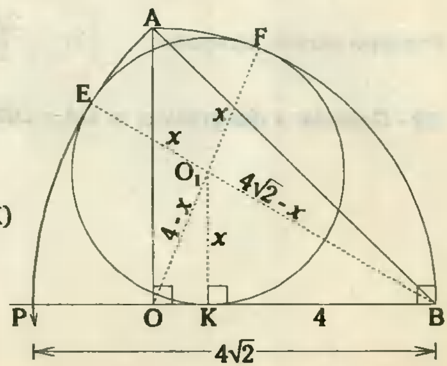
$$\Rightarrow \qquad 25 + 36 + 49 + 100 = AC^2 + BD^2 + 16$$

$$\therefore \qquad \mathbf{AC^2 + BD^2 = 194}$$

27.- En un cuadrante AOB , AO = OB = 4. Con centro en B y radio AB se traza un arco que intersecta a la prolongación de BO en "P" . Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo PAB .

Resolución.-

Aplicando el 1[er] teorema de Euclides en el Δ OO_1B :



$$(4\sqrt{2} - x)^2 = (4-x)^2 + 4^2 - 2\,(4)\,(OK)$$

En consecuencia :

$$32 + x^2 - 8\sqrt{2}x = 16 + x^2 - 8x + 16 - 8\,(OK)$$

Por consiguiente : $\quad 8\,(OK) = 8x\,(\sqrt{2} - 1)$

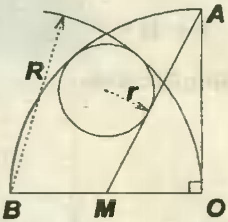
$$\Rightarrow \qquad OK = x\,(\sqrt{2} - 1)$$

En el ⊿ OKO, ; aplicamos el teorema de Pitágoras : $(4-x)^2 = x^2 + \left[x(\sqrt{2}-1)\right]^2$

Donde : $16 + x^2 - 8x = x^2 + x^2\ (3-2\sqrt{2}) \Rightarrow x^2\ (3-2\sqrt{2}) + 8x - 16 = 0$

Finalmente : $\boldsymbol{x = 1{,}92}$

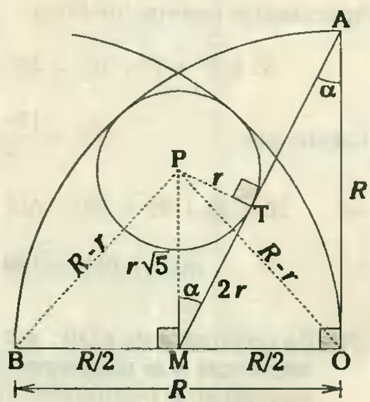
28.- En la figura se muestran dos cuadrantes de igual radio y una circunferencia en contacto con ellos: OA = OB = R y BM = MO. Hallar : r.



<u>Resolución</u>.-

Del gráfico : ⊿ PTM ~ ⊿ MOA $\Rightarrow \dfrac{\text{MT}}{R} = \dfrac{r}{\frac{R}{2}} \Rightarrow \text{MT} = 2r$

En el ⊿ PTM : $\text{PM} = r\sqrt{5}$



En el ⊿ PMB (Pitágoras): $(R-r)^2 = \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + (r\sqrt{5})^2$

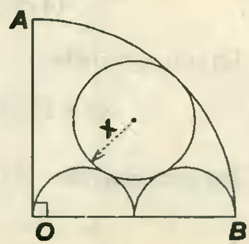
En consecuencia : $R^2 + r^2 - 2Rr = \dfrac{R^2}{4} + 5r^2$

$\Rightarrow \quad 4r^2 + 2Rr - \dfrac{3}{4}R^2 = 0$

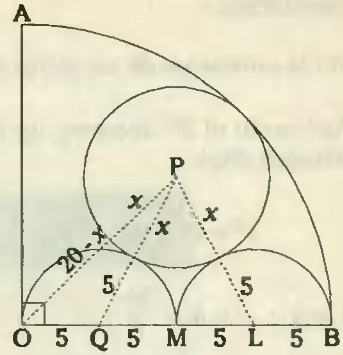
$$\begin{array}{ccc} 2r & \searrow\!\!\!\nearrow & \dfrac{3R}{2} \\ 2r & \nearrow\!\!\!\searrow & \dfrac{R}{2} \end{array}$$

Por aspa simple, tenemos : $\left(2r + \dfrac{3R}{2}\right)\left(2r - \dfrac{R}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{r = \dfrac{R}{4}}$

29.- Calcular x del gráfico; si OA = OB = 20 y OM = MB



Resolución.-



Aplicando el teorema de Steward, en el Δ OPL :

$$(20-x)^2 \cdot 10 + (x+5)^2 \cdot 5 = (x+5)^2 \cdot 15 + 15 \cdot 5 \cdot 10$$

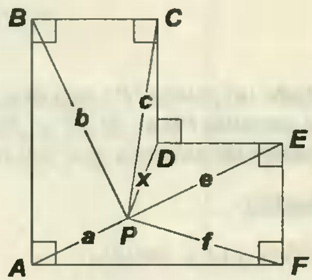
Luego : $(20-x)^2 \cdot 10 = (x+5)^2 \cdot 10 + 75 \cdot 10$

Simplificando : $400 - 40x + x^2 = x^2 + 10x + 25 + 75$

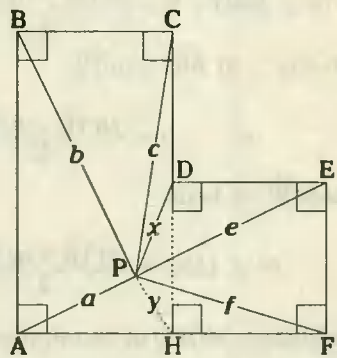
Ahora : $300 = 50x$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 6}$

30.- Según el gráfico; calcular x.



Resolución.-



Aplicando el teorema de Pappus en :

▭ ABCH : $a^2 + c^2 = b^2 + y^2 \ldots (1)$

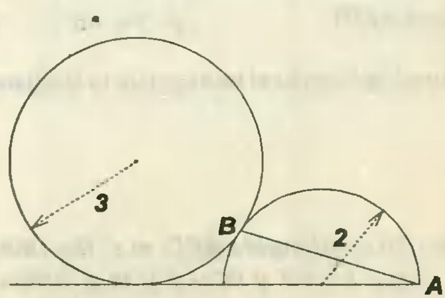
También en el :

□ DEFH : $x^2 + f^2 = e^2 + y^2 \ldots (2)$

Restando : (2) - (1) : $x^2 + f^2 - a^2 - c^2 = e^2 - b^2$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + c^2 + e^2 - b^2 - f^2}}$$

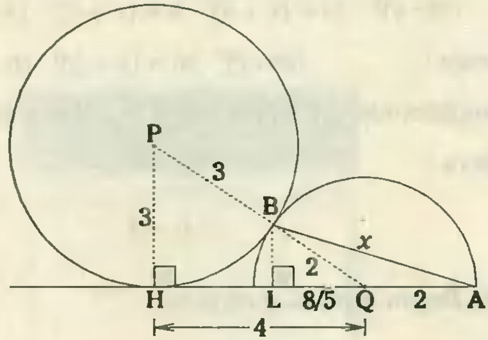
31.- En la figura se muestra una circunferencia de radio 3, tangente a una semicircunferencia de radio 2 . Se pide hallar AB.



Resolución.-

Por la semejanza de los triángulos PHQ y BLQ se tiene : $\dfrac{LQ}{4} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow LQ = \dfrac{8}{5}$

Aplicando el 2do teorema de Euclides en el triángulo BQA :



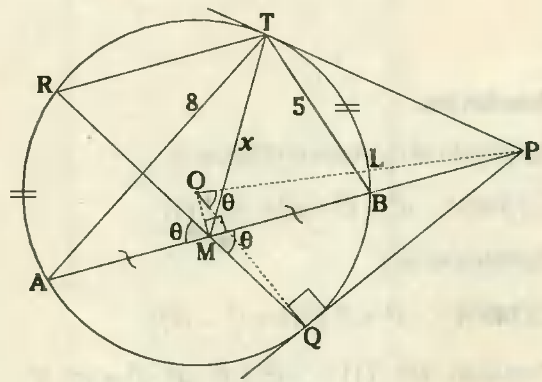
$$x^2 = 2^2 + 2^2 + 2\,(2)\left(\frac{8}{5}\right)$$

Luego : $x^2 = 8 + \dfrac{32}{5} \Rightarrow x^2 = \dfrac{72}{5}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{6}{5}\sqrt{10}}$$

32.- Dado un punto "P" exterior a una circunferencia ,se trazan las tangentes $\overline{PT}$ y $\overline{PQ}$ y la secante PBA . Si $\overline{RT} \parallel \overline{AB}$ ($R \in \overset{\frown}{AT}$), $M = \overline{RQ} \cap \overline{AB}$, hallar MT , si AT = 8 , TB = 5 , sabiendo además que AB toma su mínimo valor entero.

Resolución.-



Del gráfico, por ∡ interior :

$$m\measuredangle BMQ = \theta = \frac{m\overset{\frown}{AR} + m\overset{\frown}{BQ}}{2}$$

Puesto que : $m\overset{\frown}{AR} = m\overset{\frown}{TB}$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{m\overset{\frown}{TB} + m\overset{\frown}{BQ}}{2}$$

Al trazar $\overline{OP}$, se tiene :

$$m\measuredangle LOQ = \frac{m\overset{\frown}{TB} + m\overset{\frown}{BQ}}{2} \Rightarrow m\measuredangle LOQ = \theta$$

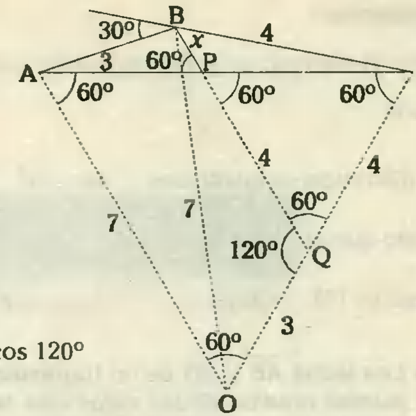
El cuadrilátero MOPQ es inscriptible $\Rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{MP}$ y AM = MB

En el Δ ATB : $8 - 5 < AB$ $\Rightarrow$ AB (*mínimo*) = 4

Luego aplicando el teorema de la Mediana : $8^2 + 5^2 = 2x^2 + \dfrac{1}{2}\,4^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{9}{2}\sqrt{2}}$$

33.- En un triángulo ABC: m∡ B = 150º. A continuación se traza la ceviana $\overline{BP}$, de modo que AP = 3 y PC = 4 y m∡ APB = 60º. Calcular BP.



Resolución.-

Sea "O" el circuncentro del Δ ABC

Luego el triángulo AOC es equilátero , donde :

$$OA = OC = OB = 7$$

Al prolongar $\overline{BP}$, intersectamos a $\overline{OC}$ en Q, luego :

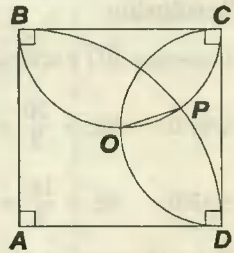
$$PC = PQ = CQ = 4$$

En el Δ BQO, por Ley de Cosenos :

$$(7)^2 = (4 + x)^2 + 3^2 - 2\,(x + 4)\,(3)\cos 120°$$

Resolviendo : $\boldsymbol{x = 1}$

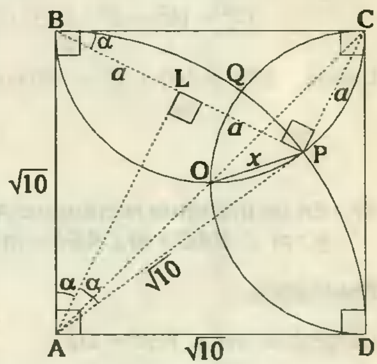
34.- La figura ABCD es un cuadrado en el que se han instalado dos semicircunferencias del mismo radio. Se pide calcular PO, si $AB = \sqrt{10}$



Resolución.-

En el triángulo isósceles BAP , $\overline{AL}$ es altura referida a la base

Luego : $BL = LP = a$



$\triangle$ BPC $\cong$ $\triangle$ BLA (ALA) $\Rightarrow$ $PC = BL = a$

$\triangle$ BPC : $a^2 + (2a)^2 = (\sqrt{10}\,)^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

En el Δ APC : $OP = x$, es mediana .

Luego : $PA^2 + PC^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}AC^2$ (teorema de la Mediana)

Donde : $(\sqrt{10}\,)^2 + (\sqrt{2})^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{20}\,)^2$

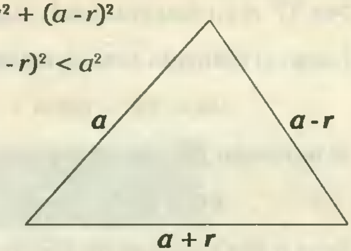
Ahora : $12 = 2x^2 + 10$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 1}$

35.- En un triángulo acutángulo sus lados forman una progresión aritmética de razón r. Hallar el máximo valor entero de r, si el perímetro del triángulo es 144.

Resolución.-

Como el triángulo es acutángulo debe cumplirse : $(a + r)^2 < a^2 + (a - r)^2$



Donde : $(a + r)^2 - (a - r)^2 < a^2$

Por diferencia de cuadrados : $4ar < a^2 \Rightarrow r < \dfrac{a}{4}$ ...(*)

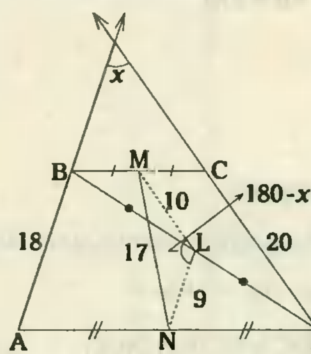
Puesto que el perímetro $= 3a = 144 \Rightarrow a = 48$

Luego en (*): $r < 12 \quad \therefore \quad$ ***r (máx) = 11***

36.- Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapezoide ABCD miden 18 y 20 y el segmento que une los puntos medios de los otros dos lados mide 17. Calcular la medida del ángulo que forman las rectas que contienen a los lados AB y CD

Resolución.-

Trazamos $\overline{BD}$ y aplicamos el teorema de la base media en



Δ BCD : $ML = \dfrac{20}{2} = 10$ y $\overline{ML} \,//\, \overline{CD}$

Δ ABD : $NL = \dfrac{18}{2} = 9$ y $\overline{NL} \,//\, \overline{AB}$

Del gráfico : $m \measuredangle MLN = 180 - x$

En el Δ MLN, empleamos la ley de Cosenos

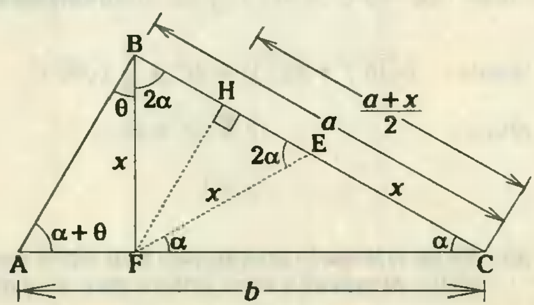
$$17^2 = 10^2 + 9^2 - 2\,(9)\,(10)\cos(180 - x)$$

Donde : $289 = 100 + 81 + 180\cos x \Rightarrow \cos x = \dfrac{3}{5}$

$$\therefore \quad \boxed{x = 53^\circ}$$

37.- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la ceviana $\overline{BF}$. Si BC = a , AC = b y : m $\measuredangle$ BAC = m$\measuredangle$ ABF + m $\measuredangle$ ACB. Hallar BF.

Resolución.-



Del gráfico : $m \measuredangle FBC = 2\alpha$

Trazamos $\overline{FE}$ (E en $\overline{BC}$) de modo que :

$m \measuredangle EFC = \alpha \Rightarrow BF = FE = EC = x$

En el Δ BFE, aplicando el teorema de Steward :

$(FC)^2 = x^2 + ax$ ... (1)

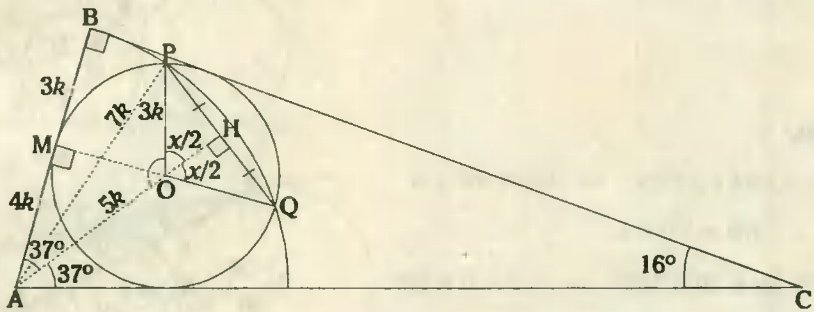
⊿ FHC ~ ⊿ ABC : $\dfrac{FC}{b} = \dfrac{\frac{a+x}{2}}{a} \Rightarrow FC = \dfrac{b(a+x)}{2a}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $\dfrac{b^2(a+x)^2}{4a^2} = x(a+x) \Rightarrow \dfrac{b^2(a+x)}{4a^2} = x$

$$\therefore \quad x = \frac{ab^2}{4a^2 - b^2}$$

38.- El ∡ C de un triángulo rectángulo ABC mide 16º, ($\hat{B}$ = 90º). Con centro en A y radio $\overline{AB}$ se traza un arco que intersecta a la circunferencia inscrita de centro O en los puntos P y Q. Hallar la m ∡ POQ.

Resolución.-



Trazamos la bisectriz $\overline{AO}$, cuya prolongación intersecta en H a $\overline{PQ}$

Luego : m ∡ MAO = 37º y m ∡ POH = $\dfrac{x}{2}$

En el ⊿ AMO de 37º y 53º , sea : OM = OP = 3k ⇒ AM = 4k y AO = 5k, además AP = 7k

En el Δ AOP, aplicando el segundo teorema de Euclides :

$(7k)^2 = (5k)^2 + (3k)^2 - 2\,(5k)\,.\,OH \quad \Rightarrow \quad OH = \dfrac{3k}{2}$

En el ⊿ OHP : $\dfrac{x}{2} = 60º \qquad \therefore \qquad$ **x = 120º**

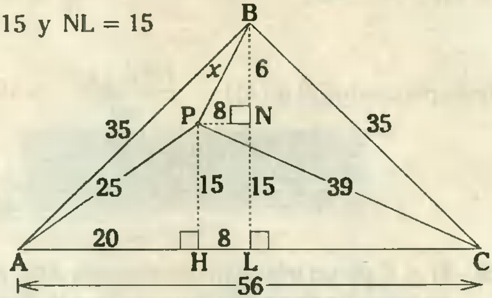
39.- Interiormente a un triángulo isósceles ABC se ubica el punto P. Si AP = 25, PC = 39, AB = BC = 35 y AC = 56 ; calcular PB.

Resolución.-

Trazamos las líneas : $\overline{PH} \perp \overline{AC}$, $\overline{BL} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PN} \perp \overline{BL}$

Luego : AL = LC = 28 ; PH = NL y PN = HL

Aplicando el teorema de Herón en :



Δ APC : $PH = \dfrac{2}{56}\sqrt{60.35.21.4} \Rightarrow PH = 15$ y $NL = 15$

Además : AH = 20 y HL = 8 = PN

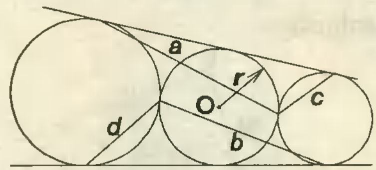
En el $\triangle$ ALB : $BL = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$

De donde : BN = 21 - 15 = 6

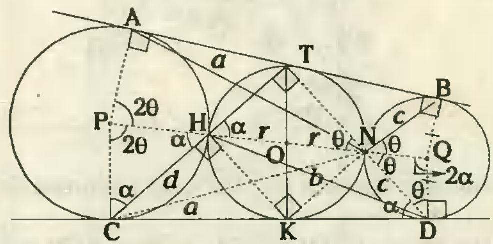
En el $\triangle$ PNB $x = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 10}$

40.- Hallar r, si $(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = k^2$



Resolución.-



Del gráfico: Δ PNA $\cong$ Δ PCN $\Rightarrow$ AN = NC = a

Además : NB = ND = C

En el Δ CPH: $2\alpha + 2\theta = 180°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \theta = 90°$

Como $\overline{PC} \parallel \overline{QD} \Rightarrow m\measuredangle Q = 2\alpha$

y $m\measuredangle QND = m\measuredangle QDN = \theta$

El $\square$ CHND es inscriptible y al prolongar $\overline{CH}$ y $\overline{DN}$ estos se intersectan en un punto T de la circunferencia. Luego , aplicando Euclides (2do teorema) :

Δ CHN : $a^2 = d^2 + 4r^2 + 2d\,(HT)$ ... (1)

Δ HND : $b^2 = c^2 + 4r^2 + 2c\,(TN)$ ... (2)

Sumando las expresiones (1) y (2) : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + 8r^2 + 2\,[(d\,.\,(HT) + c\,.\,TN)]$ ... (3)

En el $\triangle$ CKT : $(KH)^2 = (TN)^2 = d\,(HT)$

En el $\triangle$ TKD : $(KN)^2 = (HT)^2 = c\,(TN)$

Sustituyendo estas últimas expresiones en (3)

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + 8r^2 + 2\,(TN^2 + HT^2)$ $\Rightarrow$ $(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 8r^2 + 2\,(4r^2)$

De donde $k^2 = 16r^2$ $\therefore$ $\boldsymbol{r = \dfrac{k}{4}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un cuadrilátero ABCD :
$m\measuredangle B = m\measuredangle D = 90°$, AC = 10 y BD = 8
Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,2 E) 3,5

2.- En un triángulo equilátero ABC, de lado 12 se ubica un punto P interior de modo que $m\measuredangle APC = 90°$; hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{AC}$, si además BP = 4.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{17}$ C) $3\sqrt{17}$

D) $\sqrt{17}$ E) $3\sqrt{5}$

3.- En la figura, calcular MD. Si : BM = 6*m*, DE = 1*m*.

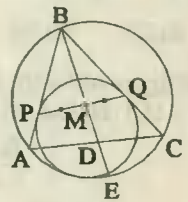
A) 1 *m*

B) 0,5 *m*

C) 1,5 *m*

D) 2 *m*

E) 3 *m*



4.- En la figura : O y O_1 son centros, TQ = *a* y QL = *b*. Hallar : AB.

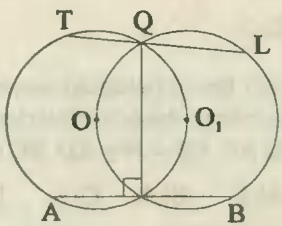
A) $\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}}$

B) $\sqrt{a-ab+b}$

C) $2\sqrt{a+ab+b^2}$

D) $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$

E) N.A



5.- Las medidas de los lados de un triángulo son 3, 5 y 7. Hallar la medida del mayor ángulo de aquel triángulo cuyos lados son las inversas de las alturas del primer triángulo.

A) 145° B) 135° C) 120° D) 90° E) 105°

6.- Dado el triángulo obtusángulo ABC, obtuso en B, donde $\overline{IG}$ // $\overline{BC}$, siendo I el incentro y G el baricentro de dicho triángulo; además el perímetro del triángulo es 144. Calcular el máximo valor entero de IG.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) 7

7.- En la figura, ABCD es un cuadrado BM = MC y *r* = 1. Hallar DE.

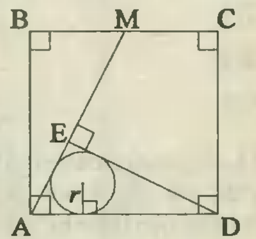
A) $3+\sqrt{5}$

B) $2+\sqrt{5}$

C) $3+\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{5}$

E) 6



8.- En un triángulo ABC, $m\measuredangle C = 120°$, $ab = 24$, $a+b = 12$. Se traza la bisectriz $\overline{CF}$ (F en $\overline{AB}$) . Hallar CF.

A) 4 B) 3 C) 1,5 D) 2 E) 1

9.- Hallar TQ del gráfico, si : AB = BC = 2

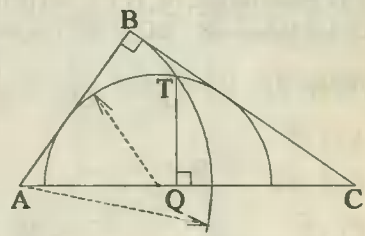
A) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

D) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

E) $\sqrt{6}$



10.- Los lados de un triángulo ABC, miden AB = 5, AC = 6 , BC = 7 . Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ y $\overline{HM} \perp \overline{BC}$. Hallar HM.

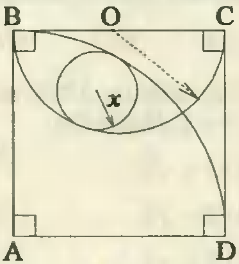
A) $2\sqrt{6}/3$ B) $5\sqrt{3}/4$ C) $4\sqrt{3}/7$

D) $5\sqrt{6}/7$ E) $10\sqrt{6}/7$

11.- En un cuadrilátero convexo ABCD, se trazan $\overline{BM}$ y $\overline{DN}$ perpendiculares a $\overline{AC}$. Hallar MN, si $BC^2 + AD^2 = 140$; $AB^2 + CD^2 = 120$ y $AC = 5$.

A) 1 B) 1,8 C) 2,4 D) 2 E) 3

12.- En la figura ABCD es un cuadrado; A y O son centros, $AB = (3 + \sqrt{5})$. Hallar el radio máximo "x"



A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) 1

D) 2

E) 3

13.- En un cuadrilátero ABCD, AB = 7 , AC = 8 y BC = 9 . En el lado $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y F tal que BE = EF = FC . Hallar $AE^2 + AF^2$

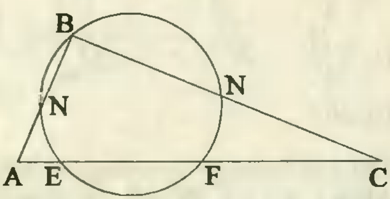
A) 63 B) 64 C) 67 D) 72 E) 77

14.- En un triángulo ABC, $AC = 4\sqrt{73}$, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la perpendicular $\overline{AH}$ a dicha mediana. Si AH = 16 , hallar CH.

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

15.- En la figura, M, N y F son puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Hallar BE , si : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{18}$



A) $3\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{3}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

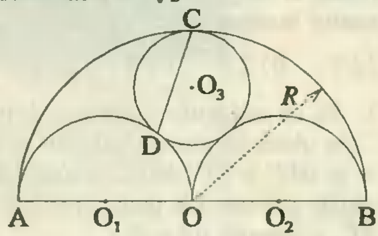
E) 4

16.- Un Δ ABC, donde AB = 7 , BC = 8 y AC = 9, está inscrito en una circunferencia. Hallar la longitud de la flecha de la cuerda $\overline{AC}$.

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

D) $5\sqrt{5}/2$ E) $\frac{4}{3}\sqrt{5}$

17.- En la figura O_1 , O_2 y O_3 son centros; hallar CD. Además $R = 4\sqrt{3}$



A) 3

B) 4

C) 5

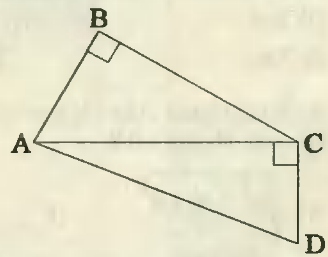
D) $\sqrt{10}$

E) $2\sqrt{5}$

18.- En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AF}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CE}$, siendo "O" el ortocentro. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC . Si : $AB^2 + BC^2 - AC^2 = 10$, $AO^2 + CO^2 - OB^2 = 15$

A) 2 B) 2,5 C) 2,8 D) 3,2 E) 5

19.- En la figura AD = 10, AB . BC + AB . CD + BC . CD = 150 . Hallar AB + BC = CD.



A) 25

B) 20

C) 18

D) 16

E) 24

20.- En un triángulo escaleno con AB > BC , se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y exterior $\overline{BF}$. Si AF . CF = 59 y AD. DC = 43 , hallar DF.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

21.- En un triángulo ABC, $\overline{BM}$ es una mediana. Sobre $\overline{BC}$ se considera un punto "D" de modo que $m\measuredangle BMD = m\measuredangle BAC$. Por "D" se traza una paralela a $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{BM}$ en F y a $\overline{AB}$ en E . Hallar : ED , si BF = 9 y FM = 4.

A) 12 B) 10,5 C) 9 D) 8 E) 7,5

22.- En la figura. Si : AB = 13 m ; BC = 14 m ; AC = 15 m y $m\ \overset{\frown}{BM}$ y $m\ \overset{\frown}{MC}$. Calcular PM.

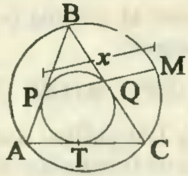
A) 9 m

B) 13,5 m

C) $\sqrt{107}\ m$

D) $\sqrt{111}\ m$

E) $\sqrt{113}\ m$



23.- Dado un rombo ABCD, sobre $\overline{BC}$ se ubica el punto "P" tal que : BP = 3 · PC y $AP^2 + 3 \cdot DP^2 = 38$. Hallar BC.

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

24.- Calcular x en función de R.

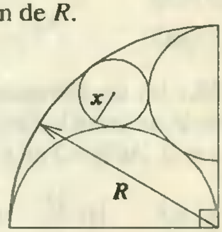
A) $R/6$

B) $R/2$

C) $6R/3$

D) $5R/2$

E) $R/3$



25.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$), se traza la mediana $\overline{BM}$ y se ubica el incentro "I" del triángulo BMC tal que : AB - MI = 2. Hallar AI ; si $AB^2 + BI^2 + IM^2 = 10$

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

26.- En un triángulo ABC; D $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 9$. Su circunradio mide $\sqrt{10}$. Hallar la distancia del baricentro al circuncentro.

A) 9 B) 10 C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{10}$ E) 3

27.- En la figura; E, F y N son puntos de tangencia. Además AH = 12 , HB = 4 y BN = 6. Hallar ON

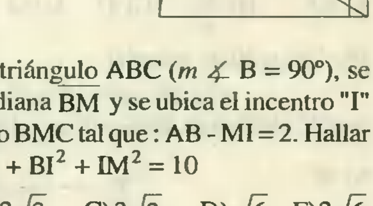
A) 4

B) 5

C) $5\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{2}$



28.- Hallar r del gráfico (O es centro) $R = 4$

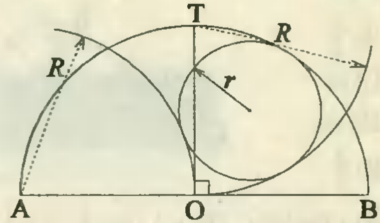
A) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

B) 2

C) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

D) $\sqrt{\frac{8}{3}}$

E) $\sqrt{\frac{10}{3}}$



29.- Del gráfico; hallar x , si $r = \sqrt{2}$

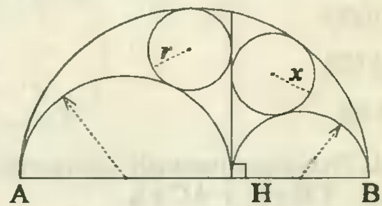
A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) 1

D) 2

E) $\sqrt{5}$

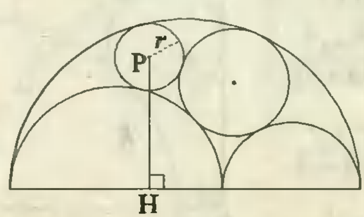


30.- Dado el triángulo isósceles ABC de Incentro I. Sobre el arco IC de la circunferencia circunscrita al triángulo AIC se ubica el punto P de modo que AP = 10 y PC = 6; hallar AB ($\overline{AC}$ es la base del triángulo isósceles ABC y $m\measuredangle B = 74°$)

A) $\frac{\sqrt{52}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{52}}{4}$ C) $\frac{3}{4}\sqrt{52}$

D) $\frac{5}{3}\sqrt{52}$ E) $\frac{5}{4}\sqrt{52}$

31.- Del gráfico, encontrar : $\frac{r}{PH}$



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{7}$

32.- En la figura : T y K son puntos de tangencia, O es centro $(b^2+c^2)-(m^2+n^2)=x^2$.
Hallar : HK

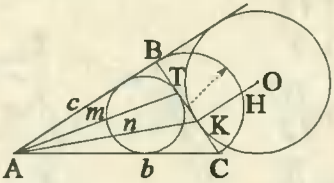
A) x

B) $\frac{x}{2}$

C) $2x$

D) $\sqrt{x}$

E) $\frac{x}{4}$



33.- Hallar x, si $a=1$, $b=2$ y $c=3$

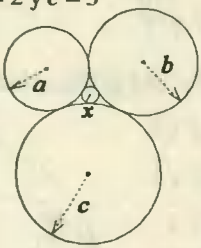
A) 4/21

B) 5/21

C) 6/23

D) 7/23

E) 1/2



34.- En la figura mostrada, calcular BC. Si además : CD $=a$ y AC $=b$.

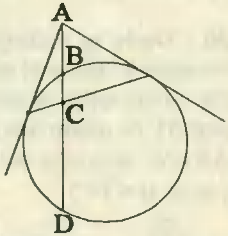
A) $ab/(a+b)$

B) $2ab/(a+b)$

C) $ab/(2b+a)$

D) $ab/(2a+b)$

E) $2ab/(2b+a)$



35.- Calcular x ; si : AO = OB = R

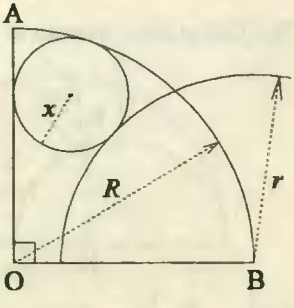
A) $\dfrac{2R^2-r^2}{2R+r}$

B) $\dfrac{2R^2+r^2}{2R+r}$

C) $\dfrac{2R^2-r^2}{2(2R+r)}$

D) $\dfrac{2R^2+r^2}{2(2R-r)}$

E) $\dfrac{R^2+r^2}{Rr}$



36.- En un triángulo ABC se tiene :

$$a^2=b^2+c^2+(1{,}2)\,bc$$

Hallar la medida de uno de los ángulos del triángulo.

A) 105° B) 120° C) 127° D) 135° E) 143°

37.- Del gráfico mostrado, calcular x, si las circunferencias de centros P y Q son ortogonales.

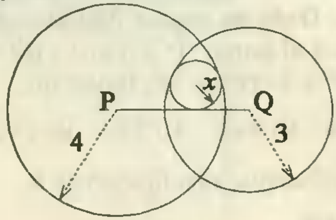
A) 0,3

B) 0,4

C) 0,5

D) 0,65

E) 0,85



38.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana AF tal que AB = FC y $m\measuredangle$ ACB = 2 $m\measuredangle$ BAF. Hallar la $m\measuredangle$ BAC.

A) 30° B) $\frac{37}{2}$ C) 37 D) 53 E) $\frac{53}{2}$

39.- Del gráfico, calcular :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$$

Si ABCDEF es un hexágono regular de lado "l"

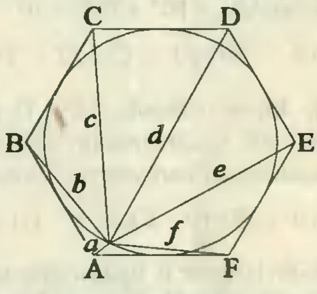
A) $6l^2$

B) $7l^2$

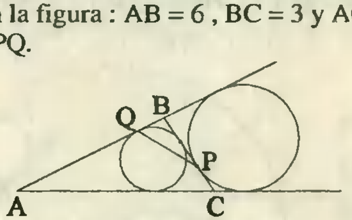
C) $8l^2$

D) $\frac{21}{2}l^2$

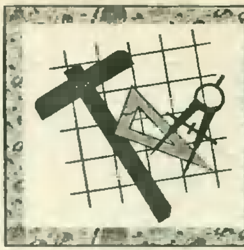
E) $11l^2$



40.- En la figura : AB = 6 , BC = 3 y AC = 7. Hallar PQ.



A) 3,16 B) 3,5 C) 3,26 D) 4,3 E) $\sqrt{11}$



CAP. 15

relaciones métricas en la circunferencia I

15.1 TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si : $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$

$\Rightarrow$ $$AP \, . \, PB = CP \, . \, PD \quad \text{... (15.1)}$$

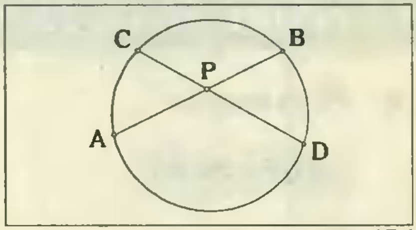


Fig. 15.1

OBSERVACIONES :

a) Si $\overline{AB}$ es Diámetro :

$$(MH)^2 = AH \cdot HB \quad \text{... (15.2)}$$

b) Si $P \in \overline{AB}$:

$$(OP)^2 = R^2 - AP \cdot PB \quad \text{... (15.3)}$$

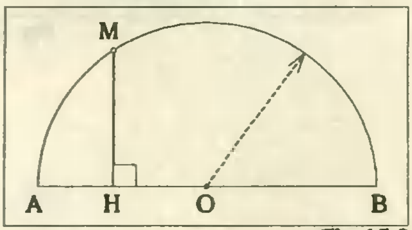


Fig. 15.2

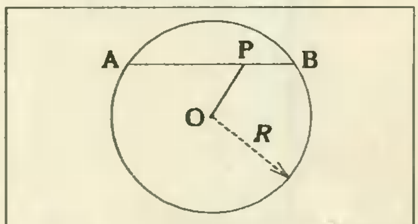


Fig. 15.3

15.2 TEOREMA DE LAS SECANTES

Si PBA y PDC son rectas secantes, según como se indica en la *Fig.* 15.4, entonces se cumplirá que :

$\Rightarrow$ $$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \text{... (15.4)}$$

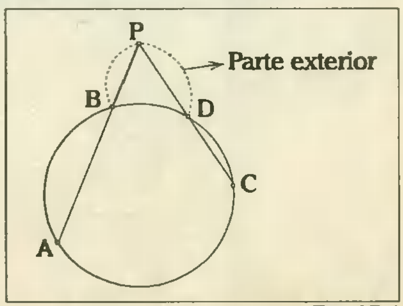


Fig. 15.4

Observación :

Si el ⏢ ABCD es inscriptible , entonces :

$$PA \cdot PB = PD \cdot PC \qquad \dots (15.5)$$

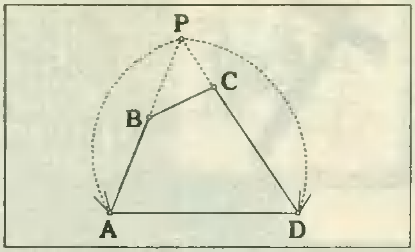


***Fig.* 15.5**

15.3 TEOREMA DE LA TANGENTE

Si : $\overline{PQ}$ es tangente :

$$\Rightarrow \quad (PQ)^2 = PA \cdot PB \qquad \dots (15.6)$$

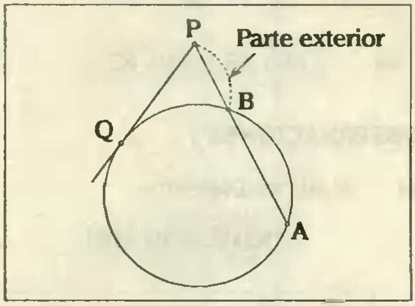
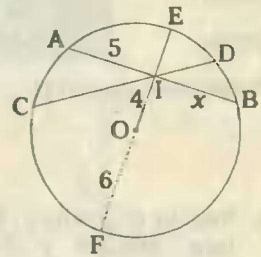


***Fig.* 15.6**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- En una circunferencia de centro "O" y de radio 6m, dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en "I". Si AI = 5m y OI = 4m, hallar la longitud de IB

Resolución.-



Dato del problema : OE = 6 y OI = 4

Ahora : OE = OI + IE

Reemplazando : 6 = 4 + IE $\Rightarrow$ IE = 2

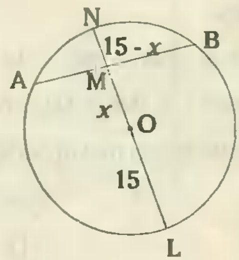
Aplicando el teorema de las cuerdas (relación 15.1) :

$$5(x) = 10(2)$$

$$\therefore \quad x = 4m$$

2.- Se tiene una circunferencia de centro "O" cuyo radio mide 15 . Se traza la cuerda $\overline{AB}$ y sobre ella se elige un punto "M" tal que AM × MB = 200 ; calcular OM.

Resolución.-



Aplicando el teorema de las cuerdas (item 15.1) :

$$(15 + x)\,(15 - x) = AM \cdot MB$$

Reemplazando : $225 - x^2 = AM \cdot MB = 200$

Donde : $x^2 = 25$

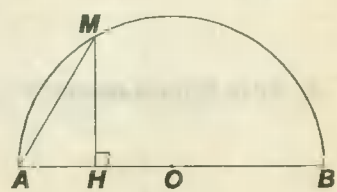
$$\therefore \quad x = 5$$

Ahora si aplicamos la relación 15.3, tendremos :

$$x^2 = 15^2 - AM \cdot MB = 225 - 200$$

$$\therefore \quad x = 5$$

3.- En la semicircunferencia de centro "O", se tiene que : OB = 2 AH = 10 . Calcular la longitud de MH.



Resolución.-

En primer lugar construimos el triángulo rectángulo AMB . Entonces si aplicamos la relación 15.2, se tendrá que :

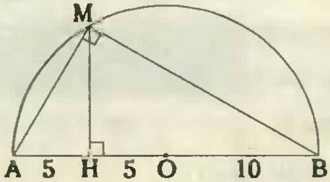
$$MH^2 = AH \cdot HB \; ... \; (1)$$

Dato : OB = 10 y si 2AH = 10 $\Rightarrow$ AH = 5

Luego : AH = HO = 5

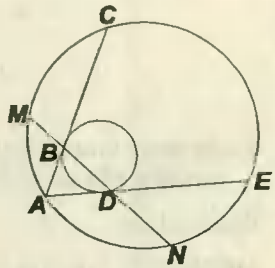
Donde : HB = 15

Reemplazando en (1): $MH^2 = 5 \cdot 15$



$\therefore$ $\boxed{MH = 5\sqrt{3}}$

4.- Según el gráfico BC = 2 DE . Calcular BD, si se sabe que : BM = 6 y DN = 2



Resolución.-

Sea DE = a $\Rightarrow$ BC = 2a

Por tangentes : AB = AD = b

En la circunferencia mayor, aplicamos el Teorema de las Cuerdas :

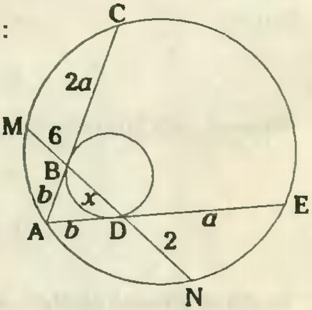
$$(x + 6)\,(2) = a \cdot b \; ... \; (1)$$

También : $(x + 2)6 = (2)\,a \cdot b$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $(x + 2)6 = 2\,(x + 6)\,(2)$

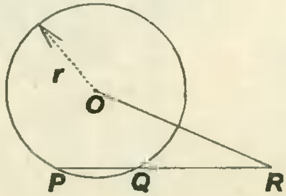
Luego : $3(x + 2) = 2(x + 6)$

Donde : $3x + 6 = 2x + 12$

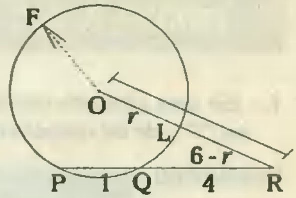


$\therefore$ $\boxed{x = 6}$

5.- En la figura calcular "r", si : PQ = 1 , QR = 4 y R = 6



Resolución.-



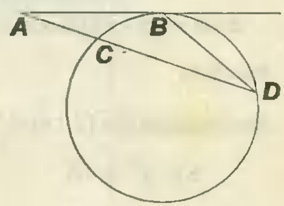
Aplicando la propiedad de las secantes , dado en el item 15.2 , tenemos : $(6 + r)(6 - r) = 5(4)$

Donde : $36 - r^2 = 20$

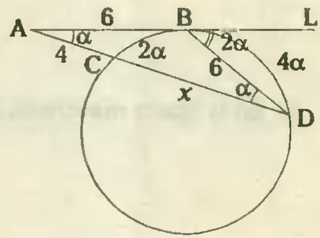
Ahora : $r^2 = 16$

$\therefore \quad$ $\boldsymbol{r = 4}$

6.- Según el gráfico calcular CD , si : m $\overset{\frown}{BD}$ = 2m $\overset{\frown}{CB}$, AC = 4 y BD = 6 (B es punto de tangencia).



Resolución.-



Sea CD = x , $\quad m\,\overset{\frown}{CB} = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad m\,\overset{\frown}{BD} = 4\alpha$

Por ángulo inscrito : $\quad m \measuredangle CDB = \alpha$

Ahora por ángulo semi-inscrito : $\quad m \measuredangle LBD = 2\alpha$

En el triángulo ABD : $\quad m \measuredangle BAD = \alpha$

Y por ángulo exterior : $\quad m \measuredangle LBD = 2\alpha$

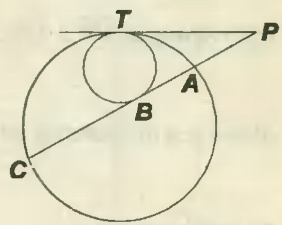
Esto quiere decir que el triángulo ABD es isósceles $\quad \Rightarrow \quad AB = BD = 6$

Aplicando el teorema de la tangente dado en el item 15.3, tenemos : $\quad 6^2 = (x + 4)4$

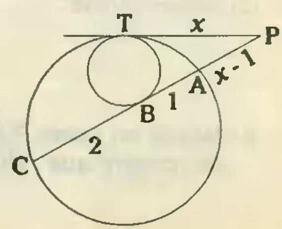
Donde : $\quad 36 = 4(x + 4)$

$\therefore \quad$ $\boldsymbol{x = 5}$

7.- En la figura mostrada, calcular PT , si : BC = 2 y AB = 1



Resolución.-



Sea : PT = x , ahora por tangentes : $\quad PT = PB = x$

Donde : $\quad AP = x - 1$

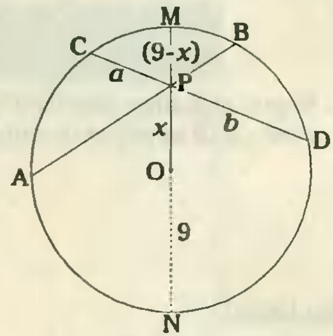
Luego en la circunferencia mayor, aplicamos el teorema de la tangente:

$$x^2 = (x + 2)(x - 1)$$

Donde : $\quad x^2 = x^2 + x - 2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = 2}$

MISCELÁNEA

1.- En una circunferencia de radio 9, se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se intersectan en "P", de tal manera que : $PC \cdot PD = 65$. Hallar OP, si "O" es el centro de la circunferencia.



Resolución.-

Aplicando el Teorema de las Cuerdas :

$$a \cdot b = (9 - x)(9 + x) \quad \Rightarrow \quad 81 - x^2 = ab \ldots (1)$$

Por dato : $ab = 65 \ldots (2)$

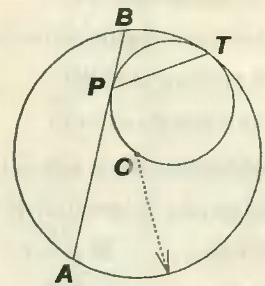
Reemplazando (2) en (1) :

$$81 - x^2 = 65 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 81 - 65$$

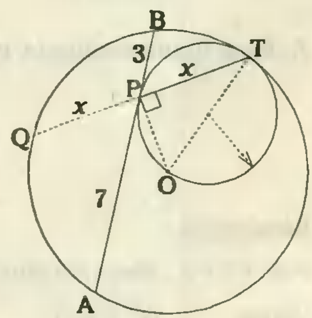
Luego : $x^2 = 16$

$$\therefore \quad x = 4$$

2.- En la figura mostrada, hallar PT si AB = 10 y PB = 3



Resolución.-



En la figura, si $\overline{OP} \perp \overline{QT}$, entonces :

$$QP = PT = x$$

Ahora por el Teorema de las Cuerdas :

$$x \cdot x = 3 \cdot 7$$

En consecuencia : $x^2 = 21$

$$\therefore \quad x = \sqrt{21}$$

3.- Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las secantes PAB y PCD, de tal manera que : PC = AB; PA = 4 y CD = 5. Hallar PC.

<u>**Resolución**</u>.-

Aplicando el Teorema de la Secante :

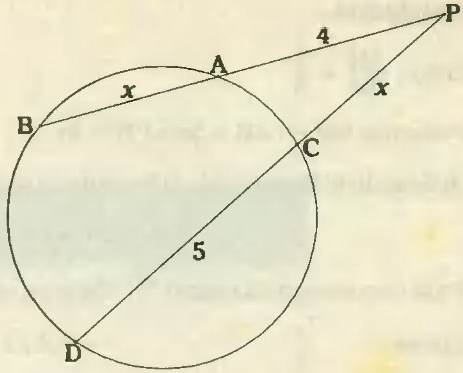
$$4\,(x+4) = x\,(x+5)$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 16 = x^2 + 5x$$

Donde : $O = x^2 + x - 16$

Resolviendo : $x = \dfrac{-1+\sqrt{1-4(1)(-16)}}{2}$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{65}-1}{2}$$



4.- Desde un punto "P" exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{PT}$ y la secante $\overline{PAB}$, de tal manera que : PT = AB y AP =5. Hallar PT.

<u>**Resolución**</u>.-

Aplicando el Teorema de la Tangente :

$$x^2 = 5\,(x+5) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x - 25 = 0$$

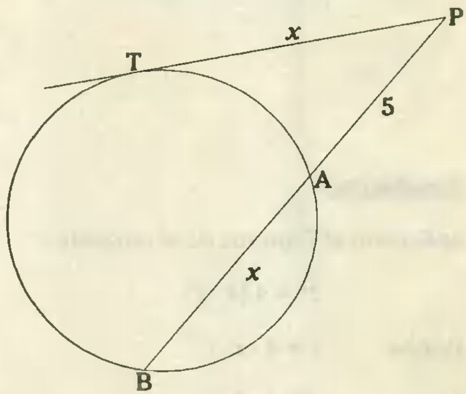
Resolviendo la ecuación de segundo grado :

$$x = \frac{5+\sqrt{25-4(1)(-25)}}{2}$$

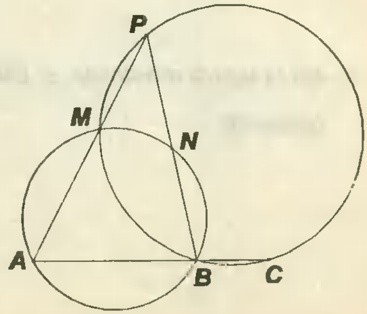
Ahora : $x = \dfrac{5+\sqrt{125}}{2}$

Luego : $x = \dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \quad x = \frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$$



5.- En la figura mostrada, calcular PB, si 3.AM = 5.PM; PN = BN ; AB = 10 y BC = 6.

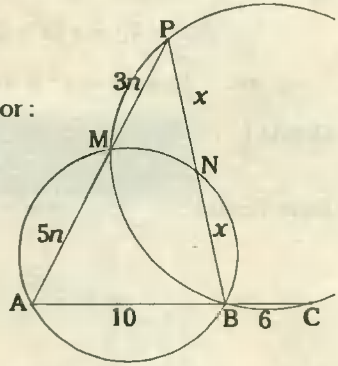


Resolución.-

Dato : $\frac{AM}{PM} = \frac{5}{3}$

Podemos hacer : AM = $5n$ y PM = $3n$

Aplicando el Teorema de la Secante para la circunferencia mayor :



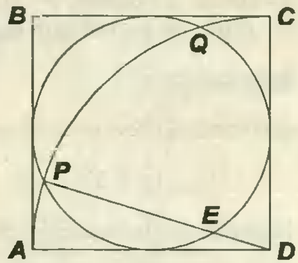
$$5n \cdot 8n = 10 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

Pa la circunferencia menor :$3n \cdot 8n = 2x \cdot x \;\Rightarrow\; 12 \cdot (2)^2 = x^2$

Luego : $x = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ **PB = $8\sqrt{3}$**

6.- En la figura un cuadrado ABCD, cuyos lados miden 4 . Se ha inscrito una circunferencia tangente a todos los lados y un cuadrante que lo intersecta en P y Q según como se muestra .Se pide hallar "EP".



Resolución.-

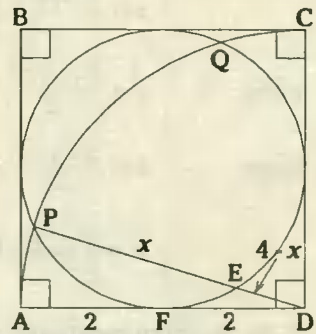
Aplicando el Teorema de la tangente :

$$2^2 = 4\,(4 - x)$$

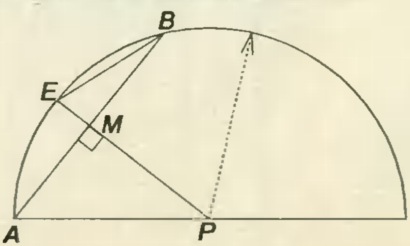
Donde : $1 = 4 - x$

Ahora : $x = 4 - 1$

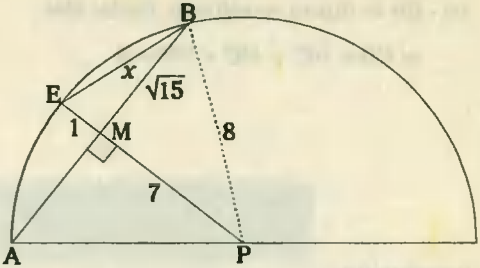
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 3}$



7.- En la figura mostrada, si EM = 1 y PM = 7, se pide hallar EB.



Resolución.-



En el ⊿ EMB : $x^2 = 1^2 + (\sqrt{15})^2$ (Pitágoras)

Donde : $x^2 = 1 + 15$

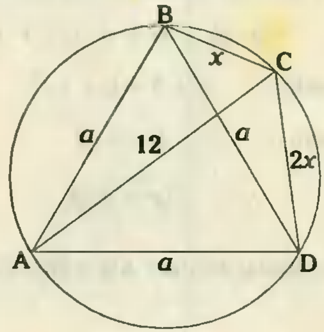
Ahora : $x^2 = 16$

$\therefore$ $\mathbf{x = 4}$

8.- Se tiene un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia, de modo que :

AB = AD = BD ; CD = 2 BC y AC = 12 . Hallar BC.

Resolución.-



Aplicando el Teorema de Ptolomeo :

$$12 \cdot a = a \cdot 2x + a \cdot x$$

Donde : $12 = 2x + x$

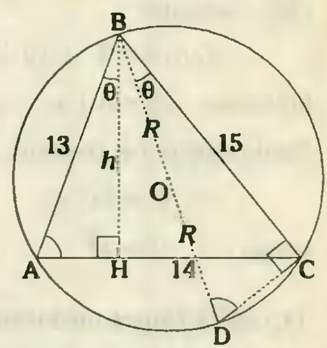
$\Rightarrow$ $3x = 12$

$\therefore$ $\mathbf{x = 4}$

9.- Calcular la longitud del circunradio del triángulo ABC; si cuyos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ miden 13; 15 y 14 unidades respectivamente.

Resolución.-

Aplicando el Teorema de Herón :



$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Reemplazando : $h = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$

Luego : $h = \frac{1}{7}\sqrt{3.7.3.2.7.8}$

Ahora : $h = \frac{1}{7}\sqrt{3^2.7^2.4^2}$ $\Rightarrow$ $h = 12$

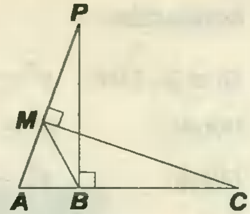
Además : ⊿ ABH ~ ⊿ DBC, entonces :

$$\frac{h}{15} = \frac{13}{2R} \quad \Rightarrow \quad 2R = \frac{13.15}{12}$$

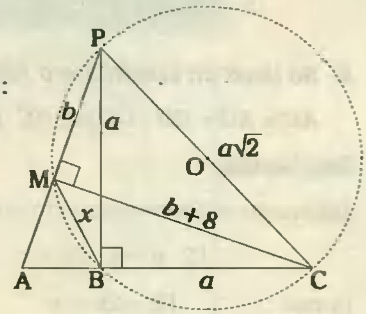
$$\therefore \quad \mathbf{R = \frac{65}{8}}$$

10.- En la figura mostrada, hallar BM ,

si PB = BC y MC = PM + 8



Resolución.-



En el cuadrilátero BMPC aplicando el Teorema de Ptolomeo :

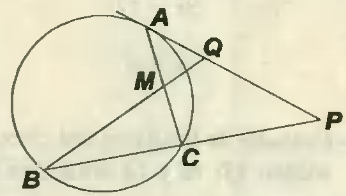
$$a \cdot (b+8) = a \cdot b + x \cdot a\sqrt{2}$$

Donde : $b + 8 = b + x\sqrt{2}$

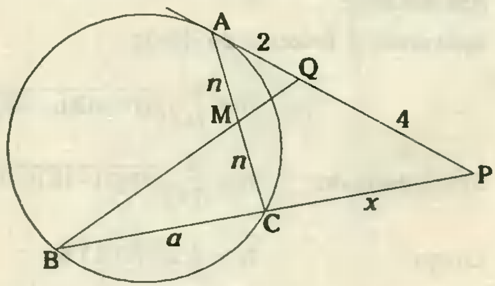
Ahora : $8 = x\sqrt{2}$

$\therefore$ $\boxed{x = 4\sqrt{2}}$

11.- Hallar PC, si : AM = MC, AQ = 2y PQ = 4



Resolución.-



Aplicando el Teorema de Menelao en el Δ CAP ($\overline{BQ}$: secante) :

$$4 \cdot n \cdot a = 2 \cdot n \cdot (a+x)$$

Entonces : $2a = a + x \quad \Rightarrow \quad x = a$

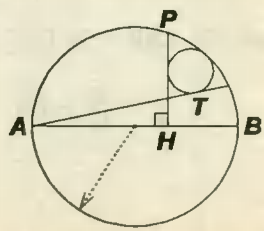
Finalmente por el Teorema de la Secante :

$$6^2 = 2x \cdot x$$

Luego : $18 = x^2$ $\therefore$ $\boxed{x = 3\sqrt{2}}$

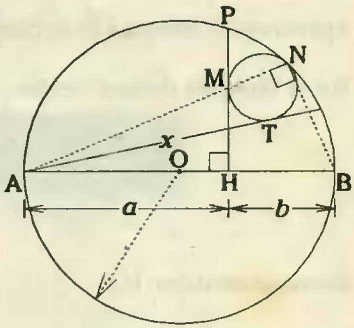
12.- En la figura mostrada, hallar AT,

si AH = a y HB = b.



Resolución.-

En primer lugar sabemos que los puntos A; M y N son colineales. Por otro lado el cuadrilátero HMNB es inscriptible, entonces aplicando el Teorema de la Secante, tenemos :



$$AN \cdot AM = a\,(a+b) \qquad \dots (1)$$

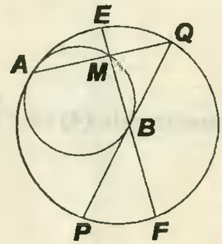
Aplicando el Teorema de la Tangente :

$$x^2 = AN \cdot AM \qquad \dots (2)$$

DE (1) y (2) : $x^2 = a(a+b)$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + ab}}$

13.- En el gráfico A y B son puntos de tangencia; EM = BF ; AQ = a y MQ = b. Hallar PB.



Resolución.-

Aplicando el Teorema de la Tangente :

$y^2 = AQ.MQ \quad \Rightarrow \quad y^2 = ab \qquad \dots (1)$

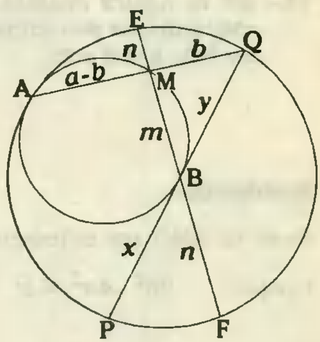
Aplicando el Teorema de las Cuerdas :

$x\,.\,y = n\,(m+n) \quad \dots (2)$

También : $b\,(a-b) = n\,(m+n) \quad \dots (3)$

De (1) , (2) y (3) : $x\,.\,\sqrt{ab} = b\,(a-b)$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt{\frac{b}{a}}\,(a-b)}$



14.- Calcular la distancia entre el incentro y el circuncentro de un triángulo cuyos lados miden 5 ; 6 y 7 unidades.

Resolución.-

Aplicando el Teorema de las Cuerdas : $(R-x)\,(R+x) = mn \quad \Rightarrow \quad mn = R^2 - x^2 \quad \dots (1)$

Aplicando el Teorema de Ptolomeo : $6\,(m+n) = 5m + 7m$

Donde : $6m + 6n = 12m \quad \Rightarrow \quad 6m = 6n \quad \Rightarrow \quad m = n$

Luego : $\overline{OI} \perp \overline{AM}$.

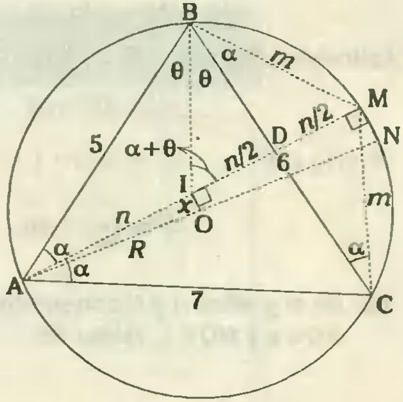
Aplicando el Teorema del Incentro : $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{5+7}{6} \Rightarrow AI = 2 \cdot ID \Rightarrow ID = \dfrac{n}{2} \Rightarrow DM = \dfrac{n}{2}$

Aplicando el Teorema de la bisectriz interior : $CD = 7/2$ y $BD = 5/2$

Por el Teorema de las Cuerdas : $\underbrace{BD \cdot DC} = \dfrac{3n}{2} \cdot \dfrac{n}{2}$

$$(5/2)\,(7/2) = \frac{3}{4}n^2$$

$$\frac{35}{3} = n^2 \quad \text{... (2)}$$



Reemplazando en (1) : $\dfrac{35}{3} = R^2 - x^2$ ... (3)

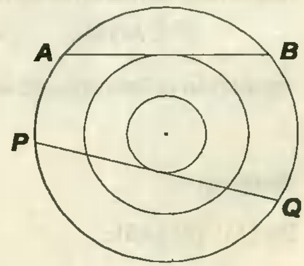
Para calcular "R", tenemos : $\dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4R} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}$

$$R = \frac{35\sqrt{6}}{24} \quad \text{... (4)}$$

Reemplazando (4) en (3) : $x^2 = \left[\dfrac{35\sqrt{6}}{24}\right]^2 - \dfrac{35}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{\sqrt{70}}{8}}$$

15.- En la figura mostrada, las circunferencias son concéntricas de radios proporcionales a 1; 2 y 3. Hallar PQ , si AB = 2a.

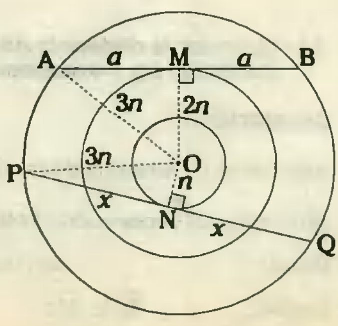


<u>Resolución</u>.-

En el ⊿ AMO, por el Teorema de Pitágoras : $(3n)^2 = (2n)^2 + a^2$

Luego : $9n^2 - 4n^2 = a^2 \Rightarrow 5n^2 = a^2$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{a\sqrt{5}}{5} \text{ ... (1)}$$



En el ⊿ PON : $(3n)^2 = n^2 + x^2 \Rightarrow 9n^2 - n^2 = x^2$

$$\Rightarrow \quad x = 2n\sqrt{2} \text{ ... (2)}$$

Reemplazando (1) en (2) : $x = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

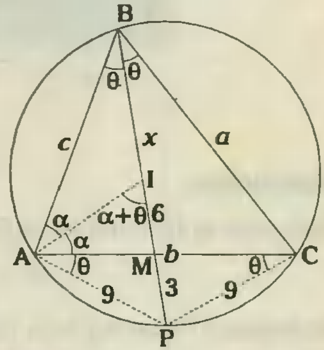
$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{2\sqrt{10}}{5} \cdot a}$$

16.- En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior del ángulo B, de modo que intersecta al lado $\overline{AC}$ en M y a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC intersecta en P; de tal manera que MP = 3 y MI = 6; siendo "I" el incentro de dicho triángulo. Hallar "IB"

Resolución.-

Aplicando el Teorema del Incentro : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{a+c}{b}$ ... (1)

Aplicando el Teorema de Ptolomeo : $b\,(x+9) = 9a + 9c$



Donde : $\dfrac{x+9}{9} = \dfrac{a+c}{b}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{x+9}{9}$

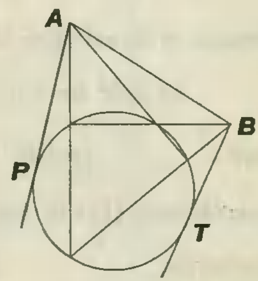
Ahora : $9x = 6x + 54$

Resolviendo : $3x = 54$

$\therefore \quad \mathbf{x = 18}$

17.- En la figura mostrada : AB = 58 y BT = 40.

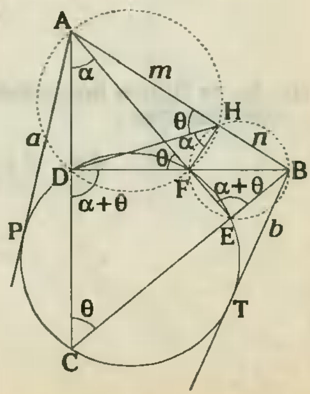
Hallar AP.



Resolución.-

En primer lugar se hace pasar una circunferencia por A, D y F, luego demostramos que el cuadrilátero FHBE es inscriptible.

A continuación aplicando el Teorema de la Secante tenemos :



$$n\,(m+n) = BD \cdot BF \ ...\ (1)$$

$$m\,(m+n) = AE \cdot AF \ ...\ (2)$$

Puesto que : $BD \cdot BF = b^2$ y $AE \cdot AF = a^2$

Reemplazando en (1) y (2) : $n\,(m+n) = b^2$

$$m\,(m+n) = a^2$$

Sumando : $(m+n)\,(m+n) = a^2 + b^2$

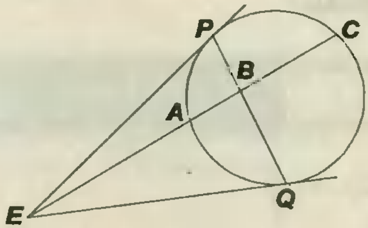
Donde : $(m+n)^2 = a^2 + b^2$

Ahora : $AB^2 = a^2 + b^2$

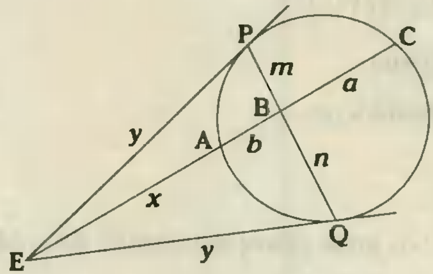
Reemplazando datos : $58^2 = a^2 + 40^2 \Rightarrow a^2 = (58-40)(58+40)$

Luego : $a^2 = 18 \cdot 98 \quad \therefore \quad a = 42$

18.- En la figura mostrada, se sabe que : AB = b y BC = a. Hallar EA.



<u>Resolución.</u>



Aplicando el Teorema de las Cuerdas :

$$ab = m \cdot n \qquad \ldots (1)$$

Aplicando el Teorema de la Tangente :

$$y^2 = x(a+b+x) \ldots (2)$$

Aplicando el Teorema de Steward :

$$(x+b)^2(m+n) = y^2 m + y^2 n - mn(m+n)$$

Luego : $(x+b)^2 = y^2 - mn \qquad \ldots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3) : $(x+b)^2 = x(a+b+x) - ab$

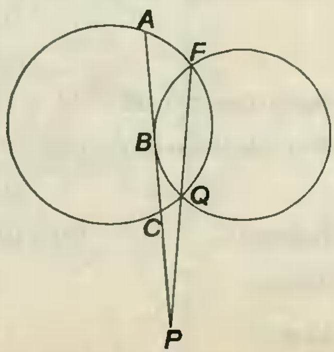
Resolviendo : $x^2 + 2bx + b^2 = x(a+b) + x^2 - ab$

Simplificando : $b^2 + ab = x[a+b-2b]$

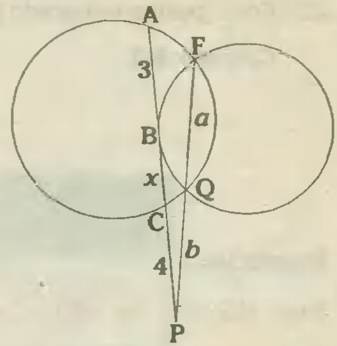
$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{b(a+b)}{a-b}}$$

19.- En la figura mostrada, hallar BC, sabiendo que se verifica que :

AB = 3 y PC = 4



Resolución.-



Aplicando el Teor. de la Tangente : $(x + 4)^2 = b\,(a + b)$ ... (1)

Aplicamos el Teor. de la Secante : $4(3 + 4 + x) = b\,(a + b)$ ... (2)

De (1) y (2) : $(x + 4)^2 = 4\,(x + 7)$

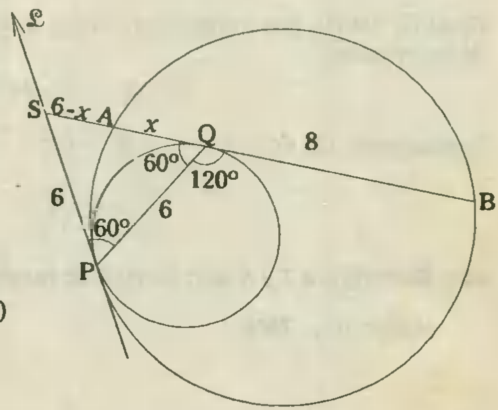
Luego : $x^2 + 8x + 16 = 4x + 28$

Donde : $x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 6)\,(x - 2) = 0$

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 2}$

20.- Se tienen dos circunferencias con tangentes interiores en P . En la circunferencia mayor se traza la cuerda $\overline{AB}$, que es tangente a la menor en Q. Si PQ = 6 , QB = 8 y m ∡ PQB = 120º, hallar AQ.

Resolución.-



Trazamos la tangente común 𝓛 , la cual intersecta en S a la prolongación de $\overline{BA}$, luego el Δ PSQ es equilátero , donde :

SP = SQ = 6 = PQ

Además SA = 6 - x

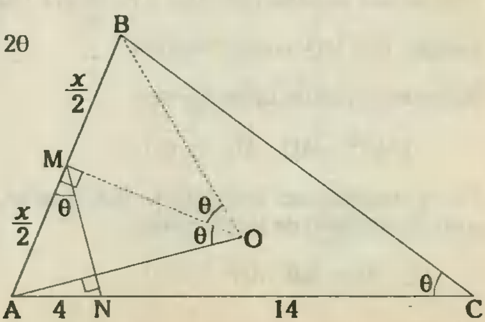
Aplicando el Teorema de la Tangente :

$$6^2 = (14)\,(6 - x)$$

Donde : $\dfrac{18}{7} = 6 - x \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = \dfrac{24}{7}}$

21.- En un triángulo acutángulo ABC, O es circuncentro y M es punto medio de $\overline{AB}$. Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{AO}$ (N en $\overline{AC}$) ; si AN = 4 y NC = 14, calcular AB.

Resolución.-



En el triángulo isósceles AOB, sea : m ∡ AOB = 2θ

⇒ m ∡ AOM = m ∡ MOB = θ

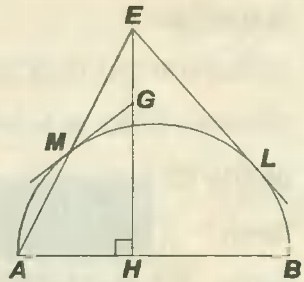
Además : m ∡ C = θ (Propiedad)

El cuadrilátero MBCN es inscriptible, luego aplicando el teorema de las Secantes :

$x\left(\dfrac{x}{2}\right) = 18 \,.\, 4 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 12}$

22.- En el gráfico mostrado se tiene que : EL = 6 ; GH = 2 MG.

Calcular MG.



Resolución.-

Sea : $MG = x \Rightarrow GH = 2x$

Para el ⊿ EMK , $\overline{MG}$ es mediana $\Rightarrow$ $MG = EG = GK = x$

Además : $KH = x$

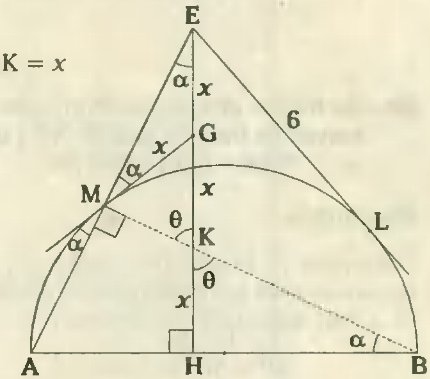
Por el teorema de la Tangente : $6^2 = EA \cdot EM$ ... (1)

En el □ AMKH, inscriptible aplicamos el teorema de las secantes :

$$EA \cdot EM = 3x \cdot 2x \quad ... (2)$$

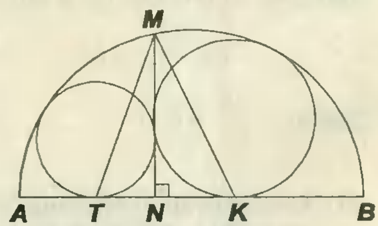
Sustituyendo (2) en (1) : $36 = 6x^2$

$$\therefore \quad x = \sqrt{6}$$



23.- En la figura T y K son puntos de tangencia.

Hallar m ∡ TMK.



Resolución.-

Respecto a la circunferencia "O", sean L y Q puntos de tangencia

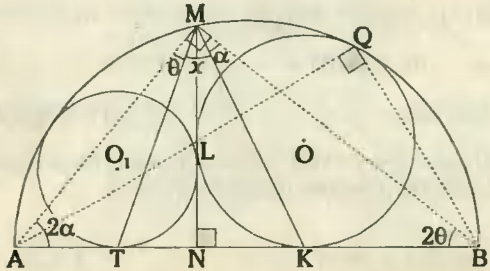
Luego : A, L y Q son colineales

Por el teorema de la Tangente :

$$(AK)^2 = AQ \cdot AL \quad ... (1)$$

En el cuadrilátero inscriptible NLQB aplicamos el teorema de las secantes :

$$AQ \cdot AL = AB \cdot AN \quad ... (2)$$



Puesto que en el ⊿ AMB : $(AM)^2 = AB \cdot AN$ ... (3)

Luego de (1) , (2) y (3) : $AK = AM$

En el Δ MAK , sea : $m\measuredangle MAK = 2\alpha \Rightarrow m\measuredangle KMB = \alpha$

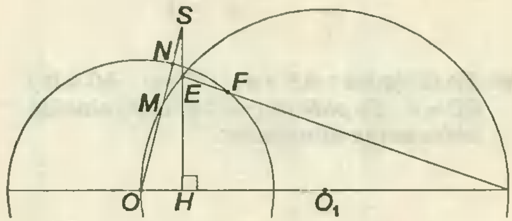
Análogamente, se demuestra que BM = BT y si $m\measuredangle TBM = 2\theta \Rightarrow m\measuredangle AMT = \theta$

En el ⊿ AMB : $2\alpha + 2\theta = 90° \Rightarrow \alpha + \theta = 45°$

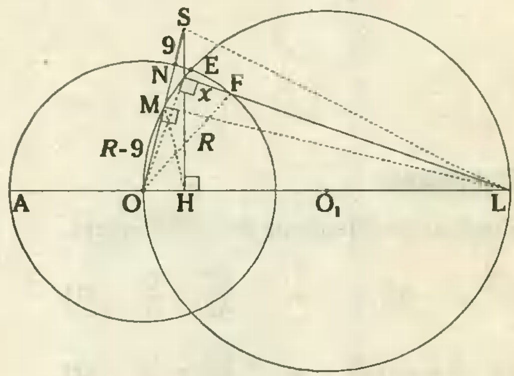
Ahora : $\theta + x + \alpha = 90° \Rightarrow 45 + x = 90°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 45°}$

24.- En la figura mostrada; O y O_1 son centros; MN = NS = 9. Calcular EF.



Resolución.-



En el ⊿ OEL : $(OE)^2 = OL \cdot OH$ ... (1)

En el cuadrilátero inscriptible HMSL

$OL \cdot OH = OS \cdot OM$ (Teorema de las Secantes)

$\Rightarrow$ $OL \cdot OH = (R + 9)(R - 9)$ ... (2)

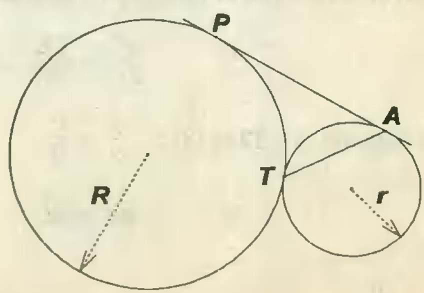
En el ⊿ OEF : $(OE)^2 = R^2 - x^2$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

$$R^2 - x^2 = R^2 - 9^2$$

$\therefore$ $\mathbf{x = 9}$

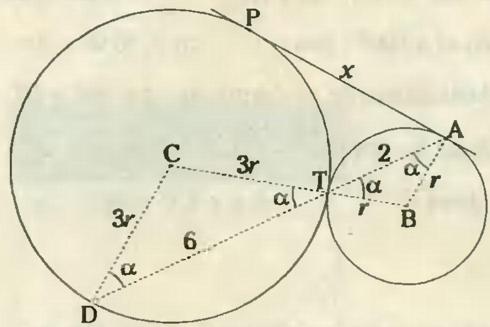
25.- En la figura P y T son puntos de tangencia; R = 3r y AT = 2. Hallar AP.



Resolución.-

Prolongamos $\overline{AT}$ hasta intersectar a la circunferencia mayor en D

Luego : $x^2 = AD \cdot AT$ (teorema de la Tangente)



$\Delta\, DCT \sim \Delta\, TBA \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DT}{2} = \dfrac{3r}{r}$

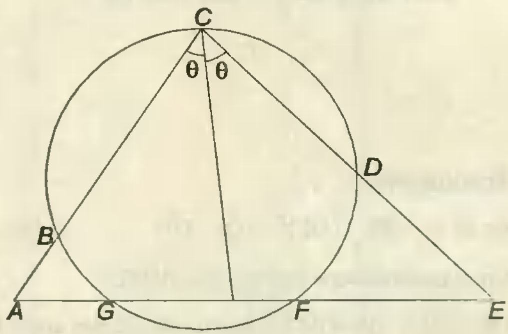
De donde : $DT = 6$

Luego sustituyendo en la expresión inicial :

$$x^2 = 8 \cdot 2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$$

26.- En la figura : AB = a , GE = c , AG = b y ED = d . Se pide encontrar una relación entre estas longitudes.

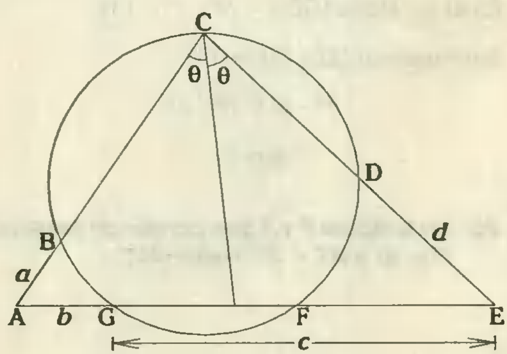


Resolución.-

Empleando el teorema de las Secantes :

$AC \,.\, a = AF \,.\, b \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{b}{a} \quad \text{... (1)}$

$CE \,.\, d = c \,.\, EF \quad \Rightarrow \quad \dfrac{CE}{EF} = \dfrac{c}{d} \quad \text{... (2)}$



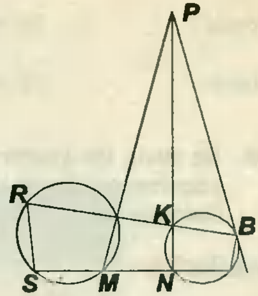
En el Δ ACE por el Teorema de la Bisectriz :

$$\frac{AC}{AF} = \frac{CE}{EF} \quad \text{... (3)}$$

Luego de (1) , (2) y (3) : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{d}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{ac = bd}$$

27.- En la figura se muestran dos circunferencias de distinto radio por las que se han trazado varias secantes. Si se sabe que : RS // PN , PK = 9 y KM = 7, hallar PB.



Resolución.

En el cuadrilátero inscrito SRKM : $m\measuredangle SRK = m\measuredangle KMN = \theta$

$\overline{RS} \parallel \overline{PN} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle NLT = \theta$

Asimismo reconocemos que el cuadrilátero MKLN es inscriptible

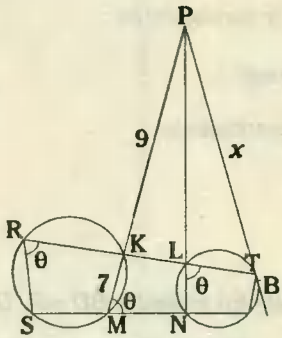
Luego : PM · PK = PN · PL (teorema de las Secantes)

$\Rightarrow \quad PN \cdot PL = 16 \cdot 9 = 144$

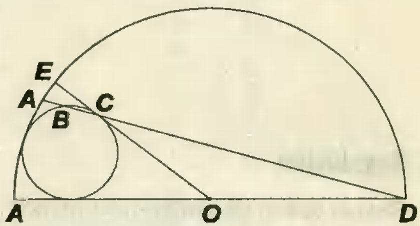
Puesto que : $x^2 = PN \cdot PL$ (teorema de la Tangente)

$\Rightarrow \quad x^2 = 144$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 12}$



28.- En la figura O es centro y C es punto de tangencia de $\overline{EO}$ con la circunferencia menor. Si además se sabe que : AB = 1 , BC = 2 y CE = $\sqrt{7}$; calcular CD.



Resolución.-

En la circunferencia O; aplicando el Teorema de las Cuerdas : AC · CD = EC · CL

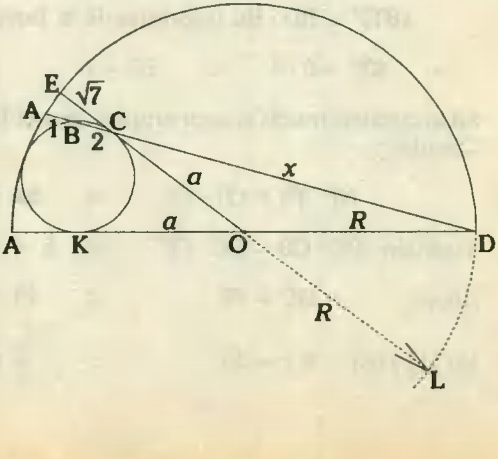
$3x = \sqrt{7}\cdot(a+R) \quad \Rightarrow \quad a + R = \dfrac{3x}{\sqrt{7}} \quad ...(1)$

En la circunferencia menor :

$(DK)^2 = DB \,.\, DC$ (Teorema de la Tangente)

$\Rightarrow (a + R)^2 = (x + 2)\,x \;...\,(2)$

Sustituyendo (1) en (2) : $\left(\dfrac{3x}{\sqrt{7}}\right)^2 = x^2 + 2x$

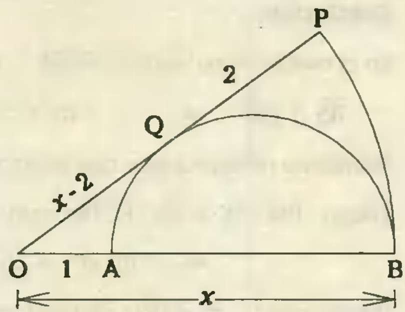


Donde : $9x^2 = 7x^2 + 14x$

Ahora : $2x^2 = 14x$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 7}$

29.- Se tiene un sector circular POB de centro O. Sobre $\overline{OB}$ se considera el punto A, trazándose luego una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ tangente en Q a $\overline{OP}$. Calcular AB, si PQ = 2 y OA = 1

Resolución.-



Empleando el teorema de la Tangente : $(x-2)^2 = x \cdot 1$

Por consiguiente : $x^2 - 4x + 4 = x$

Luego : $x^2 - 5x + 4 = 0$

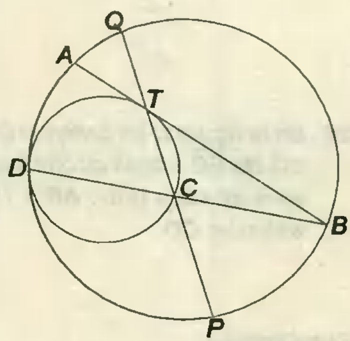
Factorizando :

$$\begin{matrix} x & -4 \\ x & -1 \end{matrix}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 4}$

30.- En la figura BD = 9 , DC = 5 y CP = QT .

Hallar AT (T y D son puntos de tangencia)

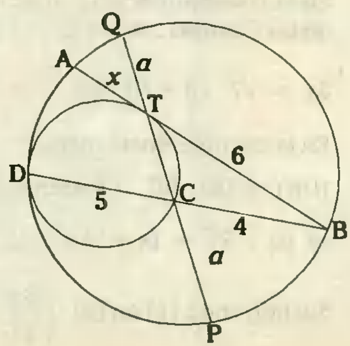


Resolución.-

Respecto a la circunferencia menor :

$(BT)^2 = BD \cdot BC$ (teorema de la Tangente)

$\Rightarrow$ $BT^2 = 9 \cdot 4$ $\Rightarrow$ $BT = 6$



En la circunferencia mayor empleamos el Teorema de las Cuerdas :

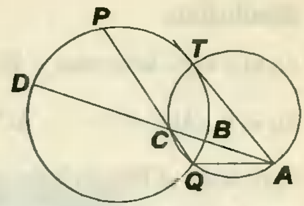
$AT \cdot TB = QT \cdot TP$ $\Rightarrow$ $6x = a \cdot TP$ ... (1)

También : $DC \cdot CB = QC \cdot CP$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 4 = QC \cdot a$

Ahora : $QC = TP$ $\Rightarrow$ $20 = TP \cdot a$ ... (2)

De (1) y (2) $6x = 20$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = \dfrac{10}{3}}$

31.- En la figura "T" es punto de tangencia y $\overline{TA}$ // $\overline{PQ}$, si AB = 2, BC = 1 y CD = 7. Calcular AQ.



Resolución.-

En la circunferencia menor, el trapecio CTAQ es isósceles

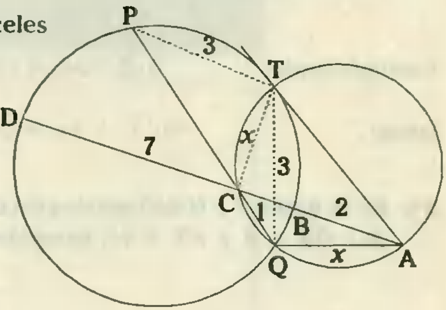
$\Rightarrow \quad AQ = CT = x \quad y \quad AC = TQ = 3$

En la circunferencia mayor : $PT = TQ = 3$

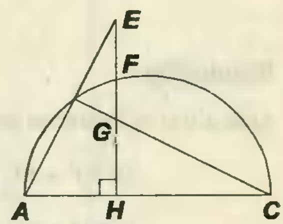
Además : $PC \cdot CQ = 7 \cdot 1 = 7$ (teor. de Cuerdas)

En el Δ PTQ, por Steward : $3^2 = x^2 + PC \cdot CQ$

$\Rightarrow \quad 9 = x^2 + 7 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{2}}$



32.- En la figura $\overline{AC}$ es diámetro; si EF = 3, FG = 2. Hallar GH.



Resolución.-

Empleamos el teorema de las Secantes en :

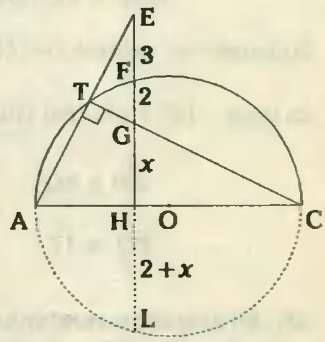
La circunferencia, $EA \cdot ET = (7 + 2x)\,3$ ... (1)

El cuadrilátero inscriptible ATGH :

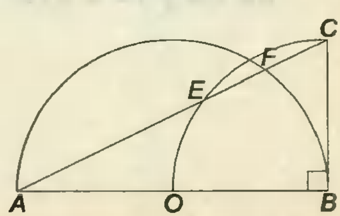
$$EA \cdot ET = (5 + x)\,5 \quad ... (2)$$

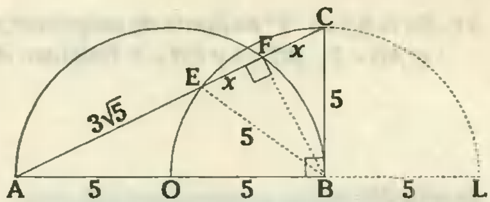
De (1) y (2) : $\quad 21 + 6x = 25 + 5x$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$



33.- En la figura O y B son centros BC = 5. Hallar EF.





Resolución.-

En el Δ EBC isósceles : EF = FC = x

En el $\triangle$ ABC : $AC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$

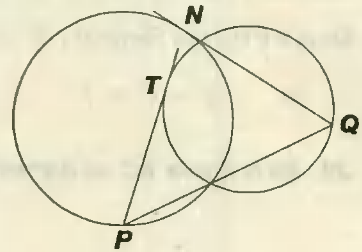
Aplicando el Teorema de las Secantes :

$$AC \cdot AE = AL \cdot AO$$

Reemplazando : $5\sqrt{5} \cdot AE = 15 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad AE = 3\sqrt{5}$

Luego : $3\sqrt{5} + 2x = 5\sqrt{5} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{5}}$

34.- En la figura T y N son puntos de tangencia. Si : QN = 8 y PT = 15, calcular PQ.

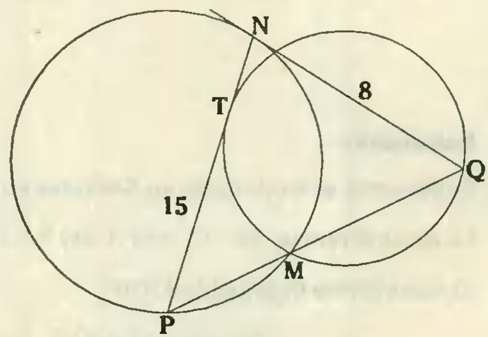


Resolución.-

Aplicando el Teorema de la Tangente :

$$(PT)^2 = PQ \cdot PM \qquad \ldots (1)$$

$$(QN)^2 = PQ \cdot QM \qquad \ldots (2)$$



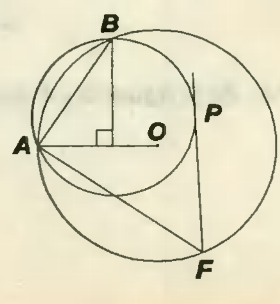
Sumando las expresiones (1) y (2)

Se tiene : $15^2 + 8^2 = PQ\,\underbrace{(PM + QM)}_{PQ}$

$$289 = PQ^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{PQ = 17}$$

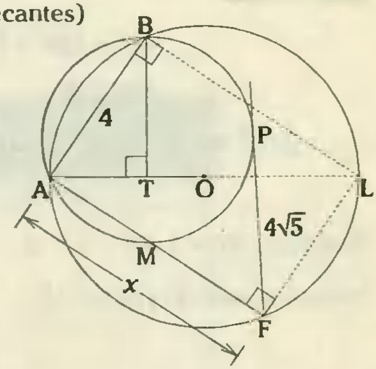
35.- En el gráfico mostrado; hallar AF , si O es centro, AB = 4 y FP = 4$\sqrt{5}$



<u>**Resolución**</u>.-

En el $\triangle$ ABL : $4^2 = AL \cdot AT$

En el cuadrilátero inscriptible MTLF : $AL \cdot AT = x \cdot AM$ (Secantes)



De donde : $x \cdot AM = 16$ ... (1)

Aplicando el teorema de la Tangente :

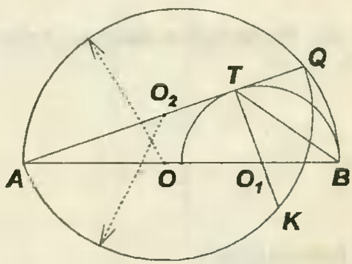
$(FP)^2 = x \cdot MF \quad \Rightarrow \quad x \cdot MF = 80$ ... (2)

Sumando (1) + (2) : $x\,(\underbrace{AM + MF}_{x}) = 96$

Entonces : $x^2 = 96$

$\therefore \quad \mathbf{x = 4\sqrt{6}}$

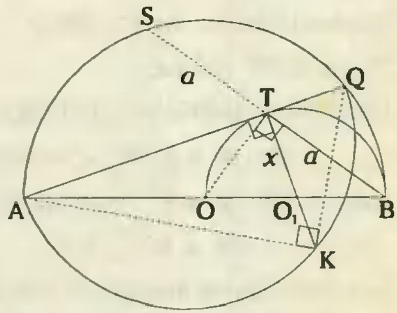
36.- En la figura : O, O_1 y O_2 son centros de tres semicircunferencias . Si además BT = a, se pide calcular la medida de TK.



<u>**Resolución**</u>.-

En el $\triangle$ AKQ : $x^2 = AT \cdot TQ$ ... (1)

Observamos que $\overline{OT} \perp \overline{SB} \Rightarrow ST = TB = a$



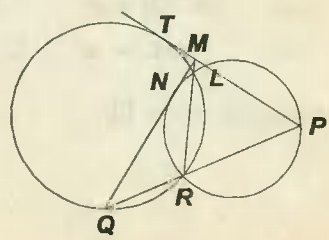
Aplicando el Teorema de las Cuerdas :

$AT \cdot TQ = a^2$ ... (2)

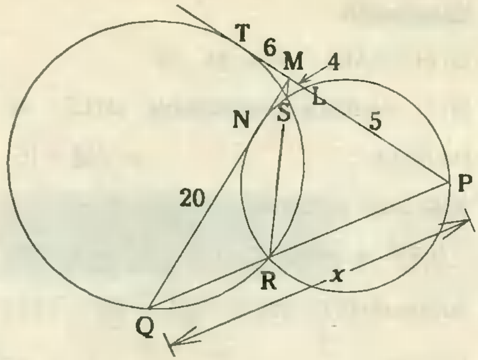
Sustituyendo (2) en (1) : $x^2 = a^2$

$\therefore \quad \mathbf{x = a}$

37.- En la figura T y N son puntos de tangencia, LM = 4, QN = 20 y PL = 5. Calcular PQ.



Resolución.-



De acuerdo con la resolución del problema 16, sabemos que :

$$x^2 = QN^2 + PT^2 \quad ...(1)$$

$$QN = 20 \quad ...(2)$$

$$(MT)^2 = MR \cdot MS = 9 \cdot 4 \text{ (Tangente)}$$

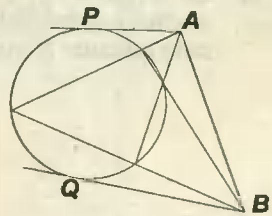
$$\Rightarrow \quad MT = 6$$

De donde : $PT = 6 + 4 + 5 \quad \Rightarrow \quad PT = 15 ...(3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $\quad x^2 = 20^2 + 15^2$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 25}$$

38.- En la figura dada se sabe que : AP = a y BQ = b. Hallar AB



Resolución.-

En el cuadrilátero inscrito MNLS: $\quad m\measuredangle\ NMS = m\measuredangle\ NLA = \theta$

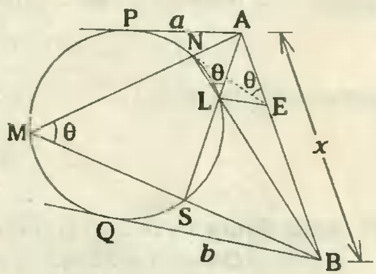
Trazamos $\overline{NE}$, tal que : $\quad m\measuredangle\ NEA = \theta$

Luego en el cuadrilátero inscriptible NLEA:

$$BN \cdot BL = x \,.\, BE \quad \text{(secantes)}$$

pero: $\quad BN \cdot BL = b^2$ (teorema de la tangente)

$$\Rightarrow \quad x \cdot BE = b^2 \quad ...(1)$$



En el cuadrilátero inscriptible MNEB :

$$AM \cdot AN = x \cdot AE \quad \text{(Teor. de la Secantes)}$$

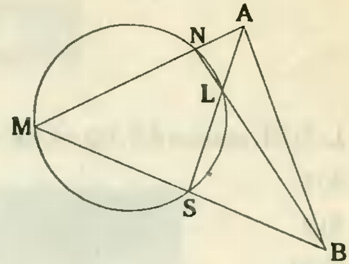
Pero : $\quad AM \cdot AN = a^2 \quad$ (Teor. de la Tangente)

$$\Rightarrow \quad x \cdot AE = a^2 \quad ...(2)$$

Sumando (1) y (2): $\quad x\,(\underbrace{AE+BE}_{x}) = a^2 + b^2$

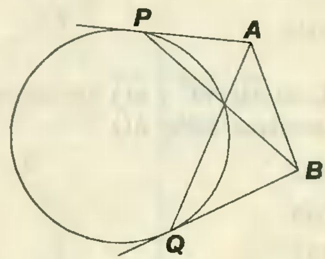
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

<u>OBSERVACIONES</u> : Se cumple la siguiente propiedad :



$$(AB)^2 = AM \cdot AN + BM \cdot BS$$

39.- Calcular AB del gráfico, si AP = a y BQ = b ; P y Q son puntos de tangencia.



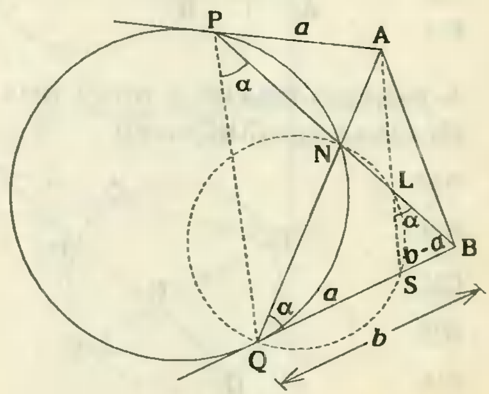
<u>Resolución</u>.-

Trazamos : $\overline{PQ}$ y $\overline{AS}$ // $\overline{PQ}$

Luego : $m\measuredangle$ NPQ $= m\measuredangle$ NQB $= \alpha$

Además : AP = QS = a y $m\measuredangle$ BLS = α

En el cuadrilátero inscriptible QNLS, aplicamos la propiedad anterior:



$$x^2 = AQ \cdot AN + BQ \cdot BS \quad ... (*)$$

Pero : $AQ \cdot AN = a^2$ (Teor. de la tangente)

y $BQ \cdot BS = b\,(b - a)$

Reemplazando en (*) :

$$x^2 = a^2 + b^2 - ab$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Si $\overline{EF}$ biseca a $\overline{AB}$, EQ = 4, QF = 9, hallar AB.

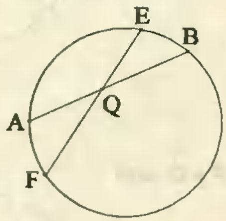
A) 6

B) 9

C) 10

D) 12

E) 14



2.- Si $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AQ}$ son valores enteros consecutivos, hallar AQ.

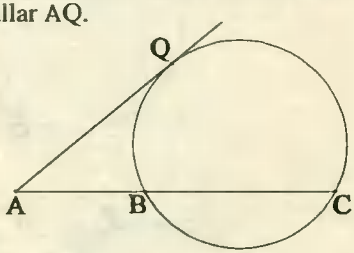
A) 8

B) 6

C) 7

D) 5

E) 4



3.- En la figura, hallar BN. Si : NB = 2 , ND = 4 , FN = 16, además $m\widehat{ABC} = m\widehat{ED}$

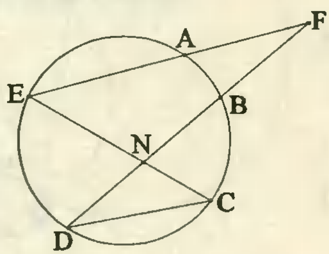
A) 3

B) 4

C) 5

D) 8

E) 6



4.- Hallar PQ, si ABCD es un cuadrado. Además PC = 3BP y AB = 20

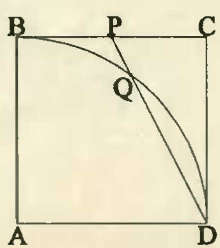
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

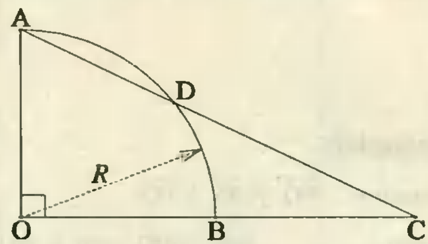


5.- Por un punto interior a una circunferencia de radio 10 , se trazan 2 cuerdas, cumpliéndose que el producto de los 4 segmentos determinados es 625. Hallar la distancia desde el punto mencionado hacia el centro de la circunferencia.

A) 25 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$

D) $10\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{3}$

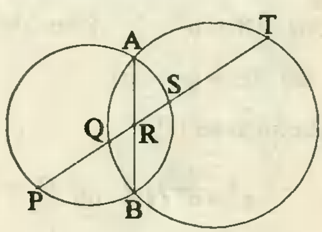
6.- Hallar DC, si : AO = OB = BC = R



A) $\dfrac{R\sqrt{5}}{5}$ B) $\dfrac{2R\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{3R\sqrt{5}}{5}$

D) $\dfrac{R\sqrt{5}}{10}$ E) $2R\sqrt{5}$

7.- Si QR = 1 , RS = 2 y PQ = 3, hallar ST.



A) 5 B) 6 C) 3 D) 7 E) 10

8.- En la figura T es el punto de tangencia, PA = 4 , AB = 2 y PC = 3. Hallar CD

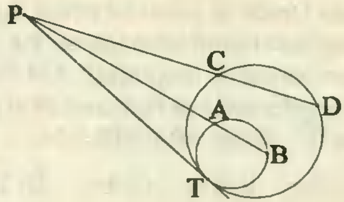
A) 8

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



9.- La figura ABC es un triángulo equilátero. Si FA = 8 y FB = 9, hallar FC.

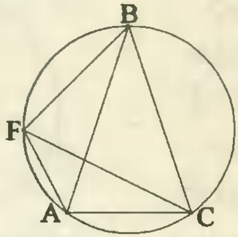
A) 10

B) 12

C) 17

D) 20

E) 18



10.- Hallar CT, si OC = CB y AO = OB = 4

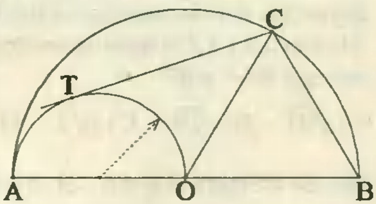
A) $\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{5}$

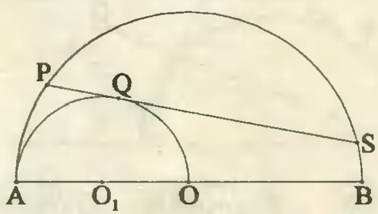
C) $4\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{6}$

E) $3\sqrt{5}$



11.- Si O y O_1 centros, PQ = 8 y QS = 18, se pide hallar AQ.



A) 14 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

12.- En la figura $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, BD = 4·BA y AE = 8. Hallar ED, si P y Q son puntos de tangencia.

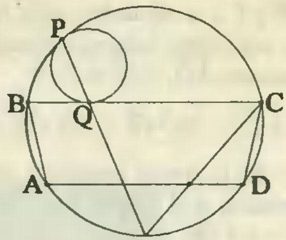
A) 4

B) 6

C) 5

D) 2

E) 3



13.- En la figura AB = 3 , BC = 2 y P es un punto de tangencia. Hallar CD.

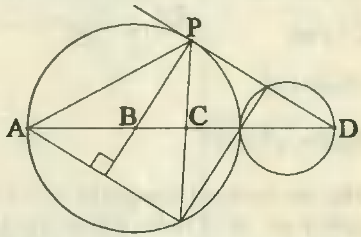
A) 15

B) 5

C) 9

D) 10

E) 6



14.- En la figura AB = 6, BC = 1. Si P, Q y R son puntos de tangencia, hallar CD.

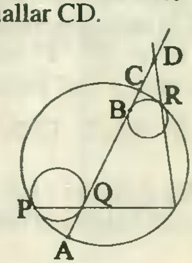
A) 6/5

B) 4/5

C) 5/3

D) 5/6

E) 7/5



15.- En la figura : $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ son tangentes AP $= a$ y BC $= b$. Hallar ; CD.

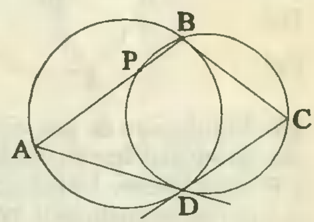
A) $\sqrt{ab}$

B) $2\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

E) $\sqrt{b^2-a^2}$



16.- Se tiene una circunferencia de centro "O" y diámetro $\overline{AB}$, la mediatriz de $\overline{OB}$ intersecta en E y F a la circunferencia, hallar la longitud del segmento tangente trazado de "E" a de diámetro $\overline{AO}$, si $EF = 2\sqrt{3}$

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

17.- En la figura mostrada, se pide hallar PC siendo A y B puntos de tangencia y además $PA = a$ y $DC = b$

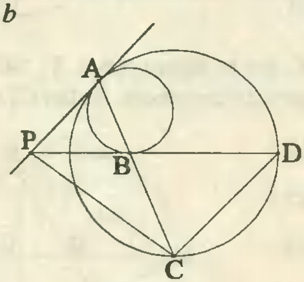
A) $\sqrt{a^2+b^2}$

B) $\sqrt{a^2-b^2}$

C) $\sqrt{ab}$

D) $ab\sqrt{ab}$

E) $ab\sqrt{a^2+b^2}$



18.- Se tiene un cuadrado ABCD. Haciendo centro en "A" y radio $\overline{AB}$ se traza el cuadrante BAD y luego se prolonga $\overline{DA}$ hasta F tal que : $AB = AF = 4$. Hallar OM, siendo O_1 centro de la circunferencia que pasa por B, G y P. ($G = \overline{CF} \cap \overline{AB}$, "P" la intersección de $\overline{CF}$ y el cuadrante) y "M" punto medio de $\overline{AD}$.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{10}$

19.- En la figura : $AB = 4$, $BF = 6$, $BC = 3$ y $BE = CD$. Calcular el mínimo valor entero de CG.

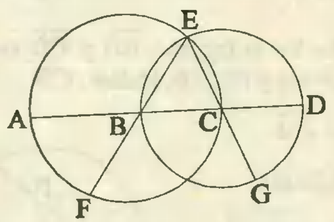
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



20.- El diámetro de una circunferencia mide $8m$. en dicho diámetro se ubican los puntos A y B equidistantes $1m$ del centro; por B se traza una cuerda cualquiera $\overline{PC}$. Hallar la suma de los cuadrados de las medianas del triángulo APC.

A) 98 B) 83 C) 79 D) 73,5 E) 71,5

21.- Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia); $\overline{AM}$ intersecta a la circunferencia en N, siendo M el punto medio de $\overline{BP}$. Hallar NP, si $MN = 2m$.

A) $8m$ B) $6m$ C) $4m$ D) $3m$ E) $12m$

22.- En la figura "B" es punto de tangencia $AB = 2$, $BC = 6$ y $AL = 1$. Hallar EL.

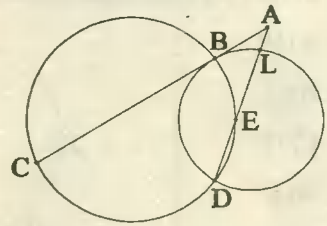
A) 2

B) 2,5

C) $\sqrt{3}$

D) 3

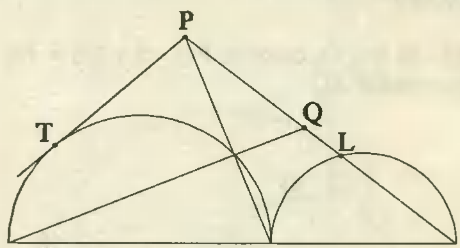
E) $2\sqrt{3}$



23.- Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Calcular HD siendo H ortocentro y además las distancias del circuncentro a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son 2,5 y 1,5 respectivamente siendo además $m\measuredangle BAC = 60°$

A) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{19}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) 5

24.- En la figura : $PQ = a$, $QL = b$. Hallar PT.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$ C) $\sqrt{b(a+b)}$

D) $2\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{2a(a+b)}$

25.- En la figura mostrada E y C son puntos de tangencia, además $AB = BC = 1$ y $AE = \dfrac{EF}{3}$. Hallar BD.

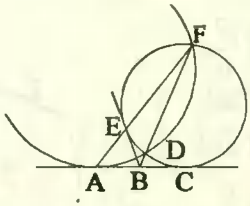
A) $1/\sqrt{7}$

B) $1/\sqrt{9}$

C) $1/\sqrt{11}$

D) $1/\sqrt{13}$

E) $1/2$



26.- Sea el triángulo acutángulo ABC de altura $\overline{BF}$, además "H" y "O" son ortocentro y circuncentro del triángulo; si $HB^2 + AC^2 = 5$ y $HP \cdot HB = 1/8$. Calcular HO.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

27.- En la figura T y S son puntos de tangencia. Hallar OT, si AM = 18 y MT = 6

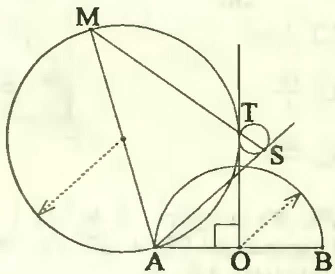
A) $4\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{5}$

D) $3\sqrt{5}$

E) $2\sqrt{5}$



28.- En una circunferencia se trazan las cuerdas congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, trazándose luego la cuerda $\overline{BD}$ de modo que $\overline{AC} \cap \overline{BD}$: Q. Si BQ $= a$ y QD $= b$, calcular : AB.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a(a-b)}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $2\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2-b^2}$

29.- En la figura A, B y C son puntos de tangencia PA = 8 y PC = 6. Hallar : PB.

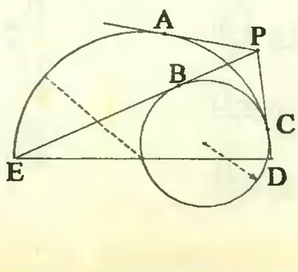
A) 10

B) $2\sqrt{5}$

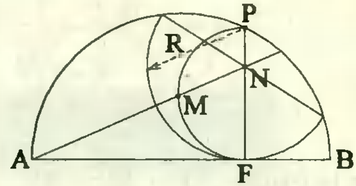
C) 5

D) 4

E) $5\sqrt{2}$



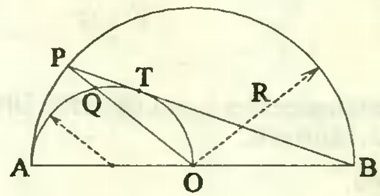
30.- En la figura : $\overline{AB}$ y $\overline{PF}$ son diámetros. Hallar MN.



A) $\frac{2}{3}R$ B) $\frac{3}{4}R$ C) $\frac{5}{6}R$

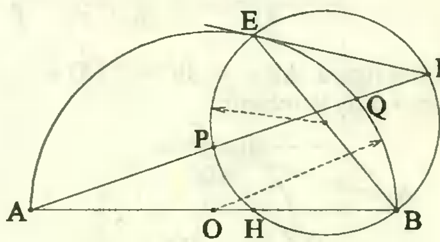
D) $\frac{4}{8}R$ E) $\frac{4}{5}R$

31.- Del gráfico; hallar PQ, si T es punto de tangencia.



A) $\frac{R}{6}$ B) $\frac{2R}{7}$ C) $\frac{2R}{9}$ D) $\frac{R}{10}$ E) $\frac{3R}{14}$

32.- En la figura : $\overline{FE}$ es tangente AP - FQ $= a$ y AF $= b$. Hallar AH.



A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $3\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\sqrt{b^2-a^2}$

33.- En la figura : O y P son centros AB = 10 y MN = 12. Hallar OT.

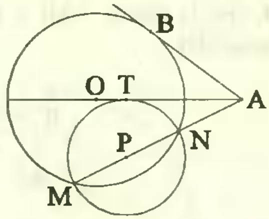
A) 2

B) 2,4

C) 3

D) 3,6

E) 4



34.- En la figura : $AT^2 + BP^2 = 98$ y además $7\ MD = 2BC$. Hallar MN.

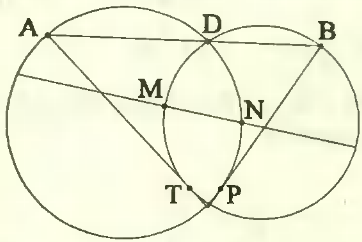
A) $\sqrt{2}$

B) 2

C) $2\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E) 1



35.- En la figura : O es centro, QK = KP , OH = a, HP = b. Hallar HL.

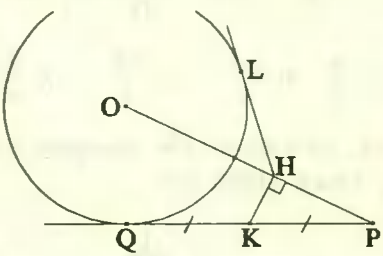
A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\sqrt{ab}$

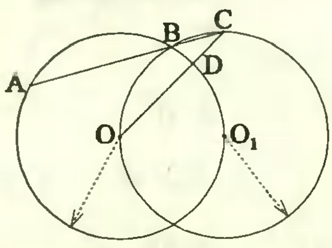
C) $\dfrac{a-b}{a+b}$

D) a

E) b



36.- En la figura AB = x , BC = 2 CD = 2 ; luego es válida la relación :



A) $4x^2 + 7x + 2 = 0$ D) $8x^2 + 28x + 11 = 0$

B) $4x^2 + 16x + 8 = 0$ E) $8x^2 + 11x + 28 = 0$

C) $4x^2 + 16x + 8 = 0$

37.- En la figura: PM = a , MQ = b. Hallar r

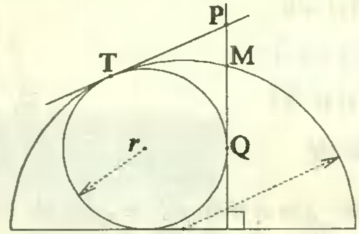
A) $\dfrac{b^2}{a}$

B) $2ab$

C) $\sqrt{ab}$

D) $\dfrac{b^2}{2a}$

E) $\dfrac{a}{b}$



38.- En la figura : AT = a , BC = b . Hallar : R.

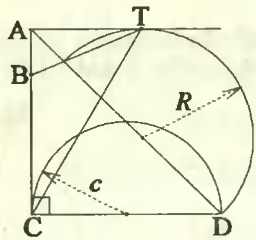
A) $\dfrac{a(4c^2-b^2)}{4bc}$

B) $\dfrac{b(4c^2-b^2)}{4ac}$

C) $\sqrt[3]{abc}$

D) $\dfrac{ac}{b}$

E) $\dfrac{ab}{c}$



39.- En la figura : A, B, Q y L son puntos de tangencia; si $PB^2 + AT^2 = b$ y $PQ^2 + TL^2 = a$. Calcular : AB.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\dfrac{1}{2}\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{b^2-a^2}$

D) $\sqrt{b-a}$ E) $\sqrt{\dfrac{b-a}{2}}$

40.- Hallar del gráfico PC; si AB = a

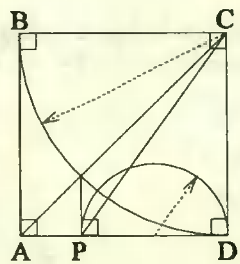
A) $\dfrac{3}{4}\ a$

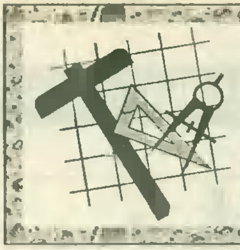
B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

D) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

E) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$





CAP. 16

relaciones métricas en la circunferencia II

16.1 TEOREMAS DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible se verifican las siguientes relaciones :

16.1A 1er Teorema de Ptolomeo

La suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos es igual al producto de las longitudes de sus diagonales.

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \qquad \dots (16.1)$$

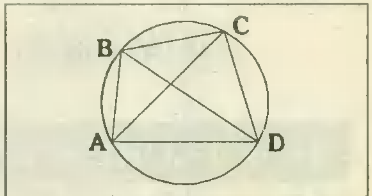


Fig. 16.1

16.1B 2do Teorema de Ptolomeo

La relación entre las longitudes de sus diagonales es igual a la relación entre la suma de los productos de las longitudes de los lados que concurren en los extremos de dichas diagonales.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD} \qquad \dots (16.2)$$

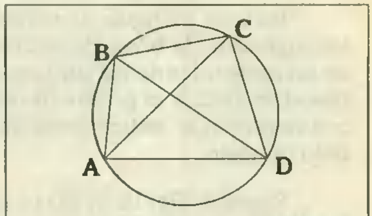


Fig. 16.2

16.2 RECTAS ISOGONALES

Son aquellas, rectas que pasando por el vértice, de un ángulo dado, forman con la bisectriz, de éste ángulos congruentes. Para un ángulo dado AOB de bisectriz $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ son isogonales pudiéndose presentar dos casos :

16.2A Isógonos Interior

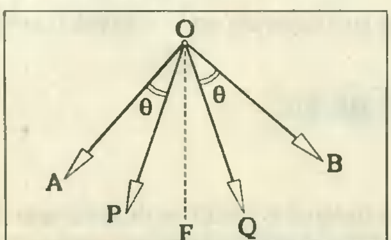


Fig. 16.3

16.2B Isógonos Exteriores

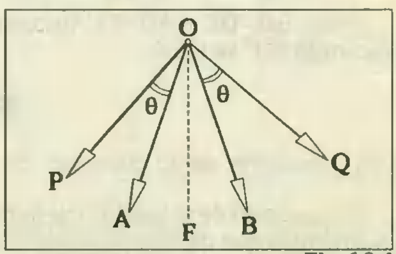


Fig. 16.4

16.3 CONSECUENCIAS DE LAS RECTAS ISOGONALES

TEOREMA

En todo triángulo se cumple que el producto de las longitudes de dos lados es igual al producto de las longitudes de las isogonales una limitada por el lado opuesto y la otra por la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

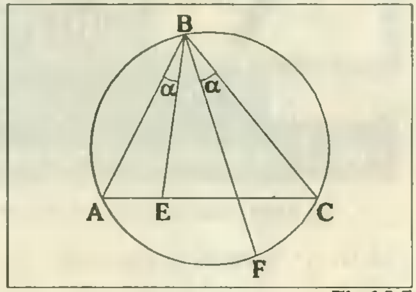


*Fig.*16.5

Si $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$ son isogonales respecto al $\measuredangle$ ABC se cumple :

$$\mathbf{AB \cdot BC = BE \cdot BF} \qquad \text{... (16.3)}$$

16.4 TEOREMAS DE LA BISECTRIZ

16.4A Teorema de la Bisectriz Interior

En todo triángulo se verifica que el cuadrado de la longitud de la bisectriz interior es igual al producto de las longitudes de los lados que concurren con dicha bisectriz menos el producto de las longitudes de los segmentos que determinan dicha bisectriz sobre el lado opuesto.

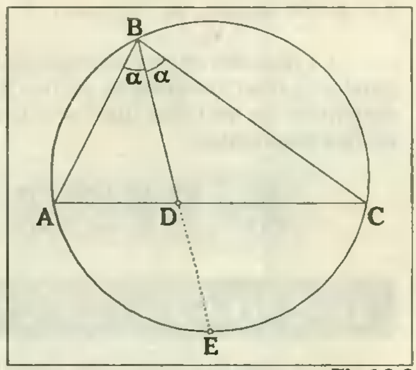


*Fig.*16.6

Según la *Fig.* 16.6 , $\overline{BD}$ es Bisectriz Interior, luego se cumple :

$$\mathbf{(BD)^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC} \qquad \text{... (16.4)}$$

Para esto tenemos presente que la bisectriz interior es isogonal con si misma.

Por lo tanto aplicando el teorema 16.3 se tiene :

$$AB \cdot BC = BD \cdot BE = BD\,(BD + DE) \quad \Rightarrow \quad AB \cdot BC = BD^2 + BD \cdot DE$$

Pero : $BD \cdot DE = AD \cdot DC$ (teorema) de donde sustituyendo en la expresión anterior y despejando BD^2 se tiene :

$$\mathbf{BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC}$$

16.4B Teorema de la Bisectriz Exterior

El cuadrado de la longitud de la bisectriz exterior es igual al producto de las longitudes de los segmentos que determina sobre el lado opuesto menos el producto de las longitudes de los lados que forman el vértice de donde parte dicha bisectriz.

Según la *Fig*. 16.7, $\overline{BE}$ es Bisectriz Exterior, luego según lo dicho se cumple :

$$(BE)^2 = AE \cdot CE - AB \cdot BC \qquad \text{... (16.5)}$$

Nota: Se deja al lector la demostración de éste teorema por el teorema 16.3.

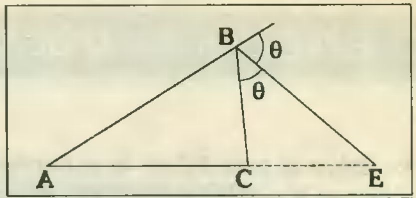


Fig. 16.7

16.5 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD (Teorema de Chadú)

Si el Δ ABC es equilátero y P es un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita entonces se cumple :

$$PC = PA + PB \qquad \text{... (16.6)}$$

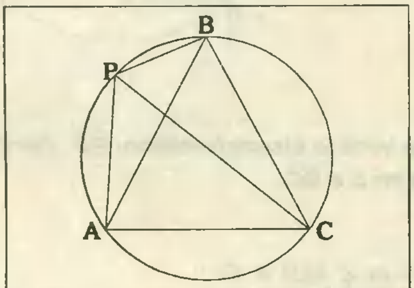


Fig. 16.8

2DA PROPIEDAD (Extensión del teor. de Chadú)

Sea el polígono regular $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ de n lados con n : impar, luego si P es un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita se verifica la siguiente relación :

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + \ldots PA_n = PA_2 + PA_4 + \ldots PA_{n-1}$$

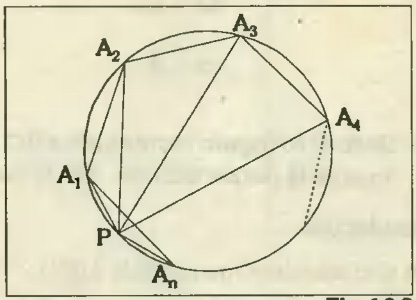


Fig. 16.9

3RA PROPIEDAD

Para todo triángulo ABC de altura $\overline{BH}$ cuyo circunradio mide R se verifica la siguiente relación :

$$AB \cdot BC = BH \cdot 2R \qquad \text{... (16.7)}$$

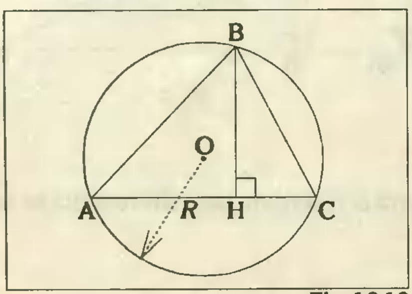


Fig. 16.10

4TA PROPIEDAD

Para el triángulo isósceles ABC (AB = BC), inscrito en la circunferencia se cumple :

$$(AB)^2 = BE \cdot BD \qquad \text{... (16.8)}$$

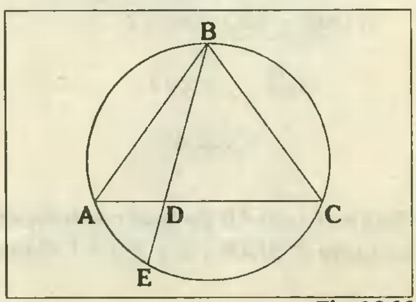
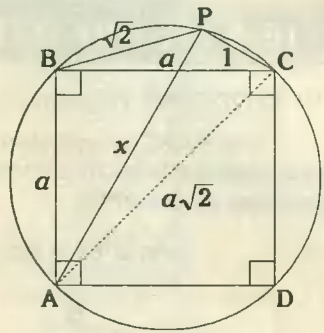


Fig. 16.11

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Sobre el arco BC de la circunferencia circunscrita a un cuadrado ABCD se ubica el punto P de modo que PB = $\sqrt{2}$ y PC = 1. Calcular PA.

Resolución.-



Hacemos : AB = BC = a

Luego : AC = $a\sqrt{2}$

En el cuadrilátero inscrito ABPC, aplicamos el Primer teoremade Ptolomeo :

$$(a)1 + (a\sqrt{2})\sqrt{2} = xa$$

$$3a = xa$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3}$$

2.- Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Por D se levanta la perpendicular $\overline{AE}$ la cual intersecta en E a $\overline{BC}$

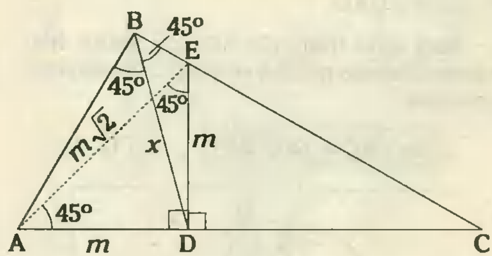
Resolución.-

En el cuadrilátero inscriptible ABED : $m \measuredangle$ EAD = $m \measuredangle$ AED = 45°

Luego, si : AD = DE = m

$$\Rightarrow \quad AE = m\sqrt{2}$$

Por el teorema de Ptolomeo se tiene :



$$(AB)\,m + (BE)\,m = m\sqrt{2}$$

$$m\,(\underbrace{AB + BE}_{}) = xm\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} \quad = x\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$$

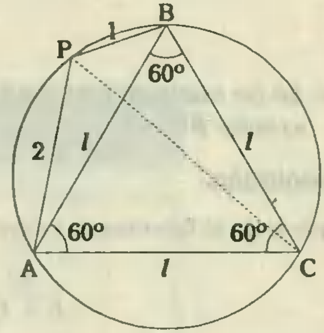
3.- Sobre el arco AB de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC se ubica el punto P. Si AP = 2 y PB = 1. Calcular BC.

Resolución.-

Aplicando el segundo teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero inscrito APBC se tiene :

$$\frac{l}{PC} = \frac{2 \cdot l + 1 \cdot l}{2 \cdot 1 + l \cdot l}$$

$$\frac{l}{PC} = \frac{3l}{2 + l^2} \quad \Rightarrow \quad l^2 = 3PC - 2 \quad \ldots (1)$$



Por el teorema de Chadú : $PC = PA + PB = 2 + 1$

$$\Rightarrow \quad PC = 3 \quad \ldots (2)$$

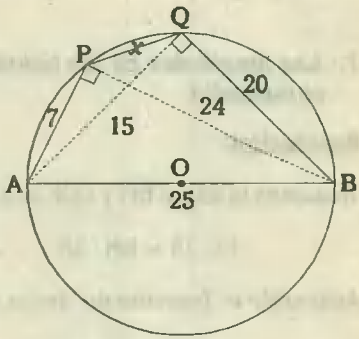
Sustituyendo (2) en (1) : $l^2 = 3(3) - 2$

$$\therefore \quad l = \sqrt{7}$$

4.- En una circunferencia cuyo radio mide 12,5 se traza el diámetro $\overline{AB}$, luego por sus exteriores se traza cuerdas $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ de 7 y 20 unidades de longitud respectivamente. Calcular PQ

Resolución.-

Al trazar las cuerdas $\overline{PB}$ y $\overline{AQ}$ se determinan los triángulos rectángulos APB y AQB.



Donde : $PB = \sqrt{25^2 - 7^2} =- 24$ y $AQ = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

En el cuadrilátero inscrito APQB, empleamos el primer teorema de Ptolomeo :

$$7 \cdot 20 + 25x = 15 \cdot 24$$

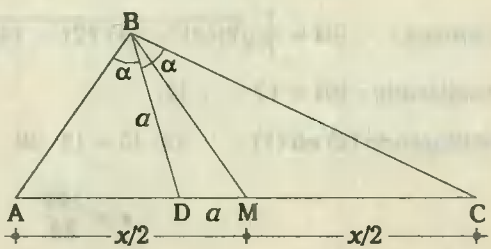
$$\therefore \quad x = \frac{44}{5}$$

5.- En un triángulo se trazan la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{BM}$. Si BD = DM y AB · BC = 72. Calcular AC.

Resolución.-

Aplicando el teorema de la bisectriz interior :

$$a^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$$



Pero : $AB \cdot BC = 72$

$$AD = \frac{x}{2} - a \quad \Rightarrow \quad DC = a + \frac{x}{2}$$

Luego : $a^2 = 72 - \left(\frac{x}{2} - a\right)\left(\frac{x}{2} + a\right)$

$$a^2 = 72 - \frac{x^2}{4} + a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} = 72$$

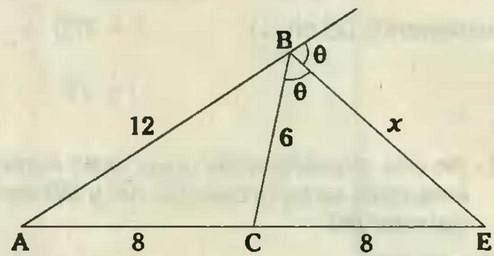
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 12\sqrt{2}}$$

6.- En un triángulo ABC : AB = 12 , BC = 6 y AC = 8.Calcular la longitud de la bisectriz exterior $\overline{BE}$.

Resolución.-

Aplicando el Teorema de Proporcionalidad de la Bisectriz Exterior :

$$\frac{12}{8 + CE} = \frac{6}{CE}$$



$$12\,CE = 48 + 6\,CE \quad \Rightarrow \quad CE = 8$$

Finalmente por el teorema de 16.4B :

$$x^2 = AE \cdot CE - AB \cdot BC = 16 \cdot 8 - 12 \cdot 6$$

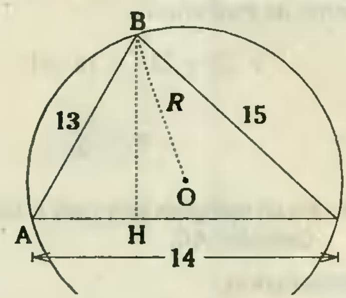
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6}$$

7.- Las longitudes de los lados de un triángulo son 13, 14 y 15. Calcular la longitud del circunradio.

Resolución.-

Trazamos la altura $\overline{BH}$ y aplicamos 3ra propiedad :

$$13 \cdot 15 = BH \cdot 2R \quad \ldots \ (1)$$



Aplicando el Teorema de Herón :

$$BH = \frac{2}{14}\sqrt{P\ (P - 13)\ (P - 14)\ (P - 15)}$$

Como : $\quad P = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

Entonces : $\quad BH = \dfrac{1}{7}\sqrt{21(21 - 13)\ (21 - 14)\ (21 - 15)}$

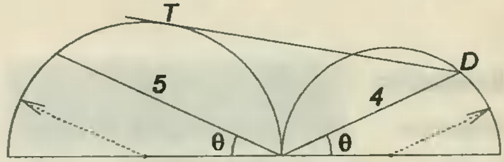
Resolviendo : $BH = 12 \quad \ldots \ (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $\quad 13 \cdot 15 = 12 \cdot 2R$

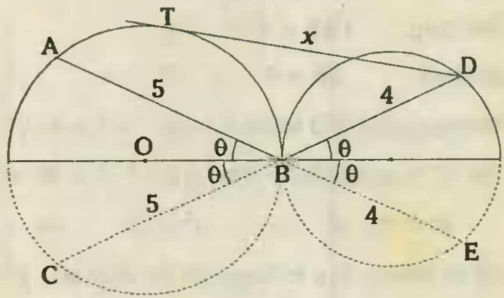
$$\therefore \quad \boldsymbol{r = \frac{195}{24}}$$

MISCELÁNEA

1.- *De la figura mostrada, calcular DT.*



Resolución.-



Al completar las circunferencias, notamos que :

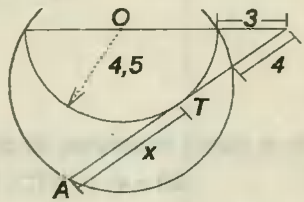
$$AB = CB = 5 \quad y \quad BD = BE = 4$$

Luego por el Teorema de la Tangente para la circunferencia O: $x^2 = 4\,(4 + 5)$

$$x^2 = 4 \,.\, 9$$

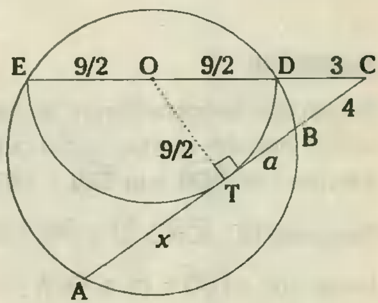
$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 6}$$

2.- *De la figura mostrada. Calcular AT.*



Resolución.-

Trazamos el radio $\overline{OT}$ en el cual resulta ser perpendicular a $\overline{AC}$.



Luego : $OT = \dfrac{9}{2}$ y $OC = \dfrac{9}{2} + 3 = \dfrac{15}{2}$

Sea BT = a, de donde empleando el teorema de Pitágoras en el Δ OTC :

$$\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (a+4)^2$$

Resolviendo : $a = 2$

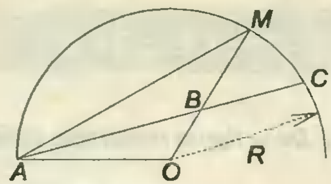
Aplicando el Teorema de las Secantes : $12 \cdot 3 = (x + 2 + 4) \cdot 4$

$$9 = x + 6$$

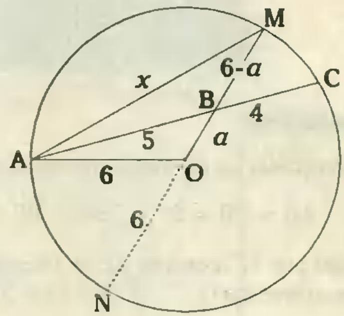
$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 3}$$

3.- En la figura mostrada, $4 \cdot AB = 5 \cdot BC = 20$ y $R = 6$

Calcular la longitud de $\overline{AM}$



Resolución.-



Hagamos : AM = x y OB = a

luego : BM = 6 - a

Del dato : 4 AB = 5 BC = 20

Resulta : AB = 5 y BC = 4

Prolongamos $\overline{MO}$ hasta N luego : ON = 6 y BN = 6 + a

Por el Teorema de las Cuerdas : $4 \cdot 5 = (6 - a)(6 + a)$

$$20 = 36 - a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

En el Δ AMO, por el Teorema de Stewart : $x^2 \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot 2 = 5^2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow 4x^2 = 150 + 48 - 72$

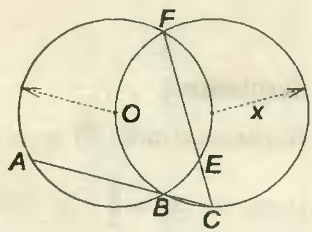
$$4x^2 = 126 \Rightarrow x^2 = \frac{63}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{3}{2}\sqrt{14}}$$

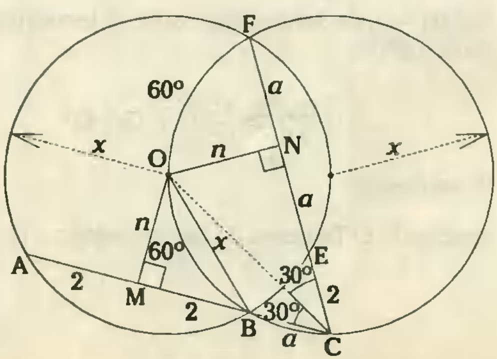
4.- De la figura mostrada, se sabe que :

AB = 4 y EC = 2.

Calcular x



Resolución.-



Puesto que las circunferencias pasan mutuamente por sus centros serán congruentes y además : $m\,\widehat{FOB} = m\,\widehat{FEB} = 120$ (Prop.)

Trazamos $\overline{OC}$; $\overline{ON} \perp \overline{EF}$ y $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Luego : $m\measuredangle FCO = m\measuredangle OCA = 30$

AM = MB = 2 ; OM = ON = n y FN = NE = a

Aplicando el Teorema de la Secante :

$$2(2a + 2) = a(4 + a)$$

$$4a + 4 = 4a + a^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

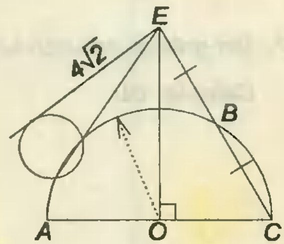
En el ⊿ MOB : $x^2 = 4 + n^2$

Pero : $n = 4\sqrt{3}/3$

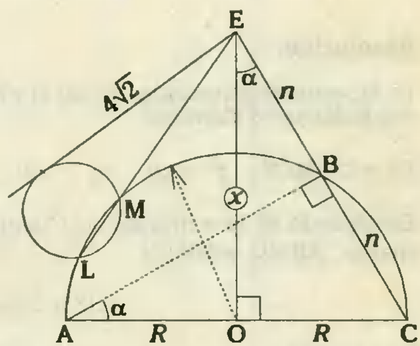
Reemplazando : $x^2 = 4 + \dfrac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{12+16}{3}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{2\sqrt{21}}{3}}$$

5.- A partir del gráfico mostrado se pide calcular EO si : EB = BC.



<u>**Resolución**</u>.-



Consideremos los siguientes parámetros :

$$\mathrm{EB} = \mathrm{BC} = n \;\text{ y }\; \mathrm{AO} = \mathrm{OC} = R$$

En la circunferencia menor aplicamos el Teorema de la Tangente :

$$(4\sqrt{2})^2 = \mathrm{EL} \cdot \mathrm{EM} \quad \ldots (1)$$

Para la semicircunferencia utilizamos el teorema de las secantes :

$$2n \cdot n = \mathrm{El} \cdot \mathrm{EM} \quad \ldots (2)$$

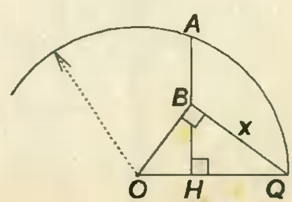
De (1) y (2) : $2\,n^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

Además : ⊿ ABC ≅ ⊿ EOC : $\Rightarrow \quad \dfrac{2n}{2R} = \dfrac{R}{n}$ de donde $n = R$

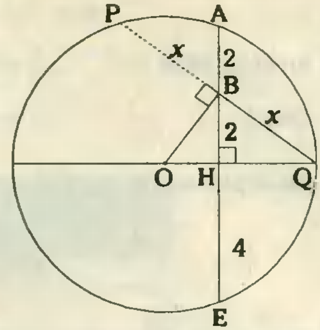
Esto significa que, en el ⊿ EOC : $\alpha = 30$ y $x = n\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 4\sqrt{3}}$$

6.- A partir del gráfico mostrado se pide calcular BQ, sabiendo que : AB = BH = 2



Resolución.-



Prolongamos $\overline{QB}$ hasta intersectar a la circunferencia en el punto P, luego como $\overline{OB} \perp \overline{PQ}$, entonces $PB = BQ = x$

Aplicando el Teorema de las Cuerdas : $PB \,.\, BQ = AB \,.\, BE$

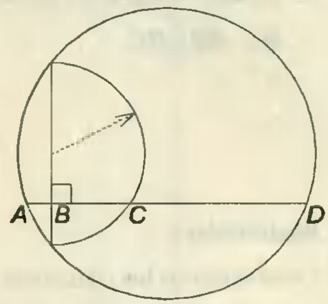
$$x \cdot x = 2 \cdot (2 + 4)$$

$$x^2 = 12$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$$

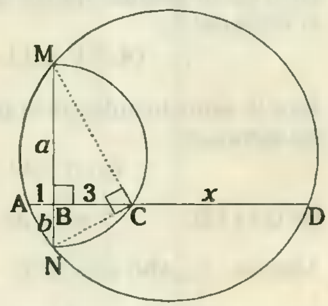
7.- Del gráfico adjunto se sabe que : AB = 1 ; BC = 3

Calcular CD



Resolución.-

En la semicircunferencia, al unir M y N con el punto C se obtiene el ángulo MCN de 90º, luego por Relaciones Métricas.



En el ⊿ MCN : $3^2 = ab \quad \Rightarrow \quad ab = 9 \quad ...\,(1)$

Empleando el Teorema de las Cuerdas en la circunferencia mayor : AB.BD = MB.BN

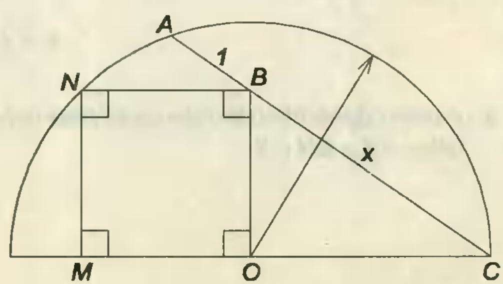
$$1(3 + x) = ab \quad ...\,(2)$$

De (1) y (2) : $$9 = 3 + x$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 6}$$

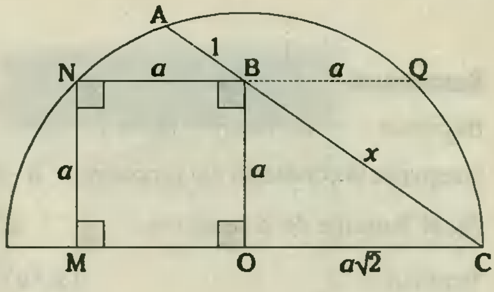
8.- De la figura, MNBO es un cuadrado.

Calcular x



Resolución.-

Al prolongar $\overline{NB}$ hasta Q se tiene que : NB = QB = a (longitud del lado del cuadrado) luego empleando el Teorema de las Cuerdas :



$$a^2 = (1)(x)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = x \quad \dots (1)$$

En el ⊿ BOC : $x^2 = a^2 + 2a^2$

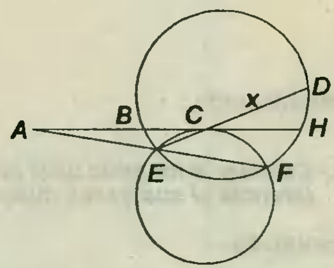
$$\Rightarrow \quad x^2 = 3a^2 \quad \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) :

$$x^2 = 3 \,.\, x$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 3}$$

9.- Dada la siguiente figura, donde : AB = 5 ; BC = 3 y CE = 4. Calcular la longitud de CD



Resolución.-

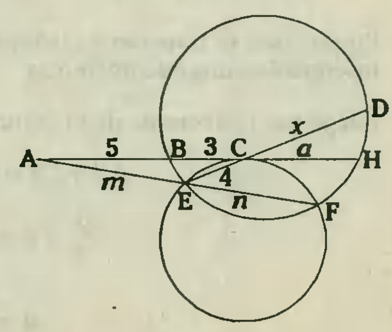
Por el Teorema de la Tangente para la circunferencia menor : $8^2 = m\,(m+n)$ ... (1)

Por el Teorema de las Secantes en la circunferencia mayor : $m\,(m+n) = 5\,(a+8)$ ... (2)

De (1) y (2) : $5\,(a+8) = 64$

$$a + 8 = \frac{64}{5}$$

$$a = \frac{64}{5} - 8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{24}{5}$$

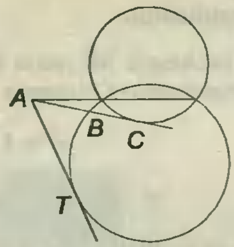


Finalmente por el Teorema de las Cuerdas con la circunferencia mayor :

$$4x = 3 \,.\, \frac{24}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{5}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 3{,}6}$$

10.- De la figura mostrada, se sabe que : AT - BC = 8
Calcular AB.



Resolución.-

Hacemos : $AT = a$ y $BC = b$

Luego por la condición del problema : $a - b = 8$

Por el Teorema de la Tangente : $a^2 = m(m+n)$ ... (1)

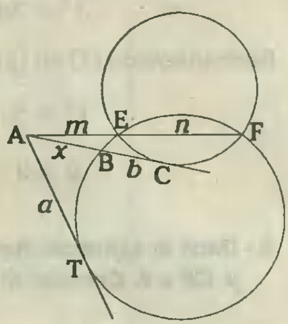
También : $(x+b)^2 = m(m+n)$ ... (2)

De (1) y (2) : $a^2 = (x+b)^2$

$a = x + b$

$x = a - b$

Reemplazando : $\therefore$ $\mathbf{x = 8}$



11.- Calcular la longitud de la diagonal de un trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia si sus bases miden 1 y 2.

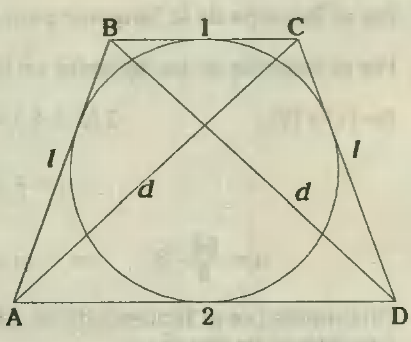
Resolución.-

Consideremos los siguientes parámetros :

$AB = CD = l$ y $AC = BD = d$

Luego empleando el teorema de Pithot :

$l + l = 1 + 2 \quad \Rightarrow \quad l = \dfrac{3}{2}$



Puesto que el trapecio es isósceles entonces es inscriptible a una circunferencia.

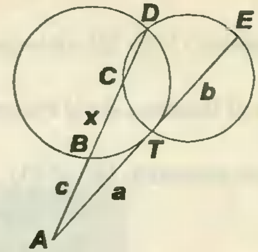
Luego por 1er Teorema de Ptolomeo :

$$l \,.\, l + 1.2 = d \,.\, d$$

$$\frac{9}{4} + 2 = d^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{d = \frac{\sqrt{17}}{2}}$$

12.- Del gráfico adjunto, T es punto de tangencia. Con los datos de la figura, Calcular BC.



Resolución.-

Consideremos los siguientes parámetros AB = c , BC = x , AT = a y TE = b.

Por Teorema de la Tangente : $a^2 = c\,(c + x + n) \quad \Rightarrow \quad c + x + n = \dfrac{a^2}{c}$ ... (1)

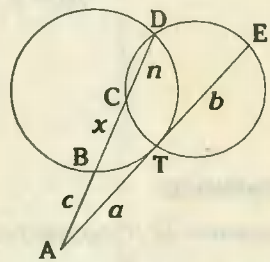
Por Teorema de la Secante : $a\,(a + b) = (x + c)\,(c + x + n)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $a\,(a + b) = (x + c)\left(\dfrac{a^2}{c}\right)$

$$c\,(a + b) = a\,(x + c)$$

$$ac + bc = ax + ac$$

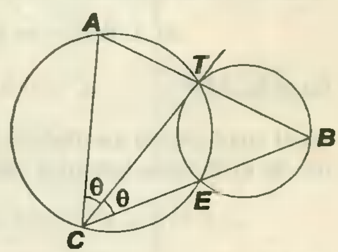
$$\boldsymbol{x = \frac{bc}{a}}$$



13.- En la figura (T → Punto de Tangencia)

Donde : AT = 3 y TB = 4

Calcular la medida de $\overline{CT}$



Resolución.-

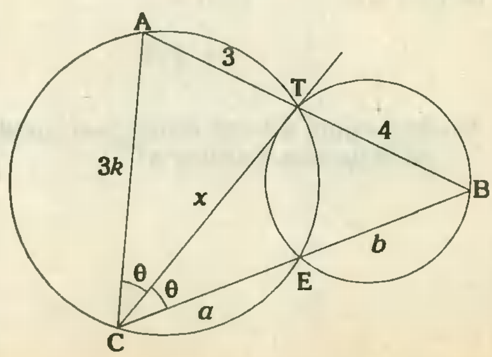
Empleamos el Teorema de la Bisectriz para el triángulo ABC : $\dfrac{AC}{3} = \dfrac{BC}{4}$

De donde : AC = $3k$ $\quad \Rightarrow \quad$ BC = $4k$

Aplicando el Teorema de las Secantes en la circunferencia mayor : BA · BT = BC · BE

$$7 \cdot 4 = 4k \cdot b \quad \Rightarrow \quad 28 = 4k \cdot b \text{... (1)}$$

Por el Teorema de la Tangente en la circunferencia menor : $x^2 = 4k \cdot a$ ... (2)



Sumando (1) y (2), obtenemos (3) : $x^2 + 28 = 4k\overbrace{(a+b)}^{4k} \Rightarrow x^2 + 28 = 16k^2$ ... (3)

Por el Teorema de la Bisectriz en el Δ ABC : $x^2 = (3k)(4k) - 3 \cdot 4 \Rightarrow k^2 = \dfrac{x^2+12}{12}$ ... (4)

Reemplazando (4) en (3) : $x^2 + 28 = 16 \cdot \dfrac{(x^2+12)}{12}$

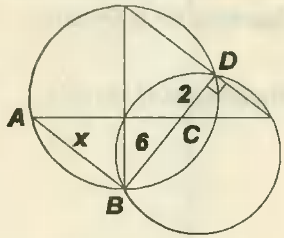
$$3x^2 + 84 = 4x^2 + 48$$

$$84 - 48 = x^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6}$$

14.- A partir de la figura, calcular AB, si se sabe que :

BC = 6 y CD = 2



<u>**Resolución**</u>.-

Trazamos $\overline{AF}$, luego ya que $\overline{BF}$ es diámetro, entonces : $m\measuredangle FAB = 90$

Además en la circunferencia menor :

$$m\measuredangle BHE = m\measuredangle BDE = 90$$

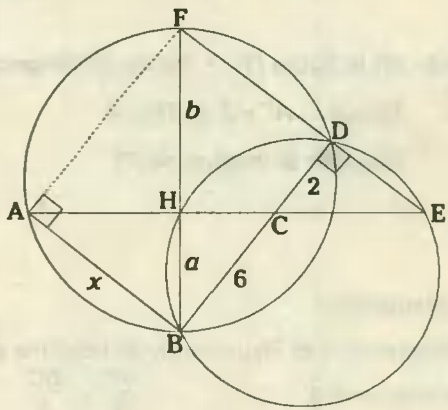
En el ⊾ AFB : $x^2 = a(a+b)$ ... (1)

En el cuadrilátero inscriptible HFDC por el Teorema de la Secante tenemos : BF · BH = BD · BC

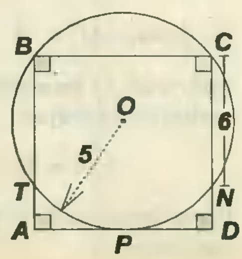
$$(a+b)a = 8 \cdot 6 = 48 \text{ ... (2)}$$

De (1) y (2) : $x^2 = 48$

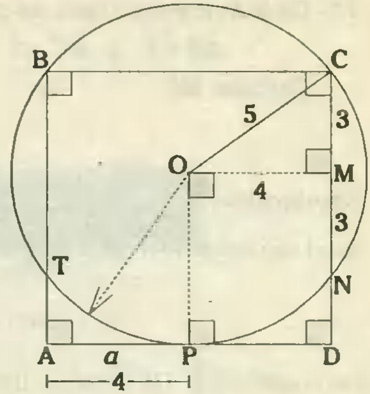
$$\therefore \quad \mathbf{x = 4\sqrt{3}}$$



15.- En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado, si P es punto de tangencia. Calcular AT.



Resolución.-



Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{CN}$ $\Rightarrow$ $CM = MN = 3$

En el ⊿ OMC : $OM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

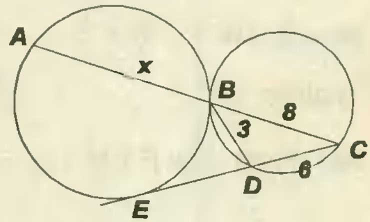
Pero : $OM = PD = 4$ $\Rightarrow$ $AP = 4$ y $AD = 8 = AB$

Por el Teorema de la Tangente: $(AP)^2 = AB \cdot AT$

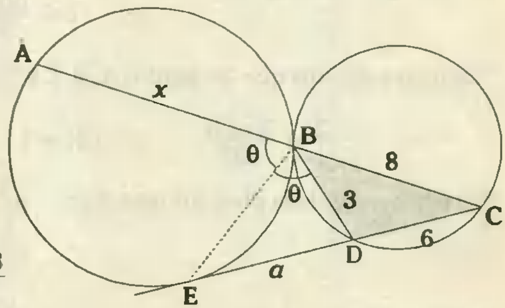
$$4^2 = 8 \cdot AT$$

$$\therefore \quad \mathbf{AT = 2}$$

16.- De la figura mostrada. Calcular AB



Resolución.-



Trazamos $\overline{BE}$, luego por propiedad en circunferencias se cumple que :

$$m \measuredangle ABE = m \measuredangle EBD = \theta$$

Con respecto al Δ BDC, $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, luego empleando el teorema correspondiente :

$$\frac{8}{6+a} = \frac{3}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{18}{5}$$

Por el Teorema de la Tangente : $(a+6)^2 = 8\,(x+8)$

Reemplazando : $\left(\frac{18}{5}+6\right)^2 = 8\,(x+8)$

$$\left(\frac{48}{5}\right)^2 = 8\,(x+8)$$

$$\frac{6.8.48}{25} = 8\,(x+8) \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{36.8}{25} - 8$$

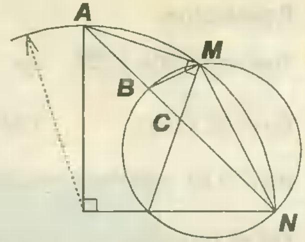
$$x = 8\left(\frac{36-25}{25}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{88}{25}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 3{,}52}$$

17.- De la figura mostrada, se sabe que :

$$AB = 2 \quad y \quad BC = 1$$

Calcular MN

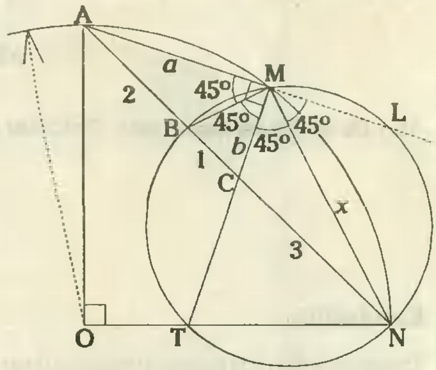


Resolución.-

En el cuadrante AON, el triángulo ex-inscrito LMN mide :

$$m\measuredangle LMN = \frac{m\widehat{AN}}{2} = \frac{90}{2} = 45$$

De donde : $m\measuredangle TMN = m\measuredangle BMC = m\measuredangle AMB = 45$



En el ⊾ AMC : $\frac{a}{2} = \frac{b}{1} \quad \Rightarrow \quad a = 2b \quad ... (1)$

También : $a^2 + b^2 = 9 \quad ... (2)$

De (1) y (2) : $(2b)^2 + b^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

También sabemos que los puntos A, B, C y N forman una cuaterna armónica :

$$\frac{2}{1} = \frac{3+CN}{CN} \quad \Rightarrow \quad CN = 3$$

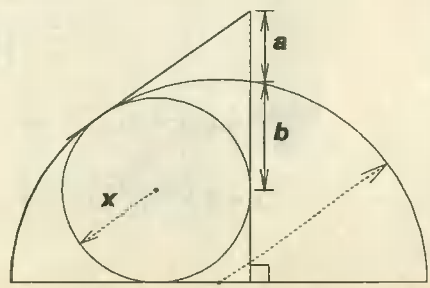
Por el teorema de la bisectriz exterior : $x^2 = 6 \cdot 3 - ab$

$$x^2 = 18 - ab$$

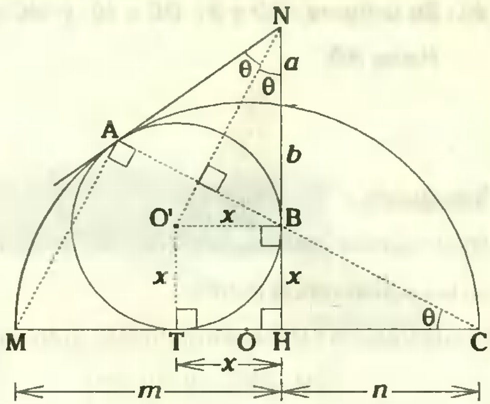
Reemplazando : $x^2 = 18 - \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$$\boldsymbol{x = \frac{6}{5}\sqrt{10}}$$

18.- De la figura mostrada, calcular el radio de la circunferencia menor.



Resolución.-



Por propiedad, los puntos A, B y C son colineales :

$\Rightarrow \quad m\measuredangle MAC = 90$

El cuadrilátero TO'BH es un cuadrado, luego :

$H = BH = O'B = x$

En el gráfico observamos que :

$\triangle OBN \cong \triangle BHC$

$\Rightarrow \qquad n = a + b \quad ...(1)$

El cuadrilátero MABH es inscriptible; entonces :

$n\,(m + n) = AC \cdot BC$ (Teorema de las Secantes)

También : $(x + n)^2 = AC \cdot BC$ (Teorema de la Tangente)

Igualando estos dos últimos : $(x + n)^2 = n\,(m + n)$

$$(x + n)^2 = m\,n + n^2$$

$$x^2 + 2x\,n + n^2 = m\,n + n^2$$

$$x^2 + 2xn = m\,n \qquad ...\ (2)$$

Pero : $m\,n = (x + b)^2 \quad ...\ (3)$

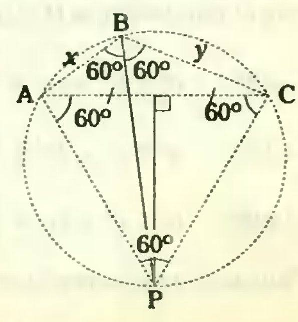
Reemplazando (1) y (3) en (2) : $x^2 + 2x\,(a + b) = (x + b)^2$

$$2xa + 2xb = 2xb + b^2$$

$$\therefore \qquad x = \frac{b^2}{2a}$$

19.- Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC miden x e y respectivamente. La mediatriz de $\overline{AC}$ se intersecta con la bisectriz del B en P. Hallar BP, si m∡ B = 120°.

Resolución.-



Por propiedad el cuadrilátero formado ABCP es inscriptible.

Luego :

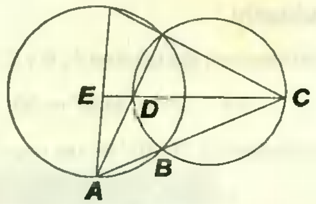
$m\measuredangle ACP = m\measuredangle ABP = 60° \quad \wedge \quad m\measuredangle CAP = m\measuredangle CBP = 60°$

Como el Δ ACP es equilátero podemos emplear directamente el Teorema de Chadú.

$$\mathbf{BP = x + y}$$

20.- En la figura : ED = 2 ; DC = 10 y BC = 8.

Hallar AB.



Resolución.-

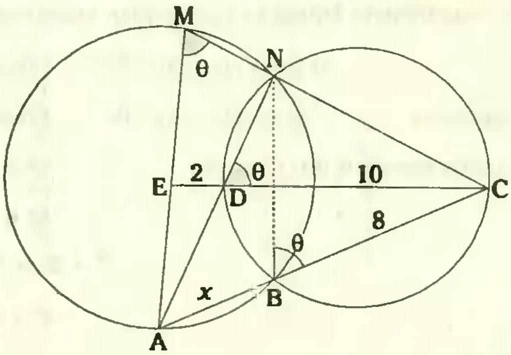
En el cuadrilátero inscrito AMNB, si : $m\measuredangle AMN = \theta \Rightarrow m\measuredangle NBC = \theta$

En la circunferencia menor : $m\measuredangle NDC = m\measuredangle NBC = \theta$

El cuadrilátero EMND es inscriptible, entonces por el Teorema de las Secantes :

$$CM \,.\, CN = 10\,(10 + 2)$$

$$CM \,.\, CN = 120 \qquad \ldots (1)$$



También en la circunferencia mayor por el Teorema de la Secante :

$$CM \,.\, CN = 8\,(8 + x) \qquad \ldots (2)$$

De (1) y (2) : $120 = 8\,(8 + x)$

$$x + 8 = 15$$

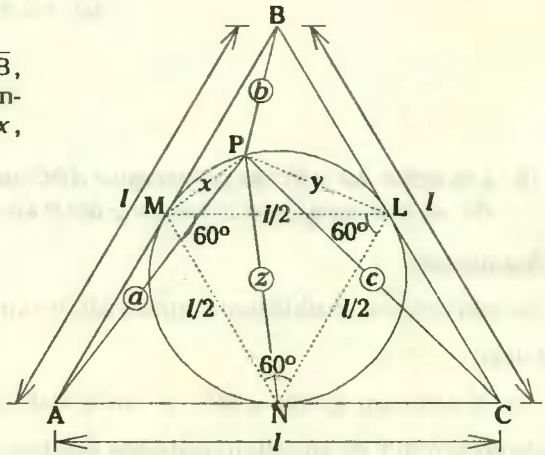
$$\therefore \qquad x = 7$$

21.- El lado de un triángulo equilátero ABC mide "l ". Sobre la circunferencia inscrita se ubica el punto P. Hallar : $PA^2 + PB^2 + PC^2$

Resolución.-

Los puntos M, N Y L son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, por otro lado consideremos los siguientes parámetros : PM = x, PN = z , PL = y , PA = a , PB = b , PC = c

De donde nos piden : $a^2 + b^2 + c^2$



Por el Teorema de la Mediana en el :

ΔAPB : $a^2 + b^2 = 2x^2 + \dfrac{l^2}{2}$

ΔAPC : $a^2 + c^2 = 2z^2 + \dfrac{l^2}{2}$

ΔBPC : $b^2 + c^2 = 2y^2 + \dfrac{l^2}{2}$

Sumando estas expresiones se tiene : $2\,(a^2 + b^2 + c^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + \dfrac{3}{2}l^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4}l^2 \quad ...\ (1)$$

Aplicando el Teorema de Chadú, en el cuadrilátero inscrito MPLN, ya que el Δ MNL es equilátero se tiene : $z = x + y$

Elevando al cuadrado : $z^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad ...\ (2)$

Empleando el 2do Teorema de Ptolomeo :

$$\frac{z}{\frac{l}{2}} = \frac{xy+\frac{l^2}{4}}{\frac{l}{2}(x+y)} \Rightarrow z^2 = xy + \frac{l^2}{4} \Rightarrow xy = z^2 - \frac{l^2}{4} \quad ...\ (3)$$

Reemplazando (3) en (2) : $z^2 = x^2 + y^2 + 2\left(z^2 - \frac{l^2}{4}\right) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{l^2}{2} \quad ...\ (4)$

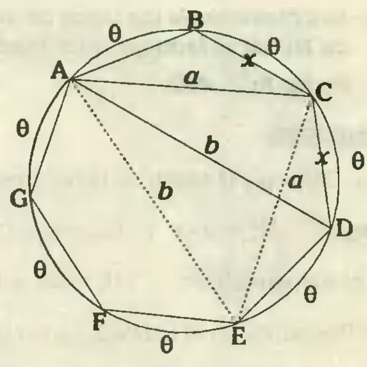
Reemplazando (4) en (1) : $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{4}l^2}$

22.- En un heptágono regular ABCDEFG : $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{5}$. Hallar AB.

Resolución.-

Hagamos lo siguiente : AC = a , AD = b y $m \measuredangle \widehat{AB} = \theta$

Luego : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$ (dato)



Del gráfico : $m\ \widehat{CDE} = m\ \widehat{ABC} = 2\theta$ y

$m\ \widehat{AFE} = m\ \widehat{ACD} = 3\theta$

$\Rightarrow$ AC = CE = a y AD = AE = b

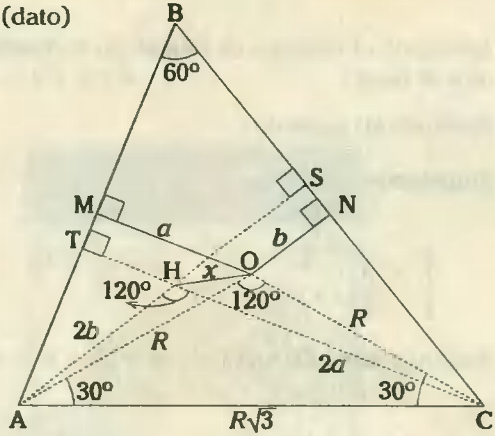
Por Ptolomeo en el $\square$ ACDE : $ax + bx = ab$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Sustituyendo el dato : $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 5}$

23.- El ángulo B de un triángulo acutángulo ABC mide 60º. Si "O" y "H" son el circuncentro y ortocentro de dicho triángulo, además si la diferencia de las distancias de "O" a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es 3. Hallar HO.



Resolución.-

Sean: OM $= a$ y ON $= b$ $\Rightarrow$ $a - b = 3$ (dato)

Del gráfico: $m\measuredangle$ AHC $= 120$

Por propiedad: $m\measuredangle$ AOC $= 2m\measuredangle$ B $= 120$

Además: AH $= 2$ ON $= 2b$

CH $= 2$ OM $= 2a$

OA = OC = R y en el Δ AOC: AC $= R\sqrt{3}$

Empleando el 1[er] Teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero inscriptible AHOC:

$$(2b)R + x(R\sqrt{3}) = (2a)R$$

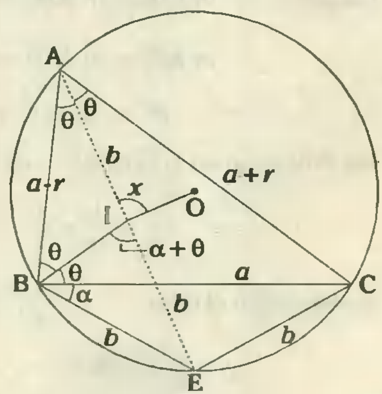
$$\Rightarrow \quad x(R\sqrt{3}) = 2R(a-b)$$

De donde: $$x = \frac{2(a-b)}{\sqrt{3}}$$

Como: $a - b = 3$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$$

24.- Las medidas de los lados de un triángulo ABC forman una progresión aritmética, donde $\overline{BC}$ es el lado de valor medio siendo "I" el incentro y "O" el circuncentro. Hallar m $\measuredangle$ AIO.



Resolución.-

Sea: BC $= a$ y la razón de la progresión: r

Luego: AB $= a - r$ y AC $= a + r$

En el triángulo IEB: IE = BE = EC $= b$

Por Ptolomeo en el $\square$ BACE: $(a-r)b + (a+r)b = \text{AE} \cdot a$

$$b(2a) = \text{AE} \cdot a \quad \Rightarrow \quad \text{AE} = 2b$$

Como: AE = AI $+ b$

Luego: AI $+ b = 2b$ $\Rightarrow$ AI $= b$

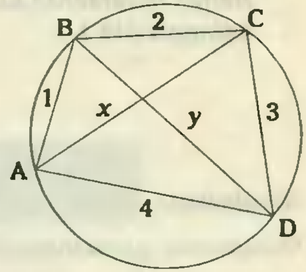
Esto significa que I es el punto medio de $\overline{\text{AE}}$: $\therefore$ $\boldsymbol{x = 90}$

25.- Los lados AB, BC, CD y AD de un cuadrilátero inscrito miden 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Hallar su diagonal menor.

Resolución.-

Por el 1[er] Teorema de Ptolomeo : $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = xy$

$\Rightarrow \quad xy = 11 \quad ... (1)$



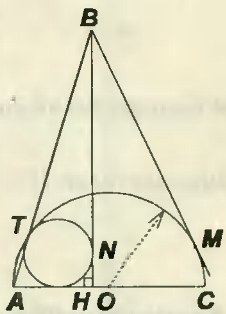
Por el 2[do] Teorema de Ptolomeo : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3} = \dfrac{14}{10}$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{7}{5}x \; ... (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $x\left(\dfrac{7}{5}x\right) = 11$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{\dfrac{55}{7}}}$

26.- En la figura mostrada, T es punto de tangencia; además :
BN = a y NH = b.
Calcular BM



Resolución.-

Por propiedad dada en la circunferencia se verifica que los puntos T, N y C son colineales.

Luego: $m \measuredangle ATC = 90$

Hacemos $AT = n$; $BT = m$ y $BM = x$

El cuadrilátero sombreado es inscriptible, entonces por el Teorema de la Secante :

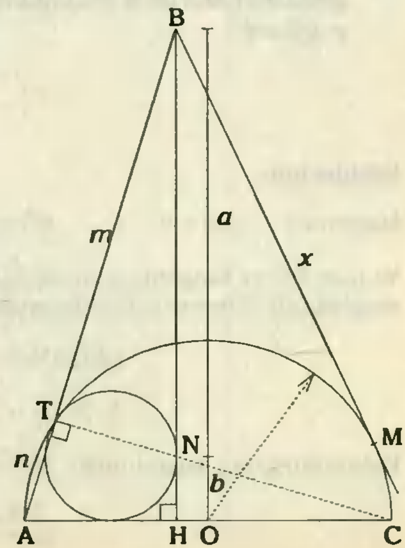
$$m(m+n) = a(a+b) \quad ... (1)$$

Por el Teorema de la Tangente :

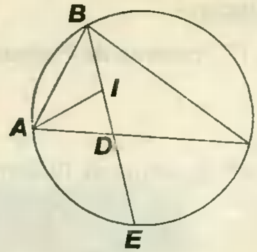
$$x^2 = m(m+n) \quad ... (2)$$

De (1) y (2) : $x^2 = a(a+b)$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{a(a+b)}}$$



27.- Del gráfico mostrado, $BI = a$, $ID = b$ y $DE = c$. Hallar la relación correcta (I es incentro del triángulo ABC).



Resolución.-

Observamos que el triángulo AEI es isósceles

$$\Rightarrow \qquad AE = EC = IE = b + c$$

En el □ ABCE , por 1[er] Teorema de Ptolomeo :

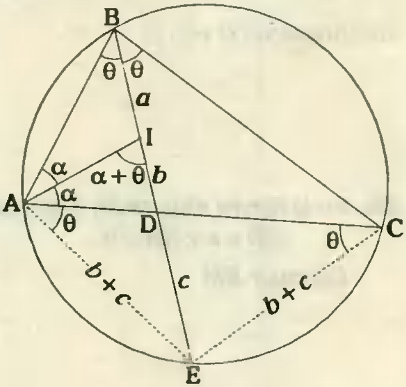
$$AB\,(b + c) + BC\,(b + c) = (a + b + c)\,AC$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{AB + BC}{AC} = \frac{a + b + c}{b + c} \quad \text{... (1)}$$

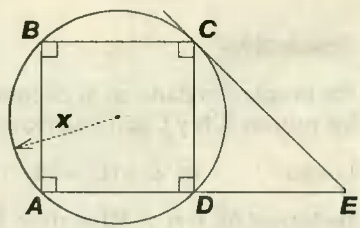
Por el Teorema del Incentro : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AB + BC}{AC}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a + b + c}{b + c}$

$$\boldsymbol{b^2 = c\,(a - b)}$$



28.- A partir del gráfico mostrado se pide calcular la longitud del radio de la circunferencia, si : $CE = 2\sqrt{5}\,AD$ y $DE = 4$



Resolución.-

Hagamos : $AD = a \quad \Rightarrow \quad CE = 2\sqrt{5}\,a$

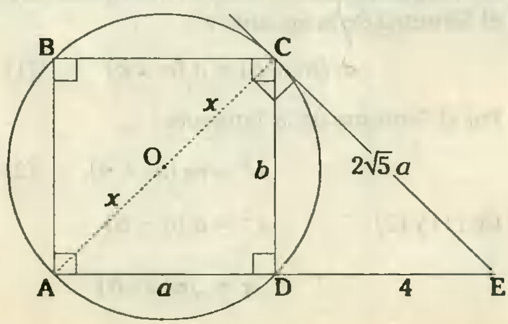
Ya que $\overline{EC}$ es tangente a la circunferencia empleamos el teorema correspondiente :

$$(2\sqrt{5}a)^2 = 4\,(a + 4)$$

$$4 \cdot 5 \cdot a^2 = 4\,(a + 4)$$

Factorizando por aspa simple : $5a^2 - a - 4 = 0$

$$\begin{array}{ccc} a & \times & -1 \\ 5a & & +4 \end{array}$$

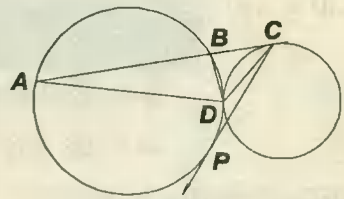


$(a - 1)(5a + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Luego : $(2x)^2 = a(a + 4) \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 1(1 + 4)$

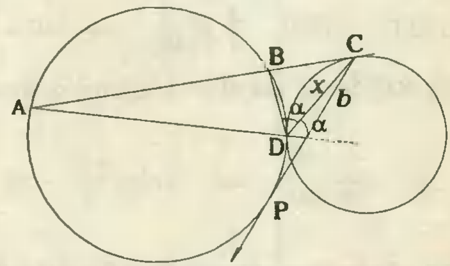
$$x^2 = \frac{5}{4} \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

29.- En la figura : AD · BD = a^2 , CP = b . Hallar DC



Resolución.-

Empleando la propiedad 11° ... de circunferencia, se cumple que $\overline{DC}$ es bisectriz exterior del Δ ADB



Luego : $(x)^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$ ... (1)

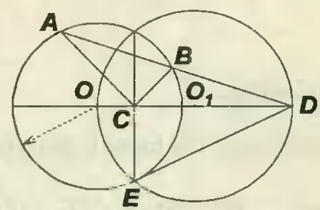
Por Teorema de la Tangente : $b^2 = AC \cdot BC$ ... (2)

Por dato : $AD \cdot BD = a$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $x^2 = b^2 - a^2$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = \sqrt{b^2 - a^2}}$$

30.- En la figura O y O_1 son centros de las circunferencias, AC = 6 , BC = 4 y DE = 7.
Con los datos dados hallar el lado CD.



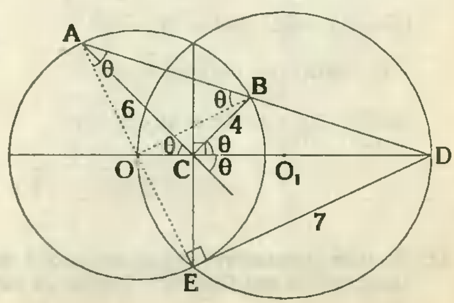
Resolución.-

En el ⊿ OED : $7^2 = OD \cdot CD$ ... (1)

Por el Teorema de la Tangente : $7^2 = DA \cdot DB$ ... (2)

De (1) y (2), el cuadrilátero AOCB es inscriptible, entonces : $m \measuredangle OAB = m \measuredangle BCD = \theta$

Para el Δ ACB : $\overline{CD}$ es bisectriz exterior



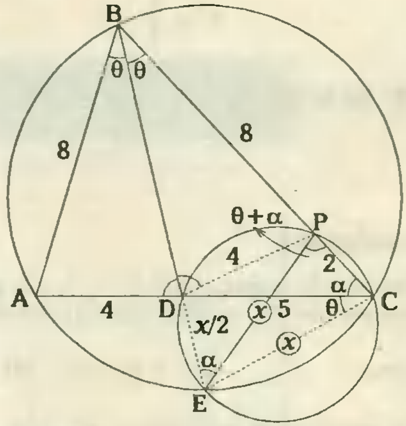
Luego : $(CD)^2 = AD \cdot BD - AC \cdot BC$

$\Rightarrow \qquad CD^2 = 7^2 - 6 \cdot 4$

$$\boldsymbol{CD = 5}$$

31.- En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. La prolongación de $\overline{BD}$ corta a la circunferencia circunscrita al triángulo en E la circunferencia que pasa por E, D y C, intersecta en P a $\overline{BC}$. Si AD = 4, DC = 5 y BP = 8 . Hallar PE.

Resolución.-



Δ ABD $\cong$ Δ DBP (ALA) $\Rightarrow$ AB = BP = 8

AD = DP = 4

Δ ABC : $\dfrac{8}{4} = \dfrac{BC}{5}$ (Teorema Bisectriz)

$\Rightarrow$ BC = 10 $\wedge$ PC = 2

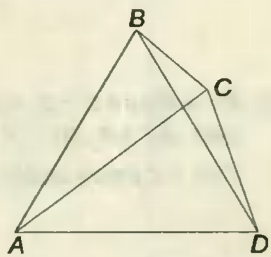
Δ PEC es isósceles, entonces : PE = CE = x

Δ ABD ~ Δ DCE : $\dfrac{8}{x} = \dfrac{4}{DE}$ $\Rightarrow$ DE = $\dfrac{x}{2}$

En el $\square$ DPCE, por el 2do Teorema de Ptolomeo :

$$\frac{x}{5} = \frac{\frac{x^2}{2}+4.2}{2x+2x} \Rightarrow 4x^2 = \frac{5x^2}{2} + 40 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{4\sqrt{15}}{3}}$$

32.- En la figura mostrada, AB = AD = BD = AC = 3a y CD = 2a. Hallar BC.



Resolución.-

Prolongamos $\overline{DA}$ hasta E de modo que : AE = AB = $3a$

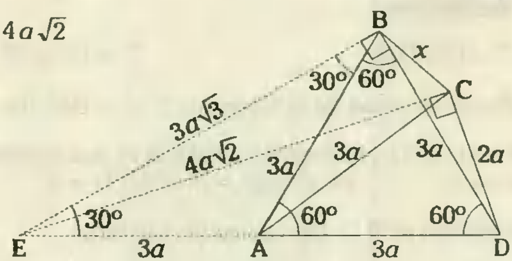
Luego : BE = $3a\sqrt{3}$ y EC = $\sqrt{(6a)^2-(2a)^2} = 4a\sqrt{2}$

En el cuadrilátero inscriptible EBCD :

EB · CD + BC · ED = EC · BD

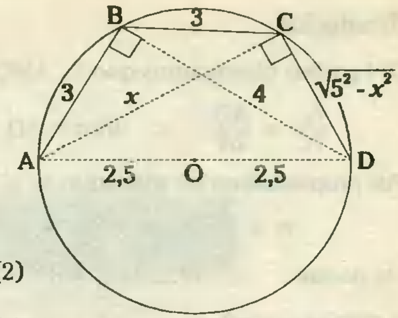
(1° Teorema de Ptolomeo)

$3a\sqrt{3} \cdot 2a + x \cdot 6a = 4a\sqrt{2} \cdot 3a$



$\therefore \quad \boldsymbol{x = a\,(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}$

33.- En una circunferencia de radio 2,5 se traza una cuerda de 3u de longitud que subtiende un arco de medida "θ" . Hallar la longitud de la cuerda que subtiende un arco "2θ"



Resolución.-

Sea la cuerda $AB = 3$ y el diámetro $\overline{AD} = 2\,(2{,}5) = 5$

Trazamos la cuerda $BC = AB = 3$

Luego en el cuadrilátero inscrito ABCD, por Ptolomeo :

$$3(CD) + 3(5) = BDx \quad \text{... (1)}$$

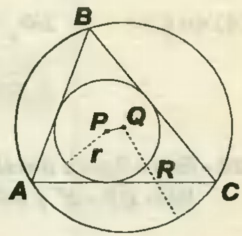
En el ⊾ ACD : $CD = \sqrt{5^2 - x^2}$ ... (2)

En el ⊾ ABD : $BD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $3\sqrt{25 - x^2} + 15 = 4x$

Resolviendo : $\therefore$ $\boldsymbol{x = 4{,}8}$

34.- En el gráfico mostrado, P y Q son centros de las circunferencias. Calcular la longitud de PQ



Resolución.-

En el Δ AQL, por Steward : $R^2 = x^2 + AP \cdot PL$ ... (1)

Por el Teorema de las Cuerdas : $AP \cdot PL = BP \cdot PF$

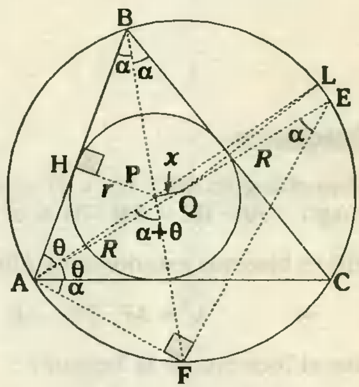
Pero : $AF = PF \;\Rightarrow AP \cdot PL = BP \cdot AF$ ... (2)

⊾ BHP ~ ⊾ AFE $\Rightarrow \dfrac{r}{AF} = \dfrac{BP}{2R} \Rightarrow AF \cdot BP = 2Rr$ ... (3)

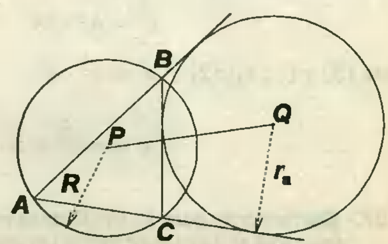
Reemplazando (3) en (2) : $AP \cdot PL = 2Rr$ ... (4)

Reemplazando (4) en (1) : $R^2 = x^2 + 2Rr$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{R(R-2r)}}$$



35.- En el gráfico dado, P y Q son centros.
Calcular PQ



Resolución.-

Del gráfico observamos que ⊿ AMQ ~ ⊿ TCL :

$$\frac{r_a}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{AQ}}{2R} \quad \Rightarrow \quad 2Rra = \mathrm{AQ} \cdot \mathrm{TC} \ \ldots (1)$$

Por propiedad en los triángulos $m\measuredangle \mathrm{AQC} = \theta$ y como $\overline{\mathrm{CQ}}$ es bisectriz exterior, entonces :

$$m\measuredangle \mathrm{BCQ} = \alpha + \theta = m\measuredangle \mathrm{QCM}$$

De donde : $m\measuredangle \mathrm{TCQ} = \theta$

Δ CTQ es isósceles $\Rightarrow$ TC = TQ ... (2)

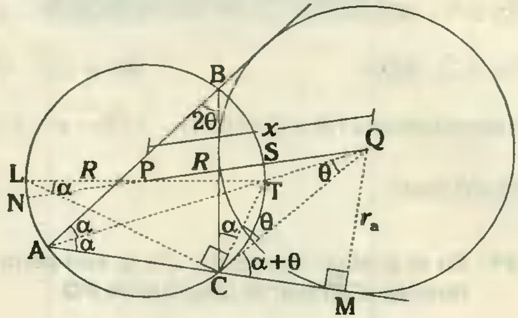
(2) en (1) : $2Rr_a = \mathrm{AQ} \cdot \mathrm{TQ}$ ... (3)

Por el Teorema de las Secantes :

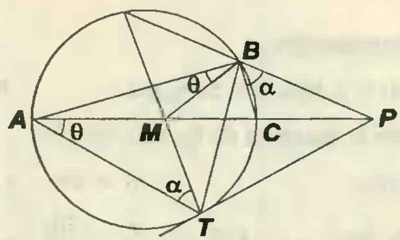
$$\mathrm{AQ} \cdot \mathrm{TQ} = (x + R)\,(x - R) \ \ldots (4)$$

(4) en (3) : $2Rr_a = x^2 - R^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{R(R+2r_a)}}$$



36.- En la figura mostrada, T es punto de tangencia, BM · BT = a² y BP = b. Hallar PT



Resolución.-

Para el ángulo ABC : $\overline{\mathrm{BM}}$ y $\overline{\mathrm{BT}}$ son isogonales,
luego : $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{BM} \cdot \mathrm{BT} = a^2$ ... (1)

$\overline{\mathrm{BP}}$ es bisectriz exterior del Δ ABC

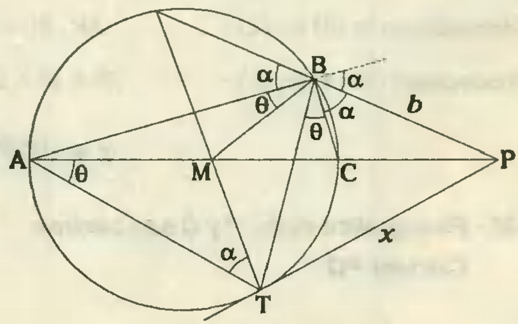
$$\Rightarrow \quad b^2 = \mathrm{AP} \cdot \mathrm{PC} - \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \ \ldots (2)$$

Por el Teorema de la Tangente :

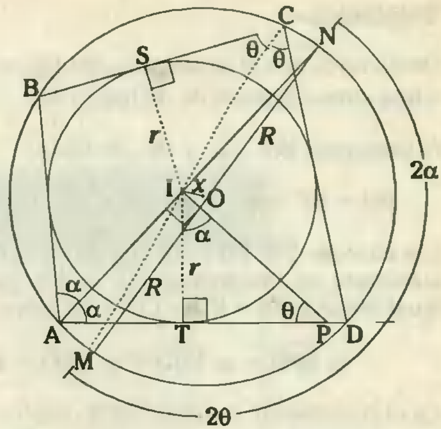
$$x^2 = \mathrm{AP} \cdot \mathrm{PC} \quad \ldots (3)$$

De (3) y (1) en (2) : $b^2 = x^2 - a^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



37.- Demostrar que la distancia entre los centros de radios r y R de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrilátero están relacionados por :



Demostración.-

Observamos que al trazar las bisectriz $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$

Se tiene que $\overline{MN}$ es diámetro de la circunferencia mayor ya que :

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ$$

En el Δ MIN, por el Teorema de la Mediana :

$$IM^2 + IN^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}(2R)^2$$

Trazamos $\overline{IP} \perp \overline{AI}$ $(P \in \overline{AD})$

$$\Rightarrow \quad IM^2 + IN^2 = 2x^2 + 2R^2 \qquad \text{... (1)}$$

Luego : $\triangle$ ISC ≅ $\triangle$ ITP (ALA)

$$\Rightarrow \quad IC = IP$$

En el $\triangle$ AIP :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{IC^2} \qquad \text{... (2)}$$

Además :

$$IM \cdot IC = R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{IC^2} = \frac{IM^2}{(R^2-x^2)^2} \qquad \text{... (3)}$$

$$AI \cdot IN = R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{AI^2} = \frac{IN^2}{(R^2-x^2)^2} \qquad \text{... (4)}$$

Sumando (3) + (4) y reemplazando en (2) :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{IM^2+IN^2}{(R^2-dx^2)^2} \qquad \text{... (5)}$$

Sustituyendo (1) en (5) :

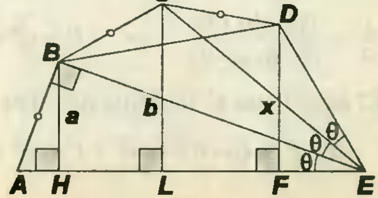
$$\frac{1}{r^2} = \frac{2x^2+2R^2}{(R^2-x^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} \qquad \textit{l.q.d}$$

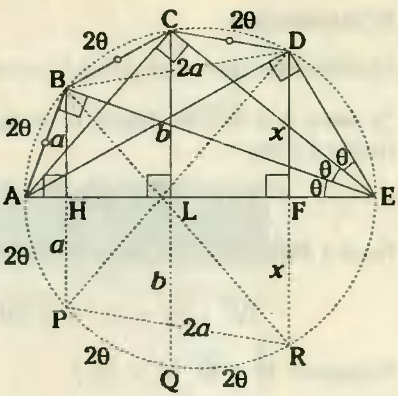
38.- Del gráfico mostrado sabemos que :

AB = BC = CD

Calcular DF.



Resolución.-



Deducimos que el pentágono ABCDE es inscriptible a una circunferencia de diámetro $\overline{AE}$

Al prolongar $\overline{BH}$, $\overline{CL}$ y $\overline{DF}$, se tiene :

BH = HP = a ; CL = LQ = b ; DF = FR = x

Las cuerdas $\overline{PR}$, $\overline{PB}$ y $\overline{BD}$ miden $2a$ cada una pues subtiende arcos congruentes de 4 θ cada uno; de igual manera BR = PD = CQ = $2b$, pues :

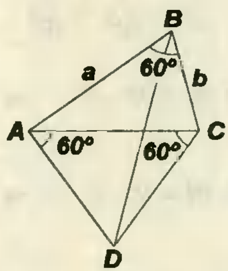
$$m\,\widehat{BPR} = m\,\widehat{PBD} = m\,\widehat{CAQ} = 8\theta$$

En el cuadrilátero inscrito PBDR empleamos el 1[er] Teorema de Ptolomeo :

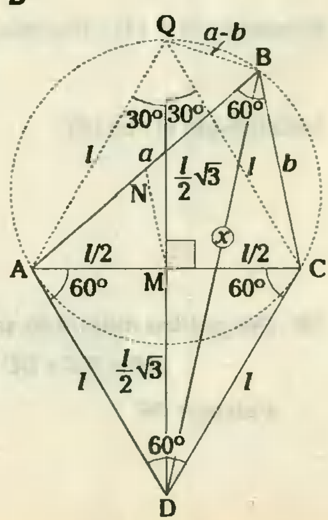
$$(2a)\,(2x) + (2a)\,(2a) = (2b)\,(2b) \quad \Rightarrow \quad 4ax = 4b^2 - 4a^2$$

$$\therefore \qquad x = \frac{b^2 - a^2}{a}$$

39.- Del gráfico adjunto, calcular BD



Resolución.-



Hacemos : AC = AD = CD = l y construimos otro triángulo equilátero AQC, simétrico al equilátero ADC

Luego : AQ = QC = l y QD = $l\sqrt{3}$

Aplicando el Teorema de Chadú, en el □ AQBC; inscriptible:

$$AB = BQ + BC \quad \Rightarrow \quad BQ = a - b$$

Aplicando el 2º Teorema de Ptolomeo tenemos :

$$\frac{l}{a} = \frac{l(a-b)+lb}{l^2+b(a-b)} \quad \Rightarrow \quad l^2 = a^2 + b^2 - ab \quad \dots (1)$$

En el □ AQBD, por el Teorema de Euler :

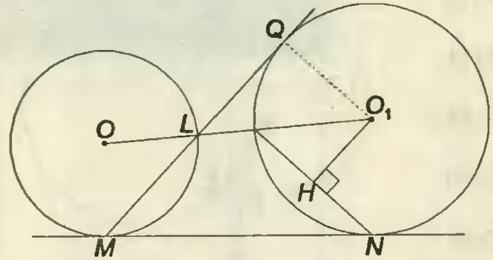
$$l^2 + (a-b)^2 + x^2 + l^2 = a^2 + 3l^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 = l^2 + 2ab \quad \ldots (2)$$

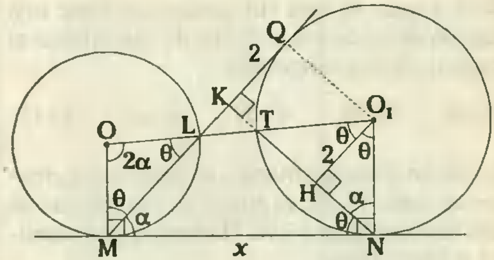
Sustituyendo (1) en (2) : $x^2 = a^2 + b^2 + ab$

$$\therefore \qquad x = \sqrt{a^2+b^2+ab}$$

40.- En la figura mostrada, O y O_1 son centros de las circunferencias, $O_1H = 2$, $ML = LQ$. Hallar MN.



Resolución.-



En el triángulo TO_1N tenemos: $\alpha + \theta = 90^o$

En el trapecio rectángulo MOO_1N :

$$m \measuredangle O = 180 - 2\theta = 2\alpha$$

Además : $m \measuredangle OML = m \measuredangle OLM = \theta$

Al prolongar $\overline{NT}$ este intersecta perpendicularmente en K a $\overline{LQ}$.

Luego : $KQ = O_1H = 2$

Además : $LK = \frac{x}{2} - 2$ y $MK = x - 2$

En el cuadrilátero inscriptible MLTN : $KM \cdot KL = KN \cdot KT$ (Teorema de las Secantes)

Para la circunferencia O_1 : $(KQ)^2 = KN \cdot KT$

Luego : $(KQ)^2 = KM \cdot KL \quad \Rightarrow \quad (2)^2 = (x-2)\left(\frac{x}{2}-2\right)$

$$\therefore \qquad x = 6$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En la figura, hallar CD, si : $AB = 12$ y $BC = 8$

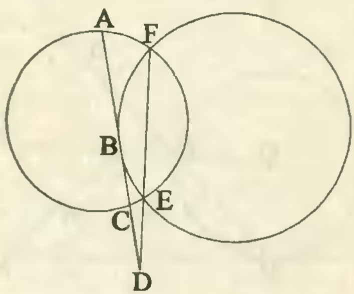
A) 12

B) 14

C) 15

D) 16

E) 18



2.- Un arco de una circunferencia tiene una cuerda de 24 *cm* y una flecha de 4 *cm*. Hallar el radio de la circunferencia.

A) 18 B) 20 C) 22 D) 16 E) 15

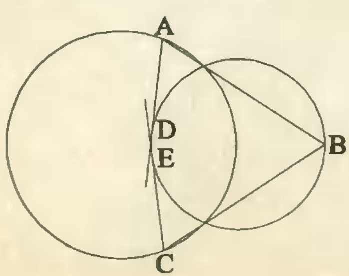
3.- En un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 10 *cm*, el producto de medidas de dos lados es igual a 256. Hallar la altura relativa al tercer lado.

A) 10,4 B) 10,8 C) 11,4 D) 12,8 E) 16

4.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle\ \hat{B} = 90$) de hipotenusa «$b$» cuyo inradio es r. Si : $b^2 - 4br = 4$. Hallar la distancia del incentro al circuncentro.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 1,5 D) 2 E) 4

5.- En la figura: $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son tangentes. Si $AB = a$, $AE = b$ y $CD = d$, hallar BC.



A) $\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}$ D) $\sqrt{a^2 - d^2 + b^2}$

B) $\sqrt{b^2 + d^2 + a^2}$ E) N.A

C) $\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}$

6.- En un cuadrado ABCD, exteriormente al lado $\overline{AB}$ se considera un punto «E» de modo que : $m\measuredangle AEC = 90$, $EC + EA = 4\sqrt{2}$. Hallar ED.

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 3

7.- Una recta tangente en "B" a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es paralela a la bisectriz interior $\overline{CD}$ ("D" en $\overline{AB}$). Hallar $\overline{AC}$; si $AD = 5$ y $BD = 4$.

A) 7,5 B) 7,2 C) 7 D) 5,5 E) 4,5

8.- En el gráfico mostrado, hallar R.
si : $m\,\widehat{AB} = 120°$, $CM = 1$ y $MB = 2$

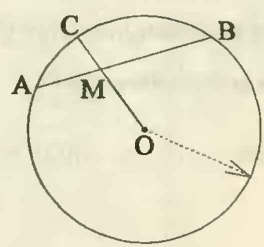
A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$

B) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$

C) $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + 1)$

D) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$

E) $\frac{2}{3}(\sqrt{3} - 1)$



9.- En la figura las circunferencias son concéntricas de centro «O», $\overline{AB}$ es tangente, $DE = 2$ y $EF = 3$. Hallar AB.

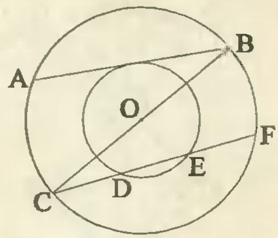
A) $\sqrt{5}$

B) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$

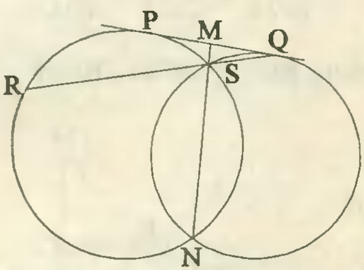
C) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$

D) $3\sqrt{5}$

E) $2\sqrt{5}$



10.- Hallar MN, si PQ = SN ; QS = 1 y SR = 3



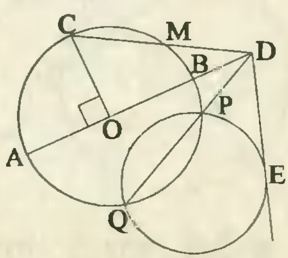
A) $\sqrt{2}+2$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{5}+1$

11.- Dos circunferencias secantes se intersectan en los puntos A y B; prolongando la cuerda $\overline{BA}$ intersecta a la tangente común $\overline{CD}$ en el punto «P» de modo que : CD = PB y PA = 1 m. Hallar AB.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) $2\sqrt{3}\,m$

12.- En la figura, «O» es centro si, AB = 4 y CM = MD. Hallar DE.



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

13.- De un punto de la circunferencia se han trazado dos cuerdas y un diámetro de modo que la suma de las proyecciones de las dos cuerdas sobre el diámetro, es igual a la longitud del diámetro. La suma de las medidas de las cuerdas es 2,8 m y su diferencia es 0,4 m. Hallar el radio de la circunferencia.

A) 0,5 m B) 0,8 m C) 1 m

D) 1,5 m E) 2 m

14.- Hallar la longitud de la bisectriz exterior del ángulo «A» de un triángulo ABC.

Si : $b - c = 20$ y $b \cdot c\,(p-b)(p-c) = 10c$

(P $\longrightarrow$ semiperímetro).

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 1,2 D) 1,5 E) $\sqrt{3}$

15.- Sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC de altura «h» se toma un punto P.

Calcular : $PA^2 + PB^2 + PC^2$

A) $\frac{4}{3}h^2$ B) $2h^2$ C) $\frac{8}{3}h$

D) $\frac{3}{4}h^2\sqrt{3}$ E) $\frac{2}{3}h^2$

16.- En la figura; BO = OC y AB = $6\sqrt{2}$.

Hallar AF · FL.

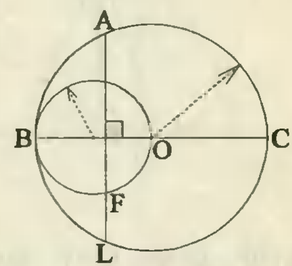
A) 72

B) 45

C) 49

D) 36

E) 38



17.- Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y un punto «F» exterior de $\overline{AB}$; por «F» y «B» se trazan las tangentes que se intersectan en «P» tal que : PF = $\sqrt{15}$ y AB = 6. Hallar AF.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

D) $\frac{3}{4}\sqrt{15}$ E) N.A.

18.- En un triángulo escaleno ABC, se traza la bisectriz exterior $\overline{BF}$ del ángulo B, cuya prolongación intersecta en M a la circunferencia circunscrita al triángulo.

Si $AB = 10$ y $BF = 5 \cdot BC$, hallar BM.

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

19.- En la figura T es punto de tangencia, M y N son puntos medios de $\overline{OT}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y $AO^2 + AT^2 - AB^2 = 16$.

Hallar MN.

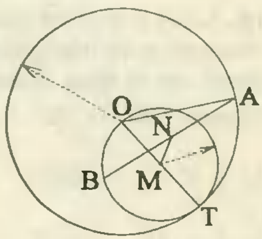
A) 1

B) 2

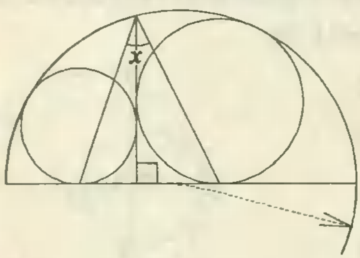
C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}$

E) 4



20.- En la figura mostrada calcular el ángulo x.

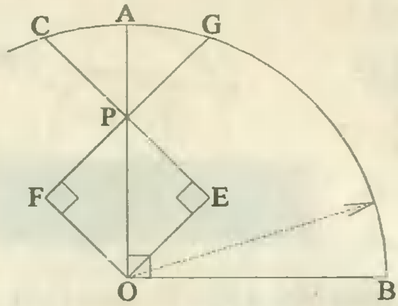


A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 26°30

21.- Del gráfico se sabe que :

$$CP = 3 \;;\; PB = 4 \;\text{ y }\; FP = 1$$

Hallar PE.



A) 2 B) 2,4 C) 2,5 D) 3,5 E) 4

22.- Hallar BM . Si : $BC = 6$ y $BF = 8$

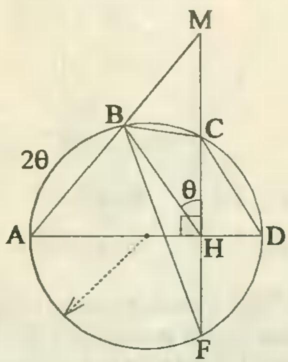
A) 7

B) $4\sqrt{3}$

C) 6,5

D) $\dfrac{11\sqrt{2}}{3}$

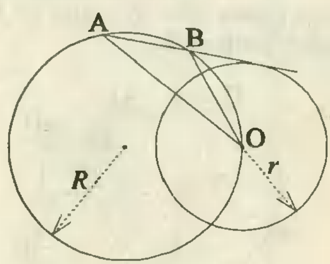
E) $2\,\frac{1}{2}$



23.- En la figura mostrada se sabe que :

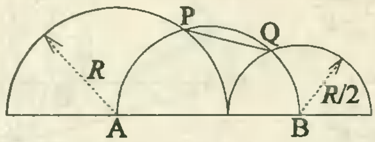
$$AO \cdot BO = 8 \quad \text{y} \quad R = 2r$$

Con los datos dados hallar r



A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) 3,5

24.- En la figura, hallar PQ , si $R = \sqrt{10} + 1$



A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

25.- En un triángulo ABC : $m \measuredangle A = 2m \measuredangle C$ $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$, siendo I el incentro y G el baricentro. Si $IG = a$. Calcular la distancia $\overline{ID}$, si $\overline{BD}$ es bisectriz interior.

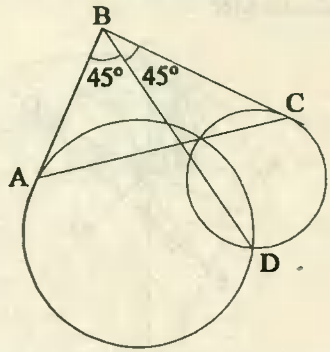
A) $\sqrt{2}$ B) $2a\sqrt{2}$ C) $3a$

D) $3a\sqrt{2}$ E) $4a$

26.- En un cuadrilátero ABCD: AB = CD = 1 y AD = 3. Calcular BC, sabiendo que sus diagonales son números enteros.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

27.- Del gráfico, calcular BD, si AB + BC = 4



A) 4

B) $4\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{2}$

D) 8

E) $3\sqrt{2}$

28.- El ángulo B de un triángulo ABC mide 120°. Sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M; N y L respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos AML y LNC se intersectan en P.
Si BM = 4, BN = 2 y $m \measuredangle MBP = 60$. Hallar BP

A) 6 B) 2 C) 5 D) 9 E) 12

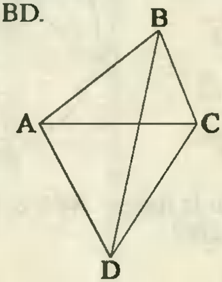
29.- Sobre el arco AB de la circunferencia circunscrita a un cuadrado ABCD se ubica el punto P de modo que : AP = 1 y PB = $2\sqrt{2}$. Hallar : PC

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) $4\sqrt{2}$

30.- En un cuadrilátero inscrito ABCD: BC = CD = 3 y AC = BD = 4. Hallar AD (AB > AD)

A) 2 B) 3 C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 4

31.- En la figura , AB = AC = AD = 12,5 BC = 7 y CD = 15. Calcular BD.



A) 15

B) 18

C) 20

D) 25

E) 30

32.- En un nonágono regular ABCDEFGHI : AB = a y AH = b encontrar la relación correcta.

A) $b^3 - a^3 = 3ab^2$ D) $b^3 + a^3 = 3ab^2$

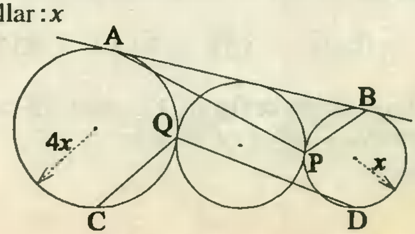
B) $b^3 - a^3 = 3ba^2$ E) $b^3 + a^3 = 3ba^2$

C) $b^3 + a^3 = 3ab$

33.- En un triángulo ABC : AB = 7 , BC = 9 y $m \measuredangle B = 74$. La bisectriz del ángulo B se intersecta con la mediatriz de $\overline{AC}$ en P. Calcular PD; si $\overline{AC} \cap \overline{BP}$: D.

A) 2 B) 3 C) 3,7 D) 4 E) 4,5

34.- En la figura : AP . QD - QC . PB = $24\sqrt{2}$. Hallar : x



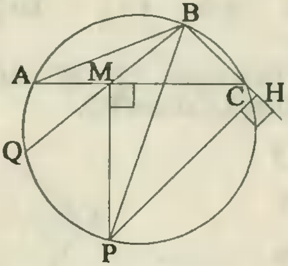
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

35.- En la figura :

$$m\,\widehat{PQ} = m\,\widehat{AQ} + m\,\widehat{BC}$$

$$\widehat{AP} \cong \widehat{PC}.$$

Si : $HC = a$, hallar BM



A) $2a$

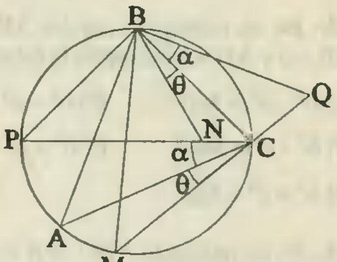
B) $3a$

C) $a\sqrt{2}$

D) $2a\sqrt{2}$

E) $a\sqrt{3}$

36.- En la figura : $BP = a$, $BM = b$ y $BQ = c$. Hallar : BN



A) $\frac{ac}{b}$

B) $\frac{ab}{c}$

C) $\frac{bc}{a}$

D) $\sqrt[3]{abc}$

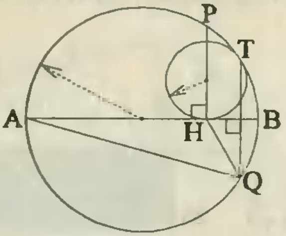
E) $\frac{2ab}{c}$

37.- La bisectriz interior del ángulo B de un triángulo ABC corta a la circunferencia circunscrita en E y al lado $\overline{AC}$ en D. Calcular ID; si I es el incentro del triángulo, además $BD = 5$ y $DE = 4$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) 3

38.- En la siguiente figura, T es punto de tangencia, $AQ \cdot TB = a$ y $PH = b$.

Hallar QH



A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{a^2 - b^2}$

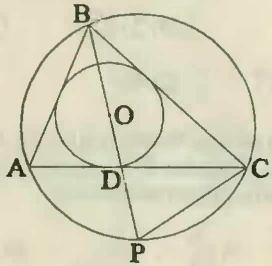
C) $2\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{a - b^2}$

E) $\sqrt{b - a^2}$

39.- En la figura O es centro.

Si : $\frac{2}{OB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{4}$, hallar OD



A) 2

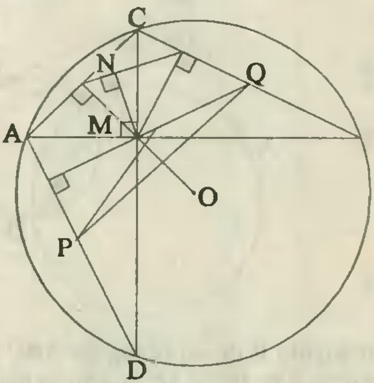
B) 4

C) 5

D) 6

E) 8

40.- Del gráfico, $OM = 2$ y $PQ = 4$. O es centro, calcular MN



A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

D) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ E) 2

polígonos regulares ; potencia y eje radical

CAP. 17

17.1 DEFINICIÓN DE POLÍGONO REGULAR

Es aquel polígono equiángulo y equilátero que puede ser inscrito y circunscrito a circunferencias concéntricas.

Elementos :

Respecto a la *Fig.* 17.1 en todo polígono regular se representan los siguientes elementos:

a) Centro : O

b) Lado : $(AB = l_n)$

c) Apotema : $(OH = ap_n = r)$

d) Angulo Central : $\measuredangle$ AOB $(m\measuredangle \text{ AOB} = \alpha_n)$

$$\alpha_n = \frac{360}{n} = m\ \overset{\frown}{AB}$$

e) Inradio : r

f) Circunradio : R

g) Triángulo Elemental : Δ AOB

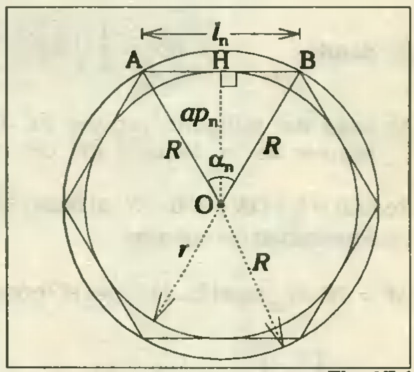


***Fig.* 17.1**

Observaciones :

* El sub-índice : "n" indica el número de lados del polígono regular.

* De la fórmula : d ; $m\measuredangle$ AOB $= \dfrac{360}{n}$, deducimos que la medida del ángulo central es divisor de 360 (ya que $n \in Z^+$ y $n \geq 3$) y obtiene su máximo valor (120) para $n = 3$

17.2 FÓRMULA DEL APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR

Consideremos el triángulo elemental AOB de un polígono regular de "n" lados y de apotema $\overline{OH}$ ya que $\overline{OH} \perp \overline{AB}$.

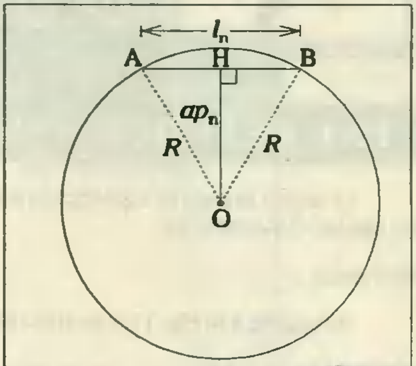


Fig. 17.2

Se tiene : $AH = HB = \dfrac{l_n}{2}$

Luego por el Teorema de Pitágoras en el ⊿ OHB :

$$(ap_n)^2 = R^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - l_n^2}{4}$$

De donde : $$\boxed{ap_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}} \quad \text{... (17.1)}$$

A) Lado del polígono regular de doble número de lados (2n) en función del polígono regular de "n" lados y del circunrodio (R)

Sea $AB = l_n$ y $OA = OB = R$, al trazar $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ *Fig*. 17.3 se determinan las cuerdas :

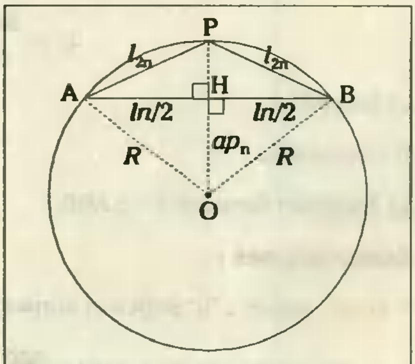


Fig. 17.3

$AP = PB = l_{2n}$ en el ⊿ AHP, por el Teorema de Pitágoras:

$$(l_{2n})^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (PH)^2 = \frac{l_n^2}{4} + (R - ap_n)^2$$

$$(l_{2n})^2 = \frac{l_n^2}{4} + R^2 + ap_n^2 - 2R\, ap_n$$

Como : $ap_n^2 = R^2 - \dfrac{l_n^2}{4}$ y $ap_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$

Se tiene : $(l_{2n})^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}$

$$\therefore \quad \boxed{l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}} \quad \text{... (17.2)}$$

B. Lado del polígono regular de "n" lados circunscrito a una circunferencia de radio R en función del lado del polígono regular inscrito de igual número de lados.

Sean $AB = l_n$ y $OA = OB = R$, para obtener el lado del polígono regular circunscrito de igual número de lados (*Fig.* 17.4) . Trazamos una paralela a $\overline{AB}$ que sea tangente en T a la circunferencia determinándose el segmento buscado $\overline{PQ}$ ($PQ = l_n^1$). Luego por la semejanza de los triángulos POQ y AOB, se tiene :

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{OT}{OH} \quad \Rightarrow \quad PQ = \frac{l_n \cdot R}{ap_n}$$

Finalmente : $$l_n^1 = \frac{2Rl_n}{\sqrt{R^2 - l_n^2}} \qquad \text{... (17.3)}$$

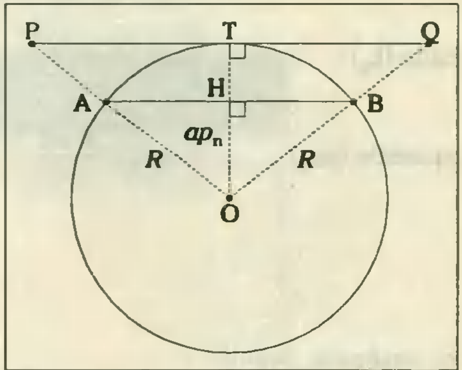


Fig. 17.4

17.3 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Dado el segmento $\overline{AB}$ (*Fig* 17.5) el punto P divide a dicho segmento en media y extrema razón, si y sólo si : $(AP)^2 = AB\,.\,PB$ $(AP > PB)$ por otro lado como : $PB = AB - AP$.

Se tiene : $(AP)^2 = AB(AB - AP)$

De donde : $AP = AB\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

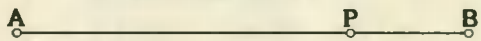


Fig. 17.5

Donde : $\overline{AP}$: Sección áurea de $\overline{AB}$ $\wedge$ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$: Número áureo

17.4 POLÍGONOS REGULARES NOTABLES

a) Triángulo Equilátero :

Angulo Central (α_3) : $\alpha_3 = \dfrac{360}{3} = 120$ ... (17.4)

Lado (L_3) : $L_3 = R\sqrt{3}$ ... (17.5)

Apotema (ap_3) : $ap_3 = \dfrac{R}{2}$ ... (17.6)

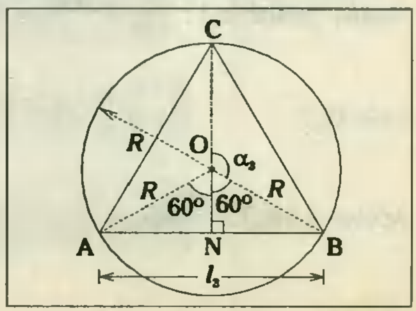


*Fig.*17.6

b) Cuadrado :

Angulo Central (α_4) : $\alpha_4 = \dfrac{360}{4} = 90$ ... (17.7)

Lado (L_4) : $L_4 = R\sqrt{2}$ ... (17.8)

Apotema (ap_4) : $ap_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ ... (17.9)

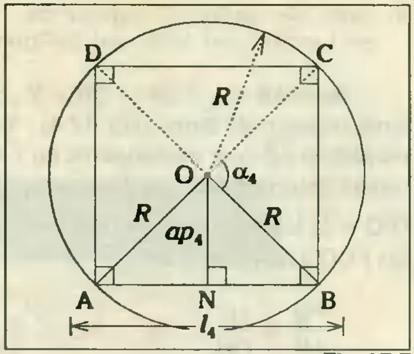


Fig. 17.7

c) Hexágono Regular :

Angulo Central (α_6) : $\alpha_6 = \dfrac{360}{6} = 60$ ... (17.10)

Lado (L_6) : $l_6 = R$ ... (17.11)

Apotema (ap_6) : $ap_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ ... (17.12)

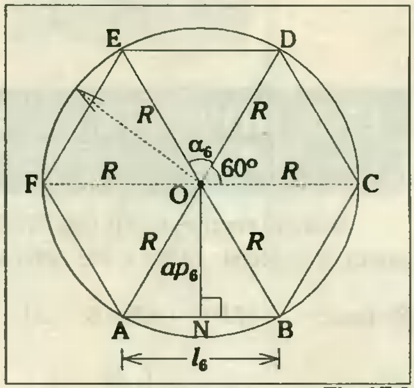


Fig. 17.8

d) Pentágono Regular :

Angulo Central (α_5) : $\alpha_5 = \dfrac{360}{5} = 72$ ... (17.13)

Lado (L_5) : $L_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ... (17.14)

Apotema (ap_5) : $ap_5 = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$ ... (17.15)

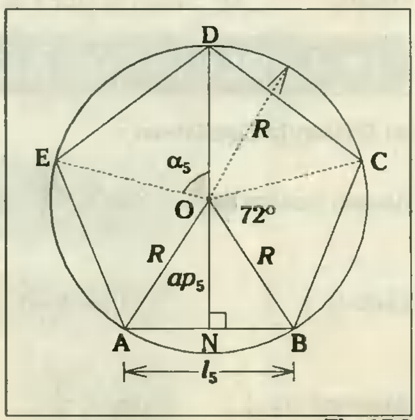


Fig. 17.9

e) Octágono Regular :

Angulo Central (α_8) : $\alpha_8 = \dfrac{360}{8} = 45^o$ ... (17.16)

Lado (L_8) : $L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ... (17.17)

Apotema (ap_8) : $ap_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ...(17.18)

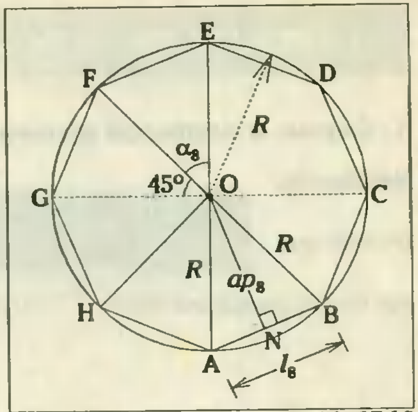


*Fig.*17.10

f) Decágono Regular :

Angulo Central (α_{10}) : $\alpha_{10} = \dfrac{360}{10} = 36$ ... (17.19)

Lado (L_{10}) : $L_{10} = \dfrac{R}{2}\sqrt{5}-1$ ... (17.20)

Apotema (ap_{10}) : $ap_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ... (17.21)

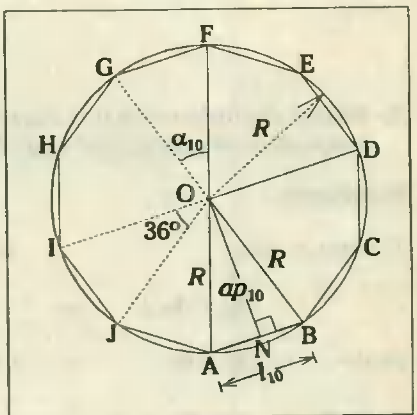


Fig. 17.11

g) Dodecágono Regular :

Angulo Central (α_{12}) : $\overset{o}{\alpha}_{12} = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$ ... (17.22)

Lado (L_{12}) : $L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ... (17.23)

Apotema (ap_{12}) : - $ap_{12} = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ... (17.24)

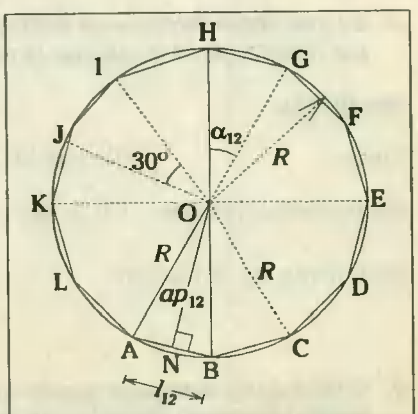
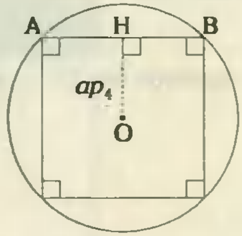


Fig. 17.12

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1RA PARTE)

1.- Calcular la longitud del apotema de un cuadrado cuyo lado mide 4

<u>Resolución</u>.-



Se sabe que : $ap_4 = \frac{R}{2}\sqrt{2}$ ... (1)

Por condición del problema : $l_4 = 4 = R\sqrt{2}$

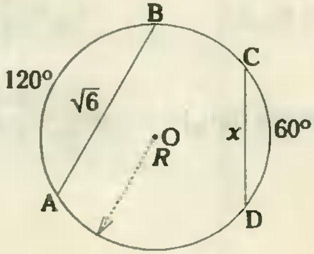
$\Rightarrow$ $R = 2\sqrt{2}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $ap_4 = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}$

$\therefore$ $\mathbf{ap_4 = 2}$

2.- En una circunferencia una cuerda que mide $\sqrt{6}$ subtiende un arco de 120º. Calcular la longitud de la cuerda que subtiende un arco de 60º.

<u>Resolución</u>.-



Se conoce que : $AB = l_3 = R\sqrt{3}$

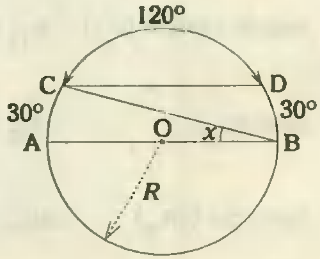
$\sqrt{6} = R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $R = \sqrt{2}$

Como : $m\,\overset{\frown}{CD} = 60$ $\Rightarrow$ $CD = l_6 = x$

Es decir : $x = R$ $\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{2}}$

3.- En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se traza la cuerda $\overline{CD}$ paralela a dicho diámetro . Si $CD = R\sqrt{3}$; calcular la $m\measuredangle ABC$ ($AB = 2R$)

<u>Resolución</u>.-



Como : $CD = R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $m\,\overset{\frown}{CD} = 120$

Por propiedad ; ya que : $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ $\Rightarrow$ $m\,\overset{\frown}{AC} = m\,\overset{\frown}{BD} = 30$

Finalmente por $\measuredangle$ inscrito : $x = \frac{30}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{x = 15°}$

4.- El lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Calcular la longitud del lado del polígono regular de 16 lados inscrito en la misma circunferencia.

Resolución.-

Sea R la longitud del circunradio, luego : $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

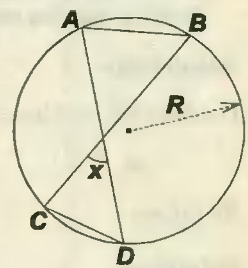
Nos piden : $l_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$$\therefore \quad l_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

5.- En la figura mostrada : $AB = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$CD = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Calcular el ángulo x.



Resolución.-

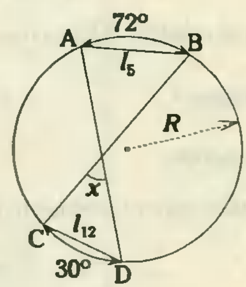
Ya que : $AB = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad AB = l_5$

De donde : $m\,\overset{\frown}{AB} = 72$

Análogamente : $CD = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad CD = l_{12}$

De donde : $m\,\overset{\frown}{CD} = 30$

Finalmente por $\measuredangle$ inscrito : $x = \dfrac{72+30}{2}$

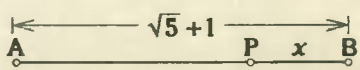


$$\therefore \quad x = 51^\circ$$

6.- Sobre un segmento $\overline{AB}$ de $(\sqrt{5}+1)$ de longitud se ubica el punto P, de modo que éste divide el segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón, si AP > PB. Calcular PB.

Resolución.-

Si P divide en media y extrema razón a $\overline{AB}$



Entonces : $AP = AB\,\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Luego : $AP = (\sqrt{5} + 1)\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow AP = 2$

Finalmente, como : $x = AP\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

$$x = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{5} - 1}$$

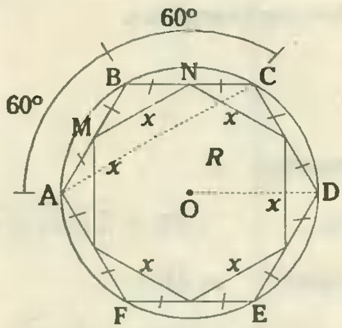
7.- El perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es 24. Calcular el perímetro de otro hexágono regular determinado al unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados del primero.

<u>Resolución</u>.-

Por dato del problema : $6l_6 = 24$

$\Rightarrow \quad l_6 = 4$

De donde : $R = l_6 = 4$



Del gráfico : $m\,\overset{\frown}{ABC} = 120$

$\Rightarrow \quad AC = l_3 = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

En el Δ ABC : $\overline{MN}$ es base medida

Entonces : $x = MN = \dfrac{AC}{2}$

De donde : $x = 2\sqrt{3}$

Finalmente el perímetro buscado será :

$$\therefore \quad 6(2\sqrt{3}) = \mathbf{12\sqrt{3}}$$

17.5 PROPIEDADES

a) Los lados del pentágono, hexágono y dodecágono regulares que tengan el mismo circunradio determinan un triángulo rectángulo. Sea :

En el gráfico 17.13a : $EF = L_6$; $AB = L_{10} \wedge CD = L_5$

$$(L_5)^2 = (L_{10})^2 + (L_6)^2 \qquad \text{... (17.25)}$$

b) El lado del pentágono regular es la sección aurea de su diagonal

En el gráfico 17.13b : ABCDE : Pentágono Regular.

$$L_5 = \frac{d_5}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{... (17.26)}$$

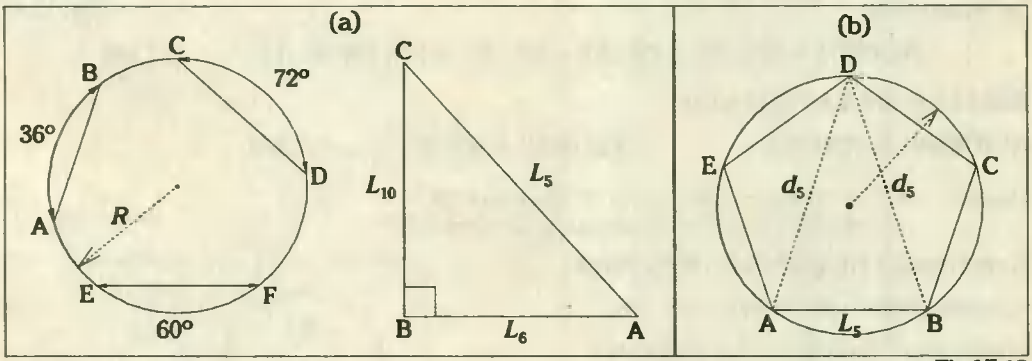


*Fig.*17.13

c) El lado del decágono regular es la sección aurea de su circunradio.

$$L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{... (17.27)}$$

Siendo : L_{10} : Lado del decágono regular

R : Circunradio del decágono regular

d) El lado del polígono regular, cuyo número de lados se puede expresar como 2^n donde n es un número natural mayor o igual que 2; tiene por longitud :

$$L_{2^n} = R\,\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{(n\,-\,1)\text{ radicales}} \qquad \text{... (17.28)}$$

R : Circunradio

e) El lado del pentadecágono regular, en función del circunradio R se puede expresar como :

$$L_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right) \qquad \text{... (17.29)}$$

17.6 POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO AL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Se llama potencia de un punto respecto al centro de una circunferencia al producto constante de las longitudes de los segmentos determinados por dicho punto y dos puntos cualesquiera de la circunferencia que sean colineales con él.

La potencia de un punto será positiva, nula o negativa si el punto se encuentra exterior, sobre o interior a la circunferencia respectivamente.

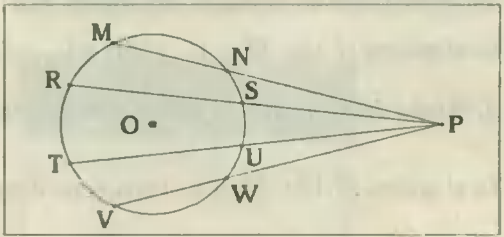


Fig. 17.14

$$\text{Pot } (P/O) = PM \,.\, PN = PR \,.\, PS = PT \,.\, PU = PV \,.\, PW = CTE \qquad \dots (17.30)$$

CÁLCULO DE LA POTENCIA

A) FÓRMULA GENERAL : $\text{Pot } (P/O) = d^2 - R^2 \qquad \dots (17.31)$

Donde : d → distancia del punto "P" al centro "O"
R → radio de la circunferencia de centro "O"

B) POTENCIA DE UN PUNTO EXTERIOR

Por definición : Pot (P/O) = PR . PS

Luego por el Teorema de las Tangentes :

$$\therefore \quad \text{Pot } (P/O) = PT^2 \qquad \dots (17.32)$$

En el ⊿ PTO : $PT^2 + R^2 = d^2$

$$\therefore \quad \text{Pot } (P/O) = d^2 - R^2 \qquad \text{(Fórmula General)}$$

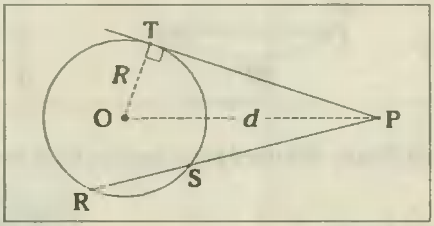


Fig. 17.15

C) POTENCIA DE UN PUNTO DE LA CIRCUNFERENCIA

Por fórmula general :

$$\text{Pot } (P/O) = d^2 - R^2$$

Pero : $d = R$

$$\therefore \quad \text{Pot } (P/O) = 0 \qquad \dots (17.33)$$

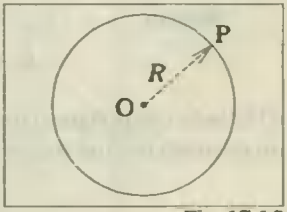


Fig. 17.16

D) POTENCIA DE UN PUNTO INTERIOR

Por fórmula general : $\text{Pot } (P/O) = d^2 - R^2 = (d - R)(d + R)$

$$= -(R - d)(d + R) = -PE \,.\, PF$$

Luego por Teorema de las Cuerdas :

$$\therefore \quad \text{Pot } (P/O) = -RP \,.\, PS = -QP \,.\, PU \qquad \dots (17.34)$$

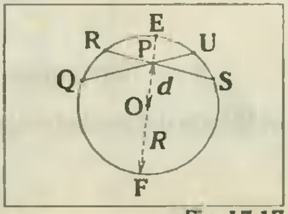


Fig. 17.17

E) POTENCIA DEL CENTRO

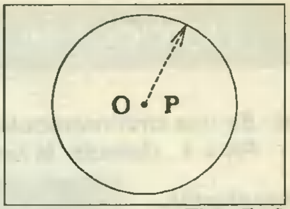


Fig. **17.18**

Por fórmula general : Pot (P/O) = $d^2 - R^2$

Pero : $d = O$

$\therefore$ **Pot (P/O) = $-R^2$** ... **(17.35)**

EJE RADICAL

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que tienen igual potencia respecto a dos circunferencias coplanares.

POSICION DEL EJE RADICAL

A) CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

El eje radical es una recta perpendicular al segmento que une los centros. Si "$\mathscr{L}$" es eje radical por definición:

Pot (M/A) = Pot (M/B)

Pot (N/A) = Pot (N/B)

Pot (R/A) = Pot (R/B)

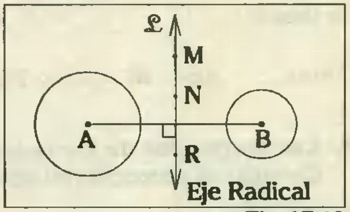


Fig. **17.19**

B) CIRCUNFERENCIAS SECANTES

El eje radical es una recta que pasa por la cuerda común. Si "$\mathscr{L}$" es eje radical por definición :

$\therefore$ **Pot (M/A) =Pot (M/B)** ... **(17.36)**

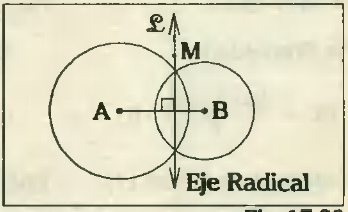


Fig. **17.20**

C) CASOS PARTICULARES

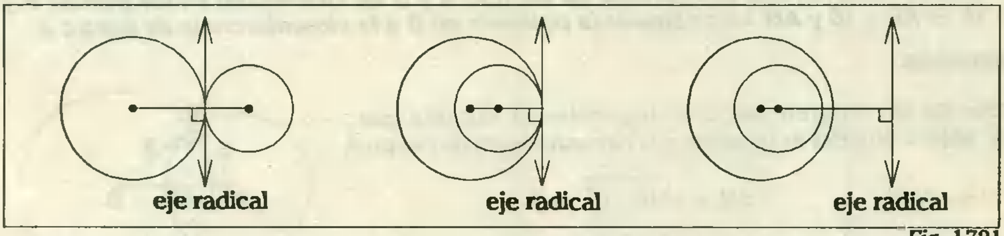


Fig. **1721**

CENTRO RADICAL

Viene a ser la intersección de los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas de dos en dos.

Si $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son los ejes radicales, entonces :

Pot (O/E) = Pot (O/F) = Pot (O/G) ... **(17.37)**

$\therefore$ "O" es el centro radical

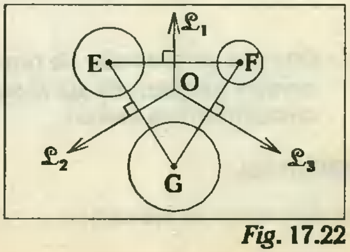
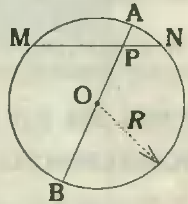


Fig. **17.22**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2da PARTE)

8.- *En una circunferencia el diámetro $\overline{AB}$ y la cuerda $\overline{MN}$ se intersectan en P . Sí : MP = 9 PN = 4 . Calcular la longitud del radio, si AP = 3*

<u>Resolución</u>.-



Con respecto al punto P se tiene :

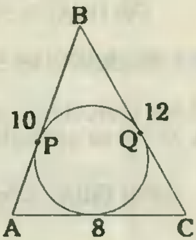
$$\text{Pot}_o\, P = MP \cdot PN = AP \,.\, PB$$

De donde : $9 \,.\, 4 = 3 \cdot PB \quad \Rightarrow \quad PB = 12$

Como : $AB = 2R = AP + PB = 3 + 12 \quad \therefore \quad \mathbf{R = 7{,}5}$

9.- *Las longitudes de los lados de un triángulo ABC son : AB = 10 , BC = 12 y AC = 8 . Calcular la potencia del vértice B respecto a la circunferencia inscrita al triángulo.*

<u>Resolución</u>.-



Se sabe que : $\text{Pot}_o B = (BP)^2 \quad \ldots (1)$

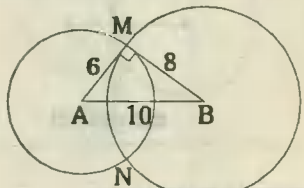
Por Propiedad : $Bp = p\,(\Delta\, ABC) - AC$

$Bp = \dfrac{10+12+8}{2} - 8 \quad \Rightarrow \quad Bp = 7 \quad \ldots (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $\mathbf{Pot_o B = 49}$

10.- *Dos circunferencias ortogonales de centros A y B se intersectan en los puntos M y N. Si AB = 10 y AM = 6 ; calcular la potencia de B a la circunferencia de centro A*

<u>Resolución</u>.-



Ya que las circunferencias son ortogonales se, cumple que : $m \measuredangle AMB = 90$ y $\overline{BM}$ es tangente a la circunferencia de centro A

En el ⊿ AMB : $BM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Finalmente : $\text{Pot}_{(A)}\, B = (BM)^2 = 8^2 = \mathbf{64}$

11.- *Dos circunferencias de radios 9 y 4 son tangentes exteriores en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente común exterior. El eje radical intersecta en M a $\overleftrightarrow{AB}$; calcular la potencia de M a la circunferencia menor.*

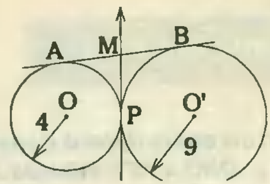
<u>Resolución</u>.-

Por definición de eje·radical : $\text{Pot}_{(o)}M = \text{Pot}_{(o')}M$

$$(MA)^2 = (MB)^2 \quad \Rightarrow \quad MA = MB$$

Como : $AB = 2\sqrt{4 \cdot 9} = 12 \quad \Rightarrow \quad MA = MB = 6$

Finalmente : $\therefore \quad \mathbf{Pot_{(o)}M = 6^2 = 36}$



12.- La potencia de un punto P respecto a una circunferencia de centro O y radio 12 es -119. Calcular PO.

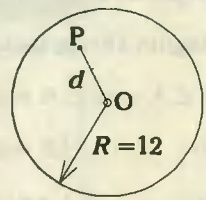
Resolución.-

Puesto que la potencia es negativa

Entonces el punto P es interior a la circunferencia

Luego : $\text{Pot}_{(o)} P = d^2 - R^2 \quad \Rightarrow \quad -119 = d^2 - 12^2$

$$144 - 119 = d^2 \qquad \therefore \qquad \mathbf{d = 5}$$



13.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 . Calcular la potencia del circuncentro del triángulo respecto a la circunferencia inscrita.

Resolución.-

Para el triángulo rectángulo ABC, El circuncentro es el punto medio P de $\overline{AC}$

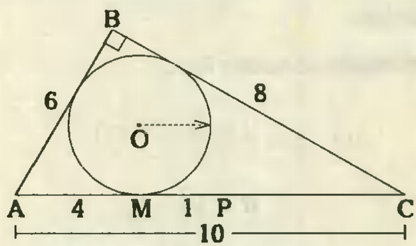
Luego : $\text{Pot}_{(o)} P = (PM)^2 \ldots (1)$

Por propiedad : $AM = p(\triangle ABC) = BC$

$$\Rightarrow AM = \frac{6+8+10}{2} - 8 = 4$$

De donde : $PM = 5 - 4 = 1$

Finalmente : $\mathbf{Pot_{(o)} P = 1}$



14.- Tres circunferencias congruentes y tangentes exteriores dos a dos tienen sus radios que miden "R". Calcular la potencia del centro radical de estas circunferencias respecto a cualquiera de ellas.

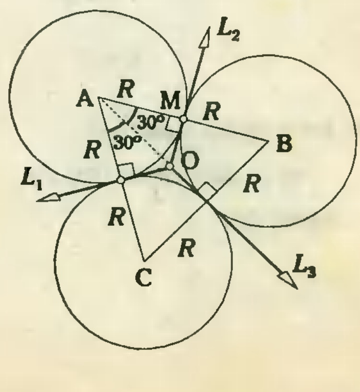
Resolución.-

Sean los centros A , B y C de las 3 circunferencias, el centro radical "O" será el punto de concurrencia de las tangentes comunes. L_1 , L_2 y L_3 de dichas circunferencias, además será el centro del triángulo equilátero ABC.

En el $\triangle$ AMO de 30 y 60 : $OM = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

Nos piden : $\text{Pot}_{(A)}o = (OM)^2$

$$\therefore \qquad \mathbf{Pot_{(A)}o = \frac{R^2}{3}}$$



MISCELÁNEA

1.- En un cuadrilátero convexo ABCD, se traza la diagonal $\overline{BD}$. Si : m ∡ BAD = 36°, m ∡ DBC = 72°, además AB = AD = a y BD = BC ; hallar la distancia de B a $\overline{CD}$.

Resolución.-

Prolongamos $\overline{BM}$ y $\overline{AD}$ hasta que se intersecten en el punto "N"

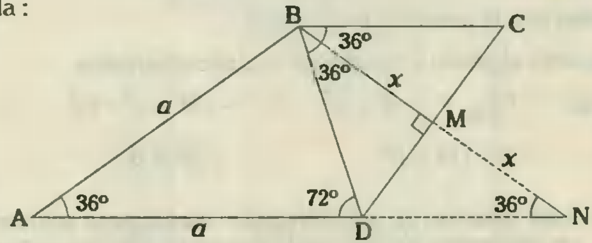
El triángulo ABN es isósceles, ya que la :

m ∡ A = m ∡ N = 36

Luego : AB = BN

Es decir : $x + x = a$

∴ $x = a/2$



2.- En un triángulo ABC , m ∡ A = 54 ; el circunradio mide ($\sqrt{5}$ – 1) m. Hallar la longitud del lado $\overline{BC}$.

Resolución.-

En el triángulo isósceles BOC :

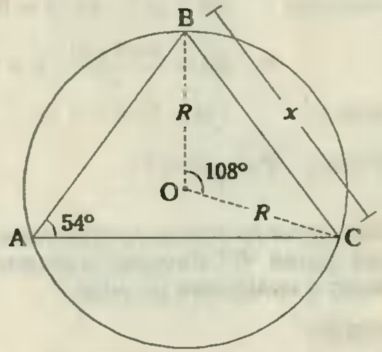
$$x = \frac{R}{2}\,(\sqrt{5}+1)$$

Pero : $R = \sqrt{5} - 1$

Reemplazando : $x = \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}\,(\sqrt{5}+1)$

$$x = \frac{5-1}{2}$$

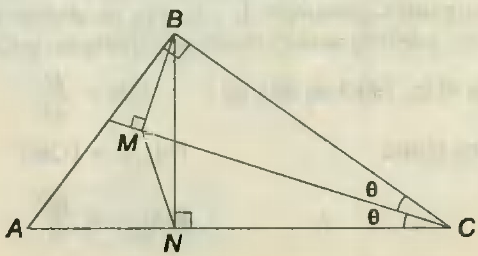
∴ $x = 2$



3.- En la figura mostrada :

m ∡ ABM = 18°, BC = 8 .

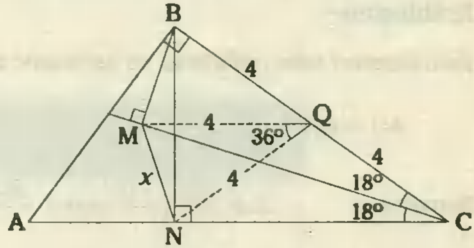
Hallar MN .



Resolución.-

Sea Q el punto medio de $\overline{BC}$, luego el triángulo MQN es isósceles MQ = NQ = 4, además la $m \measuredangle$ MQN = 36°.

Esto quiere decir que $\overline{MN}$ es el lado de un decágono regular de radio $R = 4$



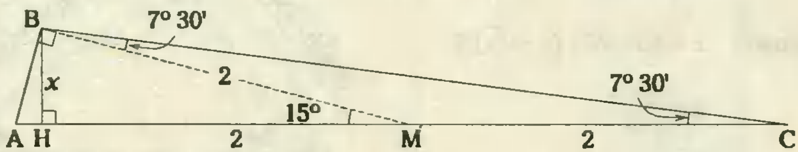
Luego : $$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$\therefore$ $$\mathbf{x = 2(\sqrt{5}-1)}$$

4.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4m y uno de sus ángulos mide 7°30'. Calcular la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

Resolución.-

En el ⊿ BHM, trazamos la mediana $\overline{BM}$ luego $BM = \frac{AC}{2} = 2$ y $m \measuredangle$ BMA = 15

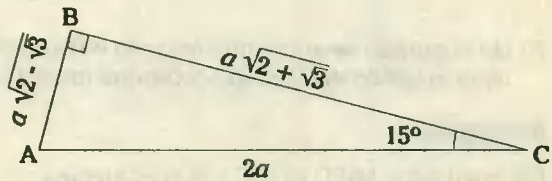


Recordemos éste ⊿ notable, para nuestro problema :

$2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Entonces : $x = (1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\therefore$ $$x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$



5.- Un hexágono regular se encuentra inscrito en una circunferencia de 12 m de radio; se trazan las diagonales que no son diámetros y que al intersectarse forman otro hexágono regular. Hallar la longitud del lado de éste último hexágono.

Resolución.-

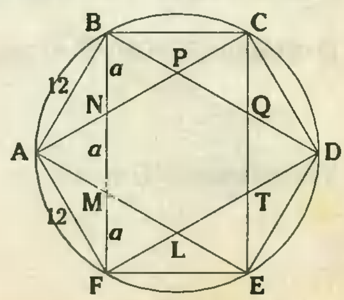
En el hexágono regular ABCDEF : AB = 12

Sea el hexágono regular MNPQTL cuyo lado se desea calcular.

En el Δ FAB : $3a = 12\sqrt{3}$ (Teoría)

$$a = 4\sqrt{3}$$

Luego : $$\mathbf{MN = 4\sqrt{3}}$$

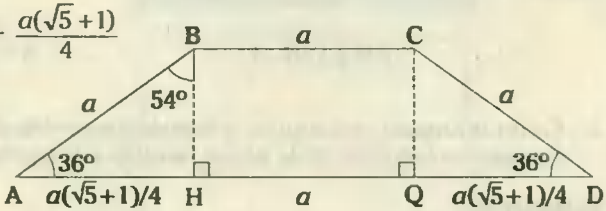


6.- Hallar la longitud de la base mayor de un trapecio, si los otros tres lados miden $(3-\sqrt{5})$ y que uno de sus ángulos mide 36º.

Resolución.-

Para resolver este problema, es necesario recordar el triángulo rectángulo, luego :

$$AH = QD = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)$$



Sumando : $x = \dfrac{a(\sqrt{5}+1)}{4} + a + \dfrac{a(\sqrt{5}+1)}{4}$

$$x = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1\right)$$

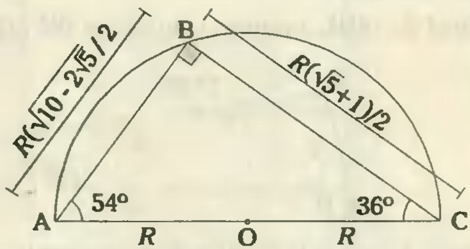
$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+3)$$

Pero : $a = 3-\sqrt{5}$

Reemplazando : $x = (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})/2$

$$x = \frac{9-5}{2}$$

$\therefore$ $x = 2$



7.- Un cuadrado se encuentra inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $4\sqrt{2}$. Calcular la longitud del lado del octógono inscrito en el cuadrado.

Resolución.-

Los cuadrados ABCD y GIHP son congruentes.

Por dato : $AC = BD = 4\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = 4$

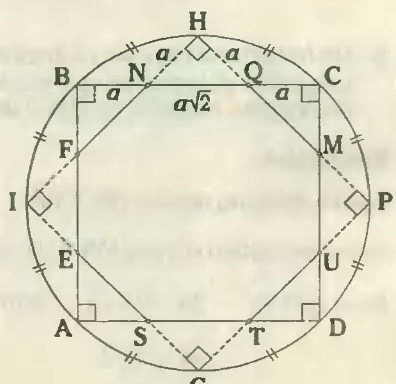
En BC : $a + a\sqrt{2} + a = 4 \Rightarrow a = \dfrac{4}{\sqrt{2}+2}$ ... (1)

El octógono EFNQMUTS es regular, en el cual :

$$NQ = a\sqrt{2} \text{ ... (2)}$$

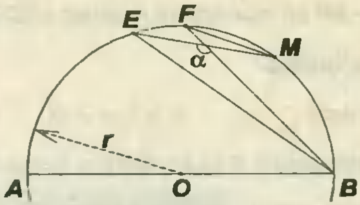
Reemplazando (1) en (2) : $NQ = \sqrt{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}+2}$

$\therefore$ $NQ = 4(\sqrt{2}-1)$

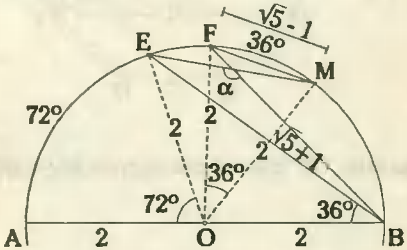


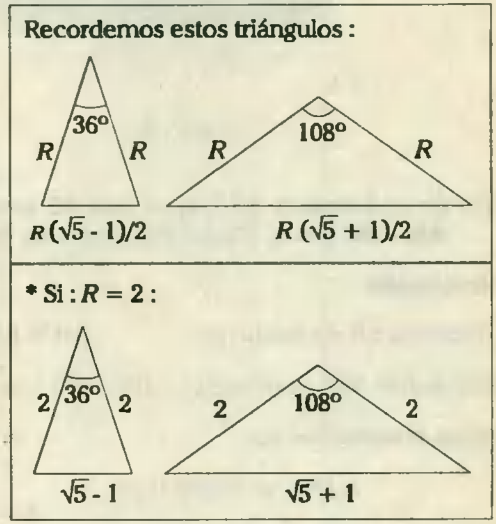
8.- En la figura : $FM = (\sqrt{5}-1)$, $EB = (\sqrt{5}+1)$ y $r = 2$.

Calcular el ángulo α



Resolución.-





Luego en nuestro problema :

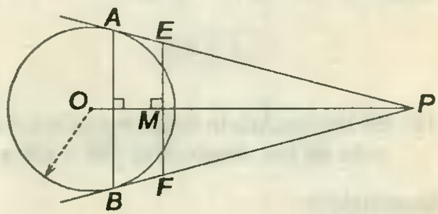
$m\measuredangle FOM = 36°$ y $m\measuredangle EOB = 108°$

Finalmente : $\alpha = \dfrac{72°+180°+36°}{2}$

$\therefore \quad \alpha = 144°$

9.- En la figura $\overline{EF} \,//\, \overline{AB}$, $AP = 3$ y $BF = 1$.

Hallar PM ; siendo A y B puntos de tangencia y $m\measuredangle APB = 30°$



Resolución.-

El cuadrilátero AEFB es un trapecio isósceles

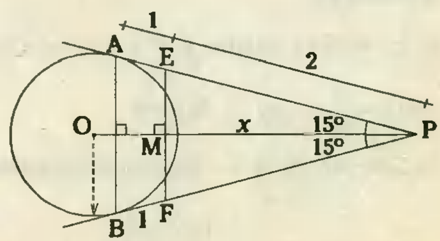
Luego : $AE = BF = 1 \Rightarrow EP = 3 - 1 = 2$

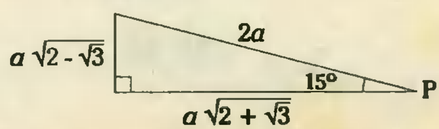
Pero en un ⊿ como este de 15° y 75° :

Luego : $2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Entonces : $x = (1)\sqrt{2+\sqrt{3}}$

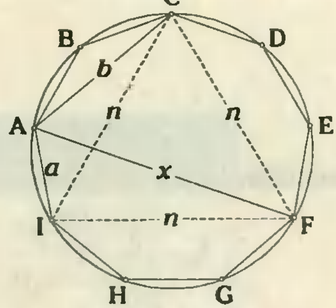
$\therefore \quad x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$





10.- En un nonágono regular ABCDEFGHI : AI + AC = $7\sqrt{3}$. Hallar AF

Resolución.-



Por dato : $a + b = 7\sqrt{3}$

El triángulo ICF es equilátero, luego : IC = CF = IF = h

En el cuadrilátero IACF por el Teorema de Ptolomeo :

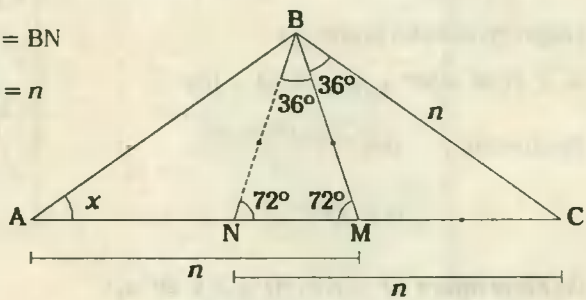
$$x \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$$

$$x = a + b$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 7\sqrt{3}}$$

11.- En un triángulo ABC, en el lado $\overline{AC}$ se ubica un punto "M" con la condición BM = MC, AM = BC y m ∡ BCA = 36°. Calcular la m ∡ A .

Resolución.-



Trazamos $\overline{BN}$ de modo que : BM = BN

El triángulo NBC es isósceles : BC = NC = n

Ahora observamos que :

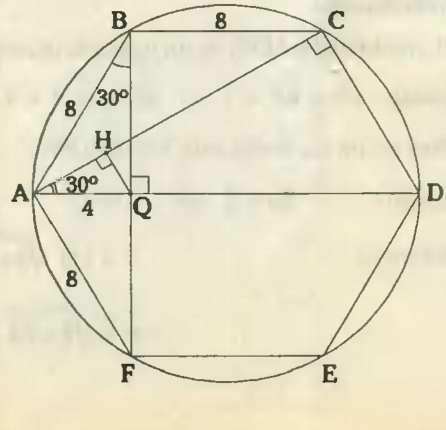
$$\Delta ABM \cong \Delta CBN \text{ (L.A.L.)}$$

Entonces : $m ∡ A = m ∡ C$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 36}$$

12.- En un hexágono regular ABCDEF de lado 8m. Hallar la distancia del punto de intersección de las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{FB}$ a la diagonal $\overline{AC}$.

Resolución.-



El ⊾ ABQ es notable (30° y 60°) en el cual :

$$AQ = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad AQ \Rightarrow 4$$

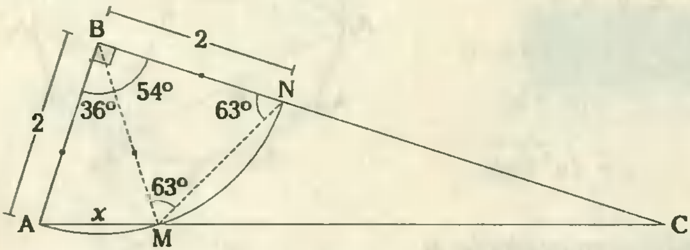
Finalmente en el ⊾ AHQ, notable también :

$$HQ = \frac{4}{2}$$

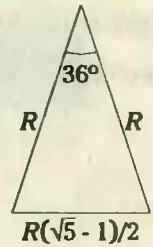
$$\therefore \quad \boldsymbol{HQ = 2}$$

13.- En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$), con centro en "B" y radio igual a $\overline{AB}$, se traza un arco de circunferencia que intersecta en "M" a $\overline{AC}$ y en "N" a $\overline{BC}$. Además se sabe que : $m\measuredangle CNM = 117$ y $BN = 2$. Hallar AM.

Resolución.-



Recordemos este triángulo :



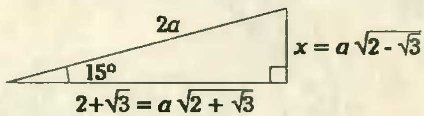
Para nuestro problema : $x = 2(\sqrt{5} - 1)/2$

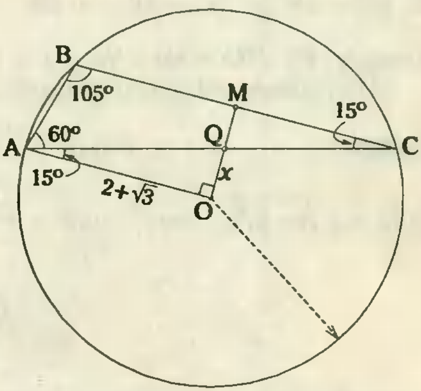
$\therefore \quad x = \sqrt{5} - 1$

14.- En un triángulo ABC, $m\measuredangle C = 15°$, $mA = 60°$ y "O" es el circuncentro del Δ ABC se traza $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (M en $\overline{BC}$) e intersecta en "Q" al lado $\overline{AC}$; hallar OQ, si : $OA = 2 + \sqrt{3}$.

Resolución.-

En un triángulo rectángulo como este se cumple :





De aquí : $(2+\sqrt{3})^2 = a^2\ (2+\sqrt{3})^2$

$2 + \sqrt{3} = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

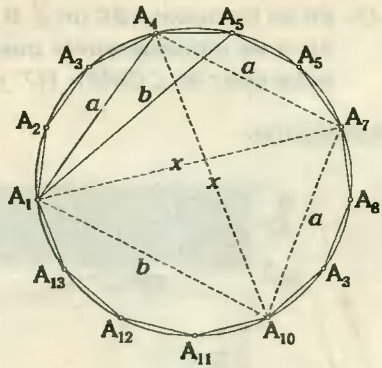
Luego : $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{4-3}$

$\therefore \quad x = 1$

15.- En un polígono regular de 13 lados $A_1 A_2 A_3 .... A_{13}$; si $A_1 A_4 = a$ y $A_1 A_5 = b$.

Hallar $A_{10} A_4$.



Resolución.-

En el gráfico : $A_1 A_5 = A_4 A_7 = A_7 A_{10} = a$

También : $A_1 A_5 = A_1 A_{10} = b$ y $A_1 A_7 = A_4 A_{10} = x$

En el cuadrilátero inscrito : $A_1 A_4 A_7 A_{10}$

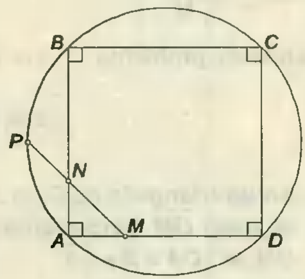
Por el Teorema de Ptolomeo : $x \cdot x = a \cdot a + b \cdot a$

$$x^2 = a^2 + ab$$

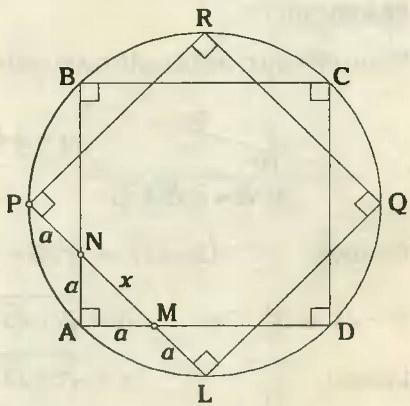
$$\therefore \qquad x = \sqrt{a^2 + ab}$$

16.- *En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado, el perímetro del octógono regular inscrito es $\sqrt{24-12\sqrt{2}}$, MN = AN $\sqrt{2}$.*

Hallar el valor de MN.



Resolución.-



Si: MN = AN $\sqrt{2}$ y $m\,\widehat{AP} = m\,\widehat{PB}$

Entonces : PN = NA = AM = ML = a y MN $= x = a\sqrt{2}$
($\overline{MN}$: un lado del octógono regular inscrito)

Por dato : $8 \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{24-12\sqrt{2}}$

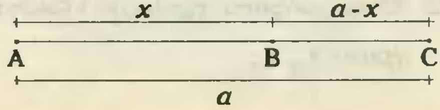
$$8a\sqrt{2} = 2\sqrt{6-3\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a\sqrt{2}}_{x} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{4}$$

$$\therefore \qquad x = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{4}$$

17.- *Hallar la longitud del lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia, si la sección aurea del lado del decágono regular es 1m.*

Resolución.-

Por definición de sección áurea :



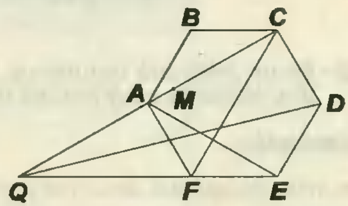
$$x^2 = a \cdot (a - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Para nuestro problema, si "R" es el radio de la circunferencia circunscrita el hexágono y decágono regular, entonces : $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

Pero por dato también : $x = 1$ $\Rightarrow$ $1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$\therefore \quad R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

18.- En la figura mostrada, ABCDEF es un hexágono regular de perímetro $30\sqrt{3}$ m ; hallar MC.



Resolución.-

En el Δ QCH : "G" $\Rightarrow$ baricentro.

En el Δ QCF, por el Teorema de Menelao :

$$(2a\sqrt{3}-x)\cdot 2n\cdot a = x\cdot n\cdot 3a$$

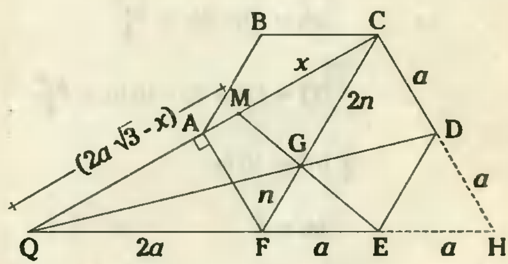
$$4a\sqrt{3} - 2x = 3x$$

$$5x = 4a\sqrt{3}$$

Pero por dato : $6a = 30$ $\Rightarrow$ $a = 5\sqrt{3}$

Reemplazando : $5x = 4\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}$

$$\therefore \quad x = 12$$



19.- Sobre el arco BC perteneciente a la circunferencia circunscrita a un octógono regular ABCDEFGH se ubica el punto P. Si PC = 1 y PE = $4\sqrt{2}$; calcular la longitud del radio de la circunferencia.

Resolución.-

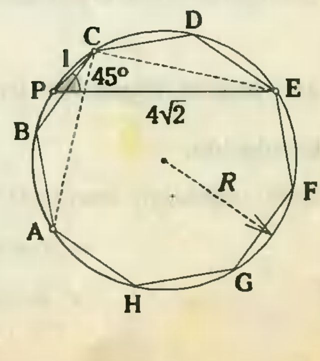
Cada lado del octógono regular subtiende un arco de :

$$\frac{360}{8} = 45$$

Por ser $\measuredangle$ inscrito : $m\measuredangle CPE = \frac{90}{2} = 45$

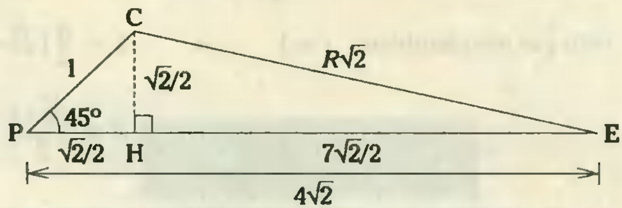
Dado que $\overline{CE}$ es lado del cuadrado inscrito, se tendrá que :

$$CE = R\sqrt{2}$$



En el triángulo PCE : $\quad HE = 4\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo CHE :



$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

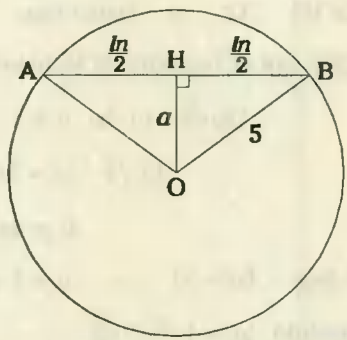
$$\therefore \qquad R = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

20.- En un polígono regular de "n" lados su lado es igual a su apotema más el circunradio. Hallar la longitud del lado si el circunradio mide 5.

Resolución.-

De acuerdo con los datos del problema : $l_n = 5 + a \quad \Rightarrow \quad a = ln - 5$

En el ⊿ OHB : $\quad 5^2 = a^2 + \dfrac{ln^2}{4}$



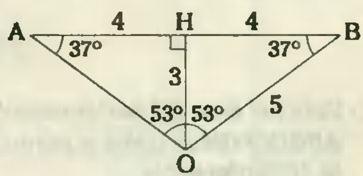
$$\Rightarrow \qquad 25 = (ln - 5)^2 + \frac{ln^2}{4}$$

$$25 = ln^2 + 25 - 10\,ln + \frac{ln^2}{4}$$

$$\frac{5}{4}\,ln^2 = 10\,ln$$

$$\therefore \qquad ln = 8$$

¡Un momento! aparentemente esta sería la solución del problema, pero si observamos el Δ AOB.



$$n\,\measuredangle\,AOB = 106º = \frac{360}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad n = \frac{360}{n} = 3{,}4$$

Lo cual indica que el problema lo podemos catalogar como absurdo.

21.- Hallar la longitud del lado de un heptágono regular ABCDEFG . Si : $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{10}$

Resolución.-

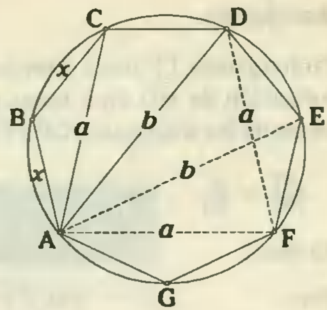
En el cuadrilátero inscrito ADEFG, por el teorema de Ptolomeo :

$$a \cdot b = a \cdot x + b \cdot x$$

$$a\,.\,b = x\,(a + b)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{a \cdot b} + \frac{b}{a \cdot b}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

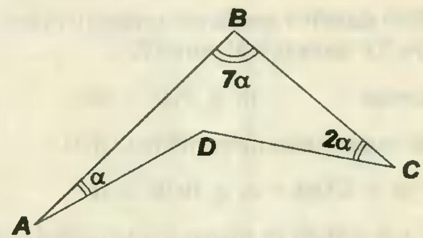


Pero por dato : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$

Luego : $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ $\mathbf{x = 10}$

22.- En la figura mostrada, si : AD = DC = BC = 4. Hallar el valor de BD.

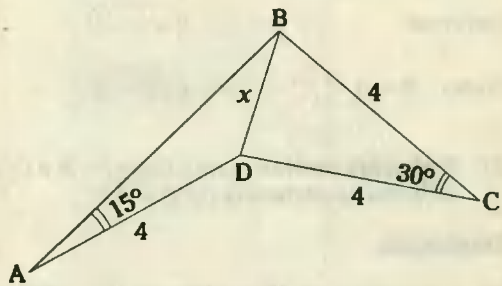


<u>**Resolución**</u>.-

Por teoría de triángulos : $7\alpha = 120^o - \alpha$

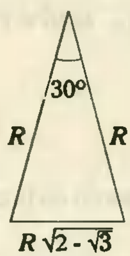
$\Rightarrow$ $8\alpha = 120^o$

$\Rightarrow$ $\alpha = 15^o$



Luego $\overline{BD}$ es el lado de un dodecágono regular.

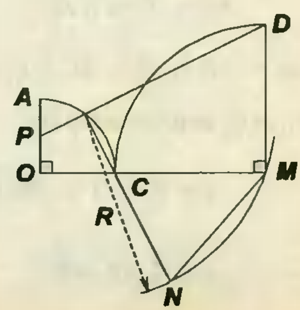
Recordemos este triángulo ahora :

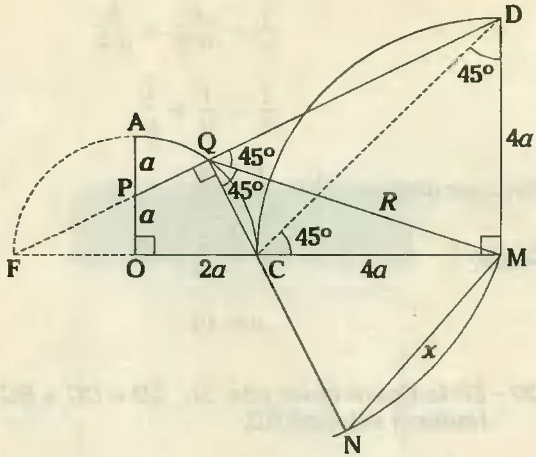


Para nuestro problema :

$$x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

23.- Según el gráfico DM = 2(OC) , AP = PO y R = 6. Calcular MN





Resolución.-

Prolongamos $\overline{DP}$ hasta intersectar a la prolongación de $\overline{MO}$ en F, luego por la semejanza de los triángulos FOP y FMD se tiene :

$$\frac{FO}{FM} = \frac{a}{4a} \quad \Rightarrow \quad FM = 4\,(FO)$$

Ya que : $\overline{PO} \,//\, \overline{DM}$

Pero : $FM = FO + 6a$

Luego : $FO = 2a$

Esto significa que la circunferencia de centro "O" pasa por el punto F.

Luego : $m \measuredangle FQC = 90°$

El cuadrilátero inscriptible CQDM :

$m \measuredangle CQM = m \measuredangle DQM = 45°$

En el Δ MQN es triángulo elemental del octógono regular.

Entonces : $x = l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

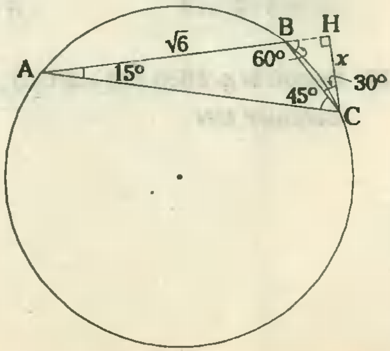
Como : $R = 6$ $\therefore$ $\boxed{x = 6\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

24.- Dados los puntos concíclicos A , B y C; si $m \measuredangle BAC = 15°$, $m \measuredangle ACB = 45°$ y $AB = \sqrt{6}$; calcular la distancia de C a $\overline{AB}$.

Resolución.-

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\,\overset{\frown}{AB} = 90°$ y $m\,\overset{\frown}{BC} = 30°$

Esto quiere decir, que $\overline{AB}$ es lado del cuadrado inscrito en la circunferencia y $\overline{BC}$ es lado del dodecágono regular inscrito luego :



$$AB = \sqrt{6} = R\sqrt{2}$$

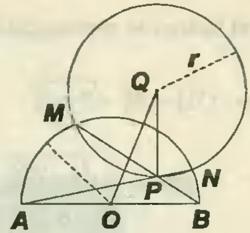
$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{3} \;\wedge\; BC = l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

En el ⊿ BHC de 30° y 60° :

$$x = \frac{BC}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

25.- En la figura AB = 2r = 8 y m ∡ OQP = 9º; calcular PN



Resolución.-

En la semicircunferencia $m\measuredangle \text{MAN} = \dfrac{m\widehat{\text{MN}}}{2}$ (∡ inscrito)

En la semicircunferencia $m\measuredangle \text{MPA} = \dfrac{m\widehat{\text{MPN}}}{2}$ (∡ ex-inscrito)

Como las circunferencias son congruentes :

$\Rightarrow \ m\widehat{\text{MN}} = m\widehat{\text{MPN}}$

$\Rightarrow \ m\measuredangle \text{MAN} = m\measuredangle \text{MPA} = 45$ y $m\widehat{\text{MN}} = m\widehat{\text{MPN}} = 90$

El cuadrilátero MQNO resulta ser un cuadrado donde:

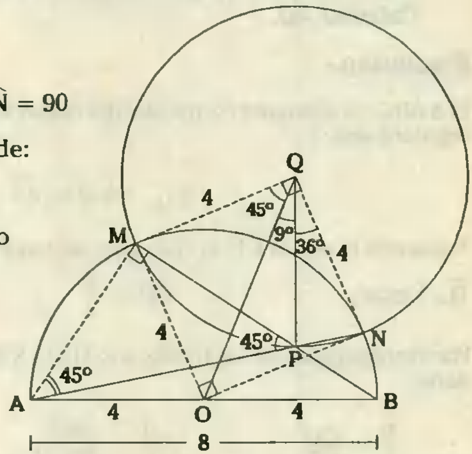
$m\measuredangle \text{OQN} = 45 \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle \text{PQN} = 36$

El triángulo PQN es triángulo elemental del decágono regular :

$$\text{PN} = l_{10} = R\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

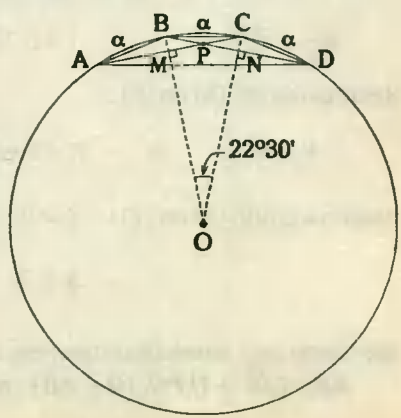
Como : $R = 4$

$\therefore \quad$ **PN = 2 (√5 -1)**



26.- En un trapecio isósceles ABCD en el cual, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y AB = BC = $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$; calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ si el ángulo que forman mide 22º 30'.

Resolución.-



Como el ángulo interior P, de la circunferencia circunscrita al trapecio isósceles ABCD mide 22º30'.

Se tiene : $22º30' = \dfrac{\alpha+\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22º30'$

Esto quiere decir que :

$$\text{AB} = l_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \quad \text{y} \quad \text{AC} = \text{BD} = l_8$$

Además : $\text{OM} = \text{ON} = ap_8$

En el triángulo elemental MON, del polígono de 16 lados se tiene : $MN = OM\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

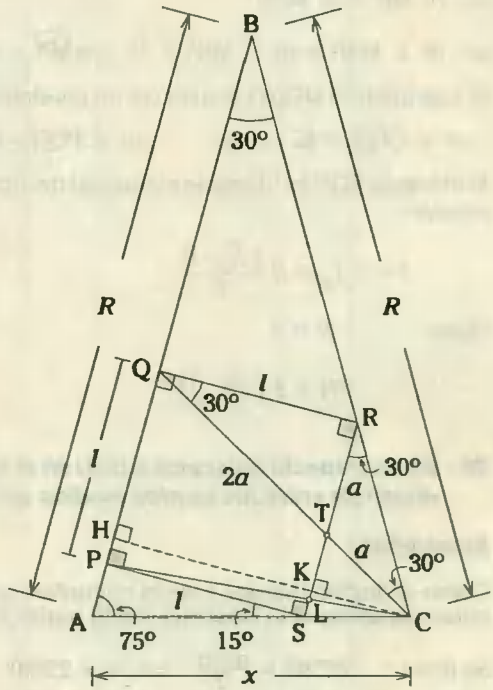
Pero : $OM = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$\therefore \quad \mathbf{MN = 1}$$

27.- En un triángulo ABC (AB = BC), m ∡ ABC = 30º. Se inscribe un cuadrado PQRS tal que $\overline{PQ} \in \overline{AB}$; $\overline{QC}$ y $\overline{PC}$ intersectan a $\overline{RS}$ en T y L respectivamente, si : $TL = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calcular AC.

<u>**Resolución**</u>.-



El Δ ABC, es triángulo elemental del dodecágono regular luego :

$$x = l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad ...(1)$$

Trazamos la altura $\overline{CH}$ la cual intersectan en K a $\overline{TL}$, luego : $CH = \frac{R}{2}$

Por la semejanza de los triángulos ABC y SRC, se tiene:

$$\frac{R}{l} = \frac{CH}{CK} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{l} = \frac{R/2}{R/2-l}$$

De donde : $R = 3l$ ... (2)

Por la semejanza de los triángulo PCQ y LTC :

$$\frac{l}{TL} = \frac{3a}{a} \quad \Rightarrow \quad l = 3\,TL \quad ...(3)$$

Reemplazando (3) en (2) :

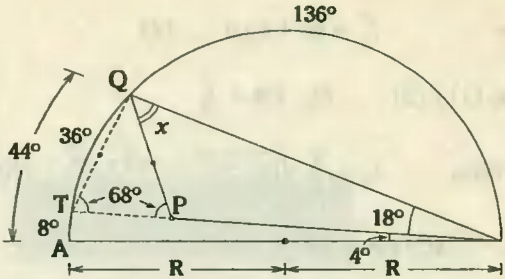
$$R = 9\,TL \quad \Rightarrow \quad R = 9\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad ...(4)$$

Reemplazando (4) en (1) : $x = 9\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 9}$$

28.- Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, sea P un punto de su interior, tal que $AB = (\sqrt{5}+1)\,PQ$. ($Q \in \overset{\frown}{AB}$) , m$\overset{\frown}{QB}$ = 136 y m ∡ ABP = 4 , calcular la m ∡ PQB.

Resolución.-



Prolongamos $\overline{BP}$ hasta intersectar a la semicircunferencia en T, luego $m\overset{\frown}{AT} = 8$ y $m\overset{\frown}{TQ} = 36$, esto quiere decir que :

$$TQ = l_{10} = R\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad TQ = \frac{AB}{4}\,(\sqrt{5}-1) \quad \dots (1)$$

Por dato : $AB = PQ\,(\sqrt{5}+1) \quad \dots (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $TQ = \dfrac{PQ(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4} \quad \Rightarrow \quad TQ = PQ$

En el Δ TQP : $m\measuredangle TPQ = 68 = m\measuredangle QTP$

En el Δ PQB : $68 = x + 18 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 50}$

29.- La relación entre los lados de 2 polígonos regulares de igual número de lados una inscrita y el otro circunscrito es $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; calcular el lado del menor si el radio mide 1.

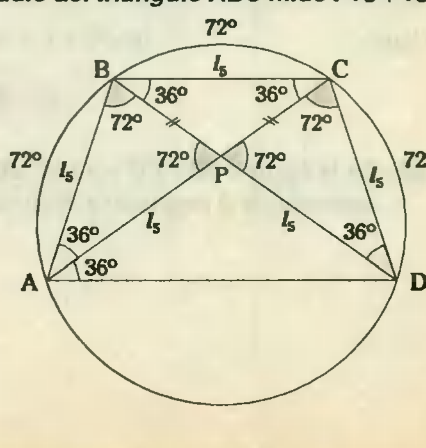
Resolución.-

De acuerdo al item 17.2B, se sabe que : $\dfrac{l_n'}{l_n} = \dfrac{2}{\sqrt{4R^2 - ln^2}}$

Luego : $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{2(1)}{\sqrt{4(1)^2 - ln^2}}$, resolviendo : $\boldsymbol{ln = \sqrt{2-\sqrt{2}}}$

30.- Dado un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) : m $\measuredangle$ BAD = 72º , AB = BC = CD ; hallar AC . PB, si : $\overline{AC} \cap \overline{BD}$: P , y el circunradio del triángulo ABC mide : $\sqrt{5+\sqrt{5}}$

Resolución.-



Ya que AB = BC = CD

$$\Rightarrow \qquad m\,\overset{\frown}{AB} = m\,\overset{\frown}{BC} = m\,\overset{\frown}{CD} = 72$$

De donde : $AB = BC = CD = l_5$

Además : $BP = PC = a \;\wedge\; AP = AB = l_5$

Nos piden : $AC \cdot PB = (a + l_5)\,a \quad \dots (1)$

Δ ACD ~ Δ PCD : $\dfrac{l_5}{a} = \dfrac{a + l_5}{l_5}$

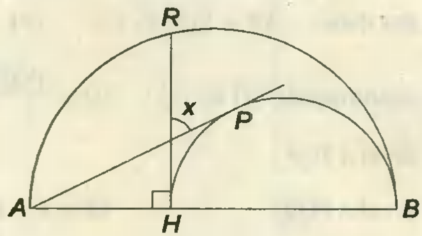
$\Rightarrow \qquad l_5^2 = (a + l_5)\, a \quad ...\ (2)$

De (1) y (2) : $\quad AC \cdot PB = l_5^2$

Como : $\quad l_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{10}$

$\therefore \quad \mathbf{AC \cdot PB = 10}$

31.- En la figura : P es punto de tangencia y $\overline{HB}$ es la sección aurea de $\overline{AB}$; calcular x



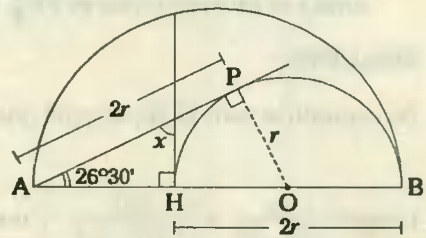
Resolución.-

Según condición del problema $\overline{HB}$ es la sección aurea de $\overline{AB}$

$\Rightarrow \qquad (HB)^2 = AB \cdot AH \quad ...\ (1)$

Por el Teorema de la Tangente :

$(AP)^2 = AB \cdot AH \quad ...\ (2)$

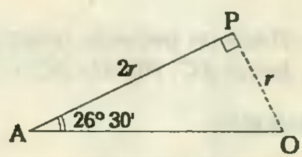


De (1) y (2) : $\quad HB = AP = 2r$

Trazamos el radio $\overline{OP}$, luego :

$m\measuredangle APO = 90$ y $OP = r$

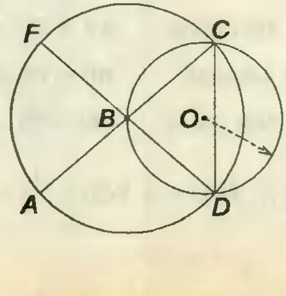
En el ⊿ APO : $\quad m\measuredangle PAO = \dfrac{53}{2} = 26°\,30'$

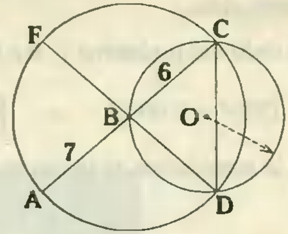


Como : $\qquad 26°\,30' + x = 90$

$\therefore \qquad \mathbf{x = 63°\,30'}$

32.- En la figura : FB · BD = 42 u^2, AB = 7; calcular la potencia de A respecto a la circunferencia O.





Resolución.-

Empleando el Teorema de las Cuerdas :

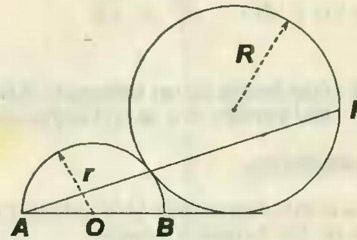
$FB \cdot BD = AB \cdot BC$

$42 = 7 \cdot BC \quad \Rightarrow \quad BC = 6$

Luego : $\quad Pot(A/O) = AC \cdot AB = 13 \cdot 7$

$\therefore \quad$ **$Pot(A/O) = 91\ \mu^2$**

33.- Del gráfico adjunto, hallar la potencia de N a la circunferencia O, si : R = 3 y r = 2



Resolución.-

Del gráfico observamos que : $\Delta AOT \sim \Delta TO'N$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AT}{TN} = \dfrac{2}{3}$ ó $AT = 2K$ y $TN = 3K$

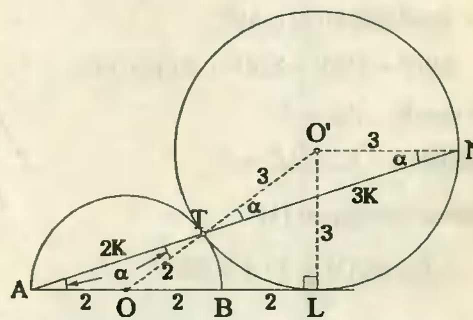
En el ⊿ OLO' : $OL = 4 \quad \Rightarrow \quad AL = 2 + 4 = 6$

Por Teorema de la Tangente : $(AL)^2 = (5K)(2K)$

$36 = 10K^2 \quad \Rightarrow \quad K^2 = \dfrac{18}{5}$

Nos piden : $\quad Pot\,(N/O) = (5K)(3K) = 15K^2$

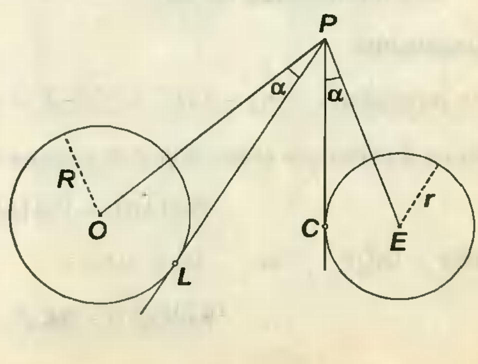
$\therefore \quad$ **$Pot\,(N/O) = 54$**



34.- En el gráfico mostrado :

$Pot\,[P/O] = 2\,Pot\,[P/E]$

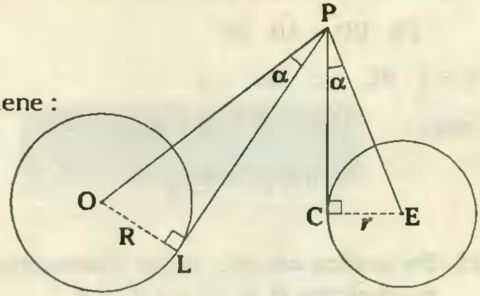
Hallar R/r



Resolución.-

Por dato del problema : Pot (P/O) = 2 [Pot (P/E)]

$$(PL)^2 = 2\,(PC)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{PL}{PC} = \sqrt{2} \quad ...\,(1)$$



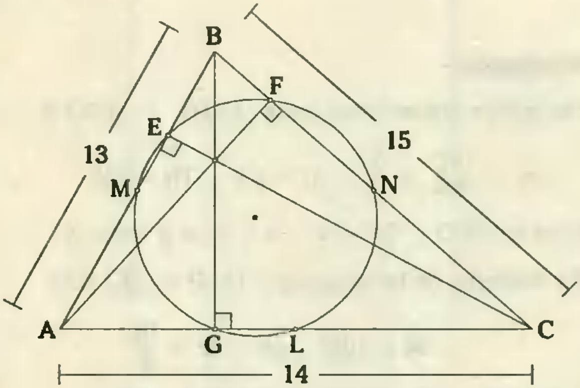
Por la semejanza de los triángulos OLP y PCE se tiene :

$$\frac{PL}{PC} = \frac{R}{r} \quad ...\,(2)$$

De (1) y (2) : $\dfrac{R}{r} = \sqrt{2}$

35.- Los lados de un triángulo ABC miden : AB = 13, BC = 15 y AC = 14; calcular la potencia del vértice A a la circunferencia de los 9 puntos correspondiente al triángulo.

Resolución.-



Sea la circunferencia O, la circunferencia de los 9 puntos, luego :

$$\text{Pot (A/O)} = AL \cdot AG \quad ...\,(1)$$

Por Euclides, en el Δ ABC :

$$(15)^2 = (13)^2 + (14)^2 - 2\,(14)\,(AG)$$

De donde : AG = 5

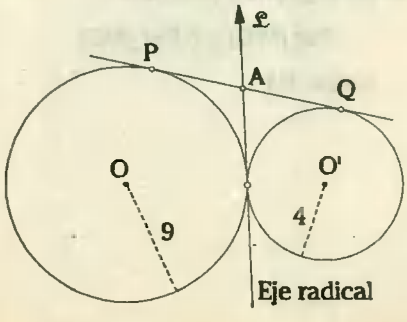
Además : AL = LC = 7

Reemplazando en (1) :

$$\textbf{Pot (A/O)} = 7 \cdot 5 = 35\ \text{u}^2$$

36.- El eje radical de dos circunferencias tangentes exteriores de radios 9 y 4 intersecta a la tangente común exterior en A; calcular la potencia de este punto con respecto a la circunferencia mayor.

Resolución.-



Por propiedad : $PQ = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{9 \cdot 4} = 12$

Como A pertenece al eje radical £, se tiene :

$$\text{Pot (A/O)} = \text{Pot (A/O')}$$

$$(PA)^2 = (AQ)^2 \quad \Rightarrow \quad PA = AQ = 6$$

$$\therefore \quad \textbf{Pot (A/O)} = 36\ \mu^2$$

37.- El eje radical de dos circunferencias exteriores cuyos radios miden 5 y 3 intersecta a la línea de centros en H. Calcular la distancia de H al centro de la circunferencia menor, si la línea de centros mide 12.

<u>**Resolución**</u>.-

Como H pertenece al eje radical, se tiene :

$$\text{Pot}\,(H/O) = \text{Pot}\,(H/O')$$

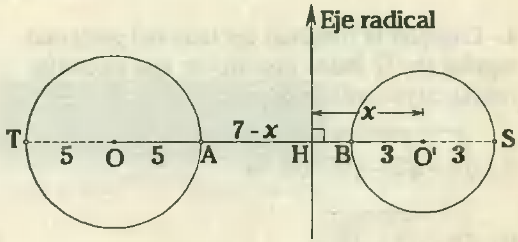
$$(HT)\,(HA) = (HS)\,(HB)$$

$$(17 - x)\,(7 - x) = (x + 3)\,(x - 3)$$

$$119 + x^2 - 24\,x = x^2 - 9$$

$$24\,x = 128$$

$$\therefore \quad x = \frac{16}{3} = \mathbf{5{,}3}$$



38.- Dadas dos circunferencias secantes de centros O y O' , se traza una cuerda $\overline{BC}$ tangente a la circunferencia de centro O' en A. El eje radical corta en M a la recta que contiene a la cuerda ; calcular : AM, si BM . MC = 16

<u>**Resolución**</u>.-

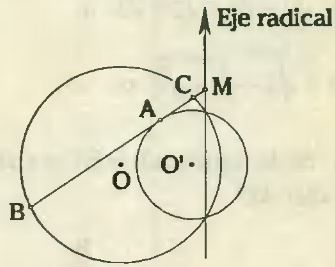
Como M pertenece al eje radical de las 2 circunferencias.

$$\Rightarrow \quad \text{Pot}\,(M/O) = \text{Pot}\,(M/O')$$

$$(MB)\,(MC) = (MA)^2$$

$$16 = (MA)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{MA = 4}$$



39.- El ángulo B de un triángulo ABC mide 74. Hallar la longitud de la porción de eje radical (respecto a las circunferencia inscrita y la ex-inscrita referente a AC) limitado por las rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si los radios de estas circunferencias miden 7 y 13.

<u>**Resolución**</u>.-

Como "Q" pertenece al eje radical "t" de las circunferencias O y O' , se tiene :

$$\text{Pot}\,(Q/O) = \text{Pot}\,(P/O')$$

$$(QM)^2 = (QN)^2 \quad \Rightarrow \quad QM = QN$$

En el trapecio OMNO' , trazamos la mediana $\overline{QL}$.

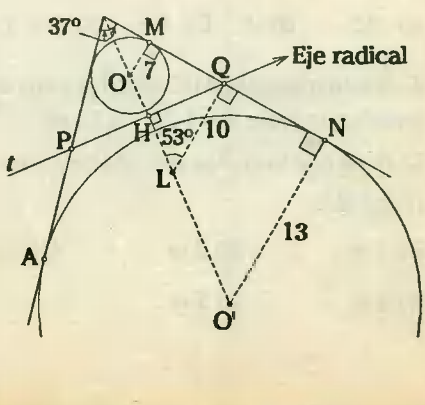
Luego : $\quad QL = \dfrac{7+13}{2} = 10$

Además : $\quad m\measuredangle\, HLQ = 53$

En el ◺ QHL de 37° y 53° : $\quad QH = 8$

En el Δ PBQ , isósceles : $\quad PH = HQ = 8$

$$\therefore \quad \mathbf{PQ = 16}$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular la longitud del lado del polígono regular de 32 lados inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 1 m.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ m$

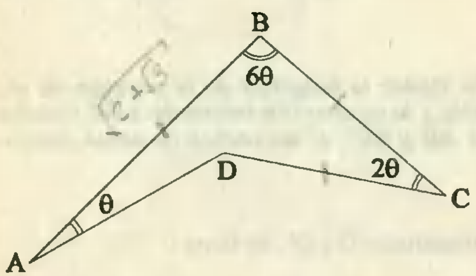
B) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ m$

C) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ m$

D) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ m$

E) $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ m$

2.- En la figura, AB = BC = CD = $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Hallar AD.



A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

3.- En un triángulo ABC inscrito a una circunferencia de radio $R = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\ m$.

Se tiene que los lados son : $AB = l_3$, $AC = l_4$.

Hallar BC.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m

D) 4 m E) 5 m

4.- Se tiene un cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia de radio $R = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Hallar la distancia del vértice A al punto medio del arco CD.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

5.- Se tiene un trapecio ABCD inscrito en una circunferencia de radio cuya longitud es $R = (\sqrt{2}-1)\ m$.

Si las bases son $AB = l_4$ y $CD = l_3$.

Hallar la longitud de la altura del trapecio.

A) 0,1 m B) 0,2 m C) 0,3 m

D) 0,4 m E) 0,5 m

6.- Sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular ABCDE se toma un punto P; si AP + BP = 8 m ; PD = 12 m y PE = 11 m . Hallar PC.

A) 3 m B) 6 m C) 9 m

D) 10 m E) 13 m

7.- En un octógono regular ABCDEFGH; hallar la distancia entre el vértice A y el punto medio del lado $\overline{DE}$. Si $R = 2\ m$ es la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular.

A) $\sqrt{10+2\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{10+3\sqrt{2}}$

B) $\sqrt{5+3\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{10+5\sqrt{5}}$

C) $\sqrt{10-2\sqrt{3}}$

8.- Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $2\sqrt{7}\ m$; si $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$ (M ∈ $\overset{\frown}{AD}$); AN = NC (N ∈ $\overline{AC}$). La prolongación del segmento $\overline{MN}$ intersecta a la circunferencia en el punto L. Hallar la longitud del segmento $\overline{NL}$.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m

D) 4 m E) 5 m

9.- En un eneágono regular ABCDEFGHI se cumple que AB + BD = 14 m. Hallar BG.

A) 3 m B) 7 m C) 11 m

D) 14 m E) 21 m

10.- En un pentágono regular ABCDE, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ se intersectan en P.

Hallar PD; si : PC = 4 m.

A) $\sqrt{10+2\sqrt{3}}$ D) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $\sqrt{5+3\sqrt{5}}$ E) $\sqrt{10+5\sqrt{5}}$

C) $2\sqrt{7-\sqrt{6}}$

11.- Dado un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia, sobre el arco BC se considera un punto cualquiera "P"; si PC = 1 m y PE = $4\sqrt{2}$ m. Hallar la longitud del radio de la circunferencia.

A) $\sqrt{2}/2$ B) $3\sqrt{2}/2$ C) $5\sqrt{3}/4$

D) $\sqrt{5}/3$ E) $5\sqrt{2}/2$

12.- En un heptágono regular ABCDEFG ;

si : $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{9}$

Hallar su perímetro.

A) 49 B) 56 C) 63 D) 72 E) 81

13.- La longitud del lado de un dodecágono regular ABCDEF ..... es $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Hallar AE.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

14.- En un cuadrilátero inscriptible ABCD, los ángulos BDA y ACD miden 17 y 19 respectivamente; si la longitud de la diagonal $\overline{BD}$ es $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ - 1

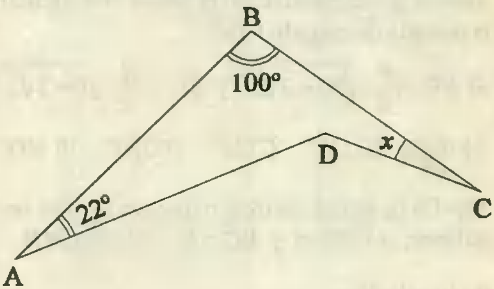
D) $\sqrt{5}$ + 1 E) $2\sqrt{5-\sqrt{3}}$

15.- Si desde un punto H de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular ABCDE se trazan segmentos a los cinco vértices A, B, C, D y E; si : HE∈ $\overset{\frown}{AE}$; HA + HE + HC = 19 m y HB = 9 m . Hallar HD.

A) 9 m B) 10 m C) 11 m D) 12 m E) 15 m

16.- En la figura mostrada; si :

AB = BC = $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ y CD = 1. Hallar : x



A) 7°30' B) 8° C) 10° D) 15° E) 18°

17.- En la figura dada; si : AB = BC = $2+\sqrt{2}$. Hallar : x

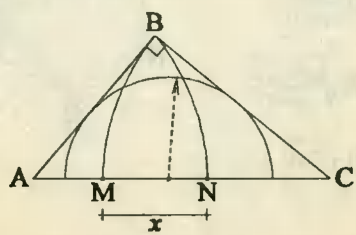
A) 1

B) 1,5

C) 2

D) 2,5

E) 3



18.- En un pentágono regular ABCDE, se traza la diagonal $\overline{BE}$ y un diámetro perpendicular a dicha diagonal, el diámetro intersecta al lado $\overline{CD}$ en el punto F.

Además : $\overline{BE} \cap \overline{AF} = \{M\}$

Si : $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AF} = 1$

Hallar: l_5

A) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ D) $\sqrt{5+3\sqrt{5}}$

B) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ E) $\sqrt{10+2\sqrt{3}}$

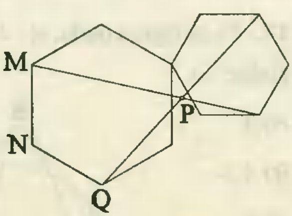
C) $\sqrt{10-\sqrt{5}}$

19.- Se trazan $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cuerdas en una circunferencia cuyo radio mide R, si la prolongación de la cuerda $\overline{AB}$, intersecta a la tangente trazada por el punto C en el punto D. Calcular la medida del ángulo BDC.

Si $AB = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ y $BC = \dfrac{R}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

A) 108° B) 135° C) 75° D) 120° E) 105°

20.- En la figura, se tienen dos hexágonos regulares; si $PM = a$ y $PQ = b$. Calcular MN.



A) $(a+b)/2$

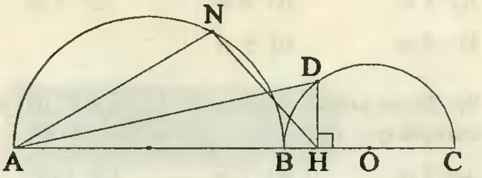
B) $\sqrt{\dfrac{a^3+b^3}{3(a+b)}}$

C) $\dfrac{2ab}{a+b}$

D) $\sqrt{\dfrac{a^3-b^3}{a-b}}$

E) $\sqrt{2ab}$

21.- Según el gráfico, calcular AN , si $AB = 6$ y $BC\left(\sqrt{5}-1\right) = 4\,(BD)$



A) $\frac{3}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ D) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

B) $\frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ E) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

C) $\frac{3}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

22.- Se tiene el octógono regular ABCDEFGH y el cuadrado BCPQ, tal que P y Q están en la región octogonal.

Calcular PE, si $HE = \left(3+3\sqrt{2}\right)$ *cm*.

A) 4 *cm* B) 3 *cm* C) 2 *cm*

D) 1 *cm* E) 5 *cm*

23.- En una circunferencia de radio R se inscribe el hexágono regular ABCDEF, en el cual se trazan $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$; calcular el perímetro de la región poligonal que resulta de unir los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos determinados.

A) $5R\sqrt{2}$ B) $7R\sqrt{4}$ C) $2R\sqrt{3}$

D) $8R\sqrt{3}$ E) $9R\sqrt{3}$

24.- En un pentágono regular ABCDE, $\overline{EC} = 4$ *cm*, la mediatriz de $\overline{AB}$ intersecta a $\overline{BE}$ en el punto Q; calcular BQ.

A) $7 - 2\sqrt{5}$ B) $3 - 2\sqrt{3}$ C) $4 - 2\sqrt{4}$

D) $6 - 2\sqrt{5}$ E) $8 - 2\sqrt{5}$

25.- Se tiene el octógono regular ABCDEFGH, tal que $\overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$ y $\overline{BG} \cap \overline{AF} = \{Q\}$. Calcular PQ si la longitud del radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono es $(\sqrt{2}+1)$ *cm.*

A) 1 *cm* B) 2 *cm* C) 3 *cm*

D) 4 *cm* E) 5 *cm*

26.- En una circunferencia cuyo radio es 2 *cm*; calcular la longitud del radio de otras ocho circunferencias congruentes entre si y tangentes exteriormente dos a dos y a su vez cada uno es tangente interiormente con la circunferencia dada.

A) $\left[\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right]$ D) $\left[\dfrac{4\sqrt{4}-\sqrt{4}}{4+\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right]$

B) $\left[\dfrac{5\sqrt{5}-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}}\right]$ E) $\left[\dfrac{6\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right]$

C) $\left[\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right]$

27.- En una circunferencia de radio *R* se inscribe el hexágono regular ABCDEF, luego en el arco BC se ubica el punto N de modo que $m\,\widehat{BC} = m\,\widehat{NC}$, además I es el incentro del triángulo AND. $\overline{EI} \cap \overline{AD} = \{Q\}$ y $\overline{IF} \cap \overline{AD} = \{P\}$. Calcular $\overline{PQ}$, si $R = (2+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ *cm.*

A) 6 *cm* B) 7 *cm* C) 8 *cm*

D) 5 *cm* E) 2 *cm*

28.- Según la figura A es punto de tangencia, además :

$$LE = 2\,(TE)$$

$$m\,\widehat{AN} = 60^\circ$$

$$\frac{(TE)^2}{R-r} = 10\ m$$

Calcular el valor de *R*.

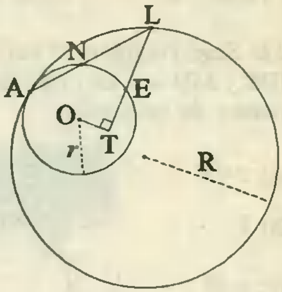
A) 60 *m*

B) 65 *m*

C) 70 *m*

D) 75 *m*

E) 80 *m*



29.- El pentágono ABCDE es regular, el radio de la circunferencia es *R*.

Si : $PE = PD = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Calcular $m\measuredangle$ AQP.

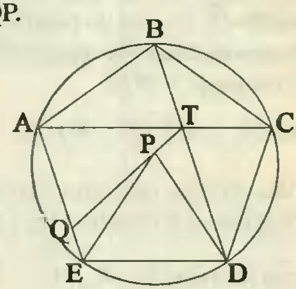
A) 54°

B) 63°

C) 72°

D) 84°

E) 87°



30.- En un triángulo ABC, la $m\measuredangle$ ABC = 108° y su incentro es I; calcular la longitud del circunradio del triángulo AIC, si el circunradio del triángulo ABC es *R*.

A) $(\sqrt{6}+2)\dfrac{R}{2}$ D) $(\sqrt{3}+1)\dfrac{R}{2}$

B) $(\sqrt{5}+1)\dfrac{R}{2}$ E) $(\sqrt{3}+2)\dfrac{R}{2}$

C) $(\sqrt{4}+1)\dfrac{R}{2}$

31.- En una circunferencia cuyo radio mide $\sqrt{2}$ se ubican los puntos consecutivos : A, B, C y D, tal que AC = $\sqrt{6}$ *cm* ; BD = 2 *cm* y $m\,\widehat{AB} = m\,\widehat{BC}$. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 50 B) 45 C) 30 D) 35 E) 20

32.- Según la figura, N es punto medio de arco BM y MH = 2 *cm*; calcular AB (B y M son puntos de tangencia)

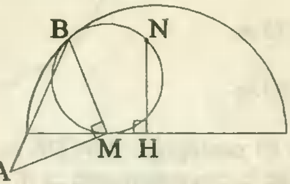
A) $2\sqrt{2}$

B) 4

C) $4\sqrt{2}$

D) 6

E) $3\sqrt{2}$



33.- Se tiene una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{5}+1$, por un punto exterior P, se trazan la secante PBA y la tangente $\overline{PE}$, si PE = AB = 2; calcular $m\measuredangle$ POB.

A) 18 B) 30 C) 36 D) 72 E) 45

34.- Dadas las circunferencias tangentes exteriores de centros O_1 y O_2, por O_1 se trazan las recta L_1 y $L_2\left(\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}\right)$ de modo que $\overleftrightarrow{L_1}$ es tangente a la circunferencia de centro O_2 en T y $\overleftrightarrow{L_2}$ intersecta la circunferencia de centro O_1 en N y M; calcular Pot(M/O_2), si MN = $10u$ y además Pot (M/O_2) < Pot (N/O_2).

A) $48u^2$ B) $49u^2$ C) $50u^2$

D) $51u^2$ E) $53u^2$

35.- En un cuadrante AOB está inscrita una circunferencia de centro O'. Calcular el radio de ésta, si la potencia de O' respecto a la circunferencia que contiene al cuadrante es $(2\sqrt{2}+1)\,cm^2$.

A) 5 *cm* B) 4 *cm* C) 3 *cm*

D) 2 *cm* E) 1 *cm*

36.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual se tiene una circunferencia inscrita, tal que "M" es punto de tangencia con $\overline{BC}$, AB = 5 y AC = 13; calcular la potencia del punto medio de $\overline{MC}$ respecto a la circunferencia.

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

37.- En un triángulo equilátero ABC cuyo circunradio mide "R"; calcular la potencia de B con respecto a la circunferencia que contiene al punto C y a los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

A) $\frac{2}{4}R^2$ B) $\frac{3}{4}R^2$ C) $\frac{4}{7}R^2$

D) $\frac{1}{4}R^2$ E) $\frac{3}{5}R^2$

38.- En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro "H" y circuncentro "O", se traza la altura $\overline{AB}$. Si la distancia de "O" a $\overline{AC}$ es 2 y PH = 1; calcular la potencia de "P" con respecto a la circunferencia de centro "O".

A) -2 B) -3 C) $-\sqrt{5}$ D) - 4 E) -5

39.- Los radios de dos circunferencias de centro "O" y "O'" miden 5 y 3, además OO' = 10. El eje radical de estas circunferencias intersecta a una tangente exterior común en "F"; calcular "OF".

A) 5,3 B) 6,5 C) 7 D) 7,36 E) 8

40.- Calcular la potencia del centro radical de las tres circunferencias mostradas, con respecto de una de ellas.

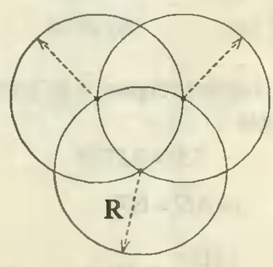
A) $-\dfrac{R^2}{3}$

B) $-\dfrac{R^2}{2}$

C) $-\dfrac{R^2\sqrt{2}}{6}$

D) $\dfrac{R^2}{4}$

E) $-\dfrac{2}{3}R^2$



CAP. 18

areas de regiones triangulares

18.1 REGIÓN TRIANGULAR

Una región triangular es la reunión del triángulo con su interior. En la *Fig.*18.1 a la región triangular ABC esta representada por toda la superficie rayada (incluyendo los lados del Δ ABC).

Así pues la región triangular es una superficie cuya área se calcula comparándola con otra superficie que sirve como unidad de medida (generalmente el m^2, cm^2, etc).

En adelante, para abreviar nos referimos al área de un triángulo, cuadrado, polígono, etc.

En cada caso entendemos desde luego, que se trata del área de la región correspondiente.

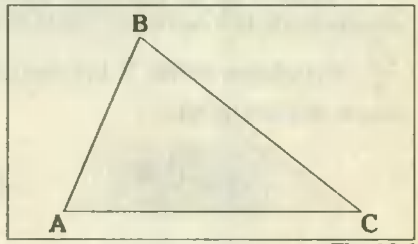


Fig. 18.1

18.2 FÓRMULAS PARA HALLAR EL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

A) Área de un Triángulo Cualquiera :

El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto, entre las longitudes de un lado y su altura correspondiente.

En la *Fig*. 18.2a, si A representa el área del Δ ABC, se cumple :

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \qquad \text{... (18.1)}$$

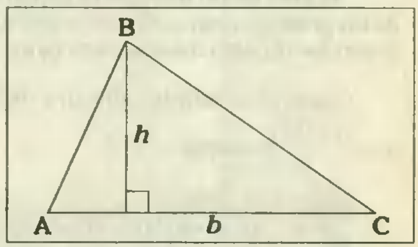


Fig. 18.2

Observación :

El hecho que la altura sea exterior al triángulo, no impide que la fórmula se cumpla así también.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \qquad \text{... (18.2)}$$

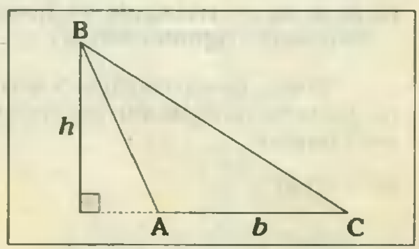


Fig. 18.3

b) Área de un Triángulo Rectángulo :

"El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de sus catetos".

En la figura se cumple :

$$A = \frac{AB \cdot BC}{2} \qquad \text{... (18.3)}$$

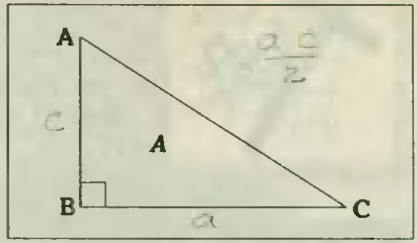


Fig. 18.4

C) Área de un Triángulo Equilátero :

"El área de un triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud de su lado multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{4}$. En la figura siendo "l" la longitud del lado y "h" su altura, se cumple que :

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \qquad \text{... (18.4)}$$

También :

$$A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{... (18.5)}$$

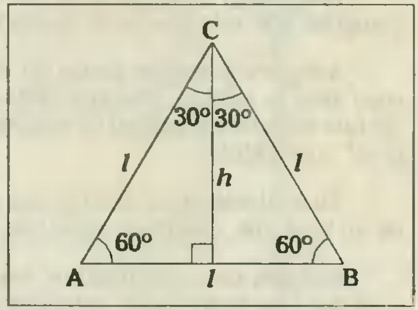


Fig. 18.5

D) Área de un Triángulo en Función de sus lados : (Fórmula de Herón)

El área de un triángulo es igual a la raíz cuadrada de un producto cuyos factores son el semiperímetro y el semiperímetro menos cada lado.

Sea "p" el semiperímetro del Δ ABC, es decir $p = \frac{a+b+c}{2}$, luego :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{... (18.6)}$$

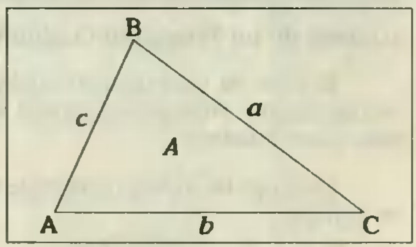


Fig. 18.6

E) Área de un triángulo en función de dos lados y del ángulo comprendido : (Fórmula Trigonométrica)

"El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados multiplicado por el seno del ángulo que estos forman".

En la figura :

$$A = \frac{1}{2} \; AB \,.\, AC \operatorname{sen} \theta \qquad \text{... (18.7)}$$

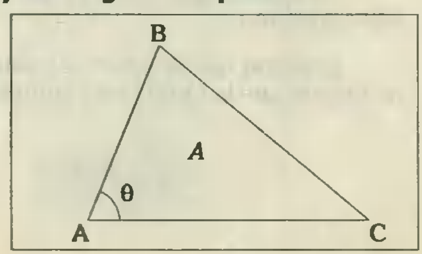


Fig. 18.7

F) Área de un Triángulo en Función del Inradio :

"El área de un triángulo es igual al producto de su semiperímetro y su inradio".

Sea "r" la longitud del inradio y p el semiperímetro. Luego :

$$A = p\,r \qquad \text{... (18.8)}$$

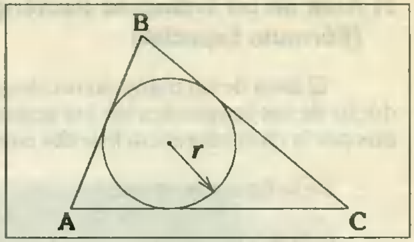


*Fig.*18.8

G) Área de un Triángulo en Función del Circunradio :

"El área de un triángulo es igual al producto de sus tres lados dividido por cuatro veces el cir-cunradio".

En la figura, R es circunradio. Luego :

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \qquad \text{... (18.9)}$$

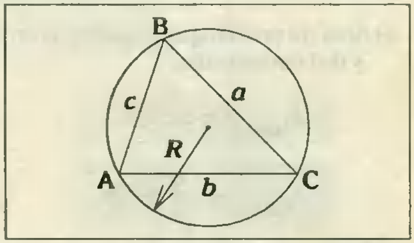


Fig. 18.9

H) Área de un Triángulo en Función del Exradio :

"El área de un triángulo es igual al exradio referente a un lado multiplicado por la diferencia entre el semiperímetro y dicho lado".

Sea r_c la longitud del ex-radio relativo a AB.

Luego :

$$A = r_c\,(p - c) \qquad \text{... (18.10)}$$

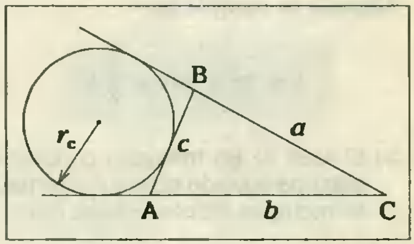


Fig. 18.10

I) Área de un Triángulo en Función de los tres exradios y del inradio :

"El área de un triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto de los tres ex - radios y el inradio".

En la figura, r_a , r_b y r_c son las longitudes de los ex-radios y r del inradio. Luego :

$$A = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \qquad \text{... (18.11)}$$

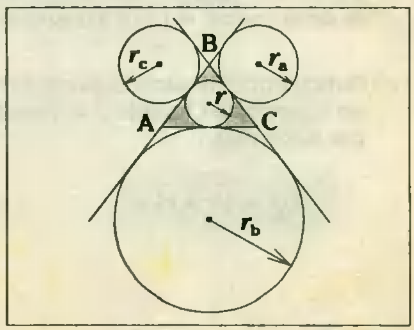


Fig. 18.11

J) Área de un Triángulo Rectángulo : (Fórmula Especial)

"El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados por la circunferencia inscrita sobre la hipotenusa".

De la figura, se cumple :

$$A = AH \cdot HC \qquad \text{... (18.12)}$$

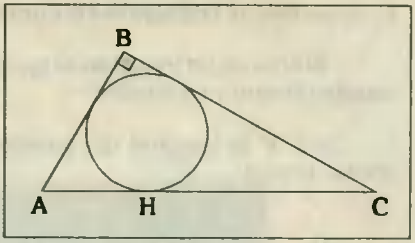


Fig. 18.12

18.3 PROPIEDADES

a) Área de un triángulo equilátero en función del inradio y del circunradio.

$$A_{(\Delta ABC)} = 3r^2\sqrt{3} \qquad \text{... (18.13)}$$

$$A_{(\Delta ABC)} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} \qquad \text{... (18.14)}$$

Donde : r : Inradio ; R : Circunradio

Además se cumple que :

$$R = 2r \text{ y } BH = \frac{3}{2}R \qquad \text{... (18.15)}$$

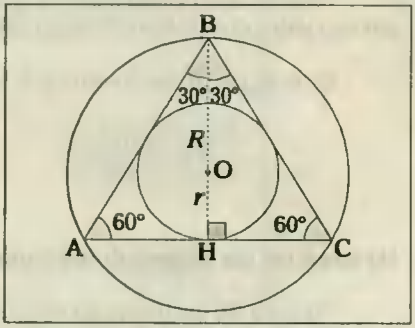


Fig. 18.13

b) El área de un triángulo conociendo dos lados, es máxima cuando el ángulo formado por estos lados es recto, en efecto se sabe que :

$$A_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\theta$$

De donde $A_{(\Delta ABC)}$ será máxima si sen θ es máximo, es decir : sen θ = 1 por lo tanto θ = 90.

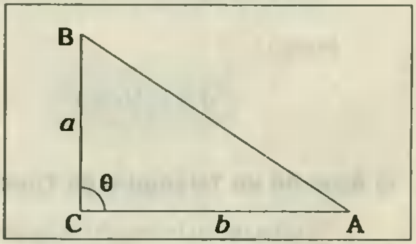


Fig. 18.14

c) Particularmente para un triángulo rectángulo su área en función del inradio y la hipotenusa, esta dada por la fórmula :

$$A_{(\Delta)} = [b + r]\,r \qquad \text{... (18.16)}$$

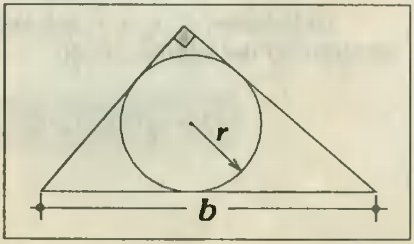


Fig. 18.15

d) El área de un triángulo rectángulo ABC en función de los exradios relativa a los catetos r_a y r_c esta dada por :

$$A_{(\Delta ABC)} = r_a \cdot r_c \qquad \text{... (18.17)}$$

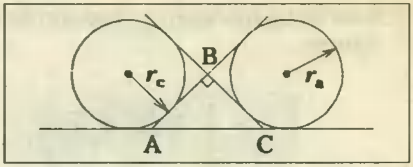


Fig. 18.16

e) Para un triángulo rectángulo ABC ($m <$ B = 90°) de inradio r y exradio relativa a la hipotenusa r_b, el área esta dada por :

$$A_{(\Delta)} = r\ r_b \qquad \text{... (18.18)}$$

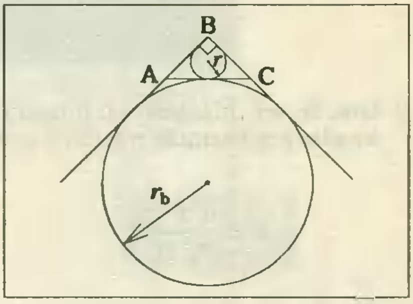


Fig. 18.17

f) De la figura si $\mathcal{L}$ es tangente a la circunferencia "A" es el área del Δ ABC a, b y c las longitudes de sus lados se cumple :

$$A = \frac{aa^1 + bb^1 + cc^1}{2} \qquad \text{... (18.19)}$$

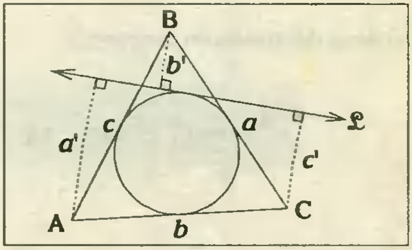


Fig. 18.18

g) Área de un triángulo en función del circunradio y de sus alturas.

$$A = \sqrt{\frac{1}{2} R \cdot h_a h_b h_c} \qquad \text{... (18.20)}$$

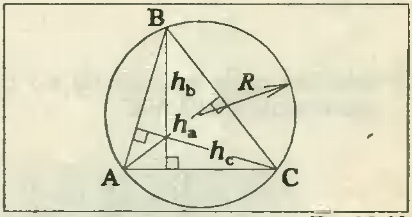


Fig. 18.19

h) El área de un triángulo acutángulo ABC es igual al circunradio multiplicado por el semiperímetro de su triángulo pedal.

$$A = p\ (\Delta\, MNL) \times R \qquad \text{... (18.21)}$$

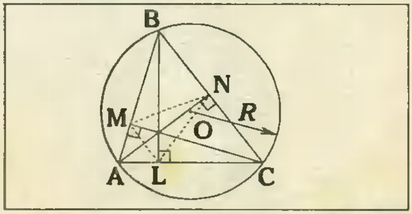


Fig. 18.20

i) Área de un triángulo en función de los lados y de las alturas.

$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc\,h_a h_b h_c} \quad \text{... (18.22)}$$

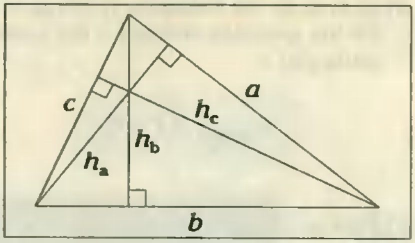


Fig. 18.21

j) Área de un triángulo en función de un lado, del inradio y del exradio referente a dicho lado.

$$A = \frac{a \cdot r \cdot r_a}{r_a - r} \quad \text{... (18.23)}$$

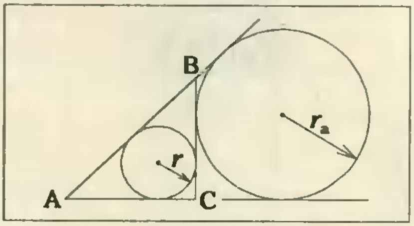


Fig. 18.22

k) Área del triángulo tangencial

$$A_{(\Delta MNP)} = A_{(\Delta ABC)}\,\frac{r}{2R} \quad \text{... (18.24)}$$

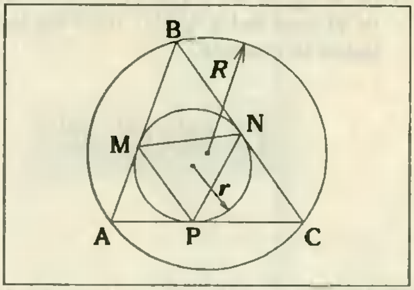


Fig. 18.23

l) Relación entre las área de los cuatro triángulos tangenciales del Δ ABC

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \quad \text{... (18.25)}$$

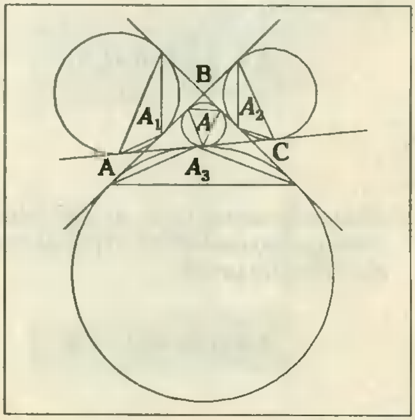


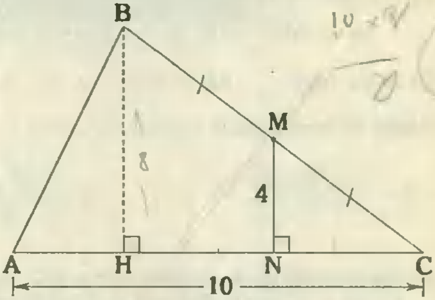
Fig. 18.24

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- En un triángulo ABC : AC = 10 y la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ a $\overline{AC}$ es 4 . Calcular el área de la región triangular ABC.

<u>Resolución</u>.-

Trazamos la altura $\overline{BH}$ del triángulo, luego :



$$S_{(ABC)} = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{10BH}{2}$$

$$S_{(ABC)} = 5\ BH \quad \dots (*)$$

En el ⊾ BHC, $\overline{MN}$ es Base media de donde :

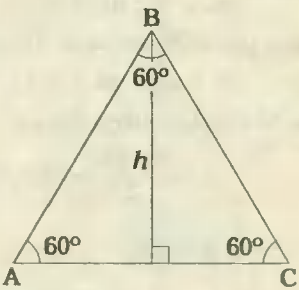
$$BH = 2\ MN = 2(4) = 8$$

Sustituyendo en (*) : $\quad \boldsymbol{S_{(ABC)} = 40}$

2.- Calcular el área de una región triangular regular sabiendo que esta es numéricamente igual a la longitud de su altura.

<u>Resolución</u>.-

Sea "S" el área de la región triangular regular ABC.



Luego : $\quad S = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{3} \quad \dots (1)$

Por condición del problema : $\quad S = h \quad \dots (2)$

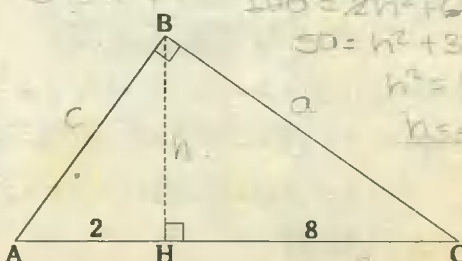
Sustituyendo (2) en (1) : $\quad S = \dfrac{S^2\sqrt{3}}{3}$

Resolviendo : $\quad \boldsymbol{S = \sqrt{3}}$

3.- En un triángulo rectángulo ABC : m ∡ B = 90 ; se traza la altura $\overline{BH}$. Si AH = 2 y HC = 8; calcular el área de la región ABC.

<u>Resolución</u>.-

Sea "S" el área pedida, luego :



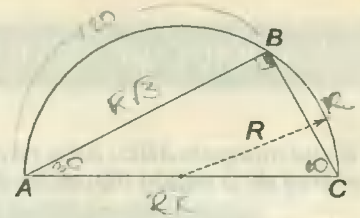
$$S = \frac{AC \cdot BH}{2} \quad \Rightarrow \quad S = 5\ BH \quad \dots (1)$$

En el ⊾ ABC : $\quad (BH)^2 = AH\ .\ HC$

$$(BH)^2 = 2\ .\ 8 = 16 \quad \Rightarrow \quad BH = 4 \quad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) : $\quad \boldsymbol{S = 20}$

4.- Del gráfico adjunto, calcular el área de la región ABC, si m $\overset{\frown}{AB}$ = 120.



$\dfrac{R \cdot R\sqrt{3}}{2}$ $\quad R^2\sqrt{3}$

Resolución.-

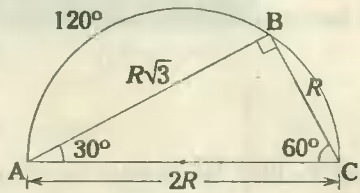
En la semicircunferencia se tiene :

$$m \measuredangle \text{ ABC} = 90 \quad \text{y} \quad m \measuredangle \text{ ACB} = 60$$

En el ⊿ ABC : $\quad AB = R\sqrt{3} \quad$ y $\quad BC = R$

Luego el área S de la región ABC será :

$$S = \frac{(R\sqrt{3})(R)}{2} \qquad \therefore \qquad S = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$



5.- En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , el radio de la circunferencia inscrita mide 4 y m ∡ C = 37. Calcular el área de la región ABC.

Resolución.-

Ya que el triángulo rectángulo ABC es de 37 y 53 , luego :

$$AB = 3k \; ; \; BC = 4k \quad \text{y} \quad AC = 5k$$

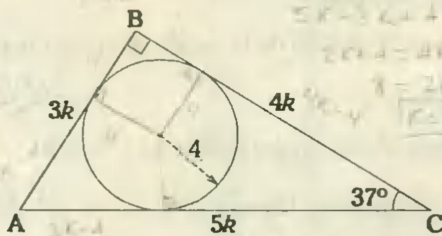
Luego por el Teorema de Poncelet :

$$3k + 4k = 5k + 2(4) \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

Sea "S" el área pedida, luego :

$$S = \frac{3k \cdot 4k}{2} = 6k^2 = 6\,(4)^2$$

$\therefore \quad$ **$S = 96$**



6.- Las medidas de los lados de un triángulo son 13, 14 y 15 . Calcular el área de la región triangular correspondiente.

$\sqrt{21(8)(6)(7)}$ $= 84$

Resolución.-

Empleando la fórmula de Herón se tiene ;

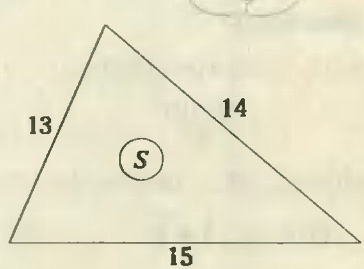
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde : $\quad a = 13\,, b = 14\,, c = 15 \quad$ y $\quad p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$

Luego : $\quad S = \sqrt{21 \times (21-13)(21-14)(21-15)}$

$$S = \sqrt{7 \times 3 \times 8 \times 7 \times 3 \times 2} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 4^2}$$

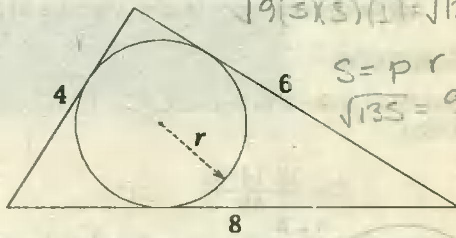
$\therefore \quad$ **$S = 84$**



7.- Las longitudes de los lados de un triángulo son 4, 6 y 8. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.

Resolución.-

Sean "r" : medida del inradio del Δ ABC $\wedge$ S : área de la región triangular.



Luego : $S = p\,.\,r \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{S}{p}$ ... (*)

Por fórmula de Herón : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Reemplazando en (*) : $r = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

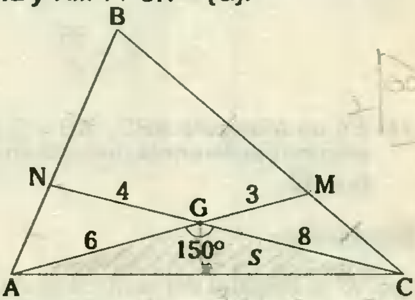
Como : $a = 4\,, b = 6\,, c = 8$ y $p = 9$

Se tiene : $r = \dfrac{\sqrt{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}}{9}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{r = \dfrac{\sqrt{15}}{3}}$

$S = p\,r$ $\quad \sqrt{135} = 9r$ $\quad r = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

8.- En un triángulo ABC se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ que forman un ángulo de 150º; calcular el área de la región AGC, si AM = 9, CN = 12 y $\overline{AM} \cap \overline{CN} = \{G\}$.

Resolución.-



Sea "S" el área de la región AGC.

Luego : $S = \dfrac{1}{2}\,(AG)\,(GC)\,\text{sen}\,150 = \dfrac{1}{2}\,(AG)\,(GC)\,\dfrac{1}{2}$

$S = \dfrac{(AG)(GC)}{4}$ ... (*)

Ya que "G" es baricentro del Δ ABC, entonces :

$AG = \dfrac{2}{3}\,(AM) = \dfrac{2}{3}\,(9) = 6$ $\quad$ y

$GC = \dfrac{2}{3}\,(CN) = \dfrac{2}{3}\,(12) = 8$

Sustituyendo en (*) : $\quad S = \dfrac{6 \times 8}{4}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{S = 12}$

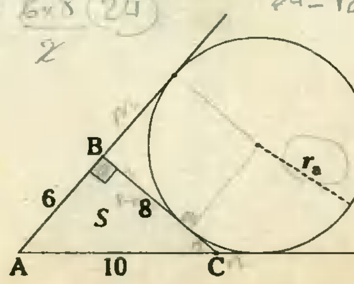
9.- Las longitudes de los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo rectángulo ABC, son 6 y 8. Calcular la longitud del radio de la circunferencia ex-inscrita al triángulo y referente a $\overline{BC}$.

Resolución.-

Sean :

r_a $\rightarrow$ longitud del radio de la circunferencia es-inscrita

S $\rightarrow$ área de la región ABC



Luego : $\quad S = r_a\,(p - a)$ ... (*)

Donde : $\quad S = \dfrac{6.8}{2} = 24\ ;\ p = \dfrac{6+8+10}{2} = 12$ y $a = 8$

$r_a = 6$

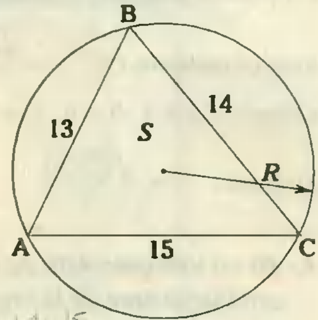
Reemplazando en (*) : $24 = r_a\,(12 - 8)$

$\therefore \quad \boldsymbol{r_a = 6}$

10.- Las medidas de los lados de un trjángulo son 13, 14 y 15; calcular la medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

<u>Resolución</u>.-

Sea "S" el área de la región ABC y "R" la longitud del circunradio, luego :



$$S = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4R} \quad \ldots (*)$$

El área S la calculamos, empleando el teorema de Herón :

$$S = \sqrt{21\,(21-13)\,(21-14)\,(21-15)} = 84$$

Sustituyendo en (*) : $84 = \dfrac{13 \times 14 \times 15}{4R}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = \frac{65}{8}}$$

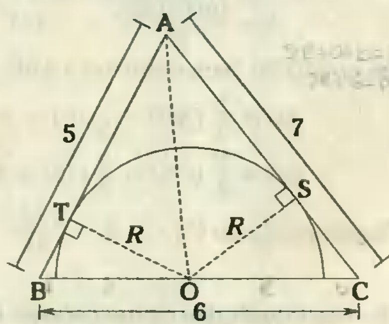
$84 = \dfrac{13 \times 14 \times 15}{4R}$ $\quad R = \dfrac{2730}{336}$

$R = 8{,}125$

11.- En un triángulo ABC : AB = 5, BC = 6 y AC = 7; calcular la longitud del radio de la semicircunferencia inscrita en el triángulo de modo que su diámetro descansa sobre $\overline{BC}$.

<u>Resolución</u>.-

Sea "*R*" la longitud del radio de la semicircunferencia, luego : OT = R y OS = R. Al trazar $\overline{AO}$ la región ABC queda dividida en dos regiones triangulares ABO y AOC, cumpliéndose que :



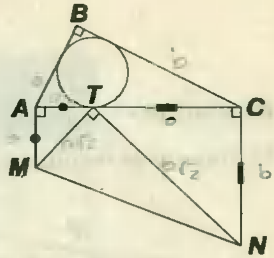
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC}$$

$$\sqrt{9\,(9-5)\,(9-7)\,(9-6)} = \frac{5R}{2} + \frac{7R}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = \sqrt{6}}$$

MISCELÁNEA

1.- *En la figura, hallar la razón de las áreas de las regiones triangulares ABC y MTN.*



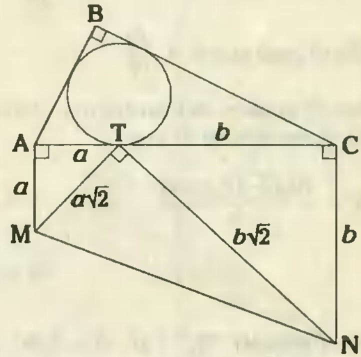
Resolución.-

Hacemos : $AM = AT = a$ y $TC = CN = b$

Luego por propiedad : $S_{ABC} = a \cdot b$ ... (1)

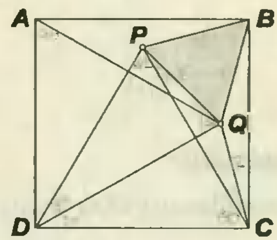
También : S_{MTN} : $\dfrac{a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $S_{MTN} = a \cdot b$ ... (2)

Dividiendo (1) entre (2) : $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MTN}} = \dfrac{a.b}{a.b}$



$$\therefore \quad \boxed{\dfrac{S_{ABC}}{S_{MTN}} = 1}$$

2.- *Si ABCD es un cuadrado y los triángulos DPC y AQD son equiláteros. Si QC = 2 , calcular el área de la región triangular PBQ.*



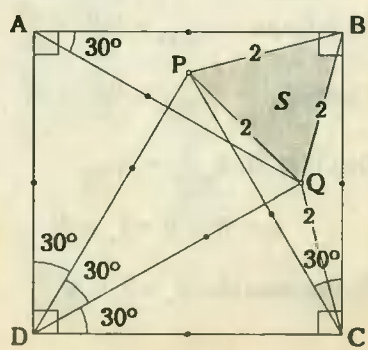
Resolución.-

En primer lugar observamos que PB = QB = 2 = PQ

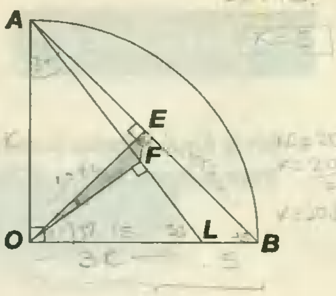
Además los triángulos DPQ, DQC, CPB y BAQ son congruentes, entonces el Δ PBQ es equilátero.

En consecuencia : $S = \dfrac{(2)^2\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{S = \sqrt{3}\ u^2}$$

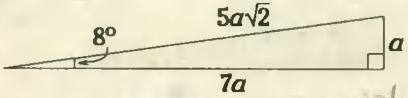


3.- Hallar el área de la región triangular mostrada, si : $\frac{AO}{OL} = \frac{4}{3}$ y $BL = 5$



Resolución.-

Es importante recordar este triángulo rectángulo :

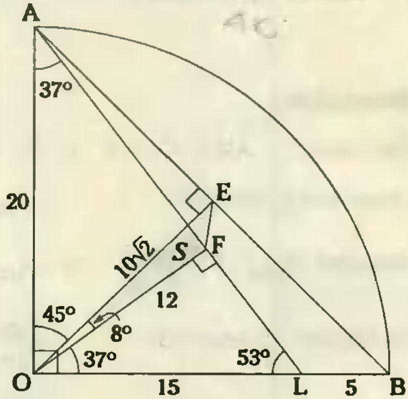


En el cual sen 8 = $\frac{\sqrt{2}}{10}$

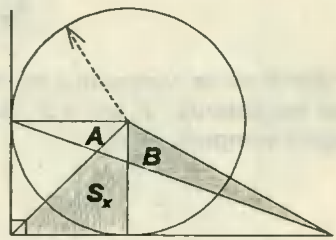
En el gráfico del problema observamos el triángulo OEF, en donde el área :

$$S = \frac{10\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \text{sen}8}{2} \quad \Rightarrow \quad S = 10\sqrt{2}\ .\ 6\ .\ \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = 12\ u^2}$$



4.- Calcular "S_x" ; si : $A = 2\ m^2$ y $B = 10\ m^2$.



Resolución.-

El cuadrilátero PMOQ es un cuadrado, entonces : OM = OQ = PQ = PM = a

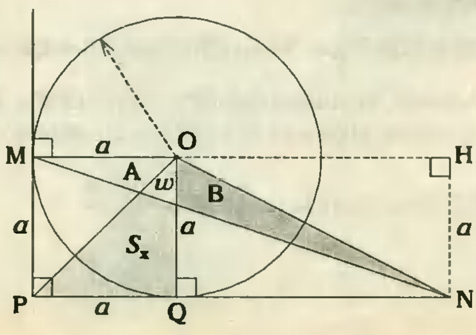
En la figura : $S_{MON} = \frac{a.a}{2} = \frac{a^2}{2}$ ... (1)

También : $S_{POQ} = \frac{a.a}{2} = \frac{a^2}{2}$ ... (2)

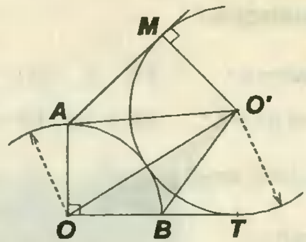
De (1) y (2): $\underbrace{S_{MON}} = \underbrace{S_{POQ}}$

$$A + W + B = S_x + W \Rightarrow S_x = A + B$$

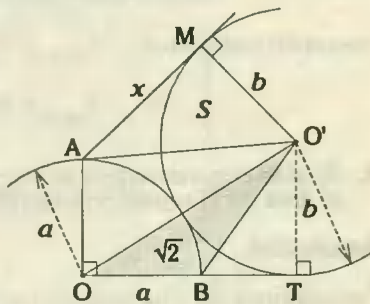
Reemplazando : $S_x = 2 + 10 \quad \therefore \quad \mathbf{S_x = 12\ m^2}$



5.- Calcular el área de la región triangular AMO', si el área de la región triangular OO'B es $\sqrt{2}$ m^2.



Resolución.-



Por propiedad : $x = a\sqrt{2}$

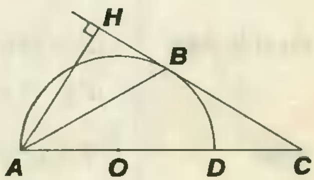
Como : $S = \dfrac{xb}{2}$

Luego : $S = ab\sqrt{2}/2$

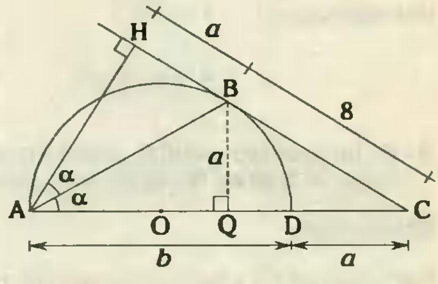
Pero : $\sqrt{2} = \dfrac{ab}{2}$ $\Rightarrow$ $ab = 2\sqrt{2}$

En consecuencia : $S = 2\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2}/2$ $\therefore$ $\boldsymbol{S = 2\,m^2}$

6.- Si HB = CD y BC = 8m; hallar el área de la región ABC.



Resolución.-



Hacemos : $BH = CD = a$

Por Teorema de la Tangente : $8^2 = a\,(a + b)$ ... (1)

Pero : $S_{ABC} = \dfrac{(a+b)a}{2}$ ... (2)

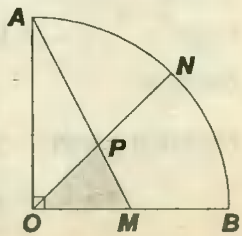
Reemplazando (1) en (2) : $S_{ABC} = \dfrac{8^2}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{S_{ABC} = 32\,m^2}$

7.- En la figura : OA = OB = 6m ; OM = MB

y $\overset{\frown}{AN} \cong \overset{\frown}{NB}$.

Hallar el área de la región OPM.



Resolución.-

Trazamos : $\overline{PH} \perp \overline{OA}$

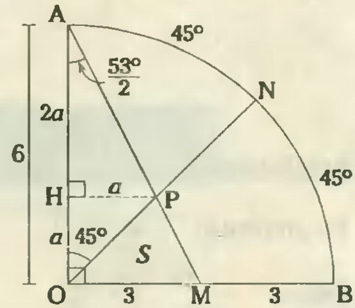
En el Δ OPA : $AH = 2a$. $HP = a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

También en el $\triangle$ OHP : $OH = HP = a$

Luego : $S_{OPM} = \dfrac{OM \cdot OH}{2}$

Reemplazando datos : $S_{OPM} = \dfrac{3 \cdot 2}{2}$

$\therefore \quad S_{OPM} = 3\,m^2$



8.- En una circunferencia se inscribe un cuadrilátero ABCD. Si AB = 2m , BC = 4m , hallar el área de la región triangular ACD, sabiendo que ACD es equilátero.

Resolución.-

Prolongamos $\overline{AB}$ y luego trazamos $\overline{CH}$ perpendicular a dicha prolongación. Luego el $\triangle$ BHC es notable, en el cual $BH = 2$ y $HC = 2\sqrt{3}$.

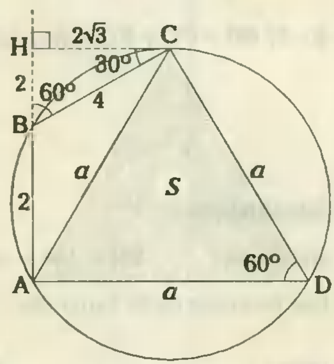
En el $\triangle$ AHC : $a^2 = (4)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$a^2 = 16 + 12 \Rightarrow a^2 = 28$

Pero : $S = a^2\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Reemplazando : $S = \dfrac{28\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \quad S = 7\sqrt{3}\ m^2$



9.- En un cuadrado ABCD, sobre $\overline{BC}$ se construye el triángulo BEC recto en E. Si BE = 6m; hallar el área de la región triangular ABE.

Resolución.-

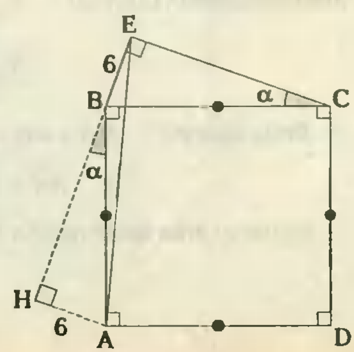
Prolongamos $\overline{EB}$ y luego trazamos $\overline{AH}$ perpendicular a dicha prolongación.

Luego : $\triangle$ BEC $\cong$ $\triangle$ AHB (A.L.A.)

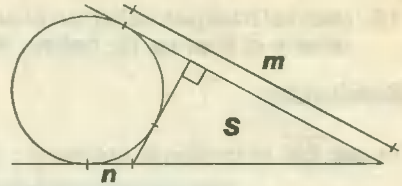
Entonces : $BE = AH = 6\,m$

En consecuencia : $S_{ABE} = \dfrac{6 \cdot 6}{2}$

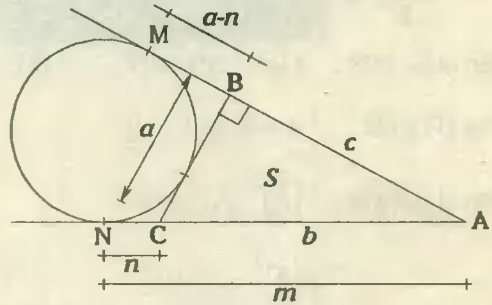
$\therefore \quad S_{ABE} = 18\,m^2$



10.- Hallar "S", si : m . n = 18 m^2.



Resolución.-



Sabemos que : $S_{ABC} = \dfrac{ac}{2}$ ... (1)

También : AM = AN

$\Rightarrow \quad a - n + c = m$

$\Rightarrow \quad a + c = m + n$

Elevando al cuadrado este último :

$(a + c)^2 = (m + n)^2 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac = m^2 + n^2 + 2mn$ ... (2)

En el ⊿ ABC : $a^2 + c^2 = (m - n)^2$

$a^2 + c^2 = m^2 + n^2 - 2mn$ ... (3)

De (2) y (3) : $2ac = 4mn \Rightarrow \dfrac{ac}{2} = mn$

Reemplazando este último en (1) : $S_{ABC} = m \cdot n$

En consecuencia : $\boxed{S_{ABC} = 18\ m^2}$

11.- Los lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC miden $\sqrt{97}$. Se trazan la mediana $\overline{AM}$; calcular el área del triángulo ABC, si m ∡ MAC = 37º.

Resolución.-

Trazamos la altura - mediana : $\overline{BH}$, luego en el ⊿ AHG : AH = HC = 4 k y GH = 3 k

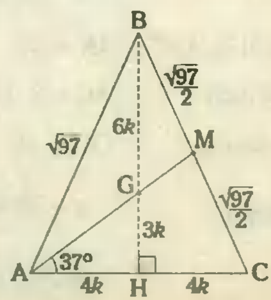
G es baricentro, entonces : BG = 2 (GH) = 6 k.

En el ⊿ BHC : $(9k)^2 + (4k)^2 = \left(\sqrt{97}\right)^2 \Rightarrow k = 1$

Sea A_x el área de la región ABC, luego :

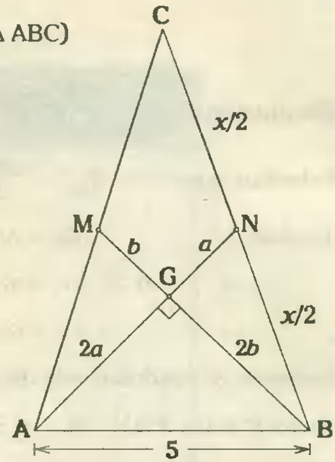
$$A_x = \frac{(AC)(BH)}{2} = \frac{(8k)(9k)}{2} = 36k^2$$

$\therefore \quad \boxed{A = 36}$



12.- Dado el triángulo ABC, en el que AB = 5. Las medianas por A y por B son perpendiculares y el área es 18; hallar : BC

Resolución.-



Ya que $\overline{BM}$ es mediana, entonces : Area (Δ AMB) = $\frac{1}{2}$ Area (Δ ABC)

$$\frac{3b.2a}{2} = \frac{1}{2}(18) \Rightarrow ab = 3 \quad ...(1)$$

En el ⊿ AGB : $4(a^2 + b^2) = 25 \quad ...(2)$

De (1) y (2) : $a = 2$ y $b = \frac{3}{2}$

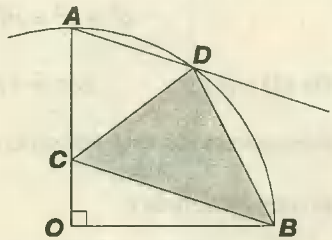
En el ⊿ NGB : $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2 + (2b)^2$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2^2 + 3^2$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2\sqrt{13}}$$

13.- Según el gráfico; calcular el área de la región triangular CDB.

Si : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overset{\frown}{AC} = 2 . OC$ y BD = 6 m.



Resolución.-

En el ⊿ OCB : $\theta = \frac{37}{2}$

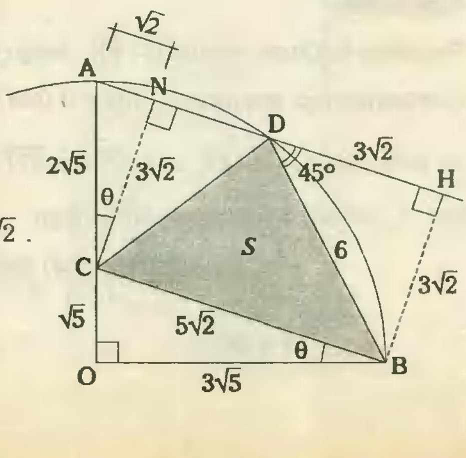
El ⊿ DHB es isósceles : $DH = HB = 3\sqrt{2}$.

Pero : $NC = HB = 3\sqrt{2}$.

En el ⊿ ANC : $AN = \sqrt{2}$ y $AC = 2\sqrt{5}$.

Por dato : AC = 2 . OC

Entonces : $OC = \sqrt{5}$; $OB = 3\sqrt{5}$ y $CB = 5\sqrt{2}$.

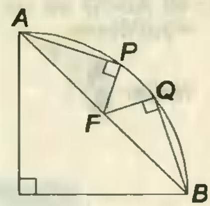


Luego : $S = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2}$

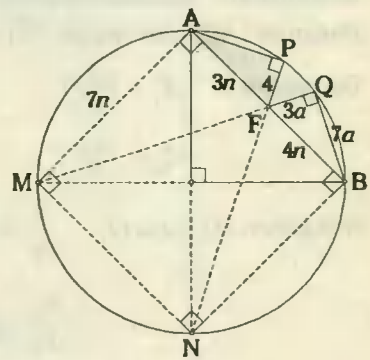
$$\boxed{S = 15\ m^2}$$

14.- En la figura mostrada; hallar el área de la región triangular APF, si :

$$PF = 4m \quad y \quad \frac{FQ}{QB} = \frac{3}{7}$$



Resolución.-



Por dato : $\frac{FQ}{QB} = \frac{3}{7}$; luego, si $FQ = 3a \Rightarrow QB = 7a$

En la figura observamos que el ⊿ FQB ~ ⊿ FAM

$\Rightarrow \quad AM = 7n$ y $AF = 3n$

Pero ABNM es un cuadrado, entonces :

$FB = 4n$ y $AM = BN = 7n$

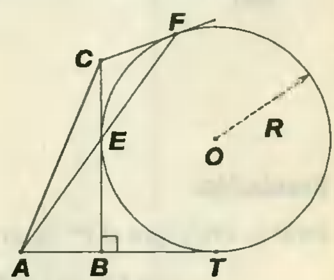
Finalmente ⊿ APF ~ ⊿ NBF : $\frac{x}{7n} = \frac{4}{4n} \quad \Rightarrow \quad x = 7$

En consecuencia : $S_{APF} = \frac{4 \cdot 7}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{S_{APF} = 14\ m^2}$

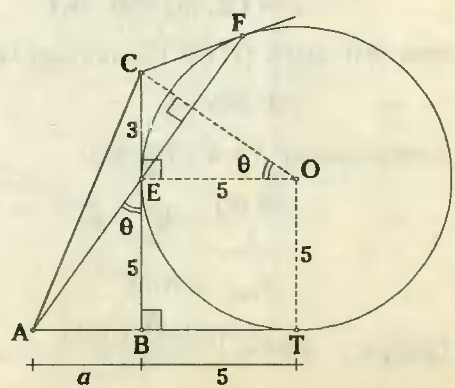
15.- En la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada.

Si : R = 5 m , CF = 3 m.

Siendo E, F y T puntos de tangencia.



Resolución.-



Trazamos $\overline{OE}$, $\overline{OT}$ y $\overline{OC}$, luego OEBT es un cuadrado donde : $OE = OT = BT = BE = 5$

El ⊿ CEO es congruente con el ⊿ ABE, entonces:

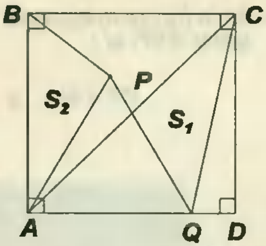
$AB = CE = a = 3$

Luego : $S_{ACB} = \frac{(3)\,(3+5)}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{S_{ACB} = 12\ m^2}$

16.- Si ABCD es un cuadrado y APQ es un triángulo equilátero.

Hallar $\frac{S_1}{S_2}$.



Resolución.-

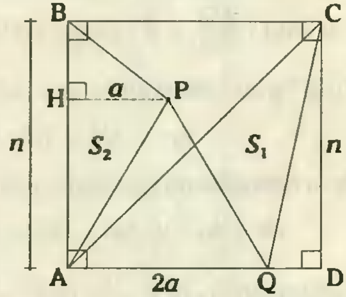
Hagamos : AQ = $2a$, luego : PH = a

Del gráfico : $S_1 = \frac{2a\cdot n}{2}$ ... (1)

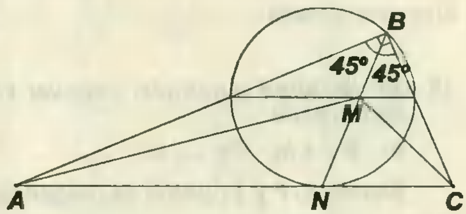
$S_2 = \frac{n\cdot a}{2}$ ... (2)

Dividiendo (1) entre (2) : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2an}{an}$

$\Rightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} = 2$



17.- Calcular el área de la región sombreada. Si BM = 2 m y MN = 3 m. (N : punto de tangencia).



Resolución.-

En el ⊾ PBQ , por el 2do Teorema de la Bisectriz Interior :

2^2 = PB . BQ - PM . MQ

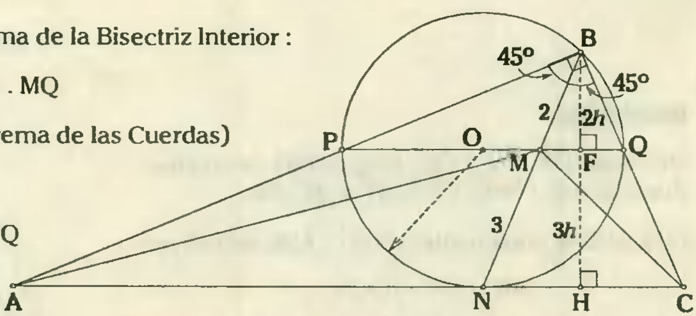
Pero : PM . MQ = (2) (3) (Teorema de las Cuerdas)

$\Rightarrow$ PM . MQ = 6

Reemplazando : 4 + 6 = PB . BQ

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{PB.BQ}{2}}_{S_{PBQ}} = \frac{10}{2}$$

$S_{PBQ} = 5\,m^2$



También : $5\,m^2 = \frac{(PM+MQ)\,(2h)}{2} \quad \Rightarrow \quad h\,(PM + MQ) = 5\,m^2$ ... (1)

Por otro lado : $S_{APM} = \dfrac{PM \cdot 3h}{2}$ y $S_{MQC} = \dfrac{MQ \cdot 3h}{2}$

Sumando : $S_{APM} + A_{MQC} = \dfrac{3}{2}\,h\,(PM + MQ)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $S_{APM} + S_{MQC} = \dfrac{15}{2}\,m^2$

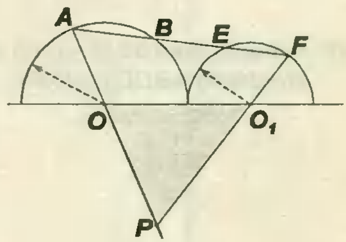
Finalmente el área pedida será : $S = SPBQ + SAPM + SMQC$

$$S = 5\,m^2 + \frac{15}{2}\,m^2$$

$$\therefore \qquad \mathbf{S = 12{,}5\ m^2}$$

18.- Hallar el área de la región triangular OPO_1.

Si : $OP = 4$, $PO_1 = 7$ y $m\,\overset{\frown}{AB} + m\,\overset{\frown}{EF} = 120$



Resolución.-

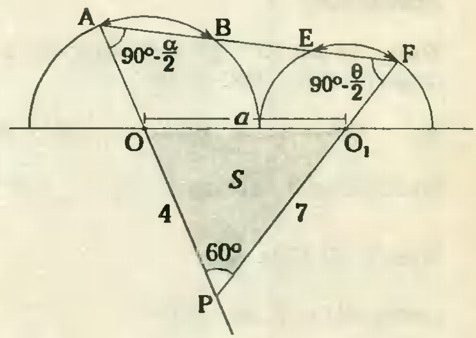
Sean : $m\,\overset{\frown}{AB} = \alpha$ y $m\,\overset{\frown}{EF} = \theta \Rightarrow \alpha + \theta = 120$

En el Δ AOB : $m\measuredangle A = 90 - \dfrac{\alpha}{2}$

En el Δ EO_1F : $m\measuredangle F = 90 - \dfrac{\theta}{2}$

En el Δ APF : $90 - \dfrac{\alpha}{2} + 90 - \dfrac{\theta}{2} + m\measuredangle P = 180$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle P = \frac{\alpha + \theta}{2} = 60$$

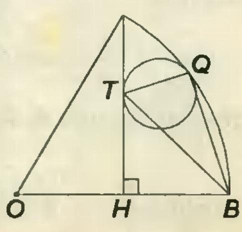


Luego empleando la fórmula trigonométrica :

$$S = \frac{1}{2}\,4\,.\,7\,\text{sen}\,60 \qquad\qquad \mathbf{S = 7\sqrt{3}}$$

19.- Si O es centro y además T y Q son puntos de tangencia; calcular el área de la región triangular TQB.

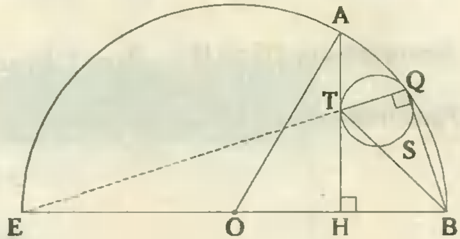
Si $TQ\,.\,BQ = 4\ m^2$.



Resolución.-

Trazamos la semicircunferencia correspondiente de diámetro $\overline{BE}$, por propiedad los puntos E, T y Q son colineales.

Luego la $m \measuredangle TQB = 90^o$



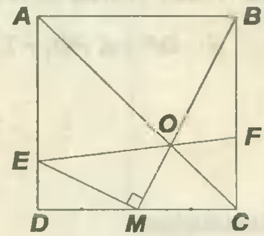
En consecuencia : $S = \dfrac{TQ.QB}{2}$

Pero por dato : TQ . QB = 4 m^2

Reemplazando : $S = \dfrac{4m^2}{2}$

$\therefore \quad S = 2\,m^2$

20.- Hallar el área de la región triangular OFC, si el lado del cuadrado ABCD mide 8m.



Resolución.-

Trazamos por "O", $\overline{QH}$ perpendicular a $\overline{BC}$, luego en el ⊿ OHC de 45°.

Si : OH = a $\Rightarrow$ HC = a y BH = 2a

En consecuencia : $2a + a = 8 \Rightarrow a = \dfrac{8}{3}$

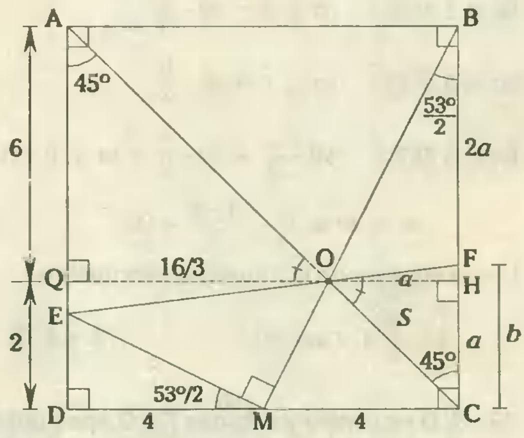
En el ⊿ EDM de $\dfrac{53}{2}$

Como DM = 4 $\Rightarrow$ ED = 2

De donde : AE = 6

Además : QO = QH - OH

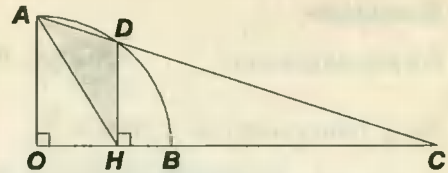
$QO = 8 - \dfrac{8}{3} \Rightarrow QO = \dfrac{16}{3}$



De la semejanza de los triángulos EAO y OCF, se tiene : $\dfrac{b}{6} = \dfrac{8/3}{16/3} \Rightarrow b = 3$

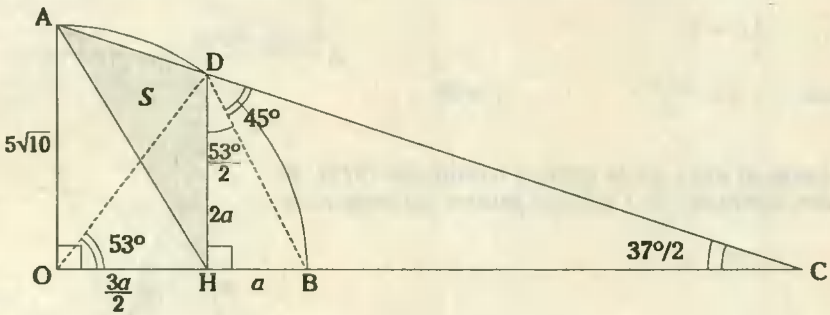
Finalmente : $S = \dfrac{ba}{2} = \dfrac{3\left(\dfrac{8}{3}\right)}{2}$ $\therefore \quad S = 4$

21.- En la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada, si AOB es un cuadrante, OA = OB, m ∡ DCO = 37/2 y AO = 5√10 .



Resolución.-

En primer lugar trazamos $\overline{DB}$ y luego $\overline{OD}$.



Ahora observamos que la $m\measuredangle$ HDB $= \dfrac{53}{2}$ y $m\measuredangle$ DOB $= 53$

En el ⊿ DHB , si : HB $= a$ $\Rightarrow$ DH $= 2a$

En el ⊿ OHD de 37 y 53 : OH $= \dfrac{3a}{2}$

Pero : OB $= 5\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3a}{2} + a = 5\sqrt{10}$

De donde : $a = 2\sqrt{10}$

En consecuencia el área S será : $S = \dfrac{DH \cdot OH}{2} = \dfrac{(2a)\left(\dfrac{3a}{2}\right)}{2}$

$$S = \frac{3a^2}{2}$$

Sustituyendo el valor de "a" : $S = \dfrac{3(2\sqrt{10})^2}{2}$

Finalmente : $\boxed{S = 60}$

22.- En un rectángulo ABCD, con diámetro $\overline{AD}$ se traza una semicircunferencia tangente a $\overline{BC}$ en "T". $\overline{AC}$ intersecta a la semicircunferencia en "M" el cual dista del lado $\overline{BC}$ 1m; hallar el área de la región triangular ABM.

Resolución.-

Por ángulo exterior : $\frac{53}{2} = 90 - \frac{m\,\widehat{MT}}{2} \Rightarrow m\,\widehat{MT} = 37$

Por $\measuredangle$ semi inscrito : $m\measuredangle NTM = \frac{37}{2}$

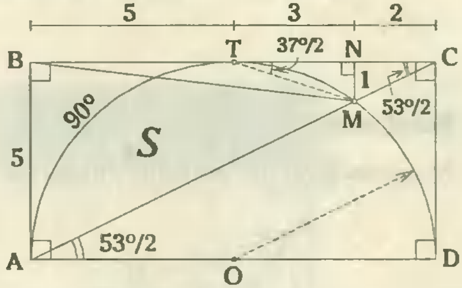
En el ⊿ TNM : TN = 3

En el ⊿ MNC : NC = 2

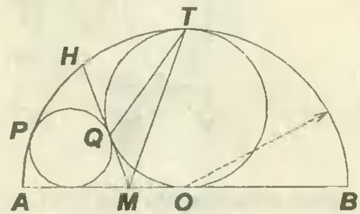
Luego : BT = TC = 5

Además : AB = 5

Finalmente : $S = \frac{5\times 8}{2}$ $\therefore$ $S = 20$



23.- Calcular el área de la región triangular QTM. Si R = 6m, además : Q , T y O son puntos de tangencia.



Resolución.-

Recordemos la propiedad : $r = \frac{R}{4}$

Reemplazando : $r = \frac{6}{4}$

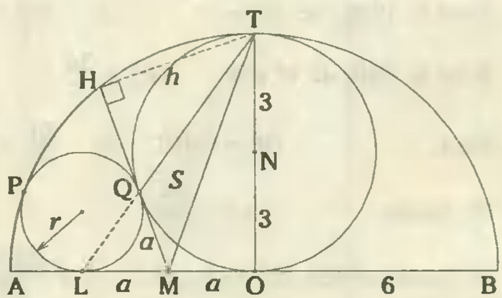
$\Rightarrow r = \frac{3}{2}$

También : $2a = 2\sqrt{r\cdot R/2}$

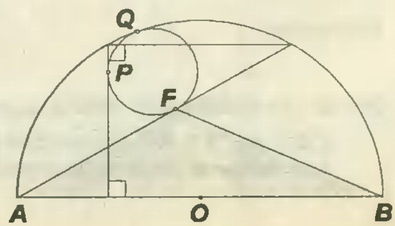
$a = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{2}} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Además : $h = 4$

Finalmente : $S = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.\,4\,.\,\frac{1}{2}$ $\therefore$ $S = 3\sqrt{2}\ m^2$



24.- En la figura, AF = 2 m. Siendo P, Q y F puntos de tangencia; calcular el área de la región triangular AFB, si "O" es centro .



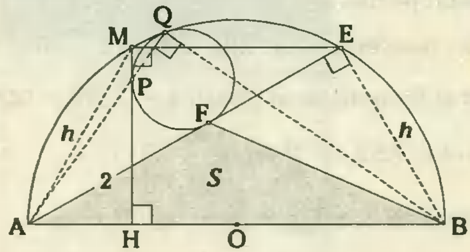
Resolución.-

En primer lugar, los puntos A, P y Q son colineales. Por el Teorema de la Tangente en la circunferencia menor :

$$2^2 = AQ \cdot AP \quad \Rightarrow \quad AQ \cdot AP = 4 \quad \ldots (1)$$

Por el Teorema de la Secante en el cuadrilátero inscriptible HPQB :

$$AQ \cdot AP = AB \cdot AH \quad \ldots (2)$$



Pero : $AM = EB = h$

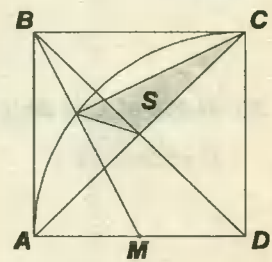
Luego : $h^2 = AB \cdot AH \quad \ldots (3)$

De (1), (2) y (3) : $h^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 2$

En consecuencia : $S = \dfrac{2 \cdot 2}{2}$

$\therefore \quad S = 2\,m^2$

25.- Calcular el área de la figura sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado $2\sqrt{5}$ m. Siendo "M" punto medio de $\overline{AD}$.



Resolución.-

En el ⊿ BAM : $AB = 2\sqrt{5}$ y $AM = \sqrt{5}$

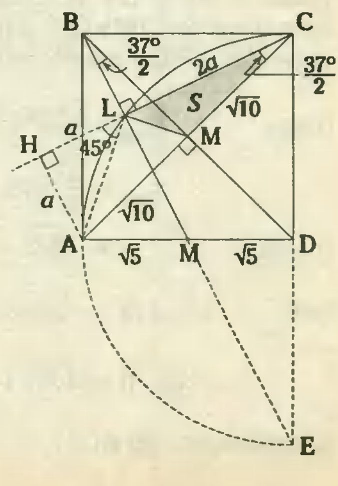
Entonces : $m\measuredangle ABM = \dfrac{53}{2}$ y $m\measuredangle MBD = \dfrac{37}{2}$

Prolongamos $\overline{BM}$ hasta cortar en E a la prolongación de $\overline{CD}$, luego al completar la semicircunferencia esta pasa por E y en consecuencia $m\measuredangle ELC = 90$

En el cuadrilátero inscriptible BLMC; $m\measuredangle LCM = \dfrac{37}{2}$

En el ⊿ AHC : $(2\sqrt{10})^2 = a^2 + (3a)^2$

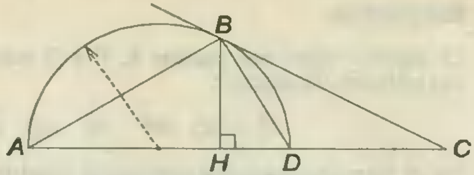
$10\,a^2 = 4 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$



Luego : $2S = \dfrac{(2a)(a)}{2} = a^2$

$2S = (2)^2 \quad \Rightarrow \quad 2S = 4 \quad \therefore \quad S = 2\,m^2$

26.- Si $AH = BC$ y $BH = 4m$; hallar : S_{BDC}

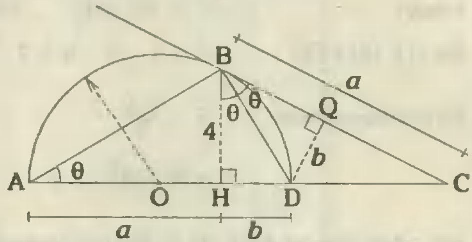


Resolución.-

Por própiedad :

$\overline{BD}$: bisectriz del $\measuredangle$ HBC, entonces : $m\measuredangle HBD = m\measuredangle DBC = \theta$

Por el Teorema de la Bisectriz : $HD = DQ = b$



En el ⊿ ABD : $4^2 = ab$ ... (1)

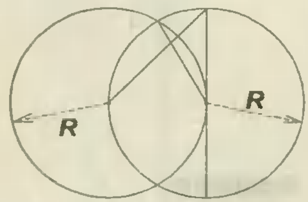
Pero el : $S_{BDC} = \dfrac{ab}{2}$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $S_{BDC} = \dfrac{4^2}{2}$

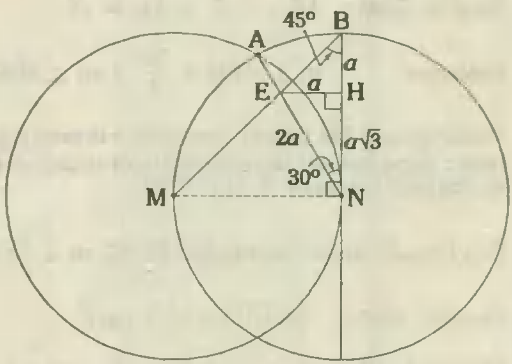
$\therefore \quad S_{BDC} = 8\,m^2$

27.- Hallar el área de la región triangular mostrada, si :

$R = \sqrt{2\sqrt{3}+2}$.



Resolución.-



Trazamos $\overline{EH} \perp \overline{BN}$, entonces los triángulos rectángulos EHB y EHN son notables, en el cual $EH = HB = a$ y $HN = a\sqrt{3}$.

Luego : $S_{NEB} = \dfrac{(a+a\sqrt{3})(a)}{2}$

$S_{NEB} = \dfrac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ ... (1)

Por dato : $R = \sqrt{2\sqrt{3}+2}$

Pero : $a + a\sqrt{3} = \sqrt{2\sqrt{3}+2}$

$$a\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{\sqrt{3}-1}\,.\,\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad a\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{\sqrt{3}-1}\,.\,\left(\sqrt{3}+1\right)$$

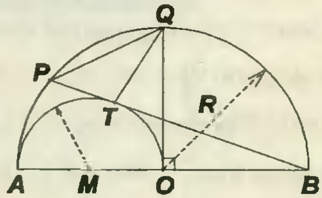
Reemplazando (2) en (1) : $a = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ ... (2)

$$S_{NEB} = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2}{2} \ . \ (\sqrt{3}+1)$$

$$S_{NEB} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2} \ . \ \frac{3-1}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{NEB} = 1\ m^2}$$

28.- Hallar el área de la región triangular PQT, si : R = 6m.



Resolución.-

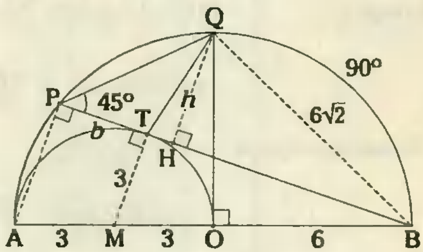
Por $\measuredangle$ inscrito : $\quad m\measuredangle \text{QPB} = \dfrac{90}{2} = 45$

Trazamos : $\quad \overline{MT} \perp \overline{PB}$, $m\measuredangle$ APB = 90 y $\overline{QH} \perp \overline{TB}$

En el $\triangle$ MTB : $\quad TB^2 = 9^2 - 3^2 \quad \Rightarrow \quad TB = 6\sqrt{2}$

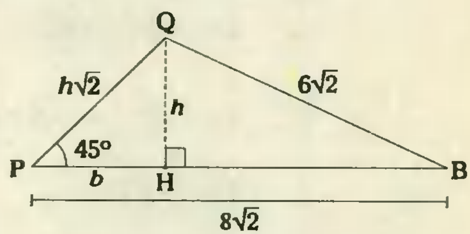
Por el Teorema de Thales : $\dfrac{b}{6\sqrt{2}} = \dfrac{3}{9}$

$$\Rightarrow \quad b = 2\sqrt{2}$$



En el Δ PQB :

Por el Teorema de Euclides :



$$(6\sqrt{2})^2 = (h\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2h\,(8\sqrt{2})$$

$$0 = h^2 - 8\sqrt{2}\,h + 28$$

$$4 = h^2 - 8\sqrt{2}\,h + 32$$

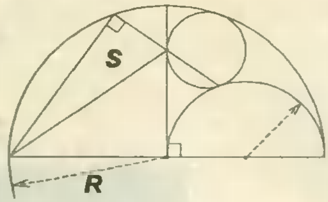
$$4 = (h - 4\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = h - 4\sqrt{2}$$

$$h = 2 + 4\sqrt{2}$$

Luego : $\quad S_{PQT} = \dfrac{b.h}{2}$

$$S_{PQT} = \frac{2\sqrt{2}\cdot(2+4\sqrt{2})}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{S_{PQT} = 2\sqrt{2}(1-2\sqrt{2})}$$

29.- Hallar "S", si $R = \sqrt{6}$ u .



Resolución.-

En primer lugar observamos que el $\triangle$ AEQ ≅ $\triangle$ BFQ, entonces: $S_{AEQ} = S_{BFQ} = S$

Por otro lado los puntos E, Q, T, B y los puntos A, Q, F son colineales.

Además la perpendicular $\overline{FH}$ pasa por el punto de tangencia "T".

Por propiedad : OH = $R/3$ (Relaciones Métricas)

Luego : $$FH^2 = h^2 = \left(R + \frac{R}{3}\right)\left(R - \frac{R}{3}\right)$$

$$h^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{8R^2}{9}$$

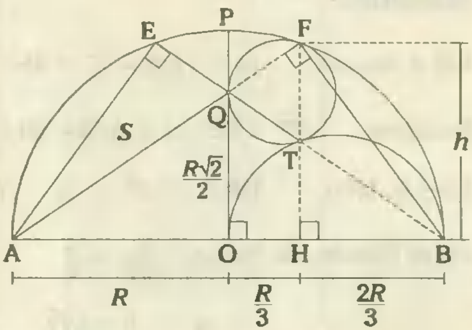
En consecuencia : $S = S_{AFB} - S_{AQB}$

$$S = \frac{2R \cdot 2\sqrt{2}R}{3 \cdot 2} - \frac{2R \cdot R\sqrt{2}}{2 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{2\sqrt{2}R^2}{3} - \frac{\sqrt{2}R^2}{2}$$

$$S = \frac{R^2\sqrt{2}}{6} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{(\sqrt{6})^2\sqrt{2}}{6}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S = \sqrt{2}\ u^2}$$



30.- Hallar el área de una región triangular rectangular, si el cateto menor tiene 7m menos que el otro cateto y éste 1m menos que la hipotenusa.

Resolución.-

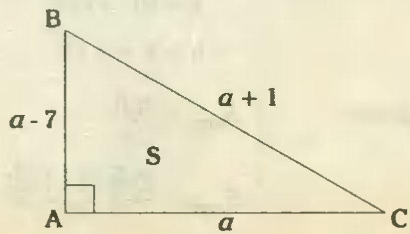
Según las condiciones del problema, tenemos ya la gráfica, en el cual por el Teorema de Pitágoras :

$$(a + 1)^2 = (a - 7)^2 + a^2$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 14a + 49 + a^2$$

$$0 = a^2 - 16a + 48$$

$$\begin{array}{ll} a & -12 \\ a & -4 \end{array}$$

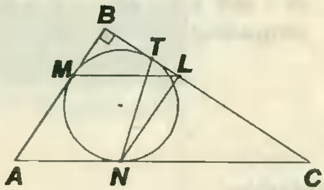


Factorizando : $0 = (a - 12)(a - 4) \Rightarrow a = 12$

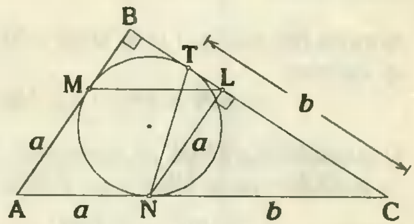
Luego : $S = 12 \,.\, (12 - 7)/2$

$\therefore \quad \boldsymbol{S = 30\ m^2}$

31.- En la figura M, T y N son puntos de tangencia, AMLN es un paralelogramo y Área (Δ ABC) = 80 m²; hallar el área de la región triangular NTC.



Resolución.-



Ya que AMLN es un paralelogramo, luego :

$\overline{AM} \,//\, \overline{NL} \quad \Rightarrow \quad \overline{NL} \perp \overline{BC}$

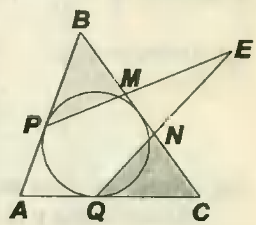
$Área\ (\Delta\,TNC) = \dfrac{b.a}{2} \quad \dots (1)$

$Área\ (\triangle\,ABC) = ab$ (Prop.) $\Rightarrow ab = 80 \quad \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1) : $\boldsymbol{Área\ (\Delta\,TNC) = 40\ m^2}$

32.- Si "E" es excentro del triángulo ABC; hallar :

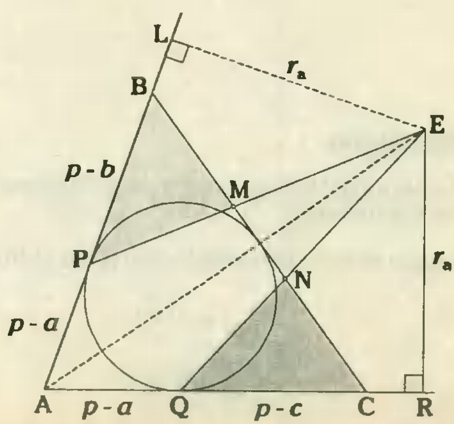
$$S_{MEN}\ ,\ si : S_{PBM} + S_{QNC} = 24$$



Resolución.-

Sabemos por teoría que :

$AP = AQ = p - a \quad ; \quad QC = p - c \quad y \quad PB = p - b.$



Luego : $S_{APE} = (p - a) \,.\, \dfrac{r_a}{2}$

$S_{AQE} = (p - a) \,.\, \dfrac{r_a}{2}$

Sumando : $S_{APE} + S_{AQE} = (p - a)\, r_a$

Entonces : $S_{APEQ} = (p - a)\, r_a$

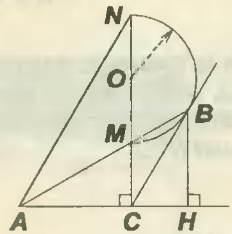
Pero : $S_{ABC} = (p - a)\, r_a$

Igualando : $S_{APEQ} = S_{ABC}$

Podemos hacer : $S_{APMNQ} + S_{MEN} = S_{APMNQ} + S_{PBM} + S_{QNC} \Rightarrow S_{MEN} = S_{PBM} + S_{PBM} + S_{QNC}$

$$\therefore \quad \boxed{S_{MEN} = 24\,m^2}$$

33.- Calcular el área de la región triangular ABC, si : MN = 6 ; MC = 2 y BH = 3 ("B" punto de tangencia).



<u>Resolución</u>.-

Al trazar $\overline{NB}$, resulta : $m\measuredangle MBN = 90$; además por $\measuredangle$ inscrito :

$$m\,\overset{\frown}{MB} = 2\theta \text{ y } m\measuredangle MBC = \theta$$

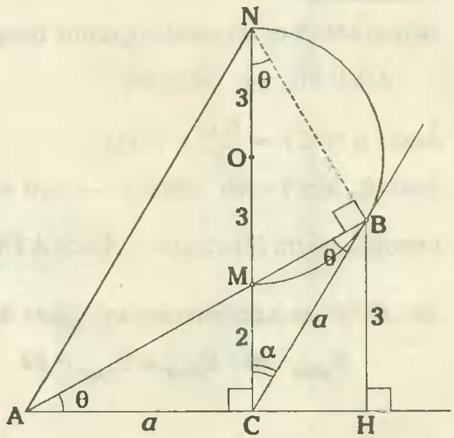
El cuadrilátero ANBC es incriptible, en el cual la $m\measuredangle CNB = m\measuredangle MBC = m\measuredangle BAC = \theta$

Luego : $\Delta NBC \sim \Delta BMC$

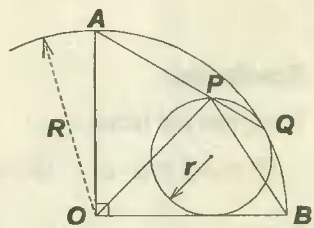
Entonces : $\dfrac{a}{8} = \dfrac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

En consecuencia : $S_{ABC} = \dfrac{4 \cdot 3}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{S_{ABC} = 6\,u^2}$$



34.- Hallar el área de la región triangular OPB, en función de r y R.



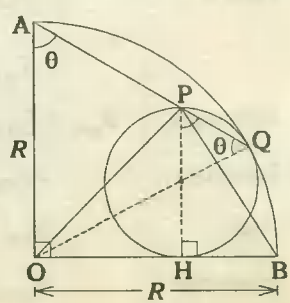
<u>Resolución</u>.-

La altura del triángulo OPB es el diámetro PH = $2r$, de la circunferencia menor.

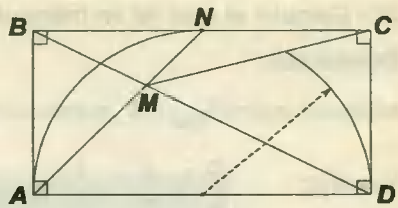
Luego el área de la región triangular OPB es :

$$S_{OPB} = \frac{R \cdot 2r}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{OPB} = R\,.\,r}$$



35.- Hallar el área de la región triangular MNC, si $MN = \sqrt{2}$.



Resolución.-

Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{BN}$, el $\triangle$ MHN es notable y el $\triangle$ BHM también, en el cual : HN = 1 ; HM = 1 ; BH = 2.

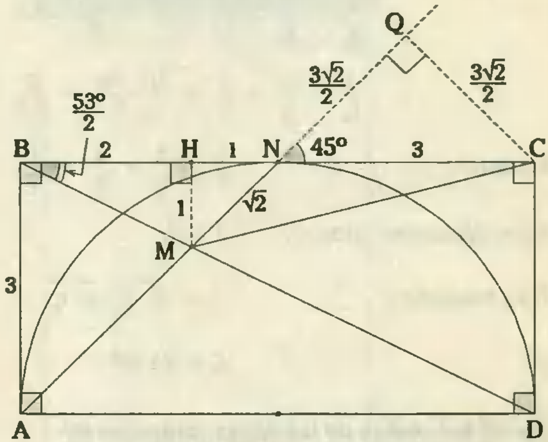
Luego : BN = AB = NC = 3

Prolongamos $\overline{AN}$ y luego trazamos perpendicular a dicha prolongación, en el cual :

$$CQ = 3\sqrt{2}/2$$

En consecuencia : $S_{MNC} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2\cdot 2}$

$\therefore$ $\boxed{S_{MNC} = 1{,}5\ u^2}$



36.- En un triángulo ABC, la distancia del incentro al baricentro es paralelo al lado $\overline{AC}$, si el exradio relativo a $\overline{AC}$ mide 8m; hallar la longitud del inradio del triángulo ABC.

Resolución.-

En el Δ ABC, por el Teorema del Incentro $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{a+c}{b}$; pero por dato : $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$.

Entonces : $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{BG}{GM} = \dfrac{2}{1}$

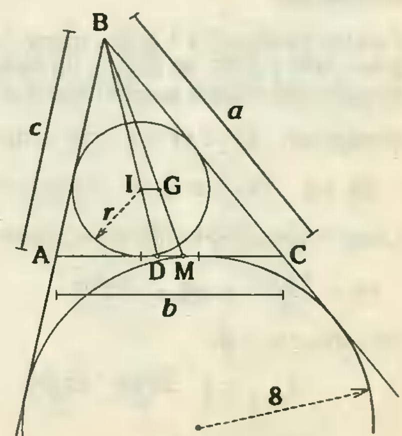
Luego : $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow a + c = 2b$

Además : $S_{ABC} = p.r = (p - b)\, r_b$

Reemplazando : $\left(\dfrac{2b+b}{2}\right).r = \left(\dfrac{2b+b}{2} - b\right).8$

$$\frac{3b}{2}.r = \frac{b}{2}.8$$

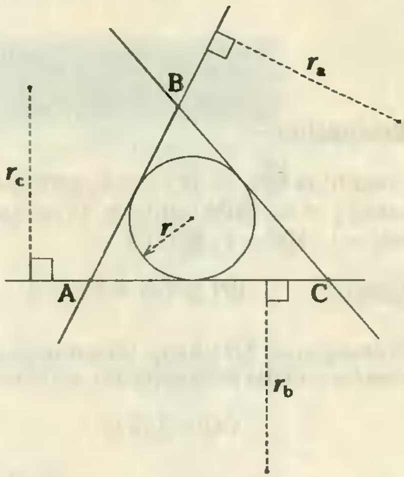
$\therefore$ $\boxed{r = \dfrac{8}{3}}$



37.- Calcular el área de un triángulo cuyos ex radios miden 6 ; 12 y 28 m.

Resolución.-

Sabemos que si $S_{ABC} = S$, entonces : $S = r_a\,(p - a)$; $S = r_b\,(p - b)$; $S = r_c\,(p - c)$ y $S = p\,.\,r$



Sumando : $\dfrac{S}{r_a} + \dfrac{S}{r_b} + \dfrac{S}{r_c} = p - a + p - b + p - c$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{3p-2p}{p.r} = \frac{p}{p.r} = \frac{1}{r}$$

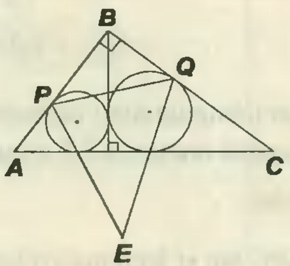
Luego : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$

Reemplazando valores : $r = \dfrac{7}{2}$

Pero también : $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$

$\therefore \quad \mathbf{S = 84\ m^2}$

38.- Si los radios de las circunferencias miden 3 y 4; hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-

Con los inradios 3 y 4 de los triángulos rectángulos AHB y BHC, se llega a un triángulo rectángulo ABC notable aproximado de (53° y 37°).

Analizando : AP = AT = 6 ; QC = RC = 12 ;

PB = 9 ; BQ = 8 y $m\measuredangle$ PEQ = 45°

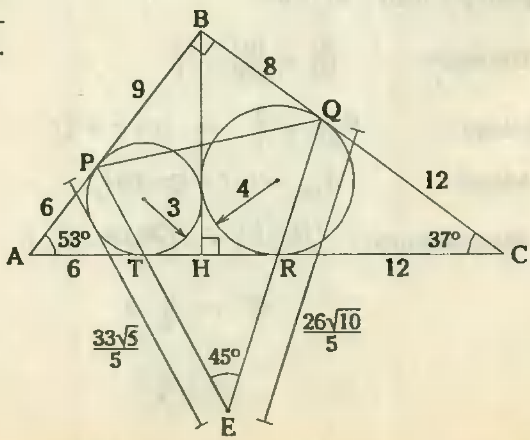
Luego analizando también llegamos a :

$PE = \dfrac{33\sqrt{5}}{5}$ y $QE = \dfrac{26\sqrt{10}}{5}$

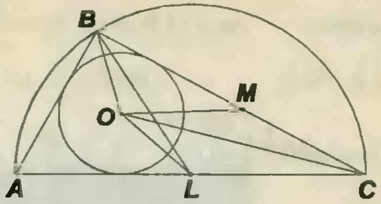
En consecuencia :

$$S_{PEQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{33\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{26\sqrt{10}}{5}\ .\ \text{sen } 45^\circ$$

$\therefore \quad \mathbf{S_{PEQ} = 85{,}8}$



39.- En la figura : AB = BM, O y L son centros área (Δ BOL) = 20 m² ; hallar el área (Δ OMC)



Resolución.-

En el $\triangle$ ABM, isósceles : $\overline{BS} \perp \overline{AM}$, además : AS = SM

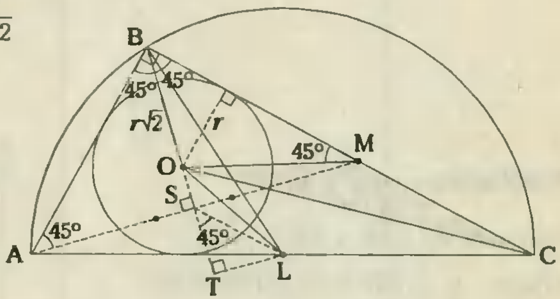
Sea "r" el inradio del $\triangle$ ABC $\Rightarrow$ OB = $r\sqrt{2}$

Del dato : *Área* (Δ BOL) = 20 = $\dfrac{r\sqrt{2}.LT}{2}$

Pero : LT = $\dfrac{SL}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $20 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{SL}{\sqrt{2}}$

De donde : $r \cdot SL = 40$ ... (1)

Nos piden : *Área* (Δ OMC) = $A_x = \dfrac{MC.r}{2}$

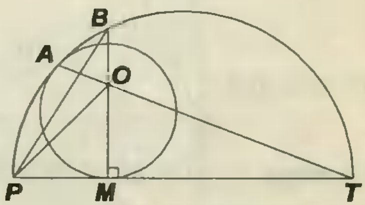


Pero para el Δ AMC : $\overline{SL}$ es base media $\Rightarrow$ MC = 2 (SL)

De donde : $A_x = \dfrac{2SL.r}{2} = SL \cdot r$ ... (2)

Finalmente de (1) y (2) : $\mathbf{A_x = 40\ m^2}$

40.- Calcular el área de la región sombreada, si A y M son puntos de tangencia y PB = K



Resolución.-

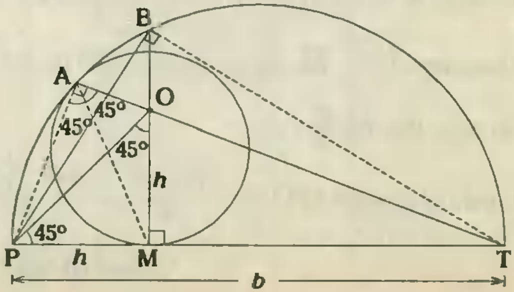
Por propiedad ....

$m \measuredangle$ PAM = $m \measuredangle$ MAT = 45°

En el cuadrilátero inscriptible PAOM :

$m \measuredangle$ OPM = $m \measuredangle$ POM = 45°

$\Rightarrow$ PM = OM = h

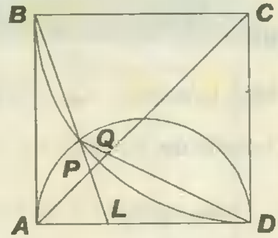


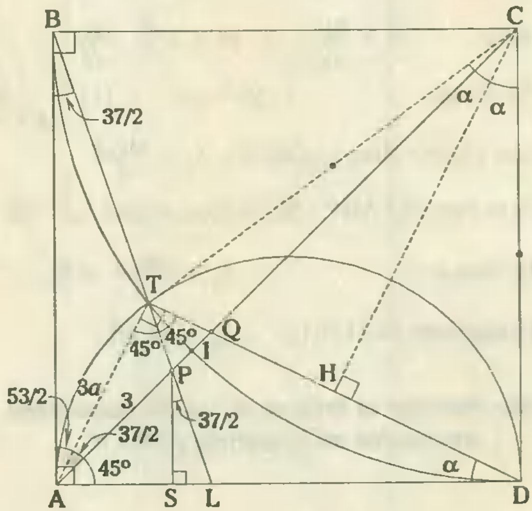
Del gráfico : *Área* (Δ POT) $= A_x = \dfrac{b.h}{2}$ ... (1)

En el ⊿ PBT : $(PB)^2 = b\,.\,h \quad \Rightarrow \quad b\,.\,h = K^2$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $A_x = \dfrac{K^2}{2}$

41.- *Siendo ABCD en cuadrado y PQ = 1; hallar el área de la región triangular APL.*





<u>**Resolución.-**</u>

Trazamos $\overline{AT}$, $\overline{CT}$ y $\overline{CH} \perp \overline{TD}$

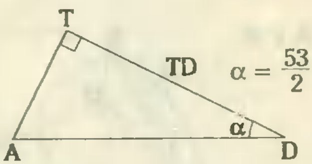
Luego : $m\measuredangle ATP = m\measuredangle PTD = 45°$

$CT = CD$ y $TH = HD = \dfrac{TD}{2}$

⊿ CHD ≅ ⊿ ATD (A.L.A.)

$\Rightarrow \quad AT = HD = \dfrac{TD}{2}$

En el ⊿ ATD :



$\alpha = \dfrac{53}{2}$

De donde : $m\measuredangle BAT = 53/2$ y $m\measuredangle TAQ = 37/2$

En el ⊿ ATQ; por el Teorema de la Bisectriz : $\dfrac{3a}{AP} = \dfrac{a}{1} \Rightarrow AP = 3$

Trazamos $\overline{PS} \perp \overline{AL}$, luego en el ⊿ ASP de 45° : $AS = PS = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

En el ⊿ PSL de $\dfrac{37}{2}$: $SL = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego el Área (Δ APL) : $\dfrac{AL \cdot PS}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\,.\,\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ ***Área* (Δ APL) = 3 μ^2**

42.- Sobre los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos M y N respectivamente de modo que el triángulo MBN y el trapezoide AMNC son equivalentes e isoperímetros. Si AB = 3 y BC = 4; calcular MN.

Resolución.-

Por ser equivalentes el triángulo MBN y el trapezoide AMNC, se tiene que :

$$\text{Área }(\triangle MBN) = \frac{1}{2}\ \text{Área }(\triangle ABC)$$

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(3\cdot 4)}{2} \Rightarrow \qquad ab = 6 \ \dots (1)$$

Por ser isoperímetros : $a + b + x = 3 - a + x + 4 - b + 5$

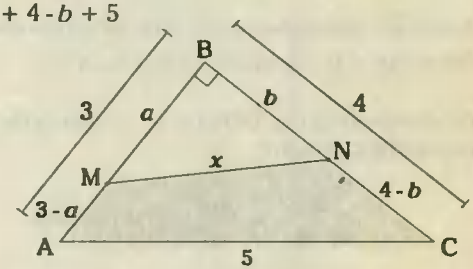
$$\Rightarrow \qquad a + b = 6$$

Elevando al cuadrado : $a^1 + b^2 + 2ab = 36$

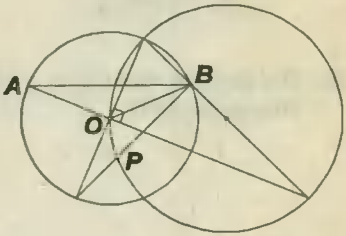
Pero : $a^2 + b^2 = x^2$, luego : $x^2 + 2ab = 36$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $x^2 + 2\,(6) = 36$

$$\therefore \qquad x = 2\sqrt{6}$$



43.- En la figura mostrada "O" es centro y BP = a; hallar el área de la región triangular AOB.



Resolución.-

Sea A_x, el área del Δ AOB entonces Área (Δ OBL) = A_x, de donde :

$$\textit{Área}\ (\Delta\, ABL) = 2\,A_x = \frac{AB.BL}{2} \quad \dots (1)$$

Por la semejanza de los triángulos AMB y LBN, se tiene : $\dfrac{AB}{BN} = \dfrac{BM}{BL}$

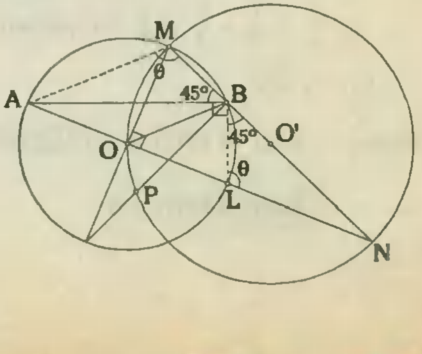
$$\Rightarrow \qquad AB\,.\,BL = BM\,.\,BN$$

En la circunferencia O' : $(PB)^2 = MB\,.\,BN$

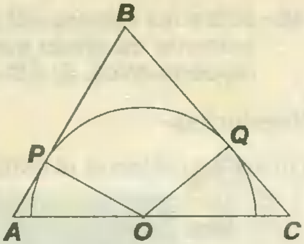
Luego : $AB\,.\,BL = a^2$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $2\,A_x = \dfrac{a^2}{2}$

$$\therefore \qquad A_x = \frac{a^2}{4}$$



44.- *Del gráfico mostrado; calcular la suma de las áreas de las regiones sombreada, si O es centro, P y Q son puntos de tangencia, AB = 2 (AO) y el área de la región triangular ABC es "A".*

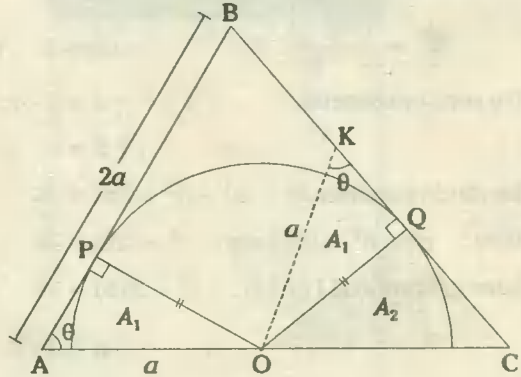


Resolución.-

Sean las áreas de las regiones APO y OQC, A_1 y A_2 respectivamente; nos piden : $A_1 + A_2$

Sobre $\overline{BQ}$ ubicamos el punto K de modo que: OK = OA = a , luego ⊿ OQK ≅ ⊿ APO

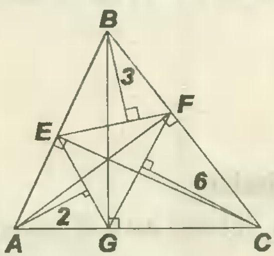
De donde *Área* (⊿ OQK) = A_1 y el área de la región OKC, luego :



$$\frac{A}{A_1 + A_2} = \frac{(2a)^2}{a^2} \quad \text{(Propiedad)}$$

$$\therefore \qquad A_1 + A_2 = \frac{A}{4}$$

45.- *Del gráfico mostrado, hallar el área de la región triangular EFG.*



Resolución.-

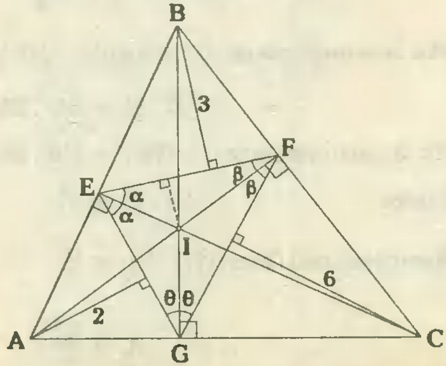
Con respecto al triángulo pedal EFG, I es el incentro, además A, B y C son sus excentros, luego:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{(Propiedad)}$$

$$\Rightarrow \quad r = 1$$

luego : *Área* $(\Delta\, EFG) = \sqrt{(1)(2)(3)(6)}$

***Área* (Δ EFG) = 6**

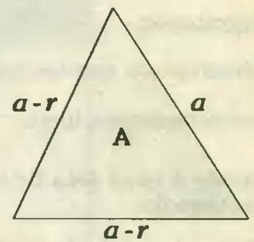


46.- Las medidas de los lados de un triángulo forman una progresión aritmética de números enteros; hallar su área si es numéricamente igual a su perímetro.

<u>**Resolución.-**</u>

Consideremos que sea "r" la razón de la progresión aritmética formada por los lados del triángulo de área A, luego :

Perímetro $= (a - r) + (a) + (a + r) = A \quad \Rightarrow \quad A = 3a \quad ...(1)$



Por fórmula de herón :

$$A = \sqrt{\frac{3a}{2}\left[\frac{3a}{2}-(a-r)\right]\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left[\frac{3a}{2}-(a+r)\right]} \quad ...(2)$$

De (1) y (2) : $$3a = \sqrt{\frac{3a^2}{2}\left(\frac{a}{2}+r\right)\left(\frac{a}{2}-r\right)}$$

De donde : $\left(\frac{a}{2}+r\right)\left(\frac{a}{2}-r\right) = 12$

Como las medidas de los lados son números enteros, también la razón r.

Luego : $\left(\frac{a}{2}+r\right)$ y $\left(\frac{a}{2}-r\right)$ son pares de donde : $\left(\frac{a}{2}+r\right)\left(\frac{a}{2}-r\right) = 6 \times 2$

Comparando : $\frac{a}{2} + r = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} - r = 2$

Resolviendo : $a = 8 \quad \therefore \quad \boxed{A = 24}$

47.- Dado el triángulo rectángulo ABC recto en B. La circunferencia inscrita toca a los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en E y F ; hallar el área de la región triangular PEF, si el área de la región cuadrangular AEFC es 40. (P es excentro relativo a $\overline{AC}$).

<u>**Resolución.-**</u>

Sea A_x , el área del Δ EPF, luego : $A_x = \frac{EF.PH}{2}$

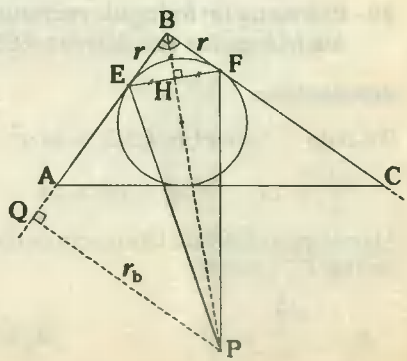
Pero EF $= r\sqrt{2}$ (r : inradio) y PH = PB - BH $= r_b\sqrt{2} - \frac{r}{2}\sqrt{2}$

Luego : $$A_x = \frac{(r\sqrt{2})\left(r_b\sqrt{2}-\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)}{2}$$

De donde : $A_x = r \cdot r_b - \frac{r^2}{2} \quad ...(1)$

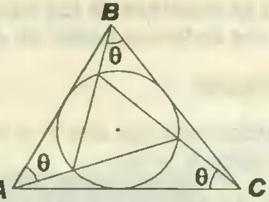
Área (□ AEFC) = *Área* (◺ ABC) - *Área* (◺ EBF)

$40 = r \cdot r_b - \frac{r \cdot r}{2} = r \cdot r_b - \frac{r^2}{2} \quad ...(2)$

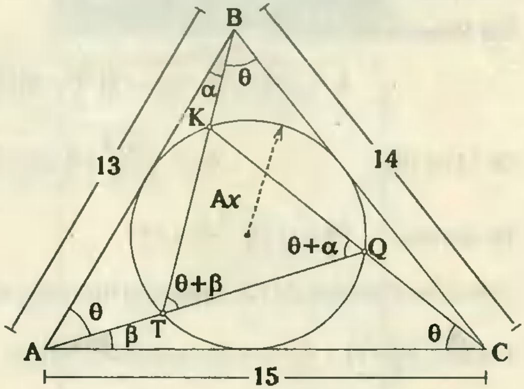


De (1) y (2) : $\boxed{A_x = 40}$

48.- En la figura : AB = 13, BC = 14 y AC = 15 ; hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-



Observamos que los triángulos TKQ y ABC son semejantes, luego : $\dfrac{Ax}{A} = \dfrac{r^2}{R^2}$ ... (1)

Donde A es el área de la región ABC y R su circunradio.

El área A se calcula mediante la fórmula :

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Fórmula de Herón)

Donde, para el problema :

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21 \quad \text{y} \quad p-a = 7\ ,\ p-b = 6 \quad \text{y} \quad p-c = 8$$

Luego : $A = \sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8} \quad \Rightarrow \quad A = 84$ ... (2)

Por otro lado se sabe que : $A = p\,.\,r \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{A}{P} = \dfrac{84}{21}$

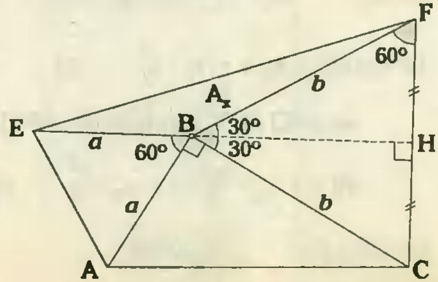
$\Rightarrow \quad r = 4$ ... (3)

Además : $A = \dfrac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{abc}{4A} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1) : $\dfrac{Ax}{84} = \dfrac{(4)^2}{\left(\frac{65}{8}\right)^2} \quad \therefore \quad \boldsymbol{Ax = 20{,}35\ u^2}$

49.- El área de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, es 24 u^2. Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BFC; hallar el área del triángulo EBF.

Resolución.-



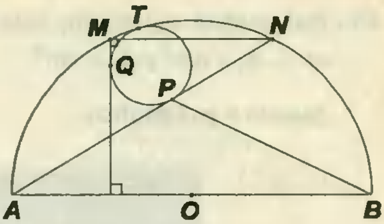
Por dato : *Área* (⊿ ABC) = 24 u^2

$\dfrac{ab}{2} = 24 \quad \Rightarrow \quad ab = 48$

Al prolongar $\overline{EB}$ éste intersecta perpendicularmente en H a $\overline{FC}$, luego :

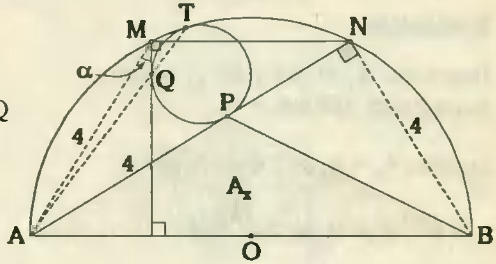
$A_x = \dfrac{a.\frac{b}{2}}{2} = \dfrac{ab}{4} \quad \therefore \quad \boldsymbol{A_x = 12\ u^2}$

50.- Hallar el área de la región sombreada, si : AP = 4 y $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$.



Resolución.-

De la semejanza de los triángulos AMQ y ATM.



Se tiene : $\dfrac{AM}{AT} = \dfrac{AQ}{AM} \quad \Rightarrow \quad (AM)^2 = AT.\ AQ$

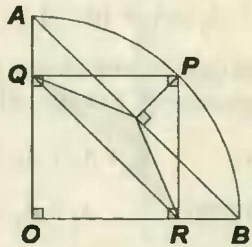
Por el Teorema de la Tangente : $(AP)^2 = AT\ .\ AQ$

De donde : $AM = AP = 4$

En el trapecio isósceles AMNB : $AM = NB = 4$

Finalmente : $A_x = \dfrac{4.4}{2} \quad \therefore \quad \boldsymbol{A = 8\,u^2}$

51.- En la figura mostrada hallar el área de la región sombreada. Si PQ = 3 y PR = 4 .



Resolución.-

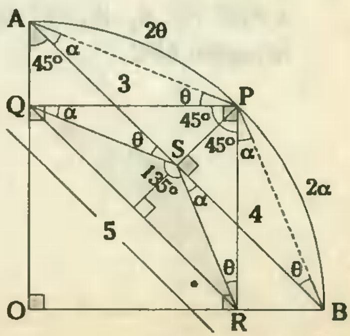
En el cuadrilátero inscriptible APSQ :

$m\measuredangle\ QAS = m\measuredangle\ QPS = 45°$, $m\measuredangle\ APQ = m\measuredangle\ ASQ = \theta$ y $m\measuredangle\ PAS = m\measuredangle\ PQS = \alpha$

En el cuadrilátero inscriptible SPBR :

$m\measuredangle\ BSR = m\measuredangle\ RPB = \alpha$

"S" es incentro del ⊿ QPR, ya que $\overline{PS}$ es bisectriz y $m\measuredangle\ QSR = 135°$.



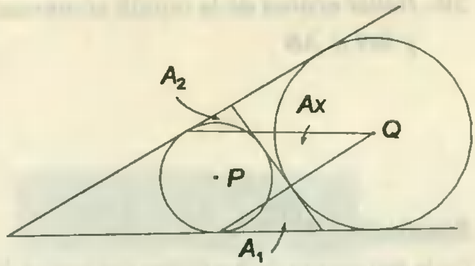
$$\textit{Área}\ (\Delta\ QSR) = A_x = \frac{5.r}{2} \quad ...\ (1)$$

⊿ ABC, por Poncelet : $3 + 4 = 5 + 2r$

Sustituyendo (2) en (1) : $\boldsymbol{A_x = \dfrac{5}{2} = 2{,}5}$

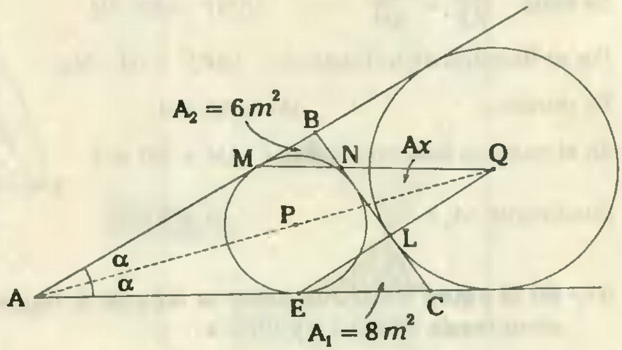
52.- Del gráfico mostrado; calcular A_x, si : $A_1 = 8m^2$ y $A_2 = 6m^2$.

Siendo P y Q centros



Resolución.-

Hagamos A_3 el área de la región pentagonal AMNLE.



Luego : $A_3 + A_x = 2\, \acute{A}rea\ (\Delta\ AEQ)$

$$A_3 + A_x = 2 \cdot \frac{AE.r_a}{2}$$

Pero : $AE = p - a$

$$\Rightarrow \quad A_3 + A_x = (p - a)\, r_a \quad ...(1)$$

De otro lado se conoce que el área de la región ABC es $r_a\,(p - a)$

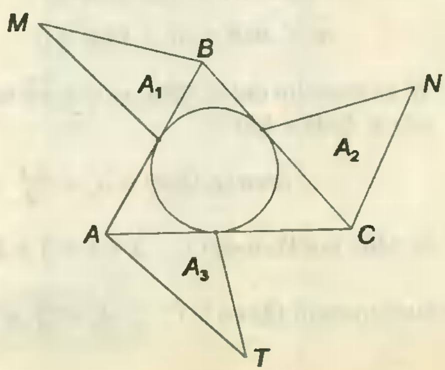
Luego : $A_1 + A_2 + A_3 = r_a\,(p - a) \quad ...(2)$

De (1) y (2) : $A_3 + A_x = A_1 + A_2 + A_3$

Finalmente : $A_x = A_1 + A_2$

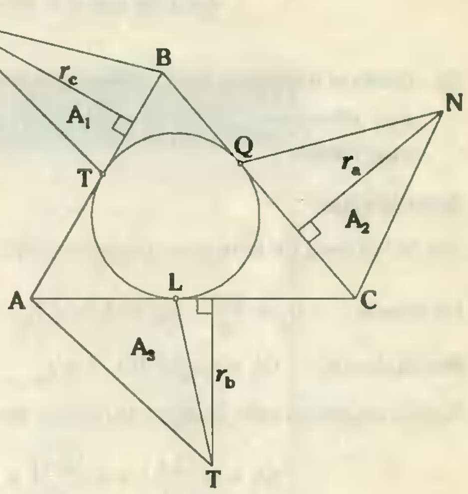
$$\therefore \quad A_x = 14\ m^2$$

53.- En la figura M, N y T son los excentros del Δ ABC, $A_1 . A_2 . A_3 = 27$; calcular el área de la región ABC.



Resolución.-

Por propiedad : BT = $p - b$, QC = $p - c$ y AL = $p - a$



Luego : $A_1 = \dfrac{(p-b)r_c}{2}$

$A_2 = \dfrac{(p-c)r_a}{2}$

$A_3 = \dfrac{(p-c)r_b}{2}$

De donde :

$A_1 A_2 A_3 = \dfrac{1}{8}\ (r_a\ r_b\ r_c)\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)$ ... (1)

Se sabe que el área A de la región ABC se puede expresar como :

$A^2 = r\ r_a\ r_b\ r_c$ ... (2)

$A^2 = p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)$ ... (3)

$A = p\ .\ r$ ... (4)

Multiplicando (2) y (3) y reemplazando (4) en el producto, se tiene :

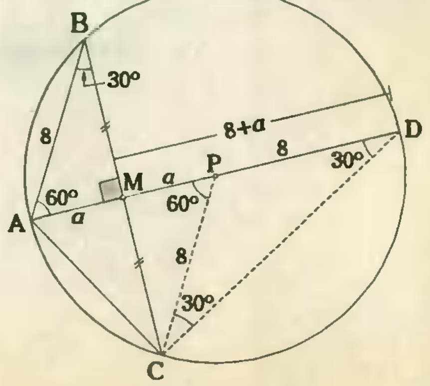
$A^4 = A\ .\ (r_a . r_b . r_c)(p - a)(p - b)(p - c) = A^3$ ... (5)

Reemplazando (5) en (1) : $A = 2\ \sqrt[3]{A_1 A_2 A_3}$

Como : $A_1\ A_2\ A_3 = 27$ $\therefore$ $\mathbf{A = 6}$

54.- ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia. $\overline{AD}$ es una cuerda que biseca a $\overline{BC}$ en M. Si m∡ BAD = 60 ; MD = AB + AM; hallar el área de la región triangular ABC, si AB = 8

Resolución.-



Sobre $\overline{MD}$ ubicamos el punto P con la condición : MP = AM = a

Luego : PD = 8 y los triángulos ABM y MPC son congruentes.

De donde : PC = AB = 8 y m ∡ MPC = 60°

En el triángulo isósceles PDC :

m ∡ PCD = m ∡ PDC = 30°

En el ⊿ BMA de 30° y 60° : $a = 4$ y BM = $4\sqrt{3}$

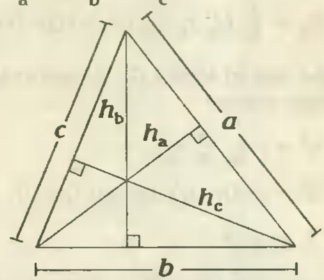
$$\text{Área}\,(\Delta\, AMB) = \frac{1}{2}\ \text{Área}\,(\Delta\, ABC) = \frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \qquad \textbf{Área}\,(\Delta\, ABC) = 16\sqrt{3}$$

55.- Dado el triángulo ABC, donde $ah_b + bh_c + ch_a = 6A$, siendo h_a, h_b y h_c las longitudes de sus alturas y A el área de la región triangular ABC; demostrar que el triángulo es equilátero.

Resolución.-

Sea "A" el área de la región triangular ABC, luego : $2A = ah_a = bh_b = ch_c$



De donde : $h_a = \dfrac{2A}{a}$, $h_b = \dfrac{2A}{b}$ y $h_c = \dfrac{2A}{c}$

Por hipótesis : $6A = ah_b + bh_c + ch_a$

Sustituyendo en esta última expresión, las anteriores :

$$6A = a\left(\frac{2A}{a}\right) + b\left(\frac{2A}{c}\right) + c\left(\frac{2A}{b}\right)$$

De donde : $3 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$

Por otro lado la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética dice :

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \quad \text{para} : x\,,y\,,z \ge 0$$

Y la igualdad se da si y solo si : $x = y = z$; si la aplicamos a los números $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{b}{c}$ y $\dfrac{c}{a}$

Tenemos : $1 = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right) = \dfrac{1}{3}\,(3) = 1$

Por lo que se da la igualdad de donde : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{a}$, es decir : $a = b = c$

$\therefore$ **El triángulo es equilátero** *l.q.q.d*

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide $4m$ y la altura relativa a la hipotenusa mide $2{,}4m$. Hallar el área de dicho triángulo.

A) $4m^2$ B) $4{,}8m^2$ C) $6m^2$

D) $6{,}4m^2$ E) $7{,}2m^2$

2.- Por el incentro "I" de un triángulo rectángulo ABC ($m\measuredangle B = 90°$) se trazan $IM \perp \overline{AI}$ (M en $\overline{AC}$), $MN \perp \overline{BC}$ y (N en $\overline{BC}$). Calcular el área de la región triangular INC; si AB = $3m$ y BC = $4m$.

A) $1m^2$ B) $2m^2$ C) $3m^2$

D) $1{,}5m^2$ E) $2{,}5m^2$

3.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 24 *m*. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son el ortocentro, el circuncentro y el incentro del triángulo rectángulo.

A) $10{,}5m^2$ B) $12{,}75m^2$ C) $13{,}25m^2$

D) $9{,}25m^2$ E) $11{,}25m^2$

4.- El lado desigual $\overline{AC}$ de un triángulo isósceles ABC mide $8m$ y el radio del círculo inscrito es $2m$. Calcular el área de dicho triángulo.

A) 64/3 B) 60/7 C) 49/3

D) 50/3 E) 32/3

5.- En un cuadrado ABCD, la diagonal $\overline{AC}$ intersecta en "E" y "F" a la circunferencia inscrita. Hallar el área de la región triangular EFD; si el lado del cuadrado mide $2m$.

A) $1m^2$ B) $\sqrt{2}\,m^2$ C) $\sqrt{3}\,m^2$

D) $2m^2$ E) $2\sqrt{2}/3m^2$

6.- Los lados de un triángulo acutángulo miden $3\sqrt{2}\,m$, $\sqrt{26}\,m$ y $2\sqrt{5}\,m$. Hallar el área del triángulo.

A) $2\sqrt{6}\,m^2$ B) $6\,m^2$ C) $8m^2$

D) $9m^2$ E) $9\sqrt{2}\,m^2$

7.- Conociendo los radios *r* y *R* de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo rectángulo, calcular su área.

A) $r(r+2R)$ B) $r(R-r)$ C) $R(R-2r)$

D) $r(R+r)$ E) $R(R+2r)$

8.- Los lados de un triángulo ABC miden: AB = $21\,m$, AC = $28\,m$ y BC = $35\,m$ se trazan las bisectrices $\overline{AQ}$ y $\overline{CR}$, las cuales se intersectan en "I". Hallar el área del triángulo CIQ.

A) $60{,}5m^2$ B) $61{,}25m^2$ C) $62{,}75m^2$

D) $56{,}25m^2$ E) $70m^2$

9.- Hallar "$S_2 - S_1$" en función de "*a*" y "*b*".

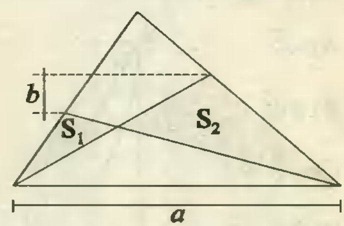
A) ab

B) $a+b$

C) $ab/2$

D) $ab/4$

E) $2ab$



10.- Los lados de un triángulo ABC = miden AB = $13m$, BC = $14m$, AC = $15m$. Hallar el área de la región triangular AIC siendo "I" el incentro del triángulo ABC.

A) $15m^2$ B) $20m^2$ C) $30m^2$

D) $36m^2$ E) $42m^2$

11.- En un triángulo rectángulo ABC recto en "B" se construye el cuadrado ACDE. Si AB = 4 y BC = 6. Hallar el área del triángulo ABD.

A) 20 B) 18 C) 30 D) 40 E) 24

12.- Halle el área del triángulo ABC; si ED = 16; AB = 10 y $m \measuredangle D = 15°$.

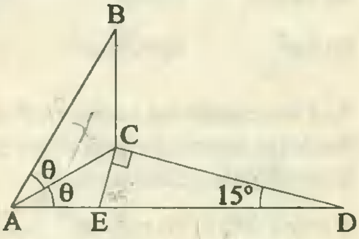
A) 20 m^2

B) 15 m^2

C) 30 m^2

D) 40 m^2

E) 10 m^2



13.- Calcular el área de un triángulo si el inradio mide $2m$ y los segmentos determinados por la circunferencia inscrita sobre un lado miden 3 y $5m$.

A) $20m^2$ B) $22m^2$ C) $21m^2$

D) $120/11m^2$ E) $240/11m^2$

14.- En la figura; hallar el área del triángulo sombreado, si el área del cuadrado ABCD es $4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)m^2$.

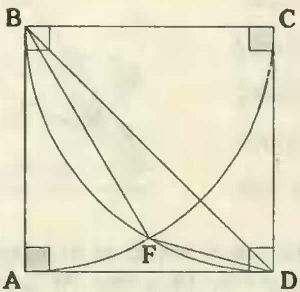
A) $\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $\sqrt{2}+1$

D) $2+\sqrt{3}$

E) $2-\sqrt{3}$



15.- Hallar el área de un trapecio isósceles, si su altura mide $9m$ y su lado no paralelo se observa desde el centro de la circunferencia circunscrita, bajo un ángulo de 74°.

A) $36m^2$ B) $54m^2$ C) $72m^2$

D) $81m^2$ E) $108m^2$

16.- Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, exteriormente se construyen los cuadrados ABFL y BCQR; el segmento que une los centros de los cuadrados mide $8m$. Hallar el área del cuadrilátero AFRC.

A) $40m^2$ B) $48m^2$ C) $54m^2$

D) $64m^2$ E) $72m^2$

17.- En la figura "G" es el baricentro del triángulo ABC; si el área del triángulo FGC es 9 m^2, el área del triángulo FGB es $16m^2$. Hallar el área de la región sombreada.

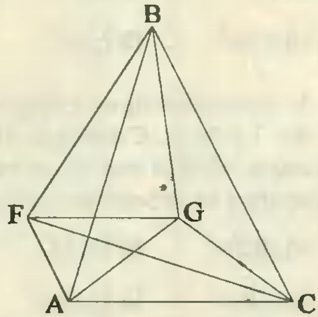
A) $6m^2$

B) $7m^2$

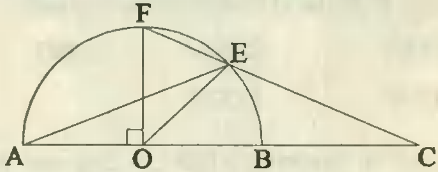
C) $10m^2$

D) $5m^2$

E) $12m^2$



18.- En la figura, calcular el área del triángulo AOE. Si EF = $2m$ y EC = $7m$.



A) $2,5m^2$ B) 3,5 C) $4m^2$

D) $3m^2$ E) $5m^2$

19.- En la figura; calcular el área de la región triangular sombreada. Si : AE = $2m$ y FB = $4m$.

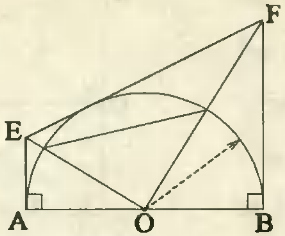
A) $4m^2$

B) $6m^2$

C) $8m^2$

D) $10m^2$

E) $12m^2$

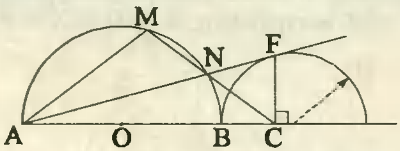


20.- En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) Si AD = 2. BC , CD = $2\sqrt{2}$, $\overline{BD} \perp \overline{AB}$; hallar el área ABCD

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{3}$

21.- En la figura AB = 25m AC = 32m. Hallar el área de la región sombreada (F → punto de tangencia).



A) $132m^2$ B) $84m^2$ C) $1086/25m^2$

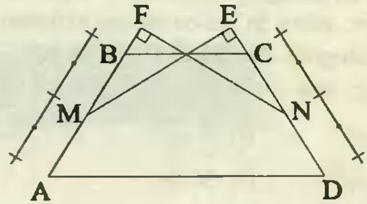
D) $1712/25m^2$ E) $2112/25m^2$

22.- Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$, en $\overline{AD}$ se ubica el punto "N" tal que $\overline{NC}$ intersecta a la circunferencia en "F"; si AN = ND, NF = 1m , NC = 4m. Hallar el área de la región triangular ANC.

A) $\sqrt{15}\,m^2$ B) $3\sqrt{5}\,m^2$ C) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}\,m^2$

D) $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}\,m^2$ E) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}\,m^2$

23.- En la figura; hallar el área del trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) . Si ME . FN = 18 m^2 y MB . CN = 12 m^2 .



A) $8\sqrt{6}\,m^2$ B) $9\sqrt{6}\,m^2$ C) $10\sqrt{6}\,m^2$

D) $12\sqrt{6}\,m^2$ E) $15\sqrt{6}\,m^2$

24.- En la figura $\overline{AB}$ es diámetro, AB = BC y BF = 6m . Hallar el área del triángulo BFC.

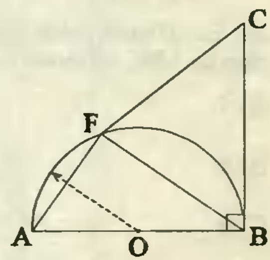
A) $16m^2$

B) $15m^2$

C) $18m^2$

D) $24m^2$

E) $20m^2$

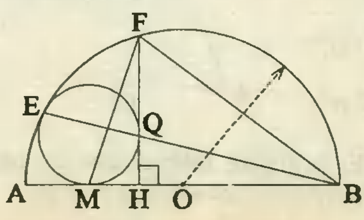


25.- Hallar el lado mayor de un triángulo ABC, tal que $r = 5m$; $r_a = 12m$ y $r_b = 20m$

A) $7\sqrt{5}\,m$ B) $8\sqrt{5}\,m$ C) $9\sqrt{5}\,m$

D) $10\sqrt{5}\,m$ E) $12\sqrt{5}\,m$

26.- En la figura : E, Q y M son puntos de tangencia FB = 10m , FH = 6m . Hallar el área de la región triangular MFB.



A) $20\ m^2$ B) $25\ m^2$ C) $30\ m^2$

D) $36\ m^2$ E) $48\ m^2$

27.- En un triángulo isósceles ABC, la base $\overline{AC}$ mide $7m$; sobre $\overline{BC}$ se construye exteriormente el triángulo equilátero BCF. Si AF = $16m$ Hallar el área de la región triangular AFC.

A) $18\ m^2$ B) $24\ m^2$ C) $28\ m^2$

D) $30\ m^2$ E) $56\ m^2$

28.- En un triángulo ABC, $m\measuredangle A = 2 . m\measuredangle C$, AB = $5m$, AC = $11m$. Hallar el área de la región triangular ABC.

A) $20\ m^2$ B) $22\ m^2$ C) $24\ m^2$

D) $27{,}5\ m^2$ E) $33\ m^2$

29.- En la figura; hallar el área del triángulo rectángulo ABC, sabiendo que BD = 2 y DF = 3.

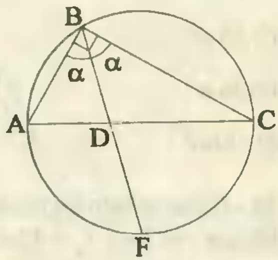
A) 5

B) 8

C) 4

D) 6

E) 10



30.- Halle el área del triángulo ABD; si BF= $3m$ y AC = $10m$.

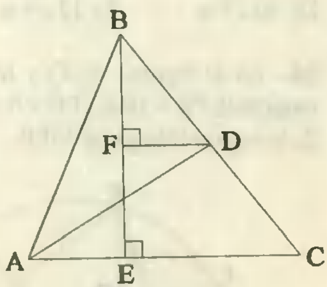
A) $10\ m^2$

B) $30\ m^2$

C) $15\ m^2$

D) $20\ m^2$

E) $25\ m^2$



31.- En la figura, halle el área del triángulo BCD; si AO = OB = $3m$; CD = $2m$.

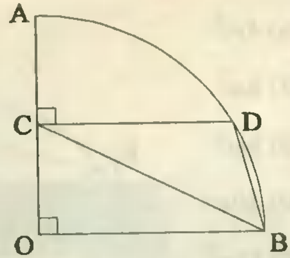
A) $\sqrt{5}\ m^2$

B) $\sqrt{3}\ m^2$

C) $6\ m^2$

D) $3\ m^2$

E) $\sqrt{7}\ m^2$



32.- Del gráfico; halle la diferencia de las áreas de los triángulos DOC y AOE . Si AC = $10m$; FP = $3m$.

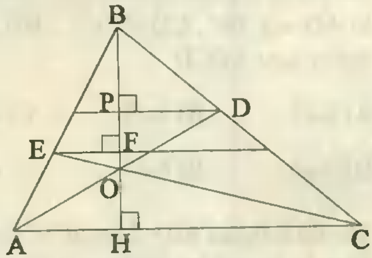
A) $10\ m^2$

B) $30\ m^2$

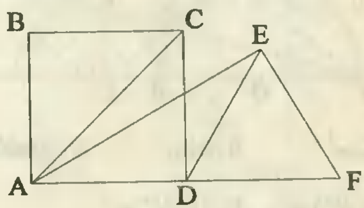
C) $15\ m^2$

D) $20\ m^2$

E) $25\ m^2$



33.- En la figura; calcular el área de la región sombreada. Si ABCD es un cuadrado y el triángulo DEF es equilátero; si : AD = DF = a.



A) $\frac{a^2}{2}(6-\sqrt{3})$ D) $\frac{a^2}{12}(6+\sqrt{3})$

B) $\frac{a^2}{2}(6+\sqrt{3})$ E) $\frac{a^2}{6}(6+\sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{12}(6-\sqrt{3})$

34.- Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B. Desde el pie de la altura $\overline{BH}$ se trazan las perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos M y N respectivamente. Calcular el área de la región MBNO; si : AB = 7 y BC = 8 (O : punto medio de $\overline{AC}$).

A) $7\sqrt{2}$ B) 14 C) 21

D) $2\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{7}$

35.- Calcular el área de la región triangular ABC; si $R = 36m$ y $r = 9m$ (T $\rightarrow$ punto de tangencia).

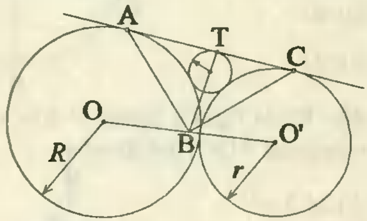
A) 123 m^2

B) 423 m^2

C) 234 m^2

D) 324 m^2

E) 321 m^2



36.- Del gráfico adjunto, calcular el área de la región triangular ABC; si : 4 (AC) = 5 (CD), AH = 3.

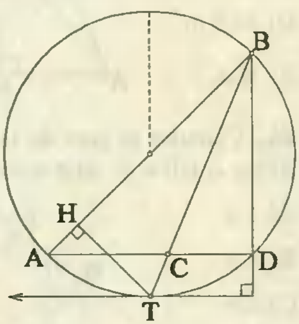
A) 7 u^2

B) $\frac{49}{2}$ u^2

C) $\frac{45}{2}$ u^2

D) $\frac{135}{4}$ u^2

E) 15 u^2



37.- Según el gráfico, calcular el área de la región sombreada en función de A_1 y A_2. Ademas : OT = TO_1

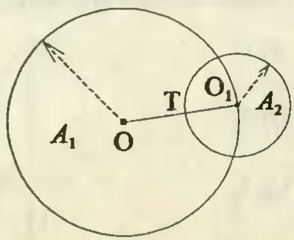
A) $\dfrac{A_1 - 2A_2}{3}$

B) $\dfrac{A_1 - 3A_2}{2}$

C) $\dfrac{A_1 - 4A_2}{3}$

D) $\dfrac{A_1 + 3A_2}{3}$

E) $\dfrac{A_1 + 4A_2}{5}$



38.- Calcular el área de la región sombreada. si AB = 12 ; BC = 5.

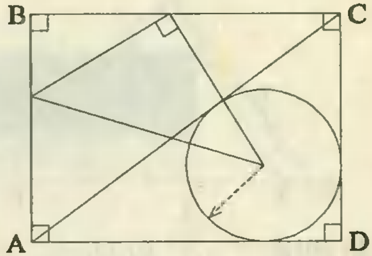
A) $\frac{900}{57}$

B) $\frac{857}{165}$

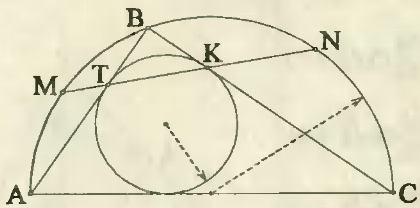
C) $\frac{750}{7}$

D) $\frac{1225}{128}$

E) $\frac{1209}{64}$



39.- En la figura T y K son puntos de tangencia, MT = a y KN = b ; hallar el área de la región ABC.



A) $\sqrt{ab}$ D) $2\sqrt{ab}$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

B) $2\sqrt{ab}$ E) $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

C) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

40.- Hallar el área de la región KHQ, si : $r = 3$ y $R = 4$.

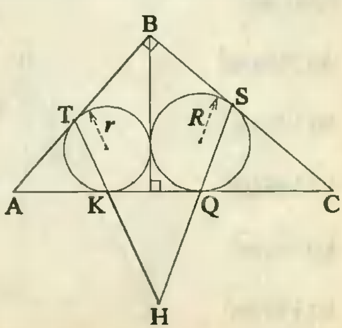
A) $\frac{147}{5}$ u^2

B) 25 u^2

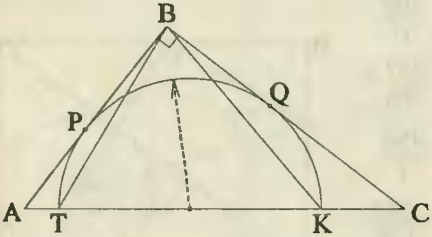
C) $\frac{50}{3}$ u^2

D) $\frac{149}{5}$ u^2

E) 30 u^2



41.- Hallar el área de la región TBK, si AP = 9 y CQ = 12



A) 201,6 B) 195,4 C) 180

D) 175,4 E) 160,5

42.- Calcular el área de la región sombreada ; si : $AP = 4\sqrt{2}$; PB = 4 . HN = 4.

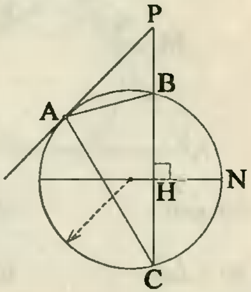
A) $\frac{32}{51}(5\sqrt{2}+4)$

B) $\frac{51}{32}(5\sqrt{2}+4)$

C) $\frac{36}{51}(5\sqrt{2}-4)$

D) $\frac{35}{51}(5\sqrt{2}-4)$

E) $\frac{17}{51}(5\sqrt{2}+4)$



43.- Del gráfico, hallar el área de la región sombreada, si el área de la región ABC es $625\,cm^2$.

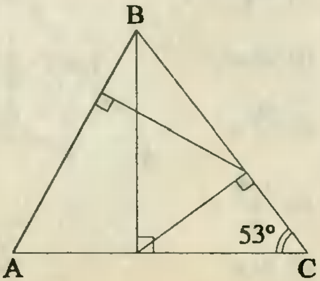
A) $250\,cm^2$

B) $125\,cm^2$

C) $144\,cm^2$

D) $72\,cm^2$

E) $175\,cm^2$



44.- Hallar el área de la región TKC , si : $R = 20$ y AB = 24.

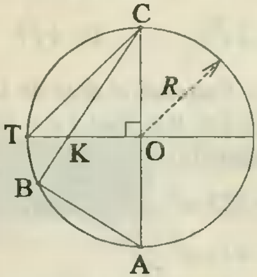
A) 20

B) 25

C) 30

D) 40

E) 50



45.- En la figura; hallar el área de la región triangular AQC . Si QH = $6m$.

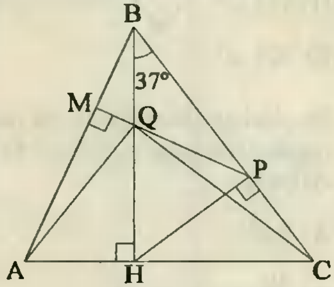
A) $24{,}5\,m^2$

B) $28\ m^2$

C) $35\ m^2$

D) $37{,}5\ m^2$

E) N.A.



46.- Calcular el área de la región triangular BCD; si DE = 2 . MD = 4 . CM = 4.

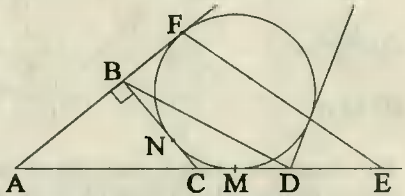
A) 1,6

B) 1,8

C) 2,4

D) 3,2

E) 3,6



47.- En la figura : T, K y M son puntos de tangencia; hallar el área de la región sombreada.

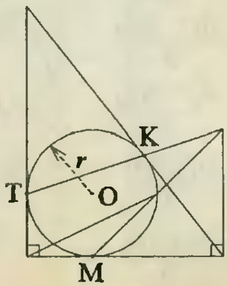
A) r^2

B) $\frac{r^2}{2}$

C) $\frac{r^2}{3}$

D) $2\ r^2$

E) $r^2\sqrt{2}$



48.- Hallar el área de la región sombreada, si: $r=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

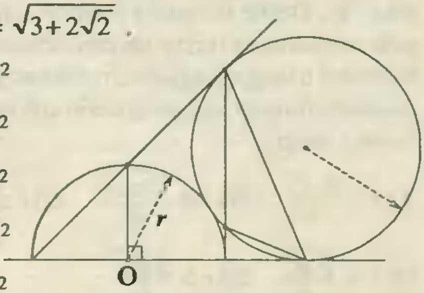
A) $2\ u^2$

B) $3\ u^2$

C) $4\ u^2$

D) $6\ u^2$

E) $8\ u^2$



49.- En la figura, ABCD es un cuadrado; hallar el área de la región PBQ; si : AP = 3 y QC = 10

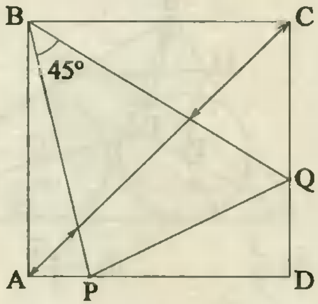
A) $97{,}5\ u^2$

B) $97\ u^2$

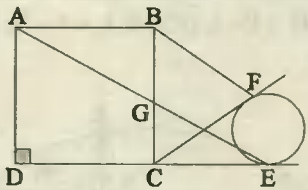
C) $96{,}5\ u^2$

D) $96\ u^2$

E) $95\ u^2$



50.- En la figura ABCD es un cuadrado, BG = CE, AB = BF = 5; hallar el área de la región BCF.



A) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $\sqrt{5}$ - 1

C) $\sqrt{9-\sqrt{5}}$

D) $\sqrt{15-\sqrt{7}}$

E) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

51.- En la figura : AH = HC, PB = PH ; calcular la relación entre las áreas de las regiones MPN y ABC.

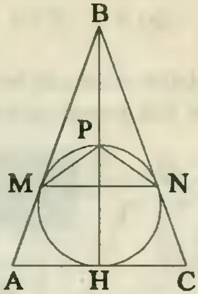
A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{9}$



52.- Hallar el área de la región sombreada, si : AP = 9 y PB = 6.

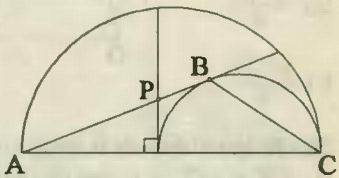
A) 60

B) 50

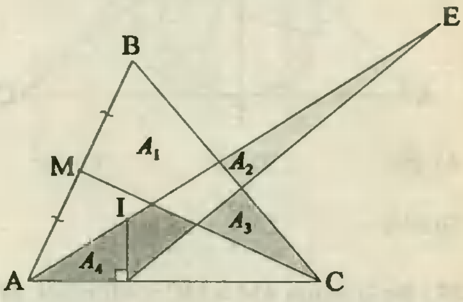
C) $75\sqrt{2}$

D) 75

E) $75\sqrt{5}$



53.- En la figura, I es incentro, E es excentro y AM = MB; determinar la relación correcta.



A) $A_1+A_3=A_4+A_2$

B) $A_1 \cdot A_3=A_4 \cdot A_2$

C) $A_1+A_2=A_3+A_4$

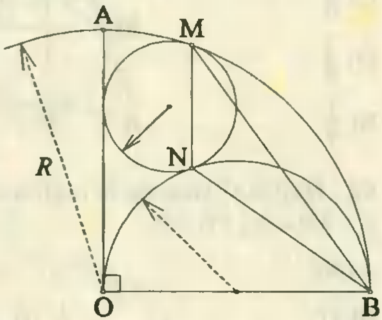
D) $A_1 \cdot A_2=A_3 \cdot A_4$

E) $\sqrt{A_1A_3}=A_2 \cdot A_4$

54.- Por los vértices A y C de un triángulo rectángulo ABC, se trazan dos circunferencias tangentes a los catetos las cuales se intersectan en los puntos D y F, si : BF = 4 ; calcular el área de la región ABC.

A) 6 B) 8 C) 4 D) 10 E) 12

55.- Hallar el área de la región sombreada; si: M y N son puntos de tangencia.



A) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{2}$

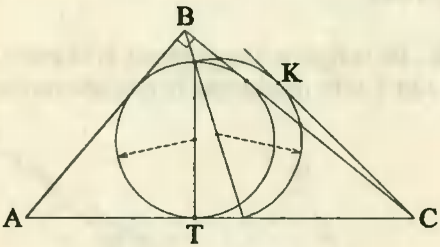
B) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}$

C) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{6}$

D) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{8}$

E) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{9}$

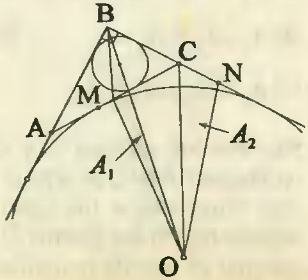
56.- Hallar el área de la región triangular ABC, si : CK = a (T es punto de tangencia).



A) a^2 B) $2a^2$ C) $3a^2$

D) $a^2/2$ E) $\dfrac{2}{3}\,a^2$

57.- En la figura AM = MC y AB = BN. Marcar la relación correcta :



A) $A_1 = A_2$

B) $A_1 = 2\,A_2$

C) $A_1 = A_2/2$

D) $A_1 = A_2/2$

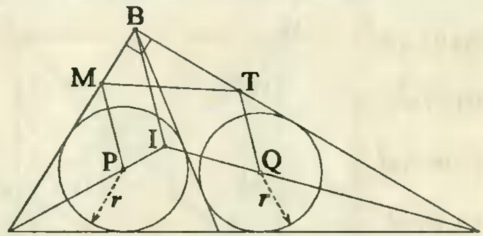
E) $2A_1 = 3A_2$

58.- Consideremos un triángulo equilátero de área "S". Desde un punto interior a su triángulo mediano, se trazan perpendiculares a los lados del triángulo equilátero, dichas perpendiculares forman una progresión aritmética de razón r, luego :

A) $r < \dfrac{S\sqrt{3}}{6}$ B) $r < \dfrac{\sqrt[4]{3S^2}}{6}$ C) $r \leq \dfrac{\sqrt[4]{3S^2}}{4}$

D) $r > \dfrac{\sqrt[4]{3S^2}}{6}$ E) $r > \dfrac{S\sqrt{3}}{6}$

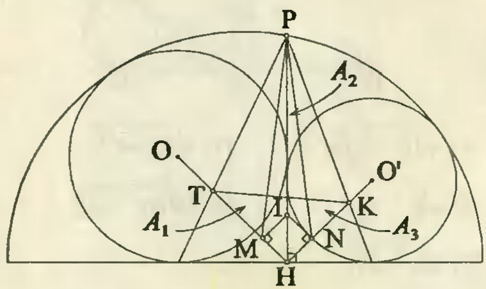
59.- En la figura : $\overline{PM}$ // $\overline{BI}$ // $\overline{QT}$; hallar el área de la región MBT.



A) $\dfrac{r^2}{2}$ B) $\dfrac{r^2\sqrt{2}}{2}$ C) r^2

D) $r^2\sqrt{2}$ E) $2\,r^2$

60.- En la figura, I es incentro del triángulo THK, $\overline{IM} \perp \overline{OH}$ y $\overline{IN} \perp \overline{HO'}$. si: $A_1 = 6\,m^2$ y $A_2 = 9\,m^2$; hallar A_3 .



A) $7\ m^2$ B) $8\ m^2$ C) $10\ m^2$

D) $3\ m^2$ E) $5\ m^2$

CAP. 19

relación entre las áreas de dos triángulos

19.1 1RA RELACIÓN

Si dos triángulos tienen alturas congruentes, entonces la relación entre sus áreas será igual a la relación entre sus bases.

Sean A_1 y A_2 las áreas de los triángulos ABC y PQR respectivamente (*Fig*.19.1) si BH = QL, entonces:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AC}{PR} \qquad \text{... (19.1)}$$

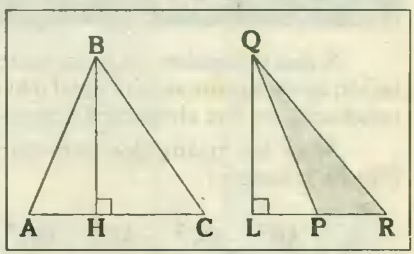


Fig 19.1

Consecuencia Directa

Si en un triángulo ABC se traza una ceviana $\overline{BF}$, entonces la relación entre las áreas de los triángulos ABF y FBC sera igual a la relación entre AF y FC.

En la *Fig*.19.2, $\overline{BF}$ es ceviana. Luego se cumple:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AF}{FC} \qquad \text{... (19.2)}$$

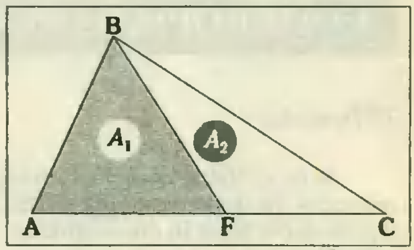


Fig. 19.2

19.2 2DA RELACIÓN

Si dos triángulos tienen ángulos iguales o suplementarios, la relación entre sus áreas será igual a la relación entre los productos de los lados que forman dichos ángulos.

En la *Fig*.19.3, si $\alpha = \theta$, entonces :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB.BC}{MN.NL} \qquad \text{... (19.3)}$$

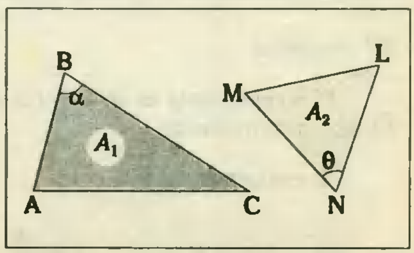


Fig. 19.3

En la *Fig*. 19.4 , si $\alpha + \theta = 180$, entonces:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB.AC}{PQ.PR} \qquad \text{... (19.4)}$$

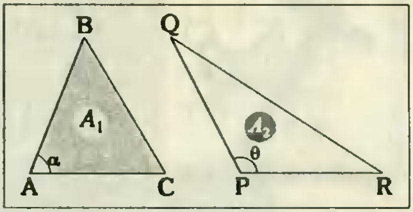


Fig. 19.4

19.3 3ra RELACIÓN

Si dos triángulos son semejantes, entonces la relación entre sus áreas será igual a la relación entre los cuadrados de sus elementos homólogos.

Sean los triángulos semejantes ABC y MNL (*Fig*.19.5) Luego :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB^2}{MN^2} = \frac{BC^2}{NL^2} = \frac{AC^2}{ML^2} = \frac{BH^2}{NP^2} = k^2 \qquad \text{... (19.5)}$$

donde k es la razón de semejanza.

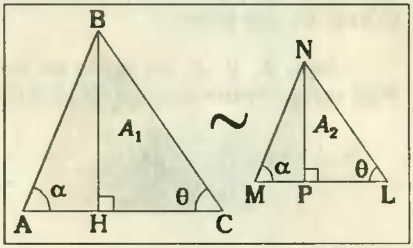


Fig. 19.5

19.4 PROPIEDADES

1ra Propiedad

Si en el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$ entonces los triángulos ABM y MBC serán equivalentes, es decir, tendrán áreas iguales.

Luego respecto a la *Fig* 19.6 se cumplirá :

$$A_1 = A_2 \qquad \text{... (19.6)}$$

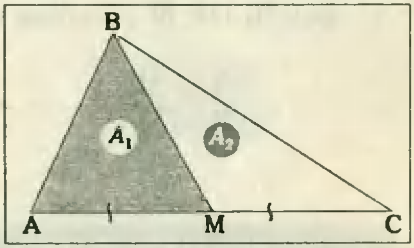


Fig. 19.6

2da Propiedad

Si A representa el área del Δ ABC y $\overline{AN}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CL}$ son sus medianas.

Se cumple :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots = \frac{A}{6} \qquad \text{... (19.7)}$$

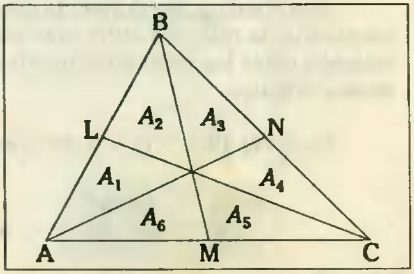


Fig. 19.7

3ra Propiedad

Si M, N y L son puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, además "G" es Baricentro del Δ ABC.

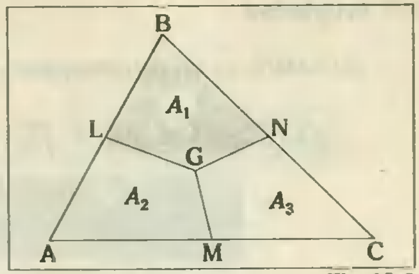


Fig. 19.8

Luego se cumple :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{A}{3} \qquad \text{... (19.8)}$$

Donde : A es el área de la región ABC

4ta Propiedad

Si en el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BF}$, entonces la relación entre las áreas de los triángulos ABF y FBC será igual a la relación de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

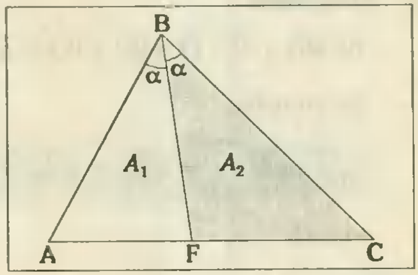


Fig. 19.9

Es decir :

$$\Rightarrow \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{AB}{BC} \qquad \text{... (19.9)}$$

5ta Propiedad

Si en el Δ ABC : $\overline{AM}$, $\overline{CN}$, $\overline{BL}$ son cevianas de modo que :

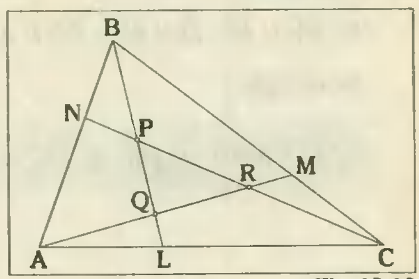


Fig. 19.10

$$\frac{AN}{NB} = \frac{BM}{MC} = \frac{CL}{LA} = n$$

$$\text{Se cumple : } \frac{A\,(\Delta\, PQR)}{A\,(\Delta\, ABC)} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}$$

6ta propiedad

Si para el triángulo ABC, se tiene que :

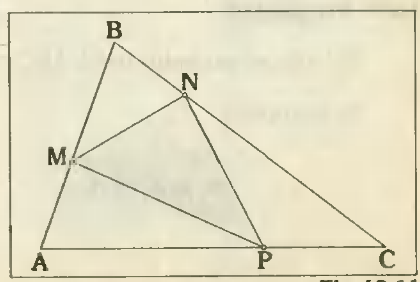


Fig. 19.11

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AP}{PC} = \frac{CN}{BN} = k$$

Se cumple que :

$$\frac{A\,(\Delta\, MPN)}{A\,(\Delta\, ABC)} = \frac{n^3 + 1}{(n+1)^3}$$

7ma Propiedad

Si □ AMNL es un paralelogramo, se cumple :

$$\sqrt{A\,(\Delta\,ABC)} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} \quad \text{... (19.10)}$$

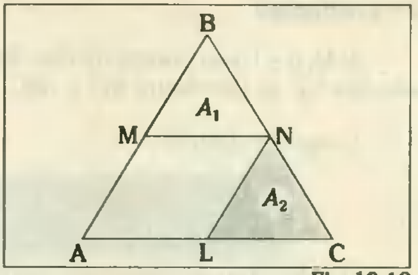


Fig. 19.12

8va Propiedad

Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

Se cumple :

$$\sqrt{A\,(\Delta\,ABC)} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} \quad \text{... (19.11)}$$

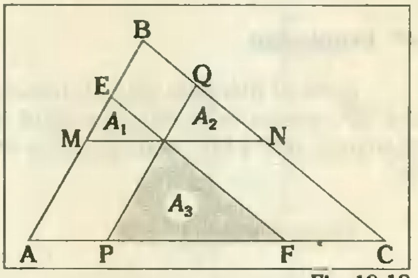


Fig. 19.13

9na Propiedad

Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

Se cumple :

$$\sqrt{A\,(\Delta\,ABC)} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} \quad \text{... (19.12)}$$

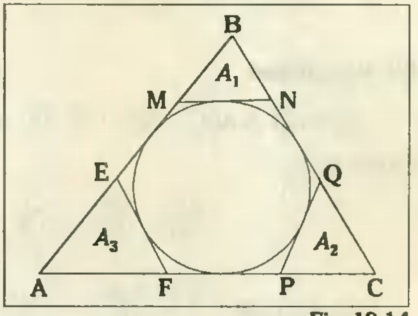


Fig. 19.14

10ma Propiedad

Si : «E» es excentro del Δ ABC

Se cumple :

$$A_x = A_1 + A_2 \quad \text{... (19.13)}$$

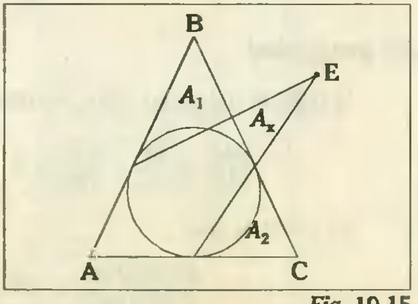


Fig. 19.15

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- En un triángulo ABC cuya región mide $72m^2$ se traza la mediana $\overline{BM}$; calcular el área de la región BMN . Si $N \in \overline{BC}$ y $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{2}{3}$

$10S = 72$
$S = \frac{36}{5}$

Resolución.-

Para el triángulo BMC, $\overline{MN}$ es ceviana

Luego si : BN = $2k$ y NC = $3k$

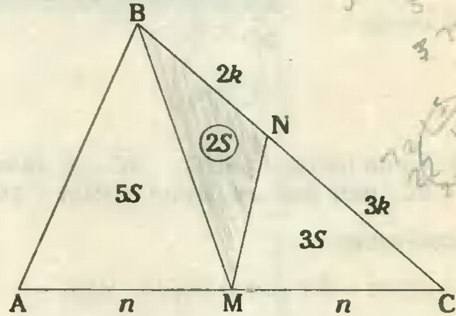
Entonces : $S_{(BMN)} = 2S$ y $S_{MNC} = 3S$

Para el triángulo ABC : $\overline{BM}$ es mediana

Luego : $S_{(ABM)} = S_{(MBC)} = 5S$

De donde : $10S = S_{(ABC)} = 72 \Rightarrow S = 7{,}2$

Finalmente : $\mathbf{S_{(MBN)} = 2(7{,}2) = 14{,}4}$



2.- En un triángulo ABC se traza la bisectríz interior $\overline{BD}$; si el área de la región ABC es 64 y 5 AB = 3BC . Calcular el área de la región ABD.

Resolución.-

Por condición del problema :

5 AB = 3 BC $\Rightarrow$ AB = $3k$ y BC = $5k$

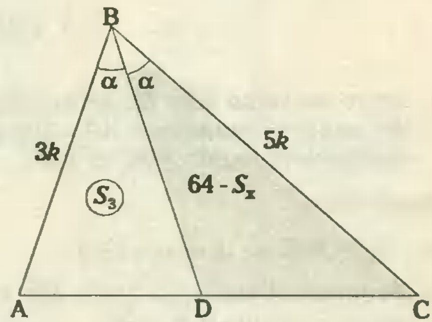
Sea S_x el área de la región ABD puesto que los triángulos ABD y DBC tienen ángulos congruentes se tiene :

$$\frac{S_x}{64 - S_x} = \frac{3k \cdot BD}{BD \cdot 5k} = \frac{3}{5}$$

$$5\,S_x = 3 \cdot 64 - 3\,S_x$$

$$\Rightarrow \quad 8\,S_x = 3 \cdot 64$$

$$\therefore \quad S_x = 24$$

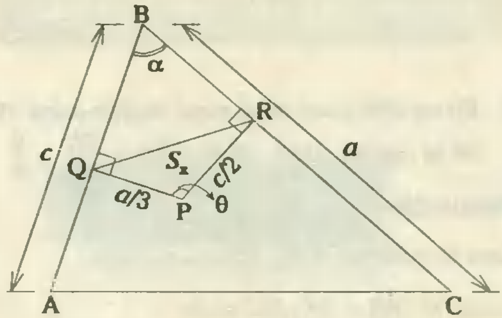


3.- Interiormente a un triángulo ABC se ubica el punto P a partir del cual se trazan $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PR} \perp \overline{BC}$. Si $PQ = \dfrac{BC}{3}$, $PR = \dfrac{AB}{2}$ y el área de la región ABC es 36. Calcular el área de la región de PQR.

Resolución.-

Sea : S_x el área de la región PQR.

En el cuadrilátero QBRP : $\alpha + \theta = 180$



Luego : $$\frac{S_x}{36} = \frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{c}{2}}{a\cdot c} = \frac{ac}{6ac}$$

De donde : $$\frac{S_x}{36} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ $\mathbf{S_x = 6}$

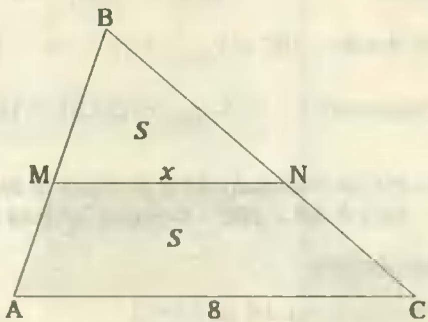
4.- En un triángulo ABC : AC = 8 , calcular la longitud del segmento MN ($M \in \overline{AB} \wedge N \in \overline{BC}$) para que las regiones MBN y AMNC sean equivalentes; además $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$

Resolución.-

Hacemos : Área de la región MBN = S

Luego : Área de la región AMNC = S

Puesto que $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$, entonces los triángulos MBN y ABC son semejantes de donde :



$$\frac{S}{2S} = \frac{x^2}{8^2} \quad \Rightarrow \quad 32 = x^2$$

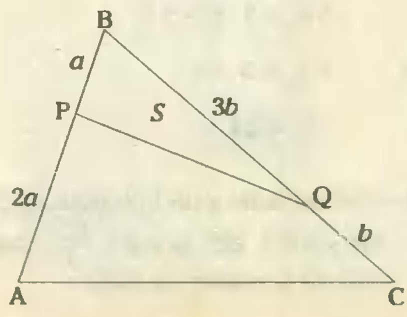
$\therefore$ $\mathbf{x = 4\sqrt{2}}$

5.- Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se consideran los puntos P y Q respectivamente de modo que AP = 2PB y BQ = 3QC . Calcular el área de la región PBQ, si el área de la región ABC es 120.

Resolución.-

Sea «S» el área de la región PBQ.

Luego como los triángulos PBQ y ABC tienen en común el ángulo B se tiene :



$$\frac{S}{120} = \frac{PB\cdot BQ}{AB\cdot BC} = \frac{a\cdot 3b}{3a\cdot 4b}$$

$$\frac{S}{120} = \frac{1}{4}$$

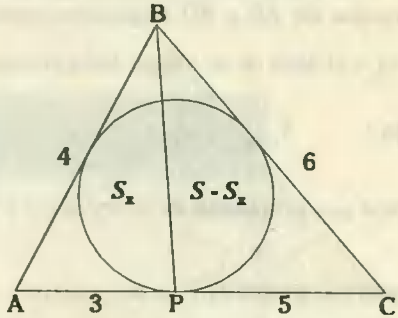
$\therefore$ $\mathbf{S = 30}$

6.- En un triángulo ABC : AB = 4, BC = 6 y AC = 8 . La circunferencia inscrita determina sobre $\overline{AC}$ el punto P . Calcular el área de la región ABP

Resolución.-

Sean : S_x : área de la región ABP

S : área de la región ABC



Luego : $\dfrac{S_x}{S-S_x} = \dfrac{AP}{PC}$ ... (1)

Por propiedad : $AP = p - a = \dfrac{4+6+8}{2} - 6$

De donde : $AP = 3 \Rightarrow PC = 5$

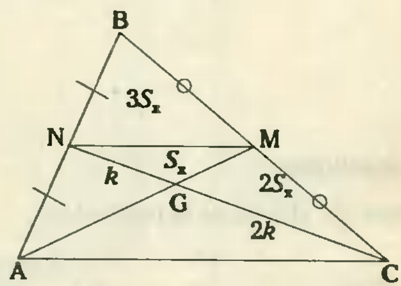
Además : $S = \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)} \Rightarrow S = 3\sqrt{15}$

Sustituyendo en (1) : $\dfrac{S_x}{3\sqrt{5}-S_x} = \dfrac{3}{5}$ $\therefore$ $S_x = \dfrac{9\sqrt{15}}{8}$

7.- En un triángulo ABC se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ las cuales se intersectan en G. Calcular el área de la región MGN , si el área de la región ABC es S.

Resolución.-

Por ser «G» baricentro del Δ ABC



Luego si : $GN = k \Rightarrow GC = 2k$

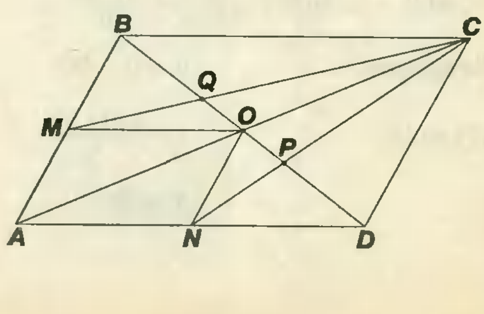
Por relación de áreas : $S_{(NMG)} = S_x \Rightarrow S_{(GMC)} = 2S_x$

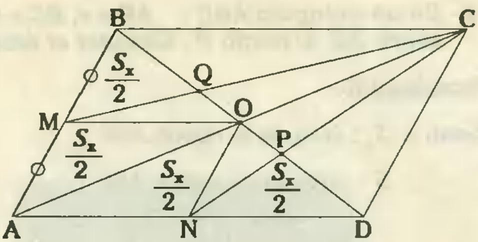
Luego : $S_{(ABC)} = 12\, S_x = S$

Finalmente : $S_x = \dfrac{S}{12}$

8.- En la figura mostrada ABCD es un paralelogramo de área S ; Q y P son Baricentros de los triángulos ABC y ADC.

Calcular el área de la región AMON.





Resolución.-

Si P y Q son Baricentros, luego : M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.

Sea «S_x» el área de la región sombreada

Luego : $S_{(AMO)} = S_{(ANO)} = \dfrac{S_x}{2}$

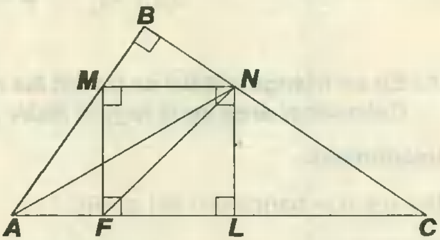
Además por propiedad de la mediana : $S_{(BMO)} = S_{(ANO)} = \dfrac{S_x}{2}$

Además por propiedad de la mediana : $S_{(BMO)} = \dfrac{S_x}{2}$ y $S_{(NOD)} = \dfrac{S_x}{2}$

Δ ABD $\cong$ Δ BCD (LLL): $\Rightarrow$ $S_{(BCD)} = S_{(ABD)} = 2S_x$

Finalmente : $4S_x = S$ $\therefore$ $S_x = \dfrac{S}{4}$

9.- En la figura : AL = 10 y FC = 15 . Calcular el área de la región ANF , si MNLF es un cuadrado.



Resolución.-

Sea «S» el área de la región ANF

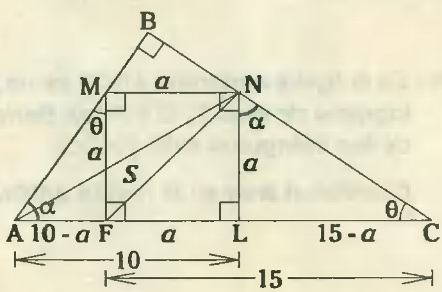
Luego : $S = \dfrac{(10-a)a}{2}$ ... (1)

$\triangle$ AFM ~ $\triangle$ NLC : $\dfrac{a}{15-a} = \dfrac{10-a}{a}$

Resolviendo : $a = 6$ ... (2)

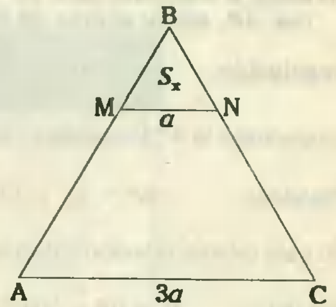
(2) en (1) : $S = \dfrac{(10-6)6}{2}$

$\therefore$ $S = 12$



10.- El área de la región triangular ABC es S, si : $\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$ ($M \in \overline{AB} \wedge N \in \overline{BC}$). Calcular el área de la región MBN , para que $MN = \dfrac{AC}{3}$

Resolución.-



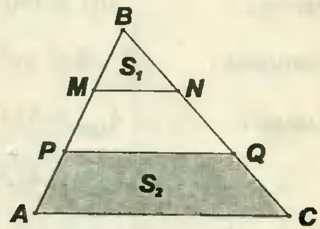
Puesto que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AC}$, entonces Δ MBN ~Δ ABC

$$\text{De donde : } \frac{S_x}{S} = \frac{(MN)^2}{(AC)^2} = \frac{a^2}{(3a)^2}$$

$$\frac{S_x}{S} = \frac{a^2}{9a^2} = \frac{1}{9}$$

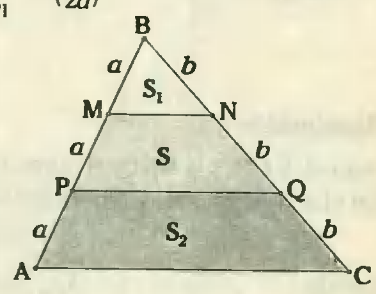
$$\therefore \quad \boxed{S_x = \frac{S}{9}}$$

11.- En la figura, si : $\overline{MN} \,//\, \overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$ y AP = PM = MB ; hallar : $\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)$.



Resolución.-

$$\text{Como } \overline{MN} \,//\, \overline{AC} \;\Rightarrow\; \Delta\, MBN \sim \Delta\, PBQ \;\Rightarrow\; \frac{S_1}{S+S_1} = \left(\frac{a}{2a}\right)^2$$



$$\frac{S_1}{S+S_1} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; S = 3S_1 \quad \ldots (1)$$

$$\text{También : } \Delta\, PBQ \sim \Delta\, ABC \;\Rightarrow\; \frac{S+S_1}{S_1+S+S_2} = \left(\frac{2a}{3a}\right)^2$$

$$\frac{S+S_1}{S_1+S+S_2} = \frac{4}{9} \quad \ldots (2)$$

$$\text{Reemplazando (1) en (2) : } \frac{3S_1+S_1}{S_1+3S_1+S_2} = \frac{4}{9} \;\Rightarrow\; 36\,S_1 = 16\,S_1 + 4\,S_2$$

$$20\,S_1 = 4\,S_2 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{5}}$$

MISCELÁNEA

1.- Dado el triángulo ABC de $10m^2$ de área, AB = 4m y AC = 6m, se traza la bisectriz interior $\overline{AP}$. Hallar el área de la región triangular ABP.

Resolución.-

Empleando la 4ta Propiedad , se tiene : $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{4}{6}$

Entonces : $BP = 4n$ y $PC = 6n$

En esta misma relación están las áreas : $S_{ABP} = 4S$ y $S_{APC} = 6S$

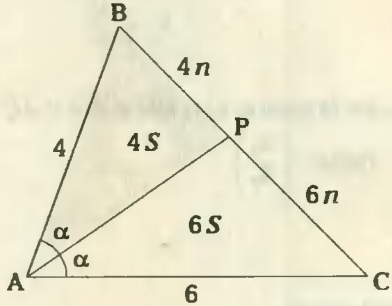
Por dato : $4S + 6S = 10m^2$

Ahora : $10S = 10m^2$

Entonces : $S = 1m^2$

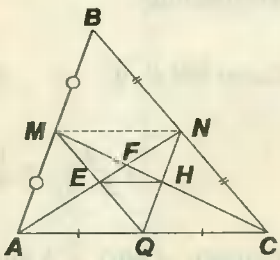
Luego : $S_{ABP} = 4\,(1m^2)$

$\therefore$ $S_{ABP} = 4m^2$



2.- Hallar el área de la región triangular EHF.

Si $S_{ABC} = 48\ m^2$



Resolución.-

Para el Δ ABC y Δ MNQ, el punto "F" es el baricentro.
En el Δ ANQ, por relación de áreas tenemos :

$S_{ANQ} = x + 2x + 3x + 6x$

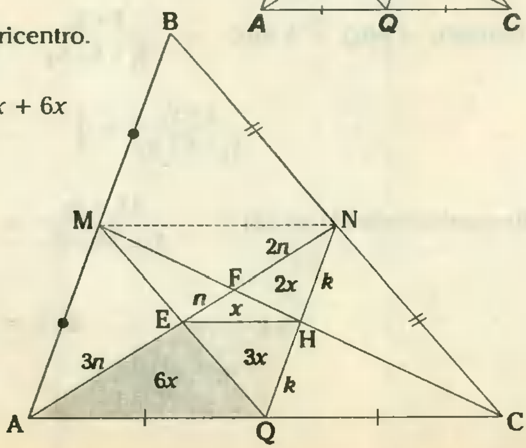
Donde : $S_{ANQ} = 12x$

Puesto que : $S_{ANQ} = \dfrac{1}{4}\,S_{ABC}$

Reemplazando : $12x = \dfrac{1}{4}(48)$

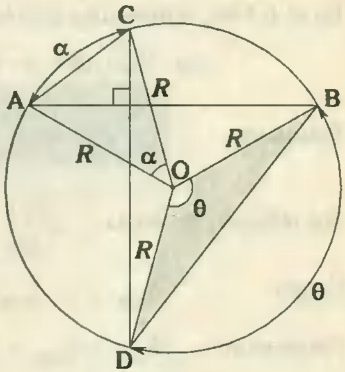
Luego : $12x = 12$ $\Rightarrow$ $x = 1$

$\therefore$ $S_{EFH} = 1\ m^2$



3.- En una circunferencia se trazan las cuerdas perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si O es el centro y el área de la región triangular AOC es $10m^2$. Hallar el área de la región triangular BOD.

Resolución.-



Por ∡ interior : $\dfrac{\alpha+\theta}{2} = 90$

$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = 180°$

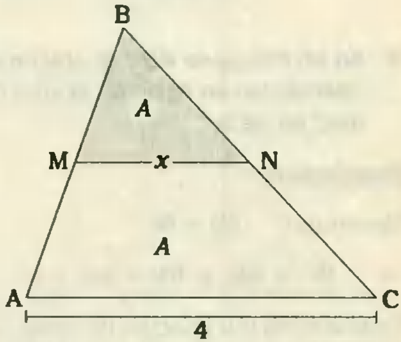
Por relación de Áreas : $\dfrac{\text{Area}(\Delta AOC)}{\text{Area}(\Delta BOD)} = \dfrac{R.R}{R.R}$

$\Rightarrow \quad Área\ (\Delta\ BOD) = Área\ (\Delta\ AOC)$

$= \mathbf{10\ m^2}$

4.- La base de un triángulo mide 4, hallar la longitud de la paralela a esta base que determina 2 regiones parciales equivalentes.

Resolución.-



Por condición del problema :

$Área\ (\Delta\ MBN) = Área\ (\square\ AMNC) = A$

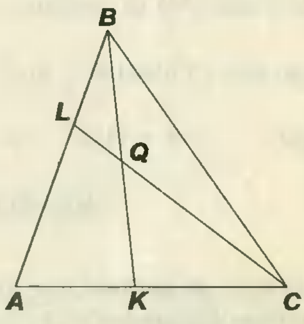
Como : $\Delta\ MBC \sim \Delta\ ABC$

$\Rightarrow \quad \dfrac{A}{2A} = \dfrac{x^2}{(4)^2}$ (Relación de *Áreas*)

$\therefore \quad \mathbf{x = 2\sqrt{2}}$

5.- Si el área de la región triangular QBL es $1m^2$, calcular el área de la región triangular ABC.

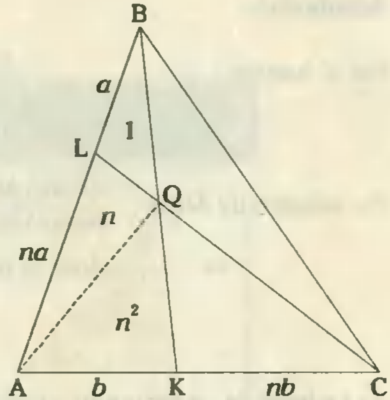
Se sabe que : AL = n · LB y KC = n · AK



Resolución.-

Trazamos $\overline{AQ}$, luego aplicamos el Teorema de Menelao.

En el Δ ABC, obtenemos la relación :



$$na \cdot BQ \cdot nb = a \cdot QK \cdot b \cdot (n+1)$$

Entonces : $\dfrac{BQ}{QK} = \dfrac{n+1}{n^2}$

Por relación de áreas : $\dfrac{n+1}{S_{AQK}} = \dfrac{n+1}{n^2} \Rightarrow S_{AQK} = n^2$

Luego : $S_{KBC} = n \,.\, S_{ABK} = n\,(n^2 + n + 1)$

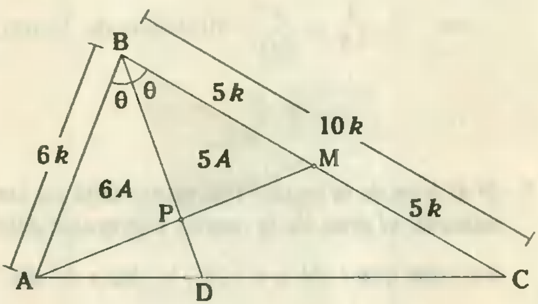
Finalmente : $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{KBC}$

Donde : $S_{ABC} = n^2 + n + 1 + n\,(n^2 + n + 1)$

$\therefore \quad \boldsymbol{S_{ABC} = (n+1)\,(n^2 + n + 1)}$

6.- En un triángulo ABC se trazan la mediana $\overline{AM}$ y la bisectriz interior $\overline{BD}$ las cuales se intersectan en P; hallar el área de la región PBM, si 10 AB = 6 BC y el área de la región ABC es 22 m^2.

Resolución.-



Hacemos : $AB = 6k$

$\Rightarrow \quad BC = 10k$ y $BM = MC = 5k$

En el Δ ABM, por relación de áreas, si área (Δ PBM) = 5 A $\Rightarrow$ Área (Δ ABP) = 6A

En el Δ ABC, $\overline{AM}$ es mediana

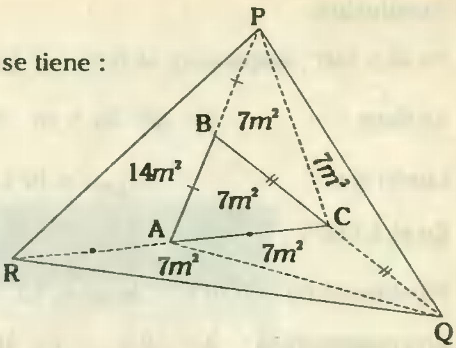
Luego área (Δ ABM) = $\dfrac{1}{2}$ Área (Δ ABC)

Ahora : $11A = 11\ m^2 \quad \Rightarrow \quad A = 1\ m^2$

$\therefore$ **Área (Δ PBM) = 5 m^2**

7.- El área de un triángulo ABC es 7m^2, sobre las prolongaciones de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se ubican los puntos P, Q y R respectivamente de modo que : AB = BP, BC = CQ y AC = AR. Hallar el área de la región triangular PQR.

Resolución.-



Empleando la propiedad de la mediana para áreas se tiene :

Área (Δ BPC) = 7 m^2

Área (Δ PCQ) = 7 m^2

Área (Δ ACQ) = 7 m^2

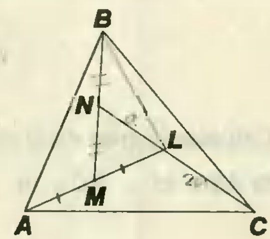
Área (Δ RAQ) = 7 m^2

Área (Δ RPA) = 14 m^2

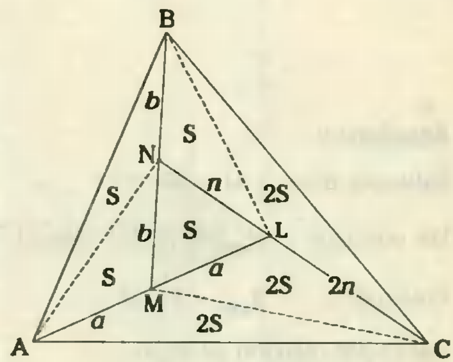
Área (Δ PQR) = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 14

$\therefore$ **Área (Δ PQR) = 49 m^2**

8.- Si el área de la región triangular ABC es 60 m². Hallar el área de la región triangular MNL siendo AM = ML, MN = NB y LC = 2NL



Resolución.-



Trazamos $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ de manera que el Δ ABC queda dividido en 7 triángulos de áreas como indica la figura, en virtud a la 1° relación (19.1) y a la 1° propiedad (19.4)

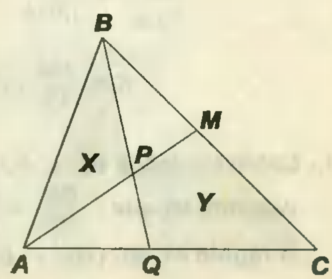
Sumando las áreas de cada triángulo igualamos al área total, es decir :

$$S + S + S + S + 2S + 2S + 2S = 60\,m^2$$

Agrupando : $10\,S = 60\,m^2$

$\therefore$ $\boldsymbol{S = 6\,m^2}$

9.- Si 2.BM = 3.MC y 3.AQ = 2.QC . Hallar la relación de áreas X/Y.



Resolución.-

En el Δ AMC, empleando el Teorema de Menelao ($\overline{QB}$ ⇒ Secante)

Se tiene : $3n \cdot AP \cdot 3a = 2n \cdot PM \cdot 5a \rightarrow \dfrac{AP}{PM} = \dfrac{10}{9}$

Luego si : $S_{ABP} = 10\,S \Rightarrow S_{PBM} = 9S$

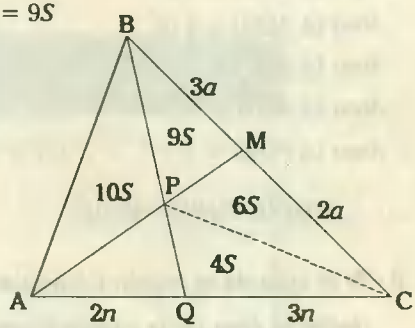
En el Δ PBC : $S_{PMC} = 6\,S$

Finalmente en el Δ APC : $S_{PQC} = 4\,S$

En consecuencia : $X = 10\,S$, $Y = 10\,S$

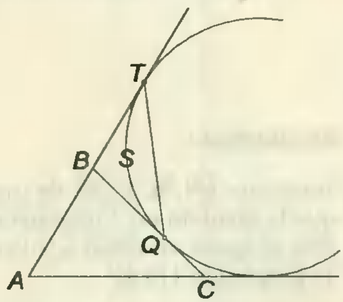
Entonces : $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{10S}{10S}$

$\therefore \quad \dfrac{X}{Y} = \dfrac{10S}{10S} = 1$



10.- Calcular el área de la región triangular BTQ.

Si AB = 13 ; BC = 14 y AC = 15m.



Resolución.-

Sabemos que : $AT = AN = 21 \Rightarrow BT = BQ = 8$

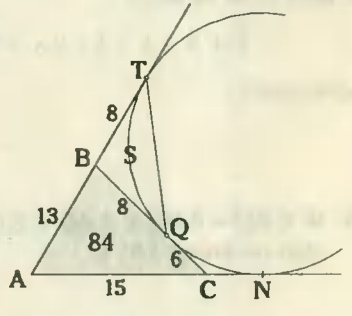
Por otro lado : $S_{ABC} = \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$

Entonces : $S_{ABC} = 84\,m^2$

Luego por relación de áreas :

$$\frac{S}{S_{ABC}} = \frac{8 \cdot 8}{13 \cdot 14} \rightarrow S = 84 \cdot \frac{64}{13 \cdot 14}$$

$$\therefore \quad S = \frac{384}{13}\,m^2$$



11.- Sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos M y N respectivamente tal que : $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}$. Si el área de la región AOB es 20m². Hallar el área de la región NOMC ($\overline{AM} \cap \overline{BN}$: { 0 })

Resolución.-

Por condición del problema : $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}$

Luego : $\dfrac{Área\,(\Delta ABM)}{Área\,(\Delta AMC)} = \dfrac{Área\,(\Delta BNC)}{Área\,(\Delta ABN)}$

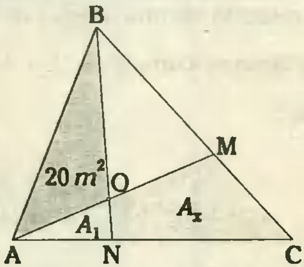
Aplicando leyes de proporción: $\dfrac{Área(\Delta\ ABM)+Área(\Delta\ BMC)}{Área(\Delta\ AMC)} = \dfrac{Área(\Delta BNC)+Área(\Delta ABN)}{Área(\Delta ABN)}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{Área\,(\Delta ABC)}{Área\,(\Delta AMC)} = \dfrac{Área\,(\Delta ABC)}{Área\,(\Delta ABN)}$

De donde : $Área\ (\Delta\ AMC) = Área\ (\Delta\ ABN)$

$$A_1 + A_x = A_1 + 20$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_x = 20\ m^2}$$



12.- En un triángulo ABC de área igual a 52m², se trazan las cevianas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, las cuales se intersectan en P. Si : BE = 3 . EC y AC = 4 . AF; hallar el área de la región triangular BPE.

Resolución.-

Dato : $S_{ABC} = 52\ m^2$.

En el Δ FBC, por el Teorema de Menelao : $a\ .\ BP\ .\ n = 3a\ .\ PF\ .\ 4n$

De donde : $BP = 12\ .\ PF$

Entonces si : $PF = k$; $BP = 12k$

Trazamos $\overline{PC}$, por relación de áreas : $S_{PEC} = \dfrac{S}{3}$ y $S_{FPC} = \dfrac{S}{9}$

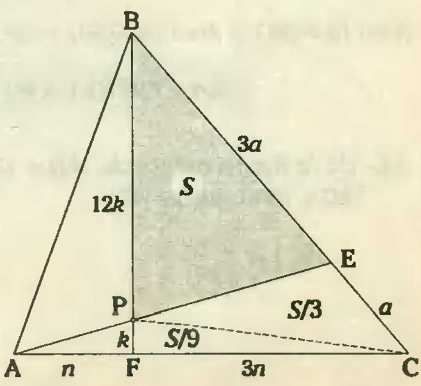
Además : $S_{FBC} = \dfrac{3}{4}\,S_{ABC} = \dfrac{3}{4}\,(52) = 39$

Luego : $S + \dfrac{S}{3} + \dfrac{S}{9} = 39\ m^2$

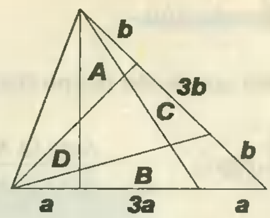
Ahora : $\dfrac{9S+3S+S}{9} = 39 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{13S}{9} = 39$

$$\frac{S}{9} = 3$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = 27\ m^2}$$



13.- En la figura mostrada. Hallar $\frac{A+B}{C+D}$. Donde A, B, C, D representan áreas de las regiones respectivas.



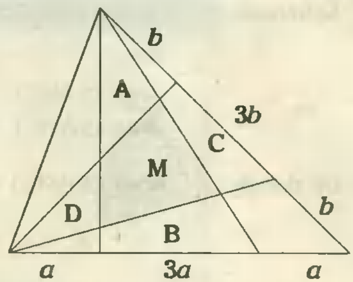
Resolución.-

Observamos que dos lados del triángulo están divididos en la relación de uno a tres y de tres a uno.

Por lo tanto se cumple : $A + M + B = D + M + C$

Donde : $A + B = C + D$

$$\therefore \quad \frac{A+B}{C+D} = 1$$



14.- En el interior a un triángulo escaleno ABC de área 30 m², se ubica el punto O, a partir del cual se trazan $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, $\overline{OK} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OH} \perp \overline{AC}$ de modo que OP = AB, OK = BC y OH = AC; hallar el área de la región triangular PKH.

Resolución.-

De la figura observamos que los triángulos POK y ABC tienen ángulos suplementarios ($\alpha + \theta = 180$)

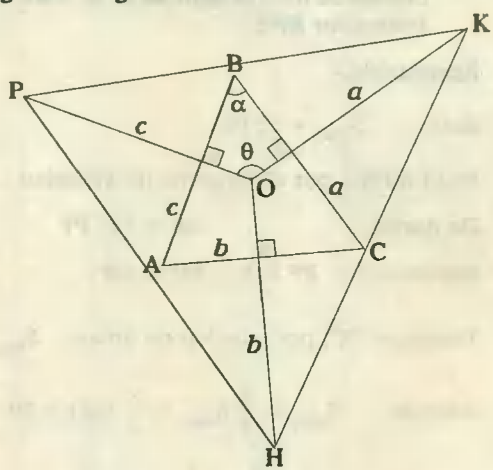
Luego : $$\frac{Area(\Delta POK)}{30} = \frac{a.c}{c.a}$$

$\Rightarrow \quad Área\ (\Delta\ POK) = 30\ m^2$

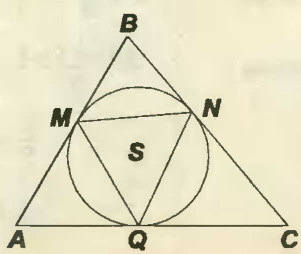
Análogamente :

$Área\ (\Delta\ POH) = Área\ (\Delta\ KOH) = 30\ m^2$

$$\therefore \quad \textbf{Área } (\Delta \textbf{ PHK}) = \textbf{90 } m^2$$



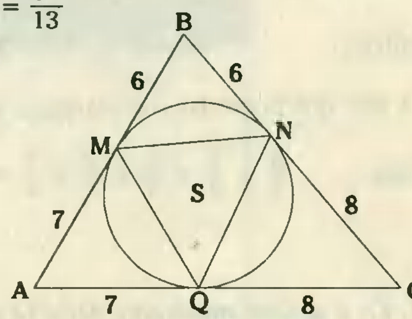
15.- En la figura mostrada, AB = 13 m ; BC = 14 m y AC = 15 m; hallar "S"



Resolución.-

Sabemos que :
$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$$
$$S_{ABC} = 84m^2$$

Luego por relación de áreas : $S_{MBN} = 84\left(\dfrac{6\cdot 6}{13\cdot 14}\right) = \dfrac{6^3}{13}$



También : $S_{AMQ} = 84\left(\dfrac{7\cdot 7}{13\cdot 15}\right) = \dfrac{12\cdot 7^3}{13\cdot 15}$

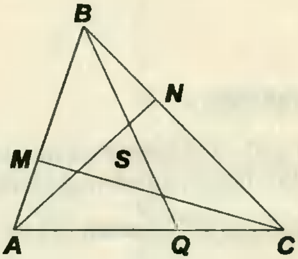
Ahora : $S_{QNC} = 84\left(\dfrac{8\cdot 8}{14\cdot 15}\right) = \dfrac{2\cdot 8^2}{5}$

Sumando : $\dfrac{6^3}{13} + \dfrac{12\cdot 7^3}{13\cdot 15} + \dfrac{2\cdot 8^2}{5} + S = 84$

$\therefore$ $\boldsymbol{S = 20{,}7\ m^2}$

16.- Si BM = 3MA ; CN = 3 BN y AQ = 3 QC .

Calcular " S " si el área de la región ABC es 13 m²



Resolución.-

En primer lugar trazamos $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ y $\overline{AH}$, luego aplicamos el teorema de Menelao para hallar la razón entre las longitudes de los segmentos $\overline{BF}$, $\overline{FH}$ y $\overline{HQ}$, así :

En el Δ ABQ ($\overline{MC}$ es una secante) :

$$a\cdot BH\cdot c = 3a\cdot HQ\cdot 4c$$

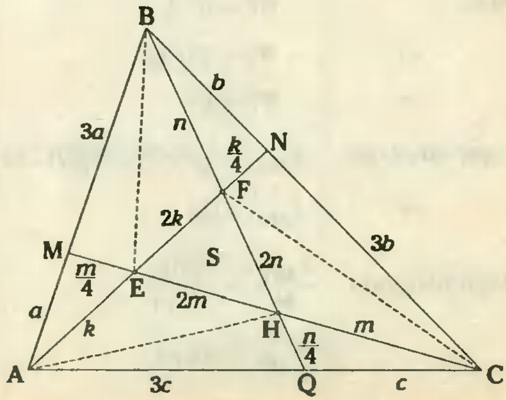
$$\Rightarrow \qquad BH = 12\cdot HQ \quad .... (1)$$

En el Δ QBC ($\overline{AN}$ es una secante) :

$$3b\cdot BF\cdot 3c = b\cdot FQ\cdot 4c$$

$$\Rightarrow \qquad 9BF = 4FQ \quad .... (2)$$

De (1) y (2) : $BF = \dfrac{FH}{2} = 4\cdot HQ$



Haciendo : $BF = \frac{FH}{2} = 4 \cdot HQ = n$

Entonces : $BF = n$; $FH = 2n$ y $HQ = \frac{n}{4}$

Análogamente : $HC = m$; $EH = 2m$ y $ME = \frac{m}{4}$

También : $AE = k$; $EF = 2k$ y $FN = \frac{k}{4}$

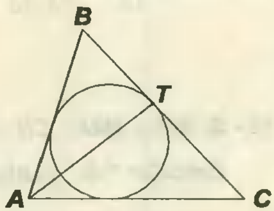
El Δ ABC queda dividido en triángulos de áreas como indica la figura.

Luego : $\frac{S}{4} + \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{2} + S = 13\,m^2$

$\therefore \quad \boxed{S = 4\,m^2}$

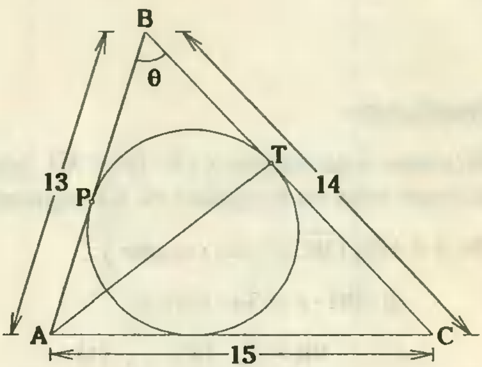
17.- En el gráfico mostrado, AB = 13 BC = 14 y AC = 15.

Hallar el área de la región triangular ABT.



__Resolución__.-

Del gráfico observamos que los triángulos ABT y ABC tienen en común el ángulo ABT



Luego por 2[da] relación (19.2)

Se tiene : $\frac{S_{ABT}}{S_{ABC}} = \frac{AB \cdot BT}{13 \cdot 14}$

Pero : $BT = p - b$

$\Rightarrow \quad BT = 21 - 15$

$\Rightarrow \quad BT = 6$

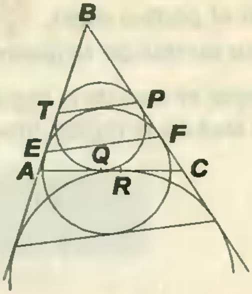
Y por otro lado : $S_{ABC} = \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$

$\Rightarrow \quad S_{ABC} = 84$

Reemplazando : $\frac{S_{ABT}}{84} = \frac{13 \cdot 6}{13 \cdot 14}$

$\therefore \quad \boxed{S_{ABT} = 36\,u^2}$

18.- Hallar el área de la región sombreada.
Si AB = 13 , BC = 14 y AC = 15 m.



Resolución.-

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)}$$

Donde : $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$

Luego : $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$

Además : $S_{ABC} = r_b\,(p - 15)$

$\Rightarrow \quad 84 = r_b\,(21 - 15) \quad \Rightarrow \quad r_b = 14$

En el ⊾ BNO : $BO = \sqrt{21^2 + 14^2} = 7\sqrt{13}$

Además : $21 \,.\, 14 = 7\sqrt{13}\; 8 \cdot n$

$\Rightarrow \quad n = \dfrac{42}{13}\sqrt{13}$

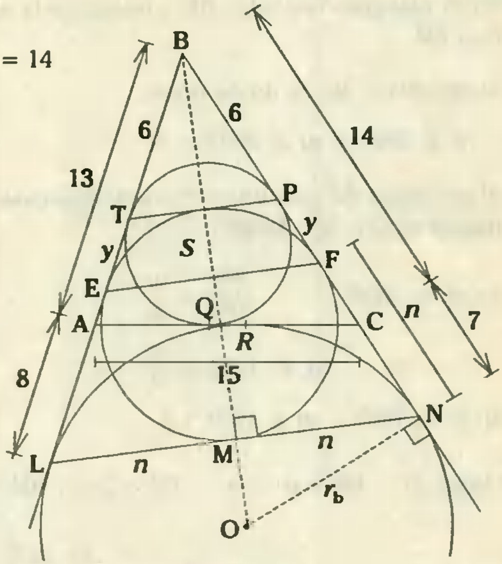
Como : $6 + y + n = 21$

$\Rightarrow \quad y = 15 - n$

Es decir : $y = 15 - \dfrac{42}{13}\sqrt{13}$ ... (1)

Por 3 relación : $\dfrac{S_{TBP}}{S_{EBF}} = \left(\dfrac{6}{6+y}\right)^2$ ... (2)

Pero : $S_{TBP} = \dfrac{216}{13}$ ... (3)

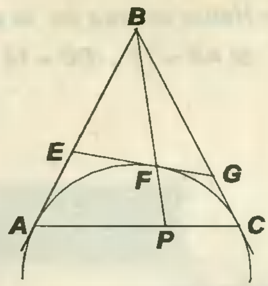


Reemplazando : (1) y (3) en (2) : $\dfrac{216}{13} = \left(\dfrac{216}{13} + S\right) \cdot \left(\dfrac{6}{6+15-\dfrac{42\sqrt{13}}{13}}\right)^2$

$\therefore \quad \boxed{S = 24{,}9\ m^2}$

19.- En el gráfico dado, $\frac{AE}{3} = \frac{EB}{5} = \frac{GC}{2}$; A , F y C son puntos de tangencia.

Hallar el área de la región triangular PBC, siendo el área de la región triangular ABC igual a 28m².



Resolución.-

Hacemos : GC = $2n$ $\Rightarrow$ AE = $3n$ y BE = $5n$

Luego como BA = BC $\Rightarrow$ BG = $6n$

Por otro lado : EF = $3n$ y FG = $2n$

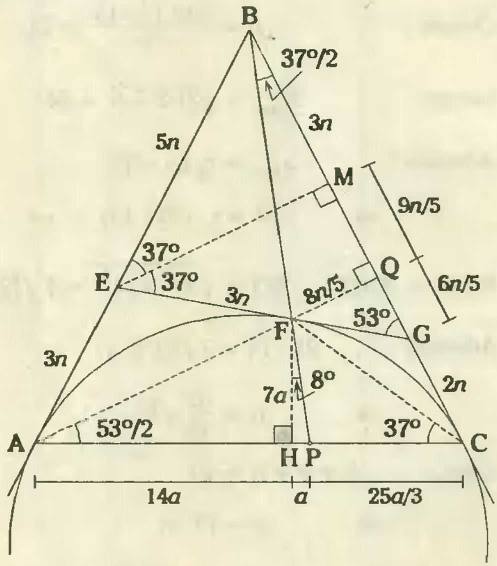
De donde : EG = EB = $5n$

En el triángulo isósceles BEG, trazamos la altura $\overline{EM}$.

Luego BM = MG = $3n$ de donde :

$m\measuredangle$ MEG = $m\measuredangle$ BEM = 37

Al prolongar $\overline{AF}$ esta intersecta perpendicularmente en Q a $\overline{BG}$, luego :



En el ⊿ FQB : $\frac{FQ}{BQ} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle$ FBQ = $\frac{37}{2}$

En el ⊿ FHP : $m\measuredangle$ HFP = 8

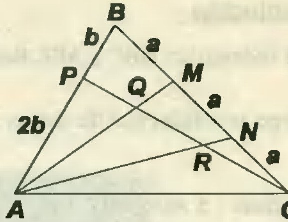
Luego, si : HP = a $\Rightarrow$ FH = 7 a ; AH = 14 a y PC = $\frac{25a}{3}$

Por relación de áreas : $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{8n \cdot 25\frac{a}{3}}{8n \cdot 70\frac{a}{3}}$ $\Rightarrow$ $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{14}$

Puesto que : $S_{ABC} = 28\ m^2$ $\Rightarrow$ $S_{ABC} = \frac{5 \cdot 28}{14}$

$\therefore$ $\boldsymbol{S_{PBC} = 10\ m^2}$

20.- Hallar el área de la región sombreada. Si el área de la región triangular ABC es $42m^2$.



Resolución.-

Por el Teorema de Menelao en el Δ ABM; ($\overline{PC} \rightarrow$ secante) :

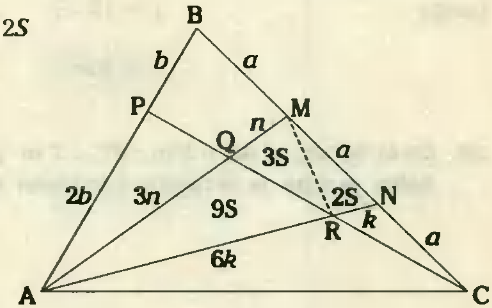
$$b \cdot AQ \cdot 2a = 2b \cdot QM \cdot 3a \quad \Rightarrow \quad AQ = 3 \cdot QM$$

Aplicando el mismo teorema, en el Δ ABN : ($\overline{PC} \rightarrow$ secante) :

$$b \cdot AR \cdot a = 2b \cdot RN \cdot 3a \quad \Rightarrow \quad AR = 6 \cdot RN$$

Luego por relación de áreas :

$$S_{AQR} = 9S \quad ; \quad S_{QMR} = 3S \text{ y } \quad S_{RMN} = 2S$$



Sumando : $9S + 3S + 2S = S_{AMN}$

Luego : $14S = S_{AMN}$

Ahora : $S = \dfrac{S_{AMN}}{14}$

Puesto que : $S_{AMN} = \dfrac{42}{3} = 14m^2$

Luego : $S = \dfrac{14}{14}m^2 \quad \Rightarrow \quad S = 1\ m^2$

En consecuencia ; $S_{QMNR} = 5\ (1\ m^2)$

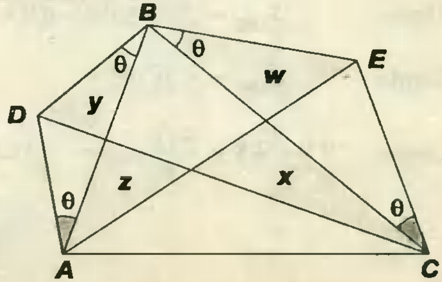
$$\therefore \quad \mathbf{S_{QMNR} = 5\ m^2}$$

21.- En el gráfico mostrado tenemos :

AB ≠ BC ≠ AC

Si : $y = 5m^2$; $z = 6m^2$; $w = 7m^2$

Hallar : «x»



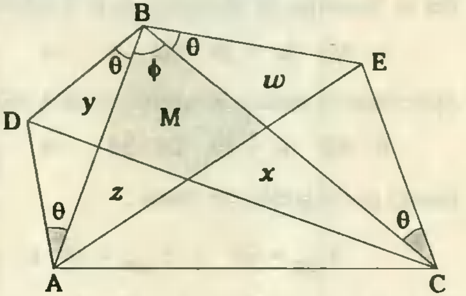
Resolución.-

Los triángulos DBC y ABE tienen los ángulos congruentes DBC y ABE

Luego por relación de áreas : $\dfrac{y+M+x}{z+M+\omega} = \dfrac{BD \cdot BC}{AB \cdot BE}$ ... (1)

Además : Δ ADB ~ Δ BEC : $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{BD \cdot BC}{AB \cdot BE} = 1$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{y+M+x}{z+M+\omega} = 1$



$\Rightarrow \quad y + M + x = z + M + \omega$

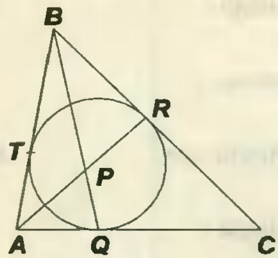
Donde : $y + x = z + \omega$

Reemplazando datos : $5 + x = 6 + 7$

Luego : $x = 13 - 5$

$\therefore \quad x = 8\ m^2$

22.- En la figura, si AB = 5 m ; BC = 7 m y AC = 6 m ; hallar el área de la región triangular APQ.



Resolución.-

Por el Teorema de Menelao en el Δ QBC : $4 \cdot BP \cdot 2 = 3 \cdot PQ \cdot 6 \Rightarrow \dfrac{BP}{PQ} = \dfrac{9}{4}$

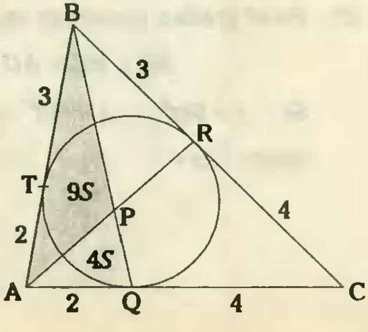
De donde : $S_{ABP} = 9S$ y $S_{APQ} = 4S$

Ahora : $S_{ABC} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

Donde : $S_{ABC} = 6\sqrt{6}\,m^2$

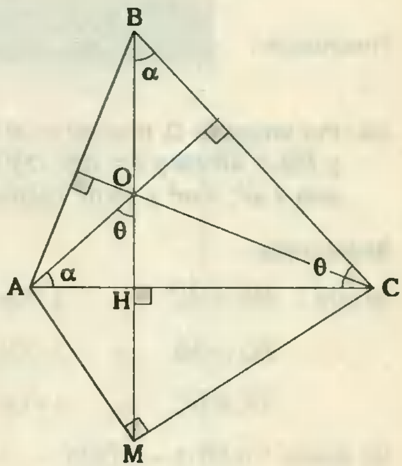
Luego : $9S + 4S = \dfrac{6\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 13S = 2\sqrt{6}$

$\therefore \quad S = \dfrac{2\sqrt{6}}{13}$



23.- En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$. En la prolongación de $\overline{BH}$ se ubica el punto M de modo que m ∡ AMC = 90º ; hallar el área de la región AMC si las áreas de las regiones ABC y AOC son 9 y 4 respectivamente (O es ortocentro del triángulo ABC)

Resolución.-



Los triángulos AHO y BHC son semejantes.

Luego : $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{OH}{HC}$ ... (1)

En el ⊿ AMC : $(MH)^2 = AH \cdot HC$ ... (2)

De (1) y (2) : $(MH)^2 = BH \cdot OH$

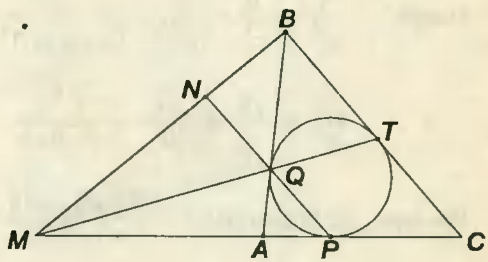
Multiplicando miembro a miembro por $(AC)^2$:

$$(AC \cdot MH)^2 = (OH \cdot AC)\,(BH \cdot AC)$$

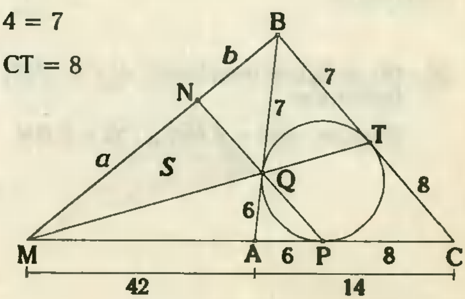
⇒ $[\textit{Área}\,(\Delta\,AMC)]^2 = \textit{Área}\,(AOC) \cdot \textit{Área}\,(\Delta\,ABC)$

∴ **Área (Δ AMC) = 6**

24.- En la figura dada, si AB = 13m ; BC = 15 m y AC = 14 m. Hallar el área de la región triangular MNQ.



Resolución.-



Con respecto al Δ ABC : BQ = BT = p - AC = 21 - 14 = 7

De donde : AQ = AP = 6 y PC = CT = 8

Aplicamos el Teorema de Menelao :

En el Δ ABC : $8 \cdot 7 \cdot MA = 7 \cdot 6 \cdot (MA + 14)$

Luego : $8 \cdot MA = 6 \cdot MA + 84 \rightarrow MA = 42$

En el Δ MBA : $a \cdot 7 \cdot 6 = b \cdot 6 \cdot 48$

Donde : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{48}{7}$

Luego si : $S_{MNQ} = 48X \Rightarrow S_{NBQ} = 7X$ y $S_{MQA} = \dfrac{330X}{9}$

Puesto que : $S_{ABC} = 84\,m^2 \Rightarrow S_{MBA} = 3\,(84\,m^2) \Rightarrow S_{MBA} = 252\,m^2$

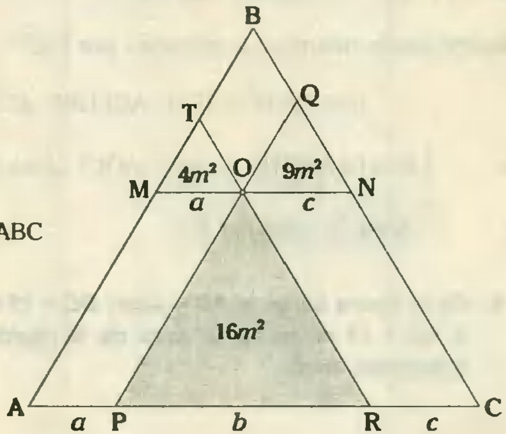
Sumando : $48\,X + 7\,X + \dfrac{330\,X}{7} = 252\,m^2$

Simplificando : $x = \dfrac{1764}{715}$

Finalmente : $S = 48x \Rightarrow S = \dfrac{48 \cdot 1764}{715} \quad \therefore \quad \mathbf{S = 118{,}4\,m^2}$

25.- Por un punto O, tomado en el interior de un triángulo ABC se trazan $\overline{MN} // \overline{AC}$, $\overline{TR} // \overline{BC}$ y $\overline{PQ} // \overline{AB}$ (M y T∈ $\overline{AB}$; Q y N∈ $\overline{BC}$). Si las áreas de las regiones MTO, OQN y POR son 4 m², 9 m² y 16 m² respectivamente; hallar el área de la región ABC.

<u>**Resolución**</u>.-



Ya que : $\overline{MN} // \overline{AC} \Rightarrow \Delta\,POR \sim \Delta\,ABC$

$\overline{PQ} // \overline{AB} \Rightarrow \Delta\,OQN \sim \Delta\,ABC$

$\overline{TR} // \overline{BC} \Rightarrow \Delta\,POR \sim \Delta\,ABC$

De donde : $\Delta\,MTO \sim \Delta\,OQN \sim \Delta\,POR \sim \Delta\,ABC$

Luego : $\dfrac{4}{a^2} = \dfrac{9}{c^2} = \dfrac{16}{b^2} = \dfrac{A_x}{(a+b+c)^2}$

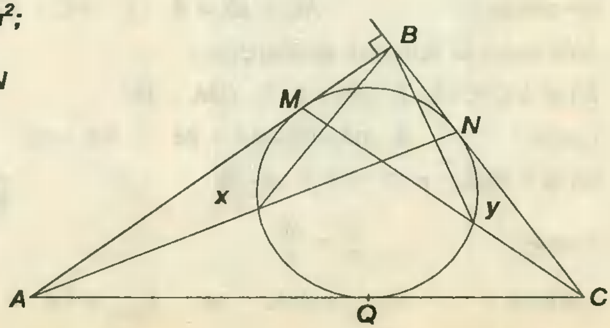
$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{9}}{c} = \dfrac{\sqrt{16}}{b} = \dfrac{\sqrt{A_x}}{a+b+c}$

Por leyes de Proporción : $\dfrac{\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}}{a+c+b} = \dfrac{\sqrt{A_x}}{a+b+c}$

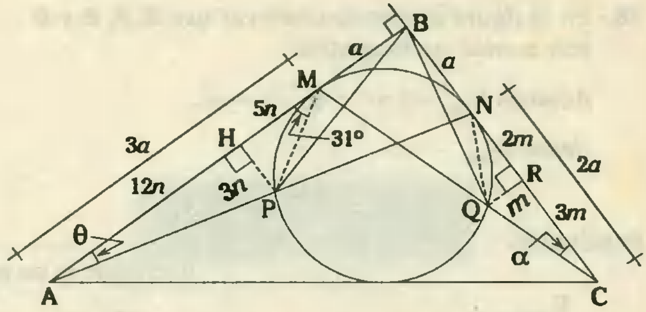
Finalmente : $\sqrt{A_x} = 2 + 3 + 4 \quad \therefore \quad \mathbf{A_x = 81\,m^2}$

26.- En la figura mostrada, si y = 17u²; hallar «x» .

Siendo : AM = 3 MB y CN = 2 BN



Resolución.-



En el ⊿ ABN : $\theta = 14$

En el ⊿ MBC : $\alpha = \dfrac{37}{2}$

Luego : $14 = \dfrac{90 - m\widehat{PM}}{2}$

$\Rightarrow \quad m\widehat{PM} = 62$ y $m\measuredangle \text{HMP} = 31$

Entonces : $\text{HP} = 3n$; $\text{HM} = 5n$ y $\text{AH} = 12\,n$.

También : $\dfrac{37}{2} = \dfrac{90 - m\widehat{NQ}}{2} \quad \Rightarrow \quad m\widehat{NQ} = 53$ y $m\measuredangle \text{QNR} = 53/2$

Entonces si : $\text{QR} = m$; $\text{NR} = 2m$ y $\text{RC} = 3\,m$

Ahora : $12\,n + 5\,n = 3a \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{3a}{17}$

También : $2\,m + 3\,m = 2a \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{2a}{5}$

Por dato : $y = 17 = 3a \cdot \dfrac{2a}{5} \cdot \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \dfrac{17 \cdot 5}{3}$ ... (1)

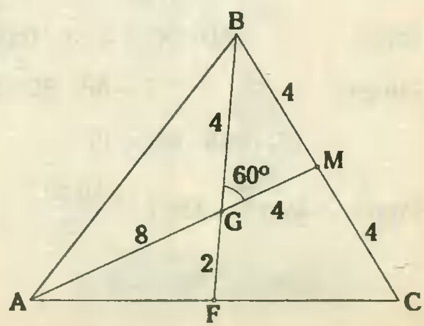
También : $x = 4a \cdot \dfrac{9a}{17} \cdot \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{18a^2}{17}$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $x = \dfrac{18}{17} \cdot \dfrac{17.5}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 30\ u^2}$

27.- Dos medianas de un triángulo miden 12m y 6m y el ángulo que forman mide 60º. Hallar el área de dicha región triangular.

Resolución.-

Sea el triángulo ABC cuyas medianas $\overline{\text{AM}}$ y $\overline{\text{BF}}$ miden 12 y 6 respectivamente ya que G es baricentro se tiene AG = 2(GM) = 8 y BG = 2(GF) = 4.



El triángulo BGM es equilátero y su área sera :

$$\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

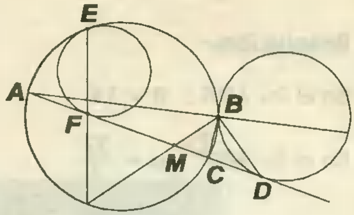
Pero : *Área* (Δ ABC) = 6 *Área* (Δ BGM) (Propiedad)

$\therefore \quad$ ***Área* (Δ ABC) = $24\sqrt{3}\ m^2$**

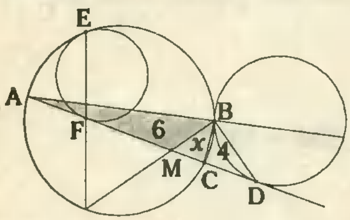
28.- En la figura podemos observar que E, F, B y D son puntos de tangencia.

Además $S_{ABM} = 6\ m^2$; $S_{BCD} = 4\ m^2$.

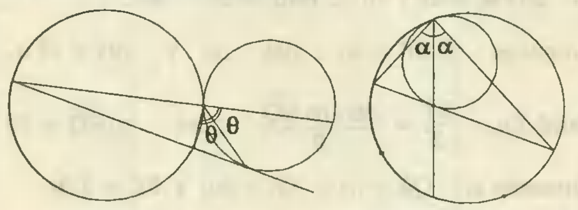
Hallar S_{MBC}



Resolución.-



Recordemos las propiedades



Según estas propiedades los puntos A, M, C y D son armónicos o forman una cuaterna armónica, entonces se cumple : $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AD}{CD}$

Luego las áreas están en la misma relación : $\dfrac{6}{x} = \dfrac{10+x}{4}$

$$\Rightarrow \quad 24 = 10x + x^2 \qquad \therefore \quad \mathbf{x = 2\ m^2}$$

29.- En una circunferencia se inscribe un triángulo rectángulo ABC; la bisectriz del ángulo recto B, intersecta en D a $\overline{AC}$ y en M a la circunferencia. Si BD = 2 y DM = 3, hallar el área de la región ABC.

Resolución.

Empleando el Teorema de la Bisectriz para el Δ ABC :

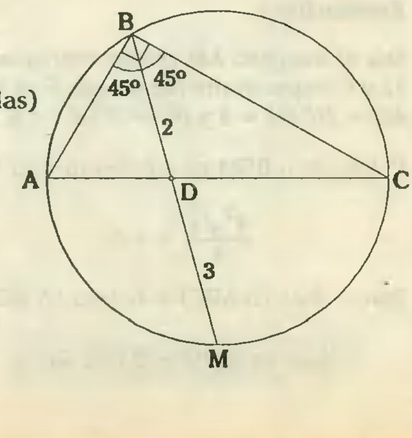
$$2^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$$

Pero : $AD \cdot DC = 2 \cdot 3$ (Teorema de las Cuerdas)

Luego : $4 = AB \cdot BC - 6$

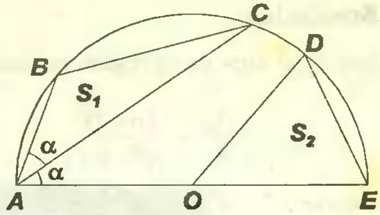
$$\Rightarrow \quad AB \cdot BC = 10$$

Pero : *Área* (⊿ ABC) $= \dfrac{AB \cdot BC}{2}$



$\therefore$ ***Área* (⊿ ABC) = 5**

30.- En la figura, si AB = DE; hallar : $\dfrac{S_1+S_2}{S_2}$



Resolución.-

De la figura : $S_1 = \dfrac{AB.h}{2}$ ... (1)

También : $S_{ABO} = \dfrac{AB.h}{2}$ ... (2)

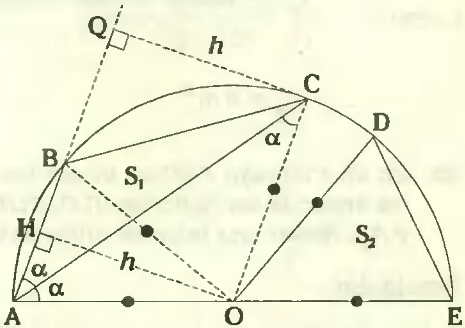
De (1) y (2) : $S_1 = S_{ABO}$

Ahora : $\Delta\, ABO \cong \Delta\, EOD \Rightarrow S_{ABO} = S_{EOD} = S_2$

Luego : $S_1 = S_2$

En consecuencia : $x = \dfrac{S_1+S_1}{S_1}$

Entonces : $x = \dfrac{2S_1}{S_1}$ $\therefore$ $x = 2$



31.- Dado un triángulo ABC, se trazan $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ paralelas a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente (M ∈ $\overline{AB}$; N ∈ $\overline{BC}$ y P ∈ $\overline{AC}$). Calcular el área de la región ABC, si las áreas de las regiones triangulares MBN y PNC son 9 y 4 respectivamente.

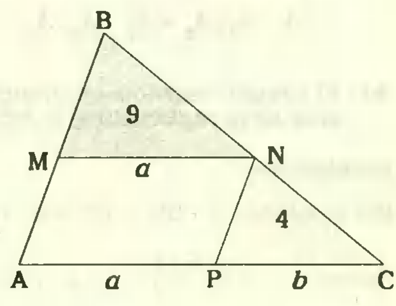
Resolución.

Sea A_x el área de la región ABC, luego por la semejanza de los triángulos ABC, MBN y PNC se tiene :

$$\frac{A_x}{(a+b)^2} = \frac{9}{a^2} = \frac{4}{b^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{A_x}}{a+b} = \frac{3}{a} = \frac{2}{b}$$

Por leyes de Proporción : $\dfrac{\sqrt{A_x}}{a+b} = \dfrac{5}{a+b} = \sqrt{A_x} = 5$

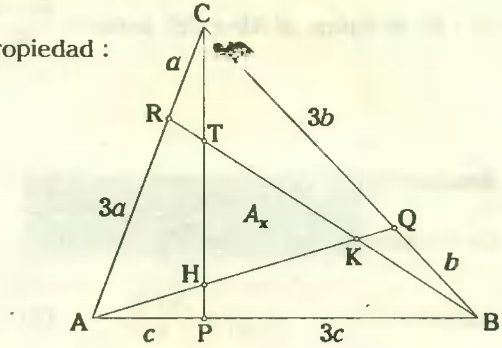
$\therefore$ $A_x = 25$



32.- Sobre los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos R, Q y P respectivamente de modo que : $\dfrac{AR}{RC} = \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{BP}{PA} = 3$.
Hallar el área de la región triangular limitada por las cevianas $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$. Si el área de la región ABC es 13 u².

Resolución.-

Sea A_x el área de la región pedida, luego por propiedad :



$$\frac{A_x}{A} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}$$

Donde : $A = 13\,m^2$ y $n = 3 + 1 = 4$

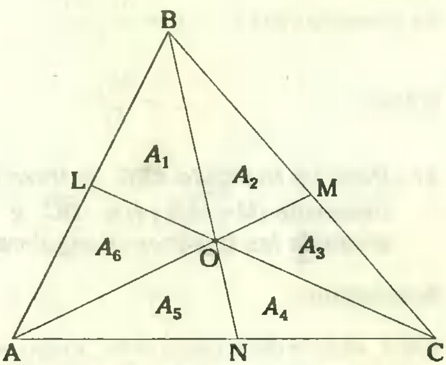
Luego : $\dfrac{A_x}{13} = \dfrac{(4-2)^2}{4^2 - 4 + 1} = \dfrac{4}{13}$

$\therefore$ $\mathbf{A_x = 4\,m^2}$

33.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes en O : $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$. Si las áreas de las regiones BLO, BOM, MOC, NOC, AON y ALO son A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6. Hallar una relación entre estas áreas.

Resolución.-

Aplicando el Teorema de Ceva en el Δ ABC :



$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{NC}{AN} = 1$$

Pero : $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{A_6}{A_1}$; $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{A_2}{A_3}$ y $\dfrac{NC}{AN} = \dfrac{A_4}{A_5}$

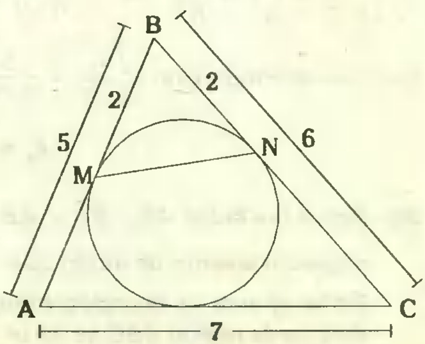
$\Rightarrow$ $\dfrac{A_6}{A_1} \cdot \dfrac{A_2}{A_3} \cdot \dfrac{A_4}{A_5} = 1$

$\therefore$ $\mathbf{A_1 \cdot A_3 \cdot A_5 = A_2 \cdot A_4 \cdot A_6}$

34.- El círculo inscrito a un triángulo ABC es tangente en M a $\overline{AB}$ y en N a $\overline{BC}$. Hallar el área de la región MBN, si AB = 5 , BC = 6 y AC = 7.

Resolución.-

Por propiedad : BM = BN = p - b



Donde : $p = \dfrac{5+6+7}{2} = 9$ y $b = 7$

Luego : BM = BN = 9 - 7 = 2

Por otro lado el área de la región ABC es :

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \qquad S_{ABC} = \sqrt{9.4.3.2} = 6\sqrt{6}$$

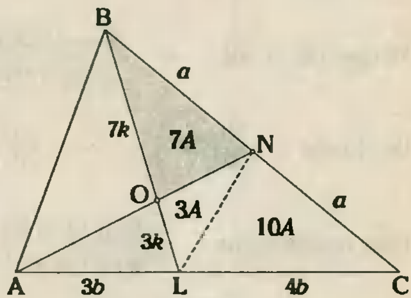
Los triángulos ABC y MBN tienen en común el ángulo B, luego :

$$\frac{S_{ABC}(\Delta MBN)}{6\sqrt{6}} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 6} \quad \text{(Relación de áreas)}$$

$$\therefore \qquad \textbf{\textit{Área}} \ (\Delta \text{ MBN}) = \frac{4}{5}\sqrt{6}$$

35.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AN}$ y $\overline{BL}$, si $\overline{AN} \cap \overline{BL}$: {O}. Hallar el área de la región BON, si BN = NC y 3LC = 4 AL; además el área de la región ABC es 140 m^2.

Resolución.-



Aplicando el Teorema de Menelao, en el Δ BLC :

$$(a)\,(BO)\cdot(3b) = a\,(OL)\,(7b) \quad \Rightarrow \quad \frac{BO}{OL} = \frac{7}{3}$$

Hacemos : *Área* (Δ BON) = 7*A*

$\Rightarrow$ *Área* (Δ ONL) = 3*A* ; *Área* (Δ LNC) = 10 *A*

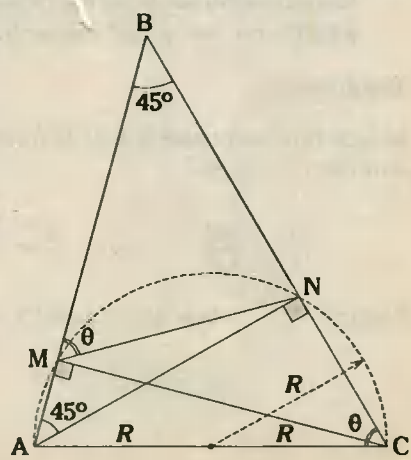
y *Área* (Δ ABL) = 15*A*

Como : *Área* (Δ ABC) = 140 $\Rightarrow$ 35 *A* = 140

$\Rightarrow$ $A = 4m^2$ $\therefore$ ***Área* (Δ BON) = 28 m^2**

36.- El ángulo B de un triángulo ABC mide 45º se trazan las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$. Si el área de la región ABC es A. Hallar el área de la región MBN.

Resolución.-



El cuadrilátero AMNC es inscriptible

Luego : $m\measuredangle ACN = m\measuredangle BMN = \theta$

Como : $\Delta MBN \sim \Delta ABC$

$$\text{Luego :} \quad \frac{\textit{Área}\,(\Delta MBN)}{A} = \frac{(MN)^2}{(AC)^2} \quad \text{... (1)}$$

En el cuadrilátero inscriptible AMNC :

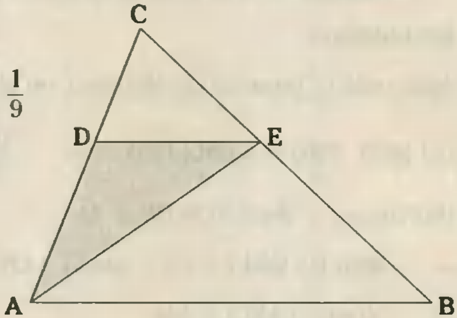
$MN = l_4 = R\sqrt{2}$ y $AC = 2R$

Sustituyendo en (1) : $\quad \text{Área}\ (\Delta\ \text{MBN}) = A\ \dfrac{(R\sqrt{2})^2}{(2R)^2}$

$\therefore \quad$ $\boldsymbol{\text{Área}\ (\Delta\ \text{MBN}) = \dfrac{A}{2}}$

37.- Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se consideran los puntos D y E respectivamente tal que $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ y la razón entre las regiones CDE y ABC es $\dfrac{1}{9}$. Hallar la razón entre las áreas de las regiones ADE y ABC.

<u>**Resolución.-**</u>



Ya que $\overline{\text{DE}}$ // $\overline{\text{AB}}$ $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{\text{Área}\ (\Delta \text{DCE})}{\text{Área}\ (\Delta \text{ABC})} = \dfrac{(\text{DC})^2}{(\text{AC})^2} = \dfrac{1}{9}$

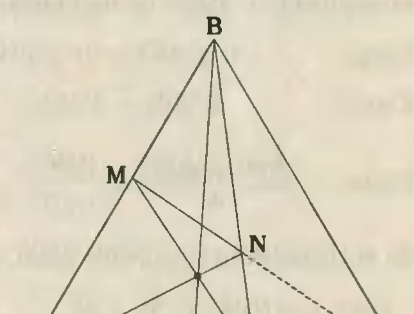
De donde : $\quad \dfrac{\text{DC}}{\text{AC}} = \dfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\text{CD}}{\text{AD}} = \dfrac{1}{2}$

Esto significa que : $\quad \dfrac{\text{Área}\ (\Delta \text{ADE})}{\text{Área}\ (\Delta \text{CDE})} = 2$

Luego : $\quad \dfrac{\dfrac{\text{Área}\ (\Delta \text{ADE})}{\text{Área}\ (\Delta \text{CDE})}}{\dfrac{\text{Área}\ (\Delta \text{ABC})}{\text{Área}\ (\Delta \text{CDE})}} = \dfrac{2}{9} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{\text{Área}\ (\Delta\ \text{ADE})}{\text{Área}\ (\Delta\ \text{ABC})} = \dfrac{2}{9}}$

38.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$. MN prolongado intersecta en F a la prolongación de $\overline{AC}$. Si las áreas de las regiones ABL y LBC son $2m^2$ y $1m^2$ respectivamente. Hallar el área de la región CBF.

<u>**Resolución.-**</u>



Se sabe que los puntos A, L, C y F forman una cuaterna armónica, es decir :

$$\frac{\text{AL}}{\text{LC}} = \frac{\text{AF}}{\text{CF}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{1} = \frac{2+1+A_x}{A_x}$$

Donde : $\quad A_x = \text{Área}\ (\Delta\ \text{BCF}) = 3$

$\therefore \quad$ $\boldsymbol{A_x = 3\ m^2}$

39.- En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) : m ∡ BAD = 60º, $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC y BD = 4. Hallar el área de la región ACD.

Resolución.-

Sea A_x el área pedida

Como : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ ⇒ m ∡ ABC = 180 - 60 = 120

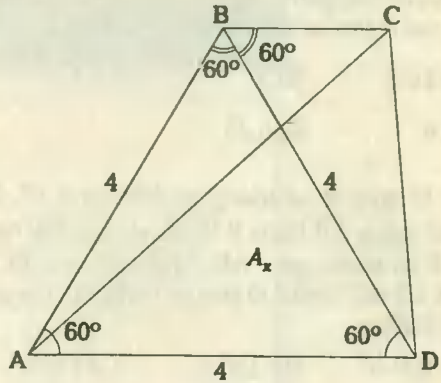
En consecuencia : m ∡ ABD = m ∡ DBC = 60

El triángulo ABD es equilátero ya que :

m ∡ ABD = m ∡ DBC = 60°

⇒ AB = BD = AD = 4

Los triángulos ABD y ACD son equivalentes pues tienen la misma base y son de igual altura Luego :



$$\text{Área } (\Delta\ ABD) = A_x \quad \Rightarrow \quad \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = A_x$$

$$\therefore \quad A_x = 4\sqrt{3}$$

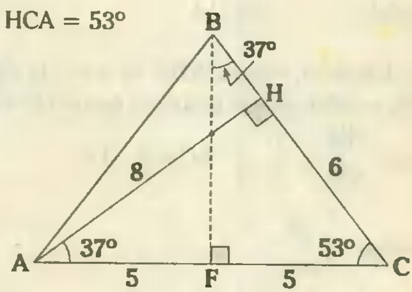
40.- La base de un triángulo isósceles mide 10 m y la altura relativa a uno de sus lados iguales mide 8 m. Hallar su área.

Resolución.-

En el Δ ABC, trazamos la altura $\overline{BF}$, luego AF = FC = 5

En el ⊿ AHC : HC = 6 y m ∡ HAC = 37° ; m ∡ HCA = 53°

En el ⊿ BFC de 37° y 53° : $BF = \frac{20}{3}$



$$\Rightarrow \quad \textit{Área } (\Delta\ ABC) = \frac{10}{2} \cdot \frac{20}{3}$$

$$\therefore \quad \textbf{\textit{Área} } (\Delta\ ABC) = \frac{100}{3}\ m^2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- La base de un triángulo mide 12. Hallar la longitud de la paralela a esta base que determina un triángulo y un trapecio tal que las áreas de sus regiones son entre si como 1 a 2.

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $4\sqrt{3}$

D) 6 E) $6\sqrt{3}$

2.- El área de un triángulo ABC es 8 m^2. Se prolongan $\overline{AB}$ hasta P $\overline{BC}$ hasta Q y $\overline{CA}$ hasta *R* de modo que : AB = BP , QC = 2 BC y AR = 3 AC. Hallar el área de la región triangular PQR.

A) 120 m^2 B) 130 m^2 C) 136 m^2

D) 140 m^2 E) 144 m^2

3.- Interiormente a un triángulo escaleno ABC de Area *A* se ubica el punto O a partir del cual se trazan $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, $\overline{OK} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OH} \perp \overline{AC}$, de modo OP = AB, OK = 2 BC y OH = 3 AC. Hallar el área de la región PKH .

A) 3*A* B) 5*A* C) 7*A*

D) 9*A* E) 11*A*

4.- En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BR}$ y sobre ella se marca el punto Q de modo que : $\dfrac{BQ}{QR} = \dfrac{3}{2}$ y RC = 3 . AR .

Hallar : $\dfrac{S_{AQR}}{S_{ABC}}$

A) 2/15 B) 1/20 C) 3/20

D) 3/16 E) 1/10

5.- Calcular el área de la región sombreada sabiendo que AM = MC ; BN = 2 . NC y el área del triángulo ABC es 100 m^2.

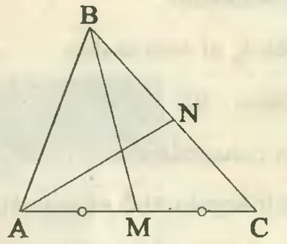
A) 8 m^2

B) 10 m^2

C) 12 m^2

D) 15 m^2

E) 20 m^2



6.- En un triángulo ABC se trazan las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ que se intersectan en "G". Hallar el área de la región triangular MGN si el área de la región ABC es 12 m^2 .

A) 2 m^2 B) 3 m^2 C) 4 m^2

D) 1 m^2 E) 6 m^2

7.- Se tiene un triángulo ABC de área 24 m^2 y cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 6 y 10*m* respectivamente. Se trazan la bisectriz $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{BM}$; hallar el área de la región triangular BDM.

A) 2 m^2 B) 3 m^2 C) 4 m^2 D) 5 m^2 E) 6 m^2

8.- El lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC mide 6*m*. Se trazan 2 paralelas a dicho lado que determinan 3 regiones equivalentes. Calcular la mayor de las paralelas.

A) 3*m* B) 1,5*m* C) $\sqrt{6}\,m$

D) $2\sqrt{6}\,m$ E) $2\sqrt{3}\,m$

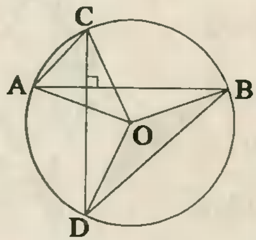
9.- Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado "L"; se prolongan los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ de longitudes tales como "L", "2L" y "3L", limitados por los puntos P, Q y R .

Halle : $\dfrac{A\Delta\,PQR}{A\Delta\,ABC}$

A) 12 B) 14 C) 13 D) 16 E) 18

10.- En la figura $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, si $S_{AOC} = 24\ m^2$. Calcular el área del triángulo BOD (O→ centro)

A) $18\ m^2$
B) $20\ m^2$
C) $22\ m^2$
D) $24\ m^2$
E) $36\ m^2$

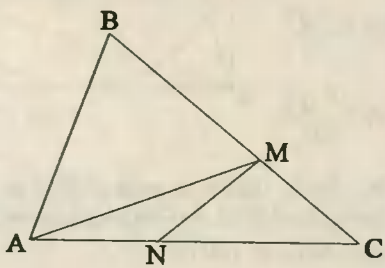


11.- Se tiene un triángulo ABC; donde AB = 13, BC = 14 y AC = 15. La prolongación de la mediana $\overline{AM}$ intersecta a la bisectriz exterior del ángulo "B" en "E". Hallar el área del triángulo BME.

A) 42 B) 45 C) 46 D) 49 E) 50

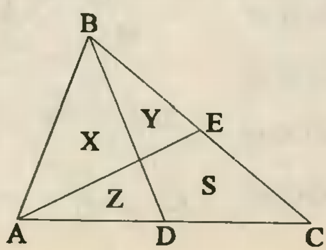
12.- En la figura $BM = \frac{3}{2} \cdot MC$, $AN = \frac{3}{5} \cdot NC$. Hallar el área de la región triangular AMN, si el área del triángulo ABC es $60\ m^2$.

A) $6\ m^2$
B) $9\ m^2$
C) $12\ m^2$
D) $15\ m^2$
E) $18\ m^2$



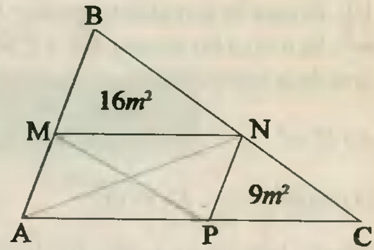
13.- En la figura, $x = 12\ m^2$, $y = 4\ m^2$ y $z = 6\ m^2$. Hallar "S"

A) $6{,}8\ m^2$
B) $6\ m^2$
C) $5\ m^2$
D) $7\ m^2$
E) $6{,}4\ m^2$



14.- En la figura; hallar el área de la región triangular ABC si AMNP es un romboide.

A) $25\ m^2$
B) $36\ m^2$
C) $49\ m^2$
D) $64\ m^2$
E) $81\ m^2$



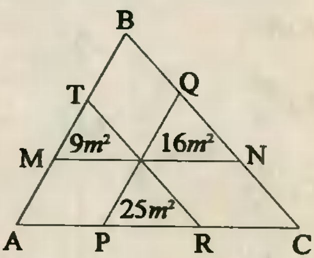
15.- Hallar el área de una región triangular, si en su triángulo dos medianas que miden a y b son perpendiculares.

A) $\frac{ab}{2}$ B) $\frac{ab}{3}$ C) $\frac{2}{3}ab$

D) $\frac{3}{2}ab$ E) $\frac{3}{4}ab$

16.- En la figura : $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{TR} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. Hallar el área de la región ABC.

A) $144\ m^2$
B) $160\ m^2$
C) $164\ m^2$
D) $170\ m^2$
E) $180\ m^2$



17.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AN}$ y $\overline{BL}$ las cuales se intersectan en O. Hallar el área de la región BON, si BN = NC y AL = 2 LC. Además el área de la región ABC es $30\ m^2$.

A) $3\ m^2$ B) $4\ m^2$ C) $5\ m^2$

D) $6\ m^2$ E) $10\ m^2$

18.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se traza la mediana $\overline{AM}$, si $m\measuredangle MAC = 53°$ y AM = 7,5 . Hallar el área de la región triangular ABC.

A) $18\,u^2$ B) $20\,u^2$ C) $24\,u^2$

D) $30\,u^2$ E) $36\,u^2$

19.- El área de la región triangular ABC es 100 m^2. Se trazan las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$. Hallar el área de la región MBN, si el ángulo B mide 60°

A) $25\,m^2$ B) $30\,m^2$ C) $50\,m^2$

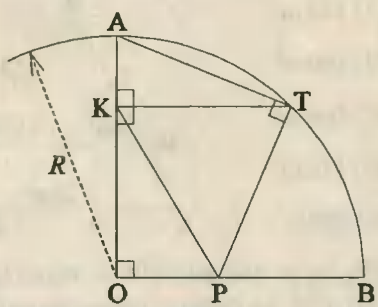
D) $40\,m^2$ E) $35\,m^2$

20.- El lado de un triángulo equilátero ABC mide "a". Hallar el área de la región correspondiente a otro triángulo equilátero cuyos lados son perpendiculares a los del primero.

A) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{5}$ B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ E) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$

21.- Hallar el área de la región TKP.
Si AO = OB = R, además : TA = TP.



A) R^2

B) $\dfrac{R^2}{3}$

C) $\dfrac{R^2}{3}$

D) $\dfrac{R^2}{4}$

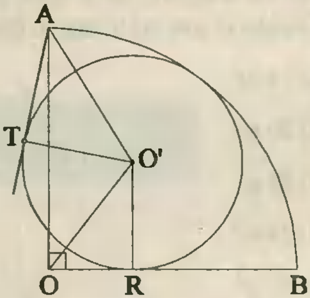
E) $\dfrac{R^2}{6}$

22.- En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita, de radio $4m$ determina sobre $\overline{AC}$ dos segmentos de 6 y $8m$ de longitud. Hallar el área de dicha región triangular.

A) $84m^2$ B) $90m^2$ C) $96m^2$

D) $100m^2$ E) $120m^2$

23.- Hallar la relación de las áreas de las regiones ATO' y O'RO , si T y R son puntos de tangencia.



A) 1

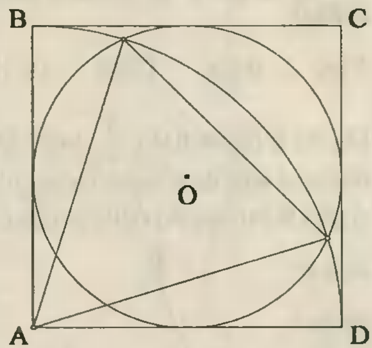
B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

D) 2

E) $2\sqrt{3}$

24.- Del gráfico, hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado de lado "l" , A y O son centros.



A) $\dfrac{5l^2\sqrt{7}}{32}$

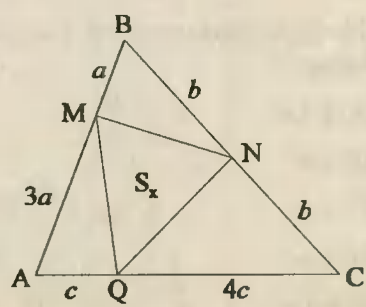
B) $\dfrac{3l^2\sqrt{7}}{22}$

C) $\dfrac{4l^2\sqrt{7}}{21}$

D) $\dfrac{6l^2\sqrt{7}}{35}$

E) $\dfrac{7l^2\sqrt{7}}{40}$

25.- En la figura se pide el área de la región triangular MNQ, sabiendo que el área del triángulo ABC es $160\,m^2$.



A) $50\,m^2$

B) $48\,m^2$

C) $52\,m^2$

D) $56\,m^2$

E) $60\,m^2$

26.- En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$, de modo que :

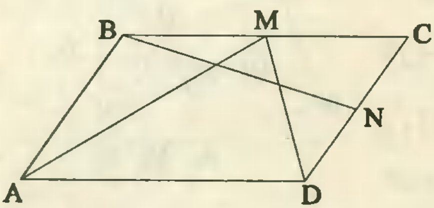
$$\frac{AB}{BC}=\frac{13}{36} \quad ; \quad \frac{CD}{AE}=\frac{12}{5}$$

Hallar : $\dfrac{A\Delta\ AEC}{A\Delta\ BDC}$

A) 15/19 B) 15/13 C) 14/15

D) 13/15 E) 15/14

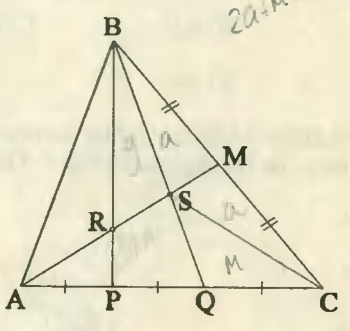
27.- En la figura se tiene el romboide ABCD de área 30 m^2, si "M" es punto medio de $\overline{BC}$ y "N" es punto medio de $\overline{CD}$. Hallar el área de la región sombreada.



A) 1 m^2 B) 1,8 m^2 C) 23 m^2

D) 2,5 m^2 E) 2,8 m^2

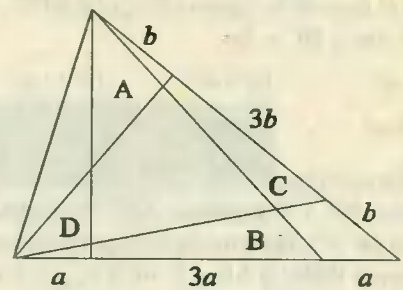
28.- Calcular el área de la región triangular ABC. Si $S_{\Delta RBS}= 9\ m^2$.



A) 36 m^2 B) 42 m^2 C) 48 m^2

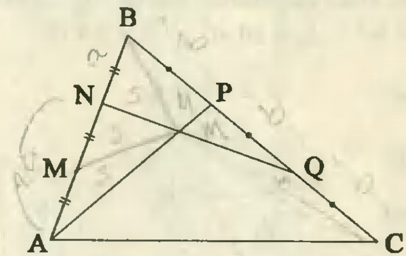
D) 60 m^2 E) 64 m^2

29.- En la figura; hallar : $\dfrac{A+B}{C+D}$



A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

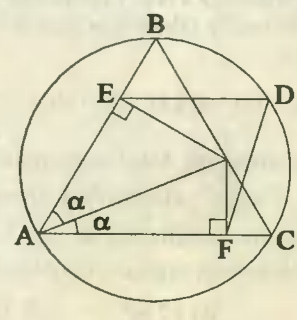
30.- Calcular el área de la región sombreada. Si $S_{ABC}= 15\ m^2$.



A) 1 m^2 B) 0,5 m^2 C) 1,5 m^2

D) 2 m^2 E) 2,5 m^2

31.- Halle : $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AEDF}}$



A) 2/1 B) 3/2 C) 1 D) 1/2 E) 2/3

32.- En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que : $m\measuredangle ABH = 2 . m\measuredangle HBC$. Calcular el área de la región triangular BHC ; si : $AH = 8m$ y $HC = 3m$.

A) $6\ m^2$ B) $9\ m^2$ C) $12\ m^2$

D) $18\ m^2$ E) $3\ m^2$

33.- En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz exterior $\overline{BE}$ y la mediana $\overline{AM}$, las cuales se cortan en "P". Determinar el área de la región triangular BPM; si $AB = 3 . BC$ y $S_{ABC} = 40m^2$.

A) $3\ m^2$ B) $4\ m^2$ C) $6\ m^2$

D) $8\ m^2$ E) $5\ m^2$

34.- En la figura los triángulos APB, BRC y AQC son equiláteros. Hallar "S_2", siendo $S_1 = 8\ m^2$; $S_3 = 10\ m^2$ y $S_4 = 14\ m^2$.

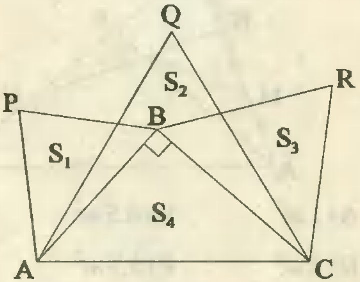
A) $4\ m^2$

B) $6\ m^2$

C) $8\ m^2$

D) $11\ m^2$

E) $12\ m^2$



35.- En una circunferencia se inscribe un triángulo rectángulo ABC recto en B, cuya bisectriz intersecta en D a $\overline{AC}$ y en M a la circunferencia; si $BD = 3$ y $DM = 4$. Hallar el área de la región ABC.

A) 12 B) 11,5 C) 11 D) 10,5 E) 10

36.- En un triángulo ABC se cumple que : $R . h_a h_b h_c = 72\ m^4$, siendo R el circunradio y h_a , h_b y h_c las longitudes de sus 3 alturas. Hallar el área de la región triangular ABC.

A) $9\ m^2$ B) $12\ m^2$ C) $18\ m^2$

D) $24\ m^2$ E) $6\ m^2$

37.- Dadas dos circunferencias congruentes de centros O y O_1 y radios "R". En la circunferencia O_1 se traza la cuerda $\overline{AB}$, que prolongada es tangente en P a la otra circunferencia. Hallar el área de la región triangular ABO , si $m\ \overset{\frown}{AB} = 60°$

A) R^2 B) $\dfrac{R^2}{2}$ C) $\dfrac{R^2}{3}$

D) $\dfrac{R^2}{4}$ E) $\dfrac{R^2}{5}$

38.- Calcular el área de la región sombreada si ABCD y DFGH son cuadrados de centros O_1 y O_2, $MN = 1$ y $NO_1 = 2$

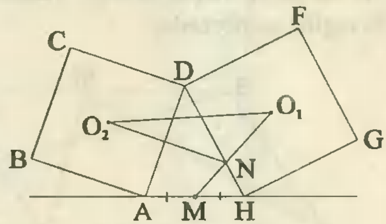
A) 3

B) 4

C) $2\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{2}$

E) $4\sqrt{2}$



39.- Tomando como centro el vértice A de un cuadrado ABCD se traza el cuadrante BAD, luego se traza una tangente $\overline{RS}$ en T a dicho cuadrante (R y S en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente) . Si $\overline{AR} \cap \overline{BD} : \{Q\}$, $BQ = 6\sqrt{2}$ y $SD = 2$. Hallar el área de la región triangular AQS.

A) 50 B) 40 C) $40\sqrt{2}$

D) 32 E) 36

40.- Del gráfico adjunto; hallar la relación entre las áreas de las regiones TBQ y ABC.

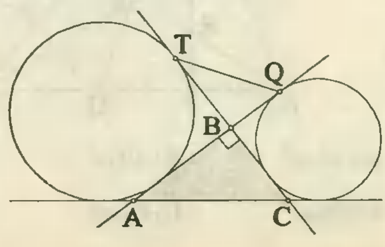
A) 1 : 1

B) 1 : 2

C) 2 : 3

D) 1 : 3

E) 3 : 5



CAP. 20

áreas de regiones cuadrangulares

20.1 ÁREA DE UN CUADRADO

El área (S) de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado (postulado de la unidad).

Sea "l "la longitud del lado del cuadrado ABCD (*Fig.*20.1).

Luego : $S_{\square} = l^2$

Como : $l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

También : $\boxed{S_{\square} = \dfrac{d^2}{2}}$ **... (20.1)**

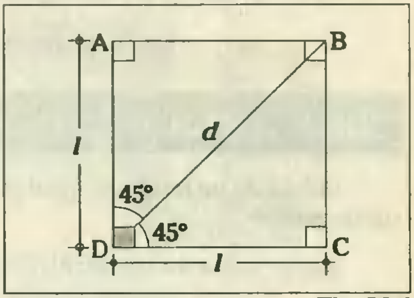


***Fig.* 20.1**

20.2 ÁREA DE UN RECTÁNGULO

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

$$\boxed{S = b \cdot h} \quad \text{... (20.2)}$$

Demostración.- Consideremos la *Fig.*20.2, donde *A* representa el área del rectángulo. Las áreas de los cuadrados son b^2, h^2 y $(b+h)^2$.

Luego :

$$(b+h)^2 = b^2 + 2S + h^2$$

Entonces : $b^2 + 2bn + h^2 = b^2 + 2a + h^2$

Cancelando : $2bh = 2S$

De donde : $\boxed{bh = S}$

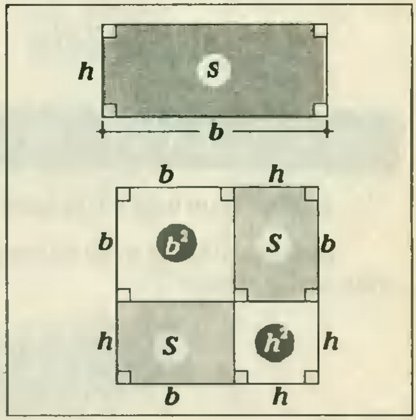


***Fig.* 20.2**

lqqd

20.3 ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

El área de todo paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

Sea ABCD un paralelogramo de base b y altura h (*Fig.*20.3)

Luego : $\boxed{S = b\,h}$ ... (20.3)

En el ◺ AFB : $h = a \operatorname{sen} \theta$

$\Rightarrow$ $\boxed{S = ab \operatorname{sen} \theta}$ ... (20.4)

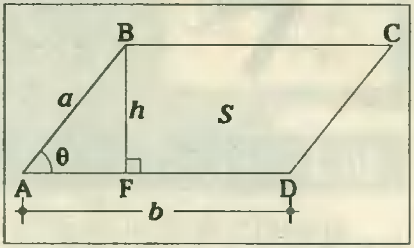


***Fig.* 20.3**

20.4 ÁREA DE UN ROMBO

El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.

Sea A el área del rombo ABCD (*Fig.*20.4). Luego:

$$\boxed{S = \frac{AC.BD}{2}} \quad ... (20.5)$$

Si l y r representan las longitudes de su lado y del inradio. Entonces :

$$\boxed{S = 2\,r\,l} \quad ... (20.6)$$

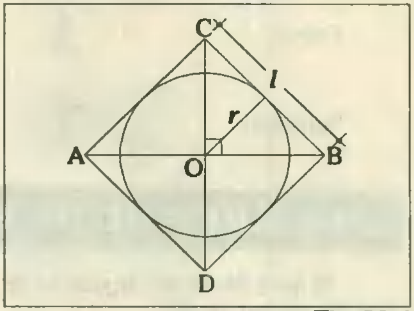


***Fig.* 20.4**

20.5 ÁREA DE UN TRAPECIO

El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases por su altura.

En la *Fig.*20.5, si a, b, y h representan las longitudes de las bases y altura del trapecio ABCD, entonces se cumple :

$$\boxed{S_{\square} = \left(\frac{a+b}{2}\right)h} \quad ... (20.7)$$

Como : $\text{MN} = \dfrac{a+b}{2}$

También : $\boxed{S_{\square} = \text{MN} \cdot h}$ ... (20.8)

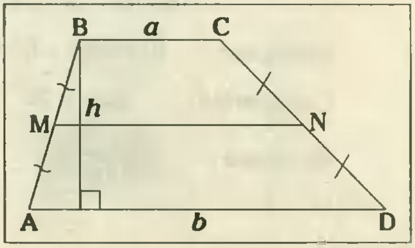


***Fig.* 20.5**

20.6 ÁREA DE UN CUADRILÁTERO CUALQUIERA

El área de un cuadrilátero cualquiera es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

Sea "θ" la medida del ángulo que forman las diagonales del cuadrilátero ABCD (*Fig.*20.6). Luego el área *A* viene dada por :

$$S_{\square} = \frac{1}{2}\ \text{AC.BD sen}\,\theta \qquad \text{... (20.9)}$$

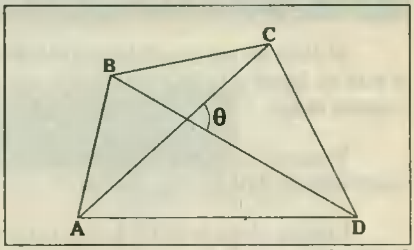


Fig. 20.6

20.7 ÁREA DE UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO.

El área de un cuadrilátero circunscrito es igual al producto de su semiperímetro multiplicado por el inradio.

Sea el cuadrilátero ABCD circunscrito a la circunferencia de radio *r* (*Fig*. 20.7). Si *A* representa su área y *p* el semiperímetro entonces :

$$\text{(20.10) ...} \qquad S = p.r \qquad \text{donde :} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

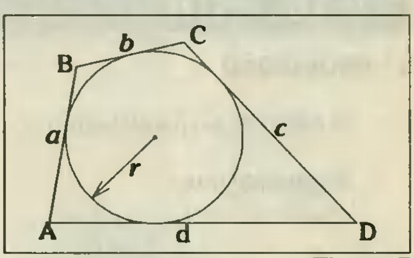


Fig. 20.7

20.8 ÁREA DE UN CUADRILÁTERO INSCRITO

El área de un cuadrilátero inscrito o inscriptible es igual a la raíz cuadrada del producto entre el semiperímetro menos cada lado.

Sea *p*, el semiperímetro del cuadrilátero inscrito ABCD (*Fig*. 20.8).

Luego; su área *A* sera :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad \text{... (20.11)}$$

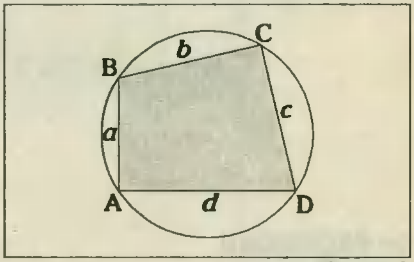


Fig. 20.8

Fórmula de Brahama - Gupta

20.9 ÁREA DE UN CUADRILÁTERO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO

El área de un cuadrilátero inscrito y circunscrito a la vez es igual a la raíz cuadrada del producto de sus cuatros lados.

Sean a, b, c, y d las longitudes de los lados del cuadrilátero ABCD (*Fig*. 20,9).

Luego, si su área es S, se cumple :

$$S = \sqrt{abcd} \qquad \text{... (20.12)}$$

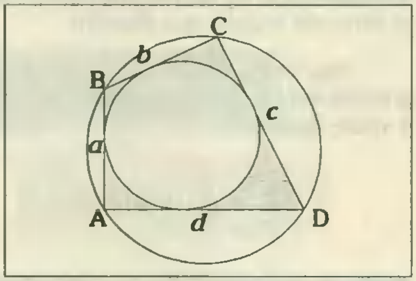


Fig. 20.9

20.10 PROPIEDADES

1ra PROPIEDAD

Si ABCD es un paralelogramo.

Se cumple que :

$$S_1 = S_2 \qquad \text{... (20.13)}$$

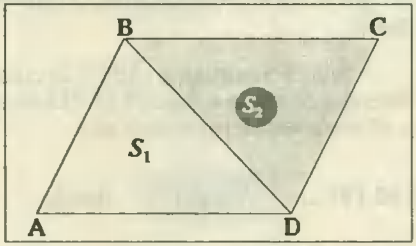


Fig. 20.10

Observación.- En un paralelogramo ABCD al trazar las diagonales, se cumple :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4} \qquad \text{...(20.14)}$$

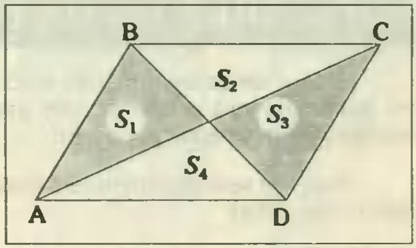


Fig. 20.11

2da PROPIEDAD

Si ABCD es un paralelogramo de área "S" y P es un punto cualquiera de $\overline{BC}$.

Se cumple :

$$S_1 = \frac{S}{2} \qquad \text{...(20.15)}$$

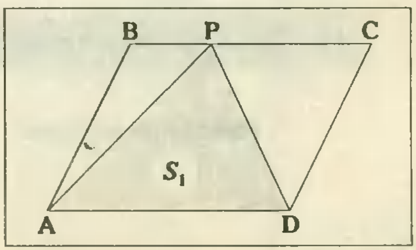


Fig. 20.12

3ra PROPIEDAD

Si ABCD es un paralelogramo de área S y P un punto interior al paralelogramo.

Se cumple :

$$S_1 + S_2 = \frac{S}{2} \qquad ...(20.16)$$

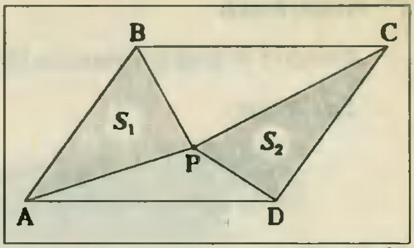


Fig. 20.13

Observación : Si P es un punto exterior al paralelogramo ABCD se tiene :

$$S_1 + S_2 = \frac{S_{(ABCD)}}{2} \qquad ...(20.17)$$

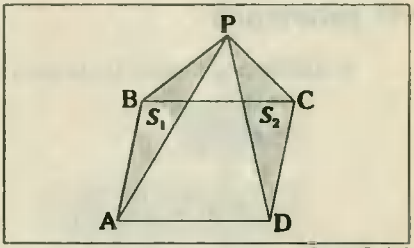


Fig. 20.14

4ta PROPIEDAD

Siendo S el área del trapecio ABCD, M y N son puntos medios.

Se cumple :

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2} \qquad ...(20.18)$$

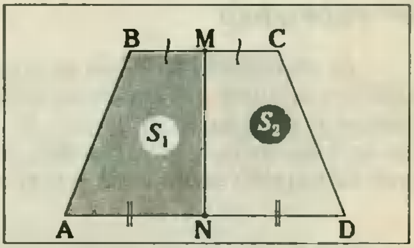


Fig. 20.15

5ta PROPIEDAD

Siendo S el área del trapecio ABCD, M es un punto medio.

Luego :

$$S_1 = \frac{S}{2} \qquad ...(20.19)$$

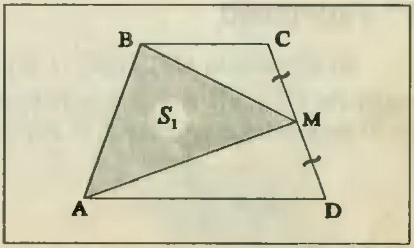


Fig. 20.16

6ta PROPIEDAD

Siendo S el área del trapecio ABCD.

Se cumple :

$$\boxed{S_1 = \frac{S}{3}} \quad \text{... (20.20)}$$

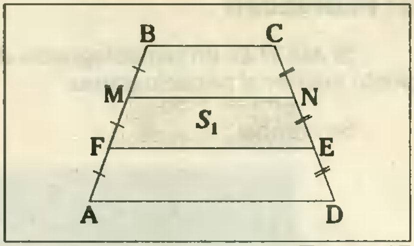


Fig. 20.17

7ma PROPIEDAD

Si ABCD es un trapecio de área S, se cumple :

$$\boxed{S_1 = S_2}$$

$$\boxed{S_1 = S_2 = \sqrt{S_3 \cdot S_4}} \quad \text{... (20.21)}$$

$$\boxed{S = \left(\sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}\right)^2} \quad \text{... (20.22)}$$

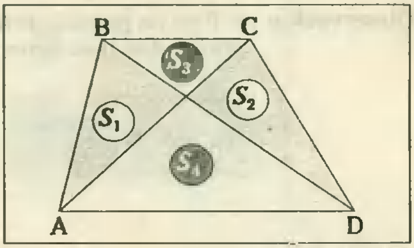


Fig. 20.18

8va PROPIEDAD

En un trapecio las bases se dividen en n partes iguales y se unen los puntos de división correspondientes de estas bases. Si S_1 , S_2 , S_3 , . . . S_n representan las áreas de los n trapecios determinados y S es el área del trapecio dado, se cumple la relación :

$$\boxed{S_1 = S_2 = \ldots\ldots = S_n = \frac{S}{n}}$$

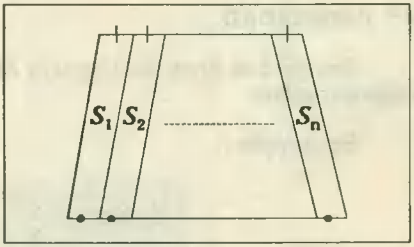


Fig. 20.19

9na PROPIEDAD

En el trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$). M es el punto medio de $\overline{CD}$ y $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$, siendo S_1, el área del Δ ABN y S el área del trapecio ABCD se cumple :

$$\boxed{S_1 = \frac{S}{2}} \quad \text{... (20.23)}$$

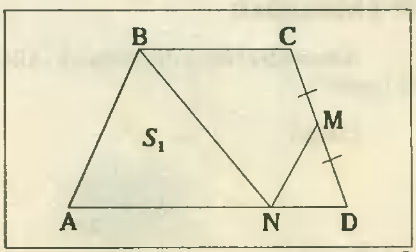
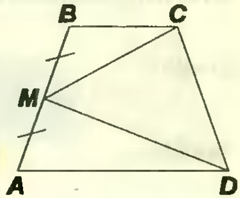


Fig. 20.20

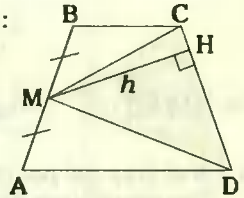
EJERCICIOS DE APLICACIÓN (1RA PARTE)

1.- En el trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) M es punto medio de $\overline{AB}$, calcular el área del triángulo MCD si el área del trapecio es $36m^2$



Resolución.-

En el trapecio trazamos la altura $\overline{MH} = h$ del triángulo MCD, entonces :



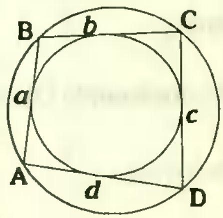
$$S_{MCD} = \frac{CD \cdot h}{2} \quad ... (1)$$

Sabemos que el área del trapecio ABCD es CD . h (Propiedad)

Entonces en (1) : $S_{MCD} = \dfrac{S_{ABCD}}{2} = \dfrac{36m^2}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{S_{MCD} = 18\ m^2}$$

2.- En la siguiente figura demostrar que el área del cuadrilátero ABCD es igual a la raíz cuadrada del producto de sus cuatro lados.



Resolución.-

Utilizando la Fórmula de Brahama-Gupta (item 20.8) : $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ... (1)

Ahora aplicando el teorema de Pithot : $a + c = b + d$

Siendo «p» el semiperímetro, tenemos : $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Reemplazando : $p = \dfrac{(a+c)+(a+c)}{2}$

$p = a + c \quad \Rightarrow \quad a = p - c \quad$ y $\quad c = p - a$

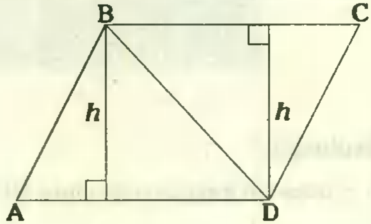
Análogamente : $p = b + d \quad \Rightarrow \quad p - d = b \quad$ y $\quad p - b = d$

Entonces en (1) : $\boxed{S = \sqrt{abcd}}$ **item 20.9**

3.- Demostrar que en todo paralelogramo una diagonal determina dos regiones equivalentes.

Demostración.-

En el paralelogramo trazamos la altura «h» común a los triángulos ABD y BCD.



Luego : $S_{ABD} = \dfrac{AD \cdot h}{2}$ ... (1)

También : $S_{BCD} = \dfrac{BC \cdot h}{2}$ ... (2)

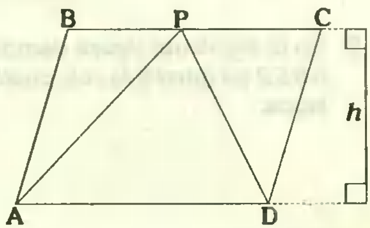
Puesto que : BC = AD

$S_{ABD} = \dfrac{BC \cdot h}{2}$ ... (3)

De (2) y (3) : $\boldsymbol{S_{BCD} = S_{ABD}}$ **item 20.10.1**

4.- Si el área del paralelogramo ABCD es 20cm² y «p» un punto cualquiera del lado $\overline{BC}$. Calcular el área del triángulo APD

Resolución.-



Sea «h» la altura del paralelogramo : $S_{APD} = \dfrac{AD.h}{2}$ ... (1)

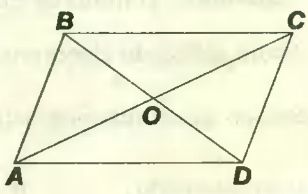
Ahora : $S_{ABCD} = AD \cdot h$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $S_{APD} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$; item 20.10.2

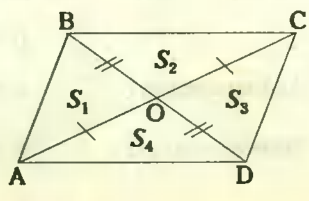
Entonces : $S_{APD} = \dfrac{20cm^2}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{S_{APD} = 10\ cm^2}$

5.- Si el área del paralelogramo ABCD es 24m², hallar el área del triángulo ABO.



Resolución.-



En el paralelogramo ABCD, para el triángulo BCD, como $\overline{CO}$ es mediana : $S_2 = S_3$

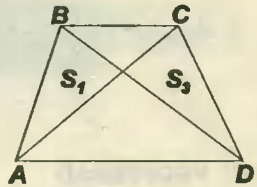
Y en el triángulo ACD : $S_3 = S_4$

Además $\overline{BD}$ es mediana del Δ ABC : $S_1 = S_2$

Luego : $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S_{ABCD}}{4}$; item 20.10.1

Reemplazando : $S_1 = \dfrac{24m^2}{4} = 6m^2$ $\therefore$ $\boxed{S_{MCD} = 6\,m^2}$

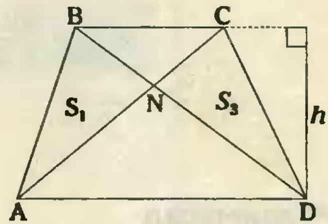
6.- Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), demostrar que $S_1 = S_3$



Demostración.-

Los triángulos ABD y ACD son equivalentes por tener la misma base $\overline{AD}$ e igual altura «*h*» :

$$S_{ABD} = S_{ACD} \qquad ... (1)$$



Puesto que : $S_{ABD} = S_{ABN} + S_{AND}$

También : $S_{ACD} = S_{CND} + S_{AND}$

Reemplazando en (1) : $S_{ABN} + S_{AND} = S_{CND} + S_{AND}$

Simplificando : $S_{ABN} = S_{CND}$

$\therefore$ $\boxed{S_1 = S_3}$

7.- Demostrar que en todo cuadrilatero circunscrito (o circunscriptible) a una circunferencia el área es igual al producto del semiperímetro (p) y el radio de dicha circunferencia)

Resolución.-

En el gráfico observamos que : $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$

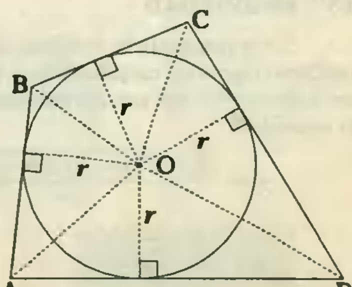
Luego : $S_{ABCD} = \dfrac{AB \cdot r}{2} + \dfrac{BC \cdot r}{2} + \dfrac{CD \cdot r}{2} + \dfrac{AD \cdot r}{2}$

Entonces : $S_{ABCD} = \dfrac{AB \cdot r + BC \cdot r + CD \cdot r + AD \cdot r}{2}$

Factorizando : $S_{ABCD} = \dfrac{(AB + BC + CD + AD)}{2} \cdot r$

Puesto que el semiperímetro «*p*» es : $p = \dfrac{AB + BC + CD + AD}{2}$

$\therefore$ $\boxed{S_{ABCD} = p \cdot r}$



10ma PROPIEDAD

Si a, b, c y d son las longitudes de los lados del cuadrilátero circunscrito ABCD y r la longitud del inradio.

Se cumple :

$$A_{(ABCD)} = (a + c) \cdot r = (b + d) \cdot r \quad \text{... (20.24)}$$

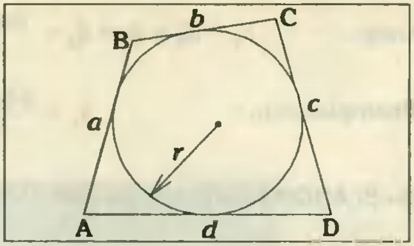


Fig. 20.21

11ra PROPIEDAD

El área A de un cuadrilátero cualquiera ABCD, cuyas diagonales son valores conocidos, es máxima cuando $\theta = 90°$, resultando :

$$A_{máx} = \frac{AC \cdot BD}{2} \quad \text{... (20.25)}$$

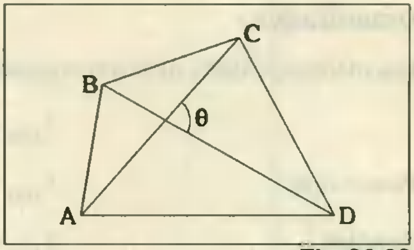


Fig. 20.22

12da PROPIEDAD

En el cuadrilátero inscrito ABCD, ya que :

$$m\angle A + m\angle C = 180$$

Se cumple que :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{ad}{b \cdot c} \quad \text{... (20.26)}$$

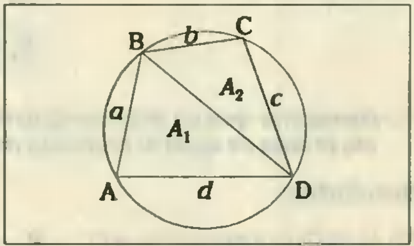


Fig. 20.23

13ra PROPIEDAD

Si r representa la longitud del inradio de un cuadrilátero inscrito y circunscrito a, b, c, d, las medidas de los lados y p la del semiperímetro, entonces es válida la relación :

$$r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{p}$$

$$r = \frac{\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}}{p} \quad \text{... (20.27)}$$

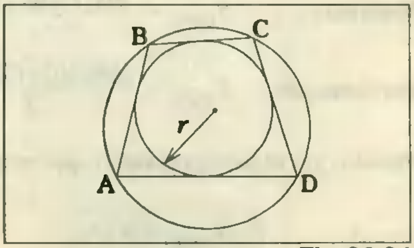


Fig. 20.24

14^ta PROPIEDAD

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y A representa el área del trapecio ABCD, se cumple :

$$A = (CD)(MH) \qquad \text{... (20.28)}$$

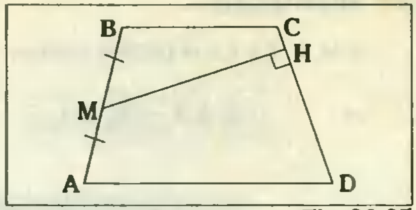


Fig. 20.25

15^ta PROPIEDAD

Si a, b, c y d representan las longitudes de los lados de un trapecio de área A se cumple :

$$A = \frac{b+d}{b-d}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad \text{... (20.29)}$$

Donde : $\quad p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

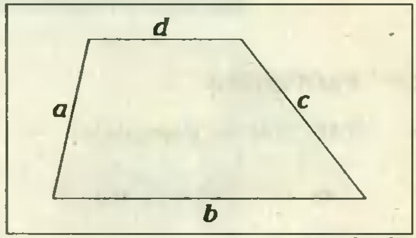


Fig. 20.26

16^ta PROPIEDAD

Si M, N, L y F son puntos medios de los lados del trapezoide ABCD de área A.

Se tiene : $$A_{(\square\, MNLF)} = \frac{A}{2} \qquad \text{... (20.30)}$$

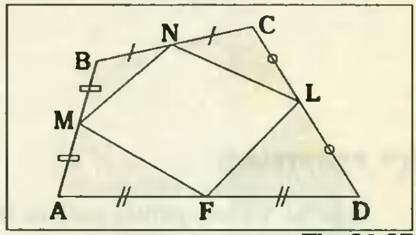


Fig. 20.27

17^ma PROPIEDAD

Si $a + b = k$ (constante) entonces el área A del rectángulo será máxima cuando $a = b$, resultando :

$$A_{máx} = a^2 \qquad \text{... (20.31)}$$

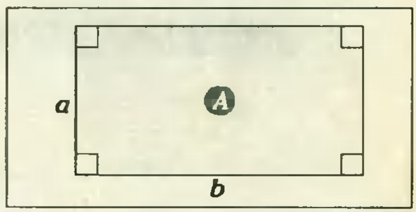


Fig. 20.28

18^va PROPIEDAD

Si : $\overline{BC} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{AD}$, A_1 y A_2 representan las áreas de los trapecios MBCN y AMND, se cumple :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{MN^2 - BC^2}{AD^2 - MN^2} \qquad \text{... (20.32)}$$

Nota : Si $A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad MN = \sqrt{\dfrac{AD^2 + BC^2}{2}}$

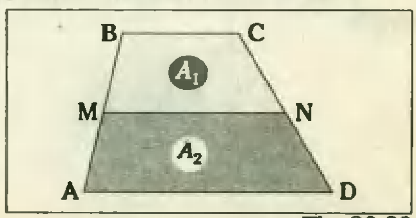


Fig. 20.29

19na PROPIEDAD

Si M, N, L y F son puntos medios.

$\Rightarrow$ $$A_1 + A_3 = A_2 + A_4 \quad \text{... (20.33)}$$

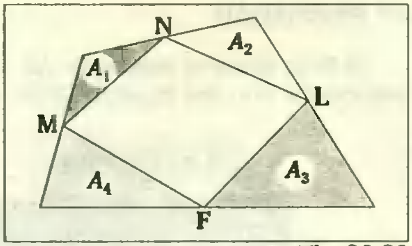


Fig. 20.30

20ma PROPIEDAD

Si ABCD es un trapezoide.

$\Rightarrow$ $$A_x = A_1 + A_2 \quad \text{... (20.34)}$$

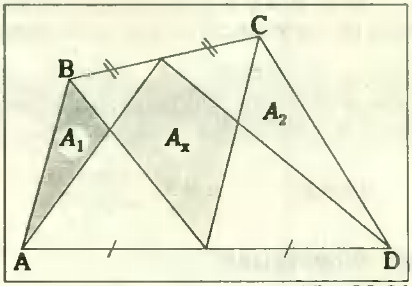


Fig. 20.31

21ra PROPIEDAD

Si M,N,L y F son puntos medios de los lados del trapezoide ABCD, se cumple :

$$A_x = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad \text{... (20.35)}$$

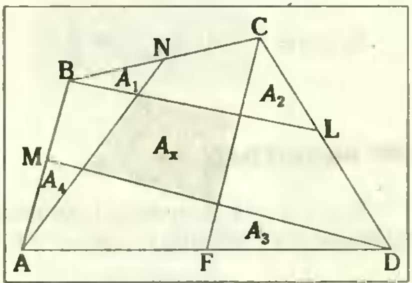


Fig. 20.32

22da PROPIEDAD

Si : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y el área del trapecio ABCD es A, se cumple :

$$A_x = \frac{A}{9} \quad \text{... (20.36)}$$

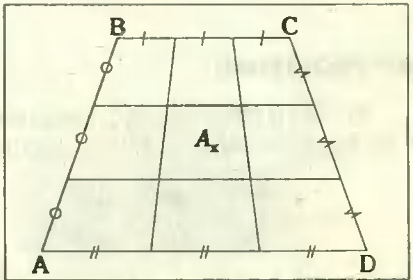
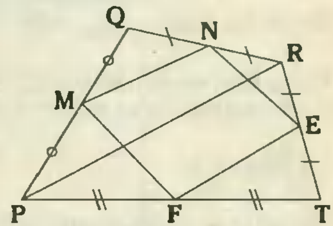


Fig. 20.33

EJERCICIOS DE APLICACIÓN (2DA PARTE)

8.- El área de un cuadrilátero convexo es $40cm^2$; hallar el área (S) del cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados del primero.

Resolución.-



Del gráfico : $S_{MNEF} = S_{PQRT} - (S_{MQN} + S_{FTE} + S_{PMF} + S_{NRE})$ ... (1)

En el triángulo PQR : $S_{MQN} = \dfrac{S_{PQR}}{4}$ (Propiedad)

También en el Δ PTR : $S_{FTE} = \dfrac{S_{PTR}}{4}$

Efectuando la suma indicada : $S_{MQN} + S_{FTE} = \dfrac{S_{PQR}+S_{PTR}}{4}$

Esto es : $S_{MQN} + S_{FTE} = \dfrac{S_{PQRT}}{4}$ ... (2)

En forma análoga : $S_{PMF} + S_{NRE} = \dfrac{S_{PQRT}}{4}$ ... (3)

Ahora, reemplazando (2) y (3) en (1) : $S_{MNEF} = \dfrac{S_{PQRT}}{2}$ (Propiedad item 20.10.16)

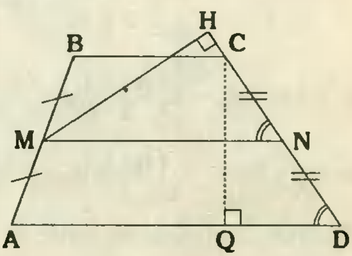
Para el problema : $S_{PQRT} = 40cm^2$ $\Rightarrow$ $SMNEF = \dfrac{40}{2}$ $\therefore$ $\boldsymbol{S_{MNEF} = 20cm^2}$

Nota .- Además, recuerde el lector que el cuadrilátero MNEF es un paralelogramo.

9.- Demostrar que en todo trapecio el área es igual al producto de la longitud de uno de los lados no paralelos y la distancia del punto medio del lado opuesto al primero.

Demostración.-

Consideremos el trapecio ABCD, donde «M» es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MH} \perp \overline{CD}$



Demostraremos que : $S_{ABCD} = CD \cdot MH$

Desde luego sabemos que : $S_{ABCD} = MN \cdot CQ$ ... (1)

Donde $\overline{MN}$ es la mediana y CQ la altura del trapecio.

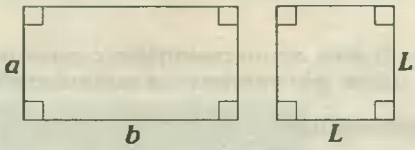
Siendo : $\measuredangle$ MNH $\cong$ $\measuredangle$ D ⊿ MHN ~ ⊿CQD

Luego : $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{MH}{CQ}$ $\Rightarrow$ $MN \cdot CQ = MH \cdot CD$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $\boldsymbol{S_{ABCD} = CD \cdot MH}$ **item 20.10.14**

10.- Un rectángulo y un cuadrado tienen igual perímetro. Demostrar que el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo.

<u>**Demostración**</u>.-



Por ser iguales los perímetros : $4L = 2(a + b)$

Entonces : $L = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Siendo las áreas : $S_{rect.} = ab \Rightarrow S_{cuad.} = L^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

Ahora bien de la media aritmética sabemos que para cualquier par de números positivos, la media aritmética es mayor que la media geométrica.

Así, con a y b : $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, para obtener las expresiones de las áreas : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 > ab$

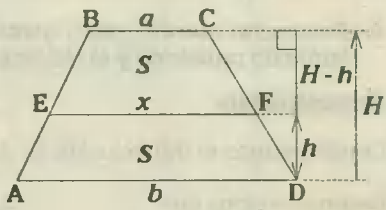
De donde efectivamente : $S_{cuad.} > S_{rect.}$ item 20.10.17

11.- En un trapecio, las longitudes de las bases son a y b. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases, limitado por los otros lados y que determina dos figuras equivalentes.

<u>**Resolución**</u>.-

Consideremos el trapecio ABCD, donde BC = a , AD = b, $\overline{EF}$ el segmento paralelo a las bases, siendo además «h» y «H» alturas de AEFD y ABCD respectivamente.

Datos : a y b , incógnita : x



Se tienen : $S_{ABCD} \Rightarrow S = \left(\dfrac{b+x}{2}\right)h$ ... (1)

$S_{EBCF} \Rightarrow S = \left(\dfrac{a+x}{2}\right)(H - h)$ ... (2)

y S_{ABCD} $2S = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)H$ ... (3)

De (1) en (3) : $2\left(\dfrac{b+x}{2}\right)h = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)H \Rightarrow \dfrac{h}{H} = \dfrac{a+b}{2(b+x)}$ ... (4)

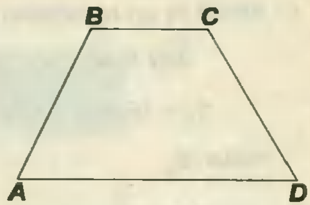
De (1) = (2) : $\left(\dfrac{b+x}{2}\right)h = \left(\dfrac{a+x}{2}\right)(H - h)$

Operando convenientemente : $(b + x)\,h + (a + x)\,h = (a + x)H$

Entonces : $\dfrac{h}{H} = \dfrac{a+x}{a+b+2x}$ ... (5)

Finalmente de (4) = (5) : $\dfrac{a+b}{2(b+x)} = \dfrac{a+x}{a+b+2x}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a}}}$

12.- En la figura mostrada, ABCD es un trapecio ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), donde se sabe que : AB = 2 , BC = 3 CD = 5 y AD = 8. Calcular el área del trapecio.

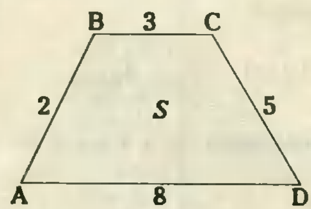


Resolución.-

Con los datos dados, en el gráfico podemos observar que es conveniente aplicar el item 20.10.15.

Donde : $p = \dfrac{2+3+5+8}{2} \Rightarrow p = 9$

$$S = \frac{3+8}{8-3}\sqrt{(9-2)(9-3)(9-5)(9-8)}$$

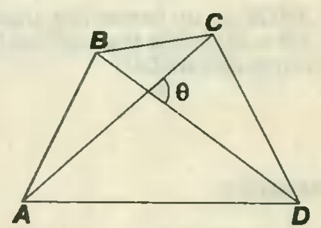


Ahora : $S = \dfrac{11}{5}\sqrt{7\cdot 6\cdot 4\cdot 1}$

Luego : $S = \dfrac{11}{5}\cdot 2\sqrt{42}$

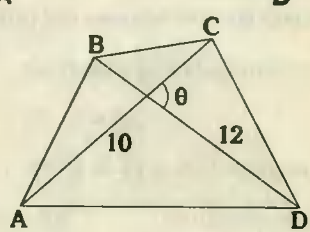
$\therefore$ $\boldsymbol{S = \dfrac{22}{5}\sqrt{42}}$

13.- En el cuadrilátero ABCD, cuyas diagonales AC = 10 , BD = 12 . Calcular el área máxima del cuadrilátero.



Resolución.-.

Del gráfico sea «S» el área pedida



Entonces : $S = \dfrac{AC\cdot BD}{2}\ \text{sen}\,\theta$ ... (1)

Ahora para que el área sea máxima , $\theta = 90°$

Luego : $S = \dfrac{AC\cdot BD}{2}\underbrace{\text{sen}\,90°}_{1} \Rightarrow S = \dfrac{AC\cdot BD}{2}$ item 20.10.11

Entonces : $S = \dfrac{10\cdot 12}{2}$ $\therefore$ $\boldsymbol{S = 60\ u^2}$

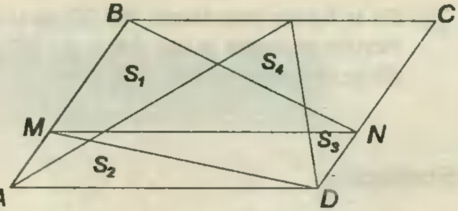
MISCELÁNEA

1.- ABCD es un romboide; si :

$$\overline{MN} \,//\, \overline{BC} \quad , \quad S_1 = 8\ m^2 ,$$

$$S_2 = 12\ m^2 \quad y \quad S_3 = 6\ m^2 .$$

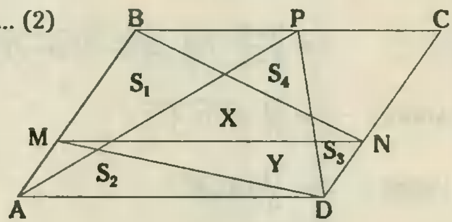
Hallar S_4



Resolución.-

Por dato : $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$, entonces : $S_{MBND} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$ ... (1)

Puesto que : $S_{APD} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$ ... (2)



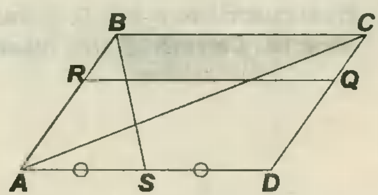
De (1) y (2) : $\underbrace{S_{MBND}}_{} = \underbrace{S_{APD}}_{}$

Reemplazando : $S_1 + x + y + S3 = S_2 + x + y + S_4$

Donde : $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 \Rightarrow 8 + 6 = 12 + S_4$

$$\therefore \quad \boxed{S_4 = 2\ m^2}$$

2.- ABCD es un romboide, donde AR = 2 · RB = DQ y AS = SD ¿Qué fracción es la parte sombreada al romboide ABCD?



Resolución.-

Según las condiciones del problema, $\overline{RQ} \,//\, \overline{BC}$.

Por semejanza de triángulos :

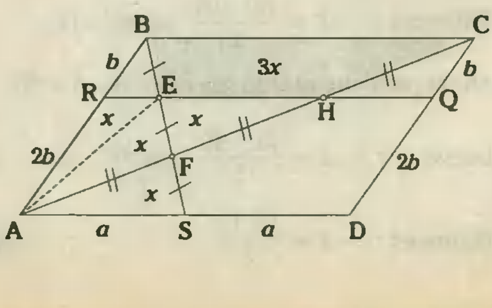
$$BF = 2 \cdot FS \quad y \qquad ES = 2 \cdot BE$$

Luego : $BE + EF = 2 \cdot FS$ y $EF + FS = 2 \cdot BE$

Reemplazando : $BE + 2 \cdot BE - FS = 2 \cdot FS$

Donde : $3 \cdot BE = 3 \cdot FS$

Ahora : $BE = FS$

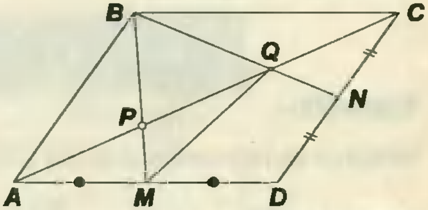


Por lo tanto : $BE = EF = FS$ y $AF = FH = FC$

Del gráfico : $6x = \frac{1}{2}\,S_{ABCD}$ $\Rightarrow$ $3S = \frac{1}{4}\,S_{ABCD}$

$\therefore$ **La fracción pedida es : $\frac{1}{4}$**

3.- Si : $S_{ABCD} = 120\ m^2$; hallar : S_{BQM}

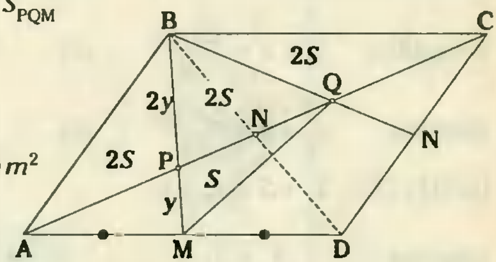


Resolución.-

Propiedad : AP = PQ = QC

En el Δ ABD, "P" es baricentro, entonces : BP = 2 · PM

Por relación de áreas en el Δ BQM : $S_{BQP} = 2 \cdot S_{PQM}$

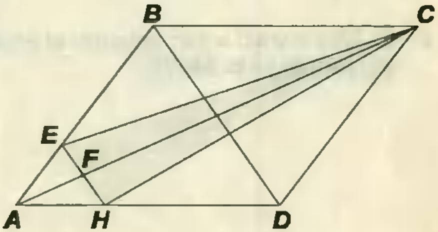


Ahora : $S_{ABC} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$

Donde : $6S = \dfrac{S_{ABCD}}{2} = \dfrac{120}{2}$ $\Rightarrow$ $S = 10\,m^2$

$\therefore$ $\mathbf{S_{MBQ} = 30\ m^2}$

4.- Si ABCD es un romboide. Hallar el área de la región sombreada, siendo AC = 6· AF , $\overline{EH}$ // $\overline{BD}$ y el área de ABCD igual 18 m².



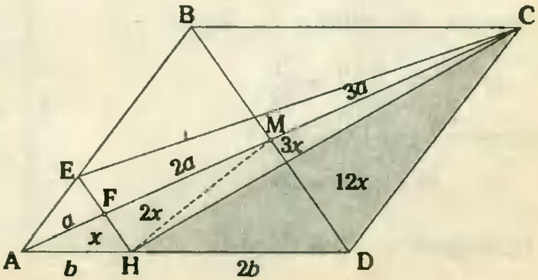
Resolución.-

Sea : AF = a $\Rightarrow$ C = 6 a $\Rightarrow$ FC = 5a

Además por dato : $\overline{EH}$ // $\overline{BD}$, entonces por proporcionalidad : HD = 2 . AH = 2b

Por relación de áreas, si $S_{AFH} = x$, entonces :

$S_{HFM} = 2x$; $S_{HMC} = 3x$ y $S_{HCD} = 12x$



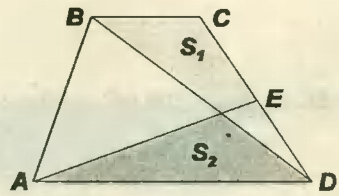
Sumando : $x + 2x + 3x + 12x = \dfrac{18}{2}$

Luego : $18x = 9$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{1}{2}$

Puesto que : $S_{HEC} = 10\,x = 10\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\therefore$ $\boxed{S_{HEC} = 5\,m^2}$

5.- Si : $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$; $5 \cdot AD = 9 \cdot BC$; $5 \cdot CE = 4 \cdot DE$

Hallar : S_1 / S_2 .



Resolución.-

Trazamos las perpendiculares $\overline{BQ}$ y $\overline{AH}$ a la recta que contiene al lado $\overline{CD}$.

Luego : ⊾ BQC ~ ⊾ AHD : $\dfrac{BQ}{AH} = \dfrac{5a}{9a} = \dfrac{5}{9}$

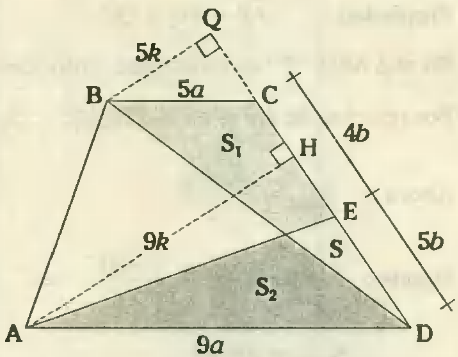
De donde si : $BQ = 5\,k \quad \Rightarrow \quad AH = 9\,k$

Del gráfico : $S_1 + S = \dfrac{9b \cdot 5k}{2}$ ... (1)

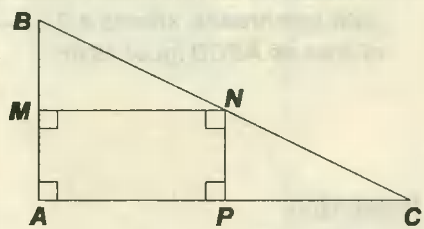
También : $S_2 + S = \dfrac{5b \cdot 9k}{2}$ ... (2)

De (1) y (2) : $S_1 + S = S_2 + S$

Entonces : $S_1 = S_2$ $\therefore$ $\boxed{\dfrac{S_1}{S_2} = 1}$



6.- Si AB = 5 y AC = 12 ; calcular el área máxima del rectángulo AMNP .



Resolución.-

Sabemos que : $S = a\,.\,b$ ... (1)

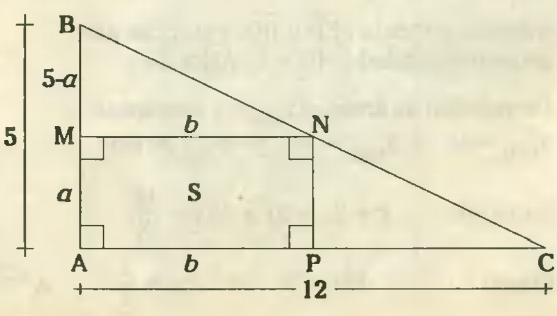
Además : ⊾ MBN ~ ⊾ BAC

$\Rightarrow \quad \dfrac{5-a}{5} = \dfrac{b}{12}$

Donde : $60 - 12a = 5b$

$\Rightarrow \quad 12\,a + 5\,b = 60$

Despejando : $b = \dfrac{60-12a}{5}$ ... (2)



Reemplazando (2) en (1) : $S = a\left(\dfrac{60-12a}{5}\right) \Rightarrow 5S = 60a - 12a^2$

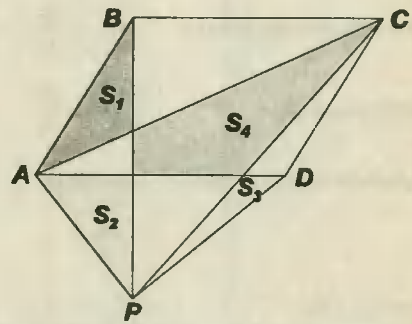
Hallamos : $S' = \dfrac{dS}{da} \Rightarrow S' = \dfrac{1}{5}(60a - 12a^2) \Rightarrow S' = 60 - 24a$

Igualamos a cero, para hallar el valor de «a» que da el máximo "S"

$$60 - 24a = 0 \Rightarrow 24a = 60 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

Luego : $5S = 60\left(\dfrac{5}{2}\right) - 12\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow S = 30 - 15 \quad \therefore \quad \boldsymbol{S = 15\,u^2}$

7.- Si ABCD es un romboide, en el cual $S_1 + S_3 = 9\ m^2$ y $S_2 = 4\ m^2$. Hallar : "S_4"



Resolución.-

Trazamos por P, $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y a $\overline{CD}$, luego de la figura deducimos las siguientes relaciones :

$$S_1 + x + S_2 = \frac{ah_1}{2} \quad \text{... (1)}$$

También : $y + S_3 = \dfrac{ah_2}{2}$ ... (2)

Sumando (1) y (2) :

$$S_1 + S_2 + S_3 + x + y = \frac{a}{2}(h_1 + h_2) \quad \text{... (3)}$$

Ahora :

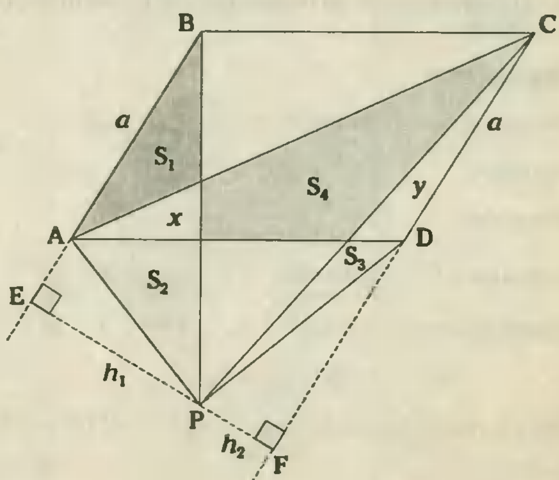
$$x + S_4 + y = \frac{a}{2}(h_1 + h_2) \quad \text{... (4)}$$

Igualando (3) y (4) :

$$S_1 + S_2 + S_3 + x + y = S_4 + x + y$$

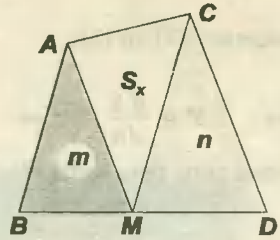
Entonces : $S_1 + S_2 + S_3 = S_4$

Reemplazando valores : $S_4 = 9 + 4$



$$\therefore \quad \boldsymbol{S_4 = 13\,m^2}$$

8.- Si $\overline{MC}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{MA}$ // $\overline{CD}$; hallar : "S_x".

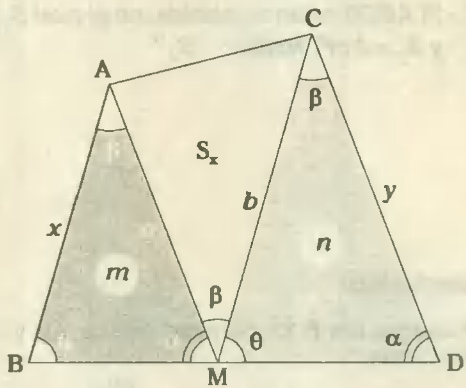


Resolución.-

Ya que $\overline{AB}$ // $\overline{CM}$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAM = m\measuredangle AMC = \beta$ y $m\measuredangle ABM = m\measuredangle CMD = \theta$

También como $\overline{AM}$ // $\overline{CD}$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle AMB = m\measuredangle CDM = \alpha$ y $m\measuredangle AMC = m\measuredangle MCD = \beta$

Por relación de áreas : $\dfrac{S_x}{m} = \dfrac{ab}{ax}$ y $\dfrac{S_x}{n} = \dfrac{ab}{by}$



Multiplicando : $\dfrac{Sx^2}{mn} = \dfrac{ab}{xy}$ ... (1)

Además como Δ BAM ~ Δ MCD : $\dfrac{a}{y} = \dfrac{x}{b}$

$\Rightarrow$ $ab = xy$ ... (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{Sx^2}{mn} = 1$

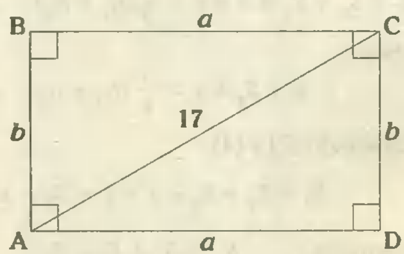
$\therefore$ $S_x = \sqrt{mn}$

9.- El perímetro de un rectángulo es de 46 m y su diagonal mide 17 m; hallar el área de su región.

Resolución.-

Por condición del problema : $2a + 2b = 46$ $\Rightarrow$ $a + b = 23$

También : AC = 17



Nos piden : $x = ab$

Sabemos : $\underbrace{(a+b)^2} = \underbrace{a^2+b^2} + \underbrace{2ab}$

Reemplazando : $(23)^2 = 17^2 + 2x$

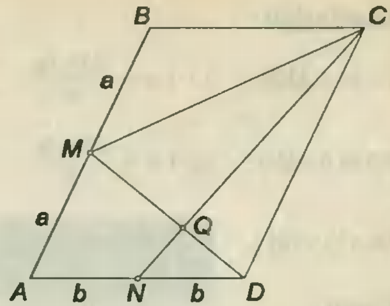
$\Rightarrow$ $23^2 - 17^2 = 2x$

Por diferencia de cuadrados : $(23 + 17)(23 - 17) = 2x$

Donde : $40 \cdot 6 = 2x$

$\therefore$ $x = 120\ m^2$

10.- *Si ABCD es un romboide de área 40 m^2 ; hallar el área de la región triangular MCQ.*



Resolución.-

Prolongamos $\overline{CM}$ hasta intersectar a la prolongación de $\overline{DA}$ en E, luego :

El Δ EMA $\cong$ Δ CMB $\Rightarrow$ EA = BC = $2b$ y EM = MC = K

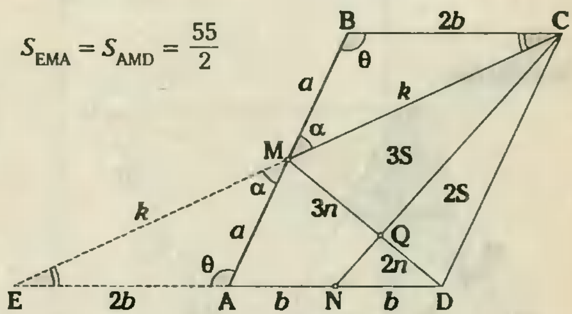
En el Δ EMD, por el Teorema de Menelao : ($\overline{NC}$ $\rightarrow$ secante)

$$3b \cdot QD \cdot K = b \cdot MQ \cdot 2k \quad \Rightarrow \quad \frac{QD}{MQ} = \frac{2}{3}$$

Esto puede ser : QD = $2n$ y MQ = $3n$

En el Δ CDE; $\overline{DM}$ es mediana, entonces : $S_{EMD} = S_{MCD} = 5S$

En el Δ EMD; $\overline{MA}$ es mediana, entonces : $S_{EMA} = S_{AMD} = \frac{55}{2}$



Luego : $5S + 5S = 40\,m^2$

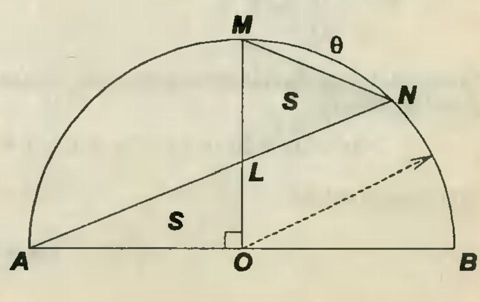
Ahora : $10S = 40m^2$

Donde : $S = 4m^2$

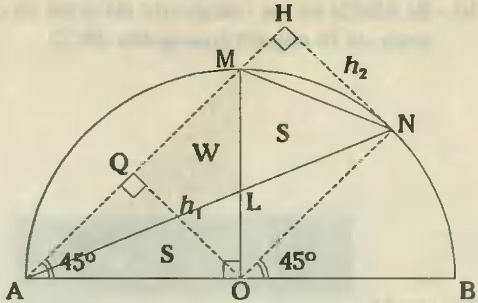
Reemplazando : $S_{MCQ} = 3\,(4m^2)$

$\therefore$ $\boxed{S_{MCQ} = 12\,m^2}$

11.- *En la figura mostrada calcular "θ" para que las regiones MLN y AOL sean equivalentes.*



Resolución.-



En el Δ AMN : $\quad w + s = \dfrac{AM \cdot h_2}{2}$ ... (1)

En el Δ AMO : $\quad w + s = \dfrac{AM \cdot h_1}{2}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\quad \dfrac{AM \cdot h_2}{2} = \dfrac{AM \cdot h_1}{2}$

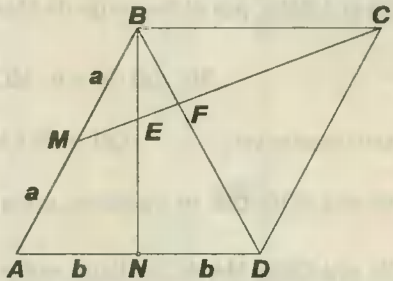
Luego : $\quad h_1 = h_2$

Esto quiere decir que; $\overline{AM}$ es paralelo con $\overline{NO}$, puesto que : $\quad m\measuredangle MAQ = 45°$

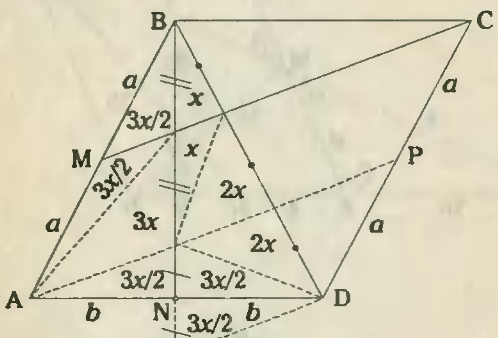
Entonces la $\quad m\measuredangle NOB = 45° \quad \therefore \quad \theta = 45°$

12.- Si ABCD es un romboide de área 60 m².

Hallar el área de la región triangular EBF.

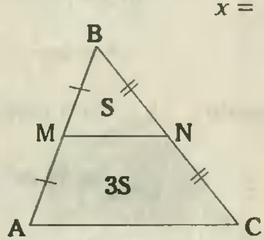


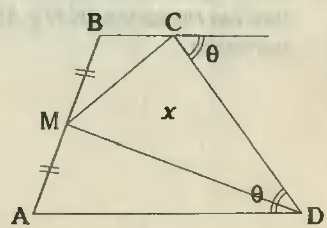
Resolución.-



Estas propiedades se usan para resolver este problema :

$x = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$





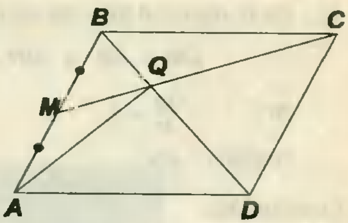
Completando todas las áreas para cada región triangular tenemos :

$$3x + 3x + 3x + 2x + 2x + x + x = \frac{60}{2}$$

En consecuencia : $\quad 15x = 30$

$$\therefore \quad x = 2\ m^2$$

13.- Si ABCD es un romboide. Hallar el área de la región sombreada, siendo el área de ABCD igual a 60 m².



Resolución.-

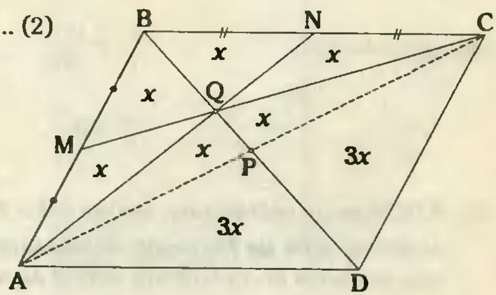
En el Δ ABC, el punto «Q» es el Baricentro, entonces existe 6 triángulos de áreas iguales a «x»

Luego en el cuadrilátero AQCD : $x + x + 3x + 3x = S_{AQCD}$

Donde : $8x = S_{AQCD}$ ... (1)

También : $12x = S_{ABCD}$

Entonces : $x = \dfrac{S_{ABCD}}{12}$ ... (2)



Reemplazando (2) en (1) : $8 \cdot \dfrac{S_{ABCD}}{12} = S_{AQCD}$

Simplificando : $\dfrac{2 \cdot S_{ABCD}}{3} = S_{AQCD}$

Puesto que : $S_{ABCD} = 60\ m^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2}{3} \cdot 60 = S_{AQCD}$

$\therefore \quad \boldsymbol{S_{AQCD} = 40\ m^2}$

14.- Se tiene un rectángulo de 60m² de área. Si los lados son números enteros (en m) el perímetro mínimo posible (en m) es :

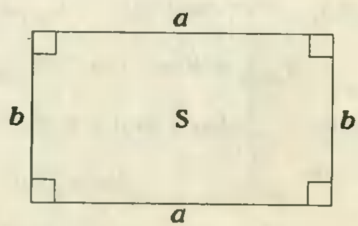
Resolución.-

Por dato : $S = ab = 60$

Nos piden hallar $2\,(a + b)$ mínimo.

Al descomponer 60 en dos factores como :

$6 \cdot 10 = a \cdot b$



Luego : $x = 2\,(10 + 6)$

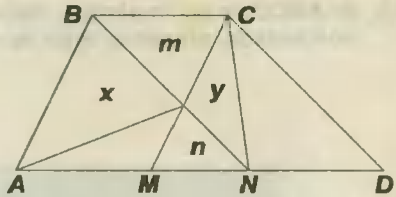
Nos da el mínimo : $\boldsymbol{x = 32\ m}$

15.- En la figura ABCD es un trapecio, en donde :

$$\overline{CM} \parallel \overline{AB} \quad y \quad \overline{BN} \parallel \overline{CD}$$

Si : $\dfrac{m}{n} = 4$

Hallar : x/y



Resolución.-

Por condición del problema : $m = 4n$

En el trapecio MBCN : $y^2 = 4n \cdot n$

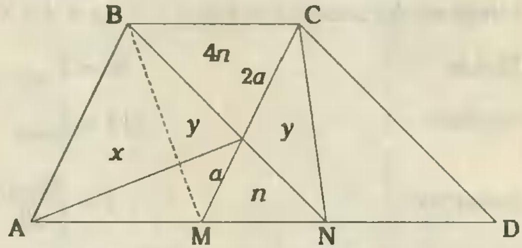
Donde : $y = 2n$

También en el romboide ABCM :

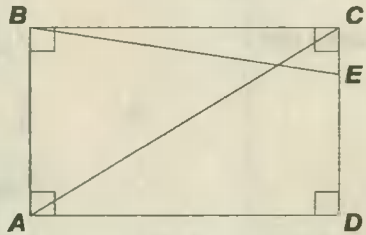
$x = 4n + 2n \quad \Rightarrow \quad x = 6n$

En consecuencia : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6n}{2n}$

$\therefore \quad \dfrac{x}{y} = 3$



16.- ABCD es un rectángulo, donde ED = 3 · CE .
Hallar el área de la región sombreada; si el área que encierra el rectángulo ABCD es 40 u^2 .



Resolución.-

Sea x el área de la región sombreada

En la figura : Δ EFC ~ Δ ABF $\Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{4a}{a} \Rightarrow m = 4n$

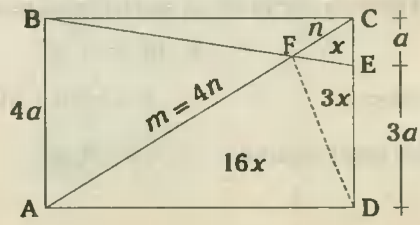
Luego, si $S_{FCE} = x$, entonces : $S_{FED} = 3x$ y $S_{AFD} = 16x$

Dato : $S_{ABCD} = 40\ u^2 \Rightarrow S_{ACD} = 20\ u^2$

Sumando : $16x + 3x + x = 20\ u^2$

Ahora : $20x = 20\ u^2$

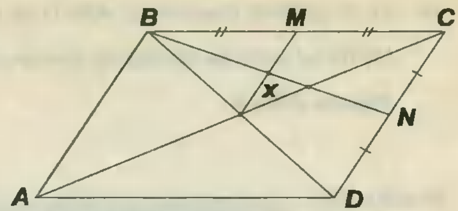
$\therefore \quad \boxed{x = 1\ u^2}$



17.- En la figura, ABCD es un romboide.

Donde: $S_{ABCD} = 48m^2$

hallar : "x"



Resolución.-

Prolongamos $\overline{ME}$ hasta Q y trazamos $\overline{DM}$, del gráfico observamos que "H" es baricentro del Δ BCD

$\Rightarrow$ DH = 2MH = 2 y

Además : EF = FM = n y SFHM = x

En el Δ EMD, aplicamos el Teorema de Menelao : $2y \cdot MF \cdot a = y \cdot EF \cdot 2a$

También : MF = EF = n

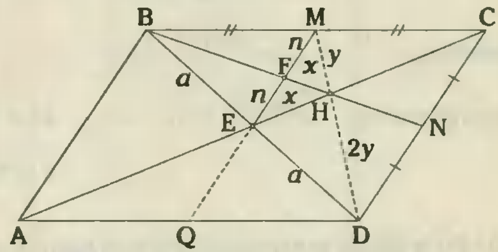
Luego : $S_{FMH} = x$; $S_{EHD} = 4x$

Entonces : $S_{EMD} = S_{QED} = 6x$

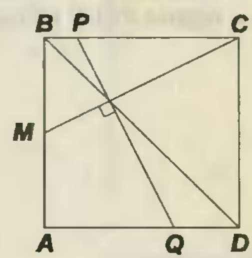
En consecuencia : $S_{ABCD} = 48x$

Pero por dato : $S_{ABCD} = 48 = 48x$

$\therefore$ $\mathbf{x = 1\,u^2}$



18.- Hallar el área del cuadrado ABCD, sabiendo que las áreas de las regiones sombreadas suman $5m^2$ y AM = MB.



Resolución.-

Trazamos $\overline{OH} \perp \overline{BC}$; $\overline{OE} \perp \overline{BM}$; $\overline{OG} \perp \overline{CD}$

Luego : OE = OH = a = CF y DG = OF = HC = FD = b

En la figura : $b = 2a$

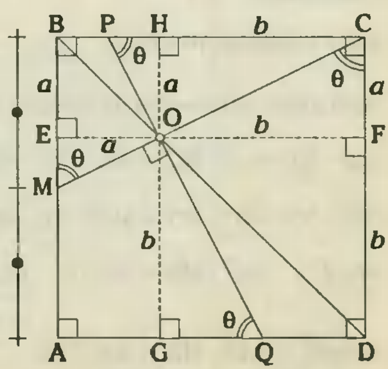
Por dato : $a^2 + b^2 = 5$ $\Rightarrow a^2 + (2a)^2 = 5$

Luego : $a = 1$ $\Rightarrow$ $b = 2$

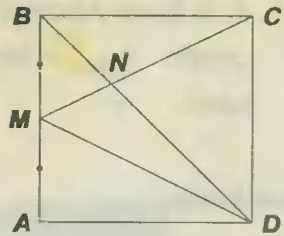
Nos piden hallar : $x = (a + b)2$

Osea : $x = (a + 2a)^2 = (3a)^2 = 9a^2$

Reemplazando : $x = 9(1)^2$ $\therefore$ $\mathbf{x = 9m^2}$



19.- En el gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado. Hallar el área de la región triangular MND. Siendo AB = 6

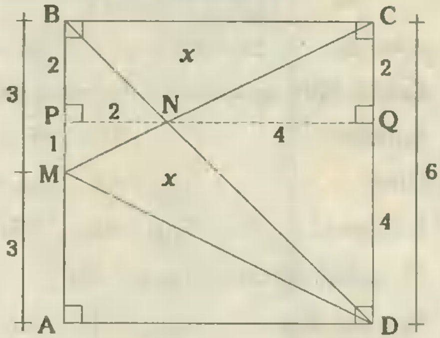


Resolución.-

Trazamos por N, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ $(P \in \overline{BM} \wedge Q \in \overline{CD})$

En el trapecio rectángulo MBCD; por propiedad :

$$x^2 = S_{MBN} \cdot S_{NCD}$$



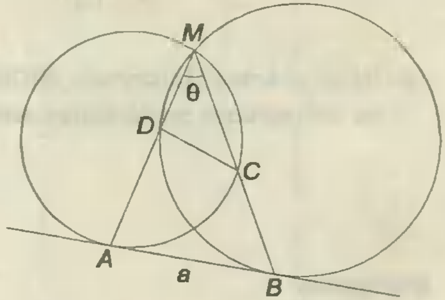
Puesto que : $S_{MBN} = \dfrac{(3)(2)}{2} = 3\mu^2$

También : $S_{NCD} = \dfrac{(6)(4)}{2} = 12\mu^2$

Reemplazando : $x^2 = (3)\ (12) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x^2 = 6^2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6\,u^2}$

20.- En la figura mostrada A y B son puntos de tangencia, si AB = a. Calcular el área de la región ABCD en función de a y θ .



Resolución.-

En el cuadrilátero ADCB : $S_{ADCB} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} \cdot \text{sen}\ 2\theta$ ... (1)

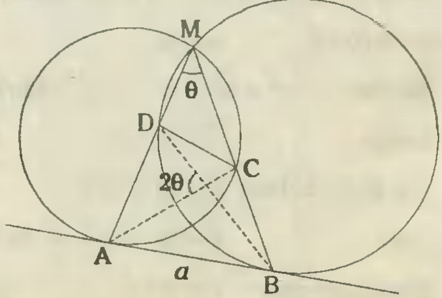
Aplicando el Teorema de Stewart en el Δ AMB :

$AC^2 \cdot MB = a^2 \cdot MC + AM^2 \cdot BC - MC \cdot BC \cdot MB$ ... (2)

$BD^2 \cdot AM = a^2 \cdot MD + MB^2 \cdot AD - MD \cdot AD \cdot AM$ ... (3)

En (2) : $AC^2 \cdot MB = MC\,(a^2 - \underbrace{BC \cdot MB}_{a^2}) + AM^2 \cdot BC$

Luego : $AC^2 \cdot MB = AM^2 \cdot BC$ ... (α)



En (3) : $BD^2 \cdot AM = MD(a^2 - AD \cdot AM) + MB^2 \cdot AD$

Luego : $BD^2 \cdot AM = MB^2 \cdot AD$ ... (β)

Multiplicando (α) y (β) : $AC^2 \cdot MB \cdot BD^2 \cdot AM = AM^2 \cdot BC \cdot MB^2 \cdot AD$

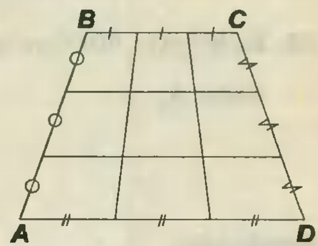
Simplificando : $AC^2 \cdot BD^2 = (AM \cdot AD) \cdot (MB \cdot BC)$

Ahora : $(AC \cdot BD)^2 = a^4 \quad \Rightarrow \quad AC \cdot BD = a^2$

Este último reemplazamos en (1) : $S_{ADCB} = \dfrac{a^2 \cdot \text{sen } 2\theta}{2}$

21.- En el trapecio ABCD mostrado ($\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$) de área 135cm².

Hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-

Del gráfico, las rectas $\overline{TK}$ y $\overline{PQ}$ trisecan a las paralelas $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$

Luego por Propiedad :

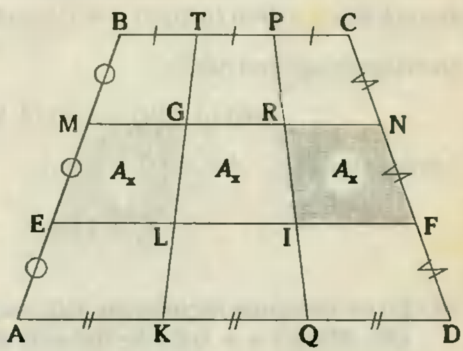
Área (EMGL) = *Área* (RNFI) = A_x

De donde :

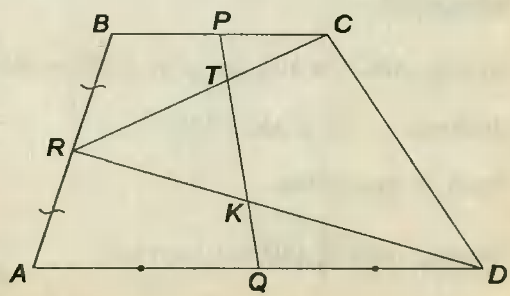
$$Área\,(EMNF) = 3A_x = \frac{1}{3}\,Área\,(ABCD)$$

Resultando : $A_x = \dfrac{1}{9}(135)$

$\therefore \quad A_x = 15\ m^2$

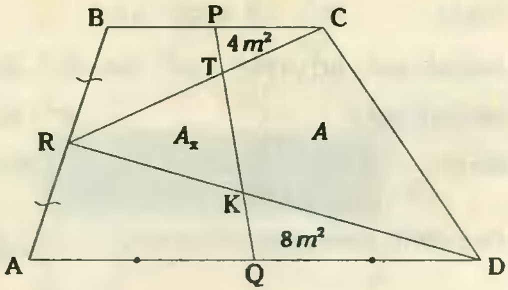


22.- En la figura las áreas de las regiones TPC y QKD son 4m² y 8m². Hallar el área de la región TKR.



Resolución.-

Consideramos el área de la región KTCD como A, luego por Propiedad se tiene :



$$A_x + A = \frac{A(\square ABCD)}{2} \quad \text{... (1)}$$

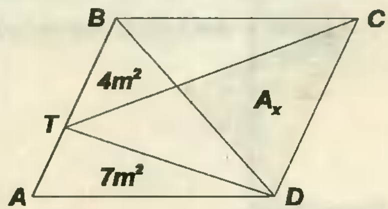
También : $$4 + A + 8 = \frac{A(\square ABCD)}{2} \quad \text{... (2)}$$

De (1) y (2) : $A_x + A = 4 + A + 8$

$\therefore \quad A_x = 12\,m^2$

23.- En la figura ABCD es un paralelogramo.

Hallar A_x



Resolución.-

En el trapecio TBCD :

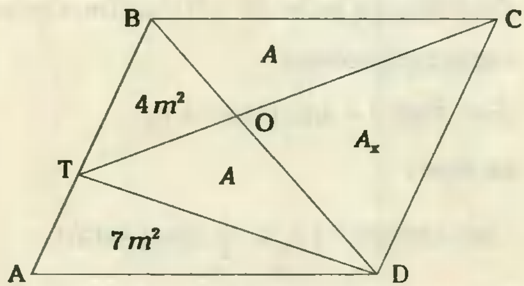
Área (Δ BOC) = *Área* (Δ TOD) = A (Propiedad)

En el paralelogramo ABCD :

$$Área\ (\Delta\, ABD) = Área\ (\Delta\ BCD)$$

Reemplazando : $4 + A + 7 = A + A_x$

$\therefore \quad A_x = 11\,m^2$



24.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B , se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$. Si AD = a y CE = b ; hallar el área de la región AEDC.

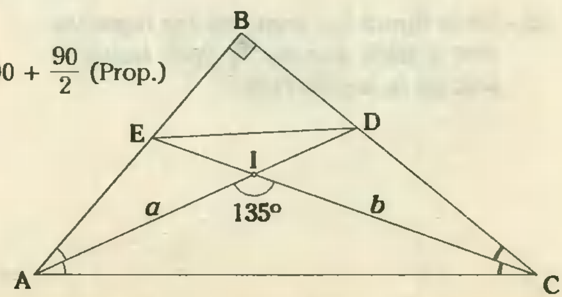
Resolución.-

En el ⊿ ABC, I es incentro y $m\measuredangle AIC = 90 + \frac{90}{2}$ (Prop.)

De donde : $m\measuredangle AIC = 135°$

Sea A_x el área pedida.

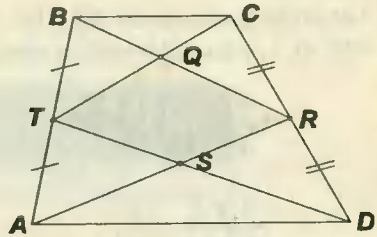
Luego : $A_x = \frac{1}{2}$ (AD) (EC) sen 135°



$$A_x = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \qquad A_x = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$$

25.- Hallar el área de la región TQRS, si las áreas de las regiones BQC y ASD son $5m^2$ y $12m^2$.

Además : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



Resolución.-

Por Propiedad :

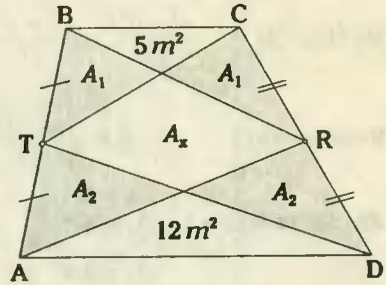
$$Área\ (\Delta\ BRA) = \frac{1}{2}\ Área\ (ABCD)$$

$$Área\ (\Delta\ TBC) + Área\ (\Delta\ ATO) = \frac{1}{2}\ Área\ (\square\ ABCD)$$

Luego : $Área\ (\Delta\ BRA) = Área\ (\Delta\ TBC) + Área\ (\Delta\ ATD)$

Reemplazando : $A_1 + A_2 + Ax = A_1 + 5 + A_2 + 12$

$$\therefore \qquad A_x = 17\ m^2$$



26.- ABCD es un romboide; P es un punto exterior a él (P a un mismo lado de $\overline{AD}$). $AC \cap PB$: { R} y $AD \cap BP$: { S} y $AD \cap CP$: { T}. Si las áreas de las regiones ARB, ASP y PTD son de $5u^2$, $3u^2$ y $4u^2$ respectivamente. Hallar el área de la región SRCT.

Resolución.-

En el paralelogramo ABCD se cumple :

$$Área(\Delta\ ABP) + Área\ (\Delta\ CPD) = \frac{1}{2}\ Área\ (\square\ ABCD)$$

También : $Área\ (\Delta\ ACD) = \frac{1}{2}\ Área\ (\square\ ABCD)$

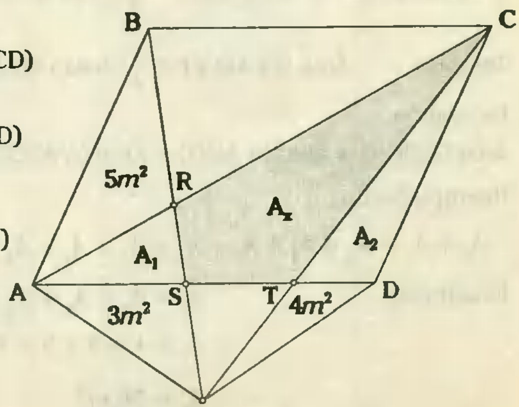
De donde :

$$Área\ (\Delta\ ACD) = Área\ (\Delta\ ABP) + Área\ (\Delta\ CPD)$$

Reemplazando :

$$A_1 + A_x + A_2 = (5 + A_1 + 3) + (A_2 + A_4)$$

$$\therefore \qquad A_x = 12\ m^2$$



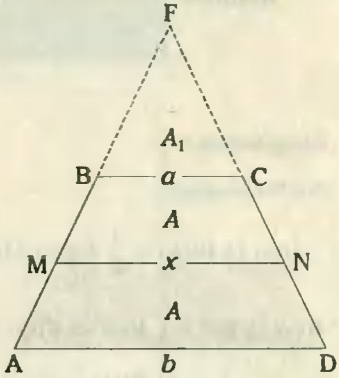
27.- Las bases de un trapecio miden a y b . Hallar la paralela a dichas bases que determina dos trapecios parciales equivalentes.

Resolución.-

Las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ las intersectamos en F , asumiendo que el área de la región BFC es A_1 y considerando la semejanza de los triángulos BFC, MFC y AFD se tiene :

$$\frac{A_1}{A_1+A} = \frac{a^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_1+A} = \frac{x^2-a^2}{x^2} \quad ... (1)$$

$$\frac{A_1+A}{A_1+2A} = \frac{x^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_1+A} = \frac{b^2-x^2}{x^2} \quad ... (2)$$

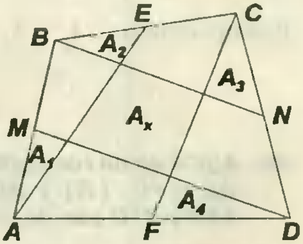


De (1) y (2) : $\dfrac{x^2-a^2}{x^2} = \dfrac{b^2-x^2}{x^2}$

Resolviendo : $\boldsymbol{x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}$

28.- En la figura : $\boldsymbol{A_1 = 1m^2}$, $\boldsymbol{A_2 = 4m^2}$, $\boldsymbol{A_3 = 9m^2}$ ***y*** $\boldsymbol{A_4 = 16m^2}$.

Calcular : $\boldsymbol{A_x}$



Resolución.-

En el trapezoide ABCD se cumple :

Área (Δ BCN) + *Área* (Δ AMD) = $\dfrac{1}{2}$ *Área* (□ ABCD)

También : *Área* (□ AECF) = $\dfrac{1}{2}$ *Área* (ABCD)

De donde :

Área (Δ BCN) + *Área* (Δ AMD) = *Área* (Δ AECF)

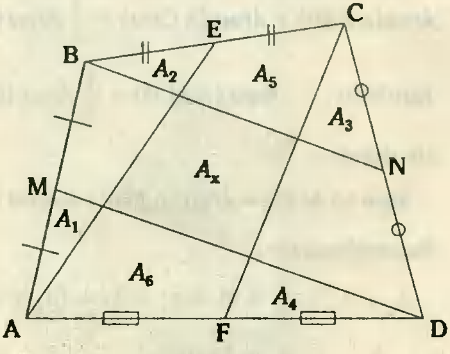
Reemplazando :

$$A_2 + A_5 + A_3 + A_1 + A_6 + A_4 = A_5 + A_x + A_6$$

Finalmente : $A_x = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$A_x = 1 + 4 + 9 + 16$

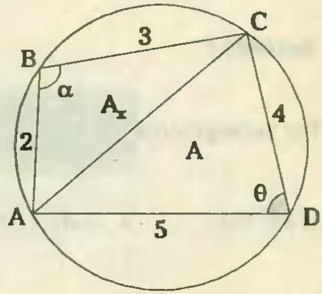
$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = 30\ m^2}$



29.- Los lados de un cuadrilátero inscrito ABCD miden : AB = 2 , BC = 3 , CD = 4 y AD = 5 . Hallar el área de la región ABC

<u>**Resolución.**</u>

El área del cuadrilátero inscrito ABCD, la calculamos empleando el teorema de Brahma - Gupta :



$$A_x + A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Donde : $A_x + A = \sqrt{(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)}$

$\Rightarrow$ $A_x + \text{A} = 2\sqrt{30}$ ... (1)

En el cuadrilátero inscrito : $\alpha + \theta = 180$

Luego : $\dfrac{A}{Ax} = \dfrac{2\cdot 3}{5\cdot 4}$ $\Rightarrow$ $A = \dfrac{3}{10}A_x$ ... (2)

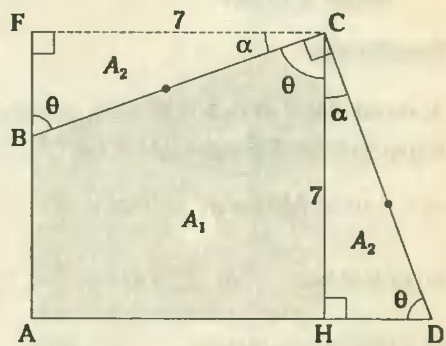
Sustituyendo (2) en (1) : $A_x + \dfrac{3}{10}A_x = 2\sqrt{30}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{13Ax}{10} = 2\sqrt{30}$

$$\therefore \quad \mathbf{A_x = \frac{20}{13}\sqrt{30}}$$

30.- En un trapezoide ABCD : m ∡ A = m ∡ C = 90º , BC = CD y la distancia del vértice C a AD es 7. Hallar el área de la región trapezoidal ABCD.

<u>**Resolución.**</u>-

Trazamos $\overline{CF}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$, luego ⊿ BFC ≅ ⊿ CHD (ALA)



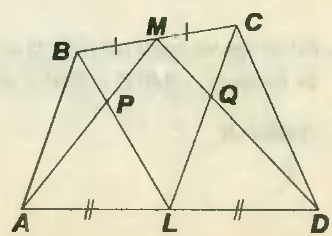
Luego : *Área* (⊿ BFC) = A_2 y FC = CH = 7

De donde el área de la región pedida ABCD es igual al área del cuadrado AFCH

Es decir : $A_1 + A_2 = 7^2$

$\therefore$ ***Área*** **(□ ABCD) = 49 u^2**

31.- Hallar el área de la región PMQL; si las áreas de las regiones ABP y QCD son $6m^2$ y $10m^2$ respectivamente.



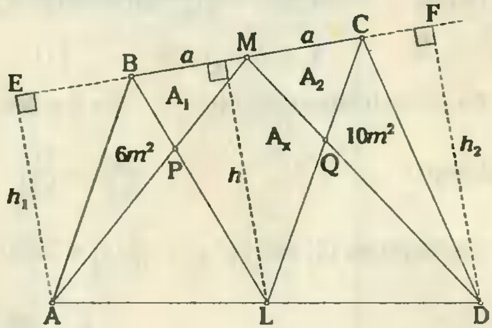
Resolución.

Del gráfico observamos que : $A_1 + 6 = \dfrac{ah_1}{2}$ ... (1)

También : $A_2 + 10 = \dfrac{ah_2}{2}$ ... (2)

Por consiguiente : $A_1 + A_2 + A_x = \dfrac{2a \cdot h}{2} \Rightarrow A_1 + A_2 + A_x = ah$ ... (3)

(1) + (2) : $A_1 + A_2 + 16 = a\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right)$



Ahora : $h = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$

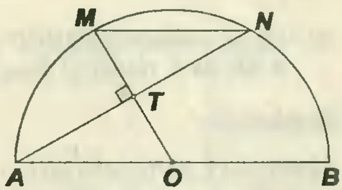
Luego : $A_1 + A_2 + 16 = ah$ ... (4)

De (3) y (4) : $A_1 + A_2 + A_x = A_1 + A_2 + 16$

$\therefore \quad \mathbf{A_x = 16\,m^2}$

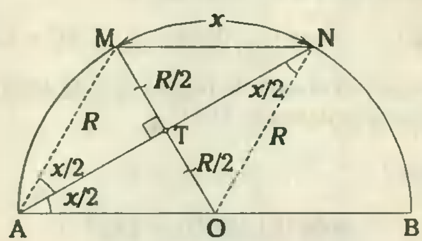
32.- En la figura O es centro y las áreas de las regiones triangulares MTN Y ATO son iguales.

Hallar la m $\overset{\frown}{MN}$.



Resolución.-

Al trazar $\overline{AM}$ y el radio ON = R, se determina el trapecio AMNO donde : $\overline{AM} \parallel \overline{ON}$



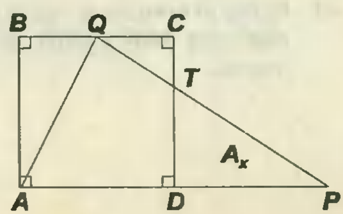
$\Rightarrow \quad m\measuredangle ANO = m\measuredangle MAN = \dfrac{x}{2}$

En el Δ AON : $m\measuredangle NAO = \dfrac{x}{2}$

El Δ MAO es equilátero : $\boldsymbol{x = 60°}$

33.- En la figura adjunta ABCD es un cuadrado AD = PD , si Área (⊿ ABQ) = 5m² y Área (⊿ QCT) = 4m².

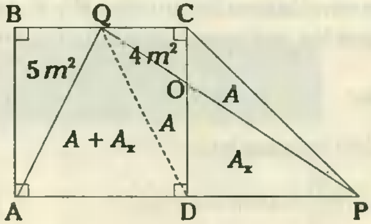
Hallar A_x



Resolución.-

Trazamos la mediana QD del Δ AQP, luego si : $S_{QOD} = A \quad \Rightarrow \quad S_{QDP} = A + A_x$

En el trapecio DQCP :



Área (Δ QOD) = *Área* (Δ COP) = A

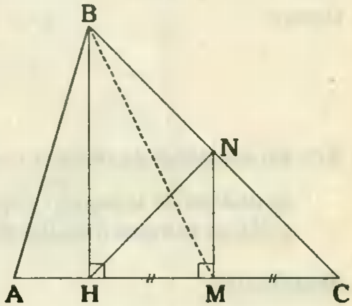
En el cuadrado ABCD :

$$A + A_x = 5 + 4 + A$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = 9\,m^2}$$

34.- En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$. Por el punto medio M de $\overline{AC}$ se traza su mediatriz que corta a $\overline{BC}$ en N . Hallar el área de la región cuadrangular ABNH si el área de la región triangular ABC es $18m^2$.

Resolución.-



En el Δ ABC :

Área (Δ ABM) = *Área* (Δ MBC) = $9\,m^2$ (Propiedad)

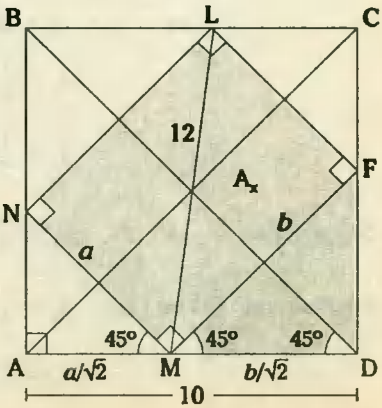
En el trapecio HBNM : *Área* (Δ HNB) = *Área* (Δ BMH)

De donde : *Área* ($\square$ ABNH) = *Área* (Δ ABM)

$\therefore$ ***Área* = ($\square$ ABNH) = $9\,m^2$**

35.- El área de una región cuadrangular regular ABCD es $100m^2$. En el cuadrado ABCD se inscribe un rectángulo de modo que sus lados son paralelos a las diagonales del cuadrado. Hallar el área de la región rectangular, si la diagonal del rectángulo mide 12m.

Resolución.-



Por condición del problema :

$$\text{Área}\ (\square\ ABCD) = (AD)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad AD = 10$$

En los triángulos rectángulos isósceles NAM y MDF :

$$AM = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad MD = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

De donde : $\dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}} = 10 \quad \Rightarrow \quad a + b = 10\sqrt{2}$

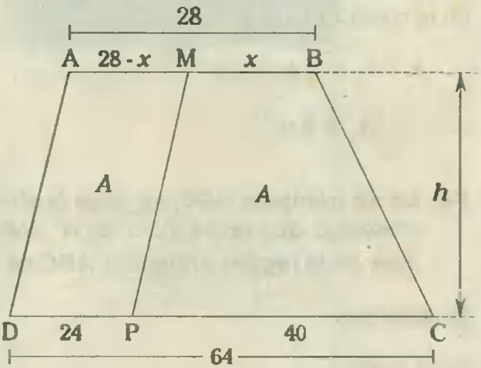
Elevando al cuadrado : $a^2 + b^2 + 2ab = 200$

Puesto que : $a^2 + b^2 = 12^2 \quad$ y $\quad ab = A_x$

Luego : $12^2 + 2A_x = 200$ $\therefore$ $\mathbf{A_x = 28\ m^2}$

36.- Se tiene un trapecio ABCD cuyas bases miden; CD = 64 m y AB = 28m. Sobre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se consideran los puntos M y P respectivamente de modo que PD = 24. Hallar BM, para que las regiones determinadas por los trapecios DAMP y PMBC son equivalentes.

<u>**Resolución**</u>.-



Por condición del problema :

Área (□ DAMP) = *Área* (□ PMBC)

Reemplazando : $\left(\dfrac{28-x+24}{2}\right)h = \left(\dfrac{x+40}{2}\right)h$

Ahora : $52 - x = x + 40$

Donde : $2x = 12$

$\therefore$ $\mathbf{x = 6}$

37.- En un trapecio rectángulo ABCD : m∡ A = m∡ B = 90º y $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{4}$. Si el área de la región trapecial es $24m^2$. Hallar el área de la región triangular AMN (M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$)

<u>**Resolución**</u>.-

Según condición del problema : $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{4}$

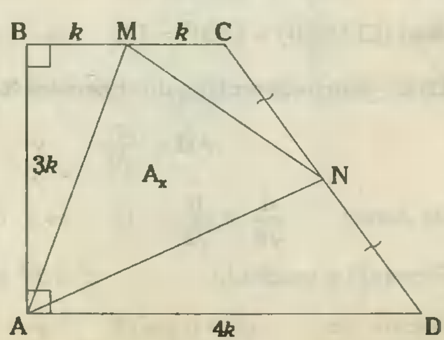
Luego si : AB = 3 k $\Rightarrow$ BC = 2 k y AD = 4 k de donde BM = MC = k

Por dato del problema : *Área* (□ ABCD) $= 24 = \left(\dfrac{2k+4k}{2}\right)(3k) = 9k^2$

$\Rightarrow$ $8 = 3k^2$ ... (1)

$A_x = \dfrac{1}{2}$ *Área* (□ AMCD)

$\Rightarrow$ $A_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k+4k}{2}\right)(3k)$



Se sabe que : $\Rightarrow$ $A_x = \dfrac{5}{4}(3k^2)$ ... (2)

Sustituyendo (1) en (2) : $A_x = \dfrac{5}{4}$ (8)

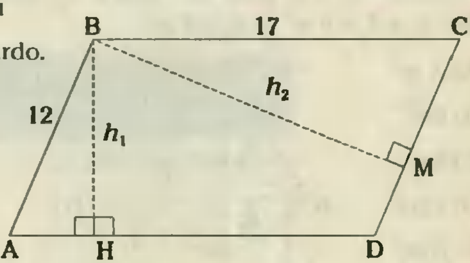
$\therefore$ $\mathbf{A_x = 10\ m^2}$

38.- Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 12 y 17 y una de sus alturas miden 15 . Hallar el área de la región paralelográmica.

Resolución.-

Sea A_x el área pedida, luego : $A_x = 12\,h_2 = 17\,h_1$

Si : $h_1 = 15$, en el ⊿ BHA: $h_1 >$ AB lo cual es absurdo.



Entonces : $h_2 = 15$

Luego : $A_x = 12 \cdot 15 = 180$

$\therefore$ $\boldsymbol{A_x = 180}$

39.- En un romboide ABCD la mediatriz de $\overline{CD}$ intersecta a $\overline{BC}$ en su punto medio M . Se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{AD}$. Si AH = 8 y HD = 2 . Hallar el área de la región romboidal ABCD.

Resolución.-

Sea A_x el área de la región pedida ABCD , luego : A_x = AD . MH ... (1)

Aplicando el teorema de la mediatriz :

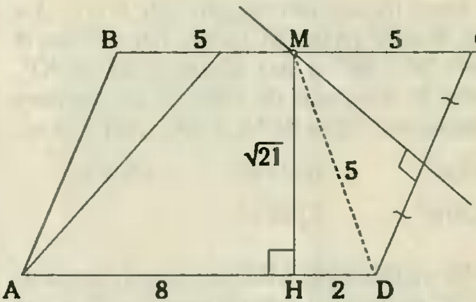
DM = MC = 5

En el ⊿ MHD : $MH = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Además : AD = 10

Sustituyendo en (1) estas últimas expresiones :

$\boldsymbol{A_x = 10\sqrt{21}}$



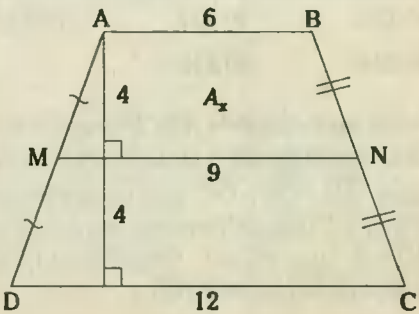
40.- En un trapecio ABCD las bases miden AB = 6 y CD = 12 y su altura mide 8 . Calcular el área de la región trapecial MABN , si M y N son puntos medios de AD y BC respectivamente.

Resolución.-

En el trapecio ABCD : $MN = \dfrac{6+12}{2} = 9$

Luego : $A_x = \left(\dfrac{6+9}{2}\right)4$

$\therefore$ $\boldsymbol{A_x = 30}$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Si ABCD es un romboide; hallar "S_4", siendo : $S_1 + S_3 = 9\ m^2$ y $S_2 = 4\ m^2$.

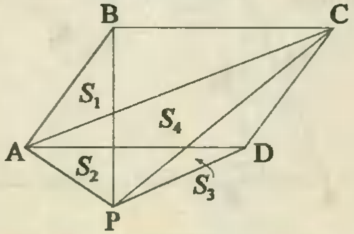
A) $5\ m^2$

B) $6 m^2$

C) $8 m^2$

D) $13 m^2$

E) $10 m^2$



2.- Determinar el área de una región limitada por un trapecio bicéntrico cuyas bases miden $4m$ y $9m$.

A) $25\ m^2$ B) $30\ m^2$ C) $32\ m^2$

D) $36\ m^2$ E) $39\ m^2$

3.- En un trapecio rectángulo ABCD $m\measuredangle A = m\measuredangle B = 90°$ $(\overline{AD} > \overline{BC})$ sobre $\overline{AB}$ se ubica el punto "M"; $\overline{MC}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en "O". Hallar la diferencia de áreas de las regiones triangulares COD y BOM; si : $BC \cdot AM = 18 m^2$.

A) $9 m^2$ B) $12 m^2$ C) $18 m^2$

D) $20 m^2$ E) $24 m^2$

4.- En un triángulo ABC recto en B, con centro "B" se traza un arco tangente a $\overline{AC}$ y que intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N, respectivamente. Hallar el área del cuadrilátero AMNC; si AB = 3 y BC = 4

A) 3,11 B) 3,12 C) 3,13

D) 3,14 E) 3,15

5.- En un rectángulo ABCD, cuya área mide $64\ m^2$ sus diagonales se intersectan en "O", si sobre $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y se toman los puntos P, Q, R y S respectivamente, tal que AP = PO, QO = 3 . BQ ; RC = 3 . OR y OS = SD. Hallar el área de la región PQRS.

A) $7,5\ m^2$ B) $10\ m^2$ C) $8\ m^2$

D) $1\ m^2$ E) $15\ m^2$

6.- Si ABCD es un romboide donde BC = 3. AL y AK = 2 . KB. Hallar : x/y.

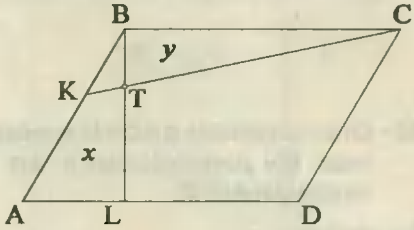
A) 1/3

B) 2/1

C) 3/1

D) 1

E) 4/3



7.- Si ABCD es un romboide. Calcular el área de la región sombreada; si $S_{ABCD} = 80\ m^2$.

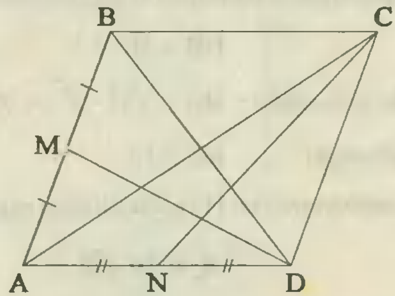
A) $4 m^2$

B) $6 m^2$

C) $8 m^2$

D) $10 m^2$

E) $12 m^2$



8.- En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$, por el punto medio "M" de $\overline{AC}$ se traza la mediatriz que intersecta a $\overline{BC}$ en N. Hallar el área de la región cuadrangular ABNH; si el área del triángulo ABC = $18\ m^2$.

A) $6\ m^2$ B) $12\ m^2$ C) $16\ m^2$

D) $15\ m^2$ E) $9\ m^2$

9.- En la figura las áreas A_1, A_2, A_3 y A_4 son iguales a $6\ m^2$, $x\ m^2$, $5\ m^2$ y $8\ m^2$, respectivamente. Hallar "x".

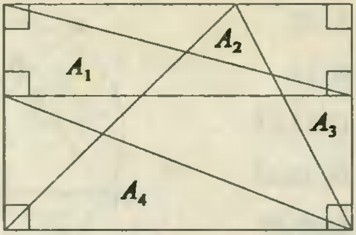
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



10.- En un trapecio ABCD, (BC < AD) se sabe que el área del triángulo BOC es 9 m^2 y el área del triángulo AOD es 16 m^2 (O es el punto de intersección de las diagonales). Hallar el área del cuadrilátero AMND; si AM = ME ; si AM = ME, EN = ND y $\overline{AB} \cap \overline{DC} = \{E\}$.

A) 112 m^2 B) 84 m^2 C) 28 m^2

D) 33 m^2 E) 46 m^2

11.- En el gráfico mostrado $\overline{CD}$ es diámetro BC = 4 , LM = 7 y BL = 5. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

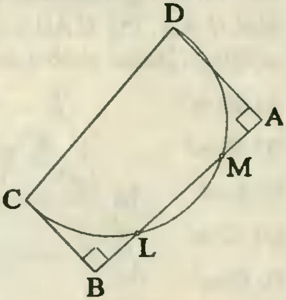
A) 160

B) 153

C) 150,5

D) 161,5

E) 165,5



12.- En la figura mostrada; calcular el máximo valor de "α"; para que el área de la región sombreada sea igual al área de la región no sombreada.

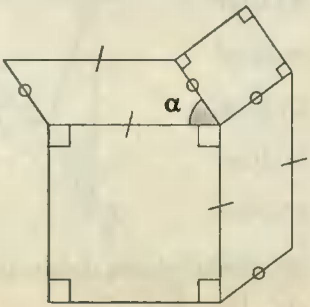
A) 30°

B) 45°

C) 60°

D) 90°

E) 120°



13.- Hallar : Sx.

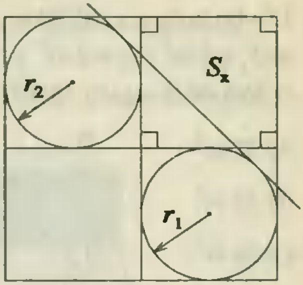
A) $r_1 r_2$

B) $2r_1 r_2$

C) $3r_1 r_2$

D) $4r_1 r_2$

E) $5r_1 r_2$

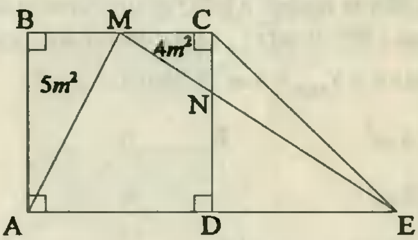


14.- En un rectángulo ABCD se tiene M y N puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AM}$ respectivamente . Hallar el área del Δ BNO ; si $S_{AMD} = 4\ m^2$.
O → Punto de intersección de $\overline{CN}$ con $\overline{BM}$.

A) 4 m^2 B) 6 m^2 C) 5 m^2

D) 3 m^2 E) 8 m^2

15.- Si ABCD es un cuadrado AB = DE . Hallar el área de la región triangular CEN.



A) 6 m^2 B) 9 m^2 C) 12 m^2

D) 18 m^2 E) 20 m^2

16.- Si ABCD es un cuadrado, BD = a y MR = b.

Hallar : $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{AMCR}}$

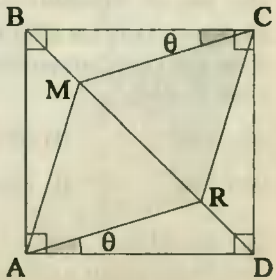
A) b/a

B) a/b

C) $(a + b)/2$

D) $(a - b)/2$

E) $ab/2$



17.- En la figura ABCD es un romboide, donde $S_1 = 3\ m^2$; $S_2 = 2\ m^2$ y $S_3 = 10\ m^2$. Hallar el área de la región ABCD.

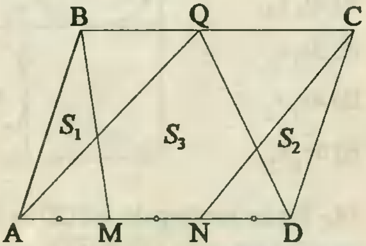
A) $22\ m^2$

B) $32\ m^2$

C) $28\ m^2$

D) $24\ m^2$

E) $30\ m^2$



18.- Dado un trapezoide ABCD cuya área es $90m^2$. Calcular el área del cuadrilátero que tiene como vértices los baricentros de los triángulos ABC; BCD, CDA y ABD.

A) $5m^2$ B) $6m^2$ C) $8m^2$

D) $10m^2$ E) $12m^2$

19.- En la figura, ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$) , M, N, P y Q son puntos medios y $S_{AMR} = 4\ m^2$. Calcular : $S_1 . S_2$.

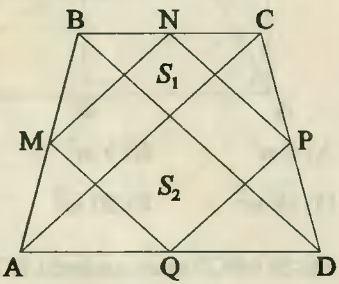
A) $4\ m^2$

B) $8\ m^2$

C) $12\ m^2$

D) $64\ m^2$

E) $32\ m^2$



20.- En un triángulo acutángulo ABC de $80m^2$ se trazan las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$. Hallar el área del cuadrilátero AFEC ; si AB = $20m$ y BE = $10m$.

A) $30\ m^2$ B) $40\ m^2$ C) $50\ m^2$

D) $60\ m^2$ E) $70\ m^2$

21.- Si : BC = 4 , AD = 7 y PB = 2 . Hallar el área de la región sombreada.

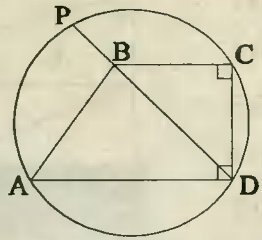
A) 22

B) 11

C) $11\sqrt{3}$

D) $12\sqrt{3}$

E) $33\sqrt{2}$



22.- En la figura; si ABCD es un romboide; $S_3 = 10\,m^2$ y $S_2 = 3\,m^2$. Hallar S_1.

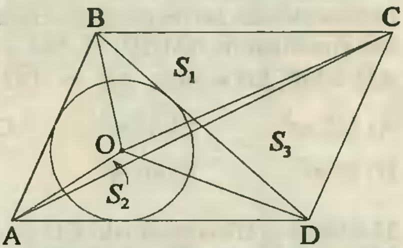
A) $13\,m^2$

B) $8\,m^2$

C) $7\,m^2$

D) $6\,m^2$

E) $5\ m^2$



23.- En la figura : ABCD, es un romboide $\overline{MN}$ // $\overline{AD}$, $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$; si : el área de RPCN es $20m^2$. Hallar el área de la región AMRQ.

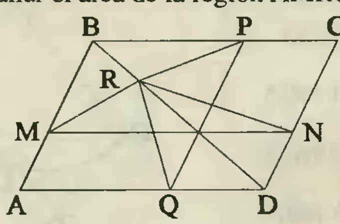
A) $20\ m^2$

B) $10\ m^2$

C) $5\ m^2$

D) $12\ m^2$

E) $15\,m^2$



24.- El lado del cuadrado ABCD mide $5m$. Hallar el área de la región sombreada.

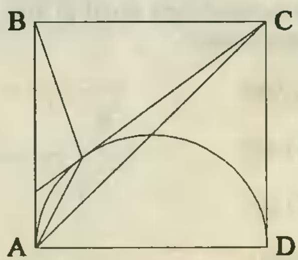
A) $10\,m^2$

B) $12\,m^2$

C) $15\,m^2$

D) $16\,m^2$

E) $18\ m^2$



25.- Hallar el área de la región sombreada; si AP . PL = $8\ m^2$.

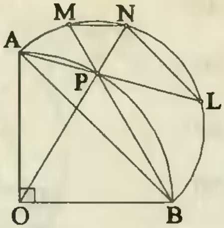
A) $2\ m^2$

B) $8\ m^2$

C) $6\ m^2$

D) $4\ m^2$

E) $16 m^2$



26.- Si el área del cuadrado es $100 m^2$. Hallar el área de la región sombreada, si : AP = CQ = AB.

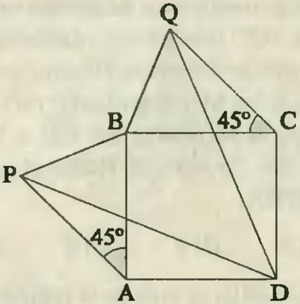
A) $10 m^2$

B) $20 m^2$

C) $50 m^2$

D) $100 m^2$

E) $80 m^2$



27.- En la figura, el área del paralelogramo ABCD es 60 m^2, M y N son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.

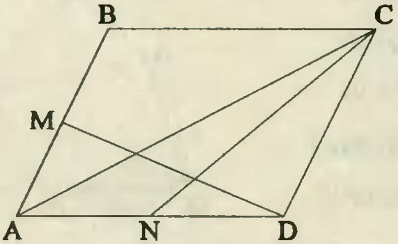
A) $7 m^2$

B) $8 m^2$

C) $9 m^2$

D) $10 m^2$

E) $11 m^2$



28.- En un trapecio ABCD ($\overline{AB} // \overline{CD}$), $\overline{MN}$ es la mediana del trapecio, se traza $\overline{NP} // \overline{AD}$ (P en $\overline{CD}$). Si el área del trapecio MNCD es 16 m^2 y del triángulo NCP es 4 m^2. Hallar la relación de áreas de los trapecios ABNM y ABCD.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 3/5 E) 4/5

29.- El área de un trapezoide es 18. Hallar el área del cuadrilátero que se forma al trazar paralelas a las diagonales del trapezoide, por los cuatro vértices.

A) 30 B) 25 C) 18 D) 36 E) 72

30.- Hallar el área del trapecio rectángulo ABCD, sabiendo que ; DE = 4 , EA = 6 , AB = 8

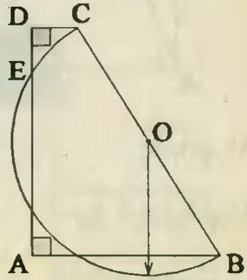
A) 24

B) 48

C) 32

D) 55

E) N.A.



31.- Se tiene un rombo ABCD, "P" es punto medio de $\overline{BC}$, AP = 9 y DP = 13 . Hallar el área del rombo.

A) 12 B) $24\sqrt{5}$ C) $24\sqrt{7}$

D) $24\sqrt{14}$ E) N.A.

32.- Dado los cuadrados ABCD y DEFG, tal que E es el punto interior al cuadrado ABCD y C esta en $\overline{EF}$. Si las áreas de las regiones BCEDA y CFGD es 19 y 10, respectivamente. Hallar EC.

A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

33.- En el gráfico mostrado, hallar el área de la superficie trapecial ABCD, si $m\overset{\frown}{CD} = 150$ y BM = MA.

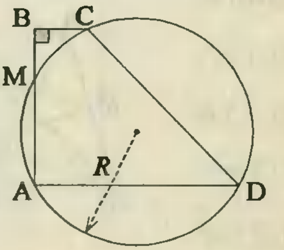
A) $R^2\sqrt{2}$

B) $2R^2$

C) R^2

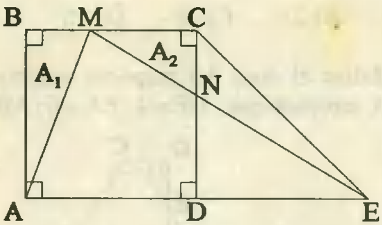
D) $R^2\left(\sqrt{5}-1\right)$

E) $R^2\left(\sqrt{3}-1\right)$



34.- Si ABCD es un cuadrado, AB = DE. Hallar el área del triángulo CEN, si :

Área (Δ ABM) = A_1 y el *Área* (Δ MCN) = A_2



A) $\sqrt{A_1A_2}$

B) $\sqrt{A_2(A_1+A_2)}$

C) $\sqrt{A_1(A_1+A_2)}$

D) $\sqrt{2A_1A_2}$

E) $\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}$

35.- Del gráfico : Si CEOA es un trapecio isósceles. Hallar el área de la región que este encierra; si B es punto de tangencia, CD = 2 y O es centro.

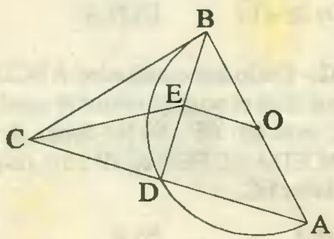
A) 4

B) $4\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{2}$

D) 8

E) $8\sqrt{2}$



36.- En la figura ABCD es un romboide cuya área es 15 m^2. Calcular el área de la región sombreada.

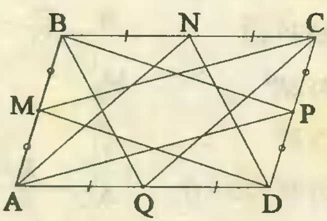
A) 0,5 m^2

B) 1 m^2

C) 1,5 m^2

D) 2 m^2

E) 2,5 m^2



37.- Siendo "O" el centro y el área del triángulo ABC es 120. Hallar el área del cuadrilátero : MBNO.

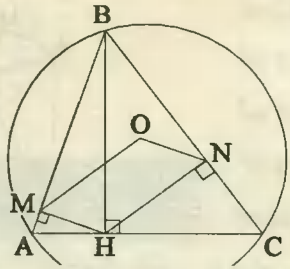
A) 40

B) 50

C) 60

D) 70

E) 80



38.- En un cuadrado ABCD, se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, que pasa por "O" (centro del cuadrado) y la circunferencia de diámetro $\overline{OC}$ que intersecta a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ en M y N y el arco $\overline{OD}$ en S. Luego se traza la perpendicular $\overline{CH}$ a la prolongación de $\overline{SN}$. Si AB = 8. Hallar el área de la región MHDN.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

39.- Hallar el área de la región ABO_1O, si O y O_1 son centros.

$O_1O = 10$; $m\,\overset{\frown}{AO} = 35°$ y $m\,\overset{\frown}{BO_1} = 18°$.

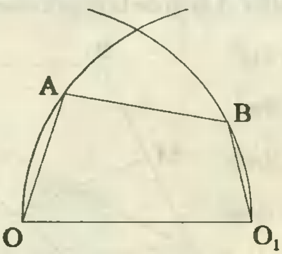
A) 20

B) 40

C) 30

D) $20\sqrt{2}$

E) $10\sqrt{2}$



40.- Hallar el área de la región sombreada, si $r = 1$

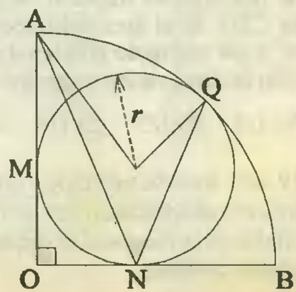
A) $\dfrac{(2+\sqrt{2})}{2}$

B) $(\sqrt{2}+1)$

C) $\dfrac{(\sqrt{2}+2)}{4}$

D) $\sqrt{2}/2$

E) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{4}$



CAP. 21

áreas de regiones poligonales

El presente capítulo tiene por finalidad atender los problemas que involucran las áreas de cualquier región poligonal (Triángulo, cuadrilátero, Pentágono, etc), para lo cual haremos uso de las propiedades dadas en los capítulos 18, 19 y 20, además de las que exponemos a con-tinuación.

21.1 ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

El área de un polígono regular es igual al semiperímetro multiplicado por el apotema.

En la *Fig.*21.1 tenemos :

$$AB = l_n$$

$$OH = ap_n \quad y \quad m\angle AOB = \frac{360}{n}$$

Si el área del polígono regular ABC es A, entonces :

$$A = \frac{nl_n}{2} \cdot ap_n \qquad \text{... (21.1)}$$

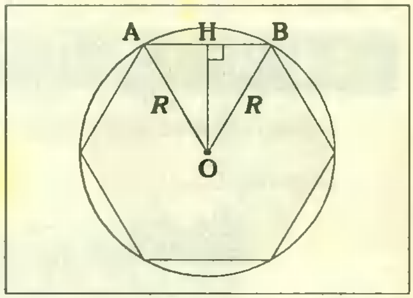


Fig. 21.1

También : $A = n\,[\acute{A}rea\ \Delta\, AOB] \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{nR^2}{2}\ \text{sen}\left(\dfrac{360}{n}\right)$ **... (21.2)**

21.2 ÁREA DE UN HEXÁGONO REGULAR

Si "l" es la longitud del lado del hexágono regular ABCDEF, se cumple :

$$A = \frac{3}{2}\, l^2 \sqrt{3} \qquad \text{... (21.3)}$$

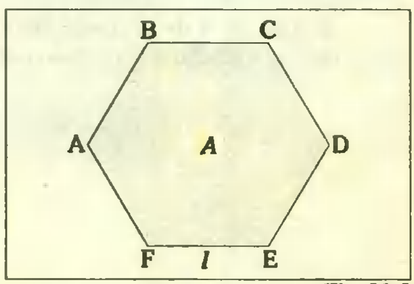


Fig. 21.2

21.3 ÁREA DE UN OCTÓGONO REGULAR

Si A es el área del octógono regular

Entonces : $$A_8 = 2R^2\sqrt{2} \qquad \text{... (21.4)}$$

Como : $$l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad A_8 = 2(\sqrt{2}+1)\, l_8^2 \qquad \text{... (21.5)}$$

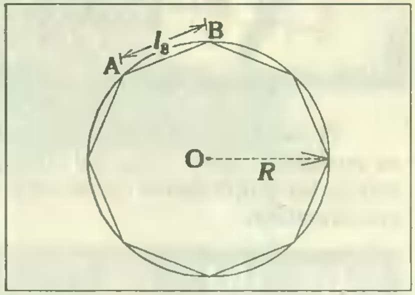


Fig. 21.3

21.4 ÁREA DE UN DECÁGONO REGULAR

Siendo A el área del decágono regular

Se cumple :

$$A_{10} = \frac{5}{4} R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad \text{... (21.6)}$$

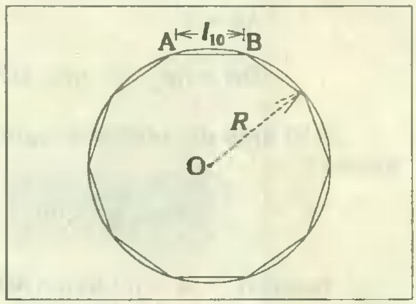


Fig. 21.4

21.5 ÁREA DE UN DODECÁGONO REGULAR

El área de A de un dodecágono regular en función del circunradio R esta dado por :

$$A_{12} = 3R^2 \qquad \text{... (21.7)}$$

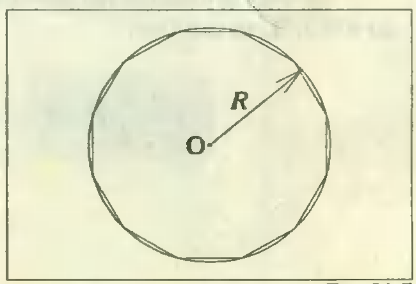


Fig. 21.5

21.6 ÁREA DE UN PENTÁGONO REGULAR

El área A_5 de un pentágono regular en función del circunradio "R" está dado por :

$$A_5 = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad \text{... (21.8)}$$

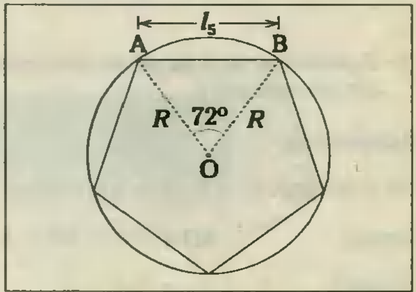


Fig. 21.6

21.7 ÁREA DE UN ICOSÁGONO REGULAR

El área A_{20} de un icoságono regular en función del circunradio "R" es :

$$A_{20} = \frac{5}{2}R^2(\sqrt{5} - 1) \quad \text{... (21.9)}$$

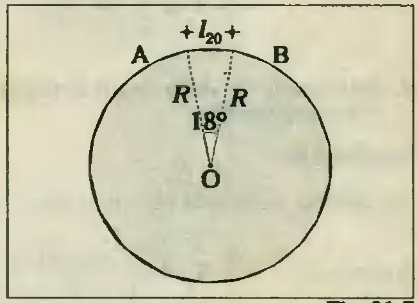


Fig. 21.7

PROPIEDAD

Dado un polígono regular de n lados $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ y un punto P interior a él, si las longitudes de las perpendiculares trazadas desde P a los lados del polígono son :

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$

Luego es válida la relación :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\, ap_n \quad \text{... (21.10)}$$

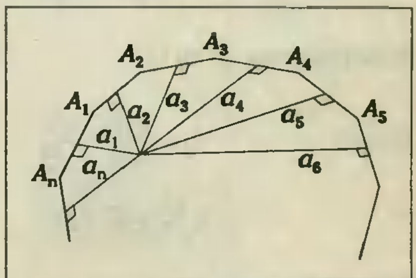


Fig. 21.8

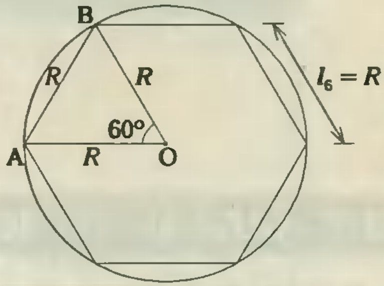
Donde :

ap_n : apotema

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Determinar el área de un hexágono regular, en función del radio «R» de la circunferencia circunscrita.

Resolución.-



En el gráfico, el Δ AOB es equilátero

Donde : $AO = OB = AB = R$

Luego : $S_6 = 6(S_{\Delta AOB})$

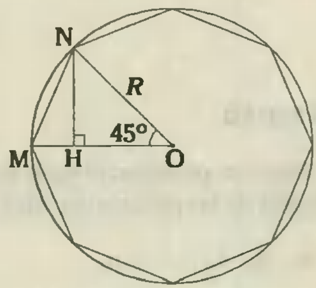
Entonces : $S_6 = 6\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore$ $\boxed{S_6 = \dfrac{3}{2}R^2\sqrt{3}}$ (item 21.2)

2.- Determinar el área de un octógono regular en función del radio «R» de la circunferencia circunscrita.

Resolución.-

Del gráfico, podemos observar que : $S_8 = 8\,(S_{\Delta MNO})$



Entonces : $S_8 = 8\left(\dfrac{OM \cdot NH}{2}\right)$

Donde : $S_8 = 8\left(\dfrac{R \cdot NH}{2}\right)$

Luego : $S_8 = 4R\,(NH)$ ... (1)

En el ⊿ NHO : $NH = \dfrac{ON}{\sqrt{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $S_8 = 4R\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$

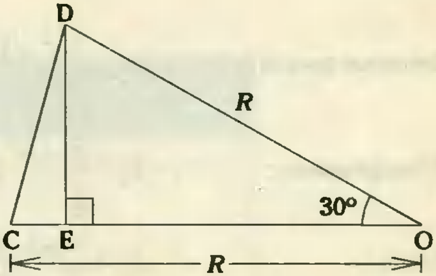
Ahora : $S_8 = \dfrac{4R^2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\boxed{S_8 = 2R^2\sqrt{2}}$ (item 21.3)

3.- Determinar el área de un dodecágono regular en función del radio «R» de la circunferencia circunscrita.

Resolución.-

Con el Δ ODC, elemento fundamental de éste polígono : $S_{12} = 12\,(S_{\Delta\,ODC})$



Es decir: $S_{12} = 12\left(\dfrac{OC \cdot DE}{2}\right)$

Donde : $S_{12} = 12\left(\dfrac{R \cdot DE}{2}\right)$

Ahora : $S_{12} = 6\,R\,(DE)$ ... (1)

Del ⊿ OED : $DE = \dfrac{OD}{2} \Rightarrow DE = \dfrac{R}{2}$ ... (2)

Reemplazamos (2) en (1) : $S_{12} = 6\,R\left(\dfrac{R}{2}\right)$

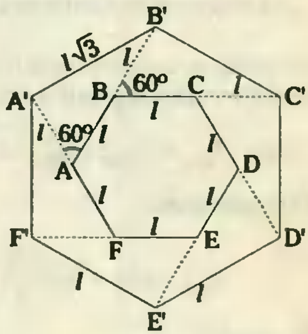
$\therefore$ $\mathbf{S_{12} = 3\,R^2}$ (item 21.5)

4.- El lado de un hexágono regular es «l». Se prolongan los lados en un mismo sentido y una longitud igual a «l». Hallar el área del polígono que tiene por vértices los extremos de dichas prolongaciones.

Resolución.-

Sea ABC ... F el polígono original y A'B'C'... F' el de los extremos de las prolongaciones.

Notamos que el Δ AA'B' es recto en A' ya que : AB' = 2 AA'



También : ∢ A'AB'= 60°

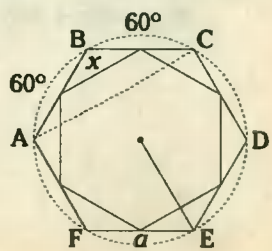
Luego A' B'= $l\sqrt{3}$, que viene a ser la longitud del lado del hexágono regular A'B'C' ... F'

Ahora por el item 21.2, tenemos : $S' = \dfrac{3}{2}(l\sqrt{3})^2\,\sqrt{3}$

$\therefore$ $\mathbf{S' = \dfrac{3}{2}l^2\sqrt{3}}$

5.- Hallar el área del hexágono que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un hexágono regular, cuyo lado mide «a»

Resolución.-



Sea ABC ... F el hexágono mayor, de lado «a».

La longitud del lado del otro es «x»

Del gráfico en el D ABC : $x = \dfrac{AC}{2}$ (Base Media)

Siendo : $AC = l_3 = R\sqrt{3}$

Luego : $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Entonces para el área S_x : $S_x = \left(\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Reemplazando : $S_x = \dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}$

Ahora : $S_x = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a^2\cdot 3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}$

$\therefore$ $\boldsymbol{S_x = \dfrac{9}{8}\,a^2\sqrt{3}}$

6.- Un hexágono ABCDEF tiene sus ángulos congruentes y sus lados son tales que :

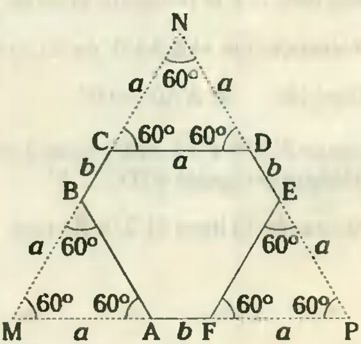
AB = CD = EF = a y BC = DE = FA = b.

Siendo a > b, calcular el área de dicho hexágono.

Resolución.-

Cada ángulo exterior del hexágono mide : $\dfrac{360°}{6} = 60°$.

De modo que al prolongar los lados como indica la figura, se obtienen los triángulos equiláteros CND, EFP, AMB, MNP



Luego : $S_{hex} = S_{MNP} - S_{MBA} - S_{CND} - S_{FEP}$

Reemplazando :

$$S_{hex} = (2a+b)^2\,\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

De donde :

$$\boldsymbol{S_{hex} = (a^2 + 4ab + b^2)\,\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

MISCELÁNEA

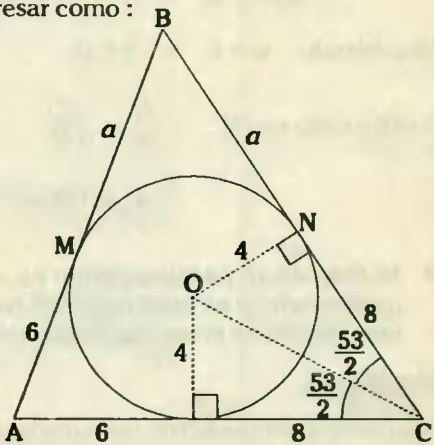
1.- El inradio de un triángulo mide 4m y la circunferencia inscrita determina sobre uno de los lados, segmentos de longitudes 6m y 8m. Hallar el área del triángulo.

Resolución.-

En el ⊿ ONC : $m \measuredangle \text{OCN} = \dfrac{53}{2} \quad \Rightarrow \quad m \measuredangle \text{C} = 53$

Se sabe que el área A_x de la región ABC se puede expresar como :

$$A_x = p \cdot r = \frac{1}{2}\,(\text{AC} \cdot \text{BC})\ \text{sen}\ 53^{\circ}$$



Reemplazando : $(8 + 6 + a)4 = \dfrac{1}{2}\,(14)\,(8 + a)\,\dfrac{4}{5}$

Donde : $10(14 + a) = 14\,(8 + a)$

Operando : $140 + 10a = 112 + 14a$

Entonces : $28 = 4a$

Ahora : $a = 7$

Luego : $A_x = (8 + 6 + 7) \cdot 4$

$\therefore \quad \boxed{A_x = 84\ m^2}$

2.- La base de un triángulo isósceles mide 15 y una de sus alturas iguales mide 12. Hallar su área.

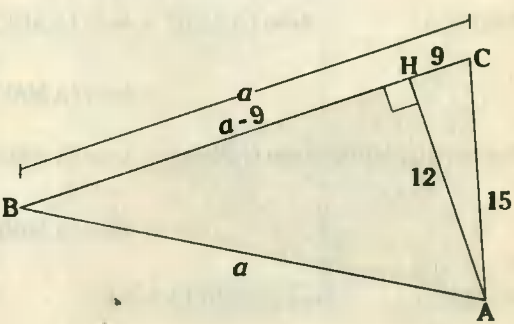
Resolución.-

En el ⊿ AHC : $\text{HC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

En el ⊿ BHA : $a^2 = (a - 9)^2 + 122$

Donde : $a^2 = a^2 - 18\,a + 81 + 144$

Ahora : $18\,a = 225 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{25}{2}$



Luego : *Área* $(\Delta\,\text{ABC}) = \left(\dfrac{25}{2}\right)\left(\dfrac{12}{2}\right)$

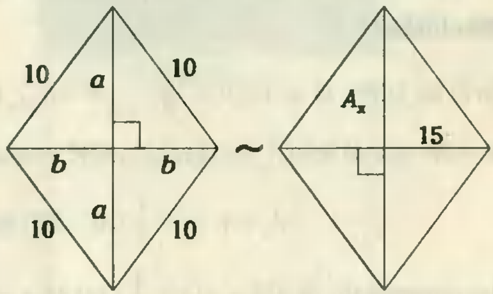
$\therefore \quad \boxed{\textit{Área}\ (\Delta\,\text{ABC}) = 75\ u^2}$

3.- El área de un rombo es 96m² y su lado 10m. Calcular el área de otro rombo semejante al anterior, cuya diagonal menor es de 15m.

Resolución.-

Por relación de áreas entre dos polígonos semejantes se tiene :

$$\frac{A_x}{96} = \frac{15^2}{4b^2} \ldots (1)$$



Por dato del problema :

$$2\,ab = 96 \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = 100$$

Resolviendo : $a = 8$ y $b = 6$

Sustituyendo en (1) : $\dfrac{A_x}{96} = \dfrac{225}{144}$

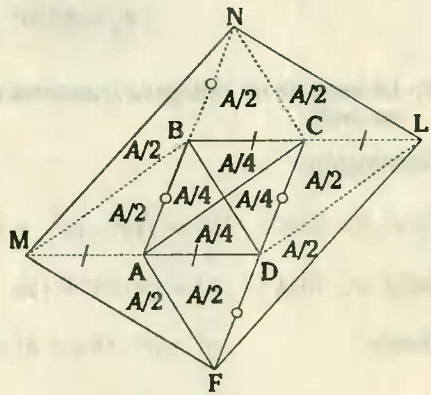
$$\therefore \quad \boxed{A_x = 150\, m^2}$$

4.- El área de un paralelogramo es «A» se prolongan los lados en un mismo sentido (antihorario) y en igual longitud cada uno de los lados respectivos, se unen los extremos de dichas prolongaciones. Calcular el área del cuadrilátero formado.

Resolución.-

Aplicando la propiedad de la mediana se tiene :

Área (Δ CDL) = *Área* (Δ BCD) = $\dfrac{A}{2}$ = *Área* (Δ DLF)



De igual manera : *Área* (Δ ABC) = *Área* (Δ BCN)

= *Área* (Δ NCL) = $\dfrac{A}{2}$

También : *Área* (Δ ACD) = *Área* (Δ ADF)

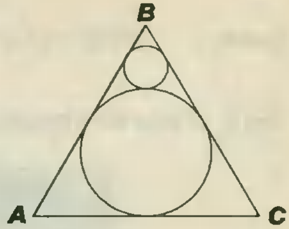
= *Área* (Δ MAF) = $\dfrac{A}{2}$

Por consiguiente: *Área* (Δ MBA) = *Área* (Δ ABD)

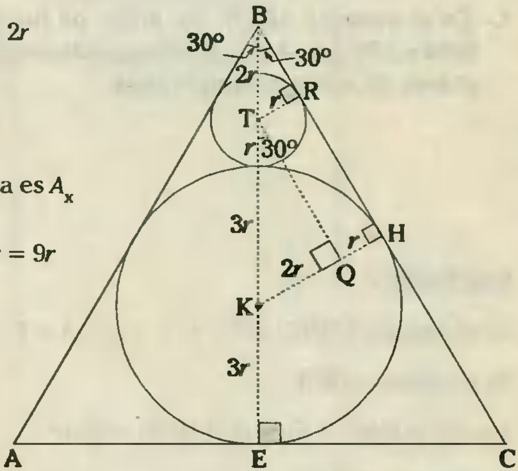
= *Área* (Δ MBN) = $\dfrac{A}{2}$

Finalmente : $\boxed{\textit{Área}\ (\square\, \text{MNLF}) = 5\,A}$

5.- En la figura. Hallar el área del triángulo isósceles ABC; sabiendo que los radios de las circunferencias miden rm y 3rm ($r = 14\sqrt{3}$)



Resolución.-



Trazamos $\overline{TQ} \perp \overline{KH}$, luego : $QH = r$ y $KQ = 2r$

En el ⊿ TQK : $m\measuredangle KTQ = 30^\circ = m\measuredangle KBH$

En el ⊿ TBR de 30º y 60º : $BT = 2r$

El triángulo ABC resulta ser equilátero si su área es A_x

Luego : $A_x = \dfrac{(BE)^2\sqrt{3}}{3}$, $BE = 2r + r + 3r + 3r = 9r$

De donde : $A_x = \dfrac{(9r)^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{81r^2\sqrt{3}}{3}$

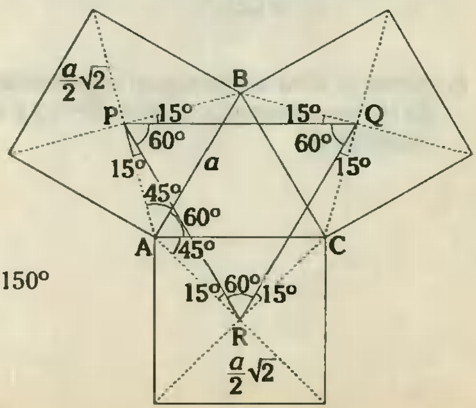
Reemplazando : $A_x = \dfrac{81(14\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\ A_x = \dfrac{81\cdot 14^2\cdot 3\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad A_x = 81\cdot 196\cdot\sqrt{3}$

$\therefore\ \boldsymbol{A_x = 15876\sqrt{3}}$

6.- Sobre los lados de un triángulo equilátero de lado «a» se construyen exteriormente cuadrados. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los centros de esos cuadrados.

Resolución.-



Del gráfico observamos que :

$\Delta PBQ \cong \Delta PAR \cong \Delta QCR$ (LAL)

$\Rightarrow\ PQ = QR = PR$

En el Δ PAR, por ley de cosenos :

$$(PR)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cos 150^\circ$$

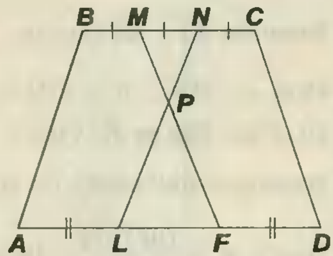
Ahora : $(PR)2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} - a^2.\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donde : $(PR)2 = a^2 + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}\,(2 + \sqrt{3})$

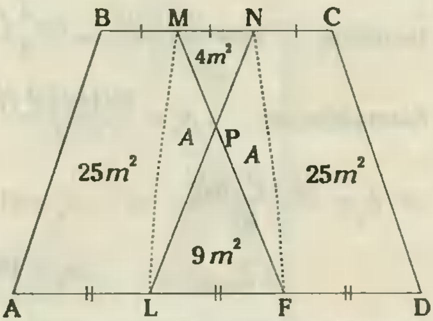
Sea A_x el área del triángulo equilátero PQR, luego : $A_x = \dfrac{(PR)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \qquad Ax = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})$$

7.- En el trapecio ABCD, las áreas de los triángulos MPN y LPF son $4m^2$ y $9\ m^2$ respectivamente. Hallar el área de la región sombreada.



<u>**Resolución**</u>.-



En el trapecio LMNF : $A^2 = 4 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad A = 6$

En el trapecio ABNF :

Área (□ABML) = *Área* (□LMNF) = $25m^2$

En el trapecio LMCD :

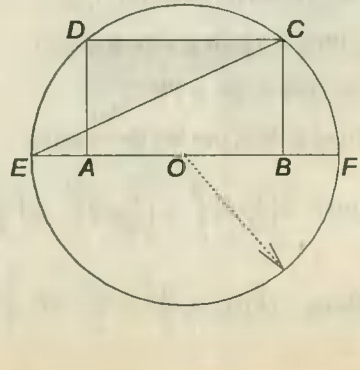
Área (□LMNF) = *Área* (□FNCD) = $25m^2$

Finalmente si A_x es el área de la región sombreada :

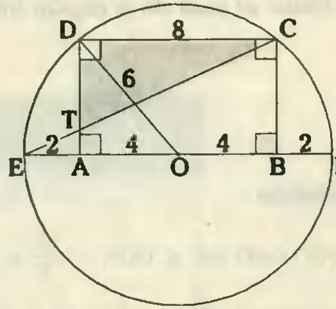
$$A_x = 25 + 6 + 6 + 25$$

$$\therefore \qquad A_x = 62m^2$$

8.- Hallar el área de la región sombreada si el radio de la circunferencia mide 6, BF = 2 y ABCD es un rectángulo.



Resolución.-



En el ⊿ DAO: $DA = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$

⊿ EAT ~ ⊿ TDC : $\dfrac{AT}{TD} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

De donde : $AT = \dfrac{TD}{4}$

Como : $AT + TD = 2\sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{TD}{4} + TD = 2\sqrt{5}$

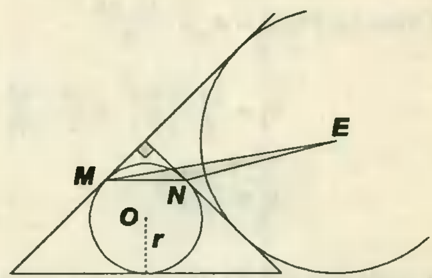
$\Rightarrow TD = \dfrac{8}{5}\sqrt{5}$

Finalmente : *Área* (⊿TDC) = $\dfrac{TD.DC}{2}$

Reemplazando *Área* (⊿ TDC) = $\dfrac{8}{5}\sqrt{5} \cdot \dfrac{8}{2}$

$\therefore$ **Área (⊿ TDC) = $\dfrac{32}{5}\sqrt{5}$**

9.- En la figura mostrada : M y N son puntos de tangencia, O y B son centros y r = 2m. Calcular el área de la región triangular MNE.



Resolución.-

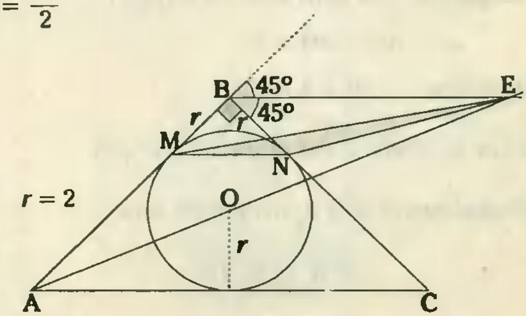
Ya que E es excentro, entonces $\overline{BE}$ es bisectriz, con lo cual se tiene : $m \measuredangle EBC = 45°$

El ⊿ MBN es de 45°, luego *Área* (⊿ MBN) = $\dfrac{r^2}{2}$

Puesto que : $\overline{BE} // \overline{MN}$

$\Rightarrow$ *Área* (⊿ MBN) = *Área* (Δ MEN)

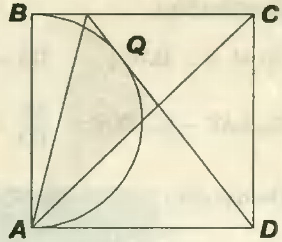
Reemplazando : $\dfrac{r^2}{2}$ = *Área* (Δ MEN) , donde : $r = 2$



$\therefore$ **Área (Δ MEN) = 2**

10.- En la figura ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4cm, siendo «Q» punto de tangencia.

Hallar el área de la región triangular sombreada.



Resolución.-

En el ⊿ OAD : $m\measuredangle ODA = \dfrac{53}{2} = m\measuredangle ODP \Rightarrow m\measuredangle POC = 37°$

En el trapecio ASCD : *Área* (Δ PCD) = A_x

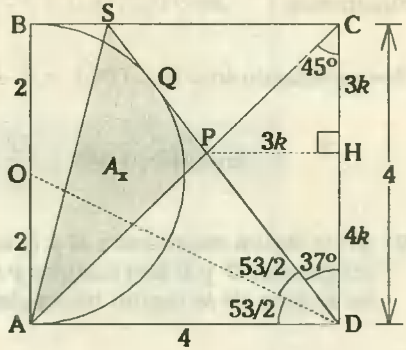
Trazamos $\overline{PH} \perp \overline{CD}$

Luego : PH = HC = $3k$ y HD = $4k$

De donde : $7k = 4$ y $k = \dfrac{4}{7}$

El área (Δ PCD) = $A_x = \dfrac{7k.3k}{2}$

$$A_x = \frac{21}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{21}{2}\cdot\frac{16}{49}$$



$$\therefore \quad A_x = \frac{24}{7}m^2$$

11.- Calcular el área de un rombo si las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados son 5m y 3m.

Resolución.-

Del gráfico : ⊿ BHA ≅ ⊿ CMD (ALA)

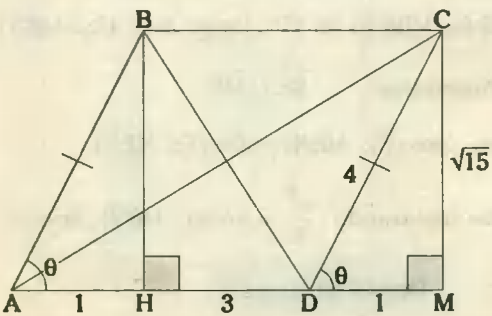
$\Rightarrow$ AH = DM = 1

De donde : AD = 4 = CD

En el ⊿ CMD : CM = $\sqrt{4^2-1^2} = \sqrt{15}$

Finalmente el área A_x del rombo sera :

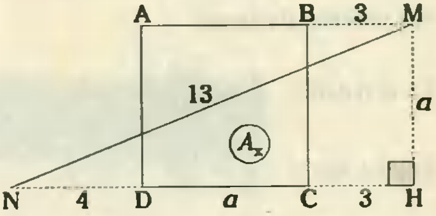
$$\therefore \quad A_x = 4\sqrt{15}$$



12.- ABCD es un cuadrado, se prolongan los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en segmentos BM = 3m y DN = 4m. Calcular el área del cuadrado, si MN = 13m.

<u>Resolución</u>.-

Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{NC}$



Luego en el ⊾MHN : $(13)^2 = a^2 + (7 + a)^2$

Ahora : $169 = a^2 + 49 + a^2 + 14a$

Donde : $2a^2 + 14a - 120 = 0$

Simplificando : $a^2 + 7a - 60 = 0$ (Aspa simple)

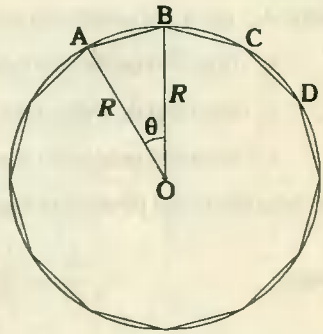
$$\begin{matrix} a & -5 \\ a & +12 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

$\therefore \quad \boxed{A_x = 25\ m^2}$

13.- Hallar el área de un dodecágono regular inscrito a una circunferencia de radio «R»:

<u>Resolución</u>.-

Sea A_x el área de dodecágono regular ABCD ....



Luego : $A_x = 12\ [\acute{A}rea\ (\Delta\ AOB)\ ]$ ... (1)

$$\acute{A}rea\ (\Delta\ AOB) = \frac{1}{2}R^2\ \text{sen}\ \theta\ ;\ \theta = \frac{360}{12} = 30^{o}$$

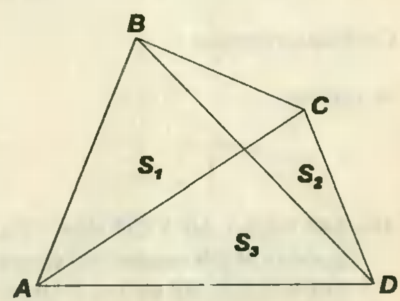
$$\Rightarrow \acute{A}rea\ (\Delta\ AOB) = \frac{1}{2}R^2\ \text{sen}\ 30^{o} = \frac{R^2}{4}$$

Sustituyendo en (1) $A_x = 12\left(\frac{R^2}{4}\right)$

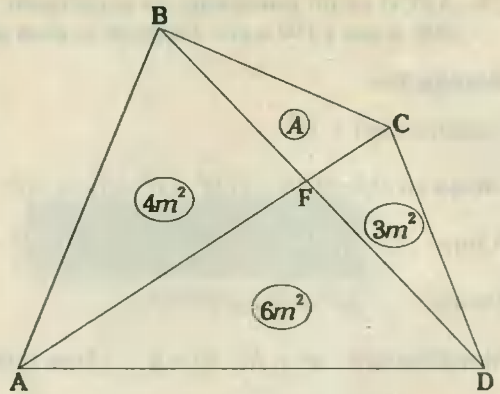
$\therefore \quad \boxed{A_x = 3R^2}$

14.- En la figura mostrada. Hallar el área del trapezoide ABCD, si :

$$S_1 = 4m^2,\ S_2 = 3m^2,\ y\ S_3 = 6m^2$$



Resolución.-



Sea A_x el área del trapezoide ABCD

Luego : $A_x = 13 + A \text{ ... } (1)$

Por relación de *Áreas*

En el Δ ABC : $\dfrac{4}{A} = \dfrac{AF}{FC}$

En el Δ ADC : $\dfrac{6}{3} = \dfrac{AF}{FC}$

De donde : $\dfrac{4}{A} = \dfrac{6}{3} \Rightarrow A = 2m^2$

Sustituyendo en (1) : $A_x = 13 + 2$

$$\therefore \quad A_x = 15\,m^2$$

15.- Los lados de 3 octógonos regulares miden 1, 2 y 3m. Calcular el lado de otro octógono regular cuya área sea igual a la suma de las áreas de los polígonos dados.

Resolución.-

Sean : A_1 : área del octógono de lado 1

A_2 : área del octógono de lado 2

A_3 : área del octógono de lado 3

A_x : área del octógono de lado x

Por condición del problema los octógonos regulares son semejantes

Luego : $\dfrac{A_1}{1^2} = \dfrac{A_2}{2^2} = \dfrac{A_3}{3^2} = \dfrac{A_x}{x^2}$

Por leyes de proporción : $\dfrac{A_1 + A_2 + A_3}{1+4+9} = \dfrac{A_x}{x^2}$

Considerando que : $A_x = A_1 + A_2 + A_3$

Se obtiene : $x^2 = 14$

$$\therefore \quad x = \sqrt{14}$$

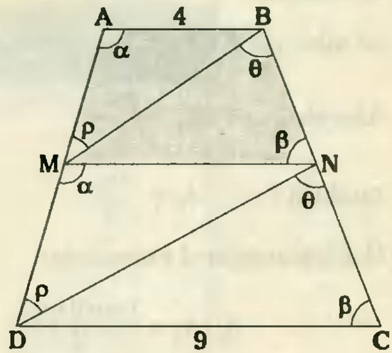
16.- Las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio ABCD miden 4 y 9 sobre $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N respectivamente de modo que $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{MB}$ // $\overline{DN}$. Hallar la relación entre las áreas de los trapecios MABN y DMNC.

Resolución.-

Por ser $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, se cumple : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{MN^2 - 4^2}{9^2 - MN^2}$ (Propiedad)

Donde : A_1 : área del trapecio MABN

A_2 : área del trapecio AMNC



Por ángulos correspondientes entre paralelas se tiene :

$m\measuredangle MBN = m\measuredangle DNC = \theta$

$m\measuredangle MNB = m\measuredangle DCN = \beta$

$m\measuredangle MAB = m\measuredangle DMN = \alpha$

$m\measuredangle AMB = m\measuredangle MDN = \rho$

Los trapecios MABN y DMNC son semejantes

Luego : $\dfrac{4}{MN} = \dfrac{MN}{9} \Rightarrow MN = 6$

Sustituyendo en la expresión anterior : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{6^2 - 4^2}{9^2 - MN^2} = \dfrac{36-16}{81-36}$

$\therefore \quad \boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{4}{9}}$

17.- Calcular el área de un cuadrilátero circunscrito a un círculo de radio 3m cuya diagonal $\overline{AC}$ pasa por el centro «O» del círculo, OA = 6m; los ángulos A y C son suplementarios.

Resolución.-

En el ⊿ AKO : OA = 2OK $\Rightarrow m\measuredangle OAK = 30° = m\measuredangle BAO$

De donde $m\measuredangle BAD = 60°$ y $m\measuredangle BCA = m\measuredangle ACD = 60°$

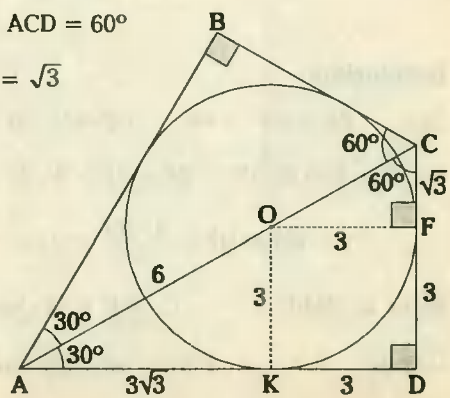
En el ⊿ OFC de 30° y 60° : OC = 2 ; $\sqrt{3}$ y CF = $\sqrt{3}$

Sea A_x el área del cuadrilátero ABCD

Luego : $A_x = 2\,\text{Área}$ (⊿ ADC)

Reemplazando : $A_x = 2 \cdot \dfrac{(3+\sqrt{3})(3+3\sqrt{3})}{2}$

$\therefore \quad \boxed{A_x = 6\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})}$

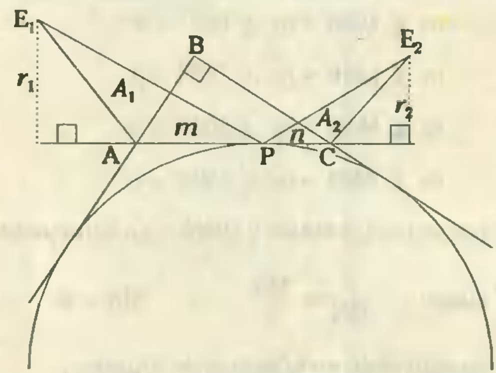


18.- En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la circunferencia ex - inscrita referente a $\overline{AC}$ toca a esta en P, siendo E_1 y E_2 los excentros referentes a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Calcular el área de la región ABC, si el producto de las áreas de las regiones E_1AP y PE_2C es $16m^2$.

Resolución.-

Se sabe que el área A_x del ⊿ ABC está dado por : $A_x = mn$ ... (1)

Además : $A_1 = \dfrac{mr_1}{2}$



También : $A_2 = \dfrac{nr_2}{2}$

Multiplicando las 2 expresiones

$$A_1 . A_2 = \frac{(mn)(r_1r_2)}{4}$$

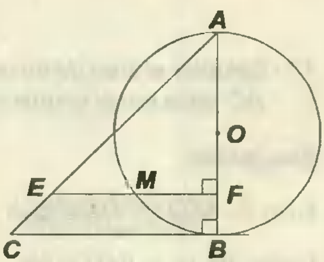
Como : $A_1 . A_2 = 16$; $mn = A_x$ y $r_1 . r_2 = A_x$

Se tiene : $16 = \dfrac{(A_x)(A_x)}{4} \Rightarrow A_x^2 = 64$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = 8\,m^2}$$

19.- En la figura, el radio mide 2 cm , AB = BC y EM = MF.

Hallar el área sombreada.

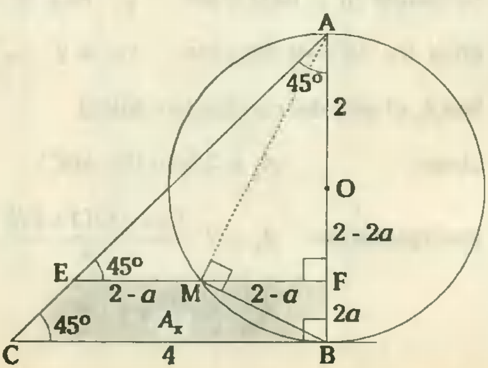


Resolución.-

Sea : BF = $2a$ $\Rightarrow$ OF = $2 - 2a$

En el ⊿ EFA de 45° : EF = AF = $4 - 2a$

y EM = MF = $\dfrac{4-2a}{2} = 2 - a$



En el ⊿ AMB : $(2 - a)^2 = (4 - 2a)(2a)$

Donde : $4 + a^2 - 4a = 8a - 4a^2$

Simplificando : $5a^2 - 12a + 4 = 0$ (Aspa simple)

$$\begin{array}{ccc} 5a & \searrow\!\!\!\nearrow & -2 \\ a & & -2 \end{array}$$

De donde : $a = \frac{2}{5}$

Como el área pedida A_x es : $A_x = \left(\frac{EF+BC}{2}\right)FB$

Se tiene : $A_x = \frac{(4-2a+4)}{2}(2a) = (4-a)\,2a$

Luego : $A_x = \left(4-\frac{2}{5}\right)2$

$$A_x = \frac{72}{25}\ cm^2$$

20.- Calcular la razón de las áreas de un hexágono regular y otro formado al unir los puntos medios de los lados del primero.

<u>Resolución</u>.-

Sean: A_1 el área del hexágono de lado «a» ; A_2 el área del hexágono de lado b.

Nos piden : $\frac{A_1}{A_2}$

Puesto que : $A_1 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

y $A_2 = \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$

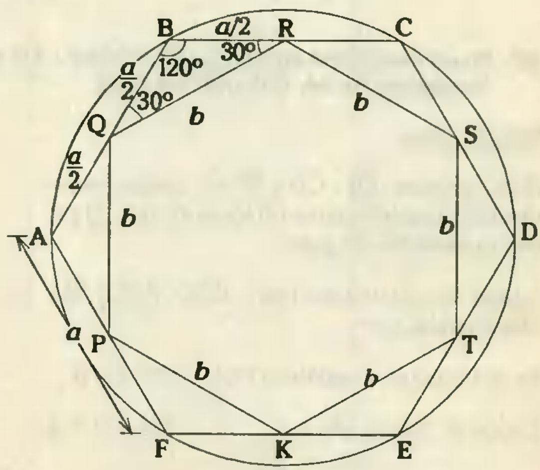
Luego : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2}{b^2}$ ... (1)

En el Δ QBR : $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

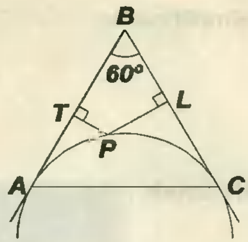
$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1)

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{3}$$



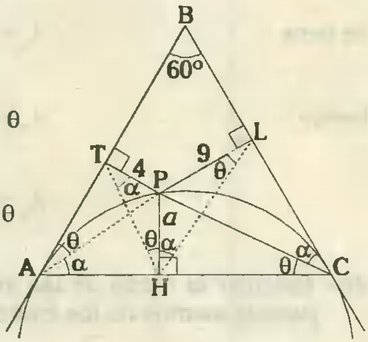
21.- A partir del gráfico mostrado se pide calcular el área de la región ABC, si PT = 4 y PL = 9



Resolución.-

Trazamos $\overline{PH} \perp \overline{AC}$, luego siendo «$h$» la altura del triángulo equilátero ABC se tiene :

$$h = 4 + a + 9 \quad \Rightarrow \quad h = 13 + a \;...\;(1)$$



En el cuadrilátero inscriptible ATPH :

$m\measuredangle \text{HTP} = m\measuredangle \text{PAH} = \alpha$ y $m\measuredangle \text{TAP} = m\measuredangle \text{THP} = \theta$

En el cuadrilátero inscriptible HPLC :

$m\measuredangle \text{PHL} = m\measuredangle \text{PCL} = \alpha$ y $m\measuredangle \text{PLH} = m\measuredangle \text{PCH} = \theta$

$\Delta\ \text{TPH} \sim \Delta\ \text{HPL} : \quad \dfrac{a}{9} = \dfrac{4}{a} \quad \Rightarrow \quad a = 6$

Sustituyendo en (1) : $h = 19$

Luego el área A del triángulo equilátero ABC será :

$$A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{19^2\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{361\sqrt{3}}{3}}$$

22.- En un hexágono equiángulo ABCDEF : AB = 6 , CD = 5 y EF = 4 , si el perímetro de dicho hexágono es 24. Calcular su área.

Resolución.-

Prolongamos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ en ambos sentidos hasta intersectarse en los puntos P , Q y R como muestra la figura.

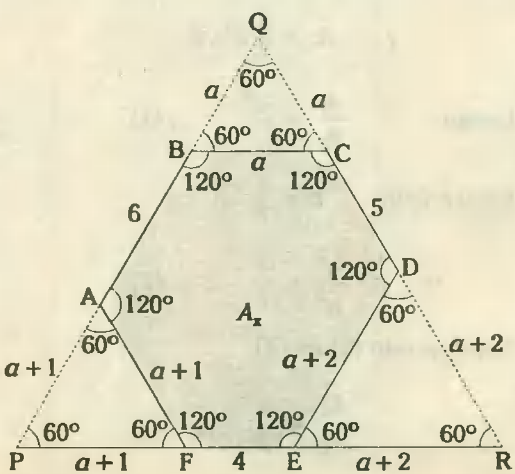
Luego : los triángulos PQR , BQC , DRE y PAF son equiláteros.

En el triángulo equilátero PQR : AQ = FR

Luego si : BQ = QC = a $\Rightarrow$ ER = a + 2

Análogamente : PB = CR

Luego : PA = a + 1



Por condición del problema : $6 + a + 5 + a + 2 + 4 + a + 1 = 24 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

Finalmente $\quad A_x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(PQ^2 - BQ^2 - ER^2 - PA^2)$

Reemplazando : $\quad A_x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(11^2 - 2^2 - 4^2 - 3^2)$

Luego : $\quad A_x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(121 - 4 - 16 - 9)$

$\therefore \quad$ **$A_x = 23\sqrt{3}$**

23.- El radio de la circunferencia circunscrita a un hexágono regular ABCDEF mide R. Calcular el área de la región común a las regiones triangulares ACE y BFD.

Resolución.-

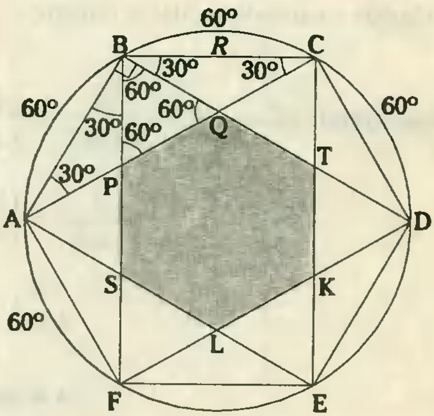
Siendo AB = l_6 (lado del hexágono regular)

$AB = l_6 = R$

Además cada arco que subtiende el lado del hexágono mide : $\dfrac{360}{6} = 60$

Por ∡ inscrito : m ∡ BAC = 30 = m ∡ ABF

Por ∡ interior : m ∡ BQA $= \dfrac{60+60}{2} = 60$



En el Δ ABQ : de 30° y 60° : $\quad BQ = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

En el Δ PBQ equilátero : $\quad PQ = \dfrac{R}{3}\sqrt{3}$

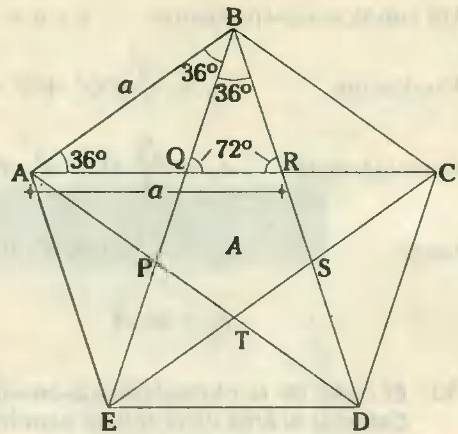
Sea A_x el área del hexágono regular PQTKLS

$$\Rightarrow \quad A_x = \frac{3}{2}(PQ)^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore \quad A_x = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

24.- El área de un pentágono regular es $(7 + 3\sqrt{5})m^2$. Calcular el área de otro pentágono regular determinado por el trazo de las diagonales del primero.

Resolución.-



Sea el pentágono regular ABCDE de lado «a» y área:

$$7 + 3\sqrt{5}$$

Sea además el otro pentágono regular de área A y lado x

Luego : $\dfrac{A}{7+3\sqrt{5}} = \dfrac{x^2}{a^2}$ ... (1)

Del gráfico el Δ BAR es el triángulo elemental del decágono regular inscrito en una circunferencia de radio «a»

Luego $\overline{BR}$ es la sección áurea de a, pero como : AQ = QB = BR

$\Rightarrow$ $\overline{AQ}$ es la sección áurea de $\overline{AR} \cong \overline{AB}$

Así mismo $\overline{QR}$ es la sección áurea de $\overline{AQ}$

De donde : $QR = AQ\,\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (a-x)\,\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Relación a partir de la cual se obtiene : $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+2}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\dfrac{A}{7+3\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$$\frac{A}{7+3\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$A = \frac{(7-3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{2} = \frac{49-45}{2}$$

$$\therefore \quad A = 2m^2$$

25.- En un romboide ABCD el área de su región correspondiente es $40m^2$ E, F y G son puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Además $\overline{FD} \cap \overline{CE}$: {T} y $\overline{CE} \cap \overline{DG}$: {K}.

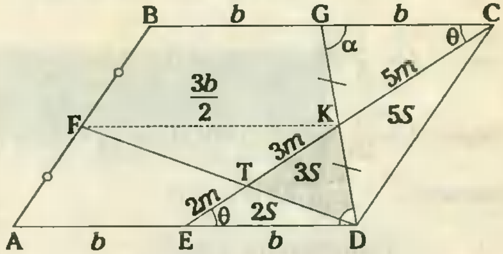
Calcular el área de la región TDK.

Resolución.-

En primer lugar tengamos presente que , si ABCD es un romboide y E es punto medio de $\overline{AD}$

Área (Δ EDC) $= \dfrac{1}{4}$ *Área* ($\square$ABCD)

$\Rightarrow$ *Área* (Δ EDC) $= \dfrac{1}{4}$ (40) $= 10m^2$



Δ GKC $\cong$ Δ EKD (ALA)

$\Rightarrow$ GK = KD y EK = KC

En el trapecio ABGD : $FK = \dfrac{b+2b}{2} = \dfrac{3b}{2}$

Δ TFK ~ Δ ETD $\Rightarrow$ $\dfrac{ET}{TK} = \dfrac{b}{\frac{3b}{2}} = \dfrac{2}{3}$

De donde : ET = $2m$, TK = $3m$ y KC = $5m$

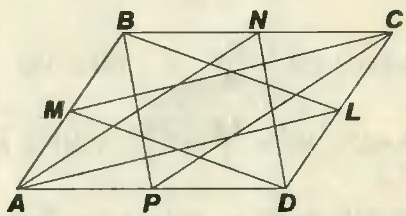
Luego : si *Área* (Δ TDK) = 35 $\Rightarrow$ *Área* (Δ ETD) = 25 y *Área* (Δ KDC) = 5S

De donde : $2S + 3S + 5S = 10$ $\Rightarrow$ $S = 1$

Finalmente : $3S = 3(1)$

$\therefore$ A (Δ TDK) $= 3m^2$

26.- Si ABCD es un romboide. Hallar el área de la región sombreada siendo M, N, L y P puntos medios y el área de la región ABCD es 18m²

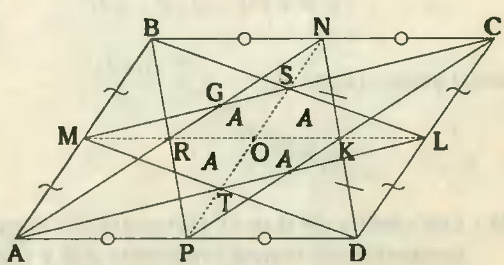


Resolución.-

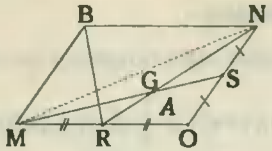
Sea «O» el centro del romboide ABCD

A trazan $\overline{ML}$ y $\overline{NP}$ estos segmentos pasaran por R , O, K y S, O, T respectivamente, dividiendo a la región pedida en 4 partes equivalentes .

Sea la región RGSO una de estas partes de área «A»



En el romboide MBNO :



Al trazar la diagonal $\overline{MN}$ se tiene :

$$A = \frac{1}{3}\ \text{Área}\,(\Delta\,\text{MON}) \qquad \text{(Propiedad)}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}\ \text{Área}\,(\square\,\text{MBNO})\ ,\ \text{pero : Área}\,(\square\,\text{MBNO}) = \frac{1}{4}\ \text{Área}\,(\square\,\text{ABCD})$$

Luego : $A = \dfrac{1}{24}$ Área ($\square$ ABCD) $= \dfrac{1}{24}\,(18) = \dfrac{3}{4}$

Entonces : $4A = 3m^2$

$\therefore$ **A sombreada = $3m^2$**

27.- Exteriormente a un triángulo ABC se construyen los cuadrados ABPQ y BCRS de centros E y F respectivamente. Calcular el área de la región APSC, si EF = a

<u>**Resolución**</u>.-

Trazamos $\overline{PC}$, $\overline{AS}$, $\overline{EM}$ y $\overline{FM}$ (M punto medio de $\overline{AC}$)

Luego : Δ PBC $\cong$ Δ ABS (L.A.L) $\Rightarrow$ PC = AS y $\overline{PC} \perp \overline{AS}$

Sea «A_x» el área de la superficie pedida.

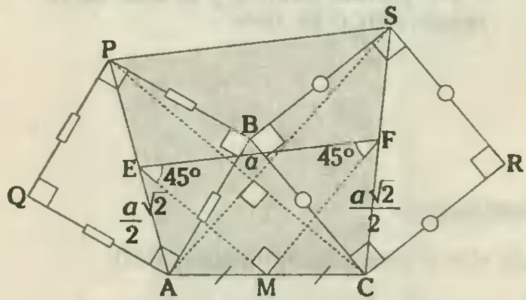
Luego : $A_x = \dfrac{(PC)(AS)}{2}$ sen 90 $\Rightarrow$ $A_x = \dfrac{(PC)^2}{2}$ ... (1)

En el Δ PAC : $EM = \dfrac{PC}{2}$ y $\overline{EM} \parallel \overline{PC}$

En el Δ ACS : $MF = \dfrac{AS}{2} = \dfrac{PC}{2}$ y $\overline{MF} \parallel \overline{AS}$

En el $\triangle$ EMF de 45° : $EM = MF = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $PC = 2\,EM = a\sqrt{2}$ ... (2)



Sustituyendo (2) en (1) : $A_x = \dfrac{(a\sqrt{2})^2}{2}$

$\therefore$ $A_x = a^2$

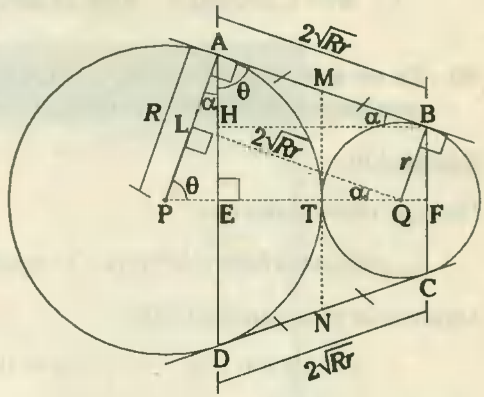
28.- Los radios de dos circunferencias tangentes exteriores miden R y r , se trazan las tangentes comunes exteriores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Calcular el área de la región ABCD.

Resolución.-

Por T , trazamos la tangente común $\overline{MN}$, luego : $MN = AB = CD = 2\sqrt{Rr}$ (Prop.)

Sea «A_x» el área pedida, luego : $A_x = (MN) . (EF)$

$$\Rightarrow \quad A_x = 2\sqrt{Rr} . (EF) \ldots (1)$$



Trazamos $\overline{QL} \perp \overline{PA}$ y $\overline{BH} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow QL = AB = 2\sqrt{Rr}$ y $BH = EF$

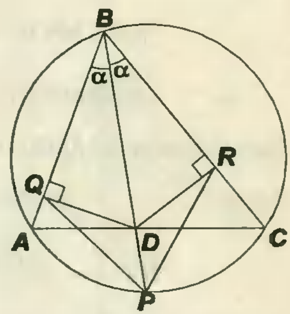
$\triangle AHB \sim \triangle PLQ : \quad \dfrac{BH}{2\sqrt{Rr}} = \dfrac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$

$$\Rightarrow \quad BH = EF = \frac{4Rr}{R+r} \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) : $A_x = \dfrac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

29.- Del gráfico mostrado, calcular el área de la región sombreada.

Si el área de la región triangular ABC es «A»



Resolución.-

Demostraremos que : *Área* (Δ ABC) = *Área* ($\square$ PQBR)

Para ello bastara demostrar que : *Área* (Δ MPN) = $A_1 + A_2$

Trazamos $\overline{BT} \perp \overline{AC}$, luego en el cuadrilátero inscriptible QBDT

$m \measuredangle QTA = m \measuredangle QBD = \alpha$ (3° Propiedad)

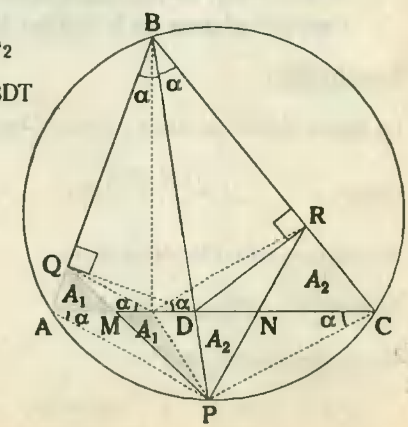
y en el cuadrilátero inscriptible TBRD :

$m \measuredangle RTD = m \measuredangle DBR = \alpha$

Los cuadriláteros AQTP y PTRC son trapecios

($\overline{QT} \parallel \overline{AP}$ y $\overline{TR} \parallel \overline{PC}$)

Luego : *Área* (Δ MTP) = *Área* (Δ AQM) = A_1



También : *Área* (Δ TPN) = *Área* (Δ NRC) = A_2

De donde : *Área* (Δ MPN) = $A_1 + A_2$

$\therefore$ *Área* ($\square$ PQBR) = **Área (Δ ABC) = A**

30.- En un cuadrilátero bicéntrico ABCD tal que AB = 6 , BC = 5 y CD = 9 . Calcular la medida del radio de la circunferencia inscrita.

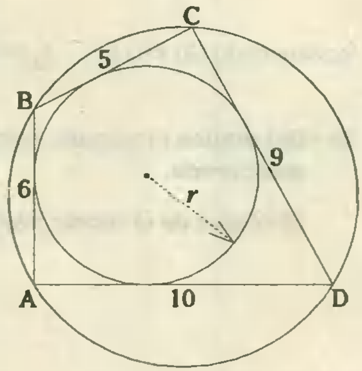
Resolución.-

Primero, recordemos que :

«Un cuadrilátero bicéntrico es aquel que esta inscrito y circunscrito a la vez»

Empleando el teorema de Pithot :

$$5 + AD = 6 + 9 \quad \Rightarrow \quad AD = 10$$



Por Brahma - Gupta :

$$A\,(\square ABCD) = \sqrt{(15-6)(15-5)(15-9)(15-10)}$$

$$\Rightarrow \quad A\,(\square ABCD) = 30\sqrt{3}$$

Puesto que: $A\,(\square ABCD) = p \cdot r = 15r$

Luego : $30\sqrt{3} = 15r$

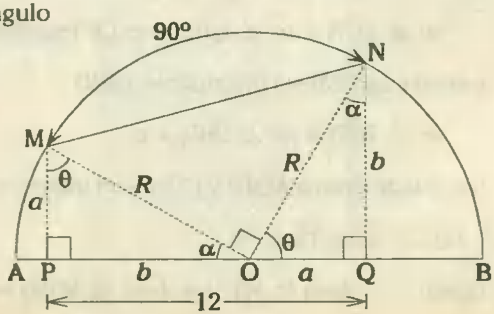
$\therefore$ $\boldsymbol{r = 2\sqrt{3}}$

31.- En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza la cuerda $\overline{MN}$ de modo que m $\overset{\frown}{MN}$ = 90 , se proyecta $\overline{MN}$ sobre $\overline{AB}$ obteniéndose el segmento $\overline{PQ}$, si PQ = 12 . Calcular el área de la región MNQP

Resolución.-

La figura MNQP de área «*A*» es un trapecio rectángulo

Luego : $A = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) PQ \quad \ldots (1)$



El ángulo central MON es recto

Además ⊿ MPO ≅ ⊿ NQO

De donde resulta que :

PO = NQ = *b* y MP = OQ = *a*

Luego : $a + b = 12$ ... (2)

(2) en (1) : $A = \dfrac{12.12}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\mathbf{A = 72}$

32.- En una circunferencia, se ubican los puntos A, M, N, P y B en forma consecutiva, de modo que $\overline{AB}$ es diámetro y m $\widehat{MN}$ = 90. Sobre $\overline{AB}$ se ubica el punto C tal que ATPC es un rombo ($\overline{AN} \cap \overline{MP}$ = {T}) , si MN = a . Calcular el área de la región ATPC.

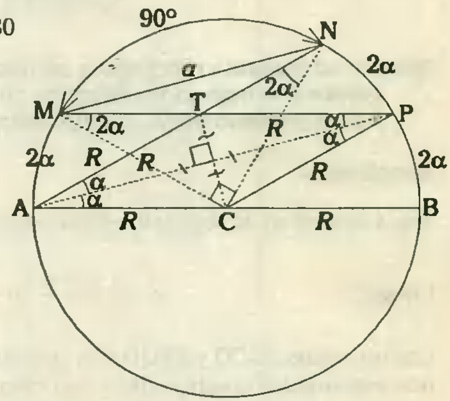
<u>Resolución</u>.-

En un rombo se sabe que las diagonales son mediatrices, una de la otra recíprocamente

Luego : $\overline{TC}$ es mediatriz de $\overline{AP}$ en consecuencia «C» es centro de la circunferencia

Por ángulo inscrito : $m\ \widehat{MA} = m\ \widehat{PB} = 2\alpha$ y $m\ \widehat{NP} = 2\alpha$

En la semicircunferencia : $6\alpha = 90 \Rightarrow 2\alpha = 30$



El área A del rombo será : $A = R^2 \text{ sen } 30 = \dfrac{R^2}{2}$

Pero en el ⊿ MCN de 45° : $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

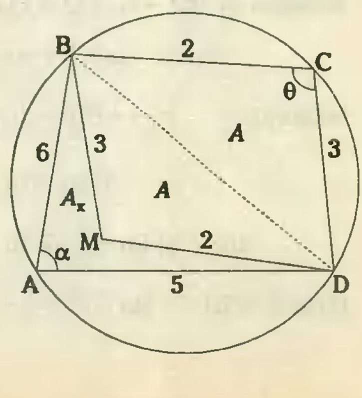
Luego : $A = \dfrac{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{A = \dfrac{a^2}{4}}$

33.- Interiormente a un cuadrilátero inscrito ABCD se ubica el punto M, tal que MBCD es un romboide. Si AB = 6 , AD = 5 , BC = 2 y CD = 3. Calcular el área de la región no convexa ABMD.

<u>Resolución</u>.-

En primer lugar, calculamos el área del cuadrilátero inscrito ABCD para lo cual aplicamos el Teorema de «Brahma - Gupta» así :



$$A\ (\square\ ABCD) = \sqrt{(p-6)(p-3)(p-5)}$$

Donde : $p = \dfrac{6+2+3+5}{2} = 8$

$\Rightarrow \quad A\ (\square\ ABCD) = \sqrt{2\cdot 6\cdot 5\cdot 3} = 6\sqrt{5}$

En segundo lugar calculamos la relación de las áreas de los triángulos BAD y BCD.

Ya que $\alpha + \theta = 180$: $\dfrac{A+A_x}{4} = \dfrac{6\times5}{2\times3} = 5$

De donde : $A = \dfrac{A_x}{4}$

Ahora : $A_x + 2A = A$ ($\square$ABCD)

Donde : $A_x + 2\dfrac{A_x}{4} = 6\sqrt{5}$

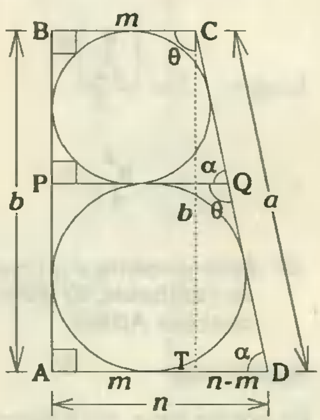
Por consiguiente : $\dfrac{3}{2}A_x = 6\sqrt{5}$

$\therefore$ $\mathbf{A_x = 4\sqrt{5}}$

34.- En un trapecio rectángulo se traza una recta secante paralela a sus bases, determinando dos trapecios parciales circunscriptibles. Calcular el área de la región limitada por el trapecio inicial, si sus lados no paralelos miden a y b (a > b)

Resolución.-

Sea A el área de la región limitada por el trapecio ABCD



Luego : $A = \left(\dfrac{m+n}{2}\right)b$ ... (1)

Los trapecios PBCQ y APQD son semejantes, ya que tienen sus ángulos congruentes y son circunscriptibles :

$\Rightarrow \dfrac{m}{PQ} = \dfrac{PQ}{n} \Rightarrow PQ^2 = mn$

Aplicando el Teorema de Pithot : BP + CQ = m + PQ

También : b - BP + a - CQ = PQ + n

$\Rightarrow a + b = m + n + 2PQ$

De donde : $4\,PQ^2 = [(a+b)-(m+n)]^2$

$$4mn = (a+b)^2 + (m+n)^2 - 2(a+b)(m+n)$$

$$2(a+b)(m+n) = (a+b)^2 + (m-n)^2 \quad ... (2)$$

En el $\triangle$ CTD : $(m-n)^2 = a^2 - b^2$ ... (3)

Reemplazando (3) en (2) : $2(a+b)(m+n) = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 - b^2$

Luego : $(a+b)(m+n) = a^2 + ab = a(a+b) \Rightarrow m + n = a$ ... (4)

Sustituyendo (4) en (1) : $$A = \frac{ab}{2}$$

35.- El área de la región limitada por el trapezoide ABCD es 72m², si P , Q , R y S son los baricentros de los triángulos ABC , BCD , CDA y DAB respectivamente. Calcular el área de la región PQRS.

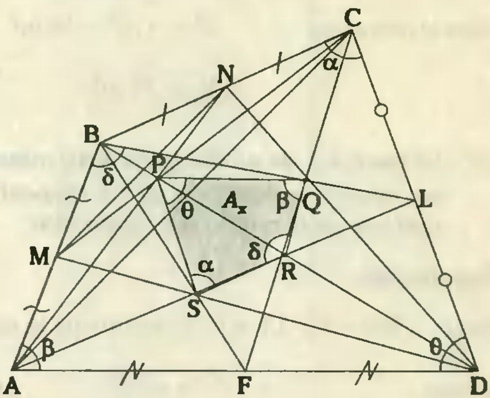
Resolución.-

Por ser P y Q baricentros de los triángulos ABC y BCD , se tiene :

$$\frac{PN}{AP} = \frac{NQ}{QD} = \frac{1}{2} \text{ , esto significa que } \overline{PQ} \parallel \overline{AD}$$

De donde por la semejanza de los triángulos PNQ y AND se obtiene :

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PN}{AN} = \frac{1}{3}$$



Análogamente : $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ y $\frac{QR}{AB} = \frac{1}{3}$

$\overline{RS} \parallel \overline{BC}$ y $\frac{RS}{BC} = \frac{1}{3}$

$\overline{PS} \parallel \overline{CD}$ y $\frac{PS}{CD} = \frac{1}{3}$

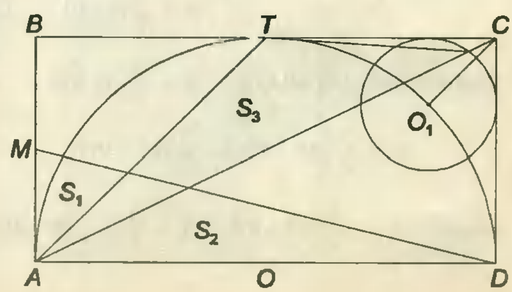
El trapezoide PQRS es semejante al ABCD

Luego : $$\frac{A_x}{72} = \frac{PQ^2}{AD^2} = \frac{1}{9}$$

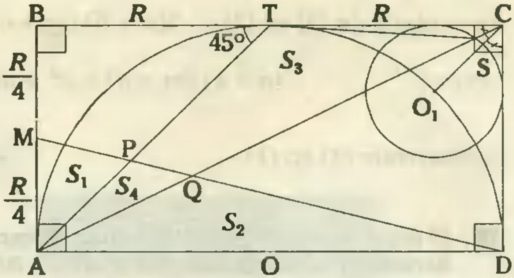
$$\therefore \quad A_x = 8\,m^2$$

36.- Del gráfico mostrado O y O_1 son centros, además : AM = MB , $S_1 = 4m^2$ y $S_2 = 13m^2$

Hallar : S_3



Resolución.-



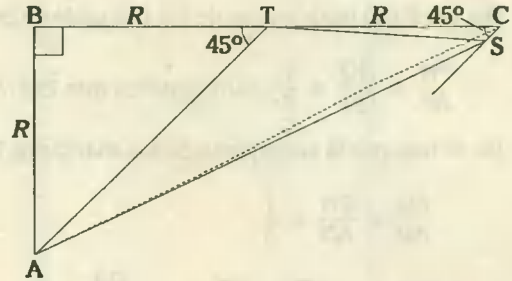
Hacemos : $\text{Área}\,(\Delta\, PAQ) = S_4$

Luego : $S_1 + S_4 + S_2 = \frac{2R}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$ ... (1)

$\overline{AT} \parallel \overline{CO}$, luego en el trapecio ATCS :

$\text{Área}\,(\Delta\, ATS) = \text{Área}\,(\Delta\, ATC) = \frac{R^2}{2}$

Ahora : $\text{Área}\,(\Delta\, ATS) = S_4 + S_3$



$\Rightarrow \quad S_4 + S_3 = \frac{R^2}{2}$ ... (2)

De (1) y (2) : $S_1 + S_4 + S_2 = S_4 + S_3$

De donde : $S_3 = S_1 + S_2$

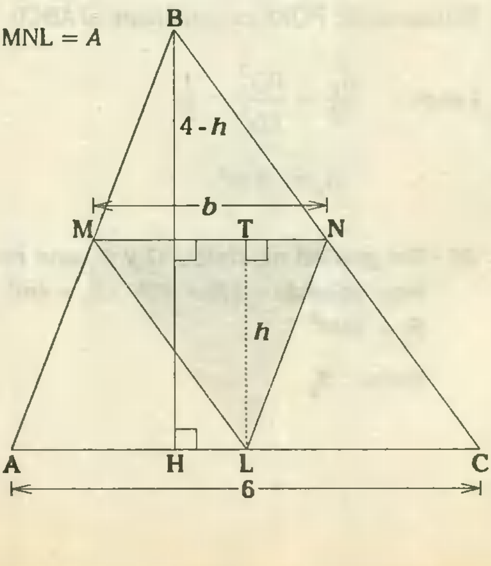
Para el problema : $S^3 = 4\,m^2 + 13\,m^2$

$\therefore \quad \boxed{S_3 = 17\,m^2}$

37.- La base $\overline{AC}$ de un triángulo ABC mide 6 y su altura $\overline{BH}$ mide 4 , sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, N y L respectivamente de modo que $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. Hallar el área máxima de la región triangular MNL

Resolución.-

Sean : MN = b , LT = h y el área de la región MNL = A



Luego : $A = \frac{bh}{2}$ ... (1)

Δ MBN ~ Δ ABC : $\frac{b}{6} = \frac{4-h}{4}$

$b = \frac{3}{2}(4 - h)$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $A = \frac{3}{2}(4 - h)h$

$A = \frac{3}{2}\,(4h - h^2) = -\frac{3}{2}\,(h^2 - 4h)$

Ahora : $A = -\frac{3}{2}\left[(h-2)^2 - 4\right] = \frac{3}{2}\left[4 - (h-2)^2\right]$

De ésta expresión para que A sea máximo $(h - 2)^2$ debe ser mínimo es decir :

$$(h - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2 \ldots (3)$$

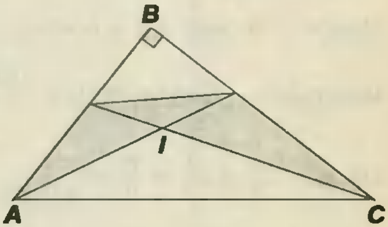
Reemplazando (3) en (2) : $b = \frac{3}{2}(4 - 2) = 3$

Luego : $A = \frac{3 \times 2}{2} = 3$

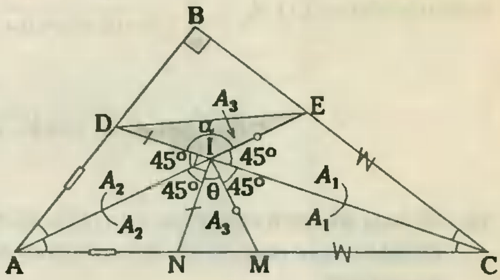
$$\therefore \quad \boxed{A = 3}$$

38.- Hallar el área de la región sombreada, si I es incentro del triángulo ABC.

Además el área de la región AIC es $40m^2$.



Resolución.-



En el ⊿ ABC : $m \measuredangle \text{AIC} = 90 + \frac{90}{2} = 135$

También : $m \measuredangle \text{EIC} = m \measuredangle \text{AID} = 45$

Trazamos $\overline{\text{IM}} \perp \overline{\text{AE}}$ y $\overline{\text{IN}} \perp \overline{\text{CD}}$

Luego : $\Delta \text{MIC} \cong \Delta \text{IEC} \Rightarrow$ *Área* $(\Delta \text{MIC}) = A_1$

Ahora : $\Delta \text{ADI} \cong \Delta \text{ANI} \Rightarrow$ *Área* $(\Delta \text{AIN}) = A_2$

Además los triángulos DIE y NIM tienen igual área, ya que $\alpha + \theta = 180$

Y los lados que forman estos ángulos son iguales

Luego : *Área* $(\Delta \text{NIM}) = A_3$

Finalmente se tiene : $A_1 + A_2 + A_3 =$ *Área* (ΔAIC)

$$\therefore \quad \boxed{A_1 + A_2 + A_3 = 40\,m^2}$$

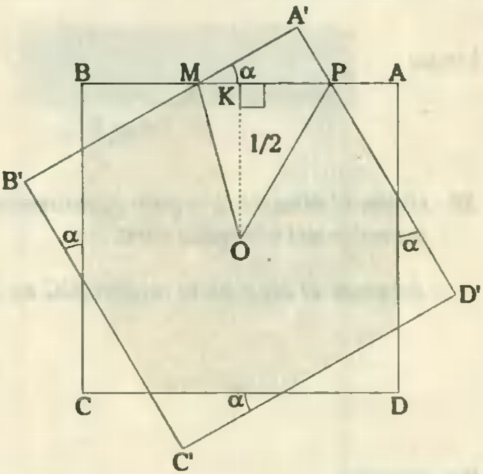
39.- Un cuadrado ABCD de centro O gira un ángulo de medida «α» . Hallar el área de la región común al cuadrado en sus dos posiciones (AB = 1)

Resolución.-

Sea «A_x» el área de la región sombreada, luego : $A_x = 8\,\text{Área}\,(\Delta\,\text{MOP})$ ... (1)

Hagamos : MP = b

En el ⊿ MA'P : PA' = b senα y MA' = b cos α



Puesto que : PA' = PA y BM = MA'

$\Rightarrow$ BM = b cosα y PA = b senα

Además : BM + MP + PA = 1

Luego : $b\cos\alpha + b + b\,\text{sen}\,\alpha = 1$

De donde : $\text{Área}\,(\Delta\,\text{MOP}) = \dfrac{\text{MP.OK}}{2}$

Luego : $\dfrac{1}{2}\,b\,.\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{4\,(\text{sen}\alpha+\cos\alpha+1)}$

Sustituyendo en (1) :$A_x = \dfrac{8}{4}\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha+\cos\alpha+1}\right)$

$\therefore \quad A_x = \left(\dfrac{2}{\text{sená}+\text{cosá}+1}\right) \quad 0 \le x \le 90°$

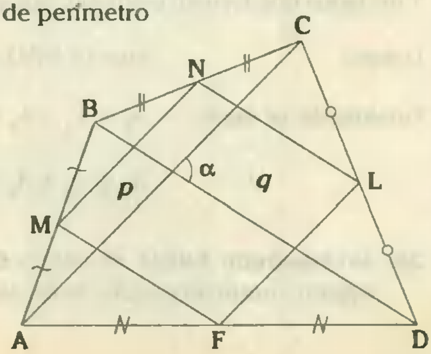
40.- El área de un trapezoide convexo ABCD es 1 . Calcular el menor perímetro del cuadrilátero que resulta al unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados del trapezoide.

Resolución.-

Sean : AC = p , BD = q y la medida del ángulo formado por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$: α

El cuadrilátero MNLF de la figura es un paralelogramo de perímetro

$$K = p + q \,. \qquad ...\ (1)$$



El área del trapezoide ABCD es :$1 = \dfrac{pq}{2}\,\text{sen}\,\alpha$ ... (2)

Puesto que : $0 < \text{sen}\,\alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$ ... (3)

Multiplicando (2) · (3) : $1 \le \dfrac{pq}{2} \Rightarrow pq \ge 2$

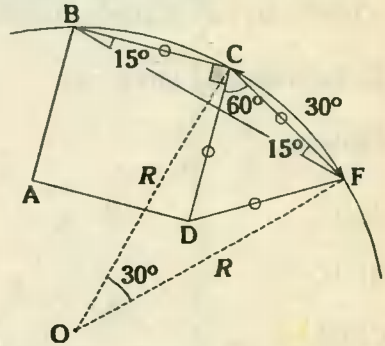
Por otro lado : $(p+q)^2 = (p-q)^2 + 4pq \ge 4pq \ge 8$

De donde : $p + q \geq 2\sqrt{2}$ ... (4)

Reemplazando (1) en (4), el mínimo perímetro K del cuadrilátero MNLF será :

$\therefore \quad \boldsymbol{k = 2\sqrt{2}}$

41.- Se tiene un cuadrado ABCD, exteriormente se construye el triángulo equilátero CFD. Calcular el área de la región de circunferencia circunscrita al trángulo BCF. Sabiendo que $AB = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$



Resolución.-

Sea la circunferencia de centro "O", se necesita "R" para conocer su área.

Δ BCF isósceles : $m\measuredangle B = m\measuredangle F = 15^\circ$

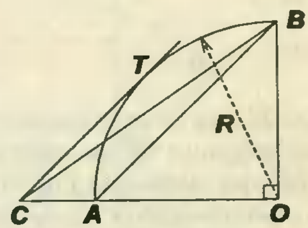
Δ OCF: triángulo elemental del dodecágono

$CF = l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad R = 2$

$A_x = \pi(2)^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = 4\pi}$

42.- Hallar el área de la región sombreada, si "T" es punto de tangencia, además $m\,\overset{\frown}{AT} = m\,\overset{\frown}{TB}$. ($R = \sqrt{2} + 1$)



Resolución.-

Nos piden : $A_x = \dfrac{AC\ .\ OB}{2}$

Se traza $\overline{OT} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle OTC = 90^\circ$ (Propiedad)

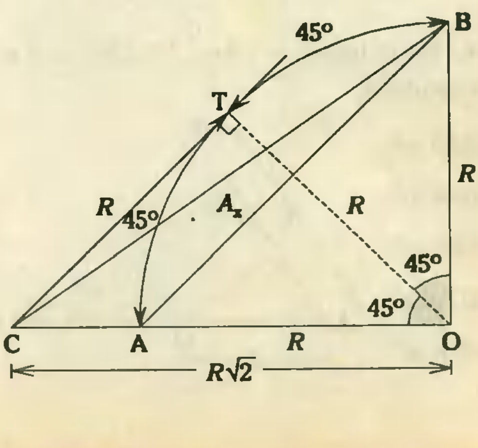
$\triangle$ OTC isósceles de 45º y 45º $\Rightarrow$ $OC = R\sqrt{2}$

Luego : $A_x = \dfrac{R(\sqrt{2}-1).R}{2}$

Reemplazando : $R = \sqrt{2} + 1$

$$A_x = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un Δ ABC se traza la bisectriz exterior $\overline{BE}$ y la mediana $\overline{AM}$ que prolongada interseca a $\overline{BE}$ en "P". Calcular el área del triángulo BMP si AB = 3BC y área (ΔABC) = 40 m^2

A) $3m^2$ B) $4m^2$ C) $6m^2$ D) $5m^2$ E) $8m^2$

2.- En la figura si $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$.

Calcular : $\dfrac{A_1}{A} - \dfrac{A}{A_2}$

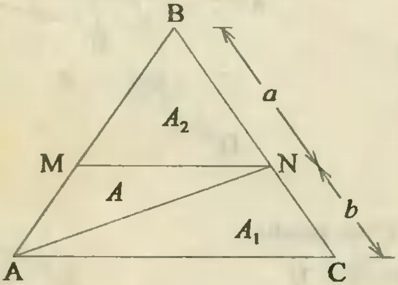
A) 0

B) 1/2

C) 1/3

D) 1

E) 2



3.- El área de un triángulo ABC es $72m^2$ por el baricentro "G" se trazan paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que intersectan a $\overline{AC}$ en los puntos E y F respectivamente. Calcular el área de la región triangular EGF.

A) $6u^2$ B) $7u^2$ C) $8u^2$ D) $9u^2$ E) $10\sqrt{3}\,u^2$

4.- De la figura, si : *Área* (Δ ABC) = 9 m^2. Calcular S_x

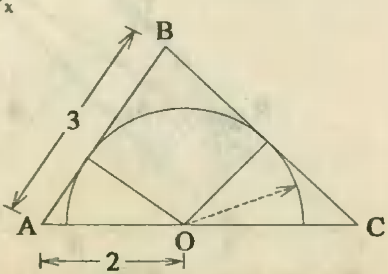
A) 3 m^2

B) 4 m^2

C) 5 m^2

D) 6 m^2

E) 8 m^2

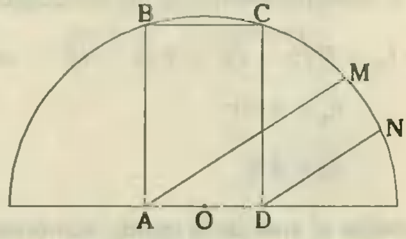


5.- Los lados de un triángulo ABC son 13, 14 y 15 *m*. Determinar el área de la región triangular donde sus lados son las medianas del triángulo ABC.

A) $84/3m^2$ B) $63m^2$ C) $42m^2$

D) $58m^2$ E) $66m^2$

6.- Calcular el área del cuadrado ABCD, si : AM = *a* y DN = *b* y $\overline{AM}$ // $\overline{DN}$



A) $2ab$ B) ab C) $ab/2$

D) $3ab/2$ E) $2\sqrt{ab}$

7.- En un triángulo ABC de área "*S*" se pide calcular el área de la región triangular limitada por las cevianas $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$. Si AR = 3RB, BP = 3 PC y CQ = 3AQ.

A) 2 *S*/3 B) 4 *S*/9 C) 5 *S*/17

D) 3 *S*/7 E) 4 *S*/13

8.- Sobre los lados de un cuadrado se construyen exteriormente triángulos equiláteros. Calcular el área del cuadrilátero que se forma al unir los vértices libres de los triángulos equiláteros, si el lado del cuadrado mide "b"

A) $b^2(\sqrt{3}+1)$ B) $b^2(2\sqrt{3}-1)$ C) $3b^2$

D) $b^2(2+\sqrt{3})$ E) $b^2(4+3\sqrt{3})$

9.- La circunferencia inscrita a un Δ ABC es tangente a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Las prolongaciones de $\overline{NM}$ y $\overline{CA}$ se intersectan en P. Calcular la relación de las áreas de los triángulos : MPA y PBC, si AB = 5 , BC = 7 y AC = 6.

A) 2/3 B) 3/4 C) 1/5 D) 2/5 E) 3/5

10.- Hallar el área de un pentágono regular en función de su diagonal de longitud «a».

A) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+1)$ D) $\frac{a^2}{4}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

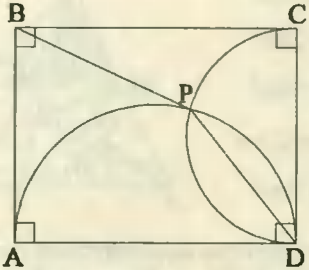
B) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1)$ E) $\frac{a^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

C) $\frac{a^2}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

11.- Por el baricentro «G» de un triángulo ABC, se traza una recta secante, cortando a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; luego sobre la recta se considera un punto «E». Calcular el área del triángulo EBG si las áreas de los triángulos ECG y AEG son 20 y 30 respectivamente.

A) 25 B) 50 C) $10\sqrt{6}$ D) 20 E) 30

12.- Calcular el área de la región rectangular ABCD, si BP = 2 y PD = 1



A) $\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{5}$

C) $\sqrt{7}$

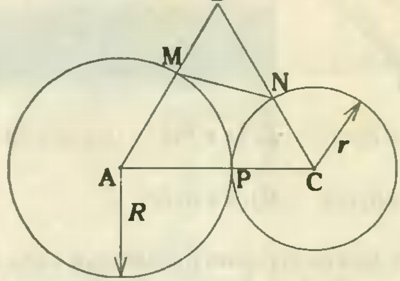
D) $4\sqrt{7}$

E) $2\sqrt{7}$

13.- Los lados de 3 eneágonos regulares miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$. Cuánto mide el lado del eneágono regular que limita un área igual a la suma de las áreas de los otros tres.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{32}$ D) $\sqrt{19}$ E) $\sqrt{33}$

14.- «P» es punto de tangencia AB = BC = AC; PB = $2m$. Calcular el área de la región AMNC.



A) $2m^2$ B) $\sqrt{3}m^2$ C) $3m^2$

D) $2\sqrt{3}\ m^2$ E) $\sqrt{3}/4m^2$

15.- En un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ ($\overline{BC}$ < $\overline{AD}$), cuyas diagonales se cortan en "O"; las prolongaciones de los lados no paralelos se intersectan en "E". Si el área del Δ BOC y Δ AOD mide 9 y 16 m^2 respectivamente.
Hallar la relación de las longitudes de los inradios de los triángulos BCE y AED.

A) 1/2 B) 3/2 C) 3/4 D) 4/3 E) 5/4

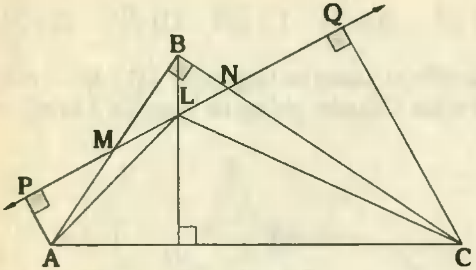
16.- En un hexágono regular ABCDEF, las prolongaciones de $\overline{DB}$ y $\overline{FA}$ se intersectan en P. $\overline{PE}$ intersecta al lado $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en M y N respectivamente. Calcular el área de la región triangular BMN , si AB = $6m$

A) $2\sqrt{3}m^2$ B) $3\sqrt{3}m^2$ C) $4\sqrt{3}m^2$

D) $4m^2$ E) $6m^2$

17.- En la figura, calcular el área de la región sombreada :

ML = LN , PM = a , NQ = b , AC = c



A) $(a+b)\,c/2$ B) $(a+b)\,c$ C) $(a+b)\,c/4$

D) $(a+b)\,c/3$ E) $(a+b)\,c/5$

18.- El área de la región limitada por un hexágono regular es A. Hallar el área de la región limitada por el polígono que resulta de unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados del hexágono.

A) $\frac{A}{2}$ B) $\frac{A}{3}$ C) $\frac{2}{3}A$ D) $\frac{3}{4}A$ E) $\frac{4}{5}A$

19.- En un romboide ABCD las diagonales se cortan en O. Las distancias de O a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ miden 2 y 3 respectivamente. Calcular el área del romboide si $m\measuredangle ABC = 135$

A) $8\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{2}$

D) $18\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{2}$

20.- Hallar el área de la región sombreada. Si : $AQ = 8m$; $PC = 9m$ $\measuredangle PBQ = 45°$

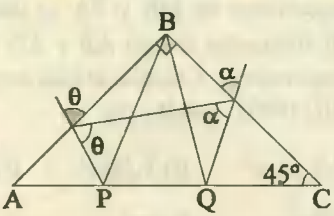
A) $12m^2$

B) $13m^2$

C) $14m^2$

D) $15m^2$

E) $16m^2$



21.- En un trapecio isósceles en el cual su base mayor es igual a su altura. Hallar el área de la región trapecial sabiendo que su altura mide $9\,cm$.

A) $27cm^2$ B) $45cm^2$ C) $81cm^2$

D) $100m^2$ E) $108m^2$

22.- Hallar el área cuadrangular PBQD, si el área de la región ABC es S.

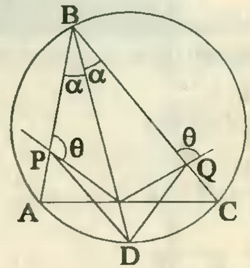
A) S

B) $\frac{S}{2}$

C) $2S$

D) $\frac{3}{2}S$

E) $\frac{3}{4}S$



23.- En una semicircunferencia de diámetro AB, se traza una recta paralela al diámetro que intersecta a la semicircunferencia en «P» y «Q». Si la distancia de «B» a la recta mide $6m$ y $PQ = 5m$. Calcular el área de la región cuadrangular APQB.

A) 30 B) 28 C) 54 D) 36 E) 48

24.- Hallar el área de la región cuadrangular sombreada, si $S_1 = 18m^2$ y $S_2 = 4{,}5m^2$ además MNCL es un romboide.

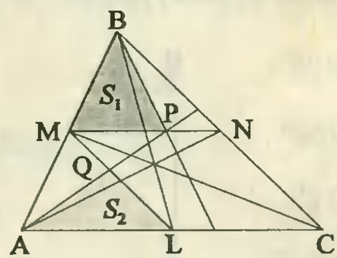
A) $25m^2$

B) $27m^2$

C) $28m^2$

D) $22{,}5m^2$

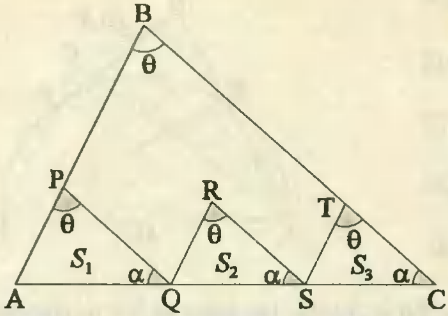
E) $30m^2$



25.- Se tiene un cuadrilátero bicéntrico ABCD tal que AB = 6, BC = 5 y CD = 9. Calcular la medida del radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 B) 2 C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 3

26.- En la figura, hallar el área de la región sombreada, si: $S_1 = 25m^2$, $S_2 = 9m^2$ y $S_3 = 16m^2$



A) $50m^2$ B) $60m^2$ C) $72m^2$
D) $84m^2$ E) $94m^2$

27.- Hallar el área de la región sombreada, si O es centro y OF = r

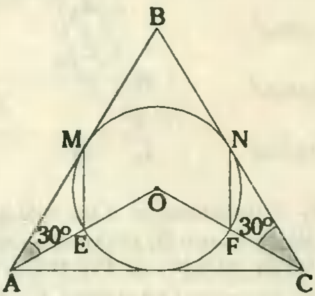
A) $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$

B) $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$

C) $\frac{3}{8}r^2\sqrt{3}$

D) $3r^2\sqrt{3}$

E) $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$



28.- En un paralelogramo ABCD, E es un punto cualquiera de $\overline{BC}$. Se traza $\overline{AE}$ y se prolonga hasta que intersecte a la prolongación de $\overline{DC}$ en F. Si el área de la región DEC es 36 m^2. Hallar el área de la región triangular ABF.

A) $72m^2$ B) $38m^2$ C) $24m^2$
D) $70m^2$ E) $36m^2$

29.- En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ las cuales se intersectan en I. Si $m\measuredangle B = 60°$ y el área de la región triangular AIC es A. Hallar el área de la región pentagonal no convexa AEIDCA.

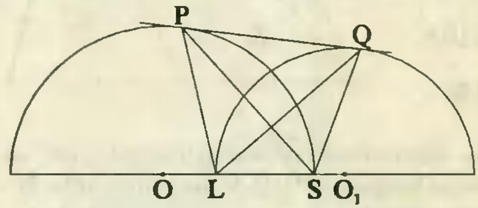
A) $A\sqrt{3}$ B) $2A\sqrt{3}$ C) $2A$
D) $3A$ E) $3A\sqrt{3}$

30.- Exteriormente a un trapezoide ABCD se construyen sobre sus lados cuadrados de centros P, Q, R y L. Si PR = a. Hallar el área de la región PQRL.

A) a^2 B) $2a^2$ C) $a^2\sqrt{2}$

D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

31.- En la figura O y O_1 son centros, P y Q son puntos de tangencia, PS = 8 y LQ = 6.
Hallar el área de la región sombreada PQSL.

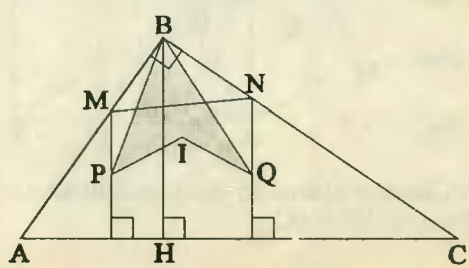


A) 12 B) 18 C) 20 D) 24 E) 36

32.- Por el punto medio M del lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se traza una recta que intersecta en P a $\overline{BC}$ y en Q a la prolongación de $\overline{BA}$. Por B se traza una recta paralela a $\overline{PQ}$ que intersecta en R a la prolongación de $\overline{CA}$. Si el área de la región RPC es $12m^2$. Hallar el área de la región RAQ.

A) $6m^2$ B) $9m^2$ C) $12m^2$
D) $16m^2$ E) $24m^2$

33.- En la figura: P, Q e I son los incentros de los triángulos AHB, BHC y ABC respectivamente. Calcular el área de la región sombreada si MN = a



A) a^2 B) $a^2\sqrt{2}$ C) $\dfrac{a^2}{2}$

D) $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{2}$ E) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$

34.- En la figura : $S_1 = 21$, $S_2 = 42$, $S_3 = 28$. Hallar S_x:

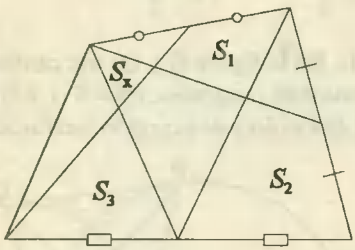
A) 7

B) 14

C) 3,5

D) 10,5

E) 40



35.- Sobre el lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q de modo que AQ = PC (CQ > CP). Luego se trazan $\overline{PT}$ y $\overline{QR}$ paralelas a $\overline{AB}$ (T y R en $\overline{BC}$). Si el área de la región AHR es «S» Hallar el área de la región PTHQ ($\overline{QR} \cap \overline{AT}$: H)

A) S B) $S/2$ C) $2S$ D) $\dfrac{2}{3}S$ E) $\dfrac{4S}{3}$

36.- En la figura AMNB, AEFC y APQR son cuadrados: $S_1 = 9m^2$, $S_2 = 6m^2$. Hallar el área de la región triangular ABC

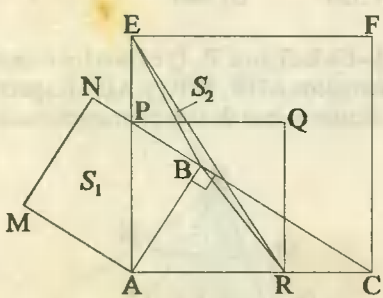
A) $15m^2$

B) $12m^2$

C) $14m^2$

D) $16m^2$

E) $18m^2$



37.- Calcular el área de la región EBCD, si : BC = 5 y AD = AC

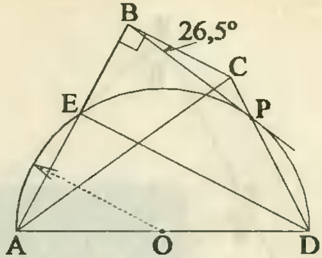
A) 64

B) 16

C) 25

D) 30

E) 40



38.- En la figuras las áreas de los romboides son A_1, A_2 y A_3. Si $A_1 = 25\ m^2$, $A_2 = 49m^2$ y LBEA es un romboide. Hallar A_3

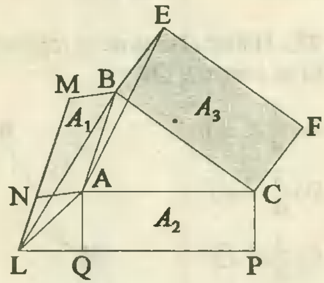
A) $65m^2$

B) $70m^2$

C) $74m^2$

D) $96m^2$

E) $144m^2$



39.- Exteriormente a un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se construyen los cuadrados ABMN, BCEF y ACPQ. Hallar el área de la región hexagonal NMFEPQ. Si : AB = 3 y BC = 4

A) 64 B) 65 C) 68 D) 70 E) 74

40.- En la figura O y O_1 son centros $\widehat{AO_1} \cong \widehat{O_1B}$

Si AD = $4\sqrt{2}$. Hallar el área de la región sombreada.

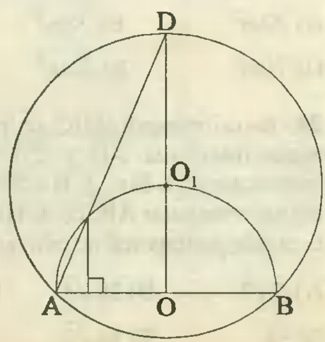
A) $2(4 - \sqrt{2})$

B) $3(2 - \sqrt{2})$

C) $2(3 + \sqrt{2})$

D) $2(3 - \sqrt{2})$

E) $3(3 - \sqrt{2})$



CAP. 22

áreas de regiones circulares

22.1 ÁREA DEL CÍRCULO

El área de un círculo es igual a la mitad de la longitud de su circunferencia multiplicada por el radio de la misma.

Según esto, el área del círculo «O» será :

$$A_O = \pi R^2 \qquad \text{... (22.1)}$$

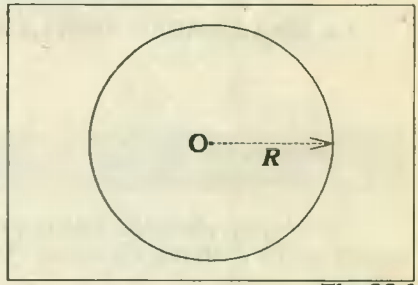


Fig. 22.1

22.2 ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

El área de un sector circular es igual al área del círculo correspondiente multiplicado por el cociente entre su ángulo central y 360°.

Sea AOB el sector circular de área A, radio R y ángulo central θ . Luego:

$$A = \pi R^2 \, \frac{\theta}{360} \qquad \text{... (22.2)}$$

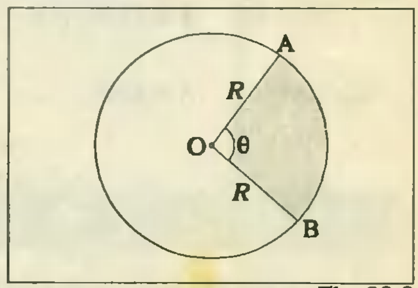


Fig. 22.2

Observación.- Si representamos por L, la longitud del arco AB se tiene:

$$A = \frac{LR}{2} \qquad \text{... (22.3)}$$

22.3 ÁREA DE UN SEGMENTO CIRCULAR

Si en una circunferencia de centro «O» trazamos la cuerda AB, entonces la región comprendida entre la cuerda AB y el arco AB se llama *segmento circular*, cumpliéndose que su área será igual al área del sector circular AOB menos el área del Δ AOB.

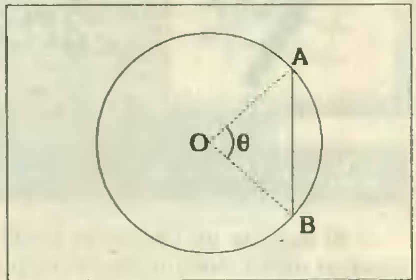


Fig. 22.3

Así :

$$A = \text{ÁREA}(\triangle \text{ AOB}) - \text{ÁREA}(\Delta \text{ AOB}) \quad \text{... (22.4)}$$

22.4 ÁREA DE UNA CORONA CIRCULAR

Corona circular es la región exterior a la circunferencia menor e interior a la mayor en dos circunferencias concéntricas.

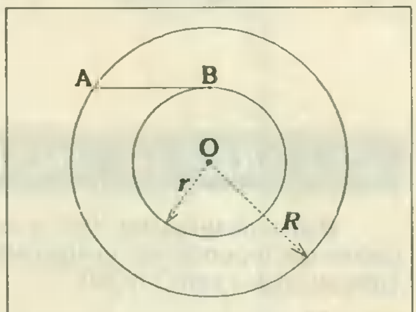


Fig. 22.4

Si r y R representan las longitudes de las radios de las circunferencias entonces el área A de la corona circular será:

$$A = \pi (R^2 - r^2) \quad \text{... (22.5)}$$

También : $$A = \pi \text{ AB}^2 \quad \text{... (22.6)}$$

22.5 ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR

En la *Fig*. 22.5 las circunferencias de radios r y R son concéntricas; las longitudes de los arcos, AB y CD son L_1 y L_2. El área A del trapecio circular sombreado será:

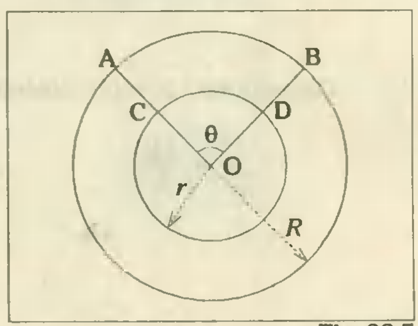


Fig. 22.5

$$A = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)(R - r) \quad \text{... (22.7)}$$

También: $$A = \frac{\text{ðè}}{360}(R^2 - r^2) \quad \text{... (22.8)}$$

22.6 ÁREA DE UNA FAJA CIRCULAR

En la *Fig*. 22.6, $\overline{AB} // \overline{CD}$, luego el área de la región circular comprendida entre dichas cuerdas y limitada por los arcos AC y BD es :

$$A = A\begin{pmatrix}\text{segmento}\\ \text{circular CD}\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}\text{segmento}\\ \text{circular AB}\end{pmatrix} \quad ... (22.9)$$

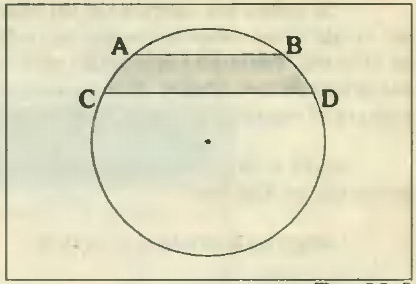


Fig. 22.6

22.7 RELACIÓN ENTRE LAS ÁREAS DE DOS O MAS FIGURAS SEMEJANTES

Si dos o más figuras son semejantes, entonces sus áreas serán directamente proporcionales a los cuadrados de sus elementos homólogos.

Sean W, Y y Z, figuras semejantes de áreas A_1, A_2, y A_3, respectivamente y sean además *a*, *b* y *c* las longitudes de sus lados homólogos luego se cumple:

$$\frac{A_1}{a^2} = \frac{A_2}{b^2} = \frac{A_3}{c^2} \quad ... (22.10)$$

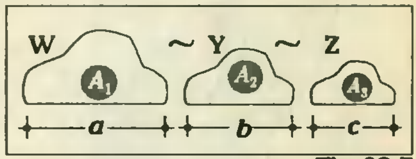


Fig. 22.7

CONSECUENCIA

Si sobre los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo se construyen figuras semejantes, entonces la suma de las áreas de las figuras constituidas sobre los catetos será igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

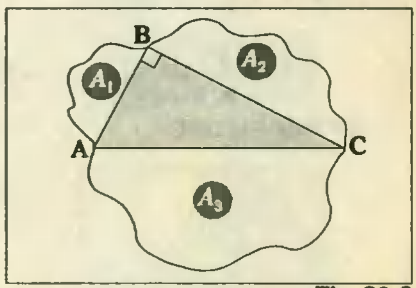


Fig. 22.8

Sean las áreas de las figuras semejantes A_1, A_2 y A_3. Luego por 22.8 se tiene :

$$\frac{A_1}{AB^2} = \frac{A_2}{BC^2} = \frac{A_3}{AC^2}$$

De donde deducimos la *ley de proporción* : $\dfrac{A_1 + A_2}{AB^2 + BC^2} = \dfrac{A_3}{AC^2}$

Puesto que : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$\therefore \quad A_1 + A_2 = A_3 \quad ... (22.11)$$

22.8. LÚNULAS DE HIPOCRATES

Si sobre los catetos de un triángulo rectángulo se construyen exteriormente semicírculos, entonces el área del triángulo rectángulo será igual a la suma de las áreas de las lúnulas determinadas por los semicírculos y el círculo circunscrito al triángulo rectángulo.

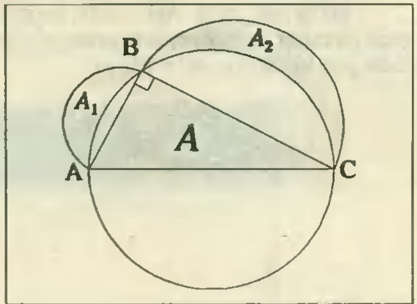


Fig. 22.9

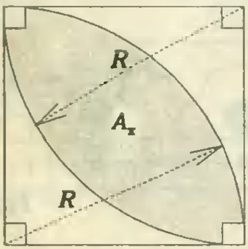
Sea A el área del triángulo rectángulo, y A_1, A_2 las áreas de las lúnulas.

Luego se cumple la relación :

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{... (22.12)}$$

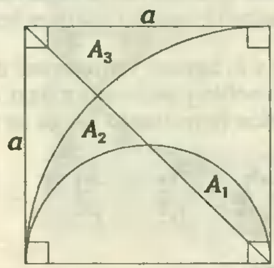
22.9 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD



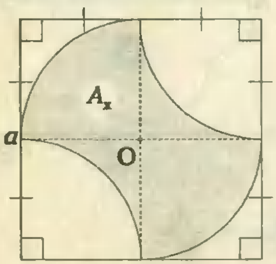
$$A_x = \frac{R^2}{2}(\pi - 2) \quad \text{... (22.13)}$$

2DA PROPIEDAD



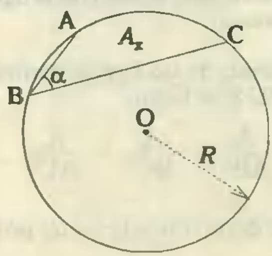
$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{4} \quad \text{... (22.14)}$$

3RA PROPIEDAD



$$A_x = \frac{a^2}{2} \quad \text{... (22.15)}$$

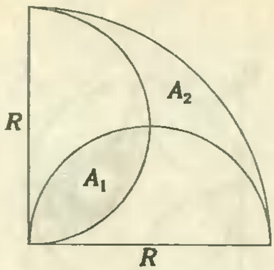
4TA PROPIEDAD



Si : $\overset{\frown}{AB} = 90 - \alpha$

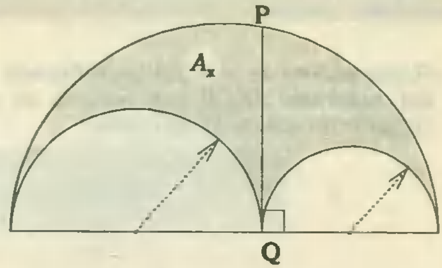
$$A_x = \pi R^2 \frac{\alpha}{180} \quad \text{... (22.16)}$$

5TA PROPIEDAD



$$A_1 + A_2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) \qquad \text{... (22.17)}$$

6TA PROPIEDAD

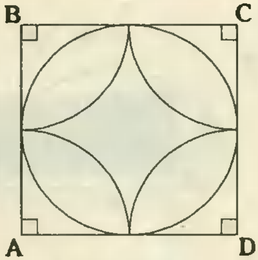


El área del arbelos A_x es igual a :

$$A_x = \frac{\pi}{4}(PQ)^2 \qquad \text{... (22.18)}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- *Hallar el área de la región sombreada, si los vértices del cuadrado ABCD son centros de los cuartos de circunferencia de igual radio.*



Resolución.-

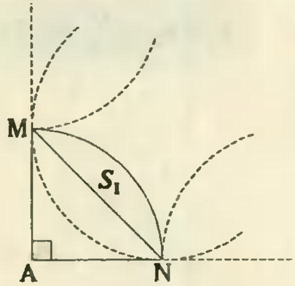
Se tiene : $S_{\text{total}} = 8\,S_1$ ... (*)

Siendo : $S_1 = \underset{\text{MAN}}{S_{\text{sector}}} - \underset{\text{MAN}}{S_{\text{triángulo}}}$

Entonces : $S_1 = \dfrac{\pi(2^2)}{4} - \dfrac{2\times 2}{2}$

Donde : $S_1 = (\pi - 2)\ cm^2$

Reemplazando en (*) : $S_{\text{TOTAL}} = 8(\pi - 2)cm^2$



2.- *Sean A_1 y A_2 las regiones limitadas por dos circunferencias de igual radio tal que : $A_1 \cap A_2 = 100\ m^2$ y $A_1 \cup A_2 = 400m^2$. Hallar el radio de las circunferencias.*

Resolución.-

Del gráfico, con los datos :

$$A_1 \cup A_2 = 2x + y = 400m^2 \quad ...\ (1)$$

También : $A_1 \cap A_2 = y = 100m^2$ ... (2)

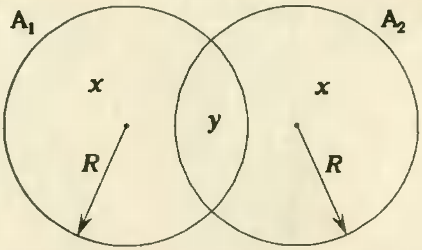
Restando (1) - (2) miembro a miembro :

$$2x = 300m^2$$

Entonces : $x = 150m^2$

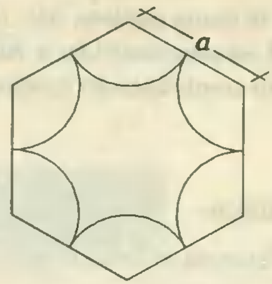
Luego : $\pi R^2 = x + y$

Reemplazando : $\pi R^2 = 150 + 100 = 250m^2$



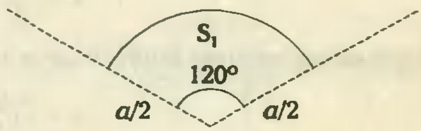
$$\therefore \quad R = 5\sqrt{\frac{10}{\pi}}\ m$$

3.- Los vértices de un hexágono regular son los centros de seis circunferencias iguales y tangentes (según muestra la figura). Hallar el área de la región sombreada en función del lado «a» del hexágono.



Resolución.-

El área de la región sombreada es igual a la del hexágono menos seis sectores.



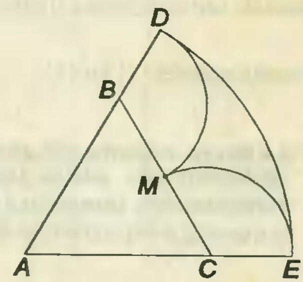
Cada sector tiene radio $\frac{a}{2}$ y ángulo central igual a 120.

Luego : $S_{sombreada} = S_{hexágono} - 6S_1$

Reemplazando : $S_{sombreada} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{\pi a^2}{12}\right)$

Donde : $S_{sombreada} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{12}$ $\therefore$ $S_{sombreada} = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$

4.- La longitud del lado del triángulo equilátero ABC es 2a, sobre las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se toman BD = a y CE = a, trazándose luego los arcos $\overset{\frown}{DM}$ y $\overset{\frown}{EM}$ con centros en B y C así como $\overset{\frown}{DE}$ con centro en A. Hallar el área de la región encerrada por el triángulo curvilíneo DME.



Resolución.-

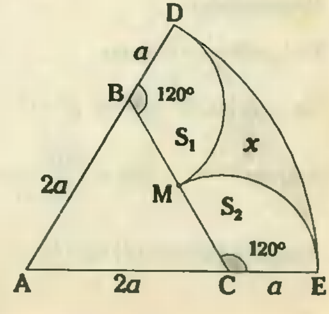
Del gráfico, el área x de la región sombreada se evalúa como:

$$x = \underset{DAE}{S_{sector}} - \underset{ABC}{S_{triángulo}} - 2(S_1)$$

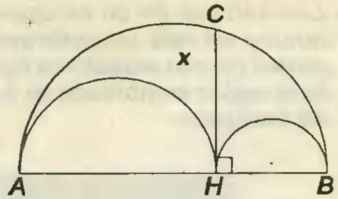
Reemplazando : $x = \frac{\pi(3a)^2}{6} - \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} - 2\left(\frac{\pi a^2}{3}\right)$

Donde : $x = \frac{\pi\times 9a^2}{6} - \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2\pi a^2}{3}$

$\therefore$ $x = \frac{a^2}{6}(5\pi - 6\sqrt{3})$

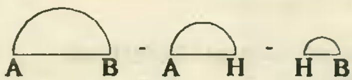


5.- En la figura adjunta, $\overline{AH}$, $\overline{HB}$ y $\overline{AB}$ son diámetros y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Hallar el área de la región sombreada en función de $\overline{CH}$.



<u>Resolución</u>.-

Por diferencia, el área «x» será :

$x =$ 

Expresamos las áreas semicirculares en función de los diámetros AH, HB y AB = AH + HB :

$$x = \frac{\pi AB^2}{8} - \frac{\pi AH^2}{8} - \frac{\pi HB^2}{8}$$

Entonces : $$x = \frac{\pi}{8}\,[AB^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

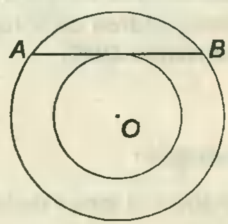
Ahora : $$x = \frac{\pi}{8}\,[(AH + HB)^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

Donde : $$x = \frac{\pi}{4}(AH \,.\, HB) \quad \text{... (1)}$$

Además por relaciones métricas sabemos que : $AM \,.\, HB = CH^2$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}\,CH^2}$$

6.- La figura muestra dos circunferencias concéntricas de centro «O» AB es una cuerda de la mayor circunferencia y tangente a la menor. Hallar el área de la corona en función de AB.

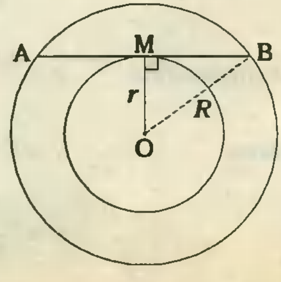


<u>Resolución</u>.-

Del gráfico, se tiene : $S_{corona} = \pi(R^2 - r^2)$ ... (1)

En el Δ MOB : $MB^2 = R^2 - r^2$

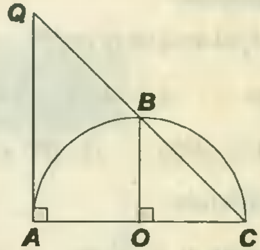
Siendo : $MB = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow R^2 - r^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ ... (2)



Reemplazando (2) en (1) : $$\boldsymbol{S_{corona} = \frac{\pi}{4}\,AB^2}$$

MISCELÁNEA

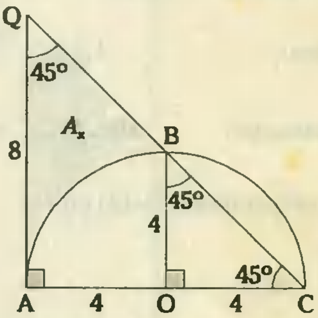
1.- En la figura «O» es centro y AC = 9m. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-

Sea A_x el área pedida

Luego A_x = *Área* (◺ QAC) *Área* (◜ AOB) - *Área* (◺ BOC)

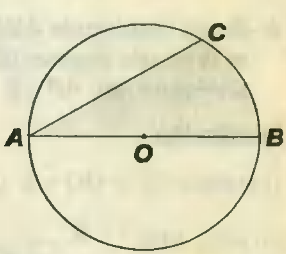


Reemplazando : $A_x = \dfrac{8.8}{2} - \dfrac{\pi 4^2}{4} - \dfrac{4.4}{2}$

Donde : $A_x = 32 - 8 - 4\pi$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 4\,(6 - \pi)\,m^2}$

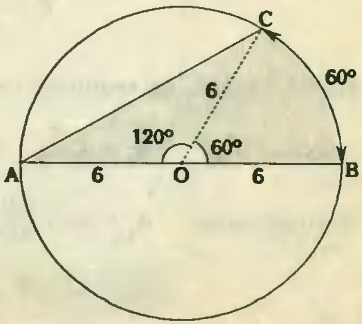
2.- En la figura la m $\widehat{BC}$ = 60º y el radio de la circunferencia de centro «O» es 6m. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-

Sea A_x el área de la región sombreada

Luego : A_x = *Área* (Δ AOC) + *Área* (△ COB)



Reemplazando : $A_x = \dfrac{1}{2}\,(6)\,(6)\text{ sen }120° + \dfrac{\pi 6^2 .60}{360}$

Luego : $A_x = 18\ .\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 6\pi$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 3(\sqrt{3} + 2\pi)}$

3.- Una circunferencia es tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD, pasa por el vértice "C" e interseca a $\overline{CD}$ en un punto N, si AB = 9 y AD = 8 . Calcular el área de la región interior al rectángulo y exterior a la circunferencia.

Resolución.-

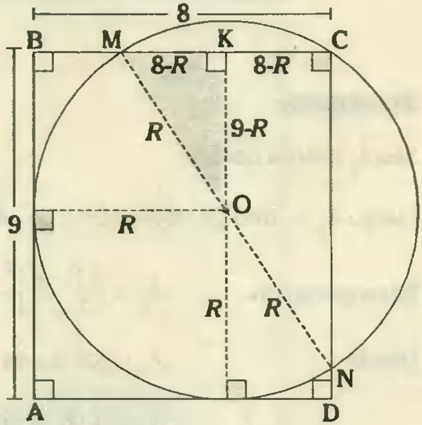
Sea A_x el área de la región sombreada

Luego : $A_x = A(\square\ ABCD) - A_{\frown MN} - A(⊿\ MCN) \Rightarrow A_x = 72 - A_{\frown MN} - A(⊿\ MCN)$... (1)

En el ⊿ MKO : $(8 - R)^2 + (9 - R)^2 = R^2$

Resolviendo : $R = 5$

Luego en el ⊿ MCN : MC = 6 y CN = 8



Ahora : $A_{\frown MN} = \dfrac{\pi(5)^2}{2} = \dfrac{25\pi}{2}$ ... (2)

Entonces : $A(⊿\ MCN) = \dfrac{6.8}{2} = 24$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $A_x = 72 - \dfrac{25\pi}{2} - 24$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 48 - \dfrac{25\pi}{2}}$

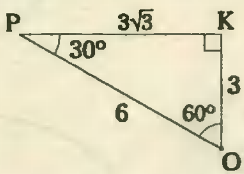
4.- En un rectángulo ABCD se inscribe una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Calcular el área del segmento circular determinado al unir los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, sabiendo que AB = 6.

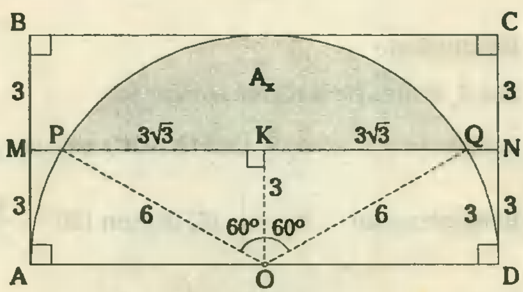
Resolución.-

Trazamos OP = OQ = 6 y $\overline{OK} \perp \overline{PQ}$ de modo que OK = 3

En el ⊿ POK :

$m\measuredangle$ POK = 60° :





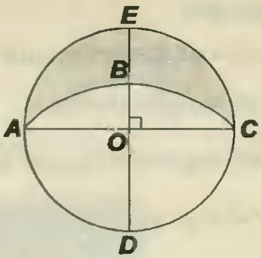
Sea "A_x" el área del segmento circular PQ

Luego : $A_x = A_{O\triangleleft PQ} - A\,\Delta POQ$

Reemplazando : $A_x = \pi 6^2\left(\dfrac{120}{360}\right) - \dfrac{6\sqrt{3}.3}{2}$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 12\pi - 9\sqrt{3}}$

5.- En la figura «D» es el centro del arco $\overset{\frown}{ABC}$ y «O» centro de la circunferencia de radio «R». Calcular el área de la región sombreada.

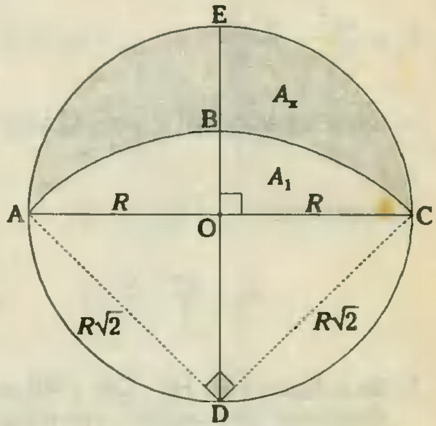


Resolución.-

Del gráfico observamos que el área pedida A_x

Se puede expresar como : $A_x = \dfrac{\pi R^2}{2} - A_1$ ... (1)

A_1 representa el área del segmento circular $\overline{AC}$



Luego : $A_1 = Área\,(\triangle\ ADC) - Área\,(\triangle\ ADC)$

Reemplazando : $A_1 = \dfrac{\pi(R\sqrt{2})^2}{4} - \dfrac{(R\sqrt{2})(R\sqrt{2})}{2}$

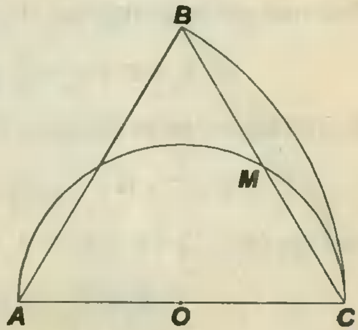
Donde : $A_1 = \dfrac{\pi R^2}{2} - R^2$ ... (2)

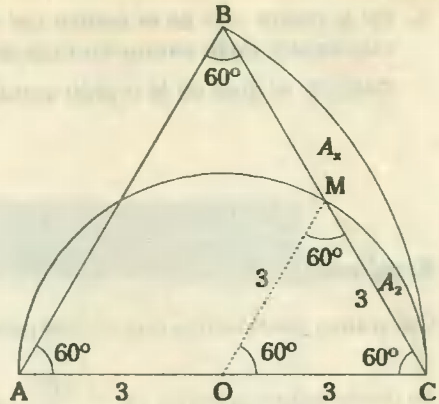
Sustituyendo (2) en (1) : $A_x = \dfrac{\pi R^2}{2} - \left(\dfrac{\pi R^2}{2} - R^2\right)$

Ahora : $A_x = \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{\pi R^2}{2} + R^2$

$\therefore \quad A_x = R^2$

6.- Calcular el área de la región sombreada si el triángulo equilátero tiene 6m por lado y «A» es el centro del arco $\overset{\frown}{BC}$ («O» es centro)





Resolución.-

Hacemos las siguientes consideraciones :

Área de la región pedida : A_x

Área del segmento circular $\overline{BC}$: A_1

Área del segmento circular $\overline{MC}$: A_2

Luego : $A_x = A_1 - A_2$ ... (1)

$A_1 = \text{Área}(\triangle \text{BAC}) - \text{Área}(\Delta\, \text{ABC})$

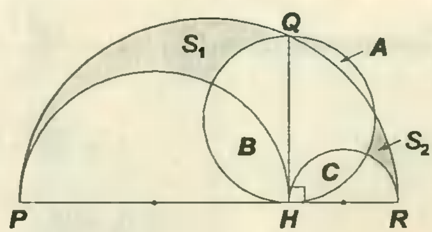
$$A_1 = \frac{\pi 6^2}{6} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 6\pi - 9\sqrt{3} \quad ... (2)$$

$$\Rightarrow A_2 = \text{Área}(\triangle \text{MOC}) - \text{Área}\,(\Delta\, \text{MOC}) \Rightarrow A_2 = \frac{\pi 3^2}{6} - \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \ ... (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $A_x = 6\pi - 9\sqrt{3} - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$

$$A_x = \frac{9\pi}{2} - \frac{27}{4}\sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_x = \frac{9}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})}$$

7.- En la figura $\overline{PH}$; $\overline{HR}$; $\overline{QH}$ y $\overline{PR}$ son diámetros. Encontrar una relación entre las áreas de las regiones indicadas.



Resolución.-

Sabemos por Propiedad que el área del árbelos es :

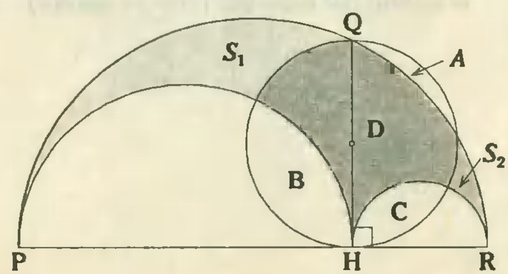
$$S_1 + D + S_2 = \frac{\pi}{4}(QH)^2 \quad ... (1)$$

El área del círculo de diámetro $\overline{QH}$ es :

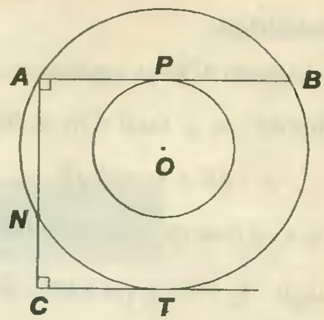
$$B + C + D + A = \frac{\pi}{4}(QH)^2 \quad ... (2)$$

De (1) y (2) : $S_1 + D + S_2 = B + C + D + A$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 + S_2 = A + B + C}$$



8.- En la figura "P" y "T" son puntos de tangencia $AN = NC$ y $OC = \sqrt{17}$. Calcular el área de la corona circular.



Resolución.-

Sean r y R las medidas de los radios de las circunferencias

Luego el área de la corona circular $A_{\circledcirc}$ será : $A_{\circledcirc} = \pi\,(R^2 - r^2)$ ... (1)

Trazamos : $\overline{OK} \perp \overline{AN}$, luego :

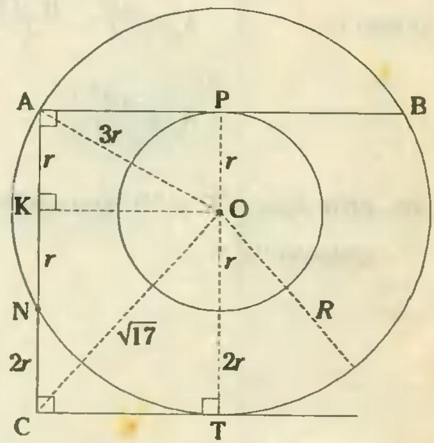
$$AK = KN = r \quad \Rightarrow \quad AN = NC = 2r$$

De donde : $R = 3r$

En el ⊿ AKO : $OK^2 = (3r)^2 - r^2 = 8r^2$

En el ⊿ CKO : $\left(\sqrt{17}\right)^2 = (3r)^2 + OK^2 = 9r^2 + 8r^2$

$$\Rightarrow \quad r = 1 \ \text{y} \ R = 3$$

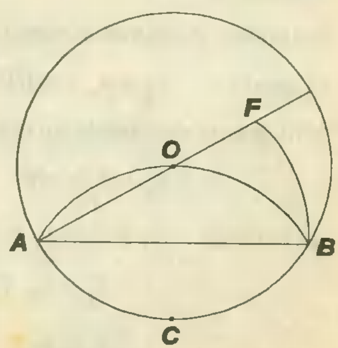


Sustituyendo estos valores encontrados en (1) :

$$A_{\circledcirc} = \pi\,(3^2 - 1^2)$$

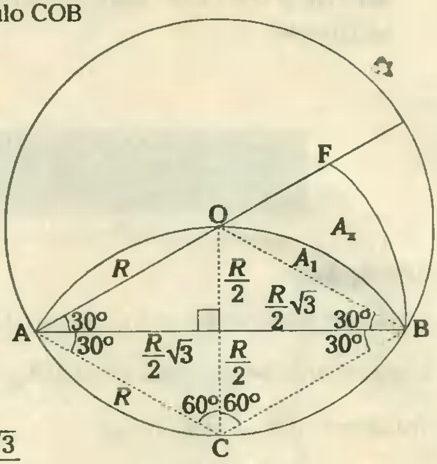
$$\therefore \qquad A_{\circledcirc} = 8\pi$$

9.- En la figura «O» es centro de la circunferencia de radio «R», «C» es centro del arco AOB y «A» centro del arco BF. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-

El triángulo AOC es equilátero lo mismo que el triángulo COB



Además : $m \measuredangle OAB = m \measuredangle BAC = 30°$

y $AB = l_3 = R\sqrt{3}$

Sea A_x el área de la región sombreada

Luego : A_x = *Área* (△ FAB) - *Área* (△ AOB) - A_1

Reemplazando :

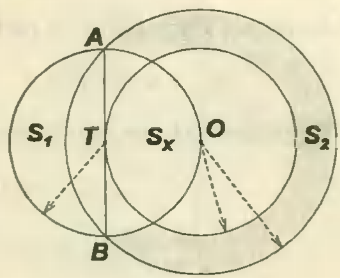
$$A_x = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 30°}{36°} - \frac{R\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{R}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Donde : $$A_x = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = \frac{\pi R^2}{12}}$$

10.- En la figura "T" y "O" son centros $S_1 = 6$ y $S_2 = 11$.

Calcular "S_x"



Resolución.-

Del gráfico el área de la corona circular : $S_2 + S_3$

es igual a : $S_2 + S_3 = \pi(R)^2$ ... (1)

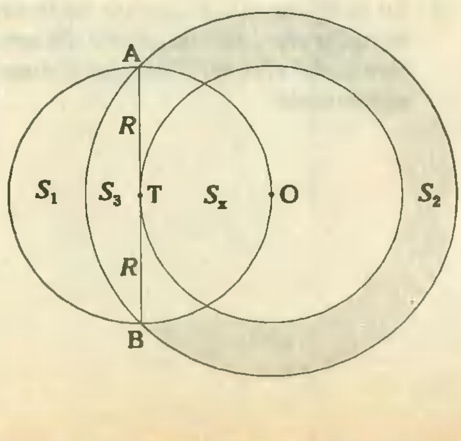
Pero el área del círculo de diámetro $\overline{AB}$ es :

$$S_1 + S_3 + S_x = \pi R^2 \quad ... (2)$$

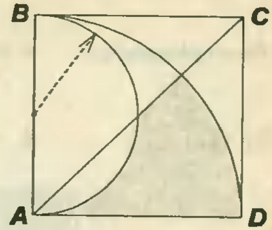
De (1) y (2) : $S_2 + S_3 = S_1 + S_3 + S_x$

$$\Rightarrow \quad S_x = S_2 - S_1 = 11 - 6$$

$$\therefore \quad \boxed{S_x = 5}$$

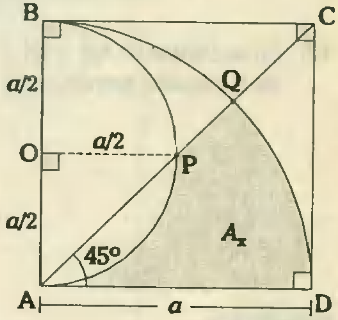


11.- En la figura el lado del cuadrado ABCD mide "a". Hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-

El área pedida A_x lo calculamos restando al área del sector circular QAD y el área del segmento circular PA.

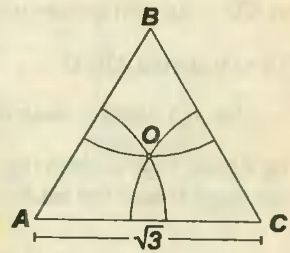


$$\text{Así:} \quad A_x = \pi a^2 \cdot \left(\frac{45}{360}\right) - \left(\frac{\pi(a/2)^2}{4} - \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}\right)$$

$$\text{Donde:} \quad A_x = \frac{\pi a^2}{8} - \left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\right)$$

$$\text{Luego:} \quad A_x = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} \qquad \therefore \quad A_x = \frac{a^2}{16}(\pi - 2)$$

12.- Hallar el área de la región sombreada, si los arcos se han trazado con centros en los vértices del triángulo equilátero de centro "O".



Resolución.-

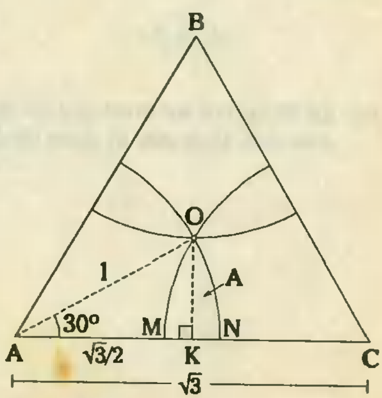
Trazamos $\overline{OA}$ y $\overline{OK} \perp \overline{AC}$, luego: $AK = KC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En el ⊿ AKO de 30° y 60°: $OK = 1/2$ y $AO = 1$

Sea "A" el área de la mitad de la región MON, luego si "A_x" es el área pedida:

$$A_x = 6A \quad ... (1)$$

En el sector circular OAN, se tiene:



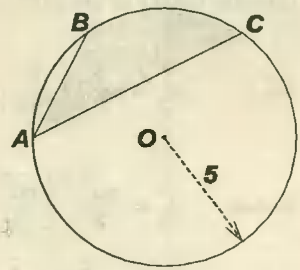
$$A = A_{\triangle AON} - A_{\triangle OKA}$$

Reemplazando : $A = \pi\, 1^2 \cdot \dfrac{30}{360} - \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

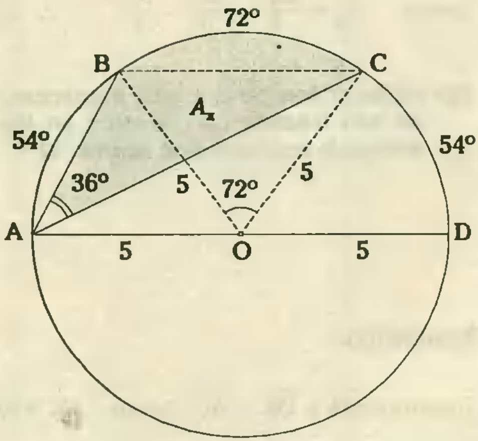
En (1) : $A_x = 6(\pi/12 - \sqrt{5}/8) \quad \Rightarrow \quad A_x = \dfrac{6\pi}{12} - \dfrac{6\sqrt{3}}{8}$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$$

13.- En la figura m $\overset{\frown}{AB}$ = 54 y m $\measuredangle$ BAC = 36. Hallar el área de la región sombreada.



<u>Resolución</u>.-



Trazamos por A el diámetro $\overline{AB}$, luego :

$m\ \overset{\frown}{CD} = 54$ y en consecuencia $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

En el trapecio ABCO :

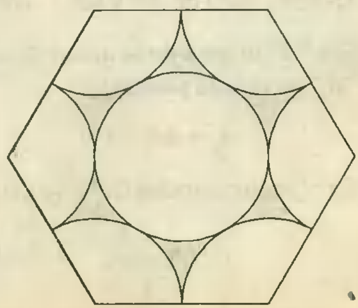
Área (Δ ABC) = *Área* (Δ BOC)

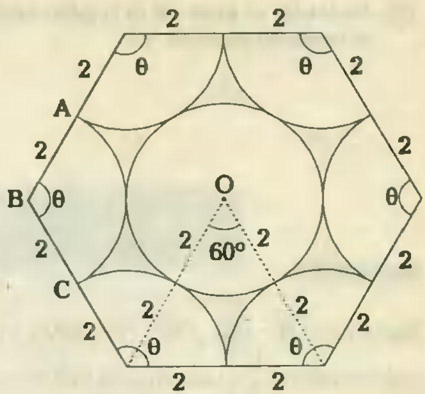
De donde el área de la región sombreada resulta ser igual al área del sector circular BOC.

Luego : $A_x = A \triangle BOC = \pi\, 5^2\, \dfrac{72}{360}$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = 5\pi}$$

14.- En la figura se muestra un hexágono regular de lados 4m. Calcular el área de la región sombreada.





Resolución.-

Sea «A_x» el área de la región sombreada

Luego : A_x = *Área* (Hex.) - 6 *Área* ($\triangle$ ABC) - $A_{\odot}$

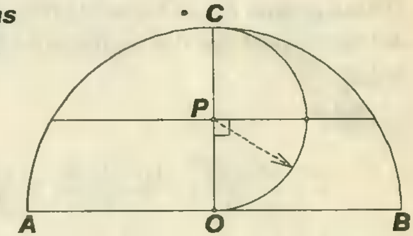
Reemplazando :

$$A_x = \frac{3}{2}\ (4)^2\sqrt{3}\ - 6\left(\frac{\pi 2^2}{3}\right) - \pi 2^2$$

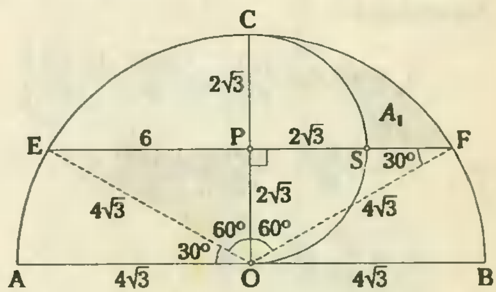
Donde : $\quad A_x = 24\ \sqrt{3}\ - 8\pi\ - 4\pi$

$\therefore \quad \mathbf{A_x = 12(2\sqrt{3}\ - \pi)}$

15.- En la figura P y O son centros. Hallar la suma de las áreas de las regiones sombreadas, si OB = $4\sqrt{3}$.



Resolución.-



Sean : *Área* del triángulo mixtilíneo CFS : A_1

y *Área* del cuadrilátero mixtilíneo AEPO : A_2

Luego el área pedida será : $A_1 + A_2$

Trazamos $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$, luego :OE = OF = $4\sqrt{3}$

En el ⊿ EPO : $m\measuredangle$ PEO = 30 = $m\measuredangle$ PFO

El área A_1 lo hallamos restando al área del sector COF , el área del cuadrante CPS y el área del triángulo rectángulo OPF.

Así : $\quad A_1 = \dfrac{\pi(4\sqrt{3})^2}{6} - \dfrac{\pi(2\sqrt{3})^2}{4} - \dfrac{2\sqrt{3}.6}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 8\pi - 3\pi - 6\sqrt{3}\ = 5\pi - 6\sqrt{3}$

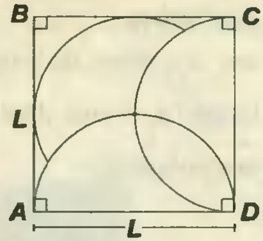
El área A_2 la calculamos sumando el área del sector AOE con el área del ⊿ EPO :

$$A_2 = \frac{\pi(4\sqrt{3})^2}{3} + \frac{6.2\sqrt{3}}{2} = 16\pi + 6\sqrt{3}$$

Finalmente : $\quad A_1 + A_2 = 5\pi - 6\sqrt{3}\ + 16\pi + 6\sqrt{3}$

$\therefore \quad \mathbf{A_1 + A_2 = 21\,\pi}$

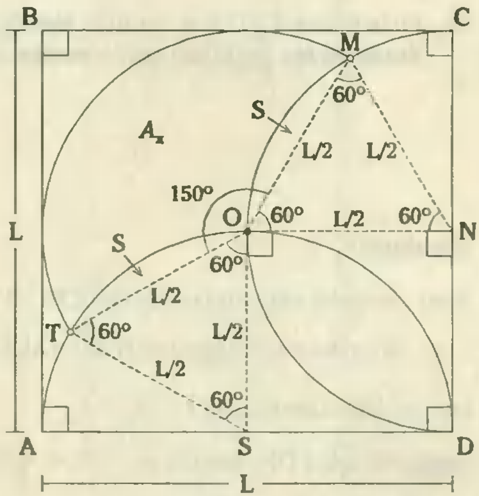
16.- Calcular el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado "L".



Resolución.

Trazamos $\overline{OT}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OS}$, $\overline{MN}$ y $\overline{ST}$, luego los triángulos TOL y OMN son equiláteros cuyos lados miden «$\frac{L}{2}$» ; además SOND es un cuadrado donde : $m\measuredangle SON = 90$.

El área pedida A_x , la hallamos restando el área del sector TOM , los dos segmentos circulares de área S.



Donde :

$$S = \frac{\pi(L/2)^2}{6} - \frac{(L/2)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi L^2}{24} - \frac{L^2\sqrt{3}}{16}$$

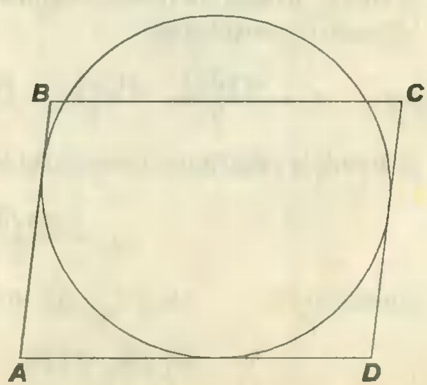
Así tenemos :

$$A_x = \pi(L/2)^2\,\frac{150}{360} - 2\left(\frac{\pi L^2}{24} - \frac{L^2\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_x = \frac{5\pi L^2}{48} - \frac{\pi L^2}{12} + \frac{L^2\sqrt{3}}{8}$$

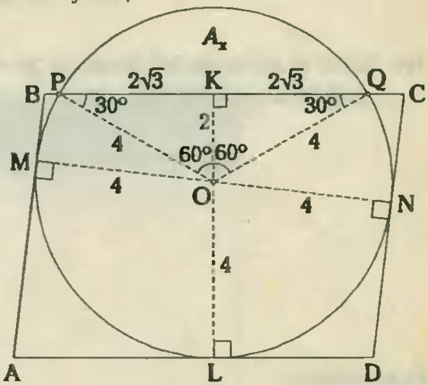
$$A_x = \frac{L^2}{48}(\pi + 6\sqrt{3})$$

17.- Calcular el área del segmento circular mostrado, si ABCD es un romboide de alturas 6 y 8.



Resolución.-

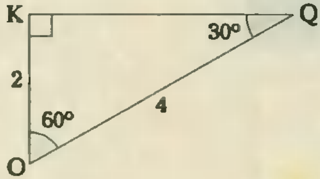
Por el centro O de la circunferencia trazamos las alturas $\overline{MN}$ y $\overline{KL}$,



Luego : $MO = ON = 4 = OL$ y $OK = 2$

Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$,

Luego en el ⊾ OKQ :



$m\measuredangle KOQ = 60$

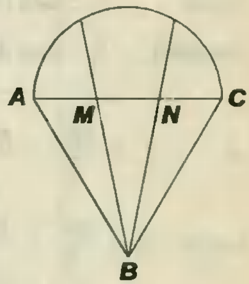
Análogamente :

$m\measuredangle POK = 60°$

Luego : $A_x = A(\bigtriangleup POQ) - A(\Delta POQ)$

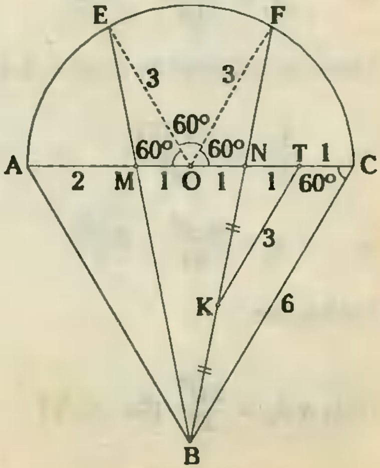
Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi 4^2}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}.2}{2}$ $\therefore$ $A_x = \dfrac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

18.- Calcular el área de la región sombreada, si el triángulo ABC es equilátero y AM = MN = NC = a.



Resolución.-

En el triángulo BNC , trazamos la base media $\overline{TK}$, luego :



$$TK = \frac{6}{2} = 3 \quad y \quad m\measuredangle NTK = 60$$

$\Delta OFN \cong \Delta NTK$ (4° Caso) $\Rightarrow m\measuredangle FON = m\measuredangle NTK = 60$

Análogamente $m\measuredangle AOE = 60$ y $m\measuredangle EOF = 60$

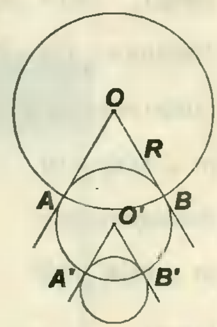
Sea A_x el área pedida, luego :

$$A_x = A(\bigtriangleup EOF) + 2A(\Delta EMO)$$

Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi 3^2}{6} + 2\left[\dfrac{1}{2}(1)(3)\text{sen}60\right]$

$$\Rightarrow \quad A_x = \frac{3\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad \mathbf{A_x = \frac{3}{2}\,(\pi + \sqrt{3}\,)}$$

19.- Hallar la suma de las áreas de las regiones sombreadas, si m ∡ AOB = m∡ A'O'B' = 60.



Resolución.-

Sean las áreas de la región mayor A_1 y de la menor A_2 , A_1 la calculamos trazando la cuerda común $\overline{AB}$, luego : $A_1 = S_1 + S_2$

Donde : S_1 : área del segmento circular de la circunferencia O

También : S_2 : área del segmento circular de la circunferencia O'

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{\pi(R/\sqrt{3})^2}{3} - \frac{\frac{R}{\sqrt{3}}\cdot\frac{R}{\sqrt{3}}\text{Sen}120}{2} = \frac{\pi R^2}{9} - \frac{R^2\sqrt{3}}{12}$$

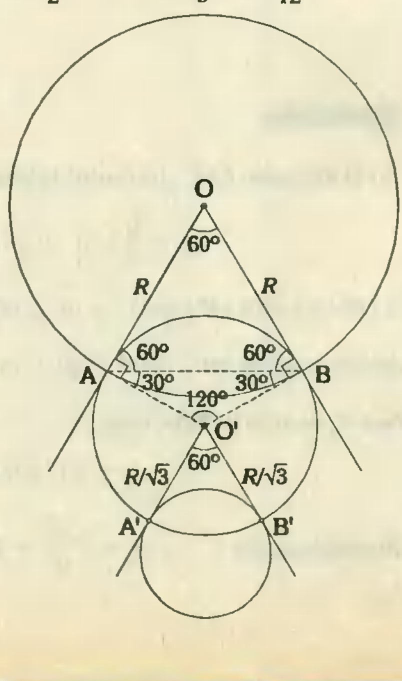
Luego : $A_1 = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi R^2}{9} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{12}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A_1 = \frac{5\pi R^2}{18} - \frac{R^2\sqrt{3}}{3}}$$

Como las regiones de áreas A_1 y A_2 son semejantes :

$$\Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{(R/\sqrt{3})^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{A_1}{3}$$

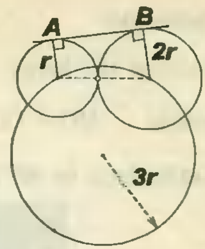
$$\Rightarrow \quad \mathbf{A_2 = \frac{5\pi R^2}{54} - \frac{R^2\sqrt{3}}{9}}$$



Finalmente :

$$\mathbf{A_1 + A_2 = \frac{2R^2}{27}\,(5\pi - 6\sqrt{3}\,)}$$

20.- Calcular el área de la región sombreada si A y B son puntos de tangencia.



Resolución.-

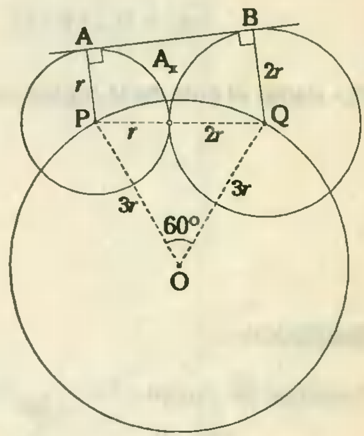
Sea A_x el área de la región sombreada, luego : $A_x = A(⏢\ PABQ) - A_{⌓}\ PQ$ ... (1)

$$A(⏢\ PABQ) = \left(\frac{r+2r}{2}\right)(AB) = \frac{3r}{2}AB$$

Puesto que : $AB = 2\sqrt{r.2r}$ (Propiedad)

$\Rightarrow$ $AB = 2r\sqrt{2}$

Luego : $A(⏢\ PABQ) = 3r^2\sqrt{2}$ ... (2)



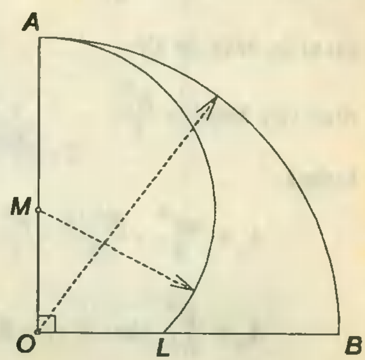
Ahora : $A(⌓\ PQ) = \dfrac{\pi(3r)^2}{6} - \dfrac{(3r)^2\sqrt{3}}{4}$

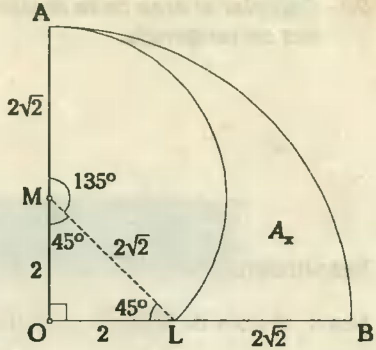
$= \dfrac{3\pi r^2}{2} - \dfrac{9r^2\sqrt{3}}{4}$ ... (3)

(2) y (3) en (1) : $A_x = 3r^2\sqrt{2} - \dfrac{3\pi r^2}{2} - \dfrac{9r^2\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \quad \mathbf{A_x = \frac{3r^2}{4}(4\sqrt{2} - 2\pi - 3\sqrt{3})}$$

21.- En la figura M y O son centros $AM = LB = 2\sqrt{2}$. Calcular el área de la región sombreada.





Resolución.-

Trazamos $\overline{ML}$, luego : $AM = ML = LB = 2\sqrt{3}$

Además : $MO = OL$

En el ⊿ MOL de 45° : $MO = OL = 2$

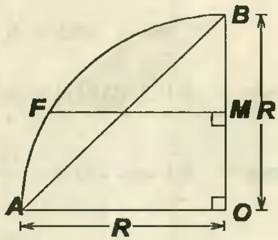
$$A_x = A(\text{◺ AOB}) - A(\text{△ AML}) - A(\text{⊿ MOL})$$

Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi(2+2\sqrt{2})^2}{4} - \pi\,(2\sqrt{2})^2\left(\dfrac{135}{360}\right) - \dfrac{2\times 2}{2}$

$$\Rightarrow \qquad A_x = \frac{\pi(4+8+8\sqrt{2})}{4} - 8\pi \times \frac{3}{8} - 2$$

$$\therefore \qquad \mathbf{A_x = 2(\sqrt{2}\,\pi - 1)}$$

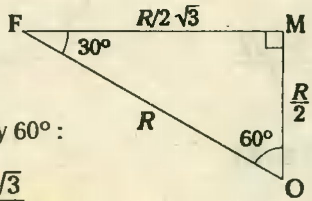
22.- Hallar el área de la región sombreada, si BM = MO



Resolución.-

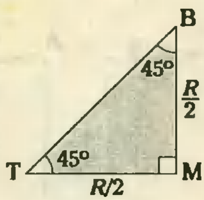
Trazamos $\overline{OF}$, luego :

$OF = R$



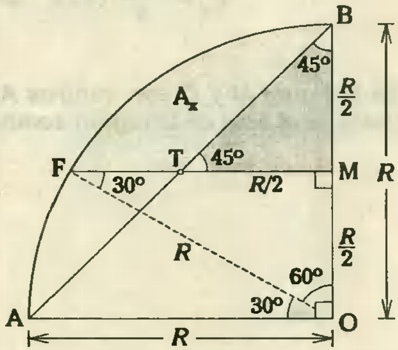
En el ⊿ FMO de 30° y 60° :

$$\textit{Área}\ (\text{⊿ FMO}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$



En el ⊿ TMB de 45° :

$$\textit{Área}\ (\text{⊿ TMB}) = \frac{R^2}{8}$$



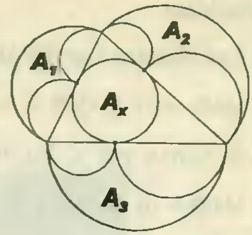
Luego :

$$A_x = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{R^2}{8}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{A_x = \frac{R^2}{24}\,(4\pi - 3\sqrt{3} - 3)}$$

23.- Del gráfico mostrado.

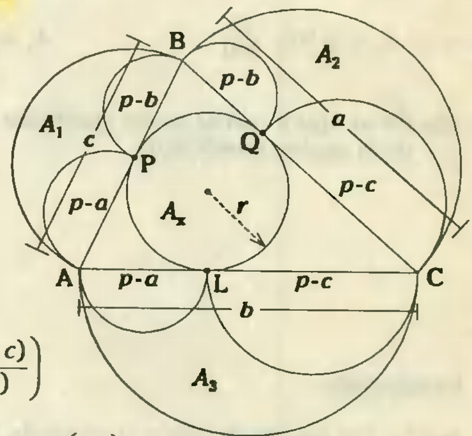
Hallar : A_x , si : $\dfrac{1}{A_1}+\dfrac{1}{A_2}+\dfrac{1}{A_3}=\dfrac{1}{5}$



Resolución.-

Por Propiedad : AP = AL = $p - a$; BP = BQ = $p - b$ y CQ = CL = $p - c$, donde p es el semiperímetro.

Por la propiedad del arbelos : $A_1 = \dfrac{\pi}{4}(p-a)(p-b)$



De donde : $\dfrac{1}{A_1}=\dfrac{4}{\pi(p-a)(p-b)}$

Análogamente : $\dfrac{1}{A_2}=\dfrac{4}{\pi(p-b)(p-c)}$

y $\dfrac{1}{A_3}=\dfrac{4}{\pi(p-a)(p-c)}$

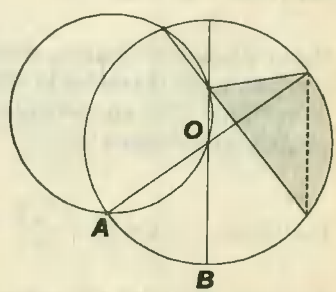
Luego :

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}=\frac{1}{5}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right)$$

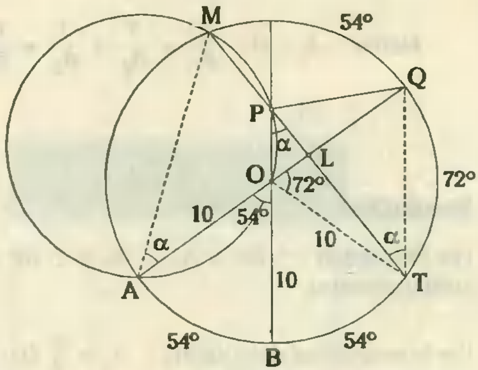
En consecuencia : $\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right)=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$

$$\therefore \qquad \boxed{r=\sqrt{\frac{20}{\pi}}}$$

24.- Del gráfico, calcular el área de la región sombreada, si: OA = 10 y $m\overset{\frown}{AB}$ = 54 ; además O es centro.



Resolución.-



En el cuadrilátero inscrito MAOP :

$m\measuredangle MAO = m\measuredangle OPT = \alpha$ (3° Propiedad)

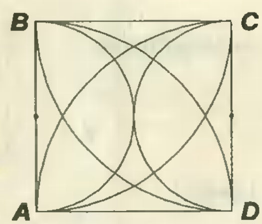
En la ◎ mayor, por ∡ inscrito :

$m\measuredangle MTQ = m\measuredangle MAQ = \alpha$

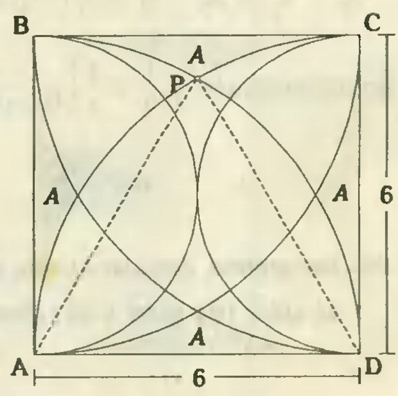
$\overline{PB}\ //\ \overline{QT}$, luego OPQT es un trapecio, de donde: *Área* (Δ PLQ) = *Área* (Δ OLT), y en consecuencia el área de la región sombreada (A_x), será igual al área del sector circular QOT de 72° y radio = 10.

$\Rightarrow \quad A_x = \pi\, 10^2 \cdot \dfrac{72}{360} \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_x = 20\pi}$

25.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado 6. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-



Sea "A_x" el área de la región sombreada, luego :

$$A_x = A(\square\, ABCD) - A\,◎ - 2A \qquad ...(1)$$

$$A(\square\, ABCD) = 6^2 \quad \Rightarrow \quad A(\square\, ABCD) = 36 \quad ...(2)$$

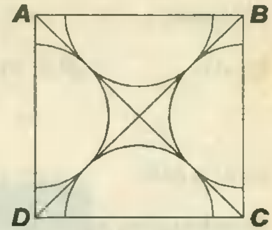
También : $A◎ = \pi 3^2 \quad \Rightarrow \quad A◎ = 9\pi \quad ...(3)$

Para calcular "A", trazamos los radios $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$, descomponiendo el cuadrado ABCD en 2 sectores circulares BAP y PDC, un triángulo equilátero APD y la superficie BPC de área "A".

De donde : $A = 6^2 - \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} - 2\left(\dfrac{\pi 6^2}{12}\right) \quad \Rightarrow \quad A = 36 - 9\sqrt{3} - 6\pi \quad ...(4)$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1) : $\quad \mathbf{A_x = 3(\pi + 6\sqrt{3} - 12)}$

26.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ y las semi-circunferencias son tangentes a las diagonales. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-

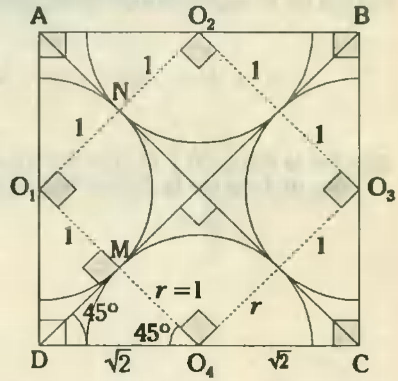
En el ⊿ DMO_4 de 45° : $r\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow r = 1$

Sea A_x el área pedida

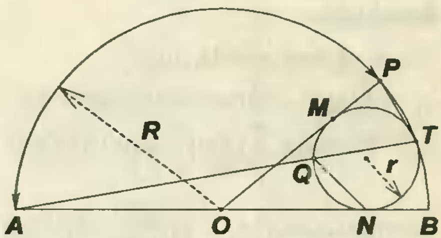
Luego : $A_x = \text{Área}\,(\square\, O_1O_2O_3O_4) - 4\,\text{Área}\,(\triangle MO_1N)$

Reemplazando : $A_x = 2^2 - 4\left(\dfrac{\pi 1^2}{4}\right)$

$\therefore \quad A_x = 4 - \pi$



27.- De la figura, calcular el área de la región sombreada si $\overline{QN} \,//\, \overline{PT}$ y $R = 3$.



Resolución.-

Por propiedad : $m\measuredangle ATN = 45°$

Por $\measuredangle$ inscrito : $m\,\overset{\frown}{QN} = 90$

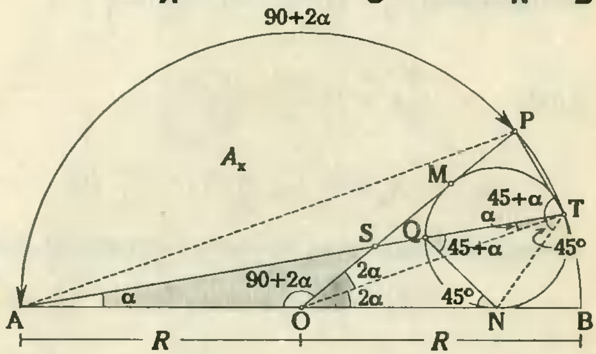
De donde : $m\measuredangle QNO = 45$

En el Δ AQN : $m\measuredangle TQN = 45 + \alpha$

Puesto que : $\overline{QN} \,//\, \overline{PT}$ (dato)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle QTP = 45 + \alpha$ y $m\measuredangle AOP = 90 + 2\alpha$

En el Δ AOT, isósceles : $m\measuredangle ATO = \alpha$

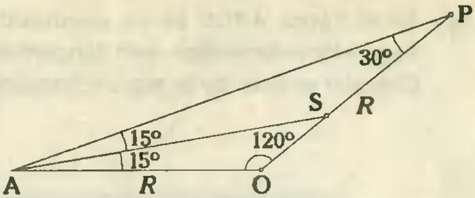


De donde : $m \measuredangle POB = 4\alpha$

En «O» : $90 + 2\alpha + 4\alpha = 180$

$\Rightarrow \quad \alpha = 15$

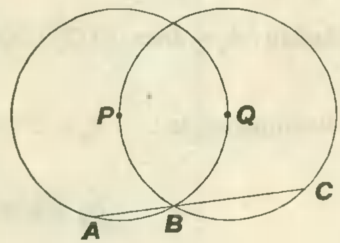
En el Δ AOP : $m \measuredangle PAS = 15$



En el trapecio APTO ; las áreas de los triángulos AOS y PST son iguales con lo cual se tiene que el área de la región sombreada, es igual al área del sector circular AOP, es decir :

$$A_x = A(\triangle AOP) = \pi R^2 \cdot \left(\frac{90+2\alpha}{360}\right) = \pi 3^2\left(\frac{120}{360}\right) \qquad \therefore \qquad A_x = 3\pi$$

28.- En la figura P y Q son centros AB = 3 y BC = 6. Calcular el área de la figura indicada.



__Resolución.-__

Sea A_x el área pedida, luego :

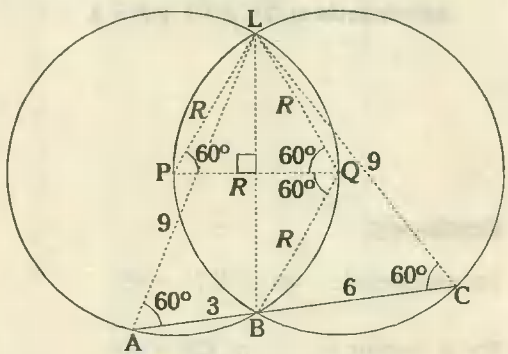
$A_x = 2$ (*Área* segmento circular LPB)

$A_x = 2$ [*Área* ($\triangle$ LQB) - *Área* (Δ LQB)]

Reemplazando : $A_x = 2\left(\dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{1}{2}R^2 Sen120\right)$

Donde : $A_x = 2\left(\dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow \quad A_x = \dfrac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \qquad \text{... (1)}$



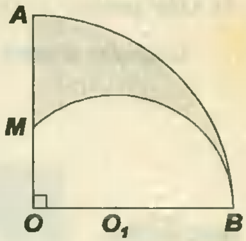
Aplicando el Teorema de Steward en el triángulo equilátero ALC :

$$(LB)^2 = 9^2 - 3 \,.\, 6 = 81 - 18 \Rightarrow LB = 3\sqrt{7} = R\sqrt{3}$$

De donde : $R = \dfrac{3\sqrt{7}}{3}$

Sustituyendo en (1) : $A_x = \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_x = \dfrac{7}{2}(4\pi - 3\sqrt{3})}$

29.- En la figura mostrada O y O_1 son centros , además se sabe que AM = $O_1B = 2\sqrt{2}$. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-

Sea A_x el área pedida . luego :

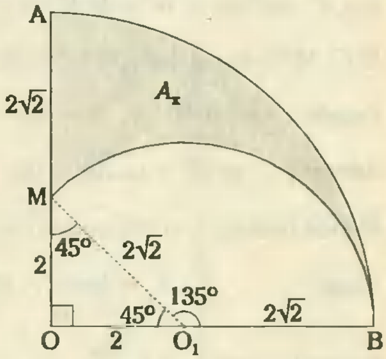
A_x = *Área* (⊾ AOB) - *Área* (⊾ MOO_1) - *Área* (△ MO_1B)

Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi(2+2\sqrt{2})^2}{4} - \dfrac{2.2}{2} - \dfrac{\pi(2\sqrt{2})^2 135}{360}$

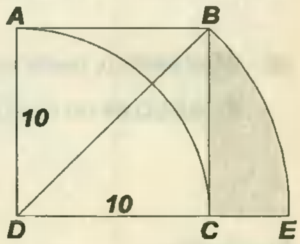
Donde : $A_x = \pi\,(3 + 2\sqrt{2}) - 2 - 3\pi$

Ahora : $A_x = 3\pi + 2\sqrt{2}\pi - 2 - 3\pi$

$\therefore$ $A_x = 2(\sqrt{2}\,\pi - 1)$



30.- Hallar el área de la región sombreada comprendida entre dos circunferencias de centro D y un cuadrado con un vértice en D y lado 10m.



Resolución.-

Del gráfico mostrado : A_1 = *Área* (□ ABCD) - *Área* (△ ADC)

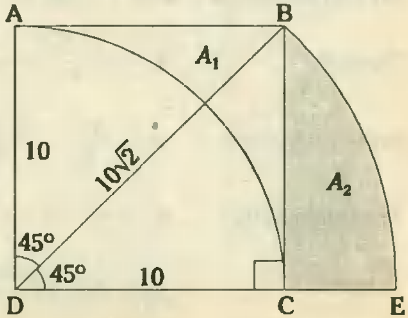
$$A_1 = 10^2 - \frac{\pi 10^2}{4} = 100 - 25\pi$$

También : A_2 = *Área* (△ BDE) - *Área* (Δ BCD)

Reemplazando : $A_2 = \dfrac{\pi(10\sqrt{2})^2 45}{360} - \dfrac{10.10}{2} = 25\pi - 50$

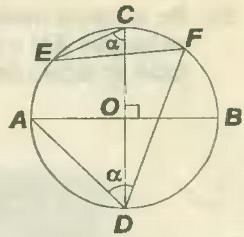
Luego : $A_1 + A_2 = 100 - 25\pi + 25\pi - 50$

$\therefore$ $\mathbf{A_1 + A_2 = 50m^2}$



31.- Del gráfico : «O» es centro : m ∡ ECD = m ∡ ADF = α .

Calcular el área de la región sombreada, si AO = OB = r



Resolución.-

Por ∡ inscrito : $m\measuredangle ECD = m\measuredangle EFD = \alpha$

El □ AEFD es un trapecio isósceles

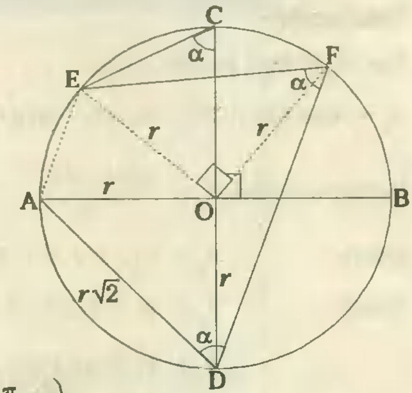
Donde : $\overline{AE} \parallel \overline{FD}$ y $EF = AD = r\sqrt{2}$

Además : $m\,\widehat{EF} = m\,\widehat{AD} = 90^\circ$

El área pedida A_x corresponde a un segmento circular,

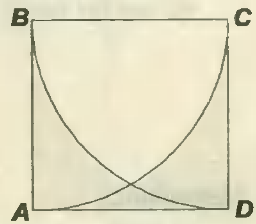
Luego : $A_x = \text{Área}\,(\triangle\, EOF) - \text{Área}\,(\triangle\, EOF)$

Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\mathbf{A_x = \dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)}$



32.- En el gráfico, hallar el área de la región sombreada.

Si: ABCD es un cuadrado de lado 2 cm.



Resolución.-

Trazamos $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$ formando el triángulo equilátero BPC y los segmentos circulares $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$, luego : $A_x = \text{Área}\,(\square\, ABCD) - A_1 - 2A$

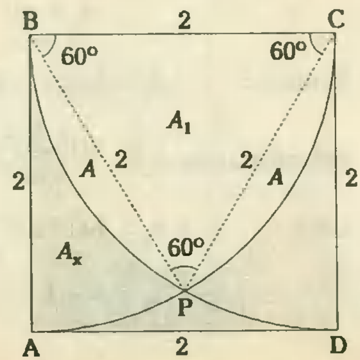
En consecuencia : $\text{Área}\,(\square\, ABCD) = 2^2 = 4$

También : $A_1 = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

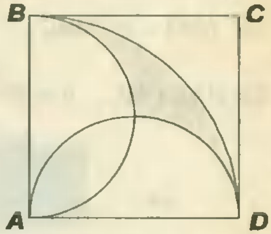
Por consiguiente : $A = \dfrac{\pi 2^2}{6} - \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

Reemplazando : $A_x = 4 - \sqrt{3} - 2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

$\therefore\quad \mathbf{A_x = 4 + \sqrt{3} - \dfrac{4\pi}{3}}$



33.- Calcular el área de la parte sombreada si ABCD es un cuadrado de lado «a»

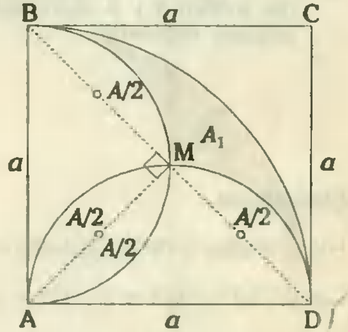


Resolución.-

El área pedida esta formada por 2 regiones cuyas áreas son A_1 y A , luego : $A_x = A + A_1$

Al trazar la diagonal del cuadrado esta pasa por M resultando : AM = BM = MD

De donde las áreas de los segmentos circulares $\overline{BM}$ y $\overline{MD}$ son «$A/2$»



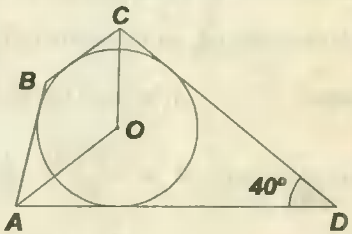
Resultando A_x = *Área* del segmento circular $\overline{BD}$

Ahora : A_x = *Área* (⌓ BAD) - *Área* (Δ BAD)

Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}$

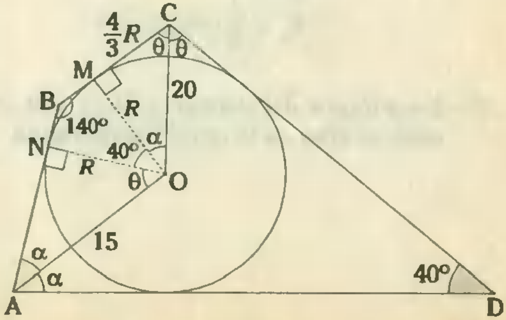
$\therefore \quad A_x = \dfrac{a^2}{4}$

34.- En la figura «O» es centro, OA = 15, OC = 20. El ⌂ ABCD es inscriptible. Calcular el área del sector circular indicado.



Resolución.-

En el cuadrilátero circunscrito ABCD $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son bisectrices.



Luego : $m\measuredangle BAO = m\measuredangle OAD = \alpha$

También : $m\measuredangle BCO = m\measuredangle OCD = \theta$

Además : $2(\alpha + \theta) = 180$

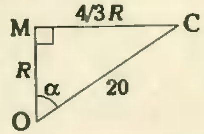
$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = 90°$

$\triangle$ ANO ~ $\triangle$ OMC : $\dfrac{R}{MC} = \dfrac{15}{20} \Rightarrow MC = \dfrac{4}{3}R$

En el $\triangle$ OMC : $\theta = 37°$

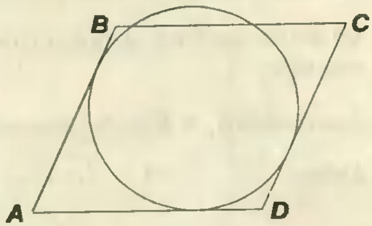
$\alpha = 53°$

$\Rightarrow \quad R = 12$



Luego : $A_x = \dfrac{\pi R^2(\theta+\alpha+40)}{360} = \dfrac{\pi 12^2 . 130}{360} \quad \therefore \quad \mathbf{A_x = 52\,\pi}$

35.- En la figura : ABCD es un romboide cuyas alturas miden 4 y 3. Calcular el área del segmento circular indicado.



<u>Resolución</u>.-

Por el centro O de la circunferencia, trazamos las alturas $\overline{MN}$ y $\overline{HT}$

Luego : MO = ON = 2 , OT = 2 y OH = 1

Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$, luego en el $\triangle$ HOQ : $m\measuredangle HOQ = 60°$

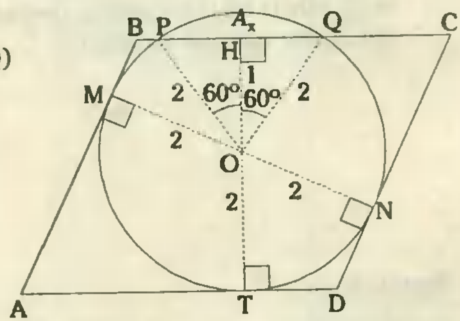
El área pedida A_x es un segmento circular.

Luego : $A_x = Área\,(\triangle POQ) - Área\,(\Delta POQ)$

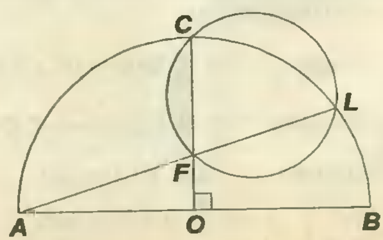
Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi 2^2\,120}{360} - \dfrac{1}{2}(2)(2)\text{ sen }120°$

Donde : $A_x = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

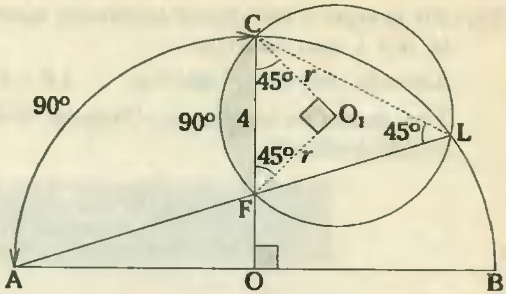
$\therefore \quad \mathbf{A_x = \dfrac{1}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})}$



36.- En la figura $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $\overline{CF} = 4$. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución.-



Por ∡ inscrito : $m\measuredangle CLA = 45^\circ$

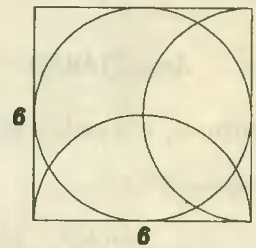
En la circunferencia menor : $m\widehat{FC} = 90^\circ$

En el ⊿ CO_1F de 45° : $r = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Luego : $A_x = \dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{\pi(2\sqrt{2})^2}{4} - \dfrac{(2\sqrt{2})^2}{2}$

$$A_x = 2\pi - 4$$

37.- Calcular el área de la región indicada :



Resolución.-

Los triángulos TSO y ORL son equiláteros de lado 3

Luego : $m\measuredangle LOR = m\measuredangle TOS = 60^\circ$

El área pedida A_x se calcula así : $A_x = Área\,(\triangle\, LOT) - 2\,A_1$

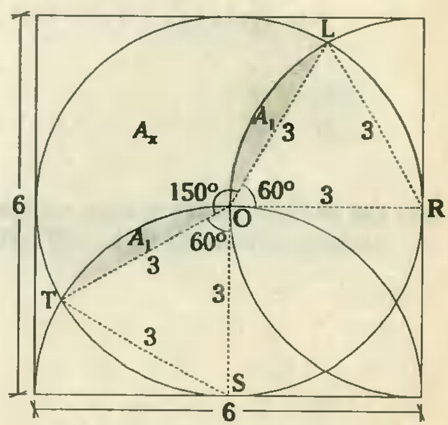
Reemplazando : $A_1 = \dfrac{\pi 3^2}{6} - \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

$Área\,(\triangle\, LOT) = \dfrac{\pi 3^2 . 150}{360} = \dfrac{15\pi}{4}$

Reemplazando : $A_x = \dfrac{15\pi}{4} - 2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\right)$

Luego : $A_x = \dfrac{15\pi}{4} - 3\pi + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

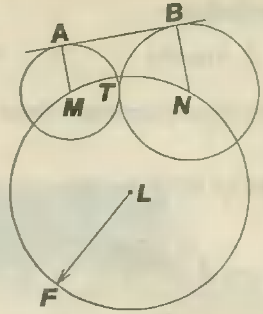
$$\therefore \quad A_x = \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



38.- En la figura mostrada podemos observar que M, N y L son centros.

Además :AM = r , BN = 2r , LF = 3r

T es punto de tangencia. Calcular el área de la región indicada.



__Resolución__.-

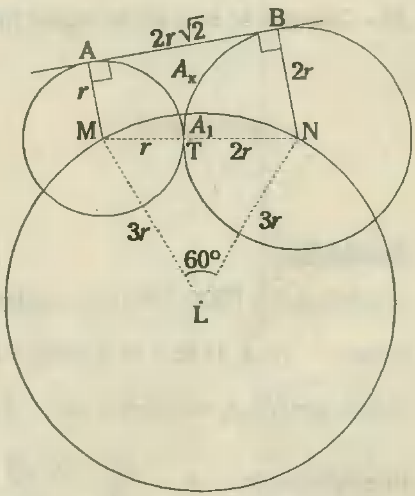
Del gráfico : $A_x = Área\ (\square\ ABNM) - A_1$ ... (1)

Ahora : $Área\ (\square\ ABNM) = \left(\frac{r+2r}{2}\right) 2r\sqrt{2} = 3r^2\sqrt{2}$

También : $A_1 = Área\ (\triangle\ MLN) - Área\ (\Delta\ MLN)$

Reemplazando :

$$A_1 = \frac{\pi(3r)^2}{6} - \frac{(3r)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi r^2}{2} - \frac{9r^2\sqrt{3}}{4}$$



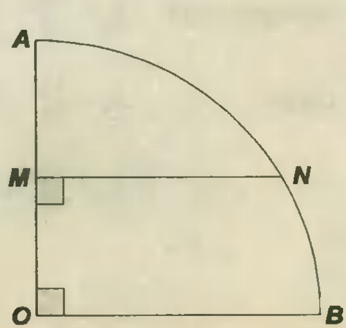
Sustituyendo en (1) :

$$A_x = 3r^2\sqrt{2} - \left(\frac{3\pi r^2}{2} - \frac{9r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_x = \frac{3}{4} r^2 (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\pi)$$

$$\therefore \quad \frac{A_x}{A_1} = \frac{4}{3}$$

39.- Del gráfico. Hallar el área sombreada, si $\overline{MN}$ es mediatriz de $\overline{AO}$ (OA = OB = R)



Resolución.-

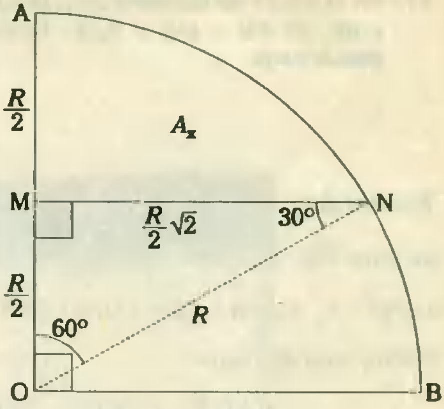
En el ⊾ MON : $m\measuredangle MON = 60°$

$$A_x = Área\,(\triangle AON) - Área\,(⊾\,NMO)$$

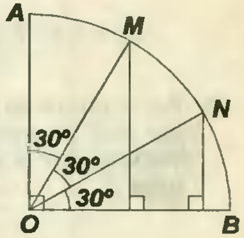
Reemplazando : $A_x = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{2}\right)\left(\dfrac{R}{2}\sqrt{3}\right)$

Luego : $A_x = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{8}$

$$\therefore \quad A_x = \frac{R^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})$$



40.- Calcular el área de la región sombreada, si AOB es un cuadrante de radio R.



Resolución.-

Sea A_x el área pedida, luego :

$$A_x = A_1 + A_2$$

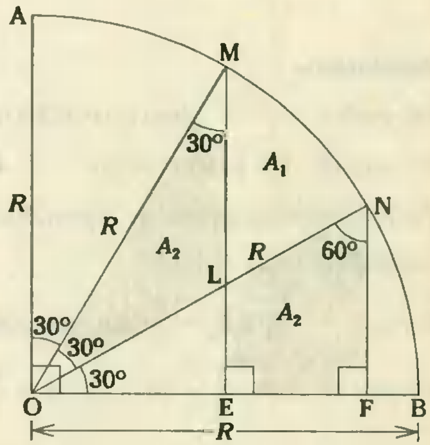
Ahora : ⊾ MEO ≅ ⊾ NFO

Luego : *Área* (Δ MEO) = *Área* (⊾ NFO)

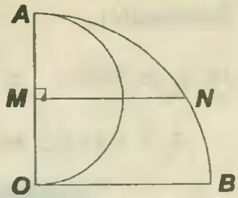
Resultando : *Área* (Δ MLO) = A_2

De donde : $A_x = A_1 + A_2 =$ *Área* (△ MON)

$$\therefore \quad A_x = \frac{\pi R^2}{12}$$



41.- En la figura se muestra un cuarto de círculo y un semicírculo. Si AM = MO = $2\sqrt{3}$. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución.-

Se traza $\overline{ON}$: ⊿ OMN : Notable (30° y 60°) $\Rightarrow$ MN = 6

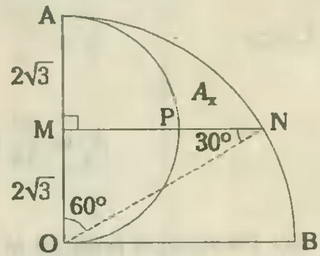
Luego : A_x = *Área* △ AON - *Área* ⌓ AMP - *Área* ⊿ OMN

Reemplazando datos :

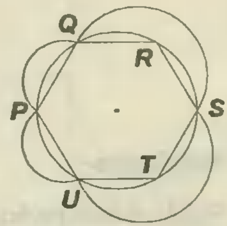
$$A_x = \frac{\pi(4\sqrt{3})^2}{6} - \frac{\pi(2\sqrt{3})^2}{4} - \frac{(2\sqrt{3})(6)}{2}$$

$$A_x = 8\pi - 3\pi - 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_x = 5\pi - 6\sqrt{3}}$$



42.- En la figura se muestra un hexágono regular PQRSTU, del cual se pide hallar su área; si la región sombreada limitada por la circunferencia y las semicircunferencias mide S.



Resolución.-

Del gráfico : *Área* (⬡ PQRSTU) = 6 *A* ... (I)

Se traza $\overline{PS}$, $\overline{QS}$ y $\overline{QO}$, siendo : *Área* (⊿ PQO) = *Área* (△ OQS) = *A*

Por propiedad de lúnulas de Hipócrates en el ⊿ PQS : *Área* (⊿ PQS) = $A_1 + A_2$

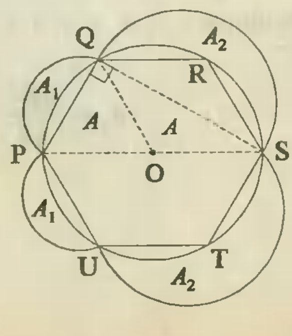
Del gráfico : $A_1 + A_2 = 2A$

Pero : $S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$ (dato del problema)

Entonces : $\frac{S}{2} = 2A \Rightarrow A = \frac{S}{4}$ ... (II)

De II en I : *Área* (⬡ PQRSTU) $= 6 . \left(\frac{S}{4}\right)$

$\therefore$ ***Área* (⬡ PQRSTU) = $3\frac{S}{2}$**



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Se tiene un rectángulo ABCD y una circunferencia que contiene a "B" y "C", además es tangente a $\overline{AD}$ e intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en "M" y "N" respectivamente. Calcular el área de la región limitada por $\overset{\frown}{MB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CN}$ y MN si BC = 2 MB y el radio de la circunferencia mide 6.

A) $\dfrac{172\pi}{10} - \dfrac{216}{3}$ D) $\dfrac{125\pi}{3} + \dfrac{213}{7}$

B) $\dfrac{127\pi}{10} + \dfrac{216}{5}$ E) N.A.

C) $\dfrac{127\pi}{5} + \dfrac{216}{10}$

2.- Calcular el área de un círculo inscrito en un sector circular de 60º de ángulo central y tiene por área $24u^2$

A) $2u^2$ B) $4u^2$ C) $6u^2$ D) $8u^2$ E) $10u^2$

3.- Si ABCD es un cuadrado de lado igual a $2m$. Calcular el área de la región sombreada, si A y D son centros de los arcos BD y AC respectivamente.

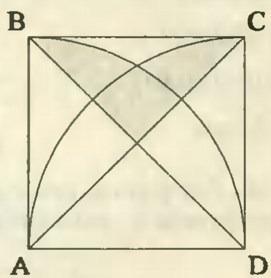
A) $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-2$

B) $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-3$

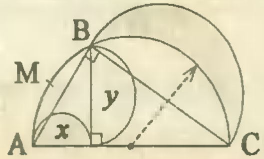
C) $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-4$

D) $\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+3$

E) $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}-3$



4.- En la figura mostrada, calcular la suma de las áreas x e y. Si el área del triángulo mixtilíneo AMBC es $40\ m^2$ y el área de la lúnula sombreada es $10\ m^2$.



A) $10\ m^2$ B) $20\ m^2$ C) $30\ m^2$

D) $40\ m^2$ E) $50\ m^2$

5.- En la figura se tiene un cuadrante con centro "O". Hallar el área de la región sombreada. Si AM = $1m$ y MB = $\sqrt{2}\ m$.

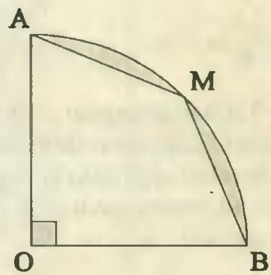
A) $\dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{7}{4}$

B) $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{7}{2}$

C) $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{7}{8}$

D) $\dfrac{4\pi}{5} - \dfrac{8}{7}$

E) $\dfrac{8\pi}{5} - \dfrac{7}{4}$



6.- En la siguiente figura $\overline{AC}$ es diámetro, $m\ \hat{C} = 30°$ y OA = AC / 4. Si el área de la región triangular ABC es $32\sqrt{3}$. Calcular el área del círculo cuya circunferencia equidista de los cuatro puntos A; B; C y O

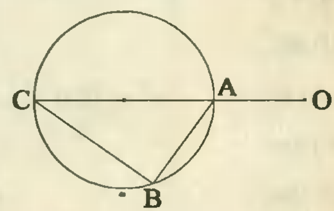
A) 70π

B) 100π

C) 95π

D) 90π

E) 80π



7.- Si "O" es centro de los círculos de radios $1u$ y $2u$. Calcular el área de la región sombreada.

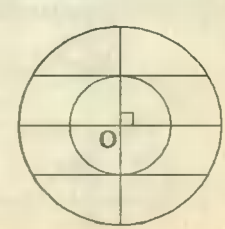
A) $\pi u^2 / 2$

B) πu^2

C) $3u^2 / 4$

D) $3\pi u^2 / 2$

E) $2\pi u^2$



8.- En la figura "O" es centro de la circunferencia y su radio mide "a". Además AQ = QB. Calcular el área de la región sombreada.

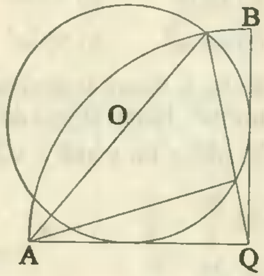
A) $\frac{a^2}{2}(\pi + 2)$

B) $\frac{a^2}{4}(\pi - 2)$

C) $a^2(\pi - 2)$

D) $\frac{a^2}{4}(\pi - 1)$

E) $\frac{a^2}{6}(\pi + 3)$



9.- En un rectángulo ABCD se inscribe una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Calcular el área del segmento circular determinado al unir los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Sabiendo que AB = 6.

A) $15\pi - 6\sqrt{3}$

B) $12\pi - 8\sqrt{2}$

C) $9\pi - 12\sqrt{3}$

D) $12\pi - 9\sqrt{3}$

E) $18\pi - 8\sqrt{3}$

10.- Hallar el área "S_x". Si $S_1 + S_2 = 12m^2$.

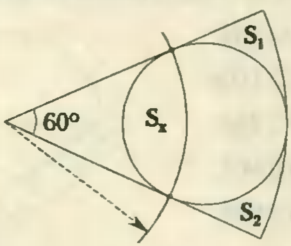
A) $3m^2$

B) $4m^2$

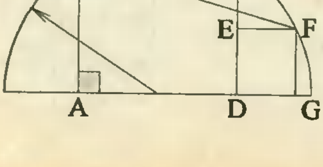
C) $6m^2$

D) $8m^2$

E) $12m^2$



11.- Calcular el área de la región sombreada, siendo ABCD y DEFG cuadrados de lados «a» y «b» respectivamente.



A) $\pi(a^2 + b^2)$

B) $\left(\frac{\pi - 2}{4}\right)(a^2 - b^2)$

C) $(\pi - 2)\frac{a^2}{2}$

D) $(\pi - 2)\left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right)$

E) $(\pi - 2)\,ab$

12.- Del gráfico, calcular el área de la región sombreada; si PQ = 6u y QR = 4u («O» centro de los semicírculos)

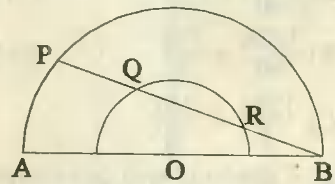
A) $20\pi u^2$

B) $30\pi u^2$

C) $40\pi u^2$

D) $15\pi u^2$

E) $60\pi u^2$



13.- En la figura mostrada «A» y «O» son centros, OB = $2\sqrt{2}$ y $m\,\widehat{OP} = m\,\widehat{PB}$. Calcular el área del sector circular PAQ

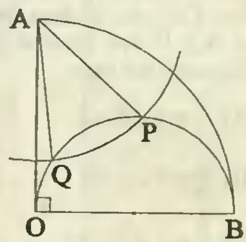
A) $\pi/3$

B) $4\pi/11$

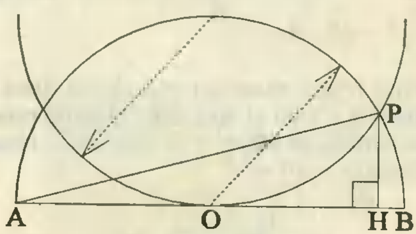
C) $37\pi/90$

D) $53\pi/180$

E) $3\pi/8$



14.- Del gráfico, hallar el área de la región sombreada si : AO = OB y PH = 2u



A) $(5\pi - 8)u^2$ B) $(\pi - 2)u^2$ C) $(4\pi - 6)u^2$

D) $(4\pi - 8)u^2$ E) $(2\pi - 3)u^2$

15.- En la figura O y Q son centros, calcular la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.

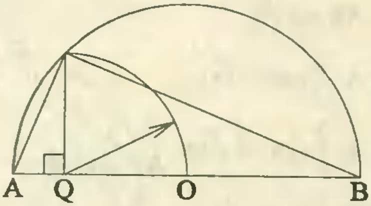
A) 1/3

B) 1/4

C) $1/\sqrt{2}$

D) 1/2

E) 1/6



16.- Sea $P = \left(\frac{2}{5}\sqrt{10};\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)$ el punto donde el círculo y el segmento son tangentes. El área de la región sombreada es :

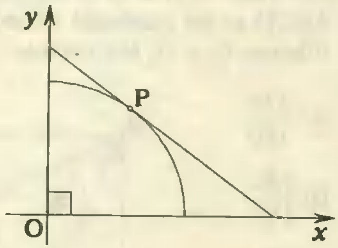
A) $2\pi - 5$

B) $\pi - \frac{3}{2}$

C) $2\pi - 3$

D) $\pi - \frac{5}{2}$

E) $\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}$



17.- En la figura $\overline{AC}$ es diámetro, AM = MB, $R = 2\sqrt{3}$ y $MC = \sqrt{21}$. Calcular el área de la región sombreada.

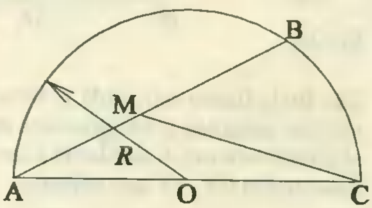
A) $\pi\sqrt{3}$

B) 3π

C) 6π

D) 2π

E) 4π



18.- Del gráfico, determinar la relación entre el área sombreada y el área del Δ ABC.

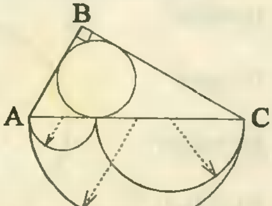
A) $\pi/2$

B) $\pi/4$

C) 1

D) 1/2

E) π



19.- En la figura «P» y «T» son puntos de tangencia AN = NC y $OC = \sqrt{17}$. Calcular el área de la corona circular.

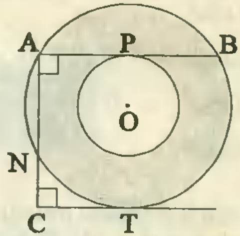
A) 6π

B) 9π

C) 8π

D) 4π

E) 12π



20.- Calcular el área de la región sombreada; si : $AO = OB = 2u$

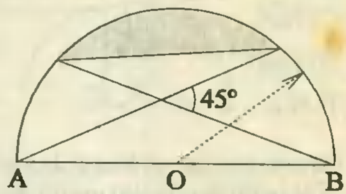
A) $(\pi - 1)u^2$

B) $(\pi - 2)u^2$

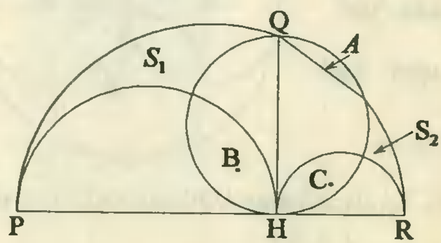
C) $(\pi - 3)u^2$

D) $(\pi - 4)u^2$

E) $(2\pi - 3)u^2$



21.- En la figura $\overline{PH}$; $\overline{HR}$; $\overline{QH}$ y $\overline{PR}$ son diámetros. Indicar la relación correcta.



A) $2(S_1 + S_2) = A + B + C$

B) $\sqrt{S_1 . S_2} = \sqrt{ABC}$

C) $S + S = A^2 + B^2 + C^2$

D) $S_1 + S_2 = 2(A + B + C)$

E) $A + B + C = S_1 + S_2$

22.- Del gráfico, $S_1 = 9u^2$ y $S_3 = 4u^2$. Calcular "S_2"

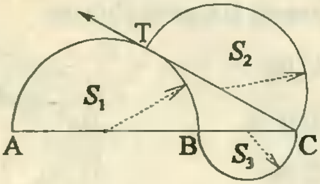
A) $110u^2$

B) $115u^2$

C) $120u^2$

D) $125u^2$

E) $130u^2$



23.- En la figura se muestran semicírculos; si : $S_1 = 9u^2$ y $S_3 = 4u^2$. Calcular «S_2»

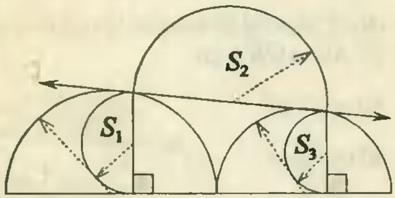
A) $13u^2$

B) $25u^2$

C) $26u^2$

D) $18m^2$

E) N.A.



24.- Determinar el área de la región sombreada, si el radio del círculo mayor mide $\sqrt{2}\ u$

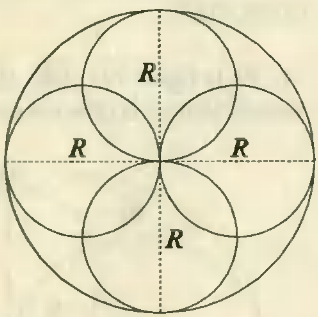
A) $(\pi - 3)u^2$

B) $2(\pi - 2)u^2$

C) $(2\pi - 3)u^2$

D) $(4\pi - 3)u^2$

E) N. A.



25.- En el cuadrante AOB mostrado. Hallar la relación : $\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)$

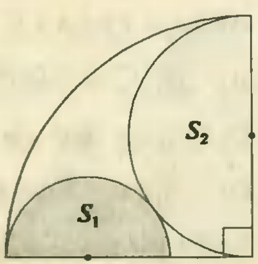
A) 1/2

B) 2/3

C) 3/4

D) 4/9

E) 1/4



26.- Hallar el área de la región sombreada; si: $m\ \overset{\frown}{AEB} = 240°$; "E" es punto de tangencia y $AB = 2\sqrt{3}$.

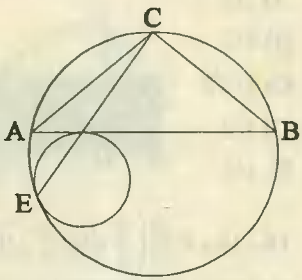
A) $\dfrac{2}{3}(3\pi - \sqrt{3})$

B) $\dfrac{2}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})$

C) $\dfrac{4}{3}(2\pi - \sqrt{3})$

D) $2\pi - 3\sqrt{3}$

E) $4\pi/3$



27.- Halle el área de la región sombreada; si ABCD es un cuadrado de lado igual a $2m$. Además O_1 y O_2 son centros.

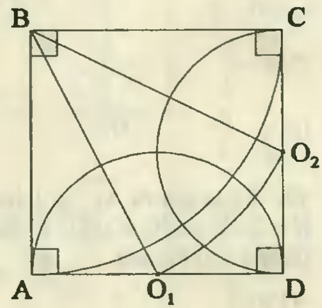
A) $\dfrac{37\pi}{180}$

B) $\dfrac{53\pi}{180}$

C) $\dfrac{37\pi}{360}$

D) $\dfrac{53\pi}{360}$

E) 53π



28.- En la figura mostrada se tiene 3 circunferencias secantes y congruentes de radios $1m$ respectivamente. Calcular el área de la región sombreada (O y O' son centros).

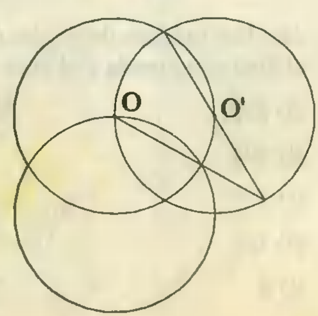
A) πm^2

B) $\pi/2m^2$

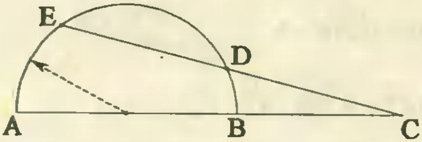
C) $2\pi m^2$

D) $3\pi/2m^2$

E) $\pi/4m^2$



29.- Hallar el área de la región sombreada; si: $m\,\overset{\frown}{AE} = 3\,.\,m\,\measuredangle\,BCD$; $ED = DC = 1m$.

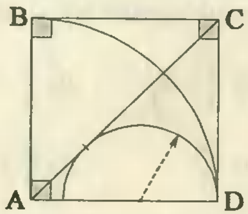


A) $\pi/6 - \sqrt{3}$ B) $\pi/6 - \sqrt{2}/4$

C) $\pi/3 - \sqrt{3}/4$ D) $\pi/3 - \sqrt{3}/3$

E) $\pi/6 - \sqrt{3}/4$

30.- En la figura mostrada; hallar la relación de áreas, de las regiones sombreadas. Si ABCD es un cuadrado.



A) $2\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2} + 1$

C) $3 + 2\sqrt{2}$

D) $3 + \sqrt{2}$

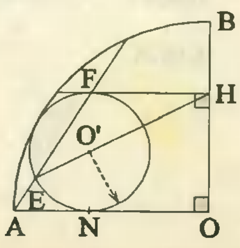
E) $\sqrt{2} - 1$

31.- Sea el romboide ABCD , $AB = 6$, $BC = 10$ y $AC = 14$; se traza una circunferencia que pasa por los vértices C y D siendo $\overline{AD}$ tangente a dicha circunferencia y $\overline{BC}$ una secante. Calcular el área de la región circular.

A) 12π B) 6π C) 8π

D) 16π E) 24π

32.- Hallar el área de la región sombreada . Si $NO = \sqrt{3}$ y $EH = 3$.



A) $r^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ D) $r^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \sqrt{2}\right)$

B) $r^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E) $r^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

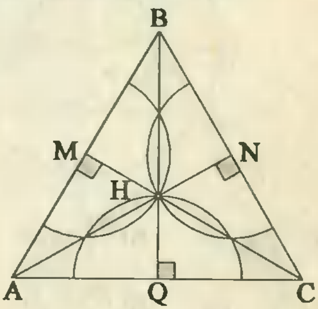
C) $r^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

33.- Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a $2m$ con centro en el punto medio del lado $\overline{BC}$, y con radio igual a $\sqrt{2}\,m$ se traza un arco de circunferencia. Hallar el área de la región comprendida por el arco de la circunferencia y la circunferencia inscrita al cuadrado ABCD.

A) $\pi - 2$ B) π C) $\pi + 2$

D) $\pi - 1$ E) $\pi + 1$

34.- El triángulo ABC es equilátero de lado $2\sqrt{6}\ m$, donde M, N y Q son centros y H es ortocentro. Calcular el área de la región sombreada.



A) πm^2

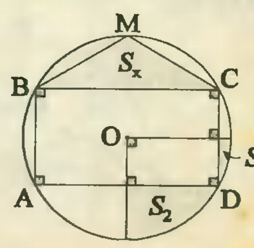
B) $\pi/2 m^2$

C) $\pi/4 m^2$

D) $\pi/6 m^2$

E) $\pi/24 m^2$

35.- Si $S_2 - S_1 = 2m^2$, hallar el área de la región limitada por el Δ BMC mixtilíneo; si $\overline{BM} \parallel \overline{AC}$.



A) $1m^2$

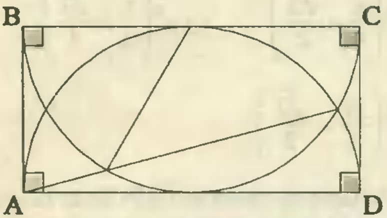
B) $2m^2$

C) $3m^2$

D) $4m^2$

E) $6m^2$

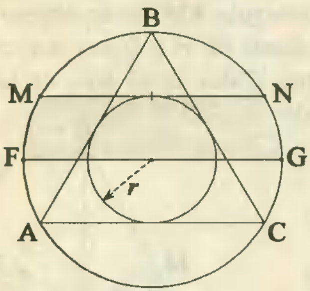
36.- En la figura; hallar el área de la región sombreada, si $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son diámetros tal que: BC = 2.



A) $\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{\pi + \sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{\pi - 2\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{\pi + 2\sqrt{3}}{4}$

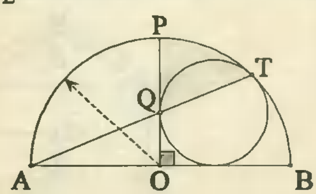
37.- Halle el área de la faja circular sombreada; si el triángulo ABC es equilátero y $r = 1m$.



A) $\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$ B) $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ C) $\dfrac{4\pi}{3}+\sqrt{2}$

D) $\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$ E) $\dfrac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$

38.- Hallar el área de la región sombreada; si $PQ = \sqrt{2}$



A) $\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)\pi - \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$

B) $(1+\sqrt{2})\pi - 3$

C) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\pi - \sqrt{2}$

D) $(1+\sqrt{3})\pi - 2\sqrt{3}$

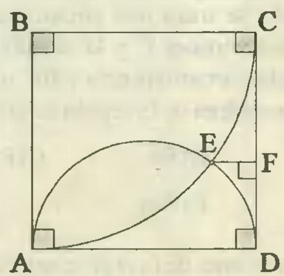
E) $4\sqrt{2} - \pi$

39.- Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ que se prolonga hasta el punto "C" del cual se traza la tangente $\overline{CT}$ a la semicircun-ferencia. Hallar el área del segmento circular BT; si $AT = TC = \sqrt{3}\,m$.

A) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{\pi}{3}$

D) $\dfrac{2\pi}{3}$ E) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

40.- En el cuadrado ABCD; hallar el área de la región sombreada. Si $EF = 1m$.



A) 5π B) 4π C) 3π

D) 2π E) N.A.

geometria del espacio : rectas y planos

23.1 POSICIONES RELATIVAS

Consideremos las posiciones relativas entre:

A) DOS RECTAS

Estas pueden ser:

PARALELAS.- Son coplanares y no se intersectan.

Simbólicamente:

$$a \parallel b$$

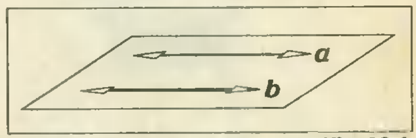


***Fig.* 23.1**

SECANTES.- Son coplanares y se intersectan.

Simbólicamente :

$$a \cap b : M$$

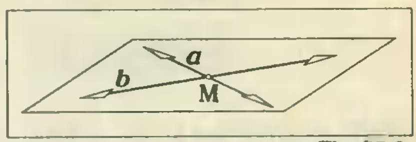


***Fig.* 23.2**

ALABEADAS.- No son coplanares ni se intersectan.

$$a \neq b \ \wedge \ a \cap b : \varnothing$$

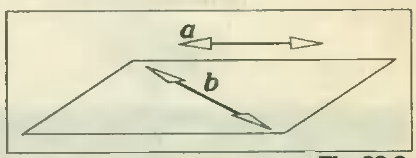


***Fig.* 23.3**

B) ENTRE DOS PLANOS

Pueden ser:

PARALELOS.- Si los planos no se intersectan.

Simbólicamente :

$$P \parallel Q$$

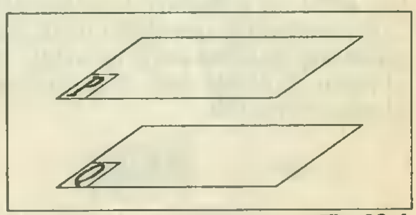


***Fig.* 23.4**

SECANTES.- Si se intersectan determinando una recta.

Simbólicamente :

$$\mathcal{P} \cap Q = \{\overleftrightarrow{AB}\} \qquad \text{... (23.1)}$$

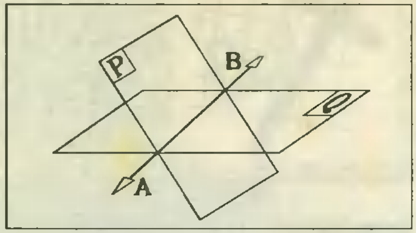


***Fig.* 23.5**

C) ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Pueden ser:

PARALELOS.- Si no se intersectan.

Simbólicamente :

$$a \parallel \mathcal{P}$$

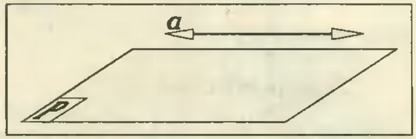


***Fig.* 23.6**

SECANTES.- Se intersectan determinando un punto.

Simbólicamente:

$$a \cap \mathcal{P} = M \qquad \text{... (23.2)}$$

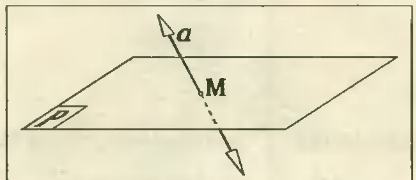


***Fig.* 23.7**

RECTA CONTENIDA EN EL PLANO .- Si dos puntos de la recta pertenecen al plano.

Simbólicamente:

$$a \subset \mathcal{P}$$

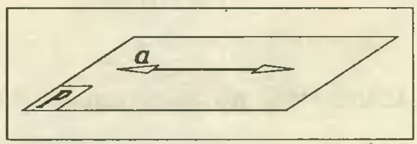


***Fig.* 23.8**

23.2 RECTA PARALELA A UN PLANO

Una recta es paralela a un plano cuando la recta y el plano no tienen ningún punto común. Para que una recta sea paralela a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta, siendo exterior del plano, sea paralela a una recta que esté contenida en el plano. En la *Fig*. 23.9, b es una recta contenida en el plano **P** y $a \parallel b$.

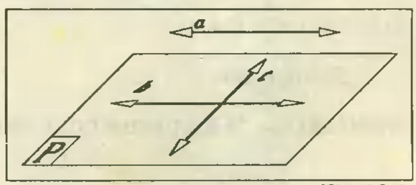


***Fig.* 23.9**

Luego : $a \parallel P$

OBSERVACIÓN.- En la *Fig*. 23.9 la recta c del plano **P** no es paralela a la recta a, por lo que se dice que c y a son rectas *alabeadas*. Esto nos lleva a formular el siguiente teorema:

"Si una recta es paralela a un plano, entonces dicha recta no es paralela a todas las rectas que estén contenidas en el plano".

23.3 DETERMINACIÓN DE UN PLANO

Un plano queda determinado por :

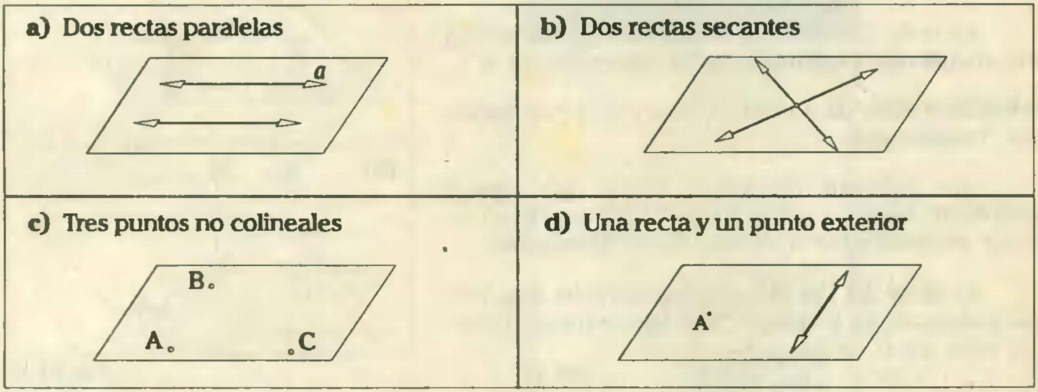


***Fig.* 23.10**

23.4 RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Para que una recta sea perpendicular a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea perpendicular a dos rectas secantes del plano.

En la *Fig.* 23.11 *a* y *b* son dos rectas secantes del plano P y L es una recta perpendicular a las rectas ***a*** y ***b***.

Luego : $\mathcal{L} \perp \mathcal{P}$

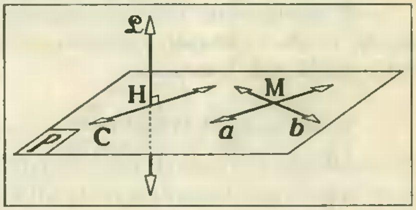


***Fig.* 23.11**

23.5 TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza una segunda perpendicular a una recta contenida en el plano, entonces, al unir el pie de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, el segmento resultante será perpendicular a la recta contenida en dicho plano.

Sea $\mathcal{L}$ una recta perpendicular al plano $\mathcal{P}$ de modo que $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$: H y «***a***» una recta contenida en $\mathcal{P}$ tal como se indica en la *Fig.*23.12. Asimismo puede notarse que $\overline{HM} \perp \overline{a}$ y $F \in \mathcal{L}$, luego :

$$\overline{FM} \perp \overline{a}$$

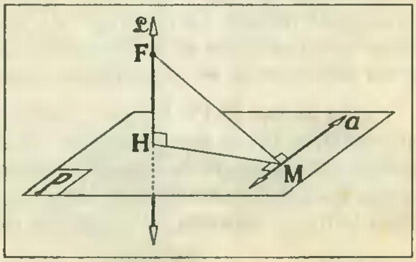


***Fig.* 23.12**

23.6 ÁNGULO Y MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS.

"El ángulo formado por dos rectas alabeadas se considera como el ángulo formado por una de las rectas alabeadas con una paralela a la otra".

En la *Fig*. 23.13a $a' \parallel a$, luego «θ» es la medida del ángulo que forman las rectas alabeadas a y b .

OBSERVACIÓN.- Si $\theta = 90°$; entonces a y b se llamaran *"ortogonales"*

"La mínima distancia entre dos rectas alabeadas viene a ser la longitud del segmento de recta perpendicular a dichas rectas alabeadas".

En la *Fig*. 23.13b $\overline{MN}$ es perpendicular a las rectas alabeadas $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Luego "MN" es la mínima distancia entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

$$\Rightarrow \quad d_{mín} = MN \qquad \text{... (23.3)}$$

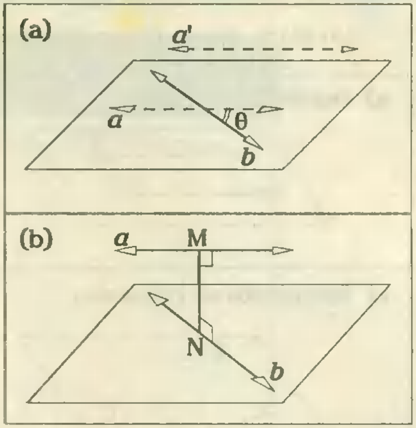


Fig. 23.13

23.7 ÁNGULO FORMADO POR UNA RECTA Y UN PLANO

El ángulo que forman una recta y un plano se define como el ángulo formado por dicha recta y su proyección sobre el plano.

En la *Fig*.23.14, la recta $\overleftrightarrow{AH}$ es la proyección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ sobre el plano **P**, entonces diremos que $\angle$ BAH, es el ángulo que forman la recta AB con el plano P.

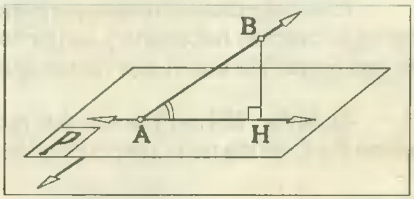


Fig. 23.14

23.8 ÁNGULO DIEDRO - DEFINICIÓN

Si dos semiplanos tienen la misma arista pero no están en el mismo plano, entonces la reunión de los dos semiplanos y su arista común es un *ángulo diedro*. La recta que es la arista común de los dos semiplanos se llama *arista del ángulo diedro*, y los semiplanos se denominan *caras*.

En la *Fig*. 23.15 $\overline{AB}$ es la arista del diedro, y los semiplanos P y Q son sus caras. Un ángulo diedro se denota escribiendo la letra *d* seguido de un guión, y luego las letras correspondientes a su arista. Ejemplo: Para la figura adjunta, el diedro se denotará como :

$$d - \overline{AB}$$

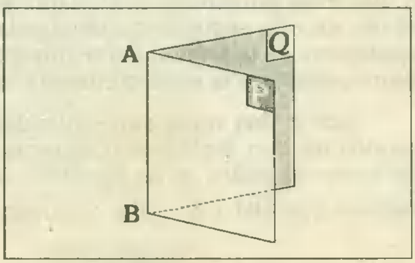


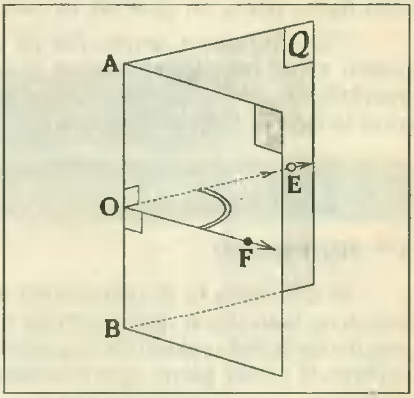
Fig. 23.15

23.9 MEDIDA DE UN ÁNGULO DIEDRO

Un diedro se mide según su *ángulo plano o ángulo rectilíneo*, que viene a ser el ángulo determinado al trazar perpendiculares a la arista del diedro en un mismo punto de ella, y que están contenidas en las caras del diedro.

En la *Fig*. 23.16 los rayos $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ son perpendiculares a la arista $\overline{AB}$. Además $\overrightarrow{OE} \subset Q$, y $\overrightarrow{OF} \subset \mathcal{P}$. Luego, el $\angle$ EOF es el ángulo plano o ángulo rectilíneo del diedro $\overline{AB}$, y la medida del ángulo EOF da la medida del diedro $\overline{AB}$; lo cual se denota así::

$$m \angle EOF = m\ d\text{ - }\overline{AB} \qquad \text{... (23.4)}$$



De lo anterior podemos concluir en lo siguiente :

Fig. 23.16

"La medida de un ángulo diedro es un número real y positivo, que es la medida de cada uno de sus ángulos rectilíneos".

23.10 RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE

Si por un punto situado en una de las caras de un diedro, se trazan rectas en dicha cara, entonces el ángulo formado por estas rectas y la otra cara será máximo cuando una de las rectas sea perpendicular a la arista del diedro.

Sea "S" un punto de la cara Q perteneciente al, diedro $\overline{AB}$. Además $\overline{SR}$ y $\overline{ST}$ son rectas trazadas en la cara Q, tal que $\overline{ST} \perp \overline{AB}$. Si α y θ son las medidas de los ángulos que forman estas rectas con la cara $\mathcal{P}$, entonces verificaremos que :

$$\theta > \alpha$$

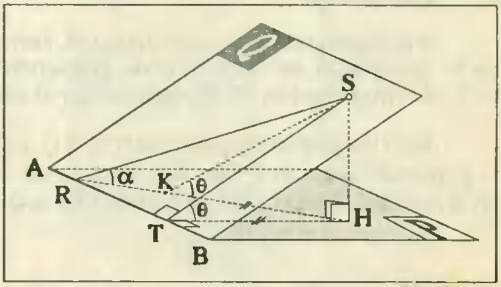


Fig. 23.17

OBSERVACIÓN : *La recta de máxima pendiente mide el ángulo que hace un plano cualquiera con una horizontal.*

23.11 ÁREA DE LA PROYECCIÓN DE UN TRIÁNGULO SOBRE UN PLANO

El área de la proyección de un triángulo sobre un plano no paralelo a él es igual al área del triángulo multiplicado por el *coseno* del ángulo diedro que forman el triángulo y el plano.

Sea "θ" la medida del ángulo diedro que forman el Δ ABC y el plano $\mathcal{P}$ (*Fig*.23.18) y sea además el Δ AHC la proyección del Δ ABC sobre $\mathcal{P}$, entonces se cumplirá que:

$$A_{(\Delta AHC)} = A_{(\Delta ABC)} \cdot \cos\theta \qquad \text{... (23.5)}$$

OBSERVACIÓN : La fórmula anterior se cumple para toda figura plana en general, es decir:

"El área de la proyección de una figura cualquiera sobre un plano es igual al área de la figura multiplicado por el coseno del ángulo diedro que forman la figura dada con el plano".

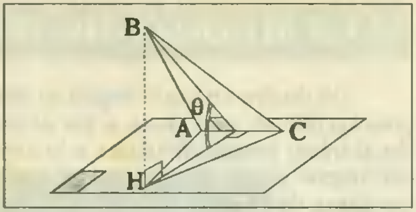


Fig. **23.18**

23.12 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD

Si una recta es perpendicular a un plano dado, entonces todo plano que contenga a la recta es perpendicular a dicho plano. Sea la recta $\mathcal{L}$ perpendicular al plano Q y $\mathcal{P}$ un plano que contenga a $\mathcal{L}$, entonces:

$$\mathcal{P} \cap Q : \overleftrightarrow{AB}$$

Tracemos $\overline{OF} \perp \overline{AB}$, luego, el ángulo rectilíneo EOF determina un diedro recto de manera que los planos $\mathcal{P}$ y Q resultan ser perpendiculares.

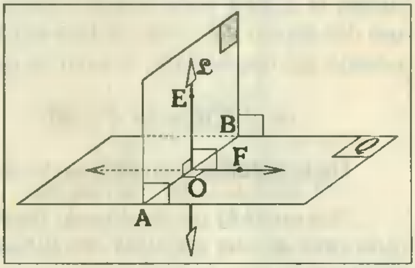


Fig. **23.19**

2DA PROPIEDAD

Si dos planos son perpendiculares, entonces una recta cualquiera de uno de ellos perpendicular asu recta de intersección es perpendicular al otro plano.

Sean los planos perpendiculares P, Q, y L una recta perpendicular a la arista $\overline{AB}$, y que esté contenida en la cara P. Luego, $\mathcal{L}$ será perpendicular a Q, es decir:

$$\mathcal{L} \perp Q$$

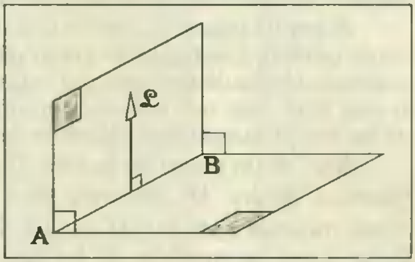


Fig. **23.20**

3RA PROPIEDAD (TEOREMA DE THALES)

Tres o más planos paralelos determinan sobre dos o más rectas secantes *o* alabeadas segmentos proporcionales.

Sean los planos P, Q y R y las rectas secantes *a* y *b*. Puede apreciarse que los puntos A, B, C y D, E, F se encuentran en un mismo plano de modo que $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ resultan estar en rectas paralelas. En virtud al item 23. diremos que los segmentos determinados entre estas paralelas verifican la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \text{... (23.6)}$$

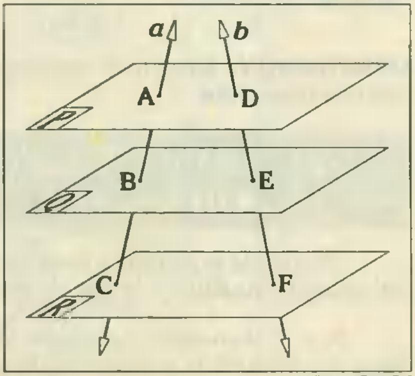


Fig. **23.21**

4TA PROPIEDAD

Si los triángulos ABC y AFC, son tales que $\overline{FB}$ es perpendicular al Δ ABC, entonces los pies de las alturas, de ambos triángulos, que salen de F y B coinciden en el punto H de $\overline{AC}$. (Por Teorema de las Tres Perpendiculares)

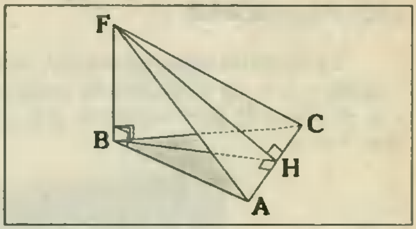


Fig. 23.22

5TA PROPIEDAD

Dos rectas son perpendiculares, si siendo secantes o alabeadas forman 90°

6TA PROPIEDAD

Si una recta es perpendicular a un plano, entonces será perpendicular a todas las rectas del plano.

7MA PROPIEDAD

En la *Fig*. 23. 23, $\overline{BF}$ es perpendicular al Δ ABC. Luego, si $\overline{BH}$ es altura del Δ ABC, al unir F con H, el segmento $\overline{FH}$ sera perpendicular a $\overline{AC}$.

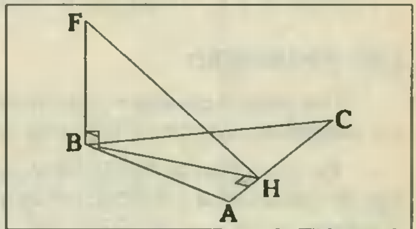


Fig. 23.23

8VA PROPIEDAD

Siendo $\overline{BF}$ una perpendicular al Δ ABC (*Fig*. 23.24 y $\overline{FH}$ perpendicular a $\overline{AC}$, entonces al unir B con H, $\overline{BH}$ será perpendicular a $\overline{AC}$

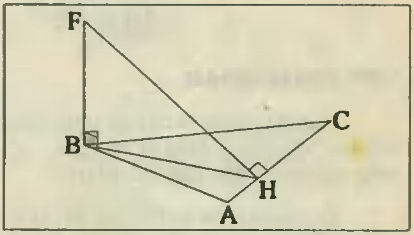


Fig. 23.24

9NA PROPIEDAD

Para determinar el ángulo que forman las rectas alabeadas *a* y *b*, también se procede así:

Por un punto P cualquiera se trazan $\overrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{b}$.

Luego ∠ QPR es el ángulo buscado.

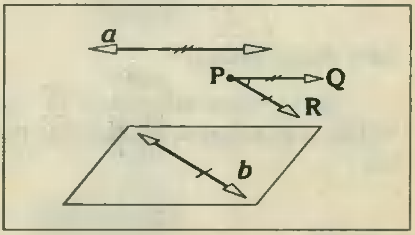


Fig. 23.25

10^{MA} PROPIEDAD

La mínima distancia (MN), entre las rectas alabeadas *a* y *b*, es la distancia entre una de las rectas *a* y el plano P que contiene a la recta *b* de modo que P // *a*.

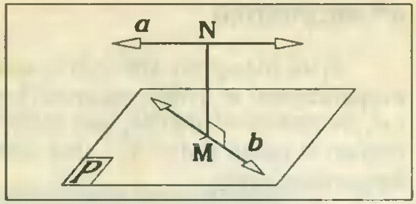


***Fig.* 23.26**

11^{RA} PROPIEDAD

Si una recta es paralela a un plano, todo otro plano que pase por la recta y que corte al primero le intersectará según una recta paralela a la dada.

Sea ***a*** la recta paralela al plano $\mathcal{P}$ (*Fig*.23.27), y Q el plano trazado por ***a*** y que corta a $\mathcal{P}$ según la recta ***b***.

Luego : ***a* // *b***

En efecto, ***a*** y ***b*** están en un mismo plano Q, y ***a*** no intersecta a ***b***. Luego, ***a*** y ***b*** son paralelos.

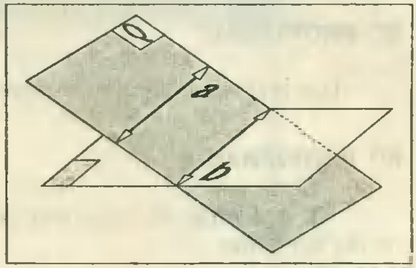


***Fig.* 23.27**

12^{DA} PROPIEDAD

Dos planos paralelos determinan sobre dos rectas paralelas segmentos congruentes.

En efecto, en la *Fig*. 23.28 el plano determinado por las paralelas *a* y *b* intersectan a los planos P y Q mediante los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tal que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, ya que la figura forma un paralelogramo se tiene que:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

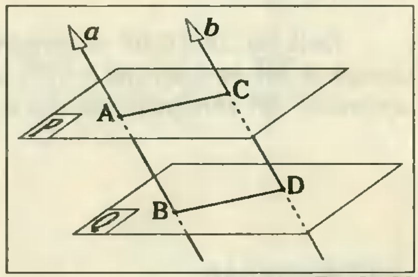


***Fig.* 23.28**

13^{RA} PROPIEDAD

Cuando una recta es paralela a un plano, la paralela trazada a esta recta por un punto del plano está contenida en dicho plano.

En efecto de la *Fig*. 23.29, si ***a*** // $\mathcal{P}$, M ∈ **P** y ***b*** // ***a*** , lo cual nos permite afirmar que :

$$b \subset \mathcal{P}$$

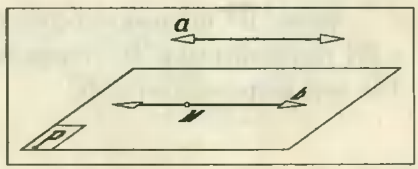


***Fig.* 23.29**

14^{TA} PROPIEDAD

En la figura adjunta si $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y MFEN es un plano cualquiera que pasa por $\overline{EF}$, entonces :

$$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$$

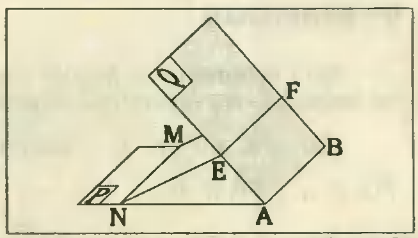


***Fig.* 23.30**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- *¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?*

A) Una recta y un plano perpendicular a una misma recta son paralelas

B) Es imposible trazar desde un punto dos perpendiculares distintas a un mismo plano.

C) Una recta que es paralela a dos planos secantes es paralela a su intersección.

D) Una recta que forma ángulos iguales con otras tres rectas que pasan por su pie en un plano, es paralela a dicho plano.

E) Ninguna de las anteriores.

Resolución.-

La afirmación falsa es la D por cuanto la recta no es paralela, si no perpendicular al plano.

$\therefore$ **RPTA. D**

2.- *¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?*

A) Todos los planos paralelos a un plano dado son paralelos entre si.

B) Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre si

C) Si un plano corta a una de tres rectas paralelas también corta a las otras dos.

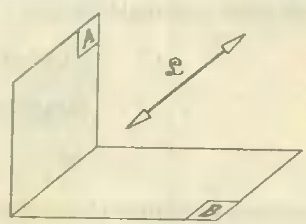
D) Si una recta es paralela a un plano, la paralela trazada a dicha recta por un punto del plano esta contenida en el plano.

E) Por cualquier punto exterior a un plano, solo puede trazarse un plano paralelo al primero.

Resolución.-

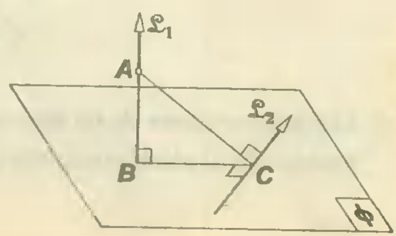
En la figura, el plano «A» es paralelo a la recta "$\mathfrak{L}$", también el plano B es paralelo a la recta "$\mathfrak{L}$".

Pero ambos planos son secantes, no paralelos.



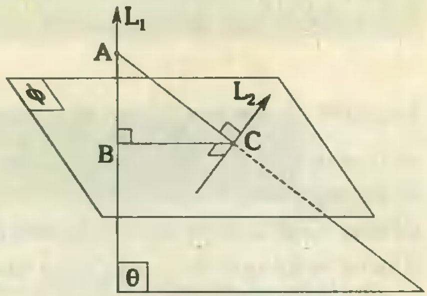
$\therefore$ **RPTA. B**

3.- *En la figura mostrada, $\mathfrak{L}_1$ es perpendicular al plano "ϕ", $\overline{BC}$ es perpendicular a la recta "$\mathfrak{L}_2$". Demostrar que $\overline{AC}$ es perpendicular a "$\mathfrak{L}_2$".*



Resolución.-

Del gráfico observamos que las rectas «L_1» y $\overline{AC}$ son secantes, por lo tanto determinarán el plano «θ».



Ahora, como «L_1» es perpendicular a $\overline{BC}$ y ortogonal a «L_2» entonces L_2 será perpendicular al plano «θ».

Luego, como toda recta perpendicular a un plano debe ser perpendicular a toda recta contenida en dicho plano, se deduce que :

L_2 es perpendicular a $\overline{AC}$

4.- Hallar el máximo número de planos determinados por 20 puntos no colineales y 10 rectas secantes.

Resolución.-

Analizemos por partes :

1º Máximo número de planos determinados por 20 puntos :

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20\times19\times18\times\cancel{17!}}{3\times2\times1\times\cancel{17!}} = 1140 \text{ planos}$$

2º Máximo número de planos determinados por 10 rectas :

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10\times9\times\cancel{8!}}{2\times1\times\cancel{8!}} = 45 \text{ planos}$$

3º Máximo número de planos determinados por 20 puntos y 10 rectas :

Utilizando una regla de tres :

1 punto —— 1 recta —— 1 plano

20 puntos —— 10 rectas —— x plano

$$\Rightarrow \quad x = 20 \times 10 \times 1 = 200 \text{ planos}$$

4º Entonces el número total será :

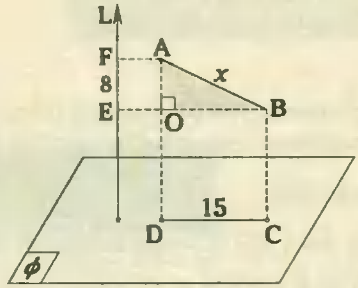
$$N^o_{\text{TOTAL}} = 1140 + 45 + 200$$

$$\therefore \quad \mathbf{N^o_{\text{TOTAL}} = 1385 \text{ planos}}$$

5.- Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano «ϕ» y sobre una perpendicular al plano contenida en el mismo plano de $\overline{AB}$, miden 15 y 8m. Hallar : AB.

Resolución.-

Sea «L» la recta perpendicular al plano «ϕ», luego, $\overline{CD}$ es la proyección de $\overline{AB}$ en el plano, también $\overline{EF}$ es la proyección de $\overline{AB}$ en la recta «L» ahora, OB = CD = 15 y AO = EF = 8.



En el ⊿ AOB aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos :

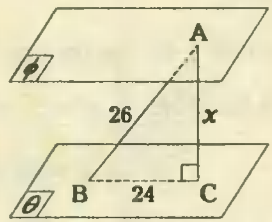
$$x^2 = 15^2 + 8^2$$

$$\therefore \qquad x = 17$$

6.- Un segmento de recta AB de 26m, une el punto «A» del plano «ϕ» con el punto «B» del plano «θ» siendo «ϕ» y «θ» paralelos. La proyección de $\overline{AB}$ sobre cualquiera de los dos planos mide 24m. Hallar la distancia entre dichos planos.

Resolución.-

Trazando $\overline{AC}$ ⊥ al plano «θ», se obtiene la proyección $\overline{BC}$ de $\overline{AB}$ sobre este plano.



En el triángulo rectángulo ABC (Pitágoras) :

$$x^2 + 24^2 = 26^2$$

$$\therefore \qquad x = 10m$$

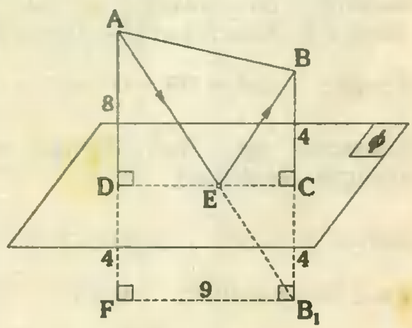
7.- Se tienen dos puntos A y B encima de un plano «ϕ» el primero a 8m y el segundo a 4m de dicho plano, la proyección de AB sobre el plano mide 9m. Hallar la longitud del menor camino de A hasta B pasando por un punto del plano.

Resolución.-

Como el menor camino entre dos puntos es el segmento de recta que los une, tomo el simétrico de «B» con respecto al plano, sea B_1 este punto, entonces :

$$BC = CB_1 = 4m \qquad y \qquad EB = EB_1$$

Ahora el menor camino pedido será $\overline{AB_1}$ tocando el punto «E» del plano.



Formemos el triángulo rectángulo AFB_1, en el cual :

$$DF = CB_1 = 4m \quad \Rightarrow \quad AF = 12m$$

También $FB_1 = CD = 9m$ (Proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano).

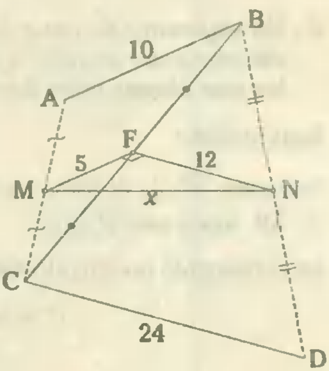
En el ⊿ AFB_1 (Pitágoras) : $\quad AB_1^2 = \sqrt{12^2 + 9^2}$ $\qquad \therefore \quad AB_1 = 15m$

MISCELÁNEA

1.- Se tienen los segmentos ortogonales AB = 10cm y CD = 24cm. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Resolución.-

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ los segmentos ortogonales. Sea MN = x la longitud del segmento pedido. Unimos B con C y en el triángulo ABC trazamos $\overline{MF}$ // $\overline{AB}$. Luego BF = FC y MF = $\frac{AB}{2}$ = 5 (Teorema de los Puntos Medios).



En el triángulo CBD unimos F con N.

Luego : $\overline{FN}$ // $\overline{CD}$, FN = $\frac{CD}{2}$ = 12 (Teorema de los Puntos Medios)

Como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son ortogonales; entonces la $m\measuredangle$ MFN = 90°

En el ⊿ MFN : $x^2 = 5^2 + 12^2$

$\therefore \quad x = 13\ cm$

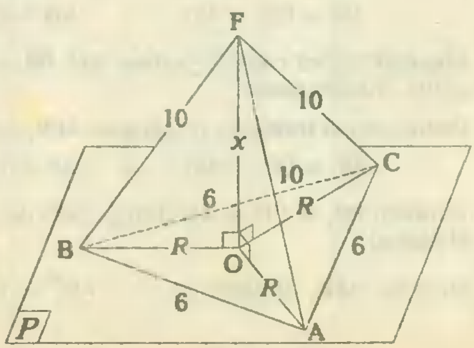
2.- Desde un punto exterior a un plano se trazan tres segmentos oblicuos de 10cm de longitud, de manera que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero de 18cm de perímetro. Calcular la distancia del punto al plano.

Resolución.-

Sea F un punto exterior al plano P, se trazan las oblicuas FA = FB = FC = 10cm, A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado será igual a 6cm. Sea FO = x la distancia del punto F al plano P. Los triángulos rectángulos AOF, BOF y COF son congruentes.

Luego : OA = OB = OC = R ; O será el centro del triángulo equilátero.

Entonces : AB = $R\sqrt{3}$ (fórmula del lado del triángulo equilátero)



Ahora : $6 = R\sqrt{3}$, donde : $R = 2\sqrt{3}$

En el triángulo BOF : $x^2 + R^2 = 10^2$

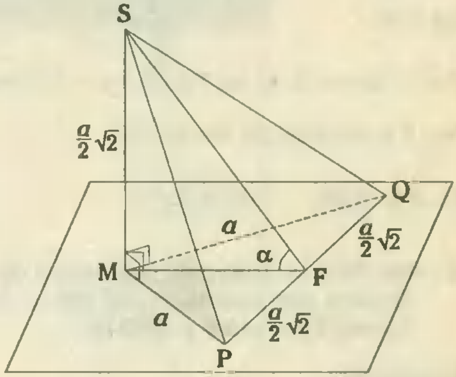
Reemplazando : $x^2 + (2\sqrt{3})^2 = 10^2$

$\therefore \quad x = 2\sqrt{22}\ cm$

3.- Sea PMQ un triángulo rectángulo isósceles tal que : MP = MQ = a por M se traza una perpendicular al plano del triángulo y se construye MS = $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; se trazan los segmentos $\overline{SP}$ y $\overline{SQ}$. Determinar la medida del ángulo diedro cuya arista es PQ.

Resolución.-

Sea el gráfico adjunto según el enunciado del problema, en el ⊾ PMQ trazamos la altura MF; como $PQ = a\sqrt{2}$.



Entonces : $MF = PF = FQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Por el Teorema de las Tres Perpendiculares tenemos que : $SF \perp PQ$

Luego, la $m\measuredangle MFS = \alpha$ es la medida del diedro de arista PQ.

En el ⊾ SMF : $SM = MF = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$\therefore \qquad \alpha = 45°$

4.- Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABE situados en planos perpendiculares respectivamente. Si AB = a . Hallar la longitud del segmento que une los centros de dichos poligonos regulares.

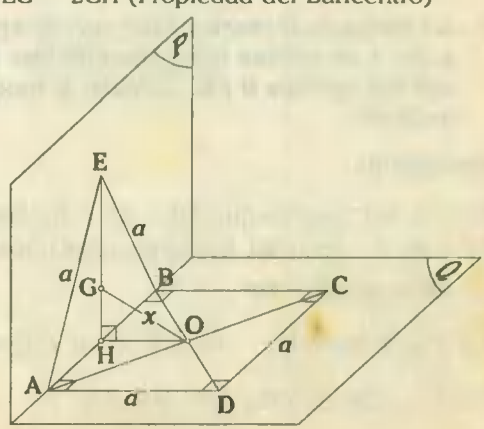
Resolución.-

Sean P y Q los planos perpendiculares en los cuales están situados el triángulo equilátero ABF y el cuadrado ABCD respectivamente.

En el Δ ABE trazamos la altura $\overline{EH}$, entonces : $EH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Altura del triángulo equilátero)

Sea «G» el centro del Δ ABC entonces : EG = 2GH (Propiedad del Baricentro)

Luego : $GH = \frac{a}{6}\sqrt{3}$



Sea O el centro del cuadrado ABCD, entonces :

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ y $OH = \frac{a}{2}$

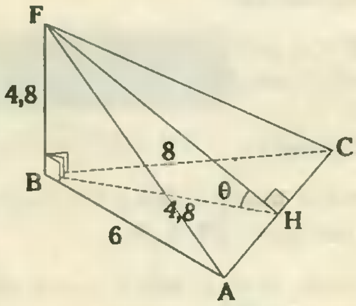
Sea GO = x la distancia pedida, la $m\measuredangle GHO = 90°$ ya que los planos P y Q son perpendiculares.

Luego : $x^2 = GH^2 + HO^2$

$x^2 = \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \therefore \qquad x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

5.- En un triángulo ABC, recto en B los lados miden AB = 6 y BC = 8 por el vértice B se traza BF perpendicular al plano ABC, tal que BF = 4,8 . Hallar la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFC.

Resolución.-



En el ⊿ ABC : $AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

Además : $BH = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$

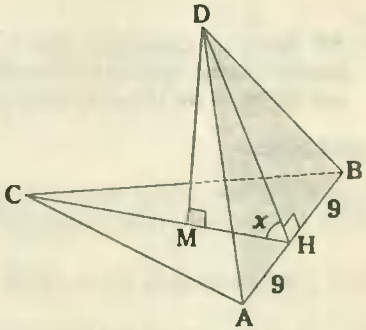
Por el Teorema de las Tres Perpendiculares : $\overline{FH} \perp \overline{AC}$

Sea θ la medida del diedro AC

En el ⊿ FBH : $\theta = 45^\circ$

6.- Sea ABC un triángulo equilátero de lado 18cm, y cuyo ortocentro es M. Si de M se levanta una perpendicular MD = √27 cm, al plano ABC, entonces el ángulo diedro formado por ABC y ABD es :

Resolución.-



En el triángulo ABC : $CH = \dfrac{AB}{2}\sqrt{3} = \dfrac{18}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Como M es ortocentro y también baricentro :

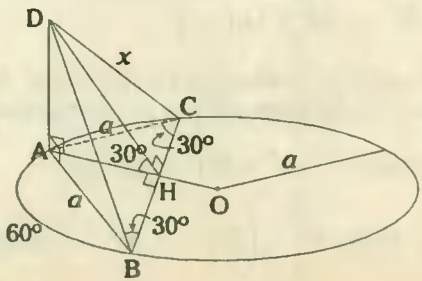
$$MH = \frac{1}{3} \; ; CH = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

En el ⊿ DMB : $DM = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} = MH$

$\therefore \quad x = 45^\circ$

7.- Un triángulo isósceles ABC, donde AB = AC = a, está inscrito en un círculo de radio a. En A se levanta una perpendicular $\overline{AD}$ al plano del triángulo y se une el punto D con los vértices B y C. Calcular la longitud del segmento $\overline{DB}$ para que el diedro $\overline{BC}$ mida 30º.

Resolución.-



En el Δ ABC, puesto que AB = AC = *R*, entonces AB = AC = l_6 lado del hexágono regular inscrito y $m.\ \overset{\frown}{AB} = m\ \overset{\frown}{AC} = 60^\circ$.

Por ángulo inscrito : $m \measuredangle B = m \measuredangle C = 30$

En el ⊿ AHB de 30° y 60° : $AH = \dfrac{a}{2}$

En el ⊿ DAH de 30° y 60° : $AD = \dfrac{a/2}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

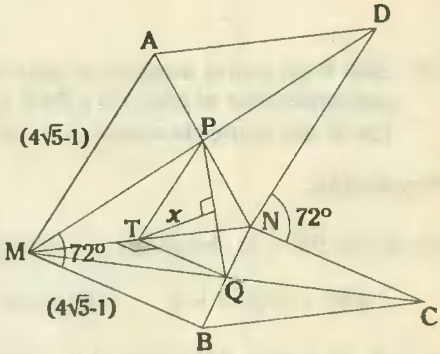
Finalmente en el ⊿ DAB : $x^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + a^2$

Donde : $x^2 = \dfrac{a^2}{12} + a^2 = \dfrac{13a^2}{12}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{13}{3}}}$

8.- Una hoja de papel de forma rectangular ABCD tiene como dimensiones AB = 8($\sqrt{5}$ - 1) m, BC = 3m . Por los puntos medios de AB y CD se dobla la hoja de papel de manera que el ángulo diedro formado es de 72º. Hallar la distancia mínima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une los centros de sus caras.

<u>Resolución</u>.-



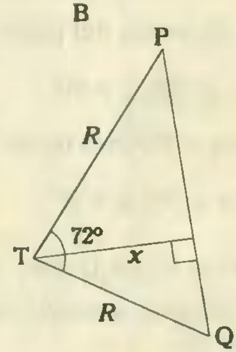
Δ MAN : $PT = \dfrac{AM}{2} = 2\left(\sqrt{5}-1\right)$

(base media)

Δ NMB : $QT = \dfrac{MB}{2} = 2\left(\sqrt{5}-1\right)$

(base media)

El Δ PTQ es el triángulo elemental del pentágono regular para el cual x es apotema, y $PT = TQ = 2\left(\sqrt{5}-1\right)$ es el circunradio R.



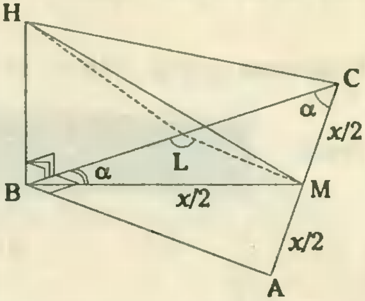
Como : $x = \dfrac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$

Luego : $x = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{4}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 2}$

9.- Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, cuyo cateto AB = 3m. Se traza la mediana $\overline{BM}$; luego por B se levanta un segmento $\overline{BH}$ perpendicular al plano del triángulo ABC. Si el área del triángulo BHM es $5\sqrt{5}$ m^2 y el área de su proyección sobre el plano determinado por BHC es 10cm^2. Hallar la medida de la hipotenusa $\overline{AC}$.

Resolución.-



En el ⊿ ABC : $\quad BM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{x}{2} = CM$

Δ BMC es isósceles, entonces : $m \measuredangle MBC = m < BCM = \alpha$

El $\measuredangle MBC = \alpha$, es el ángulo rectilíneo del diedro determinado por los planos BHM Y BHC

Luego se tiene : $\quad$ *Área* (Δ HBL) = *Área* (Δ BHM) cos α

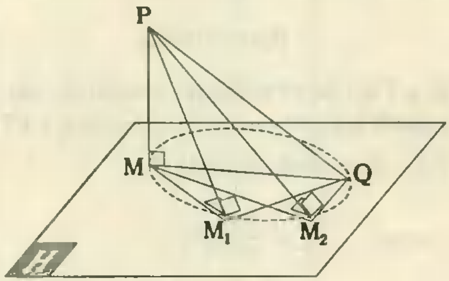
Reemplazando : $\; 10 = 5\sqrt{5}\,\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

En el ⊿ABC : $\cos\alpha = \dfrac{BC}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{5}\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3\sqrt{5}}$$

10.- Sea P un punto exterior al plano H y Q un punto de este plano tal que $\overline{PQ}$ no es perpendicular al plano H ¿Cuál es el lugar geométrico formado por todos los puntos M del plano de modo que : $(PM)^2 + (QM)^2$ sea constante?

Resolución.-



Trazamos $\overline{PM} \perp H$, luego en el ⊿ PMQ :

$$PM^2 + MQ^2 = PQ^2 \qquad \text{(constante)}$$

Sea M_1 un punto del plano H de modo que:

$$m \measuredangle MM_1Q = 90^\circ,$$

Luego por el Teorema de las Tres Perpendiculares:

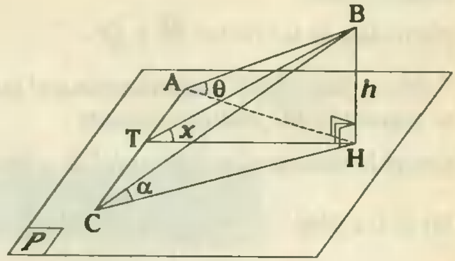
$$m \measuredangle PM_1Q = 90^\circ,$$

Luego en el ⊿ PM_1Q : $PM_1^2 + M_1Q^2 = PQ^2$ (cte.); de lo cual observamos que M y M_1 son puntos del lugar geométrico así como M_2 los cuales pertenecen a una circunferencia de diámetro $\overline{MQ}$.

11.- Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B que forma con un plano P un ángulo diedro cuyo arista es $\overline{AC}$. Si los catetos $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ forman con P los ángulos θ y α respectivamente. Hallar la medida del ángulo diedro.

Resolución.-

Sea x la medida del diedro $\overline{AC}$



En el ⊾ THB : $BT = h \csc x$ .... (1)

En el ⊾ AHB : $AB = h \csc \theta$ .... (2)

En el ⊾ CHB : $BC = h \csc \alpha$ .... (3)

En el ⊾ ABC : $\dfrac{1}{BT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$ .... (4)

Sustituyendo (1), (2) y (3) en (4) : $\dfrac{1}{h^2\csc^2 x} = \dfrac{1}{h^2\csc^2\theta} = \dfrac{1}{h^2\csc^2\alpha}$

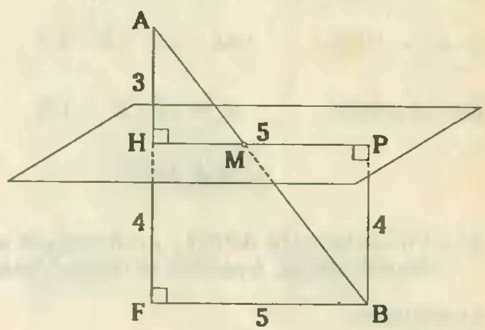
$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = arc\ sen\sqrt{sen^2\theta + sen^2\alpha}}$$

12.- Dos puntos A y B se encuentran en uno y otro lado de un plano y distantes de él 3m y 4m respectivamente la proyección del segmento AB sobre el plano mide 5m. Calcular la longitud de AB.

Resolución.-

Trazamos $\overline{BF}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AH}$, luego en el rectángulo FHPB :



$$HF = PB = 4 \quad y \quad HP = FB = 5$$

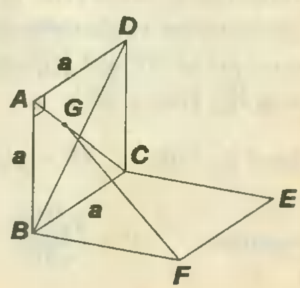
En el ⊾ AFB, por Pitagoras :

$$(AB)^2 = (AF)^2 + (FB)^2$$

Reemplazando : $(AB)^2 = 7^2 + 5^2 = 74$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{74}$$

13.- Sean ABCD y BCEF cuadrados pertenecientes a dos planos perpendiculares. Calcular la menor distancia entre $\overline{FG}$ y $\overline{EC}$; si AB = a.

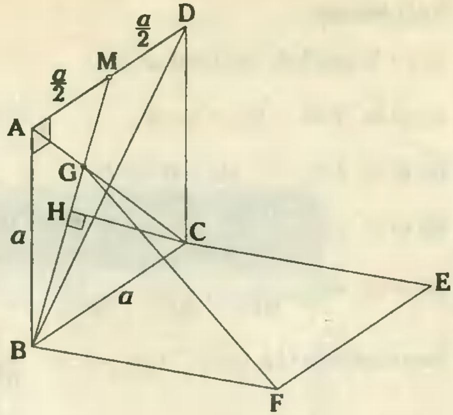


Resolución.-

Proyectamos las rectas $\overline{EC}$ y $\overline{GF}$.

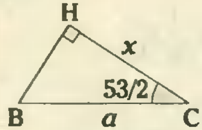
Sobre el plano ABCD, obteniendose el punto "C" y el segmento $\overline{BG}$ respectivamente

Luego la distancia pedida será $\overline{CH} \perp \overline{BG}$.



En el ⊿ BAM : $m\measuredangle ABM = \frac{53}{2}$

En el ⊿ BHC : $x = \frac{2a}{\sqrt{5}}$



$\therefore \quad \boxed{x = \frac{2}{5}a\sqrt{5}}$

14.- Un segmento $\overline{AB}$ de 8m de longitud esta contenido en un plano H; un punto "P" exterior al plano dista 12m de él. Calcular la distancia de P al plano H si PA = PB y QB.

Resolución.-

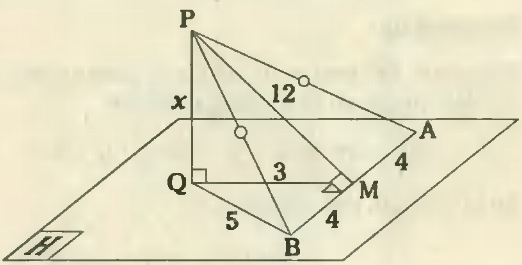
Por el Teorema de las Tres Perpendiculares $\overline{QM} \perp \overline{AB}$.

En el triángulo isósceles BPA, $\overline{PM}$ es mediana, entonces : AM = MB = 4

En el ⊿ QMB : $QM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

En el ⊿ PQM : $x^2 = 12^2 - 3^2 = 135$

$\therefore \quad \boxed{x = 3\sqrt{15}}$



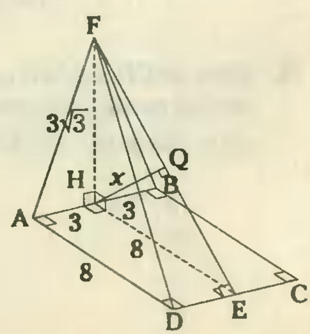
15.- Un rectángulo ABCD y un triángulo equilátero ABF están contenidos en planos perpendiculares. Calcular la menor distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{FD}$; si AB = 6 y AD = 8.

Resolución.-

Trazamos el plano FHE perpendicular a la arista $\overline{AB}$, luego proyectamos sobre dicho plano las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{FD}$ obteniendo el punto "H" y el segmento $\overline{EF}$. Luego la mínima distancia será $\overline{HQ}$ ($\overline{HQ} \perp \overline{EF}$)

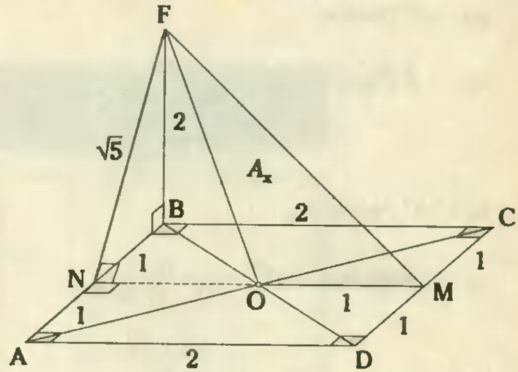
En el ⊿ FHE : $EF = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 8^2} = \sqrt{91}$

Además : $x = \frac{3\sqrt{3}.8}{\sqrt{91}} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{24\sqrt{273}}{91}}$



16.- Se tiene un cuadrado ABCD de 2m de lado; en B se levanta un segmento $\overline{BF}$ perpendicular al plano del cuadrado de modo que BF = 2m. Si «O» es el centro del cuadrado y "M" es punto medio de $\overline{CD}$; hallar la región triangular FOM.

Resolución.-



En el Δ ACD por Base Media : $OM = \dfrac{AD}{2} = 1$

Prolongamos $\overline{MO}$ hasta intersectar a $\overline{AB}$ en N, luego : $AN = NB = 1$ y $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

Por el Teorema de las Tres Perpendiculares, si : $\overline{FB} \perp \square ABCD$ y $\overline{BN} \perp \overline{MN}$.
Entonces $\overline{FN} \perp \overline{MN}$

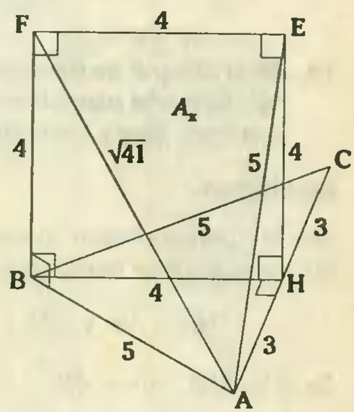
Sea A_x el área pedida; luego :

$$A_x = \frac{OM.FN}{2} \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{1.\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

17.- Se tiene un triángulo isósceles, donde : AB = BC = 5m y AC = 6m; se traza la altura $\overline{BH}$ y luego el cuadrado BHEF perpendicular al plano del triángulo isósceles. Calcular el área de la región triangular AEF.

Resolución.-



En el Δ ABC : $AH = HC = 3$ y $BH = 4$

En el ⊾ EHA : $EA = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

En el ⊾ FBA : $FA = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$

En el Δ FEA, se observa : $(FA)^2 = (FE)^2 + (EA)^2$

De donde : $m\measuredangle FEA = 90$

Luego el área pedida A_x será : $A_x = \dfrac{4.5}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = 10\,m^2}$$

18.- Calcular el máximo número de planos que determinan "n" puntos y n rectas paralelas.

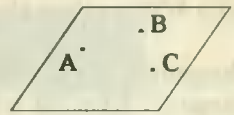
Resolución.-

Se sabe que para determinar un plano basta con 3 puntos no alineados o con 2 rectas paralelas; luego considerando :

- Los "n" puntos

$$\Rightarrow \quad \# \text{ Planos} = C_3^n = \frac{n!}{(n-3)!\,3!}$$

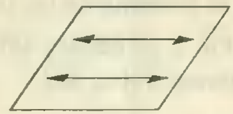
$$= \frac{n\,(n-1)(n-2)}{6}$$



- Los "n" rectas $//_s$

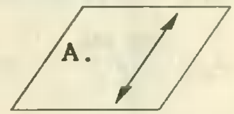
$$\Rightarrow \quad \# \text{ Planos} = C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!\;2!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2}$$



Además un punto y una recta exterior determinan un plano, luego :

$$\# \text{ Planos} = n \times n = n^2$$



El número total de planos se obtiene al sumar los 3 resultados parciales, es decir :

$$\# \text{ Total de Planos} = \frac{n\,(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n\,(n-1)}{2} + n^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\# \text{ Total de Planos} = \frac{n}{6}\,(n^2 + 6n - 1)}$$

19.- En el plano P se tiene un triángulo ABC cuyo ángulo A mide 60º; se tiene un punto "S" fuera del plano P si las distancias de "S" al vértice A_1 al lado $\overline{AC}$ y al lado $\overline{AB}$ son 25m, 20m y 7m respectivamente. Calcular la distancia de S al plano P.

Resolución.-

Sea $\overline{SH}$ perpendicular al plano P, con SH = x, luego por el Teorema de las Tres $\perp_s$

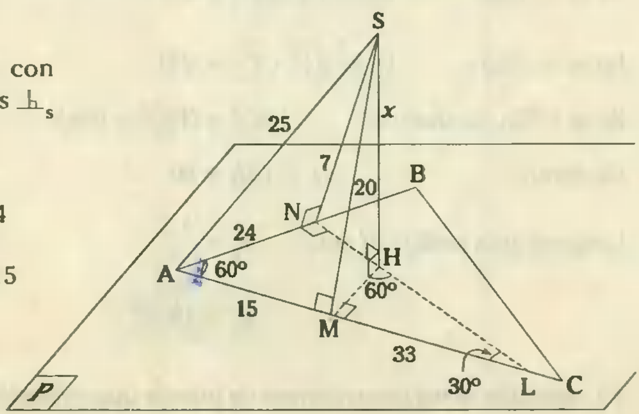
$$\overline{HN} \perp \overline{AB} \ \text{ y } \ \overline{HM} \perp \overline{AC}$$

En el ⊿ ANS : $AN = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$

En el ⊿ AMS : $AM = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

En el ⊿ ANL de 30º y 60º :

$$AL = 2\,(AN) = 48$$



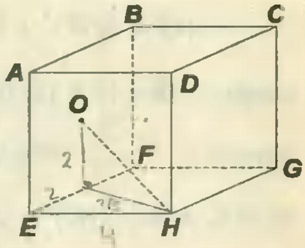
$$\Rightarrow \qquad ML = 48 - 15 = 33$$

En el ⊿ HML de 30° y 60°, $HM = \dfrac{33}{\sqrt{3}} = 11\sqrt{3}$

Finalmente en el ⊿ MHS : $x^2 = (20)^2 - (11\sqrt{3})^2$

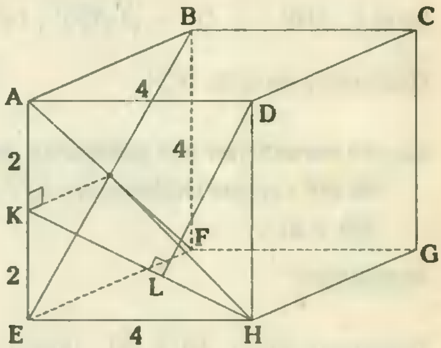
Donde : $x^2 = 400 - 363$ $\quad \therefore \quad \boxed{x = \sqrt{37}}$

20.- En la figura calcular la mínima distancia entre $\overline{OH}$ y $\overline{CD}$; si la arista del cubo mide 4 ("O" es centro de la cara ABFE).



Resolución.-

Proyectamos los dos segmentos alabeados $\overline{CD}$ y $\overline{OH}$ sobre el plano ADHE, obteniendo del primero el punto "D" y del segundo segmento $\overline{KH}$.



Luego la mínima distancia pedida será la perpendicular $\overline{DL}$.

En el cuadrado ADHE :

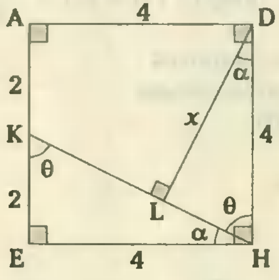
$$AK = KE = 2$$

y $KH = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

⊿ KEH ~ ⊿ DLH :

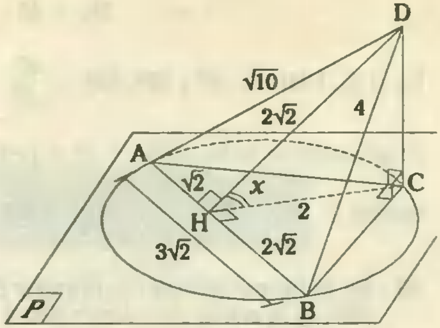
$$\frac{4}{x} = \frac{2\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{8}{5}\sqrt{5}}$$



21.- Una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ($AB = 3\sqrt{2}$) esta contenida en un plano «P» por un punto "C" de dicha circunferencia se levanta $\overline{CD}$ perpendicular al plano P de modo que $DA = \sqrt{10}$ y $DB = 4$. Calcular la medida del diedro que forman el plano ADB el plano P.

Resolución.-



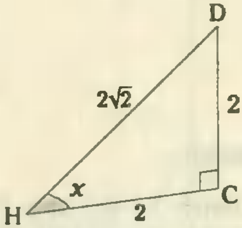
Trazamos $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, luego por el Teorema de las Tres Perpendiculares $\overline{DH} \perp \overline{AB}$, de donde el $\measuredangle$ DHC es el ángulo plano correspondiente al diedro buscado.

En el Δ ADB; aplicamos el Teorema de Euclides :

Reemplazando :

$$(4)^2 = (\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(3\sqrt{2}) \,.\, AH$$

Luego : $16 = 10 + 18 - 6\sqrt{2}\ AH \Rightarrow AH = \sqrt{2}$



Además : $HB = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

En el ⊾ ACB : $(HC)^2 = \sqrt{2} \,.\, 2\sqrt{2} \Rightarrow HC = 2$

En el ⊾ AHD : $DH = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$

Finalmente en el ⊾ DCH : $x = 45°$

22.- Se consideran dos triángulos equiláteros ABC y ABD que forman un ángulo diedro de 60º ; cuyos lados miden $2\sqrt{7}$ m. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.

Resolución.-

Trazamos $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DH}$, luego : $CH = DH = \dfrac{2\sqrt{7}}{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{21}$ y $m \measuredangle CHD = 60°$

El triángulo CHD es equilátero, entonces : $CD = \sqrt{21}$; además $\overline{AB}$ es perpendicular al plano de dicho triángulo CHD.

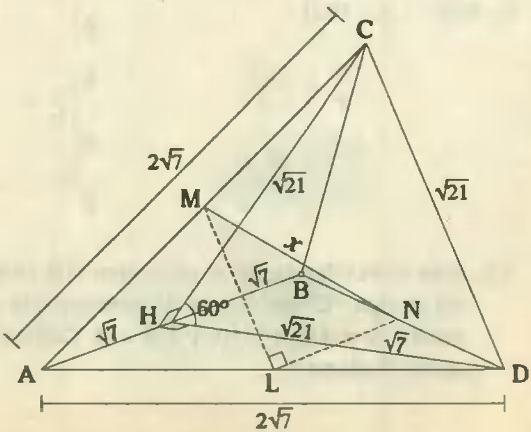
Sea "L" el punto medio de $\overline{AD}$.

Luego :

$$LN = \frac{AB}{2} = \sqrt{7} \text{ y } MLN = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Además : $m \measuredangle MLN = 90°$

En el ⊾ MLN : $x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + (\sqrt{7})^2$



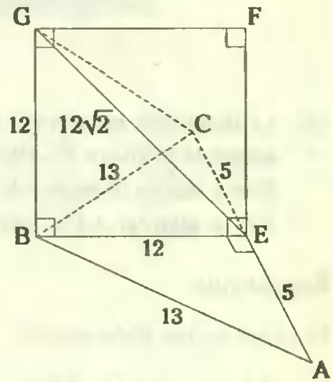
Donde : $x^2 = \dfrac{21}{4} + 7 = \dfrac{49}{4}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 3{,}5}$

23.- En un triángulo isósceles ABC (AB = BC = 13) y AC = 10. Se traza la altura $\overline{BE}$; luego se construye el cuadrado BEFG perpendicular al plano del triángulo. Calcular el área de la región triangular CEG.

<u>**Resolución.-**</u>

En el triángulo isósceles ABC :

$$AE = EC = 5 \text{ y } BE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$



Por el Teorema de las 3 $\perp_s$; como $\overline{GB} \perp \Delta$ CBA y $\overline{BE} \perp \overline{AC}$; entonces : $\overline{GE} \perp \overline{AC}$.

En el cuadrado BEFG : $GE = 12\sqrt{2}$

Finalmente; si A_x es el área de la región triangular GEC.

Sera : $A_x = \dfrac{5 \times 12\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A_x = 30\sqrt{2}}$

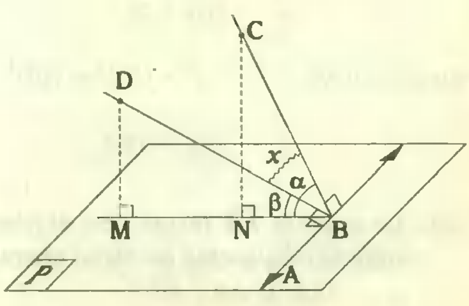
24.- La recta AB esta ubicada en el plano P, por un lado del cual se trazan las perpendiculares $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ a la recta AB y que con el plano P forman ángulos iguales a "α" y "β". Calcular la m ∡ CBD.

<u>**Resolución.-**</u>

Por condición del problema $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares a $\overline{AB}$, luego $\overline{AB}$ es perpendicular al plano que contiene a dichas rectas y este plano también sera perpendicular al plano P.

Asumiendo que $\alpha > \beta$ consideremos dos casos :

<u>1° CASO</u> **:** Cuando las proyecciones de las rectas $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ están a un mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, se tiene :

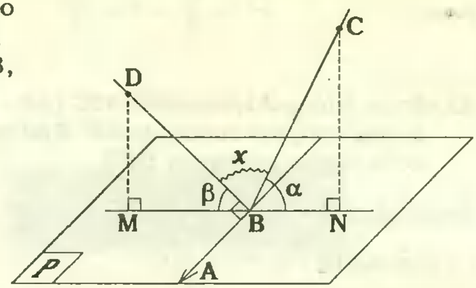


$$\boldsymbol{x = \alpha - \beta}$$

2º CASO : Cuando dichas proyecciones están a uno y otro lado con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, Se tiene que :

$$\beta + x + \alpha + 180.$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 180 - (\alpha + \beta)}$$



25.- La distancia más corta entre dos rectas que se cruzan en el espacio es 00' = 10m ; sobre la primera de ellas se toman los puntos A y B de modo que OA = 10m y AB = 20m y sobre la segunda recta se toman los puntos A' y B' de modo que O'A' = 20m y A'B' = 40m, si AA' = 26m. Calcular BB'.

Resolución.-

Sean las rectas alabeadas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, trazamos $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$.

Luego trazamos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ perpendiculares a $\mathcal{L}_3$.

Resultando : OO' = AM = BN = 10.

Luego por el Teorema de las 3 $\perp_s$:

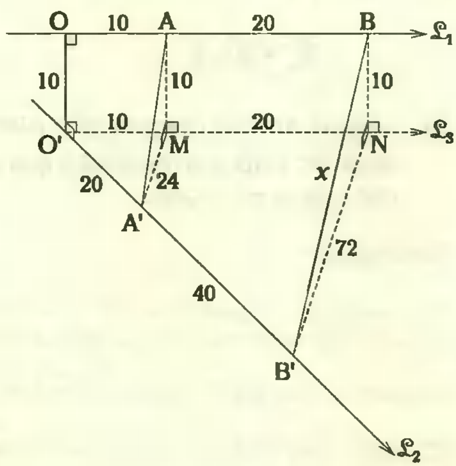
$\overline{A'M} \perp \mathcal{L}_3$ y $\overline{B'N} \perp \mathcal{L}_3$

En el ⊿ AMA' : $A'M = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

Δ B'O'N ~ Δ A'O'M ($\overline{A'M}$ // $\overline{B'N}$) :

$$\frac{B'N}{24} = \frac{60}{20}$$

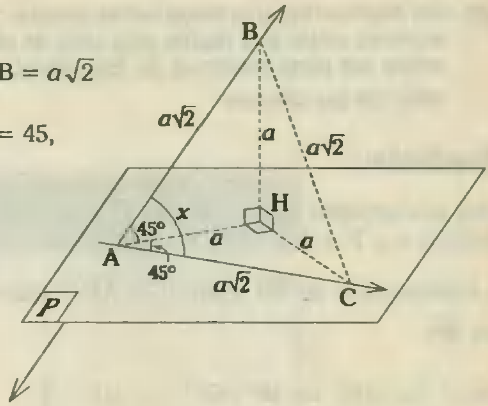
$$\Rightarrow \qquad B'N = 72$$



En el ⊿ BNB' : $x^2 = (72)^2 + (10)^2$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 72{,}7}$$

26.- La oblicua $\overline{AB}$ forma con el plano P un ángulo de 45º que es igual al ángulo entre la proyección de dicha oblicua y la recta $\overline{AC}$ situada en el plano P. Calcular la m ∡ BAC; si AB = AC.



Resolución.-

En el ⊿ AHB de 45° ; si AH = BH = a $\Rightarrow$ AB = $a\sqrt{2}$

En el Δ AHC : AH = a , AC = $a\sqrt{2}$ y $m \measuredangle$ HAC = 45,

Luego : $m \measuredangle$ AHC = 90° y HC = a

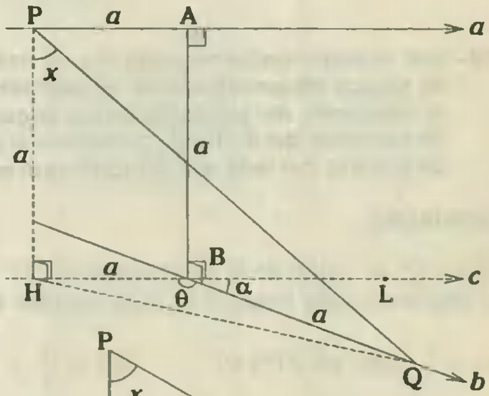
En el ⊿ BHC : BC = $a\sqrt{2}$

El triángulo ABC es equilátero ya que :

AB = BC = AC = $a\sqrt{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 60°}$

27.- El ángulo entre las rectas cruzadas a y b es igual a 60º, $\overline{AB}$ es la perpendicular común a ambas rectas. Hallar la medida del ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$. Si P∈ $\overleftrightarrow{a}$, Q∈ $\overleftrightarrow{b}$ y PA = AB = QB (A∈ $\overleftrightarrow{a}$).



Resolución.-

Por B trazamos la recta "C" paralela a la recta "a", luego el ángulo entre a y b es "α" .

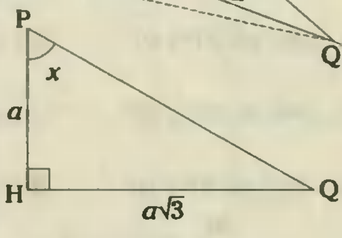
Por P trazamos $\overline{PH}$ // $\overline{AB}$; luego el ángulo HPQ es el ángulo buscado :$m \measuredangle$ HPQ = x

Se presentan 2 casos :

- Si α = 60 $\Rightarrow$ θ = 120° ,

en el Δ HBQ : HQ = $a\sqrt{3}$

Y en el ⊿ PHQ :

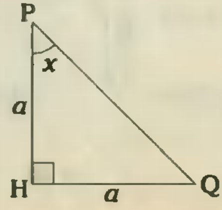


$\boldsymbol{x = 60°}$

- Si θ = 60°, el triángulo HBQ es equilátero

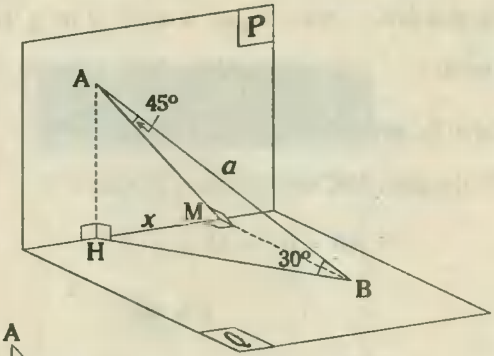
$\Rightarrow$ HQ = a ,

y en el ⊿ PHQ :



$\therefore$ $\boldsymbol{x = 45°}$

28.- Un segmento cuya longitud es igual a "a" tiene sus extremos en dos planos perpendiculares entre si y forma con uno de ellos 30º y con el otro 45º. Calcular la distancia entre las proyecciones de los extremos del segmento dado en la línea de intersección de los planos.



__Resolución.__

Sea el segmento $\overline{AB}$ de longitud "a" cuyos extremos $A \in P$ y $B \in Q$.

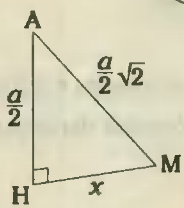
La proyección de $\overline{AB}$ sobre P es $\overline{AM}$ y sobre Q es $\overline{BH}$.

En el ⊿ AHB de 30º y 60º : $AH = \dfrac{a}{2}$

En el ⊿ AMB de 45º : $AM = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

Finalmente en el ⊿ AHM :

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2}$$

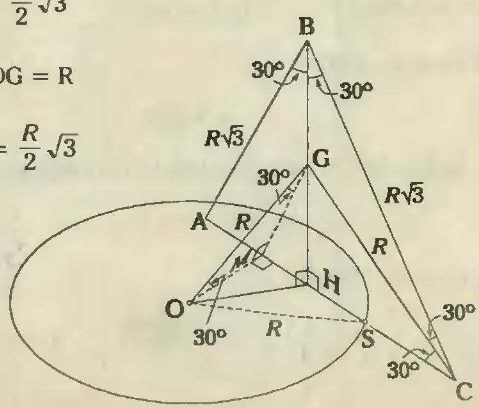


29.- una circunferencia de radio R y un triángulo equilátero con lado igual a $R\sqrt{3}$ yacen en planos perpendiculares. El segmento que une el centro de la circunferencia con el baricentro del triángulo forma ángulos de 30º con los planos dados, además uno de los lados del triángulo pertenece al plano de la circunferencia. Calcular la longitud de la parte del lado del triángulo que esta ubicado en el interior a la circunferencia.

__Resolución__.-

Sean "O" el centro de la circunferencia; "G" el baricentro del triángulo equilátero ABC y $\overline{AS}$ el segmento cuya longitud se pide calcular. En el Δ BGC : $BG = GC = R$

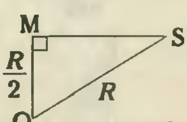
En el ⊿ GHC de 30º y 60º : $GH = \dfrac{R}{2}$ y $HC = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$



En el ⊿ OHG de 30º y 60º : $OH = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$ y $OG = R$

En el ⊿ OMG de 30º y 60º : $OM = \dfrac{R}{2}$ y $GM = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

En el ⊿ OMS : $MS = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$



En el ⊿ OMH : $(MH)^2 = \left(\dfrac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad MH = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

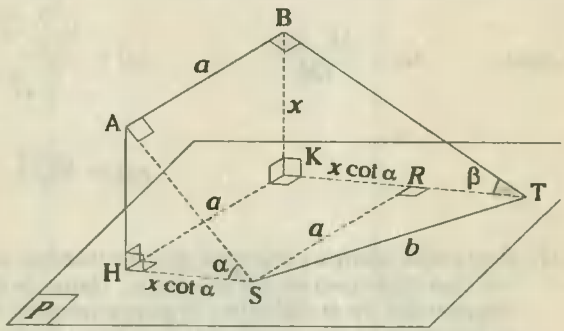
Como : AS = AH + HS $\Rightarrow$ $AS = \frac{R}{2}\sqrt{3} + \frac{R}{2}\sqrt{3} - \frac{R}{2}\sqrt{2}$ $\therefore$ $AS = \frac{R}{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

30.- El segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es igual a "a" es paralelo al plano P. Por los puntos A y B se han trazado rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ y que con P forman ángulos iguales a α y β respectivamente. La distancia entre los puntos de intersección de las rectas trazadas y el plano es igual a "b". Calcular la distancia entre $\overline{AB}$ y el plano P.

Resolución.

Trazamos las perpendiculares $\overline{AH}$ y $\overline{BK}$ perpendiculares al plano P, luego : AH = BK = x

Las proyecciones de las rectas $\overline{AS}$ y $\overline{BT}$ sobre el plano P son paralelas, formándose el trapecio rectángulo SHKT pues $\overline{KH}$ es perpendicular a los planos de los triángulos AHS y BKT



En el ⊿ AHS : HS = KR = $x \cot\alpha$

En el ⊿ BKT : KT = $x \cot\beta$

En el ⊿ SRT : $b^2 = a^2 + (RT)^2$

$\Rightarrow$ $RT = \sqrt{b^2 - a^2}$

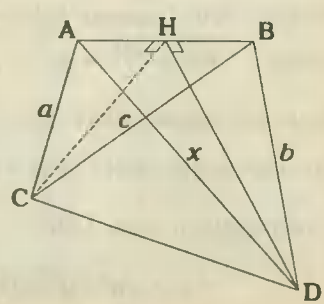
Como : $RT = x\cot\beta - x\cot\alpha$

Luego : $x(\cot\beta - \cot\alpha) = \sqrt{b^2 - a^2}$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

31.- Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son alabeados y forman un ángulo de 90º. Si AC = a , BC = c y BD = b . Calcular AD.

Resolución.-



En el Δ ADB , trazamos la altura $\overline{DH}$ y ya que $\overline{AB} \perp \overline{CD}$,

luego : $\overline{AB}$ es perpendicular al Δ CHD, de donde : $\overline{AB} \perp \overline{CH}$.

Por Euclides : Δ ADB: $x^2 = (AB)^2 + b^2 - 2(AB)(HB)$ ... (1)

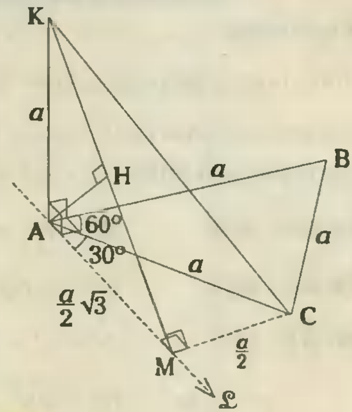
También : Δ ACB: $a^2 = (AB)^2 + c^2 - 2(AB)(HB)$... (2)

De (1) y (2) : $x^2 - b^2 = a^2 - c^2$ $\therefore$ $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

32.- En el plano P esta situado el triángulo equilátero ABC en donde AB = a ; en la perpendicular al plano P que pasa por A, se ha ubicado el punto K tal que AK = a. Calcular la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CK}$.

Resolución.-

Por A trazamos la recta $\mathcal{L}$ perpendicular a $\overline{AB}$ trazando luego $\overline{CM} \perp \mathcal{L}$ resultando A y $\overline{KM}$, las proyecciones de $\overline{AB}$ y $\overline{KM}$, sobre el triángulo KAM. La mínima distancia buscada será : $\overline{AH} \perp \overline{KM}$



En el ⊿ AMC de 30° y 60° : $AM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

En el ⊿ KAM : $KM = \sqrt{(a)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

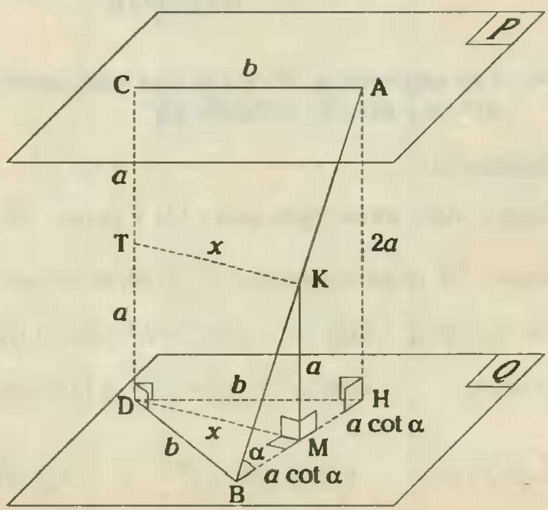
Como : $AH = \frac{AK.AM}{KM} \Rightarrow AH = \frac{a\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)}{\frac{a}{2}\sqrt{7}}$

$\therefore$ $\mathbf{AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}}$

33.- Entre dos planos paralelos se han trazado una perpendicular y una oblicua que forma con cada uno de los planos α . Hallar la distancia entre los puntos medios de los segmentos de la oblicua y la perpendicular contenidas entre los planos dados, si la longitud de la perpendicular es "2α" y la distancia entre los extremos de la oblicua y la perpendicular en cada uno de los planos es igual a "b".

Resolución.-

Consideremos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ la oblicua y la perpendicular indicados P y Q los planos paralelos. Trazamos AH ⊥ Q, luego:
AH = CD = 2a y AC = DH = b



En el ⊿ AHB, trazamos la base media $\overline{KM}$,

luego : $KM = \frac{2a}{2} = a$

En el rectángulo TKMD : TK = DM = x

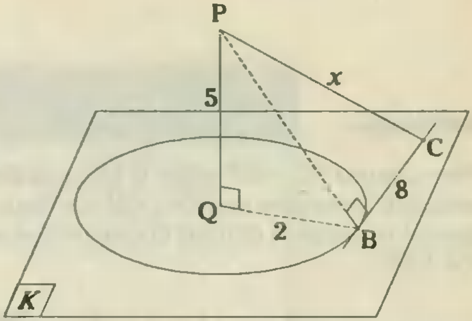
En el Δ isósceles BDH : BM = MH = a cot α

Finalmente en el ⊿ DMB :

$$\boldsymbol{x = \sqrt{b^2 - a^2\cot^2\alpha}}$$

34.- Se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a un plano (Q en el plano), haciendo centro en Q se traza una circunferencia de radio 2cm; por un punto B de ésta, se traza la tangente $\overline{BC}$ de 8cm. Calcular PC, si PQ = 5.

<u>Resolución</u>.-



Ya que $\overline{PQ}$ es perpendicular al plano K y $\overline{QB} \perp \overline{BC}$, luego : por el Teorema de las 3 $\perp_s$ $\overline{PB} \perp \overline{BC}$.

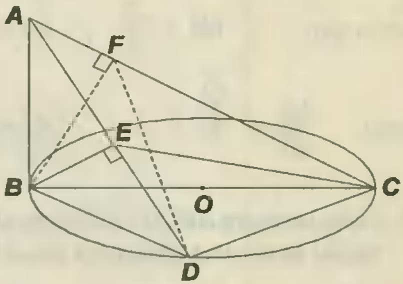
En el ⊿ PQB : $(PB)^2 = 5^2 + 2^2$

En el ⊿ PBC : $x^2 = (PB)^2 + 8^2$

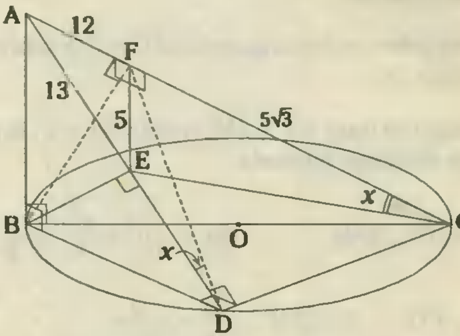
Luego : $x^2 = 5^2 + 2^2 + 8^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{93}}$

35.- En la figura mostrada, $\overline{AB}$ es perpendicular al plano de la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$. $\overline{BE} \perp \overline{AD}$, $\overline{BF} \perp \overline{AC}$, AE = 13 , AF = 12 , FC = $5\sqrt{3}$. Calcular la m ∡ EDF.



<u>Resolución</u>.-



En el ⊿ ABC : $(AB)^2 = AC \cdot AF$ ... (1)

En el ⊿ ABD : $(AB)^2 = AD \cdot AE$ ... (2)

De (1) y (2) : $AC \cdot AF = AD \cdot AE$

Con lo cual se tiene que el cuadrilátero EFCD es inscriptible.

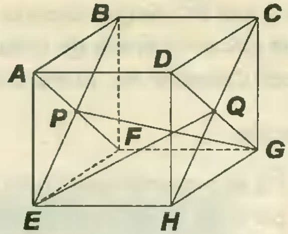
Donde : $m\measuredangle AFE = m\measuredangle ADC$

Por el Teorema de las Tres Perpendiculares como $\overline{AB}$ es perpendicular al plano del círculo y $\overline{BD} \perp \overline{DC}$, entonces $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, luego $m\measuredangle AFE = 90°$

En el ⊿ AFE : $EF = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

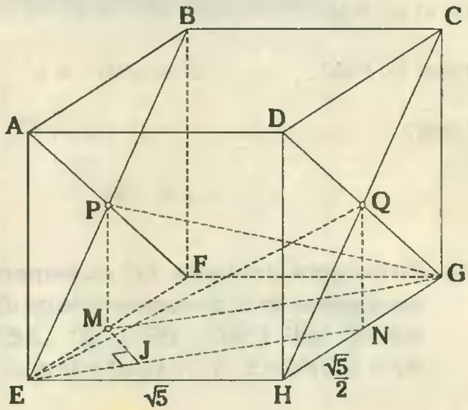
En el ⊿ EFC : $\boldsymbol{x = 30°}$

36.- En la figura hallar la distancia entre $\overline{EQ}$ y $\overline{PG}$; si ABCD - EFGH es un cubo de arista $\sqrt{5}$.



Resolución.-

Proyectamos $\overline{EQ}$ y $\overline{GP}$ sobre el plano EFGH, obteniendo los segmentos $\overline{EN}$ y $\overline{GM}$ los cuales son paralelos; luego la mínima distancia buscada es $\overline{MJ} \perp \overline{EN}$.



$\triangle$ EJM ~ $\triangle$ EHN : $\dfrac{MJ}{\sqrt{5}} = \dfrac{EM}{EN}$

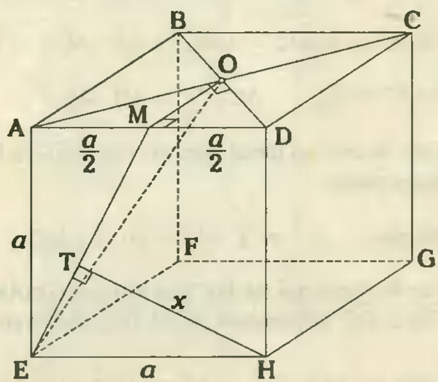
Puesto que : $EM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ y $EN = 5$

Luego : $\dfrac{MJ}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{5}$ $\therefore$ $MJ = \dfrac{1}{2}$

37.- Dado un cubo ABCD - EFGH de arista "a". "O" es el centro de la cara superior ABCD. Hallar la mínima distancia entre $\overline{EO}$ y $\overline{GH}$.

Resolución.-

Proyectamos los segmentos $\overline{EO}$ y $\overline{GH}$ sobre la cara ADHE, obteniéndose el segmento $\overline{EM}$ y el punto "H".



Luego se traza $\overline{HT} \perp \overline{EM}$, siendo HT = x , la mínima distancia buscada.

En el $\triangle$ EAM : $EM = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{5}$

$\triangle$ ETH ~ $\triangle$ EAM : $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}$

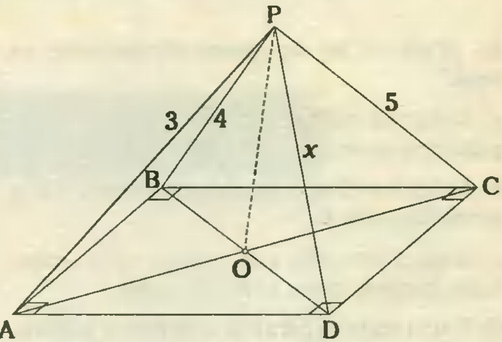
$\therefore$ $x = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

38.- Las distancias desde un punto P exterior al plano que contiene a un rectángulo ABCD a los vértices son PA = 3 PB = 4 y PC = 5 . Hallar PD.

Resolución.-

En el rectángulo ABCD, trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en O,

luego por el Teorema de la Mediana :



En el Δ APC : $3^2 + 5^2 = 2\,(PO)^2 + \frac{1}{2}(AC)^2$

En el Δ BPD : $4^2 + x^2 = 2\,(PO)^2 + \frac{1}{2}\;(BD)^2$

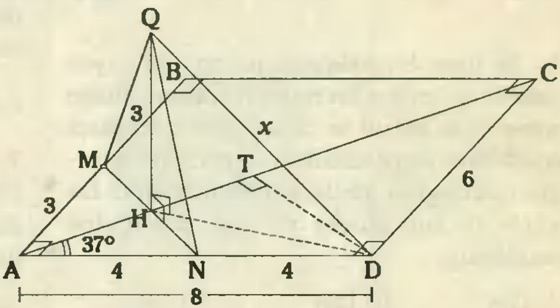
Como : $AC = BD$

Luego : $3^2 + 5^2 = 4^2 + x^2$

$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 3\sqrt{2}}$

39.- Se tiene un rectángulo ABCD, AC = 10cm, CD = 6cm se toman los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente y luego se construye el triángulo equilátero MNQ perpendicular al plano del rectángulo. Calcular QD.

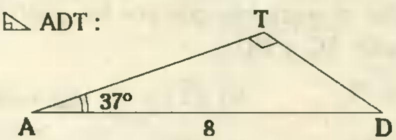
Resolución.-



En el ⊾ MAN : $MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

En el Δ MQN : $QH = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

En el ⊾ ADT :



$TD = \frac{24}{5} \quad \wedge \quad AT = \frac{32}{5}$

Luego : $HT = AT - \frac{5}{2} = \frac{32}{5} - \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad HT = \frac{39}{10}$

En el ⊾ HTD : $(HD)^2 = \left(\frac{39}{10}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad (HD)^2 = \frac{153}{4}$

Finalmente en el ⊾ QHD : $x^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 + (HD)^2 = \frac{75}{4} + \frac{153}{4}$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{228}{4} = 57 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \sqrt{57}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) Todos los planos paralelos a un plano son paralelos entre sí.

b) Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.

c) Si un plano corta a una de tres rectas paralelas, también corta a los otros dos.

d) Si una recta es paralela a un plano, la paralela trazada a dicha recta por un punto del plano, está contenida en el plano.

e) Por cualquier punto exterior a un plano, solo puede trazarse un plano paralelo al primero.

A) a B) b C) c D) d E) e

2.- Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8*m* respectivamente; luego sobre cada cateto se construyen triángulos equiláteros perpendiculares al plano del triángulo rectángulo. Hallar la distancia entre los vértices superiores de los triángulos equiláteros.

A) 17*m* B) 12*m* C) 10*m*

D) 11*m* E) N.A.

3.- Se tiene dos planos P y Q perpendiculares entre sí, se intersectan según la recta MN. La recta que une un punto A de P con un punto B de Q forma con Q un ángulo de 16° y con P un ángulo de 53°. Hallar la menor distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{AB}$, si AB = 25.

A) 5 B) 6 C) 6,6 D) 8 E) 9,2

4.- Dados los segmentos alabeados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que forman 60° y miden $4\sqrt{3}$; calcular la menor distancia entre $\overline{AC}$ y el segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, si $\overline{AC}$ es la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 3 E) 6

5.- Se tiene un ángulo $X\hat{O}Y$ contenido en el plano P, por un punto A exterior al plano P se trazan $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ perpendiculares a $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ respectivamente y además $\overline{AM}$ perpendicular al plano P. Si OB = 12; MB = 5 y OC = 8. Calcular CM.

A) 10 B) 5 C) $\sqrt{95}$

D) $\sqrt{105}$ E) N.A.

6.- Cuántos planos como máximo se pueden determinar con 8 puntos, 7 rectas secantes y 6 rectas paralelas.

A) 196 B) 236 C) 92 D) 148 E) 216

7.- Se tiene dos segmentos AB = $2\sqrt{3}$ y CD = $\sqrt{3}$ que se cruzan con un ángulo de 60°. Hallar el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) $3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{23}$ C) $4\sqrt{3}$

D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{19}$

8.- De las siguientes proposiciones indica con "V" lo Verdadero y con "F" lo Falso.

I. Si la mínima distancia entre dos rectas es cero, entonces dichas rectas son paralelas.

II. Si la distancia entre un plano y dos rectas paralelas a ella es la misma, entonces dichas rectas son paralelas.

III. Tres puntos determinan una esfera

A) VVV B) FFF C) VFV

D) FVF E) FVV

9.- En la figura el triángulo AEB es equilátero y ABCD es un cuadrado contenidos en los planos perpendiculares "P" y "Q". Calcular MN si AB = $4m$. (M y N son puntos medios).

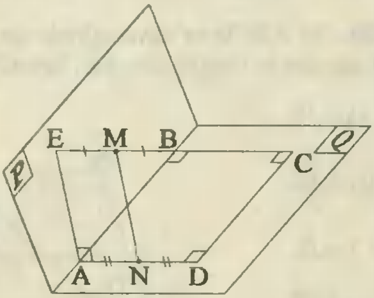
A) $4\sqrt{3}$

B) 4

C) $3\sqrt{2}$

D) 6

E) 5



10.- Se tienen tres planos paralelos entre sí que al ser intersectados por las rectas L_1 y L_2 determinan los puntos A, B y C (sobre L_1) y los puntos D, E y F (sobre L_2) Si AB = 5K + 8; BC = 32K - 13 ; DE = 6K y EF = 10K + 14. Calcular EF.

A) 51 B) 34 C) 26 D) 18 E) 12

11.- Según la figura $\overline{AL}$ es perpendicular al plano que contiene a la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, $m\ \widehat{MN} = 60°$, AB = $8cm$, LA = $5cm$ y la distancia del punto "B" a $\overline{MN}$ es $\sqrt{3}\,cm$. Calcular el área de la región triangular LMN.

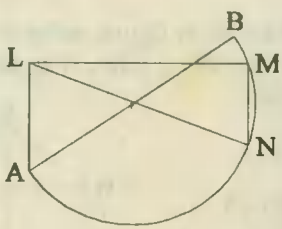
A) $4\sqrt{13}\,cm^2$

B) $3\sqrt{13}\,cm^2$

C) $\sqrt{13}\,cm^2$

D) $7\sqrt{13}\,cm^2$

E) $9\sqrt{13}\,cm^2$



12.- Dado un cubo ABCD - EFGH, Q y P son los centros de las caras DHGC y ABCD respectivamente en $\overline{HG}$ y $\overline{EL}$ se ubican los puntos L y M respectivamente.

Si : GL = 2(LH) = 4 y EM = 3(ML). Calcular el área de la región triangular ETM, si : $\overline{PM} \cap \overline{EQ} = \{T\}$.

A) $4{,}5u^2$ B) $3{,}5u^2$ C) $2{,}5u^2$

D) $5{,}5u^2$ E) $7{,}5u^2$

13.- En la figura K es la intersección entre el plano ACH y la diagonal $\overline{DF}$. Calcular DK; si la arista del cubo ABCD - EFGH mide a.

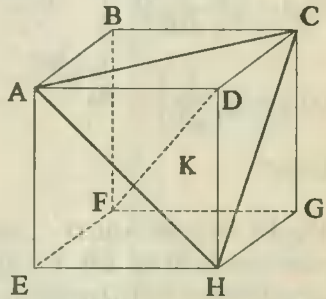
A) $a/2$

B) $a/3$

C) $\frac{a}{3}\sqrt{2}$

D) $\frac{a}{3}\sqrt{3}$

E) $\frac{a}{3}\sqrt{6}$



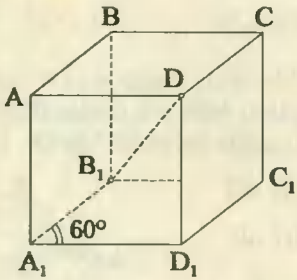
14.- Se tienen los segmentos alabeados $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ de longitudes $8\sqrt{2}$. Hallar el ángulo que forman sabiendo que el segmento que une los puntos medios de $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ mide 8.

A) 60° B) 90° C) 45° D) 135° E) 150°

15.- Se tiene un cuadrado ABCD y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ubicados en planos perpendiculares. Por "C" se traza una perpendicular al plano del cuadrado (en el semiespacio en que se encuentra la semicircunferencia) y en ella se ubica al punto P en el cual se une con un punto Q del Arco AB de tal forma que $m\measuredangle QBA = m\measuredangle DPC$ y QP = 2AB. Calcular la medida del ángulo formado por $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$.

A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

16.- En la figura $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ es un romboide $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ y $\overline{DD_1}$ son perpendicular es a dicho romboide. Hallar el ángulo que forman $\overline{B_1D}$ y el rectángulo $D_1D\,CC_1$ si $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ y $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB}{1} = \dfrac{AA_1}{3}$



A) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}\right)$

B) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

C) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

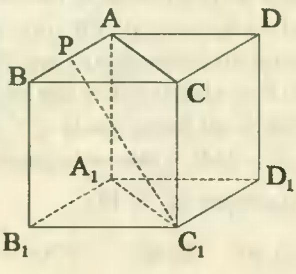
D) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

E) 60°

17.- En un cubo ABCD - EFGH se ubica el punto medio M de $\overline{BF}$, P y Q centros de las caras EFGH y AEHD respectivamente. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{MP}$ y $\overleftrightarrow{GQ}$.

A) 60° B) 70° C) 80° D) 90° E) 50°

18.- En la figura AP = PB, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ es un cubo. Calcular el ángulo formado por $\overline{C_1P}$ y la sección diagonal $CAA_1\,C_1$



A) $Arc\ \cos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

B) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

C) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

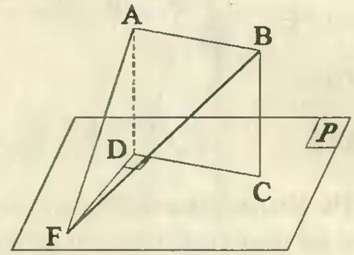
D) 45°

E) 60°

19.- Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ y sobre otra secante L_2, los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. Si AB = 6 ; CD = 8, además FD - EB = 1. Hallar "CF".

A) 4 B) 5 C) 7 D) 1 E) 9

20.- Si ABCD es un cuadrado de lado "b". Calcular la longitud de $\overline{FB}$. Si DC = DF.



A) $b\sqrt{3}$

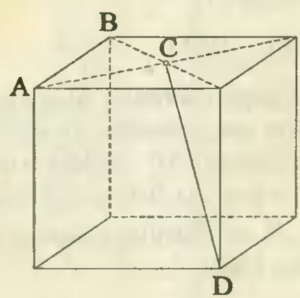
B) $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

C) $b\sqrt{2}$

D) $\dfrac{b\sqrt{5}}{2}$

E) $\dfrac{b\sqrt{6}}{2}$

21.- En el cubo de aristas "a". Hallar la distancia entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



A) $a\sqrt{5}/2$

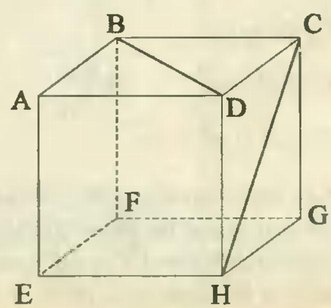
B) $a\sqrt{5}/5$

C) $a\sqrt{5}/3$

D) $a\sqrt{5}/6$

E) $a\sqrt{2}/3$

22.- En la figura, hallar la mínima distancia entre $\overline{DB}$ y $\overline{CH}$, si la arista del cubo mide $3\sqrt{3}$.



A) 3

B) $\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{6}$

E) 6

23.- En el cubo de arista "a". Hallar la distancia entre los segmentos $\overline{AG}$ y $\overline{HF}$.

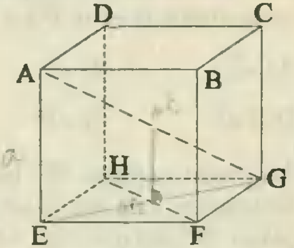
A) $a\sqrt{3}/2$

B) $a\sqrt{3}/6$

C) $a\sqrt{3}/4$

D) $a\sqrt{6}/6$

E) $a\sqrt{3}/3$



24.- Por el vértice "B" de un rectángulo ABCD se traza $\overline{BP}$ perpendicular a su plano, sea "M" punto medio de $\overline{AB}$, tal que AC = 2MP. Si el ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{MP}$ mide 60° y $PC = 2\sqrt{5}$; calcular "PD".

A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

25.- En la figura $\overline{AB}$ es perpendicular al plano de la circunferencia. Calcular $m\measuredangle$ EDF, si : AE = 13 , AF = 12 y $FC = 5\sqrt{3}$.

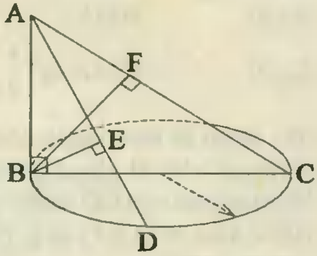
A) 30°

B) 45°

C) 60°

D) 37°

E) 53°



26.- Los rectángulos ABCD y ABEF se encuentran en planos perpendiculares, con diámetro $\overline{AB}$ se inscribe una semicircunferencia en ABEF y se ubica el punto R en dicho arco. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{RC}$ y el plano ABCD. Si RC = 12 , FM = 4 y ME = 9. ($M \in \overline{FE}$ y $\overline{RM} \perp \overline{EF}$).

A) 45 B) 30 C) 60 D) 37 E) 63

27.- Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos rectas alabeadas, siendo $\overline{MN}$ la distancia mínima entre ellas ($M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{CD}$). Sobre $\overline{AB}$ se toma un punto "P" y sobre $\overline{CD}$ un punto "Q" tal que:

$$m\measuredangle NPQ = 45 \quad , \quad m\measuredangle MPQ = 60$$

y $\quad m\measuredangle MPN = 45$

Calcular la medida del ángulo entre las rectas dadas.

A) 30 B) 37 C) 45 D) 60 E) 90

28.- El cuadrado ABCD y el triángulo ABM se encuentran en planos perpendiculares, se considera el punto "L" en $\overline{AD}$, equidistante de los planos ABM y BMC. Calcular "CD", si DL = 2 , $BM = 4\sqrt{5}$ y AB = AM.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

29.- Sea "H" el plano que contiene al rectángulo ABCD, por "B" se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano H. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{BP}$ y la recta que pasa por los baricentros de las caras APD y DPC.

A) 75 B) 60 C) 90 D) 45 E) 30

30.- Se tiene un rectángulo ABCD, donde 2 AB = AD = 8, se considera el punto "P" exterior al plano que contiene a dicho rectángulo, tal que P equidiste de A ; B ; C y D, y el triángulo BPC es equilátero; calcular la distancia entre $\overline{AD}$ y el plano que contiene al triángulo equilátero.

A) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ B) $\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{7}}{9}$

D) $\dfrac{2\sqrt{33}}{5}$ E) $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

31.- Dado un triángulo ABC, recto B, AB = 4 y BC = 3. Por el incentro "I" se traza $\overline{ID}$ perpendicular al plano del triángulo. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, si $ID = \sqrt{5}$.

A) 45 B) 60 C) 71,5 D) 74 E) 82,5

32.- Sean $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$ dos rayos del espacio no coplanarios y ortogonales, $\overline{AB}$ es su perpendicular común. Se toman los puntos M y P en $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$, respectivamente, tal que : $2\ AM.BP = AB^2$. Calcular la distancia del punto medio de AB a la recta MP, si AB = *a*.

A) a B) $a/4$ C) $a/3$ D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ E) $a/2$

33.- Se tiene un rectángulo ABCD y el semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ situadas en planos perpendiculares, O y M son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. Si "P" es un punto del arco AB tal que, $m\ \overset{\frown}{PQ} = 60°$ y además $2\ AD = DC\sqrt{2}$. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{OC}$ y $\overline{MP}$.

A) 30 B) 45 C) 60

D) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E) 90

34.- Dado un ángulo AOB contenido en un plano "H" y un punto "P" exterior a dicho plano se trazan $\overline{PM} \perp \overline{OA}$ y $\overline{PQ} \perp \overline{OB}$. Calcular MQ, sabiendo que forma con el plano "H" un ángulo de 45°, PM = 10, OM = $4\sqrt{2}$ y $m\measuredangle OMQ = 45$.

A) 6 B) 9 C) 12 D) $10\sqrt{6}$ E) 4

35.- Del gráfico; calcular "CF", sabiendo que L_1 y L_2 son rectas alabeadas, AB = AD = 8, BE = 10, EF = 16, DE = 4 y BC = 2.

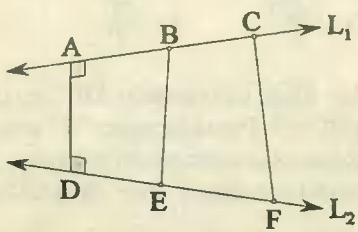
A) 10

B) 15

C) 20

D) 25

E) 30



36.- Los cuadrados ABCD y ABEF pertenecen a planos mutuamente perpendiculares, P y Q son sus centros, respectivamente; calcular la distancia entre $\overline{PQ}$ y $\overline{CF}$ si AB = 4.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}/2$

D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

37.- Dado un plano "P" los puntos A, B y M pertenecen a él, sea Q un punto exterior al plano "P", tal que : QA = QB = 10, QM = 8, AB = 12 y el ángulo entre la recta $\overline{QM}$ y el plano P mide 45. ¿A qué distancia del plano AQB, está la proyección del punto "Q" sobre el plano "P"?

A) 4 B) 6 C) 2,8 D) 3 E) 7

38.- Dados los cuadrados ABCD, de centro "O" y OPQR pertenecientes a planos perpendiculares, tal que $\overline{PR} // \overline{AC}$ (P más cerca a A que a C). Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{QR}$ y $\overline{AB}$.

A) 30 B) 45 C) 60

D) 90 E) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

39.- Dado un rectángulo ABCD, se traza $\overline{EB}$ perpendicular al plano de dicho rectángulo, luego se prolonga $\overline{CD}$ hasta el punto N, tal que: ND = AE = 3CD = 3 y $m\measuredangle EAB = m\measuredangle CNE$; calcular "BC".

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{30}$ C) $4\sqrt{21}$

D) $5\sqrt{10}$ E) 12

40.- Dados los cuadrados ABEF y BCGE pertenecientes a planos mutuamente perpendiculares ¿En qué relación se divide $\overline{AB}$ por el punto que pertenece al plano que pasa por "G" y los baricentros de los cuadrados ABCD y ABEF.?

A) $\sqrt{2}/2$ B) 1/2 C) 1

D) $\sqrt{6}/3$ E) 3/4

CAP. 24

ángulos poliedros

24.1 DEFINICIÓN

Se llama *ángulo sólido*, *ángulo poliedro* o *anguloide* a la figura determinada por la reunión de tres o más regiones angulares no coplanares, consecutivas y de vértice común. El vértice común es el vértice del ángulo poliedro, los lados de los ángulos se llaman *aristas* y los ángulos determinados por estas se llaman *caras*.

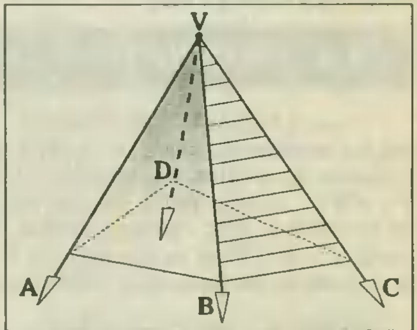


Fig. 24.1

En la *Fig*. 24.1, el ángulo poliedro mostrado se denota por: V-ABCD; donde V es el vértice; $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$ y $\overrightarrow{VD}$ sus aristas; los ángulos AVB, BVC, CVD y AVD son sus caras, y por cada arista hay un diedro determinado por dos caras consecutivas.

OBSERVACIONES

1) Un ángulo poliedro se denomina según su número de caras, siendo el menor el ángulo triedro que es de tres caras.

2) En todo ángulo poliedro se cumple que la suma de las medidas de todas sus caras está comprendido entre 0° y 180°

24.2. ÁNGULO TRIEDRO

El ángulo triedro es el ángulo poliedro de tres caras; es el anguloide de menor número de caras que puede haber, y es considerado como el más importante de todos los ángulos poliedros. Consta de los siguientes elementos (*Fig*. 24.2):

- Vértice : V

- Aristas : VA , VB , VC

- Caras : $\angle$AVB, $\angle$BVC y $\angle$AVC

- Diedros : *d* - VA , *d* - VB , *d* - VC

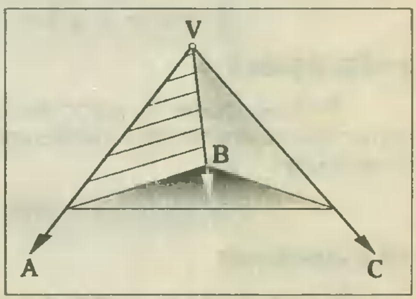


Fig. 24.2

24.3. ÁNGULO TRIEDRO POLAR

Se llama *ángulo triedro polar* o *triedro suplementario* de un triedro dado al que se obtiene al trazar por un punto interior al triedro dado tres rayos perpendiculares a cada cara.

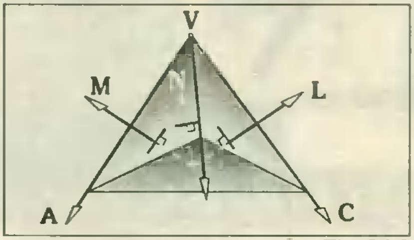


Fig. 24.3

En la *Fig.* 24.3 : $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SN}$ y $\overrightarrow{SL}$ son rayos perpendiculares a las caras del triedro V - ABC, siendo "S" un punto interior. Luego, el triedro S - MNL es el triedro polar del triedro V - ABC.

24.4 PROPIEDAD DEL TRIEDRO POLAR

Sea el triedro V - ABC donde a , b y c son las medidas de sus caras, y además α, β y δ las de sus diedros. Sea también, el triedro V' - A'B'C', triedro polar del primero (*Fig.* 24.4) donde a', b', c' son las medidas de sus caras, y α', β' y δ' las de sus diedros. Luego, se cumplirán las siguientes relaciones :

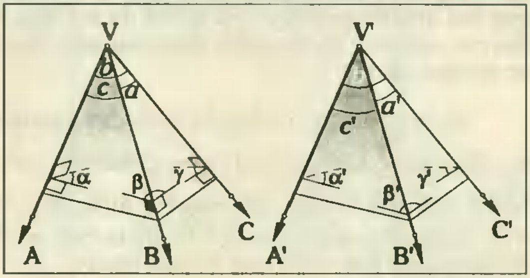


Fig. 24.4

$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \delta' = 180 \quad \text{... (24.1)}$$

y $$\alpha + a' = \beta + b' = \delta + c' = 180 \quad \text{... (24.2)}$$

24.5 PROPIEDADES GENERALES DEL TRIEDRO

En todo ángulo triedro se cumplen las siguientes propiedades fundamentales:

1RA PROPIEDAD

En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia. Sean las medidas de las caras del triedro V -ABC (*Fig.* 24.5) a, b y c. Luego:

$$b - c < a < b + c$$

2DA PROPIEDAD

En todo triedro la suma de sus tres caras es menor que cuatro rectos. Considerando la *Fig.* 24.5, se cumple que:

$$0° < a + b + c < 360°$$

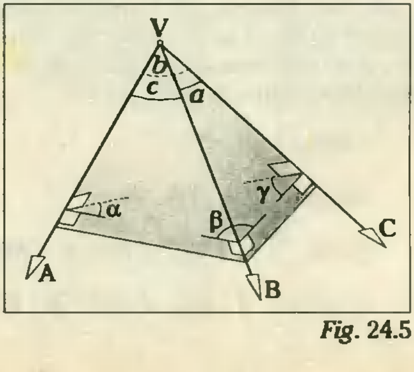


Fig. 24.5

3RA PROPIEDAD

En todo triedro se cumple que la suma de todos sus diedros está comprendida entre 180 y 540°. Sean α, β y γ las medidas de los diedros del triedro V - ABC tal como se muestran en la *Fig*. 24.5. Luego, se verifica la relación:

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

4TA PROPIEDAD

En todo triedro se cumple que a caras iguales le corresponden diedros iguales, y viceversa.

$$\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

24.6 CLASIFICACIÓN DE LOS TRIEDROS

Los ángulos triedros se clasifican según los siguientes criterios en:

A) POR LA REGULARIDAD DE SUS CARAS.

1) ∠ *TRIEDRO EQUILATERO.*- Tienen tres caras iguales y tres diedros iguales. *Fig*. 24.6a

Así: $a = b = c \;;\; \alpha = \beta = \gamma$

2) ∠ *TRIEDRO ISOSCELES.*- Dos caras son iguales e iguales los diedros opuestos. *Fig*. 24.6b

Así: $a = c \neq b \;;\; \alpha = \gamma \neq \beta$

3) ∠ *TRIEDRO ESCALENO.*- Sus caras son diferentes. *Fig*. 24.6c

Así: $a \neq b \neq c \;;\; \alpha \neq \beta \neq \gamma$

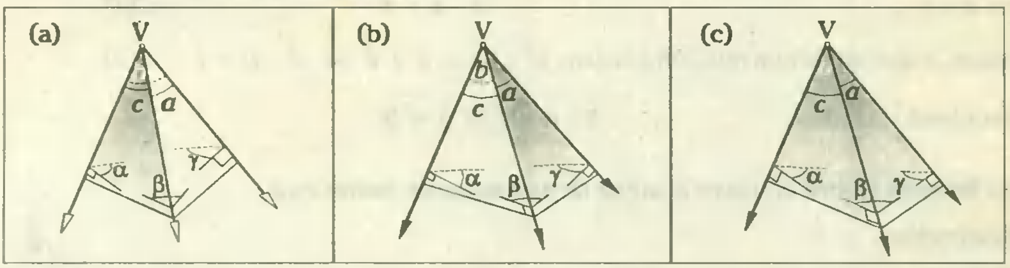


Fig. 24.6

B) POR EL NÚMERO DE CARAS RECTAS.

1) ∠ *TRIEDRO UNI-RECTANGULAR:* Una cara de 90°. *Fig*. 24.7a

2) ∠ *TRIEDRO BI-RECTANGULAR:* Dos caras de 90° y dos diedros rectos. *Fig*. 24.7b

3) ∠ *TRIEDRO TRI-RECTANGULAR:* Tres caras de 90° y tres diedros rectos. *Fig*. 24.7c

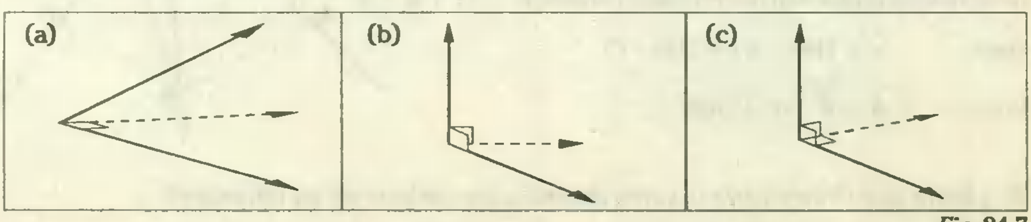


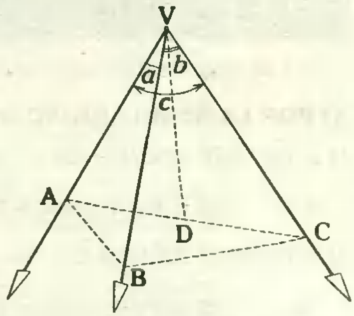
Fig. 24.7

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Demostrar que en todo triedro una cara es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

$$\hat{b} - \hat{a} < c < \hat{a} + \hat{b}$$

<u>**Resolución**</u>.-



Sea $A\hat{V}B = \hat{a}$, $B\hat{V}C = \hat{b}$ y $A\hat{V}C = \hat{c}$

Trazamos $\overrightarrow{VD}$ de modo que : $A\hat{V}D = a$ y $VD = VB$

Con lo cual logramos que : $\Delta AVB = \Delta AVD$

Por lo tanto : $AD = AB$

Aprovechando el Δ ABC : $\overline{AC} < AB + \overline{BC}$

También : AD + DC < AB + BC , reduciendo DC < BC

Esto indica en los triángulos VCD y VBC que : $\hat{c} - \hat{a} < \hat{b}$

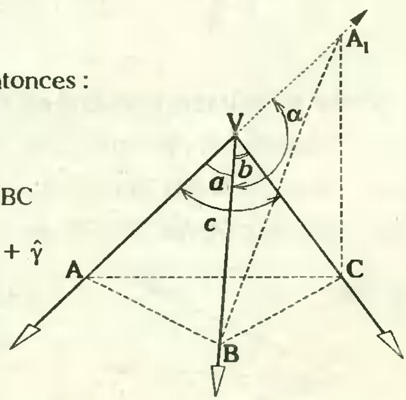
De donde : $\hat{c} - \hat{a} + \hat{b}$ ... (1)

Ahora, si aplicamos esta relación a la cara "b" : $\hat{b} < \hat{a} + \hat{c} \Rightarrow \hat{b} - \hat{a} < \hat{c}$ ... (2)

Reuniendo (1) y (2) : $\therefore \quad \boldsymbol{\hat{b} - \hat{a} < \hat{c} < \hat{a} + \hat{b}}$

2.- En todo triedro convexo la suma de sus caras es menor que :

<u>**Resolución**</u>.-



Para obtener algún ángulo conocido, prolongamos AV, entonces :

$$A\hat{V}A_1 = 180$$

Se acaba de obtener un segundo ángulo triedro : V - A_1 BC

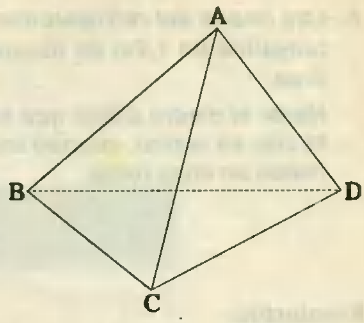
Aplicando la propiedad del problema anterior: $\hat{b} < \hat{\alpha} + \hat{\gamma}$

Osea : $\hat{b} < (180 - \hat{a}) + (180 - \hat{c})$

Donde : $\boldsymbol{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < 360}$

3.- ¿Entre que límites varía la suma de todos los diedros de un tetraedro?

Resolución.-



La pirámide formada por cuatro triángulos como la mostrada se llama TETRAEDRO y sus diedros son :

AB , BC

AC , BD

AD y CD

Entonces, por lo deducido en el item 24.5.3

Tendremos : Triedro A : $180 < AB + AC + AD < 540$

Triedro B : $180 < BA + BC + BD < 540$

Triedro C : $180 < CB + CA + CD < 540$

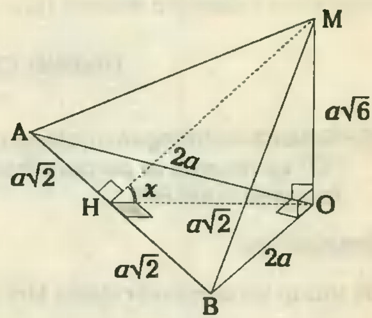
Triedro D : $180 < DA + DB + DC < 540$

Sumando estas cuatro expresiones y reduciendo se obtiene finalmente que :

$$\mathbf{360^o < AB + AC + AD + BC + BD + CD < 1080}$$

4.- Se tiene un triángulo isósceles AOB; AO = OB = 2a, se levanta la perpendicular $\overline{OM}$ al plano del triángulo, tal que : OM = $a\sqrt{6}$, se une "M" con "A" y "B" . Hallar el diedro AB si m ∡ AOB = 90º

Resolución.-



El diedro AB pedido esta formado por las caras AMB y AOB , para calcular su valor tomamos "H" punto medio de la hipotenusa $\overline{AB}$.

Entonces , como : $AB = AO\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,a$

$\Rightarrow \quad AH = HB = a\sqrt{2}$

Ahora trazamos $\overline{MH}$ y $\overline{OH}$

El ángulo "x" formado es el que representa el diedro AB

Luego para calcular "x" necesitamos conocer 2 lados del ⊿ MOH

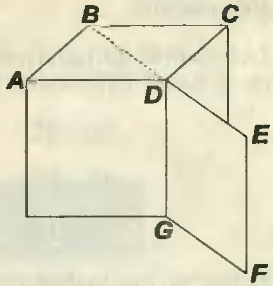
Como OM es dato, hallemos ahora OH : $OH = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$

En el ⊿ MOH, observamos que se cumple la relación : $OM = OH\sqrt{3}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 60^o}$

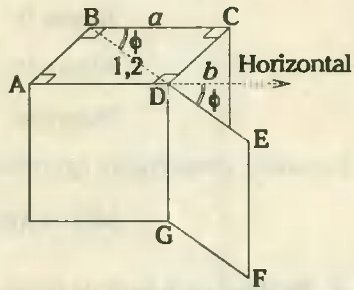
5.- Las bases del refrigerador mostrado son rectángulos de 1,2m de diagonal y $9\sqrt{3}\ /25m^2$ de área.

Hallar el diedro CDGF que forma la puerta abierta con su marco, cuando los puntos B, D y E se hallen en línea recta.



Resolución.-

Del gráfico el diedro pedido será : $90 + \phi$



Ahora, en el triángulo rectángulo BCD,

Hallemos los lados para determinar luego el valor de ϕ

Sabemos que : $a^2 + b^2 = (1,2)^2$

y : $a \cdot b = 9\sqrt{3}/25$

Resolviendo el sistema y considerando $a > b$,

Se obtiene : $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$ y $b = 3/5$

Con estos valores se deduce que : $\phi = 30^{o}$

$\therefore$ **DIEDRO CDGF = 120º**

6.- Se tiene un triángulo rectángulo isósceles AOB en el cual : AO = OB = $\sqrt{6}$ m , por el punto "O" se levanta la perpendicular OM al plano del triángulo. Hallar OM si el diedro AB formado mide 60º

Resolución.-

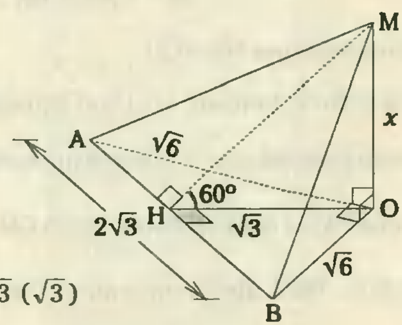
Se trazan las perpendiculares MH y OH

En el triángulo rectángulo AOB :

$$AB = \sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

Entonces : $OH = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{3}$

También en el ⊿ MOH : $x = OH(\sqrt{3}) \Rightarrow x = \sqrt{3}\,(\sqrt{3})$

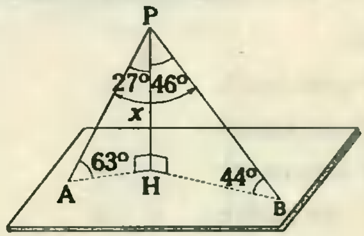


$\therefore$ ***x = 3m***

MISCELÁNEA

1.- *Desde un punto «P» exterior a un plano se trazan la perpendicular $\overline{PH}$ y las oblicuas $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ de modo que los ángulos PAH y PBH miden 63º y 44º respectivamente. Determinar entre que límites esta comprendida la medida del ∡ APB sabiendo que $\overline{PA}$, $\overline{PH}$ y $\overline{PB}$ no son coplanares.*

Resolución.-



En el ⊿ PHA : $m\measuredangle APH = 90 - 63 = 27^{o}$

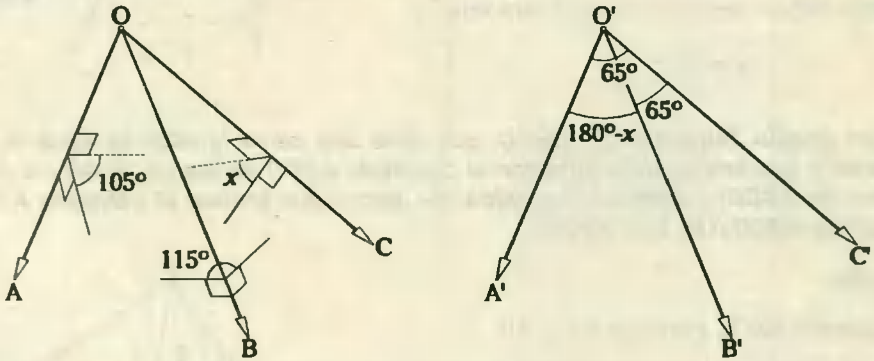
En el ⊿ PHB : $m\measuredangle HPB = 90 - 44 = 46$

En el triedro P - ABH : $46 - 27 < x < 27 + 46$

$\therefore \quad \mathbf{19 < x < 73}$

2.- *Dos diedros de un triedro miden 105º y 115º ¿Entre que valores estará comprendido el tercer diedro?*

Resolución.-



Sea el triedro O - ABC , donde : $m(d\,\overrightarrow{OA}) = 105$, $m(d\,\overrightarrow{OB}) = 115$ y $m(d\,\overrightarrow{OC}) = x$

Además sea su triedro polar el O' - A'B'C'

Donde : $m\measuredangle A'O'B' = 180 - x$

También : $m\measuredangle B'O'C' = 180 - 105 = 75$

$m\measuredangle A'O'C' = 180 - 115 = 65$

En el triedro Polar O'- A'B'C' : $75 - 65 < 180 - x < 65 + 75$

Simplificando : $10 < 180 - x < 140 \quad \Rightarrow \quad 40 < x < 170$

El tercer diedro estará comprendido entre 40° y 170°

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = 40 < x < 170}$$

3.- Hallar el máximo valor entero que puede asumir la tercera cara de un ángulo pentaedro, si las medidas de sus cinco caras forman una progresión aritmética.

Resolución.-

Sea «α» la medida de la tercera cara y «r» la razón de la progresión

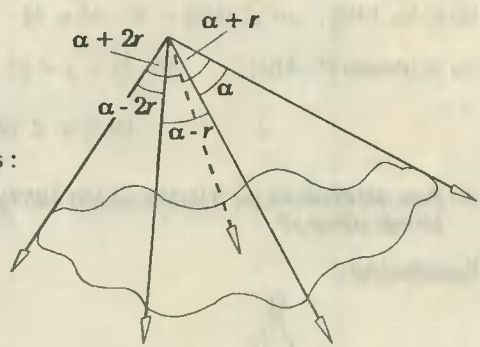
Luego :

La 1° cara medirá : $\alpha - 2r$

La 2° cara medirá : $\alpha - r$

La 4° cara medirá : $\alpha + r$

La 5° cara medirá : $\alpha + 2r$



Empleando la propiedad ... en los ángulos triedros :

$$\alpha + 2r + \alpha - r + \alpha + \alpha + r + \alpha + 2r < 360$$

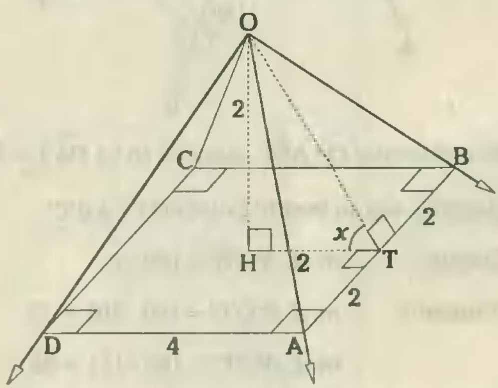
Donde : $5\alpha < 360 \quad \Rightarrow \quad \alpha < 72$

El máximo valor entero de la tercera cara sera 71°

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 71°}$$

4.- En un ángulo Tetraedro O - ABCD, que tiene sus caras iguales se traza un plano secante a sus aristas determinando el cuadrado ABCD de lado 4. Si OH = 2 (H es el centro de ABCD) . Calcular la medida del diedro que forman el triángulo AOB y el cuadrado ABCD ($\overline{OH} \perp \square$ ABCD)

Resolución.-



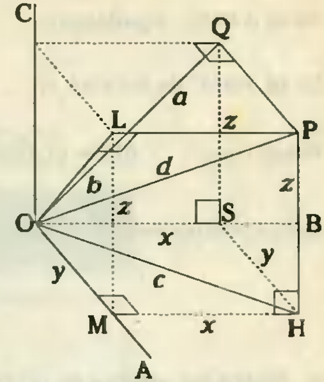
En el cuadrado ABCD, trazamos $\overline{HT} \perp \overline{AB}$.

Luego HT = 2 y por el Teorema de las tres perpendiculares $\overline{OT} \perp \overline{AB}$

El $\measuredangle$ HTO es el ángulo plano correspondiente al diedro $\overline{AB}$ buscado.

En el $\triangle$ OTH : $\boldsymbol{x = 45}$

5.- Dado un triedro O - ABC trirectángulo, se toma un punto «P» interior al triedro. Hallar OP, si la suma de los cuadrados de las proyecciones de $\overline{OP}$ sobre las 3 caras es igual a 8.



Resolución.-

En el ⊾ OMH : $c^2 = x^2 + y^2$ ... (1)

En el ⊾ OML : $b^2 = y^2 + z^2$ ... (2)

En el ⊾ OSQ : $a^2 = x^2 + z^2$ ... (3)

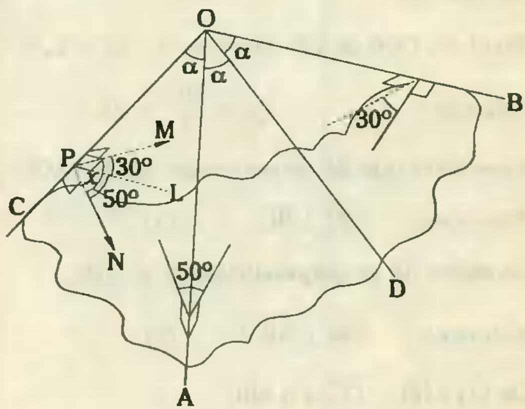
(1) + (2) + (3) : $a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(x^2 + y^2 + z^2)$

Puesto que : $a^2 + b^2 + c^2 = 8$(dato) y $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$

Luego : $8 = 2d^2$

$\therefore$ $\mathbf{d = 2}$

6.- En un trietro O - ABC se traza un plano que pasa por la arista OC intersectando al plano que contiene a la cara AOB en $\overrightarrow{OD}$. Calcular la medida del diedro $\overrightarrow{OC}$ si ∡ AOD ≅ ∡ COD ≅ ∡ DOB y los ángulos diedros $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ miden 50º y 30º respectivamente.



Resolución.-

En el triedro isósceles O - CDB :

$m\measuredangle\,\text{COD} = m\measuredangle\,\text{DOB} = \alpha$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle\,\text{MPL} = m\,(d - \overrightarrow{\text{OB}}) = 30°$

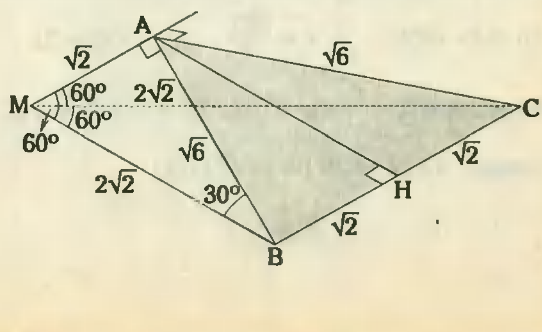
En el triedro isósceles O - CAD :

$m\measuredangle\,\text{COD} = m\measuredangle\,\text{AOD} = \alpha$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle\,\text{LPN} = m\,(d - \overrightarrow{\text{OA}}) = 50°$

$\therefore$ $\mathbf{m(d - \overrightarrow{\text{OC}}) = m\measuredangle\,\text{MPN} = 80°}$

7.- Las caras de un triedro equilátero de vértice M miden 60º. Sobre una de sus aristas se ubica el punto A de modo que MA = $\sqrt{2}$; por A se traza un plano perpendicular a MA que intersecta a las otras aristas en B y C. Hallar el área de la región triangular ABC.



Resolución.-

En el ⊾ MAB de 30° y 60° :

$\text{MB} = 2\sqrt{2}$ y $\text{AB} = \sqrt{6}$

En el ⊾ MAC de 30° y 60° :

$\text{MC} = 2\sqrt{2}$ y $\text{AC} = \sqrt{6}$

En el Δ BMC , equilátero : $BC = 2\sqrt{2}$

En el Δ BAC de área «A_x»: $A_x = \dfrac{BC.AH}{2}$ ... (1)

Puesto que : $AH = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2$ y $BC = 2\sqrt{2}$

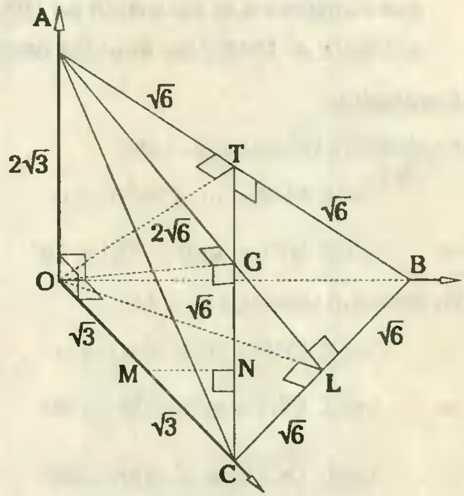
Luego reemplazando en (1) : $A_x = \dfrac{2\sqrt{2}.2}{2}$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 2\sqrt{2}}$

8.- *Sobre las aristas de un triedro trirectángulo O - ABC se toman : $OA = OB = OC = 2\sqrt{3}$. Calcular la distancia del punto medio de OC al plano ABC*

<u>**Resolución**</u>.-

Sea «G» el baricentro del triángulo equilátero ABC, primero demostraremos que $\overline{OG}$ es perpendicular al Δ ABC.



En el ⊿ COB de 45° : $BC = 2\sqrt{3}\ .\ \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Además : $QL = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{6}$

Obsérvese que $\overline{BC}$ es perpendicular al Δ AOL

Entonces : $\overline{OG} \perp \overline{BC}$ ... (1)

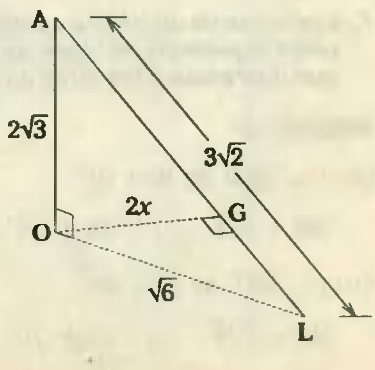
También $\overline{AB}$ es perpendicular al ∡ OTC

Entonces: $\overline{OG} \perp \overline{AB}$ ... (2)

De (1) y (2) : $\overline{OG} \perp \Delta ABC$

Trazamos $\overline{MN} // \overline{OG}$

Luego MN = *x* es la distancia pedida



En el ⊿ OGC : $x = \dfrac{OG}{2} \Rightarrow OG = 2x$

En el ⊿ AOL : $AL = \sqrt{2(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$

Luego : $(2\sqrt{3})(\sqrt{6}) = (3\sqrt{2})(2x)$

$\therefore$ $\boxed{x = 1}$

9.- *Si las distancias de un punto interior a un triedro trirectángulo a sus aristas miden 6, 4 y 5m. Hallar la distancia del punto al vértice*

Resolución.-

Sea P el punto interior al triedro trirectángulo O - MNL

Por dato del problema :PA = 6 , PB = 4 y PC = 5

En el ⊿ PHA : $b^2 + c^2 = 6^2$ ... (1)

En el ⊿ BHP : $a^2 + c^2 = 4^2$ ... (2)

En el ⊿ OHP : $x^2 = c^2 + 5^2$ ... (3)

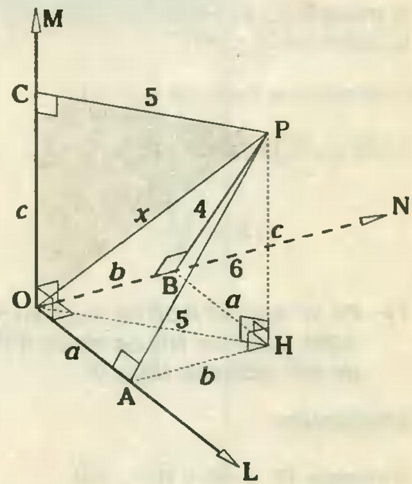
(1) + (2) : $\underbrace{a^2 + b^2} + 2c^2 = 6^2 + 4^2$

Donde : $5^2 + 2c^2 = 52$

Luego : $2c^2 = 27 \Rightarrow c^2 = \dfrac{27}{2}$ ... (4)

(4) en (3) : $x^2 = \dfrac{27}{2} + 25 = \dfrac{77}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{77}{2}}}$$



10.- *Dos rectángulos congruentes ABCD y ABMN forman un diedro de 120º. Si BC = 2 AB = 4. Calcular la distancia de D al punto medio de $\overline{MN}$*

Resolución.-

Trazamos $\overline{DN}$; luego en el triángulo isósceles DAN :

$$DN = 4\sqrt{3}$$

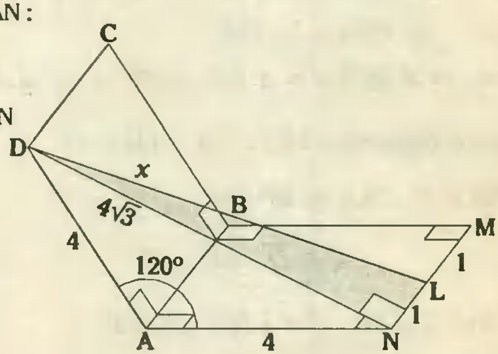
La arista $\overline{AB}$ del diedro es perpendicular al Δ DAN

Luego como $\overline{AB}$ // $\overline{MN}$

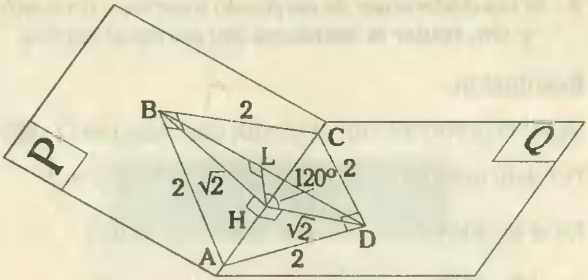
Entonces $\overline{MN}$ ⊥ Δ DAN con lo cual $\overline{MN}$ ⊥ $\overline{DN}$

En el ⊿ DNL : $x^2 = (4\sqrt{3})^2 + (1)^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = 7}$$



11.- *Los planos P y Q forman un diedro de 120º en el plano P se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B y en el plano Q se tiene el triángulo rectángulo ADC recto en D. Hallar las distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; si : AB = BC = AD = DC = 2*



Resolución.-

Trazamos por B y D perpendiculares $\overline{BH}$ y $\overline{DH}$ a $\overline{AC}$

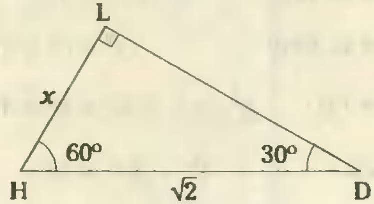
Resultando: BH = DH = AH = HC = $\sqrt{2}$

Además la $m\measuredangle$ BHD = 120°

El plano BHD es perpendicular a $\overline{AC}$ y la distancia $\overline{HL} \perp \overline{BD}$

Es la mínima distancia buscada

En el ⊾ HLD de 30° y 60°



$$\therefore \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12.- En un ángulo AOB se traza su bisectriz $\overline{OH}$, luego se traza $\overline{HQ}$ perpendicular al plano AOB. Calcular HQ de modo que el triedro O - ABQ tenga una cara de 90º y dos caras de 60º; además OH = 2

Resolución.-

Trazamos $\overline{HL} \perp$ OA y $\overline{HT} \perp \overrightarrow{OB}$

Luego por el Teorema de las 3 perpendiculares : $\overline{QL} \perp \overrightarrow{OA}$ y $\overline{QT} \perp \overrightarrow{OB}$

Por el Teorema de la bisectriz HL = HT y OL = OT

⊾ QHT ≅ ⊾ QHL (LAL) ⇒ QL = QT

⊾ OTQ ≅ ⊾ OLQ

⇒ $m\measuredangle$ QOT = $m\measuredangle$ QOL = 60° y $m\measuredangle$ AOB = 90°

En el cuadrado OLHT : OL = LH = $\sqrt{2}$

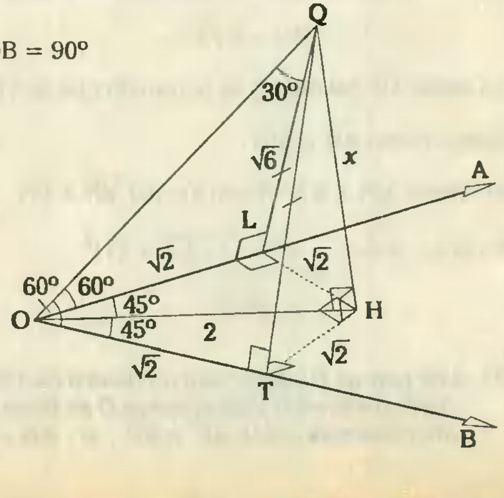
En el ⊾ OLQ de 30° y 60° :

$$QL = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

En el ⊾ QHL : $x^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2$

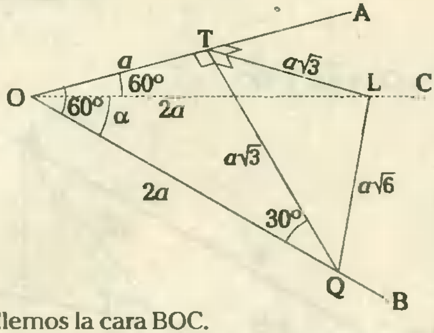
Donde : $x^2 = 6 - 2$

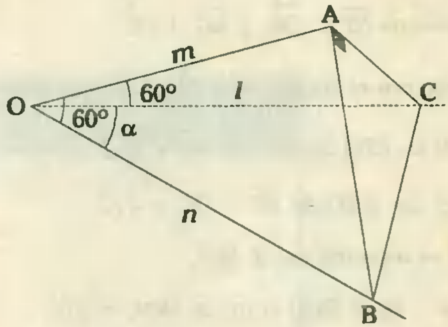
$$\therefore \qquad x = 2$$



13.- En un triedro O - ABC, cuyas caras miden : C = b = 60º y el diedro OA mide 90º, si las aristas miden : OA = m , OB = n y OC = l ¿Qué relación existe entre m, n y l para que el triángulo ABC sea recto en A.

Resolución.-





Hallemos la cara BOC.

En el Δ QOL : $(a\sqrt{6})^2 = (2a) + (2a)^2 - 2(2a)(2a)\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{4}$

En el ⊿ ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Luego : $(l^2 + n^2 - 2ln\cos\alpha) = (m^2 + n^2 - 2mn\cos 60) + (m^2 + l^2 - 2ml\cos 60)$

Simplificando : $2m^2 - m(n + l) + \dfrac{nl}{2} = 0$

Resolviendo : $\boxed{2m = n = l}$

14.- Sobre las aristas de un triedro trirectángulo de vértice «S» se ubican los puntos A, B, y C. Hallar el perímetro del triángulo ABC, si SA + SB + SC = 37 y los inradios de los triángulos ASB, ASC y BSC miden 3, 4 y 5 respectivamente.

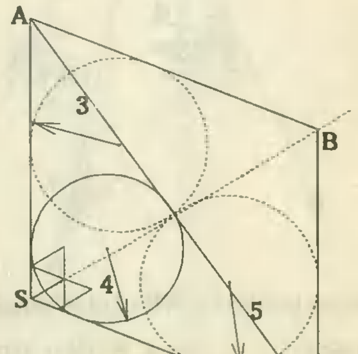
Resolución.-

Aplicando el Teorema de Poncelet en :

⊿ ASB : SA + SB = AB + 2 (3) ... (1)

⊿ ASC : SA + SC = AC + 2 (4) ... (2)

⊿ BSC : SB + SC = BC + 2 (5) ... (3)



Sumando (1) + (2) + (3) :

2(SA + SB + SC) = AB + BC + AC + 24

Pero : SA + SB + SC = 37 y . AB + BC + AC = $2p_{(\Delta ABC)}$

Luego : 2(37) = $2p$ (Δ ABC) + 24

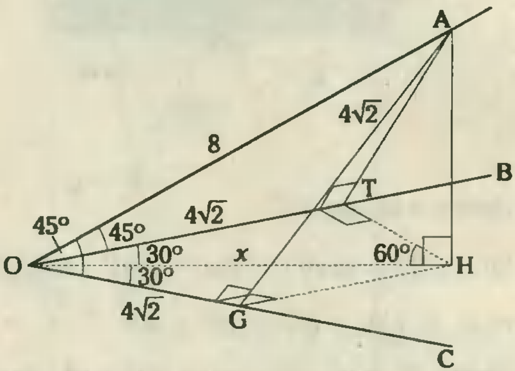
∴ $\boxed{2p_{(\Delta ABC)} = 50}$

15.- Se tiene un triedro isósceles O - ABC, donde m∡ AOB = m∡ AOC = 45º y m∡ BOC = 60º. Si OA = 8 . Calcular la proyección de $\overline{OA}$ sobre la cara BOC.

Resolución.-

Trazamos $\overline{AT} \perp \overrightarrow{OB}$ y $\overline{AG} \perp \overrightarrow{OC}$

Luego por el Teorema de las 3 perpendiculares $\overline{AT} \perp$ OB y $\overline{AG} \perp \overrightarrow{OC}$



En el ⊿ ATO de 45° : $OT = 4\sqrt{2}$

En el ⊿ AGO de 45° : $OG = 4\sqrt{2}$

$\overline{OH}$ es bisectriz del ∡ BOC

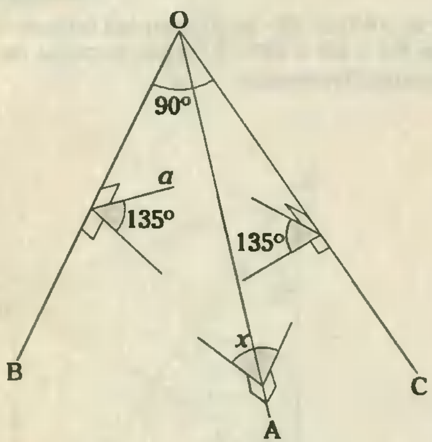
$\Rightarrow \quad m∡\ BOH = m∡\ HOC = 30°$

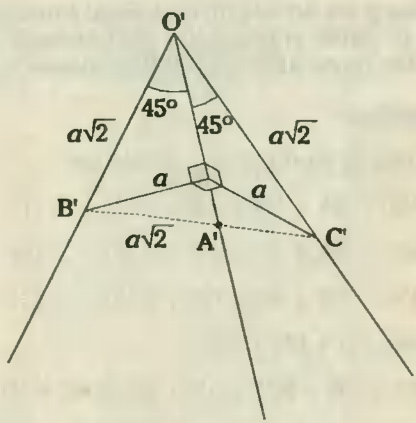
En el ⊿ OTH de 30° y 60° : $x = 2\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \quad \boxed{x = \dfrac{8}{3}\sqrt{6}}$

16.- En un triedro O - ABC los diedros $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ miden 135º y la cara «a» mide 90º. Calcular la medida del diedro $\overrightarrow{OA}$

Resolución.-





Sea el triedro O'- A'B'C' el triedro Polar del triedro O - ABC

Luego : $m∡\ B'OA' = 180 - 135 = 45°$

También : $m∡\ A'O'C' = 180 - 135 = 45°$

Luego : $m\,d - (\overrightarrow{OA}) = 180 - 90 = 90^\circ$

⊿ O'HB' de 45° : $O'H = B'H = a \Rightarrow O'B' = a\sqrt{2}$

⊿ O'HC' de 45° : $O'H = HC' = a \Rightarrow O'C' = a\sqrt{2}$

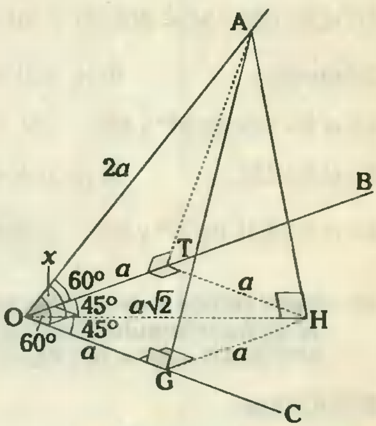
⊿ B'HC' : $B'C' = a\sqrt{2}$

El Δ B'O'C' es equilátero $\Rightarrow m\measuredangle B'O'C' = 60^\circ$

Como : $x + 60 = 180 \quad \therefore \quad \boxed{x = 120}$

17.- En un triedro O - ABC, sus caras AOB y AOC miden 60º y la cara BOC mide 90º. Hallar la medida del ángulo que forma AO con el plano BOC.

Resolución.-



Al trazar $\overline{HT} \perp \overrightarrow{OB}$ y $\overline{HG} \perp \overline{OA}$

Se tiene : $\overline{AT} \perp \overrightarrow{OB}$ y $\overline{AG} \perp \overrightarrow{OC}$

Resultando que $\overline{AH}$ es bisectriz del $\measuredangle$ BOC

El □ OTHG es un cuadrado

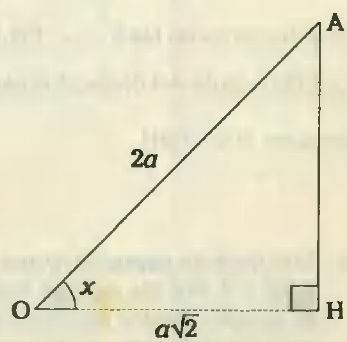
Luego si : $OT = TH = a \Rightarrow OH = a\sqrt{2}$

En el ⊿ ATO de 30° y 60° : $OA = 2a$

En el ⊿ OHA : $\boxed{x = 45^\circ}$

18.- Sobre las aristas de un triedro de vértice O se ubican los puntos A, B y C de tal manera que OA = BC , AB = OC y OB = AC.
Hallar la suma de las medidas de las caras de dicho triedro.

Resolución.-



Del gráfico observamos que :

$$\Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta AOC$$

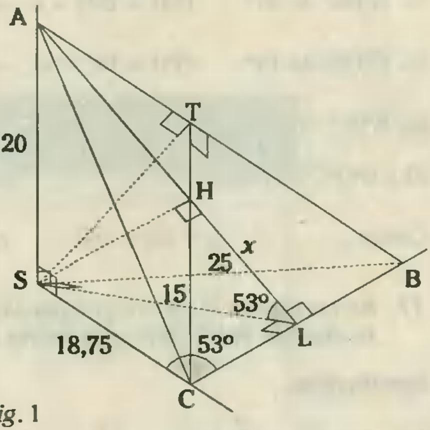
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AOB = m\measuredangle BOC = \theta$$

También : $m\measuredangle OAB = m\measuredangle AOC = \beta$

En el Δ AOB : $\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180}$

19.- Sobre las aristas de un triedro trirectángulo de vértice S se ubican los puntos A, B, y C. Si AS = 20 SB = 25 y SC = 18,75. Hallar la menor distancia entre $\overline{BC}$ y $\overline{SH}$ (H : ortocentro del Δ ABC)

Resolución.-



Primero demostraremos que $\overline{SH} \perp \Delta ABC$, para lo cual bastara demostrar que $\overline{SH} \perp \overline{BC}$ y $\overline{SH} \perp \overline{AB}$, para ello observe que BC es perpendicular al ΔASL.

Luego $\overline{BC} \perp \overline{SH}$, también $\overline{AB} \perp \Delta STC$, entonces $\overline{AB} \perp \overline{SH}$ de donde $\overline{SH} \perp \Delta ABC$.

La mínima distancia buscada es HL, ya que :

$$\overline{HL} \perp \overline{SH} \ \wedge \ \overline{HL} \perp \overline{BC}$$

En el ⊿ CSB : SC = 3(6,25) y SB = 4(6,25)

De donde : $m \measuredangle SCB = 53°$

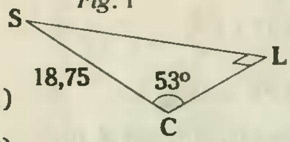


Fig. 1

En el ⊿ SCL de 37° y 53° : SL = 15 (*Fig.* 1)

En el ⊿ ASL : $m \measuredangle SLA = 53°$ (*Fig.* 2)

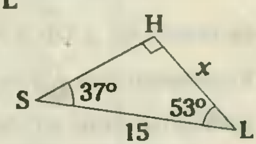
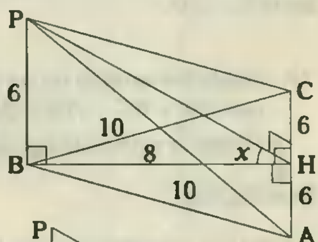


Fig. 2

En el ⊿ SHL de 37° y 53° : $x = 9$

20.- Por el vértice B de un triángulo isósceles ABC se levanta la perpendicular $\overline{BP}$ al plano de dicho triángulo. Calcular la medida del ángulo formado por los triángulos ABC y APC si AB = BC = 10 , AC = 12 y BP = 6

Resolución.-



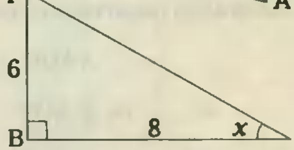
En el triángulo isósceles ABC trazamos la altura $\overline{BH}$

Luego : CH = HA = 6 y $BH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Por el Teorema de las 3 ⊥s $\overline{PH}$ es perpendicular a $\overline{AC}$

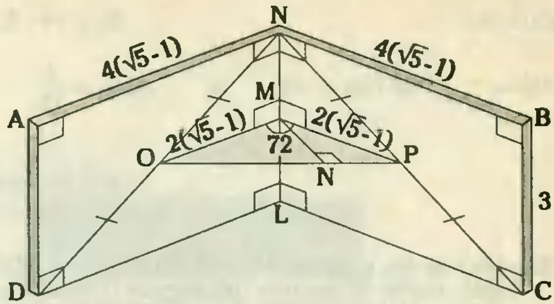
Sea x la medida del diedro formado por los triángulos ABC y APC

Luego en el ⊿ PBH



$\therefore \quad x = 37$

21.- Una hoja de papel de forma rectangular ABCD tiene por dimensiones : AB = 8($\sqrt{5}$ - 1) y BC = 3. Por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se dobla la hoja de papel de manera que el ángulo diedro formado es de 72º, hallar la distancia mínima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une los centros de sus caras.



Resolución.-

En el ⊿ DLN , trazamos $\overline{OM} \perp \overline{NL}$.

Luego : $OM = \dfrac{DL}{2} = 2(\sqrt{5} - 1)$

En el ⊿ NLC, trazamos $\overline{PM} \perp \overline{NL}$.

De donde : $PM = \dfrac{LC}{2} = 2(\sqrt{5} - 1)$

El ∡ OMP es el ángulo plano correspondiente al diedro $\overline{NL}$ de 72°, luego al trazar $\overline{MN} \perp \overline{OP}$, MN es la mínima distancia buscada.

El Δ OMP es el triángulo elemental del pentágono regular de circunradio :$R = 2(\sqrt{5} - 1)$

Y apotema $MN = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$

Luego : $MN = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$\therefore$ $\boxed{MN = 2}$

22.- Una de las caras de un triedro mide 37º, el coseno de la segunda cara es $\dfrac{4}{\sqrt{41}}$ y el coseno de la tercera cara es $\dfrac{4}{\sqrt{41}}$. Calcular la medida del diedro opuesto a esta ultima cara.

Resolución.-

Sea m ∡ ABC $= x$, la medida del diedro pedido

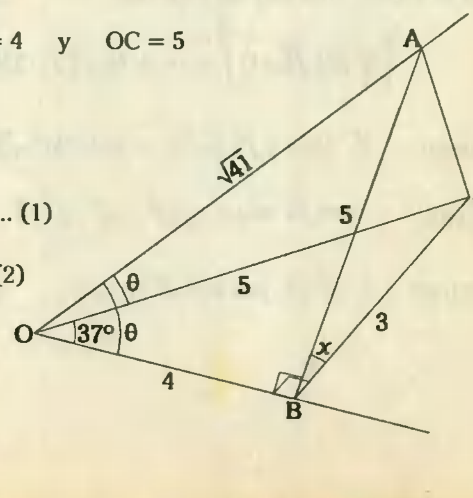
En el ⊿ OBC, haciendo : BC = 3 $\Rightarrow$ OB = 4 y OC = 5

En el ⊿ OBA : $BA = \sqrt{41-16} = 5$

Por ley de Cosenos :

Δ ABC : $(AC)^2 = (5)^2 + 3^2 - 2(3)(5)\cos x$ ... (1)

Δ AOC : $(AC)^2 = (\sqrt{41})^2 + 5^2 - 2(5)\sqrt{41}\cos\theta$... (2)



Sustituyendo (2) en (1) :

$41 + 25 - 10\sqrt{41}\ \dfrac{4}{\sqrt{41}} = 25 + 9 - 30\cos x$

Donde : $26 = 34 - 30\,\text{Cos}\,x$

Ahora : $30\,\text{Cos}\,x = 8 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{4}{15}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = Arc\cos\left(\frac{4}{15}\right)}$$

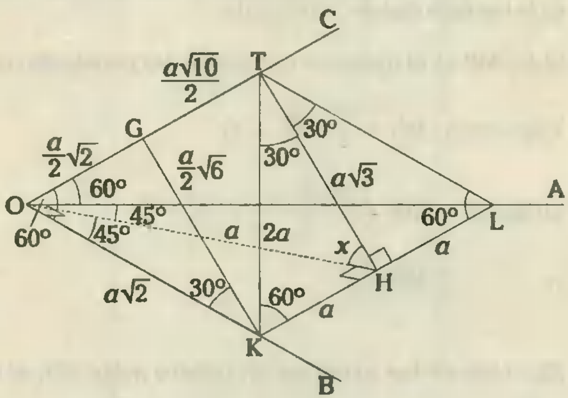
23.- Una de las caras AOB de un triedro O - ABC mide 90º y las otras dos miden 60º cada una. Hallar la medida del ángulo formado por la cara AOB y un plano que corta a las aristas del ángulo triedro determinando segmentos congruentes.

__Resolución__.-

$\Delta\,\text{OTL} \cong \Delta\,\text{OTK} \quad \Rightarrow \quad \text{OK} = \text{OL}$

Trazamos : $\overline{\text{OH}} \perp \overline{\text{KL}}$

Luego : $\overline{\text{TH}} \perp \overline{\text{KL}}$



En el ⊿ KOL de 45° : Si KL = $2a$

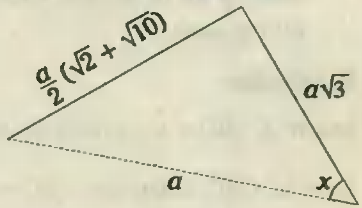
$\Rightarrow \quad \text{OK} = \text{OL} = a\sqrt{2}$

En el ⊿ THK de 30° y 60° : TK = $2a$

En el Δ TKG : $\text{GT} = \sqrt{4a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

Donde : $\text{GT} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

En el Δ OHT ; por Ley de Cosenos



$$\left[\frac{a}{2}\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)\right]^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2(a)(a\sqrt{3})\cos x$$

Luego : $\dfrac{a^2}{2}(6 + 2\sqrt{5}) = a^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{3}\,\cos x$

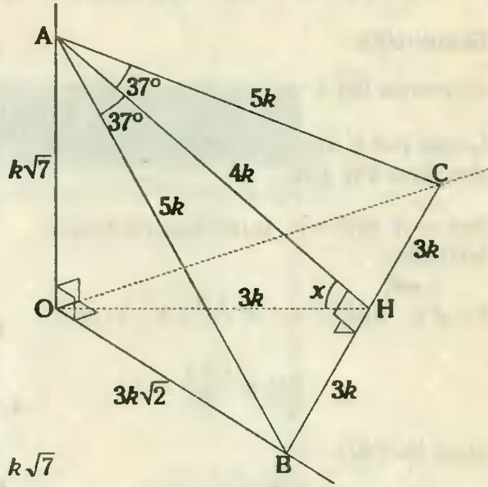
Ahora : $2a^2\sqrt{3}\,\cos x = 4a^2 - 3a^2 - a^2\sqrt{5}$

Donde : $2a^2\sqrt{3}\,\cos x = a^2(1 - \sqrt{5}) \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{x = Arc\cos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)}$$

24.- Sobre las aristas de un triedro trirectángulo de vértice O se ubican los puntos A, B y C de modo que OB = OC y m ∡ BAC = 74º. Calcular la medida del diedro formado por los triángulos BOC y BAC.

Resolución.-



⊾ AOB ≅ ⊾ AOC (LAL) $\Rightarrow$ AB = AC

Trazamos $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ $\Rightarrow$ $\overline{OH} \perp \overline{BC}$

En el ⊾ AMB : Si BH = $3k$

$\Rightarrow$ AH = $4k$ y AB = $5k$

En el ⊾ OHB de 45° :

OH = HB = $3k$ y OB = $3k\sqrt{2}$

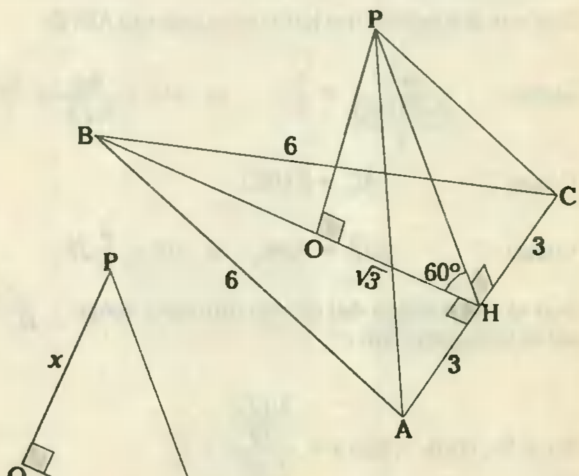
En el ⊾ AOB : $(OA)^2 + (3k\sqrt{2})^2 = (5k)^2$

Donde : $(OA)^2 + 18k^2 = 25k^2$ $\Rightarrow$ OA = $k\sqrt{7}$

En el Δ AOH : $\operatorname{tg} x = \dfrac{k\sqrt{7}}{3k}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = Arc\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)}$

25.- Se tiene un triángulo equilátero ABC de 6m de lado en su centro «O» se levanta una perpendicular $\overline{OP}$ uniendo P con A y C . ¿Qué medida debe tener $\overline{OP}$ para que el diedro $\overline{AC}$ mida 60º?

Resolución.-



En el triángulo equilátero ABC :

$$BH = 3\sqrt{3} \quad y \quad OH = \frac{1}{3}BH$$

Es decir : OH = $\sqrt{3}$

Por el Teorema de las 3 ⊥s $\overline{PH} \perp \overline{AC}$

Luego por dato del problema :

m ∡ OHP = 60°

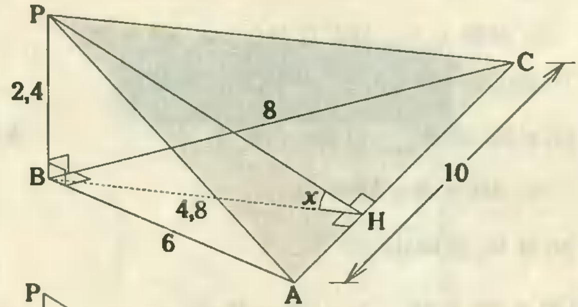
En el ⊾ POH de 30° y 60° :

$$x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 3}$

26.- Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC recto en B, se levanta la perpendicular $\overline{BP}$ al plano dicho triángulo. Calcular la medida del diedro formado por los triángulos ABC y APC, si AB = 6 , BC = 8 y BP = 3

Resolución.-



Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

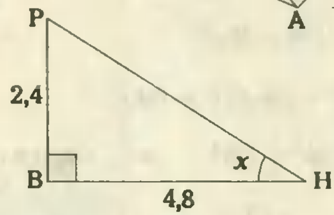
Luego por el Teorema de las 3 perpendiculares $\overline{PH} \perp \overline{AC}$

Sea $m\measuredangle BHP = x$, la medida del diedro buscado.

En el ⊿ ABC : $AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

y $BH = \dfrac{6\times 8}{10} = 4{,}8$

En el ⊿ PBH :



$\therefore \quad x = 26{,}5^\circ$

27.- Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo isósceles ACE cuya base es $\overline{AC}$ de tal forma que las áreas de las regiones que limitan se encuentran en la relación de 5 a 3 y AC = 2 BE. Calcular la medida del ángulo diedro que determinan.

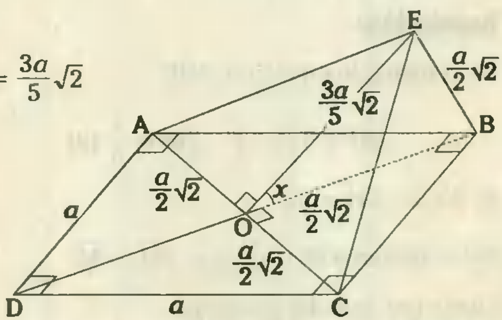
Resolución.-

Sea «a» la longitud del lado del cuadrado ABCD

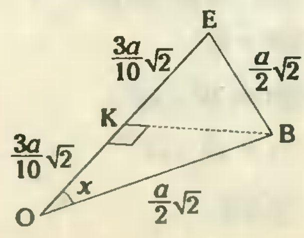
Luego : $\dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{2}(OE)}{2}} = \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad OE = \dfrac{6a}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3a}{5}\sqrt{2}$

Como : $AC = 2\,(BE)$

Luego : $a\sqrt{2} = 2(BE) \quad \Rightarrow \quad BE = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$



Sea «x» la medida del diedro formado, luego en el triángulo OBE :

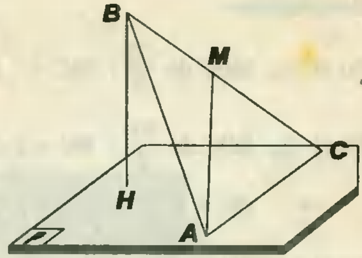


En el ⊿ OKB : $\cos x = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{10}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3}{5}$

$\therefore \quad x = 53^\circ$

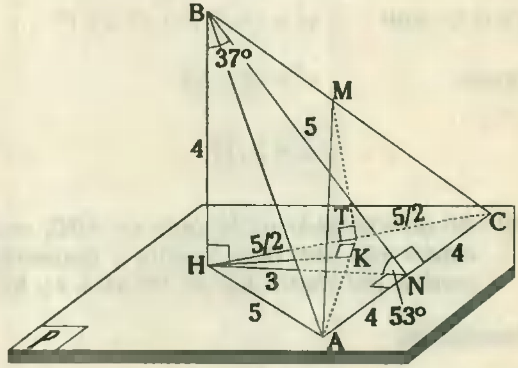
28.- En el gráfico el diedro formado por el plano P y el plano de la región triangular ABC es 53º.

Calcular la mínima distancia entre $\overline{BH}$ y $\overline{AM}$; $\overline{BH} \perp P$. BM = MC , AC = 8 cm . AB = BC y el área de la región ABC es 20 cm²



<u>Resolución</u>.-

Trazamos la altura $\overline{BN}$ del triángulo ABC



Luego : $\dfrac{8\cdot BN}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad BN = 5$

Por el Teorema de las 3 $\perp$s :

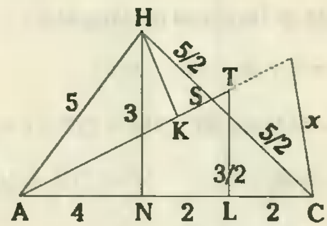
$$\overline{HN} \perp \overline{AC} \text{ y } m\measuredangle HNB = 53^\circ$$

En el $\triangle$ BHN de 37º y 53º : BH = 4 y HN = 3

Proyectamos $\overline{AM}$ y $\overline{BH}$ sobre P obteniendo el segmento $\overline{AT}$ y el punto H respectivamente

Luego $\overline{HK} \perp \overline{AT}$ es la mínima distancia buscada

En el Δ AHC :



En el $\triangle$ ALT : $\quad AT = \sqrt{6^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \dfrac{9}{4}}$

Donde : $\quad AT = \dfrac{3}{2}\sqrt{17}$

$\triangle$ ASC ~ $\triangle$ ALT : $\quad \dfrac{x}{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{\frac{3}{2}\sqrt{17}}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{8}{17}\sqrt{17}}$$

29.- El cuadrado ABCD esta ubicado en un plano por B se traza $\overline{BP}$ perpendicular a dicho plano y M es punto medio de $\overline{AD}$, si la medida del diedro $\overline{MC}$ es 60º y MC = 5 ¿Cuánto dista el punto A de P?

Resolución.-

En el ⊾ MDC de $\frac{53}{2}$: $MC = \quad 5 \quad = \frac{a}{2}\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{5}$

En el ⊾ BQC de $\frac{53}{2}$: $BC = 2\sqrt{5} = QC\sqrt{5}$

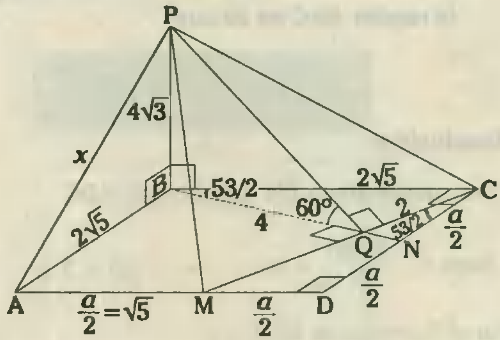
$\Rightarrow \quad QC = 2 \quad y \quad BQ = 2\,QC = 4$

En el ⊾ PBQ de 30° y 60° : $PB = 4\sqrt{3}$

En el ⊾ ABP : $x^2 = (4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{5})^2$

Donde : $x^2 = 48 + 20$

$\therefore \quad \boxed{x = 2\sqrt{17}}$



30.- En un triángulo rectángulo en ABC, recto en B se inscribe una circunferencia de centro «O». Por O se levanta la perpendicular OK al plano de dicho triángulo, si la medida del diedro AC es 45º AB = 3 y BC = 4 . Calcular : BK

Resolución.-

En el ⊾ ABC : $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Aplicando el Teorema de Poncelet :

$3 + 4 = 5 + 2r \quad \Rightarrow \quad r = 1$

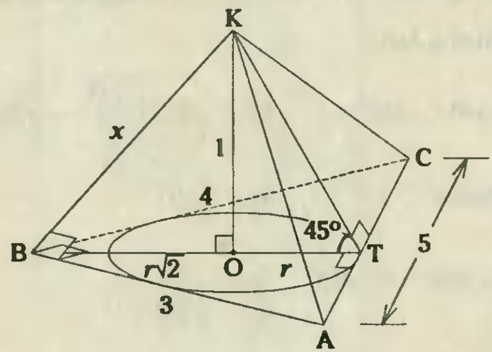
En el ⊾ KOT de 45° $OK = OT = r = 1$

En el ⊾ BOK : $x^2 = (1)^2 + (OB)^2$

Como : $OB = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x^2 = 1 + 2$

$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{3}}$



31.- Se tienen dos planos secantes P y Q. En Q se halla el triángulo A'B'C' que es la proyección del triángulo ABC ubicado en el plano P. Calcular la medida del diedro formado por dichos planos, si :

$m\measuredangle C = 90º$, $m\measuredangle BAC = 30º$, $m\measuredangle A'B'C' = 45º$ y $BC = B'C$

Resolución.

Hacemos BC = a , luego : B'C' = a

Y en el ⊿ BCA de 30° y 60° : AC = $a\sqrt{3}$

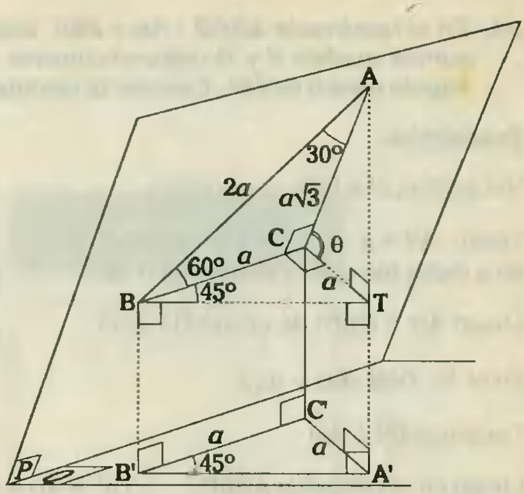
BCC'B' es un rectángulo , luego $\overline{BC} \perp \overline{CC'}$

Observamos que $\overline{BC}$ es perpendicular al trapecio rectángulo CAA'C'

Luego $\overline{BC}$ será perpendicular a $\overline{CT}$ // $\overline{C'A'}$

En el ⊿ BCT de 45° : BC = CT = a

Finalmente en el ⊿CTA



$$\cos\theta = \frac{a}{a\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta : Arc \ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

θ : medida del diedro formado por P y Q : $\therefore \quad \theta = Arc \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

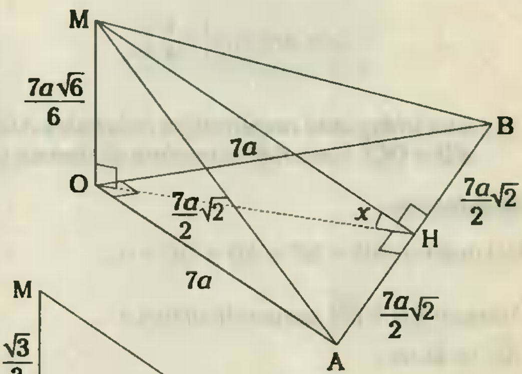
32.- En un triángulo rectángulo isósceles AOB, donde AO = OB = 7a en «O» se levanta una perpendicular al plano de dicho triángulo sobre la cual se toma OM = $\frac{7a\sqrt{6}}{6}$. Al unir M con A y B se determina el plano MAB, hallar la medida del diedro formado por los triángulos AOB y MAB

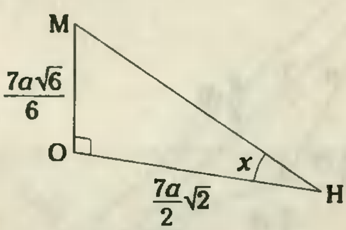
Resolución.-

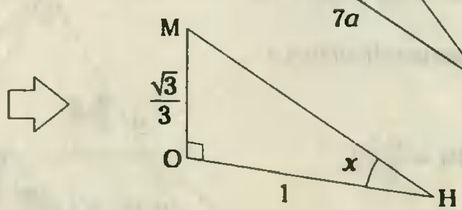
Trazamos $\overline{OH}$ y $\overline{MH}$ perpendiculares a $\overline{AB}$, luego ∡ OHM es el ángulo buscado.

En el ⊿ AOB : $OH = \frac{AB}{2} = \frac{7a\sqrt{2}}{2}$

En el ⊿ MOH :



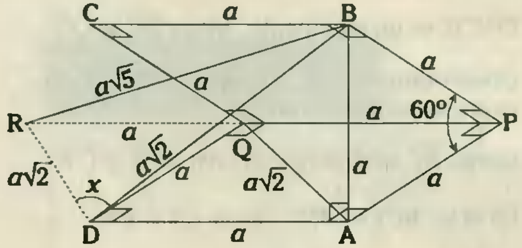




$\therefore \quad x = 30°$

33.- En el rectángulo ABCD : AB = 2BC. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se han tomado sus puntos medios P y Q respectivamente. Se dobla el rectángulo por la línea $\overline{PQ}$ un ángulo diedro de 60º. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{BD}$ y $\overline{AQ}$

Resolución.



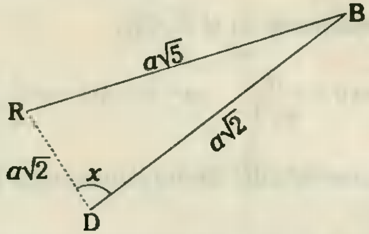
Del gráfico, el Δ BPA es equilátero

Luego : AB = a , además $\overline{PQ}$ es perpendicular a dicho triángulo y ya que $\overline{PQ}$ // AD

Luego $\overline{AD}$ ⊥ Δ BPA de donde $\overline{DA}$ ⊥$\overline{BA}$

En el ⊾ DAB : BD = $a\sqrt{2}$

Trazamos $\overline{DR}$ // $\overline{AQ}$



Luego en el romboide AQRD : QR = AD = a

En el ⊾ RPB : BR = $\sqrt{a^2+(2a)^2}$ = $a\sqrt{5}$

Finalmente en el Δ RDB, siendo «x» la medida buscada

$$(a\sqrt{5})^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 - 2(a\sqrt{2})(a\sqrt{2})\,\text{Cos}\,x \text{ (ley de Cosenos)}$$

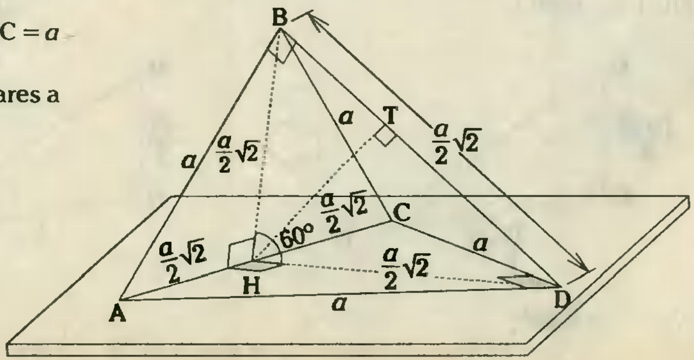
Ahora : $5a^2 = 2a^2 + 2a^2 - 4a^2 \cos x$

Luego : $4a^2\,\text{Cos}\,x = -a^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = Arc\cos\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

34.- Los triángulos rectángulos isósceles ABC y ADC forman un diedro de 60º (AB = BC = AD = DC). Calcular la mínima distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Resolución.-



Del gráfico : AB = BC = AD = DC = a

Al trazar $\overline{BH}$ y $\overline{DH}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ se tiene :

$$BH = DH = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

El diedro formado es :

$$m\measuredangle BHD = 60°$$

Resultando el triángulo BHD equilátero, donde $BD = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

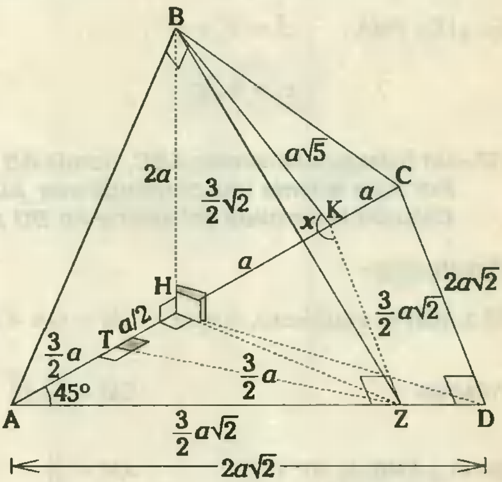
Luego la mínima distancia buscada es HT

En el Δ HBD equilátero $HT = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}$

$$\therefore \qquad \mathbf{HT = \frac{a}{4}\sqrt{6}}$$

35.- Una placa cuadrada ABCD esta doblada por la diagonal $\overline{AC}$ de forma que los planos ABC y ACD forman un diedro recto. Sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto K de modo que AK = 3(CK). Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{KB}$ y $\overline{CD}$

<u>Resolución</u>.-



Hacemos $KC = a \quad \Rightarrow \quad AK = 3a$

Al trazar $\overline{BH}$ y $\overline{DH}$ perpendiculares a $\overline{AC}$

Se tiene : $AH = HC = 2a$ y $HK = a$

Además : $BH = HD = 2a$

y $AB = BC = CD = AD = 2a\sqrt{2}$

Trazamos $\overline{KZ} \,//\, \overline{CD}$, luego ∡ BKZ es el ángulo buscado.

En el ⊿ BHK : $BK = a\sqrt{5}$

⊿ AZK ~ ⊿ ADC : $\dfrac{KZ}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{3a}{4a}$

$$\Rightarrow \qquad KZ = \frac{3a\sqrt{2}}{2} = AZ$$

En el ⊿ HTL : $HZ = \frac{a}{2}\sqrt{10}$

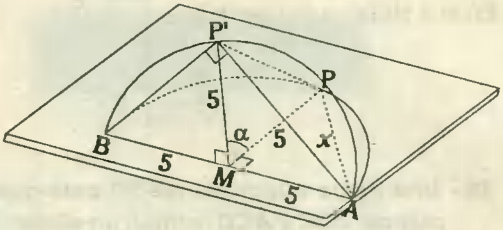
En el ⊿ BHZ : $(BZ)^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{13a^2}{2}$

En el Δ BKZ por ley de Cosenos : $(BZ)^2 = (a\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{2}\right)^2 - 2(a\sqrt{5})\left(\frac{3}{2}a\sqrt{2}\right)\cos x$

Resolviendo : $\boxed{\mathbf{x = Arc\cos\frac{1}{\sqrt{10}}}}$

36.- En una circunferencia de diámetro AB = 10cm, se escoge un punto P sobre dicha circunferencia; si hacemos girar α la circunferencia sobre su diámetro (α < 90) la nueva ubicación de P es P'. Hallar AP para que el perímetro del triángulo PMP' sea máximo, siendo M la proyección de P sobre AB

Resolución.-



El perímetro del Δ PMP' será máximo, si PM = P'M es máximo.

En el ⊿ BP'A : $(P'M)^2 = BM \cdot MA$

Ya que BM + MA = 10 (constante)

Luego : P'M sera máximo si BM . MA lo es y esto ocurre si : BM = MA = 5

Resultando M el centro de la circunferencia y P'M = PM = 5

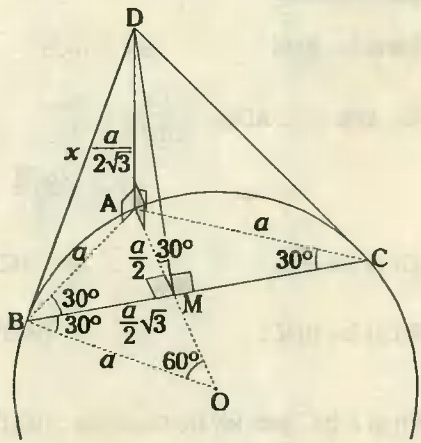
En el ⊿ PMA : $x^2 = 5^2 + 5^2$

$$\therefore \quad \boxed{x = 5\sqrt{2}}$$

37.- Un triángulo isósceles ABC, donde AB = AC = a esta inscrito en un círculo de radio a Por A se levanta una perpendicular AD al plano del triángulo y se une D con B y C. Calcular la longitud del segmento BD para que el diedro BC mide 30º

Resolución.-

El Δ AOB es equilátero, donde : OB = OA = AB = a



Además : $BM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

En el Δ AMB de 30° y 60° : $AM = \frac{a}{2}$

En el ⊿ DAM de 30° y 60° : $DA = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Finalmente en el ⊿ DAB :

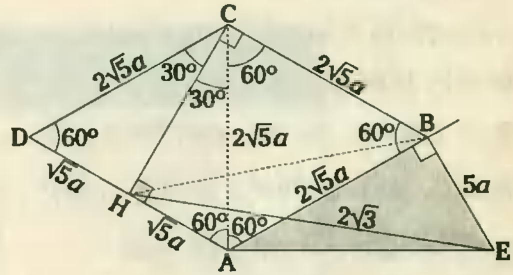
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{12}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}}$$

38.- Un rombo ABCD forma un diedro de 90º con un triángulo rectángulo ABE recto en B; si m∡ ABC = 60º, BE = $\frac{BC\sqrt{5}}{2}$ y EH = $2\sqrt{3}$.

Hallar la distancia entre $\overline{CH}$ y $\overline{BE}$ (H es la proyección de C sobre $\overline{AD}$)

Resolución.-



Para determinar la mínima distancia pedida

Proyectamos $\overline{EB}$ sobre el plano ABCD obteniendo el punto B.

Luego la distancia $\overline{BC}$ es la distancia buscada:

$$BC = 2\sqrt{5}\,a$$

En el Δ HAB por ley de Cosenos :

$$(BH)^2 = (\sqrt{5}\,a)^2 + (2\sqrt{5}\,a)^2 - 2(\sqrt{5}\,a)(2\sqrt{5}\,a)\cos 120^\circ$$

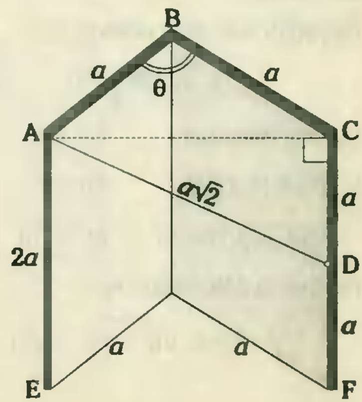
De donde : $(BH)^2 = 35a^2$

En el ⊿ HBE : $(2\sqrt{3})^2 = (BH)^2 + (5a)^2 = 35a^2 + 25a^2 \Rightarrow 12 = 60a^2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \quad BC = 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2 \qquad \therefore \quad \boxed{BC = 2}$$

39.- Se considera una puerta cuyas dimensiones están en la razón de 1 a 2, esta puerta estando cerrada se le abre haciéndola girar «θ» . Si distancia entre el vértice superior del marco de la puerta que queda libre y el cerrojo que esta a la mitad de la altura de la puerta es igual a el ancho de la puerta por la $\sqrt{2}$. Hallar θ

Resolución.-



Sea el ancho de la puerta AB = BC = a ⇒ AE = CF = $2a$

Del gráfico $\overline{CF}$ es perpendicular al plano del Δ ABC

Luego $\overline{CF} \perp \overline{AC}$

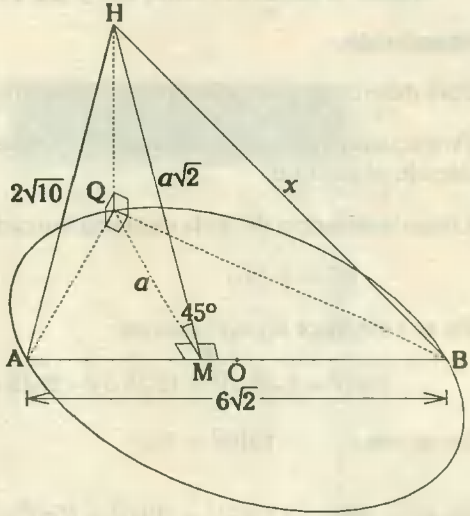
En el ⊿ ACD : $(AC)^2 + a^2 = (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow AC = a$

El Δ ABC tiene sus 3 lados iguales, luego es equilátero

$$\therefore \quad \boxed{\theta = 60^\circ}$$

40.- Una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ($AB = 6\sqrt{2}$) esta en un plano P. Por un punto Q de dicha circunferencia se levanta QH perpendicular a P. Si $AH = 2\sqrt{10}$ y la medida del diedro que forman los triángulos AQB y AHB es 45º, calcular : BH

<u>Resolución</u>.-



En el Δ AHB, por Euclides :

$$x^2 = (2\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2(6\sqrt{2})\,(AM) \quad \ldots (1)$$

En el ⊿ HQM de 45° :

Si : $QM = a \Rightarrow QH = a$ y $HM = a\sqrt{2}$

En el ⊿ AMH : $(2\sqrt{10})^2 = (a\sqrt{2})^2 + (AM)^2$

En el ⊿ AQB : $a^2 = AM\,(6\sqrt{2} - AM)$

Luego : $40 = 2a^2 + AM^2$

Donde : $40 = 2\,[AM\,(6\sqrt{2} - AM)] + AM^2$

Resolviendo : $AM = 2\sqrt{2}$ ... (2)

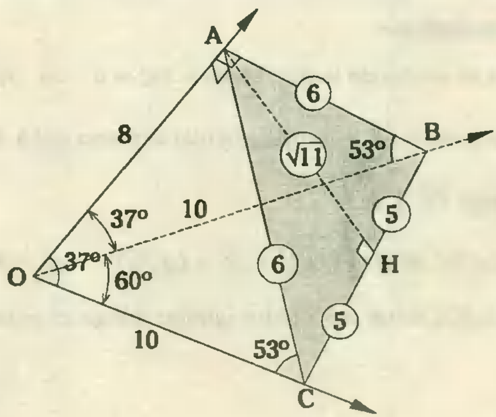
Reemplazando (2) en (1) :

$$x^2 = 40 + 72 - 12\sqrt{2}\,.\,2\sqrt{2} = 64$$

$\therefore \quad \boxed{x = 8}$

41.- Las caras de un triedro miden 60º, 37º y 37º respectivamente, luego se traza un plano secante perpendicular a la arista común de las caras congruentes. Si la distancia del vértice al plano secante es 8 m. Calcular el área de la sección determinada.

<u>Resolución</u>.-



Del gráfico el área pedida es :

$$A_x = \frac{CB\,.\,AH}{2} \quad \ldots (I)$$

⊿ OAC Notable : $AC = 6$

⊿ OAB Notable : $AB = 6$

Δ OBC equilátero : $BC = 10$

Luego : Δ ABC isósceles

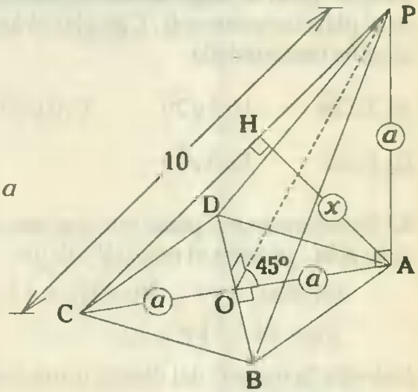
$$AH = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

Reemplazando en I : $A_x = \dfrac{10\ .\ \sqrt{11}}{2}$

$\therefore \qquad A_x = 5\sqrt{11}\ m^2$

42.- Se tiene el rombo ABCD, por "A" se levanta $\overline{AP}$ perpendicular al plano que contiene al rombo, de modo que el diedro formado por los planos PBD y ABCD mide 45º. Además : PC = 10. Hallar la distancia mínima de A a PC

Resolución.-



Del gráfico $m\measuredangle$ AOP = 90º (Por T. de las 3 ⊥s)

Entonces el diedro formado por ABD y ABCD es igual :

$m\measuredangle$ AOP = 45º

Luego : ⊾ OAP isósceles de 45º y 45º $\Rightarrow$ AO = AP = a

⊾ CAP : $a\sqrt{5} = 10 \rightarrow a = 2\sqrt{5}$

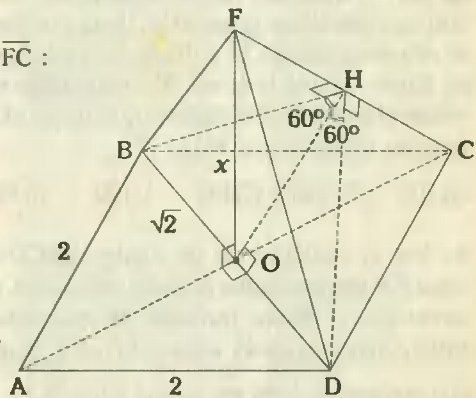
Por R.M : $(2a)\,(a) = 10\,x$

$\Rightarrow \quad (2.2\sqrt{5})\,(2\sqrt{5}) = 10\,x$

$\therefore \qquad x = 4$

43.- Por el centro "O" de un cuadrado ABCD, se traza "OF" perpendicular al plano del cuadrado. Si AB = 2, hallar la longitud de OF para que el diedro formado por los planos BFC y CFD mida 120º.

Resolución.-



En el gráfico se traza $\overline{BH}$ y $\overline{DH}$ perpendiculares a $\overline{FC}$:

$m\measuredangle$ BHD = 120º

Luego : $m\measuredangle$ BHO = $m\measuredangle$ OHD = 60º

En el cuadrado ABCD : BO = $\sqrt{2}$

⊾ BOH Notable : OB = OH$\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ OH = $\sqrt{6}/3$

Luego en el ⊾ FOC (R.M) : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OF^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Reemplazando datos :

$$\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{x^2}$$

$\therefore \qquad x = 1$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Las caras de un ángulo triedro miden 53, 53 y 60 respectivamente. Se trazan un plano secante perpendicular a la arista común a las caras de igual medida. Si la distancia del vértice al plano secante es 6 . Calcular el área de la sección determinada.

A) $2\sqrt{39}$ B) $5\sqrt{39}$ C) $3\sqrt{39}$

D) $4\sqrt{41}$ D) $3\sqrt{59}$

2.- Exteriormente al plano que contiene al triángulo ABC se toma el punto P, tal que :

$PA = AC = 13$, $PB = BC = 15$,

$AB = 14$ y $PC = 12$.

Calcular la medida del diedro formado por las caras APB y ABC.

A) 60° B) 45° C) 37° D) 53° E) 30°

3.- Se tiene un triedro tri-rectángulo A - BCD tal que, el triángulo BCD es equilátero. Una hormiga sale desde el punto B , llega a un punto «P» de la arista CD y desde allí se dirige a un punto «Q» de la arista AD para luego retornar al punto B si el camino que recorrió es mínimo. Calcular $m\measuredangle PQA$.

A) 105 B) 120 C) 135 D) 90 E) 150

4.- Por el vértice A de un rombo ABCD se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano del rombo, de modo que el diedro formado por los planos PBD y ABCD mide 45, además PC = 15 ¿A qué distancia de la recta $\overleftrightarrow{PC}$ está el punto A?

A) 12 B) 8 C) 6 D) 9 E) $2\sqrt{10}$

5.- En un triángulo rectángulo isósceles ABC, $AB = BC = \sqrt{6}$. Por el vértice «B» se levanta la perpendicular $\overline{BM}$ al plano que lo contiene. Calcular «BM» , si el diedro $\overline{AC}$ mide 60°

A) 1 B) 4 C) 3 D) $3\sqrt{3}$ E) 5

6.- El ángulo diedro entre los planos P y Q mide α, en el plano «P» se encuentra un cuadrado de lado «a». Calcular el perímetro de la proyección del cuadrado sobre el plano «Q» tal que sea máximo

A) $2a\sqrt{2}\ \sqrt{1+\cos^2\alpha}$ D) $2a\,\text{tg}\,\alpha$

B) $a\sqrt{2}\ \sqrt{1+\cos^2\alpha}$ E) $2a\sqrt{2}+\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}$

C) $2a\sqrt{2-\text{sen}^2\alpha}$

7.- Un cuadrado ABCD y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se encuentran en planos perpendiculares, en el arco $\widehat{AB}$ se ubica el punto «P» tal que : $m\ \overset{\frown}{PB} = 143$. Calcular la medida del diedro que forman los planos PCD y ABCD.

A) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{3}{10}\right)$ B) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

C) $Arc\ \cos\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)$ D) $Arc\ \text{tg}\left(\dfrac{2}{5}\right)$

E) 53

8.- Dado un cuadrilátero ABCD con diagonales perpendiculares, se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ perpendiculares al plano de dicho cuadrilátero y situados en un mismo semiespacio, sea:

$$\{R\} = \overline{BD} \cap \overline{AC} \quad \text{y} \quad \frac{PA}{AR} = \frac{RC}{CQ} = K$$

Calcular la relación de las áreas de las regiones triangulares ABD y BDC, si el ángulo que forman $\overline{PQ}$ y el plano PBD mide 53.

A) $\dfrac{3}{4K}$ B) $\dfrac{4}{5K}$ C) $\dfrac{2K}{3}$

D) $\dfrac{3}{5K}$ E) $\dfrac{6}{7K}$

9.- En un triángulo ABC, recto en B, AB = 3, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la perpendicular $\overline{BH}$ al plano del triángulo ABC, si el área de la región BHM es $5\sqrt{5}$ y el área de su proyección sobre el plano determinado por BHC es 10. Calcular «AC»

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{5}$

D) $2\sqrt{10}$ E) 15

10.- Dados los rectángulos ABCD y ABEF cuyos planos forman un diedro cuya medida es 120. Calcular la distancia de A al punto medio de $\overline{CF}$; sabiendo que : AB = 4 , BC = 3 y AF = 12

A) $\sqrt{61}/4$ B) $4\sqrt{21}/3$ C) $6\sqrt{37}$

D) $\sqrt{133}/2$ E) $5\sqrt{17}$

11.- Dado un triedro O - ABC , donde las caras AOB y AOC miden 60, sobre $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ se consideran los puntos Q, R y P en ese orden, tal que : OQ = OR = OP y el ángulo PQR es recto. Calcular la medida del diedro $\overline{OA}$.

A) 30 B) 60 C) 45

D) $2\,Arc\,\text{tg}\sqrt{3}$ E) $2\,Arc\,\text{tg}\sqrt{2}$

12.- Las medidas de dos caras de un triedro suman 145°. Calcular la medida de la tercera cara, si las medidas de los diedros de su triedro polar suman 320°

A) 80 B) 70 C) 85 D) 15 E) 75

13.- Sea «O» un punto del espacio y A, B, C y D cuatro vértices consecutivos de un hexágono regular, tal que «O» es equidistante de A, B, C y D y AB = BC = CD = 4 . El plano determinado por el punto medio «M» de $\overline{OA}$ y la recta CD forma con el plano ABCD un diedro que mide 45 e intersecta a $\overline{OB}$ en «N». Calcular el área de la región MNCD

A) $13\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{6}$

D) $6{,}5\sqrt{6}$ E) $8\sqrt{6}$

14.- En una circunferencia de centro «O» y radio «R» se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que forman un ángulo de 45°.Sea H el plano que contiene a dicha circunferencia y «S» un plano que contiene a $\overline{AB}$ y forma un diedro de 60° con «H» . Calcular la distancia desde «C» al plano «S»

A) $R\sqrt{6}/2$ B) $R\sqrt{6}/4$ C) $R\sqrt{3}/2$

D) $R\sqrt{2}/2$ E) $R\sqrt{6}/3$

15.- Dado dos rectángulos ABCD y ABEF congruentes; tal que sus planos forman un diedro que mide 60 y BC = 2AB. Calcular la medida del ángulo que forman las rectas AC y BE.

A) 45 B) 90 C) 30

D) Arc cos $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ E) *Arc* cos $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

16.- Dado el triedro O - ABC , en el cual :

$m\measuredangle\ AOC = \alpha\ , a = c = 45 \text{ y } \cos\alpha = \dfrac{3}{4}$.

Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{OB}$ con el plano que determinan los puntos A, O y C.

A) 37 B) 15 C) 16

D) *Arc* cos $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ E) *Arc* cos$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)$

17.- Sean los semiplanos P y Q las caras de un diedro recto y sean A y B puntos de P y Q, respectivamente, de modo que AB forma con P un ángulo que mide 37 / 2 y con Q un ángulo que mide 53 / 2. Calcular la menor distancia entre AB y la arista de dicho diedro, si $AB=\sqrt{10}$

A) $\sqrt{6}/2$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}/3$

D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}/3$

18.- En un triedro O - ABC los diedros OB y OC miden 60 cada uno y $a=60$. Calcular la medida del ángulo AOC.

A) $Arc\cos(2/7)$ D) $Arc\cos(1/8)$

B) $Arc\cos(\sqrt{21}/7)$ E) $Arc\cos(2/9)$

C) $Arc\cos(1/6)$

19.- Las aristas de un ángulo triedro "O" trirectángulo son intersectadas por un plano en los puntos A , B , C ; luego se traza $\overline{OF}$ perpendicular al plano ABC de modo que :

$$m\measuredangle AOF = m\measuredangle BOF = m\measuredangle COF$$

Calcular el área del triángulo ABC, si $OF=\sqrt{3}$

A) $3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $7\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

E) $5\sqrt{3}$ D) $9\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20.- Se tiene un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8. Se hace girar este triángulo alrededor de su hipotenusa un ángulo de 60°. Hallar la distancia entre las posiciones inicial y final del centro de gravedad del triángulo

A) 3/2 B) 1,6 C) 1 D) 8/3 E) 1,2

21.- A - BCD es un triedro trirectángulo de modo que $AB=AC=AD=6m$. Si O es la proyección de A sobre el plano BCD, entonces la distancia que hay entre O y la arista AB es :

A) $8m$ B) $4\sqrt{3}m$ C) $6\sqrt{2}m$

D) $2\sqrt{2}m$ E) $2\sqrt{3}m$

22.- Los planos P y Q forman un diedro recto, en «P» se toma el punto «A» y en «Q» el punto «B». AB forma con «P» un ángulo de 30° y con «Q» un ángulo de 37°, si $AB=10$. Hallar la distancia entre AB y la arista del diedro

A) 4 B) $\dfrac{5}{6}\sqrt{61}$ C) 5

D) $15\dfrac{\sqrt{61}}{61}$ E) $30\dfrac{\sqrt{61}}{61}$

23.- Se tiene los rectángulos ABCD y ABEF cuyos planos forman un diedro cuya medida es 120 . Calcular la distancia entre los puntos A y M siendo M punto medio de $\overline{CF}$ sabiendo que $AB=4$, $BC=3$ y $AF=12$

A) $\dfrac{\sqrt{133}}{2}$ B) $2\sqrt{133}$ C) $\dfrac{\sqrt{133}}{13}$

D) $3\sqrt{133}$ E) $\dfrac{\sqrt{133}}{33}$

24.- En la figura los rectángulos ABCD y AMND son congruentes tal que: $AB=MP=PN$ Calcular la medida del diedro formado por los rectángulos para que el triángulo PBC sea equilátero.

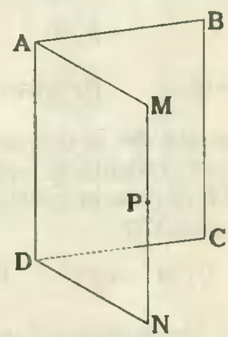
A) 60°

B) 120°

C) 90°

D) 135°

E) 105°



25.- Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC donde los catetos AB y BC miden $3\sqrt{2}m$; en «B» se levanta la perpendicular

$\overline{BE}$ al plano del triángulo que mide $4m$. Calcular la medida del diedro $\overline{AC}$

A) 37° B) 60° C) 53° D) 30° E) 45°

26.- Calcular la medida del ángulo formado por un cateto de un triángulo rectángulo con el plano que contiene a la bisectriz del ángulo recto, si el ángulo diedro formado mide 45°.

A) 30 B) 60 C) 53 D) 45 E) 37

27.- El área de la proyección de un cuadrado sobre un plano que pasando por su diagonal forma un ángulo de 60° con el plano del cuadrado es de $12m^2$. Calcular el área del cuadrado.

A) $12mt^2$ B) $24mt^2$ C) $12\sqrt{2}\,mt^2$

D) $25mt^2$ E) N.A

28.- El lado de un cuadrado ABCD mide $4\sqrt{6}$ por el punto medio «O» de $\overline{AD}$ se levanta $\overline{OE}$ perpendicular al plano del cuadrado de modo que el plano EBD forme un diedro de 60° con el plano del cuadrado. Hallar «OE»

A) 4 B) 2 C) 3 D) 12 E) 6

29.- Por el ortocentro «H» de un triángulo equilátero ABC se traza $\overline{HP}$ perpendicular al plano del triángulo ABC. Se une «P» con «B» y «C» tal que el diedro $\overline{BC}$ mide 45; si BC = 6. Calcular el área de la región triangular APH

A) 2 B) 3 C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) 6

30.- Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero AFD ubicados en planos perpendiculares. Si el lado del cuadrado es 4; calcular el área de la región triangular «MOB» siendo «M» punto medio de $\overline{AF}$ y «O» punto medio de $\overline{AC}$.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{15}$

D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$

31.- Los planos que contienen al cuadrado ABCD y al triángulo equilátero ABM forman un diedro que mide 30; si AB = 4. Calcular «MC»

A) $\sqrt{3}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

32.- Se tiene un rectángulo ABCD y un cuadrado ABEF ubicados en planos perpendiculares, en $\overline{AF}$ se ubica el punto N, tal que $m\measuredangle NEF = 37°$ y en $\overline{DC}$ se ubica el punto medio M. Calcular la medida del ángulo diedro determinado por el plano del rectángulo ABCD y el plano que pasa por M y $\overleftrightarrow{NE}$, si se sabe que 5 AB = 6 BC.

A) $Arc\ \text{tg}\ 3\sqrt{2}$ B) $Arc\ \text{tg}\left[\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right]$

C) $Arc\ \text{tg}\left[\dfrac{3\sqrt{13}}{3}\right]$ D) $Arc\ \text{tg}\left[\dfrac{3\sqrt{13}}{2}\right]$

E) N.A.

33.- Se tiene el hexágono regular ABCDEF y el triángulo equilátero CPD situados en planos perpendicualres. Calcular la medida del ángulo diedro que forman el plano AFP y el plano del hexágono.

A) 53 B) 37 C) 30 D) 26,5 E) 60

34.- Una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y un cuadrado PQRS se hallan en planos perpendiculares (P y Q en $\overline{AB}$) ; tal que AP = QB (Q más cerca a B que a A) si RS = $4m$ y M es punto medio de $\widehat{AB}$. Calcular AB cuando el ángulo que forman $\overline{MS}$ y $\overline{AR}$ mide 90°.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 / 2 E) N.A.

35.- Se tienen los cuadrados ABCD y ADEF que se encuentran en planos perpendiculares. Interiormente al cuadrado ABCD se toma el punto «P» tal que el triángulo APB es equilátero; si AB = $2a$. Calcular la distancia de «P» al centro del cuadrado ADEF

A) $2a$ D) $a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $a\ \ \sqrt{6}/2$ E) $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$

C) $a\sqrt{6-2\sqrt{3}}$

36.- Se tiene las regiones rectangulares ABCD y ABEF los cuales forman al diedro $\overline{AB}$; tal que su medida es 60° ; además AD = 5 ; AF = 4 y CF = 6 . Calcular la mitad del área de la región cuadrangular DCEF

A) $3/2\ \sqrt{35}$ B) $2/3\ \sqrt{33}$ C) $5/2\ \sqrt{33}$

D) $4/5\ \sqrt{33}$ E) $3/5\ \sqrt{35}$

37.- Se tiene una circunferencia de centro «O»; se traza $\overline{OT}$ perpendicular al plano que la contiene si A y B pertenecen a la circunferencia. Calcular la medida del ángulo diedro determinado por el plano ABT y el plano que contiene a la circunferencia.

Si : $m\ \widehat{AB} = 2m\ \measuredangle\ ATB = 120°$

A) 30° D) $Arc\ \text{sen}\left(\frac{1}{5}\right)$

B) 60° E) $Arc\ \csc\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

C) $Arc\ \tan\left(\frac{1}{5}\right)$

38.- Las diagonales de un trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B) son perpendiculares, $\overline{AB}$ es el diámetro de una semicircunferencia que se encuentra en un plano perpendicular al plano del trapecio. Si la suma de los cuadrados de las distancias de un punto arbitrario de la semicirfunferencia hacia los vértices del trapecio es $20m$. Hallar la mediana del trapecio.

A) 5 B) 4 C) $2\sqrt{5}$

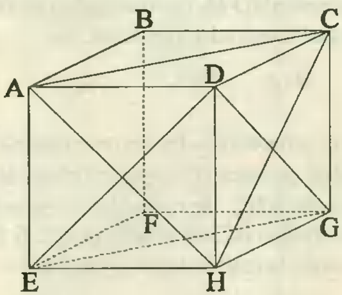
D) $\sqrt{5}$ E) 2

39.- Por el vértice A de un triángulo equilátero ABC (AB = 6) ; se levanta $\overline{AH}$ perpendicular a dicho triángulo, luego se une H con B y C. Hallar la distancia de A al plano HBC si el diedro formado por los triángulos ABC y AHC es 60°.

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 9

D) 4,5 E) $3\sqrt{3}$

40.- En el cubo mostrado, calcular la medida del diedro que forman los planos ACH y EDG



A) $Arc\ \cos\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $Arc\ \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right)$

C) $Arc\ \cos\left(-\frac{1}{3}\right)$ D) $Arc\ \text{sen}\left(-\frac{1}{3}\right)$

E) $Arc\ \text{sen}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

CAP. 25 poliedros regulares

25.1 SUPERFICIE POLIÉDRICA - POLIEDROS

Se llama superficie poliédrica a la superficie no plana determinada por la reunión de cuatro o más re-giones poligonales planas no coplanares de modo que cualquier par de regiones poligonales, llamadas *caras*, tienen en común a lo más un lado llamado *arista*. Un poliedro es la reunión de una superficie poliédrica con todos sus puntos interiores.

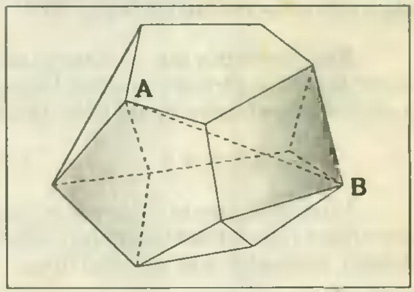


***Fig.* 25.1**

En todo poliedro (*Fig*. 25.1) se distinguen las caras, que son las regiones poligonales que lo limitan; los *vértices* que son vértices de los polígonos; y los lados que son las aristas del poliedro.

Se llama *diagonal de un poliedro* al segmento de recta que une dos vértices situados en caras diferentes como $\overline{AB}$. *Un poliedro* se denomina según su número de caras, siendo el menor de todos el tetraedro de cuatro caras.

25.2 POLIEDROS CONVEXOS Y NO CONVEXOS

Una superficie poliédrica es *convexa* si todos los vértices quedan en el mismo semiespacio respecto del plano que contiene a cada cara. Algo que podrás notar siempre es el hecho de que una superficie convexa no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos (*Fig*. 25.2a).

Una superficie poliédrica se llamara *no convexa*, si los vértices quedan en uno y otro semiespacio respecto al plano que contiene a una cara convenientemente escogida. Una recta secante determina más de dos puntos de intersección (*Fig*. 25.2b).

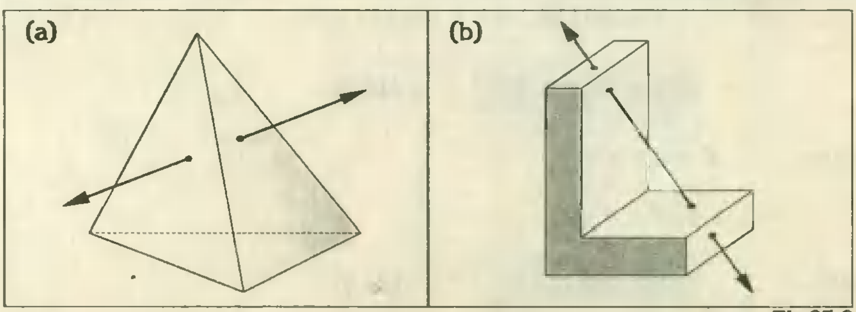


***Fig*.25.2**

25.3 TEOREMA DE EULER

En todo poliedro convexo el número de caras aumentado en el número de vértices es igual al número de aristas mas dos. En efecto, si para un poliedro convexo: C es su número de caras, V es el número de vértices y A el número de aristas, entonces se verifica que :

$$C + V = A + 2 \qquad \text{... (25.1)}$$

Para que puedas comprobar la veracidad de este teorema te propongo el siguiente ejemplo utilizando para ello el hexaedro de la *Fig.* 25.3.

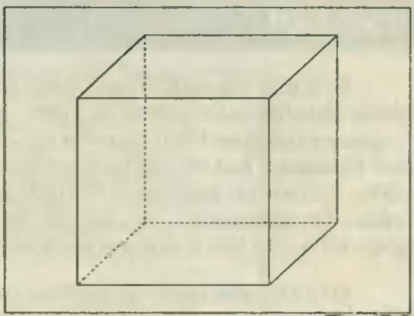


***Fig.* 25.3**

Reconocemos que el número de caras es seis y el número de sus vértices es ocho, luego: $C = 6$ y $V = 8$. Luego según el teorema de Euler debe cumplirse que:

$$A + 2 = 6 + 8 \qquad \Rightarrow \qquad A = 12$$

Lo cual se puede comprobar, ya que en las bases superior e inferior del sólido hay ocho aristas, más las cuatro verticales son en total doce.

25.4 SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE TODAS LAS CARAS DE UN POLIEDRO

Sea un poliedro de "C" caras, las cuales tienen $n_1, n_2, n_3, ..., n_c$ lados, luego la suma de los ángulos de sus caras (S) estará dada por :

$$S = 180\,(n_1 - 2) + 180\,(n_2 - 2) + 180\,(n_3 - 2) + ...180\,(n_c - 2)$$

$$S = 180\,[(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_c) - (2 + 2 + ... + 2)]$$

Se sabe que : $n_1 + n_2 + n_3 ..... + n_c = 2A$ y reconociendo que las veces que se repite el número 2 es C, tendremos :

$$S = 180\,[\,2A - 2C\,] = 180.2\,(A - C)$$

$$\therefore \qquad \boxed{S = 360\,(A - C)} \qquad \text{... (25.2)}$$

Puesto que: $\qquad C + V = A + 2$

$$\Rightarrow \qquad V - 2 = A - C$$

De donde : $\qquad \boxed{S = 360\,(V - 2)} \qquad \text{... (25.3)}$

25.5 POLIEDROS CUYAS CARAS TODAS TIENEN IGUAL NÚMERO DE LADOS, Y EN CADA VÉRTICE CONCURREN UN NÚMERO IGUAL DE ARISTAS

No existen más que cinco poliedros convexos caracterizados por que todas sus caras son de n lados y además por que en cada vértice hay m aristas. En efecto, cada arista pertenece a dos caras y une a dos vértices, así pues :

El duplo del número de aristas $= 2A = n\,C = mV$

Por otro lado : $C + V = A + 2$ (Teorema de Euler)

Luego : $C + \dfrac{nC}{m} = \dfrac{nC}{2} + 2$

En donde al despejar C : $C = \dfrac{4m}{2(m+n) - mn}$ ... (25.4) (Ecuación Diofántica)

25.6 POLIEDROS REGULARES

Se llama *poliedro regular* al poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares congruentes, comprobándose que en cada vértice concurren un número igual de aristas. En todo poliedro regular sus ángulos diedros son congruentes, lo mismo que sus ángulos poliedros.

Todo poliedro regular se puede inscribir y circunscribir a esferas concéntricas, siendo el centro de estas esferas el centro del poliedro regular.

Bajo el análisis realizado en el item anterior podemos afirmar que:

Sólo existen cinco poliedros regulares convexos

A) EL TETRAEDRO REGULAR

Limitado por cuatro triángulos equiláteros unidos de tres en tres. En un tetraedro regular su altura $\overline{AG}$ cae en el centro de su base, o sea en el baricentro indicado por el punto G. Si la longitud de su lado es "a", entonces se cumplirá que :

- *ALTURA* $= h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$
- *APOTEMA* $= \text{OH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$
- *AREA TOTAL* $= a^2\sqrt{3}$
- *VOLUMEN* $= \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$C = 4$, $V = 4$, $A = 6$

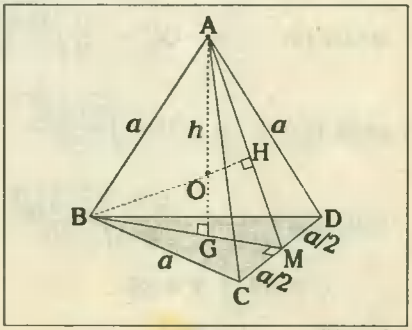


Fig. 25.4

B) EL HEXAEDRO REGULAR O CUBO

Limitado por seis cuadrados unidos de tres en tres.

- *APOTEMA* = OH = $a/2$
- *DIAGONAL* = $D = a\sqrt{3}$
- *AREA TOTAL* = $6\,a^2$
- *VOLUMEN* = a^3

$C =$ 6 , $V =$ 8

$A =$ 12

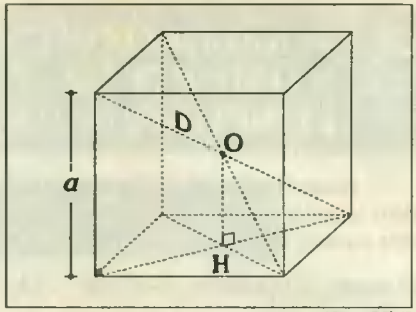


***Fig.* 25.5**

C) EL OCTAEDRO REGULAR

Limitado por ocho triángulos equiláteros unidos de cuatro en cuatro (*Fig*. 25.6)

- *APOTEMA* = OH = $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$
- *DIAGONAL* = $D = a\sqrt{2}$
- *AREA TOTAL* = $2a^2\sqrt{3}$
- *VOLUMEN* = $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$C =$ 8 , $V =$ 6

$A =$ 12

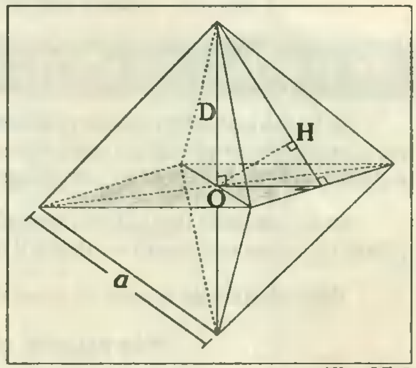


***Fig.* 25.6**

D) EL DODECAEDRO REGULAR

Limitado por doce pentágonos regulares unidos de tres en tres (*Fig*. 25.7).

- *APOTEMA* = OH = $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{10}}$
- *AREA TOTAL* = $15a^2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
- *VOLUMEN* = $\dfrac{5a^3}{2}\sqrt{\dfrac{47+21\sqrt{5}}{10}}$

$C =$ 12 , $V =$ 20

$A =$ 30

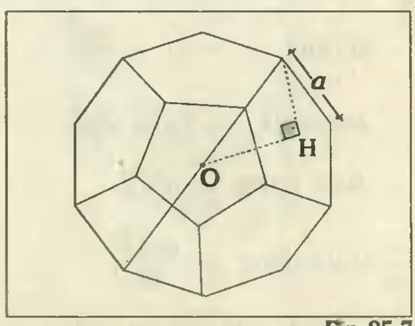


***Fig.* 25.7**

E) EL ICOSAEDRO REGULAR

Limitado por veinte triángulos equiláteros unidos de cinco en cinco.

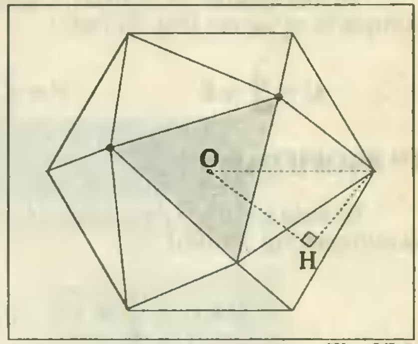


Fig. 25.8

- *APOTEMA* $= OH = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{6}}$

- *AREA TOTAL* $= 5a^2\sqrt{3}$

- *VOLUMEN* $= \dfrac{5a^3}{6}\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

$C = 20$, $V = 12$

$A = 30$

25.7 POLIEDROS CONJUGADOS

Se llaman poliedros conjugados a aquellos en que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro y viceversa. Según el Teorema de Euler deben tener el mismo número de aristas.

Son poliedros conjugados: El octaedro y hexaedro, el icosaedro y el dodecaedro; el tetraedro es conjugado por sí mismo.

Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de un poliedro conjugado al primero.

25.8 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD

En todo poliedro convexo el menor número de aristas que concurren en cada vértice es tres.

2DA PROPIEDAD

El tetraedro es el único poliedro donde se puede inscribir, circunscribir y exinscribir esferas.

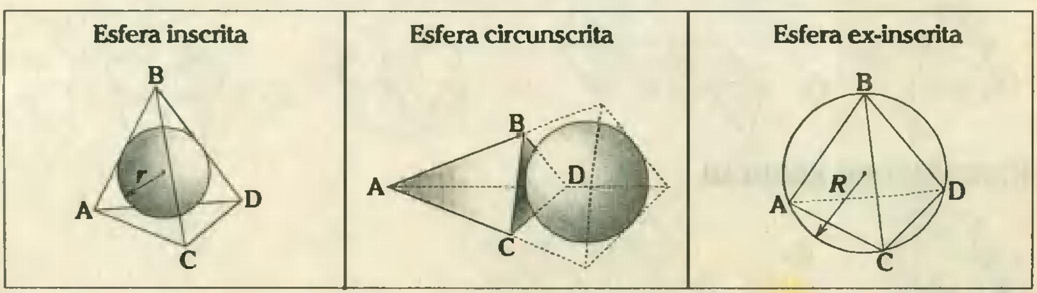


Fig. 25.9

3RA PROPIEDAD

En todo prisma de A aristas, C caras y V vértices se cumple lo siguiente (*Fig.* 25.10a) :

$$C = \frac{A}{3} + 2 \qquad V = \frac{2}{3}A$$

4TA PROPIEDAD

En toda pirámide de A aristas, C caras y V vértices se cumple (*Fig.* 25.10b) :

$$V = C = \frac{A}{2} + 1 \qquad \text{... (25.5)}$$

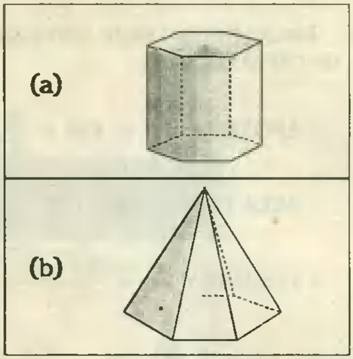


Fig. 25.10

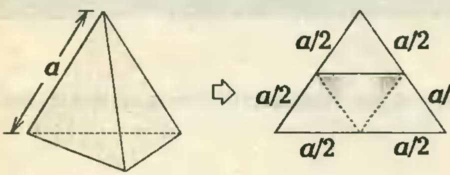
5TA PROPIEDAD

Si un poliedro está formado por k regiones poligonales de n lados y k_1 de n_1 lados, ... hasta k_m de n_m lados, luego su número de arista A estará dado por :

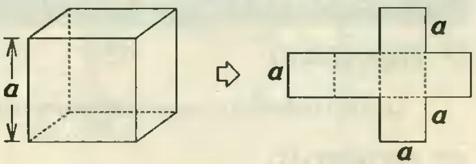
$$A = \frac{kn + k_1.n_1 + k_2n_2 + ... + k_m.n_m}{2} \qquad \text{... (25.6)}$$

25.9. DESAROLLO DE LAS SUPERFICIES LATERALES DE LOS 5 POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

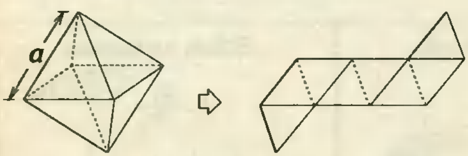
A) TETRAEDRO REGULAR



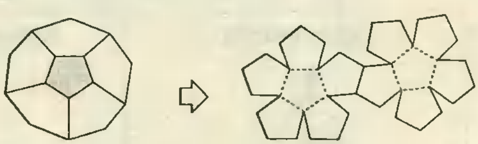
B) HEXAEDRO REGULAR



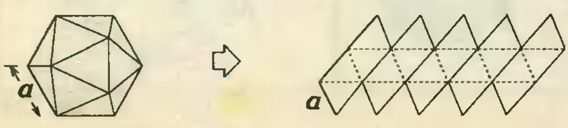
C) OCTAEDRO REGULAR



D) DODECAEDRO REGULAR

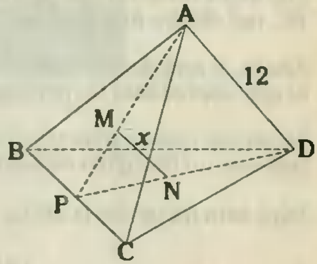


E) ICOSAEDRO REGULAR



EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar la distancia entre los baricentros de dos caras de un tetraedro regular de 12m de arista.



Resolución.-

Tenemos las caras ABC y BCD para ubicar sus baricentros debemos trazar sus medianas $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$.

En estas medianas, ubicamos entonces los baricentros «M» y «N» cumpliéndose como sabemos, las relaciones siguientes :

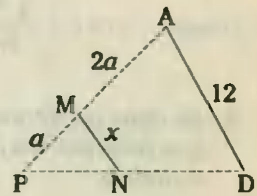
$$AM = 2\,MP \quad y \quad DN = 2\,PN$$

Osea : Si $MP = NP = a \;\Rightarrow\; AM = ON = 2a$

Ahora, observe que se cumple la siguiente proposición : $\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{DN}{NP} = \dfrac{2}{1}$

Lo que significa, que cumple el Teorema de Thales, entonces $\overline{MN} \,//\, \overline{AD}$

Extraemos el triángulo APD para analizarlo mejor y deducimos que los triángulos MNP y APD son semejantes.

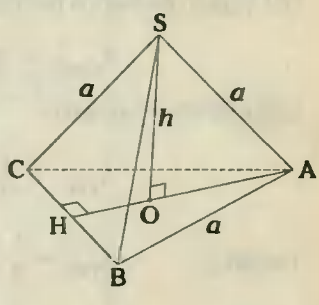


Entonces planteamos una proporción : $\dfrac{3a}{a} = \dfrac{12}{x}$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4m}$$

2.- Hallar la altura de un tetraedro regular de arista «a»

Resolución.-



El ángulo recto formado por la altura con la base nos proporciona un triángulo en el cual podemos aplicar el Teorema de Pitágoras.

Entonces en el ⊿ AOS : $h^2 = a^2 - OA^2 \quad \ldots (1)$

Ahora calcularemos OA, siendo «O» el baricentro del triángulo equilátero ABC :

$$OA = \frac{2}{3}\,AH = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Reemplazando en (1) : $h^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \;\Rightarrow\; h^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3}$

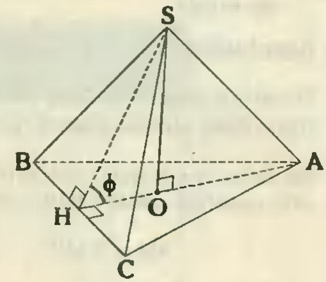
Luego : $h^2 = \dfrac{2a^2}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}$

3.- Calcular el ángulo diedro formado por dos caras de un tetraedro regular.

Resolución.-

Sabemos que para medir un ángulo diedro, debemos tener dos perpendiculares levantadas de un punto de su arista.

Entonces trazamos las perpendiculares $\overline{SH}$ y $\overline{AH}$ a la arista $\overline{BC}$ del diedro formado por las caras ABC y SBC.



Ahora, el ángulo formado por estas dos perpendiculares es el que representa la medida del diedro pedido, osea «ϕ»

Sabemos que es más sencillo, hallar un ángulo, cuando se halla en un triángulo rectángulo.

Para esto trazamos la altura $\overline{SO}$ como muestra la figura.

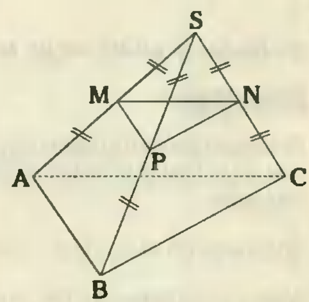
Entonces : $\cos\phi = \dfrac{OH}{SH}$

Puesto que «O» es baricentro del Δ ABC : $OH = \dfrac{1}{3}$ y $AH = \dfrac{1}{3}$ SH

Luego : $\cos\phi = \dfrac{\frac{1}{3}SH}{SH} = \dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\quad$ $\boldsymbol{\phi = Arc\cos\left(\dfrac{1}{3}\right)}$

4.- Se tiene un tetraedro regular S - ABC de 400m² de área total, se le corta con un plano que pasa por los puntos medios de tres aristas laterales. Hallar el área total del tronco formado.

Resolución.-



Del gráfico podemos plantear :

$$S_{tronco} = S_{ABC} + S_{PMN} + 3\,S_{AMPB} \quad ...\ (1)$$

Calculemos estas áreas :

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}\ S_{tetraedro} = \frac{1}{4}\ (400) = 100\,m^2$$

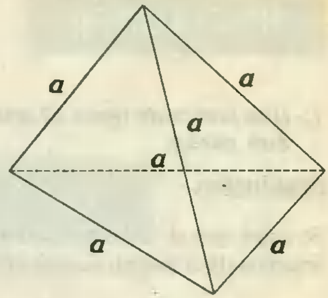
Luego : $S_{PMN} = \dfrac{1}{4}\,S_{ABC} = \dfrac{1}{4}\ (100) = 25m^2$

Ahora : $S_{AMPB} = S_{ABS} - S_{MPS} = 100m^2 - 25m^2 = 75m^2$

Reemplazando en (1) : $S_{tronco} = 100\,m^2 + 25m^2 + 3(75)$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S_{tronco} = 350m^2}$$

5.- Calcular el área total del tetraedro regular de arista «a»



Resolución.-

El tetraedro regular esta formado por cuatro triángulos equiláteros de área igual a : $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Entonces el área total del tetraedro regular será :

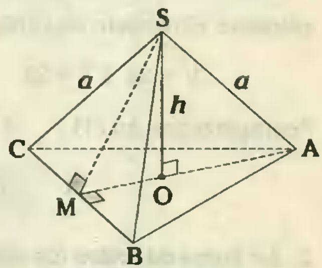
$$S_T = 4\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{S_T = a^2\sqrt{3}}$$

6.- Hallar el área de la sección originada por un plano de simetría que pasa por una de las aristas de un tetraedro regular de arista «a»

Resolución.-

En el gráfico, AMS es la sección obtenida, puesto que divide al tetraedro en dos partes iguales

Entonces : $S_{AMS} = \dfrac{1}{2} \quad AM \cdot h$



Siendo «h» la altura del tetraedro regular .

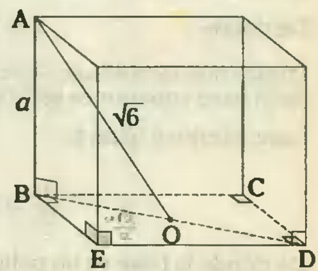
Luego : $S_{AMS} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{S_{AMS} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}}$$

7.- Hallar la arista del cubo donde la distancia del vértice al centro de la cara opuesta es $\sqrt{6}$ m.

Resolución.-

Sea «A» el vértice mencionado y BCDE la cara opuesta, para localizar el centro de esta cara se traza sus dos diagonales y donde se corten se halla este centro «O»



Entonces : $AO = \sqrt{6}$

Nótese que $\overline{AB}$ es perpendicular al cuadrado BCDE, entonces también será perpendicular a $\overline{BD}$

En el ⊿ AOB (aplicamos el Teorema de Pitágoras) :

$$(\sqrt{6})^2 = a^2 + BD^2 \qquad \Rightarrow \qquad 6 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Donde : $3a^2 = 12 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{a = 2m}$

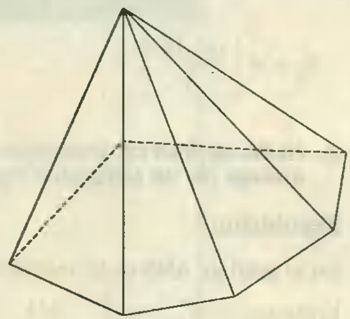
$6 = a^2 + \frac{2a^2}{4}$
$24 = 4a^2 + 2a^2$
$24 = 6a^2$
$4 = a^2$
$a = 2$

MISCELÁNEA

1.- *Una pirámide tiene 42 aristas. Calcular la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras.*

Resolución.-

Se sabe que si "S" representa la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras entonces :



$S = 360\,(V - 2)$ ... (1)

Por condición del problema su número de aristas es 42 , pero el número de aristas básicas es la mitad del número total de aristas e igual a $\frac{42}{2} = 21$.

Esto quiere decir que su base es un polígono de 21 vértices,

entonces el número de vértices "V" de la pirámide sera :

$V = 21 + 1 = 22.$

Reemplazando en (1) : $S = 360\,(22 - 2)$

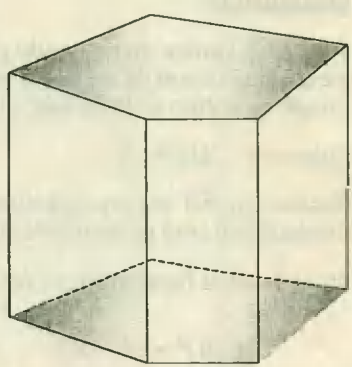
$\therefore \quad \boxed{S = 7200}$

2.- *La suma de todos los ángulos de las caras de un prisma es 20,880. Calcular su número de aristas.*

Resolución.-

Se conoce que : $20880 = 360\,(V - 2)$

De donde : $V = 60$



Puesto que también se sabe que el número de vértices de la base superior es igual al número de vértices de la base inferior e igual a :

$$\frac{60}{2} = 30$$

De donde la base es un polígono de 30 lados, entonces su número de aristas A será :

$A = 3(30)$

$\therefore \quad \boxed{A = 90}$

3.- Calcular el número de aristas de aquel poliedro, cuyo número de caras es igual al número de vértices, si además la suma de los ángulos de sus caras es 2520º.

Resolución.-

Se sabe que : $S = 360\,(V - 2)$

Reemplazando : $2520 = 360\,(V - 2) \Rightarrow V = 9$ y $C = 9$

Por el Teorema de Euler : $C + V = A + 2$

Donde : $9 + 9 = A + 2 \quad \therefore \quad \mathbf{A = 16}$

4.- Calcular el volumen del poliedro formado al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular de altura $2\sqrt{6}$.

Resolución.-

"El poliedro formado al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular es un octaedro regular".

Si su volumen es V y su arista "b", entonces :

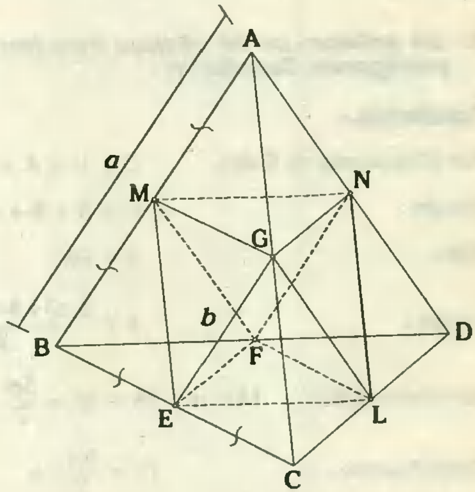
$$V = \frac{b^3\sqrt{2}}{3} \quad \ldots (1)$$

Por dato del problema la altura del tetraedro regular de arista "a" mide $2\sqrt{6}$.

Luego : $2\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = 6$

En el Δ BAC : $EG = b = \dfrac{a}{2} = 3$

En (1) : $V = \dfrac{3^3\sqrt{2}}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{V = 9\sqrt{2}}$



5.- ¿Qué relación existe entre las áreas de dos hexaedros regulares si se sabe que la arista de uno es igual a la diagonal del otro ?

Resolución.-

Sean A_1 y A_2 las áreas de dos hexaedros regulares de aristas a_1 y a_2 respectivamente.

Luego : $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6a_1^2}{6a_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

Pero por dato del problema : $a_2 = a_1\sqrt{3}$

Luego : $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1^2}{(a_1\sqrt{3})^2} = \frac{a_1^2}{3a_1^2} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{3}}$$

6.- El número de caras más el número de vértices y más el número de aristas de un poliedro convexo es 98. Calcular el número de caras si la suma de las caras de todos sus ángulos es 7200.

Resolución.-

Se sabe que : $S = 360\,(V - 2)$

Reemplazando : $7200 = 360\,(V - 2)$, donde : $V = 22$

Además por Euler : $C + 22 = A + 2 \Rightarrow A = C + 20$

Como : $C + V + A = 98$

Reemplazando : $C + 22 + C + 20 = 98$

Ahora : $2C = 56 \quad \therefore \quad \boxed{C = 28}$

7.- Un poliedro de 28 vértices esta formado por 6 triángulos, 8 cuadriláteros y "n" pentágonos. Calcular "n".

Resolución.-

Por el Teorema de Euler : $C + V = A + 2$

Donde : $C = 8 + 6 + n = 14 + n$

Dato : $V = 28$

Luego : $A = \dfrac{6\times3+8\times4+n.5}{2} = 25 + \dfrac{5n}{2}$

Reemplazando : $14 + n + 28 = 25 + \dfrac{5n}{2} + 2$

Simplificando : $15 = \dfrac{5n}{2} - n \quad \therefore \quad \boxed{n = 10}$

8.- Calcular el área total de un tetraedro regular, cuyo centro dista de una de sus aristas $\sqrt{6}$ u.

Resolución.-

El centro "O" del tetraedro regular PABC es el punto donde concurren sus alturas.

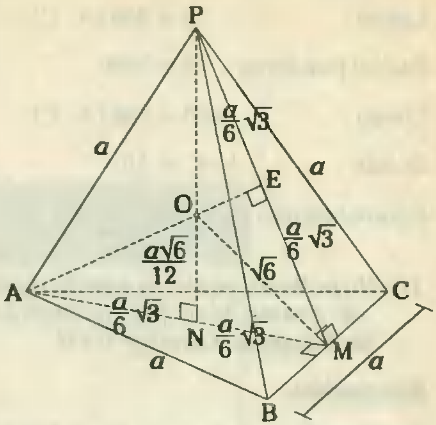
Para las caras BPC y BAC , E y N son baricentros respectivamente.

Luego : $PE = 2\,EM = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right) = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$

Ahora : $AN = 2\,MN = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right) = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$

Por la semejanza de los triángulos PNM y PEO, se tiene : $\dfrac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{OE} = \dfrac{PN}{\frac{a}{3}\sqrt{3}}$

Puesto que : $\quad PN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



Luego : $\quad OE = \dfrac{\frac{a}{6}\sqrt{3}.\frac{a}{3}\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12} = ON$

En el ⊿ ONM : $\quad \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 48$$

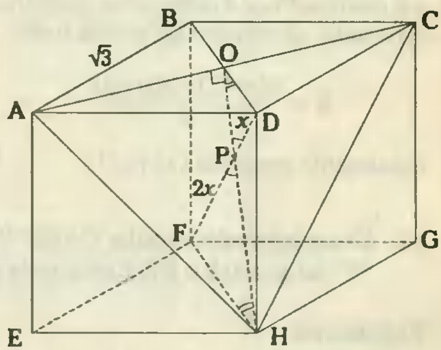
Nos piden el área total : $\quad A_t = a^2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \mathbf{A_t = 48\sqrt{3}}$$

9.- En un hexaedro regular ABCDEFGH, la diagonal $\overline{DF}$ intersecta al plano ACH en P, si $AB = \sqrt{3}$; calcular "PD".

<u>Resolución</u>.-

La intersección "P" entre $\overline{DF}$ y el Δ ACH se obtiene al intersectar $\overline{OH}$ y $\overline{DF}$'. Por la semejanza de los triángulos OPD y FPH, se tiene :



$$\frac{x}{PF} = \frac{OD}{FH}$$

Puesto que :FH = 2 OD $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{PF} = \dfrac{OD}{2OD}$

De donde PF = $2x$, ya que $\overline{DF}$ es diagonal del cubo se tiene : DF = AB $\sqrt{3}$

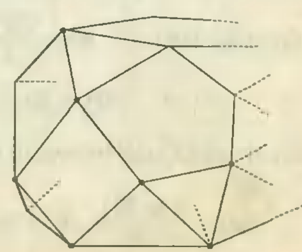
Ahora : $\quad 3x = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \quad \therefore \quad \mathbf{x = 1}$

Nota.- Del gráfico se deduce que la diagonal del cubo $\overline{DF}$ resulta ser perpendicular al plano del Δ ABC.

10.- La suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo es 3600 . Si el número de aristas excede en 3 al doble del número de caras. Calcular el número de caras.

<u>Resolución</u>.-

Sean A el número de aristas y C el número de caras del poliedro. Luego de acuerdo al enunciado del problema :



$$A = 2C + 3 \qquad ... (1)$$

Sea «S» la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras del poliedro

Luego : $S = 360\,(A - C)$

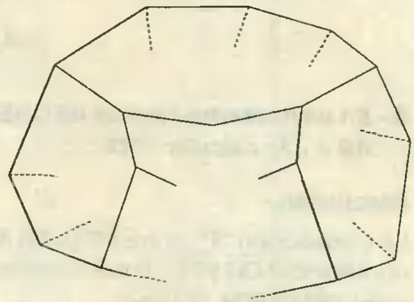
Para el problema : $S = 3600$

Luego : $3600 = 360\,(A - C)$

Donde : $A - C = 10$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $2C + 3 - C = 10$ $\therefore$ **$C = 7$**

11.- Un poliedro convexo esta limitado por «n» hexágonos y «n» octógonos, además tiene «A» aristas. Si se disminuye en 2 hexágonos y 3 octógonos se forma un nuevo poliedro de B aristas. Calcular A - B



<u>Resolución</u>.-

En primer lugar, calculemos su número de aristas A :

$$A = \frac{6n+8n}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 7n \;...\; (1)$$

Al disminuir en 2 hexágonos quedarán : $n - 2$
y si disminuimos 3 octógonos quedaran : $n - 3$
de donde su número de aristas será :

$$B = \frac{6(n-2)+8(n-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 7n - 18 \;...\; (2)$$

Finalmente restando (1) y (2) : $A - B = 7n - (7n - 18)$ $\therefore$ **$A - B = 18$**

12.- En un tetraedro regular OABC "G" es el centro de la cara ABC. Se prolonga $\overline{GB}$ hasta "T" tal que GB = BT. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{OT}$ y $\overline{BC}$.

<u>Resolución</u>.-

Trazamos por "T" una paralela a $\overline{BC}$ la cual corta en H a la prolongación de $\overline{AG}$, luego el $\measuredangle$ OTH es el ángulo buscado.

Hacemos : $GN = a \quad \Rightarrow \quad AG = 2a$

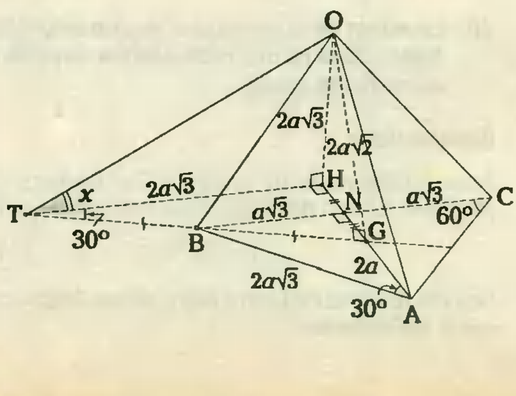
Ahora : $BN = NC = a\sqrt{3}$

En el $\triangle$ THG : $BN = \dfrac{TH}{2}$ (base media)

$$\Rightarrow \quad TH = 2a\sqrt{3}$$

La altura $\overline{OG}$ del tetraedro regular sera :

$$OG = \frac{(2a\sqrt{3})}{3}\sqrt{6} = 2a\sqrt{2}$$



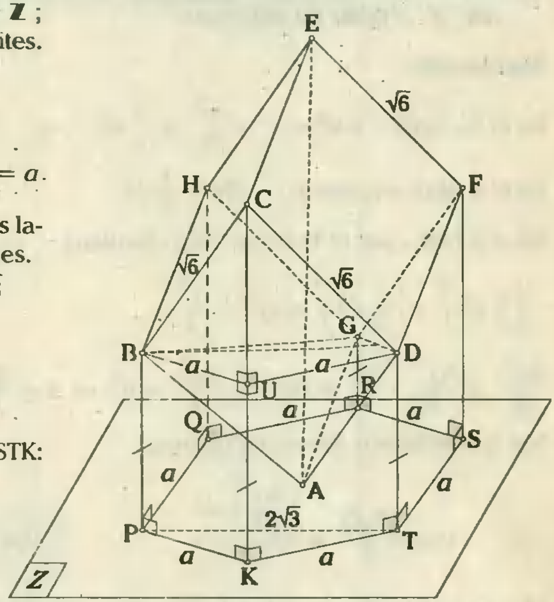
En el ⊾ OGH : $OH^2 = (2a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 \Rightarrow OH = 2a\sqrt{3}$

En el ⊾ THO : $TH = HO = 2a\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 45}$

13.- En un hexaedro regular ABCDEFGH. Calcular el área de la proyección de dicho sólido sobre un plano perpendicular a la diagonal $\overline{EA}$ ($AB = \sqrt{6}$).

Resolución.-

De acuerdo a la nota del problema anterior se tiene que $\overline{EA}$ es perpendicular al Δ BGD, entonces se deduce que Δ BGD es paralelo al plano $\mathbb{Z}$; luego las proyectantes $\overline{BP}$ y $\overline{DT}$ son congruentes. Trazamos $\overline{BU}$ y $\overline{DU}$ perpendiculares a $\overline{CK}$.



⊾ BUC ≅ ⊾ CUD

$\Rightarrow \quad BU = UD = a \quad$ y $\quad PK = KT = a$.

Análogamente demostraremos que los otros lados del hexágono regular PQRSTK son iguales.

Además : $\quad BD = PT = \sqrt{6}\ .\ \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

En el Δ PKT : $\quad PT = a\sqrt{3}$

Luego : $\quad 2\sqrt{3} = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

Finalmente si A_x es el área del hexágono PQRSTK:

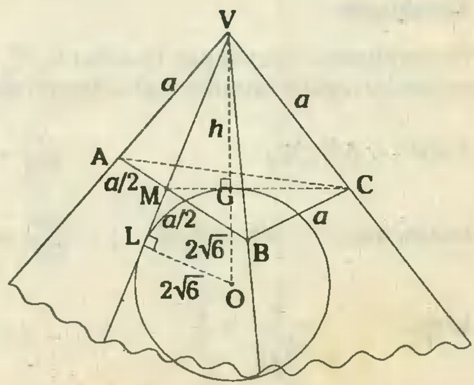
$$A_x = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}(2)^2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A_x = 6\sqrt{3}}$$

14.- Calcular el área total de un tetraedro regular, sabiendo que el radio de la esfera exinscrita mide $2\sqrt{6}$.

Resolución.-

Del gráfico observamos que :



$$⊾\ VLO \sim ⊾\ VGM \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{6}}{MG} = \frac{h + 2\sqrt{6}}{VM}$$

Puesto que : $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $MG = \dfrac{1}{3}\ MC = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)$

Donde : $\quad MG = \dfrac{a}{6}\sqrt{3}$ y $VM = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

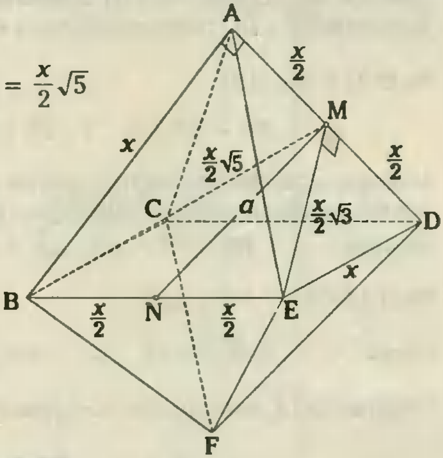
Luego : $\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{a}{6}\sqrt{3}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}+2\sqrt{6}}{\dfrac{a}{2}\sqrt{3}} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6} \Rightarrow 4 = \dfrac{a}{3} \Rightarrow a = 12$

Luego el área total A del tetraedro regular sera : $A = a^2\sqrt{3} = 12^2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \boxed{A = 144\sqrt{3}}$$

15.- En un octaedro regular ABCDEF si la distancia entre los puntos medios de $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ es "a" . Hallar su volumen.

<ins>**Resolución**</ins>.-



En el ⊿ BAM : $BM^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5}{4}x^2 \Rightarrow BM = \dfrac{x}{2}\sqrt{5}$

En el Δ AED, equilátero : $EM = \dfrac{x}{2}\sqrt{3}$

En el Δ BME , por el Teorema de la Mediana :

$$\left(\frac{x}{2}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 2a^2 + \frac{x^2}{2}$$

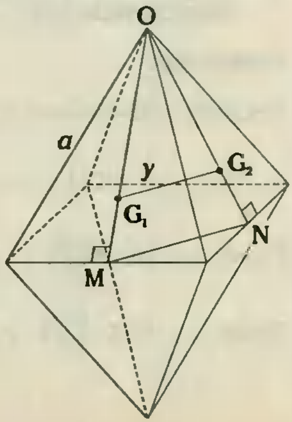
$$\frac{5x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 2a^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = a^2 \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Sea V el volumen del octaedro, luego :

$$V = \frac{x^3\sqrt{2}}{3} = \frac{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \quad \boxed{V = \frac{8a^3\sqrt{6}}{27}}$$

16.- La arista de un octaedro regular mide "a". Calcular la arista del octaedro regular inscrito en el hexaedro regular que a su vez esta inscrito en el primer octaedro regular.

<ins>**Resolución**</ins>.-



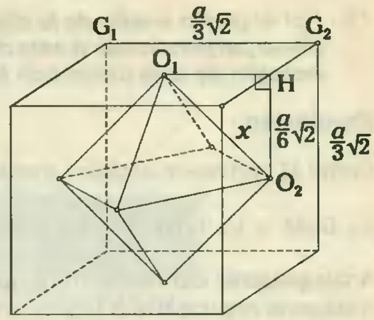
Primeramente calculamos la arista $G_1 G_2 = y$, del hexaedro regular inscrito en el octaedro dado.

$\Delta MON \sim \Delta G_1OG_2$: $\dfrac{y}{MN} = \dfrac{OG_2}{ON}$

Puesto que : $MN = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ y $\dfrac{OG_2}{ON} = \dfrac{2}{3}$

Luego : $\dfrac{y}{\dfrac{a}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{a}{3}\sqrt{2}$

Finalmente consideramos que sea $O_1O_2 = x$ la arista del octaedro regular inscrito en el hexaedro.



En el ⊿ O_1HO_2:

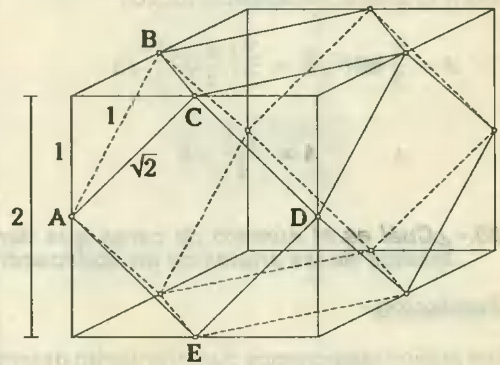
$$x = \frac{a}{6}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\therefore \qquad x = \frac{a}{3}$$

17.- Calcular el área total del poliedro formado al unir los puntos medios de las aristas de un hexaedro regular de arista 2.

<u>Resolución</u>.-

El poliedro formado tiene 14 caras 8 de forma triangular como el Δ ABC de lado $\sqrt{2}$ y 6 de forma cuadrada.



Como el □ ACDE de lado $\sqrt{2}$, luego su área total A será :

$$A = 8\,\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} + 6(\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; A = 4\sqrt{3} + 12$$

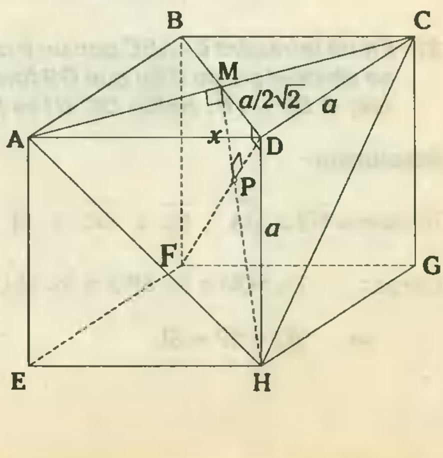
$$\therefore \qquad A = 4(\sqrt{3} + 3)$$

18.- Dado un cubo ABCD - E FGH, se pide encontrar la mínima distancia entre las rectas alabeadas $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$. (Arista = a)

<u>Resolución</u>.-

Trazamos por $\overline{AC}$ el plano AHC el cual es perpendicular a $\overline{FD}$ en P (ver problema 5).

Luego $\overline{PM} \perp \overline{AC}$ es la mínima distancia pedida.



En el ⊿ MDH : $\quad MH^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + a^2$

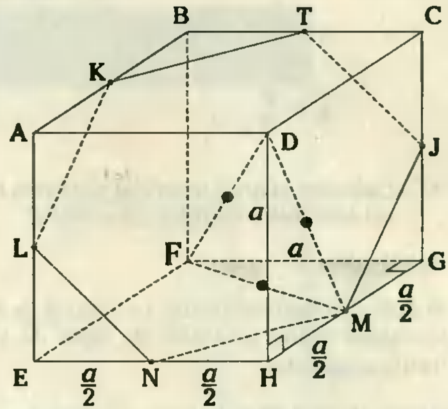
Donde : $\quad MH^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 \quad \Rightarrow \quad MH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Luego : $\quad MP = x = \dfrac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} \quad \therefore \quad x = \frac{a}{6}\sqrt{6}$

19.- *Por el punto medio de la diagonal de un cubo cuya arista mide "a" se ha trazado un plano perpendicular a esta diagonal. Calcular el área del polígono que se obtiene en la sección de este plano con las caras del cubo.*

Resolución.-

Como M pertenece al plano mediatriz de $\overline{FD}$, se tiene MD = MF



⊾ DHM ≅ ⊾ FGM (4^to caso) ⇒ $HM = MG = \frac{a}{2}$

Análogamente demostraremos que los vértices del hexágono regular MNLKTJ son puntos medios.

En el ⊾ NHM : $MN = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

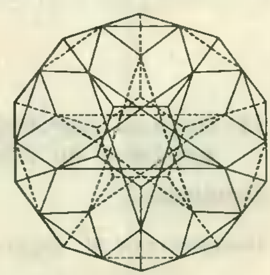
Sea A el área del hexágono, luego :

$$A = \frac{3}{2} MN^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad A = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$$

20.- *¿Cuál es el número de caras que tiene el sólido que se forma al unir los puntos medios de las aristas de un dodecaedro regular?*

Resolución.-



Del gráfico observamos que el poliedro determinado al unir los puntos medios de las aristas del dodecaedro regular posee 12 caras pentagonales y 20 triangulares.

$$\Rightarrow \quad C = 12 + 20 = 32$$

$$\therefore \quad C = 32$$

21.- *En un tetraedro 0 - ABC con un triedro trirectángulo O, sobre el triángulo regular ABC se ubica el punto S tal que OS forma con las aristas OA, OB y OC ángulos congruentes; si OH = $\sqrt{6}$. Hallar OS. (H es la proyección de S sobre el △ OBC)*

Resolución.-

Trazamos $\overline{SQ} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overline{SL} \perp \overrightarrow{OC}$ y $\overline{SP} \perp \overrightarrow{OB}$

Luego : ⊾ SQO ≅ ⊾ SPO ≅ ⊾ SLO

$$\Rightarrow \quad SQ = SP = SL$$

Al trazar $\overline{SH} \perp \Delta$ OBC, Se tiene :

$\triangle$ SHP $\cong$ $\triangle$ SHL $\Rightarrow$ HL = HP

De donde $\overline{OH}$ es bisectriz del $\measuredangle$ BOC

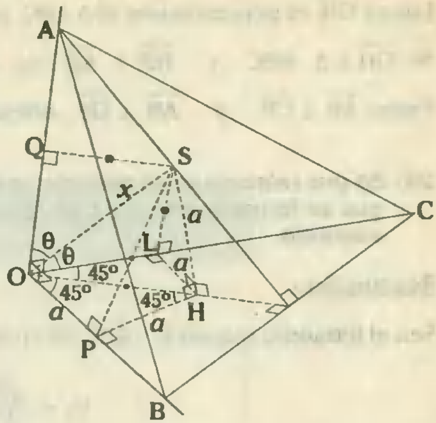
Sea : HP = a $\Rightarrow$ OH $= a\sqrt{2}$ = SP = SQ = SL

En el $\triangle$ OHS : $x = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$

Puesto que : OH $= \sqrt{6} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $a = \sqrt{3}$

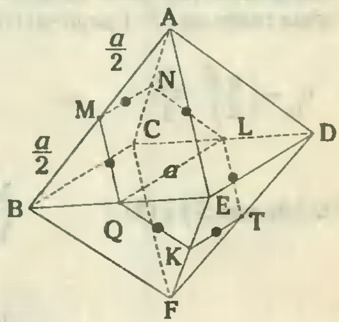
$\therefore$ $\boldsymbol{x = 3}$



22.- En un octaedro regular de arista "a" por el punto medio de una de sus aristas se traza un plano paralelo a una de sus caras. Hallar el área de la sección determinada.

Resolución.-

Sea el hexágono regular MNLTKQ, la sección producida al trazar por M punto medio de $\overline{AB}$ un plano paralelo al Δ AED. Si su área es A.



Luego : $A = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A = \dfrac{3a^2}{8}\sqrt{3}}$

23.- En un tetraedro O - ABC, las aristas opuestas $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$ así como las aristas $\overline{OB}$ y $\overline{AC}$ son ortogonales. Demostrar que las otras dos aristas opuestas $\overline{AB}$ y $\overline{OC}$ también son ortogonales.

Resolución.-

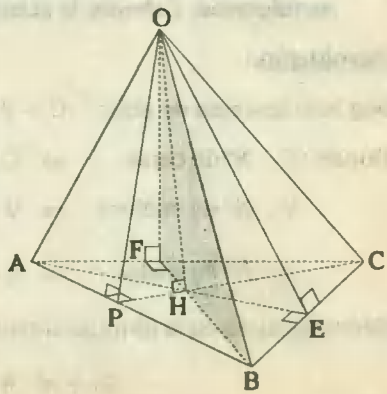
En la base ABC del tetraedro, trazamos las alturas $\overline{AE}$, BF y CP

Luego $\overline{BC}$ es perpendicular al plano del Δ AOE

ya que $\overline{BC} \perp \overline{OA}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AE}$

Así mismo $\overline{AC}$ es perpendicular al Δ BOF pues $\overline{AC} \perp$ BF y AC $\perp$ OB

La intersección de los dos planos AOE y BOF : $\overline{OH}$ es perpendicular a BC y AC



Luego $\overline{OH}$ es perpendicular al Δ ABC, por el Teorema de las Tres Perpendiculares.

Si $\overline{OH} \perp \Delta\ ABC$ y $\overline{HP} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{OP} \perp \overline{AB}$

Como $\overline{AB} \perp \overline{CP}$ y $\overline{AB} \perp \overline{OP}$, entonces $\overline{AB} \perp \Delta\, OPC$: $\boxed{\overline{AB} \perp \overline{OC}}$

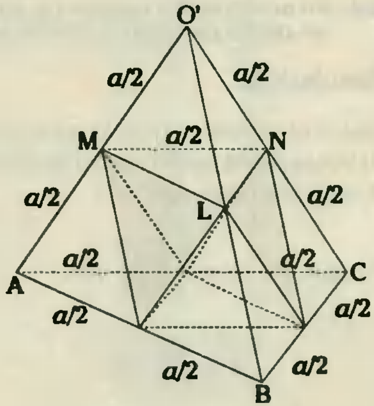
24.- En que relación se encuentran los volúmenes de un tetraedro regular y el del poliedro que se forma al unir los puntos medios de las aristas del tetraedro regular, respectivamente.

Resolución.-

Sea el tetraedro regular O - ABC de arista, cuya longitud es «a». Luego su volumen :

$$V_T = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \quad \text{... (1)}$$

Al unir los puntos medios de las aristas de este tetraedro se determina un poliedro regular de 6 vértices y 8 caras triangulares regulares es decir un octaedro regular cuya arista mide «$a/2$» Luego su volumen



$$V_o = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} \quad \text{... (2)}$$

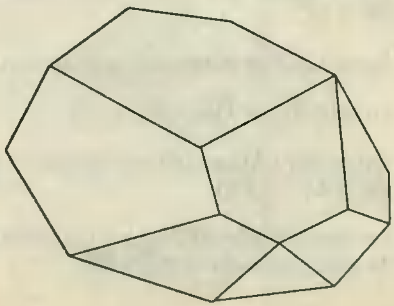
Dividiendo (1) y (2) :
$$\frac{V_T}{V_O} = \frac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}} = 2$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{V_T}{V_O} = 2}$$

25.- Un poliedro de (n^2 - 6) vértices esta formado por n triángulos 2n cuadriláteros y 3n pentágonos. Calcular la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras.

Resolución.-

Según el teorema de Euler : C + V = A + 2



Donde : C : N° de caras $\Rightarrow$ $C = n + 2n + 3n = 6n$

V : N° de vértices $\Rightarrow$ $V = n^2 - 6$

A : N° de aristas $\Rightarrow$ $A = \dfrac{3n+8n+15n}{2} = 13n$

Reemplazando en la fórmula anterior :

$$6n + n^2 - 6 = 13n + 2$$

Factorizando : $n^2 - 7n - 8 = 0$

$$\begin{array}{ll} n & -8 \\ n & +1 \end{array}$$

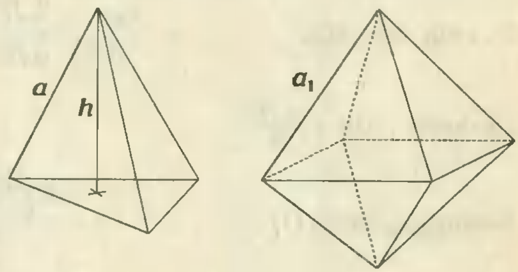
De donde $n = 8$

Nos piden : la suma de las medidas de los ángulos de sus caras : $S = 360\,(V - 2)$

Como : $V = n^2 - 6 = 8^2 - 6 = 58 \quad \Rightarrow \quad S = 360\,(58 - 2) \quad \therefore \quad \mathbf{S = 20160}$

26.- En qué relación se encuentran los volúmenes de un tetraedro regular y un octaedro regular, si la altura del primero mide igual a la arista del segundo.

Resolución.-



El volumen V_T del tetraedro regular es :

$$V_T = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \quad \dots (1)$$

Además su altura : $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = \dfrac{3h}{\sqrt{6}}$

sustituyendo en (1) : $V_T = \dfrac{\left(\dfrac{3h}{\sqrt{6}}\right)^3\sqrt{2}}{12} \quad \Rightarrow \quad V_T = \dfrac{h^3\sqrt{3}}{8} \quad \dots (2)$

El volumen V_O del octaedro regular es $V_O = \dfrac{a_1^3\sqrt{2}}{3}$

Puesto que : $a_1 = h \quad \Rightarrow \quad V_O = \dfrac{h^3\sqrt{2}}{3} \quad \dots (3)$

Finalmente dividiendo (2) y (3) : $\dfrac{V_T}{V_O} = \dfrac{\dfrac{h^3\sqrt{3}}{8}}{\dfrac{h^3\sqrt{2}}{3}}$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{V_T}{V_O} = \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}}$$

27.- En un hexaedro regular ABCD - EFGH de arista cuya longitud es «a», se traza $\overline{OH}$ perpendicular a la diagonal AG siendo «O» el centro de la cara ABCD . Se pide calcular el área de la región triangular OHD

Resolución.-

En el cuadrado ABCD : $OA = OC = OD = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

La arista $\overline{GC}$ del cubo es perpendicular a la cara ABCD

$\Rightarrow$ $\overline{GC}$ sera perpendicular a $\overline{BD}$ y ya que $\overline{BD}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ se concluye en que $\overline{BD}$ es perpendicular al plano del Δ ACG y por consiguiente $\overline{BD} \perp \overline{OH}$

Sea «*A*» el área de la región triangular rectangular HOD

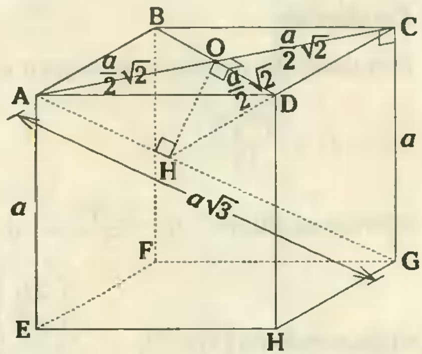
Luego : $A = \dfrac{OH \cdot OD}{2} \Rightarrow A = \dfrac{OH \cdot a\sqrt{2}}{4}$ ... (1)

$\triangle$ OHA ~ $\triangle$ ACG $\Rightarrow \dfrac{OH}{a} = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$

De donde : $OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Reemplazando en (1) : $A = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \times a\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \quad A_x = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$



28.- Se tiene un tetraedro regular de arista «a» si su proyección sobre un plano perpendicular a una arista determina una región de área «S» . Hallar el volumen del tetraedro.

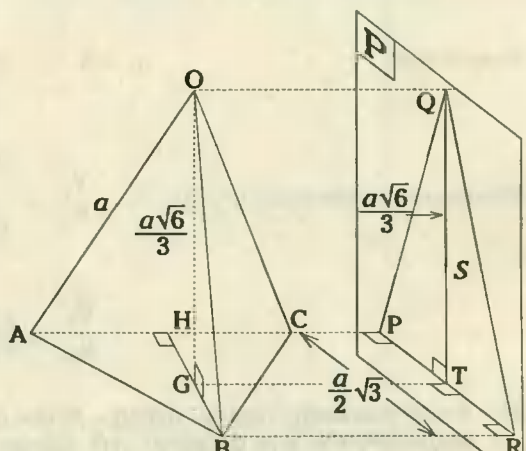
Resolución.-

Sea P el plano perpendicular a la arista $\overline{AC}$ del tetraedro regular OABC, ya que $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, entonces será paralelo a P y en consecuencia se proyectará en verdadera magnitud, es decir :

$$BH = PR = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Análogamente la altura $\overline{OG}$ del tetraedro será:

$$OG = QT = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



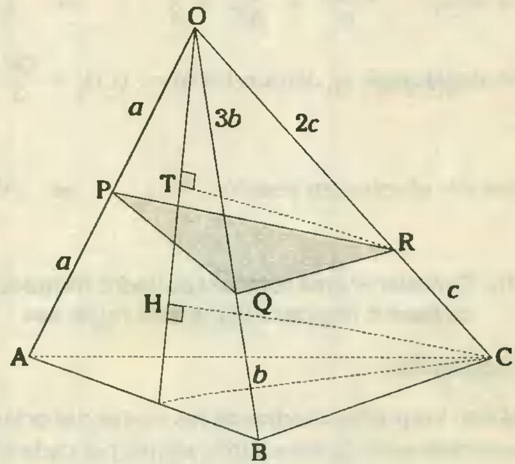
Por dato del problema : $S = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}\times\frac{a\sqrt{6}}{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ $\Rightarrow$ $a^2 = \dfrac{4S}{\sqrt{2}}$

Sea «V» el volumen del tetraedro

Luego : $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a(a^2)\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a\left(\frac{4S}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{12}$ $\therefore$ $\boxed{V = \dfrac{aS}{3}}$

29.- *Sobre las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ de un tetraedro O - ABC de volumen 72m^3, se ubican los puntos P , Q y R respectivamente de modo que OP = AP , OQ = 3QB y OR = 2RC. Hallar el volumen del tetraedro O - PQR.*

<u>Resolución</u>.-



Sea «V» el volumen del tetraedro O - PQR

Luego : $V = \dfrac{1}{3}$ A(Δ POQ) × RT ... (1)

Por condición del problema de volumen, el tetraedro OABC es :

$$72 = \frac{1}{3} A(\Delta\, OAB) \times \overline{CH} \text{ ... (2)}$$

Dividiendo (1) y (2) se tiene :

$$\frac{V}{72} = \frac{A(\Delta POQ)}{A(\Delta OAB)} \times \frac{RT}{CH} \text{ ... (3)}$$

Como los triángulos POQ y AOB

Tiene en común el ángulo O : $\dfrac{A(\Delta POQ)}{A(\Delta OAB)} = \dfrac{a\times 3b}{2a\times 4b} = \dfrac{3}{8}$

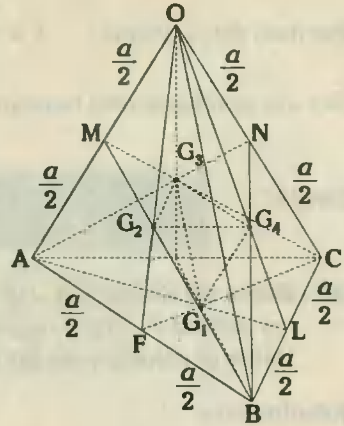
Por otro lado : ⊾ OTR ~ ⊾ OHC $\Rightarrow$ $\dfrac{RT}{CH} = \dfrac{2c}{3c} = \dfrac{2}{3}$

Reemplazando en (3) : $\dfrac{V}{72} = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{V = 18m^3}$$

30.- *Calcular el volumen del tetraedro regular inscrito en otro tetraedro regular cuya arista mide «a»*

Resolución.-



Sean G_1, G_2, G_3 y G_4 los baricentros de las caras ABC , AOB , AOC y BOC del tetraedro regular OABC.

Luego el poliedro $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$ es el tetraedro regular inscrito en el OABC, para ello bastará demostrar que sus aristas son congruentes.

En el Δ ANB: $AG_3 = 2\,(G_3N)$ y $BG_4 = 2\,(G_4N) \Rightarrow \overline{G_3G_4} \,//\, \overline{AB}$

Luego por la semejanza de los triángulos G_3NG_4 y ANB

Se tiene : $\dfrac{G_3G_4}{a} = \dfrac{G_3N}{AN} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad G_3\,G_4 = \dfrac{a}{3}$

Análogamente se demuestra que : $G_1G_2 = \dfrac{OC}{3} = \dfrac{a}{3}$; $G_2G_3 = \dfrac{BC}{3} = \dfrac{a}{3}$ y $G_1G_3 = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{a}{2}$

Sea «V» el volumen pedido $\Rightarrow \quad V = \dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12} \quad \therefore \quad \boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{324}}$

31.- Calcular el área total del poliedro formado al unir los puntos medios de las arista de un octaedro regular cuya arista mide «a»

Resolución.-

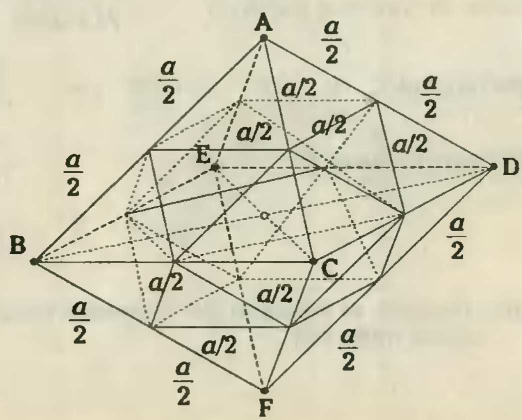
Al unir los puntos medios de las aristas del octaedro regular ABCDEF, se determina el poliedro mostrado en la figura adjunta, el cual por cada vértice del octaedro tiene una cara cuadrangular regular y por cada cara del octaedro posee una cara triangular regular es decir el número de caras del poliedro es : $C = 6\,\square + 8\,\Delta = 14$

Sea *A* el área de dicho poliedro

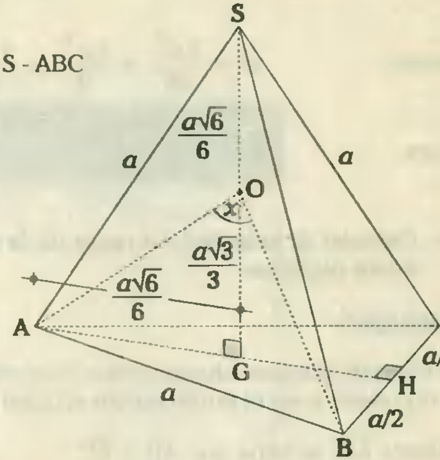
Luego : $A = 6\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 8\left[\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$

$$A = \frac{6a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \quad \boxed{A = \dfrac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})}$



32.- En un tetraedro regular S - ABC, se ubica el punto medio M de la altura $\overline{SG}$. Calcular la m∡ AOB.



Resolución.-

Sea «a» la longitud de la arista del tetraedro regular S - ABC

Luego por Propiedad : $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

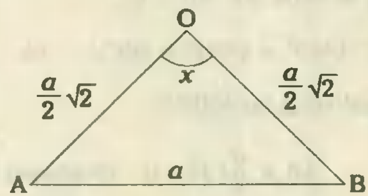
$$\Rightarrow \quad SO = OG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

En el triángulo equilátero ABC : $AH = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

Ya que G es baricentro

$$\Rightarrow \quad AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

De donde $\qquad AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$



En el ⊾ AGO : $(OA)^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OB$$

En el Δ AOB ; Observamos que : $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = 90}$

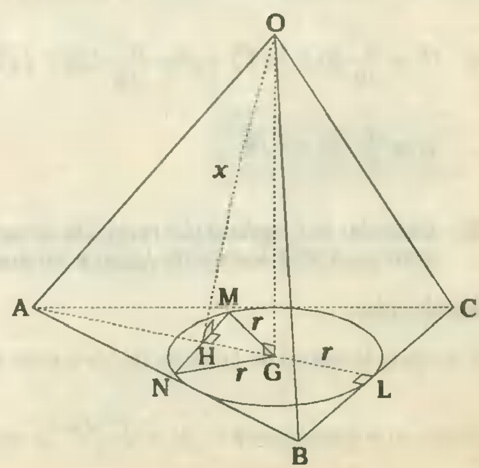
33.- Calcular la distancia del vértice O de un tetraedro regular O - ABC a una cuerda $\overline{MN}$ de la circunferencia inscrita en su base, si la altura de su base mide «a» y m $\overset{\frown}{MN}$ = 60

Resolución.-

En el triángulo equilátero ABC : G es baricentro y

$GL = r = \dfrac{1}{3}\ AL = \dfrac{a}{3}$

Trazamos la cuerda $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, luego $\overline{AG}$ es perpendicular a $\overline{MN}$.



Por el Teorema de las Tres Perpendiculares como

$\overline{OG} \perp \Delta ABC$ y $\overline{GH} \perp \overline{MN} \quad \Rightarrow \quad \overline{OH} \perp \overline{MN}$,

luego la distancia buscada es $OH = x$

En el triángulo equilátero MGN : $\overline{GH}$ es altura,

luego : $\qquad GH = \dfrac{r}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad GH = \dfrac{a}{6}\sqrt{3}$

En el ⊾ OGH : $x^2 = (GH)^2 + (OG)^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2$

Donde : $x^2 = \dfrac{3a^2}{36} + \dfrac{6a^2}{9} = \dfrac{3a^2}{36} + \dfrac{24a^2}{36}$

Ahora : $x^2 = \dfrac{27a^2}{36}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{x = \dfrac{3a}{6}\sqrt{3}}$

34.- Calcular la longitud del radio de la esfera circunscrita a un icosaedro regular cuya arista mide «a»

<u>Resolución</u>.-

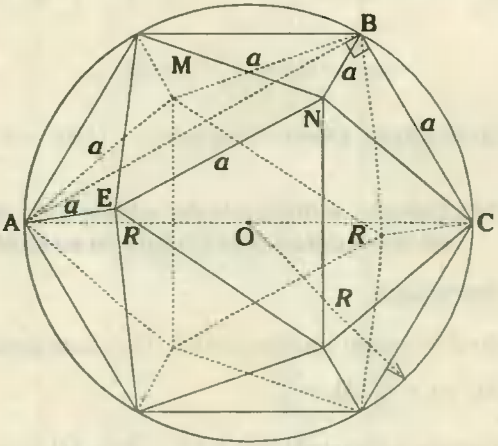
El centro de la esfera circunscrita al icosaedro regular es el centro del icosaedro regular que a su vez, viene a ser el punto medio «O» del segmento $\overline{AC}$ que une los vértices opuestos A y C

Al trazar $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

En el ⊾ ABC : $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad \Rightarrow \quad 4R^2 = (AB)^2 + a^2$ ... (1)

En el pentágono regular AMBNE :

$$AB = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{Propiedad}$$



Luego en (1) : $4R^2 = \left[\dfrac{a}{b}(\sqrt{5}+1)\right]^2 + a^2$

$$4R^2 = \frac{a^2}{4}(6+2\sqrt{5}) + a^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{16}(6+2\sqrt{5}) + a^2 = \frac{a^2}{16}(22+2\sqrt{5})$$

$$\therefore \quad \boxed{R = \frac{a}{4}\sqrt{22+2\sqrt{5}}}$$

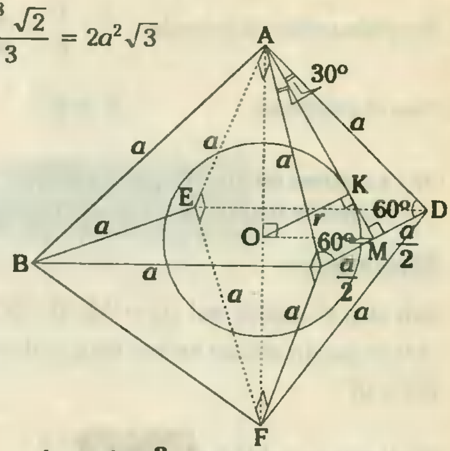
35.- Calcular la longitud del radio de la esfera inscrita en un octaedro regular, cuyo volumen es numéricamente igual a su área total.

<u>Resolución</u>.-

Sea «a» la longitud de la arista del octaedro regular ABCDEF

Luego su volumen será : $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ y su área $A = 2a^2\sqrt{3}$

Por condición del problema $\quad V = A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3} = 2a^2\sqrt{3}$



De donde : $\quad a = 3\sqrt{6}$

En el ⊿ AOM : $\quad r = \dfrac{(OA)(OM)}{AM}$

Puesto que :

$$OA = \frac{AF}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \;;\; OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \;\text{ y }\; AM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Luego : $\quad r = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{(3\sqrt{6})(\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{r = 3}$

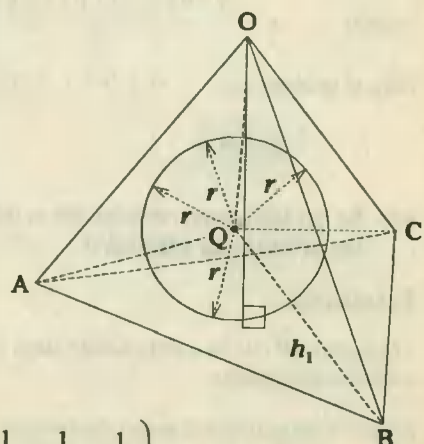
36.- En un tetraedro O - ABC, la suma de las inversas de sus alturas es 0,25 . Calcular la longitud del radio de la esfera inscrita en dicho tetraedro.

<u>Resolución</u>.-

Sean las áreas de las caras ABC, OAB, OBC y OAC A_1 , A_2 , A_3 y A_4 respectivamente y sus alturas correspondientes $\quad h_1$, h_2 , h_3 y h_4

y si «V» es el volumen del tetraedro, entonces : $\quad V = \dfrac{1}{3}\,A_1 h_1 = \dfrac{1}{3}A_2 h_2 = \dfrac{1}{3}\,A_3 h_3 = \dfrac{1}{3}A_4 h_4$

De donde : $\; A_1 = \dfrac{3V}{h_1}$, $A_2 = \dfrac{3V}{h_2}$, $A_3 = \dfrac{3V}{h_3}$ y $A_4 = \dfrac{3V}{h_4}$



El volumen V se puede descomponer como la suma de los volúmenes de los tetraedros :

Q - ABC , Q - OAB , Q - OBC y Q - OAC

Luego : $\quad V = \dfrac{1}{3}\,A_1 r + \dfrac{1}{3}\,A_2 r + \dfrac{1}{3}A_3 r + \dfrac{1}{3}\,A_4 r$

Ahora : $\quad V = \dfrac{r}{3}\,(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$

Donde : $\quad V = \dfrac{r}{3}\left(\dfrac{3V}{h_1}+\dfrac{3V}{h_2}+\dfrac{3V}{h_3}+\dfrac{3V}{h_4}\right) = \dfrac{3Vr}{3}\left(\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}+\dfrac{1}{h_4}\right)$

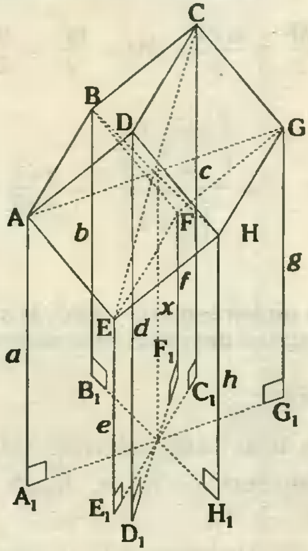
Simplificando y despejado $\dfrac{1}{r} : \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4} = 0{,}25 = \dfrac{1}{4}$

Para el problema : $\boxed{r = 4}$

37.- *La suma de las distancias de los vértices de un cubo a un plano exterior a él es 64m. Hallar la distancia del centro del cubo al plano mencionado.*

<u>Resolución</u>.-

Sea «O» el centro del cubo ABCD - EFGH, luego «O» es punto medio de sus diagonales $\overline{AG}$, $\overline{EC}$, $\overline{BH}$ y $\overline{DF}$.



En el trapecio AA_1G_1G : $x = \dfrac{a+g}{2}$ ... (1)

En el trapecio BB_1H_1H : $x = \dfrac{b+h}{2}$ ... (2)

En el trapecio DD_1F_1F : $x = \dfrac{d+f}{2}$ ... (3)

En el trapecio EE_1C_1C : $x = \dfrac{e+c}{2}$ ... (4)

Sumando las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se tiene :

$$4x = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{2}$$

Donde : $x = \dfrac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}$ Propiedad

Para el problema : $a + b + c + d + e + f + g + h = 64$

$\therefore$ $\boxed{x = 8}$

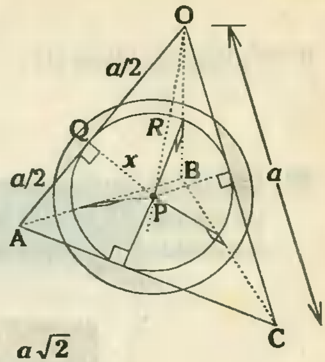
38.- *En un tetraedro regular, de arista «a». Calcular el radio de la esfera tangente a todas las aristas del tetraedro.*

<u>Resolución</u>.-

«El centro (P) de la esfera tangente a las aristas coincide con el centro de la esfera circunscrita a dicho tetraedro»

Sea x la longitud del radio de la esfera, las perpendiculares trazadas desde el centro P a las aristas son radios de la esfera y además bisecan a cada arista.

Luego se tendrá : $AQ = QO = a/2$ y $PQ = x$



En el ⊾ PQO : $R^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Puesto que : $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ (Propiedad)

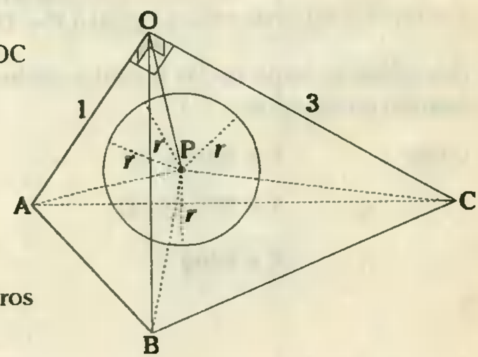
Luego : $\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}$

Despejando : $\frac{6a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2a^2}{16} \quad \therefore \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

39.- En un tetraedro O - ABC , el triedro O es trirectángulo ; si OA = 1 , OB = 2 y OC = 3 . Hallar el radio de la esfera inscrita.

<u>**Resolución**</u>.-

En primer lugar calculamos el volumen del tetraedro O - ABC :



$$V(O - ABC) = \frac{1}{3}\ Area\ (⊾\ AOB) \times OC$$

$$V(O - ABC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1\times 2}{2}\right) \times 3$$

$$\Rightarrow \quad V(O - ABC) = 1$$

El volumen del tetraedro O - ABC

Es igual a la suma de los volúmenes de los tetraedros

P - AOB , P - AOC , P - OBC y P - ABC

Luego : $1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1\times 2}{2}\right)r + \frac{1}{3}\left(\frac{1\times 3}{2}\right)r + \frac{1}{3}\left(\frac{2\times 3}{2}\right)r + \frac{1}{3}\ Area\ (\Delta\ ABC)\ r$

De donde : $r = \frac{6}{11 + 2\ Area\ (\Delta\ ABC)}$ ... (1)

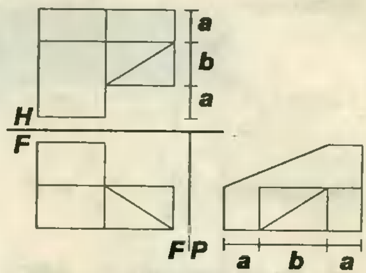
Por Propiedad : $[Area\,(\Delta\ ABC)]^2 = [Area\,(\Delta\ AOB)]^2 + [Area\,(\Delta\ AOC)]^2 + [Area\,(\Delta\ BOC)]^2$

De donde : $[Area\,(\Delta\ ABC)]^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{49}{4}$

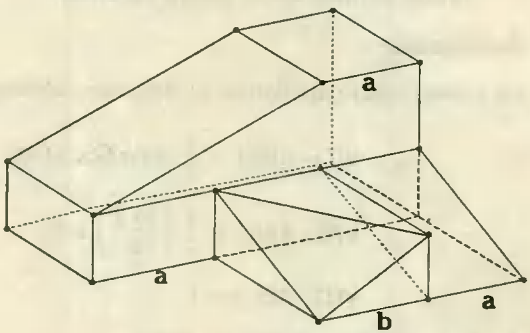
$$\Rightarrow \quad Area\ (\Delta\ ABC) = \frac{7}{2} \quad ...\ (2)$$

Reemplazando (2) en (1) : $r = \dfrac{6}{11+2.\dfrac{7}{2}} = \dfrac{6}{18}$ $\quad\therefore\quad$ $\boldsymbol{r = \dfrac{1}{3}}$

40.- Dadas las proyecciones ortogonales H , F y P de un poliedro. Calcular la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras.



<u>Resolución</u>.-



De acuerdo a las vistas horizontal (H), Frontal (F) y de Perfil (P)

Construimos el sólido mostrado, el cual posee una cantidad de vértices igual a V = 17

Nos piden la suma de las medidas de los ángulos de sus caras : S

Luego : $S = 360\,(V - 2)$

$\Rightarrow$ $S = 360\,(17 - 2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{S = 5400}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un hexaedro regular ABCD - EFGH se pide calcular el área de la sección determinada por el plano que pasa por el vértice A y por los puntos medios de $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$ si la arista del cubo mide 1.

A) $\dfrac{7\sqrt{17}}{6}$ B) $\dfrac{7\sqrt{17}}{4}$ C) $\dfrac{8\sqrt{17}}{7}$

D) $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$ E) $\dfrac{9\sqrt{17}}{34}$

2.- Hallar el área total del poliedro que resulta al unir los puntos medios de las aristas de un octaedro regular de arista "a".

A) $\dfrac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$ B) $a^2(3+\sqrt{3})$

C) $a^2(3-\sqrt{3})$ D) $\dfrac{a^2}{2}(3-\sqrt{3})$

E) $\dfrac{a^2}{3}(3+\sqrt{3})$

3.- Calcular la relación entre los radios de las esferas inscrita, circunscrita y ex-inscrita a un tetraedro regular.

A) 1 : 3 : 2 B) 1 : 2 : 4 C) 1 : 3 : 4

D) 1 : 2 : 4 E) 2 : 3 : 4

4.- Calcular el área de la proyección de un tetraedro regular de arista "a" sobre un plano paralelo al segmento que une los puntos medios de dos aristas alabeadas.

A) a^2 D) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$

B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}$

C) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$

5.- Por un punto O tomado en el interior de la base ABC de un tetraedro S - ABC, se trazan paralelas $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ y $\overline{OC'}$ a las aristas $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ y $\overline{SC}$ hasta encontrarse con las caras SBC, SCA y SAB.

Calcular: $\dfrac{OA'}{SA}+\dfrac{OB'}{SB}+\dfrac{OC'}{SC}$

A) 4 B) 2 C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

6.- Calcular el número de vértices del poliedro formado por 6 triángulos, 8 cuadriláteros y 10 pentágonos.

A) 30 B) 32 C) 28 D) 26 E) 24

7.- Un poliedro convexo está formado por 8 triángulos y «x» cuadriláteros. Hallar x, si el número de aristas es 28.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8.- Hallar el volumen de un tetraedro regular inscrito en un cubo de arista "a".

A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{a^3}{6}$ E) $\dfrac{a^3}{9}$

9.- Hallar la relación entre los volúmenes de un tetraedro regular y del poliedro formado al unir los centros de sus caras.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 24 E) 27

10.- Un cuadrado en el que se ha trazado la diagonal está enrrollado en forma de la superficie lateral de un prisma cuadrangular regular, de esta forma la diagonal del cuadrado se ha convertido en una línea quebrada no plana.

Hallar los ángulos entre los segmentos de la mencionada quebrada.

A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E) 150°

11.- Con una plancha metálica de forma triangular regular y de área $9\sqrt{3}$, se construye un tetraedro regular cuya altura mide :

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{4}$

D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

12.- Si el radio de la esfera inscrita en un octaedro regular mide "a", hallar el área total del octaedro regular.

A) $12a^2\sqrt{3}$ B) $6a^2$ C) $a^2\sqrt{3}$

D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ E) $12a^2$

13.- En un tetraedro regular el radio de la esfera circunscrita mide $36m$. Hallar el radio de la esfera inscrita en dicho tetraedro regular.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 24

14.- En un octaedro regular la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta mide "a". Calcular el área total del octaedro.

A) $a^2\sqrt{3}$ B) $3a^2\sqrt{3}$ C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

D) $4a^2\sqrt{3}$ E) $2a^2\sqrt{3}$

15.- En un dodecaedro regular dos de sus caras son los pentágonos ABCDE y CDPQR . Calcular AQ , si $AB = \sqrt{5} - 1$

A) $\sqrt{5} + 1$ B) $3 - \sqrt{5}$ C) $6 + 2\sqrt{5}$

D) $2\sqrt{5} - 1$ E) 4

16.- La altura de un tetraedro regular mide $\sqrt{6}$. Calcular el área total de su respectivo poliedro conjugado.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{2}$

17.- Una esfera es tangente a las aristas de un tetraedro cualquiera. Dos aristas opuestas miden 8 y 9 y otras dos aristas opuestas miden 12 y x . Calcular x.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

18.- Se tiene un cubo cuya arista mide «a». Calcular la medida del radio de la esfera que pasa por un vértice del cubo y es tangente a las tres caras que concurren en el vértice opuesto.

A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{a}{2}(3 - \sqrt{3})$

B) $\dfrac{a}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ E) $a(3 - \sqrt{3})$

C) $a(2 - \sqrt{3})$

19.- En una esfera las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares en el punto P, la distancia del centro de la esfera al plano determinado por las cuerdas es 2. Hallar el área del casquete esférico cuya base es la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
Si : PA = 4 ; PB = 36 y PC = 6.

A) 650π B) 600π C) 550π

D) 500π E) 450π

20.- En un hexaedro regular ABCD - EFGH , se pide calcular el área de la región triangular MNH, si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente ($AB = 2\sqrt{5}$)

A) $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$ B) $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ C) $\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

D) $\dfrac{5}{2}\sqrt{7}$ E) $\dfrac{5}{2}$

21.- En un octaedro regular P-ABCD-Q sobre $\overline{PQ}$ se ubica un punto M tal que la suma de las distancias de M hacia las aristas que concurren en los extremos $\overline{PQ}$ es 16. Calcular el área total del octaedro.

A) $12\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{5}$ C) $32\sqrt{3}$

D) $16\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

22.- En un tetraedro regular O - ABC, M es el punto medio de la altura $\overline{OG}$. Calcular la mínima distancia entre $\overline{AM}$ y $\overline{BC}$ ($OA = a$)

A) a B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

D) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{a}{2}\sqrt{6}$

23.- Hallar el radio de la esfera inscrita en un icosaedro regular cuya arista mide $\sqrt{42-18\sqrt{5}}$

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) 1 E) $7-\sqrt{5}$

24.- En un octaedro regular, si al área de una de sus secciones diagonales se le multiplica por la suma de las longitudes de todas sus diagonales, se obtiene el volumen del octaedro multiplicado por :

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

25.- Calcular la relación entre la longitud de la arista y del radio de la esfera inscrita en un dodecaedro regular.

A) $\sqrt{50-22\sqrt{5}}$ B) 1 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{25-11\sqrt{5}}$

26.- Los radios de las esferas inscrita y circunscrita a un tetraedro regular difieren en «a». Calcular el volumen del tetraedro regular.

A) a^3 B) $a^3\sqrt{2}$ C) $a^3\sqrt{3}$

D) $a^3\sqrt{5}$ E) $a^3\sqrt{6}$

27.- En un hexaedro regular ABCD - EFGH. Calcular el radio de la esfera inscrita en el tetraedro E - BDG. Si $AB = a$

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$

28.- ¿En cuánto excede el número de diagonales de un dodecaedro regular a la suma de los números de diagonales de los poliedros regulares restantes?

A) 50 B) 51 C) 52 D) 55 E) 57

29.- Se tiene un tetraedro regular de área total S, se corta dicho tetraedro mediante un plano que pasa por los puntos medios de 3 aristas laterales. Calcular el área total del tronco formado.

A) $\frac{5}{8}S$ B) $\frac{7}{8}S$ C) $\frac{3}{8}S$

D) $\frac{3}{4}S$ E) $\frac{4}{5}S$

30.- El área de la sección originada por un plano de simetría que contiene a una de las aristas de un tetraedro regular es A. Hallar el área total del tetraedro.

A) $A\sqrt{6}$ B) $2A\sqrt{6}$ C) $3A\sqrt{6}$

D) $4A\sqrt{6}$ E) $\frac{A}{2}\sqrt{6}$

31.- Los radios de las esferas inscrita y circunscrita a un tetraedro miden 2 y 7. Calcular la distancia entre los centros de dichas esferas.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) 3 E) 5

32.- El área de la proyección de una cara cualquiera de un octaedro regular sobre un plano diagonal que contiene a uno de sus lados es A. Hallar el área del octaedro.

A) $8\sqrt{3}A$ B) $16\sqrt{3}A$ C) $4\sqrt{3}A$
D) $6\sqrt{3}A$ E) $2\sqrt{3}A$

33.- Un poliedro convexo esta formado por 6 cuadriláteros, 8 hexágonos y 4 octágonos. Calcular su número de vértices.

A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 E) 36

34.- La suma de las inversas de las medidas de los radios de las esferas ex-inscritas a un tetraedro es k. Calcular la medida del radio de la esfera inscrita.

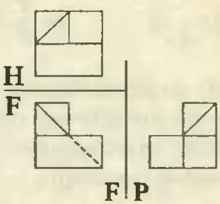
A) k B) $\frac{1}{k}$ C) $\frac{2}{k}$ D) $\frac{3}{k}$ E) $\frac{k}{2}$

35.- Considerando el poliedro del problema anterior. ¿Cuántas diagonales se puede trazar en este?

A) 400 B) 404 C) 410 D) 414 E) 420

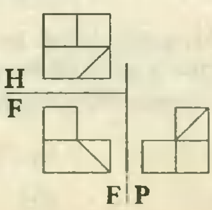
36.- Dadas las proyecciones Horizontal, Frontal y de Perfil de un poliedro, calcular su número de vértices.

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15



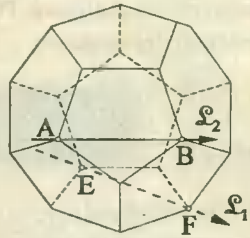
37.- Dadas las proyecciones ortogonales horizontal (H) ; frontal (F) y de Perfil (P) de un poliedro. Calcular su número de caras.

A) 14
B) 13
C) 12
D) 11
E) 10



38.- En el dodecaedro regular mostrado se pide calcular la medida del ángulo que forman las rectas alabeadas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

A) 18
B) 30
C) 36
D) 54
E) 72



39.- En el cubo ABCD $A_1B_1C_1D_1$ se ha trazado el plano C_1DB y la reta $\overline{DP}$, siendo P el punto medio de BB_1. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{DP}$ y el plano C_1DB

A) $Arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ D) 30°
B) $Arc\,sen\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ E) 45°
C) $Arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

40.- Se da un tetraedro S - ABC donde AC = BC y $m\measuredangle C = 90$, las aristas laterales forman con el plano de la base ángulos de 45°. En el triángulo SAB se traza la mediana $\overline{AM}$; calcular la medida del ángulo que forman $\overline{AM}$ y la cara SBC.

A) $Arc\,sen\left(\frac{\sqrt{30}}{15}\right)$ D) $Arc\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$
B) $Arc\,sen\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ E) 90
C) 60°

CAP. 26

sólidos poliédricos

26.1. SUPERFICIE PRISMÁTICA - PRISMA

Se llama superficie prismática a aquella superficie generada por una recta que se desplaza paralelamente a sí misma, apoyándose en una poligonal plana, cerrada y convexa.

En la *Fig.* 26.1 la recta AA' al desplazarse paralelamente sigue un recorrido que consiste en tocar permanentemente el borde del polígono plano ABCD, generándose de este modo la superficie prismática. La recta AA' se llama *generatriz* y al polígono que sirve de base para el recorrido se denomina *directriz*.

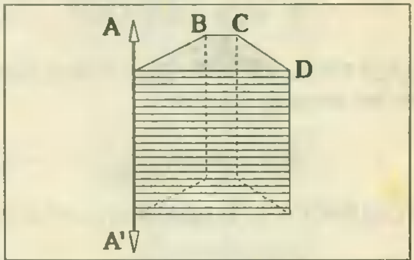


***Fig.* 26.1**

26.2 PRISMA-DEFINICIÓN

Llamaremos *prisma*, al sólido limitado por la superficie prismática cerrada y por dos planos paralelos y secantes a dicha superficie. (*Fig*. 26.2).

Las generatrices que pasan por los vértices del plano directriz se llaman *aristas*. El conjunto de generatrices que pasan por los puntos de un mismo lado de la generatriz forman una *cara*.

Los polígonos paralelos y congruentes ABCDE y A'B'C'D'E' se llaman *bases* y las distancias entre ellas *aristas básicas* o altura del prisma (si es recto).
Las caras restantes se denominan *caras laterales*.

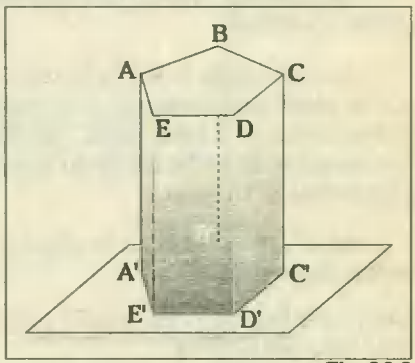


***Fig.* 26.2**

OBSERVACIONES.-

1) *Un prisma es recto si sus aristas laterales son perpendiculares a sus bases; en caso contrario será oblicuo.*

2) *Un prisma recto es regular si sus bases son polígonos regulares.*

3) *Un prisma se denomina según el polígono que tenga como base, siendo el menor el prisma triangular.*

26.3 ÁREA Y VOLUMEN DE UN PRISMA

A) PRISMA RECTO

En el prisma recto las caras laterales son rectángulos tal como se indica en la *Fig.* 26.3

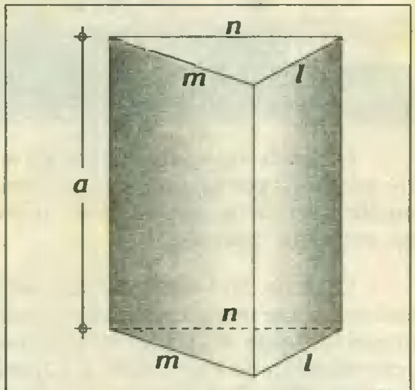


Fig. 26.3

AREA LATERAL (A_L).- Es igual al perímetro de la base por la arista.

$$A_L = (m + n + l)\,a \qquad \text{... (26.1)}$$

AREA TOTAL (A_T) .- Es igual al área lateral más la suma de las áreas de las bases.

$$A_T = A_L + 2A_{(BASE)} \qquad \text{... (26.2)}$$

VOLUMEN (*V*).- Es igual al área de la base por la arista.

$$V = A_{(BASE)} \cdot a \qquad \text{... (26.3)}$$

B) PRISMA OBLICUO

En el prisma oblicuo las caras laterales son romboides o rombos.

Sección Recta (S.R) Es la sección determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales del prisma como, el Δ MNL de la *Fig.* 26.4 en donde todos los lados de dicho triángulo son perpendiculares a las aristas del prisma.

En el prisma oblicuo la altura y la arista lateral no son iguales.

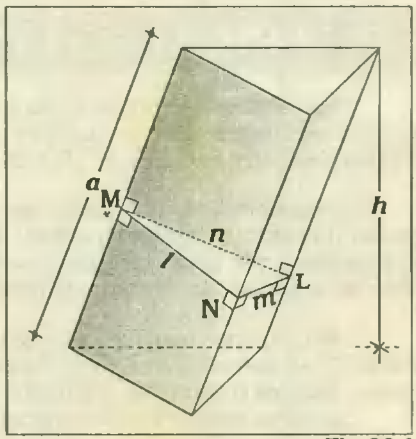


Fig. 26.4

ÁREA LATERAL (A_L).- Es igual al perímetro de la sección recta por la arista .

$$A_L = (m + n + l)\,a \qquad \text{... (26.4)}$$

ÁREA TOTAL (A_T).- Es igual al área lateral más la suma de las áreas de sus bases.

$$A_T = A_L + 2A_{(BASE)} \qquad \text{... (26.5)}$$

VOLUMEN (*V*) .- Es igual al área de la sección recta por su arista o el área de la base por su altura.

$$V = A_{(S.R)}\,a = A_{(BASE)}\,h \qquad \text{... (26.6)}$$

26.4 PARALELEPÍPEDO

Se llama paralelepípedo al prisma cuyas caras todas son paralelogramos.

En todo paralelepípedo sus caras opuestas son congruentes, sus ángulos poliedros opuestos también son congruentes y sus cuatro diagonales se bisecan mutuamente.

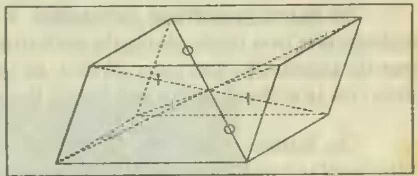


Fig. 26.5

A) PARALELEPÍPEDO RECTO

El paralelepípedo cuyas aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases, se llama paralelepípedo recto (*Fig*. 26.6), y cuando no son perpendiculares se llama oblicuo (*Fig*. 26.7). En todo paralelepípedo recto las caras laterales son rectángulos.

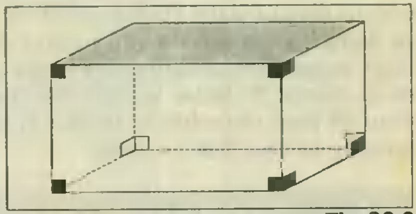


Fig. 26.6

B) ROMBOEDRO

Este paralelepípedo se caracteriza por tener todas sus caras en forma de rombos.

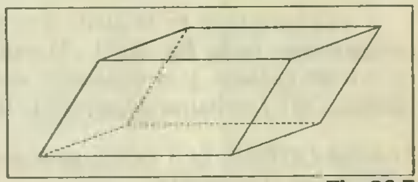


Fig. 26.7

C) CUBO O HEXAEDRO REGULAR

Es el paralelepípedo más conocido y cuya principal característica es el de tener todas sus caras iguales y con la forma de cuadrados.

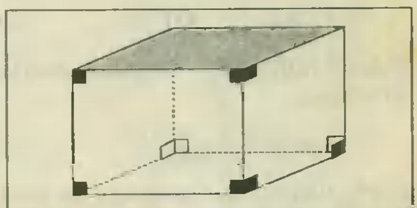


Fig. 26.8

D) PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR, ORTOEDRO O RECTOEDRO

Es el paralelepípedo recto cuyas caras todas son rectángulos. Las tres aristas *a*, *b* y *c* que concurren en un vértice se llaman *dimensiones* del paralelepípedo.

- *AREA TOTAL* (A_T) $A_T = 2(ab + bc + ac)$ ... **(26.7)**

- *DIAGONAL* (*D*) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ... **(26.8)**

- *VOLUMEN* (*V*) $V = abc$ ... **(26.9)**

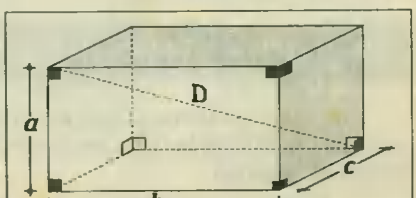


Fig. 26.9

26.5 SUPERFICIE PIRAMIDAL - PIRÁMIDE

Se llama *superficie piramidal*, a la superficie generada por una recta llamada *generatriz*, que pasando por un punto fijo llamado *vértice*, se desplaza apoyándose en una línea poligonal plana llamada *directriz*.

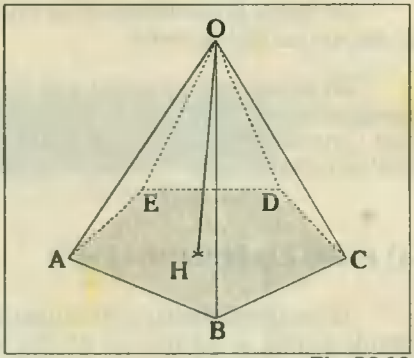


Fig. 26.10

Se llama *pirámide* al sólido determinado al intersectar mediante un plano secante una superficie piramidal (*Fig*. 26.10). La sección determinada se llama *base* de la pirámide (ABCDE), y el punto O, *vértice*. La distancia del vértice o *cúspide* a la base ($\overline{OH}$) se llama *altura*. La denominación de una pirámide va de acuerdo al polígono que tenga como base, siendo la menor de todas la pirámide triangular. El volumen de toda pirámide es igual a la tercera parte del área de su base por su altura.

26.6 PIRÁMIDE REGULAR

Una pirámide es regular, si su base es un polígono regular, y sus aristas laterales son congruentes. En la *Fig*. 26.11 , la pirámide es cuadrangular regular; su altura $\overline{OG}$ cae en el centro de la base, y la distancia del vértice O de la pirámide a cualquiera de sus aristas básicas ($\overline{OT}$) se llama *apotema* de la pirámide.

1) AREA LATERAL (A_L) .- Es igual al semiperímetro de la base por el apotema.

$$A_L = p_{(BASE)} \cdot OT \qquad \text{... (26.10)}$$

2) AREA TOTAL (A_T).- Es igual al área lateral más el área de la base.

$$A_T = A_L + A_{(BASE)} \qquad \text{... (26.11)}$$

3) VOLUMEN (V).- Es igual a un tercio del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3} A_{(BASE)} \cdot OG \qquad \text{... (26.12)}$$

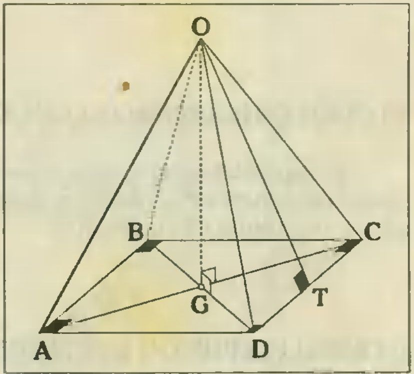


Fig. 26.11

26.7 PIRÁMIDES SEMEJANTES

Al trazar un plano secante a la superficie lateral de una pirámide y paralela a su base la sección determinada (sección transversal) será la base de una nueva pirámide semejante a la pirámide original.

En la figura las pirámides O-ABC y O-MNL son semejantes ya que la sección transversal MNL es paralela a la base ABC, luego se cumple las siguientes relaciones :

1) $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{OL}{OC} = \dfrac{OG}{OH}$

2) $\dfrac{A_{(O-MNL)}}{A_{(O-ABC)}} = \dfrac{OM^2}{OA^2} = \ldots\ldots = \dfrac{OG^2}{OH^2}$

3) $\dfrac{V_{(O-MNL)}}{V_{(O-ABC)}} = \dfrac{OM^3}{OA^3} = \ldots\ldots = \dfrac{OG^3}{OH^3}$

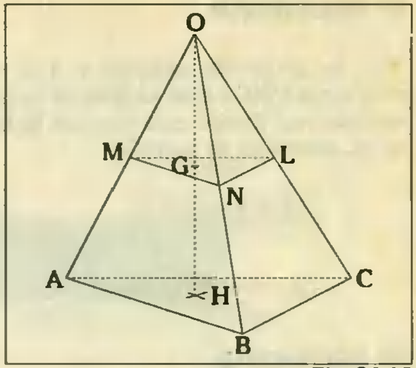


Fig. 26.12

26.8 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD

En un paralelepípedo rectángulo, si las áreas de tres caras diferentes son A_1, A_2 y A_3, luego el volumen V del paralelepípedo será:

$$V = \sqrt{A_1 A_2 A_3} \qquad \ldots (26.13)$$

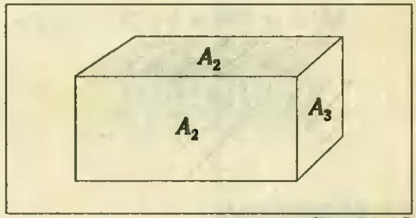


Fig. 26.13

2DA PROPIEDAD

El plano que pasa por dos aristas diagonalmente opuestas de un paralelepípedo divide al sólido en dos prismas triangulares equivalentes, es decir con respecto al paralelepípedo ABCD-A'B'C'D' el volumen del prisma triangular ABC-A'B'C' es igual al volumen del prisma ADC-A'D'C'.

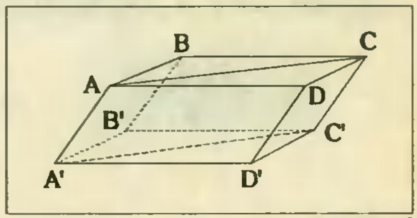


Fig. 26.14

3RA PROPIEDAD

El volumen de un prisma triangular (recto u oblicuo) es igual al área de una sus caras por la distancia entre dicha cara y la arista opuesta, es decir, el volumen V del prisma ABC-A'B'C' es igual a :

$$V = \frac{1}{2}\, \textit{Área}_{(ABB'A')} . CH \qquad \ldots (26.14)$$

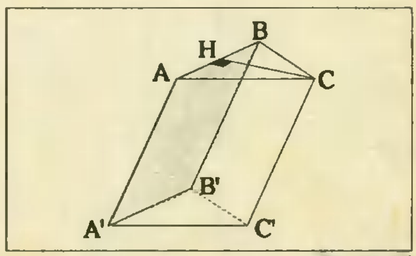


Fig. 26.15

4TA PROPIEDAD

En un prisma oblicuo, si A es el área de la sección recta MNL y A_1 es el área de la base PQR y θ es la medida del diedro que forman la base y la sección recta, entonces se cumple:

$$A = A_1 \cos\theta \qquad \text{... (26.15)}$$

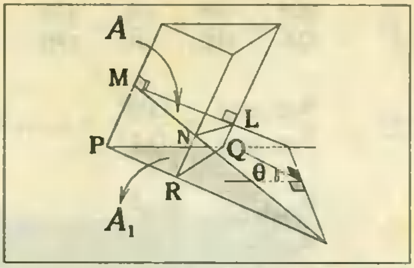


Fig. 26.16

5TA PROPIEDAD

El volumen V de un prisma oblicuo ABC-A'B'C' cuya área de la sección recta MNP es A y sus aristas laterales son:

AA' = a, BB' = b y CC' = c, es:

$$V = A\frac{(a+b+c)}{3} \qquad \text{... (26.16)}$$

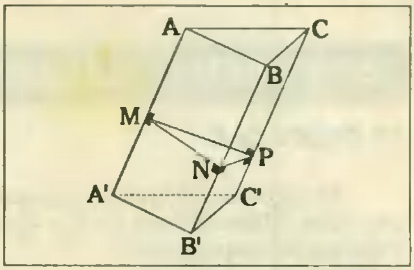


Fig. 26.17

6TA PROPIEDAD

En la pirámide mostrada ,si las áreas de sus caras laterales son A_1, A_2 y A_3. Su volumen será :

$$V = \frac{\sqrt{2A_1A_2A_3}}{3} \qquad \text{... (26.17)}$$

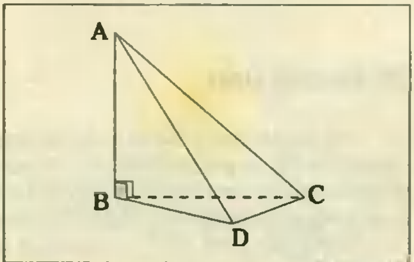


Fig. 26.18

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

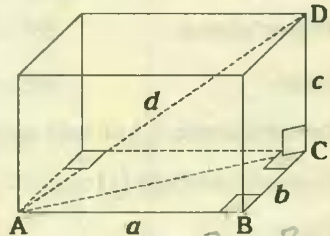
1.- En un rectoedro de dimensiones a, b y c y de diagonal «d» se cumple que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \qquad \textbf{es igual a :}$$

Resolución.-

Para aprovechar los ángulos rectos del rectoedro, formemos un triángulo trazando $\overline{AC}$

Ahora en el triángulo rectángulo ACD, aplicando el Teorema de Pitágoras.



Tenemos : $d^2 = AC^2 + c^2 \quad ... (1)$

También en el triángulo rectángulo ABC

Apliquemos el Teorema de Pitágoras

Entonces : $AC^2 = a^2 + b^2 \quad ... (2)$

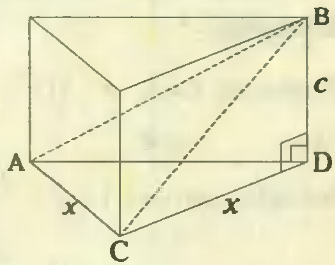
Reemplazando la expresión (2) en (1) : $\mathbf{V_x = 800\ m^3}$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$AC^2 = a^2 + b^2$

2.- Hallar la arista básica de un prisma triangular regular de volumen igual a : $\frac{1}{4}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$ m^3 Sabiendo que el ángulo formado por las diagonales de dos caras que parten del mismo vértice es de 30º

Resolución.-



Sabemos que : $V = x^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} . h \quad ... (1)$

Ahora como se conoce el volumen, calculemos «h» y luego despejamos «x»

En el ⊿ BCD (aplicando el Teorema de Pitágoras) :

$$BC = \sqrt{h^2 + x^2}$$

En el triángulo isósceles ABC, apliquemos la teoría de polígonos regulares y tendremos que :

$$\overline{AC} = L_{12}$$

Puesto que $\overline{AC}$ se opone a 30, entonces : $x = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = BC\sqrt{2-\sqrt{3}}$

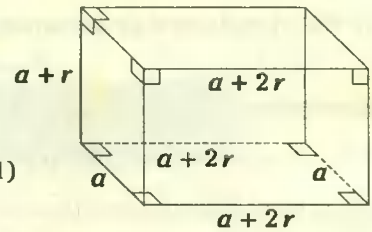
Puesto que : $BC = \sqrt{h^2 + x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{h^2 + x^2}\ \sqrt{2-\sqrt{3}}$

Donde despejando : $h = x\sqrt{1+\sqrt{3}}$

Sustituyendo en (1) : $\dfrac{1}{4}\sqrt{3+3\sqrt{3}} = x^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} . x\sqrt{1+\sqrt{3}} \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = 1\ m}$

3.- Calcular el volumen del rectoedro cuyas tres dimensiones se hallan en progresión aritmética, ademássuman 18m y el área total del sólido es 208m^2.

Resolución.-



Debemos hallar las tres dimensiones del rectoedro, siendo :

ancho = a , alto = $a + r$, largo = $a + 2r$

Para esto planteamos las siguientes ecuaciones :

$$a + (a + r) + (a + 2r) = 18 \quad \Rightarrow \quad a + r = 6 \ldots (1)$$

Además : $S_{TOTAL} = 2p_b \cdot h + 2S_b$

Reemplazando : $208 = (4a + 4r)(a + r) + 2(a)(a + 2r)$

Donde : $208 = 4(a + r)^2 + 2a\,[(a + r) + r]$

Reemplazando (1) en esta expresión : $208 = 4(6)^2 + 2(6 - r)(6 + r) \quad \Rightarrow \quad r = 2m$

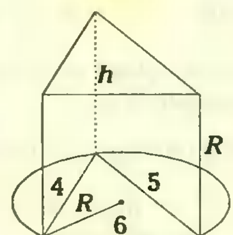
Reemplazando en (1) : $a + 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 4m$

Como : V = largo · ancho · alto

Reemplazamos : $V = (4 + 4)(4)(4 + 2)$ $\therefore$ $\mathbf{V = 192\ m^3}$

4.- Hallar el volumen de un prisma triangular cuyos lados de la base miden 4 , 5 y 6m y la altura igual al radio de la circunferencia circunscrita a la base.

Resolución.-



El volumen $V = S_b \cdot h \ldots (1) \quad \Rightarrow \quad S_b = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{4R}$

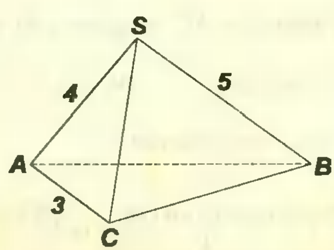
Dato : $h = R$

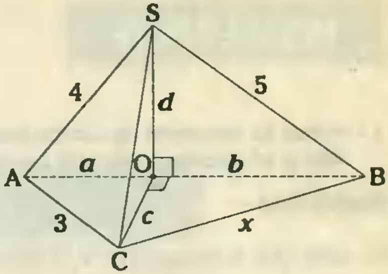
Reemplazando en (1) : $V = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{4R}\,h$

Luego : $V = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{4}$

$\therefore$ $\mathbf{V = 30m^3}$

5.- En el tetraedro mostrado , las aristas opuestas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son ortogonales. Calcular $\overline{BC}$





Resolución.-

Para aprovechar que $\overline{AB}$ y $\overline{CS}$ son ortogonales, se traza un plano que pasando por $\overline{CS}$ sea perpendicular a $\overline{AB}$.

Entonces, se obtendran cuatro triángulos rectángulos, en los cuales sea :

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ y $OS = d$

Luego : $a^2 + d^2 = 4^2$ ... (1) $\quad d^2 + b^2 = 5^2$ ... (2) $\quad b^2 + c^2 = x^2$ ... (3)

También : $a^2 + c^2 = 3^2$ ... (4)

Ahora para relacionar estas igualdades,observese que de 2 en 2 , se pueden agrupar las cuatro variables asignadas :

Sumando (1) + (3) : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4^2 + x^2$

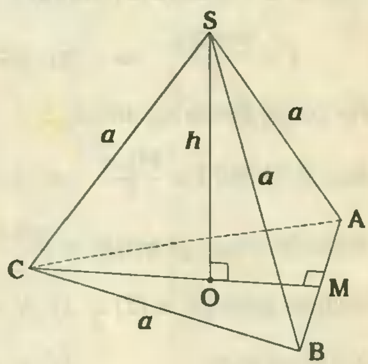
Sumando (20 + (4) : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3^2 + 5^2$

Luego se puede agrupar los segundos miembros : $\Rightarrow \quad 4^2 + x^2 = 3^2 + 5^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 3\sqrt{2}\ m}$

6.- Hallar el volumen de un tetraedro regular en función de sus aristas.

Resolución.-



El volumen : $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ ... (1)

Calculamos : $S_b = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (Δ ABC es equilátero)

En el ⊿ SOC (Pitágoras) : $a^2 = h^2 + OC^2$ ... (α)

En el ⊿ CMA (30 y 60) : $CM = a\sqrt{3}/2$

Luego : $CO = \frac{2}{3} CM$ (Propiedad del Baricentro)

Entonces : $CO = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

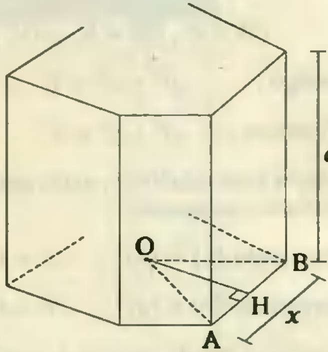
Reemplazando en (α) : $a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Luego : $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

MISCELÁNEA

1.- *Hallar el volumen de un prisma octogonal regular si el área de sus caras laterales es 50m y el apotema de sus bases mide 4m.*

Resolución.-



Se sabe que el volumen " V_x " del octógono regular es :

$$V_x = \left(\frac{8x}{2}:\text{OH}\right) a$$

De donde : $V_x = 4\ .\ \text{OH}\ (ax)$ ... (1)

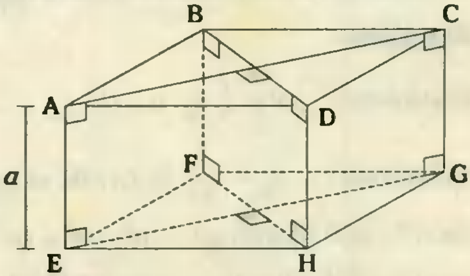
Puesto que : $\text{OH} = 4$ y $a\ .\ x = 50$

Reemplazando en (1) : $V_x = 4\ .\ 4\ .\ 50$

$$\therefore \quad V_x = 800\ m^3$$

2.- *La base de un paralelepípedo recto es un rombo cuya área es igual a «S» las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hállese el volumen del paralelepípedo.*

Resolución.-



El área "S" de la base romboidal EFGH es :

$$S = \frac{\text{FH.EG}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{FH . EG} = 2S$$

Por condición del problema :

Área (□ BDHF) = $\frac{\text{FH}.a}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \text{FH}\ .\ a$ ... (1)

También :*Área* (□ ACGE) = $\frac{\text{EG}.a}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \text{EG}\ .\ a$ ... (2)

Multiplicando (1) × (2) : $S_1\ .\ S_2 = (\text{FH . EG})\ a^2$

Reemplazando : $S_1\ .\ S_2 = 2S\ a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{S_1 S_2}{2S}}$

Sea V el volumen pedido, luego : $V = S\ .\ a = S\sqrt{\frac{S_1 S_2}{2S}}$

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{S\, S_1\, S_2}{2}}$$

3.- Calcular el volumen de un prisma oblicuo si la sección recta es un triángulo circunscrito a un círculo de 3m de radio y el área lateral del sólido es $28m^2$.

Resolución.-

Sea " V_x " el volumen pedido, luego :

$$V_x = \textit{Área}\,(\Delta\,ABC)\,.\,a \quad ...\,(1)$$

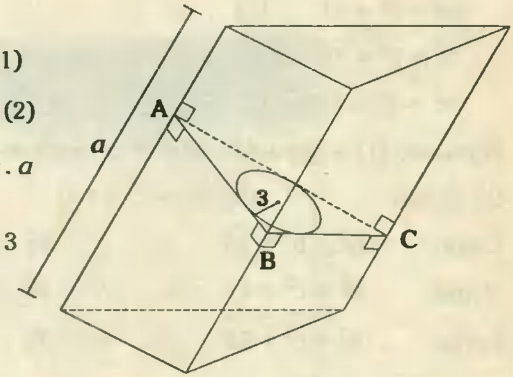
Como : $\textit{Área}\,(\Delta\,ABC) = p\,(\Delta\,ABC)\,r$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $V_x = p\,(\Delta\,ABC)\,.\,r\,.\,a$

Puesto que : $p\,(\Delta\,ABC)\,.\,a = \dfrac{A_l}{2} = 14$ y $r = 3$

Luego : $V_x = 14\,.\,3$

$\therefore \quad \mathbf{V_x = 42m^3}$



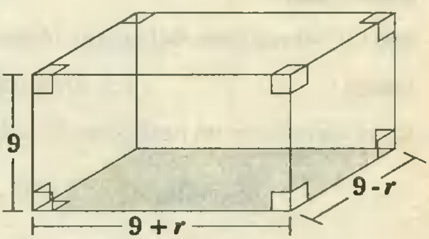
4.- El área total de un paralelepípedo rectangular es de $478m^2$, sus 3 dimensiones están en progresión aritmética siendo la suma de ellas igual a 27m . Calcular su volumen.

Resolución.-

Ya que la suma de las tres dimensiones del paralelepípedo es 27*m* y forman una progresión aritmética de razón "*r*" estas se podrán expresar como :

c a b

$$9 - r\ ,\ \ 9\ \ y\ \ 9 + r$$



Ya que el área total es 478 m^2 , se tiene :

a b

$$2\,.\,9(9 + r) + 2\,.\,9\,.\,(9 - r) + 2\,.\,(9 - r)\,(9 + r) = 478$$

Donde : $18\,.\,9 + 18r + 18\,.\,9 - 18r + 2(81 - r^2) = 478$

$$162 + 162 + 162 - 2r^2 = 478$$

Ahora : $486 - 478 = 2r^2 \Rightarrow 8 = 2r^2$

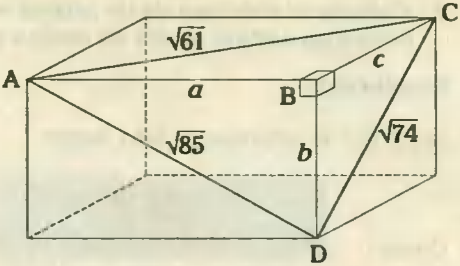
Por consiguiente : $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

Luego el volumen "V" sera : $V = (9 - r)\,(9)\,(9 + r) \Rightarrow V = (7)\,(9)\,(11)$

$\therefore \quad \mathbf{V = 693\ m^3}$

5.- Las diagonales de tres caras diferentes de un paralelepípedo rectangular miden $\sqrt{61}$ $\sqrt{74}$ y $\sqrt{85}$. Calcular su volumen.

Resolución.-



Empleamos el Teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ABC ; ABP y PBC :

$$a^2 + c^2 = 61 \quad ... (1)$$

$$b^2 + c^2 = 74 \quad ... (2)$$

$$a^2 + b^2 = 85 \quad ... (3)$$

Sumando (1) + (2) + (3) : $2(a^2 + b^2 + c^2) = 220$

De donde : $a^2 + b^2 + c^2 = 110$

Como : $a^2 + b^2 = 85 \Rightarrow c^2 = 25$ y $c = 5$

Como : $a^2 + c^2 = 61 \Rightarrow b^2 = 49$ y $b = 7$

Como : $b^2 + c^2 = 74 \Rightarrow a^2 = 36$ y $a = 6$

Luego el volumen "V" del paralelepípedo, será : V = 5 . 6 . 7

$\therefore$ **V = 210**

6.- La base de un prisma oblicuo es un hexágono regular de 5m de lado, sus aristas laterales miden 10m y forman con la base un ángulo de 60º. Calcular su volumen.

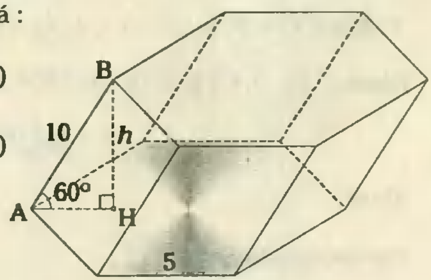
Resolución.-

Sea "V" el volumen del prisma oblicuo.

Luego : V = *Área* (base) × *h* ... (1)

Como la base es un hexágono de lado 5*m*, su área será :

$$\textit{Área}\ (\text{base}) = \frac{3}{2}(5)^2\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \ ... (2)$$



En el ⊿ AHB de 30° y 60° : $h = \frac{10}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ... (3)

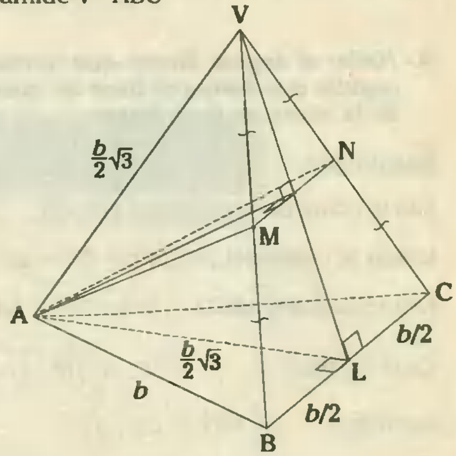
Sustituyendo (3) y (2) en (1) : $V = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 5\sqrt{3}$

$\therefore$ **V = 562,5 m^3**

7.- Una pirámide regular triangular ha sido cortada por un plano que pasa por uno de los vértices de la base y por los puntos medios de dos de sus aristas laterales. Hallar la relación entre el área lateral de la pirámide y el área de su base, si se conoce que el plano secante es perpendicular a la cara lateral.

Resolución.-

El plano MAN es mediatriz del apotema $\overline{VL}$ de la pirámide V - ABC



Luego : $AV = AL = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

Además : $VB = VC = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

En el ⊾ VLB : $VL^2 = VB^2 - BL^2 = \left(\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$

Ahora : $VL^2 = \frac{3}{4}b^2 - \frac{b^2}{4} \Rightarrow VL = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

De donde : $A_l = \left(\frac{3b}{2}\right)\frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{3b^2\sqrt{2}}{4}$

Y *Área* (Δ ABC) $= A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

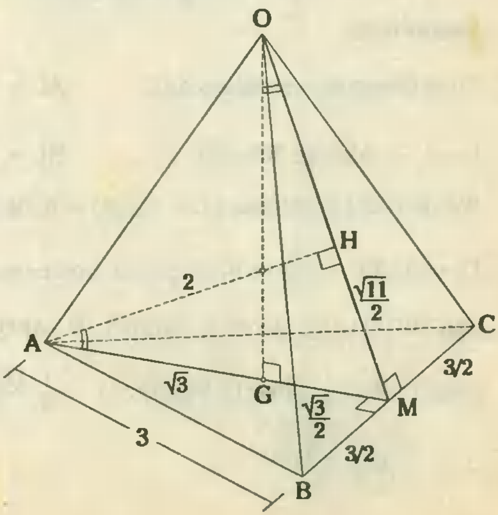
Finalmente : $\frac{A_l}{A_b} = \frac{\frac{3b^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{A_l}{A_b} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

8.- El lado de la base de una pirámide triangular regular es igual a 3 y una de las alturas iguales mide 2. Calcular su volumen.

Resolución.-

Sea "V" el volumen de la pirámide O - ABC, luego : $V = \frac{1}{3}\,\frac{(3)^2\sqrt{3}}{4}\,.\,OG$

$\Rightarrow \quad V = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,.\,OG \qquad ...(1)$



En el triángulo equilátero ABC : $AM = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad AG = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ y $GM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En el ⊾ AHM : $HM = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

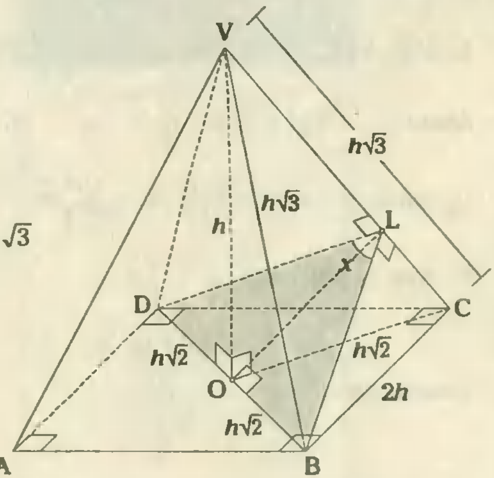
⊾ AHM ~ ⊾ OGM : $\frac{2}{OG} = \frac{\sqrt{11}/2}{\sqrt{3}/2}$

$\Rightarrow \quad OG = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \qquad ...(2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $V = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,.\,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\therefore$ $\boxed{V = \frac{9\sqrt{11}}{22}}$

9.- Hallar el ángulo diedro que forman dos caras laterales adyacentes de una pirámide regular que tiene por base un cuadrado cuyo lado tiene una longitud que es el doble de la altura de la pirámide.

<u>**Resolución**</u>.-



Sea la altura de la pirámide VO = h

Luego por dato del problema BC = $2h$

En el cuadrado ABCD : BO = OC = OD = $h\sqrt{2}$

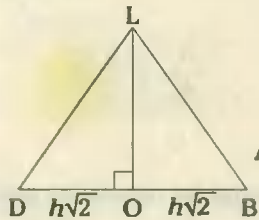
En el ⊿ VOC : $VC = \sqrt{h^2 + (h\sqrt{2})^2} = h\sqrt{3}$

Además : $h\,.\,h\sqrt{2} = OL\,.\,h\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad OL = \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

En el Δ DLB : $\frac{x}{2} = 60$

$\therefore \quad \boxed{x = 120}$



10.- La base de una pirámide V - ABC es un triángulo equilátero ABC, la cara VCB es un triángulo isósceles perpendicular a la base; la altura de dicha pirámide mide el triple de la arista AB = 2 ; el triángulo APQ esta en el plano que forma 60º con la base ABC. Calcular el volumen de la pirámide V - APQ ($P \in \overline{VB} \wedge Q \in \overline{VC}$).

<u>**Resolución**</u>.-

En el triángulo equilátero ABC : $AL = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

En el ⊿ ALH de 30º y 60º : $HL = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{3} = 3$ y $AH = 6$

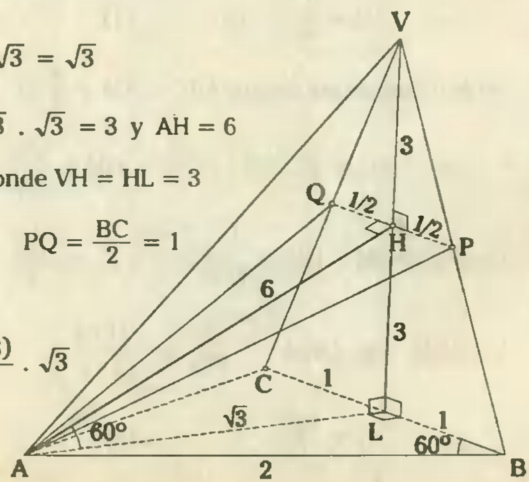
Por dato del problema VL = 3 (AB) = 6, de donde VH = HL = 3

En el Δ VBC : $\overline{PQ}$ es base media, entonces : $PQ = \frac{BC}{2} = 1$

Sea "V" el volumen de la pirámide V - APQ,

Luego : $V = \frac{1}{3}$ [*Área* (Δ VQP)] . $AL = \frac{1}{3}\,\frac{(1)(3)}{2}\,.\,\sqrt{3}$

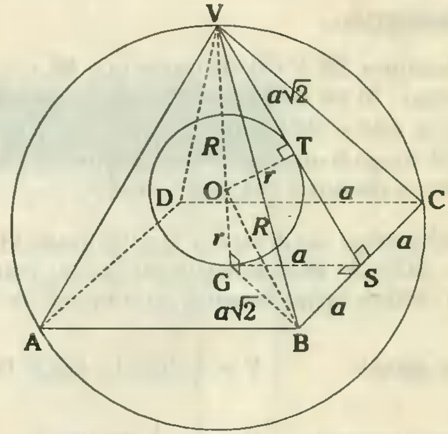
$\therefore \quad \boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{2}}$



11.- El centro de la esfera inscrita en una pirámide cuadrangular regular, coincide con el centro de la esfera circunscrita a dicha pirámide. Hallar la relación entre sus radios.

Resolución.-

Sea "O" el centro de las esferas inscrita y circunscrita a la pirámide V-ABCD.



$$OT = OG = r \quad y \quad OV = OB = R$$

⊾ VTO ≅ ⊾ OGB (4to caso)

$$\Rightarrow \qquad VT = GB = a\sqrt{2}$$

⊾ VTO ~ ⊾ VGS

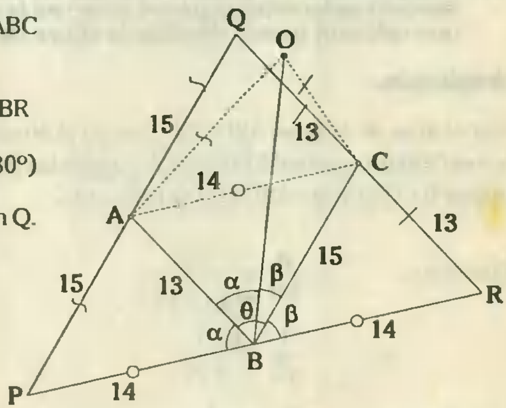
$$\frac{r}{a} = \frac{R}{a + a\sqrt{2}}$$

$$\therefore \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

12.- En una pirámide triangular la suma de 3 ángulos planos en cada uno de los vértices de la base es igual a 180º. Hallar su área total si los lados de la base miden 13, 14 y 15.

Resolución.-

En el plano de la base ABC de la pirámide O- ABC trazamos por B la recta PR de modo que :



$m\measuredangle PBA = m\measuredangle ABO = \alpha$ y $PB = OB = BR$

Luego : $m\measuredangle CBR = \beta$ (ya que $\alpha + \theta + \beta = 180°$)

Las prolongaciones de $\overline{PA}$ y $\overline{RC}$ se intersectan en Q.

El Δ PBA ≅ Δ ABQ (LAL) $\Rightarrow$ PA = AQ

El Δ QBC ≅ Δ BCR (LAL) $\Rightarrow$ QC = CR

Análogamente deducimos que :

AQ = PA = AO y QC = OC = CR

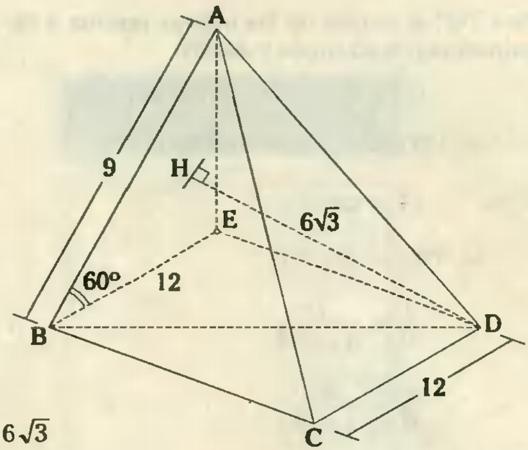
Obsérvese que el área total de la pirámide O - ABC, es igual al área de la región PQR la cual se calcula como :

$$S_{TOTAL} = \sqrt{42.12.14.16} = 336$$

$$\therefore \qquad S_{TOTAL} = 336$$

13.- *En una pirámide triangular ABCD, la mínima distancia entre las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $6\sqrt{3}$ m y el ángulo que forman mide 60º. Si AB = 9m y CD = 12m, hallar el volumen de la pirámide*

Resolución.-



Trazamos $\overline{BE}$ // $\overline{CD}$ de modo que BE = CD, luego : BCDE es un paralelogramo; además $m\measuredangle ABE = 60°$ y el plano ABE es paralelo a $\overline{CD}$, luego la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sera la distancia $\overline{DH}$ ($DH = 6\sqrt{3}$).

Del gráfico observamos que las pirámides A - BDE y A - BCD tienen bases iguales y altura común, luego tienen igual volumen "V".

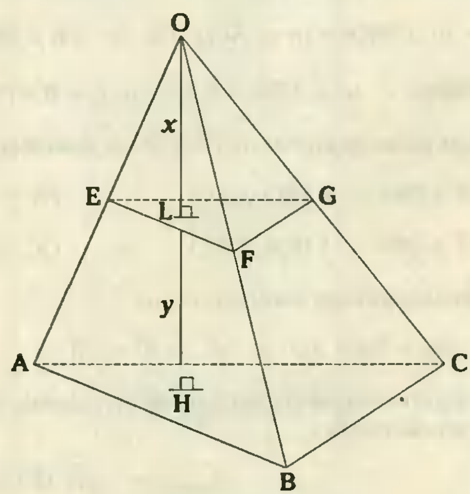
De donde : $V = \frac{1}{3}$ *Área* (Δ ABE) . DH

Reemplazando : $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(9)(12)\text{ sen }60 \cdot 6\sqrt{3}$

$\therefore$ $\quad V = 162m^3$

14.- *Una pirámide irregular es cortada por un plano paralelo a su base, si el área de la sección determinada por el plano es la mitad del área de la base de la pirámide. ¿En que relación queda dividida la altura de la pirámide?*

Resolución.-



Sea el área de la base ABC "2*A*", luego el área de la sección transversal EFG será *A*, ya que las pirámides 0 - EFG y O - ABC son semejantes.

Entonces : $\frac{A}{2A} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{x+y}$

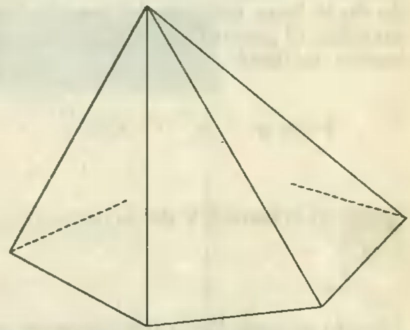
Efectuando : $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \sqrt{2} + 1$

15.- *En una pirámide regular el número de vértices mas el número de caras menos el número de aristas es igual al número de aristas menos el número de caras. Hallar el volumen del sólido si todas las aristas son iguales a $\sqrt{6}$.*

Resolución.-

Consideramos que sea "A" el número de aristas de la pirámide, luego el número de aristas básicas así como el número de aristas laterales sera $\frac{A}{2}$; sea "V" el número de vértices y C el número de caras.



Luego : $\quad C = V = \frac{A}{2} + 1$

Según el problema : $\quad V + C - A = A - C$

Donde : $\quad \frac{A}{2} + 1 + \frac{A}{2} + 1 - A = A - \frac{A}{2} - 1$

Resolviendo : $\quad A = 6$

Quiere decir que la pirámide es un tetraedro regular de arista $\sqrt{6}$, Luego su volumen "V" será :

$$V = \frac{(\sqrt{6})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{6\sqrt{6}.\sqrt{2}}{12}$$

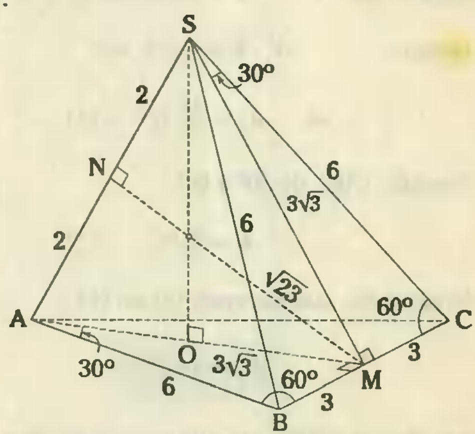
$$\therefore \quad V = \sqrt{3}$$

16.- En la pirámide S - $\overline{ABC}$, la base ABC y la cara SBC son triángulos equiláteros de 6m de lado; la arista $\overline{SA}$ mide 4m; calcular su volumen.

Resolución.-

Sea "V" el volumen de la pirámide S - ABC, luego :

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{(6)^2\sqrt{3}}{4}\cdot(SO) \;\Rightarrow\; V = 3\sqrt{3}\,(SO) \;...\;(1)$$



En el ⊿ SMC de 30º y 60º : $SM = 3\sqrt{3}$

En el ⊿ SNM : $\quad MN = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{23}$

⊿ AMB de 30º y 60º : $AM = 3\sqrt{3}$

En el Δ AMS : $\quad (AM)\,(SO) = (AS)\,(MN)$

Donde : $\quad (3\sqrt{3})\,(SO) = 4\sqrt{23}$

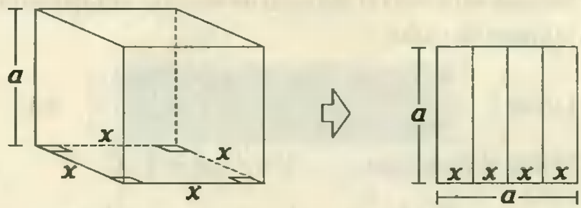
$$\Rightarrow \quad SO = \frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}} \quad ...\;(2)$$

Reemplazando (2) en (1) : $\quad V = 3\sqrt{3}\;.\;\frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}} \quad \therefore \quad V = 4\sqrt{23}$

17.- La base y el desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto son cuadrados; si "a" es la longitud del lado del cuadrado mayor. Hallar su volumen.

Resolución.-

Sea "x" la longitud del lado del cuadrado de la base del prisma, luego al desarrollar el prisma en el cuadrado obtenido, se tiene :



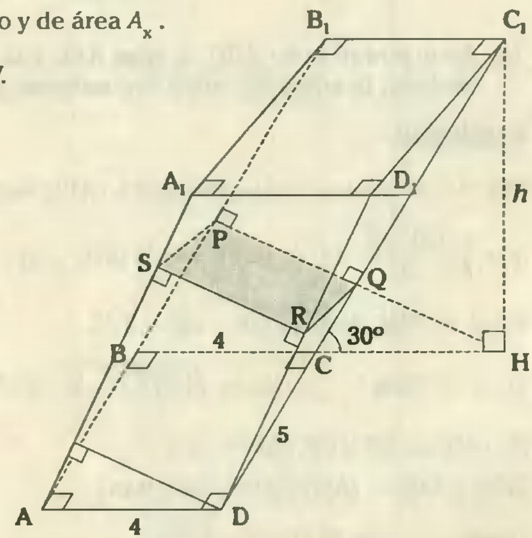
$$4x = a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{4}$$

Luego el volumen V del prisma, será : $V = \left(\frac{a}{4}\right)^2 . a \quad \therefore \quad \boxed{V = \frac{a^3}{16}}$

18.- Un prisma tiene por base un rectángulo cuyas dimensiones son 4 y 5m; sus aristas laterales que tienen 6m están inclinadas a 30º respecto al plano de la base y se proyectan siguiendo la dirección de los lados menores del rectángulo de la base. Calcular el área de la relación recta del prisma.

Resolución.-

Sea SPQR, la sección recta del prisma oblicuo y de área A_x .



Luego : si el volumen del prisma oblicuo es V.

Entonces : $V = A_x - 6$

Puesto que : $V = \text{Área (base)} \times h$

Luego : $A_x . 6 = 4 \times 5 \times h$

$$\Rightarrow \quad A_x = \frac{10}{3}h \quad ...(1)$$

En el ⊿ CHC, de 30° y 60° :

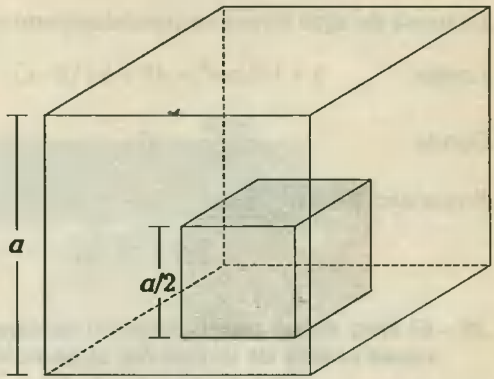
$$h = 3\sqrt{3} \quad ...(2)$$

Finalmente, sustituyendo (2) en (1) :

$$\boxed{A_x = 10\sqrt{3}}$$

19.- En un recipiente cúbico que contiene 42m³ de agua se introduce un cubo macizo de tal manera que el agua se eleva hasta enrazar el nivel del recipiente. Si la arista del cubo macizo es igual a la mitad de la arista del recipiente, hallar el volumen del recipiente.

Resolución.-



Sea "a" la longitud de la arista del recipiente y V su volumen, luego : $V = a^3$ ... (*)

También la arista del cubo mide $\frac{a}{2}$ y su volumen es $\frac{a^3}{8}$.

Del gráfico : $a^3 = \frac{a^3}{8} + V_{H_2O}$

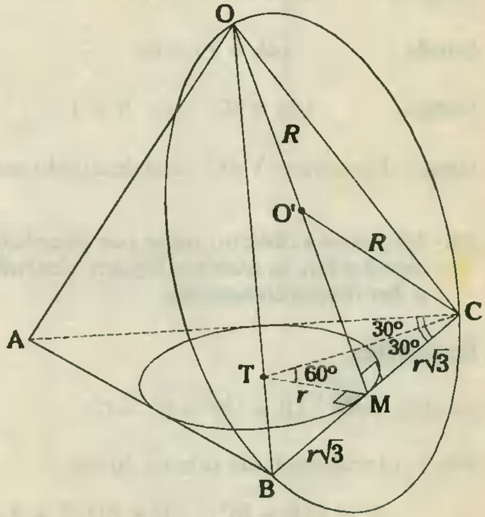
$$\Rightarrow \quad \frac{7}{8}a^3 = 42$$

En consecuencia : $a^3 = 48m^3$

$$\therefore \quad \mathbf{V = 48\ m^3}$$

20.- Calcular el área de la superficie lateral de una pirámide triangular regular sabiendo que en su base se puede inscribir una circunferencia de radio "r" y en sus caras laterales circunscribir circunferencias de radio "R".

Resolución.-



En el ⊿ TMC de 30° y 60° : $MC = r\sqrt{3} = BM$

En el ⊿ O'MC, por pitágoras :

$$(O'M)^2 = R^2 - (r\sqrt{3})^2 = R^2 - 3r^2$$

De donde : $O'M = \sqrt{R^2 - 3r^2}$

Sea "A" el área de la superficie lateral de la pirámide, luego :

$$A = \left[\frac{3(2r\sqrt{3})}{2}\right](OM)$$

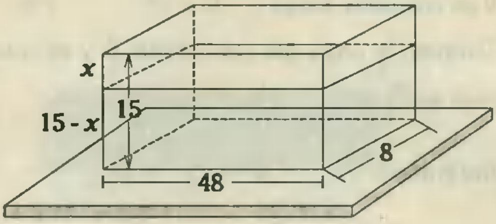
$$\therefore \quad \boldsymbol{A = 3r\sqrt{3}\left(\sqrt{R^2 - 3r^2} + R\right)}$$

21.- En una vasija cuya forma es la de un paralelepípedo rectángulo de 48cm de largo, 8cm de ancho y 15cm de altura se vierten 5 litros de agua. ¿A qué distancia del borde llega el agua?

Resolución.-

La masa de agua forma un paralelepípedo rectángulo de dimensiones : 48, 8 y 15 - x

Luego : $5 \times 10^3\, cm^3 = 48 \times 8\,(15 - x)$



Donde : $\dfrac{5000}{384} = 15 - x$

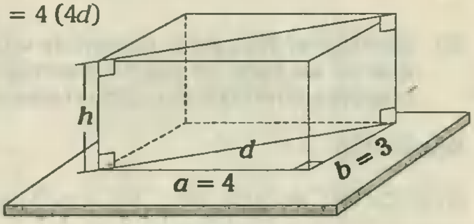
En consecuencia : $13{,}02 = 15 - x$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = 1{,}98\ cm}$

22.- El área de un paralelepípedo rectangular cuyas aristas básicas miden 4 y 3 es 4 veces el área de una de las superficies diagonales. Calcular el volumen del sólido.

Resolución.-

Por condición del problema : $2\,(ha + hb + ab) = 4\,(4d)$



Como : $a = 4$; $b = 3$ y $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Se tiene : $2(7h + 12) = 4(20)$

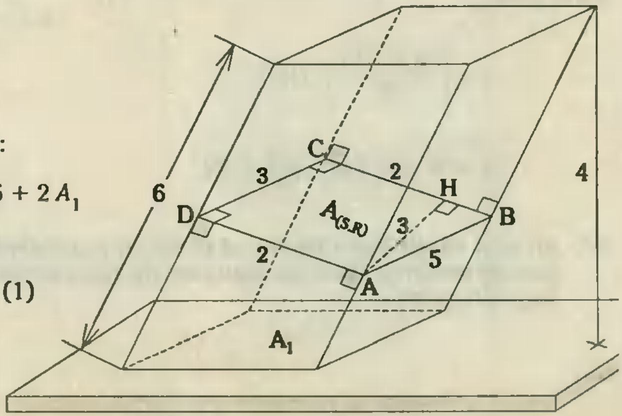
Donde : $14h + 24 = 80$

Luego : $14h = 56 \quad \Rightarrow \quad h = 4$

Luego el volumen V del paralelepípedo sera : $V = 4 \times 4 \times 3 \quad \therefore \quad \mathbf{V = 48}$

23.- Un prisma oblicuo tiene por sección recta un trapecio rectangular cuyas bases miden 2 y 6m, la altura mide 3m. Calcular la superficie total si su arista y altura miden 6 y 4m respectivamente.

Resolución.-



En el ⊿ AHB : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Sea A_T el área total del prisma, luego :

$$A_T = (AB + BC + CD + AD)\,6 + 2\,A_1$$

Donde : $A_T = (5 + 6 + 3 + 2)\,6 + 2\,A_1$

Reduciendo : $\Rightarrow \quad A_T = 96 + 2\,A_1 \quad \ldots (1)$

Por otro lado se conoce que :

$$A_1 \cdot 4 = A_{(S.R)} \times 6$$

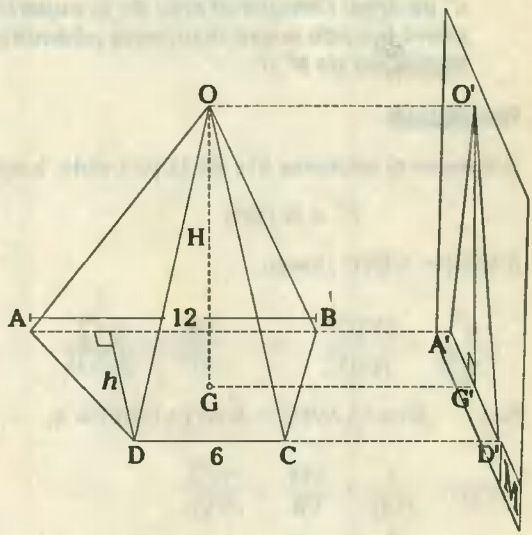
Ahora : $A_1 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2+6}{2}\right)3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 18 \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1) : $A_T = 96 + 36 = 132\,m^2 \quad \therefore \quad \mathbf{A_T = 132\,m^2}$

24.- La base ABCD de una pirámide O - ABCD es un trapecio ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$), este sólido se proyecta sobre un plano perpendicular a $\overline{AB}$, si el área de la proyección de pirámide sobre el plano es 20m^2 ; AB = 12 y CD = 6 . Calcular el volumen de la pirámide.

Resolución.-

Sea "M" el plano de proyección y el triángulo A'O'D' la proyección de área 20 m^2 .



Luego : $\dfrac{(A'D')(O'G')}{2} = 20$

$\Rightarrow \quad h \,.\, H = 40 \qquad \ldots (1)$

El volumen «V» de la pirámide sera :

$$V = \left(\frac{12+6}{2}\right)h \,.\, H \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) :

$$V = 9(40)$$

$$\therefore \quad \mathbf{V = 360\,m^3}$$

25.- Un recipiente lleno de agua tiene la forma de un prisma recto cuadrangular regular, tal que la arista básica es la mitad de la arista lateral. Dicho recipiente se inclina α apoyándose en una arista básica. Sabiendo que el volumen del líquido derramado es $\sqrt{3}$ /4 del volumen del recipiente (α : medida del ángulo que forman la arista básica y el plano horizontal).

Resolución.-

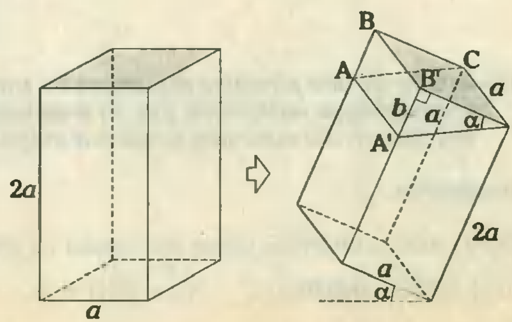
El volumen del recipiente es :

$$V_R = a^2\,(2a) = 2a^3$$

El volumen del líquido derramado es igual al del prisma ABC - A'B'C' , es decir :

$$V_L = \left(\frac{ab}{2}\right)a = \frac{a^2b}{2}$$

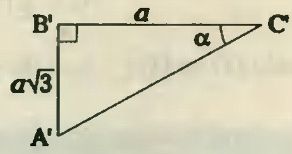
Por dato del problema : $V_L = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, V_R$



$$\Rightarrow \quad \frac{a^2 b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a^3$$

$$\Rightarrow \quad b = a\sqrt{3}$$

En el ⊿ A'B'C' :



$$\therefore \quad \alpha = 60^\circ$$

26.- Por una arista de la base de una pirámide regular de base cuadrangular, se ha trazado un plano que determina en la cara opuesta un triángulo cuya región tiene a^2 u^2 de área. Calcular el área de la superficie lateral de la pirámide determinada por el plano trazado sobre la primera pirámide si la superficie lateral de la pirámide entera tiene área de b^2 u^2.

Resolución.-

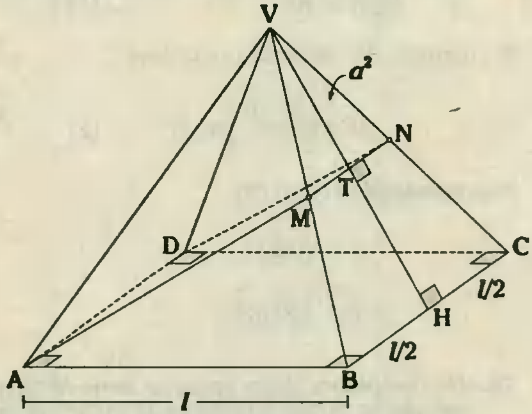
Trazamos el apotema $\overline{VH}$ de la pirámide, luego su área lateral se podrá expresar como:

$$b^2 = 2l\,(VH)$$

Δ MBN ~ Δ BVC ; luego :

$$\frac{a^2}{\frac{l.VH}{2}} = \frac{(VM)^2}{(VB)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{VM}{VB} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{l.VH}}$$

Sea : $\text{Área}\,(\Delta\, AVM) = \text{Área}\,(\Delta\, DVN) = A,$



Luego : $\dfrac{A}{\frac{l VH}{2}} = \dfrac{VM}{VB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{l VH}}$

De donde : $A = \dfrac{a\sqrt{2l VH}}{2} = \dfrac{a\sqrt{b^2}}{2} = \dfrac{ab}{2}$

El área lateral de la pirámide V - AMND será : $A_x = a^2 + \dfrac{ab}{2} + \dfrac{ab}{2} + \dfrac{b^2}{4}$

$$\therefore \quad A_x = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}$$

27.- la base de una pirámide regular es un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia cuyo radio mide 2 m. El área lateral es el doble del área de la base; calcular el volumen del cubo que tenga por diagonal la altura de la pirámide.

Resolución.

Sea V - ABC la pirámide triangular regular de apotema $\overline{VH}$.

En el Δ ABC, equilátero : $\quad AO = 2OH = 4$

Luego : $AH = 6$

En el ⊿ AHC de 30° y 60° :

$$HC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BC = 4\sqrt{3}$$

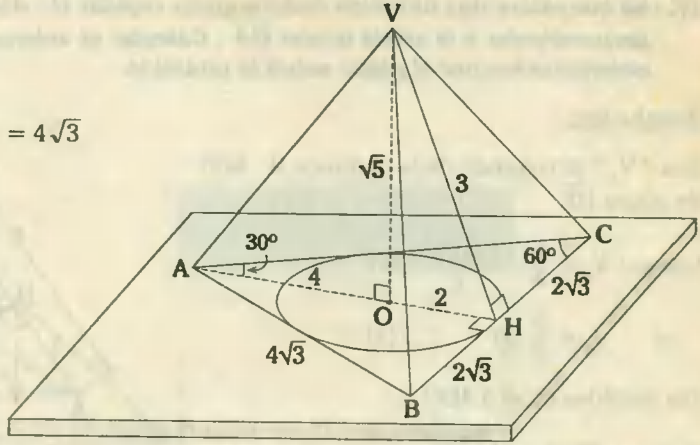
Por condición del problema :

Área Lateral = 2 *Área* básica

Reemplazando :

$$\frac{(4\sqrt{3}\times 3)}{2}\,VH = 2\,\frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow \quad VH = 3$



En el ⊿ VOH : $VO = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

Sea el volumen del cubo de arista a : $V = a^3$

Como : $\sqrt{5} = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad V = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}}{9} \qquad \therefore \quad \boxed{V = 5\sqrt{15}\ /\ 9}$

28.- Calcular la relación de los volúmenes de los sólidos determinados en una pirámide cuadrangular regular por un plano perpendicular a su base y que pasa por los puntos medios de dos lados contiguos de esta base.

Resolución.-

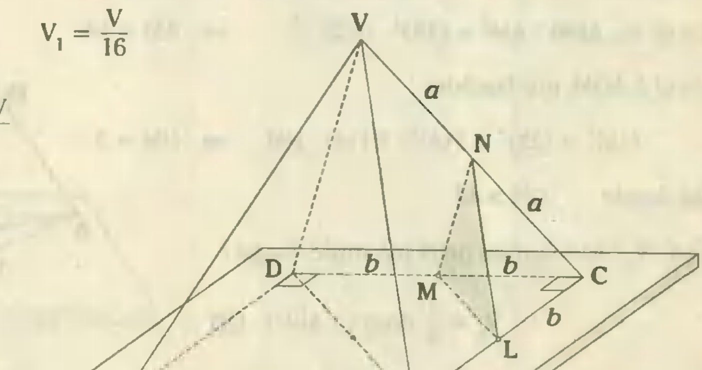
Sea "V_1" el volumen del sólido N - MCL y "V_2" el volumen del sólido restante, así mismo "V" el volumen de la pirámide V - ABCD. Las pirámides V - DBC y N - MLC son semejantes

Luego : $\dfrac{V1}{\frac{V}{2}} = \dfrac{a^3}{(2a)^3} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \dfrac{V}{16}$

$\Rightarrow \quad V_2 = V - \dfrac{V}{16} = \dfrac{15V}{16}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{V}{16}}{\frac{15V}{16}} = \dfrac{1}{15}$

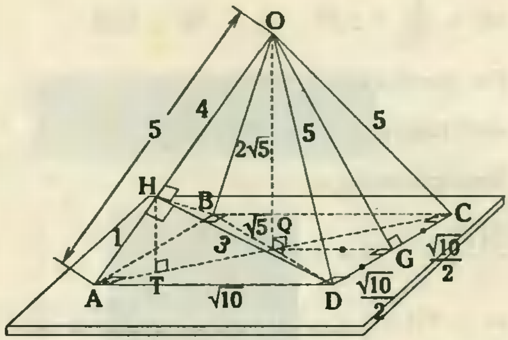
$\therefore \quad \mathbf{V_1 / V_2 = \dfrac{1}{15}}$



29.- Se considera una pirámide cuadrangular regular O - ABCD. Por D se traza un plano perpendicular a la arista lateral $\overline{OA}$. Calcular el volumen del menor de los sólidos determinados por el plano sobre la pirámide.

Resolución.-

Sea " V_x " el volumen de la pirámide H - ABD de altura $\overline{HT}$



Luego : $V_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{10})^2}{2} \cdot HT$

$\Rightarrow \quad V_x = \frac{5}{3} HT \quad \ldots (1)$

Por Euclides en el Δ AOD :

$(5)^2 = (\sqrt{10})^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot AH \Rightarrow AH = 1$

En el ⊿ OQD : $OQ = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} \Rightarrow OQ = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}$

⊿ ATH ~ ⊿ AQO : $\frac{HT}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow HT = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \ldots (2)$

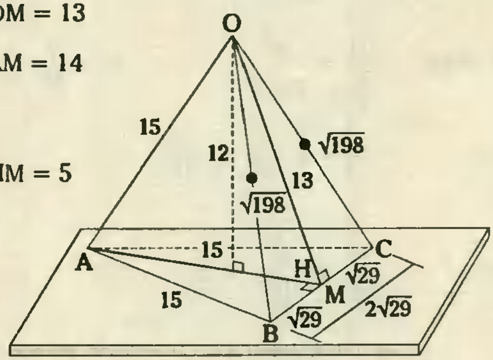
Reemplazando (2) en (1) : $V_x = \frac{5}{3}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \therefore \quad \boxed{V_x = \frac{2\sqrt{5}}{3}}$

30.- Las aristas de una pirámide triangular O - ABC miden : OA = AB = AC = 15 , OB = OC = $\sqrt{198}$ y BC = $2\sqrt{29}$. Calcular su volumen.

Resolución.-

En el ⊿ OMC : $OM^2 = (\sqrt{198})^2 - (\sqrt{29})^2 \Rightarrow OM = 13$

En el ⊿ AMB : $AM^2 = (15)^2 - (\sqrt{29})^2 \Rightarrow AM = 14$



En el Δ AOM, por Euclides :

$$(15)^2 = (13)^2 + (14)^2 - 2\,(14) \cdot HM \Rightarrow HM = 5$$

De donde : $OH = 12$

Sea "V_x" el volumen de la pirámide, luego :

$$V_x = \frac{1}{3}\,\textit{Área}\,(\Delta\, ABC) \cdot OH$$

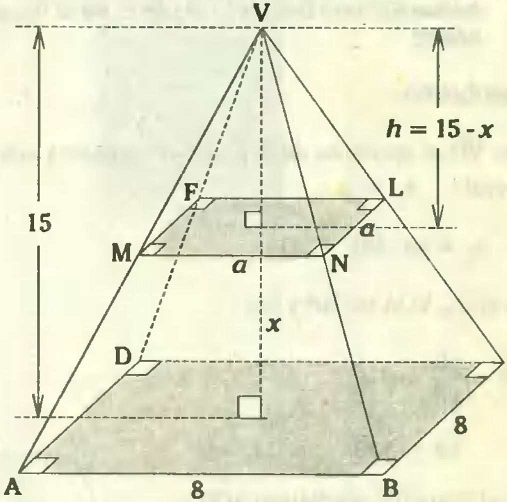
Reemplazando : $V_x = \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{29})(14)}{2} \cdot 12 \quad \therefore \quad \boxed{V_x = 56\sqrt{29}}$

31.- La base de una pirámide es un cuadrado de 8m de lado, su altura 15m ¿A cuantos metros de la base pasará un plano paralelo a ella, para que el volumen del prisma recto que tenga por base la sección y por altura la distancia al vértice, sea los 3/8 del volumen de la pirámide.

Resolución.

Sea "V" el volumen del prisma mencionado, luego : $V = a^2 . (15 - x)$

Como el volumen de la pirámide V - ABCD es : $\frac{1}{3}(8)^2 . 15 = 320$



Luego : $a^2 (15 - x) = \frac{3}{8}(320)$

$\Rightarrow \quad a^2 (15 - x) = 120 ... (1)$

Las pirámides V - MNLF y V - ABCD son semejantes, luego :

$\frac{a}{8} = \frac{15-x}{15} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8}{15}(5 - x) \quad ... (2)$

Reemplazando (2) en (1) :

$$\frac{8^2}{15^2}(15 - x)^2 (15 - x) = 120$$

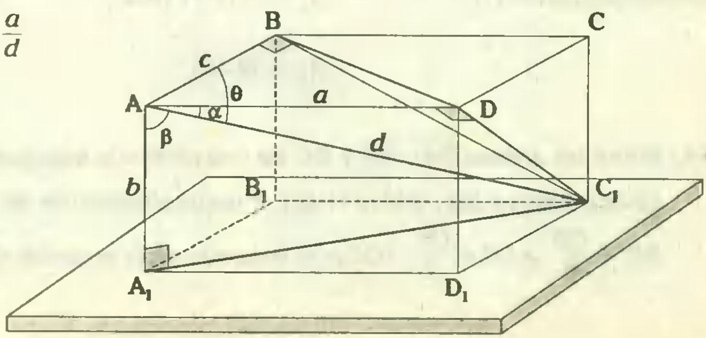
Donde : $(15 - x)^3 = \frac{15^3}{8} = \frac{15^3}{2^3} = \left(\frac{15}{2}\right)^3$

Por comparación : $15 - x = \frac{15}{2} \quad \therefore \quad \boxed{x = 7{,}5}$

32.- En un rectoedro ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ la diagonal $\overline{AC_1}$ forma ángulos con $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$ y $\overline{AB}$ de medidas α , β y θ respectivamente. Calcular : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta$

Resolución.-

En el ⊿ ADC_1 : $\cos\alpha = \frac{a}{d}$



$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{a^2}{d^2} \quad ... (1)$

En el ⊿ AA_1C_1 : $\cos\beta = \frac{b}{d}$

$\Rightarrow \quad \cos^2\beta = \frac{b^2}{d^2} \quad ... (2)$

En el ⊿ ABC_1 : $\cos\theta = \dfrac{c}{d}$ $\Rightarrow$ $\cos^2\theta = \dfrac{c^2}{d^2}$ ... (3)

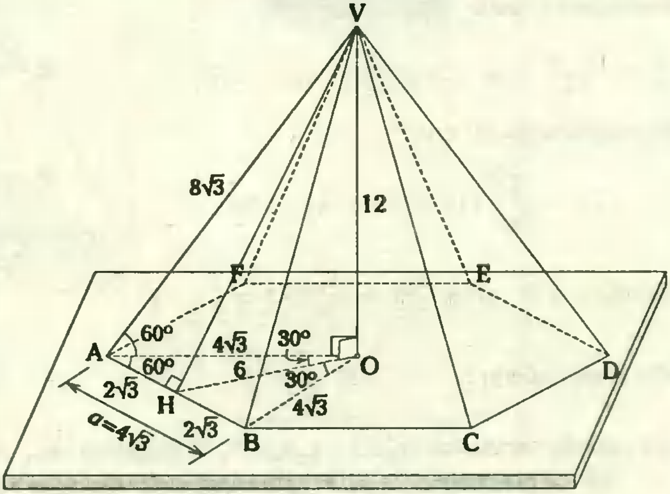
Sumando las expresiones (1) (2) y (3) : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{d^2} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\therefore \quad \boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1}$$

33.- La altura de una pirámide regular hexagonal mide 12, las aristas laterales están inclinadas 60º con respecto al plano de la base. Calcular el área de la superficie lateral del sólido

<u>**Resolución**</u>.-

Sea $\overline{VH}$ el apotema de la pirámide regular y «a» la longitud de su arista básica, luego el área lateral : A_L sera :



$A_L = 3a\,.\,VH$ ... (1)

En el ⊿ VOA de 30° y 60° :

$OA = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $VA = 8\sqrt{3}$

En el triángulo equilátero AOB :

$OH = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$

En el ⊿ VOH : $VH = \sqrt{6^2+12^2}$

$\Rightarrow$ $VH = 6\sqrt{5}$

Reemplazando en (1) : $A_L = 3(4\sqrt{3})\,(6\sqrt{5})$

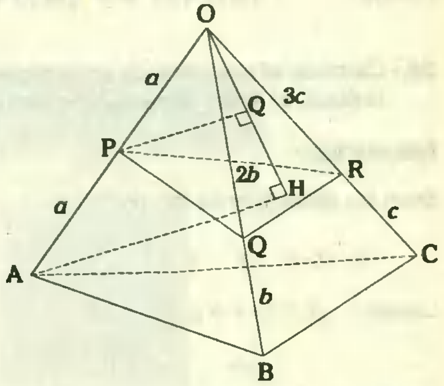
$$\therefore \quad \boxed{A_L = 72\sqrt{15}}$$

34.- Sobre las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ de una pirámide triangular O - ABC de volumen «V» se consideran los puntos P, Q y R respectivamente de tal manera que $OP = \dfrac{OA}{2}$, $BQ = \dfrac{OB}{3}$ y $CR = \dfrac{OC}{4}$. Hallar el volumen de la pirámide O - PQR.

Resolución.-

Sea V_x el volumen pedido, luego : $V_x = \frac{1}{3}\,\text{Área}\,(\Delta\,OQR) \times PQ$ ... (1)

En el Δ AHO, por base media : $PQ = \frac{AH}{2}$



En el Δ BOC : $\frac{\text{Área}(\Delta OQR)}{\text{Área}(\Delta BOC)} = \frac{2b \times 3c}{3b \times 4c} = \frac{1}{2}$

De donde : $\text{Área}\,(\Delta\,OQR) = \frac{\text{Área}(\Delta BOC)}{2}$

En (1) : $V_x = \frac{1}{3}\left[\frac{\text{Área}(\Delta BOC)}{2}\right]\frac{AH}{2}$

Entonces : $V_x = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\text{Área}(\Delta BOC) \times AH\right]$

Puesto que : $V = \frac{1}{3}\,\text{Área}\,(\Delta\,BOC) \times AH \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\,\text{Área}\,(\Delta\,BOC) = \frac{3V}{AH}$

Finalmente : $\boxed{V_x = \frac{V}{4}}$

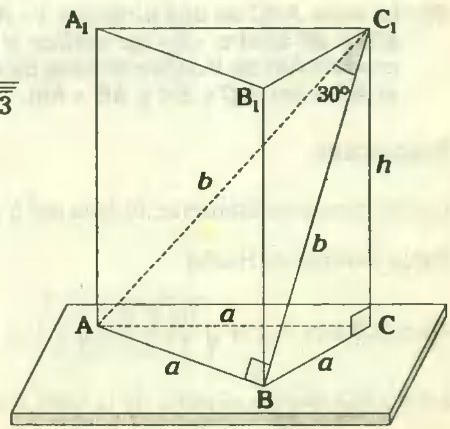
35.- En un prisma triangular regular de volumen $\frac{1}{4}\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$ el ángulo formado por las diagonales de dos caras laterales que parten de un mismo vértice (superior) mide 30º. Hallar la medida de la arista básica.

Resolución.-

El triángulo AC_1B es el triángulo elemental del dodecágono regular.

Luego, si : $AC_1 = C_1B = b$

$$\Rightarrow \quad a = b\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$



En el ⊿ C_1CB : $h^2 = b^2 - a^2$

Reemplazando :

$$h^2 = \frac{a^2}{2-\sqrt{3}} - a^2 = \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}} = a^2(\sqrt{3}+1)$$

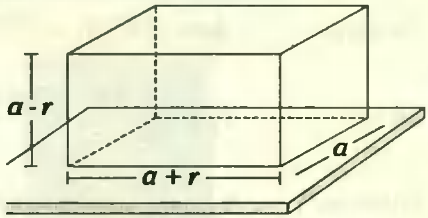
$$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{\sqrt{3}+1}$$

Por dato del problema; el volumen del prisma es : $\frac{1}{4}\sqrt{3(1+\sqrt{3})} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times a\sqrt{\sqrt{3}+1}$

Donde : $\sqrt{3(1+\sqrt{3})} = a^3\sqrt{3(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow a^3 = 1 \quad \therefore \quad \boxed{a = 1}$

36.- Calcular el volumen de un rectoedro cuyas dimensiones forman una progresión aritmética, si estas dimensiones suman 18m y el área total del sólido es 208 m^2.

Resolución.-



Sean las dimensiones del rectoedro :

a_1 $a - r$ y $a + r$

Luego : $a + a - r + a + r = 18$

$\Rightarrow \quad a = 6$

Además : $208 = 2\,[a(a-r) + a(a+r) + (a-r)(a+r)]$

Simplificando : $104 = a\,(\underbrace{a-r+a+r}_{2a}) + a^2 - r^2$

Luego : $104 = 2a^2 + a^2 - r^2 = 3a^2 - r^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = 3a^2 - 104 = 3(6)^2 - 104 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

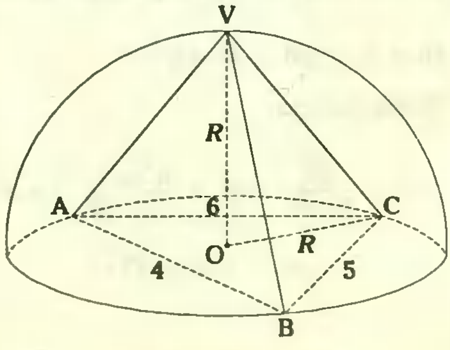
Luego las dimensiones serán : $a = 6$, $a - r = 4$ y $a + r = 8$

Finalmente, su volumen V será : $V = 6 \times 4 \times 8 = 192$

$\therefore \quad \boxed{V = 192\ m^3}$

37.- La base ABC de una pirámide V - ABC se encuentra inscrita en la base de una semiesfera de centro «O» su vértice V pertenece a la superficie semiesférica y O es la proyección de V sobre la base de la semiesfera . Calcular el volumen de la pirámide, si AB = 4m, BC = 5m y AC = 6m.

Resolución.-



Calculemos primeramente el área del Δ ABC

Por la fórmula de Herón :

Área (Δ ABC) $= A = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{15}{4}\sqrt{7}$

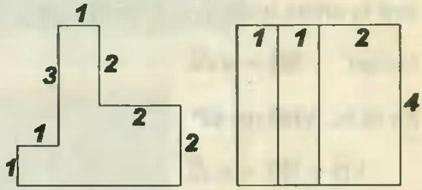
Luego calculemos el radio de la base semiesférica :

$$\frac{4\times6\times5}{4R} = \frac{15}{4}\sqrt{7} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Sea "V" el volumen de la pirámide, luego : $V = \frac{1}{3}\,A \times R = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{4}\sqrt{7}\right) \times \frac{8}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ $\mathbf{V = 10\ m^3}$

38.- En la figura se representan dos vistas de una pieza metálica que forma parte de una maquinaria, hallar el volumen de esta pieza.



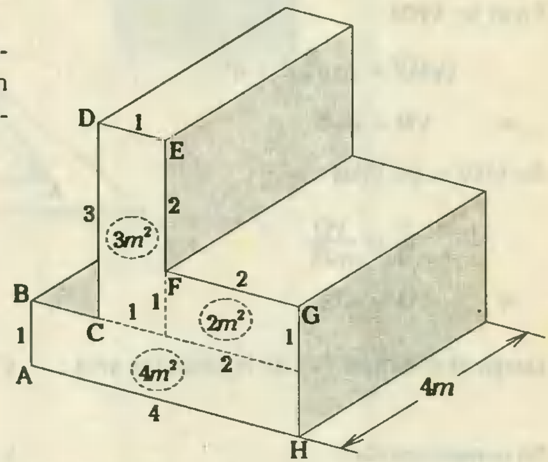
<u>Resolución</u>.-

De acuerdo a las vistas indicadas construimos la pieza metálica cuya forma es la de un prisma recto de base un octógono no convexo ABCDEFGH y de altura :

Sea V el volumen de la pieza

Luego : $V = (1 \times 4 + 3 \times 1 + 1 \times 2)\,4$

$\therefore$ $\mathbf{V = 36\ m^3}$



39.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular de apotema «a» si están inclinadas 60º respecto a la base.

<u>Resolución</u>.-

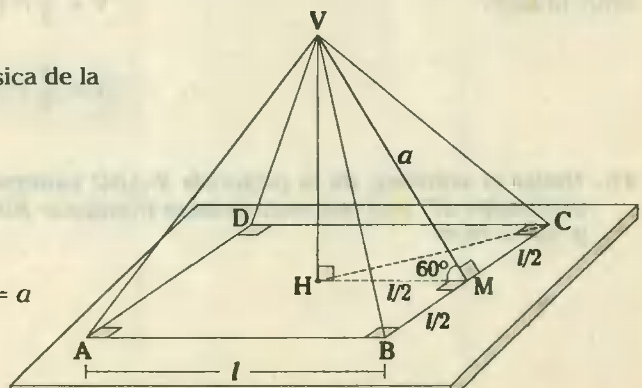
Sea " l " la longitud de la arista básica de la pirámide V - ABCD y $\overline{VH}$ su altura.

Luego : $V = \frac{1}{3}\,l^2\,(VH)$ ... (1)

En el ⊿ VHM de 30º y 60º :

$VH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ y $\frac{l}{2} = \frac{a}{2} \quad\Rightarrow\quad l = a$

Reemplazando en (1) :



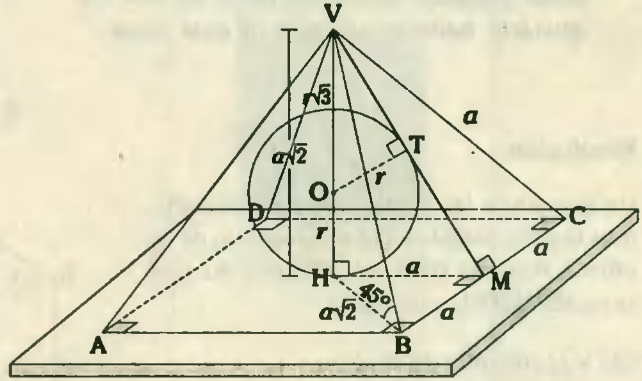
$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{V = \frac{1}{6}a^3\sqrt{3}}$$

40.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular circunscrita a una esfera de radio "r" si sus aristas laterales están inclinadas 45° respecto a la base.

Resolución.-

Sea la arista básica de la pirámide : $BC = 2a$

Luego : $BH = a\sqrt{2}$



En el ⊾ VHB de 45° :

$$VH = HB = a\sqrt{2}$$

En el ⊾ VHM :

$$(VM)^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \qquad VM = a\sqrt{3}$$

⊾ OTV ~ ⊾ VHM :

$$\frac{r}{a} = \frac{VO}{a\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \qquad VO = r\sqrt{3}$$

Luego el volumen "V" de la pirámide será : $V = \frac{1}{3}(4a^2) \cdot (r + r\sqrt{3})$

En consecuencia : $V = \frac{1}{3}\,4\left[\frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\right]^2 r\,(1 + \sqrt{3})$

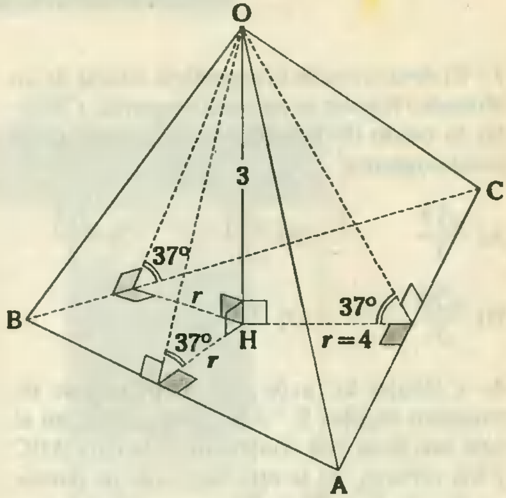
Simplificando : $V = \frac{2}{3}\,r^3\,(1 + \sqrt{3})^3$

$$\therefore \qquad \boxed{V = \frac{4}{3}\,r^3\,(5 + 3\sqrt{3})}$$

41.- Hallar el volumen de la pirámide V-ABC sabiendo que las caras laterales están inclinados 37° con respecto la base triangular ABC, además AB = 13 m, BC = 15 m y CA = 14 m.

Resolución.-

Δ ABC : H $\rightarrow$ incentro



Calculando el área del Δ ABC tenemos :

$$S = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$$

$$S = \sqrt{21.6.7.8} = 84$$

También : $S = p.r$

$\Rightarrow$ $S = 84 = 21\,(r)$

$r = 4\,m$

Luego el volumen de la pirámide será :

$$V = \frac{1.84.3}{3} = 84\,m^3$$

$\therefore$ $\mathbf{V = 84\ m^3}$

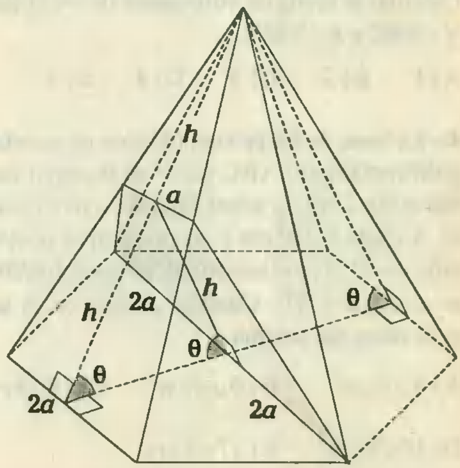
42.- Si el área lateral de una pirámide regular hexagonal es 120 m². Calcular el área de la sección plana que se determina al trazar un plano secante a la pirámide, el cual pasando por el centro de la base es paralelo a una de las caras laterales.

Resolución.-

Por dato $A_{lat} = P_{base} \,.\, Ap_{lat}$

$\Rightarrow$ $120 = 6a \,.\, 2h$

$\Rightarrow$ $ah = 10$



Sabemos que la sección determinada es un trapecio entonces :

$$S = \frac{(a+4a)}{2}\ h = \frac{5}{2}\,.\,ah$$

Reemplazando : $S = \frac{5}{2}\,(10)$

$\therefore$ $\mathbf{S = 25\ m^2}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- El desarrollo de la superficie lateral de un tetraedro regular es un paralelogramo. Calcular la razón de longitudes de los lados del paralelogramo.

A) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{29}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{38}}{3}$

2.- Calcular la razón de volúmenes de un tetraedro regular S - ABC y el prisma en el cual una base está contenido en la cara ABC y los vértices de la otra base son los puntos medios de $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ y $\overline{SC}$ respectivamente.

A) 7/3 B) 5/3 C) 8/3 D) 4/3 E) 13/3

3.- En una pirámide V- ABC, cuya altura es $\overline{VA}$, se trazan $\overline{AM} \perp \overline{VC}$ (M en $\overline{VC}$) y $\overline{AN} \perp \overline{VB}$ (N en $\overline{VB}$) ; si : BC = 2 MN. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos V - ABC y A - VMN.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.- La base de un prisma oblicuo es un triángulo rectángulo ABC recto en B, cuyo inradio mide 2 *cm*, la arista lateral cuyo extremo es A mide $3\sqrt{10}\,cm$ y su respectiva proyección es $\overline{AI}$ (I : es incentro del triángulo ABC) $m\measuredangle CAB = 37°$. Calcular el área de la sección recta del prisma.

A) $8\sqrt{5}\,cm^2$ B) $9\sqrt{5}\,cm^2$ C) $15\sqrt{5}\,cm^2$

D) $11\sqrt{5}\,cm^2$ E) $17\sqrt{5}\,cm^2$

5.- Se tiene un prisma regular cuya altura es congruente con la arista básica. Calcular el número de lados de la base del prisma, si su área lateral y total están en la relación de 3 a 2.

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

6.- En un prisma regular la arista básica mide igual que la arista lateral, además la suma de las medidas de las caras de uno de sus triedros es 300. Calcular el volumen del prisma, si su arista lateral mide 4 .

A) $128\sqrt{3}$ B) $128\sqrt{2}$ C) $144\sqrt{3}$

D) $96\sqrt{3}$ E) $48\sqrt{3}$

7.- Se tiene una pirámide hexagonal regular en la cual su arista lateral es tres veces su arista básica. Calcular la distancia del pie de su altura hacia una arista lateral, si su arista básica tiene una longitud igual a «*d*».

A) $\frac{1\sqrt{2}}{3}d$ B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}d$ C) $\frac{8\sqrt{2}}{3}d$

D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}d$ E) $\frac{6\sqrt{2}}{3}d$

8.- En un prisma recto ene-angular regular cuyas aristas laterales y básicas miden *a*, se ubican los puntos A y B que son los extremos de una arista lateral. Calcular la longitud del menor recorrido que se debe realizar para ir de A hacía B por la superficie lateral.

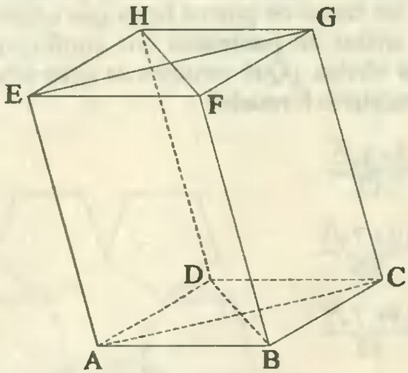
A) $a\sqrt{n^2+2}$ B) $a\sqrt{n^2-1}$ C) $a\sqrt{n^2+1}$

D) $a\sqrt{n^2-2}$ E) $a\sqrt{n^2-3}$

9.- Se tiene un prisma cuadrangular cuya altura mide 12, la base es un cuadrilátero ABCD donde $m\measuredangle B = m\measuredangle D = 90$; las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC son tangentes a $\overline{AC}$ en "M" y "N" tal que AM = 3, MN = 2 y NC = 1 . Calcular el volumen del prisma.

A) 144 B) 168 C) 192 D) 228 E) 248

10.- En el romboedro ABCD - EFGH; mostrado se sabe que las áreas de las regiones AEGC, BDHF, ABFE y BCGF son A_1, A_2, A_3 y A_4 respectivamente, luego la relación correcta es:



A) $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$

B) $A_1^2 + A_2^2 = A_3^2 + A_4^2$

C) $A_1^2 + A_2^2 = 2(A_3^2 + A_4^2)$

D) $A_1 \times A_2 = A_3 . A_4$

E) $A_1^2 + A_2^2 = 3(A_3^2 + A_4^2)$

11.- Se tiene un prisma recto ABCD - A'B'C'D' cuyas bases son regiones de trapecios rectángulos (recto en A y D) de modo que AD = 5, AA' = 12. El área de la superficie lateral es el doble del área de la región ABC'D'. Si $\overline{BC}$ toma su mínimo valor entero, calcular el volumen de la pirámide C'- ABCD.

A) $1320cm^3$ B) $1230cm^3$ C) $1130cm^3$

D) $1000cm^2$ E) $1030cm^3$

12.- La base de un prisma oblicuo es un triángulo rectángulo ABC recto en B, tal que AB = 24 y BC = 32. La arista lateral que parte de "A" mide 85 y se proyecta sobre la base según la dirección $\overline{AB}$; si la proyección de esta arista sobre la base mide 40. Calcular el área de la sección recta (aproximadamente)

A) 424 B) 338 C) 249 D) 541 E) 296

13.- En un prisma triangular recto ABC-A'B'C' se toman los puntos M, N y P sobre las aristas laterales $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ de modo que: AM = 2.MA' y BN = PC'. Hallar el volumen del tronco de prisma ABCMNP, si el volumen del prisma total es $9m^3$.

A) $1m^3$ B) $2m^3$ C) $3m^3$ D) $4m^3$ E) $5m^3$

14.- La altura de un prisma recto mide 1, su base es un rombo cuyo lado mide 2, donde uno de sus ángulos mide 60°, por un lado de la base se ha trazado un plano secante al prisma que forma un diedro que mide 30° con el plano de la base. Calcular el área de la sección producida.

A) 4 B) 3 C) 2 D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}/3$

15.- Calcular el volumen de un prisma oblicuo, cuya altura es congruente con el diámetro de la circunferencia circunscrita a su base. Dicha base es un polígono regular cuyo lado mide 2, además la suma de las medidas de los diedros del prisma es 1800.

A) $12\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$

D) $36\sqrt{3}$ E) $54\sqrt{3}$

16.- Se tiene una pirámide regular cuadrangular O - ABCD; si AB = OC = a. Calcular la mínima distancia entre $\overline{DA}$ y $\overline{CD}$.

A) $a\sqrt{3}/2$ B) $a\sqrt{5}/2$ C) $a\sqrt{3}/3$

D) $2a\sqrt{3}/3$ E) $a\sqrt{6}/3$

17.- En un prisma PQR - BST de base regular se sabe que las aristas lateral y básica miden a y b respectivamente. Calcular el volumen de dicho prisma, sabiendo que las aristas laterales forman con las aristas básicas un ángulo agudo cuya medida es 45.

A) $ab^2/2$ B) $ab^2/4$ C) $a^2b/4$

D) $ab^2\sqrt{3}/4$ E) $ab^2\sqrt{6}/3$

18.- En una pirámide triangular O - ABC las aristas AB y OC son ortogonales, las caras AOB y ACB son triángulos equiláteros y $\dfrac{OC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calcular la medida del diedro $\overline{AB}$.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 53° E) 90°

19.- En una pirámide triangular A-BCD las áreas de las cara ABD y ABC son S_1 y S_2 respectivamente. Calcular la distancia del baricentro de la cara ADC hacia ABC, si dicho punto dista "a" de la cara ABD.

A) $\dfrac{S_1+S_2}{a}$ D) $\dfrac{S_1S_2}{(S_1+S_2)a}$

B) $\dfrac{(S_1+S_2)S_1}{a^3}$ E) $\dfrac{S_1a}{S_2}$

C) $\dfrac{(S_1+S_2)S_2}{a^3}$

20.- Se tiene una pirámide cuya base es una de las caras de un hexaedro regular cuya arista mide "a"; además el vértice de la pirámide es un punto perteneciente a una de las diagonales del hexaedro, si la suma de los cuadrados de las medidas de las aristas laterales de la pirámide es $4a^2$. Calcular la medida de la altura de la pirámide.

A) $2a/5$ B) $a/2$ C) $a/3$

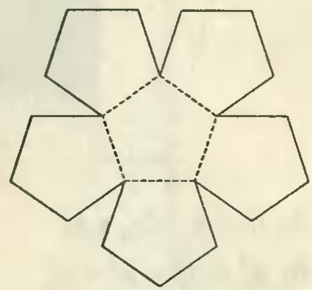
D) $2a/3$ E) $a\sqrt{2}/3$

21.- En una pirámide pentagonal regular A - BCDEF tal que AB = BC = 2 . Calcular el área de la sección determinada en la pirámide por un plano que pasa por los vértices B y D y por los puntos medios de las aristas AF y AE.

A) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{4}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{35}+2\sqrt{7}}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}$

22.- La figura adjunta se compone de seis pentágonos regulares de lado $1m$; se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice. ¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?



A) $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{12}$

B) $\dfrac{12+7\sqrt{5}}{15}$

C) $\dfrac{15+7\sqrt{5}}{12}$

D) $\dfrac{17+5\sqrt{7}}{10}$

E) $\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}$

23.- En un paralelepípedo oblicuo ABCD - A'B'C'D' en $\overline{AC}$ se ubica un punto P de modo que AP = 3PC. Determinar la sección plana que se origina por un plano que pasa por $\overline{BP}$ y es paralelo a AD' sobre el paralelepípedo.

A) Cuadrangular D) hexagonal

B) Pentagonal E) heptagonal

C) triangular

24.- Se considera una pirámide regular cuadrangular de $10m$ de arista básica. Calcular su área total si sus aristas laterales miden $10m$.

A) $100\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D) 400

B) $100(1+\sqrt{3})$ E) 200

C) $100(1+2\sqrt{3})$

25.- Se considera una pirámide V - ABC, por "M" punto medio de $\overline{VB}$ se traza un plano paralelo a $\overline{VC}$ que intersecta a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{VA}$ en N, Q y P respectivamente. Calcular la razón entre los volúmenes de los sólidos determinados si : $\dfrac{PQ}{MN} = \dfrac{2}{3}$

A) $\dfrac{12}{7}$ B) $\dfrac{11}{7}$ C) $\dfrac{10}{3}$

D) $\dfrac{21}{11}$ E) $\dfrac{13}{7}$

26.- En una pirámide cuadrangular regular el apotema es igual a la arista básica si su área lateral es $128\,m^2$. Calcular su altura.

A) $16\sqrt{3}$ B) 8 C) $12\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$ E) 4

27.- En una pirámide regular A - BCD se ubican los puntos M, N, T y O, baricentros de las caras ABC, ACD, ADB y BCD respectivamente. Calcular la razón de los volúmenes del hexaedro A - MNT - O y de la pirámide A - BCD.

A) 1/3 B) 1/5 C) 1/ 6

D) 1/9 E) 1/12

28.- Se consideran 2 pirámides regulares equivalentes A - BCD y M - PQS de modo que PQ = DA = 2 y $\overline{DC}$ toma su máximo valor entero. Calcular la distancia de M a la región triangular PQS.

A) 9/2 B) 3 C) 2 D) 9/4 E) 1

29.- La altura de una pirámide triangular mide "a" . Los ortocentros de sus caras laterales y su vértice pertenecen a una superficie esférica de radio "R"; calcular el volumen de la pirámide.

A) $a^2\,(a - 2R)$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a^2(a - 2R)$

B) $a^2\,R$ E) $a^2R\sqrt{3}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a^2\,(a + 2R)$

30.- La base de la pirámide S - ABCD es el cuadrado ABCD. En la cara lateral SAB, perpendicular al plano de la base y que es un triángulo regular se ha trazado la mediana AK. El punto K se une con C; calcular la medida de los ángulos formados por $\overline{AK}$ con el plano de la base.

A) 30° B) 45° C) 53° D) 60° E) 37°

31.- La diagonal de un prisma cuadrangular regular forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Calcular la medida del ángulo que forman esta diagonal y la diagonal de la cara lateral que la intersecta.

A) 45° B) 30° C) 60° D) 75° E) 53°

32.- Por la diagonal $\overline{AC}$ de la base de una pirámide cuadrangular regular S - ABCD, se traza un plano secante perpendicular a la cara SAD. ¿Qué ángulo forma la arista SD con el plano secante?

A) 45° B) 30° C) 53° D) 60° E) 90°

33.- En la pirámide cuadrangular regular S - ABCD : la razón entre la altura $\overline{SO}$ y el lado $\overline{AB}$ de la base es igual a $\dfrac{2}{3}$; en la diagonal $\overline{AC}$ se ubica el punto P de modo que AP = $\overline{PO}$. Calcular la medida del ángulo formado por SP y el plano SAD.

A) Arc sen$\left(\dfrac{6\sqrt{32}}{205}\right)$

B) Arc sen$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C) Arc sen$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$

D) Arc sen$\left(\dfrac{3\sqrt{41}}{205}\right)$

E) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{2\sqrt{41}}{125}\right)$

34.- En un prisma triangular oblicuo de bases ABC y DEF, el área de su sección recta es $5m^2$, la arista lateral BF mide $10m$ y la cara ABFD tiene área de $100m^2$. Calcular la distancia de CE a la cara ABDF.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m

D) 0,5 m E) $\sqrt{3}$ m

35.- En un rectoedro de dimensiones $5\sqrt{2}$, 5 y 5 m, calcular la medida del menor ángulo que forman sus diagonales.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

36.- La base de la pirámide S - ABCD es un rectángulo con lados AD = a y AB = b, la altura de la pirámide se proyecta en el punto O, punto de corte de las diagonales de la base, la arista lateral forma 30° con la base. Calcular el ángulo entre $\overline{DP}$ y el plano SAC, si P es punto medio de SO.

A) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{2ab}{(a^2+b^2)\sqrt{7}}\right)$

B) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{4ab}{(a^2+b^2)\sqrt{7}}\right)$

C) $Arc\ \text{sen}\ \dfrac{(3ab)}{(a^2+b^2)\sqrt{7}}$

D) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{a}{b}\right)$

E) $Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right)$

37.- Calcular el área total de un prisma recto cuadrangular de 14 m de altura; si el área del rombo que tiene por base 24 m^2 y la diagonal menor del rombo mide 6 m.

A) 428 m^2 B) 328 m^2 C) 445m^2

D) 200 m^2 E) 150 m^2

38.- Las aristas de un paralelepípedo que miden "a" y "b" son perpendiculares entre si, en tanto que la tercera arista de longitud "c" forma con cada una de las dos primeras α. Calcular el volumen del sólido.

A) $abc\sqrt{\cos\alpha}$ D) $2abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$

B) $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$ E) $3abc\sqrt{\cos\alpha}$

C) $abc\sqrt{\text{sen}\,\alpha}$

39.- La base de un prisma es un triángulo regular cuyo lado es igual a "a"; cada arista lateral es igual a "b" y el ángulo entre una de las aristas laterales y los lados de la base adyacentes a ella mide 45°. Calcular su área lateral.

A) $ab\sqrt{2}$ D) $ab(\sqrt{2}+1)$

B) $\dfrac{ab\sqrt{2}}{2}$ E) ab

C) $ab(\sqrt{2}-1)$

40.- La base de un paralelepípedo recto es un paralelogramo cuyos lados miden 1 y 4 y el ángulo obtuso mide "θ". Calcular el volumen del paralelepípedo, si su diagonal menor es igual a la diagonal mayor de la base.

A) $4\text{sen}\,\theta\sqrt{-\cos\theta}$ D) $8\text{sen}\theta\sqrt{-\cos\theta}$

B) $8\cos\theta\sqrt{-\text{sen}\,\theta}$ E) $16\ \text{sen}\theta\sqrt{-\cos\theta}$

C) $-8\cos\theta\sqrt{-\cos\theta}$

CAP. 27

cilindro y cono

27.1 SUPERFICIE CILÍNDRICA - CILINDRO

Se llama superficie cilíndrica, a aquella superficie generada por una recta $\overleftrightarrow{AB}$ que se desplaza paralelamente a sí misma, apoyándose en una línea curva plana y cerrada BDE tal como se muestra en la *Fig*. 27.1 .

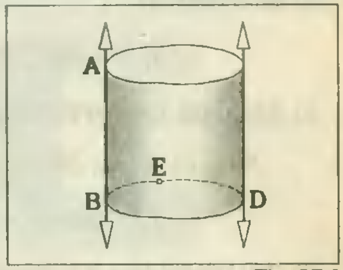


Fig. 27.1

A la recta AB se le denomina Generatriz y a la curva plana BDE se le llama Directriz. Establecidas estas dos definiciones, diremos que el cilindro es el sólido que se determina al intersectar la superficie cilíndrica, con dos planos paralelos entre sí.

Las secciones determinadas por los planos paralelos en la superficie cilíndrica se llaman Bases del cilindro y los segmentos determinados, que son parte de las generatrices de la superficie cilíndrica, son las generatrices del cilindro.

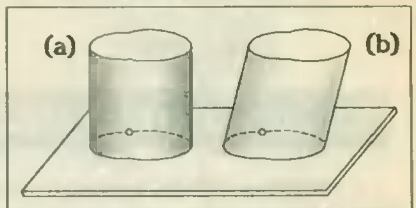


Fig. 27.2

Un cilindro es recto si sus generatrices son perpendiculares a sus bases como se observa en la *Fig*. 27.2a y si las generatrices son oblicuas con relación a las bases, el cilindro será oblicuo, tal como la *Fig*. 27.2b.

27.2 CILINDRO CIRCULAR RECTO

Se llama cilindro Circular Recto o Cilindro de Revolución al cilindro cuyas bases son círculos y sus generatrices son perpendiculares a sus correspondientes bases. (*Fig*. 27.3)

En un cilindro circular recto la sección producida por un plano secante y no paralelo a sus bases es una Elipse que en la *Fig*. 27.3 está representado por S.

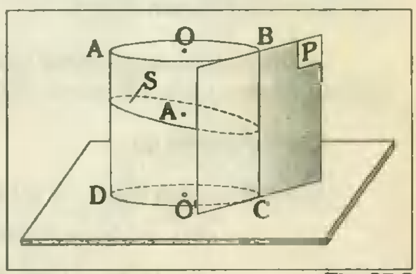


Fig. 27.3

El plano P es tangente al cilindro si éste contiene a la generatriz $\overline{BC}$. Se llama eje del cilindro recto u oblicuo al segmento $\overline{OO'}$ que une los centros de sus bases. La sección axial del cilindro recto es el rectángulo ABCD y si éste es un cuadrado entonces el cilindro se llama equilátero.

27.3 ÁREA Y VOLUMEN DE UN CILINDRO RECTO

Conociendo la longitud «R» del radio básico y la longitud «g» de la generatriz del cilindro recto se verifican las siguientes relaciones :

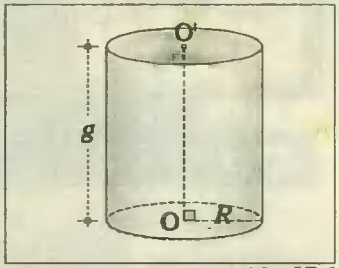


Fig. 27.4

A) ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (S_L)

Es igual al perímetro de la base ($2\pi R$) multiplicado por su generatriz (g)

$$S_L = 2\pi Rg \qquad \text{... (27.1)}$$

B) ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (S_T)

Es igual al área de la superficie lateral más la suma de las áreas de las bases.

$$S_T = 2\pi R\,(g + R) \qquad \text{... (27.2)}$$

C) VOLUMEN DEL CILINDRO (V) .

Es igual al área de la base multiplicada por la longitud de la generatriz.

$$V = \pi R^2 g \qquad \text{... (27.3)}$$

27.4 CILINDRO OBLICUO

Se llama cilindro oblicuo a aquel cuyas bases son Elipses y sus generatrices no son perpendiculares a sus bases como el mostrado en la *Fig*. 27.5. En un cilindro oblicuo es fácil notar que la altura h es menor que la generatriz y que la sección axial es un paralelogramo tal como ABCD.

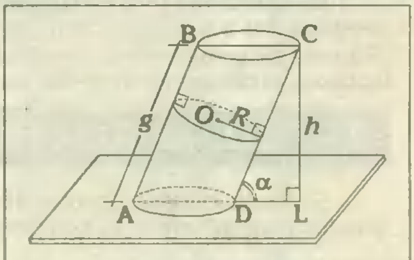


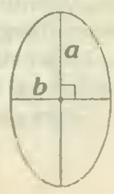
Fig. 27.5

En el cilindro oblicuo la sección producida por un plano perpendicular a sus generatrices es un círculo llamado Sección Recta.

Asimismo debemos notar que la inclinación del cilindro viene dado por el ángulo que forman su generatriz $\overline{CD}$ con el plano de la base.

Cumpliéndose que : $\quad h = g \operatorname{sen} \alpha \quad$ ... (27.4)

Además en una elipse se verifica que :



a → Longitud del semi - eje mayor

b → Longitud del semi - eje menor

Area de la Región Elíptica $= \pi\, ab$

27.5 ÁREA Y VOLUMEN DE UN CILINDRO OBLICUO

Siendo g y h las longitudes de la generatriz y la altura del cilindro oblicuo mostrado (*Fig.* 27.6) y «S» el área de su base elíptica se verifican las siguientes relaciones.

A) ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (S_L)

Es igual al perímetro de la sección recta multiplicado por la longitud de la generatriz.

$$S_L = 2\pi Rg \quad \text{... (27.5)}$$

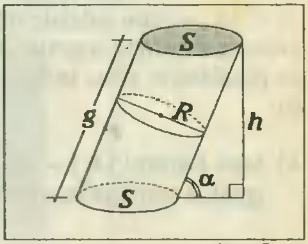


Fig. 27.6

B) ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (S_T)

Es igual al área de la superficie lateral más la suma de las área de sus bases.

$$S_T = 2\pi Rg + 2S \quad \text{... (27.6)}$$

C) VOLUMEN (V)

Es igual al área S de la base multiplicada por la longitud de su altura «h» o el área de la sección recta multiplicada por la longitud de la generatriz.

$$V = S \,.\, h = \pi R^2 g \quad \text{... (27.7)}$$

27.6 SUPERFICIE CÓNICA - CONO

Se llama superficie cónica, a aquella superficie engendrada por una recta AA' que se mueve en el espacio pasando siempre por un punto fijo P y apoyándose en una línea curva plana ABC tal como se muestra en la *Fig.* 27.7 .

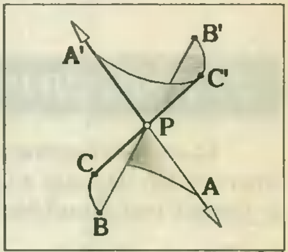


Fig. 27.7

La recta AA' se llama generatriz y la curva plana ABC directriz. El punto P recibe el nombre de vértice de la superficie cónica. La superficie cónica se compone de dos partes o mantos opuestos por el vértice.

Un cono cualquiera es el sólido comprendido entre una superficie cónica cerrada y un plano que corta a todas las generatrices (*Fig.* 27. 8).

El punto P se llamará vértice o cúspide, la sección determinada por el plano secante (ABC) se llamará Base del cono, el segmento que se traza desde el vértice en forma perpendicular a la base ($\overline{PH}$) es la altura y el segmento que une el vértice con cualquier punto de la circunferencia de la base ($\overline{PA}$) se llamará generatriz del cono.

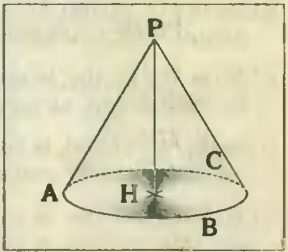


Fig. 27.8

27.7 CONO CIRCULAR RECTO

Se llama cono circular recto al cono cuya base es un círculo y sus generatrices son congruentes (*Fig*. 27.9) .

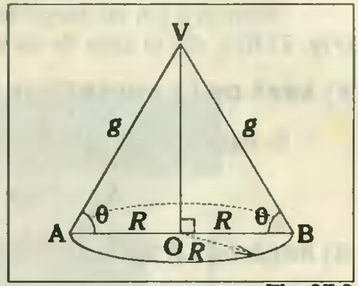


Fig. 27.9

En un cono circular recto, el pie (O) de la altura $\overline{VO}$ cae en el centro de la base circular y sus generatrices forman ángulos congruentes (θ) con el plano de la base.

La sección axial de un cono recto es un triángulo isósceles tal como la superficie limitada por el Δ AVB . Un cono es equilátero, si su sección axial es un triángulo equilátero.

A) Área Lateral (A_L) .- El área lateral de un cono recto es igual al semiperímetro de su base multiplicado por su generatriz.

$$A_L = \pi R g \qquad \text{... (27.8)}$$

B) Área Total (A_T) .- El área total de un cono recto es igual a su área lateral aumentado en el área de su base.

$$\text{(27.9) ...} \qquad A_T = \pi R g + \pi^2 \qquad\qquad A_T = \pi R(g + R) \qquad \text{... (27.10)}$$

C) Volumen (V) .- El volumen de un cono recto es igual a la tercera parte del producto entre el área de su base y su altura.

$$V = \pi R^2 h / 3 \qquad \text{... (27.11)}$$

27.8 SECCIONES CÓNICAS

Llamamos sección cónica a la intersección de un plano cualquiera con un cono recto. Esta intersección da lugar a una superficie limitada por una línea curva a quien comúnmente se le conoce con el nombre de cónica. A continuación te presento las siguientes observaciones :

A) En la *Fig*. 27.10a, la sección cónica producida por un plano que pasa por el vértice y corta al cono es un TRIANGULO.

B) En la *Fig*. 27.10b, si el plano secante es paralelo a la base del cono, la sección producida es una CIRCUNFERENCIA.

C) En la *Fig*. 27.10c, la sección es una ELIPSE, producida cuando el plano secante corta todas las aristas y no es paralelo a la base del cono ni a las generatrices.

D) En la *Fig*. 27.10d, la sección es una PARABOLA, que resulta ser la trayectoria teórica de un proyectil lanzado cerca de la tierra. En este caso el plano secante es paralelo a una generatriz.

E) En la *Fig*. 27.10e, la sección es una HIPERBOLA, la cual se obtiene por medio de un plano secante paralelo al eje del cono pero sin contenerlo.

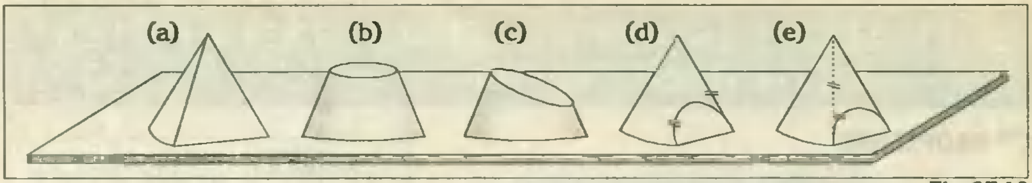


Fig. 27.10

27.9 DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO

El desarrollo de la superficie lateral de un cono recto, es un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono recto (*Fig.* 27.11) y cuyo arco tiene la misma longitud de la circunferencia de la base del cono.

Puesto que la superficie lateral del cono y el sector circular determinado es la misma superficie pero con forma diferente, concluimos que sus áreas son iguales, es decir :

$$A_L\ (\text{CONO}) = A\ (\sphericalangle\ AVB) \qquad \text{... (27.12)}$$

$$\Rightarrow \qquad \pi R g = \pi g^2\ \frac{\theta}{360} \qquad \text{... (27.13)}$$

$$\therefore \qquad \frac{R}{g} = \frac{\theta}{360} \qquad \text{... (27.14)}$$

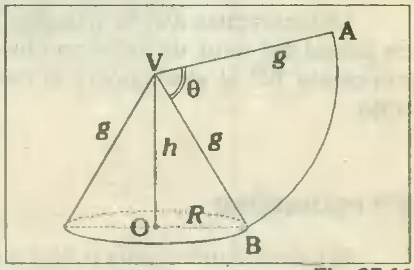


Fig. 27.11

27.10 CONOS SEMEJANTES

Al trazar un plano paralelo a la base de un cono y que intersecta su superficie lateral, la sección producida, llamada sección transversal a la base de un cono, el cual resulta ser semejante al cono total, cumpliéndose que todos sus elementos homólogos son proporcionales entre sí, la razón de sus áreas es igual a la razón de los cuadrados de sus elementos homólogos y la razón de sus volúmenes es igual a la razón de los cubos de estos elementos.

En la figura adjunta se cumplen las siguientes relaciones :

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{\textit{Area}\ (V-A'B')}{\textit{Area}\ (V-AB)} = \frac{(VA')^2}{(VA)^2} = \ldots = \frac{r^2}{R^2}$$

$$\frac{\text{Volumen}(V-A'B')}{\text{Volumen}(V-AB)} = \frac{(VA')^3}{(VA)^3} = \ldots = \frac{r^3}{R^3}$$

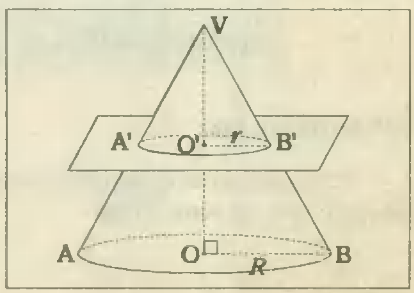


Fig. 27.12

27.11 ALGUNAS PROPIEDADES REFERENTES A CILINDRO Y CONO

1RA PROPIEDAD

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro recto es un rectángulo o cuadrado de modo que uno de sus lados es la longitud de la circunferencia de la base y el otro lado la altura del cilindro.

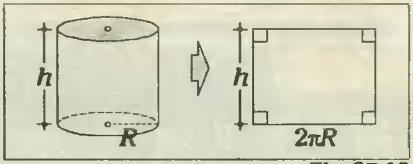


Fig. 27.13

2DA PROPIEDAD

El cono circular recto o cono de revolución, se engendra por un triángulo rectángulo ABC, que gira 360° alrededor de uno de sus catetos $\overline{AB}$.

La hipotenusa $\overline{AC}$, es la que genera la superficie lateral del cono, de allí el nombre de generatriz y el cateto $\overline{BC}$ al girar genera la base circular del cono.

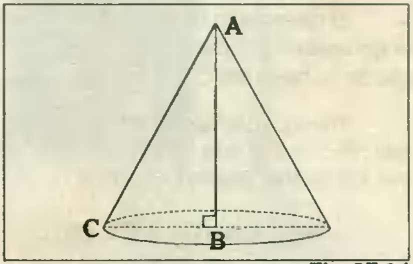


Fig. 27.14

3RA PROPIEDAD

El menor camino para ir de A a B viajando por la superficie lateral del cilindro esta dado por la diagonal del rectángulo que se origina al desarrollar su superficie lateral.

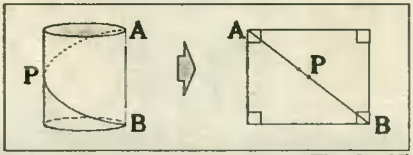


Fig. 27.15

4TA PROPIEDAD

Si R es el radio de la sección recta de un cilindro oblicuo. A el área de una de sus bases elípticas y α la medida del ángulo de inclinación del cilindro respecto a sus bases entonces :

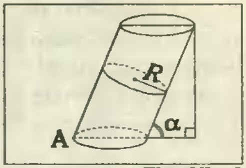


Fig. 27.16

$$\pi R^2 = A\cos(90 - \alpha) \qquad \text{... (27.15)}$$

5TA PROPIEDAD

El desarrollo de la superficie lateral de un cono equilátero es un semicírculo.

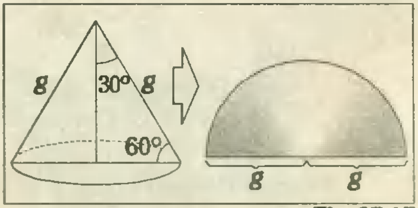


Fig. 27.17

6TA PROPIEDAD

Todo plano que contiene una tangente ($\mathcal{L}$) a la base y la generatriz ($\overline{VA}$) que pasa por el punto de contacto es, tangente al cono.

Todo plano tangente corta a la base según una tangente a dicha base.

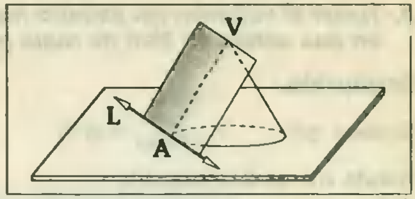


Fig. 27.18

7MA PROPIEDAD

Volumen de un cono oblicuo

$$V = \frac{1}{3}\,S.H \qquad \dots (27.16)$$

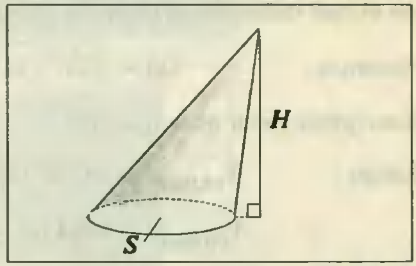
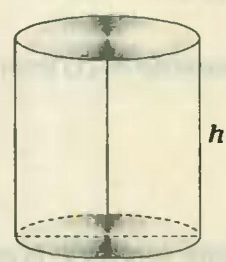


Fig. 27.19

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar el volumen del cilindro recto de área total «S» si la media armónica del radio y la altura es «M»

<u>Resolución</u>.-



El área total de un cilindro recto es : $S = 2\pi rh + 2\pi r$

o también : $S = 2\pi r\,(h + r)$

Ahora el volumen será : $V = \pi r^2 h$

o también : $V = (\pi r)\,(rh)$

Multiplicando y dividiendo por $4(h + r)$

Se tendrá : $V = (\pi r)\,(rh) \cdot \dfrac{4(h+r)}{4(h+r)}$

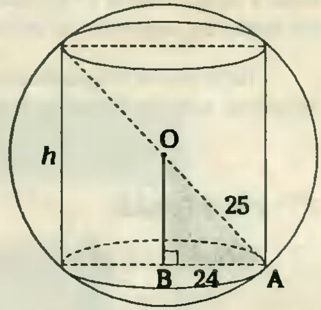
Agrupando convenientemente : $V = \dfrac{1}{4}\,[2\,\pi r(h + r)]\left[\dfrac{2hr}{h+r}\right]$

Reconociendo cada paréntesis : $V = \dfrac{1}{4}\,[S]\,\,[M]$

$$\therefore \quad V = \frac{S.M}{4}$$

2.- Hallar el volumen del cilindro recto de 24m de radio de la base y que se halla inscrito en una esfera de 25m de radio (el centro de la esfera es interior al cilindro)

Resolución.-



Se sabe que : $V_{CILINDRO} = \pi r^2 h$

Donde «h» es desconocido

Ahora, trazamos $\overline{AO}$ y formamos el triángulo rectángulo en el cual utilizando el teorema de Pitágoras

Tenemos : $OB = \sqrt{25^2 - 24^2} \Rightarrow OB = 7m$

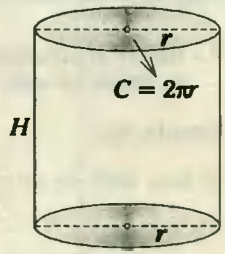
Esto quiere decir que : $h = 2(7) \Rightarrow h = 14m$

Luego : $V_{CILINDRO} = \pi (24)^2 (14)$

$\therefore \boxed{V_{CILINDRO} = 8064\ m^3}$

3.- Hallar el volumen del cilindro recto de altura «H» si la longitud de la circunferencia de su base es «C»

Resolución.-



Se sabe que : $V = \pi r^2 H \quad ... (1)$

Ahora, para cancelar el radio se sabe que : $C = 2\pi r$

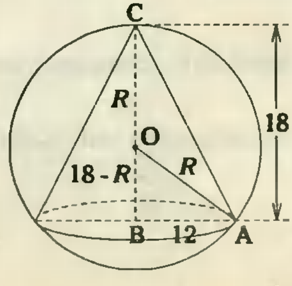
Entonces : $r = \dfrac{C}{2\pi}$

Sustituyendo en (1) tenemos : $V = \pi \left(\dfrac{C}{2\pi}\right)^2 (H)$

$\therefore \boxed{V = \dfrac{C^2 \cdot H}{4\pi}}$

4.- Hallar el radio de la esfera en la cual se halla inscrito un cono recto de 12m de radio de la base y 18m de altura. Si el centro de la esfera es interior al cono.

Resolución.-



Como $\overline{OC}$ es el radio de la esfera $\overline{OB}$ será : $OB = 18 - R$

Trazando $\overline{AO}$ se forma el triángulo AOB en el cual :

$$(18 - R)^2 + 12^2 = R^2$$

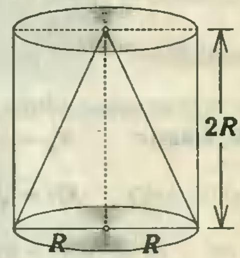
Donde : $18^2 - 36R + R^2 + 12^2 = R^2$

$\therefore \boxed{R = 13}$

5.- *El volumen de un cilindro es 300m³. Hallar el volumen del cono recto inscrito en el cilindro equilátero.*

Resolución.-

Como el cilindro es equilátero, su generatriz será igual al diámetro de su base.



Entonces : $V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi R^2 . 2R$

También : $V_{CIL} = \pi R^2 (2R)$

Ahora para cancelar el radio que no se conoce, se dividen ambas ecuaciones :

$$\frac{V_{CONO}}{V_{CIL}} = \frac{\left(\frac{2\pi R^3}{3}\right)}{(2\pi R^3)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CONO} = \frac{1}{3} V_{CIL} \text{ (Teorema)}$$

Sustituyendo el dato : $V_{CONO} = \frac{1}{3} \cdot 300\, m^3$

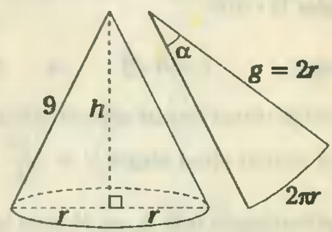
$$\therefore \quad \mathbf{V_{CONO} = 100\, m^3}$$

6.- *Hallar el ángulo central del sector circular que se obtiene al desarrollar la superficie lateral de un cono equilátero.*

Resolución.-

Como el cono es equilátero, entonces la generatriz será igual al diámetro de su base : $g = 2r$

Ahora, se sabe que : $\alpha = 360 \cdot \frac{r}{g}$



Donde : r → radio del cono

g → generatriz del cono

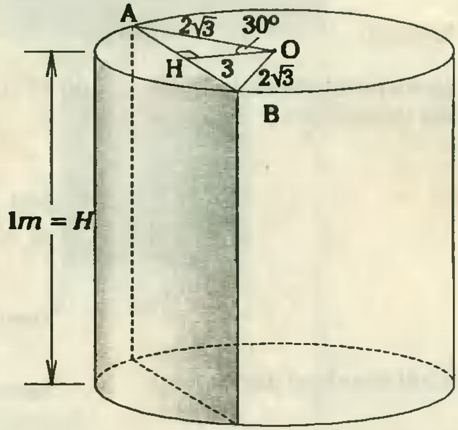
Entonces reemplazando : $\alpha = 360 \cdot \frac{r}{2r}$

$$\therefore \quad \mathbf{\alpha = 180°}$$

MISCELÁNEA

1.- En un cilindro recto de radio $2\sqrt{3}$ cm; se traza un plano perpendicular a su base, el cual dista del centro de ella 3cm. Calcular el volumen de la menor parte en que queda dividido el cilindro si su altura mide 1m.

Resolución.-



Sea "V_x" el volumen del sólido y A el área de su base, luego : $V_x = A \cdot 10^3$ ... (1)

En el ⊿ AHO : $AH = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle AOH = m\measuredangle HOB = 30^\circ$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle AOB = 60^\circ$

El área "A" se calcula como :

$$A = \frac{\pi(2\sqrt{3})^2 60}{360} - \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

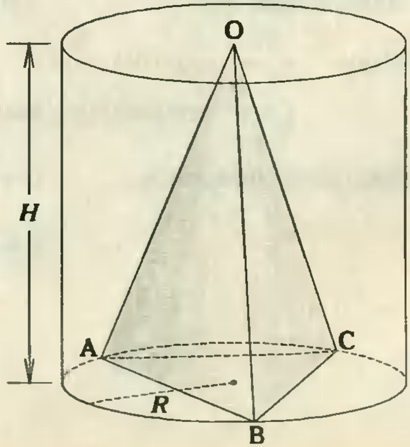
Por consiguiente : $A = 2\pi - 3\sqrt{3}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $V_x = (2\pi - 3\sqrt{3})\, 10^3$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{V_x = 12\,470\ cm^3}$

2.- Calcular la relación de las áreas laterales de un cilindro recto y del tetraedro regular inscrito en dicho cilindro de modo que su base quede inscrita en la base del cilindro.

Resolución.-

Consideremos que sea "R" el radio de la base del cilindro y "l" el lado de la base ABC del tetraedro regular O - ABC,



Luego : $l = R\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = l/\sqrt{3}$

Además observamos que el cilindro y el tetraedro regular tienen igual altura $H = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$

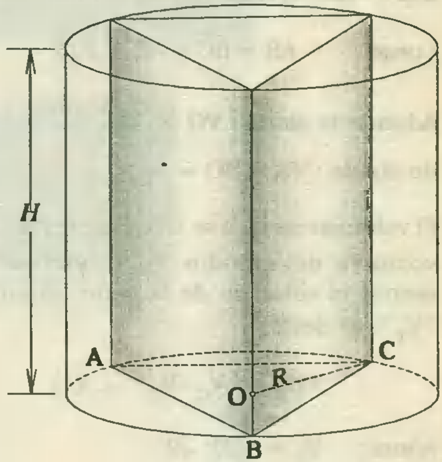
Consideramos que A_T es el área lateral del tetraedro y A_C del cilindro, se tiene :

$$\frac{A_T}{A_C} = \frac{3\left(\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)}{\pi R H} = \frac{3l^2\sqrt{3}.}{4\pi \dfrac{l}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{l\sqrt{6}}{3}}$$

En consecuencia : $\dfrac{A_T}{A_C} = \dfrac{3l^2\sqrt{3}.3\sqrt{3}}{4\pi l^2\sqrt{6}}$ $\therefore$ $\dfrac{A_T}{A_C} = \dfrac{27}{4\pi\sqrt{6}}$

3.- En un cilindro recto se inscribe un prisma triangular regular. ¿Qué relación existe entre los volúmenes de dichos sólidos?

Resolución.-



Sea "R" el radio de la base del cilindro y ABC la base del prisma inscrita en esta.

Luego : $AB = BC = AC = R\sqrt{3}$

Del gráfico observamos que tanto el cilindro como el prisma tienen igual altura "H".

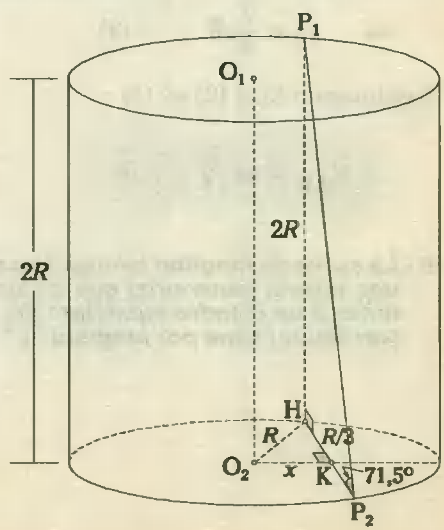
Sean "V_C" el volumen del cilindro y "V_P" del prisma.

Luego : $\dfrac{V_C}{V_P} = \dfrac{\pi R^2.H}{\dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}.H} = \dfrac{4\pi R^2}{3R^2.\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\boxed{\dfrac{V_C}{V_P} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$

4.- En un cilindro el radio de la base mide "R" un punto de la circunferencia de la base superior se une con un punto de la circunferencia de la base inferior, la recta trazada por dichos puntos forma con el plano de la base un ángulo de 71,5º . Calcular la distancia entre la recta y el eje de simetría del cilindro, si su generatriz mide "2R".

Resolución.-



Sea $\overline{HP_2}$ la proyección del segmento $\overline{P_1P_2}$ sobre la base del cilindro, luego $\overline{O_2K}$ es la mínima distancia buscada.

En el ⊿ P_1HP_2 : $HP_2 = \dfrac{2R}{3}$

Entonces : $HK = KP_2 = \dfrac{R}{3}$

En el ⊿ O_2KH : $x^2 = R^2 - \left(\dfrac{R}{3}\right)^2$

Donde : $x^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{9} = \dfrac{8R^2}{9}$

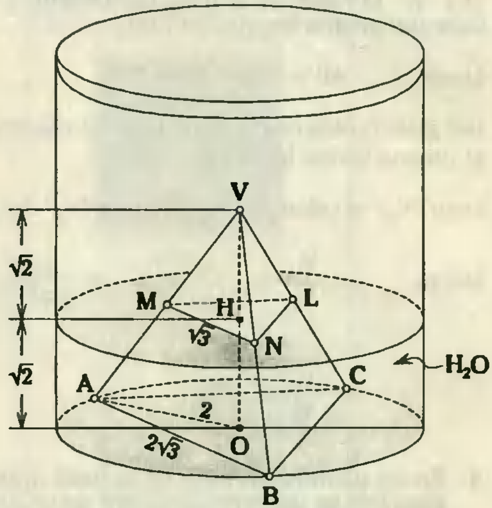
$\therefore$ $\boxed{x = \dfrac{2}{3}R\sqrt{2}}$

5.- En un cilindro cuya base es un círculo de radio igual a 2, se introduce un tetraedro regular de modo que la base del tetraedro queda inscrita en la base del cilindro. ¿Qué cantidad de H_2O hay que vertir en el cilindro para que el nivel de esta llegue a la mitad de la altura del tetraedro.

Resolución.-

Sea V - ABC el tetraedro regular cuya base ABC esta inscrita en la base del cilindro de radio 2

Luego : $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$



Además la altura : $VO = \dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2}$,

de donde : $VH = HO = \sqrt{2}$

El volumen de H_2O se calculará restando el volumen del cilindro "V_C" determinado menos el volumen de la parte sumergida "V_T" , es decir :

$$VH_2O = V_C - V_T \quad ... (1)$$

Ahora : $V_C = \pi(2)^2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad V_C = 4\pi\sqrt{2} \quad ... (2)$$

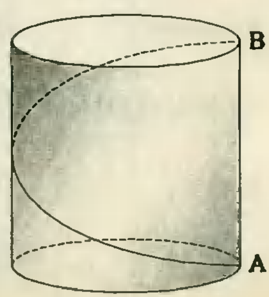
Luego : $V_T = \dfrac{(2\sqrt{3})^3\sqrt{2}}{12} - \dfrac{(\sqrt{3})^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}(24\sqrt{3} - 3\sqrt{3})$

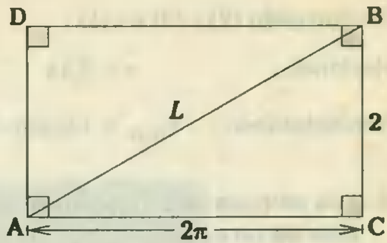
$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{7}{4}\sqrt{6} \quad ... (3)$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1) :

$$\boxed{V_{H_2O} = 4\pi\sqrt{2} - \frac{7}{4}\sqrt{6}}$$

6.- La curva de longitud mínima trazada, entre A y B (sobre una misma generatriz) que da una vuelta completa en torno a un cilindro equilátero de radio básico igual a 1 (ver figura) tiene por longitud "L" . Calcular L.





Resolución.-

Sea el rectángulo DBCA, el desarrollo de la superficie lateral del cilindro equilátero, luego :
$AC = 2\pi(1) = 2\pi$ y $AD = 2$

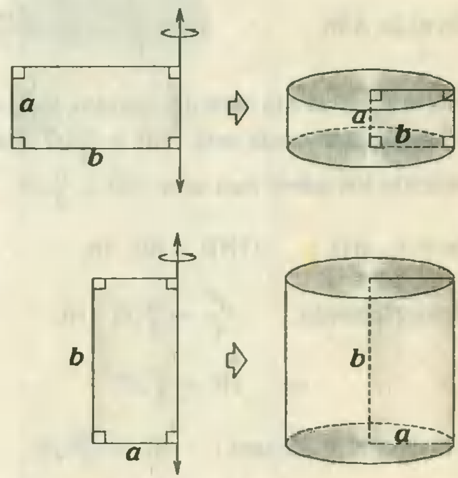
Además "L" es la diagonal del rectángulo.

En el ⊿ ACB : $L^2 = 2^2 + (2\pi)^2$

Donde : $L^2 = 4 + 4\pi^2$ $\quad\therefore\quad$ $L = 2\sqrt{1+\pi^2}$

7.- Los lados a y b de un rectángulo están en relación de 1 : 2. Calcular la relación de los volúmenes que se obtienen cuando se hace girar el rectánguio usando como eje primero el lado menor a y luego b.

Resolución.-



Sean V_a y V_b los volúmenes de los sólidos (cilindros) determinados al girar el rectángulo dado alrededor de a y b respectivamente.

Luego : $V_a = \pi b^2 a$ y $V_b = \pi a^2 b$

Dividiendo las dos expresiones :

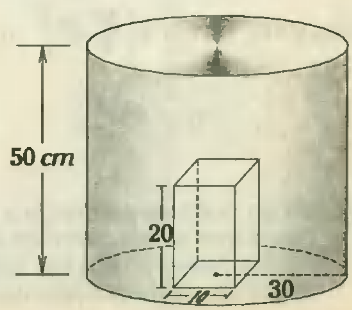
$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$$

Como : $\frac{b}{a} = \frac{2}{1}$ (dato)

$$\therefore \quad \frac{V_a}{V_b} = 2$$

8.- Un cilindro de 30cm de radio y 50cm de altura está completamente lleno de agua, si dentro de él se introduce un trozo de madera labrado en forma de prisma de base cuadrada de 10cm de lado y cuya altura es de 20cm, el agua que se queda en el recipiente es de :

Resolución.-



Sea "V_{H_2O}" el volumen de agua dentro del recipiente "V_C" el volumen del cilindro y "V_P" el volumen del prisma de madera.

Luego : $V_{H_2O} = V_C - V_P$ ... (1)

También : $V_C = \pi(30)^2 . 50 = 45000\,\pi$ ... (2)

Por consiguiente : $V_P = (10)^2 . 20 = 2000$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $V_{H_2O} = 45000\,\pi - 2000$

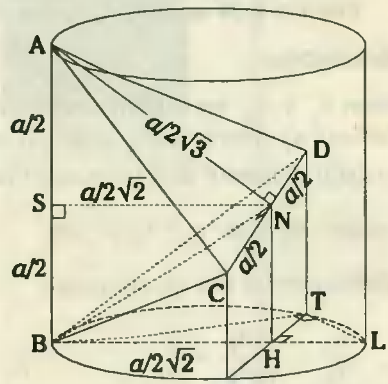
Haciendo : $\pi = 3{,}14$

Reemplazando : $V_{H_2O} = 141300 - 2000$ $\therefore$ $\mathbf{V_{H_2O} = 139{,}3}$ ***lt***

9.- Los vértices de un tetraedro regular ABCD de arista "a" se encuentran sobre la superficie de un cilindro recto que tiene por generatriz la arista $\overline{AB}$. Hallar el volumen del cilindro.

Resolución.-

En el tetraedro ABCD : $AN = BN = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



En el ⊾ ASN : $SN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$\overline{SN}$ es paralelo a la base del cilindro, luego su proyección $\overline{BH}$ sobre esta será : $BH = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ luego su proyección $\overline{BH}$ sobre esta será : $BH = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

En el ⊾ BTL : $(TH)^2 = BH \, . \, HL$

Reemplazando : $\frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \, . \, HL$

$\Rightarrow \quad HL = \frac{a}{4}\sqrt{2}$

y el diámetro $\overline{BL}$ será : $BL = \frac{3a}{4}\sqrt{2}$

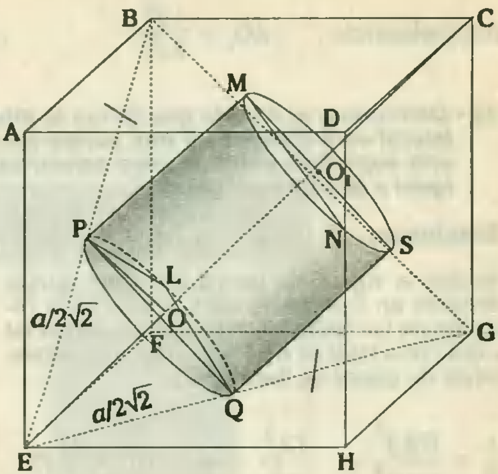
Sea "V" el volumen del cilindro, luego : $V = \pi R^2 AB$

Como : $R = \frac{3a}{8}\sqrt{2}$ y $AB = a$

Entonces : $V = \pi\left(\frac{3a}{8}\sqrt{2}\right)^2 . \, a$

$$\therefore \quad \mathbf{V = \frac{9\pi a^3}{32}}$$

10.- En un cubo de piedra de a cm de arista, se labra un cilindro recto en revolución de modo que su eje coincida con una de las diagonales del cubo y las circunferencias de sus bases pasen por los centros de las tres caras concurrentes en los extremos de dicha diagonal. Calcular el volumen del cilindro.



Resolución.-

Las bases del cilindro recto están circunscritas a los triángulos equiláteros PQL y MNS.

En el Δ EBG : $\quad PQ = \dfrac{BG}{2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

En el Δ PQL : $\quad OP = R \dfrac{PQ}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{6}$$

En el $\triangle$ POE : $\quad (EO)^2 = EP^2 - R^2$

Reemplazando :

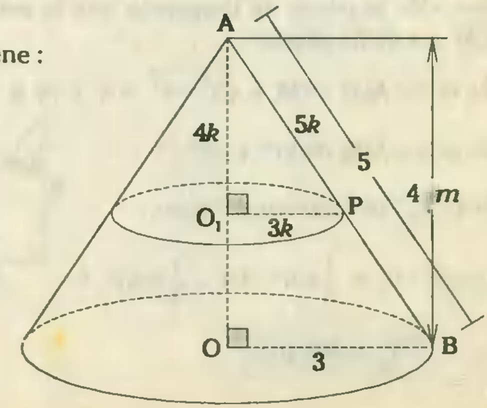
$$EO^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad EO = \frac{a}{3}\sqrt{3} = O_1C$$

De donde : $\quad OO_1 = EC - 2EO = a\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad OO_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Sea "V" el volumen del cilindro, luego : $\quad V = \pi R^2 (OO_1)$

Reemplazando : $\quad V = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right) \quad \therefore \quad \boxed{V = \pi\,\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}}$

11.- La altura de un cono es de 4m, y el radio de la base es de 3m, dicho cono se intersecta por un plano paralelo a su base de tal manera que la superficie total del cono resultante sea igual a la superficie lateral del cono primitivo. Calcular la distancia del vértice al plano.



Resolución.-

Por la semejanza de los $\triangle$ AO_1P y $\triangle$ AOB, se tiene :

$$AO_1 = 4k \quad y \quad O_1P = 3k$$

Por condición del problema :

$$\pi(3k)(5k) + \pi(3k)^2 = \pi(3)(5)$$

En consecuencia : $\quad 15\pi k^2 + 9\pi k^2 = 15\pi$

Donde : $\quad 24\pi k^2 = 15\pi \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\dfrac{5}{8}}$

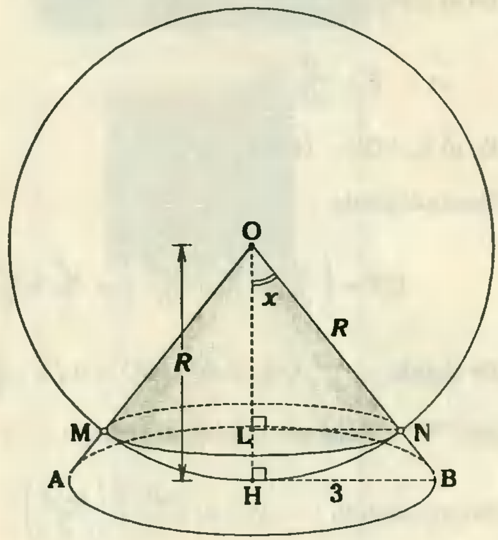
Nos piden : $\quad AO_1 = 4k$

Reemplazando : $AO_1 = \dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\boxed{AO_1 = \sqrt{10}}$

12.- Determinar el ángulo que forma la altura y la generatriz de un cono cuya superficie lateral está dividida en dos partes iguales mediante la línea de su intersección con una superficie esférica cuyo centro está situado en el vértice del cono y el radio es igual a la altura del cono.

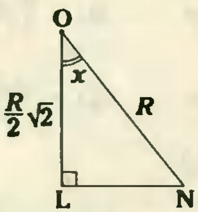
Resolución.-

Ya que la superficie lateral del cono queda dividido en 2 partes iguales, entonces la relación de las áreas laterales del cono parcial y del cono total es de 1 a 2, luego por semejanza de conos se tiene :



$$\frac{1}{2} = \frac{(OL)^2}{(OH)^2} = \frac{OL^2}{R^2} \Rightarrow OL = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

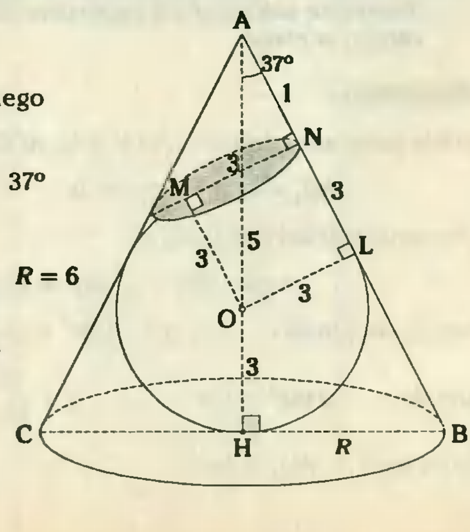
En el ⊾ OLN :



$\therefore$ $\boxed{x = 45°}$

13.- En un cono recto se ha inscrito una esfera de radio 3m. Calcular el volumen del cono, sabiendo que el plano tangente a la esfera y perpendicular a una generatriz del cono se encuentra a 1m del vértice del cono.

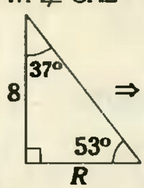
Resolución.-



Sea «M» el punto de tangencia con la esfera, luego $\overline{OM} \perp$ a dicho plano.

En el ⊾ ALO : $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ y $m\measuredangle OAL = 37°$

En el ⊾ AHB de 37° y 53° :



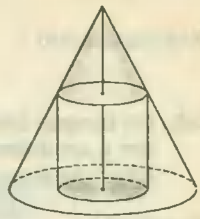
$\Rightarrow R = 6$

Sea "V_C" el volumen del cono.

Luego : $V_C = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \,.\, AH = \dfrac{1}{3}\pi(6)^2 \,.\, 8$

$\therefore$ $\boxed{V_C = 96\pi\, m^3}$

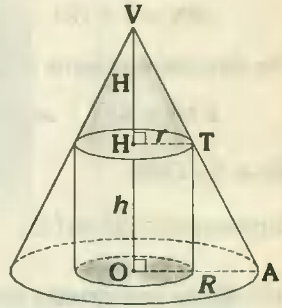
14.- En la figura el cono parcial es equivalente al cilindro. Determinar qué fracción del volumen total es el volumen del cono parcial.



Resolución.-

Por condición del problema : $V_P = V_C$ $\begin{cases} V_P : \text{Volumen del cono parcial} \\ V_C : \text{Volumen del cilindro} \end{cases}$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 H = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad H = 3h$$



$\triangle$ VHT ~ $\triangle$ VOA : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{H}{H+h} = \dfrac{3h}{4h} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{4}{3}r$

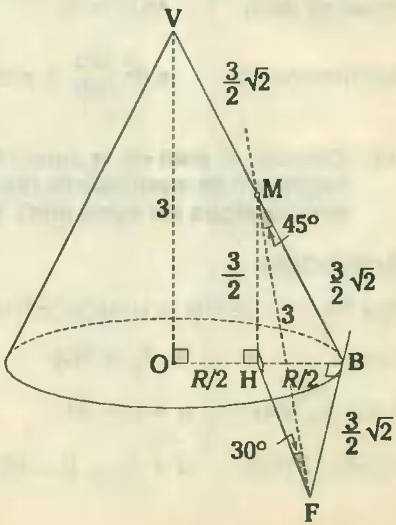
Sea V_T el volumen del cono total, luego :

$$\frac{V_P}{V_T} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 H}{\frac{1}{3}\pi R^2 (H+h)} = \frac{r^2 .3h}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 .h}$$

Por consiguiente : $\dfrac{V_P}{V_T} = \dfrac{3r^2 h}{\frac{64}{9}r^2 h}$ $\quad \therefore \quad$ $\boldsymbol{\dfrac{V_P}{V_T} = \dfrac{27}{64}}$

15.- Una recta es tangente a un cono, en el punto de tangencia medio de la generatriz forma con ella 45º mientras que con el plano de la base 30º. Si parte de la recta limitada por la generatriz y el plano de la base mide 3; hallar el volumen del cono.

Resolución.-



Sea $\overline{MF}$ el segmento comprendido entre la gereratriz VB y el plano de la base. Luego : MF esta contenido en el plano MBF tangente al cono.

Por el Teorema de las 3 perpendiculares $\overline{VB} \perp \overline{BF}$.

En el $\triangle$ MBF de 45º : $\quad MB = BF = VM = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

En el $\triangle$ MHF de 30º y 60º : $\quad MH = \dfrac{3}{2}$

En el $\triangle$ VOB por base media :$VO = 2\,MH = 2\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$

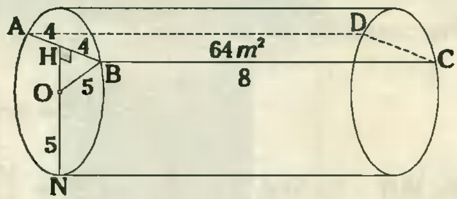
En el $\triangle$ VOB : $\quad R^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 \quad \Rightarrow \quad R = 3$

Sea "V" el volumen del cono, luego :$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 . (VO)$

Reemplazando : $V = \dfrac{\pi(3)^2}{3} \cdot 3 \quad \therefore \quad \mathbf{V = 9\pi}$

16.- Un tanque cilíndrico de aceite tendido horizontalmente tiene una longitud interior de 8m y un diámetro interior de 10m. El aceite determina una superficie rectangular de 64m² de área; calcular la profundidad máxima del aceite.

Resolución.-



La profundidad máxima del aceite será :

$HN = 5 + OH \qquad ... (1)$

Por dato del problema el área de la región ABCD es:

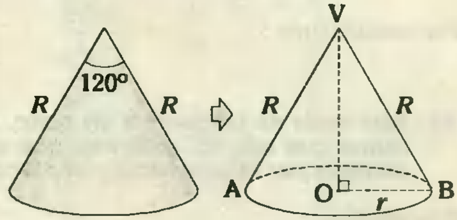
$8\,AB = 64 \quad \Rightarrow \quad AB = 8$

En el ⊿ OHB : $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} \quad \Rightarrow \quad OH = 3 \qquad ... (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $HN = 5 + 3 = 8 \quad \therefore \quad \mathbf{HN = 8}$

17.- Se ha construido un cono de revolución con un sector circular cuyo ángulo central mide 120° y de radio R; si "r" es la longitud del radio básico. Calcular r/R.

Resolución.-



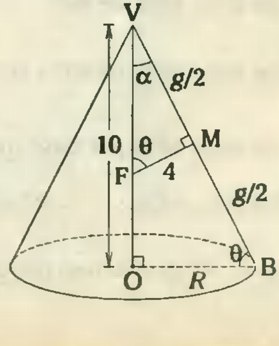
Las generatrices del cono construido con el sector circular de 120° y radio R son VA = VB = R

Además se cumple que el área del sector circular es igual al área de la superficie lateral del cono; es decir : $A_{s.c.} = A_L$

Reemplazando : $\pi R^2 \dfrac{120}{360} = \pi r R \quad \therefore \quad \mathbf{\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3}}$

18.- Calcular el área de la superficie lateral de un cono de revolución sabiendo que el segmento de mediatriz de una de sus generatrices limitada por la altura del cono es 4m y la altura del cono mide 10m.

Resolución.-



Sea "A_L" el área de la superficie lateral del cono,

Luego : $A_L = \pi R g \qquad ... (1)$

En el ⊿ VMF : $\alpha + \theta = 90$

En el ⊿ VOB : $\alpha + m\measuredangle B = 90 \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle B = \theta$

$\triangle$ VMF ~ $\triangle$ VOB : $\dfrac{\frac{g}{2}}{10} = \dfrac{4}{R} \Rightarrow gR = 80$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $A_L = 80\pi$

19.- Se trazan dos planos por el vértice de un cono, uno de ellos está inclinado con un ángulo de 30º respecto a su base y lo corta a lo largo de una cuerda de longitud 1m, el otro esta inclinado 45° respecto a la base y lo corta a lo largo de una cuerda de longitud 3m. Determinar el volumen del cono.

<u>**Resolución**</u>.-

En el $\triangle$ VOP de 30° y 60°: OH = H $\sqrt{3}$

En el $\triangle$ VOL de 45° : OL = VO = H

En el $\triangle$ OPA : $R^2 = (H\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ... (1)

En el $\triangle$ OLC : $R^2 = H^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ ... (2)

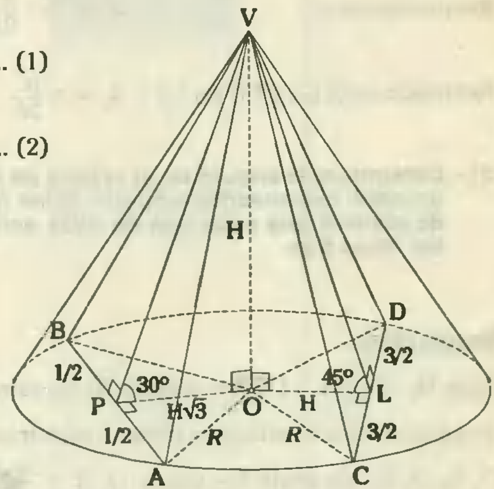
De (1) y (2) : $3H^2 + \dfrac{1}{4} = H^2 + \dfrac{9}{4} \Rightarrow H = 1$

Sustituyendo en (1) : $R^2 = 3(1)^2 + \dfrac{1}{4}$

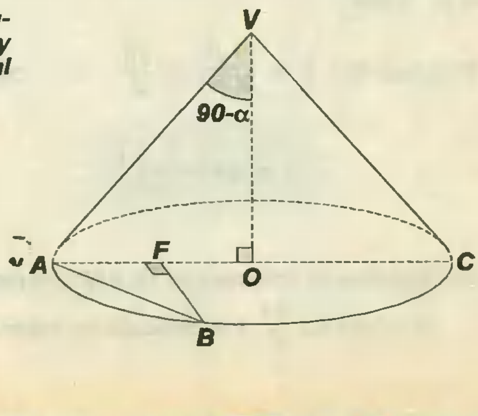
Donde : $R^2 = 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$

Luego el volumen "V" del cono será :

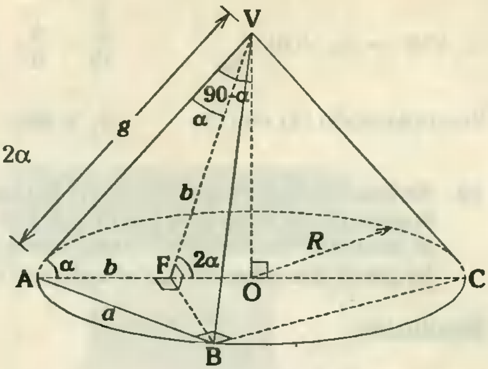
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 . H = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{13}{4}\right). 1 \quad \therefore \quad V = \dfrac{13\pi}{12}$



20.- En la figura el diedro que forman el triángulo VFB y la base del cono mide 2α , AB = a y AF = b . Hallar el área de la superficie lateral del cono.



Resolución.-



Sea "A_L" el área de la superficie lateral del cono.

Luego : $A_L = \pi Rg$ ... (1)

Por condición del problema, el diedro $d\overline{FB}$ mide 2α

En el Δ AFV isósceles ⇒ AF = VF = b

En el ⊿ ABC : $a^2 = 2Rb$

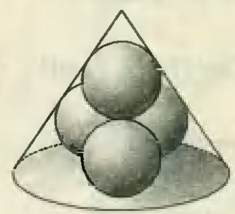
$$\Rightarrow \quad R = \frac{a^2}{2b} \quad ... (2)$$

En el Δ AFV, por Euclides : $g^2 = b^2 + b^2 + 2b\,(R - b) = 2bR$

Reemplazando : $g^2 = 2b \cdot \dfrac{a^2}{2b} \quad \Rightarrow \quad g = a \quad ... (3)$

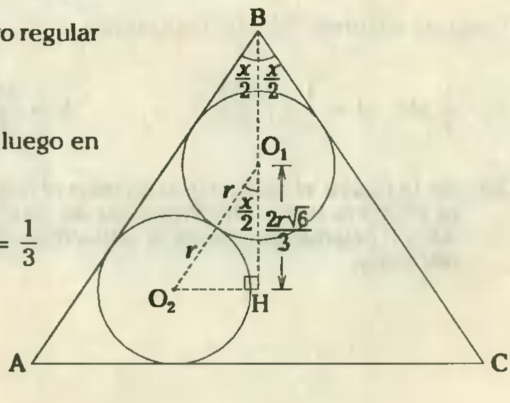
Reemplazando (2) y (3) en (1) : $A_L = \pi\,\dfrac{a^2}{2b} \cdot a \quad \therefore \quad \boxed{A_L = \dfrac{\pi a^3}{2b}}$

21.- Determinar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono circunscrito a cuatro bolas iguales dispuestas de manera que cada una de ellas este en contacto con las otras tres.



Resolución.-

Sean O_1 , O_2 , O_3 y O_4 los centros de las esferas de radio "r", luego al unir los 4 centros se obtiene un tetraedro regular $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$ de arista $2r$ y altura $O_1H = \dfrac{2r\sqrt{6}}{3}$



Sea el triángulo ABC, la sección axial del cono, luego en el ⊿ O_1HO_2

Tenemos : $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2r\sqrt{6}}{3(2r)} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{1}{3}$

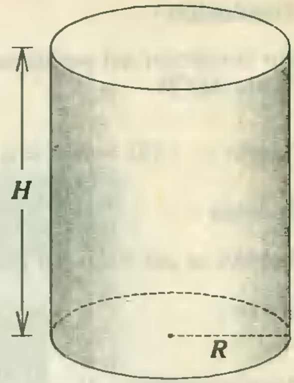
$$\therefore \quad \boxed{x = Arc\left(\cos\frac{1}{3}\right)}$$

22.- Calcular el volumen de un cilindro recto, si la media armónica entre el radio básico y la altura es $\frac{11}{5}$ y el área de su superficie total es 20 m²

Resolución.-

Por dato del problema : $\dfrac{2RH}{R+H} = \dfrac{11}{5}$ ... (1)

También : $2\pi R\,(H + R) = 20$ ... (2)



Al multiplicar miembro a miembro las expresiones (1) y (2) :

$$\frac{2RH}{(R+H)} \cdot 2\pi R\,(H + R) = \frac{11}{5} \cdot 20$$

En consecuencia : $4\pi R^2 H = 44$

Por consiguiente : $\pi R^2 H = 11$

Como el volumen : $V = \pi R^2 H$ $\therefore$ $\mathbf{V = 11\ m^3}$

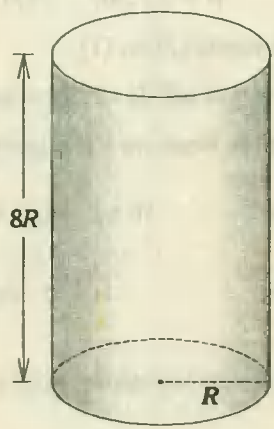
23.- Una población tiene 5 000 habitantes que consumen en promedio por persona 12 litros de H_2O diariamente. Determinar el radio de la base de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga además capacidad para una reserva de 25% del consumo diario y tal que la altura sea 4 veces el diámetro.

Resolución.-

Si una persona consume 12 litros diarios, entonces 5 000 personas consumirán :

$$5000 \cdot 12 = 60\,000 \textit{ litros.}$$

El 25% de 60 000 es : $\dfrac{25 \cdot 60\,000}{100} = 15\,000$ *lts.*



Luego el pozo deberá tener un volumen de :

$V = 60\,000 + 15\,000$

Donde : $V = 75\,000$ *lts*

Como : $V = \pi R^2 \cdot 8R = 8\pi R^3$

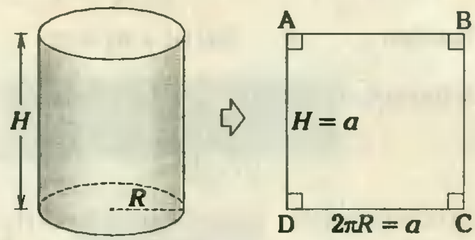
$\Rightarrow$ $8\pi R^3 = 75\,000\ lts = 75\ m^3$

$\therefore$ $\mathbf{R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{75}{\pi}}}$

24.- Hallar el volumen de un cilindro circular recto, si el desarrollo de su superficie lateral es un cuadrado de lado "a".

Resolución.-

Por condición del problema al desarrollar la superficie lateral del cilindro se obtiene el cuadrado ABCD.



Donde : $CD = 2\pi R = a \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{a}{2\pi}$

Además : $H = a$

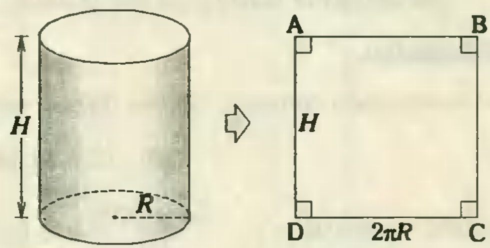
Sea «V» el volumen del cilindro

Luego : $V = \pi R^2 H$

Reemplazando : $V = \pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 a \qquad \therefore \quad V = \dfrac{a^3}{4\pi}$

25.- Hallar el volumen máximo de un cilindro circular recto, si el desarrollo de su superficie lateral es un rectángulo de perímetro 16.

Resolución.-



Sea V el volumen del cilindro.

Luego : $V = \pi R^2 H \quad ...\ (1)$

Por dato del problema : $2(H + 2\pi R) = 16$

$\Rightarrow \quad H = 8 - 2\pi R \quad ...\ (2)$

Sustituyendo (2) en (1) :

$$V_{(R)} = \pi R^2 (8 - 2\pi R) = 8\pi R^2 - 2\pi^2 R^3$$

Derivando respecto a R e igualando a cero : $V'_{(R)} = 0 = 16\pi R - 6\pi^2 R^2$

Donde : $16\,\pi\,R = 6\pi^2 R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{8}{3\pi}$

En (2) : $H = 8 - 2\pi\left(\dfrac{8}{3\pi}\right) \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{8}{3}$

Sustituyendo los valores de R y H en (1) : $V = \pi\left(\dfrac{8}{3\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{8}{3}$

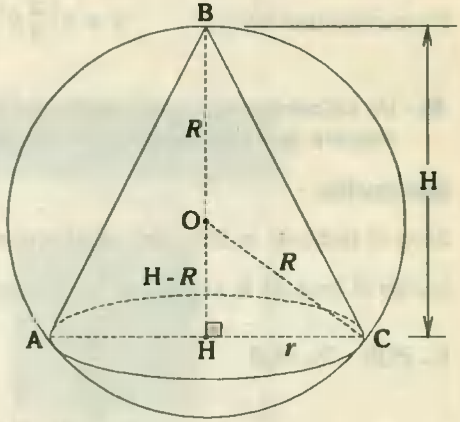
$$\therefore \quad V = \frac{512}{27\pi}$$

26.- Calcular el volumen máximo de un cono recto inscrito en una esfera de radio «R»

Resolución.-

Sean H y r las medidas de la altura y radio básico del cono, luego su volumen será :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \quad \dots (1)$$



En el ⊿ OHC : $r^2 = R^2 - (H - R)^2$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 2HR - H^2 \quad \dots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) : $V = \frac{1}{3}\pi\,(2HR - H^2)\,.\,H$

$$\Rightarrow \quad V_{(R)} = \frac{2}{3}\pi H^2 R - \frac{1}{3}\pi H^3$$

Luego derivando V(R) respecto a R :

$$V'(R) = \frac{4}{3}\pi HR - \frac{3}{3}\pi H^2 = 0$$

De donde : $H = \frac{4}{3}R \dots (3)$

Reemplazando (3) en (2) : $r^2 = 2\left(\frac{4}{3}R\right)R - \left(\frac{4}{3}R\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{8}{9}R^2 \quad \dots (4)$

Por último al reemplazar (3) y (4) en (1) : $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R^2\right)\frac{4}{3}R \quad \therefore \quad \mathbf{V = \frac{32}{81}\pi R^3}$

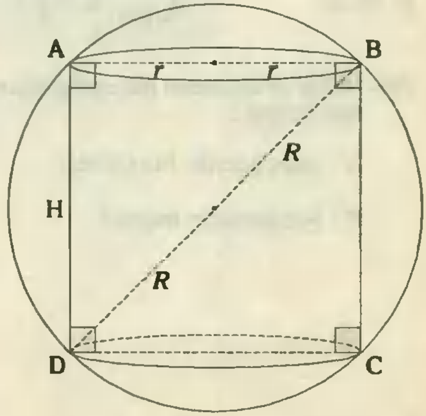
27.- Calcular el volumen máximo de un cilindro recto inscrito en una esfera de radio «R»

Resolución.-

Sean r y H el radio y altura del cilindro, luego su volumen «V» será : $V = \pi r^2 H \quad \dots (1)$

En el ⊿ BAD : $(2R)^2 = H^2 + (2r)^2$

$$\Rightarrow \quad r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4} \quad \dots (2)$$



Sustituyendo (2) en (1) : $V = \pi\left(R^2 \frac{H^2}{4}\right)H$

$$\Rightarrow \quad V_{(H)} = \pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{4}$$

Derivando respecto a H :

$$V'_{(H)} = 0 = \pi R^2 - \frac{3\pi H^2}{4} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

En (2) : $\quad r^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{3} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \dfrac{2}{3}R^2$

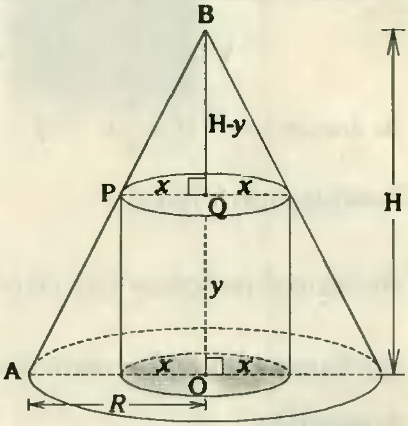
Reemplazando en (1) : $\quad V = \pi\left(\dfrac{2}{3}R^2\right)\dfrac{2R}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \mathbf{V = \dfrac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}}$

28.- Un cilindro recto está inscrito en un cono recto cuya altura es "H" y su radio "R" de manera que sus ejes coinciden. Hallar el área lateral máxima del cilindro.

Resolución.-

Sean el radio de la base del cilindro y su altura x e y respectivamente

Luego el área de la superficie lateral será : $\quad A_L = 2\pi xy \quad ...(1)$



⊿ PQB ~ ⊿ AOB : $\quad \dfrac{x}{R} = \dfrac{H-y}{H}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{R}{H}(H-y)$$

Sustituyendo en (1) : $\quad A_L = 2\pi\dfrac{R}{H}(H-y)y$

En consecuencia : $\quad A_L = 2\pi\dfrac{R}{H}(Hy - y^2)$

Por consiguiente : $\quad A_L = 2\pi\dfrac{R}{H}\left[\dfrac{H^2}{4} - \left(y - \dfrac{H}{2}\right)^2\right]$

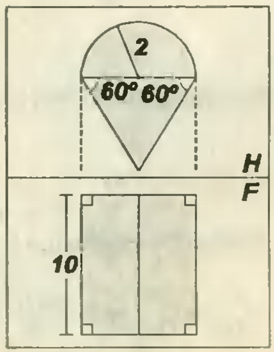
De donde A_L sera máxima, cuando : $\quad \left(y - \dfrac{H}{2}\right)^2 = 0$

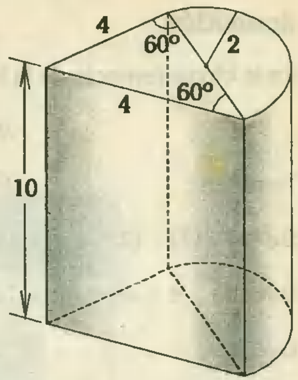
Es decir : $\quad \boxed{A_{L(max)} = \dfrac{\pi RH}{2}}$

29.- Hallar el volumen del campo que tiene las siguientes vistas :

H : proyección horizontal

F : Proyección frontal





Resolución.-

Construimos el sólido en base a las vistas mostradas, luego el volumen pedido sera igual a la suma de los volúmenes del prisma y del medio cilindro que lo conforman :

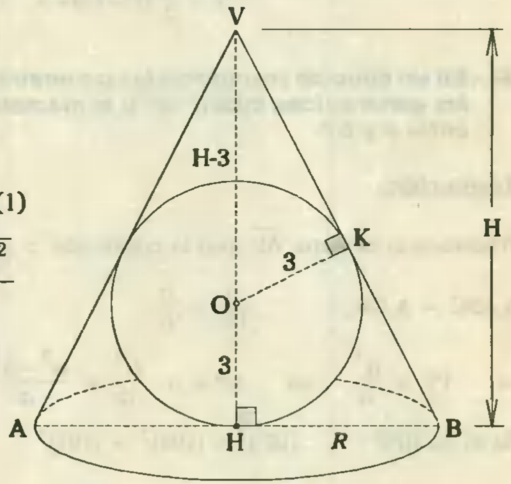
$$V_x = \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right)10 + \frac{1}{2}\pi 2^2 \,.\, 10$$

$$V_x = 40\sqrt{3} + 20\pi$$

$$\therefore \quad \mathbf{V_x = 20(2\sqrt{3} + \pi)}$$

30.- Una esfera de 3m de radio se encuentra inscrito en un cono recto cuya base es un círculo de área $12\pi m^2$. Calcular el volumen del cono.

Resolución.-



Sea "H" la altura del cono.

Luego su volumen será : $V = \frac{1}{3}\, 12\pi \,.\, H$

Donde : $V = 4\pi H \quad \ldots (1)$

⊾ VKO ~ ⊾ VHB : $\frac{3}{R} = \frac{\sqrt{(H-3)^2 - 3^2}}{H}$

De donde : $\frac{3H}{R} = \sqrt{H^2 - 6H}$

Elevando al cuadrado : $\frac{9H^2}{R^2} = H^2 - 6H$

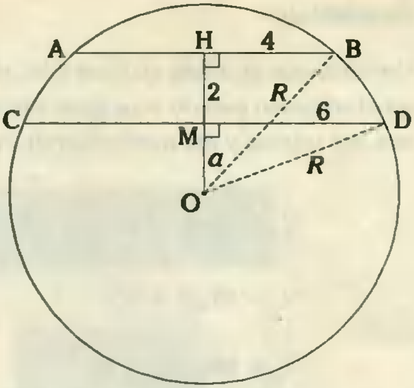
Pero : $\pi R^2 = 12\pi \quad \Rightarrow \quad R^2 = 12$

Luego : $\frac{9H^2}{12} = H^2 - 6H \quad \Rightarrow \quad H = 24 \quad \ldots (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $\mathbf{V = 96\pi\, m^3}$

31.- En un cono circular recto de altura $3\sqrt{3}$ en la base se encuentran dos cuerdas paralelas de 8 y 12m distantes 2m. Calcular la generatriz del cono.

Resolución.



En la circunferencia de la base se tiene :

$$R^2 = (2 + a)^2 + (4)^2 ... (1)$$

También : $R^2 = a^2 + 6^2$ ... (2)

De (1) y (2) : $(2 + a)^2 + 16 = a^2 + 36$

Donde : $4 + a^2 + 4a + 16 = a^2 + 36$

Luego : $a = 4$ ... (3)

(3) en (2) : $R^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow R^2 = 52$

Finalmente ya conociendo la altura del cono : $2\sqrt{3}$ y el cuadrado de su radio 52 se tiene :

$$V = \frac{1}{3}\pi(52)3\sqrt{3} \quad \therefore \quad \mathbf{V = 52\pi\sqrt{3}}$$

32.- En un cono de revolución las generatrices forman con la base un ángulo de 80°, si las generatrices miden "a" y el diámetro de la base mide "b" ¿Cuál es la relación entre a y b?

Resolución.

Trazamos la ceviana $\overline{AP}$ con la condición : $m\measuredangle PAC = 20$, luego : $PA = AC = b$

$\Delta ABC \sim \Delta PAC$: $\frac{b}{PC} = \frac{a}{b}$

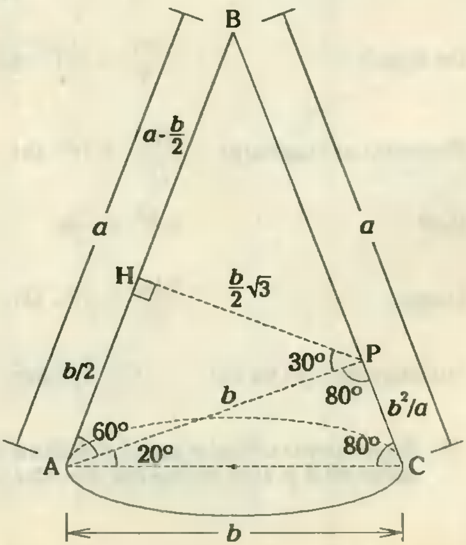
$\Rightarrow \quad PC = \frac{b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad BP = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$

En el ⊿ BHP : $(BP)^2 = (BH)^2 + (PH)^2$

Reemplazando : $\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)^2$

Donde : $\frac{a^4 + 2a^2 + b^4}{a^2} = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + \frac{3b^2}{4}$

$\Rightarrow \quad a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 - a^3b$



Finalmente la relación buscada será :

$$\mathbf{a^3 + b^3 = 3a^2b}$$

33.- El desarrollo del área lateral de un cono recto de revolución es un sector circular de 60º en el cual se puede inscribir una circunferencia de 1m de radio. Hallar el volumen del cono.

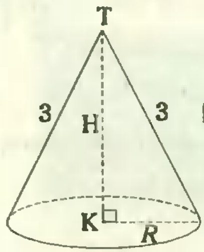
Resolución.-

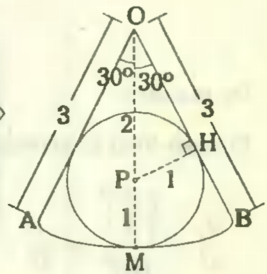
En el sector circular AOB, se tiene : $g = OP + PM = 2 + 1 \Rightarrow g = 3$

Se sabe que : $A_{L(cono)} = A_{(sector)}$

Reemplazando : $\pi R(3) = \dfrac{\pi(3)^2 60}{360}$

$\Rightarrow \quad R = \dfrac{1}{2}$





En el ⊾ TKQ : $H = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \dfrac{1}{4}}$

De donde : $h = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$

Finalmente el volumen pedido será : $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 . \dfrac{\sqrt{35}}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{V = \dfrac{\sqrt{35}\pi}{24}}$

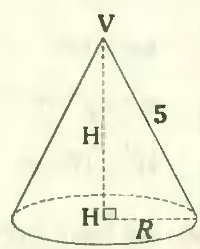
34.- La generatriz de un cono recto circular mide 5m y la superficie lateral desarrollada forma un sector circular de 216º . Calcular el volumen de dicho cono.

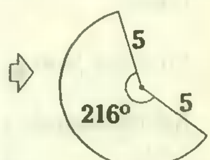
Resolución.-

Se sabe que el A_L del cono es igual al A del sector, es decir : $A_L = A_{(sector)}$

Reemplazando sus respectivas áreas :

$\pi R(5) = \dfrac{\pi(5)^2 216}{360} \quad \Rightarrow \quad R = 3$





En el ⊾ VHB : $H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Luego siendo "V" el volumen del cono : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$

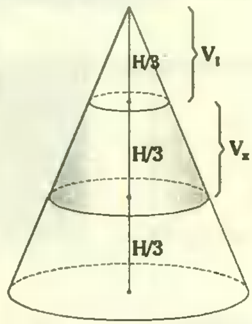
$V = \dfrac{1}{3}\pi (3)^2 . 4 \quad \therefore \quad \mathbf{V = 12\pi}$

35.- El volumen de un cono es de $27m^3$; se triseca la altura del cono por dos paralelas a la base. Calcular el volumen del sólido ubicado en la parte central.

Resolución.-

Sean V_x y V_1 los volúmenes buscados y de la parte menor respectivamente. Luego por semejanza de conos :

$$\frac{V_1}{V_1+V_x} = \frac{\left(\frac{H}{3}\right)^3}{\left(\frac{2H}{3}\right)^3} = \frac{1}{8}$$



De donde : $V_x = 7V_1$ ... (1)

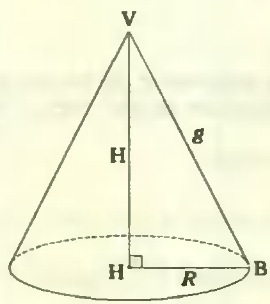
El cono total es semejante al cono menor, luego :

$$\frac{V_1}{27} = \frac{\left(\frac{H}{3}\right)^3}{(H)^3} = \frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 1 \quad ... (2)$$

Reemplazando (2) en (1) : $\mathbf{V_x = 7\ m^3}$

36.- La superficie total de un cono recto es $200\pi m^2$ y el producto de la generatriz y el radio es $136\ m^2$. Calcular el volumen del cono.

Resolución.-



Por dato del problema : $200\pi = \pi Rg + \pi R^2$

Como : $Rg = 136$

Entonces : $200\pi = 136\pi + \pi R^2$

De donde : $R = 8$

Luego : $8g = 136 \quad \Rightarrow \quad g = 17$

En el ⊿ VHB : $H^2 = g^2 - R^2$

Reemplazando : $H^2 = 17^2 - 8^2 \quad \Rightarrow \quad H = 15$

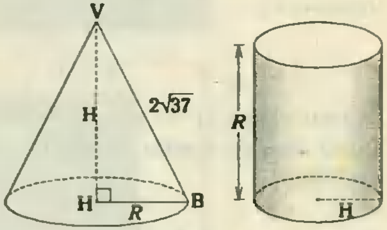
Sea «V» el volumen del cono, luego : $V = \frac{1}{3}\pi(8)^2 . 15$

$\therefore$ $\mathbf{V = 320\pi}$

37.- La altura de un cono de revolución es igual al radio de la base, de un cilindro recto y viceversa; si el volumen del cono es el doble del volumen del cilindro y la generatriz del cono mide $2\sqrt{37}$ m. Hallar el área lateral del cilindro.

<u>Resolución</u>.-

Por dato del problema : $V_{(cono)} = 2V_{(cilindro)}$



Reemplazando : $\frac{1}{3}\pi R^2 H = 2\pi H^2 R$

$\Rightarrow \quad R = 6H$

En el ⊾ VHB : $H^2 + R^2 = (2\sqrt{37})^2$

Donde : $H^2 + (6H)^2 = 4 \cdot 37$

Ahora : $37H^2 = 4 \cdot 37$

$\Rightarrow \quad H = 2$

Luego : $R = 6(2) = 12$

Finalmente el área lateral del cilindro será : $A_L = 2\pi\,(12)\,(2)$

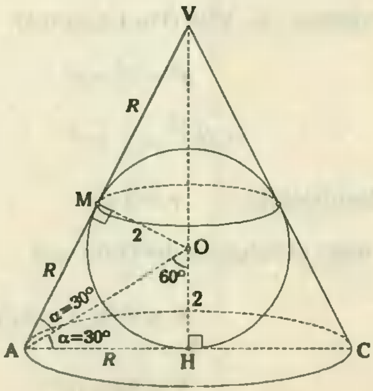
$\therefore \quad \boldsymbol{A_L = 48\pi\, m^2}$

38.- Se tiene una esfera inscrita en un cono recto de manera que toca las generatrices en sus puntos medios. Hallar el volumen del cono sabiendo que el radio de la esfera mide 2m.

<u>Resolución</u>.-

Por el Teorema de la Bisectriz AM = AH = R y ya que M es punto medio de $\overline{VA}$

Luego : AM = MV = R



En el ⊾ VHA : VA = 2AH $\Rightarrow$ $2\alpha = 60$ y $\alpha = 30$

En el ⊾ AHO de 30° y 60° : $R = 2\sqrt{3}$

En el ⊾ AHV : $VH = R\sqrt{3} = 6$

Sea «V» el volumen del cono, luego :

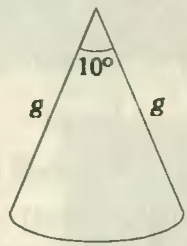
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 (VH) = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 . 6$$

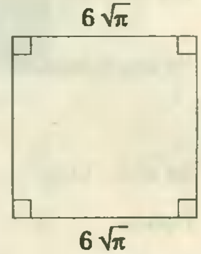
$\therefore \quad \mathbf{V = 24\pi}$

39.- Un sector circular equivalente a un cuadrado cuyo lado mide $6\sqrt{\pi}$ m; tiene un ángulo central que mide 10º dicho sector es el desarrollo de la superficie lateral de un cono. Calcular el área total de dicho cono.

<u>Resolución</u>.-

Puesto que el sector y el cuadrado son equivalentes





Entonces : $\pi g^2 \dfrac{10}{360} = (6\sqrt{\pi})^2$

$\Rightarrow \quad g = 36$

Por otro lado, si "r" es el radio de la base del cono que se puede construir con el sector circular.

Luego : $\pi g^2 \cdot \dfrac{10}{360} = \pi r g \quad \Rightarrow \quad r = 1$

Finalmente el área total del cono será : $A_t = 6\sqrt{\pi} + \pi(1)^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{A_t = 6\sqrt{\pi} + \pi}$

40.- Calcular el volumen de un cono recto de revolución de altura 3 m sabiendo que el plano que pasa por el vértice determina en la base una cuerda que subtiende un arco de 120º y que la sección determinada por dicho plano es un triángulo rectángulo.

<u>Resolución</u>.-

Por dato la sección determinada es el ⊿ VAB.

Entonces : $g\sqrt{2} = r\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad G = \dfrac{r}{2}\sqrt{6}$

Además : ⊿ VOA (Por Pitágoras)

$$g^2 = 3^2 + r^2$$

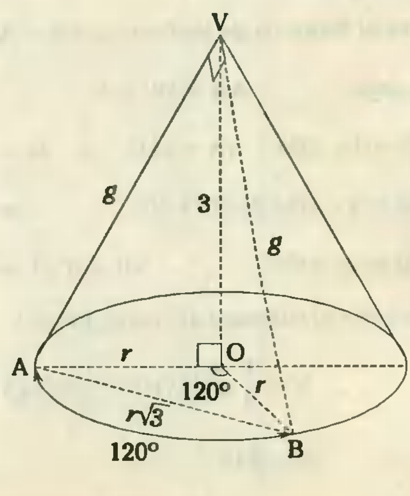
$$\left(r\sqrt{6}\right)^2 = 3 + r^2$$

Resolviendo : $r = 3\sqrt{2}$

Luego el volumen del cono será :

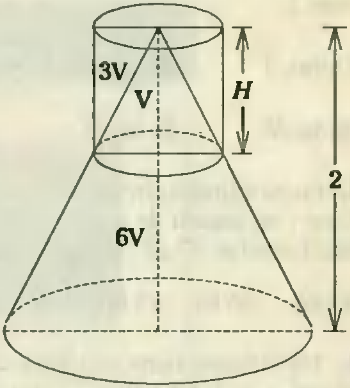
$$V = \pi r^2 h = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 . 3 = 54\pi$$

$\therefore \quad \mathbf{V = 54\,\pi\, m^3}$



41.- Se tiene un cono recto de revolución cuya altura mide 2 m, luego se traza un plano secante a dicho cono y paralelo a la base, y sobre la sección determinada se construye un cilindro cuya base opuesta pasa por el vértice del cono. Calcular la altura de dicho cilindro para que su volumen sea la mitad del volumen del tronco de cono formado.

Resolución.-



En la parte superior : $\dfrac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \dfrac{B.H}{\frac{1}{3}B.H}$

$$\Rightarrow \quad V_{CILINDRO} = 3\,V_{CONO}$$

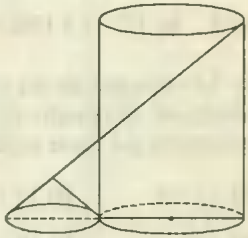
Por dato : $V_{TRONCO} = 2(3V) = 6V$

Por semejanza de conos :

$$\frac{V}{7V} = \frac{H^3}{2^3} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2}{7}\sqrt[3]{49}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{H = \frac{2}{7}\sqrt[3]{49}}$$

42.- En el gráfico, calcular la razón de volúmenes de los sólidos mostrados, si sus bases tienen igual área.



Resolución.-

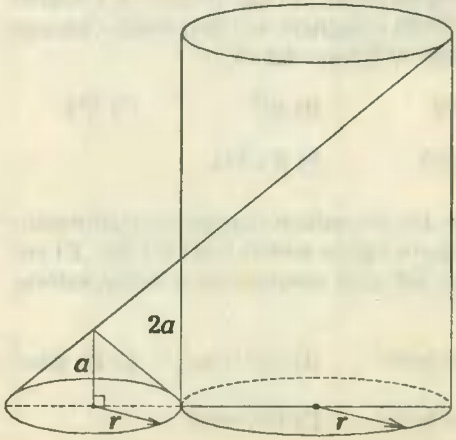
Sea V_1 = Volumen del cilindro

V_2 = Volumen del cono

Nos piden : $\dfrac{V_1}{V_2}$

Entonces : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi.r^2.4a}{\frac{1}{3}\pi.r^2.a} = 12$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{V_1}{V_2} = 12}$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular el máximo volumen de un cilindro recto inscrito en una esfera cuyo radio mide 3.

A) $9\pi\sqrt{3}$ B) $16\pi\sqrt{3}$ C) $12\pi\sqrt{3}$

D) $8\pi\sqrt{6}$ E) $4\pi\sqrt{2}$

2.- En un cilindro circular oblicuo su radio es 4 *cm* , su ángulo de inclinación es 60° y su área lateral es $32\sqrt{3}$. Luego su volumen es :

A) 48 B) 64 C) 96 D) 128 E) 144

3.- Un cilindro tiene una base cuya área es $36\pi m^2$ y una superficie lateral de $144\pi m^2$. Determinar la altura del cilindro en metros.

A) 6 B) 12 C) 18π D) 12π E) N.A.

4.- El volumen de un cono circular recto es $320\pi\ cm^3$. Si el radio de la base mide 8 *cm*, la generatriz del cono mide :

A) 15 *cm* B) 17 *cm* C) 18 *cm*

D) 120 *cm* E) 12 *cm*

5.- Con un sector circular de radio R y ángulo de 120° se construye un cono recto. Calcular el radio de la base del cono.

A) $R/2$ B) $R/3$ C) $R/4$

D) $2R/3$ E) $R\sqrt{3}/3$

6.- Se dan dos esferas tangentes exteriormente y cuyos radios miden 1 *dm* y 3 *dm* . El volumen del cono circunscrito a ambas esferas es:

A) $90\ \pi dm^3$ B) $100\ \pi dm^3$ C) $81\ \pi dm^3$

D) $64\ \pi dm^3$ E) $108\ \pi dm^3$

7.- En un cono se toma un punto de la generatriz y desde él se traza una perpendicular al radio y otra a la altura; si ellos miden 4 *cm* y 6 *cm* respectivamente y el punto dista 10*cm* del vértice superior, el producto de las áreas lateral y total es :

A) 135π B) $72\pi^2$ C) 360π

D) $29\ 160\pi^2$ E) N.A.

8.- En la figura se tiene un cono recto de material homogéneo de densidad relativa 0,5 que flota en el agua con su eje vertical y el vértice hacia abajo. Calcular x.

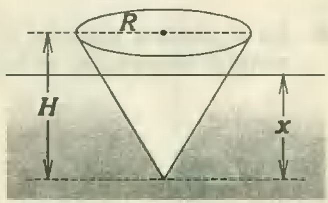
A) $\sqrt{0,5}$ H

B) H/4

C) H/8

D) $\sqrt[3]{0,5}$ H

E) H/3



9.- Según el gráfico; calcular el área de la superficie lateral del cilindro circular recto. Si AM = MB , CD (EB) = $12cm^2$, $m\overset{\frown}{AC} = 60°$ y el área de la región triangular ECD es $6\sqrt{6}\,cm$.

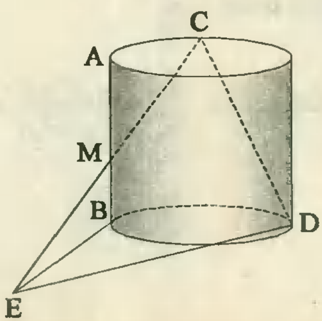
A) $6\pi\sqrt{6}\,cm^2$

B) $4\pi\sqrt{2}\,cm^2$

C) $2\pi\sqrt{8}\,cm^2$

D) $8\pi\sqrt{6}\,cm^2$

E) $16\pi\sqrt{4}\,cm^2$



10.- En un cono equilátero se tiene inscrito una esfera; luego se traza un plano tangente a la esfera paralelo a la base del cono determinando otro cono parcial. Calcular la razón de volúmenes de ambos conos.

A) 4/27 B) 1/27 C) 3/27
D) 6/27 E) 9/27

11.- Dado un cono circular recto inscrito y circunscrito a dos esferas concéntricas se traza un plano paralelo a la base del cono por el centro de las esferas. Calcular el área de la región limitada por el cono y la esfera circunscrita, en el plano secante (anillo circular). Si el área total del cono es "K".

A) 8/3K B) 8/9K C) 8/27K
D) 8/81K E) 4/9K

12.- Dado un cono de revolución cuya sección axial es un triángulo equilátero. Calcular volumen del cono cuya base es una sección perpendicular a $\overline{OB}$ y OM = MB.

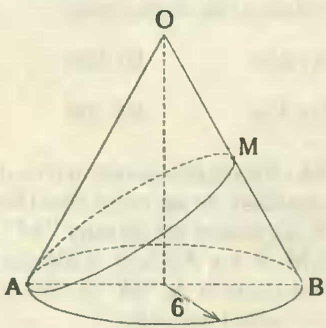
A) $12\sqrt{2}\pi$

B) $16\sqrt{6}\pi$

C) $36\sqrt{3}\pi$

D) $18\sqrt{6}\pi$

E) $24\sqrt{2}\pi$



13.- Un cilindro circular recto esta inscrito en un prisma triangular regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de las superficies laterales de dichos sólidos?

A) $\dfrac{9\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\dfrac{12\sqrt{4}}{\pi}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

D) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

14.- Un tanque cilíndrico cuyo diámetro mide $4\sqrt{3}$ y su altura 12, tiene sus cinco sextas partes con vino. Desde su posición normal se inclina el tanque hasta que el vino esté a punto de caer por el borde. Calcular la medida del ángulo de inclinación.

A) 30 B) 45 C) 53 D) 37 E) 60

15.- Se dan dos esferas tangentes exteriormente y un cono circunscrito a dichas esferas. Calcular el área de la superficie lateral del tronco de cono cuyas bases son los círculos que a lo largo de los cuales las esferas hacen contacto con la superficie lateral del cono.

A) πRr B) $\pi(R+r)$ C) $\pi Rr/2$

D) $3\pi Rr$ E) $2\pi Rr$

16.- Se tiene un prisma hexagonal regular inscrito en un cilindro de revolución, de modo que el área lateral del prisma es igual a la suma de las áreas de las bases del cilindro; si el radio de la base del cilindro mide 3. Calcular el volumen del prisma.

A) $18\pi\sqrt{3}/\pi$ D) $27\pi\sqrt{3}/2$

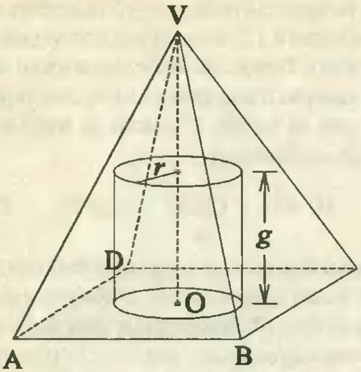
B) $12\pi\sqrt{2}/5$ E) $15\pi\sqrt{3}/2$

C) $14\pi^2/3$

17.- En un cono recto de revolución de vértice "O" y diámetro $\overline{AB}$, en la base se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ cuerdas secantes, que forman un ángulo de 45°. Hallar $m\measuredangle POQ$, si la altura del cono es igual al radio de la base.

A) 45° B) 90° C) 60° D) 120° E) 75°

18.- Se muestra en la figura un cilindro recto inscrito en una pirámide regular; si la arista lateral de la pirámide forma un ángulo de 45° con la base y $g = r\sqrt{2}$. Calcular el volumen de la pirámide.



A) $16\sqrt{2}\,r^3/3$

D) $16\sqrt{3}\,r^3/3$

B) $8(\sqrt{2}+1)r^3$

E) $32\sqrt{2}\,r^3/3$

C) $6(\sqrt{3}+1)r^3$

19.- El radio de la base de un cono de revolución es "R" y el radio de la esfera inscrita es "r". Calcular el radio de la circunferencia común a la superficie esférica y a la superficie lateral del cono.

A) $2Rr/R+r$

D) $2Rr^2/R^2+r^2$

B) $2R^2r/R^2+r^2$

E) $4Rr^2/R^2+r^2$

C) $2Rr/R-r$

20.- En un cilindro de revolución el radio de su base mide "R" se une un punto de la circunferencia de la base superior con un punto de la circunferencia de la base inferior, tal que la recta que pasa por dichos puntos forma con el plano de la base un ángulo que mide 71,5°; si la distancia entre la recta y el eje de simetría del cilindro es $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Calcular el área total del cilindro.

A) $\dfrac{8}{3}\pi R^2$ B) $\dfrac{16}{3}\pi R^2$ C) $\dfrac{10}{3}\pi R^2$

D) $6\pi R^2$ E) $12\pi R^2$

21.- Los radios de las bases de un cilindro y de un cono de revolución de áreas laterales equivalentes, son de igual longitud que el radio de la base y la generatriz respectivamente de otro cono de revolución; calcular la medida del ángulo central del desarrollo de la superficie lateral de éste último cono. (El cilindro y el primer cono tienen igual generatriz).

A) 60° B) 75° C) 90° D) 135° E) 180°

22.- Se tienen dos cilindros circulares rectos cuyos radios miden 3 y 5 cuyas bases inferiores coplanares tienen centros A y B respectivamente, tal que AB = 12. Se traza a una distancia cualquiera un plano paralelo a las bases y luego dos planos tangentes comunes a sus superficies laterales intersecándose estos tres planos en "P" . Calcular "$PB^2 - PA^2$".

A) 42 B) 49 C) 36 D) 54 E) 32

23.- A un disco de radio 5 se le extrae un sector circular de 144° con el sector restante se construye un cono circular recto. Calcular el volumen de dicho cono.

A) 25π B) 15π C) 12π

D) 36π E) 30π

24.- Sobre dos generatrices diametralmente opuestas de un cono equilátero con vértice A, se toman los puntos "M" y "N" tal que AM = 8 y AN = 6 . Calcular el menor recorrido para ir de "M" a "N" sobre la superficie lateral del cono.

A) 10 B) 14 C) 21/2

D) 19/2 E) $7\sqrt{2}$

25.- Dado un cono recto de altura $2m$ y radio de la base igual a $1m$, sobre el plano que contiene a la base se considera el punto "P" y se trazan las tangentes PM y PN a la circunferencia de la base del cono. Calcular la medida del diedro formado por los planos VPM y

VPN, siendo V el vértice del cono y la distancia del centro de la base al punto P es $4m$.

A) 120 B) 90 C) 45 D) 60 E) 53

26.- Calcular el volumen de un cono de revolución, sabiendo que un punto cualquiera de una de sus generatrices, dista de la base $8m$ del vértice del cono $5m$ y de la altura $3m$.

A) $324\pi m^3$ B) $325\pi m^3$ C) $326\pi m^3$

D) $327\pi m^3$ E) $328\pi m^3$

27.- ¿Cuánto m^2 de hierro se necesita para hacer un tubo de $4{,}5m$ de largo y $20cm$ de diámetro?

A) $2{,}83m^2$ B) $4{,}1m^2$ C) $3{,}45m^2$

D) $4{,}13m^2$ E) $1{,}86m^2$

28.- Un cilindro esta lleno de agua hasta la mitad, se suelta un pequeño pedazo metálico y el nivel del agua sube 3.5 *cm*, si el diámetro del cilindro es 8 *cm* ¿Cuál es el volumen del pedazo?

A) 176 cm^3 B) 384 cm^3 C) Faltan datos

D) 0,266 cm^3 E) 88 cm^3

29.- Hallar el área de la sección recta de un cilindro oblicuo, si el área de la base es 100 y la generatriz forma con la base un ángulo de 60°.

A) 100 B) 50 C) $50\sqrt{3}$

D) $50\sqrt{2}$ E) 60

30.- Se tiene un rectángulo cuyos lados están en la relación de 1 a 3. ¿En qué relación estarán los volúmenes de los sólidos obtenidos al girar alrededor de cada uno de los lados?

A) 2 : 3 B) 1 : 3 C) 2 : 5

D) 1 : 2 E) 1 : 5

31.- Al aumentar el radio de un cilindro 6 unidades, el volumen se aumenta en x unidades cúbicas; si la altura del cilindro se aumenta igualmente en 6 unidades, el volumen se aumenta en x unidades cúbicas. Si la altura original es 2, el radio original es :

A) 1 B) 4 C) 6 *m* D) 8 *m* E) 6

32.- Calcular el volumen de un cilindro de revolución en función de la circunferencia C de la base y de la diagonal D que une los extremos de dos generatrices diametralmente opuestas.

A) $\dfrac{1}{4\pi^2}\sqrt{D^2-C^2}$ D) 5. A

B) $\dfrac{C^2}{4\pi^2}\sqrt{D^2\pi^2-C^2}$ E) $\dfrac{C^2}{4\pi^2}\sqrt{D^2-C^2}$

C) $\dfrac{C^2}{4}\sqrt{D^2\pi-C^2}$

33.- Un cilindro de revolución (radio = 5 *cm*) es cortado por dos planos paralelos de manera que los ejes mayores de las elipses que se forman miden 16 *cm* y la generatriz del cilindro oblicuo que aparece es de 30 *cm*. Calcular el área lateral del cilindro oblicuo.

A) 831 cm^2 D) 720 cm^2

B) 942 cm^2 E) 619 cm^2

C) 1 053 cm^2

34.- El volumen de un cono es V por los puntos donde la altura del cono es trisecada, se trazan planos paralelos a la base del cono. Calcular el volumen de la porción central.

A) $\dfrac{3}{26}V$ B) $\dfrac{7V}{25}$ C) $\dfrac{9V}{24}$

D) $\dfrac{7V}{27}$ E) $\dfrac{8V}{21}$

35.- Dos conos (uno interior al otro) se construyen con la misma base; el ángulo que forman la altura y la generatriz del cono menor mide 45º y el del cono mayor mide 37º, la diferencia entre las alturas es "h". Hallar el volumen del sólido comprendido entre los dos conos.

A) $\frac{\pi h^3}{2}$ B) $\frac{\pi h^3}{3}$ C) $\frac{\pi h^3}{4}$

D) $\frac{2}{3}\pi h^3$ E) $\frac{\pi h^3}{6}$

36.- Determinar el volumen de un cono sabiendo que una cuerda de longitud "a" trazada en el círculo de la base subtiende un arco α y la altura del cono forma β con la generatriz, además : $\alpha + \beta = 90$

A) $\frac{\pi a^3 \sec\alpha}{12(1-\cos\alpha)}$ D) $\frac{\pi a^3 \sec\alpha}{6(1-\sec\alpha)}$

B) $\frac{\pi a^3 \operatorname{sen}\alpha}{12(1-\operatorname{sen}\alpha)}$ E) $\frac{\pi a^3 \sec\alpha}{6(1-\cos\alpha)}$

C) $\frac{\pi a^3 \cos\alpha}{12(1-\cos\alpha)}$

37.- Hallar el volumen máximo de un cilindro circular recto si el desarrollo de su superficie lateral es un rectángulo de perímetro K

A) $\frac{K^3}{108\pi}$ B) $\frac{K^3}{54\pi}$ C) $\frac{K^3}{216\pi}$

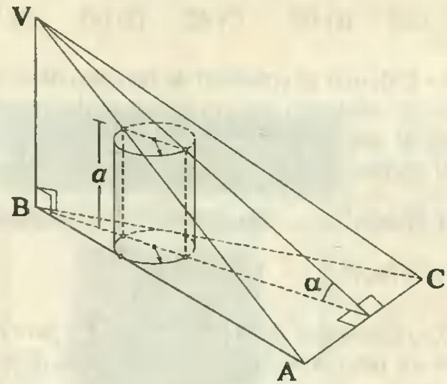
D) $\frac{K^3}{512\pi}$ E) $\frac{K^3}{\pi}$

38.- Hallar el volumen máximo de un cono recto inscrito en una esfera de radio 3.

A) 32π B) 34π C) 36π

D) 38π E) 40π

39.- La pirámide mostrada V - ABC tiene su base ABC regular, $\overline{VB}$ es perpendicular al Δ ABC, la base inferior del cilindro toca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y la superior toca a las caras laterales de la pirámide. Si AB = $2a$. Hallar el mínimo valor entero de α.



A) 29 B) 30 C) 31 D) 44 E) 46

40.- Calcular el volumen de un cilindro recto circunscrito a un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{2}\,m$. Además dos vértices opuestos de dicho octaedro están ubicados en los centros de las bases del cilindro.

A) $\pi\, m^3$ B) $\pi/2m^3$ C) $\pi/3\, m^3$

D) $2\pi\, m^3$ E) $\pi^2 m^3$

41.- Hallar la relación entre los volúmenes de un cilindro de revolución y un prisma triangular regular, si los desarrollos de sus superficies laterales son congruentes.

A) $3\sqrt{2}\,\pi$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ C) $3\sqrt{3}\,\pi$

D) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$

42.- En un cono equilátero de vértice P, en el círculo de la base se trazan los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Calcular el volumen del cono si la distancia entre los puntos medios de $\overline{AO}$ y PD es $\sqrt{15}\,m$. ("O" es el centro de la base)

A) $8\pi\, m^3$ B) 12π C) 18π

D) 24π E) 30π

CAP. 28

sólidos truncados

28.1 TRONCO DE UN PRISMA

Es el sólido determinado al cortar un prisma mediante un plano no paralelo a sus bases, si el prisma cortado es recto, el tronco de prisma será recto (*Fig*. 28.1a) y si el prisma es oblicuo se originará un tronco de prisma oblicuo (*Fig*. 28.1b).

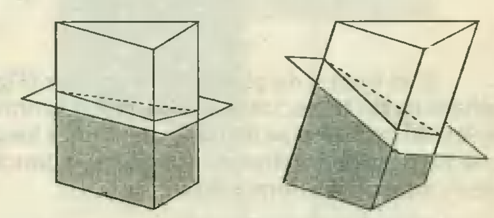
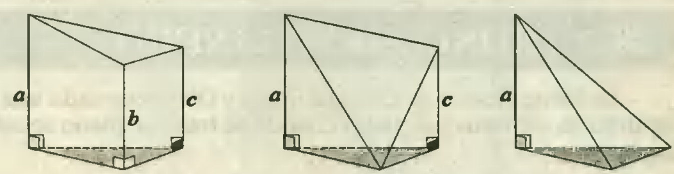


***Fig.* 28.1**

A) volumen de un tronco de prisma recto triangular

El volumen de un tronco de prisma recto de base triangular se calcula multiplicando el área de la base por el promedio de las longitudes de sus aristas.



$$V=A_{(Base)}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

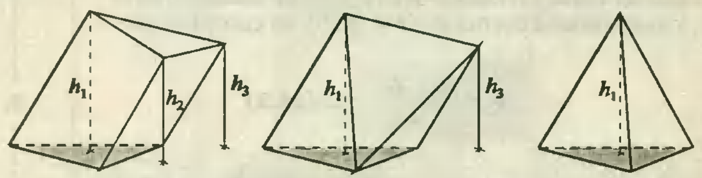
$$V=A_{(Base)}\cdot\left(\frac{a+c}{3}\right)$$

$$V=A_{(Base)}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)$$

***Fig.* 28.2**

B) volumen de un tronco de prisma oblicuo triangular

El volumen de un tronco de prisma oblicuo de base triangular se obtiene al multiplicar el área de su base por el promedio de las longitudes de sus alturas.



$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right)$$

$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_3}{3}\right)$$

$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1}{3}\right)$$

***Fig.* 28.3**

28.2 TRONCO DE PIRÁMIDE

Es el sólido determinado al cortar una pirámide cualquiera mediante un plano paralelo a su base.

En la figura adjunta el sólido MNL - ABC es un tronco de pirámide cuyas bases paralelas son MNL y ABC y la distancia entre ellas es H, longitud de la altura, luego su volumen V estará dado por la fórmula.

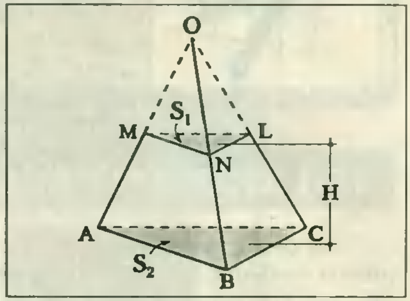


Fig. 28.4

$$V = \frac{H}{3}\left(S_1 + + S_2 + \sqrt{S_1\,S_2}\right) \quad \text{... (28.1)}$$

Si el tronco de pirámide es regular (*Fig.*28.5) las alturas de los trapecios isósceles que conforman la parte lateral del sólido se llamarán apotemas luego si p y p_1 son los semiperímetros de sus bases entonces el área de su superficie lateral será :

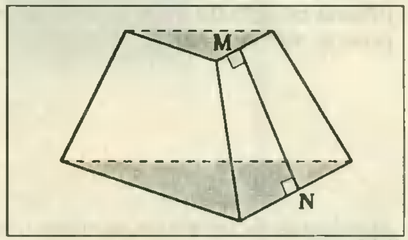


Fig. 28.5

$$S_L = (p + p_1)\,MN \quad \text{... (28.2)}$$

28.3 TRONCO DE CILINDRO

Se llama *Tronco de Cilindro Recto* y *Oblicuo* a cada una de las dos partes en que queda dividido un cilindro cualquiera cuando se traza un plano secante al cilindro y no paralelo a sus bases.

El tronco de cilindro recibe el mismo nombre que posee el cilindro que le da origen. Pueden reconocerse dos tipos de troncos de cilindro :

A) TRONCO DE CILINDRO RECTO

Si conocemos el radio R de la base circular, la generatriz media o longitud del eje g, la generatriz mayor g_1 y la generatriz menor g_2. (*Fig*. 28.6), se cumplirá que:

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad \text{... (28.3)}$$

A1) Área Lateral (A_L) : $A_L = 2\pi Rg$ ... (28.4)

A2) Volumen (V) : $V = \pi R^2 g$ ... (28.5)

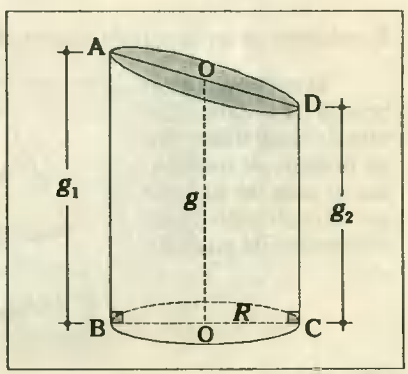


Fig. 28.6

B) TRONCO DE CILINDRO OBLICUO

Teniendo en cuenta las dimensiones que presenta el cilindro oblicuo de la *Fig*. 28.7 se cumplirá que :

B1) Área de la Superficie Lateral (A_L) :

$$AL = 2\pi Rg \quad \text{... (28.6)}$$

B2) Volumen (V) :

$$V = \pi R^2 g \quad \text{... (28.7)}$$

B3) Generatriz Media (g) :

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad \text{... (28.8)}$$

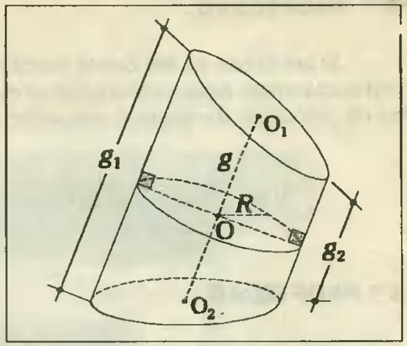


Fig. 28.7

28.4 TRONCO DE CONO

Llámese cono truncado o tronco de cono a la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base (*Fig*. 28.8).

La base del cono original y la sección paralela a la primera, son las bases circulares del cono de radio R y r.

La distancia entre las bases (h) es la altura del cono y la parte de la generatriz del cono comprendida entre las bases paralelas (g) es la generatriz del tronco del cono.

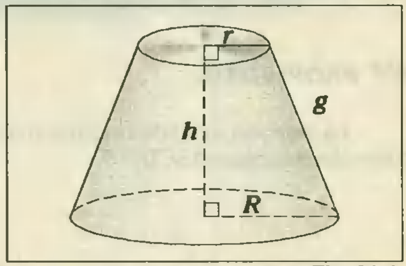


Fig. 28.8

- Área de la Superficie Lateral (A_L) :

$$A_L = \pi g\,(R + r) \quad \text{... (28.9)}$$

- Área de la Superficie Total (A_T) :

$$A_T = \pi g\,(R + r) + \pi\,(R^2 + r^2) \quad \text{... (28.10)}$$

- Volumen (V) :

$$V = \pi\,\frac{H}{3}\,(r^2 + R^2 + Rr) \quad \text{... (28.11)}$$

28.5 PROPIEDADES REFERENTES A SÓLIDOS TRUNCADOS

1RA PROPIEDAD.

El volumen de un tronco de prisma oblicuo triangular en función del área de su sección recta (S) y de las aristas laterales es :

$$V = S\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \quad \text{... (28.12)}$$

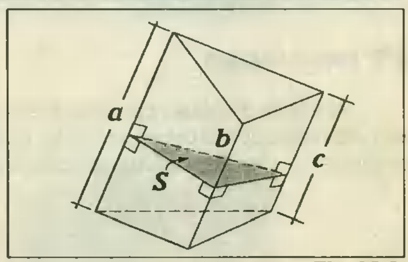


Fig. 28.9

2DA PROPIEDAD.

Si las áreas de las bases paralelas son S_1 y S_2 y la distancia entre ellas es h entonces el volumen del tronco de pirámide de segunda especie será :

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 - \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \quad \text{... (28.13)}$$

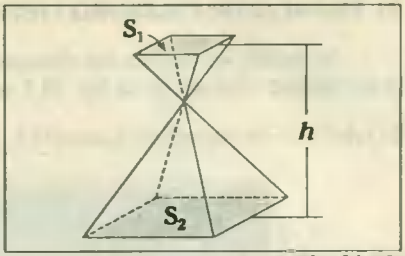


Fig. 28.10

3RA PROPIEDAD.

El volumen de una cuña cilíndrica ($g_2 = 0$) esta dado por :

$$V = \frac{\pi R^2 g_1}{2} \quad \text{... (28.14)}$$

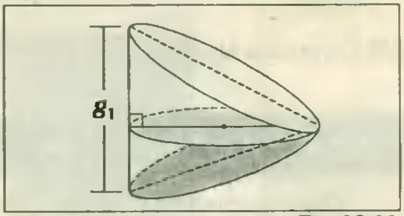


Fig. 28.11

4TA PROPIEDAD.

La sección axial de un tronco de cono recto es un trapecio isósceles ABCD.

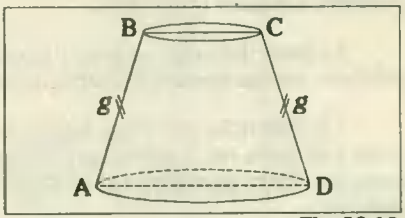


Fig. 28.12

5TA PROPIEDAD.

Si un tronco de cono esta circunscrito a una esfera, entonces su generatriz es igual a la suma de los radio de las bases, en efecto, considerando la figura adjunta se cumple que :

$$g = R + r \quad \text{... (28.15)}$$

y su área lateral A_L se expresará como :

$$A_L = \pi g^2 \quad \text{... (28.16)}$$

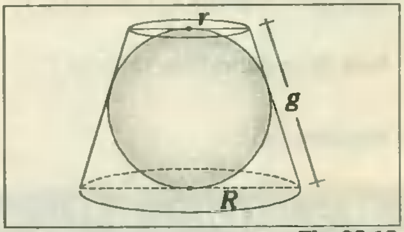


Fig. 28.13

6TA PROPIEDAD.

Al trazar un plano paralelo a las bases de un tronco de pirámide cuyas áreas son S_1 y S_2, equidistante de ellas, entonces se determina una sección transversal de área :

$$S = \left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}\right) \quad \text{... (28.17)}$$

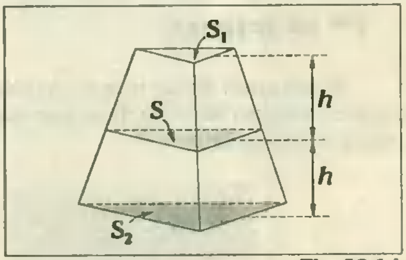


Fig. 28.14

7MA PROPIEDAD.

Volumen del tronco de cono de segunda especie.

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 - Rr) \quad \text{... (28.18)}$$

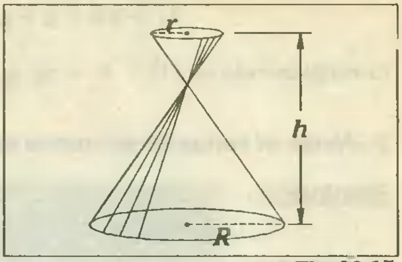


Fig. 28.15

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar el volumen del tronco de cilindro recto, cuya sección recta forma 60º con la base mayor, la cual tiene un área de 60m². Las generatrices Máxima y Mínima miden 10 y 4m.

<u>Resolución</u>.-

Se sabe que : $V_{TRONCO} = A_b \cdot e$ ... (1)

Donde : A_b = Area de la base y e = generatriz media

Siendo : $e = \dfrac{10+4}{2} \Rightarrow e = 7m$

Además, nótese que la base inferior es la proyección de la elipse superior sobre la base, entonces de acuerdo a un teorema ya estudiado anteriormente

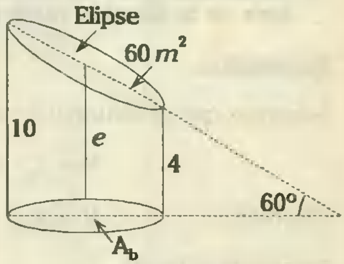
Se tiene : $A_b = A_{ELIPSE} \cdot \cos 60°$

En consecuencia : $A_b = 60 \cdot \dfrac{1}{2}$

Luego : $A_b = 30m^2$

Reemplazando en (1) : $V_{TRONCO} = 30m^2 \cdot 7m$

$\therefore$ $\mathbf{V_{TRONCO} = 210\ m^3}$



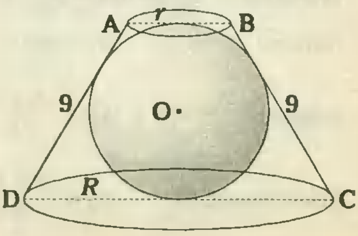
2.- Calcular el área lateral del tronco del cono mostrado siendo g = 9 su generatriz.

<u>Resolución</u>.-

Se sabe que : $A_L = \pi(R + r)g$ ... (1)

Puesto que ABCD es un trapecio circunscrito a un círculo Máximo de la esfera

Se puede aplicar el Teorema de Pithot :



$$2r + 2R = g + g \quad \Rightarrow \quad g = R + r$$

Reemplazando en (1) : $A_L = \pi g \cdot g$ $\quad \therefore \quad$ $\mathbf{V_x = 343\ cm^3}$

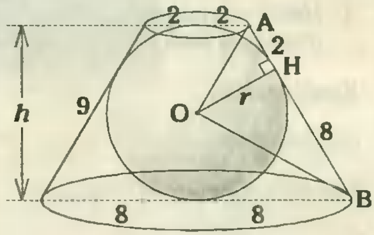
3.- Hallar el volumen del tronco de cono de radios básicos 2 y 8m, si es circunscriptible .

Resolución.-

Se sabe que : $\quad V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ ... (1)

Donde falta conocer la altura «h» que como se observa es el doble del radio «r», ó sea: $h = 2r$

Ahora trazando $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se forma el triángulo rectángulo AOB en el cual «r» es su altura, entonces : $\quad OH^2 = AH \cdot BH$



Reemplazando : $\quad r^2 = 2 \cdot 8$

Luego : $\quad r^2 = 2 \cdot 8$

Por consiguiente : $\quad h = 8m$

Sustituyendo en (1) : $\quad V = \dfrac{\pi(8)}{3}(8^2 + 2^2 + 8 \cdot 2)$

Donde : $\quad V = \dfrac{8\pi}{3}(84)$ $\quad \therefore \quad$ $\mathbf{V = 224\,\pi\, m^3}$

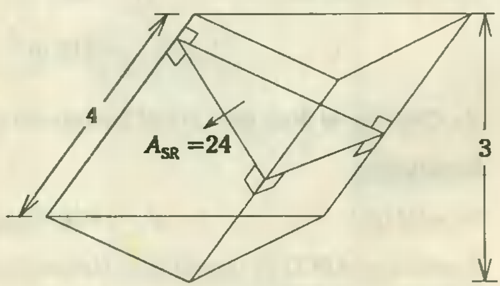
4.- Hallar el área de la base de un prisma oblicuo cuya arista mide 4m y su altura 3m y el área de la sección recta es 24m²

Resolución.-

Sabemos que el volumen de un prisma se halla empleando :

$$V = S_B \cdot \text{altura} \quad \text{... (1)}$$

También : $\quad V = S_{SR} \cdot a$ ... (2)



Igualando (1) y (2)

Tenemos : $S_B \cdot \text{altura} = S_{SR} \cdot a$

Donde : $\quad a = \text{arista}$

Luego : $\quad S_B = \dfrac{S_{SR} \cdot a}{h}$

Reemplazando : $\quad S_B = \dfrac{24 \cdot 4}{3}$ $\quad \therefore \quad$ $\mathbf{S_B = 32\ m^2}$

5.- Calcular el área lateral de un prisma oblicuo cuya sección recta es un hexágono regular de $24\sqrt{3}$ m^2 de superficie, la altura del prisma es $8\sqrt{3}$ m y además se sabe que las aristas forman ángulos de 60º con la base.

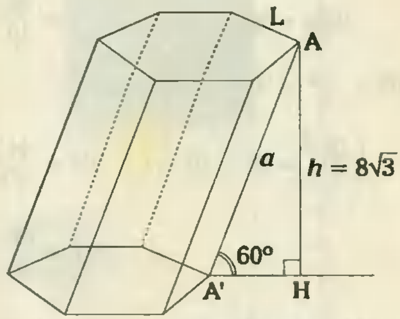
Resolución.-

Sabemos que : $S_L = 2p_{SR} \cdot \text{arista} ... (1)$

Donde : $2p_{SR}$ = perímetro de la sección recta

Entonces calcularemos el perímetro de la sección recta : $S_R = 6\left(\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$

Entonces : $24\sqrt{3} = 6\,\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$



Luego : $\dfrac{24\sqrt{3}\times 4}{6\sqrt{3}} = L^2$

Por consiguiente : $L^2 = 16$

Donde : $L = 4m$

En consecuencia : $2p_{SR} = 24m$

En el ⊿ AHA' : $a = 16m$

Reemplazando : $S_L = 24 \cdot 16$ $\therefore$ $\mathbf{S_L = 384\ m^2}$

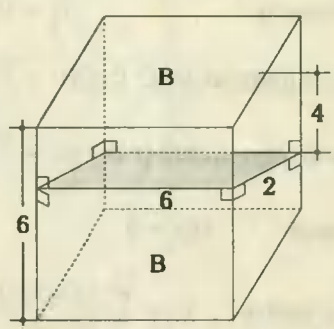
6.- Un prisma oblicuo tiene por sección recta un trapecio rectángulo cuyas bases miden 2m y 6m y la altura es igual a 3m . Calcular la superficie total si su arista y altura miden 6m y 4m respectivamente.

Resolución.-

Sabemos que : $S_t = S_L + 2S_B ... (1)$

Cálculo de S_L : $S_L = 2p \cdot \text{arista} \Rightarrow S_L = 16 \cdot 6$

Luego : $S_L = 96m^2$



Cálculo de S_B :

Sabemos también que : $V = S_{SR} \cdot \text{arista} = S_B \cdot h$

Donde : $S_{SR} = 12$, arista = 6 y $h = 4$

En consecuencia : $12 \cdot 6 = S_B \cdot 4$

Por consiguiente : $S_B = 18m^2$

Reemplazando en (1) : $S_t = 96m^2 + 2(18)\,m^2$ $\therefore$ $\mathbf{V_x = 132\ cm^2}$

MISCELÁNEA

1.- En un tronco de cono revolución los radios de las bases miden 3 y 7m. Hallar el valor de la altura para que la suma de las áreas de las bases sea igual al área lateral.

Resolución.-

Por condición del problema; «El área lateral es igual a la suma de las áreas de las bases»

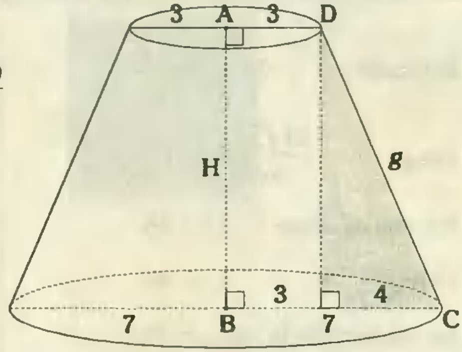
Es decir : $\pi g(7+3) = \pi 7^2 + \pi 3^2$

Donde : $10\pi g = 58\pi \Rightarrow g = \dfrac{58}{10} = \dfrac{29}{5}$

En el ⊿ DTC : $g^2 = H^2 + (4)^2$

Ahora : $\left(\dfrac{29}{5}\right)^2 = H^2 + 16 \Rightarrow H^2 = \dfrac{441}{25}$

$\therefore \boxed{H = \dfrac{21}{5}}$



2.- Se tiene el tronco de prisma recto de bases ABCD y D' C' B' A' : la primera base es un cuadrado de 7cm de lado y la segunda es un paralelogramo. Hallar el volumen del sólido, si AA' = 4cm , BB' = 5cm y CC' = 10cm

Resolución.-

Descomponemos el tronco de prisma recto cuadrangular mediante el plano BDD'B en dos troncos de prisma triangular de volúmenes V_1 y V_2 y si V_x es el volumen pedido.

Entonces : $V_x = V_1 + V_2$ ... (1)

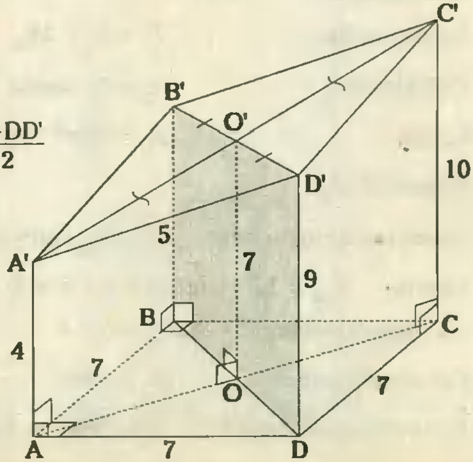
En el trapecio AA' C' C: $OO' = \dfrac{4+10}{2} = 7$

En el trapecio BB' D' D: $OO' = \dfrac{5+DD'}{2} \Rightarrow 7 = \dfrac{5+DD'}{2}$

Luego : DD' = 9

Del gráfico : $V_1 = \dfrac{7^2}{2}\left(\dfrac{4+5+9}{3}\right) = 147\ cm^3$

$V_2 = \dfrac{7^2}{2}\left(\dfrac{5+10+9}{3}\right) = 196 cm^3$



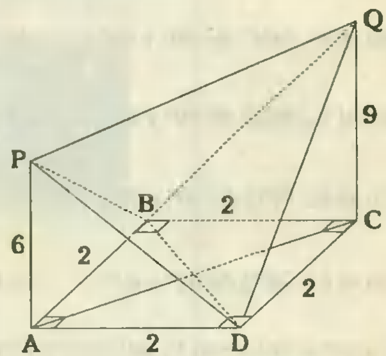
Sustituyendo estos valores obtenidos en (1) : ·

$$V_x = 147 + 196 \qquad \therefore \qquad \boxed{V_x = 343\ cm^3}$$

3.- Por los vértices A y C de un cuadrado ABCD se levantan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ de 6 y 9 . Calcular el volumen del sólido PBQD , si AB = 2m

Resolución.-

Trazamos el plano ACQP dividiendo el sólido ABCDPQ en dos troncos de prisma equivalentes ADCPQ y ABCPQ de volúmenes $\left(\frac{2^2}{2}\right)\left(\frac{6+9}{3}\right) = 10m^3$



Luego el volumen total será $2(10m^3) = 20m^3$

Pero el volumen total es también igual a la suma de los volúmenes de las pirámides P - ABD ; Q - BCD y del sólido PBQD de volumen V_x.

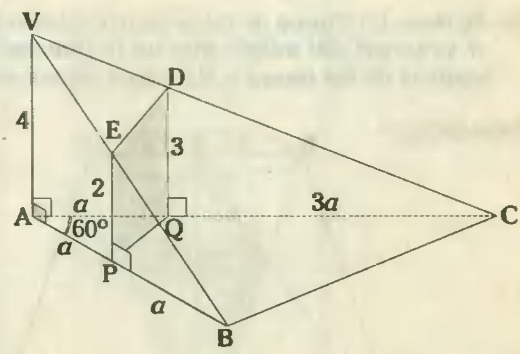
Luego : $\quad 20 = \frac{2^2}{2}\left(\frac{6}{3}\right) + \frac{2^2}{2}\left(\frac{9}{3}\right) + V_x$

$20 = 4 + 6 + V_x \qquad \therefore \qquad \boxed{V_x = 10\ m^3}$

4.- Dada la pirámide V - ABC de altura VA = 4m , m ∡ BAC = 60º y AC = 2AB , sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que AP = PB y $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{3}$ Por P y Q se levantan perpendiculares a la base las cuales cortan en E y D a $\overline{VB}$ y $\overline{VC}$ respectivamente. Hallar el volumen del sólido PQDEBC

Resolución.-

En el ⊿ VAB : $EP = \frac{VA}{2} = \frac{4}{2} = 2$



⊿ VAC ~ ⊿ DQC : $\frac{DQ}{4} = \frac{3a}{4a} \quad \Rightarrow \quad DQ = 3$

Por condición del problema, el área del Δ PAQ es $3m^2$.

Es decir : $\quad \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad a^2\sqrt{3} = 12$

El área del Δ BAC es : $\quad \frac{(2a)(4a)}{2}$ sen $60° = 4a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2(12) = 24m^2$

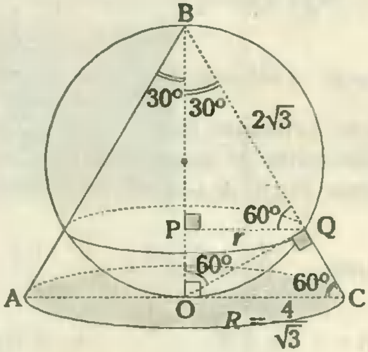
Sea «V_x» el volumen pedido, V_1 el volumen del tronco de prisma APQ - VED y V_2 el volumen de la pirámide V - ABC.

Luego : $V_x = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}(24)(4) - 3\left(\frac{4+2+3}{3}\right)$ $\therefore$ $\boxed{x = 23\,m^3}$

5.- Se tiene un cono equilátero de altura igual a 4m tomando como diámetro la altura, se construye una esfera. Calcular el volumen del tronco de cono formado.

Resolución.-

La sección axial del cono equilátero es el triángulo equilátero de altura BO = 4



En el ⊿ BOC de 30° y 60° : $R = \frac{BO}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

En el ⊿ BQO de 30° y 60° : $BQ = \frac{BO}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

En el ⊿ BPQ de 30° y 60° : $r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

En el ⊿ OPQ de 30° y 60° : $OP = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

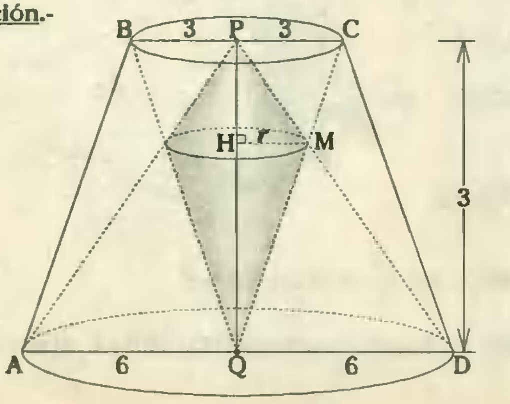
Luego el volumen V_T del tronco formado sera :

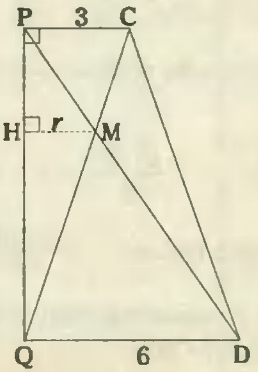
$$V_T = \frac{\pi(OP)}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3}(1)\left[\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}\right]$$

Ahora : $V_T = \frac{\pi}{3}\left(\frac{16}{3} + 3 + 4\right)$ $\therefore$ $\boxed{V_T = \frac{37\pi}{9}}$

6.- Se tiene un tronco de cono de revolución de altura 3m y radio básicos 3m y 6m. Hallar el volumen del sólido que es la intersección de los conos cuyos vértices son los centros de las bases y las bases de los conos son las bases del tronco.

Resolución.-





El sólido determinado de volumen V_x esta formado por dos conos de base común. Siendo V_1 el volumen del cono de vértice P y V_2 el volumen del cono de vértice Q , se tiene :

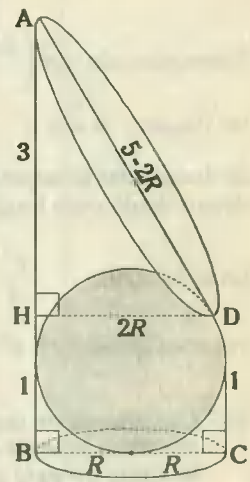
$$V_x = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (\overbrace{PH + HQ}^{3}) = \pi r^2 \ ... \ (1)$$

En el trapecio rectángulo QPCD : $\quad r = \dfrac{3.6}{3+6} = \dfrac{18}{9} = 2$

Reemplazando en (1) : $\quad V_x = \pi(2)^2 \qquad \therefore \qquad \mathbf{V_x = 4\pi m^3}$

7.- Calcular el volumen de un tronco de cilindro recto circunscrito a una esfera sabiendo que sus generatrices miden 1 y 4

Resolución.-



Sea «V_x» el volumen del tronco de cilindro

Luego : $\quad V_x = \pi R^2\left(\dfrac{4+1}{2}\right) = \dfrac{5\pi R^2}{2} \quad ... \ (1)$

La sección axial del tronco de cilindro recto es un trapecio rectángulo ABCD circunscrito a un círculo cuyo radio de la circunferencia mide «R»

Luego por Pithot $\quad AD + 2R = 4 + 1 \quad \Rightarrow \quad AD = 5 - 2R$

En el ⊿ AHD : $\quad (5 - 2R)^2 = 3^2 + (2R)^2$

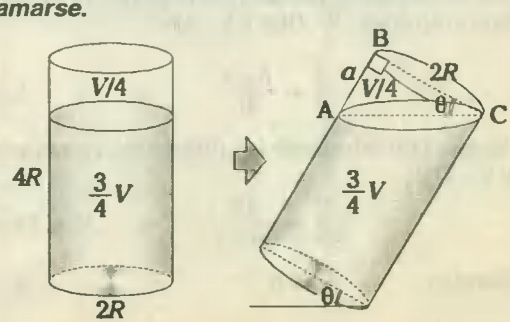
Donde : $\quad 25 - 20R + 4R^2 = 9 + 4R^2$

Luego : $\quad 16 = 20R \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{4}{5} \ ... \ (2)$

Sustituyendo (2) en (1) : $V_x = \dfrac{5\pi}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \quad \therefore \quad \mathbf{V_x = \dfrac{8}{5}\pi}$

8.- En un vaso que tiene la forma de un cilindro recto de revolución la altura es el doble del diámetro de la base; si el vaso contiene un líquido que ocupa las 3 / 4 partes de su capacidad. Determinar el ángulo que debe inclinarse desde su posición normal hasta el instante en que el líquido este por derramarse.

Resolución.-



Asumiendo que el diámetro es $2R$, entonces la altura sera $4R$ la parte no ocupada por H_2O es $V/4$ y al ser inclinado el cilindro «θ» la parte no ocupada por H_2'O toma la forma de un tronco de cilindro recto.

Luego : $\dfrac{V}{4} = \pi R^2 . \dfrac{a}{2}$

Pero : $V = \pi R^2 . 4R = 4\pi R^3$; luego : $\dfrac{4\pi R^3}{4} = \dfrac{\pi R^2 a}{2}$

Simplificando : $a = 2R$

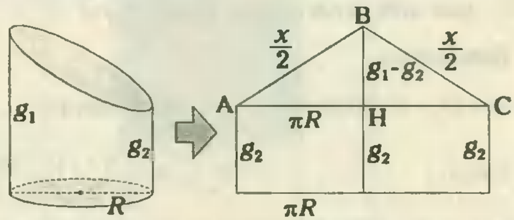
Finalmente en el ⊿ ABC, como : AB = BC $\therefore$ **θ = 45**

9.- *Se tiene un tronco de cilindro circular recto en que su volumen es numéricamente igual a su área lateral. Si la diferencia entre las generatrices mayor y menor es π; hallar la longitud de la elipse que constituye su base superior.*

Resolución.-

De acuerdo a la condición del problema :

$$V = A_L$$



Reemplazando : $\pi R^2\left(\dfrac{g_1+g_2}{2}\right) = 2\pi R\left(\dfrac{g_1+g_2}{2}\right)$

De donde : $R = 2$

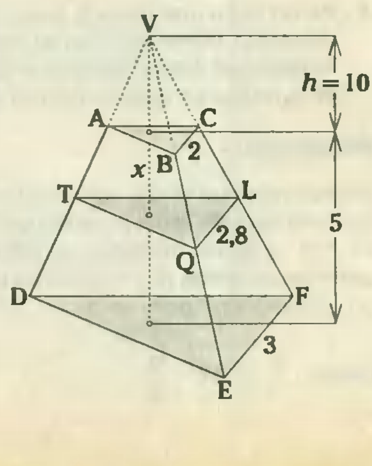
Al desarrollar la superficie lateral del tronco de cilindro recto se obtiene la elipse, también desarrollada cuya longitud es equivalente a la de la poligonal ABC de longitud «x»

En el ⊿ AHB : $\dfrac{x^2}{4} = (\pi R)^2 + (g_1 - g_2)^2$, en consecuencia : $\dfrac{x^2}{4} = 4\pi^2 + \pi^2 = 5\pi^2$

Por consiguiente : $x^2 = 20\pi^2$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 2\pi\sqrt{5}}$

10.- *Las aristas de las bases de un tronco de pirámide regular triangular miden 2 y 3 ¿A qué distancia de la base menor se debe trazar un plano paralelo a las bases para que la arista de esta sección mida 2,8 si la altura del tronco es 5?*

Resolución.-



Al completar la pirámide original se determinan 3 pirámides semejantes. Luego , considerando la semejanza de las pirámides V - DEF y V - ABC :

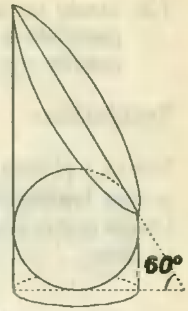
$$\frac{3}{2} = \frac{h+5}{h} \quad \Rightarrow \quad h = 10$$

Ahora, considerando las pirámides semejantes V - ABC y V - TQL :

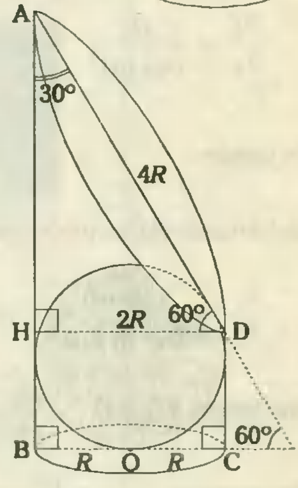
$$\frac{2}{2{,}8} = \frac{10}{10+x} \quad \Rightarrow \quad 20 + 2x = 28$$

Donde : $2x = 8$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 4}$

11.- En la figura. Hallar el área lateral del tronco de cilindro circunscrito a una esfera de radio R.



<u>**Resolución**</u>.-



Sea «A_L» el área de la superficie lateral del tronco de cilindro recto

Luego : $$A_L = 2\pi R\left(\frac{AB+CD}{2}\right) \quad \text{... (1)}$$

La sección axial del sólido es un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia de radio R. Luego aplicando el Teorema de Pithot :

$$AB + CD = 4R + 2R \quad \Rightarrow \quad AB + CD = 6R \quad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$A_L = 2\pi R\left(\frac{6R}{2}\right) \quad \therefore \quad \mathbf{A_L = 6\,\pi R^2}$$

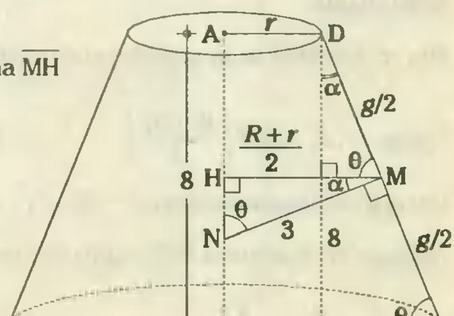
12.- Calcular el área lateral de un tronco de cono de revolución sabiendo que su altura es de 8m y el segmento de mediatriz de una generatriz limitada por la altura mide 3m.

<u>**Resolución**</u>.-

Sea «A_L» el área de la superficie lateral del tronco de cono

Luego : $$A_L = \pi g(R + r) \text{... (1)}$$

En el trapecio rectángulo ABCD trazamos la mediana $\overline{MH}$



Luego $$MH = \frac{r+R}{2}$$

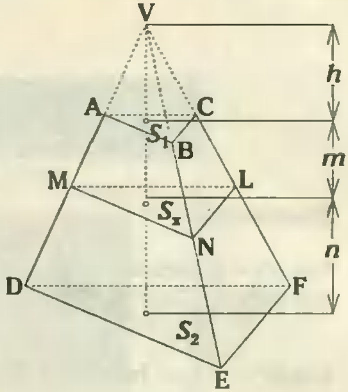
$\triangle$ NHM $\sim$ $\triangle$ DTC : $$\frac{\frac{R+r}{2}}{8} = \frac{3}{g}$$

$$\Rightarrow \quad g(R + r) = 48 \quad \text{... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1) : $\mathbf{A_L = 48\,\pi}$

13.- Dado un tronco de pirámide cuyas bases tienen áreas S_1 y S_2 se traza un plano paralelo a las bases; dicho plano dista de la base menor «m» unidades y de la base mayor «n» unidades. Hallar el área de la sección determinada.

Resolución.



Sea «S_x» el área de la sección mencionada, prolongamos las aristas laterales del tronco hasta que se intersecten en V. Luego por la semejanza de las pirámides V - ABC y V - MNL se tiene :

$$\frac{S_1}{S_x} = \frac{h^2}{(h+m)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_x}} = \frac{h}{h+m}$$

De donde : $$\frac{\sqrt{S_x}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_x}} = \frac{m}{h+m} \quad ... (1)$$

En forma similar considerando la semejanza de las pirámides V - DEF y V - MNL :

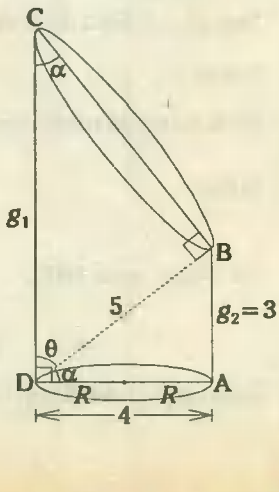
$$\frac{S_x}{S_2} = \frac{(h+m)^2}{(h+m+n)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{S_x}}{\sqrt{S_2}} = \frac{h+m}{h+m+n} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_x}}{\sqrt{S_x}} = \frac{n}{h+m} \quad ... (2)$$

Dividiendo (1) : (2) : $$\frac{\sqrt{S_x}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_x}} = \frac{m}{n}.$$

Efectuando : $n\sqrt{S_x} - n\sqrt{S_1} = m\sqrt{S_2} - m\sqrt{S_x}$ $\quad\therefore\quad$ $$S_x = \left(\frac{m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}}{m+n}\right)^2$$

14.- En un tronco de cilindro recto se tienen las generatrices $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ menor y mayor respectivamente; siendo $\overline{AD}$ diámetro de la base. Si $\overline{BD} \perp \overline{BC}$; BD = 5 y AD = 4 ; calcular el área de la superficie lateral del tronco.

Resolución.-



Sea «A_L» el área de la superficie lateral del tronco

Luego : $$A_L = \pi R^2\left(\frac{g_1+g_2}{2}\right) \quad ... (1)$$

Del gráfico observamos que $2R = 4 \Rightarrow R = 2$

Además los triángulos CBD y BAD son semejantes

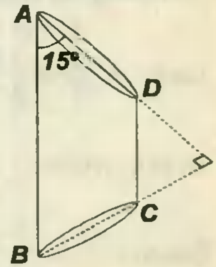
Luego : $$\frac{g_1}{5} = \frac{5}{g_2}$$

Puesto que : $g_2 = 3$ $\Rightarrow$ $g_1 = \dfrac{25}{3}$

Sustituyendo estos valores encontrados de R, g_1 y g_2 en (1) :

$$A_L = \pi(2)^2\left(\frac{\frac{25}{3}+3}{2}\right) \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_L = \frac{68\pi}{3}\,cm^2}$$

15.- Calcular el volumen del tronco de cilindro oblicuo mostrado, si sus bases son perpendiculares y sus generatrices máxima y mínima miden 16 y 4



__Resolución.-__

Sea «V» el volumen del tronco de cilindro oblicuo

Luego : $V = \pi R^2\left(\dfrac{16+4}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $V = \pi R^2 \cdot 10$ ... (1)

En el ⊿ ALB de 15° y 75° :

$$LM = \frac{AB}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

En el ⊿ DLC de 15° y 75° :

$$LN = \frac{DC}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

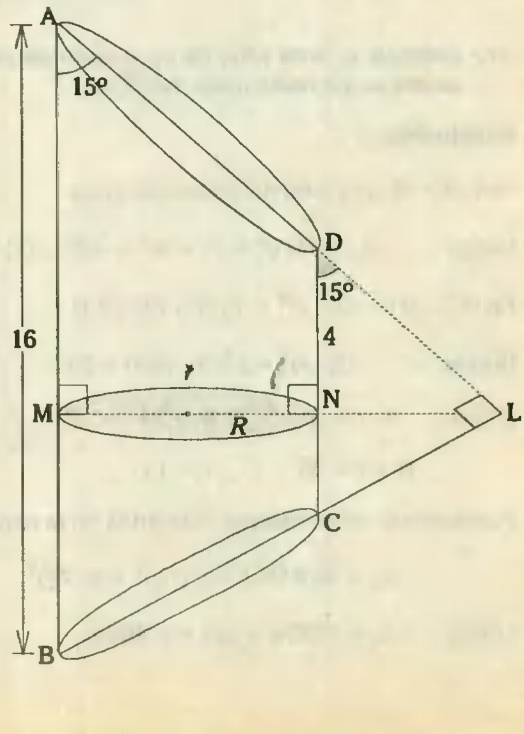
Luego : $2R = LM - LN = 4 - 1$

$\Rightarrow$ $R = \dfrac{3}{2}$ ... (2)

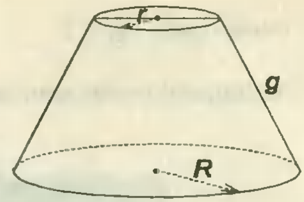
Sustituyendo (2) en (1) :

$$V = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 10$$

$\therefore$ $\mathbf{V = \dfrac{45\pi}{2}}$



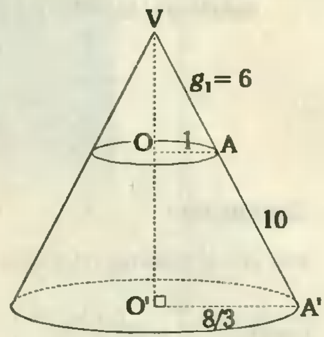
16.- En la figura : $R = \frac{8}{3}$ m , $r = 1$m , $g = 10$m . Calcular el volumen del cono circular recto del cual proviene dicho tronco.



Resolución.-

Completamos el cono circular recto obteniendo además un cono parcial semejante al total

Luego : $\dfrac{1}{\frac{8}{3}} = \dfrac{g_1}{g_1+10} \quad \Rightarrow \quad g_1 = 6$



En el ⊿ VO'A' : $VO' = \sqrt{(16)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2}$

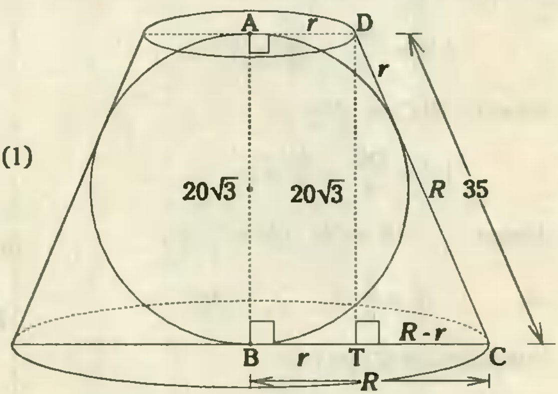
Donde : $VO' = \sqrt{\frac{704}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{33}$

Luego el volumen «V_x» del cono recto sera :

$$V_x = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{33} \qquad \therefore \qquad \mathbf{V_x = \frac{512\pi}{81}\sqrt{33}}$$

17.- Calcular el área total de un tronco de cono de 35m de generatriz circunscrito a una esfera cuyo radio mide $10\sqrt{3}$ m

Resolución.-



Sea «A_T» el área total del tronco de cono

Luego : $A_T\ \pi(35)\ (R + r) + \pi r^2 + \pi R^2$ ... (1)

En el ⊿ DTC : $(R - r)^2 = (35)^2 - (20\sqrt{3})^2$

Donde : $(R - r)^2 = 1225 - 1200 = 25$

Ahora : $R - r = 5 \qquad R = 20$

$R + r = 35 \qquad r = 15$

Sustituyendo estos valores obtenidos en la expresión (1) :

$$A_T = 35\,\pi\,(35) + \pi\,(15)^2 + \pi\,(20)^2$$

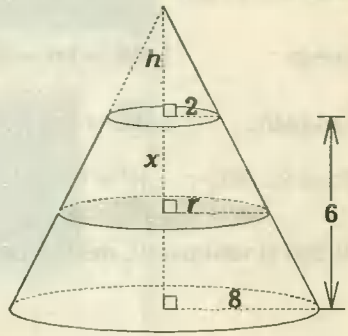
Luego : $A_T = 1225\,\pi + 225\,\pi + 400\,\pi \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_T = 1850\,\pi}$

18.- En un tronco de cono de bases paralelas a que distancia de la base menor se debe trazar un plano paralelo a esta para que el área de la superficie resultante sea la media aritmética de las bases, si los radios de las bases miden 2 y 8m. Además la altura del tronco de cono mide 6m.

Resolución.-

Por condición del problema : $\pi r^2 = \dfrac{\pi 2^2 + \pi 8^2}{2} = \pi \, . \, 34 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{34}$

Al completar el cono que dió lugar el tronco, se determinan tres conos semejantes.



Luego se tiene : $\dfrac{2}{8} = \dfrac{h}{6+h} \quad \Rightarrow \quad h = 2$

Además : $\dfrac{2}{r} = \dfrac{h}{h+x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\sqrt{34}} = \dfrac{2}{2+x}$

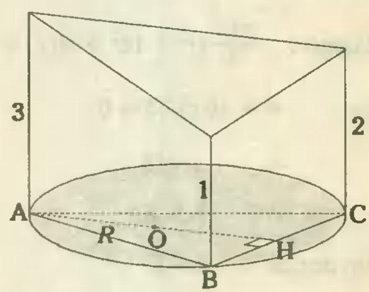
Donde : $2 + x = \sqrt{34} \quad \therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{34} - 2}$

19.- Hallar el volumen de un tronco de prisma triangular regular, si sus aristas laterales miden 1, 2 y 3, además su base esta inscrita en un círculo de radio $2\sqrt{3}$

Resolución.-

Sea «V» es volumen del tronco, luego : $V = \dfrac{(AH)^2\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{1+2+3}{3}\right)$

Donde : $V = \dfrac{2\,(AH)^2\sqrt{3}}{3}$ ... (1)



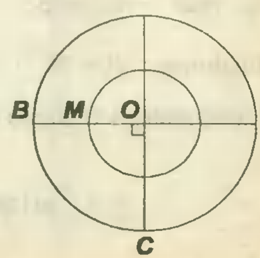
En el triángulo equilátero ABC :

$$AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}\,(2\sqrt{3})$$

Ahora : $AH = 3\sqrt{3}$

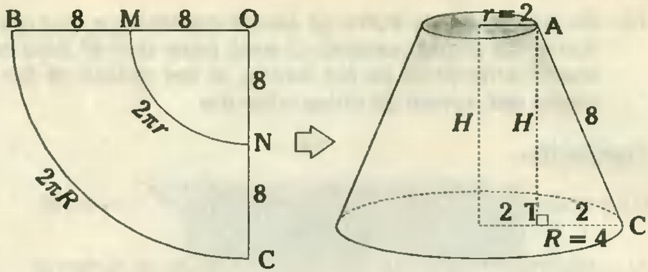
En (1) $V = \dfrac{2\,(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{V = 18\sqrt{3}}$

20.- Calcular el volumen del tronco de cono recto que se puede construir con la figura sombreada, si OM = MB = 8m y OC = OB



Resolución.-

El trapecio circular BMNC determina el tronco de cono circular recto de radios básicos r y R donde la longitud del arco MN es $2\pi r$ y la de $\overset{\frown}{BC}$ es $2\pi R$



Luego : $\quad L\overset{\frown}{MN} = 2\pi r = 4\pi \quad \Rightarrow \quad r = 2$

También : $\quad L\overset{\frown}{BC} = 2\pi R = 8\pi \quad \Rightarrow \quad R = 4$

En el ⊿ ATC : $\quad H^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 \quad \Rightarrow \quad H = 2\sqrt{15}$

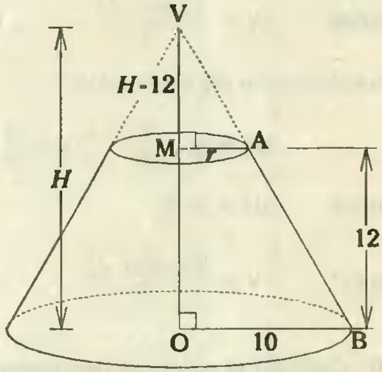
Luego el volumen V_T del tronco será : $\quad V_T = \dfrac{\pi(2\sqrt{15})}{3}\,(4^2 + 2^2 + 4 \,.\, 2)$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V_T = \frac{56\pi\sqrt{15}}{3}}$$

21.- Un tronco de cono de revolución de altura 12m tiene por base mayor un circulo de radio 10m, si el volumen del tronco de cono es 700m³ . ¿Cuál es el volumen del cono?

Resolución.-

Sea «r» el radio de la base menor del tronco



Luego : $\quad \dfrac{\pi 12}{3}\,(r^2 + 10^2 + 10\,r) = 700\,\pi$

$\Rightarrow \quad r^2 + 10\,r - 75 = 0$

$$\begin{matrix} r & & +15 \\ r & & -5 \end{matrix}$$

De donde : $\quad r = 5$

⊿ VMA ~ ⊿ VOB : $\quad \dfrac{5}{10} = \dfrac{H-12}{H}$

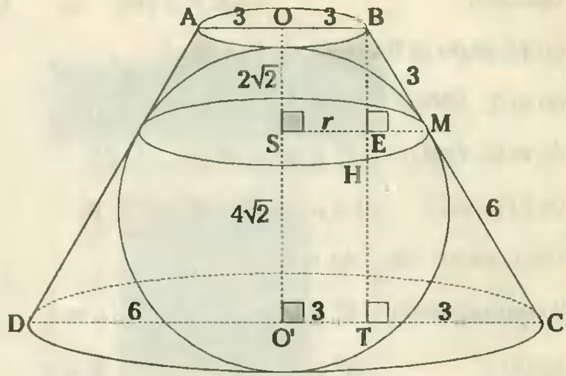
De donde : $\quad H = 24$

Finalmente el volumen del cono total sera :

$$V = \frac{1}{3}\pi(10)^2 \,.\, 24 \qquad \therefore \qquad \mathbf{V = 800\pi m^3}$$

22.- En un tronco de cono de revolución los radios básicos miden 3 y 6m, la esfera inscrita en el tronco de cono determina dos troncos cuya relación de volúmenes se desea calcular.

Resolución.-



Primeramente calculemos el radio «r» de la circunferencia formada por los puntos de tangencia de la esfera y la superficie tronco cónica, para lo cual consideramos

En el ⊾ BTC : $BT = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$

Considerando la semejanza de los triángulos BEM y BTC :

$$\frac{EM}{3} = \frac{3}{9} \quad \Rightarrow \quad EM = r - 3 = 1$$

De donde :

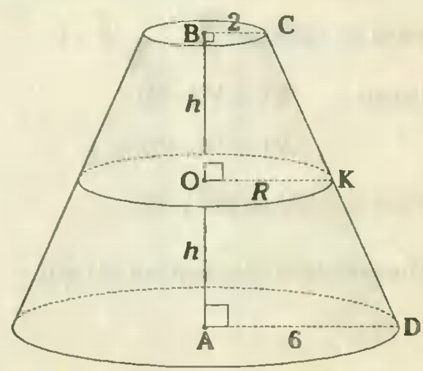
$r = 4$, $BE = OS = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ y $SO' = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los troncos menor y mayor

$$\text{Luego :} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi(2\sqrt{2})}{3}(3^2 + 4^2 + 3.4)}{\frac{\pi(4\sqrt{2})}{3}(4^2 + 6^2 + 4.6)} \qquad \therefore \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{152}}$$

23.- Los radios de las bases de un tronco de cono miden 2 y 6. Hallar el área de la sección paralela a las bases y equidistante de ellas.

Resolución.-



En el trapecio rectángulo ABCD $\overline{OK}$ es mediana

$$\text{Luego :} \quad OK = R = \frac{2+6}{2} \quad \Rightarrow \quad R = 4$$

Nos piden calcular el área de la sección circular A_x

$$\text{Luego :} \quad A_x = \pi R^2 = \pi\,(4)^2$$

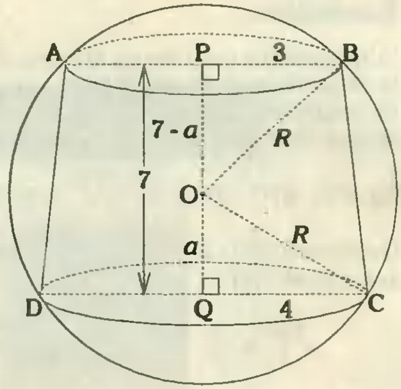
$$\therefore \quad \boxed{A_x = 16\,\pi}$$

24.- Las bases de un tronco de cono de revolución miden $9\pi m^2$ y $16\pi m^2$ y su altura mide 7m. Calcular el radio de la esfera circunscrita.

Resolución.-

Por dato del problema : $\pi(PB)^2 = 9\pi \quad \Rightarrow \quad PB = 3$

También : $\pi(QC)^2 = 16\pi \quad \Rightarrow \quad QC = 4$



Empleando el Teorema de Pitágoras

En el ⊿ OPB : $R^2 = (7 - a)^2 + 3^2$ ... (1)

En el ⊿ OQC : $R^2 = a^2 + 4^2$ ... (2)

De (1) y (2) : $49 + a^2 - 14a + 9 = a^2 + 16$

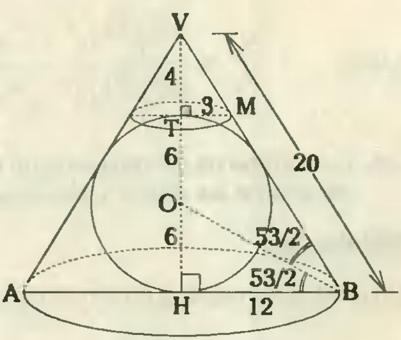
Efectuando : $58 - 14a = 16$

Por consiguiente : $42 = 14a \quad \Rightarrow \quad a = 3$

En (2) : $R^2 = 3^2 + 4^2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{R = 5}$

25.- La generatriz de un cono recto circular mide 20m y el radio de la base mide 12m se traza un plano paralelo a la base de modo que el tronco de cono resultante sea circunscriptible a una esfera. Hallar el volumen del cono menor.

Resolución.-



En el ⊿ VHB : $VH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$

y $m \measuredangle HBV = 53$

$\Rightarrow \quad m \measuredangle HBO = m \measuredangle OBV = \dfrac{53}{2}$

En el ⊿ OHB de $\dfrac{53}{2}$: $R = 6$

Luego : $VT = VH - TH$

$VT = 16 - 2(6) = 4$

En el ⊿ VTM de 37° y 53° : $TM = 3$

Finalmente el volumen pedido será : $V = \dfrac{1}{3}\pi(3)^2 . 4$

$\therefore \quad \mathbf{V = 12\pi}$

26.- En un tronco de cono recto los radios de las bases miden 2 y 8 , por el centro de la esfera inscrita en el tronco se traza un plano paralelo a las bases. Calcular el volumen del tronco de cono formado por dicho plano y su base menor.

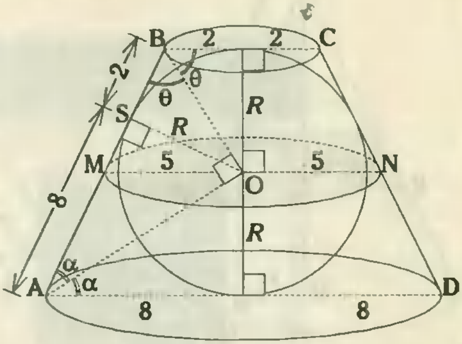
Resolución.-

Al trazar la paralela por el centro O de la esfera inscrita, se determina como sección un círculo de diámetro :

$$MN = \frac{4+16}{2} = 10$$

En el ⊿ AOB : $R^2 = 2 \cdot 8$

$\Rightarrow \quad R = 4$



Finalmente si V es el volumen del tronco

Entonces : $V = \frac{\pi R}{3}(2^2 + 5^2 + 2 \cdot 5)$

Reemplazando : $V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(4 + 25 + 10)$

$\therefore \quad \mathbf{V = 52\,\pi\, m^3}$

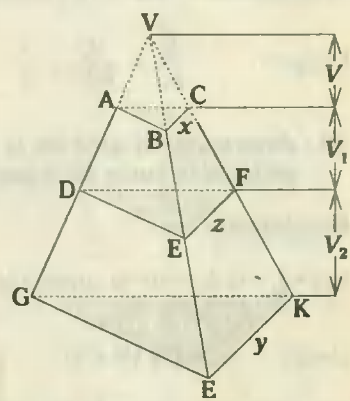
27.- Las aristas de las bases de un tronco de pirámide triangular regular miden x e y, se traza un plano paralelo a las bases que determina una sección de arista «z» . Hallar la relación entre los volúmenes de los sólidos determinados.

Resolución.-

Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos determinados y V el volumen de la pirámide V - ABC por semejanza de pirámides

$$\frac{V}{V+V_1} = \frac{x^3}{z^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V+V_1-V}{V+V_1} = \frac{z^3-x^3}{z^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_1}{V+V_1} = \frac{z^3-x^3}{z^3} \quad \ldots (1)$$



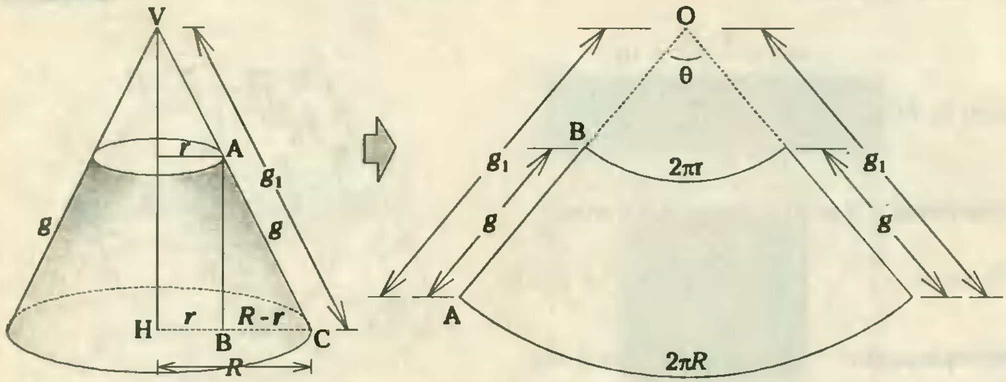
$$\frac{V+V_1}{V+V_1+V_2} = \frac{z^3}{y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V+V_1+V_2-V-V_1}{V+V_1} = \frac{y^3-z^3}{z^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_2}{V+V_1} = \frac{y^3-z^3}{z^3} \quad \ldots (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2) : $\therefore \quad \mathbf{\frac{V_1}{V_2} = \frac{z^3-x^3}{y^3-z^3}}$

28.- Calcular el ángulo del desarrollo de un tronco de cono de revolución si los radios de sus bases miden r y R siendo su generatriz : g = 5 (R - r)

Resolución.-



Completamos el cono prolongando las generatrices del tronco de cono

Sea VC = g_1 la generatriz del cono

Luego : ⊿ VHC ~ ⊿ ABC : $\dfrac{g_1}{g} = \dfrac{R}{R-r}$

Puesto que : $g = 5(R - r)$

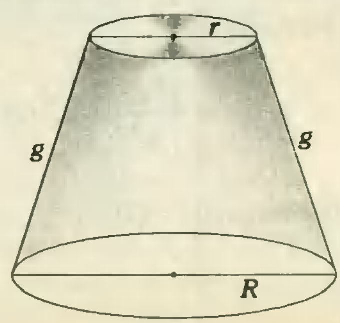
Luego : $g_1 = 5R \Rightarrow \dfrac{R}{g_1} = \dfrac{1}{5}$

Al desarrollar la superficie lateral del cono se determina el sector circular de radio «g_1»

Luego : $\dfrac{R}{g_1} = \dfrac{\theta}{360} = \dfrac{1}{5}$ ∴ $\boxed{\theta = 72}$

29.- Determinar el área de la superficie lateral máxima de un tronco de cono circular recto, si la suma de la generatriz y los diámetros de las bases es K.

Resolución.-



Sea «A_L» el área de la superficie lateral del tronco de cono

Luego : $A_L = \pi g (R + r)$ ... (1)

Por condición del problema $g + 2r + 2R = K$

Donde : $2r + 2R = K - g \Rightarrow r + R = \dfrac{K - g}{2}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $A_L = \pi g\left(\dfrac{K-g}{2}\right) \Rightarrow A_L = \dfrac{\pi g K}{2} - \dfrac{\pi g^2}{2}$

Derivando respecto a «g» e igualando a cero : $A'_L(g) = \dfrac{\pi K}{2} - \dfrac{2\pi g}{2} = 0$

Luego : $\dfrac{\pi g}{2} = \pi g \Rightarrow g = \dfrac{K}{2}$

En (2) : $r + R = \dfrac{K}{4}$

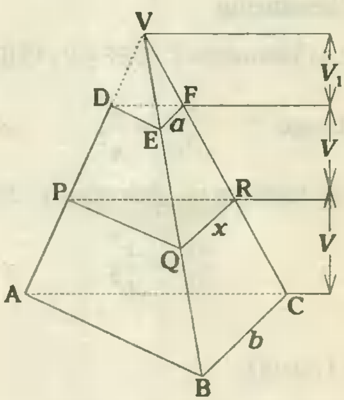
En (1) : $A_L = \dfrac{\pi K^2}{8}$

30.- En un tronco de pirámide regular triangular las aristas básicas miden a y b. ¿Cuánto debe medir la arista de la sección determinada al trazar un plano paralelo a las bases para que los sólidos resultantes sean equivalentes.

Resolución.-

Completando la pirámide total V - ABC se determinan las pirámides semejantes

V - DEF ~ V - PQR ~ V - ABC



Luego : $\dfrac{V_1}{V_1+V} = \dfrac{a^3}{x^3} \Rightarrow \dfrac{V_1+V-V_1}{V_1+V} = \dfrac{x^3-a^3}{x^3}$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_1+V} = \frac{x^3-a^3}{x^3} \quad ...(1)$$

$\dfrac{V_1+V}{V_1+2V} = \dfrac{x^3}{b^3} \Rightarrow \dfrac{V_1+2V-V_1-V}{V_1+V} = \dfrac{b^3-x^3}{x^3}$

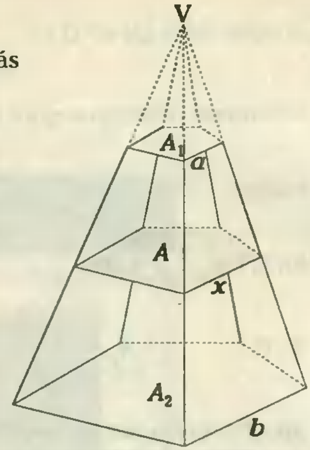
$$\Rightarrow \frac{V}{V_1+V} = \frac{b^3-x^3}{x^3} \quad ...(2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) : $\dfrac{x^3-a^3}{x^3} = \dfrac{b^3-x^3}{x^3}$

$$\therefore \quad x = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

31.- En un tronco de pirámide pentagonal regular se traza un plano paralelo a sus bases de aristas a y b. ¿Cuánto debe medir la arista de esta sección para que su área sea igual a la semisuma de las áreas de las bases?

Resolución.-



Sean las aristas de las bases del tronco de pirámide A_1 y A_2. Además sea A el área de la sección.

Luego : $$A = \frac{A_1 + A_2}{2} \Rightarrow \frac{A_1 + A_2}{A} = 2 \quad \text{... (1)}$$

Por semejanza de pirámides se tiene : $$\frac{A_1}{A} = \frac{a^2}{x^2} \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{A_2}{A} = \frac{b^2}{x^2} \quad \text{... (3)}$$

Sumando las expresiones (2) y (3)

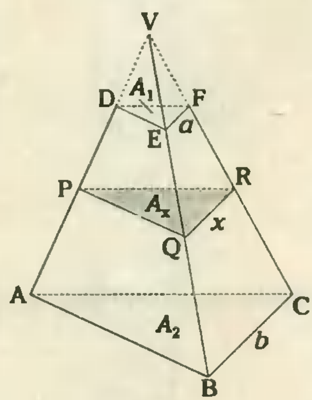
Se tiene : $$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{a^2 + b^2}{x^2} \quad \text{... (4)}$$

Igualando (1) y (4) : $2 = \dfrac{a^2 + b^2}{x^2}$ $\quad\therefore\quad$ $\mathbf{x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}}$

32.- Las áreas de las bases de un tronco de pirámide regular triangular son A_1 y A_2, se traza un plano paralelo a las bases. ¿Cuál debe ser el área de la sección para que su arista sea igual a la semisuma de las aristas de las bases?

Resolución.

Las pirámides V - DEF y V - PQR son semejantes.



Luego : $$\frac{A_1}{A_x} = \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{A_x}}{\sqrt{A_2}} = \frac{a}{x} \quad \text{... (1)}$$

Así también las pirámides V - PQR y V - ABC son semejantes

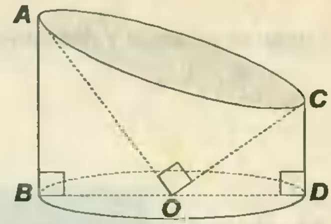
$$\frac{A_x}{A_2} = \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_x}} = \frac{b}{x} \quad \text{... (2)}$$

(1) + (2) : $$\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{\sqrt{A_x}} = \frac{a+b}{x}$$

Puesto que : $x = \dfrac{a+b}{2}$ $$\Rightarrow \frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{\sqrt{A_x}} = \frac{a+b}{\frac{a+b}{2}} = 2$$

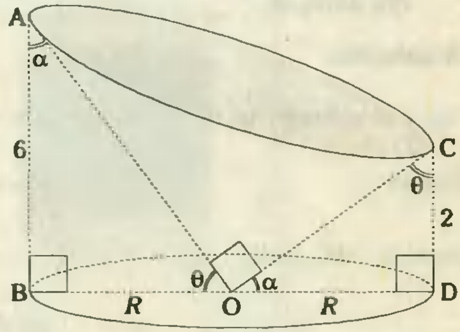
$$\therefore \quad \boxed{A_x = \left(\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2}\right)^2}$$

33.- La figura mostrada representa un tronco de cilindro recto, si m $\measuredangle$ AOC = 90 «O» es centro, AB = 6 y CD = 2 . Calcular el volumen del tronco.



Resolución.-

Sea V el volumen del tronco.



Luego : $V = \pi R^2 \left(\dfrac{6+2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $V = 4\pi R^2$ ... (1)

⊿ ABO ~ ⊿ ODC : $\dfrac{R}{2} = \dfrac{6}{R}$

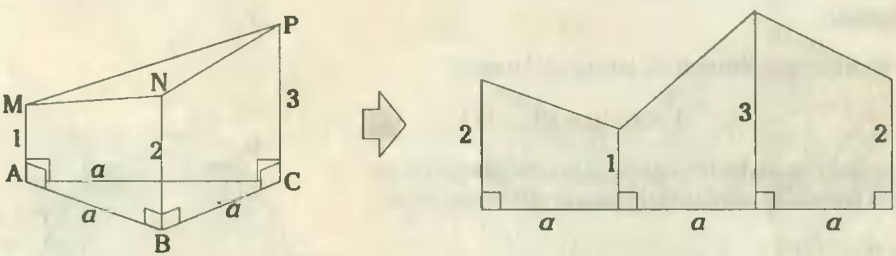
$\Rightarrow$ $R^2 = 12$ ... (2)

(2) en (1) : $V = 4\pi\,(12)$

$\therefore$ $\mathbf{V = 48\,\pi m^3}$

34.- En un triángulo equilátero ABC, por sus vértices se levantan las perpendiculares a dicho triángulo tales como AM = 1, BN = 2 y CP = 3. Si el área del desarrollo de la superficie del tronco de prisma es 6cm²; hallar el volumen del tronco de prisma.

Resolución.-



Por condición del problema, el área de la superficie lateral es :

$$6 = \frac{(1+2)}{2}a + \frac{(1+3)}{2}a + \frac{(3+2)}{2}a$$

Por consiguiente : $6 = \dfrac{3}{2}a + \dfrac{4a}{2} + \dfrac{5}{2}a = \dfrac{12a}{2}$

De donde : $6 = 6a$ $\Rightarrow$ $a = 1$

Luego el volumen V del tronco será : $V = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\dfrac{1+2+3}{3}\right)$

$$\therefore \qquad V = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

35.- Hallar el volumen del tronco de cilindro oblicuo, cuya generatriz máxima mide $2\sqrt[3]{4}$; la generatriz mínima es nula y las bases del tronco son iguales y perpendiculares entre si.

Resolución.-

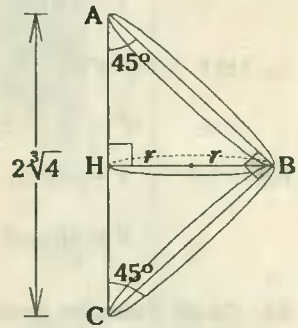
Sea V el volumen del tronco, luego : $V = \pi r^2\left(\dfrac{2\sqrt[3]{4}+0}{2}\right)$

Donde : $V = \pi r^2 . \sqrt[3]{4}$ ... (1)

En el ⊿ ABC de 45° : $BH = 2r = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $V = \pi\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{4} = \dfrac{\pi\sqrt[3]{4}^3}{4}$

$$\therefore \qquad V = \pi m^3$$



36.- Calcular el área de la superficie lateral de un tronco de cono de generatriz «g» circunscriptible a una esfera.

Resolución.-

Sea *A* el área de la superficie lateral del tronco

Luego : $A = \pi g\,(r + R)$ ... (1)

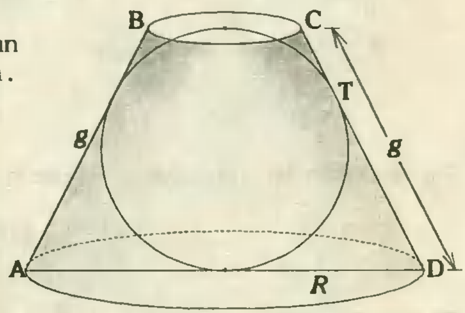
En la sección axial del tronco de cono se determina un trapecio isósceles, circunscrito a una circunferencia .

Luego por Pithot : $g + g = 2r + 2R$

Donde : $R + r = g$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) :

$$\therefore \qquad A = \pi g^2$$

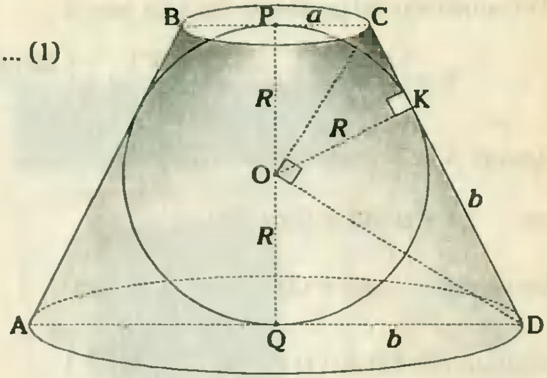


37.- Un tronco de cono de radios básicos a y b esta circunscrito a una esfera. Hallar el volumen del tronco.

Resolución.-

Sea «V» el volumen del tronco, luego :

$$V = \frac{\pi(2R)}{3}\,(a^2 + b^2 + ab)\ \ldots (1)$$



La sección axial del tronco de cono es el trapecio isósceles ABCD.

En donde :CP = CK = a y DQ = DK = b

En el ⊾ COD : $R^2 = ab$

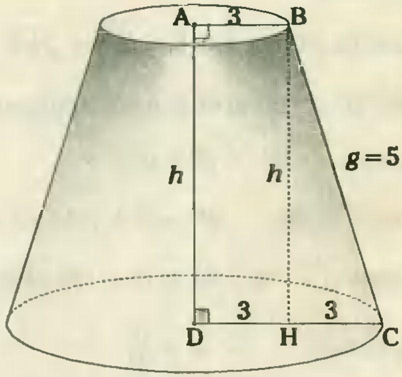
$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{ab} \qquad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) :

$$\mathbf{V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{ab}\,(a^2 + b^2 + ab)}$$

38.- Calcular la longitud de la altura de un tronco de cono, cuyos radios básicos miden 6 y 3, si la suma de las áreas de las bases es igual al área lateral del tronco.

Resolución.-



Por dato del problema : $\pi 3^2 + \pi 6^2 = \pi g\,(3 + 6)$

Por consiguiente : $45\pi = \pi \times g \,.\, 9$

$$\Rightarrow \quad g = 5$$

En el trapecio rectángulo ABCD, trazamos $\overline{BH} \perp \overline{CD}$.

Luego : AB = DH = 3 , BH = h y HC = 6 - 3 = 3

Finalmente en el ⊾ BHC : $h^2 + 3^2 = 5^2$

$$\therefore \qquad \mathbf{h = 4}$$

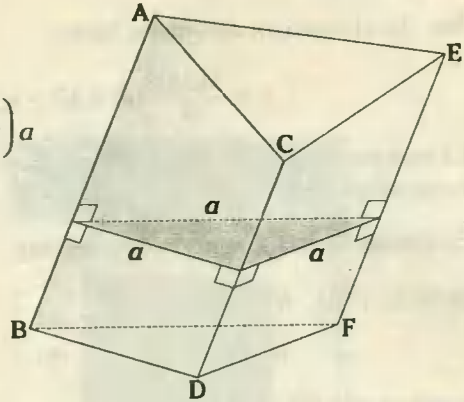
39.- Calcular el volumen del tronco de prisma oblicuo, cuya sección recta es un triángulo equilátero de lado «a» y además el área lateral es S.

Resolución.

Sea «V» el volumen del tronco

Luego : $V = \textit{Área}\ (S.\,R) \cdot \left(\dfrac{AB + CD + EF}{3}\right)$

Reemplazando : $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{AB+CD+EF}{3}\right)$ ... (1)



Por condición del problema :Su área lateral :

$$S = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)a + \left(\frac{CD+EF}{2}\right)a + \left(\frac{AB+EF}{2}\right)a$$

Ahora : $S = \dfrac{a}{2}\,(2AB + 2CD + 2EF)$

$\Rightarrow \qquad S = a\,(AB + CD + EF)$

De donde : $\quad AB + CD + EF = \dfrac{S}{a}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\quad V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{S}{a}\right)$

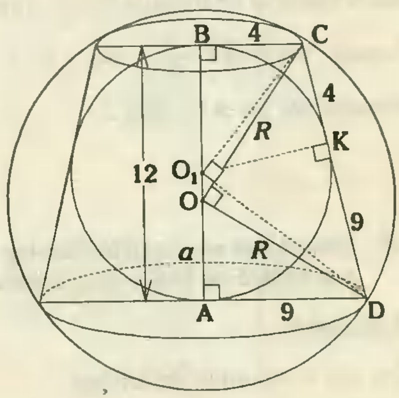
$$\therefore \qquad \mathbf{V = \frac{Sa\sqrt{3}}{12}}$$

40.- Un tronco de cono de radios básicos 4 y 9 está inscrito y circunscrito a dos esferas. Hallar el radio de la esfera circunscrita.

Resolución.

En el ⊿ CO_1D : $\quad O_1K = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{4.9} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad AB = 12$

Sea "O" el centro de la esfera circunscrita de radio R. Por el Teorema de Pitágoras



En el ⊿ OAD : $\quad R^2 = a^2 + 9^2$

En el ⊿ OBC : $\quad R^2 = 4^2 + (12 - a)^2$

Luego : $\quad a^2 + 81 = 16 + 144 - 24a + a^2$

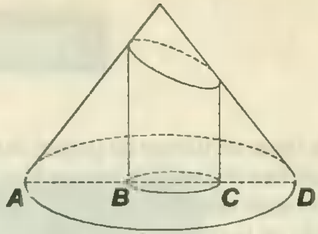
De donde : $\quad a = \dfrac{79}{24}$

Finalmente : $\quad R^2 = \left(\dfrac{79}{24}\right)^2 + 81$

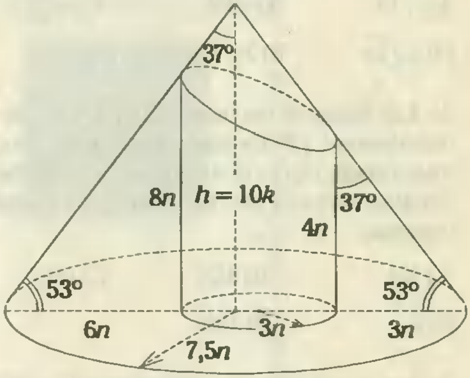
$$R^2 = \frac{6241+46656}{576} = \frac{52897}{576}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{R = 9{,}6}$$

41.- En el gráfico determinar la relación de volúmenes de los sólidos, si las generatrices del cono están inclinadas 53º con respecto a la base, además : AB = BC = 2CD



Resolución.



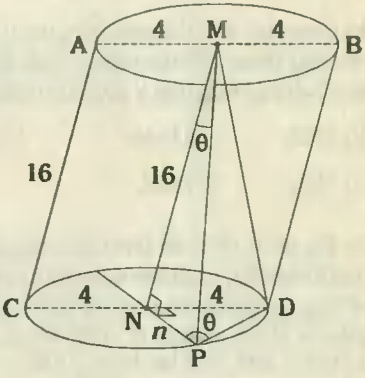
Sean V_1 , V_2 los volúmenes del tronco de cilindro y cono respectivamente, nos piden :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi.(3n)^2.\left(\frac{8n+4n}{2}\right)}{\frac{1}{3}.\pi(7{,}5n)^2.10n}$$

Resolviendo : $\dfrac{V_1}{V_2} = \mathbf{\dfrac{36}{125}}$

42.- Calcular el volumen de un cilindro oblicuo de bases elípticas cuyos semiejes paralelos son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ donde M y N son sus puntos medios respectivamente. Sobre el arco $\overset{\frown}{CD}$ se ubica el punto "P" de tal manera que m ∡ PND = 90º, m ∡ PMN = m ∡ NPD, además AC = 16 y AB = 8. Siendo la proyección de M en la base inferior N.

Resolución.-



En el gráfico ⊾ PNM ~ ⊾ PND

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{16} = \frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow \quad n = 8$$

Nos piden : $V_x = \pi . 4 . 8 . 16 = 512\,\pi$

$\therefore \quad \mathbf{V_x = 512\,\pi}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular circunscrito a una esfera, si las áreas de las bases del tronco son 4 y 36. Calcular la medida de la diagonal del tronco.

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{19}$ C) $\sqrt{21}$

D) $2\sqrt{11}$ E) $2\sqrt{7}$

2.- Las áreas de las bases de un tronco de pirámide son 1 y 9. Calcular el área de la sección transversal, cuyas distancias a la base menor y mayor están en la relación de 3 a 1 respectivamente.

A) 3/8 B) 4/25 C) 1/15

D) 8 E) 25/4

3.- Las aristas laterales de un tronco de prisma oblicuo miden 2, 3 y 5 formando un ángulo de 60° con el plano de la base. Hallar el volumen de dicho tronco de prisma, si el área de la base es $15\sqrt{3}$

A) 70 B) 75 C) 80 D) 85 E) 90

4.- Calcular el volumen del tronco de cilindro circular recto circunscrito a una esfera, si las generatrices máxima y mínima miden 20 y 5

A) 200π B) 144π C) 100π

D) 134π E) 86π

5.- En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular, el plano que pasa por el lado de la base menor forma con la base mayor un ángulo de 60°. Calcular el volumen de dicho sólido si los lados de las bases miden $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$

A) 64 B) 68 C) 72 D) 78 E) 82

6.- En un tronco de pirámide ene-angular, sus caras laterales forman con su base mayor un ángulo cuya medida es «θ». Calcular el área de la superficie lateral de dicho tronco. Si A_1 y A_2 son las áreas de las bases $(A_1 > A_2)$

A) $\sqrt{A_1A_2}\csc\theta$ D) $\dfrac{A_1-A_2}{\sec\theta}$

B) $\left(\dfrac{A_1+A_2}{2}\right)\sec\theta$ E) $\dfrac{A_1-A_2}{2\sec\theta}$

C) $(A_1 - A_2)\sec\theta$

7.- Calcular el volumen de un tronco de cilindro circular recto circunscrito a una esfera de radio «R», además los planos de sus bases forman un ángulo diedro que mide 45°

A) $\pi R^3(\sqrt{2}+1)$ D) $\pi R^3(\sqrt{6}+2)$

B) $\pi R^3(1+\sqrt{3})$ E) $\pi R^3(\sqrt{6}+3)$

C) $\pi R^3(\sqrt{2}+2)$

8.- Calcular el área de la superficie lateral de un tronco de prisma recto triangular, cuyas aristas básicas miden 8, 6 y 12, las aristas laterales opuestas a estos lados miden 15, 10 y 5 respectivamente.

A) 270 B) 265 C) 260 D) 255 E) 250

9.- Se tiene un tronco de cilindro oblicuo, cuyas bases son congruentes y los planos que las contienen forman un diedro que mide 60°. Calcular el volumen del sólido si sus generatrices mayor y menor miden 9 y 3 respectivamente.

A) 81π B) $\dfrac{81\pi}{2}$ C) $\dfrac{27\pi}{2}$

D) $\dfrac{16\pi}{3}$ E) $\dfrac{81\pi}{4}$

10.- Por los vértices A y C de un cuadrado ABCD se levantan las perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ al plano del cuadrado. Hallar el volumen del sólido que se obtiene al unir los extremos de las perpendiculares con los vértices B y D y con E y F; si $AC = 4\sqrt{2}$, $AE = 5$ y $CF = 7$

A) 32 B) 40 C) 48 D) 64 E) 70

11.- En una mesa se tiene un vaso que tiene la forma de un tronco de cilindro oblicuo, donde $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las generatrices máxima y mínima respectivamente (A y B sobre la mesa) en dicho vaso se vierte un cierto líquido tal que la superficie superior divide al vaso en dos sólidos equivalentes, tal que sobre dicha superficie están los puntos M y N ($M \in \overline{AC}$ y $N \in \overline{BD}$) Calcular CM, si $DN = a$ y $BN = b$

A) $2a - b$ B) $\dfrac{a+b}{2}$ C) $\dfrac{ab}{a-b}$

D) $2b - a$ E) $\dfrac{2a+b}{3}$

12.- Un reservorio de agua tiene la sección que se muestra ($\pi = 3$) . Hallar el volumen.

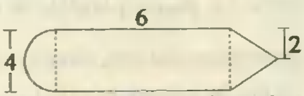
A) 34

B) 46

C) 68

D) 72

E) 94



Vista Horizontal

Vista Frontal

13.- Los radios de las bases de un tronco de cono circular recto miden 3 y 6 y la generatriz mide 6. Calcular la relación entre las áreas de la superficie total de dicho tronco y su superficie lateral.

A) 13/8 B) 8/5 C) 25/16

D) 11/6 E) 11/3

14.- Se tiene un recipiente de la forma de un tronco de cono recto cuyos radios de sus bases miden 3 y 6, contiene agua hasta los 2 / 3 de su altura total, se introduce un sólido cuyo volumen es 182π tal que el nivel del agua se eleva hasta enrasar la base superior. Calcular la altura del recipiente.

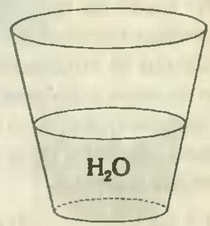
A) 12

B) 15

C) 6

D) 18

E) 9



15.- Calcular el área de la superficie lateral de un tronco de cono recto circunscriptible de generatriz «6»

A) 36π B) 38π C) 40π

D) 42π E) 45π

16.- Las aristas de las bases de un tronco de pirámide hexagonal regular miden 1 y 3. Calcular la arista de la sección paralela a las bases que determina los sólidos cuyos volúmenes son entre si como 7 a 19.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt{4}$ E) $\sqrt[3]{5}$

17.- Se tiene un tronco de cono recto cuyas bases miden $7m^2$ y $9\pi m^2$ de área, si un plano paralelo a las bases pasa por el punto medio de sus generatrices. Hallar la razón de los volúmenes de los sólidos determinados por dicho plano.

A) 1/3 B) 1 C) 1/9

D) 5/13 E) 7/19

18.- En un tronco de cono recto se inscribe una esfera de radio «r» la proyección de la esfera sobre la base del cono es un circulo que esta inscrito en un triángulo que a su vez está inscrito en un triángulo que a su vez esta inscrito en la circunferencia que limita el círculo de la base del cono. Calcular el volumen del cono.

A) $7/2\ \pi r^3$ B) $5/6\ \pi r^3$ C) $3/7\ \pi r^3$

D) $6/3\ \pi r^3$ E) $3/5\ \pi r^3$

19.- Dado un tronco de cono recto de bases paralelas circunscrito a una esfera de radio R. Calcular el volumen limitado por la superficie esférica y la superficie del tronco de cono, si se sabe que el área de la superficie total del tronco de cono es el triple del área de la superficie esférica.

A) $8\ \pi R^3/3$ B) $4\ \pi R^3/7$ C) $9\ \pi R^3/4$

D) $4\ \pi R^3/3$ E) $2\ \pi R^3/9$

20.- En un tronco de cono recto, la altura mide 3 y los radios de las bases miden 1 y 4. Calcular a que distancia de la base mayor debe trazarse un plano paralelo a las bases tal que divida al tronco de cono en 2 sólidos cuyos volúmenes estén en la relación de 1 a 8.

A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 4 E) 3

21.- La figura muestra un tronco de cono de revolución ($\overline{QB}$: generatriz). Calcular su volumen, si : AB = BC ; $R = 10$; QO = QB y $V_{(Q-ABC)} = 400$

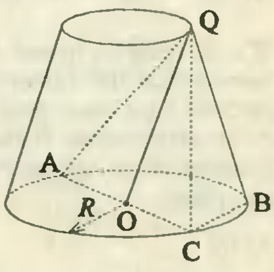
A) $800\ \pi$

B) $850\ \pi$

C) $700\ \pi$

D) $750\ \pi$

E) $900\ \pi$



22.- Dado un hexaedro regular cuya arista mide 4. Calcular el volumen del tronco de cono, en donde una de sus bases es el círculo circunscrito en el cuadrilátero que resulta al unir los puntos medios de los lados de una cara y la otra base es el círculo inscrito en la cara opuesta.

A) $4\pi(3+\sqrt{2})/3$ D) $28\pi/3$

B) $16\pi(3+\sqrt{2})/3$ E) $4\pi(6+\sqrt{2})/3$

C) $8\pi(3+\sqrt{2})/3$

23.- En un cono de revolución de $18m$ de altura y $9m$ de radio básico, se traza un plano paralelo a la base que dista $6m$ del vértice. Hallar el volumen del tronco de cono determinado.

A) $234\ \pi m^3$ B) $432\ \pi m^3$ C) $468\ \pi m^3$

D) $446\ \pi m^3$ E) $480\ \pi m^3$

24.- Las áreas de las bases de un tronco de pirámide regular son $2{,}25cm^2$ y $6{,}25cm^2$, se traza un plano paralelo a las bases. Calcular el área de la sección determinada para que su arista sea igual a la semisuma de las aristas de las bases.

A) $3\ cm^2$ B) $3{,}25\ cm^2$ C) $3{,}5\ cm^2$

D) $4\ cm^2$ E) $5\ cm^2$

25.- Las aristas de las bases de un tronco de pirámide pentagonal regular miden 1 y 2, se traza un plano paralelo a dichas bases que determina una sección cuya arista mide : $\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}$. Hallar la relación entre los volúmenes de los sólidos resultantes.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{5}{7}$

26.- En un tronco de pirámide octogonal regular la arista de la base menor mide 3, se traza un plano paralelo a sus bases que determina una sección de arista 4. Calcular la arista de la base mayor, sabiendo que el área de la sección es igual a la semisuma de las áreas de las bases del tronco.

A) $\sqrt{23}$ B) $\sqrt{24}$ C) $\sqrt{25}$

D) $\sqrt{26}$ E) $\sqrt{27}$

27.- Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución si la diferencia de los cubos de sus radios es $81m^3$ y la generatriz del tronco es $\sqrt{10}$ veces la altura.

A) $6\pi m^3$ B) $9\pi m^3$ C) $15\pi m^3$

D) $12\pi m^3$ E) $18\pi m^3$

28.- Se tiene una cuña tronco cónica de ángulo central 24° de altura $15m$ y las áreas de sus bases $2m^2$ y $8m^2$. Calcular su volumen.

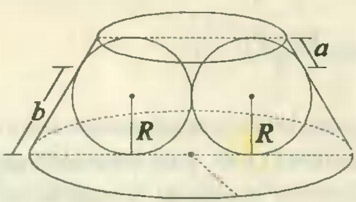
A) $\frac{28}{3}$ B) $\frac{14}{3}$ C) 28

D) 7 E) 14

29.- En un tronco de cono de revolución de volumen $28\pi m^3$, los radios de sus bases miden $1m$ y $4m$. Calcular la medida del ángulo que forma la generatriz con el eje del tronco.

A) 30° B) 37° C) 60° D) 45° E) 53°

30.- Calcular el área de la superficie lateral del tronco de cono mostrado; $a = 2$ y $b = 8$



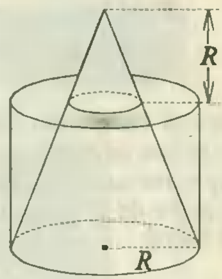
A) 180π B) 170π C) 160π

D) 150π E) 120π

31.- Se consideran 3 sólidos : un tronco de cono, un cono y un cilindro de revolución de igual altura los tres; el radio de la base del cilindro es igual a la semisuma de los radios de las bases del tronco. El radio de la base del cono es igual a la semidiferencia de los radios básicos del tronco si la suma de los volúmenes del cono y del cilindro es «V» ; calcular el volumen del tronco.

A) 3V B) V/3 C) 2V D) V/2 E) V

32.- En la figura el tronco de cono es equivalente a la mitad del cilindro recto. Calcular el volumen del cono pequeño.



A) $\frac{\pi R^3}{6}(2-\sqrt{3})$ D) $\frac{\pi R^3}{9}(2+\sqrt{3})$

B) $\frac{\pi R^3}{6}$ E) $\frac{\pi R^3}{6}(2+\sqrt{3})$

C) $\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{3})$

33.- El radio de la base de un cono de revolución mide $2\sqrt{3}\,m$, este sólido esta circunscrito a una esfera de radio $3m$ al trazar un plano paralelo a la base del cono y tangente a la esfera se determina un tronco de cono. Calcular el volumen de este sólido.

A) $55\pi m^3$ B) $\frac{119\pi}{7}m^3$ C) $\frac{107\pi}{3}m^3$

D) $\frac{117\pi}{2}m^3$ E) $\frac{111\pi}{2}m^3$

34.- El apotema de un tronco de pirámide hexagonal regular mide $7{,}2cm$ y su arista lateral mide $10{,}4cm$; si la longitud de la arista de la base menor mide $25{,}6cm$ ¿Cuánto mide la arista de la base mayor?

A) $41{,}6cm$ B) $42{,}6cm$ C) $40{,}6cm$

D) $44{,}2cm$ E) $43{,}2cm$

35.- La generatriz de un tronco de cono mide $13m$, su altura mide $5m$ si el radio de la base mayor es el triple del radio de la base menor. Calcular el área de la superficie total del sólido.

A) $670\ \pi m^2$ B) $673\ \pi m^2$ C) $679\ \pi m^2$

D) $678\ \pi m^2$ E) $672\ \pi m^2$

36.- La generatriz «l» de un tronco de cono forma 45° con la base inferior y es perpendicular a la recta que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz opuesta. Hallar su área lateral.

A) $\dfrac{\pi l^2\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{\pi l^2\sqrt{3}}{2}$ C) $\pi l^2\sqrt{2}$

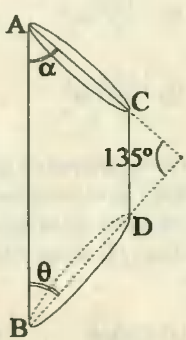
D) $\dfrac{\pi l^2}{2}$ E) $\dfrac{\pi l^2\sqrt{2}}{4}$

37.- Se inscribe una esfera de radio «r» en un tronco de cono. Hallar el área de la superficie lateral máxima que puede tener el sólido.

A) $4\pi r^2$ B) $2\pi r^2$ C) $3\pi r^2$

D) $5\pi r^2$ E) $6\pi r^2$

38.- Hallar el área de la superficie lateral del tronco de cilindro oblicuo mostrado. Si : $AB = a$ y $CD = b$



A) $\dfrac{\pi(a^2-b^2)}{2(\cot\alpha+\cot\theta)}$ D) $\dfrac{\pi(a^2+b^2)}{2(\cot\alpha-\cot\theta)}$

B) $\dfrac{\pi(a^2-b^2)}{\cot\alpha+\cot\theta}$ E) $\dfrac{\pi(a^2-b^2)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}$

C) $\dfrac{\pi(a^2+b^2)}{\cot\alpha-\cot\theta}$

39.- Un tronco de cono esta inscrito en una esfera de radio R, las bases del tronco de cono determinan en la esfera dos círculos cuyos diámetros en la sección recta, subtienden arcos de a y b. Hallar el área lateral del tronco.

A) $2\pi R^2 \operatorname{sen}\dfrac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\dfrac{(\alpha-\beta)}{4}$

B) $2\pi R^2 \operatorname{sen}\dfrac{(\alpha+\beta)}{4}$

C) $2\pi R^2 \cos\dfrac{(\alpha-\beta)}{2}$

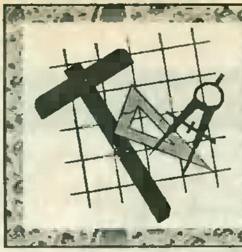
D) $2\pi r^2 \cos\dfrac{(\alpha+\beta)}{4}$

E) $\pi r^2 \operatorname{sen}\dfrac{(\alpha-\beta)}{3}$

40.- Se dan dos esferas tangentes exteriormente de centros O y O_1 y un cono circunscrito a ellas. Calcular el área de la superficie lateral del tronco de cono cuyas bases son los círculos, a lo largo de los cuales las esferas hacen contacto con la superficie del cono si los radios de las esferas miden R y R_1

A) $4\pi RR_1$ B) $2\pi RR_1$ C) πRR_1

D) $6\pi RR_1$ E) $8\pi RR_1$



CAP. 29

la esfera y sus partes

29.1 ESFERA Y SUPERFICIE ESFÉRICA

Llámese esfera a un sólido limitado por una superficie en la que todos sus puntos equidistan de un punto interior denominado centro (O). (*Fig.* 29.1)

La superficie se llama superficie esférica y el segmento $\overline{OP}$ que une el centro O con un punto P de la superficie esférica se denomina radio.

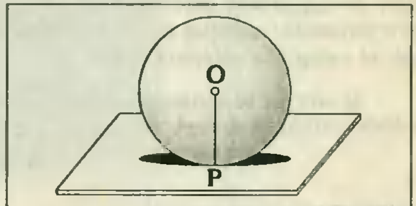


***Fig.* 29.1**

29.2 ÁREA Y VOLUMEN DE UNA ESFERA

1.- ÁREA DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA ($A_{(S.E)}$)

El área de una superficie esférica es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.

$$A_{(SE)} = 4\pi R^2 \qquad \ldots (29.1)$$

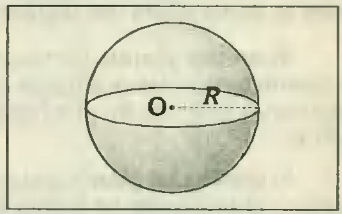


***Fig.* 29.2**

2.- VOLUMEN DE LA ESFERA (V_E)

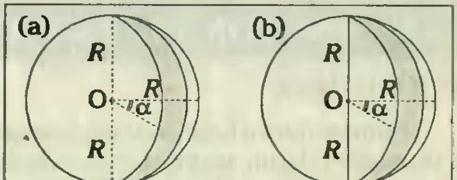
El volumen de un esfera es igual a $\frac{4}{3}$ del área de círculo máximo multiplicado por la longitud del radio.

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \ldots (29.2)$$

29.3 HUSO ESFÉRICO Y CUÑA ESFÉRICA

Se llama Huso Esférico a la superficie engendrada en una circunferencia que gira un ángulo menor que 360° alrededor de su diámetro. (*Fig.* 29.3a)

Cuña esférica es el sólido engendrado por un semicírculo que gira un ángulo menor que 360° alrededor de su diámetro.



$$\text{Area} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ} \qquad \text{Volumen} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$$

***Fig.* 29.3**

29.4 ZONA ESFÉRICA Y SEGMENTO ESFÉRICO

1.- ZONA ESFÉRICA

Es la porción de superficie esférica limitada por dos planos paralelos; por ejemplo; la zona ABCD. (*Fig*.29.4)

Estos planos cortan a la superficie esférica según dos circunferencias paralelas llamados bases de la zona; la distancia entre los planos paralelos es la altura de la zona.

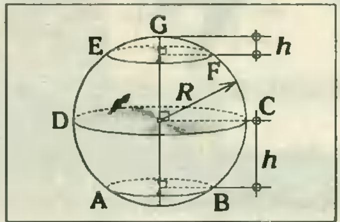


Fig. 29.4

Por extensión también se llama zona esférica a la porción de superficie esférica limitada por un plano secante y otro tangente, aunque es más conveniente llamarle en este caso Casquete Esférico, por ejemplo, el casquete esférico EGF

Si «h» es la altura de la zona esférica (en los dos casos) y R el radio de la superficie esférica su área A será :

$$A = 2\pi Rh \qquad \text{... (29.3)}$$

2.- SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos, o bien, la porción de esfera comprendida entre una zona y sus bases. La distancia entre los dos planos paralelos se llama altura del segmento.

Si ambos planos cortan a la esfera, los círculos que determinan son las dos bases del segmento y éste se llama segmento esférico de dos bases por ejemplo el segmento ABCD.

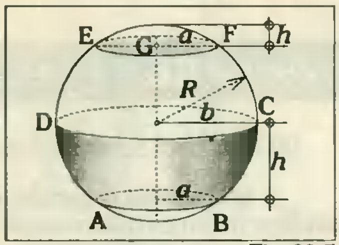


Fig. 29.5

Si uno de los planos es tangente a la esfera, la sección correspondiente se reduce a un punto y el segmento no tienen más que una base, está limitado por un círculo y un Casquete esférico; por ejemplo el segmento esférico EGF.

Si a es el radio de la base y h la altura del segmento esférico EGF, su volumen (V) será :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h a^2 \qquad \text{... (29.4)}$$

Si a y b son los radios de las bases del segmento esférico ABCD y h su altura, su volumen V será :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h\,(a^2 + b^2) \qquad \text{... (29.5)}$$

29.5 SECTOR ESFÉRICO Y ANILLO ESFÉRICO

SECTOR ESFÉRICO

Llámese Sector Esférico al sólido engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de un diámetro cualquiera. Si el sector AOB gira sobre el diámetro $\overline{MN}$, engendra el sector esférico AB - O- A'B'. La zona engendrada por el arco AB del sector circular generador se llama base del sector esférico.

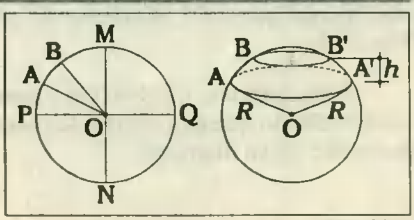


Fig. 29.6

El volumen V del sector esférico es : $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$ ... (29.6)

ANILLO ESFÉRICO

Se llama Anillo Esférico al sólido engendrado por un segmento circular que gira alrededor de un diámetro exterior a dicho segmento.

El anillo está limitado interiormente por una superficie cónica y exteriormente por un Casquete esférico si la cuerda $\overline{AB}$ no es paralela al eje $\overline{MN}$, interiormente estará limitado por un tronco de cono y exteriormente por una zona esférica de dos bases y si la cuerda $\overline{AB}$ es paralela al eje $\overline{MN}$, interiormente estará limitado por una superficie cilíndrica y exteriormente por una zona esférica.

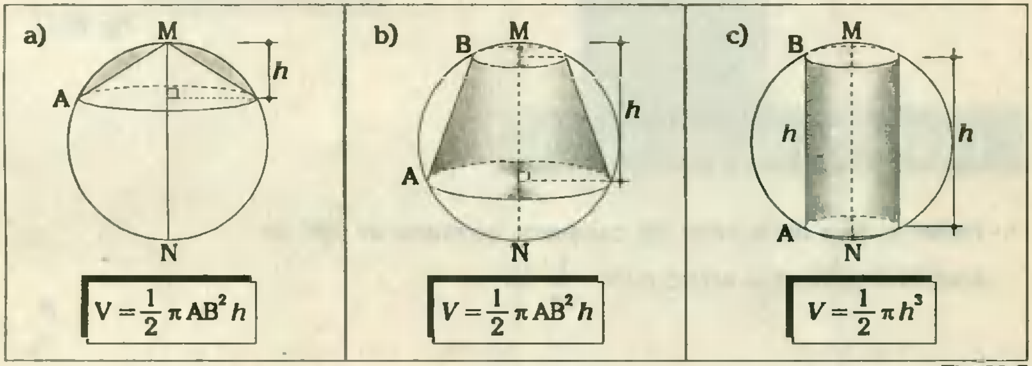


Fig. 29.7

29.6 PROPIEDADES

1RA PROPIEDAD

Toda sección plana de una esfera es un círculo, síguese de este enunciado que si el plano secante no pasa por el centro se obtendrá un círculo menor y si pasa por el centro un círculo máximo.

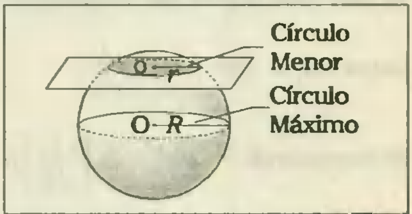


Fig. 29.8

2DA PROPIEDAD

La recta que une el centro de una esfera y el de un círculo menor de la esfera es perpendicular al plano del círculo.

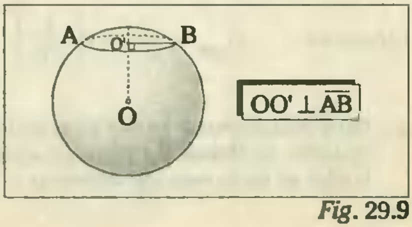


Fig. 29.9

3^RA^ PROPIEDAD

Planos equidistantes del centro de una esfera la cortan en círculos iguales.

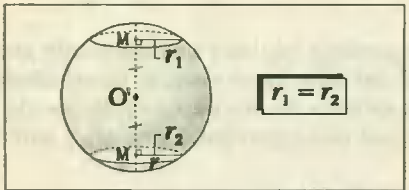


Fig. **29.10**

4^TA^ PROPIEDAD

Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

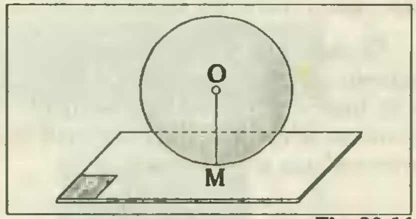
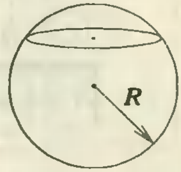


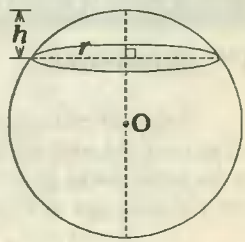
Fig. **29.11**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar el área de la base del casquete mostrado de $2m^2$ de área, si el radio de la esfera mide $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ m.



<u>Resolución</u>.-



Se sabe que el área del casquete es : $A_c = 2\pi Rh$

Datos : $A_c = 2m^2$ y $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

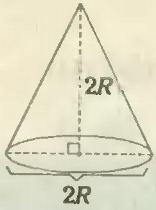
Reemplazando : $2m^2 = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

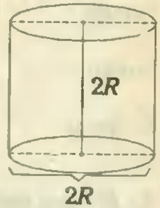
Ahora, como «h» a resultado ser igual al radio R de la esfera, entonces la base del casquete estará pasando por el centro de la esfera

Entonces : $A_{base} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{A_{base} = 1m^2}$

2.- Un cono circular recto y un cilindro tienen los diámetros de sus bases y sus alturas iguales al diámetro de una esfera. La suma de los tres volúmenes es 314, 16m^3 , hallar el volumen del cilindro.

Resolución.-



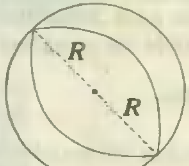


Volumen del cono recto : $V_1 = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi R^2 (2R)}{3}$

Volumen del cilindro : $V_2 = \pi R^2 h = \pi R^2 (2R)$

Volumen de la esfera : $V_3 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Como se sabe que : $V_1 = V_2 + V_3 = 314,16 m^3$



Entonces : $\dfrac{\pi R^2 (2R)}{3} + \pi R^2 (2R) + \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 100\pi$

Luego : $\underbrace{2\pi R^3} = 50\pi$

$V_{cilindro} = 50\pi = 50 \cdot 3,1416$ $\therefore$ $\mathbf{V_{cilindro} = 157,08\ m^3}$

3.- Hallar la altura del casquete esférico sabiendo que la suma de su área y del área de su base es igual a los 7/16 del área de la esfera, cuyo radio es 8m.

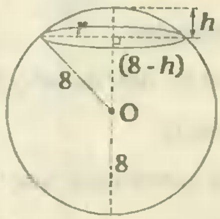
Resolución.-

Sabemos que el área del casquete es : $A_c = 2\pi Rh = 2\pi (8) h$

Ahora el área de la base circular : $A_b = \pi r^2 = \pi\left[8^2 - (8-h)^2\right]$

También el área de la esfera : $A_E = 4\pi R^2 = 4\pi (8)^2$

Entonces de acuerdo al enunciado : $A_c + A_b = \dfrac{7}{16} A_E$



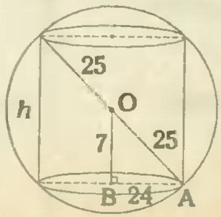
Reemplazando : $2\pi(8)h + \pi\left[8^2 - (8-h)^2\right] = \dfrac{7}{16}\left(4\pi(8)^2\right)$

Efectuando : $16\pi h + \pi\left[64 - 64 + 16h - h^2\right] = 112\pi$

Donde : $32h = 112 + h^2$ $\therefore$ $\mathbf{h = 4\ m}$

4.- Hallar el volumen del cilindro recto de 24m de radio de la base y que se halla inscrito en una esfera de 25m de radio (El centro de la esfera es interior al cilindro)

Resolución.-



Sabemos que : $V_{cil} = \pi r^2 h$ Entonces calculemos «h»

Ahora trazamos AD = 25 y como AB = 24

Utilizamos el Teorema de Pitágoras : $OB = \sqrt{25^2 - 24^2}$

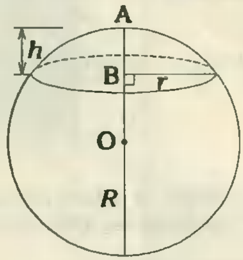
Donde : $OB = 7$ $\Rightarrow$ $h = 14m$

Luego : $V_c = \pi\,(24)^2\,(14)$

Es decir : $V_c = \pi \,.\, 576 \,.\, 14$ $\therefore$ $\mathbf{V_c = 8064\pi\, m^3}$

5.- En una esfera de radio «R» hallar la altura de una zona de una base, tal que la superficie de esta zona aumentada de la superficie de la base sea igual a los 7/16 de la superficie de la esfera.

Resolución.-



Por condición del problema : $2\pi Rh + \pi r^2 = \frac{7}{16}\, 4\,\pi R^2$

Simplificando : $2Rh + r^2 = \frac{7}{4} R^2$ ... (1)

Por Propiedad : $r^2 = AB \cdot BC$

Reemplazando : $r^2 = h\,(2R - h)$ ... (2)

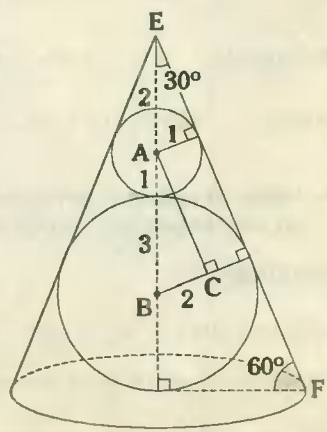
Sustituyendo (2) en (1) : $2Rh + h\,(2R - h) = \frac{7}{4} R^2$

Donde : $4h^2 - 16Rh + 7R^2 = 0$ $\therefore$ $\mathbf{h = \frac{R}{2}}$

6.- Dado el cono de revolución de las esferas inscritas de radios 2 y 6 . Hallar el volumen del cono.

Resolución.-

En el ⊿ ABC de 30° y 60° : $m\measuredangle BAC = 30°$



Además : $m\measuredangle AEF = 30°$

Esto quiere decir que : $AE = 2$

Luego : $EH = 9$

Por consiguiente : $HF = \frac{9}{\sqrt{3}}$

También : $EF = \frac{18}{\sqrt{3}}$

Luego : $V = \pi\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{9}{3}$

$\therefore$ $\mathbf{V = 84\pi\, cm^3}$

MISCELÁNEA

1.- Se han tomado dos vértices opuestos de un cubo y por los puntos medios de seis de sus aristas que no pasan por estos vértices se ha trazado un plano secante que divide al cubo en 2 partes. Hallar el área de la superficie esférica inscrita en una de estas partes si la arista del cubo mide $3+\sqrt{3}$

__Resolución__.-

Sea ABCNMD el hexágono regular obtenido en la sección del cubo, luego :

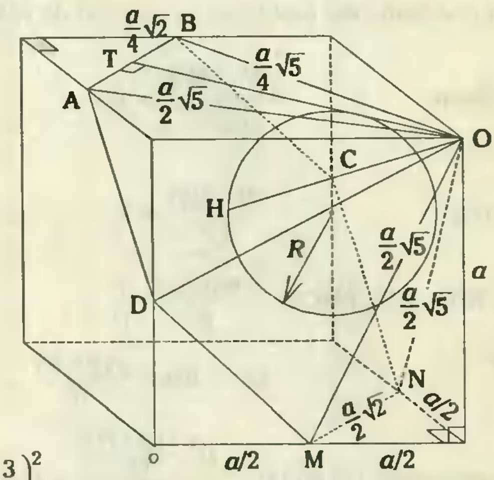
$$MN = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

El área del hexágono es : $A_1 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} = \dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}$

En el ⊿ ATO : $\quad OT = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad OT = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Luego el área de la superficie lateral de la pirámide hexagonal regular ABCNMD es :

$$A_2 = \frac{9}{4}a^2$$



Su altura $\overline{OH}$ es $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

El volumen de la pirámide es :

$$\frac{1}{3}A_1 \cdot OH = \frac{1}{3}(A_1 + A_2)R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a^2(\sqrt{3}+3)R$$

Donde : $\quad R = \dfrac{3a}{2(3+\sqrt{3})} = \dfrac{3(3+\sqrt{3})}{2(3+\sqrt{3})} = \dfrac{3}{2}$

Luego el área de la esfera será : $\quad A_x = 4\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

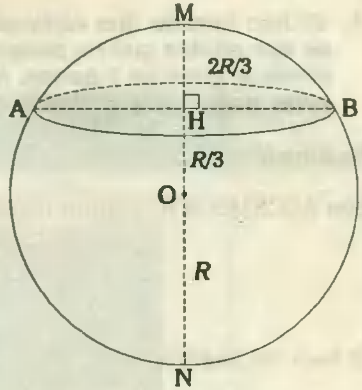
$$\therefore \quad \boxed{A_x = 9\pi}$$

2.- En una esfera de radio R se traza un plano a una distancia de $\frac{R}{3}$ del centro de la esfera, de modo que la relación de las áreas de los casquetes que se forman sea k; hallar k.

Resolución.-

Sean A_1 y A_2 las áreas de los casquetes determinados por el plano secante a la esfera

Luego : $\dfrac{A_1}{A_2} = \text{K} = \dfrac{2\pi R(\text{MH})}{2\pi R(\text{HN})} \Rightarrow \text{K} = \dfrac{\text{MH}}{\text{HN}}$



Pero : $\text{MH} = R - \dfrac{R}{3} = \dfrac{2}{3}R$

$\text{HN} = R + \dfrac{R}{3} = \dfrac{4}{3}R$

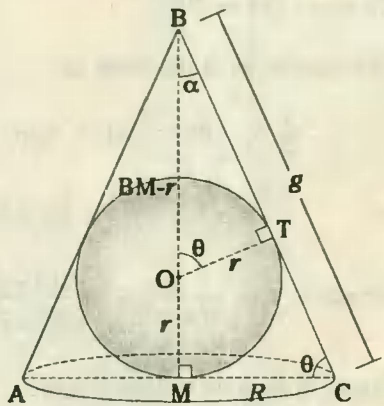
$$\therefore \quad \text{K} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2}$$

3.- Una esfera se encuentra inscrita en un cono circular recto, la relación entre los volúmenes del cono y de la esfera es "k". Hallar la relación entre la superficie total del cono y de la esfera.

Resolución.-

Por condición del problema, la relación de volúmenes del cono y de la esfera es k

Es decir : $\dfrac{\frac{1}{3}\pi R^2(\text{BM})}{\frac{4}{3}\pi r^3} = k$



Donde : $\dfrac{R^2(\text{BM})}{4r^3} = k$ ... (1)

$\triangle$ BTO ~ $\triangle$ BMC : $\dfrac{\text{BM}-r}{g} = \dfrac{r}{R}$

$\Rightarrow \quad \text{BM} = \dfrac{r(g+R)}{R}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\dfrac{R^2 . \frac{r(g+R)}{R}}{4r^3} = k$

De donde : $\dfrac{R(g+R)}{4r^2} = k \Rightarrow R(g+R) = 4kr^2$

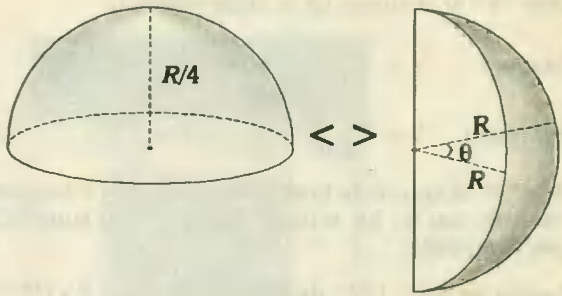
Nos piden la relación de las áreas del cono y la esfera, sea R lo pedido.

Luego : $R = \dfrac{\pi R(g+R)}{4\pi r^2} = \dfrac{R(g+R)}{4r^2}$ $\quad \therefore \quad \boldsymbol{R = k}$

4.- Se tiene una zona esférica equivalente a un huso esférico (en la misma esfera de radio R) la altura de la zona es R/4 . Calcular la medida del ángulo del huso esférico.

<u>Resolución</u>.-

Por condición del problema, el área de la zona es igual al área del huso esférico.



Es decir : $2\pi R\left(\dfrac{R}{4}\right) = \dfrac{\pi R^2\theta}{90}$

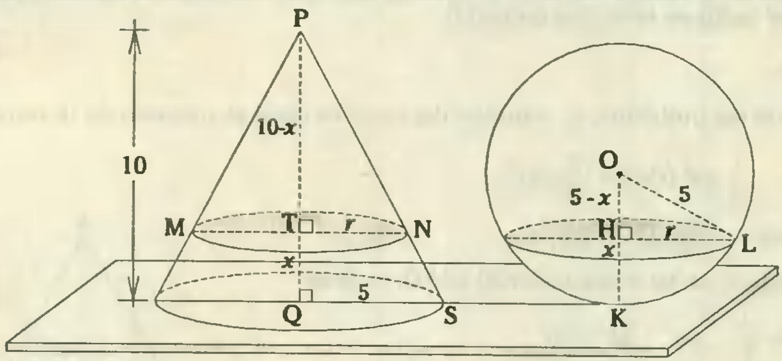
Donde : $\dfrac{2\pi R^2}{4} = \dfrac{\pi R^2\theta}{90}$

Simplificando : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{90}$

$\therefore \quad \boxed{\theta = 45}$

5.- Una esfera de radio 5m y un cono de 5m de radio y altura 10cm descansan sobre una superficie plana, se traza un plano paralelo a la superficie de manera que sus intersecciones con los dos sólidos resulten círculos congruentes. ¿A qué distancia de la superficie debe quedar el plano?

<u>Resolución</u>.-



En el cono : $\triangle$ PTN ~ $\triangle$ PQS

Luego : $\dfrac{r}{5} = \dfrac{10-x}{10} \Rightarrow r = \dfrac{10-x}{2}$

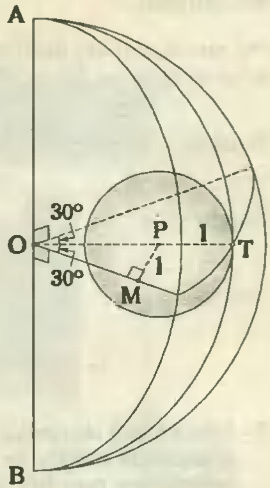
En la esfera $\triangle$ OHL : $5^2 = (5-x)^2 + r^2$

Por consiguiente : $5^2 = (5-x)^2 + \left(\dfrac{10-x}{2}\right)^2$

Resolviendo : $\boxed{x = \dfrac{10}{3}}$

6.- Calcular el volumen de una cuña esférica sabiendo que la esfera inscrita tiene un radio de 1m y los semicírculos que lo limitan forman un diedro de 60º.

Resolución.-



Sea "V" el volumen de la cuña esférica.

Luego : $V = \dfrac{\pi R^3 \alpha}{270}$, como : $\alpha = 60$

Entonces : $V = \dfrac{\pi R^3 60}{270} \Rightarrow V = \dfrac{2\pi R^3}{9}$ ... (1)

Sea "P" el centro de la esfera inscrita, M y T los puntos de tangencia con uno de los semicírculos y con la superficie esférica respectivamente.

Luego en el ⊿ OMP de 30° y 60° : OP = 2 y OT = R = 2 + 1 = 3

Reemplazando en (1) : $V = \dfrac{2\pi(3)^3}{9}$

$\therefore$ $V = 6\pi\, m^3$

7.- Sobre un círculo mayor de una esfera como base, se construye un cono equivalente a la mitad de la esfera. Calcular la medida del radio del segundo círculo de intersección si el radio de la esfera mide 5m.

Resolución.-

Por condición del problema, el volumen del cono es igual al volumen de la semiesfera.

Es decir : $\dfrac{1}{3}\pi 5^2\,(OA) = \dfrac{2}{3}\pi(5)^3$

Simplificando : OA = 10

Por la semejanza de los triángulos AOB y APQ, se tiene :

$\dfrac{AP}{10} = \dfrac{x}{5} \Rightarrow AP = 2x$

De donde : PO = 10 - 2x = QK

En el ⊿ CQB : $(10 - 2x)^2 = (5 + x)\,(5 - x)$

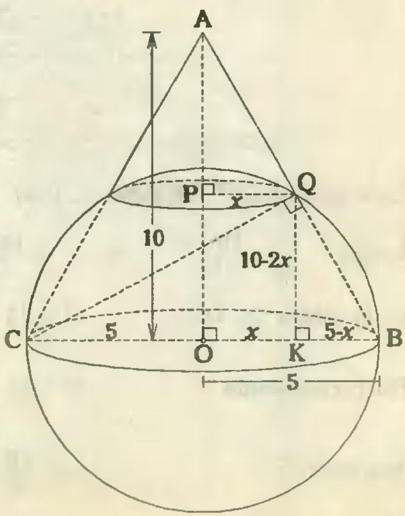
Factorizando : $4(5 - x)^2 = (5 + x)\,(5 - x)$

Simplificando : $4(5 - x) = 5 + x$

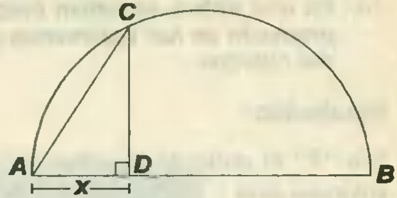
Efectuando : $20 - 4x = 5 + x$

En consecuencia : $5x = 15$

$\therefore$ $x = 3$



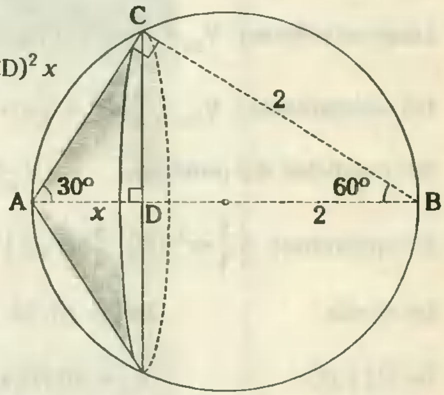
8.- En el semicírculo mostrado de diámetro AB = 4 . Calcular x para que el volumen engendrado por la parte sombreada sea 2 veces el volumen engendrado por el triángulo ADC al girar alrededor de $\overline{AB}$.



Resolución.-

La parte sombreada es un segmento circular que al girar en torno a $\overline{AB}$ origina un anillo circular de volumen $\frac{1}{6}\pi(AC)^2 \cdot x$; y el sólido engendrado por el triángulo rectángulo ADC al girar en torno a $\overline{AB}$ es un cono de volumen :

$$\frac{1}{3}\pi\,(CD)^2\,x$$



Luego según el problema : $\frac{1}{6}\pi\,(AC)^2\,x = 2\,.\,\frac{1}{3}\pi\,(CD)^2\,x$

De donde: $(AC)^2 = 4(CD)^2 \quad \Rightarrow \quad AC = 2\,CD$

En el ⊿ ADC : $\quad m\measuredangle CAD = 30^\circ$

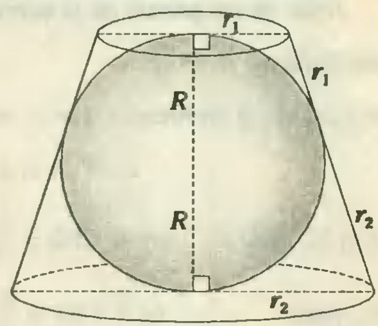
En el ⊿ ACB de 30° y 60° : $\quad AC = 2\sqrt{3}$

Luego : $\quad CD = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{3} \quad \therefore \quad \mathbf{x = 3}$

9.- Calcular el volumen de un cono truncado circunscrito a una esfera de radio R, si la superficie total del cono truncado es 3K veces la superficie de la esfera.

Resolución.-



Sea "V_T" el tronco de cono

Luego : $\quad V_T = \dfrac{\pi(2R)}{3}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \quad \ldots (1)$

Por dato del problema :

$$\pi\,(r_1 + r_2)\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 3k\,(4\pi R^2)$$

$$\pi\,(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 + r_1^2 + r_2^2) = 12k\pi R^2$$

$$\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = 6k\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 = 6kR^2 \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) : $\quad V_T = \dfrac{2\pi R}{3}\,(6kR^2) \quad \therefore \quad \mathbf{V_T = 4\pi\,kR^3}$

10.- En una esfera se hallan inscritos un cilindro equilátero y un cono equilátero, si el producto de los volúmenes del tronco y de la esfera es 5600 u^6. Hallar el volumen del cilindro.

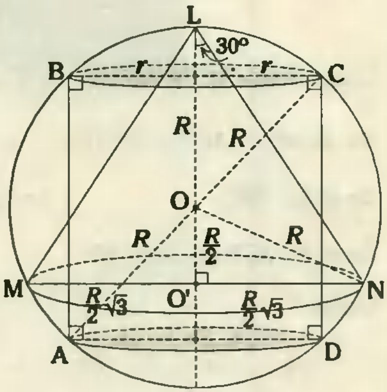
Resolución.-

Sea "R" el radio de la esfera y "r" el radio de la base del cilindro equilátero, luego su volumen será : $V_{ci} = \pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$ ... (1)

En el cuadrado ABCD : $2R = 2r\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}$

Luego el volumen de la esfera será : $V_e = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(r\sqrt{2})^3 \quad \Rightarrow \quad V_e = \dfrac{8}{3}\pi r^3\sqrt{2}$

En el Δ MLN, equilátero : $O'N = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$ y $LO' = \dfrac{3}{2}R$



Luego su volumen : $V_{co} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \dfrac{3}{2}R$

Por consiguiente : $V_{co} = \dfrac{3}{8}\pi R^3 = \dfrac{3}{8}\pi(r\sqrt{2})^3 = \dfrac{3}{4}\pi R^3\sqrt{2}$

Por condición del problema : $(V_{co})(V_e) = 5600\,u^6$

Reemplazando : $\left(\dfrac{3}{4}\pi r^3\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{8}{4}\pi r^3\sqrt{2}\right) = 4\pi^2 r^6 = 5600$

De donde : $2\pi r^3 = 20\sqrt{14}$ ... (2)

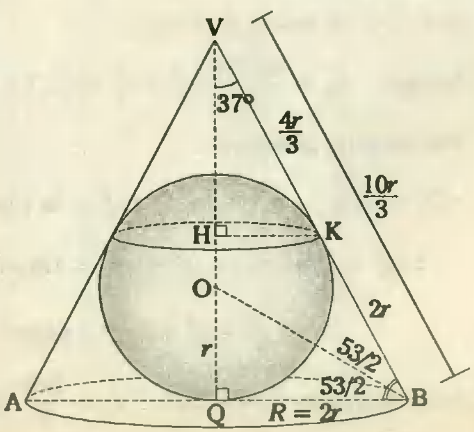
De (1) y (2) : $\mathbf{V_{ci} = 20\sqrt{14}\,u^3}$

11.- En un cono circular recto, esta inscrito una esfera cuya superficie es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación se divide la superficie lateral del cono por la línea de tangencia de la esfera y del cono?

Resolución.

De acuerdo al problema : $4\pi r^2 = \pi R^2$

$\Rightarrow \quad R = 2r$



En el ⊿ OQB : $m\measuredangle OBQ = \dfrac{53}{2}$

Así como : $m\measuredangle OBV = \dfrac{53}{2}$

En el ⊿ VQB de 37° y 53° :

$VB = 5\left(\dfrac{2}{3}r\right) = \dfrac{10}{3}r$

De donde : $$Vk = \frac{10}{3}r - 2r = \frac{4}{3}r$$

Por semejanza de conos; siendo a_l y a_t las áreas del cono parcial y del tronco de cono respectivamente, se tiene :

$$\frac{a_l}{a_l + a_t} = \frac{\left(\frac{4r}{3}\right)^2}{\left(\frac{10}{3}r\right)^2} = \frac{16r^2}{100r^2} = \frac{4}{25} \qquad \therefore \qquad \frac{a_l}{a_t} = \frac{4}{21}$$

12.- Una esfera de área $36\pi cm^2$ es tangente a las aristas de un triedro trirectángulo. Calcular la longitud de una de las tangentes.

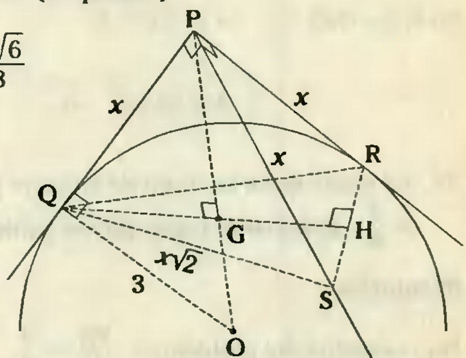
Resolución.-

Sea el triedro trirectángulo P - QRS y Q, R y S los puntos donde las aristas tocan a la esfera.

Si $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad R = 3$

Δ RQS : Equilátero de lado $x\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ G : Baricentro (Propiedad)

Además : $QG = \frac{2}{3}QH \quad \Rightarrow \quad QG = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3}\sqrt{6} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$



⊿ OQP : Relaciones Métricas

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\therefore \qquad x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ m$$

13.- El volumen de un segmento esférico es $\frac{20\pi}{3}$ m^3 y su altura mide 1m. Calcular el radio de la base mayor, si la diferencia entre los radios de sus bases es 1m.

Resolución.

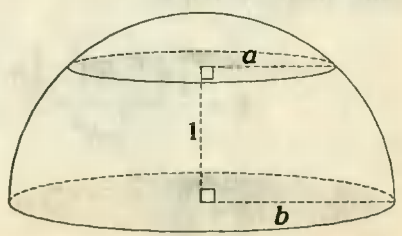
Por condición del problema se tiene :

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) \ (1)$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi (1)^3 + \frac{1}{2}\pi (a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow \qquad a^2 + b^2 = 13 \quad \ldots (1)$$

Se conoce que : $\quad b - a = 1 \quad \ldots (2)$



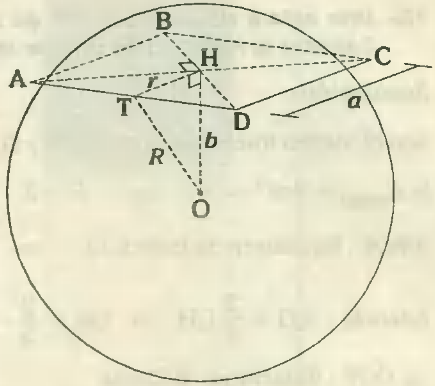
Elevando al cuadrado ambos miembros : $b^2 - 2ab + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2ab = 12$ ... (3)

Sumando las expresiones (1) y (3) : $a^2 + 2ab + b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a + b = 5$ ... (4)

Sumando las expresiones (2) y (4) : $2b = 6 \quad \therefore \quad \boldsymbol{b = 3}$

14.- El lado de un rombo mide "a", una esfera de radio es tangente a todos los lados del rombo, la distancia del centro de la esfera al plano del rombo es "b". Hallar el área del rombo.

Resolución.-



Sea ABCD el rombo de lado "a" y T el punto donde el lado $\overline{AD}$ es tangente a la esfera de centro O

Luego $\overline{OH} = b$ y el área A del rombo será :

$$A = 2ar$$

En el ⊿ THO : $r = \sqrt{R^2 - b^2}$

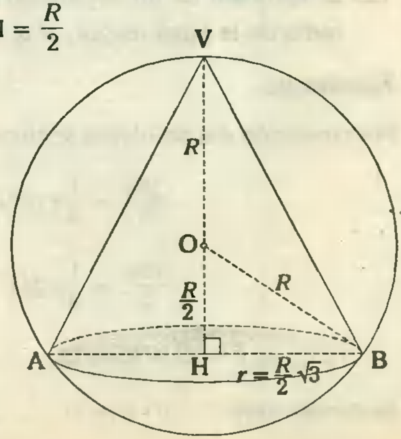
$$\therefore \quad \boldsymbol{A = 2a\sqrt{R^2 - b^2}}$$

15.- La razón entre la altura de un cono y el radio de la esfera circunscrita a este es igual a $\frac{3}{2}$. Calcular la razón de los volúmenes de estos cuerpos.

Resolución.-

Por condición del problema : $\dfrac{VH}{R} = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad VH = \dfrac{3}{2}R$

De donde : $OH = VH - R = \dfrac{3}{2}R - R \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{R}{2}$



En el ⊿ OHB : $r = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

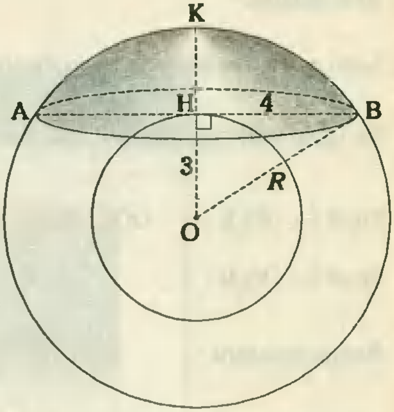
Luego, si "K" es la razón de los volúmenes de estos cuerpos entonces :

$$K = \frac{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \times \frac{3}{2}R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{3\pi R^3}{8}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{K = \frac{9}{32}}$$

16.- Se tienen dos esferas concéntricas, se traza un plano secante a la esfera mayor y tangente a la esfera menor, determinando un círculo de $16\pi m^2$ de área. Calcular el área del casquete menor formado en la esfera mayor, si el radio de la esfera menor mide 3m.

Resolución.-



Siendo "A_z" el área de la zona esférica de una base que se pide calcular

Se tiene : $A_z = 2\pi R(KH)$ ... (1)

Puesto que el área de la base de la zona es 16π ,se tiene :

$\pi(HB)^2 = 16\pi \Rightarrow HB = 4$

En el ⊿ OHB : $R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R = 5$

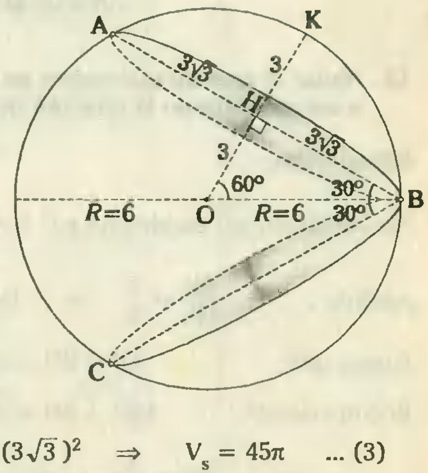
De donde : $KH = OK - 3 = 5 - 3 = 2$

Sustituyendo los valores encontrados en la ecuación (1) :

$$A_z = 2\pi(5)2 \quad \therefore \quad \mathbf{A_z = 20\pi}$$

17.- Una esfera de área $144\pi m^2$ es cortada por dos planos que forman entre si un diedro de 60º de modo que la recta de intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Calcular el volumen de la parte de la esfera comprendida en el ángulo diedro.

Resolución.-



El volumen del sólido buscado (V_x) será igual al volumen de la esfera, menos los volúmenes de los segmentos esféricos de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ que por cierto son iguales a «V_s»

Luego : $V_x = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2V_s$ ... (1)

Por dato del problema : $4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R = 6$ ... (2)

En el ⊿ OHB de 30º y 60º $OH = \frac{6}{2} = 3$ y $HB = 3\sqrt{3}$

Luego : $V_s = \frac{1}{6}\pi(3)^3 + \frac{1}{2}\pi(3)(3\sqrt{3})^2 \Rightarrow V_s = 45\pi$ ... (3)

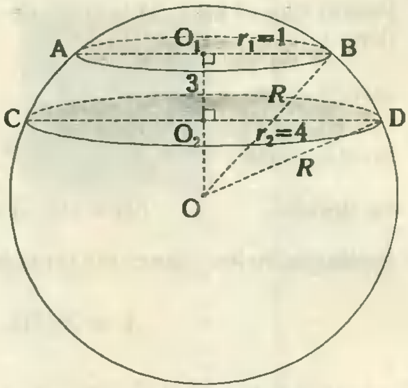
Sustituyendo (3) y (2) en (1) : $V_x = \frac{4}{3}\pi(6)^3 - 2(45\pi) \quad \therefore \quad \mathbf{V_x = 198\ \pi m^3}$

18.- Calcular el área de una esfera sabiendo que las áreas de dos círculos menores paralelos distantes 3m y situados a un mismo lado del centro tienen áreas πm^2 y $16\pi m^2$.

Resolución.-

Sean r_1 y r_2 los radios de los círculos menores, luego : $\pi r_1^2 = \pi \Rightarrow r_1 = 1$

De igual manera : $\pi r_2^2 = 16\pi \Rightarrow r_2 = 4$



En el ⊾ OO_2D : $OO_2 = \sqrt{R^2 - 4^2}$

En el ⊾ OO_1B : $(OO_1)^2 + (O_1B)^2 = R^2$

Reemplazando : $(3 + \sqrt{R^2 - 16})^2 + 1^2 = R^2$

Efectuando : $9 + R^2 - 16 + 6\sqrt{R^2 - 16} + 1 = R^2$

Por consiguiente : $6\sqrt{R^2 - 16} = 6$

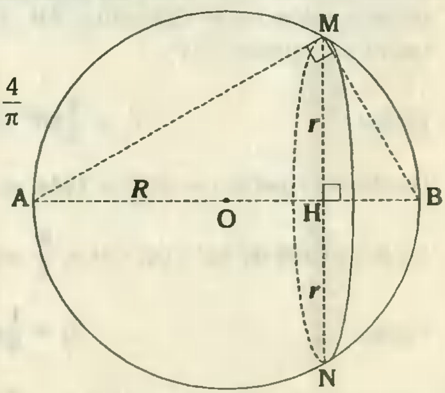
Donde : $\sqrt{R^2 - 16} = 1 \Rightarrow R^2 = 17$

Luego el área de la esfera será : $4\pi R^2 = 4\pi(17)$

$\therefore$ ***Área* de la esfera = $68\,\pi\, m^2$**

19.- Hallar el área de una esfera en donde un círculo menor divide perpendicuiarmente a un diámetro en la relación de 2 a 8 y tiene por área $4m^2$.

Resolución.-



Por condición del problema : $\pi r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \dfrac{4}{\pi}$

Además : $\dfrac{BH}{HA} = \dfrac{2}{8} \Rightarrow HA = 4BH$

Puesto que : $AH + BH = 2R$

Reemplazando : $4BH + BH = 2R$

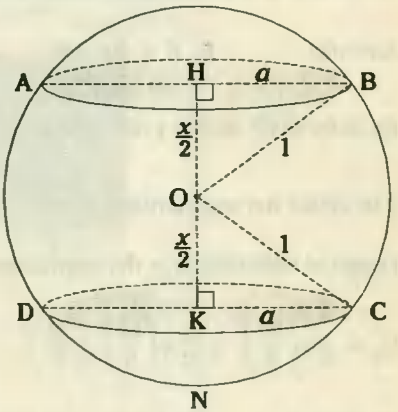
$\Rightarrow BH = \dfrac{2}{5}R$ y $AH = \dfrac{8}{5}R$

En el ⊾ AMB : $r^2 = AH\,.\,HB$

Sustituyendo : $\dfrac{4}{\pi} = \left(\dfrac{8}{5}R\right)\left(\dfrac{2}{5}R\right) \Rightarrow R^2 = \dfrac{25}{4\pi}$

Luego el área de la esfera $4\pi R^2$, será : $\cancel{4\pi}\left(\dfrac{25}{\cancel{4\pi}}\right)$ ***Área* de la esfera = 25 m^2**

20.- Se corta un esfera con 2 planos secantes paralelos entre si y equidistantes del centro, siendo el radio de la esfera 1m. Calcular la distancia entre los planos sabiendo que el área de la zona comprendida entre los planos es igual a la suma de las áreas de las 2 secciones determinadas.



Resolución.-

Por condición del problema : $2\pi Rx = \pi a^2 + \pi(KC)^2$

$\triangle$ OHB ≅ $\triangle$ OKC $\Rightarrow$ HB = KC = a

Luego : $2\pi\,(1)x = 2\pi a^2 \Rightarrow a^2 = x$

En el $\triangle$ OHB : $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + a^2 = 1^2$

En consecuencia : $\dfrac{x^2}{4} + x = 1 \Rightarrow x^2 + 4x = 4$

Transformando convenientemente : $(x + 2)^2 - 4 = 4$

Por consiguiente : $(x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\, 2\sqrt{2} - 2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 2\,(\sqrt{2} - 1)}$

21.- En un cono circular recto las generatrices están inclinadas 53º respecto al plano de la base. Tomando como diámetro la altura del cono se construye una esfera, luego se traza un plano paralelo a la base del cono y secante a los sólidos que determina en la esfera y el cono dos círculos cuyas áreas están en la relación de 3 a 1 . Hallar la distancia del vértice del cono al plano, si su altura mide 4.

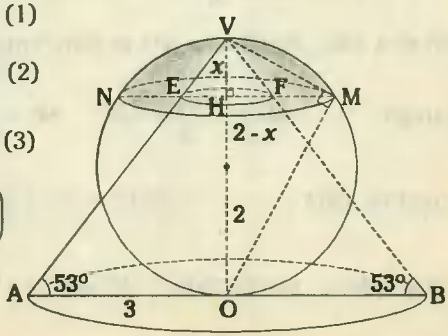
Resolución.-

Sea «H» el centro de las esferas concéntricas de diámetros $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$

Luego : $\pi(MH)^2 = 3\,\pi(HF)^2 \Rightarrow (MH)^2 = 3(HF)^2$ ... (1)

En el triángulo rectángulo VMO : $(MH)^2 = x(4 - x)$ ... (2)

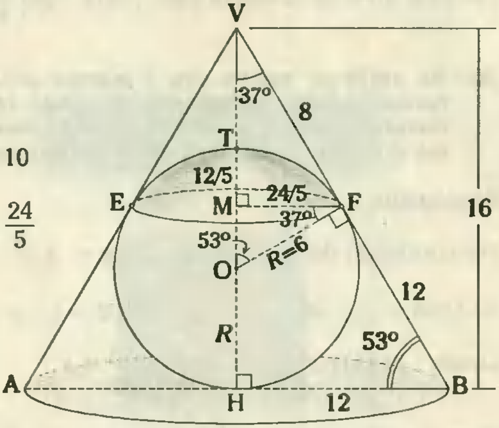
$\triangle$ AOV ~ $\triangle$ EHV : $\dfrac{HE}{3} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow (HE)^2 = \dfrac{9}{16}x^2$ ... (3)



Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $4x - x^2 = 3\left(\dfrac{9}{16}x^2\right)$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{64}{43} = 1{,}48 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 1{,}48}$

22.- En un cono de revolución de altura 16 y radio de la base 12 se inscribe una esfera, la cual es tangente a la superficie lateral del cono mediante una circunferencia, el plano de esta circunferencia determina en la esfera un segmento esférico menor de una sola base. Hallar su volumen.



<u>Resolución</u>.-

En el ⊿ VHB de 37º y 53º : VB = 20

En el ⊿ VFO de 37º y 53º : $R = 6$ y VO = 10

Además : $8 \cdot 6 = 10 \cdot MF \Rightarrow MF = \dfrac{24}{5}$

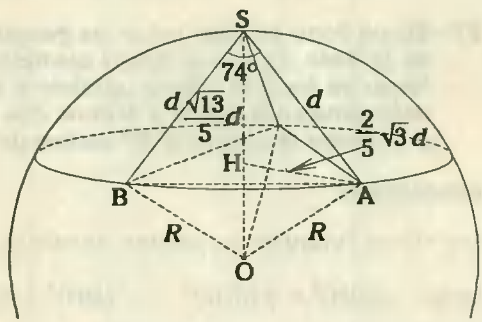
En el ⊿ OMF de 37º y 53º : $OM = \dfrac{18}{5}$

y la altura del segmento : $TM = 6 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{12}{5}$

Luego el volumen «V_S» del segmento esférico será :

$$V_S = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{12}{5}\right)\cdot\left(\frac{24}{5}\right)^2 \qquad \therefore \quad \mathbf{V_S = \frac{3744}{125}\pi}$$

23.- Desde un punto de una esfera de radio R se han trazado tres cuerdas congruentes que forman ángulos de 74º entre si. Calcuiar la longitud de una de estas cuerdas.



<u>Resolución</u>.-

Sea O el centro de la esfera y SA = SB = SC = d

La medida de cada una de las cuerdas dadas, es evidente que el triángulo ABC es equilátero y la altura $\overline{SH}$ de la pirámide regular S - ABC al ser prolongada pasa por O

En el Δ BSA : $LA = \dfrac{3}{5}d \Rightarrow AB = \dfrac{6}{5}d$

En el Δ ABC, equilátero «H» es baricentro

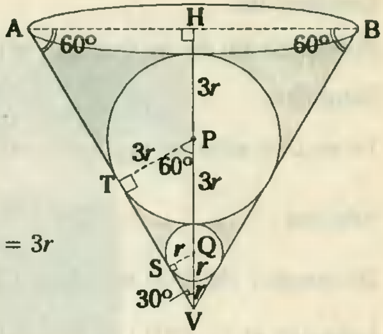
Luego : $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}\,d$

En el ⊿ GHA : $(SH)^2 = d^2 - \left(\dfrac{2}{5}\sqrt{3}d\right)^2 \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{13}d}{5}$

En el Δ SOA , por Euclides : $R^2 = d^2 + r^2 - 2R \cdot \dfrac{\sqrt{13}d}{5} \qquad \therefore \quad \mathbf{d = \dfrac{2R\sqrt{13}}{5}}$

24.- Un cono equilátero esta circunscrito a dos esferas tangentes exteriores (el radio de la esfera menor mide r) este cono se invierte (con la punta hacía abajo) y en ello se vierte agua hasta llenarlo. Calcular el volumen de agua.

Resolución.-



Sea V_{H_2O} el volumen de agua

Luego : $V_{H_2O} = V_{cono} - V_{\substack{esfera \\ mayor}} - V_{\substack{esfera \\ menor}}$ ... (1)

Ahora : $V_{\substack{esfera \\ menor}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ... (2)

En el ⊾ PTV de 30° y 60° : PV = 2R = R + 3r ⇒ R = 3r

Luego : $V_{\substack{esfera \\ mayor}} = \dfrac{4}{3}\pi(3r)^3 \Rightarrow V_{\substack{esfera \\ mayor}} = 36\pi r^3$ ... (3)

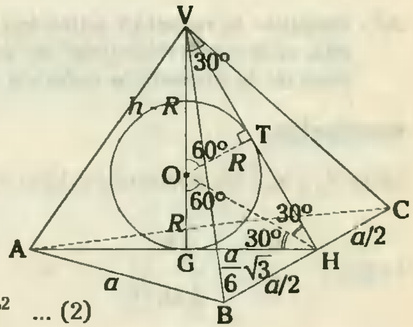
En el ⊾ AHV de 30° y 60° : $AH = \dfrac{HV}{\sqrt{3}} = \dfrac{9r}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = 3r\sqrt{3}$

De donde : $V_{cono} = \dfrac{1}{3}\pi\,(3r\sqrt{3})^2 \,.\, 9r \Rightarrow V_{cono} = 81\pi r^3$ ... (4)

Sustituyendo (2) , (3) y (4) en (1) : $V_{H_2O} = 81\pi r^3 - 36\,\pi r^3 - \dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \therefore \quad \boxed{V_{H_2O} = \dfrac{131}{3}\pi r^3}$

25.- En una pirámide triangular regular se ha inscrito una esfera. La medida dei ángulo diedro que forman una cara lateral y el plano de la base es 60 ia relación de los volúmenes de la pirámide y de la esfera es :

Resolución.-



Sean V_p y V_e los volúmenes de la pirámide y de la esfera respectivamente, luego :

$$\frac{V_p}{V_e} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(h)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{V_p}{V_e} = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{16\pi R^3} \text{ ... (1)}$$

En el ⊾ OGH de 30 y 60 : $R\sqrt{3} = \dfrac{a}{6}\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36R^2$ ... (2)

En el ⊾ VTO : $h - R = 2R \Rightarrow h = 3R$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) ; en (1) :

$$\frac{V_p}{V_e} = \frac{36R^2 \,.\, 3R\sqrt{3}}{16\pi R^3} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{V_p}{V_e} = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi}}$$

26.- Las áreas de las bases de un segmento esférico de dos bases son π y $16\pi m^2$ y el área de su sección axial es $15m^2$. Calcular el área de la zona esférica correspondiente al segmento esférico.

Resolución.-

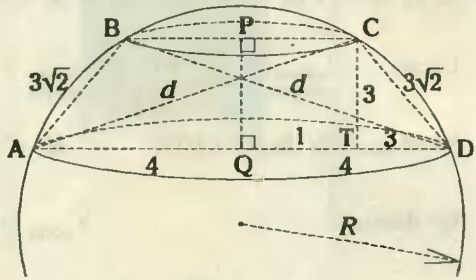
Por condición del problema : $\pi(PC)^2 = \pi \Rightarrow PC = 1$

También : $\pi(QD)^2 = 16\pi \Rightarrow QD = 4$

La sección axial del segmento esférico es un trapecio isósceles de diagonales : $AC = BD = d$

Además : $15 = \left(\dfrac{BC+AD}{2}\right)PQ \Rightarrow 15 = \left(\dfrac{2+8}{2}\right)PQ$

De donde : $PQ = 3$, trazamos $\overline{CT} \perp \overline{AD}$



Luego en el ⊿ CTD : $CD = 3\sqrt{2}$

En el □ ABCD por Ptolomeo :

$$(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) + 2(8) = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{34}$$

En el Δ ACD : $(AC)(CD) = (CT)\,2R$

Reemplazando : $\sqrt{34}\,.\,3\sqrt{2} = 3(2R) \Rightarrow R = \sqrt{17}$

Finalmente siendo A el área de la zona esférica

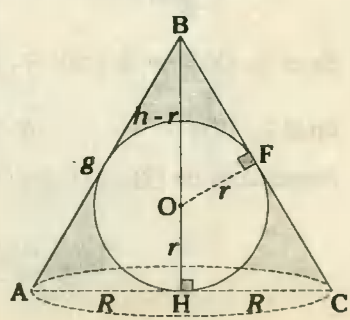
Se tiene : $A = 2\pi R(PQ) = 2\pi\sqrt{17}(3) \quad \therefore \quad \boldsymbol{A = 6\sqrt{17}\,\pi}$

27.- Calcular la relación entre los volúmenes de una esfera y del cono circunscrito a ella, si la superficie total del cono tiene una área que es cuatro veces mayor que el área de la superficie esférica.

Resolución.-

Sean V_e y V_c, los volúmenes de la esfera y cono respectivamente

Luego : $\dfrac{V_e}{V_c} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \Rightarrow \dfrac{V_e}{V_c} = 4\left(\dfrac{r^3}{R^2 h}\right) \ldots (1)$



Por condición del problema : $A_{(cono)} = 4\,A_{(esfra)}$

Reemplazando : $\pi R(g + R) = 4(4\pi r^2)$

$$\Rightarrow \quad R(g + R) = 16r^2 \ldots (2)$$

El ⊿ BHC ~ ⊿ BFO $\Rightarrow \dfrac{g}{h-r} = \dfrac{R}{r}$

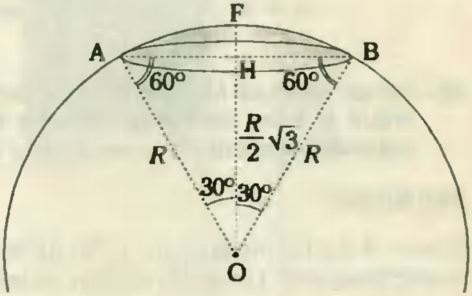
De donde : $g + R = \dfrac{hR}{r}$ ... (3)

Reemplazando (3) en (2) : $\dfrac{hR^2}{r} = 16r^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{r^3}{R^2h} = \dfrac{1}{16}$ ... (4)

Sustituyendo (4) en (1) : $\dfrac{V_e}{V_c} = 4\left(\dfrac{1}{16}\right) \quad \therefore \quad \dfrac{V_e}{V_c} = \dfrac{1}{4}$

28.- Un sector circular de radio R y ángulo central de 30º gira en torno a uno de sus radios. Hallar el volumen del sólido engendrado, si el área del casquete esférico determinado es 4π(2 - √3)

Resolución.-



En el ⊿ AHO de 30 y 60 :

$HO = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{R}{2}$ y $HF = R - \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

Por condición del problema el área del casquete esférico es :

$$4\pi(2 - \sqrt{3}) = 2\pi R FH = 2\pi R\left(R - \frac{R}{2}\sqrt{3}\right)$$

Donde : $4\pi(2 - \sqrt{3}) = \pi R^2(2 - \sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad R = 2$

Sea V el volumen del sector esférico determinado

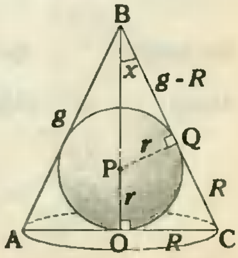
Luego : $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 (FH) = \dfrac{2}{3}\pi(2)^2 \ (2 - \sqrt{3}) \quad \therefore \quad V = \dfrac{8}{3}\pi(2 - \sqrt{3})$

29.- En un cono se ha inscrito una esfera, la superficie de la esfera es a la superficie lateral del como 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la altura y la generatriz del cono.

Resolución.-

Designemos por ***r***, *R* y *g* las longitudes del radio de la esfera, de la base del cono y de su generatriz. Luego por condición del problema la relación de sus áreas se expresará como :

$$\frac{4\pi r^2}{\pi Rg} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{Rg}{6}$$



Por la semejanza de los triángulos BQP y BOC se tiene :

$$\frac{r}{R} = \frac{g-R}{\sqrt{g^2 - R^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{(g-R)^2}{g^2 - R^2} = \frac{g-R}{g+R}$$

De donde : $$\frac{Rg}{6R^2} = \frac{g-R}{g+R}$$

Al simplificar y ordenar la ecuación cuadrática determinada se tiene :

$$g^2 - 5\,Rg + 6\,R^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} g & \searrow\!\!\!\nearrow & -2R \\ g & \nearrow\!\!\!\searrow & -3R \end{array}$$

De donde : $g = 2R \;\Rightarrow\; x = 30$

$$g = 3R \;\Rightarrow\; x = Arc\ \text{sen}\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x = 30}$$

30.- En un cono se ha inscrito una semiesfera, el círculo mayor de la base descansa sobre la base del cono. Hallar la medida del ángulo en el vértice del cono si la superficie del cono y la superficie de la semiesfera son entre si como 25 a 12.

Resolución.-

Sean r , R y g las medidas del radio de la semiesfera de la base del cono y de su generatriz respectivamente. Luego la relación de las áreas del cono y de la semiesfera será :

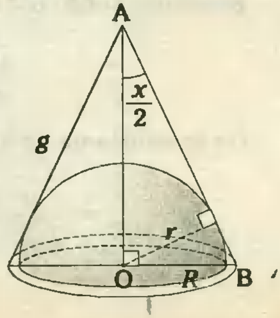
$$\frac{\pi R(g+R)}{2\pi r^2} = \frac{25}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R(g+R)}{r^2} = \frac{25}{6} \quad \text{... (1)}$$

En el ⊿ AOB : OA × $R = g\,.\,r$

Puesto que : $$OA = \sqrt{g^2 - R^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{g^2 - R^2}\;R = gr$$

De donde : $$r^2 = \frac{(g^2 - R^2)R^2}{g^2} \quad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) : $$\frac{R(g+R)}{\dfrac{(g^2 - R^2)R^2}{g^2}} = \frac{25}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{g^2}{R(g-R)} = \frac{25}{6}$$



De donde : $6g^2 = 25Rg - 25R^2$

Ahora : $6g^2 - 25Rg + 25R^2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 3g & \searrow\!\!\!\nearrow & -5R \\ 2g & \nearrow\!\!\!\searrow & -5R \end{array}$$

Con lo cual se tiene : $\dfrac{g}{R} = \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = 37 \quad \therefore \quad x = 74$

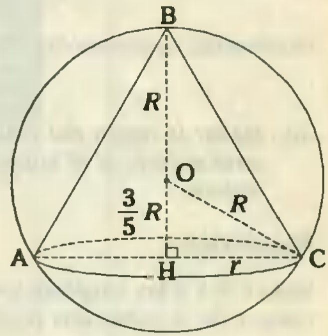
y si : $\dfrac{g}{R} = \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{5}{2}\right) \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = 2\ Arc\ \text{sen}\left(\dfrac{5}{2}\right)}$

31.- La razón entre la altura de un cono y el radio de la esfera circunscrita a éste es igual a 8/5 . Hallar la relación de los volúmenes de estos cuerpos.

Resolución.-

Sean $\overline{BH}$ y R , la altura del cono y el radio de la esfera circunscrita a él. Luego por condición del problema :

$$\frac{BH}{R} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad BH = \frac{8}{5}R$$



De donde : $OH = BH - BO = \dfrac{8}{5}R - R \quad \Rightarrow \quad OH = \dfrac{3}{5}R$

En el ⊿ OHC : $r^2 = R^2 - \left(\dfrac{3}{5}R\right)^2$

Ahora : $r^2 = R^2 - \dfrac{9}{25}R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \dfrac{16R^2}{25}$

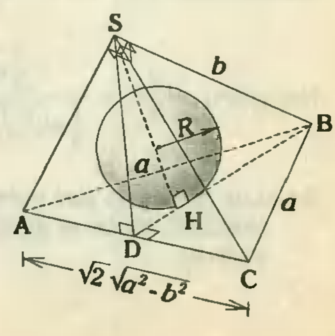
Sean V_c y V_e los volúmenes del cono y de la esfera, luego :

$$\frac{V_c}{V_e} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (BH)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{16R^2}{25} \cdot \frac{8}{5}R}{\frac{4}{3}R^3} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{V_c}{V_e} = \frac{32}{125}}$$

32.- En una pirámide triangular SABC las aristas $\overline{SA}$, $\overline{SC}$ y $\overline{SB}$ son de dos en dos perpendiculares; AB = BC = a , BS = b . Calcular el radio de la esfera inscrita en la pirámide.

Resolución.-

Sea «R» el radio de la esfera inscrita en la pirámide triangular, V y S el volumen y el área de dicha pirámide



Luego por propiedad : $R = \dfrac{3V}{S}$ ... (1)

⊿ ASB ≡ ⊿ SBC $\quad \Rightarrow \quad AS = SC = \sqrt{a^2 - b^2}$

En el ⊿ ASC , isósceles : $AD = DC = \sqrt{a^2 - b^2}\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

En el ⊿ BDC : $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} \Rightarrow BD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

De donde : $S = \frac{AC.BD}{2} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{a^4-b^4}$ ... (2)

Por otro lado el volumen V de la pirámide será :

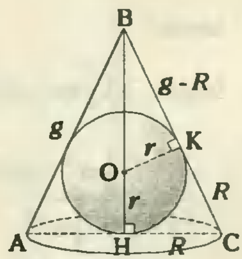
$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{AS.SC}{2}\right)SB = \frac{1}{3}\frac{(\sqrt{a^2-b^2})^2}{2}b \Rightarrow V = \frac{1}{6}b(a^2-b^2) \text{ ... (3)}$$

Finalmente sustituyendo (2) y (3) en (1) : $\boldsymbol{R = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+2b+\sqrt{a^2-b^2}}}$

33.- Hallar la razón del volumen de una esfera al volumen del cono recto circunscrito a esta esfera, si la superficie total del cono es n veces mayor que la superficie de la esfera.

Resolución.-

Sean r, R y g las longitudes del radio de la esfera, de la base del cono y de la generatriz respectivamente.



Luego por condición del problema :

$$\pi R(g+R) = n\,4\pi r^2 \Rightarrow R(g+R) = 4r^2.n \text{ ... (1)}$$

⊿ BKO ~ ⊿ BHC $\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{g-R}{\sqrt{g^2-R^2}}$

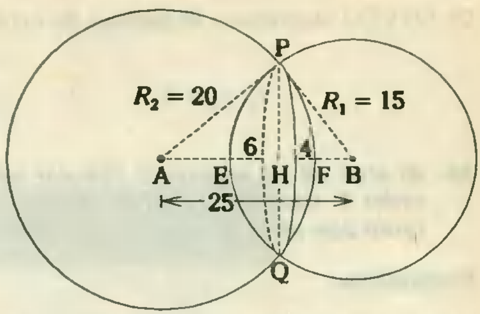
Elevando al cuadrado y simplificando : $\frac{R^2(g-R)}{g+R} = r^2$ ... (2)

Multiplicando (1) y (2) : $R^3(g-R) = 4r^4 n \Rightarrow \frac{4r^4}{R^3(g-R)} = \frac{1}{n}$

Nos piden : $\frac{V_c}{V_e} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2-R^2}} = \frac{4r^4}{R^3(g-R)} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{V_c}{V_e} = \frac{1}{n}}$

34.- Los radios de dos esferas secantes miden 15 y 20 y la distancia entre sus centros mide 25. Hallar el área de la superficie correspondiente a la intersección de las 2 esferas.

Resolución.-



La superficie correspondiente a la intersección de las esferas, esta compuesta por dos casquetes esféricos de áreas A_1 y A_2

En el ⊾ APB : $(20)^2 = 25 \cdot AH$

$\Rightarrow$ $AH = 16$ de donde: $HF = 20 - 16 = 4$

También : $(15)^2 = 25 \cdot HB$ $\Rightarrow$ $HB = 9$

De donde : $EH = 6$

Luego : $A_1 = 2\,\pi R\,(EH) = 2\pi\,(15)\,6$ $\Rightarrow$ $A_1 = 180\,\pi$

Ahora : $A_2 = 2\pi\,R_2\,(HF) = 2\pi\,(20)\,4$ $\Rightarrow$ $A_2 = 160\,\pi$

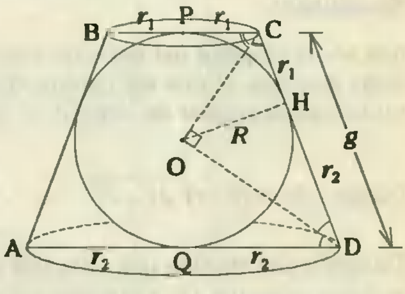
Finalmente el área buscada $A_1 + A_2$ será :

$$A_1 + A_2 = 180\,\pi + 160\,\pi \qquad \therefore \qquad \mathbf{A_1 + A_2 = 340\pi}$$

35.- Calcular los radios de las bases de un cono truncado circunscrito a una esfera de radio R, si la razón de la superficie total del cono truncado a la superficie de la esfera es 2.

Resolución.-

Por condición del problema : $\dfrac{A_{T.C}}{A_e} = 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi g(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)}{4\pi R^2} = 2$ ... (1)



La sección axial del sistema es el trapecio isósceles ABCD circunscrita al círculo de radio R, luego por Propiedad de tangentes :

$$CP = CH = r_1 \quad y \quad DQ = DH = r_2$$

De donde : $g = r_1 + r_2$

Además en el ⊾ COD : $R^2 = r_1\,r_2$

Sustituyendo en (1) : $r_1^2 + r_2^2 + 2\,R^2 + r_1^2 + r_2^2 = 8\,R^2$

De donde : $r_1^2 + r_2^2 = 3\,R^2$ ... (2)

Y como : $2\,r_1\,r_2 = 2\,R^2$ ... (3)

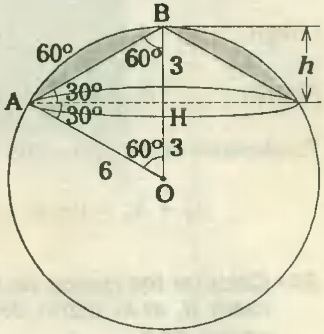
De (2) y (3) obtenemos el sistema de ecuaciones lineales : $r_1 + r_2 = R\sqrt{5}$

$$r_2 - r_1 = R \qquad \therefore \qquad r_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{y} \quad r_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

36.- El arco de un segmento circular mide 60º y corresponde a una circunferencia de radio 6. Calcular el volumen generado por este segmento al girar alrededor del radio que pasa por uno de los extremos del arco.

Resolución.-

El sólido engendrado por la rotación del segmento circular AB alrededor del diámetro $\overline{OB}$ es un anillo esférico.



Cuyo volumen V_x esta dado por : $V_x = \frac{1}{6}\pi(AB)^2 \cdot h$ ... (1)

En el triángulo equilátero AOB : $AB = BO = AO = 6$

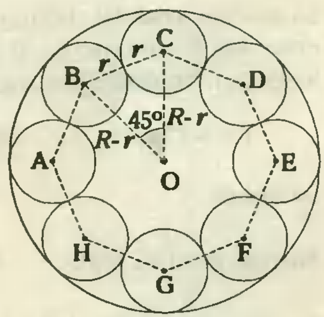
Además $BH = HO = h = 3$

Sustituyendo estos valores encontrados en (1) :

$$V_x = \frac{1}{6}\pi(6)^2 \cdot 3 \qquad \therefore \qquad \mathbf{V_x = 18\pi}$$

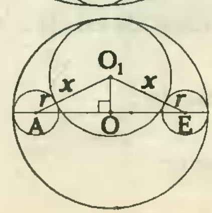
37.- En una esfera S de Radio R se han inscrito ocho esferas de menor radio, cada una de las cuales hace contacto con las dos vecinas y todas juntas tienen contacto con la esfera S por la circunferencia de mayor diámetro. Luego, en el espacio entre las esferas se ha inscrito otra esfera S_1 que hace contacto con las ocho esferas de menor radio y con la esfera S. Hallar el radio de esta última.

Resolución.-



Sea «r» la longitud del radio de cada una de las ocho esferas inscritas, al unir los centros de las esferas se forma un octógono regular de lado $BC = 2r$

Donde : $2r = (R - r)\sqrt{2-\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; r = \dfrac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ ... (1)



Trazando una sección que pase por el centro O de la esfera S por el centro O_1 de la esfera S de radio x y por los centros de las dos esferas opuestas de radio r se tiene en el ⊿ AOO_1 :

$$(AO_1)^2 = (AO)^2 + (OO_1)^2$$

Reemplazando : $(r + x)^2 = (R - r)^2 + (R - x)^2$

De donde : $$x = R\,\frac{(R-r)}{R+r)} \quad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (1) en (2), finalmente : $$x = \frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$$

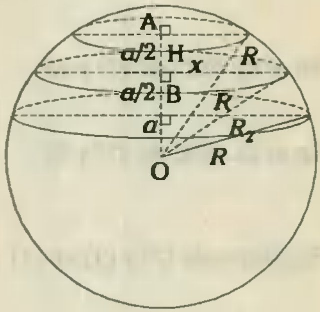
38.- Las áreas de dos secciones paralelas de una esfera dispuestas a un mismo lado respecto a su centro son S_1 y S_2, el doble del área del círculo cuyo diámetro es la distancia entre estas secciones es S_3. Calcular el área de la sección paralela a las dos primeras secciones y equidistantes de ellas.

Resolución.-

Por condición del problema : $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$, también : $S_3 = \dfrac{\pi d^2}{2}$ y $S_x = \pi x^2$

En los triángulos rectángulos OAP, OHT y OBQ, utilizando el Teorema de Pitágoras :

$$R^2 = (d+a)^2 + R_1^2 \quad \text{... (1)}$$



También : $$R^2 = \left(\frac{d}{2}+a\right)^2 + x^2 \quad \text{... (2)}$$

y $$R^2 = a^2 + R_2^2 \quad \text{... (3)}$$

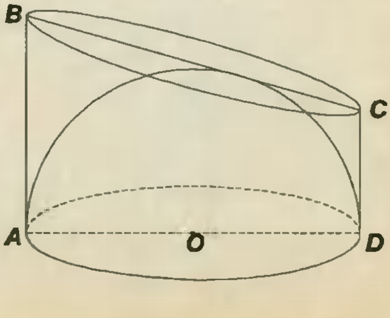
Eliminando R y a de las expresiones (1) , (2) y (3)

Se tiene : $$2x^2 = R_1^2 + R_2^2 + \frac{d^2}{2}$$

Multiplicando por π a ambos miembros : $$2\pi x^2 = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \frac{\pi d^2}{2} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\therefore \quad S_x = \frac{1}{2}\,(S_1 + S_2 + S_3)$$

39.- Calcular la relación de volúmenes de la semiesfera inscrita en el tronco de cilindro recto y este si m ∡ ABC = 74º



Resolución.-

Sean V_e y V_t, los volúmenes de la semiesfera y del tronco de cilindro recto.

Luego : $$V_e = \frac{2}{3}\pi R^3$$

y $$V_T = \pi R^2\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right)$$

De donde : $$\frac{V_e}{V_t} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_e}{V_t} = \frac{4R}{3(g_1 + g_2)} \quad \text{... (1)}$$

En el ⊿ BAO de 37° y 53° : $$g_1 = \frac{4}{3}R \quad \text{... (2)}$$

En el ⊿ ODC de 37° y 53° : $$g_1 = \frac{3}{4}R \quad \text{... (3)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $$\frac{V_e}{V_t} = \frac{4R}{3\left(\frac{4}{3}R + \frac{3}{4}R\right)} = \frac{4R}{3\left(\frac{25R}{12}\right)}$$

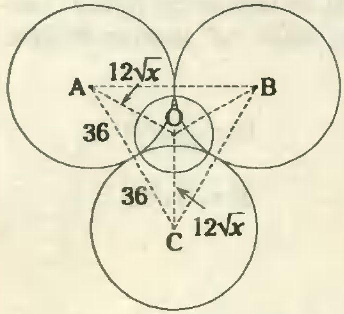
$$\Rightarrow \quad \frac{V_e}{V_t} = \frac{4R \times 12}{3(25R)}$$

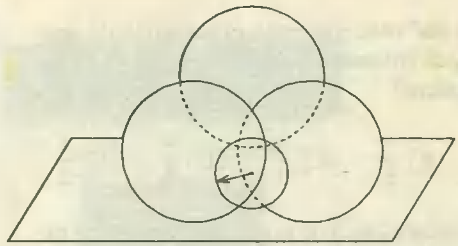
$$\therefore \quad \boxed{\frac{V_e}{V_t} = \frac{48}{75}}$$

40.- Se tiene tres esferas congruentes tangentes entre si y tangentes a un mismo plano. Calcular el radio de la esfera que es tangente a las tres esferas y tangente a dicho plano, sabiendo que el radio de las esferas es 36 m.

Resolución.-

Haciendo la vista horizontal :





A, B, C y O son los puntos de contacto con el plano.

Δ ABC equilátero de lado 72

Además : $OA = OB = OC = 2\sqrt{36\,x} = 12\sqrt{x}$

(Propiedad)

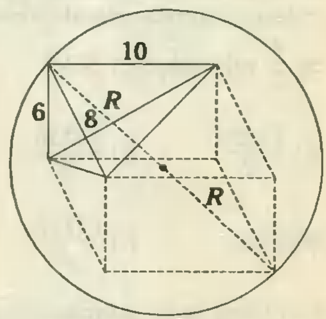
Δ AOC : $AC = AO.\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $72 = 12\sqrt{x}\,.\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $x = 12$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = 12\,m}$

40.- Hallar el radio de la esfera circunscrita a un tataedro A-BCD cuyo triedro "A" es trirectángulo si AB = 10, AC = 8 y AD = 6.

Resolución.-

Del gráfico podemos observar que con las aristas 6,8 y 10 se forma un rectoedro cuya diagonal será al diámetro de la esfera circunscrita



$\Rightarrow$ $2R = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{R = 5\sqrt{2}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿En qué relación están el volumen de una esfera y el volumen del cilindro circunscrito a dicha esfera?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

2.- Calcular el área de la sección producida en una esfera de 24 *cm* de diámetro por un plano que pasa a 8 *cm* del centro.

A) 251,2 B) 241,2 C) 231,2

D) 250 E) 128

3.- En un vaso cilíndrico de 36 *cm* de diámetro que contiene cierta cantidad de agua, se introducen dos bolas de igual diámetro y el nivel de agua sube 6 *cm*. Hallar el radio de estas bolas.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

4.- Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un cilindro circular recto de radio básico $\frac{9}{2}$ y de volumen 243π

A) $\frac{1125\pi}{2}$ B) $\frac{1025\pi}{2}$ C) 725π

D) 805π E) $\frac{1225\pi}{2}$

5.- El área de un casquete esférico es la quinta parte del área de la superficie esférica correspondiente, si la altura del casquete es 2. Calcular el volumen del segmento esférico correspondiente al casquete.

A) $85\pi/2$ B) $72\pi/7$ C) $52\pi/3$

D) 27π E) $67\pi/4$

6.- Calcular el volumen de una esfera tangente a las aristas $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ de un tetraedro regular ABCD, en los vértices A, B y C respectivamente, siendo "a" la arista de dicho tetraedro.

A) $\pi\sqrt{2}\,a^3/3$ D) $\pi\sqrt{3}\,a^3/4$

B) $\pi\sqrt{2}\,a^3/4$ E) $\pi\sqrt{3}\,a^3/5$

C) $\pi\sqrt{3}\,a^3/3$

7.- Una esfera es tangente a la base inferior de un prisma triangular regular y los otros vértices están en la superficie esférica. Calcular el área de la superficie esférica, si las aristas del prisma miden 6 *cm*.

A) $16\pi cm^2$ B) $36\pi cm^2$ C) $46\pi cm^2$

D) $64\pi cm^2$ E) $30\pi cm^2$

8.- El área total de un segmento esférico de dos bases es $95\pi m^2$ el radio de su base mayor excede al radio de la base menor en 1 sabiendo que la altura del segmento es $7m$ y el radio de la esfera es $5m$. Hallar el radio de la base mayor.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

9.- Se considera el círculo mayor de una esfera como base y se construye un cono recto equivalente a la mitad de la esfera. Calcular el área de la zona esférica de 2 bases que se determina, si el radio de la esfera mide $\sqrt{5}$.

A) 4π B) 5π C) 6π

D) 7π E) 8π

10.- Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto cuyo volumen es $54\pi m^3$. en dicha esfera se desea calcular el área del huso esférico que corresponde a una cuña esférica de πm^3 de volumen.

A) $4\pi/5$ B) π C) 3π

D) 2π E) $7\pi/3$

11.- Calcular el volumen de una esfera que es tangente a una de las caras de un exaedro regular cuya arista mide 4 en uno de sus vértices y la superficie esférica, contiene al vértice opuesto al ya mencionado.

A) 150π B) 288π C) 528π

D) 296π E) 300π

12.- Una superficie semiesférica de radio "R" esta inscrita a un cono equilátero de manera que su circunferencia máxima está en la base del cono. Calcular la diferencia de volúmenes de los segmentos esféricos que determinan el plano de la línea tangencial en la semiesfera.

A) 0 B) πR^3 C) $\pi R^3/3$

D) $\pi R^3/4$ E) $3\pi R^3/4$

13.- En una esfera de radio 10. ¿A qué distancia del centro, hay que trazar un plano secante para que las áreas de los 2 casquetes formados están en la relación de 2 a 3?

A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$

D) 1 E) 2

14.- Se tiene una esfera inscrita en un cono de revolución. Calcular el volumen del menor segmento esférico determinado al trazar un plano secante que contiene a la línea de tangencia de dichos sólidos, el vértice del cono dista 8 de la superficie esférica y la medida del ángulo del desarrollo de la superficie lateral del cono mide 45°.

A) $\dfrac{\pi}{11}$ B) $\dfrac{5}{11}\pi$ C) $\dfrac{17}{21}\pi$

D) $\dfrac{11}{7}\pi$ E) $\dfrac{19}{11}\pi$

15.- Calcular el ángulo de un sector circular, sabiendo que cuando gira alrededor de un eje de simetría, genera un volumen igual a la mitad del volumen de la esfera de igual radio que el sector.

A) 30 B) 45 C) 37

D) 60 E) 75

16.- Calcular el área de la superficie total del octante mostrado, sabiendo que la suma de las distancias de un punto de la región triangular ABC a las regiones triangulares AOB, AOC y BOC es "d".

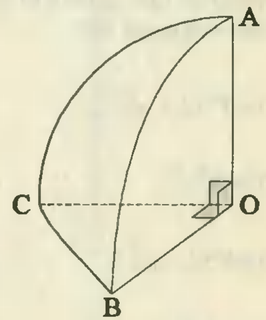
A) $2\pi d^2$

B) $5/4\pi d^2$

C) $3/4\pi d^2$

D) $5/6\pi d^2$

E) $8/3\pi d^2$



17.- Dado un segmento esférico de una sola base de $4cm$ de radio y tal que su altura es igual al eje de un tronco de cilindro recto, donde la base tiene un diámetro igual a su eje y el área de su superficie lateral es $16\pi cm^2$. Calcular el volumen de dicho segmento esférico.

A) $128/3\ \pi\ cm^3$ D) $16/5\ \pi\ cm^3$

B) $108/3\ \pi\ cm^3$ E) $64/3\ \pi\ cm^3$

C) $82/3\ \pi\ cm^3$

18.- Calcular la altura de una zona esférica de una base contenida en una esfera de radio R, de tal manera que la superficie de su base resulta los $\frac{7}{16}$ de la superficie de la esfera.

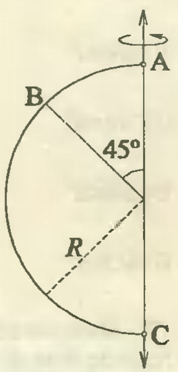
A) $\frac{R}{5}$ B) $\frac{R}{4}$ C) $\frac{R}{3}$ D) $\frac{R}{2}$ E) $\frac{2}{3}R$

19.- En una cuña esférica de centro "O" se inscribe un cono de revolución de modo que su base está inscrita en un semicírculo que determina a dicha cuña, siendo "O" el punto de tangencia. Calcular el área del huso esférico correspondiente a la cuña, si el área de la superficie lateral del cono es 18π.

A) 12π B) 36π C) 48π

D) 72π E) 24π

20.- Según el gráfico. Calcular el área de la superficie que genera el arco AB al girar en torno a la recta AC.



A) $\pi R^2(2+\sqrt{2})$

B) $2\pi R^2\sqrt{2}$

C) $\pi R^2(2-\sqrt{2})$

D) $\pi R^2\sqrt{2}$

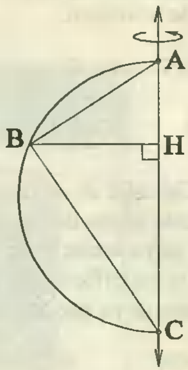
E) $2\pi R^2$

21.- El volumen de un cono recto es $168\ m^3$. Hallar el volumen de la esfera inscrita, si el área de la superficie total del cono es siete veces el área de la superficie esférica.

A) $12\ m^3$ B) $18\ m^3$ C) $24\ m^3$

D) $36\ m^3$ E) $48m^3$

22.- Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada. Al girar 360° alrededor del diámetro AC, si AC = a y $AH^2 + HC^2 = 6$.



A) $a\pi$

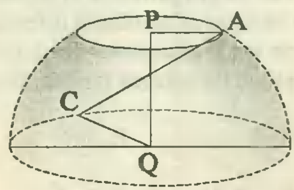
B) $2a\pi$

C) $3a\pi$

D) $4a\pi$

E) $5a\pi$

23.- En la figura P y Q son centros PA y QC son ortogonales y su mínima distancia es 6, si AC = 10. Hallar el volumen del segmento esférico de 2 bases mostrado.



A) 200π

B) 210π

C) 218π

D) 220π

E) 228π

24.- En un cono equilátero se tiene inscrito una esfera, se traza un plano tangente a la esfera y paralelo a la base del cono, determinando otro cono parcial. Calcular la razón de los volúmenes del cono parcial y de la esfera.

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{18}$

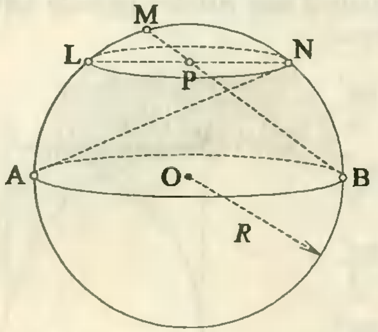
D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{27}$

25.- El vértice de un cono circunscrito a una esfera dista $4m$ de la esfera. Calcular el radio de la esfera, si la cuarta parte el área de ésta es igual al área de la superficie cónica limitada por la circunferencia de tangencia.

A) $2(1+\sqrt{5})$ B) $1+\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $\sqrt{5}$ E) $2(\sqrt{5}-1)$

26.- En la figura «O» es el centro de la superficie esférica $R = 9$, P es centro de la sección M paralela a la circunferencia máxima de centro O, $\overline{LM}$ // $\overline{AN}$ y el área superficie esférica es $8(3+\sqrt{5})\pi$. Hallar el área de la sección de centro P.



A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 6π

27.- Por un punto P exterior a una esfera de radio "R" se trazan 3 tangentes iguales a $R\sqrt{3}$ de modo que al unir los puntos de tangencia se forma un triángulo equilátero, cuyo lado se pide calcular si el volumen de la esfera es 36π.

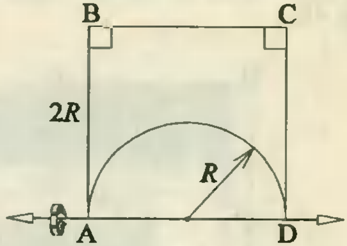
A) 4,5 B) 5 C) 5,5 D) 6 E) 6,5

28.- En una esfera de diámetro $\overline{AB}$ se trazan 2 planos secantes perpendiculares al diámetro AB de modo que sus distancias al extremo A son 3 y 5, si el área de la sección determinada por el plano secante más cercano a A es 36π. Hallar el área de la porción de superficie esférica comprendida por los planos secantes.

A) 28π B) 29π C) 30π

D) 36π E) 40π

29.- Hallar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada.



A) $\frac{20}{3}\pi R^3$ B) $\frac{10}{3}\pi R^3$ C) $3\pi R^3$

D) $4\pi R^3$ E) $5\pi R^3$

30.- En una esfera de radio 5. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura mide 2.

A) $\frac{50}{3}\pi$ B) $\frac{51}{3}\pi$ C) $\frac{52}{3}\pi$

D) $\frac{53}{3}\pi$ E) $\frac{55}{3}\pi$

31.- Desde un punto P, exterior a una esfera se trazan las tangentes $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ tal que P - ABC es un tetraedro regular de arista 6 *cm*. Hallar el radio de la esfera.

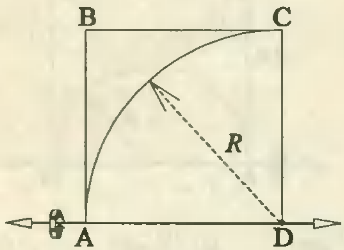
A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$

D) 2 E) $\sqrt{6}$

32.- Sobre un mismo plano descansan un cilindro, un cono y una esfera, las alturas y radios del cilindro y del cono son iguales al radio de la esfera. Si los 3 cuerpos se cortan por un plano paralelo al primero. Hallar el área de la sección producida en la esfera si la suma de las áreas de las secciones producidas en el cono y el cilindro es *S*.

A) 25 B) 35 C) $\frac{35}{2}$ D) 5 E) $\frac{5}{2}$

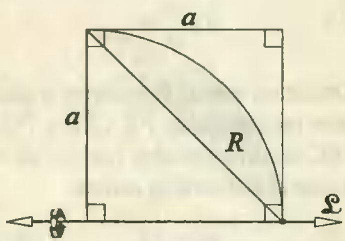
33.- En la figura : ABCD es un cuadrado de lado «a». Hallar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada al girar alrededor de $\overline{AD}$.



A) πa^3 B) $\dfrac{\pi a^3}{2}$ C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

D) $\dfrac{\pi a^3}{4}$ E) $\dfrac{\pi a^3}{5}$

34.- Hallar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada al girar 360° en torno a la recta $\mathcal{L}$



A) $\dfrac{\pi a^3}{5}$ B) $\dfrac{\pi a^3}{4}$ C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

D) $\dfrac{\pi a^3}{2}$ E) $\dfrac{\pi a^3}{6}$

35.- Se da una semiesfera de radio «R» , en su base se inscribe un cuadrado y por los cuatro lados del cuadrado se trazan planos perpendiculares a la base de la semiesfera. Calcular el volumen de la parte de la semiesfera limitada por los cuatro planos:

A) $\dfrac{\pi a^3}{3}(3\sqrt{2}-2)$ D) $\dfrac{\pi R^3}{6}(5\sqrt{2}-2)$

B) $\dfrac{\pi R^3}{6}(5\sqrt{2}-4)$ E) $\dfrac{\pi R^3}{3}(5\sqrt{2}-4)$

C) $\dfrac{\pi R^3}{2}(4\sqrt{2}-3)$

36.- Calcular el volumen del sólido engendrado por la región sombreada cuando gira en torno al lado $\overline{AD}$ del cuadrado ABCD, si AB = a.

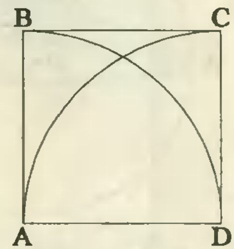
A) $\dfrac{\pi a^3}{2}$

B) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

C) $\dfrac{\pi a^4}{4}$

D) $\dfrac{\pi a^3}{6}$

E) $\dfrac{\pi a^3}{8}$



37.- El área de la esfera inscrita en un cono es igual al área de la base del cono. Calcular el área del círculo determinado por la línea de tangencia de la esfera sobre la superficie lateral del cono, si el radio de la base del cono mide 5.

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 16π

38.- Hallar el volumen de una esfera metálica hueca de radio interior 1 y de densidad 8/7, si se sabe que se utiliza como boya y esta sumergida en agua.

A) $\dfrac{28\pi}{5}$ B) $\dfrac{28\pi}{3}$ C) 14π

D) 7π E) 5π

CAP. 30

superficies y sólidos de revolución

30.1 TEOREMAS DE ARQUÍMEDES

TEOREMA 1.

El área de la superficie engendrada por una línea poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro sin atravesarla, es igual al producto de la longitud de la circunferencia cuyo radio es el apotema de la línea poligonal y la proyección de esta misma línea sobre el eje.

Sea ABCD la línea poligonal regular, $\overline{OH}$ su apotema y $\mathcal{L}$ el eje coplanar que pasa por su centro O (*Fig*. 30.1a) entonces el área "S" de la superficie engendrada (*Fig*. 30.1b), será :

$$S = 2\pi\, OH \,.\, EF \qquad ...(30.1)$$

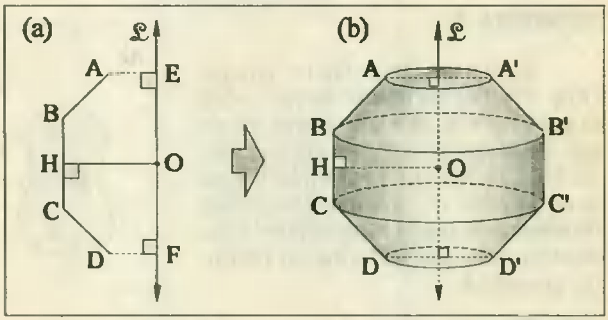


Fig. 30.1

TEOREMA 2.

El volumen del sólido engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su centro sin intersectarlo es igual a un tercio del producto del área de la superficie engendrada por la poligonal regular y la longitud del apotema.

Siendo el sector poligonal regular O - ABCD de centro O y apotema $\overline{OH}$, (*Fig*. 30.2a), además $\mathcal{L}$ el eje de rotación y $\overline{EF}$ la proyección de la línea sobre el eje luego el volumen V del sólido engendrado (*Fig*. 30.2b), será :

$$V = \frac{2}{3}\pi\, OH^2 \,.\, EF \qquad ... (30.2)$$

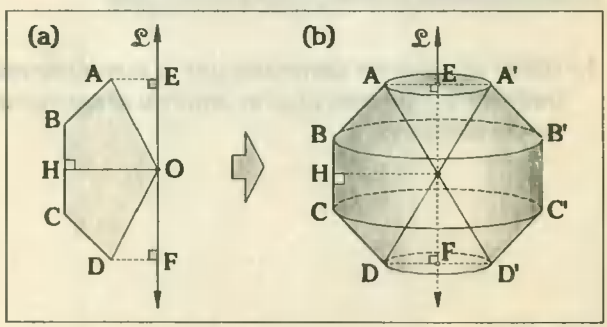


Fig. 30.2

30.2 TEOREMA DE PAPPUS - GOULDING

TEOREMA 1.

Si una línea plana (*Fig.* 30.3a) de longitud L y de centro de gravedad "O" gira alrededor de un eje situado en su plano, se engendrará una superficie (*Fig.* 30.3b) cuya área es igual al producto de la longitud o perímetro de la figura por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.

$$S = L \cdot 2\pi\, OH \qquad \ldots (30.3)$$

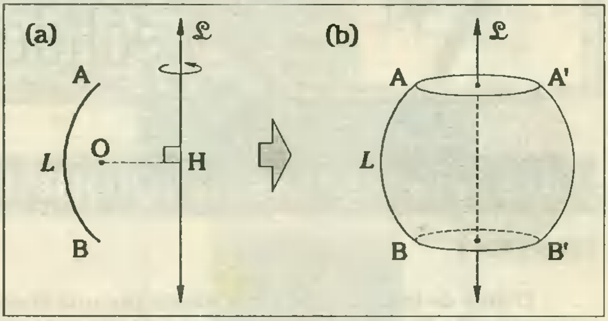


Fig. 30.3

TEOREMA 2.

Si una superficie plana (*Fig.* 30.4a) de centro de gravedad O y de área S, gira alrededor de un eje coplanar L, engendrará un sólido (*Fig.* 30.4b) cuyo volumen V será igual al área de la superficie plana multiplicada por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.

$$V = S.2\pi \cdot OH \qquad \ldots (30.4)$$

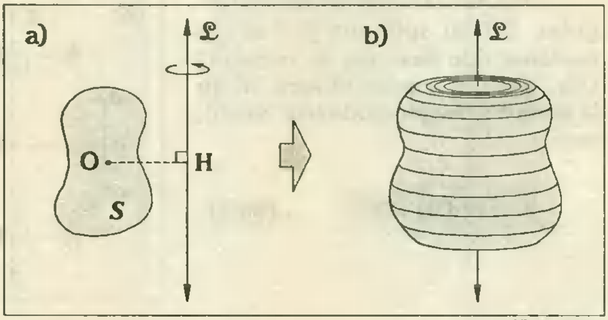
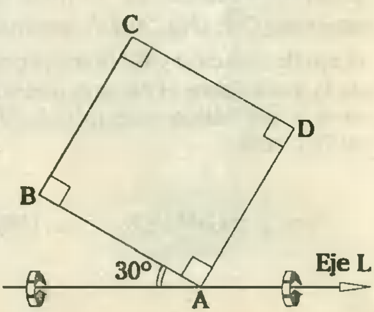


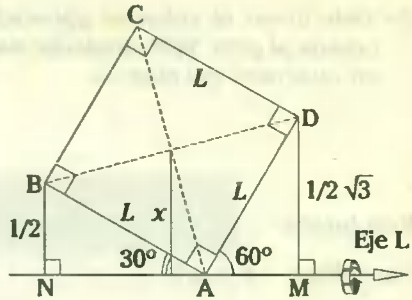
Fig. 30.4

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1.- Hallar el volumen generado por el cuadrado mostrado de $\sqrt[3]{2}$ de lado al girar entorno al eje «L» una vuelta completa.



Resolución.-



Dato del problema : $L = \sqrt[3]{2}$

$\Rightarrow \quad L^3 = 2$

☐ BDMN (Aplicación de Base Media) : $x = \dfrac{\dfrac{L}{2} + \dfrac{L\sqrt{3}}{2}}{2}$

$x = \dfrac{L}{4}(1 + \sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad A = L^2$

Aplicando el Teorema de Pappus : $V_G = 2\pi \cdot A$

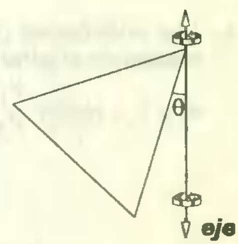
Reemplazando los datos : $V_G = 2\pi \dfrac{L}{4}(L + \sqrt{3})\, L^2$

Por consiguiente : $V_G = \dfrac{\pi}{2} L^3 (1 + \sqrt{3})$

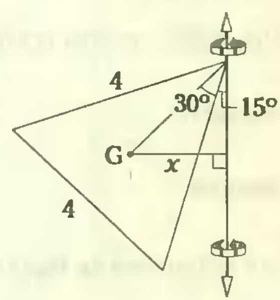
En consecuencia : $V_G = \dfrac{\pi \cdot (2)}{2} (1 + \sqrt{3})$

$\therefore \quad \mathbf{V_G = \pi(1 + \sqrt{3})}$

2.- Calcular el volumen generado al girar el triángulo equilátero sombreado cuyo lado mide 4m , 360º alrededor del eje mostrado si θ = 15º



Resolución.-



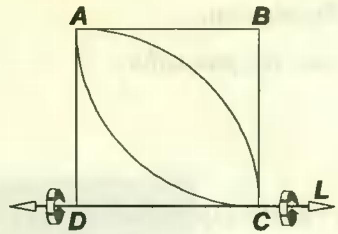
Hallando $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

Aplicando el Teorema de Pappus : $V_G = 2\pi \cdot A$

Reemplazando los datos $V_G = 2\pi \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)(4\sqrt{3})$

$\therefore \quad \mathbf{V_G = 16\pi\sqrt{2}}$

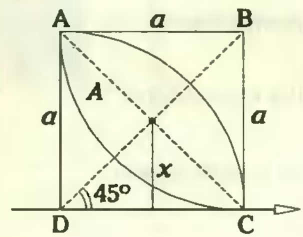
3.- Determinar el volumen generado por la región sombreada al girar 360º alrededor de la recta «L» ABCD es un cuadrado del lado «a»



Resolución.-

Del gráfico $x = a/2$

El área sería : $2\,(A \triangleleft ABC - A\,\Delta\,ABC) = A = 2\left[\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right]$



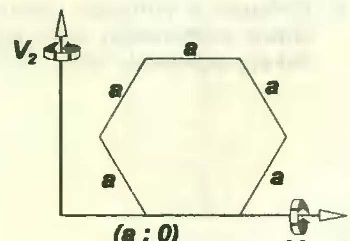
Simplificando : $A = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Ahora, aplicando el Teorema de Pappus : $V_G = 2\pi \cdot A$

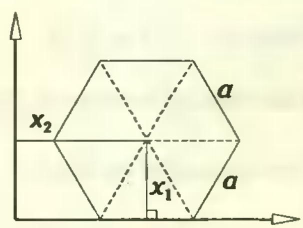
Reemplazando : $V_G = 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left[a\frac{\pi}{2} - 1\right]$

$\therefore \quad \boxed{V_G = a^3\,\frac{\pi}{2}\,(\pi - 2)}$

4.- Los volúmenes generados por el hexágono regular mostrado al girar en torno a los ejes «x» e «y» son V_1 y V_2. Hallar $\frac{V_1}{V_2}$



Resolución.-



Del Gráfico, el área del hexágono es : $A = \frac{3}{2}\,a^2\sqrt{3}$

También : $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

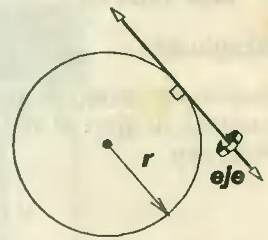
Además : $x_2 = \frac{3a}{2}$

Por el Teorema de Pappus : $V_1 = 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) \Rightarrow V_1 = \frac{9}{2}a^3\pi$

$V_2 = 2\pi\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) \Rightarrow V_2 = \frac{9a^3}{2}\pi\sqrt{3}$

Nos piden : $\dfrac{V_1}{V_2} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{9a^3}{2}\pi}{\dfrac{9a^3}{2}\pi\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ $\boxed{\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

5.- Calcular el volumen generado por la circunferencia de radio igual a 4m, si gira 360º alrededor del eje mostrado.

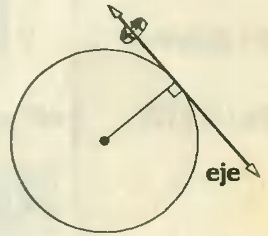


Resolución.-

Aplicando el Teorema de Pappus : $V_G = 2\pi \cdot A$

$A = \pi\,(4)^2$

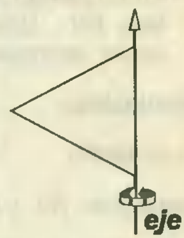
$A = 16\pi$



Reemplazando : $V_G = 2\pi\,(4)\,(16\pi)$

$\therefore$ $\boxed{V_G = 128\,\pi^2}$

6.- Hallar el volumen generado por el triángulo equilátero de lado igual a 6m que gira 360º alrededor del eje mostrado.



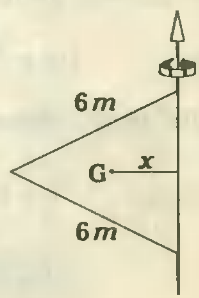
Resolución.-

Del gráfico : $x = \sqrt{3}$

$A = 9\sqrt{3}$

Aplicando Pappus $V_G = 2\pi \cdot A$

Reemplazando : $V_G = 2\pi\,(\sqrt{3})\,(9\sqrt{3})$



$\therefore$ $\boxed{V_G = 54\pi}$

MISCELÁNEA

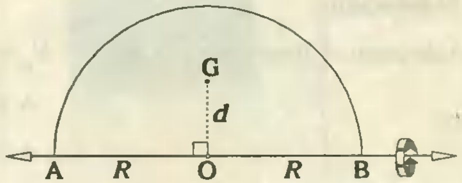
1.- *Determinar la distancia del centro de gravedad de un semicírculo a su diámetro si éste mide 2R.*

Resolución.-

Sea «G» el centro de gravedad del semicírculo, luego GO = d es la distancia buscada (O es centro). Al girar el semicírculo alrededor del diámetro $\overline{AB}$ se determina una esfera de volumen.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \dots (1)$$

Por Pappus : $$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi d \qquad \dots (2)$$



De (1) y (2) : $$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 \cdot \pi d$$

$$\therefore \quad \boxed{d = \frac{4R}{3\pi}}$$

2.- *En un rombo ABCD : m ∡ B = 60º, por D se traza una recta «$\mathcal{L}$» que forma 30º con el lado CD . Hallar el volumen del sólido engendrado por el rombo cuando gira una vuelta completa alrededor de «$\mathcal{L}$», si la distancia de C a $\mathcal{L}$ es «m»*

Resolución.-

En el rombo : $m\measuredangle D = m\ B = 60^\circ$

Resultando $\overline{AD} \perp \mathcal{L}$ y como $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \overline{BC} \perp \mathcal{L}$

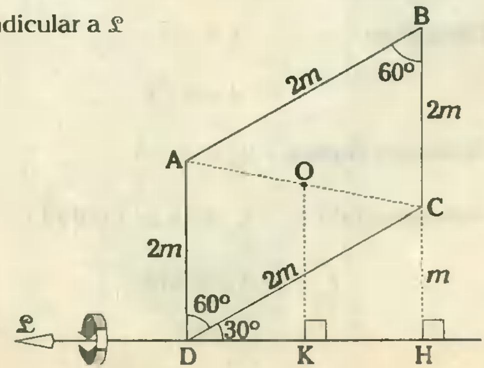
En el ⊿ DHC de 30° y 60° : CD = 2m = AD = AB = BC

Sea O el centro del rombo ABCD y $\overline{OK}$ la perpendicular a $\mathcal{L}$

Luego : $$OK = \frac{2m+m}{2} = \frac{3m}{2}$$

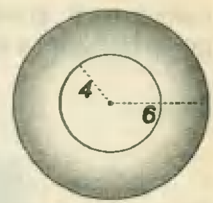
Siendo «V» el volumen pedido

Entonces : $$V = 2\,\frac{(2m)^2\sqrt{3}}{4} \times 2\pi\left(\frac{3m}{2}\right)$$

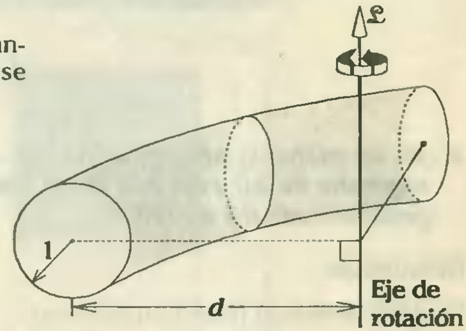


$$\therefore \quad \boxed{V = 6\pi\sqrt{3}\,m^3}$$

3.- La figura representa la proyección horizontal de una fluorescente circular (toro). Calcular el área de su superficie.



<u>Resolución</u>.-



La fluorescente circular se obtiene al girar la circunferencia de radio alrededor de la recta ℒ obteniendose una superficie de área $A = (2\pi r)\,(2\pi d)$

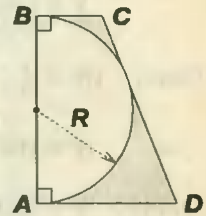
Donde : $r = \dfrac{6-4}{2} = 1$

Ahora : $d = 1 + 4 = 5$

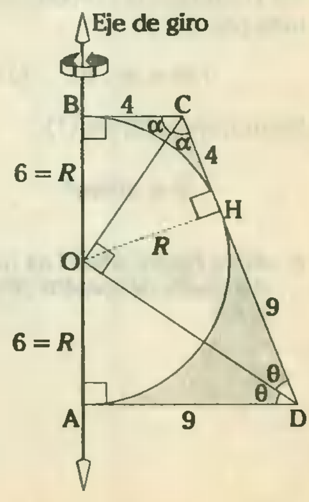
Luego : $A = 4\pi^2\,(1)\,(5)$

$\therefore$ $\mathbf{A = 20\pi^2}$

4.- Calcular la distancia del centro de gravedad de la región sombreada a $\overline{AB}$, si BC = 4 y AD = 9



<u>Resolución</u>.-



Al unir C y D con «O» se obtienen las bisectrices $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ y el ángulo recto COD.

En el △ COD : $R^2 = 4\,.\,9 \quad \Rightarrow \quad R = 6$

Sea V el volumen del sólido generado por la región sombreada y A el área de dicha región.

Además «d» es la distancia buscada

Luego : $V = A\,.\,2\pi d$ ... (1)

Calculo de A : $A = Area\,(ABCD) - A_{\frown}$

Reemplazando : $A = \left(\dfrac{4+9}{2}\right)12 - \dfrac{\pi 6^2}{2}$

$\Rightarrow \quad A = 78 - 18\pi$ ... (2)

Calculo de V : El volumen V es la diferencia de los volúmenes del tronco de cono (generado por el trapecio) y la esfera (generada por el semicírculo)

Luego : $$V = \frac{\pi 12}{3}(4^2 + 9^2 + 4 \cdot 9) - \frac{4}{3}\pi(6)^3$$

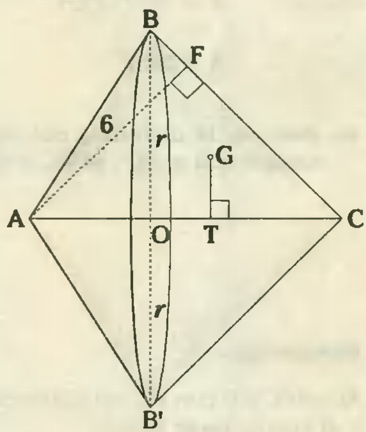
$$\Rightarrow \quad V = 244\pi \; ... \; (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $244\pi = (78 - 18\pi)\, 2\pi d$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d = \frac{61}{39 - 9\pi}}$$

5.- En un triángulo ABC, la altura $\overline{AF}$ mide 6m. El triángulo gira una vuelta completa alrededor de $\overline{AC}$; calcular el volumen del sólido generado si el área de la superficie generada por $\overline{BC}$ es 150m².

Resolución.-



El sólido generado tendrá un volumen

$$V = \left(\frac{BC.6}{2}\right) 2\pi\,(GT) \text{ (G : Baricentro del } \Delta \text{ ABC)}$$

Como : $GT = \frac{r}{3}$ (Propiedad)

$$\Rightarrow \quad V = (BC)\, 6 \,.\, \pi \,.\, \frac{r}{3}$$

Donde : $V = 2\pi\,(BC) r \; ... \; (1)$

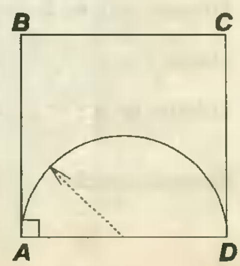
Por condición del problema el área de la superficie generada por $\overline{BC}$ es :

$$150 = \pi r \,.\, BC \; ... \; (2)$$

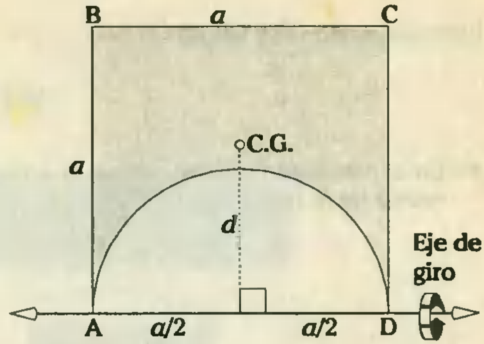
Sustituyendo (2) en (1) : $V = 2(150)$

$$\therefore \quad \mathbf{V = 300m^3}$$

6.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado «a». Hallar la distancia del centro de gravedad de la figura sombreada a AD.



Resolución.-



Sea «G» el centro de gravedad de la figura sombreada y «d» la distancia pedida, luego por Pappus - Goulding.

$$V = A \cdot 2\pi d \quad ... (1)$$

Donde : V : volumen generado

A : Area de la figura

Calculamos el área A restando al área del cuadrado el área del semicírculo.

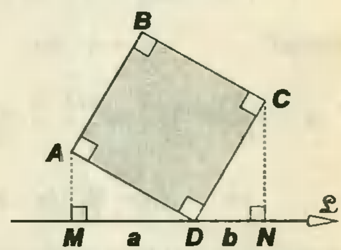
Es decir : $$A = a^2 - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{a^2}{8}(8 - \pi) \quad ... (2)$$

El volumen «V» lo hallamos restando el volumen del cilindro generado por el cuadrado, el volumen de la esfera generada por el semicírculo.

Es decir : $$V = \pi a^2 \cdot a - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \pi a^3 - \frac{\pi a^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{5}{6}\pi a^3 \quad ... (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $$\frac{5}{6}\pi a^3 = \frac{a^2}{8}(8 - \pi) \cdot 2\pi d \quad \therefore \quad \boxed{d = \frac{10a}{3(8-\pi)}}$$

7.- Calcular el volumen del sólido engendrado por el cuadrado ABCD que gira 360º alrededor de la recta $\mathcal{L}$.



Resolución.-

Empleando la formula de Pappus para el volumen del sólido engendrado se tiene :

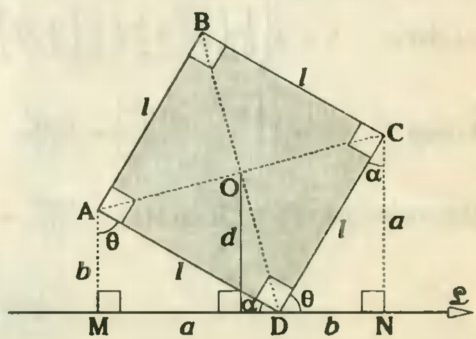
$$V = l^2 \cdot 2\pi d \quad ... (1)$$

Del gráfico : ⊿ AMD ≅ ⊿ DNC (ALA)

$$\Rightarrow \quad AM = b \quad y \quad CN = a$$

En el trapecio MACN : $$d = \frac{a+b}{2} \quad ... (2)$$

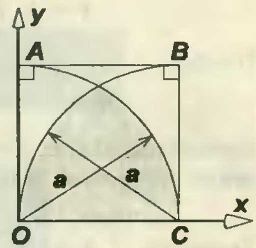
En el ⊿ AMD : $$l^2 = a^2 + b^2 \quad ... (3)$$



Reemplazando (3) y (2) en (1) : $\quad V = 2(a^2 + b^2)\,\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\therefore \qquad \mathbf{V = (a^3 + ab(a + b) + b^3)\,\pi}$$

8.- En el plano cartesiano . Hallar la ordenada del centro de gravedad de la región sombreada.



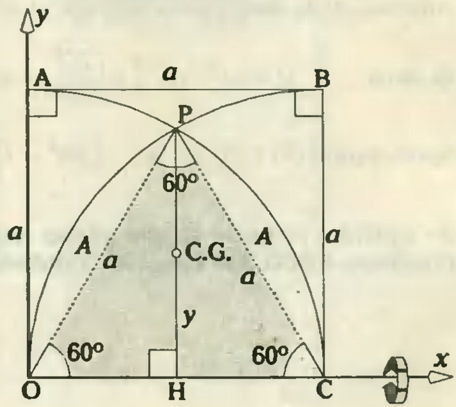
__Resolución.-__

Sean :

V = volumen del sólido generado por la región sombreada al girar en torno a $\overrightarrow{x}$

A : El Área de la figura

y : La ordenada del centro de gravedad (C.G)



Luego : $\qquad V = A \cdot 2\pi y \qquad \text{... (1)}$

$$A = \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) \qquad \text{... (2)}$$

V es la suma de los volumen iguales de los segmentos circulares generados por los triángulos mixtilíneos OHP y PHC

Es decir : $\quad V = 2\left[\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2\right]$

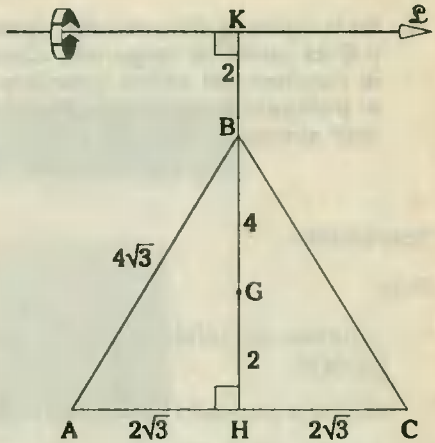
Luego : $\quad V = 2\left(\frac{\pi a^3}{48} + \frac{3\pi a^3}{16}\right) = \frac{5\pi a^3}{12} \qquad \text{... (3)}$

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $\quad \frac{5\pi a^3}{12} = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})\,2\pi y$

$$\therefore \qquad \mathbf{y = \frac{5a}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}}$$

9.- Calcular el volumen del sólido generado por un triángulo equilátero ABC, al girar alrededor de una recta exterior al triángulo perpendicular a la altura $\overline{BH}$ y que esta a una distancia del vértice B igual a 2m ; si AB = $4\sqrt{3}$

Resolución.-



Sea V el volumen pedido

Luego : $V = A(\Delta ABC) \times 2\pi\,(GK)$ ... (1)

Ahora : $A(\Delta ABC) = \dfrac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$

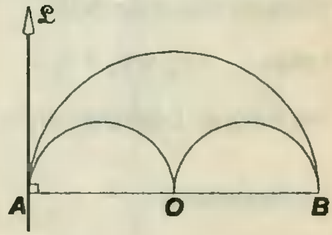
Y $GK = \dfrac{2}{3}BH + BK = \dfrac{2}{3}\cdot 6 + 2 = 6 \Rightarrow GK = 6$

Sustituyendo estos valores en (1)

$$V = 12\sqrt{3} \times 2\pi\cdot 6$$

$\therefore$ $\mathbf{V = 144\sqrt{3}\,\pi u^3}$

10.- A partir del gráfico mostrado. Hallar el volumen generado por la parte sombreada al girar 360º alrededor de la recta «l» (AO = OB = R)



Resolución.-

Sean : «V» volumen pedido

V_1 : volumen generado por el semicírculo de centro P

V_2 : volumen generado por el semicírculo de centro Q

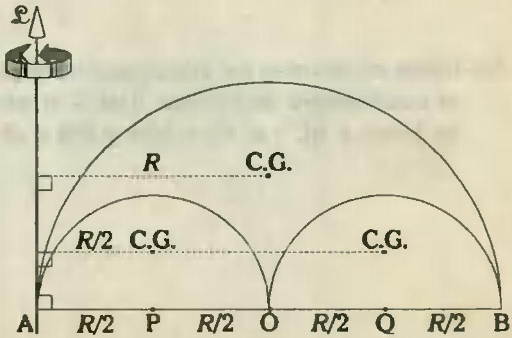
V_3 : volumen generado por el semicírculo de centro O

Luego : $V = V_3 - V_1 - V_2$ ... (1)

Ahora : $V_1 = \dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{2} \times 2\pi\left(\dfrac{R}{2}\right) = \dfrac{\pi^2R^3}{8}$

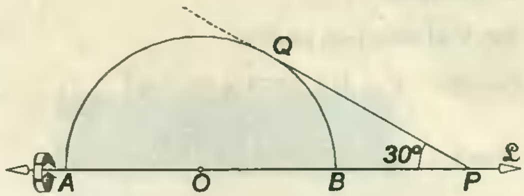
También : $V_2 = \dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{2} \times 2\pi\left(\dfrac{R}{2}+R\right) = \dfrac{3\pi^2R^3}{8}$

Luego : $V_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} \times 2\pi\,(R) = \pi^2R^3$



Sustituyendo en (1) : $$V = \pi^2 R^3 - \frac{\pi^2 R^3}{8} - \frac{3\pi^2 R^3}{8} \quad \therefore \quad \mathbf{V = \frac{\pi^2 R^3}{2}}$$

11.- En la figura el diámetro $\overline{AB}$ mide 6m y Q es punto de tangencia. Calcular el volumen del sólido generado por el triángulo mixtilíneo AQP que gira 360º alrededor de la recta $\mathcal{L}$



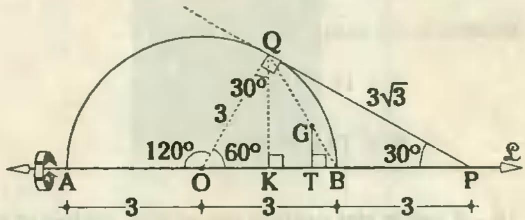
Resolución.-

Sean :

V_1 : volumen del sólido generado por el ⊿ OQP

V_2 : volumen generado por el sector AOQ

V_x : volumen del sólido generado por el triángulo mixtilíneo AQP



Luego : $V_x = V_1 + V_2$ ... (1)

Por Pappus - Goulding : V_1 = A (⊿ OQP) . 2π(GT) (G : Baricentro)

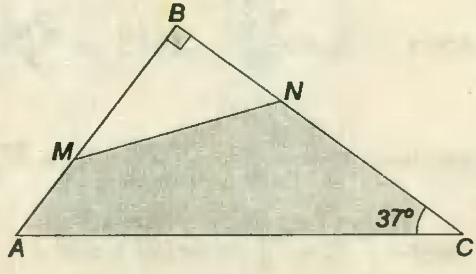
Reemplazando : $$V_1 = \frac{3.3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{27}{2}\pi \ ... (2)$$

Por fórmula del sector esférico $$V_2 = \frac{2}{3}\pi\,(3)^2 \cdot \left(3+\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 27\pi \ ... (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) :

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{36}{5}\right)\left(\frac{48}{5}\right) . 2\pi\,(8) = \frac{13824}{25}\pi \quad \therefore \quad \mathbf{V_x = 647\ m^3}$$

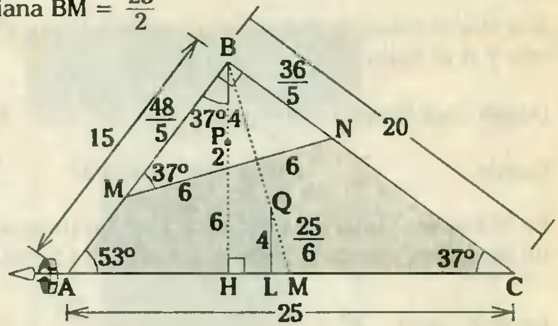
12.- Hallar el volumen del sólido generado por el cuadrilátero incriptible AMNC al girar en torno a $\overline{AC}$; si AC = 25m y MN = 12m



Resolución.-

Sea «V_x» el volumen pedido «V_1» el volumen del sólido generado por el ⊾ ABC y «V_2» el volumen del sólido generado por el ⊾ MBN, luego : $V_x = V_1 - V_2$ ... (1)

Sea «Q» el baricentro del ⊾ ABC de mediana BM = $\frac{25}{2}$



$$\Rightarrow \quad QM = \frac{1}{3} \times BM = \frac{25}{6}$$

En el ⊾ QLM de 16° y 74° :

$$QL = \frac{24}{6} = 4$$

Sea P el baricentro del ⊾ MBN

Luego : $PN = \frac{1}{3} \times BN = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

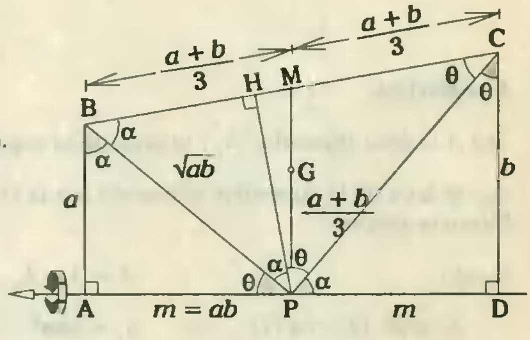
$$V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{36}{5}\right)\left(\frac{48}{5}\right) . 2\pi\,(8) = \frac{13824}{25}\pi \qquad \therefore \qquad V_x = 647m^3$$

13.- En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y D la base menor $\overline{AB}$ mide «a» y la mayor «b» las bisectrices de los ángulos B y C se cortan en un punto P de $\overline{AD}$. Calcular el volumen del sólido engendrado por el triángulo BPC que gira 360º alrededor de $\overline{AD}$.

Resolución.-

En el trapecio ABCD : $2\alpha + 2\theta = 180 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \theta = 90$

En el ⊾ BPC, trazamos la mediana $\overline{PM}$.



Luego $\overline{PM} \perp \overline{AD}$ y $PM = \frac{a+b}{2}$

Sobre esta mediana ubicamos el baricentro G.

Luego : $GP = \frac{2}{3}\ PM = \frac{a+b}{3}$

Ahora el ⊾ BAP ~ ⊾ PDC : $\frac{m}{b} = \frac{a}{m}$

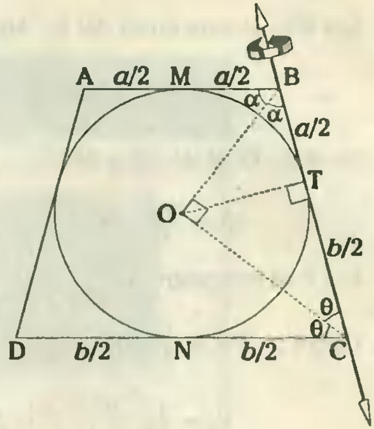
$$\Rightarrow \qquad m = \sqrt{ab}$$

Por el Teorema de la Bisectriz : $PA = PH = \sqrt{ab}$

Sea V el volumen pedido, luego :

$$V = A\,(⊾\ BPC) \times 2\pi\,(GP) = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}\ .\ 2\pi\left(\frac{a+b}{3}\right) \qquad \therefore \qquad V = \frac{\sqrt{ab}\,(a+b)^2\pi}{3}$$

14.- *Un trapecio isósceles ABCD de bases AB = a y CD = b , está circunscrito a un círculo. Hallar el volumen del sólido generado por dicho círculo al girar 360º alrededor de $\overline{BC}$*



Resolución.-

Sea «V» el volumen del sólido engendrado por el círculo «O» y R el radio de su circunferencia .

Luego ; por Pappus - Goulding : $V = \pi R^2 \times 2\pi \, . \, R$

Donde : $V = 2\pi^2 R^3$ ... (1)

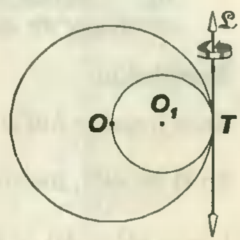
En el trapecio isósceles ABCD M y N son puntos medios de las bases, entonces : BM = BT = $a/2$ y CN = CT = $b/2$

En el ⊾ BOC : $R^2 = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) :

$$V = 2\pi^2 \left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^3 = 2\pi^2 \, \frac{(ab)^{3/2}}{8} \qquad \therefore \qquad \boxed{V = \frac{(ab)^{3/2}\pi}{4}}$$

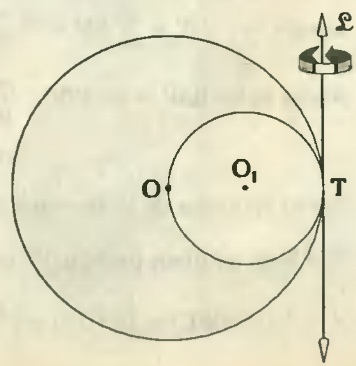
15.- *Calcular el área de la superficie generada por la figura sombreada al girar 360º alrededor de la tangente $\mathfrak{L}$, si el radio del círculo mayor mide 2 (O y O_1 son centros)*



Resolución.

Sea A el área buscada, A_1 : el área de la superficie generada por la circunferencia mayor

A_2 : el área de la superficie generada por la circunferencia menor



Luego : $A = A_1 - A_2$ ... (1)

$A_1 = 2\pi\,(2)\,.\,2\pi\,(2) \quad \Rightarrow \quad A_1 = 16\pi^2$ ... (2)

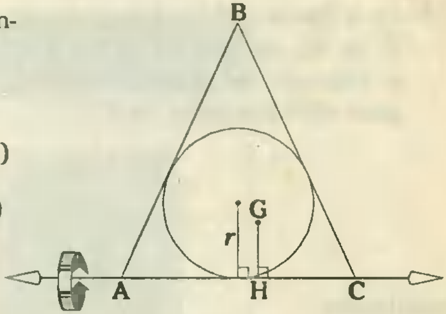
$A_2 = 2\pi\,(1)\,.\,2\pi(1) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 4\pi^2$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

$A = 16\pi^2 - 4\pi^2 \qquad \therefore \qquad \boxed{A = 12\pi^2}$

16.- En un triángulo ABC, el inradio mide «r» . Hallar la relación entre el área y el volumen del sólido engendrado por dicho triángulo al girar 360º alrededor de uno de sus lados.

Resolución.-



Sean «A» y «V» el área y el volumen del sólido engendrado por el Δ ABC al girar en torno a $\overline{AC}$

Además «G» el baricentro de dicho triángulo

Luego por Pappus-Goulding : $A = 2p \times 2\ (GH)$ ... (1)

$$V = A_1 \times 2\pi\ (GH) \ ...\ (2)$$

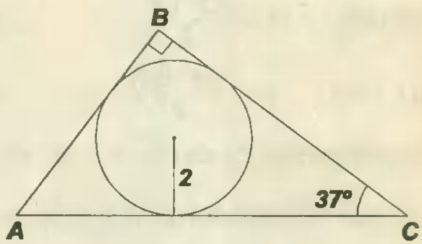
Donde : $2p$: Perímetro del Δ ABC

A_1 : *Area* del Δ ABC

Dividiendo (1) : (2) tenemos : $\dfrac{A}{V} = \dfrac{2p \cdot 2\pi(GH)}{A_1 \cdot 2\pi(GH)} = \dfrac{2p}{A_1}$

Puesto que : $A_1 = p\,.\,r \Rightarrow \dfrac{p}{A_1} = \dfrac{1}{r}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\dfrac{A}{V} = \dfrac{2}{r}}$

17.- Del gráfico mostrado se pide calcular el área de la superficie generada por la región sombreada al girar 360º alrededor de $\overline{AC}$.



Resolución.

En el ⊿ ABC de 37° y 53°

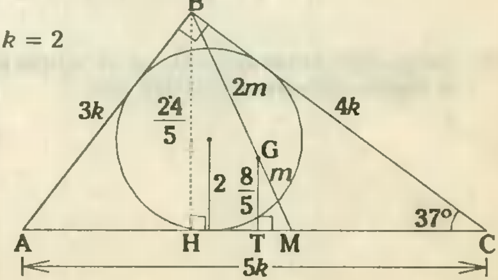
Hacemos : AB = $3k$ $\Rightarrow$ BC = $4k$ y AC = $5k$

Luego por Poncelet : $3k + 4k = 5k + 2(2) \Rightarrow k = 2$

De donde : AB = 6 , BC = 8 y AC = 10

Además : $BH = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{6.8}{10} = \dfrac{24}{5}$

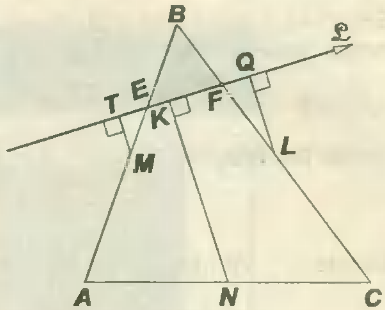
⊿ BHM ~ ⊿ GTM : $\dfrac{GT}{\frac{24}{5}} = \dfrac{m}{3m} \Rightarrow GT = \dfrac{8}{5}$



Sea A el área pedida, luego :

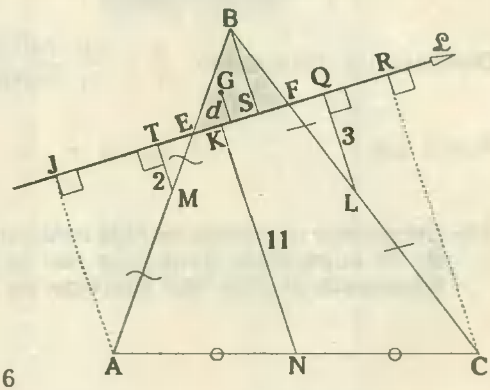
$$A = (6+8+10)\,2\pi\left(\frac{8}{5}\right) - 2\pi\,(2)\,.\,2\pi\,(2) \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{A = \frac{16\pi}{5}(24-5\pi)}$$

***18.-** En la figura : M, N y L son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, MT = 2, NK = 11 y LQ = 3 y EF = 8. Hallar el volumen del sólido generado por el Δ EBF al girar 360º alrededor de ℒ*



<u>**Resolución**</u>.-

Trazamos $\overline{AJ}$, $\overline{BS}$ y $\overline{CR}$, perpendiculares a $\overrightarrow{ℒ}$



Luego : $\quad 2 = \dfrac{AJ-BS}{2} \qquad \text{... (1)}$

$\quad 3 = \dfrac{CR-BS}{2} \qquad \text{... (2)}$

Además : $\quad 11 = \dfrac{AJ+CR}{2} \qquad \text{... (3)}$

(1) + (2) : $\quad 5 = \dfrac{(AJ+CR)}{2} - BS \qquad \text{... (4)}$

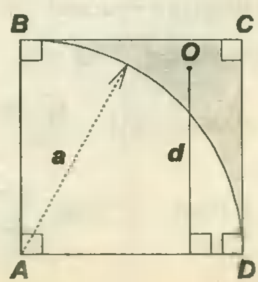
Reemplazando (3) en (4) : $5 = 11 - BS \Rightarrow BS = 6$

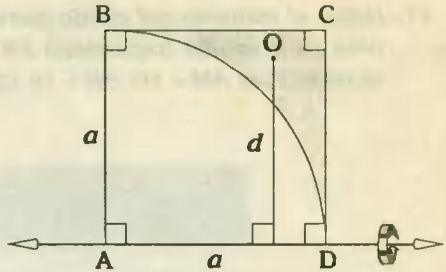
Sea «G» el baricentro del Δ EBF, luego la distancia «d» a ℒ sera : $d = \dfrac{1}{3}\,BS = \dfrac{1}{3}\,(6) = 2$

Siendo «V» el volumen pedido :

$$V = \left(\frac{EF\cdot BS}{2}\right)2\pi d = \left(\frac{8\cdot 6}{2}\right)\,2\pi\cdot(2) \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{V = 96\pi\ u^3}$$

***19.-** Del gráfico mostrado «O» es el centro de gravedad de la región sombreada. Hallar «d»*





Resolución .-

Sean V : el volumen generado por la figura

y A : el área de la figura

Luego : $V = A \cdot 2\pi d$ ...(1)

$$A = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(4-\pi) \quad \text{... (2)}$$

$V = V_1 - V_2$

V_1 : Volumen del cilindro generado por ABCD.

V_2 : Volumen de la semiesfera generada por el cuadrante BAD

Luego : $V = \pi a^2 \cdot a - \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 \Rightarrow V = \frac{\pi a^3}{3}$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) : $\frac{\pi a^3}{3} = \frac{a^2}{4}(4-\pi)\, 2\pi d$

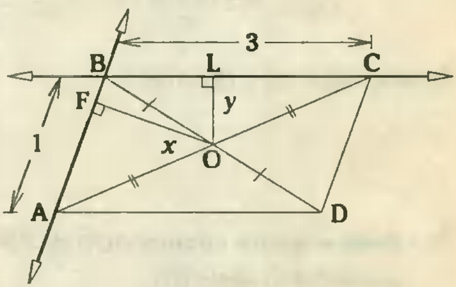
Resolviendo : $\mathbf{d = \frac{2a}{3(4-\pi)}}$

20.- En un romboide ABCD : AB = 1 y BC = 3 . Si el volumen del sólido engendrado por la región paralelográmica ABCD al girar una vuelta completa alrededor de $\overline{AB}$ es $12m^3$. Calcular el volumen del sólido engendrado por dicha región al girar 360º alrededor de $\overline{BC}$.

Resolución.-

Sea «O» el punto de intersección de diagonales del romboide ABCD, además : $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OL} \perp \overline{BC}$ (OF = x y OL = y)

Y si A es el área de la región ABCD : $A = 2x = 6y$ de donde : $x = 3y$



Por el Teorema de Pappus - Goulding, el volumen generada alrededor de $\overline{AB}$ es :

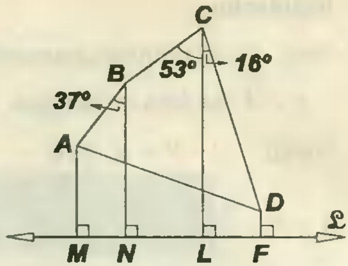
$$V_{\overline{AB}} = 2x\,(2\pi x) = 12 \Rightarrow \pi x^2 = \pi(3y)^2 = 3$$

De donde : $\pi y^2 = \frac{1}{3}$ ... (1)

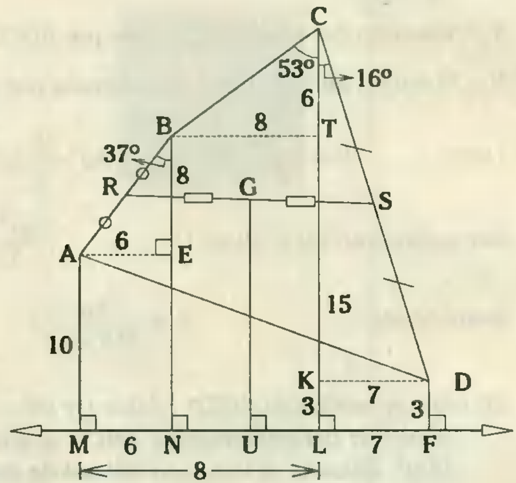
$$V_{\overline{BC}} = (6y)(2\pi y) = 12\pi y^2 \quad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (1) en (2) : $V_{\overline{BC}} = 12\left(\frac{1}{3}\right) \quad \therefore \quad \mathbf{V_{\overline{BC}} = 4\,m^3}$

21.- Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región trapezoidal ABCD alrededor de la recta ℒ, si AM = 10, BN = 18 CL = 24 y DF = 3



Resolución.-



Sea «V_x» el volumen del sólido engendrado, A el área de la región trapezoidal y «G» el baricentro de dicha región.

Luego por el Teorema de Pappus - Goulding:

$$V_x = A \cdot 2\pi(GU) \qquad \text{... (1)}$$

El área « A» la calculamos restando el área de la región hexagonal HBACDF y el área del trapecio AMFD.

Es decir :

$$A = \left(\frac{10+18}{2}\right)6+\left(\frac{18+24}{2}\right)8+\left(\frac{24+3}{2}\right)7-\left(\frac{10+3}{2}\right)21$$

Donde : $A = 84 + 168 + 94{,}5 - 136{,}5 \quad \Rightarrow \quad A = 210$ ... (2)

La distancia GU la calculamos empleando la propiedad :

$$GU = \frac{10+18+24+3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad GU = \frac{55}{4} \text{ ... (3)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $V_x = 210 \ . \ 2\pi \, . \left(\frac{55}{2}\right) V_x = 210 \times 55\pi$

$$\therefore \qquad \mathbf{V = 11\ 550\ \pi u^3}$$

22.- Dado el sector circular AOB de 60º, OA = OB = R. Hallar la distancia de su centro de gravedad al radio $\overline{OB}$.

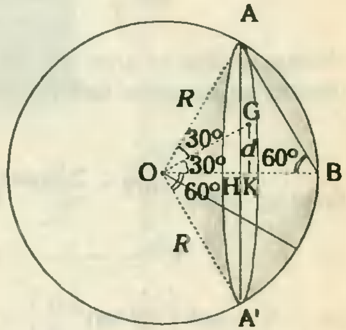
Resolución.-

Sea «G» el centro de gravedad del sector circular AOB y $\overline{GK} \perp \overline{OB}$ (GK = d)
El volumen (V) del sólido engendrado por el sector AOB al girar en torno al radio $\overline{OB}$ se calcula mediante el Teorema de Pappus - Goulding :

$$V = A \times 2\pi d \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{V}{A \cdot 2\pi} \ \ldots (1)$$

Como el sólido engendrado es un sector esférico, su volumen V será : $V = \frac{2}{3}\pi R^2$ (HB)

y ya que el triángulo AOB es equilátero $\Rightarrow$ HB = $\frac{R}{2}$



De donde : $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$ ... (2)

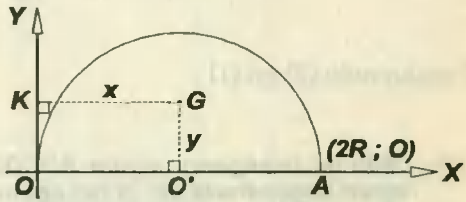
El área A corresponde al sector circular AOB

Luego : $A = \dfrac{\pi R^2}{6}$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

$$d = \frac{\dfrac{\pi R^3}{3}}{\dfrac{\pi R^2}{6} \times 2\pi} \quad \therefore \quad \boldsymbol{d = \frac{R}{\pi}}$$

23.- Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia ubicada en el plano cartesiano mostrado.



Resolución.-

Sea «G» el centro de gravedad de la semicircunferencia, luego sus coordenadas serán G(x ; y)
Al girar la semicircunferencia alrededor del eje x, se obtiene una superficie esférica de área

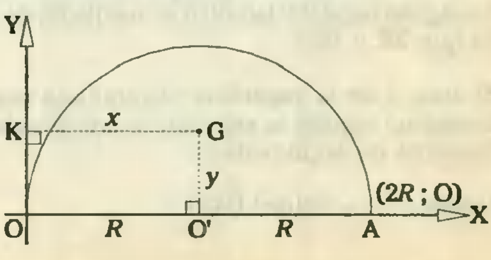
$$A = 4\pi R^2 \quad \ldots (1)$$

Por Pappus la misma área se podrá expresar como :

$$A = (\pi R)\, 2\pi\, y \quad \ldots (2)$$

Luego de (1) y (2) :

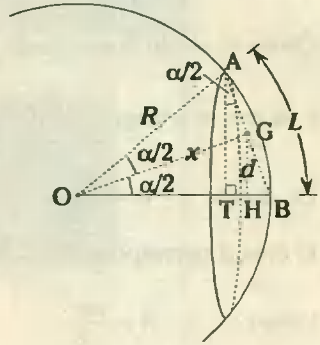
$$4\pi R^2 = 2\pi^2 R\, y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2R}{\pi}$$



Y ya que $x = R$. Las coordenadas de G serán : $\boxed{G = \left(R\ ;\ \dfrac{2R}{\pi}\right)}$

24.- Determinar a que distancia del centro de una circunferencia de radio «R» se encuentra el centro de gravedad de un arco cuya medida es en grados sexagesimales α»

Resolución.-

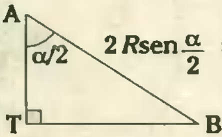


Sea «G» el centro de gravedad del arco AB y sea $\overline{GH}$ la perpendicular de G al radio $\overline{OB}$, Luego en el ⊿ OHG :

$$x = \frac{d}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \quad ...\ (1)$$

Hacemos girar el arco $\overset{\frown}{AB}$ alrededor del radio $\overline{OB}$, obteniendo un casquete esférico de volumen : $V = 2\pi R(BT)$

En el ⊿ ATB :



$2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow BT = 2R\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

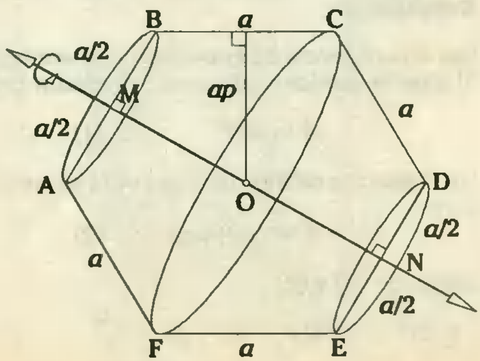
$$\Rightarrow \quad V = 2\pi R\left(2R\operatorname{Sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi d \cdot L\ ; \quad \text{donde} \quad \left(L = \pi R\frac{\alpha}{180}\right)$$

Luego : $\quad 2R^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = d\ .\ \pi R\,\frac{\alpha}{180} \quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{360R\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$ ... (2)

Sustituyendo (2) en (1) : $\boxed{x = \dfrac{360R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}}$

25.- Dado un hexágono regular ABCDEF cuyo lado mide «a» . Calcular el área de la región engendrada por el hexágono regular al girar una vuelta completa alrededor de la mediatriz de uno de sus lados.

Resolución.-



La mediatriz de $\overline{AB}$ pasa por el centro O del hexágono regular y también es mediatriz de $\overline{DE}$ ya que $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$

El área A de la superficie engendrada por el hexágono regular, la calculamos empleando el Teorema de Arquímedes.

Luego : $\quad A = 2\pi(ap)\ (MN)$

Donde : $ap = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (apotema del hexágono)y $MN = 2\,ap = a\sqrt{3}$

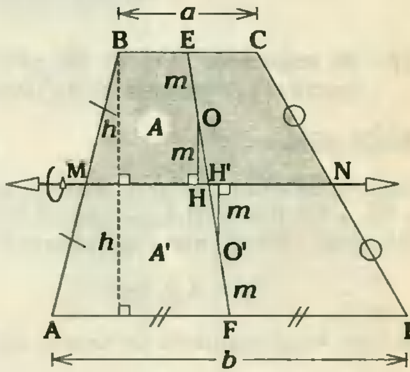
Luego : $A = 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\left(a\sqrt{3}\right)$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{A = 3\pi a^2}$

26.- Las bases de un trapecio miden a y b (a < b). Hallar la relación de los volúmenes generados por los dos trapecios parciales determinados por la mediana del primero cuando estos giran una vuelta completa alrededor de la recta que contiene a dicha mediana.

Resolución.-

Sea el trapecio ABCD de mediana $\overline{MN}$ $\left(MN = \frac{a+b}{2}\right)$, sean además A y A' las áreas de las regiones MBCN y AMND respectivamente y O y O' son los centros de dichas regiones.

Luego los volúmenes serán :



$$V = A \cdot 2\pi(OH)$$

También : $V = A' \cdot 2\pi(O'H')$

De donde : $\frac{V}{V'} = \frac{A}{A'} \cdot \frac{OH}{OH'}$

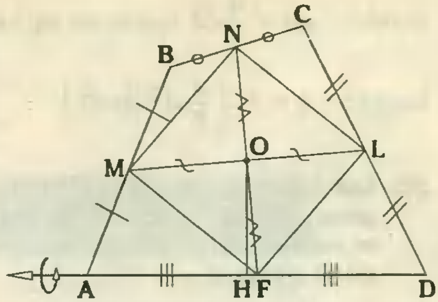
Puesto que : $A = \left(\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2}\right)h = \left(\frac{3a+b}{2}\right)h$

Ahora : $A' = \left(\frac{b + \frac{a+ab}{2}}{2}\right)h = \left(\frac{3b+a}{4}\right)h$ y $OH = O'H' = \frac{h}{2}$

Luego : $\frac{V}{V'} = \frac{\left(\frac{3a+b}{4}\right)h}{\left(\frac{ab+a}{4}\right)h} \times \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\frac{V}{V'} = \frac{3a+b}{3b+a}}$

27.- En un trapezoide ABCD, M, N, L y F son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, si el volumen del sólido engendrado por la región trapezoidal ABCD al girar en torno a $\overline{AD}$ es V. Calcular el volumen del sólido que engendrará la región MNLF alrededor del mismo lado.

Resolución.



Sea «O» el centro de gravedad del trapezoide ABCD. El cual también lo es para el paralelogramo MNLF y si $\overline{OH}$ es perpendicular al eje de rotación $\overline{AD}$.

Se tiene : $V = A(\square\ ABCD) \cdot 2\pi\ (OH)$ ... (1)

Si V_x representa el volumen pedido.

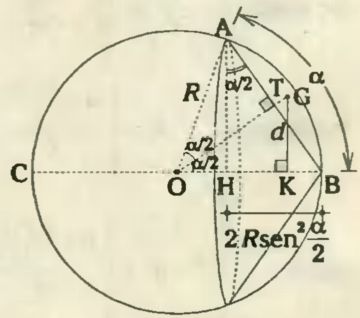
Luego : $V_x = A(\square\ MNLF) \cdot 2\pi\ (OH)$ ... (2)

Dividiendo (2) ÷ (1) : $\dfrac{V_x}{V} = \dfrac{A(\square MNLF)}{A(\square ABCD)}$

Pero : $A(\square\ MNLF) = \dfrac{1}{2}[A(\square\ ABCD)] \Rightarrow \dfrac{A(\square MNLF)}{A(\square ABCD)} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $V_x = \dfrac{V}{2}$

28.- Un segmento circular AB gira en torno a un diámetro . Si CB = 2R y m $\overset{\frown}{AB}$ = α. Calcular la distancia de su centro de gravedad al diámetro CB.

Resolución.-



Sea «G» el centro de gravedad del segmento circular y $\overline{GK} \perp \overline{CB}$ ($GK = d$). Luego por el Teorema de Pappus Goulding : El volumen engendrado V será :

$$V = A \times 2\pi d \qquad ... (1)$$

El área A del segmento circular lo calculamos como :

$$A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2}{2}\,\text{sen}\alpha \qquad ... (2)$$

El volumen V es el de un anillo esférico

Luego : $V = \dfrac{1}{6}\pi\,(AB)^2 \,.\, (HB) = \dfrac{1}{6}\pi\left(2R\,\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(2R\,\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

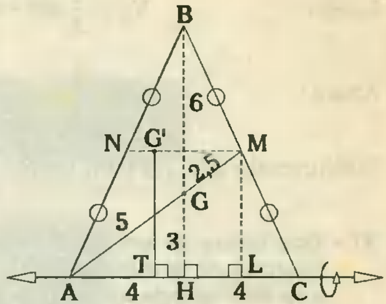
De donde : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3\,\text{sen}^4\dfrac{\alpha}{2}$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $\dfrac{4}{3}\pi R^3\,\text{sen}^4\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R^2}{360}(\pi\alpha - 180\,\text{sen}\alpha)\,2\pi d$

Finalmente : $\therefore$ $d = \dfrac{240\,R\,\text{sen}^4\dfrac{\alpha}{2}}{\pi\alpha - 180\text{sen}\alpha}$

29.- En un triángulo isósceles ABC(AB = BC) se traza la mediana $\overline{AM}$. Si AC = 8 y AM = 7,5 ; calcular el volumen del sólido engendrado por la región ABM cuando gira 360º alrededor de la base $\overline{AC}$

<u>Resolución</u>.-



Sea V_x el volumen pedido, A el área de la región ABM y G' su centro de gravedad (G' ∈ $\overline{MN}$ y $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$)
Luego por el Teorema de Pappus - Goulding :

$$V_x = A \cdot 2\pi\,(G'T) \qquad \dots (1)$$

Trazamos la altura $\overline{BH}$, luego:

AH = HC = 4 y $\overline{BH} \cap \overline{AM} = \{G\}$

Para el Δ ABC , G es baricentro, luego : $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}(7,5) = 5$ y $BG = 2\,GH$

En el ⊿ AHG : GH = 3 ⇒ BG = 6

De donde : $A = \frac{1}{2}A(\Delta\ ABC) = \frac{1}{2}\left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right) \Rightarrow A = 18$ .. (2)

En el ⊿ BHC : $ML = \frac{BH}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow G'T = ML = \frac{9}{2}$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $V_x = 18 \cdot 2\pi \times \frac{9}{2}$ ∴ $\mathbf{V_x = 162\,\pi}$

30.- Se consideran dos circunferencias de centro O y O_1 tangentes exteriores en T y de radios 3 y 1. Se traza la tangente común exterior $\overline{PQ}$. Hallar el volumen del sólido obtenido por la rotación de la región mixtilínea PTQ alrededor de la línea que pasa por sus centros.

<u>Resolución</u>.-

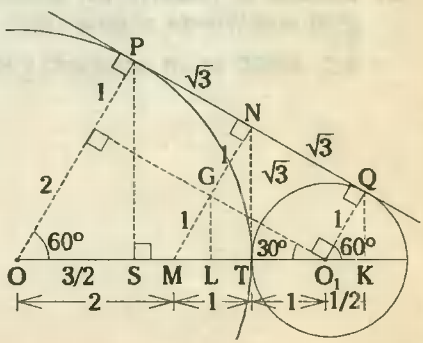
Sean :

V_x : volumen engendrado por la región sombreada

V_1 : volumen generado por la región $OPQO_1$

V_2 : volumen generado por el sector POT

V_3 : volumen generado por el sector TO_1Q



Luego : $V_x = V_1 - V_2 - V_3$ ... (1)

Por Pappus : $V_1 = \left(\frac{3+1}{2}\right)2\sqrt{3}\cdot(2\pi)\,(GL)$

$$\Rightarrow \qquad V_1 = 8\sqrt{3}\,\pi\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = 12\pi \quad ...\ (2)$$

Luego : $$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot (GT) = \frac{2}{3}\pi\,(3)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = 9\pi \quad ...\ (3)$$

Ahora : $$V_3 = \frac{2}{3}\,\pi r^2\,(TK) = \frac{2}{3}\pi(1)^2 . \left(\frac{3}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad V_3 = \pi \quad ...\ (4)$$

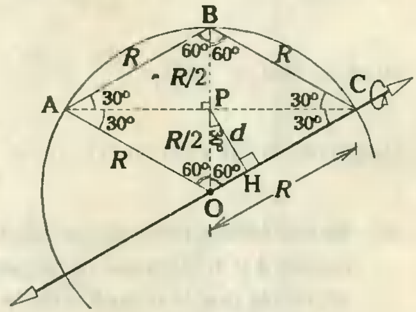
Sustituyendo (2) , (3) y (4) en (1) : $V_x = 12\pi - 9\pi - \pi \qquad \therefore \qquad \mathbf{V_x = 2\pi}$

31.- Dos lados de un rombo son radios de una circunferencia y los otros dos lados, cuerdas de la misma. Hallar el área de la región generada por dicho rombo cuando gira 360º alrededor de uno de sus lados (El radio de la circunferencia mide R)

Resolución.-

Sea ABCD el rombo de lados : $AB = BC = OC = OA = R$, el cual esta formado por los triángulos equiláteros AOB y BOC.

Sea además «P» su centro y $\overline{PH} \perp \overline{OC}$ $(PH = d)$



Luego por Pappus : $A_x = 2p\,(\square\ ABCD) \times 2\pi d$

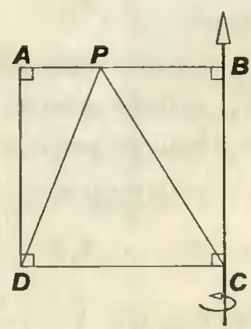
Donde A_x es el área pedida y $2p\,(\square\ ABCD) = 4R$

En el ⊿ OHP de 30º y 60º : $d = \frac{R}{4}\sqrt{3}$

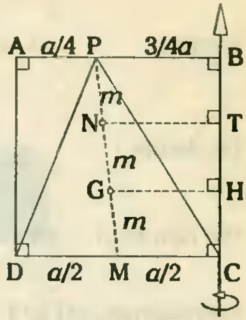
Luego : $A_x = 4R \cdot 2\pi\left(\frac{R}{4}\sqrt{3}\right)$

$\therefore \qquad \mathbf{A_x = 2\pi\sqrt{3}\,R^2}$

32.- Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360º alrededor de la recta $\overleftrightarrow{BC}$, ABCD es un cuadrado y PB = 3AP (AB = a)



Resolución.-



Sean V_x el volumen pedido, A el área de la región DPC y

$\overline{GH} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (G : centro de gravedad del Δ DPC).

Luego por Pappus - Goulding : $V_x = A \cdot 2\pi(GH)$ ... (1)

El área A de la región DPC se calcula como la mitad del área de la región ABCD :

$$A = \frac{a^2}{2} \qquad \text{... (2)}$$

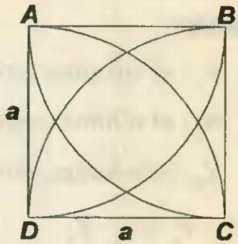
Ya que G es baricentro : PG = 2GM, por N punto medio de $\overline{PG}$ trazamos $\overline{NT} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Luego : $GH = \dfrac{NT + a/2}{2}$ y $NT = \dfrac{3/4a + GH}{2}$ $\Rightarrow$ $GH = \dfrac{\dfrac{3/4a+GH}{2} + a/2}{2}$

Resolviendo : $GH = \dfrac{7}{12}a$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $V_x = \left(\dfrac{a^2}{2}\right)(2\pi)\left(\dfrac{7}{12}a\right)$ $\therefore$ $\mathbf{V = \dfrac{7\pi}{12}a^3}$

33.- Determinar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada al girar en torno al lado $\overline{CD}$ del cuadrado ABCD.



Resolución.-

Sea «G» el centro de gravedad de la región sombreada

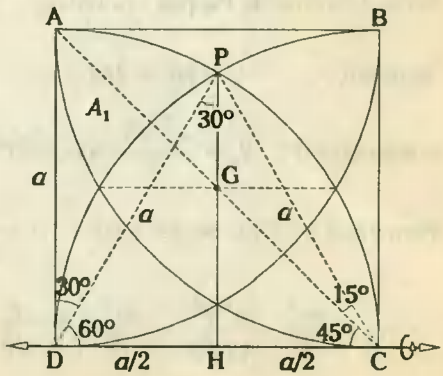
El cual también es centro del cuadrado ABCD

Luego por Pappus : $V_x = A \cdot 2\pi(GH)$ ... (1)

El área A de la región sombreada la calculamos restando al área de la región cuadrada ABCD cuatro veces al área de la región APD.

Es decir : $A = a^2 \quad 4A_1$

Pero : $A_1 = A(\text{sector ADP}) - A(\text{segmento})$



Luego : $A_1 = \dfrac{\pi a^2}{12} - \left(\dfrac{\pi a^2}{6} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{a^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi)$

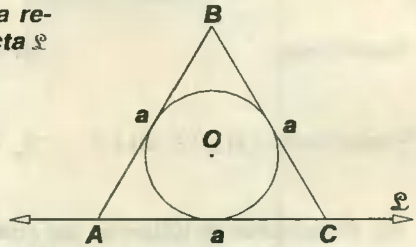
De donde : $A = a^2 - 4\left(\dfrac{a^2}{12}\right)(3\sqrt{3} - \pi) \Rightarrow A = \dfrac{a^2}{3}(3 - 3\sqrt{3} - \pi)$ ... (2)

Por otro lado : $GH = \dfrac{a}{2}$ ... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) : $V_x = \dfrac{a^2}{3}(3 - 3\sqrt{3} + \pi)\, 2\pi\dfrac{a}{2}$

$\therefore \quad \mathbf{V_x = \dfrac{\pi a^3}{3}(3 - 3\sqrt{3} + \pi)}$

34.- Hallar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada al girar 360º alrededor de la recta $\mathcal{L}$



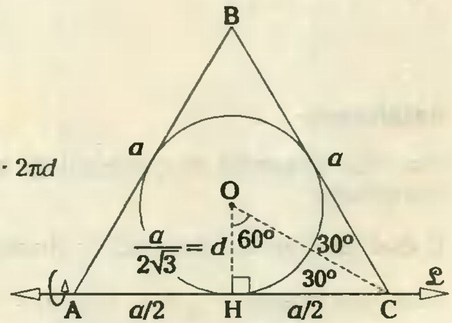
<u>Resolución</u>.-

Sean : V_x : el volumen generado por la región sombreada

V_1 : el volumen generado por la región ABC

V_2 : el volumen generado por el círculo O

Luego : $V_x = V_1 - V_2$ ... (1)



Por el Teorema de Pappus - Goulding : $V_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi d$

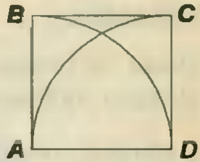
También : $V_2 = \pi d^2 \times 2\pi d$

Luego en (1) : $V_x = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\pi d - 2\pi^2 d^3$

Pero en el ⊿ OHC de 30º y 60º : $d = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow V_x = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - 2\pi^2\left(\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3$

$V_x = \dfrac{\pi a^3}{4} - \dfrac{\pi^2 a^3}{12\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^3}{12}\left(3 - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \qquad \therefore \quad \mathbf{V_x = \dfrac{\pi a^3}{36}(9 - \pi\sqrt{3})}$

35.- En la figura adjunta : ABCD es un cuadrado cuyo lado mide «a» $\overset{\frown}{BD}$ y $\overset{\frown}{AC}$ son arcos de circunferencia trazados con radio «a» y centros A y D. Hallar la distancia del centro de gravedad de la región sombreada a $\overline{AD}$.



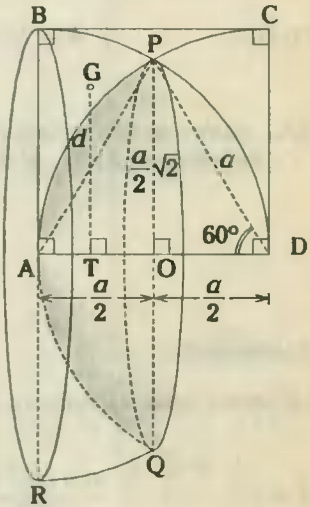
Resolución.-

Sea «G» el centro de gravedad de la región sombreada y $\overline{GT} \perp \overline{AD}$ (GT = d). Luego al hacer girar dicha región alrededor de $\overline{AD}$, se obtiene un volumen: $V = A \cdot 2\pi d$ ... (1)
El volumen V lo obtenemos por la diferencia de los volúmenes de dos segmentos esféricos el mayor de dos bases ($\overline{BR}$ y $\overline{PQ}$) y el menor de base $\overline{PQ}$

Luego : $$V = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left[a^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2\right]$$

Ahora : $$V = \frac{\pi a^3}{48} + \frac{7\pi a^3}{16} - \frac{\pi a^3}{48} - \frac{3\pi a^3}{16} = \frac{7\pi a^3}{16} - \frac{3\pi a^3}{16} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi a^3}{4} \quad ... (2)$$

El área A de la región sombreada la hallamos restando al área del sector BAP, el área del segmento circular $\overline{AP}$



Luego : $$A = \frac{\pi a^2}{12} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

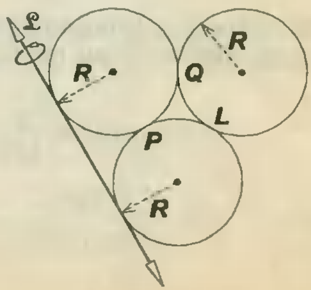
$$\Rightarrow \qquad A = \frac{a^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi) \qquad ... (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

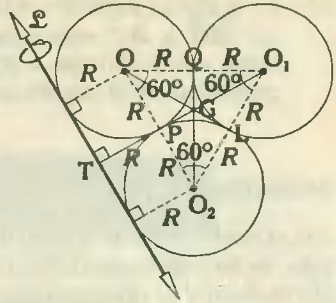
$$\frac{\pi a^3}{4} = \frac{a^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi)2\pi d$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{d = \frac{3a}{2(3\sqrt{3} - \pi)}}$$

36.- Calcular el área de la región engendrada por el triángulo curvilíneo PQL al girar una vuelta completa alrededor de la recta $\mathcal{L}$



Resolución.-



Al unir los centros de las circunferencias se obtiene un triángulo equilátero OO_1O_2 de lado $2R$.

El triángulo curvilíneo PQL esta formado por arcos de circunferencia de 60° cuya longitud es $\frac{1}{6}(2\pi R) = \frac{\pi R}{3}$

Luego su perímetro será «πR» sea «G» el centro de gravedad del triángulo PQL y $\overline{GT} \perp \mathfrak{L}$

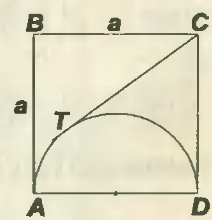
Luego el área «A» de la región buscada será; por Pappus : $A = \pi R \times 2\pi(GT)$ ... (1)

En el $\Delta\, OO_1O_2$: $GP = \frac{1}{3}(O_1P) = \frac{1}{3}(R\sqrt{3})$

Además : $PT = R \quad \Rightarrow \quad GT = \frac{R\sqrt{3}}{3} + R$

En (1) : $A = 2\pi^2 R^2\left(\frac{R\sqrt{3}}{3} + R\right) \quad \therefore \quad A = \frac{2}{3}\pi^2 R^3(\sqrt{3} + 3)$

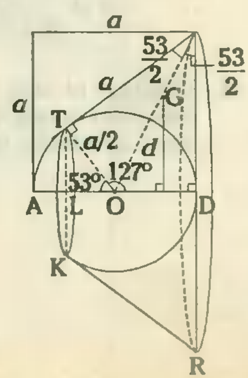
37.- Hallar la distancia del centro de gravedad de la región sombreada a $\overline{AD}$, si ABCD es un cuadrado y $\overline{AD}$ es diámetro.



Resolución.-

En primer lugar calculamos el área A de la región sombreada : $A = A(\square\, TCDO) - A \triangle\, TOD$

$$A = 2\left(\frac{a\times\frac{a}{2}}{2}\right) - \frac{\pi(a/2)^2\, 127}{360} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a^2}{1440}(720 - 127\pi)$$



Hacemos girar la región sombreada alrededor de $\overline{AD}$ obteniendo un volumen V que por Pappus se expresa como :

$$V = A \times 2\pi d = \frac{a^2}{1440}(720 - 127\pi) \times 2\pi d$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{720V}{a^2(720 - 127\pi)\pi} \quad ... (1)$$

El volumen V lo hallamos restando los volúmenes del tronco de cono y del segmento esférico de base $\overline{TK}$

Luego : $$V = \frac{\pi}{3}(LD)(LT^2 + a^2 + LT \cdot a) - \frac{1}{6}\pi(LD)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4a}{5}\right)(IT)^2$$

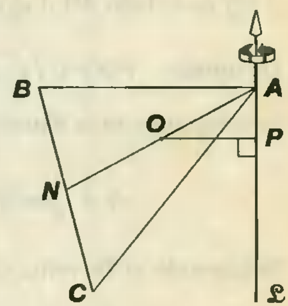
Pero en el ⊿ TLO de 37° y 53° : $LT = \dfrac{2a}{5}$ y $LD = \dfrac{4a}{5}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{4a}{5}\right)\left[\left(\frac{2a}{5}\right)^2 + a^2 + \frac{2a^2}{5}\right] - \frac{1}{6}\pi\left(\frac{4a}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4a}{5}\right)\left(\frac{2a}{5}\right)^2$$

De donde : $$V = \frac{4\pi a^3}{15} \qquad \text{... (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) : $$\boldsymbol{d = \frac{192a}{720 - 127\pi}}$$

38.- En la figura mostrada , AB = 5m ; BC = 6m y AC = 7m; ON = OA , OP = $\sqrt{6}$. Hallar el volumen que engendra el triángulo ABC al girar 360º alrededor del eje 𝔏



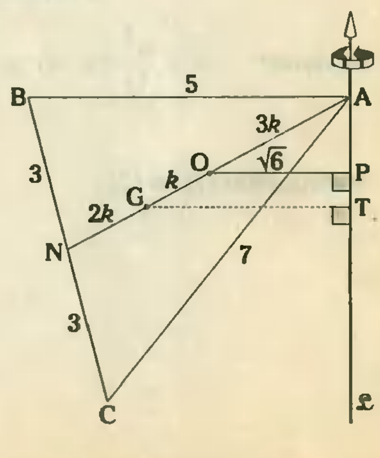
Resolución.-

Sea «G» el baricentro del Δ ABC, luego : $AG = 2GN$

Hacemos : $GN = 2k$ y $AG = 4k$ $\Rightarrow$ $ON = OA = 3k$ y $OG = k$

Trazamos $\overline{GT} \perp 𝔏$, luego por la semejanza de los triángulos GTA y OPA se tiene :

$$\frac{GT}{\sqrt{6}} = \frac{4k}{3k} \qquad \Rightarrow \qquad GT = \frac{4}{3}\sqrt{6}$$



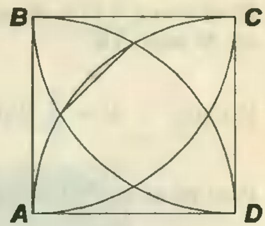
Sea V el volumen buscado

Luego : $$V = Area\,(\Delta\, ABC) \times 2\pi\, GT$$

Reemplazando : $$V = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} \times 2\pi \cdot \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

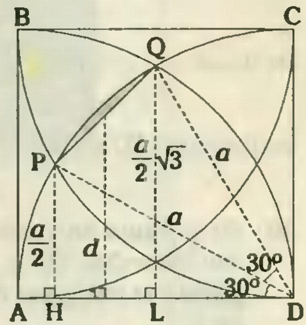
Donde : $$V = 6 \times \frac{8\pi\sqrt{6}}{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{V = 96\pi m^3}$$

39.- Hallar la distancia del centro de gravedad de la región sombreada al lado $\overline{AD}$ del cuadrado ABCD si AD = a



Resolución.-

Sea «*d*» la distancia pedida, al hacer girar el segmento circular $\overline{PQ}$ alrededor de $\overline{AD}$ obtenemos un anillo esférico de volumen :



$$V = \frac{1}{6}\pi(PQ)^2(HL)$$

Puesto : $HL = HD - LD = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$

y $\overline{PQ}$ es el lado del dodecágono regular

De donde : $PQ = a\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad (PQ)^2 = a^2(2 - \sqrt{3})$

Sustituyendo en la expresión anterior :

$$V = \frac{1}{6}\pi a^2(2 - \sqrt{3})\,\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi a^3}{12}(3\sqrt{3} - 5) \qquad \text{... (1)}$$

Empleando el Teorema de Pappus - Goulding el volumen V se calcula también como :

$$V = A \times 2\pi d$$

Donde : *A* es el área del segmento circular PQ es decir : $A = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}(\pi - 3)$

De donde : $V = \frac{a^2}{12}(\pi - 3) \times 2\pi d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{6V}{\pi a^2(\pi-3)} \qquad \text{... (2)}$

Sustituyendo (1) en (2) : $$d = \frac{6\frac{\pi a^3}{12}(3\sqrt{3}-5)}{\pi a^2(\pi-3)}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d = \frac{a(3\sqrt{3}-5)}{2(\pi-3)}}$$

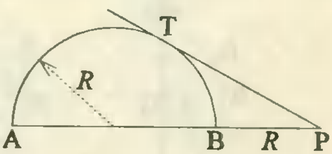
PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Los lados de un triángulo miden 11, 13 y 20, el triángulo gira en torno a uno de sus lados obteniéndose el mayor volumen. Hallar dicho volumen.

A) $582\pi\ dm^3$ B) $528\pi\ dm^3$ C) $825\pi\ dm^3$

D) $258\pi dm^3$ E) $285\pi\ dm^3$

2.- Si $\overline{AB}$: diámetro y T es punto de tangencia. Calcular el área de la superficie que genera la línea ATP al girar alrededor de AP ($R = 2$)



A) 9π B) 9π C) 4π D) 9π E) 11π

3.- En un triángulo se traza por el baricentro una recta paralela a su base. ¿Qué relación existe entre los volúmenes generados por las dos partes en que queda dividido el triángulo cuando estas giran alrededor de la recta?

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2/3 E) 3/4

4.- Un rombo cuyo lado mide 5 y su diagonal mayor 8; gira alrededor de una paralela a esta diagonal trazada por el extremo de la diagonal menor. Calcular el volumen engendrado.

A) 100π B) 124π C) 128π

D) 144π E) 156π

5.- Un triángulo equilátero ABC gira una vuelta completa alrededor de una recta exterior $\mathcal{L}$ paralela a $\overline{AC}$ y una distancia «a» de $\overline{AC}$. Hallar el volumen del sólido engendrado, si $AB = 2a\sqrt{3}$

A) πa^3 B) $6\pi a^3$ C) $8\pi a^3$

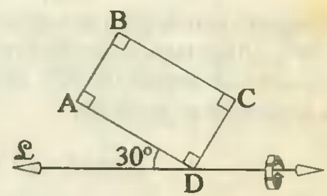
D) $6\sqrt{3}\pi a^3$ E) $12\sqrt{3}\pi a^3$

6.- Un rombo de diagonal mayor d y un ángulo agudo de 74° gira respecto a un eje que pasa por su vértice y es perpendicular a su diagonal mayor. Determinar el volumen del sólido así obtenido.

A) $\frac{3}{4}\pi d^3$ B) $\frac{3}{8}\pi d^3$ C) $\frac{3}{5}\pi d^3$

D) $\frac{4}{5}\pi d^3$ E) πd^3

7.- Del gráfico $AB = 6$ y $AD = 8$. Calcular el volumen de la figura generada por la región ABCD al girar en torno a $\mathcal{L}$.



A) $48(2+3\sqrt{3})\pi$ D) $36(2+3\sqrt{3})\pi$

B) $24(2+3\sqrt{3})\pi$ E) $48(4+\sqrt{3})\pi$

C) $48(4+3\sqrt{3})\pi$

8.- En un trapecio isósceles, una diagonal es perpendicular a uno de los lados no paralelos; el lado no paralelo mide «b» y forma 60° con la base mayor. Determinar el área del sólido generado al girar el trapecio respecto a la base mayor.

A) $4\pi b^2\sqrt{3}$ B) $2\pi b^2\sqrt{3}$ C) $3\pi b^2\sqrt{3}$

D) $\pi b^2\sqrt{3}$ E) $5\pi b^2\sqrt{3}$

9.- Se tiene un triángulo y una recta exterior coplanares, si el área de la región triangular es 30 y las distancias desde sus vértices hacía la recta son 8, 1 y 6. Calcular el volumen engendrado por está región triangular al rotar alrededor de esta recta exterior.

A) 100π B) 1500π C) 150π

D) 200π E) 300π

10.- Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza una recta exterior a dicho triángulo. Se traza $\overline{AH}$ perpendicular a la recta («H» en la recta) tal que, M $\measuredangle$ HBA = M $\measuredangle$ ACB. Calcular el volumen del sólido generado por la recta, si $\overline{BH} = 6$ y el área de la superficie generada por $\overline{AC}$ en dicho giro es 400π

A) 400π B) 100π C) 500π

D) 800π E) 700π

11.- Un triángulo obtusángulo de ángulos agudos 15 y 30° y altura menor «h» gira respecto del lado opuesto al ángulo de 30° . Hallar el área de la superficie engendrada.

A) $2\pi h^2$ D) $4(2-\sqrt{3})h^2$

B) $4(2-\sqrt{3})\pi h^2$ E) $4(2+\sqrt{3})\pi h^2$

C) $4\pi h^2$

12.- En la figura calcular el área de la superficie total del sólido generado al girar la región CABD alrededor de la recta $\mathcal{L}$ una vuelta completa, si : $r = 5$, $k = 3$ y $h = 1$

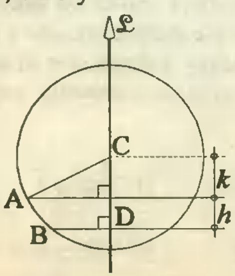
A) 22π

B) 30π

C) 35π

D) 39π

E) 45π



13.- Un rectángulo con los lados a y b gira en torno a su eje que pasa por un vértice y que es paralelo a la diagonal que no pasa por dicho vértice. Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido.

A) $2\pi\, a^2 b^2/\sqrt{a^2+b^2}$ D) $2(a^2 b^2)/\sqrt{a^2+b^2}$

B) $2\pi\, ab/(a+b)$ E) $2\pi\, a^2 b^2/\sqrt[3]{a^2+b^2}$

C) $2\pi\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^3$

14.- Del gráfico. Calcular «α», sabiendo que el volumen del sólido generado por el sector AOB es cuatro veces el volumen del sólido generado por el segmento circular EF.

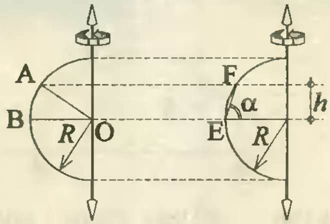
A) $\pi/6$

B) $\pi/5$

C) $\pi/4$

D) $\pi/3$

E) $5\pi/12$



15.- El área de un triángulo ABC es igual a A, AC = b y m $\measuredangle$ CAB = 37°. Hallar el volumen del sólido formado al girar el triángulo ABC respecto al lado $\overline{AB}$.

A) $\dfrac{2}{5}b\mathrm{A}\pi$ B) $\dfrac{3}{5}b\mathrm{A}\pi$ C) $\dfrac{2}{3}b\mathrm{A}\pi$

D) $\dfrac{3}{4}b\mathrm{A}\pi$ E) $\dfrac{6}{7}b\mathrm{A}\pi$

16.- Calcular el volumen generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de la recta $\mathcal{L}$.

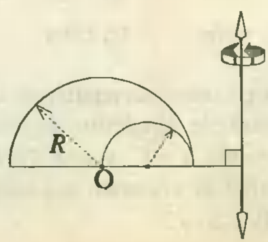
A) $\dfrac{13}{4}\pi R^2$

B) $\dfrac{9}{4}\pi R^2$

C) $\dfrac{15}{4}\pi R^2$

D) $7\pi R^2$

E) $\dfrac{17}{4}\pi R^2$



17.- Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada, al girar una vuelta alrededor de $\overline{BC}$, si $R = 10$

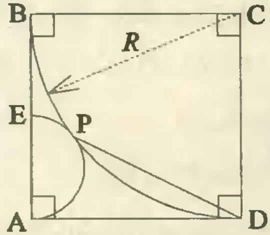
A) $250\pi/3$

B) 240π

C) 320π

D) $320\pi/3$

E) $220\pi/3$

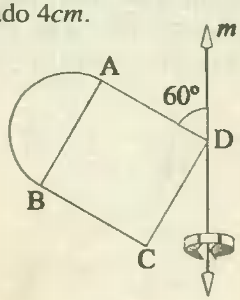


18.- Calcular el volumen del sólido generado por un cuadrado ABCD que gira 360° alrededor de una recta que pasa por C, forma 15° con $\overline{CD}$ y no intersecta al cuadrado, si $AB = \sqrt{6}$

A) $12\pi m^3$ B) $14\pi m^3$ C) $16\pi m^3$

D) $18\pi m^3$ E) $20\pi m^3$

19.- Calcular el área de la superficie generada por la semicircunferencia al girar alrededor de $\vec{m}$ una vuelta si ABCD es un cuadrado de lado $4cm$.



A) $4\pi(2\sqrt{3} + 2\pi\sqrt{3} + \pi)$

B) $2\pi(2\sqrt{3} + \pi\sqrt{3} + \pi)$

C) $\pi(2\sqrt{3} + 2\pi\sqrt{3} + 3\pi)$

D) $6\pi(\sqrt{3} + \pi\sqrt{3} + \pi)$

E) $6\pi(\sqrt{3} + 2\pi\sqrt{3} - \pi)$

20.- 29.- En la figura mostrada. Si : $m\,\overset{\frown}{AB} = 30°$ y $m\,\overset{\frown}{BC} = 90°$. Hallar el área de la superficie que genera el perímetro de la región sombreada al girar una vueltra, alrededor del diámetro $\overline{CD}$.

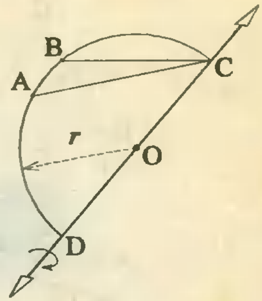
A) $\frac{R^2}{2}(5\pi + \sqrt{2})$

B) $\frac{R^2}{2}(5\pi + 2\sqrt{2})$

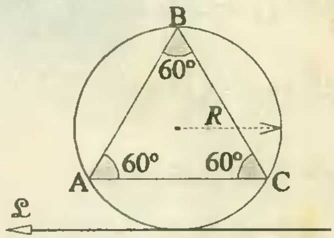
C) $\frac{R^2}{2}(5\pi + 3\sqrt{2})$

D) $\frac{R^2}{2}(7\pi + 3\sqrt{2})$

E) N.A.



21.- Hallar el volumen del sólido engendrado por la región sombreada al girar 360° alrededor de la recta $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L} // \overline{AC}$



A) $\frac{\pi R^3}{3}(4\pi - \sqrt{3})$

D) $\frac{\pi R^3}{6}(\pi - \sqrt{3})$

B) $\frac{\pi R^3}{4}(2\pi - \sqrt{3})$

E) $\frac{\pi R^3}{2}(2\pi - \sqrt{3})$

C) $\frac{\pi R^3}{2}(4\pi - 3\sqrt{3})$

22.- Hallar el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar en torno a la recta OA.

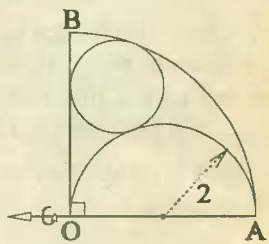
A) $4\pi(8 - \pi\sqrt{2})$

B) $4\pi(8 - \sqrt{2})$

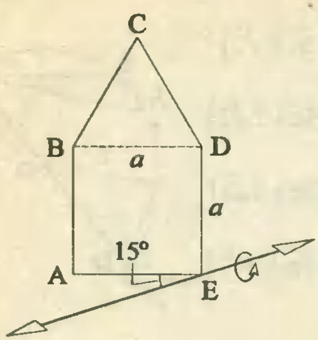
C) $4\pi(8 - \pi)$

D) $2\pi(8 - \pi\sqrt{2})$

E) $6\pi(8 - \pi\sqrt{2})$



23.- Hallar el volumen del sólido generado por la región sombreada, si ABDE es un cuadrado y BCD es un triángulo equilátero.



A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}\ (12+5\sqrt{3})\,\pi$

B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}\ (12+5\sqrt{3})\,\pi$

C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}\ (6+5\sqrt{3})\,\pi$

D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}\ (12+5\sqrt{3})\,\pi$

E) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}\ (6+5\sqrt{3})$

24.- Calcular el volumen del sólido engendrado por un cuadrado ABCD que gira 360° alrededor de una recta exterior $\mathcal{L}$, si las distancias de los vértices A, D y C a dicha recta son de 6, 2 y 8.

A) $600\,\pi$ B) $630\,\pi$ C) $650\,\pi$

D) $708\,\pi$ E) 728π

25.- Por el Baricentro G de un triángulo ABC se traza una paralela a $\overline{AC}$ la cual corta en E a $\overline{AB}$ y en F a $\overline{BC}$. Calcular el volumen que genera el trapecio AEFC al girar en torno a la recta $\overleftrightarrow{EF}$, si el volumen que genera la región EBF es $80m^3$

A) $130\ m^3$ B) $160\,m^3$ C) $180\,m^3$

D) $200\ m^3$ E) $260\,m^3$

26.- Un trapecio ABCD ($\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$) gira en torno a una recta que contiene a la base mayor $\overline{AD}$. Hallar el área de la región generada, si $BC=4$, $AD=18$, $m\measuredangle A=53$ y $m\measuredangle C=45$

A) $8(2+\sqrt{2})\pi$ D) $64(4+\sqrt{2})\pi$

B) $8\sqrt{2}\pi$ E) $32(4+\sqrt{2})\pi$

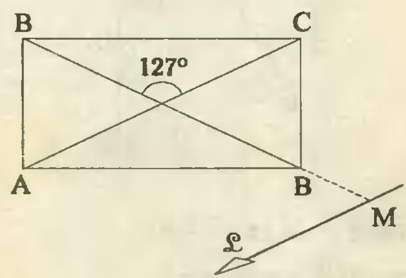
C) $64(3+\sqrt{2})$

27.- En un triángulo ABC : AB = 13 BC = 14 y AC = 15 . Por el incentro de dicho triángulo se traza una recta $\mathcal{L}$ paralela a $\overline{AC}$ la cual determina un triángulo EBF.; calcular el área de la región determinada por dicho triángulo al girar una vuelta completa alrededor de $\mathcal{L}$

A) $\dfrac{413}{3}\pi$ B) $\dfrac{425}{3}\pi$ C) $\dfrac{448}{3}\pi$

D) 212π E) 172π

28.- Hallar el volumen del sólido generado por el rectángulo ABCD que gira una vuelta completa alrededor de la recta $\mathcal{L}$, si $\mathcal{L}\ //\ \overline{AC}$ y $DM=\sqrt{5}$ y el perímetro del rectángulo es 48



A) $1024\sqrt{5}\,\pi$ D) 1000π

B) $1024\sqrt{3}\,\pi$ E) $1021\sqrt{5}\,\pi$

C) $1012\sqrt{5}\,\pi$

29.- Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor del diámetro $\overline{AC}$; si : $AH^2+HC^2=12$

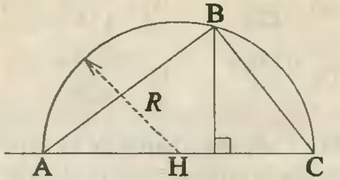
A) πR

B) $2\pi R$

C) $3\pi R$

D) $\frac{\pi R}{2}$

E) $4\pi R$



30.- Las bases de un trapecio miden 2 y 4 , el trapecio gira en torno a una recta que pasa por su mediana, si el volumen del sólido engendrado por el menor de los trapecios parciales es $100m^3$. Hallar el volumen del sólido engendrado por el segundo trapecio parcial.

A) $110m^3$ B) $120m^3$ C) $130m^3$

D) $140m^3$ E) $150m^3$

31.- En la figura el lado del cuadrado ABCD mide $\sqrt{2}+1$. Hallar la distancia del centro de gravedad de la región sombreada a la recta $\overleftrightarrow{AE}$

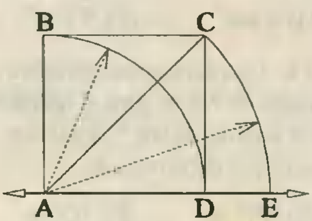
A) $\frac{2}{3}$

B) 1/3

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{8}{3}$

E) 2



32.- Calcular el volumen generado por la región sombreada cuando esta gira en torno al eje $\mathcal{L}$

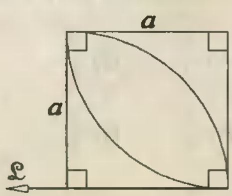
A) $a^3\pi(\pi - 1)$

B) $\frac{a^3}{2}\pi \ (\pi - 2)$

C) $\frac{a^3}{3}\pi(\pi - 3)$

D) $\frac{a^3}{4}\pi(\pi - 4)$

E) $\frac{a^3}{2}(\pi - 2)$



33.- Del gráfico hallar la distancia del centro de gravedad del sector circular AOB a la recta $\mathcal{L}$. si OA = R (B es punto de tangencia)

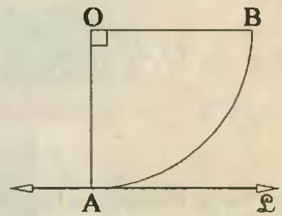
A) $\frac{R}{3\pi}(3\pi - 4)$

B) $\frac{R}{\pi}(\pi - 3)$

C) $\frac{R}{2\pi}(3\pi - 4)$

D) $\frac{R}{3\pi}(3\pi - 2)$

E) $\frac{R}{2\pi}(5\pi - 1)$



34.- M , N y L son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ de un hexágono regular ABCDEF . Hallar la relación de los volúmenes generados por la región hexagonal regular ABCDEF y la región triangular MNL al girar 360° en torno a $\overline{ED}$

A) $\frac{7}{4}$ B) 2 C) 3 D) $\frac{8}{3}$ E) 6

35.- Se considera un hexágono regular ABCDEF de lado a , luego se construye en su interior un cuadrado APQF . Calcular el volumen que engendra la superficie exterior al cuadrado e interior al hexágono cuando este gira 360° alrededor del lado AF

A) $\frac{7}{2}\pi a^3$ B) $\frac{9}{2}\pi a^3$ C) $\frac{5}{2}\pi a^3$

D) $\frac{3}{2}\pi a^3$ E) $\frac{\pi a^3}{3}$

36.- Calcular la distancia del centro de gravedad de la región sombreada al eje $\mathcal{L}$, si ABCD es un cuadrado . Además $R = 8 - \pi$

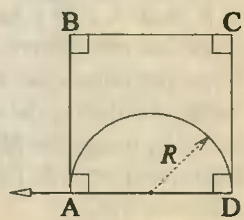
A) 3

B) 5

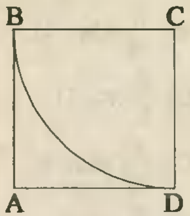
C) $\frac{20}{3}$

D) 8

E) $\frac{10}{3}$



37.- Calcular la distancia del centro de gravedad de la región sombreada al vértice C del cuadrado ABCD, si AB = 4 - π



A) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

B) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

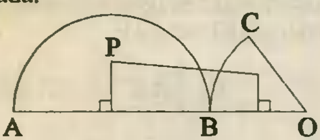
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

38.- En un triángulo ABC : AB = 13 , BC = 15 y AC = 14. Se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ las cuales se intersectan en G. Calcular el volumen del sólido engendrado por la región MGN al girar 360° alrededor del lado $\overline{AC}$

A) $\frac{224}{3}\pi$ B) $\frac{200}{3}\pi$ C) $\frac{100}{3}\pi$

D) $\frac{234}{3}\pi$ E) $112\,\pi$

39.- En la figura P y Q son los centros de gravedad del semicírculo y del sector circular BOC de 60° respectivamente, si AB = 2 OB y OC = $\sqrt{\frac{6}{7}}\pi$. Hallar el área de la región sombreada.



A) $\pi - \sqrt{3}$ B) $2\pi - \sqrt{3}$ C) $3\pi - \sqrt{3}$

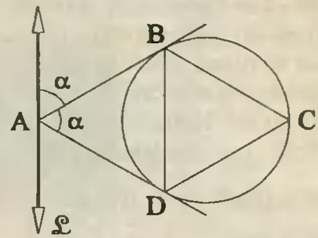
D) $4\pi - 3\,\pi$ E) $2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

40.- Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle A = 37$ y AC = 10 ; la circunferencia ex-inscrita referente a $\overline{BC}$ toca a $\overline{BC}$ en N y a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en M y L. Hallar el volumen del sólido engendrado por la región triangular MNL al girar 360° alrededor de la recta de Euler correspondiente al triángulo ABC.

A) $\frac{7227\pi}{125}$ B) $\frac{8832\pi}{125}$ C) $\frac{9856\pi}{125}$

D) $\frac{9356\pi}{75}$ E) $\frac{8437\pi}{125}$

41.- Calcular el área de la superficie generada por la circunferencia al girar 90° alrededor de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$, si ABCD es un rombo de lado $2\sqrt{3}$.



A) $4\,\pi^2$

B) $6\,\pi^2$

C) $8\,\pi^2$

D) $10\,\pi^2$

E) $12\,\pi^2$

42.- Calcular el volmen que genera un cuadrante cuyo radio mide 3 m, si barre un ángulo de 40° alrededor de uno de sus lados límites

A) $2\,\pi\,m^3$ B) $3\,\pi\,m^3$ C) $\pi\,m^3$

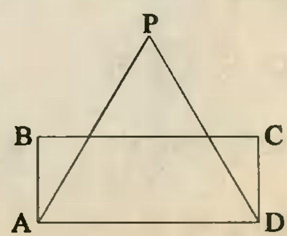
D) $4\,\pi m^3$ E) $5\,\pi\,m^3$

43.- Una semicircunferencia cuya longitud de radio es $2/\pi$ *m* gira al rededor de su diámetro un ángulo de 4π ° . Calcular el área del huso esférico determinado.

A) 8/45 m^2 B) 7/36 m^2 C) 3/16 m^2

D) 1/2 m^2 E) 1/5 m^2

44.- Calcular la razón de volúmenes de los sólidos determinados por las regiones equivalenetes ABCD y APD al girar 360° alrededor de $\overline{AD}$. (Δ APD es equilátero)



A) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{1}{2}$

CLAVES DE RESPUESTAS

CAPITULO 1: NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN (N.P.I.)

01.- D 02.- A 03.- A 04.- A 05.- D 06.- A 07.- E 08.- B 09.- D 10.- A 11.- A 12.- C 13.- A 14.- A 15.- D
16.- A 17.- A 18.- D 19.- E 20.- A 21.- D 22.- A 23.- D 24.- E 25.- E 26.- B 27.- A 28.- E 29.- B 30.- C
31.- A 32.- E 33.- A 34.- A 35.- E 36.- E 37.- B 38.- C 39.- E 40.- D

CAPITULO 2: SEGMENTOS DE RECTA

01.- A 02.- C 03.- C 04.- D 05.- B 06.- C 07.- D 08.- E 09.- D 10.- C 11.- A 12.- C 13.- D 14.- B 15.- A
16.- E 17.- D 18.- A 19.- C 20.- C 21.- B 22.- E 23.- C 24.- E 25.- C 26.- C 27.- D 28.- D 29.- C 30.- B
31.- D 32.- C 33.- C 34.- C 35.- D 36.- C 37.- C 38.- A 39.- A 40.- B 41.- C 42.- D 43.- C 44.- C 45.- B

CAPITULO 3: ÁNGULOS

01.- D 02.- E 03.- C 04.- E 05.- E 06.- A 07.- E 08.- A 09.- D 10.- D 11.- C 12.- B 13.- E 14.- C 15.- C
16.- E 17.- E 18.- D 19.- E 20.- D 21.- D 22.- B 23.- C 24.- A 25.- C 26.- C 27.- C 28.- B 29.- E 30.- D
31.- D 32.- C 33.- A 34.- B 35.- E 36.- C 37.- C 38.- D 39.- A 40.- D

CAPITULO 4: TRIÁNGULOS I

01.- A 02.- E 03.- E 04.- D 05.- B 06.- A 07.- B 08.- B 09.- A 10.- E 11.- C 12.- C 13.- A 14.- D 15.- B
16.- B 17.- C 18.- D 19.- C 20.- E 21.- A 22.- E 23.- B 24.- E 25.- D 26.- C 27.- D 28.- B 29.- C 30.- B
31.- C 32.- E 33.- E 34.- C 35.- B 36.- D 37.- D 38.- D 39.- D 40.- C

CAPITULO 5: TRIÁNGULOS II

01.- D 02.- A 03.- E 04.- E 05.- D 06.- E 07.- D 08.- E 09.- D 10.- B 11.- D 12.- D 13.- D 14.- E 15.- C
16.- A 17.- C 18.- D 19.- D 20.- B 21.- E 22.- E 23.- B 24.- D 25.- C 26.- D 27.- D 28.- B 29.- D 30.- E
31.- C 32.- E 33.- E 34.- C 35.- C 36.- D 37.- C 38.- E 39.- D 40.- D

CAPITULO 6: POLÍGONOS

01.- D 02.- A 03.- C 04.- E 05.- A 06.- C 07.- B 08.- D 09.- B 10.- D 11.- D 12.- C 13.- B 14.- B 15.- A
16.- A 17.- A 18.- C 19.- E 20.- D 21.- B 22.- C 23.- D 24.- C 25.- D 26.- D 27.- B 28.- C 29.- B 30.- D
31.- E 32.- B 33.- C 34.- D 35.- C 36.- C 37.- C 38.- D 39.- A 40.- D 41.- D

CAPITULO 7: CUADRILÁTEROS

01.- A 02.- C 03.- D 04.- B 05.- C 06.- C 07.- B 08.- C 09.- D 10.- B 11.- A 12.- E 13.- E 14.- B 15.- A
16.- A 17.- D 18.- C 19.- D 20.- C 21.- B 22.- E 23.- B 24.- D 25.- B 26.- C 27.- C 28.- A 29.- A 30.- C
31.- B 32.- D 33.- C 34.- E 35.- D 36.- D 37.- C 38.- B 39.- C

CAPITULO 8: CIRCUNFERENCIA I

01.- C 02.- D 03.- D 04.- D 05.- A 06.- B 07.- D 08.- C 09.- D 10.- B 11.- C 12.- B 13.- D 14.- C 15.- D
16.- C 17.- D 18.- E 19.- C 20.- E 21.- C 22.- E 23.- D 24.- B 25.- C 26.- E 27.- D 28.- D 29.- B 30.- C
31.- C 32.- B 33.- C 34.- C 35.- B 36.- B 37.- A 38.- B 39.- A 40.- B 41.- E 42.- E 43.- D 44.- B 45.- D
46.- C

CAPITULO 9: CIRCUNFERENCIA II

01.- B 02.- B 03.- D 04.- C 05.- C 06.- E 07.- B 08.- D 09.- D 10.- C 11.- D 12.- D 13.- E 14.- C 15.- D
16.- C 17.- D 18.- D 19.- C 20.- C 21.- D 22.- C 23.- D 24.- C 25.- C 26.- E 27.- C 28.- C 29.- C 30.- C
31.- C 32.- B 33.- D 34.- B 35.- B 36.- C 37.- D 38.- D 39.- C 40.- C

CAPITULO 10 : PUNTOS NOTABLES

01.- A 02.- C 03.- B 04.- D 05.- E 06.- C 07.- E 08.- B 09.- D 10.- B 11.- D 12.- C 13.- E 14.- C 15.- A
16.- B 17.- A 18.- E 19.- D 20.- D 21.- B 22.- D 23.- A 24.- A 25.- D 26.- C 27.- D 28.- A 29.- C 30.- D
31.- C 32.- D 33.- D 34.- D 35.- C 36.- B 37.- D 38.- A 39.- C 40.- E

CAPITULO 11: PROPORCIONALIDAD

01.- B 02.- D 03.- A 04.- D 05.- D 06.- E 07.- C 08.- C 09.- E 10.- C 11.- D 12.- B 13.- B 14.- D 15.- B
16.- E 17.- E 18.- C 19.- E 20.- A 21.- A 22.- A 23.- C 24.- E 25.- E 26.- B 27.- D 28.- A 29.- B 30.- E
31.- A 32.- C 33.- B 34.- D 35.- B 36.- C 37.- D 38.- D 39.- C 40.- B 41.- A 42.- A 43.- B 44.- C

CAPITULO 12: SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

01.- D 02.- A 03.- C 04.- A 05.- D 06.- D 07.- B 08.- D 09.- D 10.- D 11.- B 12.- C 13.- C 14.- C 15.- B
16.- E 17.- C 18.- A 19.- E 20.- A 21.- D 22.- B 23.- B 24.- C 25.- B 26.- A 27.- C 28.- C 29.- B 30.- C
31.- C 32.- E 33.- E 34.- D 35.- C 36.- A 37.- C 38.- E 39.- B 40.- B 41.- C 42.- A 43.- C 44.- B 45.- C
46.- E 47.- D 48.- E 49.- B

CAPITULO 13: RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

01.- D 02.- D 03.- E 04.- B 05.- C 06.- C 07.- E 08.- A 09.- C 10.- E 11.- D 12.- C 13.- B 14.- C 15.- E
16.- D 17.- C 18.- D 19.- E 20.- C 21.- A 22.- D 23.- E 24.- B 25.- E 26.- B 27.- D 28.- D 29.- A 30.- B
31.- D 32.- D 33.- C 34.- B 35.- A 36.- C 37.- A 38.- A 39.- C 40.- C

CAPITULO 14: RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

01.- C 02.- B 03.- D 04.-D 05.- C 06.- E 07.- A 08.- A 09.- C 10.- C 11.- A 12.- C 13.- E 14.- D 15.- A
16.- E 17.- B 18.- B 19.- B 20.- B 21.- A 22.- E 23.- D 24.- A 25.- D 26.- E 27.- C 28.- D 29.- A 30.- B
31.- D 32.- A 33.- C 34.- D 35.- E 36.- C 37.- E 38.- D 39.- C 40.- C

CAPITULO 15: RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA I

01.- D 02.- B 03.- B 04.- A 05.- C 06.- C 07.- B 08.- D 09.- C 10.- D 11.- C 12.- D 13.- D 14.- E 15.- A
16.- C 17.- A 18.- A 19.- B 20.- D 21.- C 22.- D 23.- B 24.- B 25.- D 26.- A 27.- A 28.- C 29.- E 30.- D
31.- C 32.- A 33.- D 34.- C 35.- E 36.- D 37.- D 38.- A 39.- E 40.- C

CAPITULO 16: RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA II

01.- D 02.- B 03.- D 04.- A 05.- D 06.- B 07.- A 08.- C 09.- A 10.- C 11.- C 12.- E 13.- C 14.- A 15.- A
16.- D 17.- C 18.- A 19.- B 20.- C 21.- C 22.- B 23.- A 24.- C 25.- D 26.- E 27.- C 28.- A 29.- C 30.- C
31.- C 32.- B 33.- C 34.- A 35.- C 36.- A 37.- C 38.- D 39.- B 40.- C

CAPITULO 17: POLÍGONOS REGULARES: POTENCIA Y EJE RADICAL

01.- A 02.- B 03.- B 04.- A 05.- E 06.- C 07.- D 08.- C 09.- D 10.- D 11.- E 12.- C 13.- C 14.- D 15.- B
16.- B 17.- B 18.- A 19.- A 20.- B 21.- A 22.- B 23.- E 24.- D 25.- B 26.- C 27.- E 28.- E 29.- D 30.- D
31.- B 32.- C 33.- A 34.- C 35.- E 36.- A 37.- B 38.- E 39.- C 40.- E

CAPITULO 18: ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

01.- C 02.- A 03.- B 04.- A 05.- B 06.- D 07.- A 08.- E 09.- C 10.- C 11.- A 12.- A 13.- E 14.- A 15.- E
16.- D 17.- B 18.- B 19.- A 20.- E 21.- E 22.- A 23.- D 24.- C 25.- C 26.- C 27.- C 28.- B 29.- A 30.- C
31.- A 32.- C 33.-C 34.- B 35.- D 36.- D 37.- C 38.- D 39.- D 40.- A 41.- A 42.- A 43.- E 44.- E 45.- D
46.- E 47.- B 48.- C 49.- A 50.- E 51.- E 52.- E 53.- A 54.- B 55.- E 56.- A 57.- C 58.- B 59.- C 60.- D

CAPITULO 19: RELACIÓN ENTRE LAS ÁREAS DE DOS TRIÁNGULOS

01.- E 02.- D 03.- B 04.- B 05.- E 06.- D 07.- C 08.- B 09.- D 10.- B 11.- D 12.- B 13.- C 14.- A 15.- E
16.- B 17.- E 18.- D 19.- D 20.- A 21.- A 22.- C 23.- A 24.- A 25.- C 26.- E 27.- A 28.- A 29.- C 30.- E
31.- A 32.- D 33.- A 34.- D 35.- B 36.- E 37.- A 38.- B 39.- A 40.- A

CAPITULO 20: ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

01.- D 02.- E 03.- A 04.- B 05.- E 06.- D 07.- A 08.- E 09.- C 10.- B 11.- D 12.- B 13.- C 14.- D 15.- A
16.- B 17.- E 18.- D 19.- D 20.- D 21.- D 22.- C 23.- A 24.- A 25.- D 26.- D 27.- A 28.- B 29.- D 30.- D
31.- D 32.- A 33.- D 34.- B 35.- C 36.- B 37.- C 38.- E 39.- D 40.- C

CAPITULO 21: ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES

01.- A 02.- D 03.- C 04.- C 05.- B 06.- A 07.- E 08.- D 09.- C 10.- D 11.- B 12.- C 13.- C 14.- B 15.- C
16.- B 17.- B 18.- D 19.- E 20.- D 21.- C 22.- A 23.- E 24.- B 25.- C 26.- E 27.- A 28.- A 29.- C 30.- D
31.- D 32.- C 33.- C 34.- A 35.- A 36.- A 37.- C 38.- C 39.- E 40.- A

CAPITULO 22: ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

01.- B 02.- D 03.- B 04.- C 05.- A 06.- E 07.- D 08.- C 09.- D 10.- E 11.- C 12.- C 13.- C 14.- D 15.- D
16.- E 17.- D 18.- B 19.- C 20.- B 21.- E 22.- D 23.- A 24.- B 25.- D 26.- B 27.- C 28.- B 29.- E 30.- C
31.- A 32.- E 33.- D 34.- A 35.- D 36.- C 37.- A 38.- A 39.- B 40.- E

CAPITULO 23: GEOMETRÍA DEL ESPACIO: RECTAS Y PLANOS

01.- B 02.- E 03.- C 04.- D 05.- D 06.- A 07.- D 08.- B 09.- B 10.- B 11.- A 12.- B 13.- D 14.- B 15.- D
16.- A 17.- D 18.- C 19.- A 20.- A 21.- B 22.- A 23.- D 24.- E 25.- A 26.- B 27.- E 28.- D 29.- C 30.- B
31.- C 32.- E 33.- E 34.- B 35.- A 36.- D 37.- A 38.- C 39.- B 40.- B

CAPITULO 24: ÁNGULOS POLIEDROS

01.- B 02.- A 03.- C 04.- C 05.- C 06.- B 07.- A 08.- A 09.- C 10.- D 11.- E 12.- E 13.- E 14.- A 15.- B
16.- D 17.- E 18.- B 19.- D 20.- B 21.- D 22.- C 23.- A 24 - B 25.- C 26.- A 27.- A 28.- B 29.- B 30.- C
31.- D 32.- E 33.- D 34.- E 35.- C 36.- A 37.- E 38.- D 39.- D 40.- C

CAPITULO 25: POLIEDROS REGULARES

01.- E 02.- A 03.- A 04.- C 05.- E 06.- C 07.- D 08.- A 09.- E 10.- A 11.- E 12.- A 13.- B 14.- E 15.- E
16.- A 17.- C 18.- C 19.- A 20.- D 21.- C 22.- B 23.- B 24.- E 25.- A 26.- C 27.- B 28.- E 29.- B 30.- B
31.- D 32.- A 33.- E 34.- C 35.- D 36.- D 37.- C 38.- C 39.- B 40.- A

CAPITULO 26: SÓLIDOS POLIÉDRICOS

01.- B 02.- E 03.- D 04.- A 05.- D 06.- D 07.- D 08.- C 09.- B 10.- C 11.- A 12.- B 13.- E 14.- A 15.- C
16.- E 17.- B 18.- C 19.- E 20.- D 21.- D 22.- C 23.- C 24.- B 25.- B 26.- A 27.- D 28.- D 29.- D 30.- A
31.- B 32.- E 33.- A 34.- A 35.- C 36.- B 37.- B 38.- B 39.- D 40.- E

CAPITULO 27: CILINDRO Y CONO

01.- C 02.- C 03.- B 04.- B 05.- B 06.- C 07.- D 08.- D 09.- D 10.- B 11.- C 12.- C 13.- C 14.- A 15.- E
16.- B 17.- C 18.- E 19.- D 20.- C 21.- E 22.- C 23.- C 24.- B 25.- D 26.- A 27.- A 28.- A 29.- C 30.- B
31.- C 32.- B 33.- B 34.- D 35.- B 36.- A 37.- B 38.- A 39.- C 40.- D 41.- C 42.- D

CAPITULO 28: SÓLIDOS TRUNCADOS

01.- D 02.- E 03.- B 04.- A 05.- D 06.- C 07.- A 08.- A 09.- A 10.- D 11.- D 12.- C 13.- D 14.- D 15.- A
16.- D 17.- E 18.- A 19.- A 20.- B 21.- C 22.- B 23.- C 24.- B 25.- C 26.- A 27.- B 28.- B 29.- E 30.- A
31.- E 32.- A 33.- E 34.- C 35.- E 36.- A 37.- B 38.- B 39.- A 40.- B

CAPITULO 29: LA ESFERA Y SUS PARTES

01.- B 02.- A 03.- D 04.- A 05.- C 06.- B 07.- D 08.- C 09.- E 10.- B 11.- B 12.- B 13.- E 14.- B 15.- D
16.- D 17.- B 18.- D 19.- C 20.- C 21.- C 22.- A 23.- E 24.- A 25.- A 26.- D 27.- A 28.- C 29.- A 30.- C
31.- A 32.- D 33.- C 34.- C 35.- B 36.- A 37.- D 38.- B

CAPITULO 30: SUPERFICIES Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

01.- B 02.- C 03.- A 04.- D 05.- E 06.- B 07.- C 08.- B 09.- E 10.- E 11.- B 12.- B 13.- A 14.- D 15.- A
16.- A 17.- D 18.- D 19.- A 20.- B 21.- C 22.- A 23.- A 24.- E 25.- E 26.- D 27.- C 28.- A 29.- A 30.- D
31.- C 32.- B 33.- B 34.- D 35.- A 36.- C 37.- D 38.- A 39.- B 40.- C 41.- C 42.- A 43.- A 44.- B
39.- D 40.- C 41.- C

BIBLIOGRAFIA

1.- **Hernrioh Dorrie**
100 Great Problems of Elementary Mathematies
Their History and Solution
New York
Dover Publications, Inc 1990.

2.- **N. Antonov M. Vygodsky, V. Nikitin, A: Sonkin**
100 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría
Madrid - Paraninfo 1985

3.- **A. V. Pogórolov**
Geometría Elemental
Editorial Mir Moscú 1974

4.- **Charles W. Trigg**
Mathematical Quickios
270 Stimulating Problems with Solutions
Dover Publications, Inc, New York
1985

5.- **Hugo Steinhaos**
One Hundred Problems in Elementary Mathematics
Dover Publications, Inc, New York
1985

6.- **V. Gúsiov**
V. Litrinenko
A. Mordkóvich
Prácticas para resolver
Problemas Matemáticos
Editorial Mir Moscú 1989

7.- **C.V. Durell**
A Concise Geometry London
G. Bell and Sons Ltd. 1992

8.- **Ross Honsborgor**
Manuel García Ardura.
Librería y Casa Editorial Hernando
S.A. - Madrid

9.- **Geometría Elemental**
A.V. POGORELOV
Editorial Mir Moscú 1974

10.- **Problemas de Matemáticas Elementales**
V.LIDSKI
Editorial Mir Moscú 1978

11.- **Geometría**
Dr. Antonio Paz Sordía
Editorial Mineva Books LTD 1963

12.- **Geometría: Curso Superior**
Ediciones Bruño España1964

13.- **Geometría Plana y del Espacio**
J. Wentworth y David Smith
Printed in The United States of America
1915
Series Matemáticas Wentworth-Smith

14.- **¿Qué es la Matemática?**
R. Courant y H. Robbins
Ediciones Aguilar S.A.
5ta Edición España 1967

15.- **Geometría Informal**
National Council of Teachers of Mathematics
U.S.A. Editorial Trillas, México 1970

16.- **Historia de las Matemáticas**
Marcell Boll
Editorial Diana 3ra Edición, Mayo 1969

17.- **Tratado de Geometría**
Gabriel Velasco
Editorial Limusa, México 1ra Edición 1983

18.- **Problemas Matemáticos: Geometría Plana y del Espacio**
V. Gusiev, V. Litvinenko y A. Movdkovich
Editorial Mir Moscú 1989

19.- **Matemática Moderna-Geometría**
C.H. Repetto, M.E Linskens y H.B Fesquet
Editorial KAPELUSZ
Buenos Aires 1967

20.- Ejercicios de Geometría Plana
Edgard De Alencar 18va Edición
Printed in Brazil 1986

21.- Elementos de Matemáticas Superiores
II. Zaitsev Editorial Mir, Moscú 1977

22.- Introducción a la Geometría Moderna
Levi S. Shively.
Compañía Editorial Continental S.A
2da Edición, Junio de 1968

23.- Problemas de Examen de Estado
Edelvives
Editorial Luis Vives S.A, España 1947

24.- Serie de Nuevas Matemáticas: Matemáticas I
C.W. Lucas y R.T James
Unión Tipográfica
Editorial Hispano Americana (U.T.E.H.A.)
1ra Edición, 1974

25.- Cálculo
Serge Lang Volumen I
Addison- Wesley Publishing Company 1973

26.- Problemas de Geometría Plana y del Espacio:
Complementos de Álgebra para la enseñanza Superior y de escuelas Especiales: Curso de Matemáticas
Colección H.E.C. Santiago de Chile

27.- Journal de Mathematiques Elementaires
H. Vuirbert LibraireVuibert-Paris

28.- Tratado Metódico de Matemáticas Elementales
Dr. Gustavo Holzmüller
Editorial Labor S.A

29.- Exercices De Geometrie I - II, F.G.M.
2 000 Problemas Resueltos
Editorial Maison A. Mame & Fils 1907

30.- Geometría Analítica y Cálculo
Francisco y Luis De la Burbulla y Monterrubio
U.T.E.H.A. 1966

31.- Atlas de Matemáticas (Álgebra y Geometría)
F. Hurtado, P. Taniguchi, A. Quintana, B. Sana
Huja y J. Villanova
Ediciones Jover 1988

32.- Historia e Historias de Matemáticas
Mariano Perero
Grupo Editorial Iberoamericana 1994

33.- Diccionarios Rioduero-Forjadores de la Ciencia
Ediciones Rioduero 1979

34.- Breve Historia de la Geometría
Francisco Vera
Editorial Losada S.A Buenos Aires 1948

35.- Topografía
Eduardo Villate, Álvaro Torres
Editorial Norma Bogotá-Colombia 1983

36.- Los Grandes Matemáticos - su Vida y sus Obras
E.T. Bell
Editorial Losada S.A Buenos Aires 1948

37.- Consultor Juvenil: Matemáticas
Federico Sabriá
Editorial Argos Vergara
Barcelona 1986

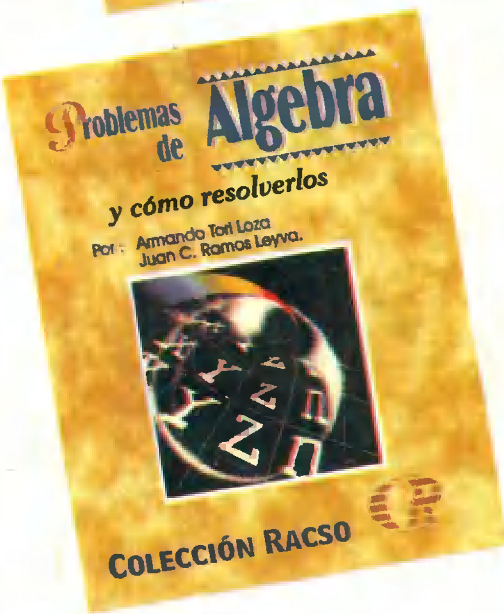
38.- Universitas Tomo 13: El Pensamiento Filosófico
Salvat Editores S.A, Barcelona 1987

39.- Serie Matemética Moderna: Geometría
Edwin E. Moise y Floyd L. Downs JR.
Editorial Norma 1972

40.- Álgebra Vectorial
P. Gusiátnikov, S. Reznichenko
Editorial Mir Moscú 1988

41.- La Divina Proporción
Luca Paccioli
Editorial Losada Buenos Aires 1946

Otros libros de la misma coleción !!



522-1634