# PROBLEMAS DE

# Trigonometría

## Y CÓMO RESOLVERLOS

NUEVA COLECCIÓN RACSO

RACSO EDITORES

NUEVA COLECCIÓN RACSO

# Problemas de TRIGONOMETRÍA y cómo resolverlos

RACSO EDITORES

*Edición Revisada y Corregida*

Por: Félix Aucallanchi Velásquez

Primera Edición en Español



**Printed in Perú - Impreso en Perú.**

**Imprenta MAQUETI E.I.R.L. Jr. Carlos Arrieta 1319 - Santa Beatriz - Lima 1**

SERIE DE LIBROS Y
COMPENDIOS
CIENTÍFICOS

COLECCIÓN
RACSO

# Problemas de Trigonometría y cómo resolverlos

Primera Edición

El libro Problemas de Trigonometría y cómo resolverlos, para estudiantes de nivel básico y superior, es una obra colectiva que ha sido concebida, formulada y diseñada por el departamento de Ediciones de RACSO EDITORES, bajo la dirección de Félix Aucallanchi V.

La realización de esta obra se encargó a:

**Juan Carlos Sandoval Peña**

**Wilber Manuel Chilet Cama**

**Mario Orea Chavarria**

**Uriel Aspilcueta Pérez**

La realización gráfica del libro Problemas de Trigonometría y cómo Resolverlos ha sido efectuada por los siguientes especialistas:

Rosario Esther Alpiste Pacheco
Sandrita Harline Tarrillo Dávila
Maribel Alpiste Pacheco
Diagramadoras

---

Paul Farromeque Alegre
Diseño de Carátula

---

**Supervisión General:**

Dr. *Juan Carlos Sandoval Peña*

**Supervisión Técnica de la Edición Revisada y Corregida:**

*Luis Cabanillas Dulanto*

**Supervisión de la edición:**

*Miguel Ángel Díaz Lorenzo*



Primera edición en español

# PRÓLOGO

Colección RACSO es una reunión estructurada de textos orientados a satisfacer , particularmente, al estudiante preuniversitario y, en general, a la comunidad educativa compuesta por estudiantes del nivel básico y superior así como de docentes, quienes encuentran en estas obras un estupendo complemento a su tarea diaria de aprender temas de índole científico.

Esta colección de libros fue publicada a finales del año 1993, siendo la primera de ellas el texto llamado Problemas de Física y cómo resolverlos, para luego de cerca de 11 años completarse con el último de la serie titulado Problemas de Trigonometría y cómo resolverlos. Parafraseando a los poetas, "ha corrido mucho agua bajo el puente", es una sentencia que gráfica mejor este proceso, pues en efecto, la realización de cada una de las obras que constituye esta colección ha tomado tiempo para concebirla, madurarla y publicarla, al margen de las dificultades a las que nos enfrentamos los que producimos libros nacionales: falta de financiamiento, dedicación a tiempo completo para la selección del material, la composición de los textos y gráficos, el diseño y acabados concordantes con la naturaleza de la obra, la piratería,...etc.

Nada nos ha detenido, el entusiasmo no se ha agotado, por el contrario hemos encontrado la forma de mejorar nuestras obras, y la palabra clave ha sido capacitación, es decir, hemos continuado estudiando la especialidad a la que nos hemos dedicado desde hace más de 25 años para afinarla y actualizarla, además de perfeccionar nuestra didáctica con cursos de postgrado: Diplomados, Maestrías y Doctorados. Todo ello nos ha convertido en profesionales de la educación capaces de elaborar obras que respondan a la exigencia de una educación de calidad por parte de los que utilizan nuestros textos.

Sirvan estas líneas para agradecer la preferencia de los miles de lectores que confiaron en nuestro trabajo, y que por ello los recomendaron a las siguientes generaciones. Muchos de aquellos lograron alcanzar sus objetivos y nos complace ser reconocidos en variados eventos académicos, por muchos profesionales, entre los cuales están quienes utilizaron nuestras obras.

Para usted que lee ésta presentación, que es un lector actual, le hemos preparado una NUEVA COLECCIÓN RACSO, renovada, actualizada, madurada y didácticamente superior a nuestra anterior colección. En efecto, hemos utilizado todos los recursos de los que disponemos actualmente en términos pedagógicos: mapas conceptuales, ayudas de comprensión teórica a través de resúmenes pertinentemente actualizados, estrategias de resolución de problemas, resoluciones argumentadas y una efectiva selección de problemas propuestos. Todo esto convierte a cada texto de la colección en una máquina de autoaprendizaje, aspirando a lograr con ello el desarrollo de la capacidad de aprender a aprender, que es un caro postulado del constructivismo moderno.

Los autores de esta NUEVA COLECCIÓN RACSO, son profesionales de la educación que poseen un perfil definido y común: Son ingenieros o licenciados en ciencias, son además licenciados en educación matemática, física o química, son diplomados en didáctica de su especialidad, son magísteres en el área de investigación educativa y a la fecha la mayoría de ellos son doctorandos, además de ser docentes cuya experiencia laboral la han desarrollado en las mas prestigiosas instituciones educativas en tres niveles de educación: secundaria, preuniversitario y universitario. Un equipo así consolida nuestra labor editorial y nos da la confianza de producir textos de calidad.

Este equipo labora en coordinación permanente con nuestra casa editorial y es el grupo de profesionales que tiene a su cargo los talleres de capacitación que realizamos para tratar temas educativos y presentar nuestras obras.

Dado que los problemas educativos de índole académico, conviven con nosotros y existe una comprobada inoperancia de la mayoría de las universidades en hacer investigación en el campo educativo para identificar sus causas y proponer soluciones concretas, este equipo de profesionales, del cual formo parte, ha tomado la iniciativa de asumir tal tarea desde el sector privado y se ha constituido en el CENTRO POLYA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA – CEPID, para quienes les aguarda la misión de contribuir a identificar y proponer soluciones a los principales problemas de tipo pedagógico que imposibilitan el adecuado aprendizaje de las ciencias. Los resultados de tales investigaciones se publicarán en esta casa editorial, con lo cual estamos asumiendo el compromiso de mejorar la calidad de la educación en nuestro país.

No puedo pasar por alto el reconocimiento que merecen, de nuestra parte hacia ellos, los promotores de colegios, centros preuniversitarios privados y directores de los centros preuniversitarios de las distintas universidades a lo largo y ancho del Perú, quienes por su oportuna decisión optaron por revisar, primero, nuestras obras y luego emplearlas como material de clase o de complemento en sus bibliotecas. A ellos nuestro profundo y sincero agradecimiento por tal oportunidad.

Quiero anunciar también que nuestros lectores muy pronto podrán acceder a nuestra página web, que crearemos con el fin de complementar sus aprendizajes en algún área específica de su interés, poniéndonos a tono con el uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación que venimos proponiendo en nuestras obras escolares.

Para concluir, quiero manifestar mi complacencia por las iniciativas que vienen tomando las universidades privadas en cuanto se refiere a redefinir el perfil del profesional que desean formar, lo que los ha conducido a redefinir el perfil del alumno que desean que ingresen en ellas, todo a la luz del proceso de certificación universitaria en que se encuentran trabajando. Esto a su vez ha obligado a modificar la estructura y contenido del examen de ingreso, en los que ahora las preguntas ya no sólo se elaboran para establecer el nivel de conocimientos de parte del postulante, sino, reconocer las habilidades que éstos poseen ante situaciones problémicas contextualizadas. Sin duda, este cambio contribuirá a mejorar el proceso de selección de los postulantes, así como a la propia preparación preuniversitaria. Espero que lo mismo ocurra con el resto de universidades nacionales. A los profesionales que se dedican a la preparación preuniversitaria les aguarda la tarea de adecuación, adaptación y superación ante estas nuevas condiciones académicas. Buena suerte.

La NUEVA COLECCIÓN RACSO, ha contemplado estos cambios y cree también que éstos apuntan a mejorar la calidad de la educación en sus niveles básicos, pues, en ellos el examen de admisión es un referente para diseñar los procesos de enseñanza aprendizaje que se llevan a cabo en las aulas. Por todo ello, aspiro que esta colección se encuentre a la altura de las nuevas exigencias.

Hasta pronto.

Félix Aucallanchi Velásquez

# AL PROFESOR

Problemas de Trigonometría y cómo resolverlos, es un texto elaborado con el propósito de que los docentes encuentren en él un complemento para la elaboración de su material educativo así como una guía para diseñar sus actividades de enseñanza aprendizaje.

Las principales y permanentes dificultades que encuentran los docentes en la elaboración de sus materiales es la selección de problemas para la realización de sus clases, talleres, seminarios, prácticas calificadas, tareas, etc. El texto ha sido elaborado para que el docente encuentre aquí un oportuno y eficaz recurso.

La trigonometría es una parte de la matemática cuya enseñanza requiere de saberes previos en Sistemas Numéricos, Álgebra, Funciones y Geometría. Sin duda se trata de una ciencia cuya enseñanza demanda de mucha creatividad de parte del docente para diseñar sus actividades pedagógicas, lo cual a su vez requiere de un dominio de las ciencias afines indicadas y de modernas estrategias didácticas.

En esta obra el docente encontrará que el texto se ha dividido en tres partes: La teoría y enunciados de problemas resueltos, La resolución de problemas y Los enunciados de problemas propuestos.

Podría sorprender, a primera vista, que no hay razón para separar los enunciados de los problemas de sus respectivas resoluciones, sin embargo, sí las tenemos. Investigaciones educativas hechas sobre este aspecto demuestran que la mayoría de los estudiantes que leen los problemas, no los intentan si la resolución se encuentra al pié, perdiéndose de este modo la posibilidad de desarrollar habilidades matemáticas en el estudiante.

En trigonometría como en cualquier otra área de la matemática, es limitado el número de problemas que se proponen a los estudiantes y que tienen la característica de ser contextualizados, es decir, ser suficientemente reales. En este texto hemos dado una adecuada cabida a este tema en situaciones problémicas que revelan la intención de plasmar constructivamente nuestra concepción pedagógica y la tendencia actual de la enseñanza de las ciencias.

En el texto se incluyen temas que van más allá de la formación e información escolar, sin embargo y si usted lo cree conveniente, puede desarrollarse una parte o el íntegro de los mismos sin poner en riesgo su comprensión y conexión con el resto de los temas. Todo esto pasa por la generosidad del tiempo que se le destine a su enseñanza.

En trigonometría existen temas específicos en los que se requiere bastante claridad y precisión en los conceptos y definiciones, por lo que se constituyen muchas veces en aspectos que provocan controversia. En ellos hemos puesto especial énfasis y cuidado, y son: Circunferencia Trigonométrica, Ecuaciones Trigonométricas, Inecuaciones Trigonométricas, Límites y Derivadas Trigonométricos, entre otros.

Los enunciados de los problemas han sido cuidadosamente redactados para poder identificar claramente qué habilidad matemática se pretende desarrollar con cada uno de ellos: Calcular, Demostrar, Identificar, Visualizar, Resolver, Aproximar, Algoritmizar, Definir,...etc. Enseñar matemática es sólo un pretexto para desarrollar habilidades y convertir a las personas en seres competentes, por ello proponemos aprender una matemática para la vida. Al respecto es conveniente revisar los trabajos del cubano Dr. Delgado Rubí del ISPJAE.

Las resoluciones se han elaborado trazando la estrategia mas adecuada, de este modo el estudiante puede reconocer qué pasos se han propuesto seguir para llegar a establecer la solución, y no jugamos con él al gato y al ratón, es decir, la resolución no le resultará inesperada, si no será una consecuencia lógica de un plan previamente diseñado.

Esperamos que esta forma de presentación del texto logre satisfacer su exigente selección de materiales educativos.

# AL ESTUDIANTE

Los libros de la Nueva Colección Racso, son una apuesta por el desarrollo de las ciencias en nuestro país, por el desarrollo de nuestros pueblos y por el crecimiento cultural de nuestra nación. Postulamos que una educación de calidad pasa por muchos aspectos, entre otros una adecuada condición para el estudio, la selección de la institución educativa, de buenos profesores y de buenos materiales educativos. En este último rubro se encuentra nuestra propuesta bibliográfica.

Problemas de Trigonometría y cómo resolverlos es el último de una serie de textos que se vienen publicando desde hace casi once años y con relativo éxito. Este texto presenta el curso de Trigonometría de un modo práctico, es decir, mostrando su aspecto aplicativo a través de situaciones problémicas concretas.

¿Qué requieres saber para aprender, comprender y aplicar los conceptos, definiciones y teoremas de la Trigonometría? Sería extenso recordarte todo lo que se supone has aprendido hasta ahora, pero en la medida que hayas desarrollado una cultura matemática se hará mas comprensible esta importante área de la ciencia, sin embargo, vale la pena puntualizar aspectos que deben merecer una permanente atención y evocación y son: Sistemas Numéricos, Álgebra, Funciones y Geometría.

De lo primero necesitas recordar los campos numéricos y sus propiedades, de lo segundo la capacidad de traducir situaciones concretas en expresiones matemáticas así como sus propiedades, de lo tercero debes recordar que el nivel de correspondencia entre dos o mas elementos se puede expresar por una regla y de lo último la capacidad de visualizar y modelizar los cuerpos a través de figuras. Puesto que nos asiste la autoridad intelectual y profesional, adquirida por nuestra capacitación y por el ejercicio de su aplicación, es que hemos creído conveniente dividir este texto, es decir todos los capítulos, en tres partes:

1. Teoría, Problemas Modelos, Estrategias de Resolución y Enunciados de Problemas Resueltos. Aquí encontrarás, en cada capítulo, un resumen teórico de todo el tema, una adecuada selección de problemas modelos resueltos que te permitirá reconocer la forma de presentación de los mismos y cómo es que se plantean sus resoluciones. Asimismo te detallamos, en un cuadro aparte, las estrategias que recomendamos para la resolución de problemas del tema. Luego observarás los enunciados de una vasta selección de problemas para que los intentes por tu cuenta. Te lo repito, esta forma de presentación la encontrarás hasta terminar con el último capítulo.
2. Resolución de Problemas. En esta segunda parte encontrarás las resoluciones de cada uno de los problemas que leíste e intentaste en la primera parte. Nos interesa que desarrolles tu capacidad de argumentar, por ello las resoluciones se presentan bien fundamentadas, al punto que tú puedas continuar con la resolución si acaso el método no es el mismo que tu empleaste en tus intentos.
3. Enunciados de Problemas Propuestos. En esta última parte encontrarás una batería de problemas de cada tema, seleccionados adecuadamente y en un nivel progresivo de dificultad.

Cada una de estas partes las puedes identificar por el pié de página con los siguientes códigos:

**T1 | 12** : Teoría, número del capítulo y número de página.

**R12 | 437** : Resolución de problemas, número del capítulo y número de página

**PP22 | 877** : Problemas Propuestos, número del capítulo y número de página.

Esperando que hayas comprendido el mensaje, te deseamos ¡Buena suerte!

# CONTENIDO

*Esta obra está dedicada a los estudiantes que intentan forjarse un mejor destino en circunstancias que incluso no les son favorables.*

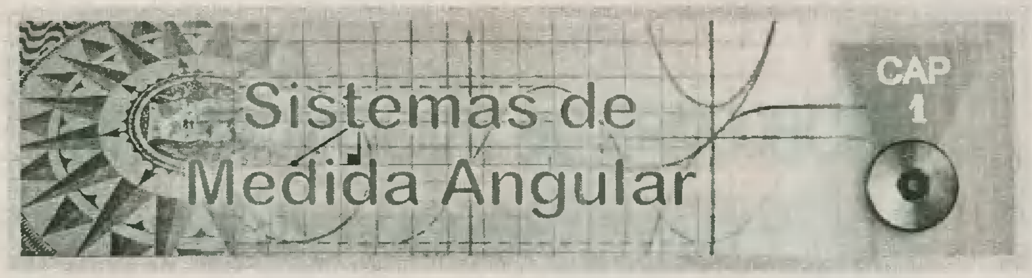
# PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA Y COMO RESOLVERLOS

## PARTE I


## ENUNCIADOS DE PROBLEMAS RESUELTOS

NUEVA

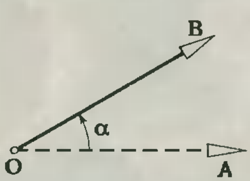
COLECCION RACSO



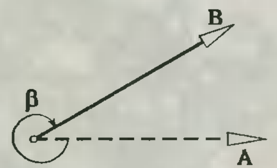

## 1.1. ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

***Definición.***- Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo al rededor de un punto fijo llamado vértice (la rotación se realiza sobre un mismo plano) desde una posición inicial (lado inicial), hasta una posición final (lado final).


Cuando la rotación se realiza en sentido antihorario (↺), la medida del ángulo generado es de signo positivo, en cambio cuando la rotación se realiza en sentido horario (↻), la medida del ángulo es de signo negativo. En general la medida del ángulo trigonométrico toma cualquier valor real.




α: ángulo de valor positivo ($\alpha > 0$)

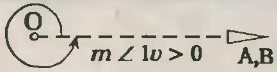


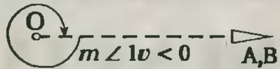

β: ángulo de valor negativo ($\beta < 0$)

Nota.- Por convención al ángulo nulo se le considera ángulo trigonométrico, a pesar que no se genera de una rotación.

### 1.1A Ángulo de una vuelta ($\angle 1v$)

Es aquel ángulo trigonométrico en el cual el rayo vuelve a su posición inicial por primera vez.




## 1.2. SISTEMAS ANGULARES

Para la medición de ángulos, tenemos tres sistemas llamados:

Sistema Sexagesimal (Inglés) ; Sistema Centesimal (Francés)

Sistema Radial o Circular (Internacional)

### 1.2A Sistema Sexagesimal (Sistema inglés)

Su unidad de medida es el grado sexagesimal ($1^\circ$), que se define como:

$$1^\circ = \frac{m\angle 1v}{360} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{m\angle 1v = 360^\circ}}$$

Equivalencias: $1^\circ = 60$ *minutos sexagesimales* $= 60'$

$1' = 60$ *segundos sexagesimales* $= 60''$ $\quad\therefore\quad$ $1^\circ = 3\,600''$

El empleo de estas unidades se denota así: $a^\circ + b' + c'' = a^\circ b' c''$

### 1.2B Sistema Centesimal (Sistema francés)

Su unidad de medida es el grado centesimal ($1^g$) , que se define:

$$1^g = \frac{m\angle 1v}{400} \quad \therefore \quad \boxed{\boldsymbol{m\angle 1v = 400^g}}$$

Equivalencias: $1^g = 100$ *minutos centesimales* $= 100^m$

$1^m = 100$ *segundos centesimales* $= 100^s$ $\quad\therefore\quad$ $1^g = 10\,000^s$

El empleo de estas unidades se denota así: $x^g + y^m + z^s = x^g y^m z^s$

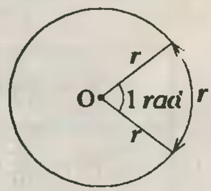
### 1.2C Sistema Radial (Circular o Internacional)

Tiene como unidad de medida al *radián* (1 *rad*) , que se define así:

$$1\,rad = \frac{m\angle 1v}{2\pi} \quad \therefore \quad \boxed{\boldsymbol{m\angle 1v = 2\pi\,rad}} \qquad (\pi \approx 3{,}1416)$$

**Interpretación geométrica del radián**

Geométricamente 1 *rad*, es la medida de un ángulo central, en el cual la longitud del arco subtendido es igual a la longitud del radio de la circunferencia, tal como se indica en la figura.




**CONCLUSIONES:**

i) $360^\circ = 400^g = 2\pi\,rad$      i) $180^\circ = 200^g = \pi\,rad$

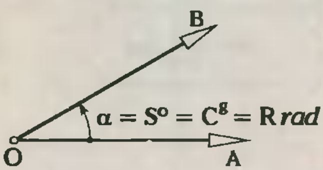
O bien: $\boxed{\boldsymbol{9^\circ = 10^g}}$ $\quad$ $\boxed{\boldsymbol{\pi\,rad = 180^\circ}}$ $\quad$ $\boxed{\boldsymbol{\pi\,rad = 200^g}}$

## 1.3. RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LOS TRES SISTEMAS

S = número de *grados sexagesimales*

C = número de *grados centesimales*

R = número de *radianes*



Siendo S, C y R los números que representan las medidas sexagesimal, centesimal y radial de un mismo ángulo, los se relacionan de la siguiente forma:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \quad \text{o bien:} \quad S = 9k \qquad C = 10k \qquad R = \frac{\pi k}{20}$$

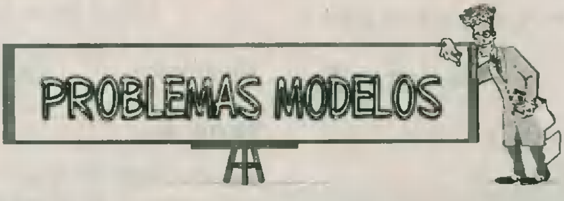
Donde $k$ es una constante de proporcionalidad.

## 1.4. CUADRO COMPARATIVO DE LOS TRES SISTEMAS

| SISTEMA | $m\angle 1v$ | EQUIVALENCIAS | NÚMEROS QUE EXPRESAN LA MEDIDA | NÚMERO DE MINUTOS | NÚMERO DE SEGUNDOS | RELACIONES NUMÉRICAS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SEXAGESIMAL | $360°$ | $1° = 60'$<br>$1' = 60''$<br>$1° = 3\,600''$ | S (grados sexagesimales) | 60 S | 3 600 S | $\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$ ⇓ |
| CENTESIMAL | $400^g$ | $1^g = 100^m$<br>$1^m = 100^s$<br>$1^g = 10\,000^s$ | C (grados centesimales) | 100 C | 10 000 C | $\boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10}}$<br>$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}}$ |
| RADIAL | $2\pi\,rad$ | ——— | R | ——— | ——— | $\boxed{\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$ |

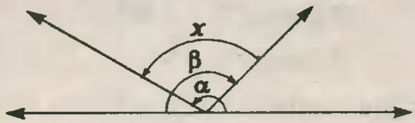
EQUIVALENCIAS

| | | | |
|---|---|---|---|
| $15° = \frac{\pi}{12}\,rad$ | $45° = \frac{\pi}{4}\,rad$ | $75° = \frac{5\pi}{12}\,rad$ | $180° = \pi\,rad$ |
| $18° = \frac{\pi}{10}\,rad$ | $54° = \frac{3\pi}{10}\,rad$ | $90° = \frac{\pi}{2}\,rad$ | $225° = \frac{5\pi}{4}\,rad$ |
| $22°30' = \frac{\pi}{8}\,rad$ | $60° = \frac{\pi}{3}\,rad$ | $120° = \frac{2\pi}{3}\,rad$ | $270° = \frac{3\pi}{2}\,rad$ |
| $30° = \frac{\pi}{6}\,rad$ | $67°30' = \frac{3\pi}{8}\,rad$ | $135° = \frac{3\pi}{4}\,rad$ | $300° = \frac{5\pi}{3}\,rad$ |
| $36° = \frac{\pi}{5}\,rad$ | $72° = \frac{2\pi}{5}\,rad$ | $150° = \frac{5\pi}{6}\,rad$ | $360° = 2\pi\,rad$ |



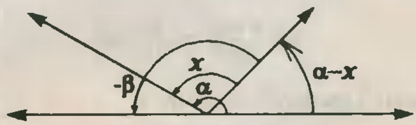

**PROB. 1**

Según la figura, expresar $x$ en términos de $\alpha$ y $\beta$.




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Graficamos los ángulos en sentido antihorario y construimos el ángulo $\alpha - x$.



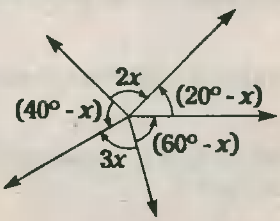

Este gráfico nos muestra que:

$$(\alpha - x) + (-\beta) = 180^\circ$$

$\therefore$ $\boxed{x = \alpha - \beta - 180^\circ}$

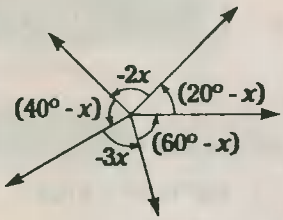
**PROB. 2**

De la figura que se muestra, determinar el valor del ángulo $x$.




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Graficando los ángulos en un solo sentido (sentido antihorario), tendremos:




A partir de esto se observa que:

$$(20^\circ - x) - 2x + (40^\circ - x) - 3x + (60^\circ - x) = 360^\circ$$

$\Rightarrow$ $-8x = 240^\circ$ $\therefore$ $\boxed{x = -30^\circ}$

**PROB. 3**

Reducir la siguiente expresión:

$$E = \frac{90^\circ + \frac{\pi}{2} rad + 100^g}{30^\circ + 50^g + \frac{\pi}{12} rad}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Expresando todos los ángulos en *radianes*:

$$E = \frac{\frac{\pi}{2} rad + \frac{\pi}{2} rad + \frac{\pi}{2} rad}{\frac{\pi}{6} rad + \frac{\pi}{4} rad + \frac{\pi}{12} rad} = \frac{3\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\cancel{r}ad}{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\cancel{r}ad}$$

$\therefore$ $\boxed{E = 3}$

**PROB. 4**

Siendo: S y C los números de grados sexagesimales y centesimales respectivamente y R el número de *radianes* de un mismo ángulo, reducir:

$$N = \frac{\frac{C}{20} + \frac{S}{18} + R}{C - S + R}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Se sabe que: $S = 9k$ ; $C = 10k$ y $R = \dfrac{\pi k}{20}$

Luego: $$N = \dfrac{\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{2}+R}{10k-9k+R}$$

$$\Rightarrow \quad N = \dfrac{k+R}{k+R} \quad \therefore \quad \boxed{N = 1}$$

**PROB. 5**

Calcular el valor de $x$ en :

$$171^\circ x' 12'' = 3\,rad$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Sabemos que: $1\,rad \approx 57^\circ 17' 44''$

Luego: $171^\circ x' 12'' = 3\,(57^\circ 17' 44'')$

$$171^\circ x' 12'' = 171^\circ 51' \underbrace{132''}_{2'+12''}$$

A continuación procedemos a efectuar la suma de minutos, deduciéndose que :

$$171^\circ x' 12'' = 171^\circ 53' 12''$$

Finalmente: $\boxed{x = 53}$

**PROB. 6**

Se sabe que 25 grados en un sistema "N" equivalen a 60 grados sexagesimales ¿A cuántos radianes equivalen 5 grados "N"?

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

25 grados "N" < > 60°

5 grados "N" < > $x$

Sacando quinta a la condición inicial, encontramos que:

5 grados "N" < > 12°

A continuación, transformamos dicho ángulo a radianes, obteniendo:

$$12^\circ \dfrac{\pi\,rad}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{15}\,rad$$

Luego 5 grados N equivale a:

$$\boxed{\dfrac{\pi}{15}\,rad}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Ante situaciones problémicas en donde se presenten ángulos orientados (ángulos trigonométricos), éstos se deben graficar en un solo sentido, de preferencia en sentido antihorario (positivo)*

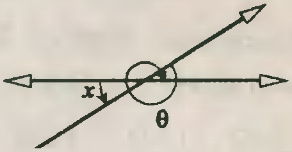
2) *Cuando los ángulos trigonométricos estén expresados en diferentes sistemas, se deben transformar todos a un solo sistema.*

3) *Si la condición del problema incluye a los números S, C y R (convencionales), se recomienda reemplazarlos por las siguientes relaciones:*

$$S = 9k \quad ; \quad C = 10k \quad ; \quad R = \dfrac{k\pi}{20}$$


### *ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO*

**01.-** De la figura mostrada, expresar $x$ en términos de $\theta$.




A) $2\pi+\theta$ B) $2\pi$ C) $\pi-\theta$ D) $\theta$ E) $-2\pi-\theta$

**02.-** De la figura mostrada, determine "$x$" en términos de "$\alpha$".

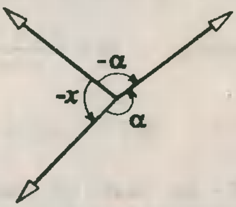
A) $\alpha+360°$

B) $\alpha+180°$

C) $2\alpha-360°$

D) $360°-\alpha$

E) $180°-\alpha$




**03.-** De la figura mostrada, determinar "$x$"

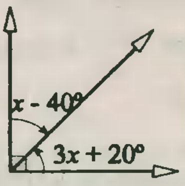
A) 15°

B) 20°

C) 25°

D) 30°

E) 45°




**04.-** De la figura mostrada, evaluar el ángulo "$x$".

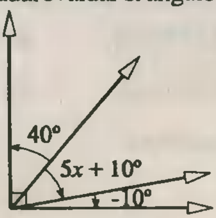
A) 40°

B) 20°

C) -20°

D) -50°

E) -10°




**05.-** Del gráfico mostrado, calcule:

$$M=\frac{x}{20+y}$$

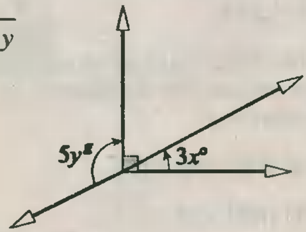
A) -1/2

B) -3/2

C) 1/2

D) 3/2

E) 1




**06.-** De la figura mostrada determine: "$x+y$" en *radianes*.

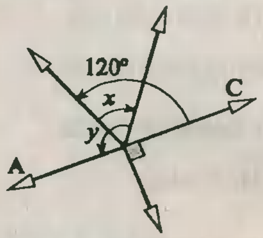
A) $\pi/3$

B) $\pi/2$

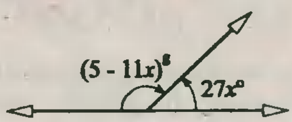
C) $\pi/4$

D) $3\pi/4$

E) $\pi/5$




**07.-** De la figura mostrada, calcular "$x$"




A) -2 B) -1 C) 5 D) 4 E) 3

**08.-** Del gráfico mostrado a qué es igual: $10x-9y$

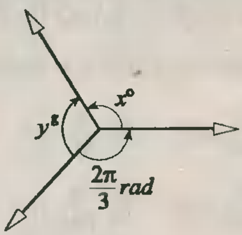
A) 1 100

B) 360

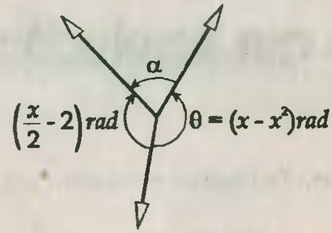
C) 280

D) 2 400

E) 1 800



**09.-** En la figura mostrada, calcular (en *rad*) el valor del ángulo $\alpha$ para que el ángulo $\theta$ sea máximo.




A) 3,34

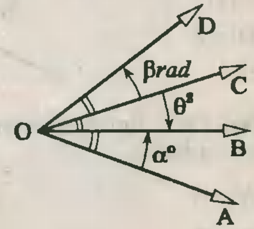
B) 2,6

C) 4,2832

D) 1,7431

E) 2,1406

**10.-** En la figura mostrada, si OB y OC trisecan al ángulo AOD entonces la expresión incorrecta es:




A) $10\alpha+9\theta=0$

B) $180\beta-\alpha\pi=0$

C) $200\beta+\theta\pi=0$

D) $380\beta=\pi(\alpha-\theta)$

E) $900\beta=\pi(9\theta+5\alpha)$

### *CONVERSIONES*

**11.-** Evaluar:

$$M=\frac{1^g+2^g+3^g+4^g+...+2005^g}{1^o+2^o+3^o+4^o+...+2005^o}.10$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

**12.-** Dadas las siguientes medidas angulares:

$\alpha=0{,}5236\,rad$ ; $\beta=30^g50^m$ ; $\theta=27°25'$

ordenar de menor a mayor. Utilizar: $\pi=3{,}1416$.

A) $\beta<\alpha<\theta$ B) $\theta<\beta<\alpha$ C) $\alpha<\beta<\theta$

D) $\theta<\alpha<\beta$ E) $\alpha<\theta<\beta$

**13.-** Convertir: $1°\,15'$ a *radianes*.

A) $\frac{\pi}{188}rad$ B) $\frac{\pi}{90}rad$ C) $\frac{\pi}{144}rad$

D) $\frac{\pi}{200}rad$ E) $\frac{\pi}{196}rad$

**14.-** Al convertir $\pi/50\ rad$ al sistema sexagesimal se obtiene $A°\,B'$.

Calcula: $M=\dfrac{B-2A}{B-10A}$

A) 7 B) 5 C) 11 D) -2 E) -3

**15.-** Si se verifica que: $\frac{\pi}{69}\ rad <> x°\,y'z''$ ; $(x, y, z \in \mathbb{N})$. Calcular el complemento de: $(x+y-z)°$.

A) 83° B) 60° C) 53° D) 30° E) 12°

**16.-** Si se cumple que: $37{,}98° <> \overline{AB}^g\ \overline{B0}^m$ ;

determinar el valor de: $M=A^2-B^2$

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

**17.-** Sabiendo que:

$$\left(\frac{1°21'}{3'}\right)^{o}\left(\frac{2°15'}{5'}\right)^{'}\left(\frac{1°3'}{3'}\right)^{''}=\overline{a0}^g\ \overline{bc}^m\ \overline{de}^s\ ;$$

calcular: $M=\dfrac{b+d+5+e}{a+c+4}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 3

**18.-** Se tiene un ángulo en el sistema sexagesimal cuya medida es de $16°15'36''$. Determinar su equivalente en el sistema radial considerando $\pi=3{,}14$.

A) 0,5298 B) 0,4326 C) 0,3524

D) 0,2836 E) 0,1620

**19.-** La medida de un ángulo en el sistema sexagesimal es de $36°15'45''$. Calcule dicho ángulo en el sistema radial. Considere $\pi=3{,}14$.

A) 0,8543 *rad* B) 0,7265 *rad*

C) 0,6326 *rad* D) 0,5214 *rad*

E) 0,4318 *rad*

**20.-** Si:

$a+b+c=63, x^o y' z'' = a^o b' c'' + c^o a' b'' + b^o c' a''$

entonces al calcular: $W = \dfrac{x-y}{z}$ se obtiene:

A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

### *MEDIDAS ANGULARES RELACIONADAS*

**21.-** Sabiendo que: $S^R = R^C$, donde: $S$, $C$ y $R$ son los números que representa la medida de un ángulo en los sistemas: sexagesimal, centesimal y radial; calcular:

$$M = \sqrt[\frac{200-\pi}{\pi}]{\frac{180}{\pi}}$$

A) $\sqrt{R}$ B) R C) $2\sqrt{R}$ D) $R^2$ E) 2R

**22.-** Los números $S$ y $C$ que representan la medida de un ángulo en grados sexagesimales y grados centesimales están relacionados por:

$$S = x + \frac{\pi}{4} \quad ; \quad C = x + \frac{\pi}{2}$$

Calcule la medida de dicho ángulo en *radianes*.

A) $\dfrac{\pi^2}{60}$ B) $\dfrac{3\pi^2}{70}$ C) $\dfrac{\pi^2}{80}$ D) $\dfrac{5\pi^2}{90}$ E) $\dfrac{7\pi^2}{100}$

**23.-** Si $S$ y $C$ son los números que representan la medida de un ángulo en el sistema sexagesimal y centesimal, entonces al calcular.

$$W = \sqrt{\frac{\sqrt{C}-\sqrt{S}}{\sqrt{C}+\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{C}+\sqrt{S}}{\sqrt{C}-\sqrt{S}} - 13},$$

se obtiene:

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**24.-** Si $S$ y $C$ son los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas convencionales, éstos verifican:

$$\frac{n}{S} = \left(1+\frac{1}{C}\right)\left(1+\frac{1}{C+1}\right)\left(1+\frac{1}{C+2}\right)\ldots\text{“}n\text{” términos}$$

Calcular la medida del ángulo en el sistema sexagesimal.

A) $n^o$ B) $\left(\dfrac{n}{5}\right)^o$ C) $\left(\dfrac{n}{10}\right)^o$ D) $(10)^o$ E) $\left(\dfrac{10}{n}\right)^o$

**25.-** La mitad del número que expresa la medida en grados sexagesimales de un ángulo excede en 52 al quíntuplo de su medida en *radianes*. Calcule dicho ángulo en grados centesimales, considerando $\pi = 22/7$.

A) 160 B) 150 C) 140 D) 130 E) 120

**26.-** La media armónica de los números que representan la medida de un ángulo en grados sexagesimales y centesimales es igual a 36 veces el cuadrado de la media geométrica de las mismas. Halle el ángulo en *radianes* que satisface la condición dada.

A) $\dfrac{\pi}{6840}$ B) $\dfrac{\pi}{5200}$ C) $\dfrac{\pi}{4360}$

D) $\dfrac{\pi}{3820}$ E) $\dfrac{\pi}{2520}$

**27.-** El número que representa la medida de un ángulo en grados centesimales mas el triple del número que representa la medida del mismo en grados sexagesimales es $37/\pi$ veces el cuadrado del número que representa su medida en *radianes*. ¿Cuál es la medida del ángulo no nulo en *radianes*?.

A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

**28.-** Al sumar los números de ($''$) y ($'''$) que dan la medida de un ángulo se obtiene 367 400. Encontrar dicho ángulo en el sistema radial.

A) $\dfrac{\pi}{20}$ B) $\dfrac{3\pi}{20}$ C) $\dfrac{7\pi}{20}$ D) $\dfrac{9\pi}{20}$ E) $\dfrac{11\pi}{20}$

**29.-** Se tiene un ángulo trigonométrico positivo, tal que el producto de sus números de minutos sexagesimales y centesimales es igual a:

$$\frac{(a+b)^2+8ab}{18ab} \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R}^+$$

¿Cuál es el menor valor del ángulo en el sistema sexagesimal?

A) $1''$ B) $18''$ C) $36''$ D) $18''$ E) $54''$

**30.-** Si $a$ y $b$ son valores que representan el número de ($'$) y ($^g$) de un ángulo respectivamente, entonces el valor de la expresión:

$$W = \frac{4a-16b}{b}\ \text{, es:}$$

A) 350  B) 200  C) 150  D) 100  E) 50

**31.-** La suma de los ($''$) y ($^{m}$) de un ángulo es 33400. Determinar dicho ángulo en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{10}$  B) $\frac{\pi}{20}$  C) $\frac{\pi}{30}$  D) $\frac{\pi}{40}$  E) $\frac{\pi}{50}$

**32.-** Si *S, C, R* son los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas convencionales, determinar:

$$W = \frac{60\frac{R}{\pi}\sqrt{19}}{\sqrt{C^2-S^2}}$$

A) 5  B) 4  C) 3  D) 2  E) 1

**33.-** Si *S, C* y *R* representan el número de grados sexagesimales, centesimales y *radianes* que mide un ángulo, éstos verifican:

$$10S+3C+R=2\,403{,}1416$$

Si además: $\pi=3{,}1416$, calcular la medida del ángulo dado en *radianes*.

A) $\frac{\pi}{4}$  B) $\frac{\pi}{2}$  C) $\frac{3\pi}{2}$  D) $2\pi$  E) $\pi$

**34.-** Siendo *S, C y R* los números convencionales, y verificándose que:

$$mS+n\,.\,C=20R \quad \wedge \quad 6m+5n=7\pi/12\ ;$$

calcular: "*m/n*"

A) $\frac{3}{5}$  B) $\frac{5}{3}$  C) $\frac{9}{10}$  D) $\frac{10}{9}$  E) $\frac{2}{3}$

**35.-** Siendo *S, C y R* los números convencionales, se sabe que estos verifican:

$$\left(\frac{6}{S}\right)^{\left(\frac{20}{3C}\right)^{\left(\frac{\pi}{30R}\right)}} = 3^{26}\cdot\left(\frac{\pi C-20R}{\pi S-120R}\right)$$

calcule el valor de *R*.

A) $\pi/2$  B) $\pi/3$  C) $\pi/9$  D) $\pi/90$  E) $\pi/30$

**36.-** La semidiferencia de los números que representan la medida de un ángulo en grados centesimales y sexagesimales es a 7 veces su producto como su suma es a 133 veces el número que representa la medida de ese ángulo en radianes. Encontrar la medida de dicho ángulo en el sistema radial.

A) $\frac{36000}{\pi^2}$  B) $\frac{72000}{\pi^2}$  C) $\frac{\pi^2}{3600}$

D) $\frac{\pi^2}{72000}$  E) $\frac{1}{180}$

**37.-** Si "*R*" es el número de *radianes* de un ángulo, que verifica la siguiente igualdad:

$$\sqrt{R-1}=2-\frac{1}{\sqrt{R-1}}\ ;$$

calcular la medida de dicho ángulo en el sistema sexagesimal.

A) $\left(\frac{90}{\pi}\right)^{\circ}$  B) $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$  C) $\left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ}$

D) $\left(\frac{\pi}{180}\right)^{\circ}$  E) $\left(\frac{\pi}{360}\right)^{\circ}$

**38.-** Si los números *S* y *C* representan las medidas de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal respectivamente, y se verifica que:

$$x^2(C-S)=x^4-x^2+1\ ,\quad x>0\ ;$$

calcule en radianes el valor mínimo que puede tomar la medida de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{10}$  B) $\frac{\pi}{20}$  C) $\frac{10}{\pi}$  D) $\frac{20}{\pi}$  E) $\frac{3\pi}{10}$

**39.-** Si S, C y R representan el número de grados sexagesimales, centesimales y *radianes* que mide un ángulo y que verifican:

$$\sqrt[3]{\frac{162SCR}{\pi}} = \frac{12R(C-S)}{5\pi};$$

calcular el ángulo en *radianes*.

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) $\frac{15\pi}{4}$ C) $\frac{27\pi}{5}$ D) $\frac{13\pi}{6}$ E) $\frac{22\pi}{7}$

**40.-** La medida de un ángulo expresado por los números convencionales, verifica que:

$$yS^2 = xC^2$$

Calcule dicha medida, si además se cumple:

$$\left(\frac{20RS}{9\pi}\right)^3 + \left(\frac{C}{10}\right)^6 = x \ldots (1)$$

$$\left(\frac{2RC}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{S}{9}\right)^8 = y \ldots (2)$$

A) 10° B) 20° C) 40° D) 90° E) 100°

### *ÁNGULOS EN FIGURAS GEOMÉTRICAS*

**41.-** Determine la medida en *radianes*, del ángulo desigual de un triángulo isósceles en el que cada uno de los ángulos de la base es cuatro veces la medida del ángulo desigual.

A) $\frac{\pi}{9}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**42.-** De la figura mostrada, se tiene que $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices del $\angle$B y $\angle$C respectivamente. Determine: $m\angle$D en *radianes*.

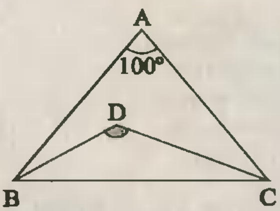
A) 5π/9

B) 7π/8

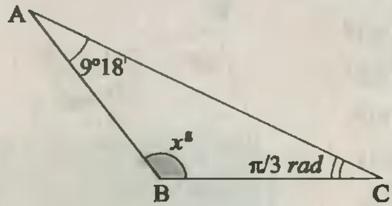
C) π/3

D) 7π/9

E) 5π/4




**43.-** De la figura mostrada, determine "$x$".




A) 108 B) 123 C) 120 D) 127 E) 130

**44.-** El triángulo ABC es equilátero donde $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ dividen el ángulo "A" en tres ángulos congruentes. Determine "α + β" en *radianes*.

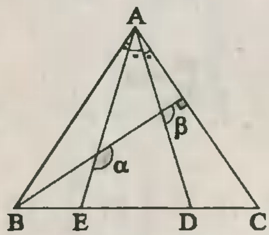
A) 5π/4

B) 4π/5

C) 4π/3

D) 3π/5

E) 5π/6




**45.-** De la figura determine el valor de "$x$":

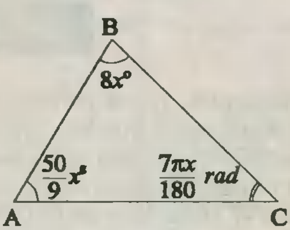
A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10




**46.-** De la figura mostrada, calcular:

$$M = \frac{2x-y}{y}$$

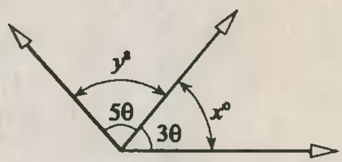
A) 2/13

B) 1/15

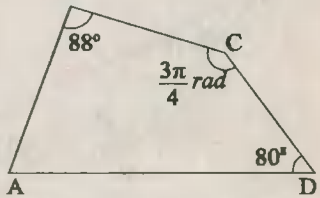
C) 3/20

D) 2/25

E) 7/12



**47.-** En la figura mostrada determine el ángulo A en *radianes*.




A) $11\pi/18$

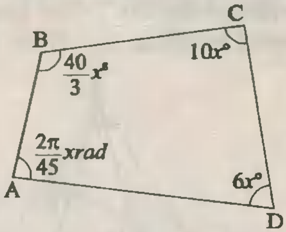
B) $12\pi/59$

C) $13\pi/36$

D) $3\pi/31$

E) $5\pi/39$

**48.-** En la figura mostrada determine la medida del mayor ángulo interior en *radianes*.




A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{3\pi}{7}$ E) $\frac{4\pi}{9}$

**49.-** Los valores que expresan las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero en el sistema M, están en progresión aritmética. Sabiendo que el menor de ellos mide 5 grados M, encontrar la medida del mayor ángulo interno en dicho sistema, si se sabe que 50 grados centesimales equivale a 40 grados M.

A) $140^M$ B) $145^M$ C) $150^M$

D) $155^M$ E) $160^M$

**50.-** En un hexágono los ángulos interiores *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* están en progresión aritmética, tal que $f < e < d < c < b < a$. Si la medida del mayor es 125°, calcular la medida del menor ángulo en *radianes*.

A) $\frac{117\pi}{180}$ B) $\frac{23\pi}{36}$ C) $\frac{119\pi}{180}$

D) $\frac{17\pi}{36}$ E) $\frac{121\pi}{180}$

## REGLA MNEMOTÉCNICA SOBRE PI ($\pi$)

El número $\pi$, que se obtiene como la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro, tan familiar a todos los estudiantes, hace ya muchos años, ha sido calculado nada menos que con 707 cifras exactas. Esta hazaña de cálculo fue realizada por W. SHANKS (1 873), y aunque en la actualidad este número de cifras ha sido largamente superado, ocurre que estas 707 cifras figuran grabadas a lo largo del friso circular en que se apoya la cúpula del "*Palais de la Decouverte*". Para ninguna aplicación práctica con p son necesarias tantas cifras, bastando usualmente los valores aproximados 3,14 ; ó 3,1416 ; ó 22/7.

De todos modos, como regla *mnemotécnica* para recordar las 32 primeras cifras, se puede acudir a los siguientes versos, originales del ingeniero R. Nieto París, de Colombia:

*Soy $\pi$, lema y razón ingeniosa*
*de hombre sabio, que serie preciosa*
*valorando, enunció magistral.*
*Por su ley singular, bien medido*
*el grande orbe por fin reducido*
*fue al sistema ordinario usual.*

Si se sustituye cada palabra por el **número** de letras que la forma , obtendremos el siguiente desarrollo decimal para $\pi$: $\pi$ = 3,14159265358979323846264338327950...

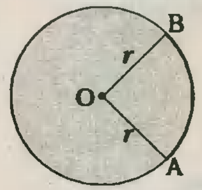

## 2.1. SECTOR CIRCULAR

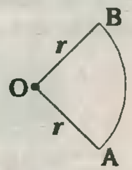
Es una porción de círculo limitada por dos radios y un arco comprendido entre ellos.

$m\widehat{AB}$ ... longitud de arco

$\angle$ AOB ... ángulo central

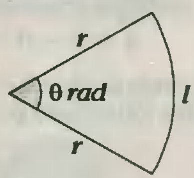
$r$ = OA ... longitud del radio




## 2.2. LONGITUD DEL ARCO ($l$)

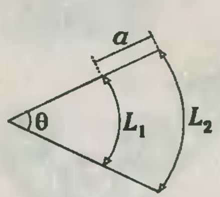
Un arco de circunferencia es una porción de ella que es subtendida por un ángulo central y cuya longitud depende directamente de la medida del ángulo que lo subtiende y del radio de la circunferencia a la que pertenece, así:




$$\boxed{l = \theta \cdot r} \quad ; \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

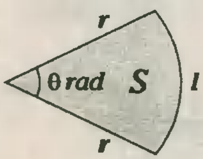
**Fórmula Especial:** De la fórmula anterior se deduce:

$$\boxed{\theta = \frac{L_2 - L_1}{a}}$$




## 2.3. ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR ($S$)

El área de una región circular se puede determinar, utilizando las siguientes fórmulas:

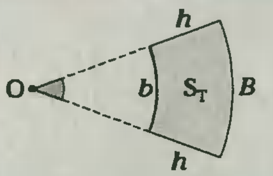



$$\boxed{S = \frac{\theta r^2}{2} = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{l^2}{2\theta}}$$

Nota.- En las fórmulas mostradas, el ángulo central debe estar expresado en *radianes*.

## 2.4. ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR ($S_T$)

$$S_T = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

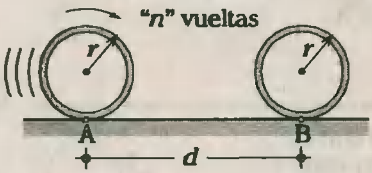



## 2.5. APLICACIONES MECÁNICAS

### 2.5A Número de vueltas ($n$)

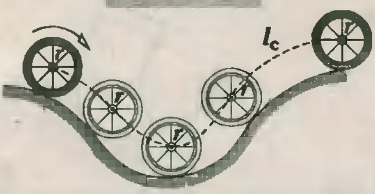
Si una rueda de radio $r$ se desplaza, sin resbalar, una distancia $d$ sobre una superficie, el número $n$ de vueltas que habrá dado en dicho recorrido está dado por:

$$n = \frac{d}{2\pi r}$$




Cuando la superficie es curva, el número de vueltas viene dado por:

$$n = \frac{l_c}{2\pi r}$$




Siendo: $r$ = radio de la rueda que gira

$n$ = número de vueltas que da la rueda

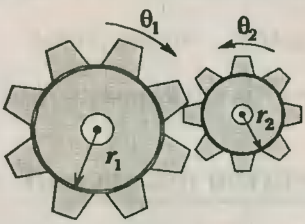
$l_c$ = longitud recorrida por el centro de la rueda

### 2.5B Transmisión de Movimientos

Los sistemas mecánicos que permiten transmitir movimientos pueden ser debido a un contacto entre sus elementos o unidos a través de una faja o un eje.

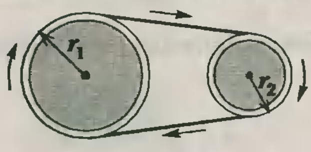
**2.5B1 Engranajes.-** Las longitudes de arco, definidas por el contacto entre dos poleas o piñones, son iguales. Esto se denota así:

$$l_1 = l_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$$



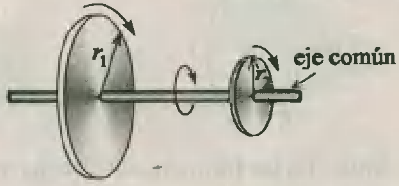

**2.5B2 Poleas.-** Las longitudes recorridas por cualquier punto del borde de las poleas son iguales a la longitud recorrida por un punto de la faja.

$$l_1 = l_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$$




**2.5B3 Transmisión por un eje.-** Los ángulos centrales barridos son iguales, es decir:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$




**PROB. 1**

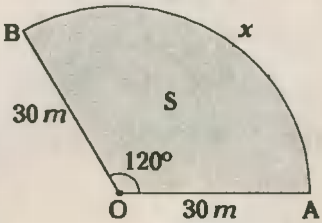
Dado un sector circular de ángulo central 120° y radio 30 $m$, se pide:

a) El valor de la longitud del arco que lo limita.

b) El área del sector circular comprendido.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Graficamos:




El ángulo central (120°) lo expresamos en radianes, es decir:

$$120°.\ \frac{\pi\, rad}{180°} = \frac{2\pi}{3} rad \quad \Rightarrow \quad 120° = \frac{2\pi}{3} rad$$

Luego:

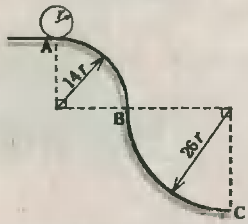
a) $x = \dfrac{2\pi}{3}\ .\ 30m \qquad \therefore \qquad \boxed{x = 20\ \pi m}$

b) Conociendo el radio y el ángulo central en radianes calculamos el área del sector circular:

$$S = \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)(30m)^2}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{S = 300\ \pi m^2}$$

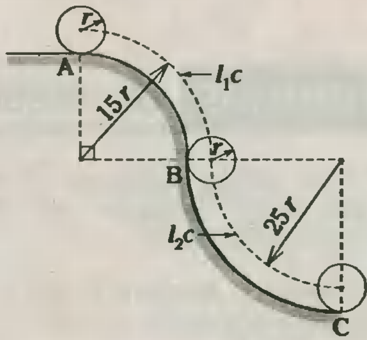
**PROB. 2**

La figura muestra la rueda de un coche de una montaña rusa, cuyo radio mide «r». Si éste es liberado en A, y de desplaza (sin resbalar) hasta el punto C, calcule el número de vueltas que da la rueda durante su recorrido.




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Recordemos que en el juego mecánico de la montaña rusa, el recorrido se ha diseñado de manera que los coches nunca se desprendan del riel que los conduce, con lo que está garantizado que las ruedas puedan girar en contacto con aquél.




La línea de trazos muestra la trayectoria que describe el centro de la rueda en todo su recorrido, de manera que si solo hay rodadura, se deberá cumplir que el número de vueltas está dado por:

$$n_1 = \frac{l_1c}{2\pi.15r} \quad ; \text{ pero:} \quad l_1c = \frac{\pi}{2}.15r$$

$$n_2 = \frac{l_2c}{2\pi.25r} \qquad l_2c = \frac{\pi}{2}.25\,r$$

Luego: $$n_1 = \frac{\frac{\pi}{2}.15r}{2\pi.r} = \frac{15}{4}$$

$$n_2 = \frac{\frac{\pi}{2}.25r}{2\pi.r} = \frac{25}{4}$$

Finalmente, el número total de vueltas que da la rueda es:

$$n_T = n_1 + n_2 \Rightarrow n_T = \frac{15}{4} + \frac{25}{4} = \frac{40}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{n_T = 10 \textit{ vueltas}}$$

**PROB. 3**

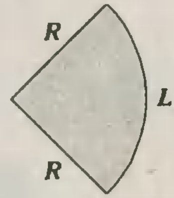
El área de un sector circular es de $4m^2$, su perímetro es de $8\,m$. Calcular el radio del círculo.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Area del sector circular : $A_{SC} = 4m^2$

Perímetro = $8\,m$

Del gráfico:




Perímetro = $2R + L$

Donde deducimos que:

$L = 8 - 2R$ ... (1)

Usando la siguiente relación tendremos:

$$A_{SC} = \frac{R.L}{2} = 4 \Rightarrow R.L = 8 \quad ... (2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos:

$$R(8 - 2R) = 8 \Rightarrow 8R - 2R^2 = 8$$

Luego : $2R^2 - 8R + 8 = 0$

$R^2 - 4R + 4 = 0$

$$\begin{array}{ll} R & -2 \\ R & -2 \end{array}$$

Finalmente: $\boxed{R = 2\,m}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Para calcular la longitud de un arco de un sector circular necesariamente el ángulo central debe estar expresado en radianes, de lo contrario, se tiene que convertir previamente.*

2) *Cuando se determina el área de un sector circular, el ángulo central debe estar expresado en radianes, y luego de acuerdo a los datos utilizar una de las fórmulas dadas del área.*

3) *El número de vueltas que da una rueda sobre una pista, se determina mediante el recorrido que realiza su centro respecto de la superficie sobre la cual realiza su rodadura. Esta relación sólo se verifica si la rueda no resbala sobre la superficie.*

# Enunciados de Problemas con Resolución

### *LONGITUD DE ARCO*

**01.-** Calcular la longitud del arco que subtiende un ángulo central de $171^\circ\, 53'\, 12''$ en un sector circular cuyo radio mide 40 *cm*. (Considerar: $1\ rad = 57^\circ\, 17'\, 44''$).

A) 688 *cm* B) 120 *cm* C) 100 *cm*

D) 240 *cm* E) 480 *cm*

**02.-** Del gráfico adjunto, se tiene un sector circular AOB siendo O, A y B centros de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{OR}$ y $\widehat{OQ}$ respectivamente. Determinar: $M = L_{\widehat{PQ}} + L_{\widehat{SR}}$ , si: AO = BO = 6 *cm*.

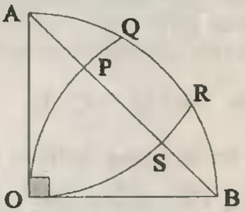
A) $\pi/4$ *cm*

B) $\pi/2$ *cm*

C) $3\pi/2$ *cm*

D) $\pi$ *cm*

E) $2\pi$ *cm*




**03.-** En la figura mostrada, AOB es un sector circular, BDC es una semicircunferencia de centro $O_1$, $\overline{OA} \perp \overline{DO_1}$, $m\angle AOB = 45^\circ$, $O_1B = 4$. Calcule el perímetro de la región sombreada.

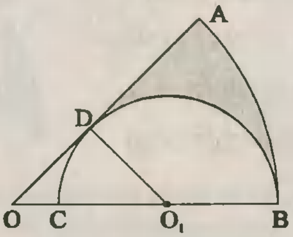
A) $\pi(3+\sqrt{2})$

B) $\pi(5+\sqrt{2})$

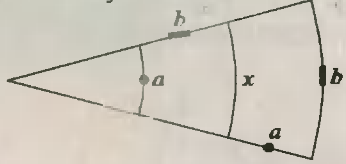
C) $\pi(3-\sqrt{2})$

D) $\pi(4-\sqrt{2})$

E) $\pi(4+\sqrt{2})+4\sqrt{2}$




**04.-** De la figura mostrada, encontrar "$x$" en términos de "$a$" y "$b$".




A) $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ B) $\dfrac{2ab}{a+b}$ C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ E) $\dfrac{2a^2}{b}$

**05.-** En la figura mostrada, BOC y AOD son sectores circulares, $OA = L_{\widehat{BC}}$, $AB = L_{\widehat{AD}}$. Determinar la medida del ángulo central ($\theta > 0$) en *radianes*.

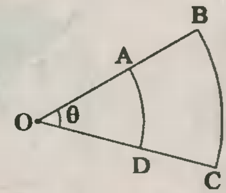
A) $\sqrt{3}/\pi$

B) $\pi/4$

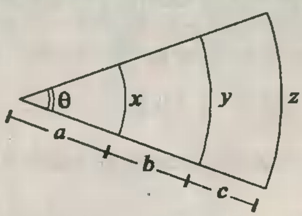
C) $\pi - 1/7$

D) $(\sqrt{5}-1)/2$

E) $2\sqrt{5}$




**06.-** Con la ayuda de la siguiente figura:




Calcular: $M = \sqrt{\dfrac{(z-y)(y-x)}{bc}} - \dfrac{x}{a}$

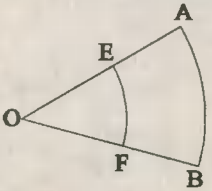
A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

**07.-** Un móvil se desplaza con movimiento uniforme sobre un arco de circunferencia cuyo diámetro mide 100 $m$. Si en 20 $s$ recorre un arco subtendido por un ángulo de $50^g$, ¿cuál es su rapidez en $m/s$?

A) $5\pi/8$ B) $\pi/3$ C) $2\pi/5$ D) $3\pi/7$ E) $\pi/4$

### *ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR*

**08.-** En la figura mostrada, AOB y EOF son sectores circulares cuyas áreas están en la relación de 16 a 1. Determine en qué relación están las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{EF}$ y $\overset{\frown}{AB}$.




A) 2 B) 1/4 C) 3 D) 2/3 E) 1/2

**09.-** En la figura mostrada, se cumple que:

$$R(\theta R + L) = 80$$

Calcule el área del sector circular AOB.

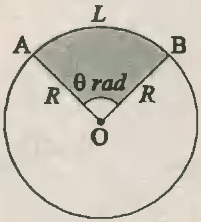
A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

E) 60




**10.-** Se tiene un sector circular en el que si duplicamos el ángulo central y el radio, obtenemos un nuevo sector de área "A". Si el área del primer sector circular es "B", evalúe: A/B.

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

**11.-** En un sector circular de radio $\sqrt{36/7}$, la medida del ángulo central es $\left[\dfrac{b^g(5b)^m}{(15b)^m}\right]^o$.

Calcule el área del sector.

A) $\pi/40$ B) $\pi/20$ C) $\pi/10$ D) $\pi/5$ E) $\pi/3$

**12.-** Determine el perímetro de la región sombreada en la figura, donde "O" es el centro del arco $\overset{\frown}{AB}$ y "M" es el centro del arco $\overset{\frown}{NB}$. Además se sabe que: $AN = MB = 2\sqrt{2}$.

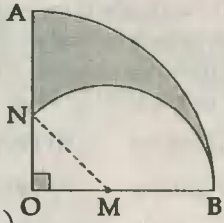
A) $\left(2\sqrt{2} + \pi + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\pi\right)$

B) $\left(2\sqrt{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\pi\right)$

C) $(2\sqrt{2} + \pi)$

D) $\left(\pi + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\pi\right)$

E) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\pi - 2\sqrt{2} + \pi\right)$




**13.-** En cierta zona de un parque de diversiones se ha instalado una regadera a ras del piso; la cual tiene un alcance máximo de 6 $m$. Después de girar 150°; se barre en la superficie, un sector circular cuya área (en $m^2$) es:

A) $3\pi$ B) $5\pi$ C) $9\pi$ D) $12\pi$ E) $15\pi$

**14.-** En la figura AOB es un sector circular, $\overline{AO} \perp \overline{OB}$, $\overline{AO} = \overline{OB} = 8\ cm$; C, D y E son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada en $cm^2$.

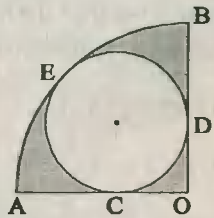
A) $\pi[64\sqrt{2} - 26]$

B) $\pi[82\sqrt{2} - 34]$

C) $\pi[128\sqrt{2} - 176]$

D) $\pi[136\sqrt{2} + 12]$

E) $\pi[152\sqrt{2} - 138]$

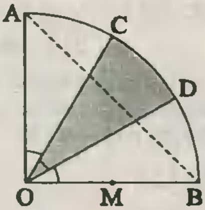



**15.-** En la figura mostrada, AOB es un cuarto de circunferencia, siendo $AB = 3\sqrt{2}\ m$. Calcular (en $m^2$) el área de la región sombreada.

$m\angle AOC = 2\alpha$

$m\angle COD = 3\alpha$

$m\angle DOB = 4\alpha$




A) $\pi/3$ B) $\pi/4$ C) $2\pi/3$ D) $3\pi/4$ E) $5\pi/2$

**16.-** A partir de la figura, calcular "$\theta$" si se sabe que: $13S_1 = 7S_2$. Considerar $\pi = 22/7$.

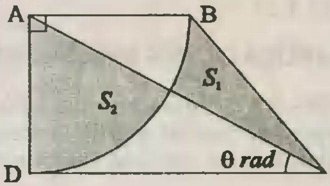
A) 1/2

B) 1

C) 1/3

D) 1/4

E) $\pi/3$




**17.-** Si el área del sector circular AOB es $3\pi$, determine la longitud del arco CD. Además se sabe que: AC = BD = 2

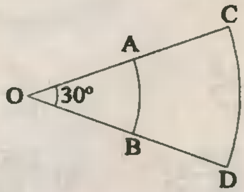
A) $5\pi/3$

B) $4\pi/3$

C) $\pi$

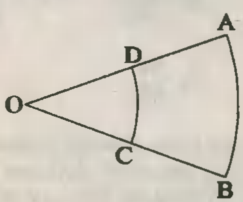
D) $2\pi/3$

E) $\pi/3$




### *TRAPECIO CIRCULAR*

**18.-** En la figura mostrada, AOB y OCD son sectores circulares, OA = 3OD. Calcule la relación entre el área del trapecio circular ABCD y el área del sector circular DOC.




A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

**19.-** Siendo "$S$", "$C$" y "$R$" los números que expresan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, se pide calcular: "$\theta$"

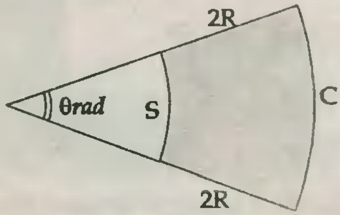
A) $\pi/10$

B) $10/\pi$

C) $2/\pi$

D) $\pi$

E) $4/\pi$




**20.-** De la figura mostrada, determinar el área de la región sombreada:

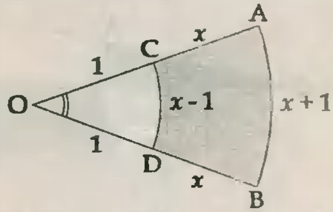
A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10




**21.-** De la figura mostrada, calcule "$\theta$" (en *rad*), si el área del trapecio circular ABCD es de 5 $m^2$.

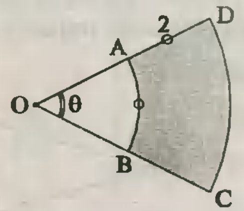
A) 1/4 *rad*

B) 1/2 *rad*

C) 1 *rad*

D) 1/3 *rad*

E) 1/5 *rad*




**22.-** De la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada:

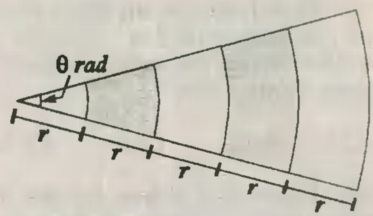
A) $\theta r^2$

B) $2\theta r^2$

C) $3\theta r^2$

D) $4\theta r^2$

E) $5\theta r^2$




**23.-** En la figura mostrada, determine el valor de "$L$" si la región sombreada tiene un área de 20 $m^2$.

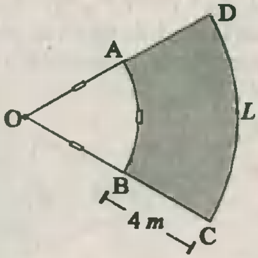
A) $1m$

B) $3\ m$

C) $5\ m$

D) $7\ m$

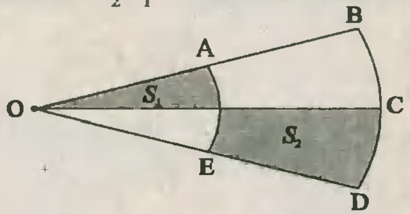
E) $9\ m$




**24.-** En la figura mostrada se verifica que:

$2.OA = AB$ y $\overline{OC}$ es bisectriz del $\angle BOD$.

Determinar: $S_2/S_1$.




A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**25.-** En la figura mostrada, AOB y COD son sectores circulares, en donde: $AC = BD = x$, $OC = OD = 2$, $L_{\widehat{AB}} = (x + 2)$ y $L_{\widehat{CD}} = (x - 1)$ Calcule el área del trapecio circular ABCD.

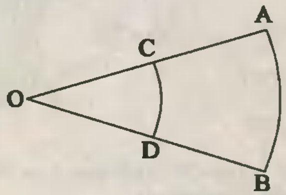
A) 15/2

B) 17/2

C) 21/2

D) 23/2

E) 25/2




**26.-** El perímetro de un sector circular mide 6 $m$ y su área es de 2 $m^2$. Calcular (en *rad*) la medida del mayor ángulo central que verifica estas condiciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**27.-** Determinar el área máxima de un trapecio circular cuyo perímetro es "$p$".

A) $\dfrac{p^2}{2}$ B) $\dfrac{p^2}{4}$ C) $\dfrac{p^2}{8}$ D) $\dfrac{p^2}{16}$ E) $p^2$

**28.-** En la figura mostrada:

$$a = 210 - 40x\ ,\ b = 7x^2 - 30x.$$

Si el área del trapecio circular tiene valor mínimo, entonces la medida de su ángulo central en *radianes* es:

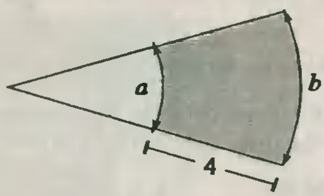
A) 4,25

B) 3,75

C) 3,15

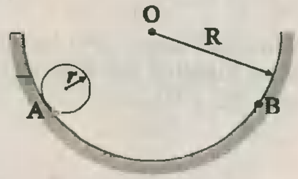
D) 2,55

E) 1,35




### *APLICACIONES MECÁNICAS*

**29.-** En la figura mostrada determinar el número de vueltas que da la rueda de radio $r$ al desplazarse, sin resbalar, por el arco $\widehat{AB} = L$:




A) $\dfrac{LR}{\pi r^2}$ B) $\dfrac{R^2}{\pi Lr}$ C) $\dfrac{Rr}{\pi L^2}$

D) $\dfrac{L(R-r)}{r(R+r)}$ E) $\dfrac{L(R-r)}{2\pi Rr}$

**30.-** Una bicicleta que tiene ruedas de radio "$r$" recorre una pista circular de radio "$R$", plana y horizontal; determinando sobre ésta un ángulo $\theta°$. Determinar el número de vueltas que dará una de sus ruedas.

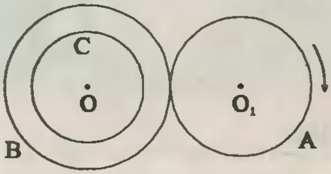
A) $\dfrac{\theta R}{r}$ B) $\dfrac{\theta R}{360r}$ C) $\dfrac{\theta R}{180r}$

D) $\dfrac{2\theta R}{\pi r}$ E) $\dfrac{\theta r}{\pi R}$

**31.-** Sobre una pista circular plana y horizontal se desplaza un atleta con una rapidez de 17,6 $km/h$ y recorre un arco que subtiende un ángulo de 56° en 36 *segundos*. Calcule (en $m$) el diámetro de la circunferencia, si: $\pi = 22/7$.

A) 360 B) 300 C) 270 D) 240 E) 240

**32.-** En el sistema mostrado, el disco A gira 90°. Asimismo se sabe que: $r_A = 3$, $r_B = 5$, $r_C = 1$. Calcule la medida del ángulo que gira el disco C.

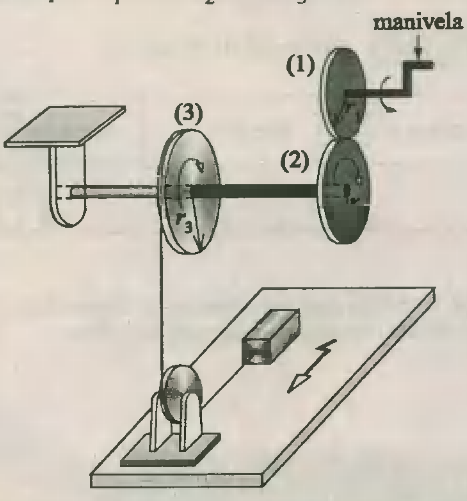



A) 18° B) 27° C) 36° D) 54° E) 62°

**33.-** Los radios de las ruedas de una bicicleta, son entre si como 3 es a 4. Calcular el número de vueltas que da la rueda mayor cuando la menor gire $8\pi$ *rad*.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**34.-** ¿Qué distancia recorre el bloque si se gira la manivela un ángulo de θ *rad*. Se sabe también que: $r_1 = 6$, $r_2 = 9$, $r_3 = 12$.




A) 2θ B) 4θ C) 6θ D) 8θ E) 10θ

**35.-** Dos ruedas de radios $R$ y $r$, tal que: $R > r$, recorren la misma longitud $L$. Si la diferencia del número de vueltas de la menor y la mayor es $\dfrac{L}{8\pi r}$, entonces al evaluar: $\dfrac{r}{R}$, se obtiene:

A) 3/4 B) 1/4 C) 1/2 D) 3/5 E) 1/6

**36.-** Determine el número de vueltas que dará la rueda de radio 2 *cm*, al desplazarse desde "A" hasta tocar la pared vertical ($\pi = 22/7$).

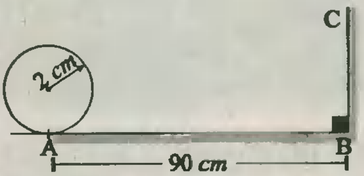
A) 3

B) 5

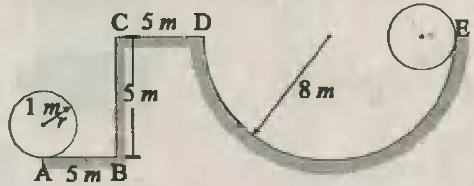
C) 7

D) 9

E) 11




**37.-** En la figura mostrada se sabe que $n$ es el número de vueltas que da la rueda de radio $r$ ($r = 1$ $m$) al ir del punto A hasta el punto E sobre la superficie indicada. Se pide determinar el valor de: 44 $n$. Asumir que: $\pi = 22/7$.




A) 125 B) 175 C) 267 D) 295 E) 376

**38.-** Los radios de las ruedas de una bicicleta son 20 *cm* y 70 *cm* respectivamente. Calcular (en *m*) el espacio recorrido por dicha bicicleta, si se sabe además que la diferencia del número de vueltas que dieron cada una de las ruedas para recorrer el espacio anterior fue 100. ($\pi = 22/7$).

A) 174 B) 175 C) 176 D) 177 E) 178

**39.-** Si una rueda de radio "$6a$" se mantiene fija y otra rueda de radio "$a$", puede girar alrededor de ella. ¿Cuántas vueltas dará la rueda pequeña si parte y llega al mismo punto por primera vez?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**40.-** Calcular el número de vueltas que da la rueda de radio 1*m* al recorrer el perímetro de un triángulo si el perímetro de este es de 44 *m*. Considerar $\pi = 22/7$.

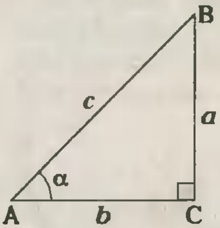
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

# Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos

CAP 3

## 3.1. DEFINICIONES DE LAS R.T. DE ÁNGULOS AGUDOS

Sea $\alpha$ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, tal como se muestra en la figura, entonces se definen:




| | |
|---|---|
| SENO $\Rightarrow \dfrac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ | COSECANTE $\Rightarrow \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat. Opuesto}}$ |
| COSENO $\Rightarrow \dfrac{\text{Cat. Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ | SECANTE $\Rightarrow \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat. Adyacente}}$ |
| TANGENTE $\Rightarrow \dfrac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Cat. Adyacente}}$ | COTANGENTE $\Rightarrow \dfrac{\text{Cat. Adyacente}}{\text{Cat. Opuesto}}$ |

$c > a \; ; \; c > b$

$a^2 + b^2 = c^2$ Teorema de Pitágoras

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{c}$ | $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ | $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ | $\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$ | $\sec\alpha = \dfrac{c}{b}$ | $\csc\alpha = \dfrac{c}{a}$ |

## 3.2. PROPIEDADES

### 3.2A *Propiedad Fundamental*

Los valores de las Razones Trigonométricas (R.T.) de los ángulos agudos no dependen de la longitud de los lados que la forman, sino de la medida del ángulo definido por ellos.

### 3.2B *Razones Trigonométricas Recíprocas*

Si $\alpha$ es un ángulo agudo, se cumple que:

$$\text{sen}\,\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} \;\vee\; \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \;\vee\; \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \;\vee\; \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

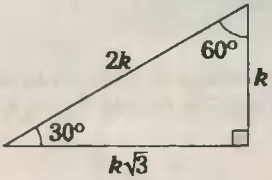
### 3.2C *Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios (Co-razones)*

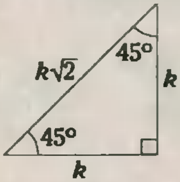
Si $\alpha$ y $\beta$ son dos ángulos complementarios ($\alpha + \beta = 90^{o}$), entonces se cumplirá que:

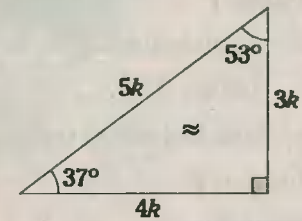
$$\mathbf{sen}\ \alpha = \cos \beta \qquad \tan \alpha = \cot \beta \qquad \sec \alpha = \csc \beta$$

### 3.2D *Razones Trigonométricas de 30º, 60º, 45º, 37º y 53º.*

Se obtienen a partir de los siguientes triángulos notables en donde: $k \in \mathbb{R}^{+}$

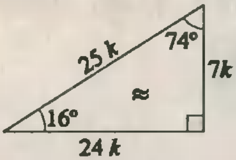


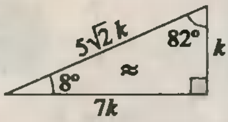



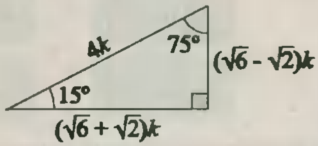



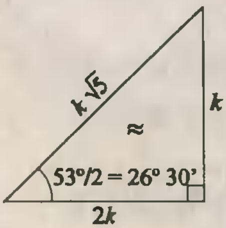

| Razón Trigonométrica | Notación | 30º | 37º | 45º | 53º | 60º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| seno | sen | 1/2 | 3/5 | $\sqrt{2}/2$ | 4/5 | $\sqrt{3}/2$ |
| coseno | cos | $\sqrt{3}/2$ | 4/5 | $\sqrt{2}/2$ | 3/5 | 1/2 |
| tangente | tan | $\sqrt{3}/3$ | 3/4 | 1 | 4/3 | $\sqrt{3}$ |
| cotangente | cot | $\sqrt{3}$ | 4/3 | 1 | 3/4 | $\sqrt{3}/3$ |
| secante | sec | $2\sqrt{3}/3$ | 5/4 | $\sqrt{2}$ | 5/3 | 2 |
| cosecante | csc | 2 | 5/3 | $\sqrt{2}$ | 5/4 | $2\sqrt{3}/3$ |

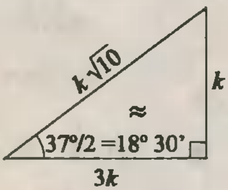
Sobre la base de los triángulos anteriores se pueden construir otros, de relativa importancia, para obtener de ellas sus Razones Trigonométricas.

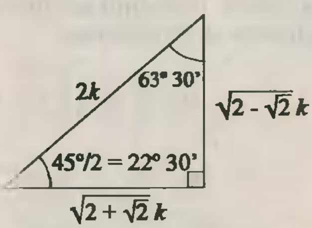


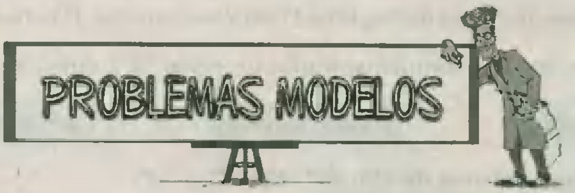






**PROB. 1**

Si $\alpha$ es un ángulo agudo, tal que:

$\tan\alpha = 0{,}75$ , obtenga los valores de:

a) Todas las razones trigonométricas de $\alpha$.

b) $\tan \alpha/2$

c) $\tan 2\alpha$

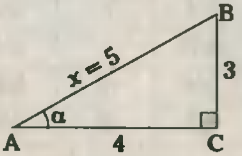
**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

a) Si $\tan\alpha = 0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$

Entonces por Pitágoras: $x^2 = (4)^2 + (3)^2$

$x^2 = 25$

$\Rightarrow \quad x = 5$




Luego:

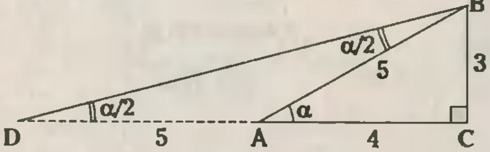
$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{4}{3}}$$

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{5}{4}} \qquad \boxed{\csc\alpha = \frac{5}{3}}$$

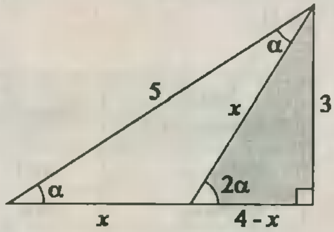
b) A partir del triángulo anterior construimos un nuevo triángulo en donde figure $\alpha/2$. Entonces se tendrá que:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5+4} = \frac{3}{9}$$




$$\therefore \quad \boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}}$$

c) En base al primer triángulo construimos un triángulo en su interior donde figure el ángulo $2\alpha$.




Aplicando Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado.

$$x^2 = (3)^2 + (4-x)^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 9 + 16 + x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow \quad 8x = 25 \;\Rightarrow\; x = \frac{25}{8}$$

Luego: $\tan 2\alpha = \dfrac{3}{4-x} = \dfrac{3}{4-\frac{25}{8}}$

$$\therefore \quad \boxed{\tan 2\alpha = \frac{24}{7}}$$

**PROB. 2**

Si se cumple que:

$$\operatorname{sen}(x - 40^\circ)\sec(2x + 10^\circ) = 1$$

$$\tan(3y + 10^\circ)\cot(2y + 30^\circ) = 1$$

calcule: $E = \dfrac{\operatorname{sen}(x-10^\circ)+\cos(y+40^\circ)}{\tan(x+5^\circ)+\cot(y+25^\circ)}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

De la primera relación se obtiene:

$$\text{sen}(x - 40^o).\frac{1}{\cos(2x+10^o)} = 1$$

$\Rightarrow$ $\text{sen}(x - 40^o) = \cos(2x + 10^o)$

Esta igualdad se verifica cuando los ángulos son complementarios, luego:

$$(x - 40^o) + (2x + 10^o) = 90^o$$

$\Rightarrow$ $3x = 120^o$ $\Rightarrow$ $x = 40^o$

De la segunda relación se desprende que:

$$\tan(3y + 10^o).\frac{1}{\tan(2y+30^o)} = 1$$

$\Rightarrow$ $\tan(3y + 10^o) = \tan(2y + 30^o)$

Esta igualdad se verifica si los ángulos son iguales, luego:

$$3y + 10^o = 2y + 30^o \Rightarrow y = 20^o$$

Finalmente: $E = \dfrac{\text{sen}\,30^o+\cos 60^o}{\tan 45^o+\cot 45^o}$

$$\Rightarrow E = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{2}}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

**1)** *Cuando un ángulo es agudo, y se conoce una de sus 6 razones trigonométricas, es inmediato el cálculo de los valores de las razones trigonométricas restantes, simplemente construyendo un triángulo rectángulo ubicando a continuación uno de los ángulos agudos, e identificando sus lados, de acuerdo con la razón trigonométrica dada, y finalmente aplicamos el teorema de Pitágoras.*

**2)** *Cuando una razón trigonométrica es igual a su respectiva co-razón trigonométrica, inmediatamente se debe asumir que la suma de sus ángulos es 90°.*

**3)** *Toda vez que una razón trigonométrica de cierto ángulo es igual a la misma razón trigonométrica de otro ángulo, entonces se debe afirmar que dichos ángulos son iguales (pero esto ocurre solo cuando se trata de ángulos agudos)*

**4)** *Ante la presencia de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 60°, 45°, 37° y 53°, debemos utilizar sus respectivos triángulos notables de dichos ángulos.*

**5)** *Si se tiene el valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo, y se desea calcular los valores de las razones trigonométricas del ángulo mitad o del ángulo doble, se procede a realizar construcciones geométricas adecuadas.*


### *RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS*

**01.-** De un triángulo rectángulo ABC, se cumple:

$\tan A + \tan C = 2$. Calcular el valor de:

$$M = \csc A \cdot \csc C$$

A) 1/2  B) 1  C) 2  D) 1/3  E) 3

**02.-** En el triángulo rectángulo ABC ($A = 90°$), se sabe que: $\cot C + \cot B = 4$; entonces al calcular $F = 16 \text{ sen } B . \text{sen } C . \cos B . \cos C$ se obtiene:

A) 1/4  B) 1/2  C) 1  D) 2  E) 4

**03.-** Se tiene un ángulo agudo "θ" tal que:

$$\tan\theta = \frac{21}{20}$$

Calcular el valor de: $M = \frac{1}{3} \text{sen}\,\theta + 4\cos\theta$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**04.-** En un triángulo rectángulo ABC se sabe que: $m\angle ABC = 90°$. En este triángulo se verifica que:

$$2 \text{ sen } A = \csc C$$

Calcular: $W = \tan C - \dfrac{\cot^2 A}{2}$

A) 1/8  B) 1/4  C) 1/2  D) 1  E) 2

**05.-** Calcula la secante del mayor ángulo agudo de un triángulo rectángulo sabiendo que sus lados están en progresión aritmética.

A) 5/3  B) 5  C) 4/3  D) 3/4  E) $\sqrt{3}$

**06.-** En la figura mostrada, $m\angle ABC = 90°$, $m\angle CAB = \alpha$, $m\angle CDB = \theta$, $DB = 3$, $CB = a$. Además : $\tan\alpha + \tan\theta = 77$. Encontrar el valor de $a$:

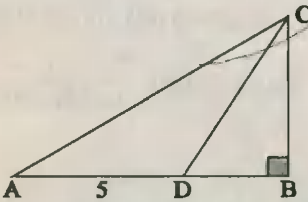
A) 124

B) 142

C) 168

D) 186

E) 210




**07.-** En la figura mostrada $m\angle ACB = 90°$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = 2\sqrt{ab}$, $a < b$. Calcule: $\tan\theta$.

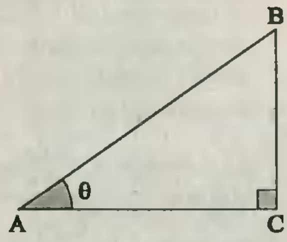
A) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

B) $2 - \sqrt{3}$

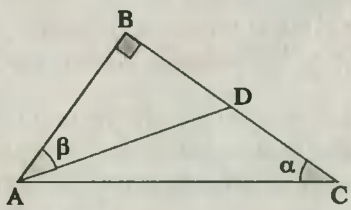
C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

D) $2 + \sqrt{3}$

E) $3 - \sqrt{2}$




**08.-** A partir de la figura mostrada, determine el valor de: $M = \cot\alpha - \tan\beta$, si: $AB = CD$.



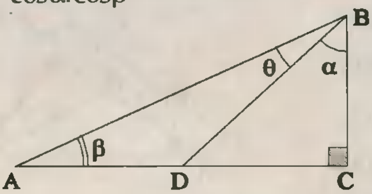

A) 1/2  B) 2  C) 3  D) 1  E) 1/3

**09.-** El perímetro de un rectángulo es de 492 $m$ y su diagonal forma con la base un ángulo cuya cotangente es 1,05. Calcule dicha diagonal (en $m$).

A) 140 B) 158 C) 166 D) 174 E) 182

**10.-** A partir de la figura, calcule el valor de:

$$M = \frac{2.\text{sen}\theta}{\cos\alpha.\cos\beta}, \qquad \text{si}: AD = DC$$

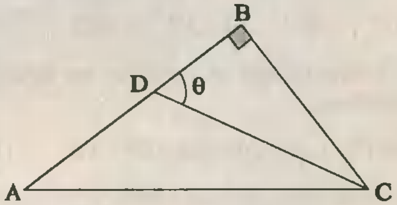


A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 3 E) 1/3

**11.-** En el gráfico mostrado, se sabe que:

$$AD = CD = a;\ AB = b.$$

Exprese $\cot\left(\frac{\theta}{4}\right)$ en términos de «$a$» y «$b$».



A) $\frac{b+\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab-b^2}}$ B) $\frac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{ba-b^2}}$ C) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

D) $\frac{b+\sqrt{a.b}}{a+\sqrt{b.a}}$ E) $\frac{b}{a}$

**12.-** En un paralelogramo los lados adyacentes miden 8 $m$ y 16 $m$. Si el ángulo comprendido entre dichos lados mide 60°, determinar la longitud de la menor diagonal.

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $6\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}$

**13.-** El perímetro de un triángulo rectángulo es 132 $u$, y la suma de los cuadros de sus lados es 6 050$u^2$. Calcule la tangente del menor ángulo agudo.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{1}{3}$

**14.-** En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado de lado L y E es punto medio de $\overline{AD}$. Calcule la longitud del arco $\overset{\frown}{BC}$ aproximadamente.

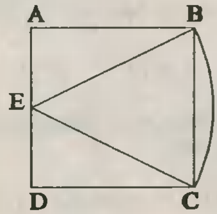
A) $\pi L/17$

B) $\frac{7\pi L}{25}$

C) $9\pi L/17$

D) $\frac{25\pi L}{53}$

E) $\frac{53\sqrt{5}\pi L}{360}$



**15.-** En la figura mostrada $m\angle ABC = 90°$. Si:

$$\tan A = \frac{12x}{11} \text{ y } 10(6c - b) = b - c$$

entonces al calcular $x$ se obtiene :

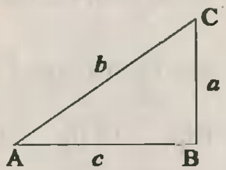
A) 5

B) 4

C) 3

D) 2

E) 1



### *R.T. RECÍPROCAS*

**16.-** Calcular el valor de:

$$M = \sqrt{\frac{(4\cos36°+9\text{sen}54°)\sec36°}{\cot18°.\cot72°}}$$

A) 13 B) $\sqrt{13}$ C) 5 D) $\sqrt{5}$ E) 3

**17.-** Calcular el valor de "$x$" que verifica:

$$\frac{\sec(3x-15^\circ)}{2}=\frac{\text{sen}10^\circ+\text{sen}20^\circ+\ldots+\text{sen}80^\circ}{\cos10^\circ+\cos20^\circ+\ldots+\cos80^\circ}$$

siendo $x$ un ángulo agudo.

A) 15° B) 12,5° C) 16° D) 37° E) 25°

**18.-** Si se verifica que:

$$\text{sen}(50^\circ+x)-\cos(40^\circ-x)+\tan(x+10^\circ).\tan(x+40^\circ)=1$$

Determinar: $\text{M}=\sec 3x+\cot^2\dfrac{3x}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**19.-** Siendo $x$, $y$, $z$ ángulos agudos que se relacionan así:

$$\text{sen}\,(x+y)-\cos\,(85^\circ-y-z)=0\quad\ldots\ (1)$$

$$\tan 2x\,.\,\tan 3z=1\quad\ldots\ (2)$$

Calcular: $\text{M}=\tan(2x+11^\circ)-\tan\,(x+z)$

A) 3/4 B) 1/5 C) 7/9 D) 1 E) 7/12

**20.-** Sabiendo que:

$$\text{A}=\tan 1^\circ\,.\,\tan 2^\circ.\,\tan 3^\circ\ldots\tan 45^\circ$$

$$\text{B}=\tan 46^\circ\,.\,\tan 47^\circ.\,\tan 48^\circ\ldots\tan 89^\circ$$

Calcular: $\text{M}=(\text{A}\,.\,\text{B})^2.\,\tan\left(\text{A.B.}\dfrac{\pi}{4}\right)$

A) 3 B) 2 C) 1/2 D) 1/3 E) 1

**21.-** Si: $\text{M}=\dfrac{ab(\text{sen}10^\circ-1)+a^2-b^2\cos80^\circ}{ab(\cos80^\circ+1)+a^2+b^2\text{sen}10^\circ}$

Simplificar: $\dfrac{1+\text{M}}{1-\text{M}}$

A) $b/a$ B) 2 C) $2a/b$ D) $3b/a$ E) $a/b$

**22.-** En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se verifica que:

$$(\text{sen A})^{(\cos \text{C})}+(\cos \text{C})^{(\text{sen A})}=\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$$

Calcular el valor de sen A.

A) 3/5 B) $\sqrt{2}/2$ C) 1/5 D) $\sqrt{3}/2$ E) 1/3

**23.-** A partir de la figura mostrada, calcule "$x$" si: AD = DC y sen $(39^\circ-\theta)=\cos\,(14^\circ+3\theta)$.

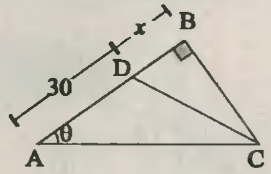
A) 15

B) 18

C) 21

D) 24

E) 27




**24.-** Sabiendo que $\theta$ es un ángulo agudo y que:

$$\csc\,(\theta+20^\circ)=2\tan 10^\circ.\text{sen}\,20^\circ.\sec 70^\circ.\,\tan 80^\circ$$

calcular: $\text{M}=\cos 6\theta+\tan\,(5\theta-5^\circ)$

A) 1/2 B) 1 C) 3/2 D) 2 E) 5/2

**25.-** Sabiendo que se verifican las siguientes relaciones:

$$\text{sen}\,(5a+2b+c)=\cos\,(20^\circ-3a)\quad\ldots(1)$$

$$\cos\,(4d+e)=\cos\,(40^\circ+e)\quad\ldots(2)$$

$$a+b=\frac{\pi}{6}\,rad\quad\ldots(3)$$

Calcular: $\text{D}=\tan\,(10^\circ+2c+\dfrac{3}{2}d)$

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\sqrt{3}/3$ D) 1/2 E) 1/3

### *R.T. DE ÁNGULOS NOTABLES*

**26.-** De la figura mostrada, calcular: "tan θ", si se sabe que:

$$m\angle\text{OBC}=\theta\quad\wedge\quad m\angle\text{OCB}=37^\circ$$

Además: O es centro de la circunferencia.

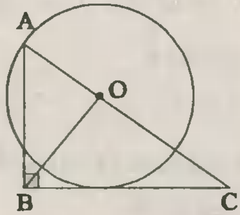
A) 1/3

B) 2/5

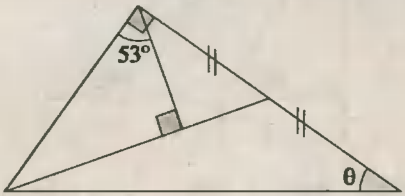
C) 3/7

D) 5/4

E) 2/3




**27.-** De la figura mostrada, calcular: $\tan\theta$.




A) 1 B) 3/4 C) 4/3 D) $\sqrt{3}/5$ E) 2/3

**28.-** Si ABCD es un cuadrado, calcular: "$\tan x$"

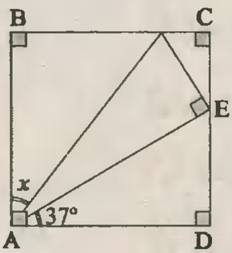
A) 11/19

B) 21/25

C) 13/16

D) 14/19

E) 5/12




**29.-** Calcular el valor de "$x$" si:

$$2x\,(\sec 45^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ)^{\sec 60} = 4\cos 60^\circ - x$$

A) 1 B) -2 C) 3 D) -3 E) 5

**30.-** Si se cumple que:

$\sec\theta = \tan^2 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ$, donde $\theta$ es agudo

Calcular: $M = \sqrt{5}\,.\tan\theta + \dfrac{1}{2}$

A) 4 B) 8 C) 6 D) 10 E) 12

**31.-** Al calcular:

$$W = \sqrt{\frac{\cot^3 30^\circ - 6.\operatorname{sen}60^\circ + \csc^2 45^\circ}{\cot 45^\circ.\operatorname{sen}^2 60^\circ + \sqrt{3}.\csc 60^\circ - \dfrac{9}{4}}}$$

Se obtiene:

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

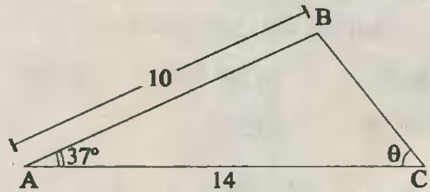
**32.-** Si $x$ es igual a 15°, entonces al calcular:

$W = \dfrac{\tan^2 4x + \cos^2 3x}{\operatorname{sen} 2x} + \cot^2 4x$, se obtiene un número de la forma $\dfrac{a}{3}$. Evaluar $a + 3$

A) 25 B) 18 C) 6 D) 22 E) 35

**33.-** De la figura mostrada, calcular el valor de:

$$M = \tan(2\theta - 30^\circ).\cot\theta$$




A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}/3$ D) $\sqrt{3}$ E) 3/4

**34.-** En la figura mostrada ABC es un triángulo rectángulo isósceles, donde D es punto medio de $\overline{BE}$. Calcule : $\cot\alpha$.

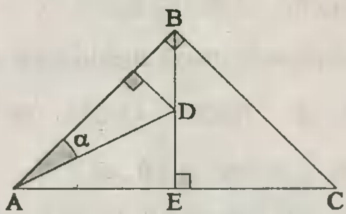
A) 1/3

B) $\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}/2$

E) 3



### MISCELÁNEA

**35.-** Los lados de un triángulo rectángulo están representados por tres números en progresión aritmética. Calcular el coseno del menor ángulo agudo.

A) 0,6 B) 0,5 C) 0,4 D) 0,7 E) 0,8

**36.-** En un triángulo isósceles ABC (AB = AC) se sabe que: cos A = 0,6. Calcular tan B.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

**37.-** Si: $\operatorname{sen} 3x = \cos 75°$, calcular "$x$" (agudo)

A) 10° B) 15° C) 20° D) 5° E) 30°

**38.-** Si: $\tan(2x + 25°) = \cot(5x - 5°)$.

Determinar "$x$" (agudo)

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 45°

**39.-** Calcular $x$ en:

$$\tan(x + 41°)\,.\,\tan(2x - 31°) = 1$$

A) 26,3° B) 26° 30' C) 26° 40'

D) 30° 40' E) 30°

**40.-** Si: $\cot\left(\dfrac{5x - 96°}{2}\right) = \dfrac{1}{\cot\left(\dfrac{4x}{3}\right)}$,

entonces el valor de $x$ es:

A) 36° B) 30° C) 45° D) 20° E) 35°

**41.-** Si: $\cot 2x - \tan 3y = 0$ , y , $2x - y = 10°$

El valor del mayor ángulo agudo es:

A) 15° B) 20° C) 25° D) 35° E) 45°

**42.-** Calcular : $\alpha + \beta$ , si:

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 0 \ \wedge \ \operatorname{sen}\beta\,.\,\csc 4\alpha = 1$$

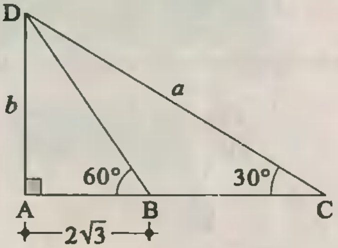
A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

**43.-** Si: $\tan(a - b) = 1 \ \wedge \ \tan(a + b) = \sqrt{3}$

Calcular: $a \div b$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

**44.-** En la figura: ¿Cuál es el valor de "$a$" ?.




A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) 6 D) 12 E) $12\sqrt{3}$

**45.-** ¿Cuál es la distancia $x$ en la figura?

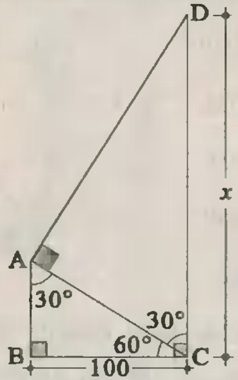
A) $240\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B) $300/\sqrt{3}$

C) $400/\sqrt{3}$

D) $250\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

E) 175




**46.-** El valor de la expresión:

$$E = \frac{\cot^2 2\theta + \sec^2\theta}{\sec 2\theta}$$ , para $\theta = 30°$ es:

A) 10/3 B) 3/2 C) 5/6 D) 1/2 E) 2/3

# Resolución de Triángulos Rectángulos

CAP 4

## 4.1. DEFINICIÓN

Resolver un triángulo rectángulo es determinar la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos agudos, para lo cual deben ser conocidos al menos un lado y un ángulo agudo.

En la resolución de triángulos rectángulos se presentan tres casos los que se resuelven por medio de un determinado grupo de teoremas.

## 4.2. TEOREMAS

**4.2A TEOREMA 1.** Conocida la Hipotenusa ($m$) y un ángulo agudo ($\alpha$). *Fig.* (a)

**4.2B TEOREMA 2.** Conocido un ángulo agudo ($\alpha$) y su cateto adyacente ($m$). *Fig.* (a)

**4.2C TEOREMA 3.** Conocido un ángulo agudo ($\alpha$) y su cateto opuesto ($m$). *Fig.* (a)

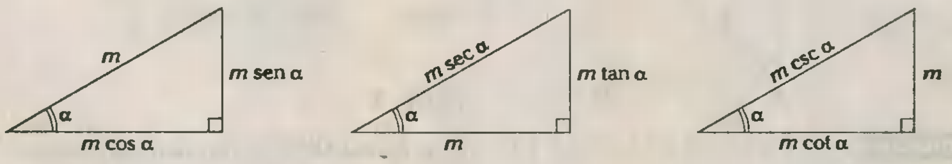



*Fig.* (a) *Fig.* (b) *Fig.* (c)

**En general.**- En cualquier triángulo rectángulo, se tiene:

**Incógnita = (Dato) · R.T. (∠)** Donde: $\dfrac{\textbf{Incógnita}}{\textbf{Dato}} = \textbf{R.T.}\ (\angle)$

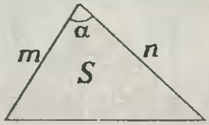
Siendo: Incógnita: El lado del triángulo rectángulo que se desea calcular.

Dato: Es el lado del triángulo rectángulo que se conoce.

R.T.: Es la razón trigonométrica que corresponde al dividir la incógnita entre el dato.

## 4.3. ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Está determinado por el semiproducto de dos de sus lados, multiplicado por el seno del ángulo comprendido por dichos lados.

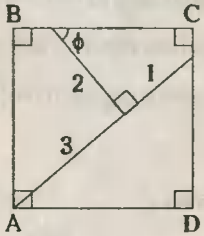



$$S = \frac{mn}{2}\ \text{sen}\,\alpha$$


**PROB. 1**

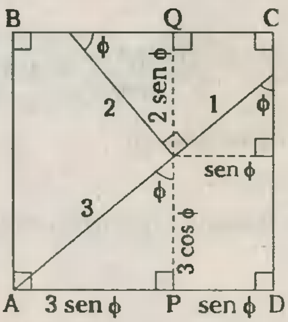
**1.-** Si ABCD es un cuadrado, calcule:

$\tan\phi + \cot\phi$




**RESOLUCIÓN**

En el nuevo gráfico: AD = PQ




$\Rightarrow\ 3\,\text{sen}\,\phi + \text{sen}\,\phi = 3\cos\phi + 2\,\text{sen}\,\phi$

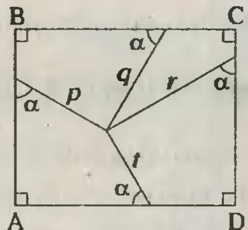
$2\,\text{sen}\,\phi = 3\cos\phi \ \Rightarrow\ \dfrac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ \tan\phi = \dfrac{3}{2} \qquad \Rightarrow\ \cot\phi = \dfrac{2}{3}$

Luego: $\boldsymbol{\tan\phi + \cot\phi = \dfrac{13}{6}}$

**PROB. 2**

En la figura: ABCD es un cuadrado, demuestre que: $p + r = q + t$.




**RESOLUCIÓN**

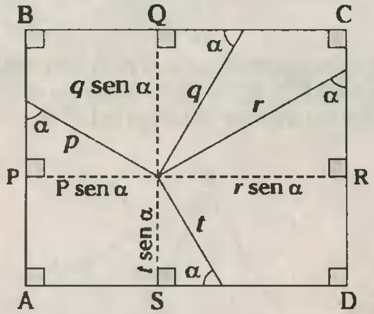
En la nueva figura, se observa que:

$$PR = QS$$

Entonces:

$$p \text{ sen } \alpha + r \text{ sen } \alpha = q \text{ sen } \alpha + t \text{ sen } \alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{p + r = q + t}$$

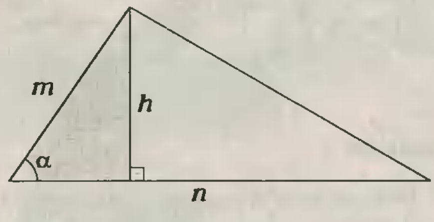



**PROB. 3**

Dos lados de un triángulo rectángulo miden $m$ y $n$. Calcula el área de su región triangular. Si además se sabe que el ángulo comprendido entre dichos lados es «α».

**RESOLUCIÓN**

Sean $m$ y $n$ los lados del triángulo y $\alpha$ el ángulo comprendido.




En el triángulo sombreado:

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{m} \quad \Rightarrow \quad h = m \text{ sen } \alpha$$

Luego: $\quad \text{Área } \Delta = \dfrac{base \times altura}{2}$

$$\text{Área } \Delta = \frac{n \times m \text{ sen } \alpha}{2}$$

Finalmente: $\quad \boxed{\textbf{Área } \Delta = \dfrac{nm}{2} \textbf{ sen } \alpha}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Tratar de buscar triángulos rectángulos en los cuales se conozca mínimamente uno de sus tres lados y uno de sus ángulos agudos.*

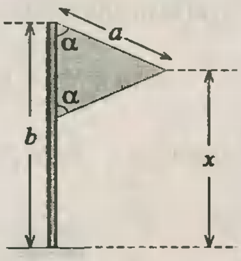
2) *Una vez que identificamos al triángulo rectángulo con un par conocido: lado y ángulo, se aplica la siguiente técnica.*

*Incógnita = dato(lado) × R.T. (∠ agudo)*

# Enunciados de Problemas con Resolución

***TEOREMA 1***

**01.-** Dada un banderín, como muestra la figura, calcular «$x$».




A) $b + a\cos\alpha$

B) $b - a\cos\alpha$

C) $b + a\,\text{sen}\,\alpha$

D) $b - a\,\text{sen}\,\alpha$

E) $b + 2a\,\text{sen}\,\alpha$

**02.-** En un triángulo rectángulo se conoce uno de los catetos «$m$» y el ángulo opuesto «$\theta$». Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

A) $m\,\text{sen}\,\theta$

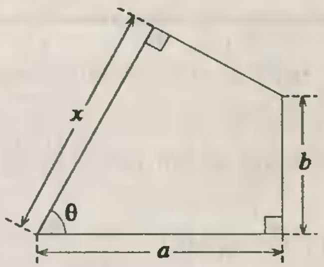
B) $m\cos\theta$

C) $m(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)$

D) $m(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)$

E) $2m\,\text{sen}\,\theta$

**03.-** Calcular «$x$» en la figura:




A) $a - b\,\text{sen}\,\theta$

B) $a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$

C) $a\cos\theta - b\,\text{sen}\,\theta$

D) $a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta$

E) $a\,\text{sen}\,\theta - b\cos\theta$

**04.-** En la siguiente figura, G es el baricentro del triángulo ABC; AD = BD y $3\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha = 3$. Calcular la tangente del ángulo DCG.

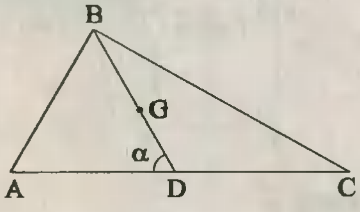
A) 3

B) 2/3

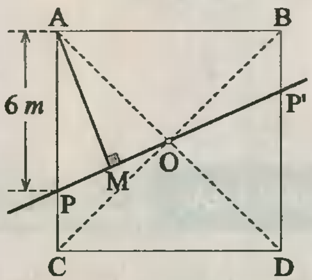
C) 1/3

D) 3/2

E) 1/2




**05.-** La figura muestra un cuadrado cuya área es 64 $m^2$ y tal que PC = BP. Calcular $\overline{AM}$ si $\overline{AP} = 6\,m$.




A) $12\sqrt{5}\,m$

B) $\frac{12}{5}\sqrt{3}\,m$

C) $\frac{16}{5}\sqrt{3}\,m$

D) $\frac{12}{5}\sqrt{5}\,m$

E) $12\sqrt{3}\,m$

**06.-** En la figura la longitud del segmento $\overline{PS}$ y $\overline{RT}$ es L y la segmento $\overline{TS}$ es $k$. El valor de $k$ está dado por:

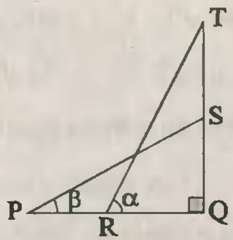
A) L (sen β - sen α)

B) L (sen α + sen β)

C) L (sen α . sen β)

D) L (sen α - sen β)

E) L (sen α + sen β)




A) $\dfrac{pq\cos\alpha}{p-q\,\text{sen}\,\alpha}$

D) $\dfrac{pq\,\text{sen}\,\alpha}{p+q\cos\alpha}$

B) $\dfrac{pq\,\text{sen}\,\alpha}{q+p\cos\alpha}$

E) $\dfrac{pq}{p\,\text{sen}\,\alpha+q\cos\alpha}$

C) $\dfrac{pq\cos\alpha}{q-p\,\text{sen}\,\alpha}$

**07.-** En la circunferencia de radio $R$ se ha inscrito el triángulo ABC con AB = AC. Si la medida del ángulo BAC es θ, entonces la longitud del lado BC es:

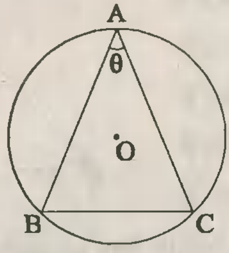
A) $R$ sen θ

B) $R$ sen θ/2

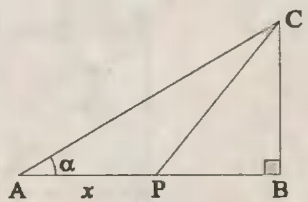
C) $2R$ cos θ

D) $R$ cos θ/2

E) $2R$ sen θ




**08.-** En la figura mostrada, calcular el valor de "$x$". Si: AC = 4 y $m\angle$BPC = 53°.




A) 3 cos α + 4 sen α

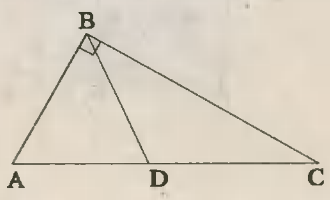
D) 3 cos α - 4 sen α

B) 4 cos α + 3 sen α

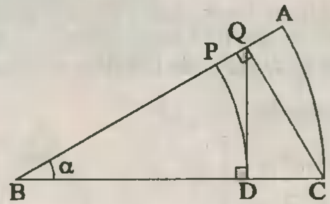
E) 4 cot α - 3 sec α

C) 4 cos α - 3 sen α

**09.-** De la figura mostrada, $m\angle$ ABC = 90°, $m\angle$ CBD = α ; AB = $p$ ; BC = $x$ ; BD = $q$. Calcule $x$.




**10.-** En la figura mostrada se cumple: AB = BC = R y $\text{sen}^2\alpha + \cos\alpha = M$, determinar: PQ.
ABC y PBD son sectores circulares concéntricos.




A) RM B) R/M C) R(M - 1)

D) R(M + 1) E) $RM^2$

**11.-** Si ABCD es un cuadrado $m\angle$EBA = 53°, $m\angle$DCE = α, $m\angle$BEA = 90°, calcular:

$$W = 5\sqrt{10}\ .\cos\alpha.$$

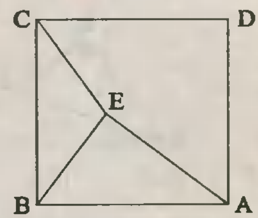
A) 18

B) 15

C) 12

D) 9

E) 6




***TEOREMA 2***

**12.-** Las bases de un trapecio isósceles son B y $b$. Si los lados no paralelos forman con la base mayor un ángulo θ, hallar el área del trapecio.

A) $\left(\dfrac{B+b}{2}\right).\tan\theta$

B) $\left(\dfrac{B^2+b^2}{2}\right).\cos\theta$

C) $\dfrac{Bb}{2}\,.\,\mathrm{sen}\,\theta$  D) $\left(\dfrac{B^2-b^2}{4}\right)\tan\theta$

E) $\dfrac{B\,.\,b}{4}\tan\theta$

**13.-** En un triángulo ABC, recto en B, la mediana CM y el cateto BA forman un ángulo $\theta$, entonces $\tan\theta$ es:

A) $2\tan\hat{A}$  B) $2\cot\hat{A}$  C) $2\tan\hat{C}$

D) $\tan\hat{A}+\tan\hat{C}$  E) $2(\tan\hat{C}+\cot\hat{A})$

**14.-** La altura de un cono circular recto es $h$ y el ángulo de abertura es $2\alpha$. Hallar en función de $h$ y de $\alpha$, el radio de la esfera circunscrita.

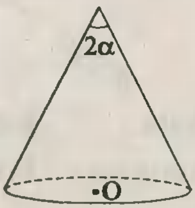
A) $0{,}5\,h\,\mathrm{sen}^2\alpha$

B) $0{,}5\,h\cos^2\alpha$

C) $0{,}5\,h\tan^2\alpha$

D) $0{,}5\,h\sec^2\alpha$

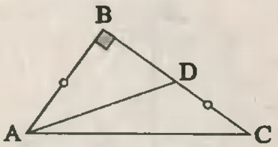
E) $0{,}5\,h\csc^2\alpha$




**15.-** En la figura mostrada se cumple:

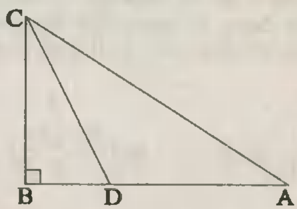
AB = CD, $m\angle BAD=\beta$ y $m\angle ACD=\alpha$,

calcular: $\cot\alpha-\tan\beta$




A) -2  B) -1  C) 1  D) 2  E) 3

**16.-** En la figura mostrada, $m\angle ABC=90°$, $m\angle DCB=m\angle CAB=\alpha$, AD = 2 BC. Calcule: $\tan\alpha$.




A) $\sqrt{2}-1$  B) $2\sqrt{2}+1$  C) $\sqrt{2}+1$

D) $2\sqrt{2}-1$  E) $\sqrt{2}+2$

**17.-** En la figura mostrada se verifica que:

$$m\angle ABC=m\angle AEB=90°,$$

$$m\angle CBE=m\angle DCE=\beta\ ,\ m\angle DAE=\theta$$

Calcule $\tan\theta$ en términos de alguna razón trigonométrica de $\beta$.

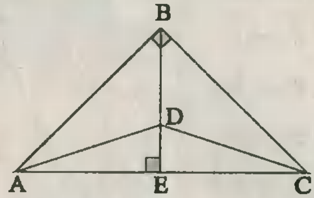
A) $\mathrm{sen}^3\beta$

B) $\cos^2\beta$

C) $\tan^3\beta$

D) $\cot^2\beta$

E) $\sec^4\beta$




**18.-** Si ABCD es un cuadrado, $m\angle DFA=\alpha$, y además E es punto medio de $\overline{BC}$; calcular el valor de: $\sec\alpha$.

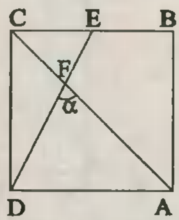
A) $2\sqrt{3}$

B) $\sqrt{10}$

C) $\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{2}$

E) $\sqrt{5}$




**19.-** En la figura mostrada ABCD es un cuadrado. Determinar el valor de:

$$R=\tan x-2\tan(x-y)$$

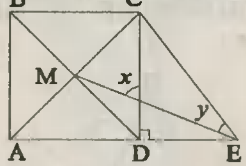
A) 0,5

B) 1

C) 1,5

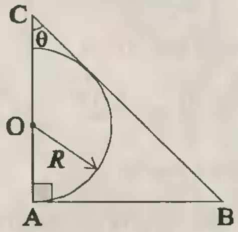
D) 2

E) 2,5



### *TEOREMA 3*

**20.-** En la figura, halle $\overline{AB}$ en términos de R y $\theta$.




A) $R \tan\theta (\csc\theta + 1)$

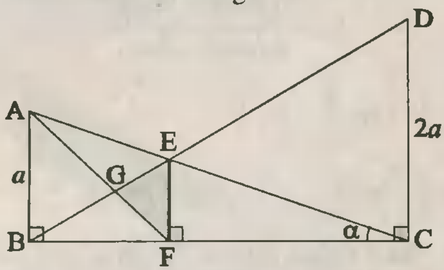
B) $R \cot\theta (\csc\theta + 1)$

C) $R \tan\theta (\sec\theta + 1)$

D) $R \cot\theta (\sec\theta + 1)$

E) $R \tan\theta (\csc\theta - 1)$

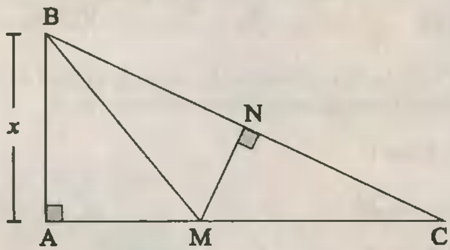
**21.-** En la siguiente figura: $AB = a$, $2AB = DC$. Calcular el área del triángulo EFG.




A) $\dfrac{a^2}{18}\tan\alpha$ B) $\dfrac{2a^2}{45}\cot\alpha$ C) $\dfrac{2a^2}{45}\tan\alpha$

D) $\dfrac{a^2}{18}(\tan\alpha + \cot\alpha)$ E) $(\tan\alpha - \cot\alpha)$

**22.-** En la figura mostrada, determinar "$x$", si: $NC = a$, $m\angle ABM = \alpha$ y $m\angle MCN = \beta$.




A) $\dfrac{a\sec\beta}{\cot\beta - \tan\alpha}$ D) $\dfrac{a\csc\beta}{\cot\alpha - \tan\beta}$

B) $\dfrac{a\csc\beta}{\tan\alpha - \cot\beta}$ E) $a(\cot\alpha + \tan\beta)$

C) $\dfrac{a\sec\beta}{\tan\alpha - \cot\beta}$

**23.-** Una circunferencia con centro en O está inscrita en un triángulo ABC. Si la distancia de O al vértice A del triángulo es la media proporcional entre las distancias del mismo punto O a los otros dos vértices, entonces la relación que se establece entre los ángulos del triángulo es:

A) $\operatorname{sen}^2\dfrac{A}{2} = \operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\,.\,\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$

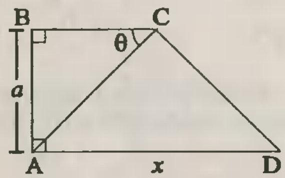
B) $\operatorname{sen}^2\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B}{2}\,.\,\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$

C) $\operatorname{sen}^2\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B}{2}\,.\,\cos\dfrac{C}{2}$

D) $\operatorname{sen}^2\dfrac{B}{2} = \operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\,.\,\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$

E) $\operatorname{sen}^2\dfrac{C}{2} = \operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\,.\,\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}$

**24.-** De la figura, calcular "$x$", si: $AC = CD$.




A) $a\tan\theta$

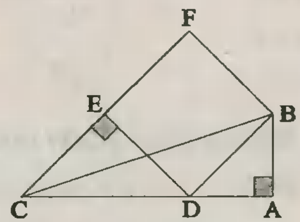
B) $2a\tan\theta$

C) $a\cot\theta$

D) $2a\cot\theta$

E) $2a\sec\theta$

**25.-** En la figura mostrada BDEF es un cuadrado. Si además: $m\angle DBA = \alpha$, $m\angle BCA = \beta$; calcule: $\cot\beta$.




A) $\csc^2\alpha - \cot\alpha$

B) $\tan^2\alpha + \sec\alpha$

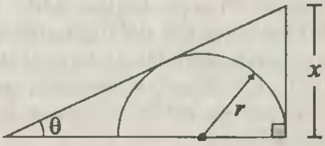
C) $\cot^2\alpha - \csc\alpha$

D) $\operatorname{sen}^2\alpha + \tan\alpha$

E) $\sec^2\alpha + \tan\alpha$

**26.-** En la figura mostrada determinar "$x$" en términos de "$r$" y "$\theta$"

A) $\dfrac{r\tan\theta}{\csc\theta+1}$




B) $\dfrac{r\csc\theta}{\sec\theta-1}$

C) $\dfrac{r\cot\theta}{\csc\theta+1}$

D) $\dfrac{r\cot\theta}{\csc\theta-1}$ E) $r\tan\theta$

**27.-** En la figura mostrada se cumple que:

OB = AB = OC = CD. Calcular: "$\cot\theta$"

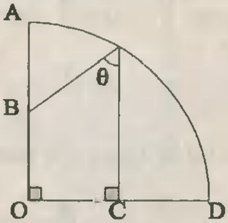
A) $\sqrt{3}/3$

B) $2\sqrt{3}-1$

C) $\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{3}+1$

E) $\sqrt{3}$




**28.-** En la figura se muestra un arco de circunferencia, donde: AM = BN. Determine el valor de:

$$M = 2\cos\theta + \cot\theta.$$

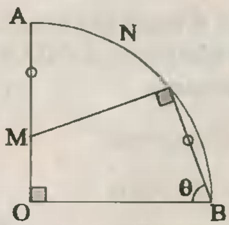
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5




***ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR***

**29.-** De la figura mostrada se sabe que:

$m\angle BCA = m\angle ADC = 90°; m\angle ABC = \alpha$

Si además el área de la región triangular ADC es $k$, calcule el área de la región triangular ABC.

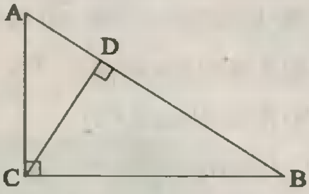
A) $k\csc^2\alpha$

B) $\dfrac{k}{2}\cos^2\alpha$

C) $k\sec^2\alpha$

D) $\dfrac{k}{2}\operatorname{sen}^2\alpha$

E) $k\tan^2\alpha$

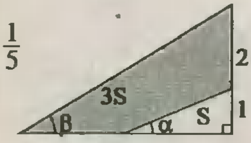



**30.-** A partir de la figura mostrada, se pide determinar M, si:

$$M = \frac{9\sqrt{\cot\beta}-\sqrt{\tan\beta}}{4\sqrt{\cot\alpha}-\sqrt{\tan\alpha}}$$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{5}$

D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$




**31.-** De la figura, calcular "θ", si se sabe que: $S$ = área de una región triangular.

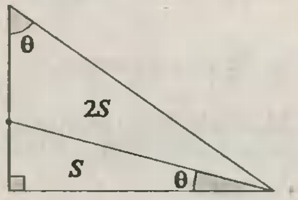
A) 45°

B) 37°

C) 30°

D) 60°

E) 53°




**32.-** En la figura mostrada, evaluar el área de la región triangular AOB en términos de θ.

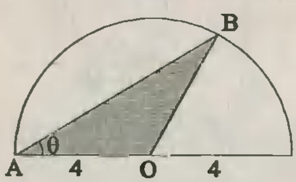
A) $4\operatorname{sen}\theta$

B) $8\operatorname{sen}2\theta$

C) $2\cos 2\theta$

D) $5\operatorname{sen}\theta$

E) $3\cos 2\theta$




**33.-** Si ABCD es un cuadrado donde: CD = 3ED y además: $m\angle BEA = \theta$ ; calcular $\csc\theta$.

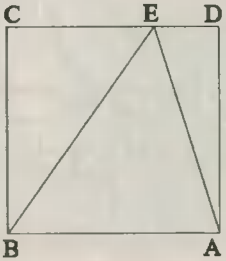
A) $\dfrac{\sqrt{110}}{3}$

B) $\dfrac{\sqrt{121}}{4}$

C) $\dfrac{\sqrt{130}}{9}$

D) $\dfrac{\sqrt{145}}{10}$

E) $\dfrac{\sqrt{160}}{12}$




**34.** - En la figura mostrada, $m\angle ABC = 90^\circ$, $m\angle BCA = m\angle DAB = \alpha$. Asimismo se sabe que el área de las regiones triangulares ABD y ADC son equivalentes. Calcular el valor de:

$$W = \cos 2\alpha \,.\, \csc^2\alpha$$

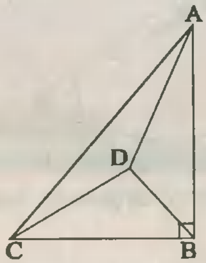
A) 5

B) 4

C) 3

D) 2

E) 1




**35.-** En la figura mostrada se sabe que:

$m\angle ABD = m\angle AED = m\angle BCE = 90^\circ$ ;

$m\angle BDC = \theta$ ; $AB = b$ ; $BD = a$

Calcule el área de la región sombreada.

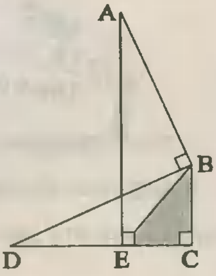
A) $\frac{1}{2}ab\cos^2\theta$

B) $\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta.\cos\theta$

C) $2\,ab\,\text{sen}^2\theta.\cos\theta$

D) $2\,ab\,\text{sen}\,\theta.\cos^2\theta$

E) $\frac{1}{2}ab\,\text{sen}^2\theta$




**36.-** En la figura mostrada, ABCD es un rectángulo. Si: $AD = 4CD$, $CE = CD$, $m\angle BFA = \alpha$; calcule: $W = \sqrt{3 + 7\tan\alpha}$

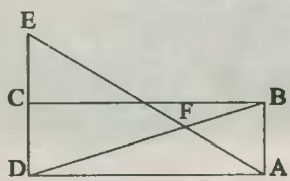
A) 3

B) 2

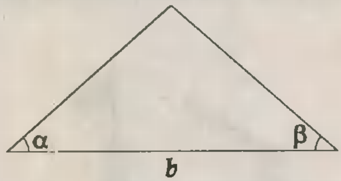
C) 1

D) 1/2

E) 1/3




**37.-** Determinar el área de la región triangular de la figura:




A) $\dfrac{b^2}{2(\cot\alpha + \cot\beta)}$

B) $\dfrac{b^2}{3(\cot\alpha + \cot\beta)}$

C) $\dfrac{b^2}{3(\cot\alpha - \cot\beta)}$

D) $\dfrac{b^2}{6(\csc\alpha - \cot\beta)}$

E) $\dfrac{b^2}{2(\csc\alpha - \csc\beta)}$

**38.-** En la figura ABCD es un cuadrado, M y N son puntos medios. Determinar «cot θ».

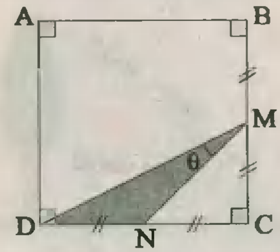
A) 2

B) 1

C) 3

D) 1/2

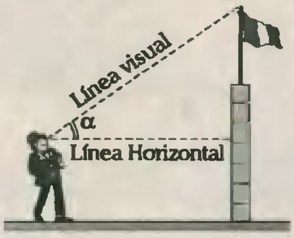
E) 1/3



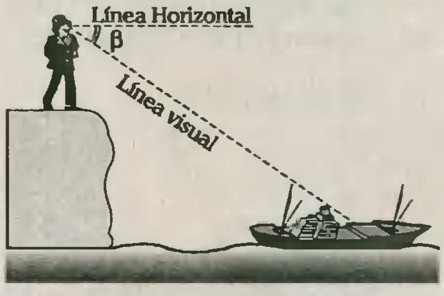
# CAP 5
# Razones Trigonométricas en Situaciones Contextualizadas

## 5.1. ÁNGULOS VERTICALES

Se denominan así a aquellos ángulos agudos, uno de cuyos lados se ubica sobre la línea horizontal mientras que el otro se localiza en el mismo plano vertical, por encima o por debajo de aquella, llamándose: ángulo de elevación y ángulo de depresión, respectivamente.



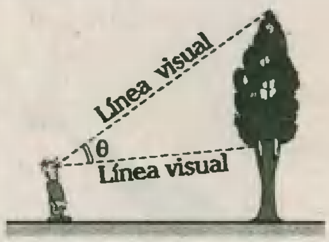

$\alpha$: es la medida del ángulo de elevación



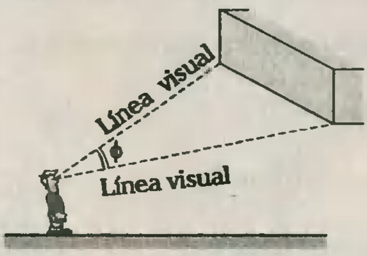

$\beta$: es la medida del ángulo de depresión

## 5.2. ÁNGULO DE OBSERVACIÓN

Es el ángulo formado por dos líneas visuales que definen un campo de observación respecto de un observador. Este ángulo puede ubicarse en cualquier plano: en un plano vertical (P.V.), en un plano horizontal (P.H.), y en cualquier otra orientación.




$\theta$: ángulo de observación en el P.V.

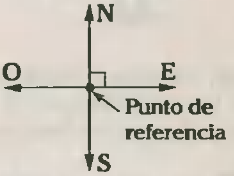


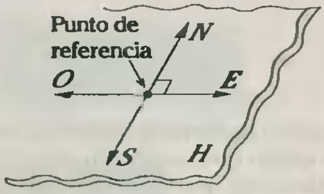

$\phi$: ángulo de observación en el P.H.

**Nota:** El ángulo de observación está comprendido entre 0° y 180°

## 5.3. ÁNGULOS HORIZONTALES

Son aquellos ángulos que se encuentran en un mismo plano horizontal. Estos ángulos están constituidos por las denominadas direcciones cardinales: este (E), oeste (O), norte (N) y sur (S).



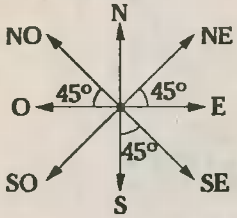

### 5.3A Rumbo o Dirección

Es la dirección considerada o trazada en el plano horizontal, y principalmente cualquiera de las comprendidas en la rosa náutica.

Para definir un rumbo o dirección de movimiento se toma como referencia cualquiera de los puntos cardinales.

### 5.3B Direcciones NE, NO, SE y SO

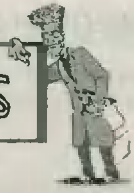
(Nor Este, Nor Oeste, Sur este y Sur Oeste respectivamente)




### 5.3C Rosa Náutica o Rosa de los Vientos

También conocida como rosa de la aguja, fue antes de la generalización de las brújulas magnéticas, una excelente referencia en las cartas marinas en la que se mostraba la dirección de los ocho vientos principales. Las más antiguas rosas de los vientos de las que se tiene noticias son las que aparecen en las cartas de navegación del siglo XIII manejadas por los navegantes españoles e italianos. En ellas, los ocho puntos cardinales aparecían marcados con las iniciales de los principales vientos, si bien en ocasiones —como puede observarse en la rosa que aparece en la imagen— el punto cardinal Este aparecía señalado con una cruz, en tanto que el Norte lo hacía con una flor de lis. A partir de la expansión del uso de la brújula, la rosa de los vientos pasó a convertirse en una herramienta auxiliar de aquélla. [*Enciclopedia Encarta, Madrid, 2004*].

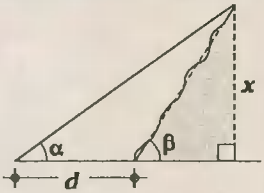
# PROBLEMAS MODELOS

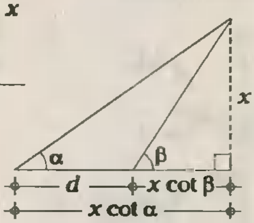


**PROB. 1**

Desde un punto en tierra se observa la cumbre de una montaña con un ángulo de elevación $\alpha$. Si la distancia del punto de observación a la falda de la montaña es «$d$», exprese la altura de la montaña respecto al nivel del suelo en términos de $\alpha$, $\beta$ y $d$, siendo $\beta$ la pendiente de la falda de la montaña.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★




Se observa que : $x \cot \alpha = d + x \cot \beta$

$$\Rightarrow \quad x \cot \alpha - x \cot \beta = d$$

$$\Rightarrow \quad x(\cot \alpha - \cot \beta) = d$$

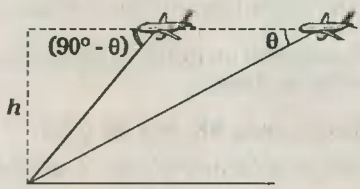
$$\therefore \quad x = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

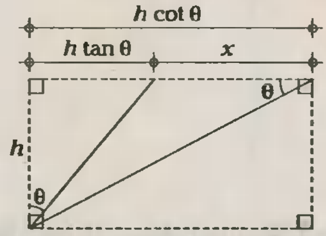
**PROB. 2**

Desde un avión que vuela horizontalmente y en línea recta, a una altura «$h$» $km$, es ubicado en tierra un punto bajo un ángulo de depresión $\theta$. Luego de «$t$» *horas*, este punto es visto nuevamente con un ángulo de depresión igual al complemento del anterior. Si el avión no ha pasado por encima del punto mencionado, exprese la velocidad del avión en $km/h$ en términos de $h$, $t$ y $\theta$. Se sabe que la velocidad del avión es constante.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Elaboramos el gráfico correspondiente:




Se sabe que:

distancia = velocidad × tiempo

$$x = v \,.\, t \qquad \ldots (1)$$

Pero: $\quad x = h \cot \theta - h \tan \theta$

$$\Rightarrow \quad x = h(\cot \theta - \tan \theta) \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

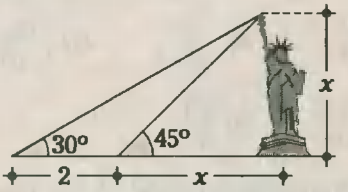
$$\Rightarrow \quad h(\cot \theta - \tan \theta) = v \,.\, t$$

$$\therefore \quad v = \frac{h}{t}(\cot \theta - \tan \theta)$$

**PROB. 3**

Un reflector situado al ras del suelo ilumina un monumento bajo un ángulo de 30°. Se traslada el reflector a 2 $m$ más cerca del monumento y éste se ve bajo un ángulo de 45°. ¿Cuál es la distancia del monumento al segundo lugar de iluminación?

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★




En el triángulo mayor: $60° \wedge 30°$, tendremos:

$$\tan 30° = \frac{x}{2+x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x = 2\sqrt{3} + x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Racionalizando, obtendremos:

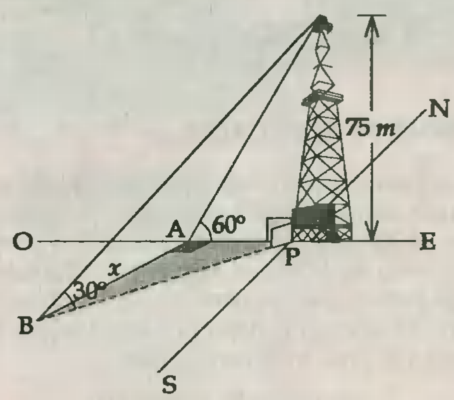
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2(3\sqrt{3}+3)}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \sqrt{3}+1}$$

**PROB. 4**

La elevación de una torre desde un punto A al Oeste de ella es 60° y desde un punto B al sur de A, la elevación es de 30°. Si la torre tiene 75 $m$ de altura, calcular la distancia comprendida entre A y B.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★




Trasladando los datos a un gráfico como el mostrado, reconocemos que:

$$AP = 75\cot 60° = \frac{75}{\sqrt{3}} \wedge BP = 75\cot 30° = 75\sqrt{3}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado, obtendremos:

$$AB^2 + AP^2 = BP^2 \Rightarrow x^2 + \frac{75^2}{3} = 75^2(3)$$

$$\Rightarrow x^2 = 75^2\left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 = 75^2\left(\frac{8}{3}\right) \quad \therefore \quad \boxed{x = 50\sqrt{6}}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Lea e interprete adecuadamente el enunciado del problema.*
2) *Elabore un gráfico indicando en él los datos reconocidos del enunciado.*
3) *Centralice su trabajo en triángulos rectángulos.*
4) *Resuelva dichos triángulos rectángulos*


### ÁNGULOS VERTICALES

**01.-** Desde la parte superior e inferior del segundo piso de un edificio de cuatro pisos iguales, se observa una piedra en el suelo y a una distancia de 9 *m* con ángulos de depresión «$\beta$» y «$\theta$» respectivamente. Desde la parte más alta del edificio la depresión angular para la piedra es «$\alpha$». Si se conoce que:

$$\tan\alpha - \tan\beta - \tan\theta = 1/4$$

La altura del edifico es:

A) 6 *m*　B) 10 *m*　C) 9 *m*　D) 8 *m*　E) 4 *m*

**02.-** Un observador aprecia dos puntos que están en una misma vertical bajo ángulos de elevación y de depresión de 30° y 15° respectivamente. Si la distancia del observador al no cambiar más alto es $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ *m*.

¿Cuál es la distancia del observador al otro punto?

A) $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$　D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

B) $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$　E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

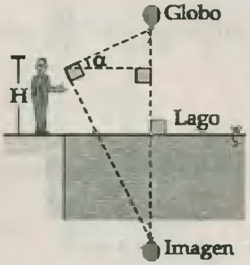
C) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

**03.-** Los ángulos de elevación de la cúspide de una torre, vistos desde 2 puntos situados en línea recta con el pie de la torre son de 45° y 30° respectivamente, si la distancia entre los puntos de observación es de 60 *m*, la altura de la torre (en *m*), es:

A) $\frac{60}{\sqrt{3}}$　B) $\frac{60}{\sqrt{3}-1}$　C) $\frac{60}{1-\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{3}-2}{60}$　E) $\frac{\sqrt{3}}{60}$

**04.-** En la figura mostrada. ¿A qué distancia se encuentra el globo respecto del lago?




A) H cos $2\alpha$

B) H sen $2\alpha$

C) H csc $2\alpha$

D) H sec $2\alpha$

E) H cot $2\alpha$

**05.-** Desde un punto a nivel del suelo un observador divisa una estatua con su pedestal de 5 *m* y 4 *m* respectivamente. El ángulo de elevación de la cabeza de la estatua es el doble del ángulo a la parte superior del pedestal o pie de la estatua. ¿Cuál es el valor de la tangente del mayor ángulo de elevación?

A).1/2　B) 3/4　C) 2/3　D) 1/5　E) 5/6

**06.-** El diámetro aparente (ángulo de observación) del sol es aproximadamente 32'. ¿A qué distancia del ojo debe colocarse una moneda de 30 *mm* de diámetro para poder tapar exactamente al sol?. Considere que tan 16' = 0,00465.

A) 3,844 *m*　B) 3,223 *m*　C) 3,448 *m*

D) 4,483 *m*　E) faltan datos

**07.-** Un lugar de la provincia de Santiago tiene una latitud 30°. ¿A qué distancia respecto del eje de la tierra se encuentra, si el radio terrestre mide 6 370 *km*?

A) 3 185 *km* B) 951,1 *km* C) 961,1 *km*

D) 917 *km* E) 5 516 *km*

**08.-** Desde un globo que está en la vertical que cae sobre un camino recto, los ángulos de depresión de dos piedras consecutivas, indicadoras de los *kilómetros*, miden 45° y 60°. Calcular la altura del globo.

A) 2 300 *m* B) 2 320 *m* C) 2 340 *m*

D) 2 366 *m* E) 2 360 *m*

**09.-** Una mosca que está en el suelo observa un pajarillo con un ángulo de elevación de 45°. Para llegar donde está el pajarillo, la mosca describe una trayectoria curva de un cuarto de circunferencia de modo que en un punto de su recorrido observa al pajarillo con un ángulo de elevación de 37°. ¿A qué altura (en *m*) se encuentra la mosca en dicho punto?. El pajarillo está a una altura de 2,5 *m* respecto del piso.

A) 0,5 B) 0,55 C) 0,6 D) 0,4 E) 0,7

**10.-** Desde un avión se observa un punto en tierra con un ángulo de depresión "α". Cuando el avión se desplaza horizontalmente una distancia igual al triple de la altura a la que se encuentra, el nuevo ángulo de depresión para el mismo punto es "90° - α". Calcular:

$$M = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

**11.-** Desde un punto en tierra se observa la altura de una torre con un ángulo de elevación de 37°. Si la visual en dicho lugar mide 20 *m*, ¿qué distancia horizontal (en *m*) deberá acercarse un observador, hacia la torre, para que el nuevo ángulo de elevación tenga por tangente 2?

A) 13 B) 11 C) 10 D) 9 E) 5

**12.-** Un alumno de $\sqrt{3}$ *m* de altura, observa la parte superior de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuánto deberá retroceder el alumno para observar la misma torre pero con un ángulo de elevación de 30°, si la altura de la torre es de 6 $\sqrt{3}$ *m*?.

A) 8 *m* B) 10 *m* C) 12 *m* D) 14 *m* E) 16 *m*

**13.-** Un pescador situado a 600 *m* sobre el nivel del mar observa una lancha con un ángulo de depresión "α". Seis *minutos* después observa en la misma dirección a la lancha pero ahora con un ángulo de depresión "β". Calcular la rapidez de la lancha en *km/h*, si:

$$\tan\alpha = \sqrt{3} + 1 \quad y \quad \tan\beta = \sqrt{3} - 1$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**14.-** El asta de una bandera está colocado verticalmente en lo alto de una vivienda. A 36 *m* de distancia de la parte baja de la vivienda se observa la punta del asta y la parte superior de la vivienda con ángulos de elevación de 53° y 37° respectivamente. Calcule (aproximadamente) la longitud del asta (en *m*).

A) 13 B) 18 C) 19 D) 21 E) 23

**15.-** Un avión que vuela en línea recta y horizontalmente antes de pasar sobre 2 puntos en tierra "A" y "B" los observa con ángulos de depresión "α" y "β" respectivamente. Cuando está sobre "A" es visto desde "B" con un ángulo de elevación "θ". Si : $\cot\alpha = 1/3$ y $\cot\beta = 1/2$, determinar "$\tan\theta$".

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**16.-** Una antena de radio de 15 *m* de longitud se encuentra en la azotea de un edificio. Desde un punto del plano horizontal que pasa por la base del edificio las elevaciones angulares de la parte superior e inferior de la antena son α y β respectivamente. Si: $\tan\alpha = 0{,}76$ y $\tan\beta = 0{,}19$, determinar (en *m*) la altura del edificio.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**17.-** Un poste de longitud "$x$", está inclinado 60° respecto a la vertical. El foco del poste es observado por 2 personas que se encuentran ubicadas a los dos lados de éste y lo observan con ángulos de elevación "$\theta$" y "$90° - \theta$". Si la separación entre dichas personas es de 16 $m$, calcular "$x$" en términos de "$\theta$".

Sugerencia: $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$.

A) sen $2\theta$ B) 2 sen $2\theta$ C) 4 sen $2\theta$

D) 8 sen $2\theta$ E) 16 sen $2\theta$

**18.-** Una persona sube una cuesta y cuando llega a la cúspide, se da cuenta que la altura a la cual se encuentra es la mitad del camino recorrido. Calcular el ángulo de elevación con el cual se observa a la cúspide, desde la base de la cuesta.

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

**19.-** Una persona observa un objeto que está en caída libre vertical, con un ángulo de elevación de 60°. Luego de un momento lo vuelve a observar con un ángulo de elevación de 30°. Si en la primera observación, el objeto, se encontraba a 60 $m$ de altura, ¿a qué altura (en $m$) se encontraba en la segunda observación?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

### *ÁNGULOS HORIZONTALES*

**20.-** Una persona en A se encuentra al este de la otra persona en B, si la persona en B se desplaza en la dirección N$\frac{1}{4}$NE y la persona en A en la dirección NO, se encuentran en el punto P. Calcular ¿cuánto mide el ángulo APB?.

A) 45° B) 11°15' C) 47°15'

D) 56°15' E) 15°15'

**21.-** Si desde un carrousel observas a un amigo en la dirección oeste en la situación más cercana y al cabo de 0,15 segundos los observas en dirección NO. Calcular el número de vueltas que da el carrousel por cada minuto.

A) 30 RPM B) 40 RPM C) 50 RPM

D) 60 RPM E) 70 RPM

**22.-** Un niño sale de su casa y hace el siguiente recorrido: 20 $m$ al norte, 40 $m$ al este y una cierta distancia al SO, hasta ubicarse al este de su casa. ¿A qué distancia (en $m$) de ella se encuentra?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

**23.-** Un auto recorre 40 $km$ en la dirección N53°O, luego recorre $40\sqrt{2}$ $km$ en la dirección SO y finalmente recorre 60 $km$ en la dirección este. Determine en qué dirección y a qué distancia (en $km$) se encuentra el auto respecto a su posición de partida (aproximadamente).

A) S37°O ; 20 D) S30°O ; 20

B) S53°O ; 20 E) S45°O ; $20\sqrt{2}$

C) S45°O ; 10

**24.-** Desde un faro se observa dos barcos con direcciones ESE y NNE. Si la distancia que hay entre los dos barcos es aproximadamente $10\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ $km$, y desde el segundo barco se observa al primero en la dirección SE, calcular (aproximadamente en $km$) la diferencia de las distancias del faro a los 2 barcos.

A) 10 B) 15 C) 17 D) 20 E) 25

**25.-** Desde una estación de control A se observa a otra estación B en la dirección N$\theta$E a una distancia L. Desde la estación B se observa una tercera estación C en la dirección N$2\theta$E a una distancia también igual a L. ¿En que dirección se encuentra la estación A respecto de la estación C?

A) $S\frac{\theta}{3}O$ B) $S\frac{3\theta}{2}O$ C) $S\frac{\theta}{2}O$

D) $O\frac{\theta}{3}N$ E) $O\frac{3\theta}{2}N$

**26.-** Dos embarcaciones parten de un puerto con movimientos rectilíneos, el primero con dirección N$\beta$E y el segundo con rumbo S$2\beta$E. Cuando el primero recorre 4 *km*, el segundo recorre 4,2 *km*. La distancia que los separa es de 5,8 *km*. Encontrar el ángulo $\beta$ en radianes.

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{24}$

**27.-** Una lancha sale de un puerto con movimiento rectilíneo en la dirección SE. Luego de un tiempo "*t*" de recorrido se desvía y continua rectilíneamente por la dirección N15°O, hasta equidistar del puerto y del punto de desvío. ¿En qué dirección se encuentra la lancha respecto del puerto?.

A) SSE B) S75°E C) E40°S

D) N60°E E) ESE

**28.-** Dos personas se ubican una frente a otra en la línea Este - Oeste. Si éstas se desplazan en rectilíneamente en las direcciones N70°E y O10°N respectivamente hasta encontrarse, determine el menor ángulo formado por las direcciones de sus movimientos.

A) 45° B) 30° C) 70° D) 80° E) 150°

**29.-** Jorge y Giovanna, cogidos de las manos, se encontraban conversando. Al despedirse Jorge se dirige en la dirección Oeste caminando rectilíneamente 200 *m*, pero Giovanna lo hace rectilíneamente en la dirección N 63° 30'E una distancia de $100\sqrt{5}$ *m*. Ella olvidó dar un mensaje a Jorge, por lo cual decide darle el encuentro caminando rectilíneamente en la dirección S(90° - $\theta$)O hasta encontrarlo. Se pide determinar cot $\theta$, aproximadamente.

A) 2 B) 1/3 C) 4 D) 1/4 E) 1/2

**30.-** ¿Cuál es la dirección opuesta a la dirección NE $\frac{1}{4}$ E ?

A) N $\frac{1}{4}$ NE B) SE $\frac{1}{4}$ S C) SO $\frac{1}{4}$ O

D) NE $\frac{1}{4}$ N E) N $\frac{1}{4}$ NO

**31.-** Al calcular el mayor ángulo formado por las direcciones:

SE $\frac{1}{4}$ S y N $\frac{1}{4}$ NE se obtiene:

A) 135° B) 225° C) 45° D) 60° E) 120°

**32.-** Para las siguientes proposiciones determine la verdad (V) o falsedad (F):

a) El mayor ángulo formado por las direcciones SO y SSE es 305°

b) El menor ángulo formado por las direcciones ENE y ONO es 135°.

c) El menor ángulo formado por las direcciones ESE y NNO es 90°

A) FVF B) VVF C) FFF

D) FFV E) FVV

### SITUACIONES TRIDIMENSIONALES

**33.-** Desde lo alto de un acantilado se observa en la dirección O(90°- $\alpha$)S a una boya bajo un ángulo de depresión de 45° y en la dirección E$\alpha$S a un bote con un ángulo de depresión de 30°. Si la distancia que separa a la boya y el bote es 80 *m*, determinar (en *m*) la altura del acantilado.

A) 20 B) 13 C) 40 D) 14 E) 25

**34.-** Un observador se encuentra ubicado al sur de una torre de alta tensión y visualiza el extremo superior de aquella con un ángulo de elevación $\alpha$. Asimismo otro observador se encuentra en la dirección O$\alpha$N respecto a la anterior y al Oeste de la torre visualizando el extremo superior de ésta con un ángulo de elevación $\beta$. Calcule cot $\beta$ en términos de una razón trigonométrica de $\alpha$.

A) $\text{sen}^2\alpha$ B) $\tan^2\alpha$ C) $2\sec\alpha$

D) $\cot^2\alpha$ E) $2\csc\alpha$

**35.-** Un avión desciende rectilíneamente con una inclinación $\alpha$ en la dirección Este - Oeste. Si un observador ve al avión primero hacia el NE y luego hacia el N con ángulos de elevación iguales al complemento de $\alpha$, entonces al calcular sec $\alpha$ se obtiene:

A) $\sqrt[4]{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $\sqrt[4]{5}$ E) $\sqrt[4]{2}$

**36.-** Dos edificios $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma altura. Una persona de ubica entre dichos edificios de tal manera que su posición está en la línea recta $\overline{AC}$ que une sus bases. Dicha persona observa el extremo B con un ángulo de elevación de 60°, si luego de caminar rectilíneamente $3\sqrt{2}$ *m* en una dirección perpendicular a la recta $\overline{AC}$ observa los extremos B y D con ángulos de elevación de 45° y 30° respectivamente, entonces la distancia de su posición inicial al extremo C es:

A) $3\sqrt{7}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{3}$

D) $2\sqrt[3]{5}$ E) $2\sqrt{7}$

**37.-** Una persona de 1,80 *m* de altura se encuentra al sur de un poste luminoso de altura "H" *m* y a una distancia de "$x$" *m*, de tal manera que la proyección de su sombra tiene una longitud de 7,20 *m*. Si camina rectilíneamente hacia el Oeste, de tal manera que su distancia hacia la parte inferior del poste es de "$y$" *m* y la proyección de su sombra tiene como medida 9 *m*; se pide determinar: $x/y$.

A) 1/2 B) 4/5 C) 2/3 D) 1/3 E) 1/5.

**38.-** Desde 2 puntos A y B ubicados al sur u este de un edificio, se observa la parte superior del mismo con ángulos de elevación de 45° y 53° respectivamente. Hallar la distancia entre el punto B y el edificio, si la distancia entre el punto A y la parte superior del edificio es $60\sqrt{2}$ *m*.

A) 45 *m* B) 40 *m* C) 43 *m*

D) 50 *m* E) 43 *m*

**39.-** Un niño de 1 *m* de estatura observa un foco de luz que se encuentra sobre un poste en la dirección N18°E, con un ángulo de elevación cuya tangente es 2/3; luego se desplaza 20 *m* en la dirección N71°E y vuelve a observar al poste ahora en la dirección N72°O. Hallar la longitud de la sombra del niño en su posición final.

A) 5 *m* B) 4 *m* C) 3 *m* D) 2 *m* E) 1 *m*

**40.-** Una avión cae con un ángulo de inclinación "$\alpha$" debajo de la horizontal en la dirección EO. Calcular el valor de la tan a para que un observador vea el avión primero hacia el NE y luego hacia el norte con el mismo ángulo de elevación "$\theta$"

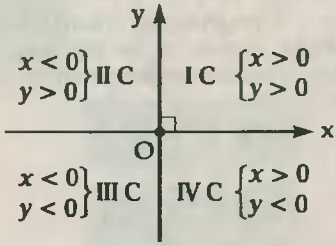
A) $(1 - \sqrt{2}).\tan\theta$ D) $(3\sqrt{2} - 1).\tan\theta$

B) $(\sqrt{2} + 1).\tan\theta$ E) $(2\sqrt{2} - 1).\tan\theta$

C) $(\sqrt{2} - 1).\tan\theta$

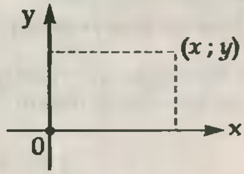

# Razones Trigonométricas de Ángulos en el Plano Cartesiano

## 6.1. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES




Es aquel sistema formado por dos rectas numéricas una horizontal llamada eje de abscisas ($x$) y la otra vertical llamada eje de ordenadas ($y$), que se cortan perpendicularmente, en un punto llamado origen de coordenadas, formando un plano en el que cualquier punto está plenamente ubicado por un conjunto llamado *par ordenado*.

**Par Ordenado.-** Es el conjunto formado por dos números reales de la forma ($x$ ; $y$), caracterizados por el orden de sus elementos: $x$ es el primer elemento (abscisa) e $y$ es el segundo elemento (ordenada) .



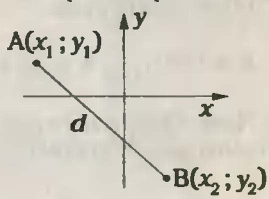

En el plano se identifican cuatro cuadrantes denotados y ubicados según como se muestra en la figura.

**Axioma.** A cada punto del plano cartesiano le corresponde uno y solo un par ordenado.

### 6.1A Ubicación de un punto en el sistema de coordenadas

Un punto se ubica en el plano cartesiano cuando se conoce su respectivo par ordenado.

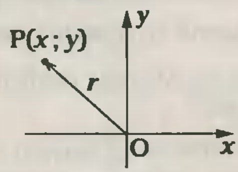
### 6.1B Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano




Es la longitud del segmento de recta que existe entre dos puntos de un plano cartesiano, y está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d > 0$$

### 6.1C Radio Vector ($r$)



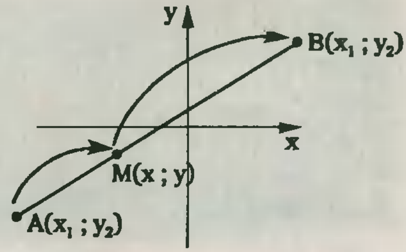

Es la distancia que hay desde el origen de coordenadas hasta un punto ($x$ ; $y$) cualquiera del plano.

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2} \quad \text{o bien} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad ; r > 0$$

La denominación de radio vector, se debe a que este elemento matemático tiene origen (0 ; 0), dirección (del origen al punto) y módulo (la distancia OP = $r$).

### 6.1D División de un segmento en una razón dada ($r$).

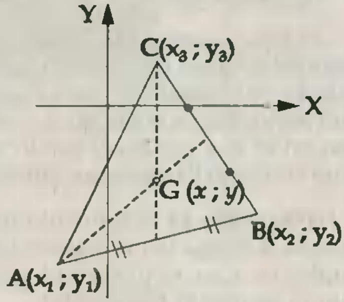
Sea: $\dfrac{AM}{MB} = r$ , donde «$r$» es el valor de la razón (comparación) de las longitudes de dos segmentos ubicados en una misma recta. Si A y B son conocidos, las coordenadas del punto M vienen dadas por:




$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

### 6.1E Coordenadas del baricentro de un triángulo

Conocidas las coordenadas $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$ de los vértices de un triángulo, se puede determinar las coordenadas del baricentro de dicho triángulo, a partir de:



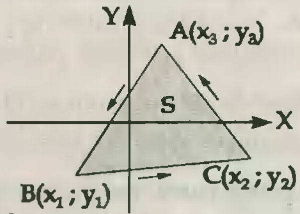

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

### 6.1F Área de una región triangular

Conocidas las coordenadas de los vértices de un triángulo, el área de la región triangular limitada por ella se determina a partir del siguiente determinante:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_2 \end{vmatrix}$$




Cuyo resultado es:

$$S = 1/2[(x_1 . y_2 + x_2 . y_3 + x_3 . y_1) - (x_1 . y_3 + x_3 . y_2 + x_2 . y_1)]$$

Nota.- Queda claro que el valor asociado a esta matriz (el determinante), es el área de la región triangular. Esta técnica nos permite determinar el área de una región poligonal.

## 6.2. ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

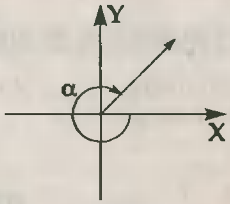
### 6.2A Ángulo en posición normal

Es aquel cuyos elementos están plenamente determinados en un plano cartesiano, de modo que :

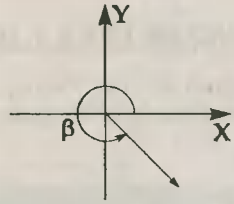
i) Su vértice es el origen del sistema de coordenadas.

ii) Su lado inicial es el semi eje positivo de las abscisas.

iii) Su lado terminal nos indicará el cuadrante al cual pertenece el ángulo.



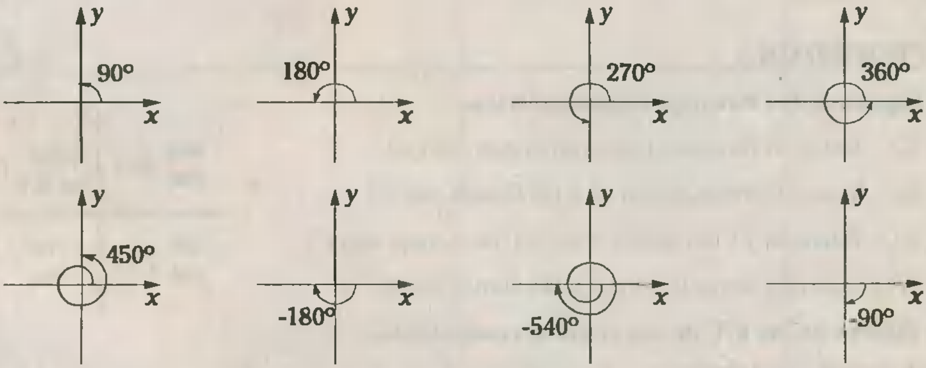

$\alpha \in IC \; ; \; \alpha < 0$




$\beta \in IVC ; \; \beta > 0$

### 6.2B Ángulo Cuadrantal

Es aquel ángulo en posición normal cuyo lado final se encuentra sobre un semieje. Por convención se ha establecido que los ángulos cuadrantales no pertenecen a ningún cuadrante. Por ejemplo:

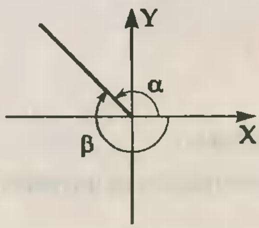



En general: $\angle$ **cuadrantal** $= 90^{\circ} n \; ; \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$

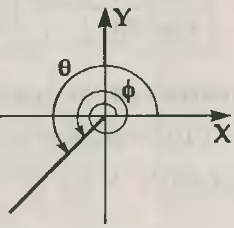
**o bién** $\angle$ **cuadrantal** $= \dfrac{k\pi}{2} \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{Z}$

### 6.2C Ángulos Coterminales

Son aquellos ángulos en posición normal que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final sin considerar sus correspondientes sentidos de rotación ni su medida.



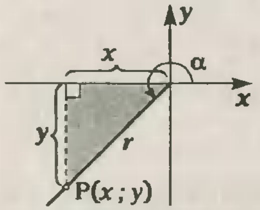

$\alpha$ y $\beta$ son coterminales




$\theta$ y $\phi$ son coterminales

## 6.3. DEFINICIONES DE LAS R.T. DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Sea $\alpha$ un ángulo en posición normal tal que su lado final pasa por el punto P($x$ ; $y$). Se definen las razones trigonométricas de $\alpha$, de la siguiente manera:




$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ ; $r > 0$

| | |
|---|---|
| $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}} = \dfrac{y}{r}$ | $\cot\alpha = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \dfrac{x}{y}$ |
| $\cos\alpha = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} = \dfrac{x}{r}$ | $\sec\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}} = \dfrac{r}{x}$ |
| $\tan\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \dfrac{y}{x}$ | $\csc\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} = \dfrac{r}{y}$ |

## 6.4. PROPIEDADES

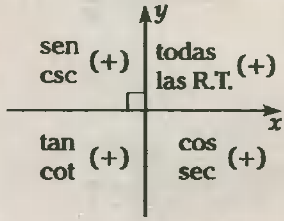
### 6.4A Signos de las Razones Trigonométricas

IC: Todas las Razones Trigonométricas son (+)

IIC: Seno y Cosecante son (+), las demás son (-)

IIIC: Tangente y Cotangente son (+), las demás son (-)

IVC: Coseno y Secante son (+), las demás son (-)




### 6.4B Valores de las R.T. de los ángulos cuadrantales

A partir de las definiciones anteriores se pueden deducir los valores del siguiente cuadro:

| | ÁNGULO CUADRANTAL | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| R.T. | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| sen | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| cos | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| tan | 0 | ND | 0 | ND | 0 |
| cot | ND | 0 | ND | 0 | ND |
| sec | 1 | ND | -1 | ND | 1 |
| csc | ND | 1 | ND | -1 | ND |

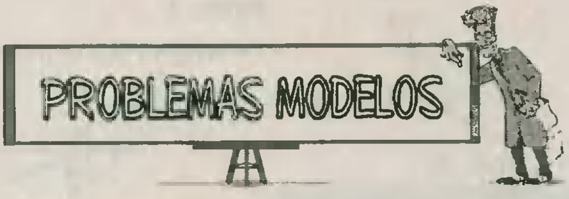
ND = valor no definido

### 6.4C Propiedades de los Ángulos Coterminales

Sean $\alpha$ y $\beta$ dos ángulos coterminales, entonces se cumple que:

i) $\alpha - \beta = n \times 360°$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ La diferencia de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas de 360°.

ii) R.T.($\alpha$) = R.T.($\beta$) Si dos ángulos son coterminales sus razones trigonométricas serán iguales.




**PROB. 1**

Dado los puntos A(-2 ; 7) y B(10 ; 1), si P($x$ ; $y$) es el punto medio del segmento AB, por donde pasa el lado final de un ángulo en posición normal θ, se pide:

a) Ubicar el punto P($x$ ; $y$) en el sistema de coordenadas rectangulares.

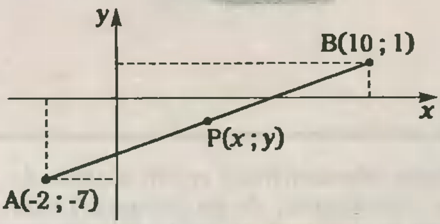
b) Calcule los valores de las 6 R.T. del ángulo θ.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Por la fórmula del punto medio:

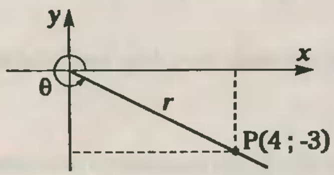
$$x = \frac{-2+10}{2} = 4 \qquad y = \frac{-7+1}{2} = -3$$

$$\therefore \quad \boxed{P(4\,;\,-3)}$$




b) A continuación calculamos la longitud del radio vector. $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \; r = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} \quad \therefore \quad r = 5$$




Del gráfico deducimos:

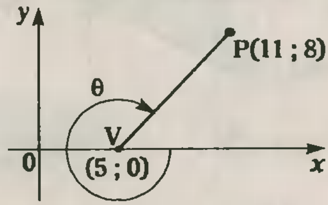
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-3} = \frac{-5}{3}$$

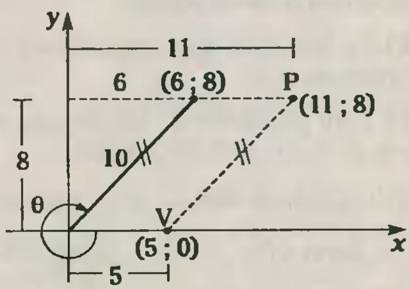
**PROB. 2**

Obtener el sen θ , a partir de la siguiente figura:




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

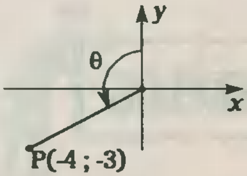
Dado que el ángulo θ no se encuentra en posición [vértice del ángulo (5 ; 0)], trasladaremos su vértice $v$(5 ; 0) al origen de coordenadas. La traslación del segmento VP se realiza en forma paralela así:




Entonces: $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{8}{10} \quad \therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{5}}$

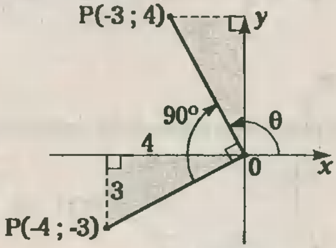
**PROB. 3**

A partir de los datos mostrados en la figura, obtenga tan θ.




RESOLUCIÓN

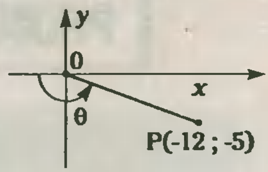
Dado que el ángulo θ no está en posición normal, lo hacemos rotar 90° en sentido horario, hasta que su lado inicial coincida con el eje de abscisas. En estas condiciones se obtiene el gráfico inferior:




$\tan\theta = \dfrac{4}{-3}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\tan\theta = -\dfrac{4}{3}}$

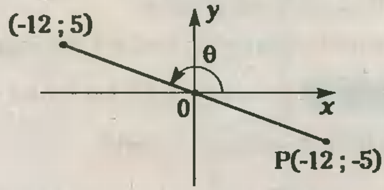
**PROB. 4**

De la figura que se muestra, calcule cot θ.




RESOLUCIÓN

Como el ángulo θ no se encuentra en posición normal, tenemos que expresarlo en posición normal, haciendo rotar 180° en sentido horario el radio vector OP.




Como el ángulo ya está en posición normal, entonces: $\boxed{\cot\theta = \dfrac{-12}{5}}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN:

1) *Para determinar el cálculo de cualquier razón trigonométrica en un sistema de coordenadas cartesianas debemos conocer las coordenadas de un punto del lado final del ángulo en posición normal. (de este modo el lado final queda definida por su origen y dicho punto)*

2) *Es necesario tomar una escala adecuada para ubicar los puntos en el sistema cartesiano.*

3) *Para el cálculo de las razones trigonométricas necesariamente el ángulo tiene que estar en posición normal.*

4) *Cuando el ángulo no se encuentra en posición normal, hay tres posibilidades:*

. *Rotar 90°.* . *Rotar 180°.*

. *Trasladar el vértice del ángulo al origen del sistema de coordenadas cartesianas.*


### *R.T. DE UN ÁNGULO EN P. NORMAL*

**01.-** Si el lado final de un ángulo en posición normal "θ" pasa por el punto M(6; -1), calcular el valor de: $E = \sqrt{37}\csc\theta + \cot\theta$

A) 40 B) -15 C) 22 D) -35 E) -43

**02.-** Si el lado final de un ángulo en posición normal cuya medida es α pasa por el punto (-2; 3), calcular:

$$W = \frac{\sqrt{13}}{\csc\alpha} - \frac{\sec\alpha}{\sqrt{13}}$$

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

**03.-** Si: $9\tan^2\alpha - 16 = 0$ ; y: $7\frac{\pi}{2} < \alpha < 4\pi$; entonces al calcular $W = \csc\alpha + \cot\alpha$ , se obtiene:

A) 1 B) 0,75 C) 0,50 D) 0,45 E) -2

**04.-** Si: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ; y:

$$-0{,}25 = \text{sen}\,x + , + \text{sen}^3 x + \ \ldots \ ;$$

calcular: $W = \sqrt{2}\,(\sec x + \cot x)$.

A) 3,5 B) 4,5 C) 5,5 D) 6,5 E) 7,5

**05.-** Si: $\text{sen}\,\theta = \underbrace{-\frac{1}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{35} - \ldots}_{\text{"n" términos}}$ y $\cos\theta < 0$;

calcular el valor de: $M = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}(\tan\theta - \sec\theta)$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 1/2 E) $\sqrt{2}$

**06.-** Si "α" es un ángulo en posición normal del cuarto cuadrante, el cual verifica:

$$\left(\sqrt[3]{\cos\alpha}\right)^{\text{sen}\alpha} = (\sec\alpha)^{7^{-4^0}} \ ;$$

calcular: $M = 7\cos\alpha + 3\cot\alpha$

A) -3 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

### *SITUACIONES GRÁFICAS*

**07.-** Las ecuaciones de las rectas mostradas en la figura son:

$L_1$: $x + 3y = -7$ ∧ $L_2$: $5x + 2y = 4$.

Determinar el valor de: $W = \tan\alpha + \sec^2\alpha$

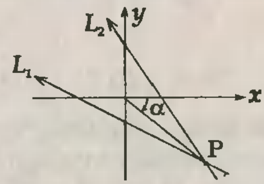
A) 1,75

B) 1,50

C) 2,25

D) 0,75

E) 1,25




**08.-** En la figura mostrada OA = OB, BC = CD. Determinar: $M = 5\tan\theta - 6\cot\theta$, si el punto D es (-5 ; -4).

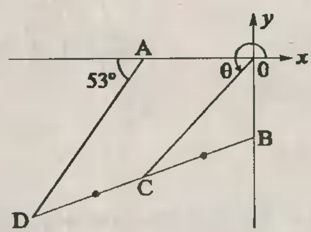
A) 3

B) 4

C) 1

D) 5

E) 2



**09.-** En la figura mostrada, si AB = BC = CD, encontrar el valor de: W = tan $\theta$ - tan $\phi$.

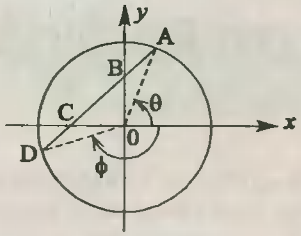
A) 1,0

B) 2,5

C) 3,0

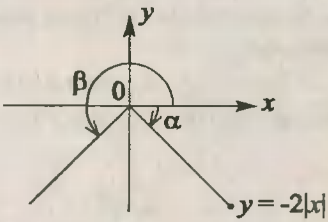
D) 4,0

E) 1,5




**10.-** En la figura mostrada se tiene la gráfica de: $y = -2|x|$; donde $\alpha$ y $\beta$ son ángulos en posición normal. Calcula el valor de:

$$W = \frac{1}{\sqrt{5}}\sec\alpha - \sqrt{5}\ \text{sen}\,\beta$$




A) 2 B) -3 C) -2 D) 3 E) 4

**11.-** En la figura mostrada "O" es el centro de la circunferencia y además: OA = AB = BC. Determinar: $M = \cot\theta + \sqrt{10}\ \tan\phi$

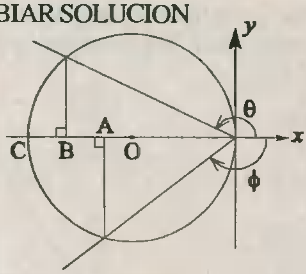
A) 0 CAMBIAR SOLUCION

B) $\sqrt{2}$

C) -1

D) 1/2

E) 3




**12.-** De la figura mostrada, calcular "cot $\theta$"; si: DP = PC.

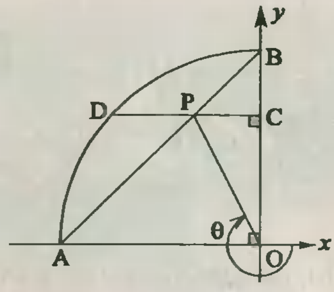
A) 1/3

B) 2

C) -2/3

D) 1/4

E) 3/2




*PROBLEMAS CONDICIONALES*

**13.-** El lado final de un ángulo $\alpha$ en posición normal pasa por el baricentro del triángulo PQR cuyos vértices son: P(-1; -5), Q (4; 3), R(6; -10). Calcule: W = 5(sen $\alpha$ - cos $\alpha$)

A) -11 B) -9 C) -7 D) 3 E) 5

**14.-** En la figura mostrada se sabe que: BC = CD, $m\angle OAB = \frac{37^\circ}{2}$ y las coordenadas del punto B son (-3; - 6). Si además: $m\angle AOD = \alpha$, siendo $\alpha$ un ángulo en posición normal, calcular:

$$W = \tan\alpha + \cot\alpha$$

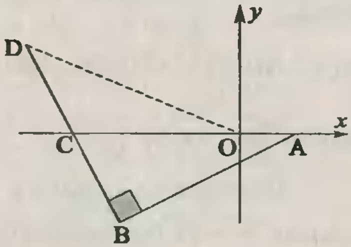
A) 17/23

B) -85/42

C) 15/29

D) 12/31

E) -23/27




**15.-** Dadas las siguientes condiciones:

I) $\tan\alpha < 0$

II) $\cos\alpha > 0$

III) $2^{2\csc\alpha} - (0{,}25)^{1{,}25} = 0$

Calcular: $W = 5\cos\alpha - 4\cot\alpha$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**16.-** A partir de las siguientes condiciones:

I) $\tan\theta > 0$

II) $\text{sen}\,\theta < 0$

III) $|\cos\theta| \geq 2/3$

Calcular "sen θ" cuando cos θ sea máximo.

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ C) 1 D) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ E) -1

**17.-** De acuerdo con las siguientes condiciones:

I) $|\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\theta$

II) $|\cos\theta| = -\cos\theta$

III) $|\tan\theta| = 1,\widehat{3}$

Determinar el valor de: $M = \csc\theta + \cot\theta$

A) 1/2 B) -1 C) -2 D) -1/2 E) 1/3

**18.-** Sabiendo que:

I) $|\cos\beta| = -\cos\beta$

II) $|\cot\beta| = \cot\beta$

III) $|\sec\beta| = 2$

Calcular: $W = \text{sen}\,\beta.\tan\beta$.

A) -2,0 B) -1,5 C) -1,0 D) 2,0 E) 2,5

**19.-** Si se verifica que:

I) $|\csc\alpha| = -\csc\alpha$

II) $|\sec\alpha| = \sec\alpha$

III) $|\csc\alpha - \cot\alpha| = k$

Calcular: sec α. (α es positivo y menor que una vuelta)

Sugerencias: $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$$

A) $\frac{1+k^2}{1-k^2}$ B) $\frac{1-k^2}{k^2}$ C) $\frac{k^2}{1+k^2}$

D) $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ E) $\frac{1+k^2}{k^2}$

## *SIGNOS DE LAS R.T.*

**20.-** Si φ y θ representan la medida de dos ángulos en posición normal positivos y menores que una vuelta, cuyos lados finales se ubican en diferentes cuadrantes, tal que:

I) $\pi/2 < \theta < \phi$

II) $\text{sen}\,\theta - \sqrt{\cos\phi - \text{sen}\,\theta} > 0$

Determinar el signo de W, si:

$$W = \tan\theta + \cot\phi.$$

A) Es siempre positivo.

B) Es siempre negativo.

C) No es posible determinar el signo.

D) Falta mayor información.

E) W es nulo.

**21.-** Si $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$ ; $\theta \in \langle \pi; 2\pi \rangle$, determine el signo de: $M = \tan\left(\dfrac{2\pi+\alpha}{2}\right) + \csc\dfrac{\theta}{2}$

A) (-) B) 0 C) ± D) (+) E) N.A

**22.-** A partir de las siguientes condiciones:

I) $\theta \in \langle 0° ; 360° \rangle$

II) $|\text{sen}\,\theta| = -\text{sen}\,\theta$

III) $\csc\theta \,.\, \cos\theta > 0$

Determine el signo de M, si:

$$M = \text{sen}\ \frac{\theta}{3}\ .\ \cot\ \frac{\theta}{4}\ .\ \sec\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\right)$$

A) (+) B) 0 C) ± D) (-) E) N.A

**23.-** Si "θ" es un ángulo positivo y menor a una vuelta tal que: $\text{sen}\ \theta < 0$ y $\cot\ \theta < 0$; determine el signo de:

a) sen θ/2 b) tan 2θ/3 c) sec θ/4

A) + ; + ; + B) - ; + ; + C) + ; - ; +

D) + ; + ; - E) - ; + ; -

**24.-** Si los puntos P y Q son simétricos respecto al eje Y exprese: $H = |\cot\ \theta| + |\cot\ \alpha|$, en términos de *a* y *b*.

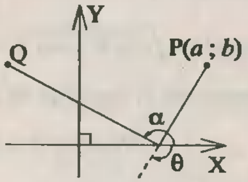
A) *a* + *b*/*b*

B) *b*/*a*

C) *a*/*b*

D) *b*/2*a*

E) 2*a*/*b*




**25.-** Si: $\sqrt[3]{-\sec\theta} < 0 < \sqrt{-\text{sen}\theta}$ ; determinar el signo de: M = tan θ + cot θ . cos θ. (θ: es no cuadrantal)

A) (+) B) 0 C) ± D) (-) E) N.A

### R.T. DE ÁNGULOS CUADRANTALES

**26.-** Siendo α, β, θ ángulos cuadrantales distintos, mayores o iguales que 0º pero menores o iguales que 270º y además cumplen:

$$\cos\beta = \sqrt{\text{sen}\theta - \sqrt{\text{sen}\alpha}}$$

Calcular: $W = \cos(\alpha + \beta + \theta)$

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

**27.-** Si la expresión: $M = \sqrt{\theta - 2} + \sqrt{4 - \theta}$ es real, calcular: R = sen θ + tan θ + cos θ; cuando "θ" es un ángulo cuadrantal.

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) -2

**28.-** Siendo "α" y "θ" ángulos cuadrantales positivos y menores de una vuelta que verifican: sen α = tan θ + 1; calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}3\alpha}{\tan(\theta/4)}$$

A) 2 B) -1 C) -1/2 D) 1/2 E) 3/2

**29.-** Siendo α , β y θ ángulos cuadrantales; calcular: M = A + B + C, donde: (α, β y θ ∈ [0 ; 2π⟩)

$$A = \sqrt{\tan\alpha + \text{sen}\beta + \cos\theta}\ ,\ B = \sqrt{\cot\beta - \cos\alpha}$$

$$C = \sqrt{\cos\alpha + \cos\beta + \text{sen}\theta}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

### R.T. DE ÁNGULOS COTERMINALES

**30.-** En la figura se cumple que: sen α = -15/17. Determinar: M = tan α + tan θ + tan (α - θ)

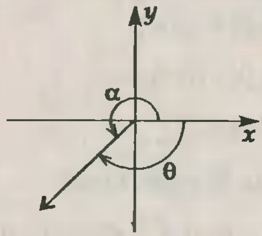
A) 15/4

B) 7/2

C) 5/4

D) 3/4

E) 2




**31.-** Determinar el menor de 2 ángulos coterminales, si la suma de ellos es 1320º y el mayor está comprendido entre 900º y 1 200º.

A) 240º B) 260º C) 300º D) 320º E) 340º

**32.-** Sean α y β dos ángulos coterminales tal que: α > β. Si además el doble del menor es a la suma de ellos como 13 es a 23, calcule la medida del mayor si está comprendida entre 1 100º y 1 300º.

A) 1 288°   B) 1 198°   C) 1 188°

D) 1 298°   E) 1 260°

**33.-** Si la medida de dos ángulos coterminales positivos son proporcionales a los números 2 y 7, y además la diferencia de sus medidas está comprendida entre 1 200° y 1 500°; calcular la medida del menor.

A) 634°   B) 603°   C) 576°

D) 428°   E) 415°

**34.-** Si la medida de dos ángulos coterminales negativos son proporcionales a los números 7 y 5; y además la diferencia de sus medidas está comprendida entre 540° y 900°, determinar la medida del mayor.

A) -1 800°   B) -1 700°   C) -1 600°

D) -1 500°   E) -1 400°

***MISCELÁNEA***

**35.-** Si $\tan\beta = 1{,}5$ , siendo $\beta$ un ángulo del 3^er^ cuadrante, el valor de la expresión:

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(\sec\beta - \csc\beta)$$ , es:

A) $-\frac{1}{8}$   B) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$   C) $-\frac{1}{6}$

D) $-\frac{5}{8}$   E) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

**36.-** Si $\alpha$ es un ángulo ubicado en el primer cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}25$. ¿Cuál es el valor de $\csc\alpha + \cot^2\alpha$ ?

A) 15   B) $\frac{21}{19}$   C) $\frac{19}{15}$   D) $\frac{19}{21}$   E) 19

**37.-** Si $\alpha$ es un ángulo del tercer cuadrante, tal que: $\sqrt{1+\cot^2\alpha} = 8$, calcular $(8\sec\alpha)^3$

A) $8^3\sqrt{63}$   B) $\frac{8^3}{63}$   C) $\frac{8^3}{\sqrt{63}}$

D) $-\frac{8^3}{3\sqrt{63}}$   E) $-\frac{8^6}{63\sqrt{63}}$

**38.-** Calcular:

$$R = \frac{a^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2ab\cos 0 - b^2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{(a-b)^2\ \cos 720° + 4ab}$$

A) 0   B) 0,5   C) 0,25   D) 1   E) 1,25

**39.-** Si :

$$\left(\left(\left(\left(\cos^2\alpha\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} = (\cos\alpha)^{-\operatorname{sen}\alpha}$$

siendo: $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

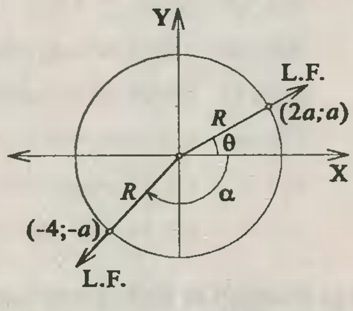
El valor de $\cot\alpha - \cos\alpha$ es:

A) $-\frac{\sqrt{7}}{7}$   B) $-4\frac{\sqrt{7}}{7}$   C) $-27\frac{\sqrt{7}}{8}$

D) $-\frac{7}{27}$   E) $\sqrt{7}$

**40.-** Del gráfico mostrado, calcular:

"$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\theta$"




A) 0   B) 1   C) 3/4   D) 1/2   E) 2


El estudio de las R.T. de números reales se efectúa a partir de las características que posee la circunferencia unitaria, más conocida como circunferencia trigonométrica (C.T.)

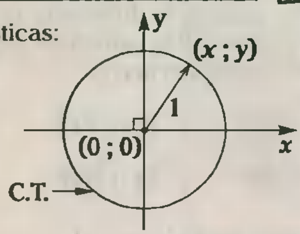
## 7.1. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA (C.T.)

Es una circunferencia que posee las siguientes características:

i) Su centro es el origen del sistema de coordenadas.

ii) Su radio es igual a la unidad* ($r = 1$)

En consecuencia su ecuación será : $x^2 + y^2 = 1$

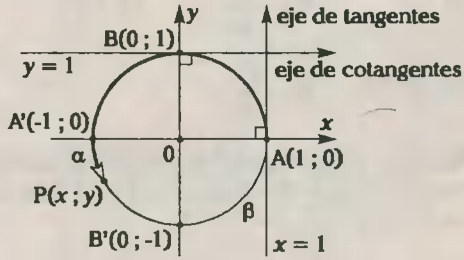



* En general las circunferencias cuyo radio posee una longitud determinada, pueden convertirse en circunferencias trigonométricas si dicha longitud se constituye en un equivalente unitario. Por ejemplo una circunferencia de 3,5 $m$ de radio se convierte en una circunferencia trigonométrica si hacemos: 3,5 $m$ = 1 $u$, donde $u$ es una nueva unidad de longitud.

## 7.2. ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

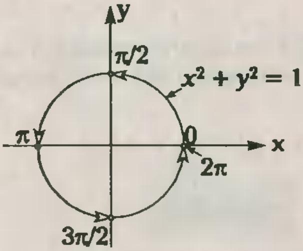
Toda circunferencia trigonométrica tiene los siguientes elementos:

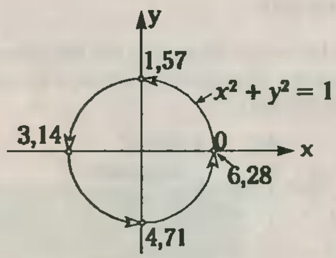
| | |
|---|---|
| A(1 ; 0): | origen de Arcos |
| A'(-1 ; 0): | origen de Suplementos |
| B(0 ; 1): | origen de Complementos |
| $P(x ; y)$: | extremo del Arco $\alpha$ |
| $x = 1$: | eje de Tangentes |
| $y = 1$: | eje de Cotangentes |



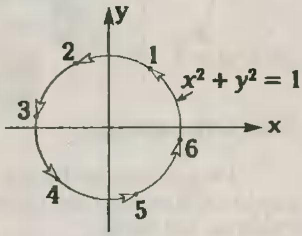

## 7.3. LOS NÚMEROS REALES SOBRE LA C.T.

En matemática es importante desarrollar la habilidad de aproximar. Empecemos esta tarea haciendo las siguientes aproximaciones: $\pi = 3{,}14$ , entonces: $2\pi = 6{,}28$ ; $\pi/2 = 1{,}57$ ; $3\pi/2 = 4{,}71$. A continuación nos proponemos elaborar un gráfico en el que estos números aproximados sean ubicados sobre la circunferencia trigonométrica:




Si asumimos válidas nuestras aproximaciones, observamos que ambos gráficos son equivalentes . En forma análoga se pueden ubicar los números reales negativos sobre la C.T.

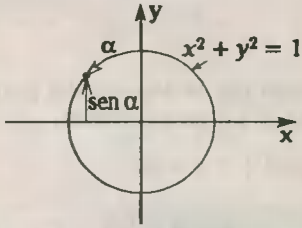



Si ahora tomamos como referencia los números reales: 0; 1,57; 3,14; 4,71 ; 6,28 , entonces se puede predecir la ubicación aproximada de los números enteros 1; 2; 3; 4; etc. Es necesario reconocer que cualquier número real ubicado sobre la C.T., define sobre ésta un arco en *radianes*.

## 7.4. REPRESENTACIÓN DE LAS R.T. CON SEGMENTOS DIRIGIDOS EN LA C.T.

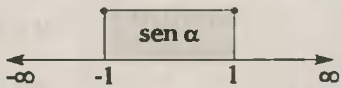
### 7.4A Seno

El seno de cualquier número real (o arco) en la C.T. está representado por la ordenada del extremo del arco.



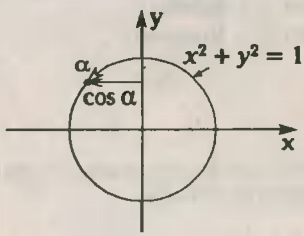

**Si:** $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1}$

mínimo máximo



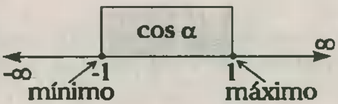

### 7.4B Coseno

El coseno de cualquier número real (arco) en la C.T. está representado por la abscisa del extremo del arco.



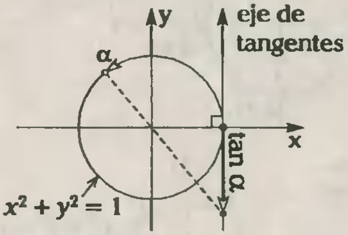

**Si:** $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$

mínimo máximo



### 7.4C Tangente

La tangente de cualquier número real (arco) en la C.T. está representada por la ordenada del punto de intersección del eje de tangentes con la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.



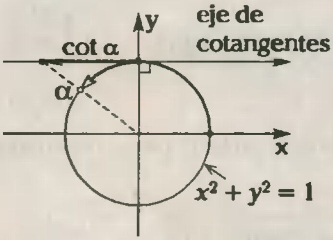

$\alpha \in \mathbb{R} - (2n + 1)\pi/2$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tan \alpha \in \mathbb{R}}$

La tangente no tiene máximo ni mínimo

### 7.4D Cotangente

La cotangente de un número real (arco) en la C.T. está representado por la abscisa del punto de intersección del eje de cotangentes con la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.



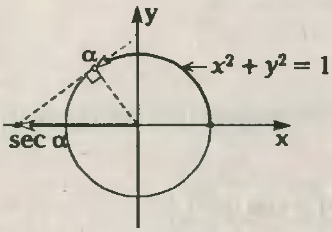

$\alpha \in \mathbb{R} - (n\pi)$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cot \alpha \in \mathbb{R}}$

La cotangente no tiene máximo ni mínimo.

### 7.4E Secante

La secante de un número real (arco) está representada por la abscisa del punto de intersección del eje $x$ con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco.

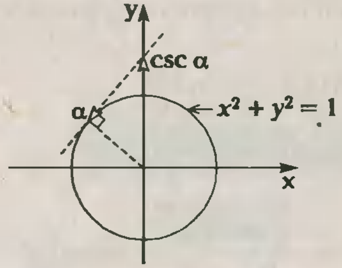



$\alpha \in \mathbb{R} - (2n + 1)\pi/2$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sec \alpha \leq -1 \ \vee \ \sec \alpha \geq 1}$


### 7.4F Cosecante

La cosecante de un número real (arco) está representada por la ordenada del punto de intersección del eje y con la recta tangente trazada por el extremo del arco.




$\alpha \in \mathbb{R} - (n\pi)$ ; $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\csc\alpha \leq -1 \;\vee\; \csc\alpha \geq 1}$

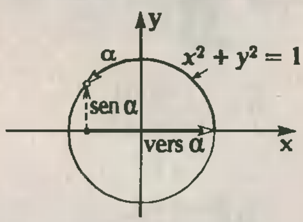

## 7.5. RELACIONES AUXILIARES (seno verso, coseno verso y exsecante)

### 7.5A) Seno verso o verso

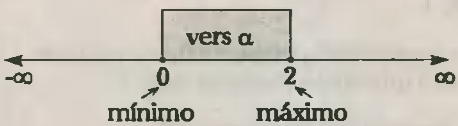
Matemáticamente el versò de un número real (arco) se define así:

$$\boxed{\text{vers}\,\alpha = 1 - \cos\alpha}$$

En la circunferencia trigonométrica está representado mediante el segmento dirigido desde el pie del seno hasta el origen de arcos.




$\alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \text{vers}\,\alpha \leq 2$

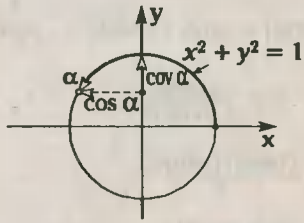



### 7.5B) Coseno Verso o Coverso

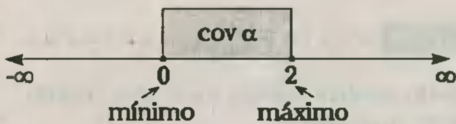
Matemáticamente el coverso de un número real (arco) se define así:

$$\boxed{\text{cov}\,\alpha = 1 - \text{sen}\,\alpha}$$

En la circunferencia trigonométrica está representado como el segmento dirigido desde el pie del coseno hasta el origen de complementos.




$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad 0 \leq \text{cov}\,\alpha \leq 2$

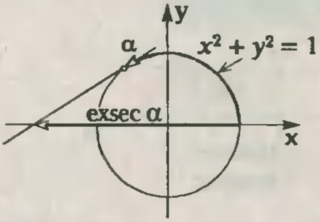



### 7.5C Exsecante o External

Matemáticamente la exsecante de un número real (arco) se define así:

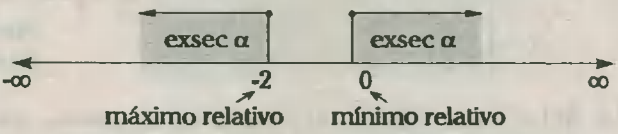
$$\boxed{\text{exsec}\,\alpha = \sec\alpha - 1}$$

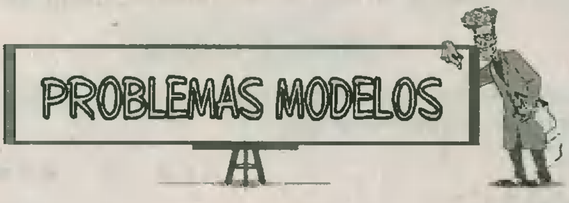
En la circunferencia trigonométrica está representada como el segmento dirigido desde el origen de arcos hasta el extremo de la secante.




$\alpha \in \mathbb{R} - (2n + 1)\,\pi/2 \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ **$\text{exsec}\,\alpha \leq -2 \vee \text{exsec}\,\alpha \geq 0$**



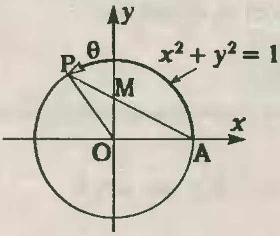




**PROB. 1**

De la circunferencia trigonométrica mostrada, se pide expresar en términos de θ:

a) La longitud del segmento OM.

b) El área de la región triangular AOP.



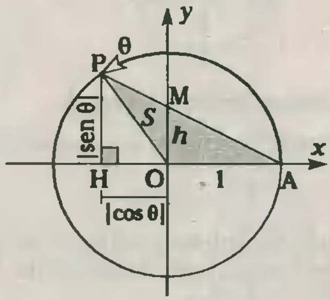

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Aplicando las definiciones de senq y coseno en la C.T., tendremos:

a) En el gráfico se puede reconocer que:

$\triangle AOM \sim \triangle AHP: \; \dfrac{h}{|\text{sen}\,\theta|} = \dfrac{1}{1+|\cos\theta|}$

$$h = \frac{|\text{sen}\,\theta|}{1+|\cos\theta|}$$




Donde: $|\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta \;;\; |\cos\theta| = -\cos\theta$

$$\therefore \quad h = \frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}$$

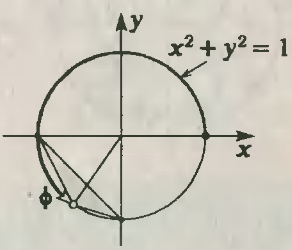
b) $\text{Área} = \dfrac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{(1)(|\text{sen}\,\theta|)}{2}$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

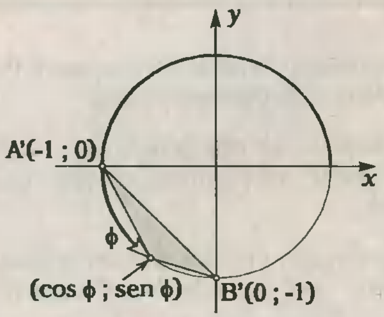
**PROB. 2**

En la circunferencia trigonométrica mostrada, descubra una relación para el área de la región sombreada en términos de $\phi$.




**RESOLUCIÓN**

Resolveremos recurriendo a la identificación de las coordenada de cada vértice del triángulo. Empezaremos reconociendo que dos de los vértices están ubicados en los propios ejes coordenados: A' y B'.




En vista que no son fácilmente identificables una base y su altura correspondiente, el cálculo del área se hará aplicando el método de las coordenadas, cuyo algoritmo es como sigue:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}.[(-\operatorname{sen}\phi - \cos\phi + 0) - (1 + 0 + 0)]$$

$$\therefore\quad \mathbf{S = -\frac{1}{2}.(1 + sen\,\phi + cos\,\phi)}$$

**PROB. 3**

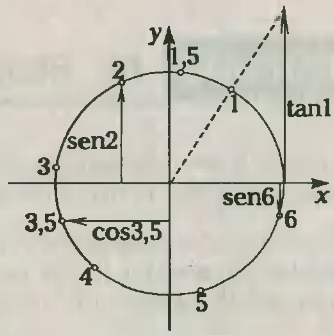
Ordenar en forma descendente los siguientes números reales:

sen 6 ; sen 2 ; cos(3,5) ; tan(1)

**RESOLUCIÓN**

Aprovechando la habilidad de las aproximaciones, lo que haremos es ubicar los números reales: 6 ; 2 ; (3,5) y (1) sobre la circunferencia trigonométrica. Es recién a partir de dichas ubicaciones que trazamos los segmentos dirigidos que corresponden a cada R.T. de la lista dada.

Veamos:




En atención a la longitud y signo de cada segmento, se puede establecer las siguientes relaciones de orden:

tan 1,5 > sen 2 > sen 6 > cos 3,5

Y ordenando en forma ascendente será:

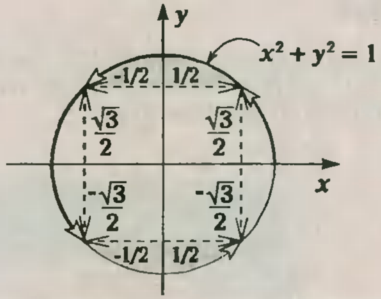
cos(3,5) ; sen 6 ; sen 2 ; tan (1,5)

**PROB. 4**

Si $\cos\theta \in \left\langle -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle$, determine el intervalo de valores que puede asumir el sen $\theta$.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Ubicamos los arcos cuyo coseno es -1/2, de este modo reconocemos que existen hasta cuatro posibles valores para θ. Recordando que el radio de la C.T. es uno, los valores de los segmentos dirigidos que representan a los senos de dichos arcos se deducen por aplicación del teorema de Pitágoras.




De este análisis se puede establecer que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \cup \frac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen}\theta \leq 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}\theta \in \left[-1\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 1\right]}$$

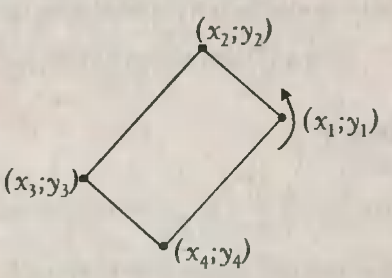
## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN:

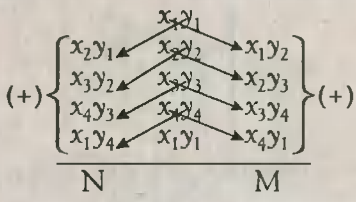
**1)** *Graficar la línea trigonométrica correspondiente respetando su ubicación en el cuadrante asignado así mismo su magnitud angular debe obedecer a la información dada.*

**2)** *Para calcular longitudes y áreas en la circunferencia trigonométrica se debe considerar las medidas de sus magnitudes como segmentos positivos, en cuyo caso se recomienda trabajar con sus valores absolutos.*

**3)** *Un método para el cálculo de una región sombreado limitada por un polígono de «n» lados es el «método de las coordenadas» que corresponde al siguiente esquema:*

*Área sombreada* $= \frac{1}{2}(M-N)$




### LÍNEA TRIGONOMÉTRICA SENO

**01.-** Si $\theta \in$ IIIC , determinar la variación de:

$$W = \frac{5-3\text{sen}\theta}{4}$$

A) $\langle 1;2\rangle$ B) $\left\langle \frac{5}{4};2\right\rangle$ C) $\langle 1;3\rangle$ D) $\langle 0;1\rangle$ E) $\langle -1;2\rangle$

**02.-** Si: $30° \leq \theta \leq 150°$, calcular la variación de: $M = 2\ \text{sen}\ \theta + 3$

A) [1; 3] B) [1; 2] C) [0; 2] D) [2; 5] E) [4; 5]

**03.-** Sabiendo que: $\text{sen}\ \theta = \frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{4}$ ; donde $\theta \in$ IVC, determinar el intervalo de valores que puede asumir "$x$".

A) $\left\langle -1;\frac{5}{7}\right\rangle$ B) $\langle -1;3\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$ D) $\langle 0;2\rangle$ E) $\langle 1;3\rangle$

**04.-** Teniendo en cuenta que: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4};0\right\rangle$ se pide calcular el valor mínimo de:

$$W = 1 + \text{sen}\ |2x|$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) -3

**05.-** Sabiendo que: $M = 4\ \text{sen}^2 x - 1$; se pide calcular la suma del máximo y mínimo valor que puede tomar M, si: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

A) -1 B) 0 C) 2 D) -3 E) -2/5

**06.-** Si: $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right\rangle$ y además se verifica que: $-1 \leq \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; entonces la variación de $W = \text{sen}\left(|x|-\frac{\pi}{4}\right)$ es:

A) [1 ; 4] B) [1 ; 2] C) [0 ; 1]

D) [1 ; 3] E) $\langle -1 ; 1\rangle$

**07.-** Determinar la variación de:

$$W = -\ \text{sen}\ x - \sqrt{1-2\,\text{sen}\,x\cos x} - \cos x$$

si: $x \in \langle \pi; 5\pi/4\rangle$

A) $\langle 0; \sqrt{3}\rangle$ B) $\langle 0; \sqrt{2}\rangle$ C) $\langle 0; 3\rangle$

D) $\langle 0; 3\sqrt{2}\rangle$ E) $\langle 0; \sqrt{2}/2\rangle$

**08.-** Sabiendo que: $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\rangle$, determinar el rango de valores que toma "M", si:

$$M = \text{sen}\ (2\tan\theta + 1)$$

A) [ sen 1; 2] B) [- sen 1; 0] C) [- sen 1; 1]

D) [ sen 1; 3] E) [ sen 2; $\sqrt{2}$ ]

**09.-** Dadas las siguientes condiciones:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{a-\sqrt{2}}{2}$

b) $x \in \left[\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$

Determinar el máximo valor de "$a$".

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}/2$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

## LÍNEA TRIGONOMÉTRICA COSENO

**10.-** Calcular el intervalo de valores para M:

$$M = 1 + \cos x + \cos^2 x$$

A) [1/4; 2] B) [-3/4; 0] C) [-3/4; 2]

D) [3/5; 2] E) [3/4; 3]

**11.-** Determine el valor de "$a + b$" si se verifica la siguiente desigualdad:

$$a \leq \frac{7\cos\theta - 3}{2} \leq b$$

A) -1 B) 0 C) 2 D) 3 E) -3

**12.-** Identifica los valores de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\cos 1 > \cos 3$

II. $|\cos 4| > \cos 5$

III. $\cos 2 < \cos 3$

A) VVF B) FVF C) VFF

D) VVV E) FFV

**13.-** Determinar el intervalo de variación de W:

$$W = \frac{3 - 2\cos\theta}{5}$$

si se sabe que: $\theta \in$ IVC.

A) $\left\langle \frac{1}{5}; \frac{4}{5} \right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{5}; \frac{7}{5} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{5} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{5}; \frac{3}{5} \right\rangle$

**14.-** Teniendo en cuenta que: $\theta \in$ I C, se pide determinar el intervalo de variación de W, si:

$$W = \frac{\cos\theta + 3}{\cos\theta + 1}$$

A) $\langle 0;1 \rangle$ B) $\langle -2;0 \rangle$ C) $\langle 1;2 \rangle$ D) $\langle 3;4 \rangle$ E) $\langle 2;3 \rangle$

**15.-** Sabiendo que $x$ es un arco cuyos valores está definidos así: $x \in \left[ -\frac{5\pi}{4}; -\pi \right]$, se pide determinar el intervalo de variación de W:

$$W = \left|2 \cos \left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

A) [1; 2] B) [$\sqrt{2}$; 2] C) [-1; 2]

D) [-$\sqrt{2}$; 1] E) [$\sqrt{2}$; 4]

**16.-** Determine algún mínimo valor de la expresión:

$$W = \cos(\operatorname{sen}^2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta)$$

A) cos 3 - 1 B) 2cos(-3) C) -cos 3 + 2/3

D) cos 3 E) cos 3 + 1/3

**17.-** Determine algún intervalo de variación de la expresión:

$$M = \frac{\cos\alpha + 3}{2\cos\alpha - 1}$$

A) $[8; +\infty\rangle$ B) $[7; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; -1]$

D) $[1; 3\rangle$ E) $[4; +\infty\rangle$

## LIN.TRIG.: TAN - COT - SEC - CSC

**18.-** Si: $\theta \in [0; \pi/4]$, calcular la variación de "$m$" en:

$$\sec\theta = \frac{4m - 3}{2}$$

A) $\left[\frac{5}{4}; \frac{2\sqrt{2}+3}{4}\right]$ B) $\left[\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C) $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

D) $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ E) $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

**19.-** Determine la variación de "$n$", si se sabe que: $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ y $\csc^2\theta = \frac{3}{n+1}$

A) $[0;2]$ B) $\left[\frac{1}{2};2\right]$ C) $\left[-\frac{1}{2};3\right]$

D) $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ E) $\left[\frac{1}{2};\sqrt{3}\right]$

**20.-** Si $|2-\sqrt{3}\ \tan x|\leq 1$, entonces todos los valores de "$x$" en $\langle 0;\pi\rangle$ que verifican la desigualdad se encuentran comprendidas en:

A) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ C) $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ E) $[0;6]$

**21.-** Si $\sec x=\frac{2m+1}{3}$, entonces todos los valores de "$m$" que no verifican la igualdad se encuentran comprendidos en:

A) $\langle -2;4\rangle$ B) $\langle -3;1\rangle$ C) $\langle -2;3\rangle$

D) $\langle -2;1\rangle$ E) $\langle -1;1\rangle$

**22.-** Calcular el intervalo de "$x$" para que se verifique la igualdad:

$$\sec\theta=\frac{x+3}{x+2}\text{, donde: }\theta\in\text{IIC.}$$

A) $\left[-\frac{2}{3};0\right\rangle$ B) $\left\langle-\frac{5}{2};-2\right\rangle$ C) $\left[-\frac{1}{2};2\right\rangle$

D) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right\rangle$ E) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{3}{4}\right\rangle$

**23.-** Si: $x\in\left\langle\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$, entonces la variación de $W=1-2\left|\sec\frac{2x}{3}\right|$ es:

A) $\langle 1;3\rangle$ B) $\langle -3;-1\rangle$ C) $\langle -2;-1\rangle$

D) $\langle -1;0\rangle$ E) $\langle -4;-2\rangle$

**24.-** Si: $\theta\in$ IIC y $\csc\phi=\frac{\text{sen}\theta+2}{\text{sen}\theta+1}$; determinar la variación de: "$\csc^2\phi$".

A) $\left\langle\frac{9}{2};10\right\rangle$ B) $\left\langle-\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right\rangle$ C) $\left\langle-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{3}{5};\frac{7}{5}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{9}{4};4\right\rangle$

**25.-** Encontrar todos los valores de "$x$" que no verifican la igualdad.

$$\csc\theta=\frac{3x+2}{2x+3}$$

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $\langle 0;3\rangle$ C) $\langle -2;0\rangle$

D) $\langle -1;1\rangle$ E) $\langle -1;0\rangle$

**26.-** Si $\alpha$ y $\beta$ son las medidas de dos ángulos independientes, entonces se pide calcular la suma del máximo y mínimo valor de la siguiente expresión:

$$W=5\ \text{vers}(\alpha)-4\ \text{cov}(\beta)$$

A) 2 B) -2 C) 3 D) -3 E) 1

**27.-** A partir de la siguientes condiciones:

i) $\text{exsec}\,x=\sqrt{-\text{cov}y}$

ii) $7<y<9$

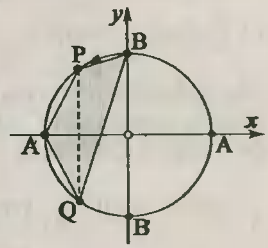
iii) $5<x<7$,

se pide calcular el valor de: $V=x+2y$.

A) $3\pi$ B) $5\pi$ C) $4\pi$ D) $5\pi$ E) $7\pi$

## ÁREAS EN LA C. T.

**28.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{ABP}=\alpha$, $\overline{PQ}\perp\overline{A'A}$. Calcular el área de la región sombreada BPA'Q.




A) $\cos^2\alpha$

B) $\text{sen}\,\alpha$

C) $\text{sen}^2\alpha$

D) $\text{sen}^2\alpha.\cos\alpha$

E) $2\cos^2\alpha$

**29.-** En la C.T. mostrada, se pide calcular el área de la región sombreada, si: $m\ \widehat{ABP}=\theta$.

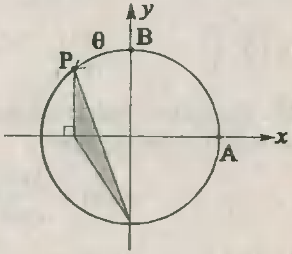
A) $2\cos\theta$

B) $-3\cos\theta/2$

C) $2\mathrm{sen}\theta/3$

D) $3\mathrm{sen}\theta.\cos\theta/2$

E) $\left(\dfrac{-\mathrm{sen}\,\theta.\cos\theta}{2}\right)$




**30.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada determinar el área de la región sombreada, si $m\ \widehat{ABP}=\theta$.

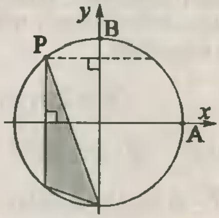
A) $-(\mathrm{sen}^2\theta)$

B) $(\mathrm{sen}\,\theta\,.\,\cos\theta)$

C) $-(\mathrm{sen}\,\theta\,.\,\cos\theta)$

D) $-(\cos^2\theta)$

E) $(\mathrm{sen}^2\theta.\cos\theta)$




**31.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple: $m\widehat{ABP}=\theta$. Determinar el área de la región sombreada.

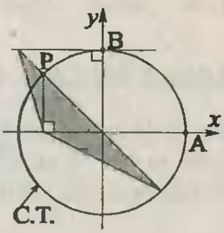
A) $\dfrac{-1}{2}\cos\theta\,(1+\mathrm{sen}\theta)$

B) $\mathrm{sen}\theta\,(1+\cos\theta)$

C) $\cos\theta\,(1+\mathrm{sen}\theta)$

D) $\dfrac{-1}{2}\mathrm{sen}\theta\,(1+\cos\theta)$

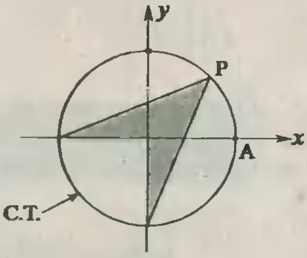
E) $\dfrac{1}{2}\cos\theta\,(1-\mathrm{sen}\theta)$




**32.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple $m\widehat{AP}=\theta$. Determinar el área de la región sombreada.

A) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta}{2}$ B) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta}{2}$ C) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{2}$

D) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta-\cos\theta}{2}$ E) $-\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta-\cos\theta}{2}\right)$




**33.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple $m\widehat{ABA'P}=\theta$. Calcular el área de la región sombreada.

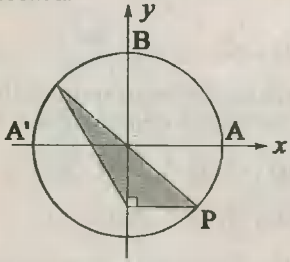
A) $-\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta$

B) $\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta$

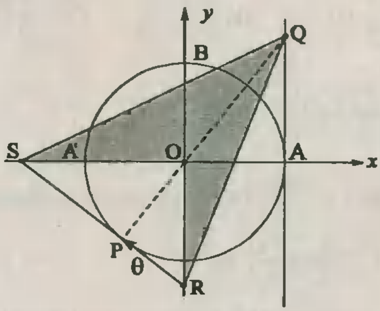
C) $2\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta$

D) $\mathrm{sen}^3\theta$

E) $3\cos^2\theta$




**34.-** En la circunferencia trigonométrica se sabe que: $m\widehat{AP}=\theta$, $\overline{PQ}\perp\overline{RS}$, $\overline{AQ}\perp\overline{A'A}$. Determinar el área de la región sombreada. Sugerencia: $\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$




A) $-\dfrac{3}{2}\csc\theta$ B) $-\dfrac{3}{2}\sec^2\theta$

C) $-\dfrac{1}{2}\sec^2\theta\csc\theta$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\csc\theta$

E) $2\sec^2\theta\csc\theta$

**35.-** En la circunferencia trigonométrica se cumple $m\widehat{ABP} = \theta$, calcular la variación del área de la región sombreada, si: $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4};\frac{4\pi}{3}\right]$.

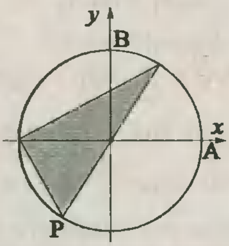
A) $\left[\frac{1}{2};3\right]$

B) $[1;2]$

C) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

D) $[1;3]$

E) $[2;4]$




**36.-** En la circunferencia trigonométrica se sabe que: $m\widehat{AP} = \theta$, $\overline{QB'} \perp \overline{BB'}$ ; $\overline{AT} \perp \overline{A'A}$. Evaluar el área de la región triangular ORQ.

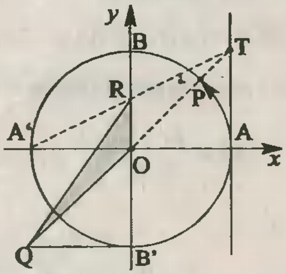
A) 2/7

B) 1/3

C) 2/5

D) 3/4

E) 1/4




**37.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{AP} = \alpha$, $\overline{AR} \perp \overline{A'A}$. Calcule el área de la región sombreada RTO.

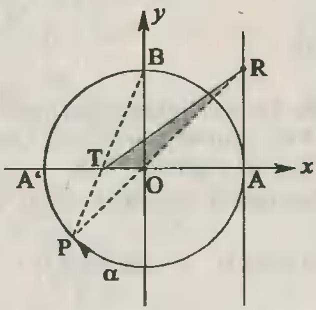
A) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - 1}$

B) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - 1}$

C) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 1}$

D) $\dfrac{3\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha - 1}$

E) $2\operatorname{sen}\alpha$




**38.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple que: $m\ A\widehat{B}P = \theta$. Calcular el área de la región sombreada si se sabe que "P" es un punto de tangencia.

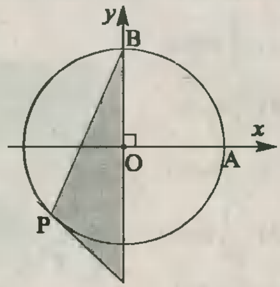
A) $(\tan\theta - \cos\theta)$

B) $(\cot\theta + \operatorname{sen}\theta)$

C) $\frac{1}{2}(\cot\theta - \cos\theta)$

D) $\frac{1}{2}(\tan\theta - \cos\theta)$

E) $(\tan\theta + \operatorname{sen}\theta)$




**39.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{ABM} = \alpha$, $\overline{PM} \perp \overline{MR}$ ; $\overline{PB} \perp \overline{BR}$. Evaluar el área de la región triangular POR:

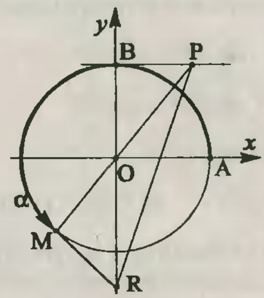
A) $-\frac{1}{2}\cos\alpha \cdot \csc^2\alpha$

B) $\cos\alpha \cdot \csc^2\alpha$

C) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \tan\alpha$

D) $-\frac{1}{2}\tan\alpha \cdot \csc^2\alpha$

E) $\frac{1}{2}\cot\alpha \cdot \sec^2\alpha$




**40.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{AP} = \theta$, $PQ \perp AA'$; $A'R = RB$. Si el área de la región triangular $RQB'$ es de la forma $S = M + N\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta$, entonces el valor de $M + N + T$ es:

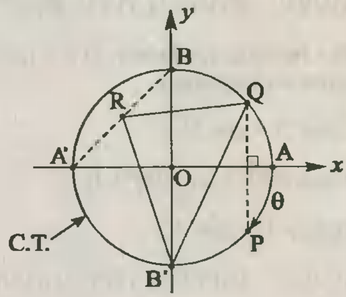
A) 2/7

B) 1/4

C) 3/7

D) 5/4

E) 3/8



**41.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se tiene: $m\widehat{AP} = \alpha$, $\overline{PQ} \perp \overline{OA}$; $SM \perp OU$, $\overline{SU} \perp \overline{OU}$, $m\angle POT = 90°$. Calcular el área de la región triangular QSU.

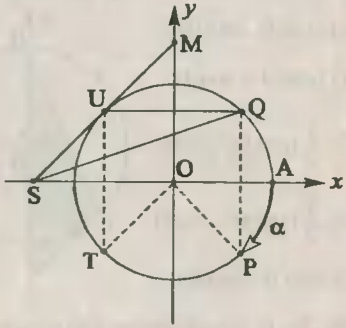
A) $\frac{3}{2}\text{sen}\,\alpha$

B) $\frac{1}{2}\sec\alpha$

C) $-\frac{3}{2}\tan\alpha$

D) $-\frac{1}{2}\cot\alpha$

E) $\frac{3}{2}\cos\alpha$




## MISCELÁNEA

**42.-** Analice la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\cos 25° < \text{sen}\,25°$

II. $\csc 40° < \sec 40°$

III. $\tan 27° > \cot 27°$

A) FVV B) VVF C) VVV D) FFF E) FVF

**43.-** Identifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\text{sen}\,3 > \text{sen}\,4$

II. $\text{sen}\,4 > \text{sen}\,5$

III. $\text{sen}\,3 > \text{sen}\,6$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FFV

**44.-** Indique verdadero (V) o falso (F) según como corresponda:

I. $|\cos 2| > |\cos 3|$

II. $\text{sen}\,290° + \cos 290° > 0$

III. $|\text{sen}\,1| < |\text{sen}\,3|$

A) VFF B) FFV C) FFF D) FVF E) FVV

**45.-** Siendo: $\pi < x_1 < x_2 < 3\pi/2$, señalar la verdad (V) ó falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\sec x_1 < \sec x_2$

II. $\csc x_1 > \csc x_2$

III. $|\sec x_1| > |\sec x_2|$

A) VVV B) FVF C) FFV D) FFF E) VFF

**46.-** En una circunferencia trigonométrica se verifica que: $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$.

Indicar la verdad (V) ó falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\tan x_1 > \tan x_2$

II. $|\cos x_2| < |\cos x_1|$

III. $\cot x_1 < \cot x_2$

A) FFF B) FFV C) FVF D) VFF E) FVV

**47.-** De la figura mostrada calcular :

$$M = \frac{ac + bd + 1}{ef}, \text{ siendo: } m\widehat{ABP} = \theta.$$

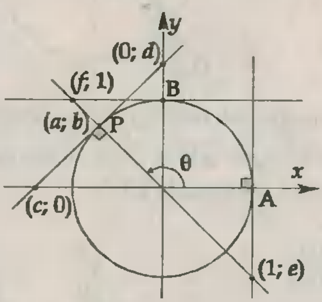
A) 1

B) 3

C) 2

D) 4

E) 5

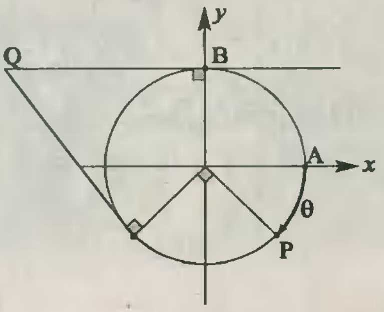



**48.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple, $m\widehat{AP} = \theta$. Determinar la longitud del segmento BQ.

Sugerencia: $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$

A) $2\,\text{sen}\,\theta$ B) $2\cos\theta$ C) $-\left(\frac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)$

D) $\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right)$ E) $\left(\frac{1-\text{sen}\,\theta}{2\cos\theta}\right)$




**49.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se sabe que: $m\widehat{AP} = \alpha$, además se verifica que: OQ = QA. Se pide calcular:

$$W = \sec\alpha - \tan\alpha.$$

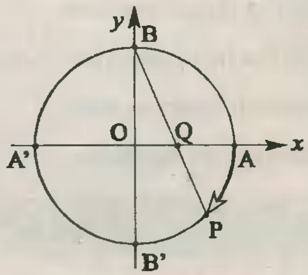
A) 6

B) 5

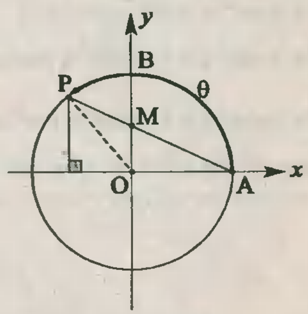
C) 4

D) 3

E) 2



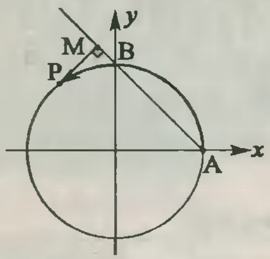

**50.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada, calcular el valor de OM si: $m\widehat{ABP} = \theta$




A) $\dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$ B) $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$ C) $\dfrac{2\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

D) $\dfrac{2\cos\theta}{1-3\operatorname{sen}\theta}$ E) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

**51.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se pide calcular $\sqrt{2}$ PM, si: $m\ \widehat{ABP} = \theta$.




A) 1 + sen θ + cos θ

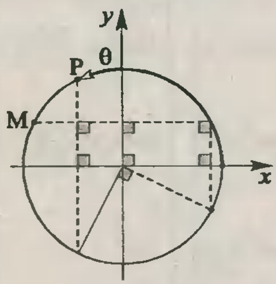
B) 1 - sen θ + cos θ

C) 1 + sen θ - cos θ

D) 1 - sen θ - cos θ

E) 1 - 2 sen θ + cos θ

**52.-** En la circunferencia trigonométrica mostrada se cumple que: $m\widehat{ABP} = \theta$. Calcular las coordenadas del punto "M".




A) (-cos θ ; -cos θ)

B) (-sen θ ; sen θ)

C) (-sen θ ; -cos θ)

D) (sen θ ; -cos θ)

E) (sen θ ; cos θ)

CAP 8

# Identidades Trigonométricas

## 8.1. DEFINICIÓN

Son igualdades entre expresiones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor admisible de la variable angular. Las Identidades Trigonométricas fundamentales se agrupan en identidades *pitagóricas*, por *cocientes*, *recíprocas* y *auxiliares*. En términos operativos, las identidades expresan igualdades entre razones trigonométricas que permiten reducir expresiones trigonométricas. Las identidades trigonométricas son múltiples, y se utilizan adecuadamente según el tipo de situación problémica que se enfrente.

Aquí presentamos un resumen de las identidades trigonométricas fundamentales:

i) Identidades Pitagóricas

ii) Identidades por cociente

iii) Identidades Recíprocas

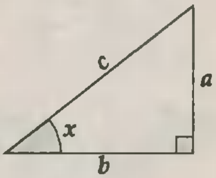
iv) Identidades Auxiliares

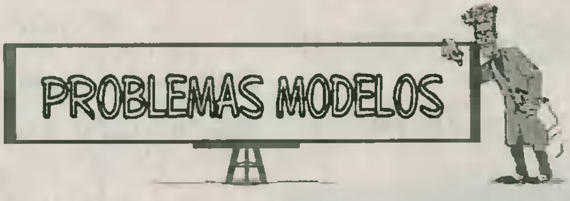
| PITAGÓRICAS | COCIENTE | RECÍPROCAS | AUXILIARES |
|---|---|---|---|
| $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ | $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ | $\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ | $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\csc\alpha$ |
| $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$ | $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ | $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = \sec^2\alpha\csc^2\alpha$<br>$\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$ |
| $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$ | | $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ | $\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$<br>$(1 \pm \text{sen}\,\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 2(1 \pm \text{sen}\,\alpha)(1 \pm \cos\alpha)$ |

**Nota.-**

Si: $a\,\text{sen}\,x + b\cos x = c \;\wedge\; a^2 + b^2 = c^2$

Entonces: $\text{sen}\,x = \dfrac{a}{c}$ ; $\cos x = \dfrac{b}{c}$ ; $\tan x = \dfrac{a}{b}$






**PROB. 1**

Demostrar que:

$$\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen} x\cos x}=2\tan^2 x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Transformamos el primer miembro para obtener el segundo miembro:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x-1}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x\cos x}=$$

$$\frac{1+2\operatorname{sen} x\cos x-1}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\operatorname{sen} x}}=$$

$$\frac{2\operatorname{sen} x\cos x.\operatorname{sen} x}{\cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)}=$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=2\tan^2 x$$

**PROB. 2**

Reducir la expresión: $k=\dfrac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Expresando en senos y cosenos:

$$k=\frac{\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\Rightarrow k=\frac{\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)}{\cos x\operatorname{sen} x}}{\dfrac{(\cos x+\operatorname{sen} x)}{\cos x}}$$

Luego de simplificar y reducir, tendremos:

$$\Rightarrow\ k=\frac{\cos x}{\cos x\operatorname{sen} x}\Rightarrow\quad k=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\csc x}$$

**PROB. 3**

Si se cumple que:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}=\lambda\,|\cot x+\csc x+1|\ ,$$

calcula el valor de $\lambda$.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando dentro del radicando al numerador y denominador por $(1+\cos x)$, se tiene:

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{(1-\cos^2 x)}}=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\sqrt{\frac{2\,(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{2.\operatorname{sen}^2 x}}=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{2\operatorname{sen}^2 x}}=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.\left|\frac{1+\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x}\right|=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|\frac{1}{\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\right|=\lambda|\cot x+\csc x+1|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|\csc x+\cot x+1|=\lambda\,|\csc x+\cot x+1|$$

$$\therefore\quad \boxed{\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

**PROB. 4**

Sabiendo que se cumple la siguiente condición:

$$\sqrt{7}\,\cos\theta+1=\tan^2\theta\ ,$$

obtenga el valor de:

$$k=\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta$$

**RESOLUCIÓN** ******************

Del dato despejamos:

$$\sqrt{7}\,\cos\theta=\tan^2\theta-1$$

Elevando al cuadrado:

$$7\cos^2\theta=\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1$$

$$7=\frac{1}{\cos^2\theta}(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

$$\Rightarrow\quad 7=\sec^2\theta\,(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

$$7=(1+\tan^2\theta)(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

Efectuando y ordenando como sigue, tendremos:

$$7=\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1+\tan^6\theta-2\tan^4\theta+\tan^2\theta$$

Finalmente:

$$\underbrace{\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta}_{k}=6$$

$$\therefore\quad \boxed{k=6}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Para efectuar una demostración, se parte del miembro más complicado para llegar al segundo miembro.*

2) *En muchos problemas es recomendable expresar en función de senos y cosenos, pero no significa que siempre se realice dichos cambios.*

3) *Es conveniente realizar artificios, de tal manera que se obtengan identidades conocidas, para beneficio propio del problema.*

4) *En el caso de problemas condicionales se sugiere trabajar tanto en la parte condicional (dato) como en la parte problémica (incógnita)*

# Enunciados de Problemas con Resolución

### *DEMOSTRACIONES*

**01.-** Demostrar que:

$$\frac{1+\text{sen}x+\cos^2 x}{1+\text{sen}x}=2-\text{sen}\,x$$

**02.-** Demostrar que:

$$\frac{(\text{sen}x-\cos x+1)(\text{sen}x+\cos x-1)}{1-\cos x}=2\cos x$$

**03.-** Demostrar que:

$$(1-\text{sen}\,x+\cos x)^2=2(1-\text{sen}\,x)(1+\cos x)$$

**04.-** Demostrar que:

$$\cot^4 x\,.\,\csc^2 x-\cot^2 x.\,\csc^2 x+\csc^2 x-1=\cot^6 x$$

**05.-** Demostrar: $\dfrac{\text{sen}x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\text{sen}x}$

**06.-** Demostrar: $\tan^2 x-\text{sen}^2 x=\tan^2 x\,.\text{sen}^2 x$

**07.-** Demostrar que:

$$\text{sen}^8 x+\cos^8 x=1-4\text{sen}^2 x\,.\cos^2 x+2\text{sen}^4 x\cos^4 x$$

**08.-** Demostrar que:

$$\frac{1}{1+\text{sen}a}+\frac{1}{1-\text{sen}a}-(1+\text{sen}^2 a)-2\tan^2 a=$$
$$=\cos^2 a$$

**09.-** Demostrar que:

$$\frac{1-\text{sen}x}{1+\text{sen}x}+\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}=4\sec^2 x-2$$

**10.-** Demostrar que:

$$\cot^2 x.(1+\cos^2 x)+\tan^2 x.(1+\text{sen}^2 x)=$$
$$=2\sec^2 x.\csc^2 x-5$$

### *SIMPLIFICACIONES*

**11.-** Simplificar:

$$M=\left(\frac{\sec x.\csc x-\tan x}{\csc x}\right)^2+\left(\frac{\sec x.\csc x-\cot x}{\sec x}\right)^2$$

A) 1 B) $\sec^2 x$ C) $\csc^2 x$ D) -1 E) 0

**12.-** Reducir:

$$M=\left(\frac{\tan x+\sec x}{\text{sen}x+1}\right)^{-2}+\left(\frac{\cot x+\csc x}{\cos x+1}\right)^{-2}$$

A) $\tan^2 x$ B) $\cot^2 x$ C) $\cos^2 x$ D) 2 E) 1

**13.-** Simplificar:

$$M=\frac{\sec^2 x+2\tan x}{\tan x+1}+\frac{\csc^2 x-2\cot x}{\cot x-1}$$

A) $\text{sen}\,x.\cos x$ B) $\text{sen}\,x$ C) $\cos^2 x$

D) $\tan x.\csc x$ E) $\sec x.\csc x$

**14.-** Identificar la expresión mas reducida para:

$$M=\frac{\cos x+\text{sen}x.\tan x}{\text{sen}x.\sec x}$$

A) $\tan x.\csc^2 x$ B) $\sec x$ C) $\csc x$

D) $\text{sen}\,x.\cot^2 x$ E) $\cot x$

**15.-** Simplificar:

$$M=\frac{\dfrac{(1-\cos x).\csc x}{\cos x}-\dfrac{1-\cos x}{\tan x}}{\tan x-\operatorname{sen} x}$$

A) -1 B) 2 C) 1 D) -2 E) 0

**16.-** Reducir:

$$M = \sec x(\csc x - 1) + \cos x(\sec^2 x - \csc x)$$

A) $\cot x$ B) $\tan^2 x$ C) $\cot x.\ \sec x$

D) $\operatorname{sen} x.\ \sec^3 x$ E) $\tan x$

**17.-** Simplificar la expresión:

$$W=\frac{\sec^2x+\cos^2x-2}{\sec x+\cos x-2}-\frac{\sec^2x+\cos^2x+1}{\sec x+\cos x+1}$$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 1/3 E) 3

**18.-** Simplificar la expresión:

$$M=\frac{\cot^6x+3\csc^2x.\cot^2x+1}{\tan^6x+3\sec^2x.\tan^2x+1}$$

A) $\tan^4 x$ B) $\operatorname{sen} x.\ \cot^5 x$ C) $\sec x.\ \cot^3 x$

D) $\sec^5 x$ E) $\cot^6 x$

**19.-** Simplificar la expresión:

$W = \sec^6 x - 3\tan^2 x.\sec^2 x - \tan^6 x + 2\tan x.(\sec x - \tan x).(\csc x + 1)$

A) 2 B) 4 C) 5 D) -1 E) 3

**20.-** Simplificar:

$$M=\frac{\tan^4x+\operatorname{sen}^4x-\tan^4x.\operatorname{sen}^4x}{(\tan x+\operatorname{sen} x)(\tan x-\operatorname{sen} x)}$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 4 E) 2

**21.-** Simplificar:

$$W=\frac{vers(x).[3-\operatorname{exsec} x]+2+\operatorname{exsec} x}{3-2\cos x}$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) 2

**22.-** Reducir:

$$M = \frac{1}{3}(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) - \frac{1}{4}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2$$

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{12}$

**23.-** Reducir:

$$M=\frac{1+\tan x+\sec x}{1+\cot x+\csc x}+\frac{1-\operatorname{sen}^2x}{\cos x+\operatorname{sen} x.\cos x}$$

A) $\tan x$ B) $\csc x$ C) $\operatorname{sen}^3 x$

D) $\cos^2 x$ E) $\sec x$

**24.-** Reducir:

$$M=\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}+\frac{vers x}{\cos^2x}+\frac{vers x-cov x}{\cos^3x}$$

A) $2\cot x$ B) $3\cos x$ C) $2\operatorname{sen}^3 x$

D) $\cos^2 x$ E) $\tan^3 x$

**25.-** Reducir:

$$M = \operatorname{vers}^2 x + \operatorname{cov}^2 x + 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) -1 E) 3

***PROBLEMIZACIÓN CONDICIONAL***

**26.-** Si: $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1$

determinar: $M = \cos^4\theta + \cos^2\theta$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

**27.-** Si: $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x = m$

$\cos^3 x + \cos x = n$

calcular: $M = m\csc x + n\sec x$

A) -2 B) -4 C) 5 D) -1 E) 3

**28.-** Si: $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=k^2,\ \ k>0$

determinar: $M = 1 - \text{sen}\, x - \cos x$

A) $\frac{\sqrt{3}}{k}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{k}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{k}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{2k}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3k}$

**29.-** Si: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = k$ , entonces calcular:

$W=(\text{sen}x+\cos^3 x)^2+(\text{sen}x-\cos x)^2+(\cos x+\text{sen}^3 x)^2$

A) $3(1-k)$ B) $-(1+k)$ C) $\frac{3}{2}(1+k)$

D) $\frac{3}{2}(1-k)$ E) $\frac{1}{2}(1-k)$

**30.-** Si: $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}$

determinar: $M = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{2}{7}$ E) $-\frac{5}{3}$

**31.-** Si: $2\sec^2 x - \csc^2 y = 1$, entonces calcular:

$$W = 2\sec^2 y - \csc^2 x$$

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 2

**32.-** Si se cumple: $\dfrac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\cos^8 x - \text{sen}^8 x} = m$ ;

calcular: $M = 1 + \text{sen}^6 x + \cos^6 x$

A) $\frac{2m-1}{m}$ B) $\frac{2m+1}{m}$ C) $\frac{m-3}{2m}$

D) $\frac{m-3}{3m}$ E) $\frac{m+3}{2m}$

**33.-** Si : $\dfrac{\text{sen}\, x - vers\, x}{\text{sen}\, x + vers\, x} = k,$

entonces calcular: $W = k - k^{-1}$

A) $-2\cot x$ B) $-2\,\text{sen}\, x$ C) $3\tan x$

D) $-2\tan x$ E) $\tan x$

**34.-** Si: $\sec x = a + \csc x$

determinar: $M = \tan x + \cot x - 1$

Además se sabe que: $x \in$ IIC , $a > 1$

A) $\sqrt{a^2+1}$ B) $\sqrt{3a^2+1}$ C) $\sqrt{a^2-1}$

D) $\sqrt{2a^2-1}$ E) $-\sqrt{a^2+1}$

**35.-** Si: $\tan\alpha - \csc\alpha = 1$ ,

calcular: $W = (\csc\alpha - \cos\alpha)(1 + \cot\alpha)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) -5 E) 1

**36.-** Si: $k > 0$, se verifica que: $k + \frac{1}{k} \geq 2$ , calcular el mínimo valor de :

$$W = \sec^2 x + \csc^2 x + 2\sec x \,.\, \csc x$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 9 E) 8

**37.-** Si: $\tan\alpha - \text{sen}\,\alpha = 1$ , calcular:

$$W = \sec\alpha \,.\, \csc\alpha - \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$$

A) -2 B) 2 C) 4 D) -1 E) -3

**38.-** Si: $\text{sen}\, x - \cos^2 x + \text{sen}^3 x = 0$, entonces calcular:

$$W = \csc x + \text{sen}^3 x$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) -2

**39.-** Si: $\text{sen}^2 x + \csc^2 x = 7$, entonces calcular:

$$W = \cos x \,.\, \cot x + 2\,\text{sen}\, x$$

A) -2 B) $\pm 2$ C) 4 D) -5 E) $\pm 3$

**40.-** Si: $\cot x + \cos x = 1$,

calcular: $W = \cot^2 x + \csc x$

A) $\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 1 E) $3\sqrt{2}$

**41.-** Si: $\text{sen}^4\alpha = 2\cos^4\alpha + a \,.\, \csc^4\alpha$ ... (1)

$b\sec^2\alpha = \cos^6\alpha + 4\,\text{sen}^2\alpha$ ... (2)

calcular : $a + b$.

A) 9 B) 2 C) 4 D) 3 E) 1

**42.-** Sabiendo que se verifica:

$$\frac{\tan x + \cot x + m}{\tan x + \cot x + 2} = \frac{\sec^3 x + \csc^3 x}{(\sec x + \csc x)^3},$$

calcule el valor de $m$.

A) 2 B) 3 C) -1 D) 5 E) 4

**43.-** Si se cumple que:

$$\frac{(2-\cos^2\alpha)(1+\sec^2\alpha)}{1+2\tan^2\alpha} = 2 + \frac{1}{k},$$

entonces calcule el valor de $k$.

A) $3\csc^2\alpha$ B) $-\csc^2\alpha$ C) $6\tan\alpha$

D) $-4\sec^2\alpha$ E) $4\cot^2\alpha$

**44.-** Si: $\left(\frac{\tan a}{\operatorname{sen} x} - \frac{\tan b}{\tan x}\right)^2 = \tan^2 a - \tan^2 b$,

entonces calcular: $\cos x$

A) $\cot a \, . \tan b$ B) $2\cos a \, . \sec b$ C) $\tan b$

D) $\operatorname{sen} a \, . \tan b$ E) $\cos a \, . \tan b$

**45.-** Sabiendo que:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} - \frac{\cot^2 x}{\csc x - 1} = 4 + \sec x,$$

calcule: $\operatorname{sen} x + \csc x$.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $-\frac{2}{7}$

**46.-** Calcule el valor de " $m$ " si:

$$\frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x} + \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} = m + m^m . \cot^{-m} x.$$

A) 3 B) 4 C) 2 D) -2 E) 1

**47.-** Determinar "$m$" en la siguiente identidad:

$$\frac{\cos x(3 + \tan x - 2\sec^2 x)}{2\tan x + 1} = \frac{1-m}{\sec x}$$

A) $\tan x$ B) $2\cos x$ C) $5\operatorname{sen} x$

D) $-\cot x$ E) $3\tan x$

**48.-** Si: $\operatorname{exsec} x + \tan x + 1 = a$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$

calcular: $\cot x$

A) $\frac{2}{a^2-1}$ B) $\frac{2a}{a^2-1}$ C) $\frac{1}{a^2-1}$

D) $3(a-1)$ E) $\frac{2a}{a^2-1}$

**49.-** Calcular "$x$", a partir de:

$(x + \operatorname{cov}\theta)^2 + \operatorname{vers}^2\theta = (\operatorname{exsec}\theta)^2$; $x > 0 \wedge \in$ IC

A) $2\operatorname{sen}\theta - 1$ B) $\cot\theta - 1$ C) $\tan\theta - 1$

D) $2\tan\theta + 1$ E) $\sec\theta + 1$

**50.-** Si: $\frac{1+\operatorname{sen}^4 x}{1+\cos^4 x} = \tan x$

calcular: $M = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^7 x}{\cos x - \cos^3 x + \cos^5 x - \cos^7 x}$

A) 2 B) 3 C) 1 D) -4 E) 5

### *ELIMINACIÓN DE ARCOS*

**51.-** Determinar una expresión independiente de la variable angular "$x$", si se sabe que se verifican las siguientes condiciones:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{\cos x} \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} x \, . \cos x = \frac{1}{3} \quad \ldots (2)$$

A) $ab^2 = a - b$ B) $a^2 + b^2 = 3ab$ C) $a^2 b = 1$

D) $2ab = a^2 + b^2$ E) $ab = a + b$

**52.-** Si se sabe que se verifican las siguientes condiciones:

$$1 + \operatorname{sen}^4 x = a\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen}^2 x \ldots (1)$$

$$2 - \cos^4 x = b\operatorname{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x \ldots (2)$$

determinar el valor de: $F = (b - a)^2$

A) 9 B) 3 C) 25 D) 4 E) 16

**53.-** Si: $\dfrac{\operatorname{sen}x}{a} = \dfrac{\cos x}{b} = \dfrac{\tan x}{c}$;

se pide identificar la expresión equivalente de:

$$V = a^2(a^2 + b^2)$$

A) $a^2b^2$ B) $b^2c^2$ C) $2ab^2c$ D) 4 E) 3

**54.-** Si se verifican las siguientes condiciones:

$$a(1 + \tan^2 x) = (1 - \tan x)^2 \quad \ldots (1)$$

$$(1 - \cot x)^2 = (b - 1)(1 + \cot^2 x) \quad \ldots (2)$$

se pide calcular el valor de : $A = b - a$

A) 1 B) -2 C) 3 D) 4 E) 1

**55.-** A partir de las condiciones:

$$p\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x = q \ldots (1)$$

$$p\operatorname{sen}^2 x \,.\, \cos x = r \ldots (2)$$

encontrar una expresión independiente de «$x$»

A) $p^2q^2r^2 = (r^2 + q^2)^3$

B) $r^2 + q^2 = (p^2 + q^2)^3$

C) $r^2 - q^2 = (2r^2 + p^2)^3$

D) $p^3q^2 = (p^2 + r^2)^3$

E) $4pqr = (p^2 + 2q^2)^3$

**56.-** Si: $\tan x \,.(1 + \cos x) = 4p \quad \ldots (1)$

$\tan x . (1 - \cos x) = 4q \quad \ldots (2)$

determinar una expresión equivalente para:

$$N = p^2 - q^2$$

A) $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ B) $\sqrt{p^2 - q}$ C) $\sqrt{pq}$

D) $2\sqrt{p^2 - q^2}$ E) $2\sqrt{p^2 + q}$

**57.-** Sabiendo que:

$$m\operatorname{sen} x - n\cos x = m + 1 \quad (1)$$

$$n\operatorname{sen} x + m\cos x = n + 1 \quad (2)$$

determine el valor de: $E = m + n + 1$

A) 2 B) 0 C) 3 D) 4 E) -2

**58.-** Si: $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = a \ldots (1)$

$$\tan^4 x - \cot^4 x = b \ldots (2)$$

determinar el equivalente de: $S = 8a(a^2 + 1)$

A) $a(1 - b^2)^2$ B) $b(1 - a^2)^2$ C) $(1 - b^2)^2$

D) $a(1 + b^2)^2$ E) $(1 - a^2)^2$

**59.-** Si: $\tan^3 x + \tan^5 x = m^8 \ldots (1)$

$\cot^3 x + \cot^5 x = n^8 \ldots (2)$

identificar el equivalente de: $S = m^2 + n^2$

A) $2mn$ B) $m + n$ C) 2 D) $m^5n^5$ E) $mn$

**60.-** Si se sabe que: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, y además:

$$m = \frac{1 + \operatorname{sen}x}{1 - \operatorname{sen}x} \quad \ldots (1)$$

$$n = (\tan x + \sec x - 1)^2 \quad \ldots (2)$$

calcular el valor de: $A = \sqrt{m} - \sqrt{n}$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 0 E) 1

CAP 9

# Identidades Trigonométricas de Arcos Compuestos

## 9.1. R.T. DE LA SUMA DE DOS ARCOS

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \,.\, \tan\beta}$$

## 9.2. R.T. DE LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \,.\, \tan\beta}$$

## 9.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LA SUMA DE TRES ARCOS

$$\text{sen}(\alpha+\beta+\theta) = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta.\cos\theta + \text{sen}\,\beta.\cos\alpha.\cos\theta + \text{sen}\,\theta.\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta.\text{sen}\,\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta) = \cos\alpha.\cos\beta.\cos\theta - \cos\alpha.\text{sen}\,\beta.\text{sen}\,\theta - \cos\beta.\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\theta - \cos\theta.\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta - \tan\alpha\tan\beta\tan\theta}{1 - (\tan\alpha \,.\, \tan\beta + \tan\alpha\tan\theta + \tan\beta\tan\theta)}$$

## 9.4. IDENTIDADES AUXILIARES

1) Si : $\alpha+\beta=\theta \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta\tan\alpha\tan\beta = \tan\theta$

2) $\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

4) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

5) $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

6) $1 + \tan\alpha \tan\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

7) $1 - \tan\alpha \tan\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

8) $\tan\alpha + \cot\beta = \dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$

9) $\cot\beta - \tan\alpha = \dfrac{\cos(\beta+\alpha)}{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$

10) $a\operatorname{sen}x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x\pm\phi)$ Siendo: $\tan\phi = \dfrac{b}{a}$

11) $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\operatorname{sen}x \pm b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$

12) $\cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

13) $\cot\alpha - \cot\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

14) $\tan\alpha - \tan\beta - \tan(\alpha-\beta)\tan\alpha\tan\beta = \tan(\alpha-\beta)$

## 9.5. IDENTIDADES CONDICIONALES

i) Si: $\alpha + \beta = 45^\circ \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = 1$

ii) $\operatorname{sen}x \pm \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x\pm 45^\circ)$

iii) $\operatorname{sen}x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\operatorname{sen}(x\pm 60^\circ)$

iv) Si: $x + y + z = k\pi \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

$$\cot x.\cot y + \cot x.\cot z + \cot y.\cot z = 1$$

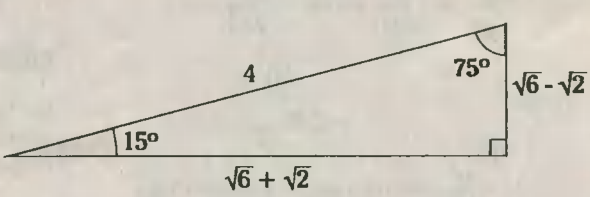
Razones Trigonométricas en un triángulo rectángulo: 75° - 15°

$\operatorname{sen}75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

$\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$




**PROB. 1**

Calcula el máximo valor de:

$$k = 5\,\text{sen}(x + 37^\circ) + \sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Desarrollando como sigue:

$k = 5(\text{sen}\,x\cos 37^\circ + \cos x\,\text{sen}\,37^\circ) + \sqrt{2}\,(\cos x\cos 45^\circ + \text{sen}\,x\,\text{sen}\,45^\circ)$

$k = 5\,\text{sen}\,x.\dfrac{4}{5} + 5\cos x.\dfrac{3}{5} + \sqrt{2}\cos x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\;\text{sen}\,x\;\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Simplificamos, obteniendo:

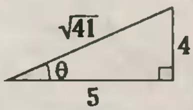
$$k = 4\,\text{sen}\,x + 3\cos x + \cos x + \text{sen}\,x$$

$\Rightarrow\; k = 5\,\text{sen}\,x + 4\cos x$

A continuación dividimos ambos miembros entre $\sqrt{41}$ :

$$\frac{k}{\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}\,\text{sen}\,x + \frac{4}{\sqrt{41}}\cos x$$

Como:




$$\frac{k}{\sqrt{41}} = \cos\theta\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,\theta\cos x$$

Luego: $\dfrac{k}{\sqrt{41}} = \text{sen}\,(\theta + x)$

Finalmente: $k = \sqrt{41}\,\text{sen}\,(\theta + x)$

Su máximo valor será: $\boxed{k = \sqrt{41}}$

**PROB. 2**

Simplifique la siguiente expresión:

$$\text{E} = \tan x + \tan 2x + \tan 3x\tan x\tan 2x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Se observa que: $(x + 2x) = 3x$

Tomando tangente en ambos miembros, obtendremos:

$\Rightarrow\quad \tan(x + 2x) = \tan 3x$

$$\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x\tan 2x} = \tan 3x$$

Luego efectuamos como sigue:

$\Rightarrow\; \tan x + \tan 2x = \tan 3x - \tan 3x\tan x\tan 2x$

Finalmente:

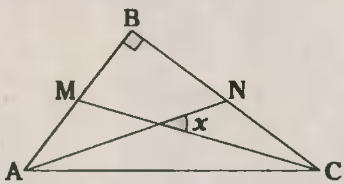
$\Rightarrow\quad \underbrace{\tan x + \tan 2x + \tan 3x\tan x\tan 2x}_{\text{E}}$

$\therefore\quad \boxed{\textbf{E} = \tan 3x}$

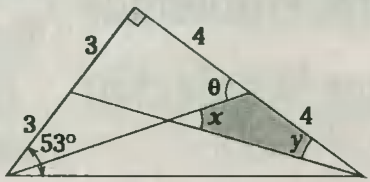
**PROB. 3**

En la figura que se muestra, calcule $\tan x$, siendo M y N puntos medios de lados AB y BC respectivamente.

Si: $m\angle\text{ACB} = 37^\circ$



**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★




Se observa que: $\theta = x + y$ aplicando propiedad.

$\Rightarrow \tan x + \tan y + \tan\theta \tan x \tan y = \tan\theta$

Pero: $\tan y = \frac{3}{8}$ ; $\tan\theta = \frac{3}{2}$

Luego: $\tan x + \frac{3}{8} + \frac{3}{2}\tan x \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 16\tan x + 6 + 9\tan x = 24$

$\Rightarrow 25\tan x = 18 \quad \therefore \quad \boxed{\tan x = \frac{18}{25}}$

**PROB. 4**

Calcula el valor de:

$$k = \frac{\text{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} + \frac{\text{sen}(y-z)}{\cos y \cos z} + \frac{\text{sen}(z-x)}{\cos z \cos x}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Se sabe que: $\frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan\alpha - \tan\beta$

Haciendo un trabajo análogo tendremos:

$k = \tan x - \tan y + \tan y - \tan z + \tan z - \tan x$

$\therefore \quad \boxed{k = 0}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Para hallar el valor de alguna razón trigonométrica, de un determinado ángulo se debe descomponer en una suma o diferencia de otros dos ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas.*

2) *En figuras geométricas se debe buscar un ángulo exterior en un triángulo, para luego aplicar la propiedad siguiente:*

*Si:* $x + y = z \Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z \tan x \tan y = \tan z$

3) *Para encontrar máximos y mínimos de expresiones de la forma:*

$$k = a \,\text{sen}\, x \pm b \cos x$$

*Debemos recordar que:* $k_{máx} = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge k_{mín} = -\sqrt{a^2 + b^2}$

4) *Cuando se tienen sumatorias de expresiones trigonométricas, se debe reemplazar por diferencias, para que se simplifiquen, para ello se debe tener en cuenta que:*

$$\tan x - \tan y = \frac{\text{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} \wedge \cot x - \cot y = \frac{\text{sen}(y-x)}{\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y}$$


### SENO, COSENO DE ARCOS COMPUESTOS

**01.-** Si: $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

Determinar el valor de: $M = 16 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 3/2

**02.-** Calcular:

$M = (\operatorname{sen} 18° + \cos 12°)^2 + (\operatorname{sen} 12° + \cos 18°)^2$

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) 0,5

**03.-** Reducir: $M = \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen}50° - \cos50°}{\operatorname{sen}25° - \cos25°}$

A) 0 B) 0,5 C) $-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

**04.-** Reducir:

$M = \operatorname{sen}^2(a + b) - 2 \operatorname{sen}(a + b).\cos a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b$

A) $\operatorname{sen} a$ B) $\operatorname{sen} b$ C) $\operatorname{sen}^2 a$

D) $\operatorname{sen}^2 b$ E) 1

**05.-** Simplificar:

$\cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos \alpha.\cos \beta.\cos(\alpha + \beta) + \cos^2\beta$

A) $\operatorname{sen} \alpha$ B) $\operatorname{sen}^2\alpha$ C) $\cos \alpha$

D) $\cos^2\alpha$ E) $\cos^2 \beta$

**06.-** Si: $x + y = 30°$, entonces al calcular

$W = \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 x - \operatorname{sen} y.\cos x$, se obtiene:

A) 1/2 B) 2 C) 4/3 D) 1/4 E) 3/4

**07.-** Eliminar los arcos "$x$" e "$y$" de las condiciones:

$\operatorname{sen}(x + y) . \operatorname{sen}(x - y) = a$ ... (1)

$\cos(x + y). \cos(x - y) = b$ ... (2)

$\cos x . \operatorname{sen} y = c$ ... (3)

A) $a^2 = b^2 - c^2$ B) $a^2 = b^2 + c^2$ C) $a^2 = bc$

D) $(1 + a)^2 = b^2 + 4c^2$ E) $(1 - a)^2 = b^2 + 4c^2$

**08.-** Eliminar los arcos "$x$" e "$y$" de las condiciones:

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = m$ ... (1)

$\cos x + \cos y = n$ ... (2)

$\cos (x - y) = p$ ... (3)

A) $2(1 + p) = m^2 + n^2$ D) $2p = m^2 - n^2$

B) $2p = mn$ E) $2(1 - p) = m^2 + n^2$

C) $2p = m - n$

### TAN, COT DE ARCOS COMPUESTOS

**09.-** Si: $x + y = \dfrac{\pi}{4}$; Calcular:

$$M = \frac{1}{\tan x + \tan y} - \frac{1}{\cot x + \cot y}$$

A) 1 B) 0 C) 0,5 D) 1,5 E) 2

**10.-** Simplificar: $W = \tan 2\alpha + \tan \alpha + \dfrac{\tan 3\alpha}{\cos 2\alpha}$

A) $\tan \alpha$ B) $\tan 2\alpha$ C) $\tan 3\alpha$

D) $2 \tan 3\alpha$ E) $\cot \alpha$

**11.-** Simplificar:

$$W = \frac{2\tan A + 3\tan B - \tan C - \tan A.\tan B \tan C}{\tan A + 4\tan B - 2\tan C - 2\tan A \tan B \tan C}$$

con la condición A + C = B

A) 1  B) 0  C) 0,5  D) tan A  E) tan B

**12.-** Si: $4 \tan(x - y) + 3 \sec x.\csc x = 4 \tan x$, entonces al calcular $\cot x.\cot y$ se obtiene:

A) 1/2  B) 1/3  C) 1/4  D) 3/2  E) 3/4

**13.-** Si: $\tan^2 x + 2\tan^2 x . \tan^2 y = 1 + \sec^2 y$,
$\tan(x - y) = 3$

Determine: $M = \tan(x + y)$

A) 1/3  B) 1/2  C) 3/2  D) 2/3  E) 3/4

**14.-** Calcule:

$$W = \sqrt{3}(1 - \tan 5^\circ . \tan 10^\circ) + (1 + \tan 10^\circ) . \tan 5^\circ + (1 + \tan 5^\circ). \tan 10^\circ$$

A) 0  B) 0.5  C) 1  D) 1,5  E) 2

**15.-** Calcular:

$$W = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cot 65^\circ + \cot 80^\circ - \cot 80^\circ.\cot 65^\circ}{1 + \cot 65^\circ - \sqrt{3}\cot 80^\circ.\cot 65^\circ - \sqrt{3}\cot 80^\circ}$$

A) 0  B) 1  C) 1.5  D) 2  E) 2,5

**16.-** Calcule:

$$W = \cot^2 54^\circ(1 - \tan^2 9^\circ) + \cot 81^\circ(\tan 9^\circ + 4\tan 36^\circ)$$

A) 1  B) 1,5  C) 2  D) 2,5  E) 3

**17.-** Si: $\tan(x + y + z) = \dfrac{a+b}{a-b} \wedge \tan(x - y - z) = 1$

Determinar: "tan 2$x$"

A) $a$  B) $-a/b$  C) $b$  D) $b/a$  E) $a/b$

**18.-** Si: $\tan\left(\dfrac{\pi}{14} - \alpha\right) = \dfrac{1}{2}$, calcular $\cot\left(\dfrac{5\pi}{28} + \alpha\right)$:

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**19.-** Si: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 3\cos(\beta - \alpha)$ ; $\cot(\alpha + \beta) = 0{,}5$; entonces al calcular $\tan(2\alpha)$ se obtiene:

A) 0  B) 1/2  C) -1/2  D) 1  E) -1

**20.-** Sean tan $p$ y tan $q$ las soluciones de la ecuación

$$(x - 1)(k^2 . x + 1) = 2k \ , \ k \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$$

Calcule: $\tan(p + q)$ en términos de "$k$".

A) $k$  B) $\dfrac{1}{k}$  C) $\dfrac{k+1}{k-1}$  D) $\dfrac{2}{k}$  E) $\dfrac{k-1}{k+1}$

**21.-** Si: $N = \tan 21^\circ + \tan 24^\circ + \tan 21^\circ.\tan 24^\circ$

$$M = \tan 63^\circ - \tan 63^\circ - \sqrt{3} \tan 63^\circ.\tan 63^\circ$$

Calcular el valor de: "$N.M^2$"

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 6

### *IDENTIDADES ESPECIALES*

**22.-** Calcule el valor mínimo de la expresión:

$$W = a(\operatorname{sen} x - \cos x) + b(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

A) $ab$  B) $a + b$  C) $\sqrt{a^2 + b^2}$

D) $1/2\, ab$  E) $-\sqrt{2(a^2 + b^2)}$

**23.-** Simplificar:

$$W = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)}$$

A) 1  B) 2  C) -1/2  D) 1/4  E) 1/2

**24.-** Reducir: $M = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 38^\circ - \operatorname{sen}^2 8^\circ}{\cos^2 38^\circ - \operatorname{sen}^2 8^\circ}\right).\tan 44^\circ$

A) $\sqrt{3}$  B) $\sqrt{2}$  C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$  D) 1  E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**25.-** Calcular el valor aproximado de:

$$M = \frac{2\text{sen}10°+2\sqrt{3}\cos 10°+3\cos 70°}{\text{sen}^2 55°-\text{sen}^2 18°}$$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{7}{24}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{24}{7}$

**26.-** Simplificar:

$$W = \frac{(\tan a + \tan b).(\cot a + \cot b)}{(\tan a - \cot a) + (\tan b - \cot b)}$$

A) $\tan a$ B) $\tan b$ C) $\tan(a + b)$

D) $\tan(a - b)$ E) $-\tan(a + b)$

**27.-** Si: $\tan x = \cos(a + b)$; $\tan y = \cos(a - b)$,

calcular: $W = \dfrac{2\cot(x+y).\cos a \cos b}{\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b}$

A) 1 B) 0 C) 0,5 D) 2 E) 2,5

**28.-** Si: $\tan x + \tan y = m\ .\ \text{sen}\ (x + y)$ . . . (1)

$\tan y + \tan z = n\ .\ \text{sen}\ (y + z)$ . . . (2)

$\tan z + \tan x = p\ .\ \text{sen}\ (z + x)$ . . . (3)

Determinar: $M = \cos x\ .\ \cos y\ .\ \cos z$

A) $(mnp)^{-1/2}$ B) $mp$ C) $mnp$

D) $(mnp)^{1/2}$ E) $mn$

**29.-** Si $\cot 76° = a\ [\cot 38° - \cot 52°]$, entonces el valor de "$a$" es :

A) 1 B) 1/2 C) 0 D) 2 E) 1/4

**30.-** Exprese W como un producto, donde:

$W = \tan 19° + \tan 33° + \tan 38° - \tan 19°.\tan 33°.\tan 38°$

A) csc 19°.csc 33°.csc 38°

B) csc 33°.csc 38°

C) sec 33°.sec 38°

D) sec 19°.sec 33°

E) sec 19°.sec 33°.sec 38°

**31.-** En una circunferencia, con centro en el origen del sistema y de radio «$z$»; se cumple que:

$$x\ \text{sen}\ \theta + y \cos \theta = z$$

Determine: $M = \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{x}{4}\right)$

A) $\frac{x}{2}$ B) $\frac{y}{2}$ C) $\frac{x-y}{2}$ D) $\frac{x+2y}{2}$ E) $\frac{x+y}{z}$

**32.-** Sabiendo que:

$$\frac{\text{sen}(x-y)}{\cos x.\cos y} + \frac{\text{sen}(y+z)}{\cos y.\cos z} = 2\ \text{sen}\ (x+z)$$

Calcular: $M = \cos x.\ \cos z$

A) 0 B) 1 C) 1/3 D) 1/2 E) 1/4

### *SITUACIONES GRÁFICAS*

**33.-** De la figura mostrada, calcule "$x$"

Si: BD = 3, ED = 5, CE = 4

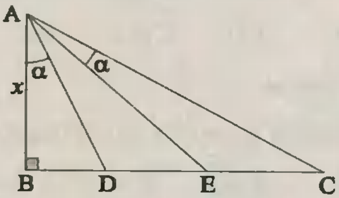
A) 6

B) $6\sqrt{2}$

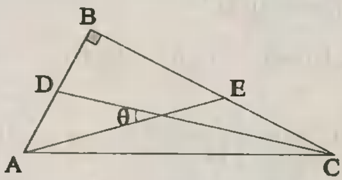
C) $8\sqrt{2}$

D) $10\sqrt{2}$

E) $12\sqrt{2}$

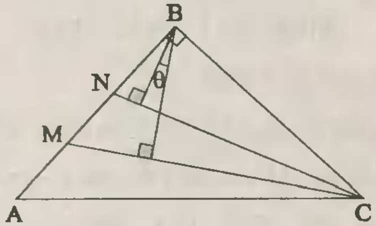



**34.-** De la figura mostrada, determinar: "tan θ", si: AD = BD = EC = 1 y BE = 2




A) 1 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/2 E) 1/6

**35.-** El triángulo ABC es rectángulo isósceles. Calcular "tan θ", Si: AM = MN = NB.




A) 1/11 B) 2/11 C) 11/3 D) 3/11 E) 11/2

**36.-** Si el triángulo ABC es isósceles (AB = BC). Determine el máximo valor de "θ" si: AM = MB.

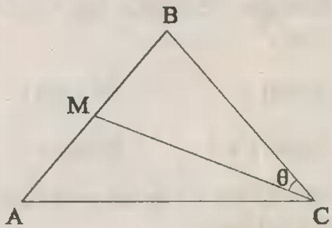
A) 20º

B) 45º

C) 25º

D) 40º

E) 30º




**37.-** De la figura mostrada, PQRS es un rectángulo, PT = TQ = 5QU = $\frac{5}{6}$UR, $m\angle STU = \theta$. Determine: tan θ.

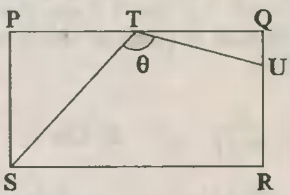
A) -4/3

B) -10/9

C) -2/3

D) -5/9

E) -20/9




**38.-** En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado, BC es el diámetro de la semicircunferencia, OE es el diámetro de la circunferencia inscrita en la semicircunferencia, $m\angle BDF = \alpha$. Determinar: cot α

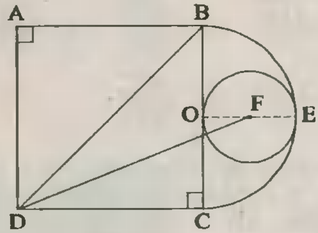
A) 4/3

B) 7/3

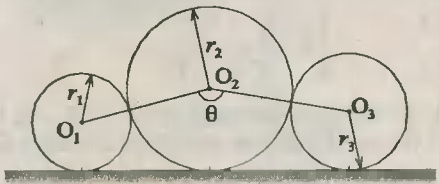
C) 3/4

D) 3/7

E) 4/5

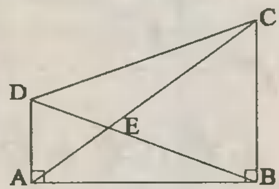



**39.-** En la figura mostrada se tienen tres discos tangentes exteriormente de radios $r_1 = 1u$, $r_2 = 9\,u$, $r_3 = 4\,u$. Calcular: sen θ.



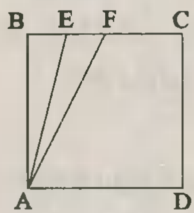

A) $\frac{25}{24}$ B) $\frac{7}{65}$ C) $\frac{61}{65}$ D) $\frac{49}{65}$ E) $\frac{63}{65}$

**40.-** En la figura mostrada, AB = 2, BC = 6, CD = $\sqrt{13}$, $m\angle CED = \alpha$. Calcular: cot α.




A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{3}{7}$

**41.-** En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado BE = $\frac{1}{2}$EF, BF = FC, $m\angle EAF = \theta$. Calcular: sec θ.

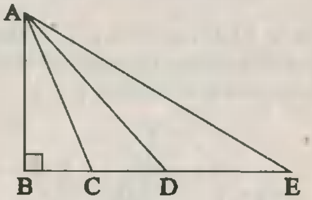


A) $\dfrac{\sqrt{181}}{13}$ B) $\dfrac{\sqrt{187}}{13}$ C) $\dfrac{\sqrt{185}}{13}$

D) $\dfrac{\sqrt{223}}{13}$ E) $\dfrac{\sqrt{226}}{13}$

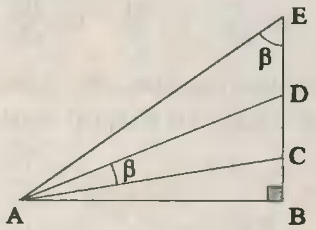
**42.-** En la figura mostrada, BC = 1, CD = 2, DE = 3, $m\angle$ BAC = $m\angle$ DAE; $m\angle$ ABE = 90°. Calcule: AB.

A) 1
B) 2,5
C) 1,5
D) 2
E) 3




**43.-** En la figura mostrada, BC = 1, CD = 2, DE = 3, $\beta = m\angle CAD = m\angle AED$, $m\angle ABE = 90°$.

Calcular: sen $\beta$.




A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

### *IDENT. TRIG. DE SUMA DE 3 ARCOS*

**44.-** Sabiendo que: $x + y + z = 90°$. Calcular:

$$M = \frac{\cos(x-y)}{\cos x.\cos y} + \frac{\cos(y-z)}{\cos y.\cos z} + \frac{\cos(x-z)}{\cos x.\cos z}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 3,5 E) 4

**45.-** Si: A + B + C = 90°

Calcule:

W = tan A.tan B + tan B.tan C + tan A.tan C

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 2 E) 3

**46.-** Si: A + B + C = 180°. Calcular:

W = tan A + tan B + tan C - tan A.tanB.tan C

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 2

**47.-** Si: $x + y + z = \pi/2$

$\cot x - \tan y = m$, $\cot y - \tan z = n$, $\cot z - \tan x = p$

Determinar: $M = m \tan x + n \tan y + p \tan z$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $m$

**48.-** Si: $x + y + z = 180°$,

además: sen $x$ + cos $y$ . cos $z$ = 0.

Calcular : M = tan $x$ . tan $y$ . tan $z$, en termino de "tan $x$"

A) tan $x$ B) 2 tan $x$ C) -tan $x$

D) tan $x$ + 1 E) tan $x$ - 1

**49.-** Si: tan $x$ = 2; tan $y$ = 4 ; tan $z$ = 3, entonces al calcular:

$$W = \frac{\text{sen}(x+y+z)}{\cos(x-y+z)} \text{ se obtiene.}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1

**50.-** En un Δ ABC, si tan A + tan B = $k$; tan A + tan C = l; tan B + tan C = $m$; $k$, l y $m \in \mathbb{R}$, entonces al calcular sec A.sec B.sec C se obtiene:

A) $\dfrac{kl}{m+l}$ B) $klm$ C) $\dfrac{klm}{k+l+m}$

D) $\dfrac{0{,}5\,klm}{k+l+m}$ E) $\dfrac{2\,klm}{k+l+m}$

**51.-** Si: A + B + C = π, calcular:

$$W = \frac{\text{sen}^2(B+C) - \cos^2 B - \cos^2 C}{\cos(B+C).\cos B.\cos C}$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

CAP 10

# Reducción al Primer Cuadrante

Son técnicas que se realiza para obtener los valores de las R.T. de cualquier ángulo por otros equivalentes pero cuyos ángulos se ubiquen en el primer cuadrante. Para el estudio de reducción al primer cuadrante, se presentan los siguientes casos:

## 10.1. CASO (I): ÁNGULOS POSITIVOS MENORES QUE 360°

**PROPIEDADES**

$$\textbf{R.T. } (90° \text{ ó } 270° \pm \alpha) = \pm \textbf{ COR.T } (\alpha)$$

$$\textbf{R.T. } (180° \pm \alpha) = \pm \textbf{ R.T } (\alpha)$$

$$\textbf{R.T. } (360° - \alpha) = \pm \textbf{ R.T } (\alpha)$$

Tener en cuenta que los signos $\pm$ del segundo miembro se eligen de acuerdo al cuadrante donde se encuentre el ángulo que se está reduciendo y la función trigonométrica a este se le aplique. Considerar $\alpha$ ángulo agudo con el fin de ubicar con facilidad el cuadrante.

## 10.2. CASO (II): ÁNGULOS MAYORES QUE 360°

Es suficiente con dividir el ángulo que se desea reducir entre 360°. A continuación se toma la misma función trigonométrica al residuo, así:

$$\textbf{R.T.}(n \times 360° \pm \alpha) = \textbf{R.T.} \pm (\alpha) \; ; n \in \mathbb{Z}$$

## 10.3. CASO (III): ÁNGULOS NEGATIVOS

Es suficiente convertir el ángulo negativo en positivo siguiendo los teoremas siguientes:

**Supongamos que:** $\alpha > 0 \Rightarrow -\alpha < 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ | $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ | $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ | $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ | $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$ |

## 10.4. CUANDO EL ÁNGULO SE EXPRESA EN RADIANES

La reducción se procede aplicando las reglas siguientes:

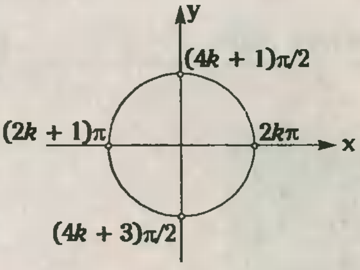
$$\textbf{R.T.}\ (k\pi \pm \alpha) = \pm\ \textbf{R.T.}\ (\alpha)$$

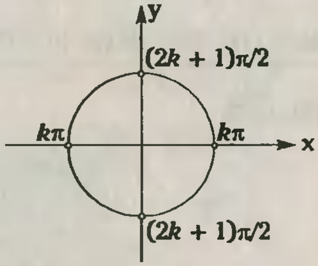
$$\textbf{R.T.}\ [(2\pi + 1)\alpha/2 \pm \alpha] = \pm\ \textbf{COR.T}(\alpha)$$

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}$$

En general : $\textbf{R.T.}(2k\pi \pm \alpha) = \textbf{R.T.}(\pm \alpha)$

Recuerde lo siguiente ( $\forall\ k \in \mathbb{Z}$)



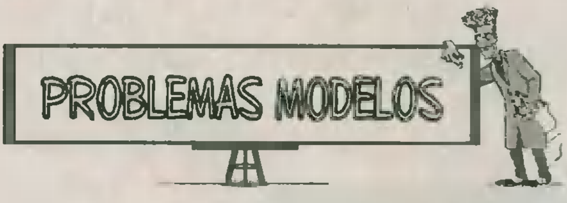

## 10.5. ÁNGULOS RELACIONADOS ENTRE SÍ

### 10.5A Ángulos Complementarios

**Si:** $x + y = \pi/2$ , **se cumple:** $\textbf{R.T.}(x) = \textbf{co-R.T.}\ (y)$

### 10.5B Ángulos Suplementarios

**Si:** $x + y = \pi$ , **se cumple:** $\textbf{R.T.}(x) = \pm\ \textbf{R.T.}\ (y)$




**PROB. 1**

Calcular $N = \dfrac{\cos 300^\circ + \cos 120^\circ + \operatorname{sen} 150^\circ}{\operatorname{sen} 330^\circ + \cos 240^\circ + \tan 135^\circ}$

**RESOLUCIÓN** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Aplicando reducción al primer cuadrante:

$$N = \frac{\cos(360^\circ - 60^\circ) + \cos(180^\circ - 60^\circ) + \operatorname{sen}(90^\circ + 60^\circ)}{\operatorname{sen}(360^\circ - 30^\circ) + \cos(180^\circ + 60^\circ) + \tan(90^\circ + 45^\circ)} \Rightarrow N = \frac{\cos 60^\circ - \cos 60^\circ + \cos 60^\circ}{-\operatorname{sen} 30^\circ - \cos 60^\circ - \cot 45^\circ}$$

Luego de reemplazar los valores notables, tendremos:

$$N = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\frac{1}{2}}{-2} \quad \therefore \quad \boxed{N = -\frac{1}{4}}$$

**PROB. 2**

Calcular: $E = \dfrac{\operatorname{sen} 750^\circ + \cos 1500^\circ + \tan 1665^\circ}{\operatorname{sen}(-150^\circ) - \cos(-120^\circ) + \cot(-765^\circ)}$

**RESOLUCIÓN** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Reduciendo al primer cuadrante:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(2\times 360^\circ + 30^\circ) + \cos(4\times 360^\circ + 60^\circ) + \tan(4\times 360^\circ + 225^\circ)}{-\operatorname{sen} 150^\circ - \cos 120^\circ - \cot 765^\circ}$$

Al aplicar los casos II y III, tendremos:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ}{-\operatorname{sen} 30^\circ - (-\cos 60^\circ) - \cot(2\times 360 + 45^\circ)} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} \text{ finalmente:}$$

$$E = \frac{2}{-1} \quad \therefore \quad \boxed{E = -2}$$

**PROB. 3**

Calcule: $S = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$

**RESOLUCIÓN** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Se observa que los ángulos que están equidistantes suman 180° y se sabe que si:

$$x + y = 180^o \Rightarrow \cos x = -\cos y$$

Luego: $S = \cancel{\cos 10^o} + \cancel{\cos 20^o} + \cos 30^o + \ldots \cancel{-\cos 20^o} \cancel{-\cos 10^o}$

$$\therefore \boxed{S = 0}$$

**PROB. 4**

Reducir: $R = \dfrac{\operatorname{sen}(5\pi - x) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}(8\pi - x)}{\tan(45\pi + x) - \cot\left(\dfrac{25\pi}{2} - x\right) + \tan(48\pi + x)}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Escribiendo apropiadamente «R», tendremos:

$$R = \frac{\operatorname{sen}(4\pi + \pi - x) + \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}(8\pi - x)}{\tan(44\pi + \pi + x) - \cot\left(12\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \tan(48\pi + x)}$$

Al aplicar el caso III, en el paso anterior, nos queda:

$$R = \frac{\operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}(-x)}{\tan(\pi + x) - \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan x}$$

Finalmente aplicamos el primer caso, obteniendo:

$$R = \frac{\operatorname{sen} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{sen} x}{\tan x - \tan x + \tan x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} \Rightarrow R = \operatorname{sen} x . \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \therefore \quad \boxed{R = \cos x}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Cuando un ángulo no es agudo, se recomienda aplicar reducción al primer cuadrante para determinar R.T. de ángulos agudos.*

2) *Si observamos que dos ángulos suman 180º, significa que la suma de sus cosenos es igual a cero o bien sus senos son iguales.*

3) *Cuando un ángulo se expresa en radianes, se busca un valor par de π, de tal manera que se puede aplicar el siguiente teorema:*

$$R.T.(2k\pi \pm \alpha) = R.T.(\pm\alpha) \ ; \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$$


***CASOS DE REDUCCIÓN***

**01.-** Si:

$\csc(90° - A) - x\cos A\cot(90° - A) = \text{sen}(90° - A)$

El valor de $x$ es:

A) cot A  B) -cot A  C) tan A

D) -tan A  E) sec A

**02.-** Calcular:

$\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + ... + \cos 179° + \cos 180°$

A) -2  B) -1  C) 1  D) 2  E) 3

**03.-** El valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

Es igual a:

A) 0  B) 1  C) -1  D) 2  E) -2

**04.-** Hallar el signo de las expresiones trigonométricas, en el orden dado:

$$\text{sen}\,\frac{52\pi}{3}\,.\cos\frac{25\pi}{3}\ ;\ \text{sen}\,\frac{32\pi}{5}\,.\cot\frac{22\pi}{3}\ ;$$

$$\text{sen}\left(\frac{-205\pi}{3}\right)\cot\frac{73\pi}{10}$$

A) (+)(+)(-)  B) (-)(+)(-)  C) (-)(+)(+)

D) (-)(-)(+)  E) (+)(-)(+)

**05.-** Sea $R = \cos 810° + \cot 425°$

$$S = (\text{sen}\,450°)(\tan 785°)$$

El valor del producto R.S es:

A) $1 + \cot 65°$  B) $1 + \tan 65°$  C) $(\tan 65°)^2$

D) $\cot 75°$  E) 1

**06.-** Reducir: A - B siendo:

$$A = \text{sen}\left(11\frac{\pi}{4} + x\right).\ \text{sen}\left(33\frac{\pi}{4} + y\right)$$

$$B = \cos\left(55\frac{\pi}{4} + x\right).\cos\left(77\frac{\pi}{4} + y\right)$$

A) sen $(x + y)$  B) cos $(x + y)$  C) -cos $(x + y)$

D) -cos $(x - y)$  E) -sen $(x - y)$

**07.-** Simplificar:

$$W = \frac{\text{sen}(\pi + x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi).\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\csc(\pi + x).\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right).\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$$

A) $\tan x$  B) $\cot x$  C) $\tan^2 x$

D) $\cot^2 x$  E) $-\tan^2 x$

**08.-** Simplificar:

$$W = \frac{\tan\left(-\frac{5\pi}{2} - \alpha\right).\sec(3\pi - \alpha).\text{sen}\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(-40\pi + \alpha)}$$

A) sen $\alpha$  B) cos $\alpha$  C) tan $\alpha$

D) cot $\alpha$  E) csc $\alpha$

**09.-** Simplificar:

$$W = \frac{\text{sen}(\pi - x).\cot\left(x - \frac{9\pi}{2}\right).\cos(x - 36\pi)}{\tan(13\pi + x)\tan\left(x + \frac{17\pi}{2}\right).\cos^2\left(\frac{47\pi}{2} + x\right)}$$

A) 0  B) 0,5  C) 1,5  D) -1  E) 1

**10.-** Simplificar:

$$W=\frac{\cot(1995\pi-\theta).\cos\left(239\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sec(\theta-804\pi).\text{sen}\left(\theta-161\frac{\pi}{2}\right)}$$

A) sen θ  B) tan θ  C) cot θ

D) -cos θ  E) cos θ

**11.-** Si:

$$\frac{\tan\left(37\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\cot(175\pi-\alpha).\text{sen}(809\pi+\alpha)}{\cot(72\pi-\alpha).\text{sen}\left(91\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\sec\left(\frac{55\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{1}{9}$$

además: $\alpha\in$ II C, Calcule:

$$M=2\sqrt{5}\ \cot\alpha+\csc\alpha.$$

A) 30  B) 31  C) -30  D) 28  E) -31

**12.-** Simplificar:

$$W=\frac{cov(x-27\pi)}{vers\left(-x+23\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{vers(-10\pi+x)}{cov\left(-x+13\frac{\pi}{2}\right)}$$

A) 1  B) 2  C) -2  D) -1  E) 0

**13.-** Si: $n\in\mathbb{Z}$, calcular el valor de:

$$M=\text{sen}\left[n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{4}\right].\csc\left(n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{4}\right)$$

A) 0  B) 1  C) 0,5  D) 2  E) -1

**14.-** Si "$x$" e "$y$" son complementarios ,

$\theta\in\langle-\pi\,;-\pi/2\rangle$ y se cumple:

$$\tan\theta=\frac{\text{sen}(x+2y).\tan(2x+3y)}{\cos(2x+y).\tan(4x+3y)}$$

Determinar el valor de "θ":

A) $-\frac{2\pi}{3}$  B) $-\frac{5\pi}{6}$  C) $-\frac{3\pi}{4}$  D) $-\frac{7\pi}{10}$  E) $-\frac{8\pi}{11}$

**15.-** Reducir:

$$M=\frac{\text{sen}(180^\circ-\alpha).\cos(\alpha-90^\circ).\tan(1260^\circ+\alpha)}{\cos(540^\circ-\alpha).\tan(360^\circ+\alpha)\text{sen}(450^\circ+\alpha)}$$

A) tan α  B) cot α  C) $\cot^2\alpha$

D) $-\cot^2\alpha$  E) $-\tan^2\alpha$

**16.-** Si: $k.\text{sen}\left(55\frac{\pi}{2}-\theta\right)\ .\cos\left(77\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{2}$

Calcular: $W=(\text{sen}\,\theta+\cos\theta)^2$ en términos de $k$.

A) $k$  B) $k^2$  C) $-k$  D) $k-1$  E) $\frac{k+1}{k}$

**17.-** Calcule:

$$W=\cos\left(159\frac{\pi}{14}\right)+\sec\left(242\frac{\pi}{3}\right)-\text{sen}\left(125\frac{\pi}{7}\right)$$

A) 0  B) 1  C) 2  D) -1  E) -2

**18.-** Si: $\frac{\cos(3000^\circ)-\cos(2000^\circ)}{\cos(300^\circ)-\cos(200^\circ)}=k$ ;

Calcular: $W=\frac{\cos(3000^\circ)+\cos(2000^\circ)}{\cos(300^\circ)+\cos(200^\circ)}$ en términos de $k$.

A) $k$  B) $-k$  C) $k^2$  D) $\frac{1}{k^2}$  E) $\frac{1}{k}$

**19.-** Si los ángulos internos de un triángulo ABC están en progresión aritmética (A < B < C). Reducir:

$$M=\frac{\text{sen}(A+3B+2C)}{\text{sen}(B-C)}+\frac{\cos(B+2A+3C)}{\cos(B-C)}$$

A) 0,5  B) 1  C) 2  D) 1,5  E) 0

**20.-** Determinar el valor de:

$$M=\left(\frac{\text{sen}420^\circ.\cos240^\circ.\tan405^\circ}{\text{sen}210^\circ.\cos225^\circ.\tan570^\circ}\right)^2$$

A) $\frac{3}{2}$  B) 1  C) 0  D) $\frac{5}{2}$  E) $\frac{9}{2}$

**21.-** Simplificar:

$$W=\frac{\operatorname{sen}(2540^\circ)+2\cos^3(1910^\circ)}{\cos(2680^\circ)+2\operatorname{sen}^3(2630^\circ)}$$

A) tan 10º  B) tan 30º  C) cot 10º

D) cot 20º  E) tan 20º

### *CASOS PARTICULARES DE REDUCCIÓN*

**22.-** Calcular el valor de:

$\cos 10^\circ+\cos 30^\circ+\cos 50^\circ+\ldots+\cos 170^\circ$

A) 1/2  B) 0  C) $\sqrt{3}/2$  D) 1  E) 2

**23.-** Si: $A+B+C=180^\circ$.

Hallar: $\dfrac{1}{\tan A+\tan B+\tan C}$

A) sen A.sen B.sen C  D) cot A.cot B.cot C

B) cos A.cos B.cos C  E) sec A.sec B.sec C

C) tan A.tan B.tan C

**24.-** Qué relación existe entre a y b; sabiendo que:

$$\tan\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+\cot\left(\frac{6\pi+3a-2b}{4}\right)=0$$

A) 1/2  B) 1/3  C) 1/4  D) 1/5  E) 1/6

**25.-** En un triángulo ABC. Simplificar:

$$M=\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}C}+\tan(A+B+2C).\cot(A+B)$$

A) 0,5  B) 1  C) -1  D) 1,5  E) 0

**26.-** Si: $x+y=\pi$, simplificar:

$$M=\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}y}+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\cot\frac{y}{2}}+\frac{3\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}2y}$$

A) 0,5  B) 1  C) 1,5  D) -0,5  E) 0

**27.-** Calcular el valor de:

$$M=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$$

A) 0,5  B) 1  C) 1,5  D) -0,5  E) 0

**28.-** Si: $x+y=180^\circ \;\wedge\; y+z=270^\circ$

Calcular:

$$M=\left(\frac{\operatorname{sen}x+\cos y}{\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}z}\right)+(\tan x-\tan y)(\cot y+\tan z)$$

A) 1  B) 2  C) -1  D) 0  E) -3

**29.-** Simplificar la expresión:

$$M=\frac{\tan(230^\circ+x)+\tan(50^\circ+x)}{\cot(40^\circ-x)}$$

A) 0  B) 0,5  C) 1  D) 1,5  E) 2

**30.-** Si: $\csc\alpha=\dfrac{2m+1}{2m-1}$ ; $\csc\beta=\dfrac{m+2}{m-1}$

Determinar el valor de "m" que hace que $\alpha$ y $\beta$ sean suplementarios

A) $\frac{1}{2}$  B) $\frac{-1}{2}$  C) $\frac{-1}{4}$  D) 0  E) $\frac{1}{4}$

**31.-** Reducir:

$$M=\frac{\operatorname{sen}120^\circ+\operatorname{sen}140^\circ+\operatorname{sen}160^\circ+\ldots+\operatorname{sen}260^\circ}{\cos20^\circ+\cos30^\circ+\cos40^\circ+\ldots+\cos170^\circ}$$

A) 0  B) 0,5  C) 1,5  D) 2  E) 1

**32.-** Si: $\operatorname{sen}\alpha=\cos(\beta+\theta)$, «$\alpha$» y «$\beta+\theta$» son ángulos agudos

Reducir: $M=\dfrac{\tan(\alpha+\beta+2\theta)}{\cot(2\alpha+2\beta+3\theta)}$

A) 0  B) 1  C) 2  D) -2  E) -1

**33.-** ¿En qué tipo de triángulo ABC se cumple:

$\sec(A+2B+2C)=\csc(2A+2C+3B)$ ?

A) escaleno B) isósceles

C) equilátero D) obtusángulo

E) rectángulo

**34.-** Si A, B y C son los ángulos de un triángulo. Simplificar:

$$M=\frac{\cos(A+B)}{\cos C}+\frac{\cos(B+C)}{\cos A}+\frac{\cos(A+C)}{\cos B}$$

A) 0 B) 1 C) -2 D) -1 E) - 3

### *SITUACIONES GRÁFICAS*

**35.-** Determinar BM de la figura en términos de R y θ:

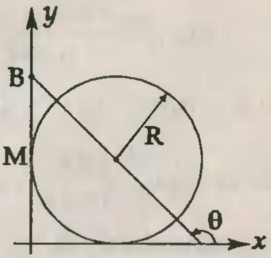
A) R

B) R sen θ

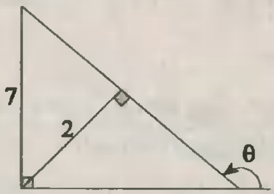
C) R cos θ

D) R sec θ

E) R tan θ



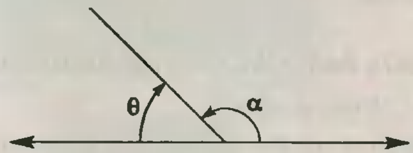

**36.-** De la figura mostrada, calcular tan θ.




A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) 1 C) $2\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$

**37.-** Reducir: $M=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Usando el gráfico:




A) 0 B) 0,5 C) -1 D) 2 E) 1

**38.-** De la figura mostrada, calcule:

$$W = a\tan\theta - 2b.$$

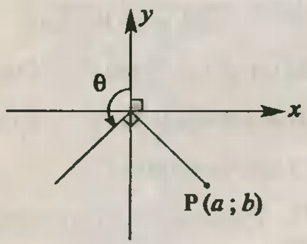
A) $a$

B) $b$

C) $-a$

D) $-ab$

E) $-b$




**39.-** De la figura mostrada, determinar: 13 sen α.

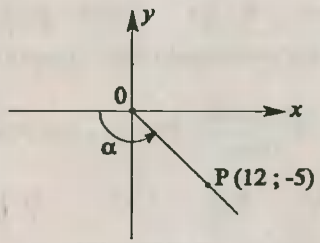
A) 1

B) 3

C) 4

D) 2

E) 5



# Identidades Trigonométricas del Arco Doble

CAP 11

En el capítulo anterior se estudiaron las identidades de las razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos arcos, así por ejemplo:

$$\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}\,\alpha\cos\theta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta$$

A partir de aquí, haciendo el cambio de $\theta$ por $\alpha$ es decir $(\theta=\alpha)$, se obtienen las razones de los arcos dobles, así:

$$\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}(\alpha+\alpha)=\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

Otra forma interesante de deducir las relaciones de los arcos dobles es aplicando números complejos (fórmula de Abraham de Moivre 1 667-1 754), que se verá en el Cap. 22:

$$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^n=\cos n\alpha+i\,\text{sen}\,n\alpha$$

Si: $\quad n=2 \quad\Rightarrow\quad (\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^2=\cos2\alpha+i\,\text{sen}\,2\alpha$

Desarrollando el binomio, e igualando las partes reales y partes imaginarias se obtienen:

$$\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \quad\wedge\quad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha$$

## 11.1. RELACIONES FUNDAMENTALES

$$\textbf{sen}\,2\alpha=2\,\textbf{sen}\,\alpha.\cos\alpha \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha \qquad \tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

## 11.2. RELACIONES AUXILIARES

Se obtienen a partir de las razones fundamentales con la ayuda de las identidades trigonométricas, así:

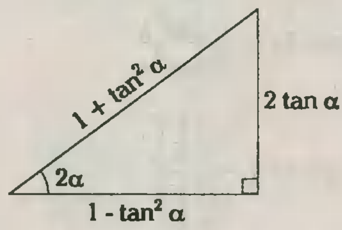
$$2\,\text{sen}^2\alpha=1-\cos2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$$

$$\text{sen}\,2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

**Triángulo del ángulo doble**



$$\tan\alpha + \cot\alpha = 2\csc 2\alpha \qquad \cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$$

$$\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\alpha \qquad \text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha$$

$$8\,\text{sen}^4\alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha \qquad 8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$

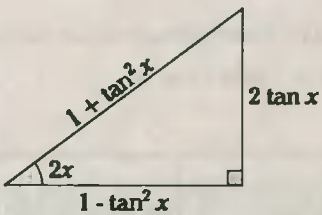

**PROB. 1**

Sabiendo que $\tan x = 1/2$, determina:

a) sen $2x$ b) $\cos 2x$ c) $\tan 2x$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Utilizando el triángulo adjunto, se tiene:




a) $$\text{sen } 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\text{sen } 2x = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

b) $$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$$

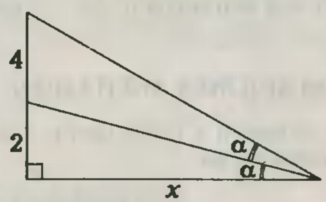
$$\cos 2x = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

c) $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

**PROB. 2**

Determine el valor de $x$ en la figura:




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

De la figura propuesta se tiene:

$$\tan 2\alpha = \frac{6}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{3}{x}\ , \quad \text{pero: } \tan\alpha = \frac{2}{x}$$

Luego: $\dfrac{\frac{2}{x}}{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}=\dfrac{3}{x} \Rightarrow \dfrac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\dfrac{3}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2}{x(x^2-4)}=\dfrac{3}{x} \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-4}=3$

$\Rightarrow 2x^2=3x^2-12 \Rightarrow 12=x^2$

Finalmente: $\boxed{x=2\sqrt{3}}$

**PROB. 3**

Calcular el máximo valor de:

$$E=\text{sen}^2x+6\cos^2x+12\,\text{sen}\,x\cos x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Utilizando:

$$2\,\text{sen}^2x=1-\cos 2x \quad ...(*)$$

$$2\cos^2x=1+\cos 2x ...(*)$$

$$2\,\text{sen}\,x\cos x=\text{sen}\,2x \quad ...(*)$$

Se tiene, luego de multiplicar «2» a cada miembro:

$$2E=2\,\text{sen}^2x+6.2\cos^2x+12.2\,\text{sen}\,x\cos x$$

$$\Rightarrow 2E=1-\cos 2x+6(1+\cos 2x)+12(\text{sen}\,2x)$$

$$2E=1-\cos 2x+6+6\cos 2x+12\,\text{sen}\,2x$$

$$\Rightarrow 2E=12\,\text{sen}\,2x+5\cos 2x+7$$

Pero:

$$-\sqrt{(12)^2+(5)^2}\le 12\,\text{sen}\,2x+5\cos 2x\le\sqrt{(12)^2+(5)^2}$$

Puesto que:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\,\text{sen}\,x\pm b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow -13\le 12\,\text{sen}\,2x+5\cos 2x\le 13$$

$$\Rightarrow -13+7\le\underbrace{12\text{sen}2x+5\cos 2x+7}_{2E}\le 13+7$$

$$-6\le 2E\le 20 \Rightarrow \underbrace{-3}_{\text{mínimo}}\le E\le\underbrace{10}_{\text{máximo}}$$

$$\therefore \boxed{E_{\text{máx}}=10}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Es recomendable expresar los ángulos dobles en función del ángulo simple.*

2) *Si se tiene el valor de la tangente del ángulo simple, y se desea calcular los valores de las razones trigonométricas de sus respectivos ángulos dobles, se utiliza el triángulo del ángulo doble.*

3) *Cuando se tiene senos o cosenos a la potencia cuadrada o potencia cuarta* ($\text{sen}^2x$; $\cos^2x$; $\text{sen}^4x$; $\cos^4x$), *se debe degradar (bajar la potencia a la unidad), utilizando las siguientes identidades.*

$$2\,\text{sen}^2x=1-\cos 2x \quad ; \quad 2\cos^2x=1+\cos 2x$$

$$8\,\text{sen}^4x=3-4\cos 2x+\cos 4x$$

$$8\cos^4x=3+4\cos 2x+\cos 4x$$


***RELACIONES FUNDAMENTALES***

**01.-** Simplificar: $W = 3 + \cos 4x - 8\,\text{sen}^4 x$

A) $\cos x$ B) $\cos 2x$ C) $2\cos 2x$

D) $3\cos 2x$ E) $4\cos 2x$

**02.-** Reducir: $M = 2(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)^2 - 1$

A) $\cos 4x$ B) $\cos 2x$ C) $\cos^2 2x$

D) $\cos^2 4x$ E) $2\cos 4x$

**03.-** Reducir:

$$M = \frac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}x + \cos x} + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x$$

A) 0 B) 1 C) 0,5 D) -1 E) 2

**04.-** Simplificar: $W = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 4\alpha}$

A) $\frac{1}{4}.\csc^2\alpha$ B) $\frac{1}{4}\sec^2\alpha$ C) $\frac{1}{4}\cot^2\alpha$

D) $\frac{1}{4}.\text{sen}^2\alpha$ E) $\frac{1}{4}$

**05.-** Reducir:

$M = \cos^6 x - \text{sen}^6 x - \cos^2 x.\text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x.\cos^4 x$

A) $\cos x$ B) $2\cos x$ C) $\cos 2x$

D) $2\cos 2x$ E) $-\cos 2x$

**06.-** Reducir:

$$M = \frac{\cos x}{\sec x(1+\tan^2 x)} - \frac{\text{sen}x}{\csc x(1+\cot^2 x)}$$

A) $\cos x$ B) $-\cos x$ C) $-\cos 2x$

D) $\cos 2x$ E) $\cos^2 2x$

**07.-** Simplificar: $W = \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}$

A) $\text{sen}\,2\alpha$ B) $\text{sen}\,4\alpha$ C) $\csc 2\alpha$

D) $\text{sen}^2\alpha$ E) $\csc 4\alpha$

**08.-** Simplificar:

$M = \dfrac{2\tan^3 x}{\sec^2 x} - \sec^2 x \,.\, \text{sen}\,2x\ ,\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

A) $\text{sen}\,x$ B) $-\text{sen}\,2x$ C) $\text{sen}\,2x$

D) $\cos 2x$ E) $-\cos 2x$

**09.-** Reducir:

$$M = \frac{\tan x}{(1+\tan^2 x)^2} + \frac{\cot x}{(1+\cot^2 x)^2}$$

A) $\text{sen}\,2x$ B) $\frac{1}{3}\text{sen}\,2x$ C) $\frac{1}{4}\text{sen}\,2x$

D) $\text{sen}^2 2x$ E) $\frac{1}{2}.\text{sen}\,2x$

**CAMBIAR SOLUCION** **10.-** Simplificar:
$W = \cot 7° - 2\cot 14°$

A) $\tan 14°$ B) $\cot 14°$ C) $\cot 7°$

D) $\tan 7°$ E) $2\tan 7°$

**11.-** Si: $\text{sen}\,x < \cos x$, simplificar:

$$W = \cos 2x - (\text{sen}\,x + \cos x).\sqrt{1-\text{sen}2x}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

**12.-** Escribir la siguiente expresión en términos de cos θ.

$$M=\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\theta}-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right).\cos^2\frac{\theta}{2}$$

A) $\cos\theta$ B) $\frac{1}{2}\cos\theta$ C) $\frac{1}{4}\cos\theta$

D) $\frac{1}{4}\cos^2\theta$ E) $\frac{\cos^2\theta}{2}$

**13.-** Si: $W = 1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \tan x$, entonces una expresión equivalente de factores para W será:

A) $2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right).\sec x$

B) $2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right).\csc x$

C) $2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sec x$

D) $2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\csc x$

E) $2\sqrt{2}\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right).\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\sec x$

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**14.-** Si:

$$7\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha=m+n\cos 2\alpha+p\cos 4\alpha$$

Calcule: $m-n-p$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 0 E) 2

**15.-** Si: $(1 + \sec 2x)(1 + \sec 4x)(1 + \sec 8x)$

$= A.\tan(Bx).\cot(Cx)$

Calcular: $\frac{B}{A+C}$ ; siendo: $B > 0 \wedge C > 0$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**16.-** Si: $\dfrac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{x}{4}\right)}=A.\cos^n\left(\frac{x}{8}\right)$, calcule el valor de $\sqrt[n]{A}$ :

A) 2 B) 1 C) 0,5 D) 1,5 E) 4

**17.-** Si:

$$A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x+C=p.\tan^2x+q\tan x+r=0$$

halle el equivalente de: $W=\frac{2A}{B+C}$

A) $p/r$ B) $q/r$ C) $r/q$ D) $r/p$ E) $p.q$

**18.-** Si se sabe que:

$$\cos 2x = 1-8\cos^2\frac{x}{2}+8\cos^4\frac{x}{4}$$

Calcular: $M = \cos 2x + 3$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 3 E) 2

**19.-** Si: $4\operatorname{sen}\alpha-3\sqrt{2}\ \cos\alpha=5$, entonces calcular:

$$W=\cos 2\alpha-12\sqrt{2}\ \operatorname{sen}2\alpha$$

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0,5

**20.-** Si: $\cos x-\operatorname{sen}x=\frac{\sec x}{2m}$

Calcular: $\csc 4x$

A) $\frac{m}{m+1}$ B) $\frac{1}{2m-1}$ C) $\frac{2m}{2m-1}$

D) $\frac{m^2}{2m+1}$ E) $\frac{m^2}{2m-1}$

**21.-** Si: $\operatorname{sen}2x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, calcular:

$$W=\operatorname{sen}^6x+\cos^6x$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

**22.-** Si: $\frac{\cos x}{m} = \frac{\operatorname{sen} x}{n}$, a qué es igual:

$$E = m\cos 2x + n \operatorname{sen} 2x$$

A) $n$ B) $-n$ C) $-m$ D) $m^2$ E) $m$

**23.-** Si: $k = \frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$, calcular:

$$W = \frac{2\tan^2\alpha}{(1+\tan\alpha)^2}$$

A) $k$ B) $-k$ C) $-\frac{1}{k}$ D) $\frac{1}{k^2}$ E) $\frac{1}{k}$

**24.-** Si: $\cos x.\cos y = \operatorname{sen} a$

$\operatorname{sen} x\,.\operatorname{sen} y = \cos a$

Calcular: $\operatorname{sen}^2(x-y)$ en términos de $a$.

A) $\operatorname{sen} a$ B) $\cos a$ C) $\operatorname{sen} 2a$

D) $\cos 2a$ E) $-\operatorname{sen} 2a$

**25.-** Si: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{17}+x\right) = \frac{1}{3}$, calcular:

$$W = \cos\left(2x - 15\frac{\pi}{17}\right)$$

A) $\frac{5}{9}$ B) $-\frac{7}{9}$ C) $-\frac{5}{9}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{4}{5}$

**26.-** Si: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right) = k$. calcular

$$W = \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5}\right)$$

A) $k^2$ B) $k^2-1$ C) $k^2+1$

D) $2k^2$ E) $-2k^2+1$

**27.-** Si: $\tan 2x = 8\cos^2 x - \cot x$

Calcule: $M = 2\operatorname{sen} 4x - 1$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 0

**28.-** Si: $\tan\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) - \tan(3\pi+x) = 2k$,

calcular: $W = \sec 4x - \cos 4x$

A) $\frac{k}{k^2+1}$ B) $\frac{k}{k^2-1}$ C) $\frac{2k}{k^2-1}$

D) $\frac{2k^2}{k^2-1}$ E) $\frac{4k^2}{k^4-1}$

**29.-** Si: $\sec^2\alpha - \sec^2\beta = 2$

Calcular: $M = \frac{\tan\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} - \frac{\tan\beta}{\operatorname{sen}2\beta}$

A) 0 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) 1

**30.-** Si se cumple: $2 - \sec^2 x = 3\tan x$

Calcular: $\cot 4x$

A) $\frac{13}{12}$ B) $\frac{13}{5}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{5}{12}$

**31.-** Si: $14x = \pi$, entonces al calcular:

$$W = \frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen}x} + \frac{2\sqrt{2}\cos x}{\operatorname{sen}2x} - \frac{1}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen}x}$$

Se obtiene:

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $-2\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

**32.-** Calcular el valor aproximado de:

$$M = 49\left(\frac{\cos 22^\circ}{\operatorname{sen}8^\circ} - \frac{\operatorname{sen}22^\circ}{\cos 8^\circ}\right)^2$$

A) 1578 B) 2345 C) 3497 D) 2453 E) 1 875

**33.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W = \tan\frac{\pi}{12} - \tan\frac{7\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} - \tan\frac{11\pi}{12}$$

A) 0 B) 0,5 C) 2 D) 4 E) 8

**34.-** Calcular el valor de la expresión:

$$W = \operatorname{sen}^4\frac{\pi}{16} + \operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}$$

A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) $\frac{3}{4}$

**35.-** Calcular el valor de la expresión:

$$M = \left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

**36.-** Calcular el valor de la expresión:

$$M = \left(\frac{\sqrt{1+\cos 40^\circ}}{\sec 45^\circ}\right).\sec 20^\circ$$

A) 0 B) 0,5 C) 2 D) 3 E) 1

**37.-** Calcular el valor de la expresión:

$M = \cos 5^\circ . \operatorname{sen} 5^\circ - (1 + \operatorname{sen} 40^\circ)(1 - \operatorname{sen} 40^\circ)$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) -1 E) $-\frac{1}{2}$

## *VARIACIÓN DE EXPRESIONES*

**38.-** Calcula el valor máximo de la expresión:

$$W = \cos^5 x . \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^5 x . \cos x$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

**39.-** ¿Cuál es la variación de la expresión:

$$W = \frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} \ ?$$

A) $[0 ; 2\rangle$ B) $[0 ;3\rangle$ C) $\langle 0 ; 2]$

D) $\langle 0 ; 4]$ E) $[0 ; 4\rangle$

**40.-** ¿Cuál es la variación de la expresión:

$W = \tan\theta - \tan 2\theta + \tan^2\theta.\tan 2\theta$, si $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\rangle$?

A) $\langle 0 ; 1\rangle$ B) $\langle -1 ; 0\rangle$ C) $[-1 ; 0]$

D) $[-1 ; 1]$ E) $\langle -1 ; 1\rangle$

## *IDENTIDADES AUXILIARES*

**41.-** Si: $\csc\alpha = 4$, calcular

$$M = \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3}{4}}{\operatorname{sen}^6\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{5}{8}}$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

**42.-** Si: $\tan\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{18}\right) = k$,

calcular: $W = \frac{1}{4}.\operatorname{sen}^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

A) $k$ B) $\frac{1}{k}$ C) $\frac{2}{k}$ D) $\frac{1}{k^3}$ E) $\frac{1}{k^2}$

**43.-** Si: $\tan^2 x + \cot^2 x = m$, $x \in \langle 0 ; \pi/2\rangle$

Calcular: $\sqrt{m+2}\,.\operatorname{sen} 2x$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 2

**44.-** Si: $\dfrac{\cos^8 x - \text{sen}^8 x}{\cos 2x} = A + B\cos 4x$,

$x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$

Calcular: "A + B"

A) 0 B) 0,5 C) -1 D) -0,5 E) 1

**45.-** Si se cumple: $\dfrac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\cos^8 x - \text{sen}^8 x} = m$

Calcular: $M = 3 - \cos 4x$

A) $m$ B) $\dfrac{1}{m}$ C) $\dfrac{2}{m}$ D) $\dfrac{3}{m}$ E) $\dfrac{4}{m}$

**46.-** En la siguiente identidad halle: $A - B$

$8(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) = A + B\cos 4x$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 2

***SITUACIONES GRÁFICAS***

**47.-** En la figura mostrada:

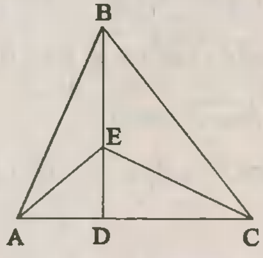
AD = $\sqrt{2}$ , DC = $\sqrt{3}$,

$m\angle BCE = m\angle ECD$,

$m\angle EAD = 45°$,

$m\angle ADB = 90°$ y $m\angle ABD = x$.

Calcular: cot $x$.




A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

**48.-** Si los lados de un rectángulo son $a$ y $b$ ($a > b$), entonces al calcular la tangente del ángulo agudo que forman sus diagonales se obtiene:

A) $\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{2ab}{a+b}$ C) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ E) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

**49.-** Si en un triángulo rectángulo sus catetos tienen por medida sen 20° y 1 + cos 20°, entonces la medida de sus ángulos agudos serán:

A) 20° y 70° B) 30° y 60° C) 40° y 50°

D) 45° y 45° E) 10° y 80°

**50.-** En la figura mostrada, AB = 3 *cm*, CD = 7 *cm*, $m\angle BAC = 2\alpha$, $m\angle ADB = \alpha$, $m\angle BAD = m\angle BCD = 90°$. Calcular: $\overline{BD}$.

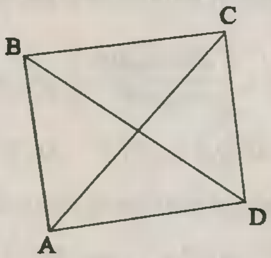
A) 4 *cm*

B) 5 *cm*

C) 6 *cm*

D) 7 *cm*

E) 9 *cm*



# Identidades Trigonométricas del Arco Mitad

CAP 12

Utilizando las identidades de los arcos dobles tendremos:

$$2\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta \quad ; \quad 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

De tal manera que si hacemos: $2\theta = \alpha$, entonces:

$$2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad ; \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

Si se despeja sen $\frac{\alpha}{2} \wedge \cos\frac{\alpha}{2}$ se obtienen las relaciones de los arcos mitad.

## 12.1. RELACIONES FUNDAMENTALES

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

El signo $\pm$ depende del cuadrante donde se encuentre $\frac{\alpha}{2}$ y la función que a este se le aplique.

## 12.2. FÓRMULAS RACIONALIZADAS

Teniendo en cuenta que $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ y $\cot\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}$, se obtienen:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \cot\alpha$$


**PROB. 1**

Calcular: sen $\frac{\pi}{8}$ y cos $\frac{\pi}{8}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

$$*)\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Escogemos el signo (+) dado que $\frac{\pi}{8} \in$ I C

$$\therefore \qquad \boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

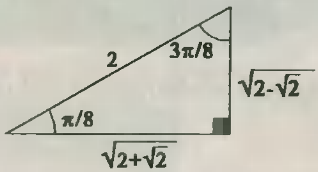
$$*)\ \cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

Escogemos el signo (+) dado que $\frac{\pi}{8} \in$ I C

$$\therefore \qquad \boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

De los resultados anteriores, deducimos el triángulo notable mostrado en la figura.




**PROB. 2**

Si: $\cos x = \frac{1}{2}$ , $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , calcule:

a) sen $\frac{x}{2}$ b) cos $\frac{x}{2}$ c) tan $\frac{x}{2}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Primero tenemos que ubicar el cuadrante donde se encuentra $x/2$.

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \frac{x}{2} \in \text{IIC}$$

a) $$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

b) $$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}$

$\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**PROB. 2**

Calcule :

a) $\tan 15^\circ$ b) $\cot 22^\circ 30'$

c) $\tan 18^\circ 30'$ d) $\tan \pi/8$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Se sabe que: $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

$\cot\frac{x}{2} = \csc x + \cot x$

Luego:

a) $\tan 15^\circ = \csc 30^\circ - \cot 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$

b) $\cot 22^\circ 30' = \csc 45^\circ + \cot 45^\circ = \sqrt{2} + 1$

c) $\tan 18^\circ 30' = \csc 37^\circ - \cot 37^\circ = \frac{1}{3}$

d) $\tan\frac{\pi}{8} = \csc\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} - 1$

**PROB. 3**

Simplifica:

$$E = \cot\frac{x}{8} + \csc\frac{x}{8} + \csc\frac{x}{16} + \csc\frac{x}{32} + \csc\frac{x}{64}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Utilizando la fórmula racionalizada tendremos:

$$\underbrace{\cot\frac{x}{8} + \csc\frac{x}{8}} + \csc\frac{x}{16} + \csc\frac{x}{32} + \csc\frac{x}{64}$$

$$\underbrace{\cot\frac{x}{16} + \csc\frac{x}{16}}$$

$$\underbrace{\cot\frac{x}{32} + \csc\frac{x}{32}}$$

$$\underbrace{\cot\frac{x}{64} + \csc\frac{x}{64}}$$

$$\underbrace{\cot\frac{x}{128}}$$

Finalmente: $\mathbf{E = \cot\frac{x}{128}}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

**1)** *Para aplicar las fórmulas del ángulo mitad, primero tenemos que ubicar el cuadrante al cual pertenece el ángulo mitad, para que de esa manera podamos asignar su signo.*

**2)** *En ángulos mitad es recomendable utilizar las fórmulas racionalizadas para evitarnos de los radicales, estas fórmulas racionalizadas son:*

$$\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x \quad \wedge \quad \cot\frac{x}{2} = \csc x + \cot x$$


***RELACIONES FUNDAMENTALES***

**01.-** Si: $\cos x = \dfrac{1}{8}$ ; $x \in$ IC,

calcular: $4\cos\dfrac{x}{2}$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 3

**02.-** Reducir:

$$M = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} + \sqrt{\frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}}$$

A) $\sec x$ B) $\csc x$ C) $2\sec x$

D) $\operatorname{sen} x$ E) $2\csc x$

**03.-** Reducir:

$$M = \frac{\cot\frac{x}{2}.\cos x + 2\cos^2\frac{x}{2}.\tan x}{\sec x.\cot\frac{x}{2}}$$

A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

**04.-** Si: $\csc 2x - \cot 2x = \dfrac{1}{3}$, calcular:

$$W = \csc 4x + \cot 4x$$

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{1}{5}$

**05.-** Si: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ ; $a > b$ ; $x \in$ IC,

calcule: $\tan\dfrac{x}{2}$

A) $a$ B) $b$ C) $\dfrac{a}{b}$ D) $ab$ E) $\dfrac{b}{a}$

**06.-** Dada la siguiente identidad:

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = W.\cot\frac{x}{2}$$

calcula el equivalente de W.

A) $\operatorname{sen} x$ B) $2\operatorname{sen} x$ C) $4\operatorname{sen} x$

D) $\cos x$ E) $2\cos x$

**07.-** Si: $\cot x = 0{,}75$ , $x \in$ IIIC,

calcular: $W = \cos 2x - \tan\dfrac{x}{2}$

A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{7}{25}$ D) $\dfrac{43}{25}$ E) $-\dfrac{23}{25}$

**08.-** Calcular:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\left(\cos\frac{x}{2}.\tan x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) + 1, \text{ para } x = 30^\circ.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

***FÓRMULAS RACIONALIZADAS***

**09.-** Simplificar:

$$W = \csc 2x + 2\cot x - 3\tan x$$

A) $5\cot 2x$ B) $\cot 2x$ C) $3\cot 2x$

D) $\cot x$ E) $2\cot 2x$

**10.-** Reducir: $M = \dfrac{\tan 20^\circ + \cot 40^\circ}{\cot 20^\circ - \cot 40^\circ}$

A) 1 B) 0,5 C) 0,25 D) -0,5 E) - 0,25

**11.-** Simplificar:

$$W = \cot\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} \cdot \cot x$$

A) cox B) sen $x$ C) 1 D) 0 E) cot $x$

**12.-** Simplificar: $M = \tan\frac{x}{2} + 2\,\text{sen}^2\frac{x}{2} \cdot \cot x$

A) cos$x$ B) cot $x$ C) sec$x$

D) csc$x$ E) sen $x$

**13.-** Simplificar:

$$W = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \tan 2x \cdot \left(\frac{\cos x}{1-\cos x} - \frac{1+\cos x}{\cos x}\right)$$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 2 E) 1,5

**14.-** Simplificar: $M = \dfrac{\csc x - \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \cot x}$

A) 0 B) 0,5 C) 1,5 D) 1 E) -1

**15.-** Simplificar:

$$W = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot (1+\text{sen}x)}{\cos x}$$

A) 0 B) 1 C) 0,5 D) 1,5 E) 2

**16.-** Reducir:

$$M = \csc x + \csc\frac{x}{2} + \csc\frac{x}{4} + \csc\frac{x}{8} + \csc\frac{x}{16}$$

A) $\cot\frac{x}{32} - \cot x$ B) $\cot\frac{x}{16}$

C) $\cot\frac{x}{8}$ D) $\cot\frac{x}{32}$ E) $\cot\frac{x}{64}$

**17.-** Reducir:

$$M = \cos^2 2x - \left(\frac{2}{\tan x + \cot x}\right)^2$$

A) cos $x$ B) cos $2x$ C) cos $3x$

D) cos $8x$ E) cos $4x$

**18.-** Simplificar: $W = \csc 2x + \cot 4x + \csc 4x$

A) tan $x$ B) $\tan^2 x$ C) $\cot^2 x$

D) cot $x$ E) 2 cot $x$

**19.-** Simplificar:

$$W = \frac{\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{\csc 2x + \cot 2x}$$

A) 0 B) 2 C) 0,5 D) 1 E) 1,5

**20.-** Calcula: tan 7°30'

A) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$

C) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ D) $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$

E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

**21.-** Calcule el valor aproximado de:

tan(9°)

A) $\sqrt{5}-1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ B) $\sqrt{5}+1+\sqrt{5+\sqrt{5}}$

C) $\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ D) $\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

E) $\sqrt{5}+1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

### *PROBLEMAS CONDICIONALES*

**22.-** Si se cumple: $\tan\frac{x}{4} + \tan\frac{x}{8} = 2\csc\frac{x}{2}$,

calcule: $M = \cos\frac{x}{4} + \sec\frac{x}{4}$

A) 2,5 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) 3

**23.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W = \frac{\cot 10° - \tan 10°}{\csc 40° + \cot 40°}$$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 2

**24.-** Si: $\tan(45° - x) = m$,

calcular: $E = \sec 2x + \tan 2x$

A) $m$ B) $\frac{1}{m}$ C) $m^2$ D) $\frac{1}{m^2}$ E) $2m$

**25.-** Si: $\csc x - \cot x = \operatorname{sen}\theta$,

calcular: $M = \dfrac{\sec^2\frac{x}{2} + \cos^2\theta}{\cot\frac{x}{2} - \csc\theta + 1}$

A) 0,5 B) 2 C) 1 D) 1,5 E) 3

**26.-** Determine el valor de:

$$M = (\tan 10° + 2\cot 20°)(\sec 70° - \cot 20°)$$

A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

**27.-** Si: $\operatorname{sen} x + m\cos x = m$,

calcular: $\cot\frac{x}{2}$

A) $\frac{1}{m}$ B) $m^2$ C) $m$ D) $\frac{1}{m^2}$ E) $\frac{2}{m}$

**28.-** Si la ecuación: $x^2 - (2\csc\alpha)x + 1 = 0$, calcule una de sus raíces.

A) $\tan\frac{\alpha}{2}$ B) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ C) $\cos\frac{\alpha}{2}$

D) $\sec\frac{\alpha}{2}$ E) $\csc\frac{\alpha}{2}$

**29.-** Si:

$$\cos 8x.\cos 6x.\sec 2x = \csc(Ax) - \csc(Bx),$$

calcule: $\frac{B}{A}$

A) 2 B) 0 C) 0,5 D) 1 E) 1,5

**30.-** Expresar: $\tan\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right)$ en función de: $\tan\frac{\alpha}{2}$ y $\sec\frac{\alpha}{2}$

A) $-\tan\frac{\alpha}{2} + \sec\frac{\alpha}{2}$ D) $-\tan\frac{\alpha}{2} - \sec\frac{\alpha}{2}$

B) $\tan\frac{\alpha}{2} + \sec\frac{\alpha}{2}$ E) $2\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \sec\frac{\alpha}{2}\right)$

C) $\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \sec\frac{\alpha}{2}\right)$

**31.-** Si: $k\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$, siendo $\operatorname{sen}\theta > 0$;

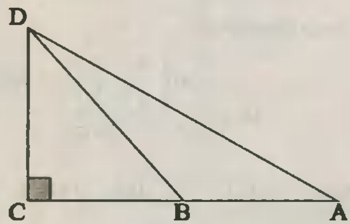
$p = 2\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} - \csc\theta}$ será

A) $\sqrt{(k^2 - k^{-2})}$ B) $k + k^{-1}$ C) $k - k^{-1}$

D) $\sqrt{k + k^{-1}}$ E) $\sqrt{k - k^{-1}}$

## SITUACIONES GRÁFICAS

**32.-** En la figura mostrada, AB = 2 CD, $m\angle CAD = m\angle CDB = \theta$, $m\angle ACD = 90°$. Determine la medida del ángulo "$\theta$"




A) $\frac{\pi}{3}$ *rad*

B) $\frac{\pi}{4}$ *rad*

C) $\frac{\pi}{6}$ *rad*

D) $\frac{\pi}{10}$ *rad*

E) $\frac{\pi}{8}$ *rad*

**33.-** Si $\operatorname{sen} 4x = 0{,}6$, siendo $0 < x < \frac{\pi}{8}$,

calcular $\tan x$.

A) 1 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{10} + 3$

D) $\sqrt{\sqrt{10} + 3}$ E) $\sqrt{10} - 3$

CAP 13

# Identidades Trigonométricas del Arco Triple

Al igual que en arco doble o arco mitad, en arco triple también las relaciones fundamentales se obtienen aplicando las identidades de los arcos compuestos o bien con la fórmula de De Moivre en números complejos así:

$$\text{sen } 3\alpha = \text{sen } (2\alpha + \alpha) = \text{sen } 2\alpha \cos \alpha + \cos \alpha \text{ sen } \alpha$$

$$\text{sen } 3\alpha = 2\text{sen } \alpha \cos \alpha \, . \cos \alpha + (1 - 2 \text{ sen}^2\alpha) \text{ sen } \alpha$$

$$\text{sen } 3\alpha = 2\text{sen } \alpha \, (1 - \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3\alpha$$

$$\text{sen } 3\alpha = 2\text{sen } \alpha - 2\text{sen}^3 \alpha + \text{sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3\alpha$$

$$\text{sen } 3\alpha = 3\text{sen } \alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

Por complejos: $(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \text{ sen } 3\alpha$

Desarrollando el binomio al cubo, luego igualando las partes reales e imaginarias se obtiene:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \qquad \text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3\alpha$$

## 13.1. RELACIONES FUNDAMENTALES

Se tienen las 3 relaciones principales:

$$\textbf{sen } 3\alpha = 3 \textbf{ sen } \alpha - 4 \textbf{ sen}^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3 \tan^2\alpha}$$

## 13.2. RELACIONES AUXILIARES

Se obtienen a partir de las relaciones fundamentales con ayuda de arcos dobles e identidades.

$$4 \text{ sen}^3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - \text{sen } 3\alpha \qquad 4 \cos^3\alpha = 3 \cos \alpha + \cos 3\alpha$$

$$\text{sen } 3\alpha = \text{sen } \alpha \, (2 \cos 2\alpha + 1) \qquad \cos 3\alpha = \cos \alpha \, (2 \cos 2\alpha - 1)$$

$$\text{sen } 3\alpha = 4 \text{ sen } \alpha . \text{sen}(60^\circ - \alpha) . \text{ sen } (60^\circ + \alpha)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha . \cos(60^\circ - \alpha) . \cos (60^\circ + \alpha)$$

$$\tan 3\alpha = \tan \alpha . \tan(60^\circ - \alpha) . \tan (60^\circ + \alpha)$$

Nota: $\boxed{\text{sen } 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$ ; $\boxed{\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}}$


**PROB. 1**

Calcule:

a) $\cos 111^\circ$ b) $\text{sen } 159^\circ$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

a) $\cos 111^\circ = \cos 3(37^\circ) = 4\cos^3 37^\circ - 3\cos 37^\circ$

$$\cos 111^\circ = 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{4}{5}\right) = 4\left(\frac{64}{125}\right) - \frac{12}{5}$$

$$\cos 111^\circ = \frac{256}{125} - \frac{300}{125}$$

$$\cos 111^\circ = \boxed{-\frac{44}{125}}$$

b) $\text{sen } 159^\circ = \text{sen } 3(53^\circ) = 3\text{sen } 53^\circ - 4\text{sen}^3 53^\circ$

$$\text{sen } 159^\circ = 3\left(\frac{4}{5}\right) - 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{12}{5} - \frac{256}{125}$$

$$\text{sen } 159^\circ = \frac{300}{125} - \frac{256}{125}$$

$$\text{sen } 159^\circ = \boxed{\frac{44}{125}}$$

**PROB. 2**

Calcular:

a) $E = \text{sen } 10^\circ \text{ sen } 50^\circ \text{ sen } 70^\circ$

b) $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

c) $Q = \tan 5^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

a) $4E = 4\,\text{sen}10^\circ\,\text{sen}(60^\circ - 10^\circ)\text{sen}(60^\circ + 10^\circ)$

$$4E = \text{sen } 3(10^\circ) = \text{sen } 30^\circ$$

$$4E = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{E = \frac{1}{8}}$$

b) $4P = 4\cos 20^\circ \cos(60^\circ - 20^\circ)\cos(60^\circ + 20^\circ)$

$$4P = \cos 3(20^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$4P = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{P = \frac{1}{8}}$$

c) $Q = \tan 5^\circ \tan(60^\circ - 5^\circ)\tan(60^\circ + 5^\circ)$

$$Q = \tan 3(5^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\boxed{Q = 2 - \sqrt{3}}$$

**PROB. 3**

Determine el valor de:

$$K = \frac{\text{sen}^3 10^\circ + \cos^3 20^\circ}{\text{sen}10^\circ + \cos 20^\circ}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando numerador y denominador por 4, así:

$$K = \frac{4\,\text{sen}^3 10^\circ + 4\cos^3 20^\circ}{4(\text{sen}10^\circ + \cos 20^\circ)}$$

A continuación aplicamos una de las relaciones auxiliares:

$$K = \frac{3\text{sen}10° - \text{sen}30° + 3\cos 20° + \cos 60°}{4(\text{sen}10° + \cos 20°)}$$

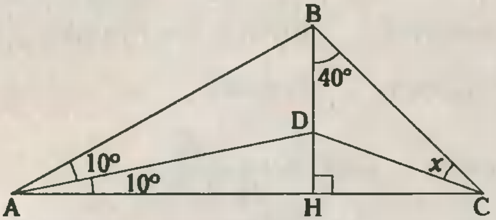
$$K = \frac{3\text{sen}10° + 3\cos 20°}{4(\text{sen}10° + \cos 20°)}$$

Finalmente simplificamos, obteniendo:

$$K = \frac{3(\text{sen}10° + \cos 20°)}{4(\text{sen}10° + \cos 20°)} \quad \therefore \quad \boxed{K = \frac{3}{4}}$$

**PROB. 4**

De la figura que se muestra calcule la medida del ángulo $x$.

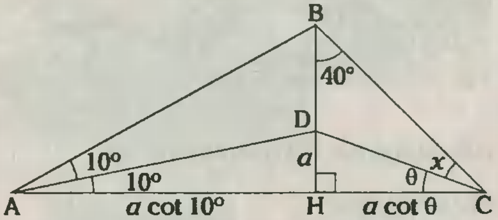



**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

En el ⊿ AHB: $\cot 20° = \dfrac{a\cot 10°}{a\cot\theta\cot 40°}$

$\Rightarrow\ a\cot\theta\cot 20°\cot 40° = a\cot 10°$

Luego: $\cot\theta = \dfrac{\cot 10°}{\cot 20°\cot 40°}$




$\Rightarrow\ \tan\theta = \dfrac{\cot 20°\cot 40°}{\cot 10°}$

Escribiendo en términos de tangentes:

$$\tan\theta = \tan 10°\tan 50°\tan 70°$$

Finalmente tiene la forma:

$$\tan\theta = \tan 10°\tan(60° - 10°)\tan(60° + 10°)$$

$$\tan\theta = \tan 3(10°) \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \tan 30°$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 30° \quad \therefore \quad \boxed{x = 20°}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Al igual que ángulos dobles, cuando se tenga potenciación cúbica, se debe degradar, es decir bajar al exponente de 3 a 1, aplicando las identidades siguientes:*

$$4\,\text{sen}^3 x = 3\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x \qquad 4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

2) *Utilizar las fórmulas anteriores en forma apropiada.*

3) *Aplicar cada una de las relaciones auxiliares presentes a situaciones problémicas específicas.*


***RELACIONES FUNDAMENTALES***

**01.-** Simplificar:

$$W = \frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

**02.-** Simplificar:

$$W = 4\cos x \cdot \cos(60° + x) \cdot \cos(60° - x)$$

A) $\cos 3x$ B) $\cos 2x$ C) $\cos 3x$

D) $\cos 4x$ E) $\cos 6x$

**03.-** Simplificar:

$$W = \frac{\operatorname{sen} 3x . \csc x}{0{,}75 - \operatorname{sen}^2 x} + \frac{3\cos x + \cos 3x}{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}$$

A) $4 + \cot^3 x$ B) $\cot^3 x$ C) $2\cot^3 x$

D) $3\cot^3 x$ E) $4\cot^3 x$

**04.-** Simplificar la expresión:

$$W = \tan x \cdot \left(\frac{\sec^2 x - 4}{3\sec^2 x - 4}\right)$$

A) $\tan x$ B) $\tan 2x$ C) $\cot x$

D) $\tan 3x$ E) $-\tan 3x$

**05.-** Simplificar:

$$W = \frac{\sec^3 x}{\sec 3x} + \frac{\sec^2 x}{\sec 2x} - \frac{8\tan x}{\tan 2x}$$

A) 1 B) 2 C) -2 D) -1 E) 3

**06.-** Simplificar:

$$W = \frac{1 + \sec x + \cos 2x . \sec x}{\tan x + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x . \sec x}$$

A) $0{,}5 \csc x$ B) $\csc x$ C) $2\csc x$

D) $3\csc x$ E) $6\csc x$

**07.-** Si: $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

calcular: $M = 16 \operatorname{sen} 6x$

A) 10 B) 12 C) 15 D) 11 E) 16

**08.-** Si: $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 4$ , $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

calcular: $\tan 3x$

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{2}{11}$

**09.-** Si: $W = 4 - 8\operatorname{sen}^2 9° - 3\sec 18°$,

entonces una expresión equivalente para W será:

A) $\tan 9°$ B) $\tan 18°$ C) $2\tan 18°$

D) $2\tan 9°$ E) $\tan 36°$

**10.-** Si: $3\tan^2 x + 6\tan x - 1 = 2\tan^3 x$,

calcular: $\tan 6x$

A) 4/3 B) 3/4 C) 1/2 D) -1/2 E) 2/3

### *RELACIONES AUXILIARES*

**11.-** Calcular el valor aproximado de la expresión:

$$W = \tan 9° + \tan 27° + \tan 63° + \tan 81°$$

A) $4\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{5}$

**12.-** Calcule el valor aproximado de la expresión:

$$W = \frac{\tan 72° + \tan 36°}{\cot 72° + \cot 36°}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

**13.-** Calcule el valor de:

$$W = \cos 380°.\cos 140°.\cos 260°$$

A) 1/8 B) 1/2 C) 1/4 D) 1/8 E) 1/16

**14.-** Calcule el valor de:

$$M = 3\sec^2 10°.\ \sec^2 50°.\ \csc^2 20°$$

A) 16 B) 18 C) 42 D) 36 E) 64

**15.-** Calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{sen } 22°.\text{sen } 82°.\text{sen } 38°}{\cos^4 12° - \text{sen}^4 12°}$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/8 D) 1/16 E) 1/32

**16.-** Simplificar:

$$W = \left(\frac{2\cos 6x + 1}{2\cos 6x - 1}\right).\ \tan 3x$$

A) $\tan x$ B) $\tan 3x$ C) $\tan 6x$

D) $\tan 8x$ E) $\tan 9x$

**17.-** Simplificar:

$$W = \frac{4\text{sen}x}{1 + 2\cos x} + 3\cot\left(\frac{3x}{2}\right)$$

A) $\cot x$ B) $\cot \frac{x}{2}$ C) $2\cot x$

D) $\tan \frac{x}{2}$ E) $2\tan \frac{x}{2}$

**18.-** En la siguiente identidad. determine el valor de M:

$$M + \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = \frac{\cos 3x}{\cos x}\ ,\ x \neq \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

A) 0 B) 1 C) -2 D) 2 E) 1

**19.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W = \tan 10°(3\cos 10° - 2\text{ sen } 10°\ .\ \cos 70°)$$

A) 1 B) 1/4 C) 1/6 D) 1/8 E) 1/2

### *PROBLEMAS CONDICIONALES*

**20.-** En la siguiente igualdad, se tiene una identidad trigonométrica:

$$\frac{A\text{sen}4x + B\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = \text{sen } 3x.\cot x + \cos 3x.\tan x$$

Calcula: A + B.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 4

**21.-** Si se cumple: $\sec 2x = \dfrac{\text{sen}3x - \text{sen}x}{\text{sen}x}$,

calcular: $\cos 4x$

A) 1 B) 1/2 C) $\sqrt{2}/2$ D) 0 E) $\sqrt{3}/3$

**22.-** Si: $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = \dfrac{1}{3}$, al calcular $W = \cos 4x$, se obtiene:

A) 1/3 B) -1/3 C) -2/3 D) 2/3 E) -7/9

**23.-** Si: $a\csc x = 3 - 4\text{ sen}^2 x$

$b\sec x = 4\cos^2 x - 3$, calcular: "$a^2 + b^2$"

A) -2 B) 0 C) 0,5 D) -1 E) 2

**24.-** Si: $\dfrac{\text{sen}3x+\text{sen}^3x}{\cos 3x-\cos^3x}=\dfrac{1}{2}$, calcular: $\tan x$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) -1 E) $-\sqrt{3}$

**25.-** Si: $\text{sen}(60^\circ - x)=\dfrac{1}{3}$,

calcular: $W = -\cos 6x$

A) $\dfrac{41}{47}$ B) $\dfrac{5}{67}$ C) $\dfrac{329}{729}$ D) $\dfrac{63}{65}$ E) $\dfrac{121}{136}$

**26.-** Si: $\dfrac{1-\cos 9\alpha}{1-\cos 3\alpha}=(x^3-3x+1)^2$,

entonces el valor de "$x$" es:

A) $2\cos\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\text{sen}\,\alpha$

D) $2\,\text{sen}\,\alpha$ E) $3\,\text{sen}\,\alpha$

**27.-** Si: $\dfrac{\text{sen}3x}{\sec x-\cos x}+\dfrac{\cos 3x}{\csc x-\text{sen}x}=m,$

calcula: "$\cot 2x$"

A) $m/2$ B) $m/3$ C) $m/4$ D) $m/6$ E) $2/m$

**28.-** Si: $\text{sen}\,x+\cos x=k,$

calcular: $W=\cos 3x-\text{sen}\,3x$

A) $k$ B) $3k-2k^3$ C) $2k-3k^3$

D) $3k-k^3$ E) $3k-4k^3$

**29.-** Si: $\tan^2\phi-\sqrt{5}\tan\phi-1=0$, calcular: $\tan 6\phi$

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{35}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{11}$

D) $\dfrac{11\sqrt{5}}{35}$ E) $\dfrac{22\sqrt{5}}{35}$

**30.-** Si: $\cot x = k.\cot 3x$,

calcular: $W=\dfrac{\csc x}{\csc 3x}$

A) $k$ B) $\dfrac{k}{k+1}$ C) $\dfrac{k}{k-1}$

D) $\dfrac{2k}{k-1}$ E) $\dfrac{k}{2k-1}$

**31.-** Si: $\tan x=(2+\sqrt{3}).\tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$,

calcular $\text{sen}(x+30^\circ)$.

A) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{24}{25}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**32.-** Si: $3\,\text{sen}\,2x+2\cos 2x=2;\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

calcule: $\tan 3x$

A) $-\dfrac{9}{46}$ B) $\dfrac{3}{26}$ C) $\dfrac{9}{46}$

D) $\dfrac{7}{43}$ E) $-\dfrac{7}{43}$

**33.-** Si: $\tan(x+15^\circ)=\dfrac{2}{3}$, calcular: $\tan 3x$

A) $\dfrac{1}{37}$ B) $\dfrac{5}{37}$ C) $\dfrac{11}{37}$

D) $\dfrac{55}{37}$ E) $\dfrac{33}{37}$

**34.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W=\left(\sqrt[3]{1-6\,\text{sen}\,10^\circ}\right).\sec 80^\circ$$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) -2

**35.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W = 2\cos 160°.(2\,\text{sen}\,20° - 1)(2\,\text{sen}\,20° + 1)$$

A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) $\sqrt{2}$

**36.-** Calcular el valor de:

$$M = \frac{(3\cos 65° - 4\,\text{sen}^3 25°)}{\text{sen}^2 70° - \text{sen}^2 20°}\ \text{sen}\,50°$$

A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{24}{25}$ E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**37.-** Calcular el valor de:

$$M = \frac{4\cos 18° - 3\sec 18°}{\tan 18°}$$

A) 1 B) 2 C) 1,5 D) 2,5 E) 3

**38.-** Calcular el valor de:

$$M = \frac{\sqrt[3]{1 + 6\cos 20°}}{2\cos 20°}$$

A) 1 B) 0 C) 0,5 D) 1.5 E) 3

**39.-** Si $a \neq b$, eliminar el arco "$x$" de:

$$\begin{cases} (a+b)\tan x = (a-b)\tan 3x & \dots (1) \\ a\,\text{sen}^2 x = b\cos 6x & \dots (2) \end{cases}$$

A) $b^2 - a^2 = ab$ D) $8b^2 - 2a^2 = ab$

B) $8b^2 - a^2 = ab$ E) $6a^2 - 8b^2 = ab$

C) $8b^2 - 2ab = a^2$

## *SITUACIONES GRÁFICAS*

**40.-** En la figura mostrada:

$m\angle EAD = 7$ , $m\angle ECB = 53$ ,

$m\angle ABE = 67$ , $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ,

$ED = a$ , $EC = b$ ,

calcule: $\frac{a}{b}$

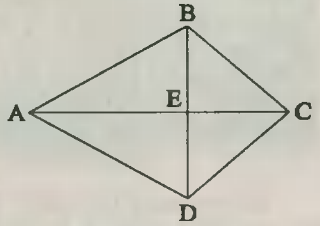
A) tan 120°

B) tan 240°

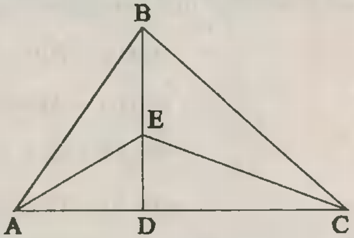
C) tan 30°

D) tan 54°

E) tan 21°




**41.-** En la figura mostrada, calcular: "$x$"




Si: $m\angle BAE = 54$ , $m\angle EAD = 27$ ,

$m\angle BCE = x$ , $m\angle CED = 57 + x$ ,

$m\angle ADE = 90$

A) 10° B) 20° C) 15° D) 25° E) 30°

**42.-** De la figura mostrada, BC = 3, CD = 4, $m\angle BAC = m\angle CAD = m\angle DAE; m\angle ABE = 90$. Determine el área de la región triangular ABE.

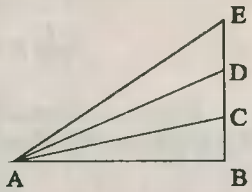
A) 61 $u^2$

B) 61,15 $u^2$

C) 63,25 $u^2$

D) 54,16 $u^2$

E) 59,53 $u^2$



# Transformaciones de Sumas o Diferencias a Productos

CAP 14

Es frecuente encontrar situaciones que involucran razones trigonométricas senos y/o cosenos de ángulos (arcos) diferentes, cuya simplificación o tratamiento, requiere de la habilidad de saber transformar las expresiones de sumas o restas a producto.

Las relaciones que permiten realizar dichas transformaciones provienen de:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}$$

Si sumamos y/o restamos miembro a miembro sen$(\alpha + \beta)$ con sen $(\alpha - \beta)$ y cos $(\alpha - \beta)$ con $(\alpha + \beta)$ y haciendo cambios de variables convenientes, como:

$$\alpha + \beta = A \qquad \alpha - \beta = B$$

De manera que: $\alpha = \dfrac{A+B}{2} \quad \wedge \quad \beta = \dfrac{A-B}{2} \ldots \ (*)$

Por ejemplo si sumamos sen $(\alpha + \beta)$ + sen $(\alpha - \beta)$ , tendremos:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\,\alpha\cos\beta \qquad \ldots \ (**)$$

Sustituyendo (*) en (**), obtenemos:

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

En forma análoga se obtienen las otras relaciones. Si A y B son dos ángulos cualesquiera, se cumplen las siguientes transformaciones:

$$\textbf{sen}\,A + \textbf{sen}\,B = 2\,\textbf{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\textbf{sen}\,A - \textbf{sen}\,B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\textbf{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\,\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

## 14.1. RELACIONES DE TRANSFORMACIÓN CONDICIONADAS

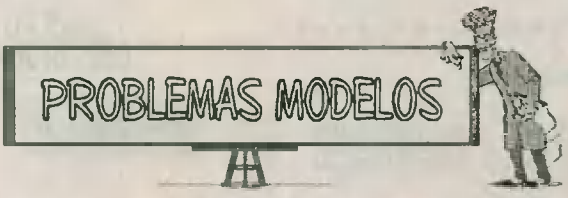
En un triángulo ABC se cumple aplicando las relaciones de transformaciones, y teniendo en cuenta que $A + B + C = 180°$ se obtiene:

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B + \text{sen}\,C = 4\cos\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}\,.\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2} + 1$$

$$\text{sen}\,2A + \text{sen}\,2B + \text{sen}\,2C = 4\,\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}\,B\,.\,\text{sen}\,C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\,.\cos B\,.\cos C - 1$$




**PROB. 1**

Si: $36\theta = \pi$; calcule:

$$K = \frac{\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta + \cos 10\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Agrupando convenientemente, para luego transformar a producto.

$$K = \frac{(\cos 10\theta + \cos 2\theta) + (\cos 8\theta + \cos 4\theta)}{(\cos 4\theta + \cos 2\theta)}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2\cos 6\theta \cos 4\theta + 2\cos 6\theta \cos 2\theta}{(\cos 4\theta + \cos 2\theta)}$$

$$K = \frac{2\cos 6\theta\cancel{(\cos 4\theta + \cos 2\theta)}}{\cancel{(\cos 4\theta + \cos 2\theta)}}$$

$\therefore \quad K = 2\cos 6\theta$

Pero como: $\quad 36\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad 6\theta = \dfrac{\pi}{6}$

Luego $\quad K = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \quad \boxed{K = \sqrt{3}}$

**PROB. 2**

Encuentre el valor de:

$$N = \frac{\text{sen}\,40° + \text{sen}\,20°}{\cos 40° + \cos 20°} + \frac{\text{sen}\,50° + \text{sen}\,10°}{\cos 50° + \cos 10°}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Transformando a producto

$$N = \frac{2\text{sen}30°\cos10°}{2\cos30°\cos10°} + \frac{2\text{sen}30°\cos20°}{2\cos30°\cos20°}$$

Al simplificar obtenemos:

$\Rightarrow \quad N = \tan 30° + \tan 30° \quad \Rightarrow \quad N = 2\tan30°$

Finalmente:

$$N = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{N = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

**PROB. 3**

Si $\theta = \frac{\pi}{40}$ , determinar el valor de:

$$P = \frac{\text{sen}6\theta - \text{sen}2\theta}{\cos2\theta - \cos6\theta} + \frac{\text{sen}14\theta - \text{sen}10\theta}{\cos14\theta + \cos10\theta}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Transformando a producto:

$$P = \frac{2\cos4\theta\,\text{sen}2\theta}{-2\text{sen}4\theta\,\text{sen}(-2\theta)} + \frac{2\text{sen}2\theta\cos12\theta}{2\cos12\theta\cos2\theta}$$

$$P = \frac{\cos4\theta\,\text{sen}2\theta}{\text{sen}4\theta\,\text{sen}2\theta} + \frac{\cos12\theta\,\text{sen}2\theta}{\cos12\theta\cos2\theta}$$

Al simplificar obtenemos:

$$\Rightarrow \quad P = \cot 4\theta + \underbrace{\tan 2\theta}$$

Utilizando arco mitad

$$\Rightarrow \quad P = \cot 4\theta + \csc 4\theta - \cot 4\theta$$

$$P = \csc 4\theta$$

Pero: $\quad \theta = \frac{\pi}{40} \quad \Rightarrow \quad 4\theta = \frac{\pi}{10}$

$$4\theta = 18° \quad \Rightarrow \quad P = \csc18° = \frac{1}{\text{sen}18°}$$

Reemplazando su valor numérico tendremos:

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$\therefore \quad \boxed{P = \sqrt{5} + 1}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Cuando se tiene una suma o una diferencia de dos senos o dos cosenos, se debe transformar a producto.*

2) *Cuando se tiene sumas o diferencias de varios senos o cosenos, se agrupa convenientemente, para luego transformar a producto.*

3) *Para transformar a productos no interesa el orden de los ángulos (si uno es mayor o menor que el otro), es suficiente con aplicar las propiedades de transformación.*


***TRANSFORMACIONES A PRODUCTO***

**01.-** Reducir:

$$M=\frac{\cos 15x+10\cos 10x+\cos 5x}{\operatorname{sen}15x+10\operatorname{sen}10x+\operatorname{sen}5x}$$

A) $\cot x$ B) $\cot 2x$ C) $\cot 4x$

D) $\cot 5x$ E) $\cot 10x$

**02.-** Reducir:

$$M=\frac{\cos(45^\circ+x)-\cos(45^\circ-x)}{\operatorname{sen}(120^\circ+x)-\operatorname{sen}(120^\circ-x)}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 0 D) 0,5 E) 2

**03.-** Simplificar:

$$M=\frac{1{,}5+\sqrt{3}\operatorname{sen}2x}{\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\right).\tan(x+30^\circ)}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 1,5 E) $\sqrt{3}$

**04.-** Reducir:

$$W=\cos 10x+\cos 8x+6\cos^2 2x+3\cos 2x-3-8\cos^3 3x.\cos x$$

A) 0 B) 1 C) 0,5 D) 2 E) - 0,5

**05.-** Reducir:

$$M=\frac{2(\operatorname{sen}\,2x+\operatorname{sen}\,2y)}{1+\cos\,2x+\cos\,2y+\cos(2x-2y)}$$

A) $\tan x$ B) $\tan y$ C) $\tan x - \tan y$

D) $\tan x + \tan y$ E) $\tan x \,.\, \tan y$

**06.-** Simplificar:

$$W=\frac{(\tan\,2x+\cot\,x-4\cos^2 x)(\operatorname{sen}\,3x-\operatorname{sen}\,x)}{[2\operatorname{sen}\,x(\operatorname{sen}\,x+\cos\,x)-1]^2}$$

A) $\cos x$ B) $2\cos x$ C) $\operatorname{sen} x$

D) $2\operatorname{sen} x$ E) $\cos 2x$

**07.-** Transformar a producto:

$$M=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 7x+2\operatorname{sen} 3x+2\operatorname{sen} 5x$$

A) $2\operatorname{sen} 2x \cot x \,.\, \operatorname{sen} 3x$

B) $2\operatorname{sen} 2x \,.\, \cot 3x \,.\, \operatorname{sen} 6x$

C) $2\operatorname{sen} 4x \,.\, \cot x \,.\, \cos 3x$

D) $2\operatorname{sen} 4x \,.\, \cot 2x \,.\, \operatorname{sen} 3x$

E) $2\operatorname{sen} 4x \;\cot x \,.\, \operatorname{sen} 3x$

**08.-** Calcular: $W=\dfrac{\cos 12^\circ+\operatorname{sen}30^\circ+\cos 84^\circ}{\cos 24^\circ+\operatorname{sen}42^\circ}$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) 2

**09.-** Calcule:

$$W=\cos^2 10^\circ+\operatorname{sen}^2 20^\circ-\operatorname{sen}20^\circ.\cos 10^\circ$$

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 3/4

**10.-** Calcule el valor de la expresión:

$$W=\frac{2\operatorname{sen}50^\circ-1}{\tan 35^\circ+\cot 35^\circ}$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1 D) 0 E) -1/4

**11.-** Halle "$m$" de la identidad:

$$\frac{\text{sen}4x+\text{sen}6x}{\text{sen}2x}=\frac{\text{sen }mx}{\text{sen }x}$$

A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 0,5

**12.-** Calcular el valor de:

$$M=\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$$

A) 0 B) 0,5 C) 1 D) -1 E) -0,5

**13.-** Determinar el valor de "M" si:

$$\frac{\text{sen}5x+\text{sen}6x+\text{sen}7x}{\text{sen}x+\text{sen}2x+\text{sen}3x}=M\,.\cos 4x+1$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0,5

**14.-** Calcular el valor de:

$$M=\frac{\text{sen}\alpha+\text{sen}5\alpha+\text{sen}9\alpha}{\cos\alpha+\cos5\alpha+\cos9\alpha}\ \text{para } \alpha=10^g$$

A) 2 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

***PROBLEMAS CONDICIONALES***

**15.-** Si $\alpha=\dfrac{\pi}{21}$,

calcule: $W=\dfrac{\text{sen }23\alpha-\text{sen }7\alpha}{\text{sen }2\alpha+\text{sen }14\alpha}$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 0,5 E) -0,5

**16.-** Si: $\dfrac{\cos a+\text{sen } b}{\text{sen } a+\cos b}=k$, calcular: $\tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

A) $k$ B) $\dfrac{1}{k}$ C) $\dfrac{2}{k}$ D) $\dfrac{1+k}{1-k}$ E) $\dfrac{1-k}{1+k}$

**17.-** Si: A + B + C = π, expresar como producto:

$$W=\text{sen }4A+\text{sen }4B+\text{sen }4C$$

A) 4 sen 2A . sen 2B . sen 2C

B) 2 sen 2A . sen 2B . sen 3C

C) -4 sen 2A . sen 2B . sen 2C

D) -2 sen 2A . sen 2B . sen 2C

E) 4 cos 2A . cos 2B . cos 2C

**18.-** Si: $\tan x=\dfrac{1}{3}$, reducir:

$$M=\frac{\text{sen}5x+\text{sen}3x}{\cos5x+\cos3x}$$

A) $\dfrac{7}{24}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{24}{7}$

**19.-** Si: $\dfrac{\cos8x-\cos7x}{\cos3x-\cos2x}=P\cos 5x+Q$,

calcular de : P + Q

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3,5

**20.-** Si: $\text{sen } x+\text{sen } y=a$

$\cos x+\cos y=b$,

calcular: $\text{sen }(x+y)$

A) $\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{b}{a}$ C) $\dfrac{a+1}{a-b}$

D) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{2ab}{b^2+a^2}$

**21.-** Si: $\dfrac{\text{sen}5x}{\text{sen}3x}=m$, calcular : $\dfrac{\tan4x}{\tan x}$

A) $\dfrac{1}{m}$ B) $\dfrac{2}{m}$ C) $\dfrac{m+1}{m}$ D) $\dfrac{m-1}{m+1}$ E) $\dfrac{m+1}{m-1}$

**22.-** Si:

$P.\cos(Qx).\cos^R(Sx)=\cos 8x+\cos 4x-4\,\text{sen}^2x+2$, determine el valor de: (P + Q) - (R + S)

A) 0 B) 0,5 C) -1 D) -0,5 E) 1

**23.-** Si: $\dfrac{\cos47^\circ-\cos73^\circ}{\text{sen}43^\circ+\text{sen}17^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,.\,k$ , calcular:

$$W=\tan 32^\circ$$

A) $k$ B) $\dfrac{1}{k}$ C) $\dfrac{2}{k}$ D) $\dfrac{3+k}{3-k}$ E) $\dfrac{3-k}{3+k}$

**24.-** Si: $A+B+C=\pi$, calcular "M" de:

$$\text{sen } A + \text{sen } B - \text{sen } C = M \cdot \text{sen}\frac{A}{2} \cdot \text{sen}\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 8 E) 0,5

**25.-** Si: $A+B+C=\pi$, simplifica:

$$W=\frac{\text{sen}A.\sec\frac{A}{2}+(\text{sen}B+\text{sen}C).\tan\frac{A}{2}}{\text{sen}B-\text{sen}C},$$

A) $\cot\frac{B}{2}$ B) $\cot\frac{C}{2}$ C) $\cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$

D) $\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)$ E) $\cot\left(\frac{B-C}{4}\right)$

**26.-** Si: $\text{sen } x + \text{sen } y = m$; $\cos x + \cos y = n$; $m \neq 0, n \neq 0$. Calcular: $W = \cos(x+y)$

A) $n$ B) $\frac{n}{m}$ C) $\frac{m}{n}$ D) $\frac{n^2+m^2}{n^2-m^2}$ E) $\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$

**27.-** Si: $\tan\theta=\frac{2\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{\text{sen}40^\circ}$

determinar: $\text{sen }\theta$, si $\theta \in$ III C

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**28.-** Si: $\sec(x+a)+\sec(x-a)=2\sec x$, calcular: $\cos^2 x$ en termino de "$a$"

A) $\cos\frac{a}{2}$ B) $2\cos\frac{a}{2}$ C) $\text{sen}^2\frac{a}{2}$

D) $\cos^2\frac{a}{2}$ E) $2\cos^2\frac{a}{2}$

**29.-** Si "$\theta$" y $\phi$ son las raíces de la ecuación:

$a\,\text{sen}\,x + b.\cos x = c$, calcular $W=\tan\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$

A) $a$ B) $b$ C) $\frac{b}{a}$ D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a}{b}$

**30.-** Si: $\text{sen }5x + \text{sen }3x + \text{sen }x = M\,\text{sen}^5 x + N\,\text{sen}^3 x + P\,\text{sen }x$, calcular : $W = P - N - 2M$

A) 0 B) 0,5 C) -0,5 D) 1 E) -1

**31.-** Si:

$W=\text{sen}(x+20^\circ)+\text{sen}(x-50^\circ)$, $x\in[0;360^\circ]$,

determine un valor de "$x$" que maximice dicha expresión.

A) 105° B) 120° C) 110° D) 108° E) 115°

## *EXPRESIONES EQUIVALENTES*

**32.-** Si: $W = 4\,\text{sen}\,x + \sec x$, determine una expresión equivalente de W en factores.

A) $4\cos x\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

B) $4\csc x\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

C) $4\cot x\,.\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

D) $4\sec x\,.\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

E) $4\sec x\,.\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

**33.-** Si: $W = 4\,\text{sen}\,40^\circ - \sqrt{3}$, determine una expresión equivalente de W.

A) tan 10° B) tan 20° C) tan 30°

D) tan 35° E) tan 40°

**34.-** Expresa como un monomio:

$$M = 1 + 4\cos 20^\circ$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}\cot 10^\circ$ C) $\sqrt{3}\cot 40^\circ$

D) $\sqrt{3}\cot 40^\circ$ E) $\sqrt{3}\,.\cot 20^\circ$

**35.-** Si: $W = 3 + \sqrt{3}$, determine una expresión trigonométrica equivalente para W.

A) $\sqrt{6}$ sen 75°　　B) $2\sqrt{6}$ sen 15°

C) $\sqrt{6}$ sen 15°　　D) $\sqrt{3}$ sen75°

E) $2\sqrt{6}$ sen 75°

**36.-** Si: $W = 1 + \cos 2x + \cos x$, determine una expresión equivalente de W en factores:

A) $4 \cos x \cos \frac{x}{2}$　　B) $4 \text{ sen } x \cos \frac{x}{2}$

C) $4\cos x \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$　　D) $4\cos x \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

E) $4 \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

**37.-** Factoriza:　　$1 + \text{sen } 14° + \cos 14°$

A) $2\sqrt{2} \cos 38°$　　D) $2\sqrt{3} \cos 38° \cos 7°$

B) $\sqrt{2} \cos 38° \cos 7°$　　E) $2\sqrt{2} \cdot \cos 38° \cdot \cos 7°$

C) $\sqrt{3} \cos 38° \cos 7°$

**38.-** Eliminar el arco "$x$" de:

$$\frac{\text{sen}5x}{a} = \frac{\text{sen}3x}{b} = \frac{\text{sen}x}{c}$$

A) $c(a+c) = b(b+c)$　　D) $c(a - c) = b(b+c)$

B) $c(a+b) = b(a - c)$　　E) $c(a+c) = b(b - c)$

C) $c(c+a) = b(b+c)$

**39.-** Elimine el arco "$x$" de:

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = m + \text{sen } x \quad \ldots (1)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = n - \cos x \quad \ldots (2)$$

A) $\sqrt{2}\, n = m$　　B) $(2+\sqrt{2})n = m$

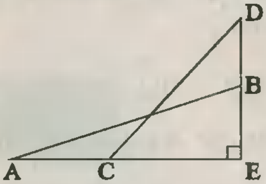
C) $(2-\sqrt{2})n = m$　　D) $(2+\sqrt{3})n = m$

E) $(2-\sqrt{3})n = m$

## *SITUACIONES GRÁFICAS*

**40.-** En la figura mostrada, AB = CD, AC = 3, BD = 4, $m\angle EAB = \alpha$, $m\angle ECD = \theta$.

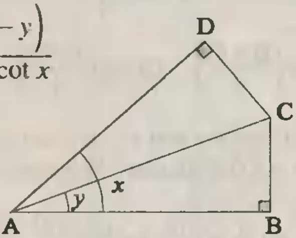
Calcule: $\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$




A) $\frac{3}{4}$　B) $\frac{4}{5}$　C) $\frac{1}{2}$　D) $\frac{1}{3}$　E) $\frac{3}{5}$

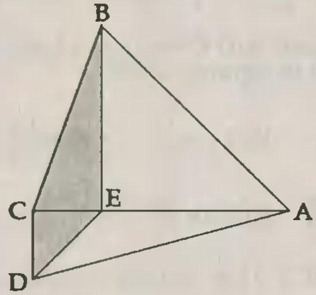
**41.-** De la figura mostrada, DC = 2 CB, calcular:

$$W = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}-y\right)}{\csc x - \cot x}$$




A) 1　B) $\frac{1}{2}$　C) $\frac{1}{4}$　D) $\frac{1}{6}$　E) $\frac{1}{3}$

**42.-** En la figura mostrada, ABCD es un cuadrilátero, $m\angle DAE = x$, $m\angle EAB = 3x$. $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ ; $\overline{DC} \perp \overline{CA}$ ; AB = AD = $k$. Determine el área de la región sombreada, en términos de «$k$» y «$x$».




A) $k \text{ sen}^3 2x$　　B) $2k \text{ sen}^3 2x$　　C) $k^2 \text{ sen } 2x$

D) $2k^2 \text{ sen}^3 2x$　　E) $k^2.\text{sen}^3 2x$

CAP 15

# Transformaciones de Producto a Sumas o Diferencias

Al igual que en las transformaciones de sumas o diferencias a productos, también es importante las transformaciones de productos a sumas o diferencias, se obtienen a partir de:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Se obtienen sumando o restando senos con senos y cosenos con cosenos, así por ejemplo:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Es decir: $$2\,\text{sen}\,\alpha \cos\beta = \text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)$$

En forma similar se deducen las otras relaciones de transformación:

Sean $x$ e $y$ dos ángulos cualesquiera, se cumple las siguientes transformaciones:

$$\mathbf{2\,sen\,x \,.\, cos\,y = sen\,(x + y) + sen\,(x - y)}$$

$$\mathbf{2\,cos\,x \,.\, sen\,y = sen\,(x + y) - sen\,(x - y)}$$

$$\mathbf{2\,cos\,x \,.\, cos\,y = cos\,(x + y) + cos\,(x - y)}$$

$$\mathbf{2\,sen\,x \,.\, sen\,y = cos\,(x - y) - cos\,(x + y)}$$


**PROB. 1**

Reducir a su mínima expresión: $K = \cos 3x \operatorname{sen} x - \cos 4x \operatorname{sen} 2x + \cos 5x \operatorname{sen} x$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando por 2 ambos miembros, luego transformando a sumas o diferencias:

$$2K = 2 \cos 3x \operatorname{sen} x - 2\cos 4x \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 5x \operatorname{sen} x$$

$$2K = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x - (\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 2x) + \operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x$$

Al efectuar como sigue tendremos:

$$2K = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x$$

$$2K = 0$$

Finalmente: $K = 0$

**PROB. 2**

Calcule: $W = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando por $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$ a ambos miembros:

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} . W = 2\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2\cos \frac{3\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + 2\cos \frac{5\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$$

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} . W = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{6\pi}{7} - \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7}$$

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} . W = \operatorname{sen} \frac{6\pi}{7}$$

Pero: $\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} = \operatorname{sen} \frac{6\pi}{7}$$

Luego tendremos: $2\,\text{sen}\frac{\pi}{7}\,.\,W = \text{sen}\frac{\pi}{7}$

Finalmente: $\boxed{W = \frac{1}{2}}$

**PROB. 3**

De la siguiente igualdad: $4\cos x . \cos 3x + 1 = \dfrac{\text{sen}(Px)}{\text{sen}\,x}$ ; calcule el valor de "P".

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando a ambos miembros por sen $x$.

$$2.\underbrace{2\text{sen}x\cos x}_{\text{sen}2x}\cos 3x + \text{sen}\,x = \text{sen}\,(Px)$$

Luego: $2.\ \text{sen}\,2x\cos 3x + \text{sen}\,x = \text{sen}\,(Px)$

Transformando a sumas: $\text{sen}\,5x - \text{sen}\,x + \text{sen}\,x = \text{sen}\,(Px)$

$$\text{sen}\,5x = \text{sen}\,Px$$

Al comparar obtenemos: $\boxed{P = 5}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

**1)** *Cuando hay productos de 2 senos o 2 cosenos o un seno con un coseno, se debe transformar a sumas o diferencias.*

**2)** *Necesariamente para realizar la transformación, debe llevar un coeficiente 2; Si no tiene hay que multiplicar.*

**3)** *En las transformaciones a sumas o diferencias, no interesa cual de los ángulos es el mayor o menor, es suficiente con aplicar convenientemente las fórmulas de transformación de producto a suma o diferencia.*


***APLICACIONES DIRECTAS***

**01.-** Simplificar:

$$W = \frac{2\cos^3 x - \cos 2x.\cos x + \cos x}{8\cos^4 x - 6\cos^2 x}$$

A) sec $3x$ B) csc $3x$ C) sec $2x$

D) csc $2x$ E) sec $4x$

**02.-** Reducir a un monomio la siguiente expresión:

$$W = \text{sen } 3x(3 \text{ sen } 3x - \text{sen } 9x + 4 \text{ sen } 3x.\cos^2 3x)$$

A) sen $3x$ B) 4 $\text{sen}^2 3x$ C) $\text{sen}^2 3x$

D) $\text{sen}^2 x$ E) 4 $\text{sen}^2 x$

**03.-** Reducir a un monomio la siguiente expresión:

$$W = 2 \cos x. (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos^2 x)$$

A) $\text{sen}^6 3x$ B) 4 $\text{sen}^4 x$ C) 8 $\cos^4 x$

D) 16 $\cos^6 x$ E) 32 $\cos^6 x$

**04.-** Simplificar: $M = \dfrac{2\text{sen}15x.\text{sen}x}{2\cos 10x + 1} + \cos 6x$

A) cos $x$ B) cos $2x$ C) cos $3x$

D) cos $4x$ E) cos $6x$

**05.-** Reducir:

$$M = 2 \cos 6x + 2 \cos 4x + 2 \cos 2x - \text{sen } 7x.\csc x$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 0,5 E) -0,5

**06.-** Simplificar:

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}7x}{\text{sen}x} - \cos 2x - 2 \cos 5x.\cos x$$

A) 0 B) -1/2 C) 1/2 D) 1 E) -1

**07.-** Encontrar el valor de: "α", si:

$$\cos 12°. \cos 60°.\sec 72° - \cos 24° = \frac{\text{sen}2\alpha.\cos\alpha}{\text{sen}3\alpha}$$

A) 2° B) 3° C) 4° D) 5° E) 6°

***PROBLEMAS CONDICIONALES***

**08.-** Si: cos A = cos B. cos C ,

reducir: $W = \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) . \tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

A) $\tan^2\left(\dfrac{A}{2}\right)$ B) $\tan^2\left(\dfrac{B}{2}\right)$ C) $\tan\left(\dfrac{C}{2}\right)$

D) $\tan\left(\dfrac{A}{2}\right)$ E) $\tan^2\left(\dfrac{C}{2}\right)$

**09.-** Si $60x = 7\pi$, calcular el valor aproximado de:

$$W = \tan(x+y) - \frac{\sec x.\text{sen}y}{\cos(x+y)}$$

A) $\dfrac{44}{117}$ B) $\dfrac{17}{44}$ C) $\dfrac{44}{17}$ D) $\dfrac{117}{44}$ E) $\dfrac{131}{53}$

**10.-** Si: sen $7x$ = 2 sen $x$, calcular:

$$W = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$$

A) 0 B) -1 C) 1 D) 1/2 E) -1/2

**11.-** Si: $\tan(\alpha+\theta)+\tan(\alpha-\theta)=2$, calcular:

$$M=\operatorname{sen}4\alpha-\operatorname{sen}^2 2\theta$$

A) 1 B) -1 C) 0,5 D) -0,5 E) 0

**12.-** Si en un triángulo ABC se cumple:

$\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C=\cos^2\left(\dfrac{A}{2}\right)$, entonces dicho triángulo es:

A) isósceles B) equilátero C) rectángulo

D) acutángulo E) oblicuángulo

**13.-** Si:

$\cos\dfrac{4\pi}{7}.\tan\dfrac{6\pi}{7}+2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{7}=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{7}(W-1)$,

entonces W es igual a:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 0,5

**14.-** Si: $\tan 3x=2$, calcular

$$W=(\cos 3x+2\cos x)(\operatorname{sen}3x-2\operatorname{sen}x)$$

A) 0 B) 1/5 C) 1 D) 2/5 E) -1

**15.-** Si: $\dfrac{\tan x}{\tan\alpha}=\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$,

calcular: $W=\operatorname{sen}(3x+\alpha).\csc(x-\alpha)$:

A) 3/2 B) 5/2 C) 7 D) 3 E) 5

**16.-** Si: $\cos x.\cos y.\cos z=m$; $x+y+z=2\pi$, entonces al calcular $W=\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2y+\operatorname{sen}^2z$, se obtiene:

A) $m$ B) $2m$ C) $2m-1$

D) $2(1+m)$ E) $2(1-m)$

**17.-** Si: $\dfrac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}(x+y)}=3$, $\tan\dfrac{x}{2}=P$, $\tan\dfrac{y}{2}=Q$, entonces al calcular: P.Q se obtiene:

A) 0 B) -1/2 C) 1/2 D) 1 E) -1

**18.-** Si:

$32\operatorname{sen}^6x=M+N\cos 2x+P\cos 4x+Q\cos 6x$,

entonces el valor de: $M+N+P+Q$ es:

A) 0 B) 1 C) -1 D) 0,5 E) -0,5

**19.-** Si: $M\operatorname{sen}x+N\operatorname{sen}3x+P\operatorname{sen}5x=8\operatorname{sen}^5x$, entonces el valor de: $M+N+P$ es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**20.-** Si: $W=2\cos 10^\circ.\sec 20^\circ-\sqrt{3}$, entonces una expresión equivalente de W será:

A) tan 10° B) tan 15° C) tan 20°

D) tan 25° E) tan 35°

**21.-** Si: $P\operatorname{sen}25^\circ-Q\operatorname{sen}21^\circ=\cos 16^\circ.\cos 13^\circ-\cos 59^\circ.\cos 20^\circ$, entonces al calcular: P + Q se obtiene:

A) 0 B) 1 C) -1/2 D) 1/2 E) -1

**22.-** Si: $W=4\cos 3x.\cos x+1$, entonces una expresión equivalente de W en factores será:

A) $\operatorname{sen}5x.\sec x$ D) $\operatorname{sen}3x.\sec x$

B) $\operatorname{sen}5x.\csc x$ E) $\operatorname{sen}5x.\operatorname{sen}x$

C) $\operatorname{sen}3x.\csc x$

### *VALOR NUMÉRICO*

**23.-** Calcular :

$$W=\cot 19^\circ-\sqrt{2}\operatorname{sen}26^\circ.\csc 19^\circ$$

A) 0 B) -1 C) 1/2 D) -1/2 E) 1

**24.-** Calcule el valor de:

$$M=\frac{2\operatorname{sen}40^\circ(\operatorname{sen}50^\circ-2\operatorname{sen}10^\circ.\cos 40^\circ)}{\operatorname{sen}80^\circ-\operatorname{sen}20^\circ}$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 0,5 E) -0,5

**25.-** Calcular el valor de:

$$M = \sqrt{\text{sen}15x.\text{sen}6x + \frac{1}{2}\cos 21x} \ ,$$

para: $\quad x = \dfrac{\pi}{27}$

A) 1/2 B) 1/3 C) -1/2 D) -1/3 E) 3

**26.-** Calcule el valor de:

$$M = \frac{1}{2} \ . \sec 80° - 2 \text{ sen } 70°$$

A) 0 B) -2 C) 1 D) 2 E) -1

**27.-** Calcule el valor de la expresión:

$W = \text{sen } 50°.\text{sen } 10° + \text{sen } 610°.\text{sen } 130° - \text{sen } 430°.\cos 280°$

A) 1 B) 3/4 C) -1/4

D) -3/4 E) 1/4

**28.-** Determine el mínimo valor de la expresión M definida por:

$$M = 3 \cos 4x + 4 \text{ sen } 3x \ . \text{ sen } x$$

A) -3/2 B) 1/2 C) -1/2 D) 0 E) 3/2

**29.-** Si: $\quad \tan x = \dfrac{\sqrt{3}\cos 20° - \text{sen}40°}{1 + \text{sen}10°}$ ,

calcule un valor de "$x$"

A) 10° B) 18° C) 20° D) 32° E) 40°

**MISCELÁNEA**

**30.-** Una expresión en términos de sen A y sen B, equivalente a

sen (A + B) sen (A - B) es:

A) $\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 B$ D) $-(\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B)$

B) $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B$ E) -(sen A - sen B)

C) $\text{sen}^2 B - \text{sen}^2 A$

**31.-** Simplificar:

$$\frac{\text{sen } 2a.\text{sen } a + \text{sen } 4a.\text{sen } a + \text{sen } 7a.\text{sen } 2a}{\text{sen } a.\cos 2a + \text{sen } 2a.\cos 5a + \text{sen } a.\cos 8a}$$

A) $\tan a$ B) $\tan 3a$ C) $\tan 2a$

D) $\tan 5a$ E) $\tan 7a$

**32.-** Reducir:

$$\frac{\text{sen } 7a}{\text{sen } a} - 2 \cos 2a - 2 \cos 4a - 2 \cos 6a$$

A) sen $a$ B) csc $a$ C) tan $a$

D) 1 E) - 1

**33.** Calcular: cos 6° . cos 42° . cos 66° . cos 78°

A) 0 B) 1 C) - 1 D) 1/16 E) 1/8

**34.-** Al simplificar la expresión:

E = sen 6° . sen 54° . sen 66°, obtenemos:

A) sen 12° B) 2 sen 6° C) sen 18°

D) 2 sen 12° E) $\dfrac{\text{sen } 18°}{4}$

**35.-** Hallar:

sen 40°.sen 80° + sen 80°.sen 160° + sen 160° .sen 320°

A) 1 B) 3/2 C) 3/4 D) 3/8 E) 0

**36.-** Simplificar:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } 2x} - \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x}$$

A) $\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 2x}$ B) $-\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 2x}$ C) $\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 4x}$

D) $-\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 4x}$ E) $\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x}$

**37.-** Si: $a - b = 15°$, ¿cuál de las siguientes expresiones es equivalente a: $\cos b$ (sen $a$ + cos $a$)

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2b+\sqrt{3}\,\text{sen}\, 2b)$

B) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\cos 2b+\text{sen}\; 2b+\sqrt{3})$

C) $\sqrt{3}\left(\cos 2b+\frac{\text{sen}\; 2b}{2}+1\right)$

D) $\frac{1}{2}(\cos 2b+\sqrt{3}\,\text{sen}\; 2b)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{sen}\; 2b+\sqrt{3}\cos 2b)$

**38.-** Determine el valor de la siguiente expresión:

$$N = 4\text{sen}\theta \cdot \text{sen}4\theta \cdot \text{sen}6\theta + 2\;\text{sen}\theta$$

Cuando: $\theta = \frac{\pi}{30}$

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

**39.-** Reducir: $\sqrt{\text{sen}\, x\,(\text{sen}\; 3x+\text{sen}\, x)}$

A) $|\text{sen}\, x|$ B) $|\text{sen}2x|$ C) $|\text{sen}3x|$

D) $|\cos 2x|$ E) $|\cos 3x|$

**40.-** Si: $\cos\theta = 0{,}75$

calcular: $32\;\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}\,.\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 11

## PROSTAFAIRESIS

Cuando Neper se encontraba enfrascado en el estudio de las sucesiones para luego deducir sus famosos logarítmos, le visitó John Craig , médico del rey Jaime VI de Escocia, y le habló del uso que se hacía en Dinamarca del método de prostafairesis. Por aquella época comenzaron a aparecer diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa, como resultado de un menor énfasis en los cálculos de resolución de triángulos, y mayor en cambio en las relaciones funcionales de tipo analítico. Entre estas identidades estaba un grupo de fórmulas conocidas como las "Reglas de Prostafairesis", es decir, fórmulas que permitían convertir un producto de funciones circulares en una suma o una diferencia (de donde les venía el nombre de **prosthaphaeresis**, palabra griega que significa suma y resta).

# Sucesiones y Series Trigonométricas

CAP 16

El trabajo con sumas de números es frecuente en múltiples problemas que deben enfrentar a diario los especialistas de diversas ramas del conocimiento, y para su determinación se trabaja desde el punto de vista teórico en la obtención de expresiones compactas, no obstante las facilidades que brindan las aplicaciones de la *Ofimática* (Automatización, mediante sistemas electrónicos, de las comunicaciones y procesos administrativos en las oficinas ), con vistas a evitar errores provenientes de la captación de datos.

Tomando en cuenta el amplio espectro de aplicaciones que pueden ser beneficiadas con este tipo de resultado, en el presente trabajo se realiza una recopilación de las propiedades de las sumatorias que figuran en la literatura, posterior a lo cual se proponen y demuestran otro conjunto particularmente relevante cuando se trabaja con funciones de variable discreta cuyos intervalos de variación son uniformes en todo el dominio de la función. En muchas situaciones problémicas donde se presenta una serie de sumas o productorias, éstas deben reducirse en otras equivalentes más sencillas, para lo cual es recomendable tener en cuenta dos sumatorias y productorias de senos y de cosenos, como las más importantes.

## 16.1. SUMATORIAS

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+r) + \operatorname{sen}(x+2r) + \ldots + \operatorname{sen}(u) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+u}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \ldots + \cos(u) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x+u}{2}\right)$$

Siendo : $n$ = Número de términos $\quad$ $r$ = Razón aritmética del ángulo

$x$ = Primer ángulo $\quad$ $u$ = Último ángulo

Verificándose que: $u = x + (n-1)r \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{u-x}{r} + 1$ , así:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\pi = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\pi = -\frac{1}{2}$$

## 16.2. PRODUCTORIAS

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\ \cos\frac{2\pi}{2n+1}\ \cos\frac{3\pi}{2n+1}\ \ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^{n}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1}\ \ldots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^{n}}$$


**PROB. 01**

Calcular el valor de:

$$E=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Multiplicando ambos miembros por $\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)$

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.E=\underbrace{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}}+\underbrace{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}}$$

$$+\underbrace{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}}$$

$$=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}+\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}$$

Esta expresión tiene la forma de una serie telescópica, por lo cual se reduce a:

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.E=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\qquad\therefore\qquad \boxed{E=-\frac{1}{2}}$$

**PROB. 02**

Calcular el equivalente de:

$$K=\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x.....+\operatorname{sen}(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x\cos 5x+.....+\cos(2n-1)x}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

a) Analicemos el numerador de la fracción:

$N=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x+.....+\operatorname{sen}(2n-1)x$

Aplicando la fórmula de sumatorias, tal que:

$$n=n\ ;\ u=(2n-1)x\Rightarrow\ r=2x$$

$$N=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n.2x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{2}\right)}.\operatorname{sen}\left[\frac{x+(2n-1)x}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\ N=\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}x}.\operatorname{sen}(nx)$$

b) Ahora analicemos el denominador de la fracción:

$D=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+.....+\cos(2n-1)x$

Aplicando la fórmula de sumatorias, tal que:

$$n=n\ ;\ u=(2n-1)x\Rightarrow\ r=2x$$

$$D=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n.2x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{2}\right)}.\cos\left[\frac{x+(2n-1)x}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\ D=\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}x}.\cos(nx)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{N}{D} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}x}.\operatorname{sen}(nx)}{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}x}.\cos(nx)}$$

$$\therefore \quad \boxed{K = \tan nx}$$

**03.**- Hallar la suma de la serie:

$$S = \csc\theta + \csc 2\theta + \csc 4\theta + \ldots + \csc 2^{n-1}\theta$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Generamos una serie telescópica, tal que:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta . \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Desarrollando el numerador de la expresión y simplificando, encontramos que:

$$\csc\theta = \cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta$$

$$\csc 2\theta = \cot\theta - \cot 2\theta$$

$$\csc 4\theta = \cot 2\theta - \cot 4\theta$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\csc 2^{n-1}\theta = \cot 2^{n-2}\theta - \cot 2^{n-1}\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \cot\frac{\theta}{2} - \cot 2^{n-1}\theta}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

*1) Para calcular la suma: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ no existe un método general, pero uno de los muy pocos casos en que es posible calcular su valor es el siguiente. Si $a_n$ se puede expresar en la forma: $a_n = b_{n+1} - b_n$*

*Entonces:*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + \ldots + b_{n+1} - b_n$$
$$S_n = b_{n+1} - b_1$$

*a esta serie se le denomina «Serie telescópica»*

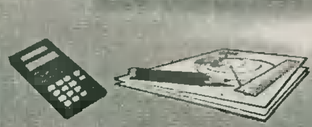
*2) Para simplificar una productoria como: $P = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n$; podemos sugerir la siguiente estrategia.*

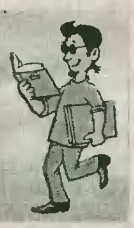
*Haciendo:* $a_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \Rightarrow P = \dfrac{U_2}{U_1} \cdot \dfrac{U_3}{U_2} \cdot \dfrac{U_4}{U_3} \ldots \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \Rightarrow P = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

*3) Cuando se tenga una productoria de tangentes de ángulos consecutivos, se aplicará lo siguiente:*

$$\tan\frac{\pi}{2n+1} \cdot \tan\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \tan\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \tan\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

*donde: n = número de términos*





# Enunciados de Problemas con Resolución

***SUMATORIAS***

**01.-** Reducir:

$$W = \text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 5x + ... + \text{sen}\, 35x$$

A) $\text{sen}^2(12x)$  B) $12 \csc x$  C) $\text{sen}^2(18x)$

D) $\text{sen}^2(18x) . \csc x$  E) $\text{sen}^2(12x) . \csc x$

**02.-** Indicar una expresión equivalente de:

$$W = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos 45x$$

A) $\frac{1}{2} . \text{sen}\, 46x . \csc x$  B) $2\, \text{sen}\, 23x . \csc x$

C) $2\, \text{sen}\, 24x . \csc 4x$  D) $8\, \text{sen}\, 21x . \csc 6x$

E) $\frac{1}{2} . \text{sen}\, 48x . \csc 12x$

**03.-** Calcular el valor de:

$$W = \text{sen}\, 2° + \text{sen}\, 4° + \text{sen}\, 6° + ... + \text{sen}\, 540°$$

A) $\tan 9°$  B) $\cot 1°$  C) $\text{sen}^4 9°$

D) $3\text{sen}^4 9°$  E) $-4\cot^2 9°$

**04.-** Determinar el valor de:

$$W = \text{sen}\frac{\pi}{15} + \text{sen}\frac{5\pi}{15} + \text{sen}\frac{9\pi}{15} + ... + \text{sen}\frac{33\pi}{15}$$

A) $\frac{\sqrt{8-\sqrt{5}}}{4}$  B) $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$  C) $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{4+\sqrt{3}}}{8}$  E) $\frac{\sqrt{5-\sqrt{3}}}{3}$

**05.-** Identifica la expresión equivalente de:

$$W = \text{sen}\frac{\pi}{13} + 2\text{sen}\frac{2\pi}{13} + 3\text{sen}\frac{3\pi}{13} + ... + 10\text{sen}\frac{10\pi}{13} + 11\text{sen}\frac{11\pi}{13} + 12\text{sen}\frac{12\pi}{13}$$

A) $2\cot\frac{\pi}{12}$  B) $6\tan\frac{\pi}{12}$  C) $12\cot\frac{\pi}{26}$

D) $8\tan\frac{\pi}{8}$  E) $\frac{13}{2}\cot\frac{\pi}{26}$

**06.-** Reducir la siguiente suma:

$$M = \cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{3\pi}{n} + \cos^2\frac{5\pi}{n} + ... + \cos^2(2n-1)\frac{\pi}{n}$$

A) $\frac{n}{12}$  B) $\frac{3n}{7}$  C) $\frac{5n}{7}$  D) $\frac{n}{2}$  E) $\frac{n}{4}$

**07.-** Calcular el valor de M, si:

$$M = \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} . \cos\frac{6\pi}{7}$$

A) 3  B) -2  C) -3  D) 1/3  E) - 1/2

**08.-** Calcular el valor de:

$$M = \text{sen}^2\frac{\pi}{7} + \text{sen}^2\frac{2\pi}{7} + \text{sen}^2\frac{3\pi}{7}$$

A) 3/4  B) 7/4  C) 7/6  D) 4/9  E) 5/9

**09.-** Determinar el valor de W, si:

$$W = \text{sen}^4\frac{\pi}{7} + \text{sen}^4\frac{2\pi}{7} + \text{sen}^4\frac{3\pi}{7}$$

A) 21/16 B) 1/6 C) 2/7 D) 3/5 E) 2/9

**10.-** Evaluar la suma de la serie finita:

$$N = \sec\alpha \,.\, \sec 2\alpha + \sec 2\alpha \,.\, \sec 3\alpha + \ldots$$
$$\ldots + \sec n\alpha \,.\, \sec(n+1)\alpha$$

A) $\cos(n+1)\alpha - \dfrac{\tan(n-1)\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

B) $\text{sen}(n+1)\alpha - \dfrac{\tan(n-1)\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

C) $\dfrac{\tan(n+1)\alpha}{\text{sen}\alpha} - \dfrac{\tan\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

D) $\dfrac{\tan(n+2)\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\tan(n-1)\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

E) $\dfrac{\tan(n-1)\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\tan\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

**11.-** Encontrar la suma de la serie finita:

$$R = \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2^2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^n}$$

A) $\dfrac{1}{2^{n-1}}\tan\dfrac{x}{2^n} + 2\tan x$

B) $\dfrac{1}{2^{n-1}}\cot\dfrac{x}{2^n} - 2\cot x$

C) $\dfrac{1}{2^{n-1}}\tan\dfrac{x}{2^{n+1}} - 2^n\tan x$

D) $\dfrac{1}{2^{n+1}}\cot\dfrac{x}{2^{n+1}} - 2^n\cot x$

E) $\dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{x}{2^{n-1}} - 2\tan x$

**12.-** Calcular:

$$W = \text{sen}\frac{2\pi}{7} + \text{sen}\frac{4\pi}{7} - \text{sen}\frac{6\pi}{7}$$

A) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

**13.-** Determinar el valor de M:

$$M = \sec\frac{2\pi}{7} + \sec\frac{4\pi}{7} + \sec\frac{6\pi}{7}$$

A) -1 B) 3 C) -3 D) 5 E) -4

**14.-** Hallar la suma de la serie:

$$S = \csc\theta + \csc 2\theta + \csc 4\theta + \ldots + \csc 2^{n-1}\theta$$

A) $\cot 2^{-1}\theta + \cot 2\theta$

B) $\cot 2^{-1}\theta - \cot 2^{n-1}\theta$

C) $\cot 3^{-1}\theta - \cot 3^{n-1}\theta$

D) $\cot 2^{-1}\theta - \cos 2^{n-1}\theta$

E) $\cot 2^{n-1}\theta - \cot 2^{n-1}\theta$

**15.-** Calcule el valor de:

$$R = \tan x + \tan 2x + \tan 4x$$

cuando: $7 \cdot x = \pi$

A) 0 B) -1 C) $(\sqrt{7})$

D) $-(\sqrt{2})$ E) $-(\sqrt{7})$

**16.-** Calcular la suma de la siguiente serie:

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,5x + \ldots + \text{sen}\,(2n-1)x$$

A) $\dfrac{\text{sen}^2 nx}{\cos x}$ B) $\dfrac{\text{sen}^2 nx}{\text{sen}\,x}$ C) $\dfrac{\cos^2 nx}{\text{sen}\,x}$

D) $\dfrac{\cos^2 nx}{\cos x}$ E) $\dfrac{\text{sen}\,nx}{\text{sen}\,x}$

**17.-** Calcular el valor de:

$$\cos 10° + \cos 30° + \cos 50° + \ldots + \cos 170°$$

A) 1/2 B) 0 C) -1 D) 1 E) 3

**18.-** Hallar el valor de:

$$E = \text{sen}^2 1° + \text{sen}^2 2° + \text{sen}^2 3° + \ ... \ + \text{sen}^2 90°$$

A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 45,5 E) 60

**19.-** El valor de:

$$E = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} + \cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^{\circ} + ... + \cos^2\left(\frac{180°}{2}\right), \text{ es:}$$

A) 0 B) 90 C) 45 D) 89,5 E) 91

**20.-** Calcular: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**21.-** Determinar:

$$\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7}$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

**22.-** Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}(U_1 - U_0)}{\cos U_1 . \cos U_0} + ... + \frac{\text{sen}(U_{20} - U_{19})}{\cos U_{20} . \cos U_{19}}$$

A) $\tan U_{20} - \tan U_0$ B) $\tan U_{19} - \tan U_0$

C) $\tan U_{19} - \tan U_1$ D) $\tan U_{20} - \tan U_1$

E) $\tan U_{20}$

**23.-** Calcular:

$$\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -1 E) $\frac{1}{4}$

**24.-** Reducir:

$$\sum_{n=1}^{3} \cos^n(x) + \cos^n(120°-x) + \cos^n(120°+x)$$

A) $\frac{3(2+\cos 3x)}{4}$ D) $\frac{(2+\cos 3x)}{4}$

B) $\frac{3(2+\cos 3x)}{4}$ E) $\frac{(3+\cos 3x)}{4}$

C) $\frac{(3+\cos 2x)}{4}$

**25.-** Calcular:

$$\cos\frac{2\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} + 3\cos\frac{6\pi}{11} + ... + 10\cos\frac{20\pi}{11}$$

A) -11/2 B) -10/2 C) -11/3

D) -13/2 E) -11/5

**26.-** Una semicircunferencia de radio a se divide en n arcos iguales, calcular la suma de las distancias de los distintos puntos de sección a cada uno de los extremos del diámetro.

A) $a\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 2\right)$ D) $a\left(\cot\frac{\pi}{n} - 2\right)$

B) $a\left(\cot\frac{\pi}{2n} - 1\right)$ E) $2a\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 1\right)$

C) $a\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 3\right)$

**27.-** Calcular la siguiente sumatoria:

$$\cos x + \cos(120° - x) + \cos(120° + x)$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 1/2 E) -1/2

**28.-** Calcular la siguiente sumatoria:

$$E = \cos x . \cos(120° - x) + \cos x . \cos(120° + x) + \cos(120° - x)\cos(120° + x)$$

A) 3/4 B) 4/3 C) 1/4 D) -3/4 E) 1

## *PRODUCTORIAS*

**29.-** Determine el valor del producto:

$$(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 2x)(1-\tan^2 4x).....(1-\tan^2 2^{n-1}x)$$

A) $\frac{2^n \tan x}{\tan 2^n x}$ B) $\frac{2^{n+1}\tan x}{\tan 2^{n+1} x}$ C) $\frac{\tan x}{\tan 2^{n-1} x}$

D) $\dfrac{2^{2n}\tan x}{\tan 2^n x}$ E) $\dfrac{2^{n+1}\tan x}{\tan 2^{n-1} x}$

**30.-** Calcular el valor de W, si:

$$W=\frac{1}{3}.\tan\frac{\pi}{9}.\tan\frac{2\pi}{9}.\tan\frac{3\pi}{9}.\tan\frac{4\pi}{9}$$

A) 3 B) 6 C) 12 D) 1 E) 0

**31.-** Determinar el valor de:

$$W=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}.\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}$$

A) 3 B) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ C) 5 D) 6 E) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

**32.-** Calcular el valor de:

$$M=\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

A) 1/8 B) 2/3 C) 1/6 D) 3/8 E) 5/6

**33.-** Evaluar la expresión:

$$M=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$$

A) 2/5 B) -1/8 C) 3/5 D) 1/7 E) -2/7

**34.-** Determinar una expresión equivalente de:

$$K=(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)(2\cos 4x-1)$$

A) $\dfrac{8\cos 4x+1}{2\cos x-1}$ B) $\dfrac{3\cos 3x-1}{2\cos x-1}$

C) $\dfrac{4\cos 4x+1}{2\cos x+1}$ D) $\dfrac{2\cos 8x+1}{2\cos x+1}$

E) $\dfrac{2\cos 3x+1}{2\cos x-1}$

**35.-** Calcular el valor de:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{28}.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{28}.\operatorname{sen}\frac{5\pi}{28}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{13\pi}{28}$$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^6}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^8}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^7}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^9}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^5}$

**36.-** Reducir el siguiente producto finito:

$$\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{8}\ldots\ldots\cos\frac{x}{2^n}$$

A) $\cos nx$ B) $\operatorname{sen} nx$ C) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2^n}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}$ E) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2^n\cos\frac{x}{2^n}}$

**37.-** Calcule: $P=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/4 D) 1/8 E) 1/16

**38.-** Calcular el valor de:

$$P=\operatorname{sen}\frac{\pi}{19}.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{19}.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{19}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{9\pi}{19}$$

A) $\sqrt{19}$ B) $\dfrac{\sqrt{19}}{2^3}$ C) $\dfrac{\sqrt{19}}{2^5}$

D) $\dfrac{\sqrt{19}}{2^7}$ E) $\dfrac{\sqrt{19}}{2^9}$

**39.-** Calcular:

$$\prod_{n=1}^{3}\frac{1+\cos(2n-1)\frac{\pi}{7}}{1+\cos\frac{2n\pi}{7}}$$

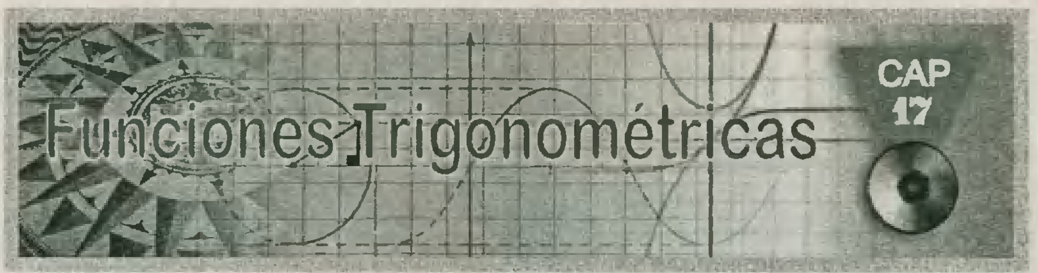
A) 1 B) 3 C) 7 D) 5 E) 2

**40.-** Indica el equivalente de:

$$\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$$

A) $\frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ B) $\frac{1}{60}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ C) $\frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$

D) $\frac{1}{65}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ E) $\frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$




En el estudio de las funciones trigonométricas, la característica que más resalta es la periodicidad, es decir, la característica fundamental de las funciones trigonométricas es que todas ellas son periódicas, pues se repiten de idéntica forma en intervalos iguales. Muchos fenómenos de la naturaleza son periódicos, como por ejemplo:

Las estaciones del año, las 24 *horas* del día, los latidos del corazón, etc.

Se debe tener en cuenta que toda función trigonométricas tiene una representación gráfica especifica. Asimismo se debe tener en cuenta que toda función tiene gráfica, pero que no toda gráfica representa a una función.

## 17.1. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Es un conjunto no vacío de pares ordenados ($x$ ; $y$), tal que para todo valor de la primera componente (corresponde un valor angular expresado en *radianes*), le corresponde un único valor obtenido mediante una evaluación de la función, que se denota así:

$$y = \text{F.T}(x)$$

Esto es: $F = \{(x\,;y)/x, y \in \mathbb{R}\,; y = \text{F.T.}(x)\}$

### 17.1A Dominio de una F.T. ($D_f$)

Son los valores que toma la primera componente en una función. (Se encuentra sobre el eje $x$).

### 17.1B Rango de un F. T. ($R_f$)

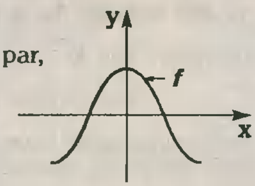
Son los valores que toma la segunda componente en una función. (Se encuentra sobre el eje $y$).

### 17.1C Función Par

Una función $f$ es par, si $\forall\ x \in D_f$:

**i)** $-x \in D_f$

**ii)** $f(-x) = f(x)$



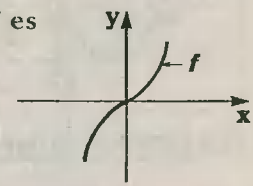

Nota : La gráfica de toda función par es simétrica respecto al eje $y$.

### 17.1D Función Impar

Una función $f$ es impar, si $\forall\, x \in D_f$:

**i)** $-x \in D_f$

**ii)** $f(-x) = -f(x)$

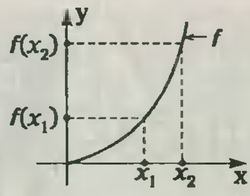



Nota : La gráfica de toda función impar es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas.

### 17.1E) Función Creciente

Una función $f$ es creciente en un intervalo I de su dominio, si $\forall x_1, x_2 \in$ I se cumple:

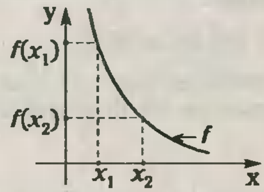
$$f(x_1) < f(x_2)\text{, siempre que } x_1 < x_2$$




### 17.1F) Función Decreciente

Una función $f$ es decreciente en un intervalo I de su dominio, si $\forall x_1, x_2 \in$ I se cumple:

**$f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$**



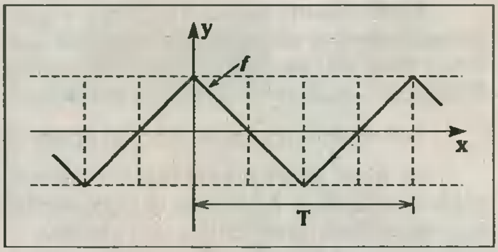

### 17.1G) Funciones Periódicas

Una función $f$ cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$, se dice que es periódica, si:

i) $\forall x \wedge (x + \mathrm{T}) \in D_f$

ii) $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ ; $\mathrm{T} \neq 0$

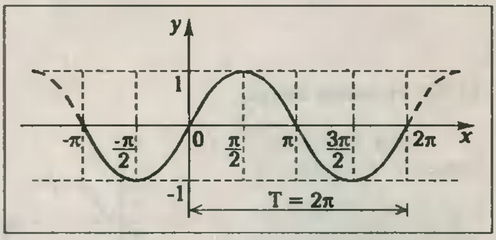
Donde "T" es el periodo de la función. (El menor valor).




## 17.2 FUNCIÓN SENO

$$F = \{(x ; y)/y = \operatorname{sen} x ; x \in \mathbb{R}\}$$

### 17.2A) Representación gráfica




### 17.2B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R}$ $\wedge$ Rango: $R_f \in [-1 ; 1]$

Periodo: $\mathrm{T} = 2\pi$

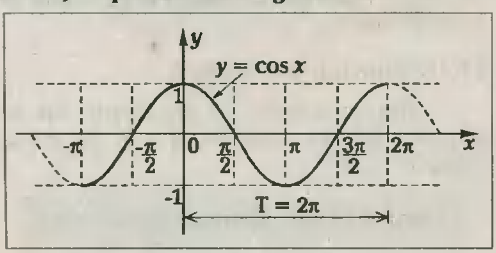
Es función impar en todo su dominio, Creciente en el IC y IVC , Decreciente en el IIC y IIIC

Si: $f = \operatorname{sen}(kx) \Rightarrow \mathrm{T}_f = \dfrac{2\pi}{|k|}$

## 17.3 FUNCIÓN COSENO

$$F = \{(x ; y)/y = \cos x ; x \in \mathbb{R}\}$$

### 17.3A) Representación gráfica




### 17.3B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R}$ $\wedge$ Rango: $R_f \in [-1 ; 1]$

Periodo: $\mathrm{T} = 2\pi$

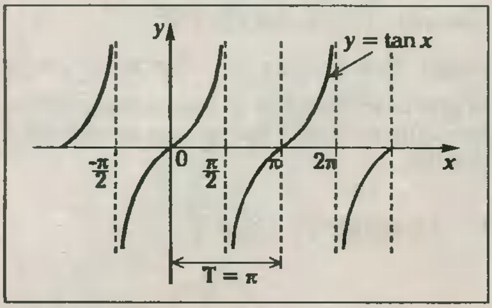
Es función par en todo su dominio, creciente en el IIIC y IVC, decreciente en el IC y IIC

Si: $F = \cos(kx) \Rightarrow \mathrm{T}_f = \dfrac{2\pi}{|k|}$

## 17.4 FUNCIÓN TANGENTE

$$F = \{(x\,;y)/y = \tan x\,; x \in \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2\,; n \in \mathbb{Z}\}$$

### 17.4A) Representación gráfica




### 17.4B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2\,; n \in \mathbb{Z}$

Rango: $R_f \in \mathbb{R}$ $\wedge$ Periodo: $T = \pi$

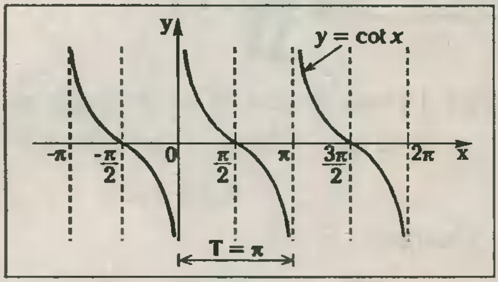
Es una función impar en todo su dominio, es creciente por intervalos.

Si: $F = \tan(kx) \Rightarrow T_f = \dfrac{\pi}{|k|}$

## 17.5 FUNCIÓN COTANGENTE

$$F = \{(x\,;y)/y = \cot x\,; x \in \mathbb{R} - (n\pi)\,; n \in \mathbb{Z}\}$$

### 17.5A) Representación gráfica




### 17.5B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - (n\pi)\,; n \in \mathbb{Z}$

Rango: $R_f \in \mathbb{R}$ $\wedge$ Periodo: $T = \pi$

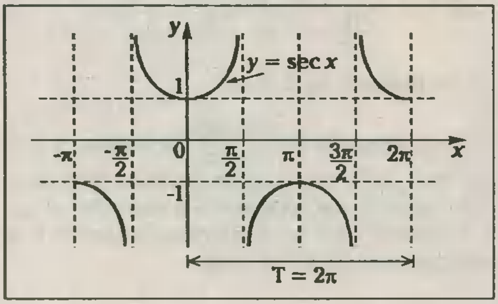
Es una función impar en todo su dominio, es decreciente por intervalos.

Si: $F = \cot(kx) \Rightarrow T_f = \dfrac{\pi}{|k|}$

## 17.6 FUNCIÓN SECANTE

$$F = \{(x\,;y)/y = \sec x\,; x \in \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2\,; n \in \mathbb{Z}\}$$

### 17.6A) Representación gráfica




### 17.6B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2\,; n \in \mathbb{Z}$

Rango: $R_f \in \mathbb{R} - \langle -1\,;1\rangle$ Periodo: $T = 2\pi$

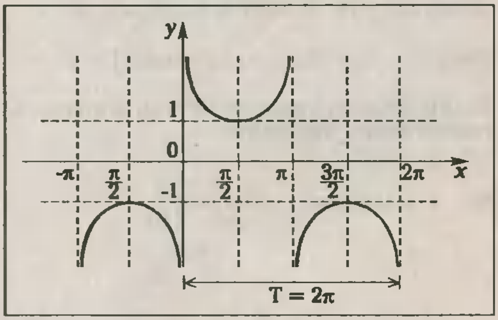
Es una función par en todo su dominio, es creciente en el IC y IIC, es decreciente en el IIIC y IVC.

Si: $F = \sec(kx) \Rightarrow T_f = \dfrac{2\pi}{|k|}$

## 17.7 FUNCIÓN COSECANTE

$$F = \{(x\,;y)/y = \csc x\,;x \in \mathbb{R} - (n\pi)\,;n \in \mathbb{Z}\}$$

### 17.7A) Representación gráfica



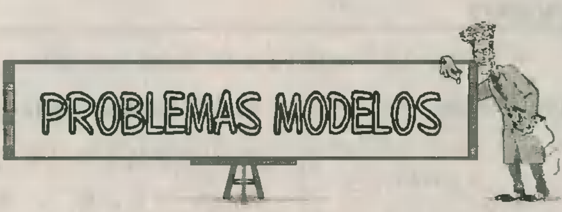

### 17.7B) Análisis de la gráfica

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - (n\pi)\,;n \in \mathbb{Z}$

Rango: $R_f \in \mathbb{R} - \langle -1\,;1\rangle$ Periodo: $T = 2\pi$

Es una función impar en todo su dominio, es creciente en el IIC y IIIC, es decreciente en el IC y IVC.

Si: $f = \csc(kx) \Rightarrow T_f = \dfrac{2\pi}{k}$




**PROB. 1**

Dada la función $f$, cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$

a) Determine su dominio

b) Evalúe su rango

c) Elabore su gráfico

d) Determine su periodo

e) Discriminar si es par o impar.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Para que la función esté definida en todos los Reales, necesariamente sen $x \neq 0$, entonces:

$\operatorname{sen} x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq k\pi\,;\forall k \in \mathbb{Z}$, luego:

a) $D_f \in \mathbb{R} - \{k\pi\}; \forall k \in \mathbb{Z}$

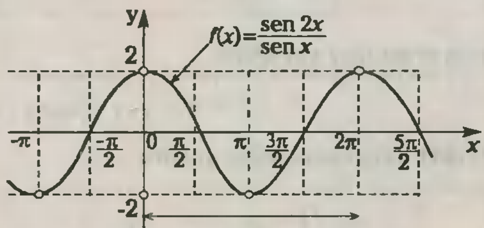
b) $f(x) = \dfrac{2\cancel{\operatorname{sen}} x \cos x}{\cancel{\operatorname{sen}} x} \;\Rightarrow\; f(x) = 2\cos x$

Pero $-1 \leq \cos x \leq 1 \wedge x \neq k\pi \;\Rightarrow\; -1 < \cos x < 1$

$\Rightarrow -2 < 2\cos x < 2 \;\Rightarrow\; -2 < f(x) < 2$

$\therefore\; R_f \in \langle -2\,;2\rangle$

c) Gráfico:




d) Su periodo es $T = 2\pi$

e) La gráfica $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$ es simétrica respecto el eje Y, luego es una función par (pues toda función par es simétrica respecto al eje y, mientras que las funciones impares son simétricas respecto al origen.

**PROB. 2**

Dada la función $f$, cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \tan|x| + \cot|x|$.

a) Calcule los puntos donde $f$ no está definida.

b) ¿Es periódica la función?, si lo fuera determine dicho periodo.

c) Obtenga el Rango de la función

d) Elaborar su gráfica.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

En primer lugar analicemos $|x|$:

1) Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \tan x + \cot x$

$\Rightarrow f(x) = 2\csc 2x$

2) Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = \tan x - \cot x$

$\Rightarrow f(x) = -2\csc 2x$

3) Si $x = 0 \Rightarrow f(x)$ no está definida.

Para dar respuesta a las preguntas, elaboramos la gráfica:

a) Se observa que, $x$ no está definida en:

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi; 3\pi/2; 2\pi; \ldots = \frac{n\pi}{2}$$

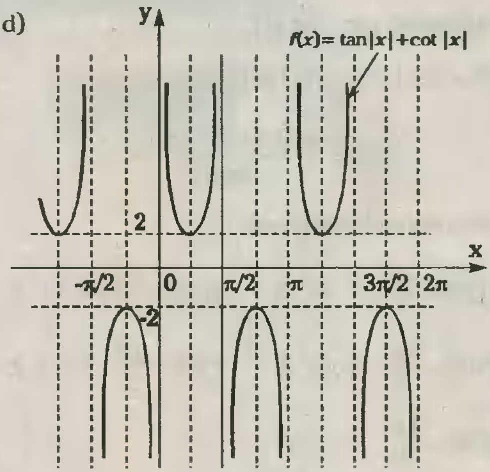
Los puntos donde $f(x)$ no está definida son en:

$$x = \frac{n\pi}{2}; \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

b) Sí es periódica, de periodo: $T = 2\pi$

c) Viendo la figura $Rf \in \mathbb{R} - \langle -2 ; 2 \rangle$

d)




## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

*1) Analice la existencia de la función*

*2) Obtenga los valores que no definen a la función*

*3) Elabore el grafico de la función*

*4) Vea si la gráfica es Simétrica respecto al eje "y" o es Simétrica respecto al origen para asegurar si es la función par o impar respectivamente.*

*5) Cuando la variable de la función trigonométrica está afectada por valor absoluto ( $|x|$ ), analice qué ocurre cuando $x > 0$ , $x = 0 \wedge x < 0$*

*6) Para determinar el dominio se recomienda analizar todas las restricciones posibles de la expresión dada.*

*7) Para determinar el rango se recomienda transformar la expresión dada hasta quedar en términos de una F.T. Luego reconstruir la función a partir del dominio de la F.T. obtenida.*


**_DOMINIO DE LAS F.T._**

**01.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x+\cos x+\tan x}{|\operatorname{sen}x|},$$

determine el dominio de $f$.

A) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{5},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{4},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{6},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{2},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{9},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

**02.-** Sea la función $f$, definida por:

$$f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}^2x-\frac{1}{4}}\ ,$$

determine el Dominio de la función $f$.

A) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right],\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{3}+k\pi\right],\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{6}+k\pi\right],\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\left[\frac{\pi}{9}+k\pi,\frac{5\pi}{9}+k\pi\right],\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\left[\frac{\pi}{5}+k\pi,\frac{2\pi}{5}+k\pi\right],\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

**03.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\cos x-\cos 5x}{\cos x-\cos 3x}$$

Determine su dominio:

A) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

**04.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=3\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos 2x$$

A) $\mathbb{R}-(3k+1)\frac{\pi}{5},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\mathbb{R}-(3k+1)\frac{\pi}{2},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\mathbb{R}-(3k+1)\frac{\pi}{9},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\mathbb{R}-(3k+1)\frac{\pi}{7},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\mathbb{R}-(3k+1)\frac{\pi}{3},\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

**05.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\sqrt{\tan x-1}+\sqrt{\sqrt{3}-\tan x}$$

A) $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi\,;\frac{\pi}{7}+k\pi\right]$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\left[\frac{\pi}{5}+k\pi\,;\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{5}+k\pi\right]$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

**06.-** Delimitar el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 3\tan 5x - 2$$

A) $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{9}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{10}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{13}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\mathbb{R} - (5k+1)\frac{\pi}{15}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{11}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

**07.-** Evalúe el dominio de la función $f$ definida por:

$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}x} + \sqrt{\cos x} + \sqrt{\tan x}$ , si: $x\in[0;2\pi]$

A) $\left[0;\frac{\pi}{7}\right\rangle$ B) $\left[0;\frac{\pi}{5}\right\rangle$ C) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ E) $\left[0;\frac{\pi}{9}\right\rangle$

**08.-** Encontrar el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{2(\tan x+\cot x)-4}\ ,\ \text{si } x\in\langle 0;2\pi\rangle$$

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\pi}{5}\right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{3\pi}{5}\right\rangle$

C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ D) $\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{2\pi}{6}\right\rangle$

E) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

**09.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{|\sec x|-|\csc x|}$$

A) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{2}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{5}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{7}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{9}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{4}$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

**10.-** Evalúe el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{3}\ \sec^4\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

A) $\mathbb{R} - \left\{x\,/\,x=\frac{\pi}{4}(2k+1);k\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\mathbb{R} - \left\{x\,/\,x=\frac{\pi}{2}(2k+1);k\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\mathbb{R} - \left\{x\,/\,x=\frac{\pi}{9}(2k+1);k\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{x\,/\,x=\frac{\pi}{7}(2k+1);k\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\mathbb{R} - \left\{x\,/\,x=\frac{\pi}{5}(2k+1);k\in\mathbb{Z}\right\}$

### *RANGO DE LAS F.T.*

**11.-** Determine el rango de la función $f$, definida por:

$$f(x) = \frac{3}{\operatorname{sen}x-1}$$

A) $\left\langle -\infty;-\frac{4}{5}\right]$ B) $\left\langle -\infty;-\frac{7}{3}\right]$ C) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{6}\right]$

D) $\left\langle -\infty;-\frac{2}{9}\right]$ E) $\left\langle -\infty;-\frac{3}{2}\right]$

**12.-** Si el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{5+2\operatorname{sen}x}{3} \text{ es } \left\langle\frac{\pi}{6};2\right\rangle,$$

determine el rango de $f$:

A) $\left\langle 2;\frac{7}{5}\right]$ B) $\left\langle 2;\frac{7}{3}\right]$ C) $\left\langle 2;\frac{4}{3}\right]$

D) $\left\langle 5;\frac{6}{3}\right]$ E) $\left\langle 2;\frac{4}{2}\right]$

**13.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=\frac{\sqrt{|\operatorname{sen}x|-1}}{\operatorname{sen}x-1},$$

encontrar el rango de $f$:

A) $\{-1\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ C) $\{\pi\}$ D) $\{1\}$ E) $\{0\}$

**14.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=\operatorname{sen}^2x+3|\operatorname{sen}x|,$$

determine el rango de $f$:

A) $[0;1]$ B) $[0;2]$ C) $[0;3]$

D) $[0;4]$ E) $[0;5]$

**15.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\cos x+2}{\cos x+1}$$

A) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$ B) $\left[\frac{6}{4};+\infty\right\rangle$ C) $\left[\frac{3}{3};+\infty\right\rangle$

D) $\left[\frac{7}{5};+\infty\right\rangle$ E) $\left[\frac{5}{3};+\infty\right\rangle$

**16.-** Evaluar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\cos^2x}{|\operatorname{sen}x|-1}$$

A) $\langle -4;-3]$ B) $\langle -5;-1]$ C) $\langle -2;-1]$

D) $\langle -2;-7]$ E) $\langle -6;-3]$

**17.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\cos^2x+4\cos x+7$$

A) $[4;1]$ B) $[5;12]$ C) $[7;3]$

D) $[2;10]$ E) $[4;12]$

**18.-** Sea la función $f$ definida por:

$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen}x}$, determine el rango de $f$.

A) $\langle -\sqrt{1};\ \sqrt{1}\rangle$ B) $\langle -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\rangle$

C) $\langle -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\rangle$ D) $\langle -\sqrt{5};\ \sqrt{5}\rangle$

E) $\langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7}\rangle$

**19.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=4\cos^2(\pi x)-4\cos(\pi x),\ x\in\left[\frac{4}{3};3\right\rangle$$

determine el rango de $f(x)$

A) $[-1;2\rangle$ B) $[-1;8\rangle$ C) $[-1;1\rangle$

D) $[-1;3\rangle$ E) $[-1;6\rangle$

**20.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=\operatorname{sen}^4x\,.\,\cos^2x+\operatorname{sen}^2x\,.\,\cos^4x,$$

evaluar el rango de la función:

A) $[0;1/4\rangle$ B) $[0;1/2]$ C) $[0;1/3]$

D) $[0;1/4]$ E) $[0;1/5]$

**21.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x},$$

encontrar el rango de la función $f$:

A) $\langle -1;1\rangle \cup \langle 1;7\rangle$ B) $\langle -1;2\rangle \cup \langle 1;4\rangle$

C) $\langle -1;3\rangle \cup \langle 1;6\rangle$ D) $\langle -1;1\rangle \cup \langle 1;5\rangle$

E) $\langle -1;1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$

**22.-** Si: $x \in \langle \pi ; 3\pi/2\rangle$, determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x} + 3$$

A) $\langle 4;5]$ B) $[4;5]$ C) $[4;5\rangle$

D) $\langle 2;5]$ E) $\langle 2;4\rangle$

**23.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x) = |\tan x| + |\text{sen}\, x|\ , \text{ si: } |x| < \frac{\pi}{3}\ ,$$

determine el rango de la función.

A) $\left[0;\frac{5\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ B) $\left[0;\frac{6\sqrt{7}}{2}\right\rangle$ C) $\left[0;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

D) $\left[0;\frac{3\sqrt{7}}{4}\right\rangle$ E) $\left[0;\frac{3\sqrt{2}}{7}\right\rangle$

**24.-** Evaluar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan^4 x + 4\tan^2 x + 7$$

A) $[9;+\infty\rangle$ B) $[3;+\infty\rangle$ C) $[2;+\infty\rangle$

D) $[7;+\infty\rangle$ E) $[5;+\infty\rangle$

**25.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 2\,\text{sen}\, x - 3\tan x\ , \text{ si } x \in \left\langle \frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right\rangle$$

A) $\langle -\sqrt{4}-3;-\sqrt{5}-1\rangle$ B) $\langle -\sqrt{2}-3;-\sqrt{3}-1\rangle$

C) $\langle -\sqrt{6}-3;-\sqrt{3}-1\rangle$ D) $\langle -\sqrt{5}-3;-\sqrt{2}-1\rangle$

E) $\langle -\sqrt{2}-3;-\sqrt{4}-1\rangle$

**26.-** Delimitar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = (\tan x - \cot x)^2$$

A) $[0;+\infty\rangle$ B) $[1;+\infty\rangle$ C) $[2;+\infty\rangle$

D) $[3;+\infty\rangle$ E) $[4;+\infty\rangle$

**27.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan x + \cos x, \text{ si } x \in \left\langle \frac{5\pi}{4} ; \frac{4\pi}{3}\right\rangle$$

A) $\left\langle \frac{2-\sqrt{2}}{3};\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{2-\sqrt{3}}{5};\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{2-\sqrt{7}}{2};\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\right\rangle$ D) $\left\langle \frac{2-\sqrt{4}}{2};\frac{2\sqrt{3}-1}{10}\right\rangle$

E) $\left\langle \frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right\rangle$

**28.-** Evaluar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan x + \cot x, \text{ si } x \in \left[\frac{\pi}{12} ; \frac{3\pi}{8}\right]$$

A) $[2;4\rangle$ B) $\langle 2;4]$ C) $\langle 2;4\rangle$

D) $[2;8]$ E) $[2;4]$

**29.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = \cos x \cdot \tan x\ ,$$

determine $D_f \cap R_f$.

A) $\langle -4;1\rangle$ B) $\langle -3;1\rangle$ C) $\langle -2;1\rangle$

D) $\langle -1;1\rangle$ E) $\langle -0;1\rangle$

**30.-** Determine el rango para la función $f$ definida por:

$$f(x) = |\text{sen}\, x| . \csc x + |\csc x|\, \text{sen}\, x$$

A) $\{-3;2\}$ B) $\{-2;1\}$ C) $\{-2;2\}$

D) $\{-5;5\}$ E) $\{-2;7\}$

**31.-** Para la función definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cot x + \sqrt{\operatorname{sen} x - 1} + \csc x,$$

determine el rango.

A) $R_f = \{1\}$ B) $R_f = \{2\}$ C) $R_f = \{3\}$

D) $R_f = \{4\}$ E) $R_f = \{5\}$

**32.-** Sean las funciones $f$ y $g$ definidos por:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{y} \quad g(x) = |\text{ex} - \sec x|,$$

determine: $D_f \cap R_g$.

A) $[5; +\infty\rangle$ B) $[4; +\infty\rangle$ C) $[3; +\infty\rangle$

D) $[2; +\infty\rangle$ E) $[1; +\infty\rangle$

### VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LAS F.T.

**33.-** Determine el valor máximo de la función $f$, definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - 2}{1 + |\operatorname{sen} x - 2|}$$

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{6}{3}$ C) $-\frac{7}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{2}{5}$

**34.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} 7x \cdot \cos 3x - \operatorname{sen} 4x - 5,$$

encontrar: $f_{\text{máx}} + 2f_{\text{mín}}$.

A) -15 B) -16 C) -17 D) -18 E) -19

**35.-** Identificar el máximo valor de la función $f$ definida por:

$$f(x) = (3 - \operatorname{sen} x)(3 + \operatorname{sen} x) + 1$$

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

**36.-** Si "$m$" y "M" son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x,$$

encontrar el valor de "$m$ + M"

A) 3/2 B) 4/2 C) 5/2 D) 6/2 E) 7/2

**37.-** Sea la función $f$ definida como:

$$f(x) = 35 - \tan^2 x + 4 \tan x,\ x \in [0^\circ; 90^\circ],$$

identificar la medida del ángulo "$x$", para obtener el valor máximo de la función.

A) $x \cong 65°30'$ B) $x \cong 64°30'$ C) $x \cong 63°30'$

D) $x \cong 62°30'$ E) $x \cong 61°30'$

**38.-** Determine el valor máximo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = (4 - \tan x)(2 + \tan x)$$

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

**39.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan^2 x + 2 \tan x,$$

determine el valor mínimo de $f$.

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

**40.-** Calcule el valor mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan x - \cot x, \text{ si } x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right\rangle$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

**41.-** Encontrar el valor mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x, \text{ si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

**42.-** Determine el valor mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sec x - \csc x, \text{ si } x \in \left\langle\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$$

A) 1  B) 5  C) 2  D) 0  E) 3

### *PERÍODO DE F.T.*

**43.-** Determine el período mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \text{sen}\ \frac{x}{2} + \text{sen}\ \frac{x}{3} + \text{sen}\ \frac{x}{4}$$

A) $2\pi$  B) $3\pi$  C) $6\pi$  D) $12\pi$  E) $24\pi$

**44.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = 3\ \text{sen}\ 3x + \cos\frac{6x}{5} + 1$$

evaluar el período mínimo de $f$:

A) $\frac{\pi}{5}$  B) $\frac{2\pi}{5}$  C) $\frac{\pi}{8}$  D) $\frac{3\pi}{10}$  E) $\frac{10\pi}{3}$

**45.-** Determine "$a + b$" si el periodo mínimo de las funciones:

$$f(x) = \cos^b(ax + b\pi) \wedge g(x) = \text{sen}^a(bx - a\pi)$$

son respectivamente: $\frac{\pi}{7}$ y $\frac{\pi}{6}$. Además "$a$ y $b$ por números impares"

A) 16  B) 18  C) 22  D) 24  E) 26

**46.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = \cos(\pi \cos x),$$

evaluar el período mínimo de la función $f$.

A) $\frac{\pi}{5}$  B) $\sqrt{\pi}$  C) $\frac{\pi}{3}$  D) $\frac{\pi}{2}$  E) $\pi$

**47.-** Calcule el período de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \tan^{15}\left(\frac{2x}{9}\right)$

b) $g(x) = \sec^{10}(4x)$

c) $h(x) = \csc^3\left(\frac{3x}{7}\right)$

A) $\frac{7\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{14\pi}{2}$  B) $\frac{9\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{3}$

C) $\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{12\pi}{3}$  D) $\frac{6\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$

E) $\frac{9\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{14\pi}{3}$

**48.-** Calcule el período mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \text{sen}\ x.\cos x.\tan x.\cot x.\sec x.\csc x$$

A) $\frac{\pi^2}{2}$  B) $\pi^3$  C) $\pi^2$  D) $\pi$  E) $\frac{\pi}{2}$

**49.-** Calcule el período mínimo de la función $f$ definida por:

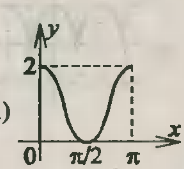
$$f(x) = \sec^2 x + \sec x.\csc x + \csc^2 x + \frac{1}{4}$$

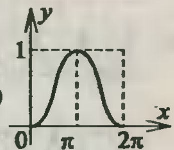
A) $\frac{\pi}{6}$  B) $\frac{\pi}{3}$  C) $\frac{\pi^3}{3}$  D) $\pi^3$  E) $\pi$

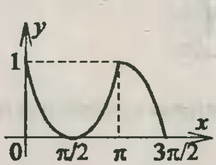
### *GRÁFICAS DE LAS F.T.*

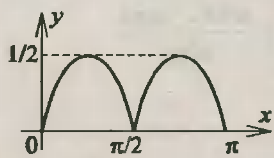
**50.-** Esbozar el gráfico de la función $f$ definida por:

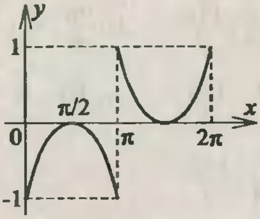
$$f(x) = \sqrt{\text{sen}^2 x - \text{sen}^4 x}$$

A)



B)



C)



D)


E) 

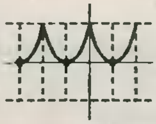

**51.-** El punto P($x_1$ ; $2a + b$) pertenece al sinusoide y el punto Q($x_2$ ; $a - b$) pertenece al cosinusoide. Si además: $x_1 + x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, calcular:

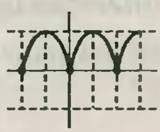
$$M = \frac{a+b}{a-b}$$

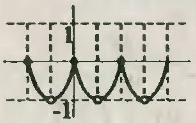
A) 1/3 B) 2/5 C) 3/5 D) 2/3 E) 4/5

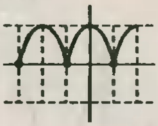
**52.-** Esbozar la gráfica de la función $f$ definida por:

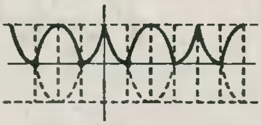
$$f(x) = |\tan x \cdot \cos x| - \left|\frac{\text{sen}2x}{\cos x}\right|$$

A) 

D) 

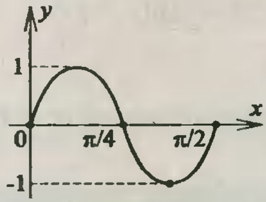
B) 

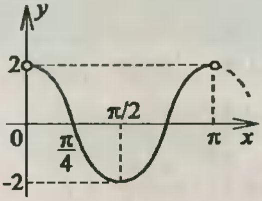

E) 

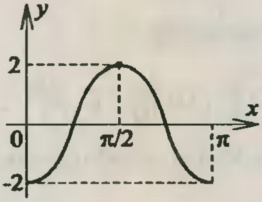
C) 

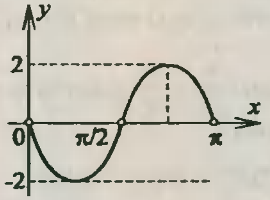
**53.-** Indicar el gráfico correspondiente a la función $f$ definida por:

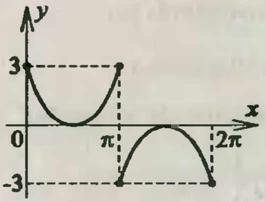
$$f(x) = \frac{\text{sen}3x - \text{sen}x}{\text{sen}x}$$

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**54.-** ¿En cuántos puntos la gráfica de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{x} - 4|\cos x|,$$

intersecta al eje X si $x \in \langle 0; 3\pi \rangle$?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**55.-** Determine en cuántos puntos, la gráfica de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 2\,|\cos x| - |\sec x|,$$

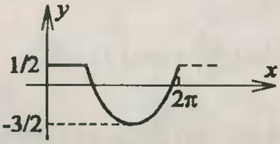
$x \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$ intersecta al eje X.

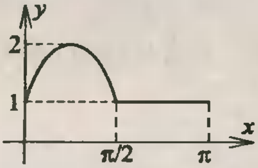
A) 2 puntos  B) 3 puntos  C) 4 puntos

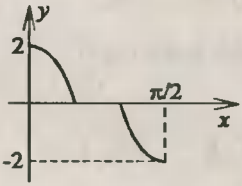
D) 5 puntos  E) 6 puntos

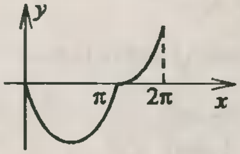
**56.-** Grafique la función $f$ definida por:

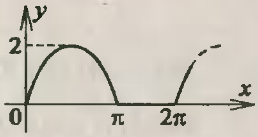
$$f(x) = |\text{sen}\,x| + \text{sen}\,x$$

A)


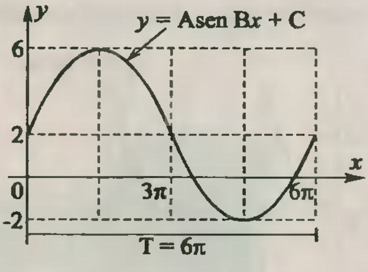

B)



C)



D)



E)



**57.-** Determine la regla de correspondencia del gráfico mostrado:

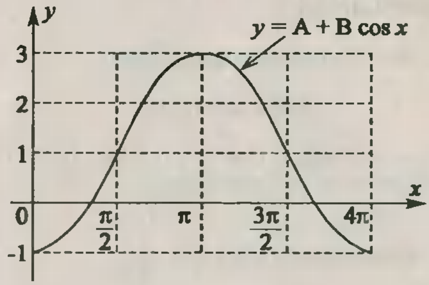



A) $4\,\text{sen}\,\dfrac{x}{5} + 2$  B) $4\,\text{sen}\,\dfrac{x}{3} + 2$

C) $4\,\text{sen}\,\dfrac{x}{7} + 2$  D) $4\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2} + 2$

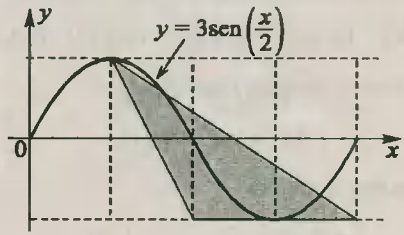
E) $4\,\text{sen}\,\dfrac{x}{6} + 2$

**58.-** Del gráfico mostrado, determine: "2A - B"




A) 3  B) 6  C) 4  D) 8  E) 12

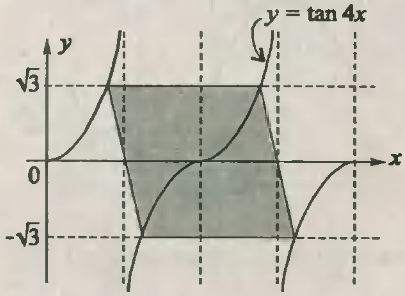
**59.-** Determine el área de la región sombreada del gráfico adjunto:




A) $8\pi u^2$  B) $6\pi u^2$  C) $4\pi u^2$

D) $3\pi u^2$  E) $5\pi u^2$

**60.-** Determine el área de la región sombreada:




A) $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,u^2$ B) $\frac{\pi}{5}\sqrt{3}\,u^2$ C) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}\,u^2$

D) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}\,u^2$ E) $\frac{\pi}{7}\sqrt{3}\,u^2$

### *MISCELÁNEA*

**61.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = \text{sen}\,x.\cos x,$$

indicar verdadero con (V) o falso con (F) de las siguientes proposiciones:

I) Es creciente en $x \in \left\langle 0;\ \frac{\pi}{4}\right\rangle$

II) $R_f = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\ \forall\, x \in \langle 0\,;\pi/4\rangle$

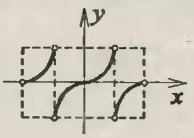
III) Posee periodo mínimo igual a $2\pi$

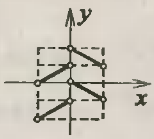
A) FVV B) VFF C) VVF D) FFV E) VFV

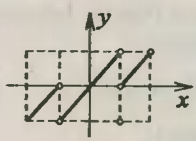
**62.-** Para la función $f$ definida por:

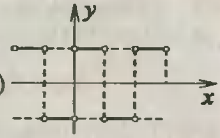
$$f(x) = \tan x.|\cot x|\,,$$

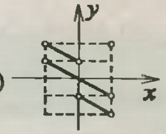
determine la gráfica.

A) 


D) 


B) 


E) 


C) 


**63.-** Determine los valores de "$x$" para los cuales la función $f$ no se encuentra definida, donde:

$$f(x) = \sec\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \csc\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

A) $\frac{\pi}{5}(2n \pm 1); n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{8}(2n \pm 1); n \in \mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{6}(3n \pm 1); n \in \mathbb{Z}$ E) $\frac{\pi}{9}(2n \pm 1); n \in \mathbb{Z}$

C) $\frac{\pi}{7}(2n \pm 1); n \in \mathbb{Z}$

**64.-** Dada la función $f$ definida por:

$$f(x) = (\cos|x|)\,|\text{sen}\,x.\csc x|$$

determine su rango.

A) $\langle -1\,;5\rangle$ B) $\langle -1\,;3\rangle$ C) $\langle -1\,;6\rangle$

D) $\langle -1\,;1\rangle$ E) $\langle -1\,;8\rangle$

**65.-** A partir de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{\cos x.\cot x}{|\cot x|}\,,$$

determine su rango.

A) $\langle -1;1\rangle \cup \langle 0;2\rangle$ D) $\langle -1;0\rangle \cup \langle 0;2\rangle$

B) $\langle -1;0\rangle \cup \langle 0;1\rangle$ E) $\langle -1;1\rangle \cup \langle 0;3\rangle$

C) $\langle -1;0\rangle \cup \langle 0;5\rangle$

**66.-** ¿Para qué valores de "$x$" en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ la función $f$ definida por:

$$f(x) = \tan^2 x - 3, \text{ es no negativa?}$$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{8} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{9} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

**67.-** ¿Para qué valores de "$x$" en $\left[ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right]$ la función $f$, definida por:

$$f(x) = \sqrt{|\text{sen}x| - |\cos x|} \text{ no está definida?}$$

A) $x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$

D) $x \in \left[ \frac{3\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$

B) $x \in \left[ \frac{6\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \right]$

E) $x \in \left[ \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$

C) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

**68.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = \cot x - \tan x,$$

determine todos los posibles valores de $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ para el cual la función siempre es positiva.

A) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$ C) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle$ E) $\langle -1; \pi \rangle$

**69.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = |\csc x| - |\sec x|,$$

determine todos los posibles valores de $x \in \langle 0; \pi \rangle$ para el cual la función no es negativa.

A) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{3}; \pi \right\rangle$

B) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{6}; \pi \right\rangle$

C) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2}; \pi \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{5}; \pi \right\rangle$

E) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

**70.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = 3 \tan x - 2 \text{ sen } 2x,$$

determine todos los posibles valores de $x \in \langle 0; \pi \rangle$. Identificar los valores de $x \in \langle 0; \pi \rangle$ para los cuales $f$ es siempre positiva:

I. $\pi/6$

II. $5\pi/6$

III. $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y III E) Todas

# Funciones Trigonométricas Inversas

CAP 18

En el capítulo anterior se estableció que una función asigna a cada elemento del dominio, una y solamente una imagen, que desde luego puede ser común a varios o a todos los elementos del dominio. Si la función tiene además la propiedad de que la imagen es exclusiva, o sea, que cada imagen en el recorrido es de un solo elemento del dominio, se dice entonces que está función establece una correspondencia biunívoca o biyectiva entre los elementos del dominio y del recorrido. Cuando tal es el caso, se puede definir una nueva función conocida como función inversa, respecto a la función original, cuyo recorrido sea el dominio de la primera y viceversa.

## 18.1. CONCEPTOS PRELIMINARES

### 18.1A) Función Inyectiva

Una función $f$ se llama inyectiva si y solo si $\forall\ x_1, x_2 \in$ Dom $f$, se cumple:

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$$

Es un conjunto de pares ordenados donde existe una correspondencia biunívoca entre las primeras y segundas componentes (Relación uno a uno)

### 18.1B Características de la Gráfica de una Función Inyectiva

Toda gráfica de una función inyectiva es cortada en un solo punto por cualquier recta horizontal (recta paralela al eje $x$)

### 18.1C Función Inversa

Si una función $f$ es biyectiva, es decir, es univalente y suryectiva, entonces existe su función inversa y se denota por $f^*$ o $f^{1}$.

### 18.1D Obtención de una Función Inversa

Dada una función $f$ biyectiva, la función inversa $f^*$ se obtiene intercambiando $x$ por $y \wedge y$ por $x$, verificándose que:

$$D_{f^*} = R_f \qquad\qquad R_{f^*} = D_f$$

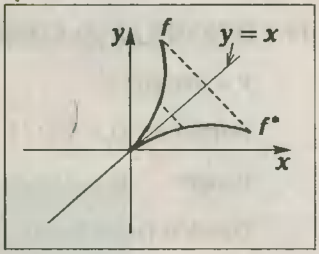
### 18.1E Obtención de la Gráfica de una Función Inversa

Dada la gráfica de una función $f$, para obtener la gráfica de su respectiva función inversa $f^*$ se procede de la siguiente manera.

i) Se traza la recta $y = x$ (recta que es eje de simetría entre $f$ y $f^*$).

ii) Se refleja la gráfica $f$ respecto al eje de simetría.

iii) La gráfica reflejada es la gráfica de la función $f^*$.




Las funciones trigonométricas por ser periódicas no son univalentes, sin embargo al restringir sus dominios, se logra que sean inyectivas. Dichas restricciones se muestran a continuación:

| FUNCIÓN | DOMINIO | RANGO |
|---|---|---|
| $y = \text{sen}\, x$ | $[-\pi/2 ; \pi/2]$ | $[-1 ; 1]$ |
| $y = \cos x$ | $[0 ; \pi]$ | $[-1 ; 1]$ |
| $y = \tan x$ | $\langle -\pi/2 ; \pi/2 \rangle$ | $\mathbb{R}$ |
| $y = \cot x$ | $\langle 0 ; \pi \rangle$ | $\mathbb{R}$ |
| $y = \sec x$ | $[0 ; \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2 ; \pi]$ | $\mathbb{R} - \langle -1 ; 1 \rangle$ |
| $y = \csc x$ | $[-\pi/2 ; 0\rangle \cup \langle 0 ; \pi/2]$ | $\mathbb{R} - \langle -1 ; 1 \rangle$ |

## 18.2 NOTACIÓN PARA UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA

Sea: $f.t(\theta) = n \Rightarrow \theta = \text{arc f.t}(n) \vee \theta = \text{f.t}^{-1}(n)$

Entonces: Si: $y = f.t(x) \Rightarrow x = \text{arc f.t}\,(y)$

Luego: $\boldsymbol{y = \text{arc f.t.}(x)}$

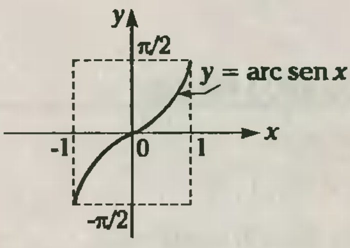
## 18.3 FUNCIÓN ARCO SENO

$\boldsymbol{y = \text{arc sen}\, x}$

Dominio: $D_f \in [-1; 1]$

Rango: $R_f \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Función Creciente



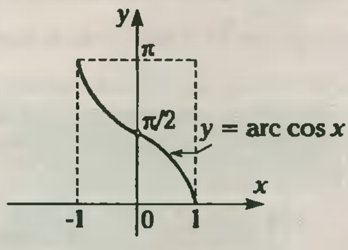
## 18.4 FUNCIÓN ARCO COSENO

$y = \text{arc cos } x$

Dominio: $D_f \in [-1; 1]$

Rango: $R_f \in [0 ; \pi]$

Función Decreciente



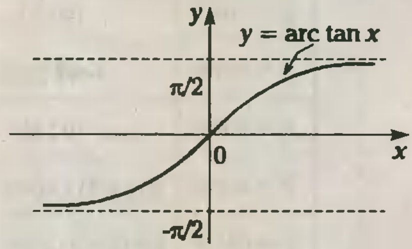

## 18.5 FUNCIÓN ARCO TANGENTE

$y = \text{arc tan } x$

Dominio : $D_f \in \mathbb{R}$

Rango: $R_f \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Función Creciente



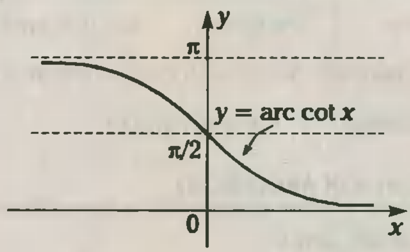

## 18.6 FUNCIÓN ARCO COTANGENTE

$y = \text{arc cot } x$

Dominio : $D_f \in \mathbb{R}$

Rango: $R_f \in \langle 0 ; \pi \rangle$

Función Decreciente




## 18.7 FUNCIÓN ARCO SECANTE

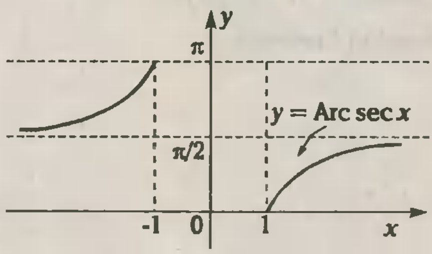
$y = \text{arc sec } x$

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \langle -1 ; 1 \rangle$

Rango: $R_f \in [0 ; \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2 ; \pi]$

Función Creciente: $\forall\ x \in \langle -\infty; -1\rangle$

Función Creciente: $\forall\ x \in [1; \infty\rangle$



## 18.8. FUNCIÓN ARCO COSECANTE

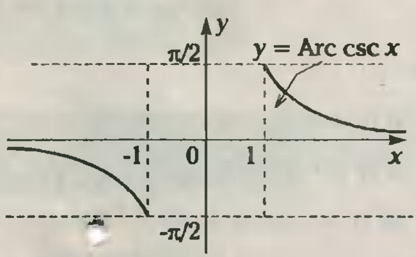
**$y = \text{arc csc } x$**

Dominio: $D_f \in \mathbb{R} - \langle -1\,;\,1\rangle$

Rango: $R_f \in [-\pi/2\,;\,0\rangle \cup \langle 0\,;\,\pi/2]$

Función Decreciente: $\forall\ x \in \langle -\infty\,;\,-1]$

Función Decreciente: $\forall\ x \in [1\,;\,\infty]$




## 18.9. PROPIEDADES

**18.9A** $\quad F.T.(\theta) = n \Rightarrow\ \text{arc } F.T.(n) = \theta$

**18.9B** $F.T.[\text{arc } F.T.(n)] = n \Leftrightarrow n \in D_{F.T.I}$

**18.9C** $\text{arc } F.T.[F.T.(\theta)] = \theta \Leftrightarrow \theta \in R_{F.T.I}$

Es decir:

| | |
|---|---|
| $\text{sen}(\text{arc sen } x) = x$ ; si: $x \in [-1\,;\,1]$ | $\text{arc sen}(\text{sen } x) = x$ ; si: $x \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ |
| $\cos(\text{arc cos } x) = x$ ; si: $x \in [-1\,;\,1]$ | $\text{arc cos}(\cos x) = x$ ; si: $x \in [0\,;\,\pi]$ |
| $\tan(\text{arc tan } x) = x$ ; si: $x \in \mathbb{R}$ | $\text{arc tan}(\tan x) = x$ ; si: $x \in \langle -\pi/2\,;\,\pi/2\rangle$ |
| $\cot(\text{arc cot } x) = x$ ; si: $x \in \mathbb{R}$ | $\text{arc cot}(\cot x) = x$ ; si: $x \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$ |
| $\sec(\text{arc sec } x) = x$ ; si: $x \in \mathbb{R} - \langle -1\,;\,1\rangle$ | $\text{arc sec}(\sec x) = x$ ; si: $x \in [0\,;\,\pi] - \{\pi/2\}$ |
| $\csc(\text{arc csc } x) = x$ ; si: $x \in \mathbb{R} - \langle -1\,;\,1\rangle$ | $\text{arc csc}(\csc x) = x$ ; si: $x \in [-\pi/2\,;\,\pi/2] - \{0\}$ |

**18.9D FTI de Variables Negativas**

| | |
|---|---|
| $\text{arc sen}(-x) = -\text{arc sen } x$ | $\text{arc cot}(-x) = \pi - \text{arc cot } x$ |
| $\text{arc cos}(-x) = \pi - \text{arc cos } x$ | $\text{arc sec}(-x) = \pi - \text{arc sec } x$ |
| $\text{arc tan}(-x) = -\text{arc tan } x$ | $\text{arc csc}(-x) = -\text{arc csc } x$ |

**18.9D Identidades Aditivas y Recíprocas de FT.I.**

| | |
|---|---|
| $\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \pi/2$ ; $x \in [-1\,;\,1]$ | $\text{arc sen } x = \text{arc csc}(1/x)$ ; $-1 \leq x \leq 1 - \{0\}$ |
| $\text{arc tan } x + \text{arc cot } x = \pi/2$ ; $x \in \mathbb{R}$ | $\text{arc cos } x = \text{arc sec}(1/x)$ ; $-1 \leq x \leq 1 - \{0\}$ |
| $\text{arc sec } x + \text{arc csc } x = \pi/2$ ; $x \in \mathbb{R} - [-1\,;\,1]$ | $\text{arc tan } x = \text{arc cot}(1/x)$ ; $x > 0$ |
| | $\text{arc tan } x = \text{arc cot}(1/x) - \pi$ ; $x < 0$ |

### 18.9F Identidad Aditiva Especial

$$\textbf{arc tan } x + \textbf{arc tan } y = \textbf{arc tan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

Donde:

$k = 0$ ; si $xy < 1$

$k = 1$ ; si $xy > 1 \wedge x > 0 ; y > 0$

$k = -1$ ; si $xy > 1 \wedge x < 0 ; y < 0$


**PROB. 1**

Resuelva la siguiente ecuación:

$$arc\ \text{sen}\, x + arc\ \cos\,(x^2 - 1) = \frac{\pi}{2}$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Aplicando la identidad aditiva, se puede afirmar que:

$$x = x^2 - 1 \qquad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-1)4}}{2(1)} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \vee \ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La única solución que satisface es:

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Puesto que: $\quad -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq x^2 - 1 \leq 1$

Es decir: $\quad -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq x^2 \leq 2$

$\therefore \quad -1 \leq x \leq 1 \wedge (-\sqrt{2} \leq x \leq 0 \vee x \leq \sqrt{2})$

**PROB. 2**

Resuelva la ecuación:

$$arc\ \text{sen}\, 2x = arc\ \cos x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

$$\underbrace{arc\,\text{sen}\, 2x}_{\alpha} = \underbrace{arc\,\cos x}_{\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

$$\text{sen}\,\alpha = 2x \quad \wedge \quad \cos\beta = x$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha = 2x \quad \wedge \quad \cos\alpha = x$$

Pero: $\quad \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

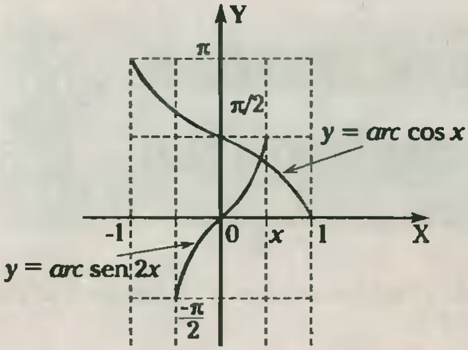
$$\Rightarrow \quad (2x)^2 + (x)^2 = 1$$

$$4x^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}\ ;\ -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Para ver cuál es la solución, lo hacemos a través de sus gráficas:




Se observa que hay solo un punto de intersección, y está en la parte positiva del eje $x$. Luego la solución es $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

**PROB. 3**

Calcula:

$$N = \tan\left[arc\tan\frac{1}{7} + arc\tan\frac{7}{24}\right]$$

**RESOLUCIÓN**

Aplicando la identidad aditiva especial:

$$N = \tan\left[arc\tan\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{7}{24}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{7}{24}}\right)+k\pi\right]$$

$$\Rightarrow\ N = \tan\left[arc\tan\left(\frac{73}{161}\right)+k\pi\right]$$

Para determinar el valor de $k$ aplicamos la regla:

Como: $\dfrac{1}{7}\times\dfrac{7}{24} = \dfrac{1}{24} < 1 \Rightarrow k = 0$

Luego: $N = \tan\left[arc\tan\left(\dfrac{73}{161}\right)+0\right]$

$$\Rightarrow\ N = \tan\left[arc\tan\frac{73}{161}\right]$$

$$\therefore\ \boxed{N = \frac{73}{161}}$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Hacer cambios de variables a los arcos, enseguida trazar triángulos rectángulos y aplicar el teorema de Pitágoras.*

2) *Tener en cuenta los rangos y los dominios de las funciones trigonométricas inversas, de forma que estén adecuadamente definidas.*

3) *Hacer las gráficas correspondientes, para ver los puntos de intersecciones, y de esa manera ver las soluciones.*

4) *Siempre que sea pertinente, sustituya arc tan x + arc tg y, reemplace por su equivalente:*

$$arc\ \tan x + arc\ \tan y = arc\ \tan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$


***DOMINIO DE LAS F.T. INVERSAS***

**01.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=\frac{1}{5}\cdot arc\,\text{sen}\,\sqrt{3x-1}+\frac{\pi}{4},$$

determine el dominio de la función.

A) $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ B) $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ C) $\left\langle\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left[\frac{3}{5};\frac{2}{3}\right]$

**02.-** Sea la función $f$ definida por :

$$f(x)=\sqrt{arc\text{sen}x-arc\cos x}-\frac{\pi}{8},$$

delimite el dominio de la función:

A) $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B) $\left[\frac{2}{\sqrt{2}};2\sqrt{2}\right]$ C) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$

D) $\left\langle\frac{2}{\sqrt{2}};2\right]$ E) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};2\right\rangle$

**03.-** Sea $f$ una función definida por :

$$f(x)=2\,arc\,\text{sen}\left(\frac{x-1}{2}\right)+3\,arc\cos\left(\frac{2x+1}{3}\right),$$

encuentra el dominio de la función:

A) $[-1;1]$ B) $\langle -1;+1\rangle$ C) $[-2;1]$

D) $[-2;2]$ E) $[2;-3]$

**04.-** ¿Para qué valor de "$x$" la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\dfrac{\pi}{9}+arc\text{sen}x}{\dfrac{\pi}{3}-arc\cos x}$$ , no está definida?

A) 2/3 B) 1/3 C) 2/5 D) 1/2 E) 3/4

**05.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=3\,arc\,\text{sen}\left(\frac{3x-1}{4}\right)+arc\tan(x-2)+\frac{\pi}{5},$$

determine el dominio de la función:

A) $[-1;5/3]$ B) $[1/4;5/3]$ C) $[1;-5/3]$

D) $[5/3;1]$ E) $[1;1/3]$

**06.-** Encontrar el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\text{ arc sec }(4x-3)$$

A) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\langle +1;+\infty\rangle$

B) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty\rangle$

C) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty\rangle$

D) $\left\langle-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty\rangle$

E) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty\rangle$

**07.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = 2\,arc\sec\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

delimite el dominio de la función:

A) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty ; \frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

C) $\left\langle -\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

E) $\left\langle -\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

**08.-** Identifica el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\sec\left(\sqrt{8x^2 - 1}\right)$$

A) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3} ; +\infty\right\rangle$

C) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\langle +\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

E) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3} ; +\infty\right\rangle$

**09.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\csc(2x^2 - 7)$$

A) $\langle -\infty ; -3] \cup [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}] \cup [2 ; +\infty\rangle$

B) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup [-\sqrt{3} ; +\sqrt{3}] \cup \langle 2 ; +\infty\rangle$

C) $\langle -\infty ; -3] \cup [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}] \cup [3 ; +\infty\rangle$

D) $\langle -\infty ; -2] \cup [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}] \cup [2 ; +\infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; -5] \cup [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}] \cup [3 ; +\infty\rangle$

**10.-** Delimite el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\sec(8x + 3) + arc\csc(5x - 2)$$

A) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\langle +\frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; +\infty\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty ; -\frac{3}{5}\right] \cup \left\langle +\frac{1}{5} ; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right\rangle$

C) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{5} ; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; +\infty\right\rangle$

E) $\left\langle -\infty ; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5} ; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; +\infty\right\rangle$

**11.-** Encuentra el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\csc x + arc\,\text{sen}\, x + arc\tan x$$

A) $\{-1; 1\}$ B) $\{1; 2\}$ C) $\{-2; -1\}$

D) $\{-3; 1\}$ E) $\{-1; 3\}$

### *RANGO DE LAS F. T. INVERSAS*

**12.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x) = 2\,arc\,\text{sen}(2x - 1) + 3\,arc\,\text{sen}(3x + 1),$$

determine el rango de la función.

A) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{5}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{7}\right\}$ D) $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**13.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = (arc\,\text{sen}\, x)^2 + 4\,|arc\,\text{sen}\, x| - 2\pi,$$

determine el rango de la función.

A) $\left[2\pi;\frac{\pi^2}{4}\right]$ B) $\left[-2\pi;\frac{\pi^2}{4}\right]$ C) $\left[-2\pi;\frac{\pi^2}{3}\right]$

D) $\left[\pi;\frac{\pi^2}{4}\right]$ E) $\left[-2\pi;\frac{\pi}{4}\right]$

**14.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=2\,arc\,\text{sen}\,x+arc\cos x+\frac{\pi}{2},$$

delimitar el rango de la función.

A) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

D) $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{3}\right]$

**15.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+2\,arc\cos\sqrt{x},$$

identifique el rango de la función.

A) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ B) $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ E) $\left[\frac{4\pi}{5};\pi\right]$

**16.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=2\,arc\tan(x^2+2x+2),$$

encontrar el rango de la función.

A) $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right\rangle$ B) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$ C) $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right\rangle$

D) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$ E) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

**17.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+2\,arc\tan x,\ x\in\langle 0;1]$$

determine el rango de la función.

A) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ B) $\left\langle\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ C) $\left\langle-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

D) $\left\langle\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

**18.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=arc\cot(\text{sen}^4x+\cos^4x)$$

A) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{125\pi}{360}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{127\pi}{365}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{127\pi}{360}\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{120\pi}{360}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{125\pi}{365}\right]$

**19.-** Delimitar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=arc\cot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

A) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ C) $\left\langle\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

D) $\left\langle\frac{3\pi}{4};\frac{4\pi}{3}\right]$ E) $\left\langle\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

**20.-** Identificar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=arc\cos x+arc\cot x$$

A) $\left[\frac{\pi}{7};\frac{\pi}{4}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

**21.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x)=(arc\tan x)(arc\cot x)\ ,\ \text{si: } x>1$$

A) $\left\langle-\infty;\frac{\pi^2}{15}\right]$ D) $\left\langle-\infty;\frac{\pi^2}{16}\right]$

B) $\left\langle-\infty;\frac{\pi^2}{16}\right\rangle$ E) $\left\langle-\infty;\frac{2\pi}{16}\right\rangle$

C) $\left\langle-\infty;\frac{3\pi^2}{15}\right\rangle$

**22.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\ \sec(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

A) $\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

B) $\left[0;\frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right\rangle$

C) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

D) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

E) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

**23.-** Hallar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \csc\,(arc\ \sec x)$$

A) $[1;+\infty\rangle$ B) $\langle -1;+1\rangle$ C) $[-1;+1\rangle$

D) $\langle -1;1\rangle$ E) $\langle 1;+\infty\rangle$

***DOMINIO Y RANGO DE LAS F.T. INVERSAS***

**24.-** Determine el dominio y rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \left|\frac{2}{3}.arc\ \operatorname{sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right)+\frac{\pi}{6}\right|$$

A) $[-1;4]$ y $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ D) $[-4;1]$ y $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

B) $[1;4]$ y $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ E) $[-3;+2]$ y $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

C) $[-1;3]$ y $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

**25.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{2}{3}\ .\ arc\ \operatorname{sen}(3x-2) + \frac{\pi}{4},$$

determine el dominio y rango de la función.

A) $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right]$

B) $\left[\frac{1}{3};1\right]$ y $\left[\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right]$

C) $\left[\frac{1}{3};1\right]$ y $\left[\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$

D) $\left[\frac{1}{4};1\right]$ y $\left[\frac{2\pi}{12};\frac{5\pi}{7}\right]$

E) $\left[\frac{1}{3};3\right]$ y $\left[\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right]$

**26.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{4}\ .\ arc\ \cos\left(\frac{2+x}{4}\right) + \frac{3\pi}{8},$$

determine el dominio y rango de la función.

A) $[1;2]$ y $\left[\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$ D) $[-6;2]$ y $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right]$

B) $[-3;2]$ y $\left[\frac{\pi}{3};\frac{6\pi}{5}\right]$ E) $[-3;2]$ y $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{5}\right]$

C) $[-6;-2]$ y $\left\langle\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right\rangle$

**27.-** Determine el dominio y rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \left|arc\ \cot(x-1) - \frac{\pi}{6}\right|$$

A) $\mathbb{R}$ y $\left[0;\frac{\pi}{5}\right\rangle$ D) $\mathbb{R}$ y $\left[0;\frac{3\pi}{6}\right\rangle$

B) $\mathbb{R}$ y $\left[0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$ E) $\mathbb{R}$ y $\left[0;\frac{5\pi}{3}\right\rangle$

C) $\mathbb{R}$ y $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right\rangle$

**28.-** Establezca el dominio y rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\ \operatorname{sen}(-x) + arc\ \cos(-x) + arc\ \csc(-x) + arc\ \sec(-x)$$

A) $\{-1;1\}$ y $\{\pi\}$ D) $\{-1;1\}$ y $\{3\pi\}$

B) $\{-3;1\}$ y $\{\pi\}$ E) $\{-2;1\}$ y $\{2\pi\}$

C) $\{1;3\}$ y $\{\pi\}$

**29.-** Determine el dominio y rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = arc\ \text{sen}\ x + arc\ \sec\ x + 1$$

A) $\{1\,;1\}$ y $\left\{\frac{\pi}{2}+3\right\}$

B) $\{-1\,;3\}$ y $\left\{\frac{\pi}{3}+1\right\}$

C) $\{-1\,;1\}$ y $\left\{\frac{\pi}{2}+1\right\}$

D) $\{-2\,;1\}$ y $\left\{\frac{\pi}{2}+3\right\}$

E) $\{-1\,;1\}$ y $\left\{\frac{\pi}{2}+2\right\}$

**30.-** Determine el dominio y rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{4}\,arc\,\csc(3x) + \pi$$

A) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ y $\left\langle\frac{\pi}{8};\pi\right\rangle \cup \left\langle\pi;\frac{9\pi}{8}\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ y $\left[\frac{\pi}{8};\pi\right\rangle \cup \left\langle\pi;\frac{\pi}{5}\right]$

C) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{8};+\infty\right\rangle$ y $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right\rangle \cup \left\langle\pi;\frac{\pi}{9}\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty;\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ y $\left\langle\frac{\pi}{8};\pi\right\rangle \cup \left\langle\pi;\frac{9\pi}{8}\right]$

E) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ y $\left[\frac{7\pi}{8};\pi\right\rangle \cup \left\langle\pi;\frac{9\pi}{8}\right]$

### *PROPIEDADES DE LAS F.T. INVERSAS*

**31.-** Determine el valor de:

$$M = \frac{arc\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + arc\tan(1)}{arc\cos(-1)}$$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{3}{15}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{12}$

**32.-** Calcular el valor de:

$$M = \cos\,[arc\,\tan(-\sqrt{3}) + arc\ \text{sen}\ 1]$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**33.-** Determine el valor de:

$$M = \tan\left(\pi + 2\,arc\,\tan\frac{1}{2}\right)$$

A) 2/5 B) 3/4 C) 4/3 D) 1/2 E) 1/5

**34.-** Hallar el valor de:

$$M = arc\ \text{sen}\ (\text{sen}\ 5) + arc\ \cos(\cos 6)$$

A) 1 B) -2 C) 3 D) 2 E) - 1

**35.-** Evaluar M, si se sabe que:

$$M = arc\,\cos\left(\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{3\pi}{6}$

**36.-** Calcular el valor de:

$$M = \cot\left(\frac{1}{2}\,arc\,\tan\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**37.-** Determine el valor de:

$$M = 3\cos(2\,arc\,\cos\sqrt{2/3}\,)$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

**38.-** Determine el valor de:

$$M = \cot\left\{\frac{1}{2}\,arc\,\tan\left[\cos(2\,arc\,\text{sen}\,\sqrt{7/30}\,)\right]\right\}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**39.-** Encontrar el valor de:

$$M = \text{sen}^2\left(arc\,\cos\sqrt{\frac{7}{8}}\right) + \cos^2\left(arc\,\text{sen}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**40.-** Evaluar M si se sabe que:

$$M=\frac{arc\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{arc\tan\left(2\sqrt{2}\right)}$$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2/3 E) 3

**41.-** Encontrar el valor de:

$$M=\ \text{sen}[2\ arc\tan(\cos(2\ arc\tan\sqrt{5}))]$$

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{-13}{15}$ C) $\frac{-9}{10}$ D) $\frac{-12}{13}$ E) $\frac{5}{13}$

**42.-** Calcular el valor de:

$$M=13\,\text{sen}\left(arc\tan\frac{12}{5}\right)+17\cos\left(arc\cot\frac{8}{15}\right)$$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

**43.-** Identificar el valor de:

$$M=\cos\left(arc\,\text{sen}\frac{1}{3}+arc\cos\frac{1}{3}-arc\tan\frac{1}{2}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{7}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**44.-** Evaluar M, si:

$$M=\cos^4\left(3\ arc\cos\frac{1}{3}\right)-\text{sen}^4\left(3\ arc\,\text{sen}\frac{1}{3}\right)$$

A) 1 B) 3 C) 0 D) 2 E) 4

**45.-** Reducir la siguiente expresión:

$$M=\frac{\frac{1}{4}arc\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arc\tan(1)}{\frac{1}{2}arc\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)+arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 5

**46.-** Determine el valor de M, si:

$$M=\frac{2\tan^2\left(arc\,\text{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\,\text{sen}^2\left(arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{4\cos^2\left(arc\cos\frac{1}{2}\right)}$$

A) 3/5 B) 5/4 C) 2/3 D) 1/4 E) 1/3

**47.-** Calcular el valor de W, si:

$$W=arc\tan\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)-arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $-\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**48.-** Si: $\frac{arc\,\text{sen}\ x}{arc\cos x}=\frac{a}{b}$,

determine una expresión para $arc$ sen $x$.

A) $\frac{a\pi}{(a+b)^2}$ B) $\frac{a\pi}{2(a+b)}$ C) $\frac{a\pi}{(a+b)}$

D) $\frac{a\pi}{2(a-b)}$ E) $\frac{a\pi}{(a-b)^2}$

**49.-** Determine el valor de:

$$M=\frac{\tan(2arc\,\text{sen}\ x+arc\cos x)}{\tan(2arc\,\text{sen}\ x+3arc\cos x)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**50.-** Si se cumple que:

$$arc\tan x+arc\tan y+arc\tan z=\pi,$$

determinar el valor de M:

$$M=\frac{x+y+x+2xyz}{x+y+z}$$

A) 3 B) 2 C) 5 D) 1 E) 0

**51.-** Si: $0\le x<\frac{\pi}{4}$, reducir la expresión:

$$M=\text{arc}\tan\left(\frac{1-\text{sen}2x-\cos2x}{1-\text{sen}2x+\cos2x}\right)$$

A) $x$ B) $2x$ C) $-x$ D) $-2x$ E) $3x$

**52.-** Determine el valor de:

$$M=\sqrt{\pi^2-2\pi.arc\ \cos\ x+\sqrt{arc\ \text{sen}\ x-\frac{\pi}{2}}}$$

A) $2\pi$ B) $\pi/2$ C) $3\pi$ D) $\pi/3$ E) $\pi$

**53.-** Calcular el valor de M:

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2-2\pi.arc\ \cos\ x+\sqrt{arc\ \text{sen}\ x-\frac{\pi}{2}}}}{arc\ \tan\ x+arc\ \text{sen}(x-1)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**54.-** Determine el valor de $\theta$, si:

$$\theta=arc\ \cos\ \frac{1}{7}\ +\ arc\ \cos\ \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{2}$

**55.-** Si se verifica que:

$$x=arc\ \tan\ 1+arc\ \tan\ \frac{1}{2}+arc\ \tan\ \frac{1}{3},$$

determine el valor de: "sen $x$"

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**56.-** Determine la siguiente suma:

$$M=arc\tan\frac{1}{3}+arc\tan\frac{1}{7}+arc\ \tan\frac{1}{13}+...+$$
$$arc\ \tan\ \frac{1}{n^2+n+1}$$

A) $arc\ \tan\left(\frac{n}{n+1}\right)$ D) $arc\ \tan\left(\frac{n}{n+2}\right)$

B) $arc\ \tan\left(\frac{n}{n^2+2}\right)$ E) $arc\ \tan\left(\frac{2n}{n+2}\right)$

C) $arc\ \tan\left(\frac{n}{n-2}\right)$

**57.-** Calcular:

$$W=\frac{\cot(3arc\ \cos\ x+2arc\ \text{sen}\ x)}{\cot(3arc\ \cos x+4arc\ \text{sen}\ x)}$$

A) 2 B) -3 C) 1 D) 5 E) -1

**58.-** Evaluar W, si:

$$W=\sec^2\left(arc\ \cot\frac{3}{2}\ -arc\ \cot\ 3\right)$$

A) $M\frac{135}{120}$ B) $M\frac{110}{111}$ C) $M\frac{115}{125}$

D) $M\frac{130}{121}$ E) $M\frac{127}{121}$

**59.-** Determine la expresión equivalente de:

$$W=arc\cos(8x^4-8x^2+1),$$

y su correspondiente restricción.

A) 4 $arc$ sen $x$, si $x\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B) 2 $arc$ sen $x$, si $x\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

C) 4 $arc$ sen $x$, si $x\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

D) 2 $arc$ sen $x$, si $x\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

E) 3 $arc$ sen $x$, si $x\in\left[0;\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

**60.-** Determine la expresión equivalente de:

$$W=2\ arc\cos x,$$

asimismo su respectiva restricción.

A) $arc\cos(x^2-1)$ , si $x\in[0;1]$

B) $arc\cos(2x^2+1)$ , si $x\in[0;1]$

C) $arc\cos(2x-1)$ , si $x\in[1;0]$

C) $arc\cos(2x-1)$ , si $x \in [1;0]$

D) $arc\cos(2x+1)$ , si $x \in [1;1]$

E) $arc\cos(2x^2-1)$ , si $x \in [0;1]$

**61.-** Encontrar la expresión equivalente de:

$$W = 3\,arc\tan x,$$

asimismo su respectiva restricción.

A) $arc\tan\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, si $|x| < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B) $arc\tan\left(\dfrac{2x-x^3}{1+3x^2}\right)$, si $|x| < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C) $arc\tan\left(\dfrac{2x-x^3}{1+3x}\right)$, si $|x| < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

D) $arc\tan\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, si $|x| \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

E) $arc\tan\left(\dfrac{3x+x^2}{1-3x^3}\right)$, si $|x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**62.-** Calcular el valor de $\alpha$:

$$\alpha = arc\cot\left(\frac{\cot 2 - \tan 2}{2}\right)$$

A) $3-\pi$ B) $4-\pi$ C) $4-2\pi$

D) $4+\pi$ E) $4+2\pi$

**63.-** Encontrar el valor de $\theta$, si:

$$\theta = arc\csc(\csc 8) - arc\sec(\sec 2)$$

A) $\pi-10$ B) $3\pi-10$ C) $2\pi-10$

D) $3\pi+10$ E) $\pi+9$

**64.-** Determinar el valor de $\beta$:

$$\beta = arc\cot(\cot 4) + arc\sec(\sec 6)$$

A) $2\pi-2$ B) $\pi+2$ C) $\pi-2$

D) $3\pi-2$ E) $2\pi+2$

**65.-** Evaluar W, si:

$$W = arc\cot(-1) + \frac{1}{2}.arc\sec(-\sqrt{2}) + 3\,arc\csc(2)$$

A) $\dfrac{8\pi}{13}$ B) $\dfrac{11\pi}{3}$ C) $\dfrac{13\pi}{5}$ D) $\dfrac{8\pi}{7}$ E) $\dfrac{13\pi}{8}$

**66.-** Reducir la expresión:

$$\omega = 5\cos\left(arc\tan\left(-\frac{7}{24}\right)\right) + \cot\left(arc\ \mathrm{sen}\left(-\frac{5}{13}\right)\right) + \sqrt{6}\ \mathrm{sen}(arc\sec(-5))$$

A) $\dfrac{24}{3}$ B) $\dfrac{20}{5}$ C) $\dfrac{24}{7}$ D) $\dfrac{22}{7}$ E) $\dfrac{24}{5}$

**67.-** Determinar el valor de:

$$\theta = \tan(3\,arc\tan 5) - \cot(3\,arc\cot 5)$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 2 E) 4

**68.-** Si se sabe que:

$$\alpha = arc\sec\left(\sqrt{\sec^4\frac{\pi}{12} - 16\sec^2\frac{\pi}{12} + 20}\right),$$

el valor de $\alpha$ es:

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{5}$ C) $\dfrac{\pi}{3}$ D) $\dfrac{3\pi}{2}$ E) $\dfrac{2\pi}{3}$

**69.-** Determinar W, si:

$$W = arc\cot(3) + arc\cot(7) + arc\cot(13)$$

A) $arc\tan\left(\dfrac{3}{5}\right)$ C) $arc\tan\left(\dfrac{2}{5}\right)$ B) $arc\tan\left(\dfrac{5}{3}\right)$

D) $arc\tan\left(\dfrac{3}{2}\right)$ E) $arc\tan\left(\dfrac{3}{4}\right)$

**70.-** Simplificar M, si:

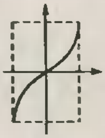
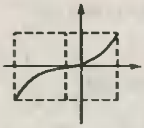
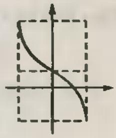
$$M = \frac{arc\sec\left(\dfrac{\sqrt{17}}{4}\right)}{arc\tan\left(\dfrac{8}{15}\right)}$$

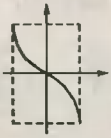
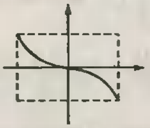
A) 1/3 B) 3/2 C) 1/2 D) 1/4 E) 1/5

## *SITUACIONES GRÁFICAS*

**71.-** Bosquejar el gráfico de:

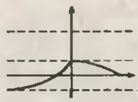
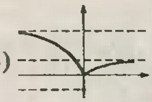
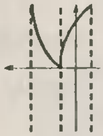
$$y = 4 \, . \, arc \cos \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

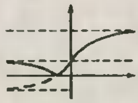
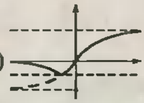
A)  B)  C) 

D)  E) 

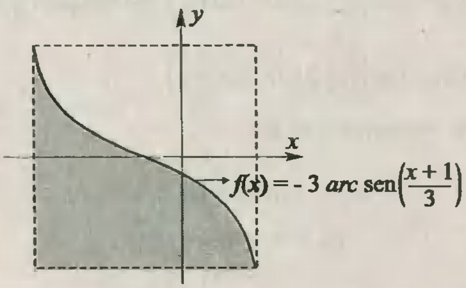
**72.-** Identificar el gráfico de:

$$f(x) = \left| arc \tan x + \frac{\pi}{4} \right|$$

A)  B)  C) 

D)  E) 

**73.-** De la figura mostrada determine el área de la región sombreada:




A) $3\pi u^2$ B) $9\pi u^2$ C) $4\pi u^2$ D) $5\pi u^2$ E) $2\pi u^2$

**74.-** Resolver la inecuación:

$$arc \tan(x) - arc \cot(x) < 0$$

A) $x \in \langle -\infty ; 1 \rangle$ D) $x \in \langle -\infty ; 1]$

B) $x \in \langle -\infty ; 2 \rangle$ E) $x \in \langle -\infty ; 3 \rangle$

C) $x \in \langle \infty ; 3]$

**75.-** Determinar el conjunto solución para $x$:

$$arc \sec(x) - arc \csc(x) \geq 0$$

A) $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [\sqrt{2} \, ; +\infty \rangle$

B) $x \in \langle -\infty ; -1] \cup \langle \sqrt{2} \, ; +\infty \rangle$

C) $x \in \langle -\infty ; \sqrt{2}\,] \cup [1 \, ; +\infty \rangle$

D) $x \in \langle -\infty ; 1] \cup [\sqrt{2} \, ; +\infty \rangle$

E) $x \in \langle -\infty ; -2] \cup [\sqrt{2} \, ; +\infty \rangle$

**76.-** Resolver la inecuación:

$$arc \sec(2x) \geq \frac{\pi}{4}$$

A) $x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \, ; +\infty \right]$

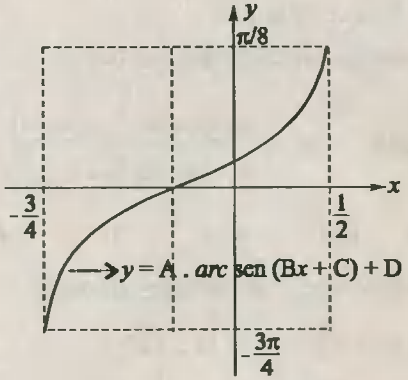
B) $x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{2}{\sqrt{2}} \, ; +\infty \right]$

C) $x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{4} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \, ; +\infty \right]$

D) $x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2} \, ; +\infty \right]$

E) $x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \, ; +\infty \right]$

**77.-** Del gráfico mostrado determine la regla de correspondencia para «$y$».




A) $\frac{7}{8}.arc\ \text{sen}\left(\frac{8}{5}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{5\pi}{16}$

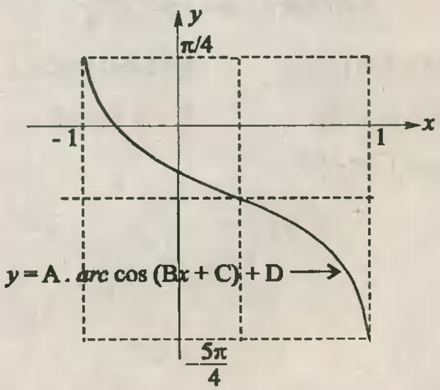
B) $\frac{7}{8}.arc\ \text{sen}\left(\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}\right)+\frac{5\pi}{16}$

C) $\frac{3}{8}.arc\ \text{sen}\left(\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}\right)-\frac{5\pi}{16}$

D) $\frac{7}{8}.arc\ \text{sen}\left(\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}\right)-\frac{3\pi}{16}$

E) $\frac{7}{8}.arc\ \text{sen}\left(\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}\right)-\frac{5\pi}{16}$

**78.-** Del gráfico mostrado determine la regla de correspondencia.




A) $\frac{3}{2}.\,arc\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{5\pi}{4}$

B) $\frac{3}{2}.\,arc\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{5\pi}{4}$

C) $\frac{2}{3}.\,arc\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5\pi}{4}$

D) $\frac{3}{2}.\,arc\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5\pi}{4}$

E) $\frac{3}{2}.\,arc\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3\pi}{4}$

**79.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=2arc\ \text{sen}(2x-1)+\frac{\pi}{3},$$

determine el punto en el cual la gráfica de $f$ intercecta al eje $x$.

A) $\left(\frac{1}{3};0\right)$ B) $\left(\frac{1}{4};0\right)$ C) $\left(\frac{1}{5};0\right)$

D) $\left(\frac{1}{4};1\right)$ E) $\left(\frac{1}{5};1\right)$

### *MISCELÁNEA*

**80.-** Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=arc\tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

determine el máximo valor de $f$.

A) π/3 B) 2π/4 C) π/4 D) π/2 E) 2π/3

**81.-** Determine el valor máximo de la función $f$ definida por:

$$f(x)=arc\cot(\tan^2x+\cot^2x-1)$$

A) π/2 B) π/3 C) π/6 D) π/5 E) π/4

**82.-** Resolver: $arc\cos(\sqrt{3}\,x)+arc\cos x=\frac{\pi}{2}$

A) 1/3 B) 3/4 C) 1/5 D) 2/3 E) 1/2

**83.-** Determine el valor de "$x$" en la igualdad :

$$\text{arc tan}\,\{\cot[\textit{arc}\ \text{sen}\ \sqrt{2x}\ ]\} = \frac{\pi}{6}$$

A) 3/8  B) 5/3  C) 3/4  D) 8/3  E) 4/5

**84.-** Determine el valor de "$x$" si:

$$\textit{arc}\ \tan x + \textit{arc}\ \tan\frac{1}{2} + \textit{arc}\ \tan\frac{1}{3} = \textit{arc}\ \text{sen}\ x + \textit{arc}\ \cos x$$

A) 2  B) 1  C) 4  D) 5  E) 3

**85.-** Resolver la ecuación:

$$\textit{arc}\ \tan\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right) = \textit{arc}\ \sec\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**86.-** Resolver para $x$:  $\textit{arc}\ \cos(x) = \pi\ .\ \csc(y)$

A) 1  B) 2  C) -1  D) -2  E) 3

**87.-** Calcular el valor de "$x$", si:

$$\textit{arc}\ \cos\frac{3}{5} + 2\,\textit{arc}\ \cot 2 = \textit{arc}\ \csc x$$

A) $\frac{25}{24}$  B) $\frac{24}{25}$  C) $\frac{20}{24}$  D) $\frac{23}{21}$  E) $\frac{25}{21}$

**88.-** Si se verifica la igualdad:

$$\textit{arc}\ \cot\left[\cot x.\cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\cot\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right] = 3x,$$

entonces, ¿qué valores puede tomar "$x$"?.

A) $x \in \left\langle 1\,;\frac{\pi}{3}\right\rangle$  D) $x \in \left\langle 0\,;\frac{\pi}{3}\right\rangle$

B) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}\,;0\right\rangle$  E) $x \in \langle 3\,;\pi\rangle$

C) $x \in \langle 2\,;\pi\rangle$

**89.-** Si se cumple que:

$$\textit{arc}\ \text{sen}\{\cos(\textit{arc}\ \tan[\cot(\textit{arc}\ \sec(\csc x))])\} = \frac{\pi}{6},$$

calcular:  $$W = \frac{\textit{arc}\ \text{sen}(\cos x + \cos 2x)}{\textit{arc}\ \tan\left[\cot\left(2x+\frac{\pi}{18}\right)\right]}$$

A) 1  B) 2  C) 0  D) 3  E) 4

**90.-** Resolver:  $\textit{arc}\ \csc|x| > \textit{arc}\ \sec|x|$

A) $x \in \langle -\sqrt{2}\,;-1] \cup [1\,;\sqrt{2}\rangle$

B) $x \in \langle -\sqrt{2}\,;-1] \cup [1\,;\sqrt{2}\rangle$

C) $x \in \langle -\sqrt{2}\,;1] \cup [1\,;\sqrt{2}\rangle$

D) $x \in \langle -\sqrt{2}\,;-1] \cup [-\sqrt{2}\,;1\rangle$

E) $x \in \langle -\sqrt{2}\,;1] \cup [1\,;\sqrt{2}\rangle$

**91.-** Si: $x \in [-1\,;1]$, determine el máximo valor de:

$$y = 3\,\textit{arc}\ \tan x - \frac{\pi}{4}$$

A) $\pi/2$  B) $\pi/3$  C) $\pi/6$  D) $\pi/5$  E) $\pi/4$

**92.-** Resolver la siguiente inecuación:

$$2\,\textit{arc}\ \tan x + \textit{arc}\ \cot x \leq \frac{3\pi}{4}$$

A) $x \in \langle -\infty\,;1]$  D) $x \in \langle -\infty\,;2\rangle$

B) $x \in \langle -\infty\,;2]$  E) $x \in \langle -\infty\,;3]$

C) $x \in \langle -\infty\,;1\rangle$

CAP 19

# Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

Si se tienen dos funciones $f$ y $g$ con una misma variable $x$, tal que: $f(x) = g(x)$, se denomina ecuación con una incógnita, donde $x$ es la variable llamada incógnita, y los valores que toma $x$ se denomina solución de la ecuación.

Una ecuación se llama algebraica, si cada una de las funcionas contenidas en $f(x)$ y $g(x)$ son algebraicas (racional o irracional), donde además una de estas funciones puede ser constante. Una ecuación se llama trascendente, si por lo menos una de las funciones contenidas $f(x)$ o $g(x)$ no es algebraica.

Una ecuación trigonométrica es de tipo trascendente, cuando cada una de las funciones contenidas en $f(x)$ o $g(x)$ son funciones trigonométricas de la forma $f.t.\,(ax + b)$, en donde los términos $a, b \in \mathbb{R}$, $(a \neq 0)$.

Si se tienen desigualdades de la forma: $\quad f.t_1(x) > f.t_2(x) \;\vee\; f.t_1(x) < f.t_2(x)$ ;

se denominan inecuaciones trigonométricas. Para que esta relación se constituya en ecuación o inecuación trigonométrica, la variable debe encontrarse afectada por algún operador trigonométrico.

Las ecuaciones trigonométricas son igualdades de expresiones trigonométricas, que se verifican para ciertos valores de su variable angular.

## 19.1. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES (E.T.E.)

Toda ecuación trigonométrica de la forma: $\quad \mathbf{F.T.(}\boldsymbol{ax + b}\mathbf{) = }\boldsymbol{c}$

Se denomina ecuación trigonométrica elemental, donde:

i) $a, b, c \in \mathbb{R}$ ; $a \neq 0$ ; $c \in$ Ran F.T.

ii) $(ax + b)$: arco ; $x$: la variable angular

## 19.2. RESOLUCIÓN DE LAS E.T.E.

i) $\text{sen}\,(ax + b) = c \quad \Rightarrow \quad (ax + b) = k\pi + (-1)^k.\text{arc sen}\,(c)$ ; $k \in \mathbb{Z}$

ii) $\cos\,(ax + b) = c \quad \Rightarrow \quad (ax + b) = 2\,k\pi \pm \text{arc cos}\,(c)$ ; $k \in \mathbb{Z}$

iii) $\tan\,(ax + b) = c \quad \Rightarrow \quad (ax + b) = k\pi + \text{arc tan}\,(c)$ ; $k \in \mathbb{Z}$

## 19.3. SOLUCIÓN PRINCIPAL

Es la menor solución no negativa que satisface a la ecuación trigonométrica.

## 19.4. RESOLUCIÓN DE LAS ECUAC. TRIGON. EN SU FORMA GENERAL

Resolver una ecuación trigonométrica, consiste en reducirla , hasta obtener otra de la forma de una ecuación trigonométrica elemental y luego solucionarla.

## 19.5. INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son desigualdades de la forma:

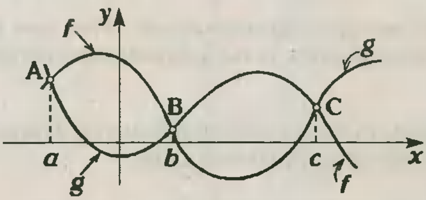
i) $f.t_1(x) + f.t_2(x) > 0 \ \vee \ f.t_1(x) + f.t_2(x) < 0$

También pueden ser de la forma:

ii) $f.t_1(x) + f.t_2(x) \geq 0 \ \vee \ f.t_1(x) + f.t_2(x) \leq 0$

## 19.6. RESOLUCIÓN DE LAS INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para resolver una inecuación trigonométrica, primero se debe calcular las coordenadas de los puntos de intersección igualando dichas funciones.

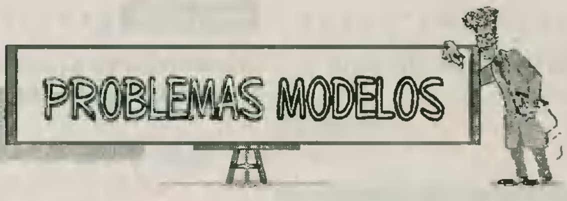



En el gráfico mostrado se observa que:

i) En los puntos A, B, C: $f = g$

ii) En el intervalo $\langle a \,;\, b \rangle$: $f < g$

iii) En el intervalo $\langle b \,;\, c \rangle$: $f > g$




**PROB. 1**

Resuelva la ecuación:

$$2\,\text{sen}\,x + \cot x = \csc x$$

**RESOLUCIÓN**

En primer lugar hay que analizar si la ecuación está o no definida para algunos valores de la variable angular. Esto lo determinamos transformando a senos y cosenos:

$$2\text{sen}\,x + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

De esta relación está claro que:

$$\text{sen}\,x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi\,; k \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

Efectuando operaciones, se tiene:

$$2\,\text{sen}^2 x + \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2\cos^2 x + \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$\cos x = -1/2 \quad \vee \quad \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\,;\; x = 2\,k\pi\,;\; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Pero de acuerdo con (*) se sabe que: $x \neq k\pi$

$$\Rightarrow \quad x = 2k\pi \text{, no es solución}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2\,k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$$

**PROB. 2**

Resolver la ecuación:

$$\sec^2 \frac{x}{3} - 2\tan\frac{x}{3} = 0$$

**RESOLUCIÓN**

En primer lugar las funciones $\sec\frac{x}{3}$ y $\tan\frac{x}{3}$ deben estar definidas, lo cual requiere que:

$$\cos\frac{x}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} \neq (2k+1)\pi/2$$

$$\Rightarrow \quad x \neq (2k+1)\frac{3\pi}{2}\,;\; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego, en la ecuación dada, aplicamos la identidad pitagórica de la $\sec^2 x$, así:

$$1 + \tan^2\frac{x}{3} - 2\tan\frac{x}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\tan\frac{x}{3} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{x}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} = k\pi + \pi/4 \quad \therefore \quad \boxed{x = 3\,k\pi + \frac{3\pi}{4}}$$

**PROB. 3**

Calcule la suma de soluciones de la siguiente ecuación:

$$\cos 6x = \left(\frac{1 + \text{sen}\,6x}{\sec 2x}\right) . \csc 2x\,;\; \forall x \in [0\,;\pi]$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Expresamos todo en términos de seno y coseno y tendremos:

$$\cos 6x = \left(\frac{1+\operatorname{sen}6x}{\frac{1}{\cos 2x}}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}2x}$$

De aquí se deduce que los valores no admitidos son:

$$\cos 2x \neq 0 \quad \wedge \quad \operatorname{sen} 2x \neq 0$$

Es decir: $\quad 2x \neq \frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{4}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Entonces: $\cos 6x = \dfrac{\cos 2x(1+\operatorname{sen}6x)}{\operatorname{sen}2x}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x \cos 6x = \cos 2x + \operatorname{sen} 6x \cos 2x$

$\operatorname{sen} 2x \cos 6x - \cos 2x \operatorname{sen} 6x = \cos 2x$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(2x - 6x) = \cos 2x$

$\operatorname{sen}(-4x) = \cos 2x$

$\Rightarrow \quad -\operatorname{sen} 4x = \cos 2x$

$-2\operatorname{sen} 2x \cos 2x = \cos 2x$

Como: $\quad \cos 2x \neq 0$

$\Rightarrow \quad -2 \operatorname{sen} 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = -1/2$

Dado que: $\quad x \in [0 ; \pi] \quad \Rightarrow \quad 2x \in [0 ; 2\pi]$

Luego las soluciones son: $\dfrac{7\pi}{12} \wedge \dfrac{11\pi}{12}$

$$\therefore \quad \text{Suma} = \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

**PROB. 4**

Resuelva la siguiente inecuación:

$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x > \cos 2x + \cos x \ ; \ \forall x \in [0 ; \pi]$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Transformando a producto cada miembro de la inecuación, se obtiene:

$$2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} > 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} > \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

De acuerdo con la condición, se tiene que:

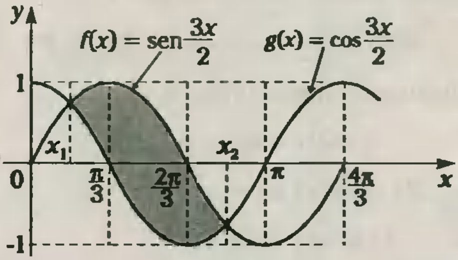
$$x \in [0 ; \pi] \ \Rightarrow \ \frac{x}{2} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \ \Rightarrow \ \cos\frac{x}{2} > 0$$

Luego: $\quad \operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}\cancel{\cos\dfrac{x}{2}} > \cos\dfrac{3x}{2} . \cancel{\cos\dfrac{x}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{3x}{2} > \cos\frac{3x}{2}$$

Graficando las funciones de cada miembro:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} \ \wedge \ g(x) = \cos\frac{3x}{2}$$




Según la figura, la solución es $\langle x_1 ; x_2 \rangle$, calculemos: $x_1 \wedge x_2$.

Esto requiere hacer:

$$\operatorname{sen}\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{3x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$$

**PROB. 5**

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$3\cot^2 x + 5 = 7\csc x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★

Como intervienen las funciones cotangente y cosecante las restricciones son:

$$\cot x \wedge \csc x \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como en el problema anterior, nuestra estrategia consistirá en elaborar una expresión en términos del seno, por lo cual apelaremos a las identidades trigonométricas. Veamos:

$$\frac{3\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{5\,\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{7\,\text{sen}\,x}{\text{sen}^2 x}$$

Como: $\text{sen}^2 x \neq 0$, podemos simplificarlo:

$$3\cos^2 x + 5\,\text{sen}^2 x = 7\,\text{sen}x$$

Pero: $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$$\Rightarrow \quad 3(1 - \text{sen}^2 x) + 5\,\text{sen}^2 x = 7\,\text{sen}\,x$$

Efectuando: $2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen}\,x + 3 = 0$

Factorizando: $(\text{sen}\,x - 3)(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0$

i) $\text{sen}\,x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad \text{sen}\,x = 3$ (No puede ser)

ii) $2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

**PROB. 6**

Determinar $x$ en el sistema:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \qquad \ldots (1)$$

$$2\,\text{sen}^2 \frac{y}{2} = \cos 2x \qquad \ldots (2)$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Nuestra estrategia consistirá en obtener una ecuación en términos del arco «$y$», para lo cual haremos las siguientes transformaciones:

De la ecuación (1), se deduce que:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y = \pi$$

Por reducción al IC se puede establecer que:

$$\cos 2x = -\cos 2y \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$2\,\text{sen}^2\left(\frac{y}{2}\right) = -\cos 2y$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos y = -\cos 2y$$

Pero: $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos y = -(2\cos^2 y - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 y - \cos y = 0$$

Factorizando nos queda:

$$\cos y\,(2\cos y - 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, analizamos teniendo en cuenta la condición dada:

i) $\cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2k\pi \pm \pi/2$

Luego: $x = \frac{\pi}{2} - y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad x = -2k\pi \text{ ó } \quad x = \pi - 2k\pi$$

ii) $2\cos y - 1 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad \ldots (*)$

Reemplazamos (*) en (1):

$$x = \frac{\pi}{2} - \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} - 2k\pi \text{ ó } x = \frac{5\pi}{6} - 2k\pi}$$

**PROB. 7**

Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x > 0, \text{ si: } x \in \langle 0 ; \pi \rangle$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Del arco triple tenemos:

$$\operatorname{sen} x(2\cos 2x + 1) - \operatorname{sen} x > 0$$

$\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen} x \cos 2x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x > 0$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \,.\, \cos 2x > 0 \ldots (1)$

Por condición: $\quad 0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} x \leq 1$

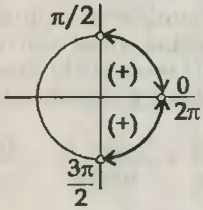
Reemplazando en (1) tenemos:

$$\cos 2x > 0$$

De la C.T. se observa que:

$$2x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle}$$




## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *La ecuación tiene que estar definida en el campo de los números reales.*

2) *Obtenga los valores donde la variable no está definida, para no tomarlos en el conjunto solución.*

3) *Reducir a su mínima expresión a la ecuación hasta obtener de la forma:*

$$f.t\ (ax + b) = c$$

4) *Si se trata de una inecuación es necesario graficar las funciones para visualizar con facilidad el conjunto solución.*


## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

**01.-** Determine el conjunto solución de:

$$4\,\text{sen}^2\frac{x}{2} + 3\tan x = 2$$

A) $2k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{k}{3}\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{3}$

B) $2k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{3}$ E) $k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}$

C) $k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{3}$

**02.-** Determine el conjunto de solución de la ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x - 1 + \tan x = 0$$

A) $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cup k\frac{\pi}{6}$ D) $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cup k\frac{\pi}{3}$

B) $\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup k\frac{\pi}{3}$ E) $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cup k\pi$

C) $\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup k\pi$

**03.-** Determine un conjunto solución de:

$$3\cos^2 x - \text{sen}\,2x - \text{sen}^2 x = 0, \text{ si: } \tan x > 0$$

A) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ B) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ C) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

D) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ E) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

**04.-** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$1 + \cos x = \frac{1}{3}\,.\,\text{sen}^2 x$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\pi$ E) $k\frac{\pi}{2}$

**05.-** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}^3 x\,.\,\cos x - \text{sen}\,x\,.\,\cos^3 x = \frac{1}{4}$$

A) $(4k-1)\frac{\pi}{2}$ B) $(3k-1)\frac{\pi}{6}$ C) $(2k-1)\frac{\pi}{3}$

D) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$ E) $(4k-1)\frac{\pi}{8}$

**06.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\frac{\cos 3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 2x}{\tan x} = 1$$

y determine la mayor solución negativa.

A) $-\frac{\pi}{3}$ B) $-\frac{\pi}{4}$ C) $-\frac{\pi}{6}$ D) $-\frac{\pi}{8}$ E) $-\frac{\pi}{4}$

**07.-** Determine un conjunto solución de:

$$\text{sen}\,5x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,x + 4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0$$

A) $(4m+1)\frac{\pi}{6}$ B) $(4m+1)\frac{\pi}{4}$ C) $(4m-1)\frac{\pi}{4}$

D) $(2m+1)\frac{\pi}{3}$ E) $(4m-1)\frac{\pi}{6}$

**08.-** Determine el conjunto solución de:

$$\text{sen}\,x\,.\,\text{sen}\,3x - \text{sen}\,2x\,.\,\text{sen}\,4x = 0$$

A) $\frac{k\pi}{3}$ B) $\frac{2k\pi}{3}$ C) $\frac{k\pi}{5}$

D) $\frac{2k\pi}{5}$ E) $\frac{3k\pi}{5}$

**09.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=4\cos 4x$$

A) $\frac{2k\pi}{3}$ B) $\frac{k\pi}{3}$ C) $-\frac{k\pi}{8}$ D) $\frac{3k\pi}{5}$ E) $\frac{k\pi}{4}$

**10.-** Determine el conjunto solución de la ecuación trigonométrica:

$$\frac{\text{sen}6x}{\text{sen}2x}=\csc 2x+\frac{\cos 6x}{\cos 2x}$$

A) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k.\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k.\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k.\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{k\pi}{2}+(-1)^k.\frac{\pi}{12}$

C) $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k.\frac{\pi}{12}$

**11.-** Determine el conjunto solución de:

$$\cos 4x+2\,\text{sen}\,2x+3=0$$

A) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}(-1)^k$ D) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}(-1)^k$

B) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4}(-1)^k$ E) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(-1)^k$

C) $\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}(-1)^k$

**12.-** Determine el conjunto de solución de la ecuación trigonométrica:

$$5\,\text{sen}^4x+6\,\text{sen}^2x\,.\cos^2x+5\cos^4x=4$$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ B) $(k+1)\frac{\pi}{2}$ C) $(k+1)\frac{\pi}{4}$

D) $(2k-1)\frac{\pi}{6}$ E) $(2k-1)\frac{\pi}{4}$

**13.-** Determine el conjunto solución de:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}$$

A) $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k.\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k.\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{k\pi}{2}+(-1)^k.\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{2k\pi}{3}+(-1)^k.\frac{\pi}{8}$

C) $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k.\frac{\pi}{3}$

**14.-** Determine el conjunto solución de:

$$(\text{sen}\,2x+\sqrt{3}\,\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}(4k+3)$ D) $\frac{\pi}{12}(12k+7)$

B) $\frac{\pi}{8}(4k-3)$ E) $\frac{\pi}{12}(12k-7)$

C) $\frac{\pi}{6}(12k+7)$

**15.-** Determine el con junto solución de:

$$|\text{sen}\,2x|+2=2(|\text{sen}\,x|+|\cos x|)$$

A) $\frac{2k\pi}{3}$ B) $\frac{k\pi}{3}$ C) $\frac{k\pi}{4}$ D) $\frac{2k\pi}{5}$ E) $\frac{k\pi}{2}$

**16.-** Determine el conjunto de solución de la ecuación:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}$$

A) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ D) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$

B) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ E) $2k\pi\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}$

C) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$

**17.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\frac{2}{\cos 2x}=\sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

A) $k\pi\pm\frac{\pi}{8}$ B) $2k\pi\pm\frac{\pi}{8}$ C) $k\pi\pm\frac{\pi}{16}$

D) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ E) $k\pi\pm\frac{\pi}{32}$

**18.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x - 1 = 0$$

A) $\frac{k\pi}{4}$ B) $\frac{k\pi}{2}$ C) $\frac{k\pi}{3}$ D) $\frac{2k\pi}{5}$ E) $k\pi$

**19.-** Resolver la siguiente función trigonométrica:

$$1 - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 x$$

A) $(k-1)\frac{\pi}{2}$ B) $(4k+1)\frac{\pi}{2}$ C) $(4k-1)\frac{\pi}{6}$

D) $(4k-1)\frac{\pi}{4}$ E) $(4k-1)\frac{\pi}{2}$

**20.-** Determine el conjunto solución:

$$\sec x + \tan x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

A) $k\pi + arc\ \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $k\frac{\pi}{2} + arc\cos\left(\frac{1}{3}\right)$

C) $\frac{k\pi}{2} + arc\sec\left(\frac{2}{3}\right)$ D) $k\pi + arc\tan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

E) $k\frac{\pi}{8} + arc\cot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

**21.-** Determine el conjunto solución de:

$$\frac{1+\cot x}{1-\tan x} = \cos 3\pi$$

A) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ B) $\frac{k\pi}{3} - \frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}$

D) $\frac{k\pi}{3} - \frac{k\pi}{4}$ E) $\frac{k\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$

**22.-** Determine la suma de las soluciones en: $x \in [\,0; 2\pi\rangle$, de la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cos x - 1$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

**23.-** Determine la suma del menor ángulo positivo y el mayor ángulo negativo que verifica:

$$\cos 2x - \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

A) $\frac{3\pi}{7}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{4\pi}{9}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

**24.-** Determinar la menor solución positiva de la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**25.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$2\cos 4x \cdot \cos 3x + 2\operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} 2x = \cos 4x + \cos 2x$$

y determine la suma de las dos menores soluciones positivas.

A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{2\pi}{5}$ D) $\frac{9\pi}{10}$ E) $\frac{3\pi}{10}$

**26.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x} + 1 = \tan\frac{\pi}{9} \cdot \tan\frac{2\pi}{9} \cdot \tan\frac{3\pi}{9} \cdot \tan\frac{4\pi}{9}$$

y determine la suma de las soluciones comprendidas en $[0; 2\pi]$.

A) $4\pi$ B) $3\pi$ C) $2\pi$ D) $\pi$ E) $\frac{\pi}{2}$

**27.-** Determine la suma de las 2 menores soluciones positivas de la ecuación:

$$\cos x = \sqrt{2}\cos 5x - \cos 9x$$

A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{8\pi}{15}$ C) $\frac{7\pi}{45}$ D) $\frac{11\pi}{150}$ E) $\frac{13\pi}{80}$

**28.-** Determine la suma de soluciones en $[0; \pi]$ de la ecuación:

$$2\operatorname{sen} x = \tan\frac{x}{2}$$

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

**29.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$6\cot^2 x - 4\cos^2 x = 1$$

y determinar la suma de soluciones comprendidas en $\langle 0; \pi\rangle$

A) $\pi$ B) $2\pi$ C) $3\pi$ D) $4\pi$ E) $5\pi$

**30.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$3\tan x + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 = 0$$

y determine el producto de sus soluciones comprendidas en $\langle 0; \pi\rangle$.

A) $\frac{5\pi^2}{18}$ B) $\frac{3\pi}{17}$ C) $\frac{5\pi^2}{36}$

D) $\frac{4\pi^2}{25}$ E) $\frac{\pi^2}{36}$

**31.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$\tan 3x + \tan x = 4\,\text{sen}\, x$ y determine la diferencia de soluciones en el intervalo de $\langle 0; \pi\rangle$.

A) $\frac{4\pi}{9}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{10}$ D) $\frac{2\pi}{9}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

**32.-** Determine el número de soluciones en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de la ecuación:

$$\text{sen}\, 5x + \cos 2x = \text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^2 x + 1$$

A) 3 B) 2 C) 4 D) 0 E) 1

**33.-** Resolver e indicar el número de soluciones para $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ de:

$$\cos^2 5x - \text{sen}^2 x = \cos 4x$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**34.-** Determine el número de soluciones si $x \in [0, 4\pi]$ en ecuación:

$$3\tan x = \cot x$$

A) 1 B) 8 C) 3 D) 9 E) 5

**35.-** Determine el número de raíces que se obtienen al resolver la ecuación trigonométrica:

$$1 + \cos 12x = 2\cos 8x\text{ , sí } x \in [0; \pi/2]$$

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 7

**36.-** Determine el número de soluciones si $x \in \langle 0 ; \pi\rangle$ en la ecuación trigonométrica:

$$2\text{sen}^2 x + \sqrt{2}\ \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos x = \text{sen}\, 3x$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**37.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}^3 x \,.\, \text{sen}\ 3x + \cos^3 x \,.\, \cos 3x = \cos 2x$$

y determine el número de soluciones comprendidas en $[0; \pi]$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**38.-** Si: $x \in \langle -\pi; \pi\rangle$, determine el número de raíces que se obtiene al resolver la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\tan 2x + \tan x = \text{sen}\, 3x \,.\, \sec x$$

A) 3 B) 5 C) 2 D) 1 E) 4

**39.-** Determine el número de raíces que se obtiene al resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos 2x = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right);\ \text{si } x \in [0; \pi]$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 4 E) 5

**40.-** Si $x \in \langle 0; \pi\rangle$, determine el número de raíces que se obtienen al resolver la ecuación trigonométrica:

$$\text{vers}(x) + \text{ex} - \sec(x) = \cos x - 2\,\text{sen}\, x$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) 4 E) 6

**41.-** Determine el número de soluciones que se obtienen al resolver la ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}\, 3x = 8\,\text{sen}^3 x\text{, si: } x \in \langle 0; 2\pi\rangle$$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 5 E) 7

**42.-** Determine el número de soluciones que se obtiene al resolver la ecuación trigonométrica:

$$\tan 3x + \cot x = \tan x + \cot 3x, \text{ si: } x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**43.-** Resolver la ecuación trigonométrica

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan 2x = 2$$

y determine el número de soluciones comprendidas en $\langle 0; 2\pi \rangle$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 4 E) 7

**44.-** Si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$(1 + \cos x) \,.\, \operatorname{cov} x = (1 + \operatorname{sen} x) \,.\, \operatorname{vers} x,$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**45.-** Determine las soluciones en $\langle 0; \pi \rangle$ de la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \operatorname{sen}^3 x - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3}$$

A) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{5}\right\}$ D) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

**46.-** Resolver la ecuación:

$$\tan 5x \,.\, \tan 3x = \tan \frac{13\pi}{4}$$

y determine la menor solución positiva.

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{16}$ D) $\frac{3\pi}{8}$ E) $\frac{2\pi}{15}$

**47.-** Determine las soluciones positivas y menores de una vuelta de la ecuación:

$$(\sqrt{3} + 1) \operatorname{sen} x + (\sqrt{3} - 1) \cos x = \sqrt{2}$$

A) $\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{16}; \frac{2\pi}{15}$ C) $\frac{3\pi}{17}; \frac{2\pi}{13}$

D) $\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}$

**48.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = -1$$

y determine la menor solución positiva.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**49.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 x(2 \cos x + \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$$

y determine el cociente entre la mayor y menor solución si $x \in [0; 2\pi]$.

A) 3 B) 1/2 C) 4 D) 1/3 E) 5/2

### *SISTEMAS DE ECUACIONES*

**50.-** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \ldots (2)$$

A) $\frac{\pi}{2} - k\pi$ B) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ C) $\frac{\pi}{4} - k\pi$

D) $\frac{\pi}{5} - k\pi$ E) $\frac{\pi}{6} - k\pi$

**51.-** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \quad \ldots (2)$$

A) $\frac{\pi}{3} - k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

B) $\frac{\pi}{3} + k\pi \pm \frac{3\pi}{8}$

C) $\frac{\pi}{3} + k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{3} - k\pi \pm \frac{3\pi}{8}$

E) $\frac{\pi}{2} - 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

**52.-** Resolver el sistema:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \quad \ldots (1) \quad \wedge$$

$$\tan x = (2 + \sqrt{3}) \,.\, \tan y \ldots (2)$$

A) $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

B) $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$

C) $\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{8}$

D) $\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$

E) $\frac{2k\pi}{5} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$

**53.-** Resolver el sistema:

$$x - y = \frac{3\pi}{2} \ldots (1)$$

$$\tan x \,.\, \cos y = \frac{3}{2} \quad \ldots (2)$$

Indica el conjunto solución de «$y$».

A) $k\pi + (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

B) $2k\pi + (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

C) $2k\pi + (-1)^k \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)$

D) $2k\pi + (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

E) $3k\pi + (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

**54.-** Resolver el sistema:

$$x - y = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ (1)$$

$$\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \quad \ldots \ (2)$$

A) $x = (k-1)\frac{\pi}{4}, \quad y = (k+1)\frac{\pi}{4}$

B) $x = (3k-1)\frac{\pi}{4}, \quad y = (2k+1)\frac{\pi}{4}$

C) $x = (2k-3)\frac{\pi}{4}, \quad y = (2k-1)\frac{\pi}{4}$

D) $x = (4k+3)\frac{\pi}{4}, \quad y = (4k+1)\frac{\pi}{4}$

E) $x = (4k-3)\frac{\pi}{4}, \quad y = (4k-1)\frac{\pi}{4}$

**55.-** Resolver el sistema:

$$x - y = \frac{\pi}{2} \ldots (1)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 5 \quad \ldots (2),$$

e indique un conjunto solución de "$y$":

A) $y = k\pi + arc\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{2}$

B) $y = k\pi + arc\cot\left(\frac{1}{5}\right)$

C) $y = k\pi + arc\tan\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{2}$

D) $y = k\pi + arc\cos\left(\frac{1}{5}\right)$

E) $y = k\pi + arc\tan\left(\frac{1}{5}\right)$

**56.-** Resolver el sistema:

$$x - y = -\frac{\pi}{2} \ldots (1)$$

$$\tan x + \tan y = 2 \quad \ldots (2)$$

Indica el conjunto solución de «$y$».

A) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

B) $\frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{8}$

C) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

D) $\frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{8}$

E) $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$

**57.-** Determine un conjunto solución para "$x$" del sistema:

$$2x - 3y = \frac{\pi}{4} \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} 3y \,.\, \cos 2x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \quad \ldots (2)$$

A) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + (-1)^k . \frac{\pi}{6}$

B) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} + (-1)^k . \frac{\pi}{12}$

C) $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8} + (-1)^k . \frac{\pi}{6}$

D) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} + (-1)^k . \frac{\pi}{6}$

E) $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8} + (-1)^k . \frac{\pi}{12}$

**58.-** Resolver el sistema:

$$x + y = \frac{\pi}{3} \ldots (1)$$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \ldots (2)$,

indicar un conjunto de solución para «$x$»:

A) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ B) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ C) $3k\pi - \frac{\pi}{6}$

D) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ E) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

**59.-** Resolver el sistema:

$$x - y = \frac{\pi}{3} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{2} \quad \ldots (2)$$

Indicar el conjunto solución para «$y$».

A) $2k\pi$ B) $\frac{k\pi}{2}$ C) $\frac{k\pi}{4}$ D) $\frac{2k\pi}{5}$ E) $k\pi$

**60.-** Resolver el sistema:

$$x + y = \frac{2\pi}{3} \quad \ldots (1)$$

$$\cos x + \cos y = 1 \quad \ldots (2)$$

Da como respuesta el conjunto solución de «$x$».

A) $\frac{\pi}{3} - 2k\pi$ B) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ C) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

D) $\frac{\pi}{8} + 2k\pi$ E) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

**61.-** Resuelva e indique un conjunto de solución para "$x$" del sistema:

$$x + y = \frac{2\pi}{3} \ldots (1)$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 0 \ldots (2)$$

A) $(k-1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ D) $(3k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

B) $(2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ E) $(3k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

C) $(k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

**62.-** Determine los valores que puede tomar "$x$" del sistema:

$$x + y = 2\pi \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 0 \quad \ldots (2)$$

A) $4k\pi$ B) $2k\pi$ C) $k\pi$ D) $\frac{k\pi}{2}$ E) $\frac{k\pi}{4}$

**63.-** Dadas las siguientes ecuaciones, determine un conjunto solución para "$x + y$":

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \ldots (1)$$

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots (2)$$

A) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{12}$ C) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

D) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ E) $k\pi - \frac{2\pi}{3}$

**64.-** Determine un conjunto de solución para "$x$" del sistema:

$$\text{sen}^4 x - \cos^4 y = 1 \quad . \ . \ . \quad (1)$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \quad . \ . \ . \quad (2)$$

A) $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ B) $(k+1)\dfrac{\pi}{6}$ C) $(k-1)\dfrac{2\pi}{3}$

D) $(2k+1)\dfrac{\pi}{3}$ E) $(2k-1)\dfrac{\pi}{8}$

**65.-** Dado el sistema:

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 1 \ . \ . \ . \ (1)$$

$$4 \cos x \ . \ \cos y = 3 \ . \ . \ . \ (2) \ ,$$

determine la expresión general de arcos $(x + y)$ que verifican el sistema.

A) $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{8}$ B) $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ C) $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

D) $k\pi \pm \dfrac{\pi}{12}$ E) $k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

**66.-** Resolver el sistema:

$$\tan x + \tan y = 1 \qquad . \ . \ . \ (1)$$

$$\tan (x + y) = \frac{4}{3} \qquad . \ . \ . \ (2),$$

indicar un conjunto solución para $y$.

A) $2k\pi - arc \tan\left(\dfrac{1}{3}\right)$ B) $k\pi + arc \tan\left(\dfrac{1}{4}\right)$

C) $k\pi - arc \tan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ D) $2k\pi - arc \tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

E) $k\pi + arc \tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

**67.-** Resolver el sistema:

$$\tan x + \tan y = 1 + \sqrt{3} \ . \ . \ . \ (1)$$

$$\cot x \ . \ \tan y = \sqrt{3} \qquad . \ . \ . \ (2)$$

A) $k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ B) $k\pi + \dfrac{\pi}{6}$ C) $k\pi - \dfrac{\pi}{6}$

D) $k\pi + \dfrac{\pi}{3}$ E) $k\pi - \dfrac{\pi}{3}$

**68.-** Resolver el sistema:

$$\tan x + \cot y = 2 \ . \ . \ . \ (1)$$

$$\cot x + \tan y = 2 \ . \ . \ . \ (2) \ ,$$

e indicar un conjunto solución para "$x$"

A) $k\pi - \dfrac{\pi}{12}$ B) $k\pi - \dfrac{\pi}{8}$ C) $k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

D) $k\pi + \dfrac{\pi}{8}$ E) $k\pi - \dfrac{\pi}{4}$

**69.-** Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = \frac{\pi}{2} \qquad . \ . \ . \ (1)$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{2} \ . \ \text{sen } y \quad . \ . \ . \ (2) \ ,$$

tal que: $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ ; determine: $(x + y)$

A) $\dfrac{\pi}{2} - arc \cos\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\dfrac{\pi}{2} + arc \text{ sen}\dfrac{\pi}{12}$

C) $\dfrac{\pi}{5} + arc \cos\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ D) $\dfrac{\pi}{2} + arc \text{ sen}\dfrac{3}{4}$

E) $\dfrac{\pi}{2} - arc \cos\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

**70.-** Si: $x, y \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, resolver el sistema:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \ . \ . \ . \ (1)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan y \ . \ . \ . \ (2)$$

A) $x = \dfrac{\pi}{24} ; y = \dfrac{7\pi}{24}$ B) $x = \dfrac{3\pi}{25} ; y = \dfrac{\pi}{20}$

C) $x = \dfrac{4\pi}{23} ; y = \dfrac{3\pi}{23}$ D) $x = \dfrac{5\pi}{26} ; y = \dfrac{3\pi}{26}$

E) $x = \dfrac{5\pi}{24} ; y = \dfrac{\pi}{24}$

**71.-** En el siguiente sistema de ecuaciones, determine la primera solución positiva de $x$.

$$x - y = \frac{\pi}{12} \ldots (1)$$

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = \frac{3}{4} \ldots (2)$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{5}$

**72.-** Dado el sistema de ecuaciones:

$$x + y = \theta \ldots (1)$$

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = 1 \ldots (2),$$

donde $\theta, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, indique el valor de "$x$"

A) $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\theta}{5} + \frac{\pi}{4}$

**73.-** Si: $x$, $y \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, resolver el sistema:

$$\text{sen } 2x + \text{sen } 2y = \sqrt{2} \ldots (1)$$

$$\text{sen}(x + y) = 1 \ldots (2)$$

Indica el valor de «$y$».

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**74.-** Si $x$, $y \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, determinar "$y$" del siguiente sistema:

$$\text{sen } x \,.\, \cos y = \frac{2}{5} \ldots (1)$$

$$\cos x \,.\, \text{sen } y = \frac{3}{5} \ldots (2) \quad ,$$

A) $\frac{\pi}{4} - \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ B) $\frac{\pi}{4} + \text{arc sen}\left(\frac{1}{5}\right)$

C) $\frac{\pi}{8} + \text{arc sen}\left(\frac{2}{5}\right)$ D) $\frac{\pi}{6} + \text{arc sen}\left(\frac{1}{5}\right)$

E) $\frac{\pi}{8} + \text{arc sen}\left(\frac{2}{5}\right)$

**75.-** Resolver el sistema:

$$\text{sen } x \,.\, \text{sen } y = \frac{1}{2} \ldots (1)$$

$$\cos x \,.\, \cos y = \frac{1}{2} \ldots (2),$$

si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$.

A) $x = -\frac{\pi}{4}$ ; $y = \frac{\pi}{4}$ B) $x = \frac{\pi}{5}$ ; $y = -\frac{\pi}{5}$

C) $x = \frac{\pi}{6}$ ; $y = -\frac{\pi}{6}$ D) $x = \frac{\pi}{4}$ ; $y = \frac{\pi}{4}$

E) $x = -\frac{\pi}{3}$ ; $y = \frac{\pi}{3}$

**76.-** Si: $x, y \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$, resolver el sistema:

$$\text{sen}^2 y - \text{sen } x = \frac{1}{4} \ldots (1)$$

$$2 \cos y - \text{sen } x = \frac{1}{2} \ldots (2)$$

A) $x = 45°, y = 45°$ B) $x = 30°, y = 60°$

C) $x = 37°, y = 53°$ D) $x = 16°, y = 74°$

E) $x = 24°, y = 66°$

**77.-** Resolver el sistema:

$$\tan x \,.\, \tan y = 1 \ldots (1)$$

$$\text{sen } x \,.\, \text{sen } y = \frac{1}{4} \ldots (2),$$

determinar "$y$", si: $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**78.-** Si: $x$ , $y \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$, resolver el siguiente sistema e indicar como respuesta: "$2x + y$".

$$\text{sen } x \,.\, \cos 2y = a^2 + 1 \ldots (1)$$

$$\cos x \,.\, \text{sen } 2y = a \ldots (2)$$

A) $x=\frac{\pi}{2}\,;y=0$ B) $x=-\frac{\pi}{4}\,;y=\frac{\pi}{2}$

C) $x=0\,;y=-\frac{\pi}{6}$ D) $x=-\frac{\pi}{3}\,;y=\frac{\pi}{3}$

E) $x=\frac{\pi}{2}\,;y=0$

**79.-** Si: $x,y\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$, calcular el valor de "$y$" en el siguiente sistema:

$$\text{sen}\,x\,.\,\sec y=\ 1\ \ldots(1)$$

$$\text{sen}\,x.\ \text{sen}\,y=\frac{1}{4}\ \ldots(2),$$

A) $\frac{\pi}{6}\vee\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{7\pi}{9}\vee\frac{2\pi}{9}$ C) $\frac{\pi}{12}\vee\frac{5\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{6}\vee\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}\vee\frac{5\pi}{12}$

**80.-** Si: $x,y\in\ \langle 0;\pi/2\rangle$, resolver el sistema:

$$2\ \text{sen}\,x.\ \text{sen}\,y=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ldots(1)$$

$$2\cos x\,.\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ldots(2)$$

A) $x=\frac{\pi}{4}\ ,y=\frac{\pi}{4}$ B) $x=\frac{\pi}{8}\ ,y=\frac{\pi}{4}$

C) $x=\frac{\pi}{6}\ ,y=\frac{\pi}{3}$ D) $x=\frac{\pi}{3}\ ,y=\frac{\pi}{4}$

E) $x=\frac{\pi}{12}\ ,y=\frac{\pi}{6}$

**81.-** Si: $x,y\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$, resolver el sistema:

$$2\ \text{sen}\,x+3\tan y=4\sqrt{3}\ \ldots(1)$$

$$6\ \text{sen}\,x\ -\ \tan y=2\sqrt{3}\ \ldots(2)$$

A) $x=37°,\ y=53°$ D) $x=30°\ ,\ y=60°$

B) $x=60°\ ,\ y=60°$ E) $x=30°\ ,\ y=74°$

C) $x=45°\ ,\ y=30°$

**82.-** En el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\tan x}{\tan y}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\ \ldots(2)$$

$$x-y=\frac{\pi}{6}\ \ldots(2),$$

$\frac{\pi}{2}<x+y<\pi$, ¿a que es igual "$x/y$"?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{3}$

**83.-** Si: $x$ , $y$, $z$ son ángulos positivos que pertenecen al intervalo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, determine: $x+y+z$, si:

$$\text{sen}\,x\,.\ \text{sen}\,y=\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ldots(1)$$

$$\text{sen}\,y\,.\ \text{sen}\,z=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ldots(2)$$

$$\text{sen}\,x\,.\ \text{sen}\,z=\frac{1}{2}\ \ldots(3)$$

A) 145° B) 125° C) 105° D) 165° E) 155°

## *INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS*

**84.-** Determine el conjunto solución de:

$$\text{sen}\,6x<5\ \text{sen}\,3x$$

A) $x\in\left\langle\frac{k\pi}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right\rangle$

B) $x\in\left\langle\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right\rangle$

C) $x\in\left\langle\frac{3k\pi}{5};\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right\rangle$

D) $x\in\left\langle\frac{k\pi}{3};\frac{3\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right\rangle$

E) $x\in\left\langle\frac{k\pi}{4};\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right\rangle$

**85.-** Determine el conjunto solución de:

$$\text{sen } 3x + \text{sen } 7x < 2 \text{ sen } 5x$$

A) $x \in \left\langle \frac{2k\pi}{5}; \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{9} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{6}; \frac{\pi}{3} + \frac{5k\pi}{6} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{3k\pi}{5}; \frac{3\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{5}; \frac{2\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{2k\pi}{5}; \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right\rangle$

**86.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$4 \text{ sen}^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ sen } x - \sqrt{6} > 0,$$

si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{7}; \frac{3\pi}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

**87.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\text{sen}^2 6x + 2 \text{ sen}^2 3x \geq 2,$$

si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

A) $x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right\rangle$

B) $x \in \left[ \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

C) $x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{12} \right\rangle$

D) $x \in \left[ \frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{9}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$

E) $x \in \left[ \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} \right\rangle$

**88.-** Determinar el conjunto solución de:

$$|\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x| < 1$$

A) $\left\langle (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}; (6k-1) \cdot \frac{\pi}{6} \right\rangle$

B) $\left\langle (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}; (3k-1) \cdot \frac{\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle (k-1) \cdot \frac{\pi}{4}; (3k-1) \cdot \frac{\pi}{6} \right\rangle$

D) $\left\langle (2k-1) \cdot \frac{\pi}{3}; (6k+1) \cdot \frac{\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle (2k-1) \cdot \frac{\pi}{8}; (6k+1) \cdot \frac{\pi}{12} \right\rangle$

**89.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\cos^2 x - 2 \cos x < 0, \text{ si: } x \in [-2\pi; 0]$$

A) $x \in \left[ -2\pi; -3\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$

B) $x \in \left[ -2\pi; -\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$

C) $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ -\pi; -\frac{3\pi}{5} \right\rangle$

D) $x \in \left[ -\frac{7\pi}{5}; -\frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$

E) $x \in \left[ -\frac{7\pi}{5}; -\frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{7} \right]$

**90.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\cos 7x < \cos 3x, \text{ si: } x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

A) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{7} \right\rangle$

**91.-** Determine el conjunto solución de:

$$\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3} \leq 0$$

A) $x \in \left[ \frac{\pi}{5} - k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right]$

B) $x \in \left[ \frac{\pi}{3} + k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + k\pi \right]$

C) $x \in \left[ \frac{\pi}{4} - k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right]$

D) $x \in \left[ \frac{\pi}{3} - k\pi;\ \frac{2\pi}{5} + k\pi \right]$

E) $x \in \left[ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{2\pi}{5} + k\pi \right]$

**92.-** Determine el conjunto solución de:

$$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} < 2$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} - k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2} - k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{8} - k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3} - k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

**93.-** Determine el conjunto solución de:

$$\text{sen } 3x \,.\, \text{sen}^3 x - \cos 3x \,.\, \cos^3 x \geq \frac{1}{3}$$

A) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3}$ B) $\frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$ C) $\frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{8}$

D) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ E) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$

**94.-** Determine el conjunto solución de:

$$\sec^2 x - 2\tan x < \frac{1}{4}$$

A) $x \in \left\langle arc\tan\frac{1}{2} + k\pi; arc\tan\frac{3}{2} + k\pi \right\rangle$

B) $x \in \left\langle arc\tan\frac{1}{2} - k\pi; arc\tan\frac{3}{2} + k\pi \right\rangle$

C) $x \in \left\langle arc\cot\frac{1}{2} - k\pi; arc\cot\frac{3}{2} + k\pi \right\rangle$

D) $x \in \left\langle arc\cot\frac{1}{3} + k\pi; arc\cot\frac{3}{4} + k\pi \right\rangle$

E) $x \in \left\langle arc\cot\frac{2}{5} + k\pi; arc\cot\frac{3}{5} + k\pi \right\rangle$

**95.-** Determine el conjunto solución de:

$$\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$$

A) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{4}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{4}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{12} \right\rangle$

**96.-** Determine el conjunto solución de:

$$\tan^4 x + 8\tan^3 x + 2\sec^2 x - 8\tan x - 1 < 0$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{3k\pi}{5} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{20} - \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{24} - \frac{5k\pi}{12}; \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle$

**97.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\frac{\cos x + \cot x}{\csc x} < 0, \text{ si: } x \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle - \{2\pi\}$

B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{\pi\}$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle - \{ \frac{\pi}{5} \}$

D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle - \{\pi\}$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{ \frac{\pi}{3} \}$

**98.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\cot 2x + \tan x < 2, \text{ si: } x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{10}; \frac{7\pi}{16} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{13} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{17}; \frac{9\pi}{25} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{19} \right\rangle$

**99.-** Determine los posible valores de "$x$" para que la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{sen} x| - \frac{2}{\pi}|x|}},$$

se encuentre definida, si $x \in [-\pi; \pi]$

A) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{4}; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle -\frac{4\pi}{5}; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{3\pi}{5} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

**100.-** Determine los posibles valores de "$x$" para que la función:

$f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$ sea siempre positiva, si $x \in \langle 0; \pi \rangle$

A) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \pi \right\rangle$

B) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \pi \right\rangle$

C) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0; \frac{3\pi}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{5}; \frac{4\pi}{5} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

**101.-** Si:

$f(x) = |\operatorname{sen} x|$ y $g(x) = 1 + \cos x$ ;

en donde: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, entonces, ¿ para qué valores de "$x$" se verifica:

$$f(x) > g(x) \text{ ?}$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{\pi\}$ B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{\pi\}$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle - \{ \frac{\pi}{3} \}$ D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle - \{\pi\}$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{5} \right\rangle - \{ \frac{\pi}{5} \}$

**102.-** Resolver la inecuación trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x < 0, \text{ si: } x \in [0; \pi]$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{7} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{12} \right\rangle$

**103.-** Resolver la inecuación trigonométrica e indicar la afirmación correcta:

$$\cos 2x - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0 \text{ ; si: } x \in [0; 2\pi]$$

I) $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ II) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

III) $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ IV) $x \in \{2\pi\}$

A) Sólo I B) I y II C) III y IV

D) Ninguna E) Todas menos II

**104.-** Si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indicar la afirmación correcta:

$$4\operatorname{sen}^2 x + 2(\sqrt{3} - 1).\operatorname{sen} x - \sqrt{3} < 0$$

I) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

III) $x \in \left[\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ IV) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$

A) I, II y IV B) I y II C) III y IV

D) Ninguna E) Todas menos II

**105.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + \operatorname{sen} x - \cos x < 1,$$

si: $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{9} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{5}; \frac{6\pi}{7} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle$

**106.-** Resolver la inecuación trigonométrica e indicar la afirmación correcta:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 2x \geq 1, x \in [0; \pi]$$

I) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5} \right\rangle$ II) $x \in \{0; \pi\}$

III) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

A) II y III B) I y II C) III y IV

D) Ninguna E) Todas menos II

**107.-** Resolver la inecuación trigonométrica e indicar el intervalo solución:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(\pi/2 - x) > 0, \text{ si: } x \in \langle 2\pi; 4\pi \rangle$$

A) $\left\langle \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4} \right\rangle$

**108.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^4 x > \cos^4 x \text{ , si } x \in [-2\pi; -\pi]$$

A) $x \in \left\langle -\frac{7\pi}{3}; -\frac{11\pi}{8} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle -\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle -\frac{7\pi}{4}; -\frac{4\pi}{9} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle -\frac{9\pi}{5}; -\frac{\pi}{9} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4} \right\rangle$

**109.-** Si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ resolver la inecuación trigonométrica e indicar el intervalo solución:

$$\cos^3 x \,.\, \cos 3x - \operatorname{sen}^3 x \,.\, \operatorname{sen} 3x < \frac{5}{8},$$

A) $\left\langle \frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{9} \right\rangle$  B) $\left\langle \frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12} \right\rangle$  C) $\left\langle \frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{7} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3} \right\rangle$  E) $\left\langle \frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4} \right\rangle$

**110.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} \geq 16,\ \text{si: } x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle$$

A) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{9} \right\rangle \cup \left[ \frac{2\pi}{9};\frac{\pi}{2} \right\rangle$

**111.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| < |\cos x|,\ \text{si: } x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$$

A) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{5};\frac{7\pi}{5} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle -\pi;\frac{\pi}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3};2\pi \right\rangle$

D) $x \in \left\langle -\pi;-\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3};2\pi \right\rangle$

E) $x \in \left\langle -\pi;\frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3};\frac{9\pi}{5} \right\rangle$

**112.-** Si: $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right\rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indica el intervalo que define el conjunto solución:

$$\operatorname{sen}(2\pi x) - \cos(2\pi x) > 0,$$

A) $\left\langle \frac{1}{8};\frac{3}{8} \right\rangle$  B) $\left\langle \frac{1}{8};\frac{5}{8} \right\rangle$  C) $\left\langle \frac{1}{4};\frac{3}{8} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{1}{4};\frac{1}{2} \right\rangle$  E) $\left\langle \frac{1}{2};\frac{5}{8} \right\rangle$

**113.-** Si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indicar la afirmación correcta:

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)(\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{3}) < 0$$

I) $x \in \left\langle \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right\rangle$  II) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right\rangle$

III) $x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right]$  IV) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4} \right\rangle$

A) Sólo I  B) I y II  C) III y IV

D) Ninguna  E) Todas menos III

**114.-** Si: $x \in [0; 2\pi]$, resolver la siguiente inecuación trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen}(3x) - \cos(3x) + 2}{\sqrt{2}\operatorname{sen}x - 1} > 0$$

A) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4} \right\rangle$  B) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4} \right\rangle$  D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4} \right\rangle$

**115.-** Si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indica el intervalo que define el conjunto solución:

$$\frac{\operatorname{sen}3x - \sqrt{5}}{\cos 2x + 3\cos x + 2} > 0$$

A) $\left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\rangle - \{\pi\}$  B) $\left\langle \frac{3\pi}{5};\frac{7\pi}{5} \right\rangle - \{\pi\}$

C) $\left\langle \frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{7} \right\rangle - \{\pi\}$  D) $\left\langle \frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3} \right\rangle - \{\pi\}$

E) $\left\langle \frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{9} \right\rangle - \{\pi\}$

**116.-** Indique el intervalo solución de la siguiente inecuación trigonométrica:

$$\frac{\text{sen}3x}{1-\cos 2x} < 0,\ \text{si: } x \in [0; 2\pi]$$

A) $\langle \pi; 2\pi\rangle$ B) $\langle \pi; 2\pi\rangle$ C) $\left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}\right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right\rangle$

**117.-** Resolver la inecuación trigonométrica e indicar el intervalo solución:

$$|\tan x| > 1,\ \text{si: } x \in \langle 0; \pi\rangle$$

A) $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $x \in \langle 0; \pi\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

C) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{5}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**118.-** Si: $x \in \langle 0; \pi\rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indica el intervalo que define el conjunto solución:

$$\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1) \cdot \tan x + \sqrt{3} < 0$$

A) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \pi\right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{3\pi}{5}\right\rangle$

**119.-** Si: $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$, al resolver la inecuación trigonométrica, se afirma que:

$$(\tan x - 1)^2(\tan^2 x - 3) < 0,$$

I) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right\rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\rangle$

III) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi\right\rangle$ IV) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

Son verdaderas:

A) Sólo I B) II y IV C) III y IV

D) Ninguna E) Todas menos IV

**120.-** Si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, resolver la inecuación trigonométrica e indica el intervalo que define el conjunto solución:

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} + 1 < 0$$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{3\pi}{5}\right\rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{5}\right\rangle$

**121.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\tan \frac{x}{2} > 1 - \cot x,\ \text{si: } x \in \langle 0; \pi\rangle$$

A) $x \in \left\langle 0; \frac{3\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $x \in \langle 0; \pi\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

C) $x \in \left\langle 0; \frac{3\pi}{5}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ D) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**122.-** Al resolver la inecuación trigonométrica:

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \tan 2x > 0,\ \text{si: } x \in \langle 0; \pi\rangle$$

se afirma que:

I) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi\right\rangle$

III) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi\right\rangle$

Son verdaderas:

A) Sólo I B) I y II C) III y IV

D) Ninguna E) Todas

**123.-** Al resolver la inecuación trigonométrica:

$$\tan x + \cot x < \tan \frac{5\pi}{4} \text{ , si: } x \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

se afirma que:

I) $x \in \langle 0; \pi \rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$ III) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

Son verdaderas:

A) I y II B) Solo II C) I y III
D) Ninguna E) Todas

**124.-** Al resolver la inecuación trigonométrica:

$$\sqrt{3}\ \sec^2 x - (\sqrt{6} + 2).\sec x + 2\sqrt{2} < 0,$$

si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, se afirma que:

I) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

III) $x \in \left\langle \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{6} \right\rangle$

Son verdaderas:

A) I y II B) Todas C) I y II
D) Ninguna E) I y III

**125.-** Resolver la inecuación trigonométrica, e indicar el conjunto solución:

$$\sec^2 x - \csc^2 x \geq \frac{4}{vers 4x} \text{ , si: } x \in \langle 0; \pi \rangle$$

A) $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

C) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{5}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ D) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**126.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x \,.\, \tan x + \cos x \leq 2 \text{ , si: } x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$$

A) $x \in \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ B) $x \in \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$

C) $x \in \left[\frac{10\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}\right]$ D) $x \in \left[\frac{10\pi}{9}; \frac{5\pi}{3}\right]$

E) $x \in \left[\frac{11\pi}{9}; \frac{13\pi}{9}\right]$

**127.-** Resolver la inecuación trigonométrica:

$$1 + \tan^2 x < 4\cos^2 x \text{ , si: } x \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

e indicar la afirmación correcta:

I) $x \in \langle 0; \pi \rangle$ II) $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

III) $x \in \left\langle \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right\rangle$ IV) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

A) Sólo I B) I y II C) III y IV
D) Ninguna E) Todas menos I

**128.-** Si: $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, al resolver la inecuación trigonométrica, se afirma que:

$$\frac{\tan^2 x - \frac{1}{3}}{\sqrt{6} - \operatorname{sen} x + 2\cos x} < 0$$

I) $x \in \left\langle \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$ II) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\rangle$

III) $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right\rangle$ IV) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

Son verdaderas:

A) Sólo I B) II y IV C) I, II y III
D) Ninguna E) Todas menos II

**129.-** Si: $x \in [0; 2\pi]$, resolver la inecuación trigonométrica e indicar el intervalo solución:

$$\sec x + \cos x < 0, \text{ si: } x \in [0; 2\pi]$$

A) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \pi \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle$

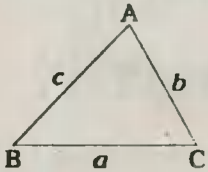
D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

# Resolución de Triángulos Oblicuángulos

CAP 20

En este capítulo desarrollaremos la capacidad de resolver triángulos, pero no desde el punto de vista geométrico, si no más bien utilizando las propiedades trigonométricas que éstas poseen. La razón de este tratamiento se debe a que existen muchas situaciones problémicas que se solucionan con menos complejidad aplicando las definiciones trigonométricas, lo cual nos invita a descubrir y establecer nuevos teoremas para nuevos campos de aplicación. Es bastante conocida la aplicación del teorema de senos o *ley de senos*, así como también el teorema de cosenos o *ley de cosenos* para triángulos, es a partir de estos teoremas y con la ayuda de los temas anteriormente vistos como: identidades trigonométricas, transformaciones trigonométricas,... etc, se deducen nuevas relaciones de gran importancia, los que nos pemitirán resolver no solamente triángulos si no, en general, todo tipo de polígonos planos.

Sea el triángulo ABC, donde:

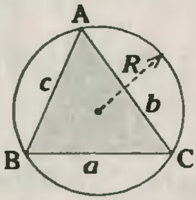


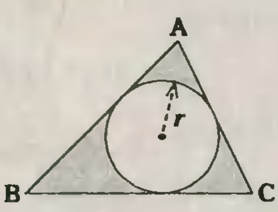

A, B, C: medida de los ángulos internos del triángulo ABC.

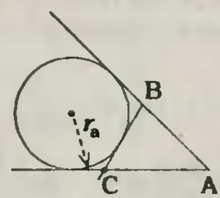
$a$, $b$, $c$: longitudes de los lados del triángulo ABC.

$2p$: perímetro del triángulo ABC. $2p = a + b + c$

$p$: semiperímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$




R: circunradio del triángulo ABC

$r$: inradio del triángulo ABC

$r_a$: exradio relativo al lado $a$

$r_b$: exradio relativo al lado $b$

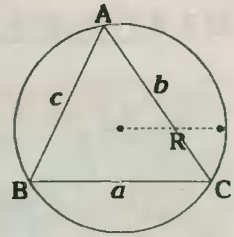
$r_c$: exradio relativo al lado $c$

## 20.1. LEY DE SENOS (TEOREMA DE SENOS)

En todo triángulo ABC se verifica que «sus lados son directamente proporcionales a los senos de sus respectivos ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es igual al diámetro de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo».

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

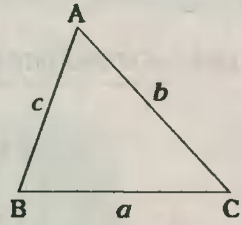
o bien $$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}} = 2R$$




De donde: $a = 2R \text{ sen A} \wedge b = 2R \text{ sen B} \wedge c = 2R \text{ sen C}$

## 20.2. LEY DE COSENOS (TEOREMA DE COSENOS)

En todo triángulo se cumple: "*El cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de éstos multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al primer lado*".



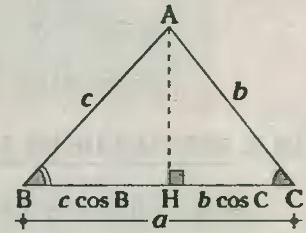

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos C$$

De donde:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \quad \wedge \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} \quad \wedge \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

## 20.3. LEY DE PROYECCIONES (TEOREMA DE LAS PROYECCIONES)

En todo triángulo se cumple que: "*Uno de los lados es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos respecto al primer lado*"

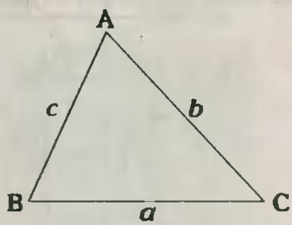



$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = a \cos C + c \cos B$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$

## 20.4. LEY DE TANGENTES (TEOREMAS DE TANGENTES)

En todo triángulo se cumple que: "*La diferencia de dos de los lados es a su suma, como la tangente de la semidiferencia de sus respectivos ángulos opuestos es a la tangente de la semisuma de los mismos*"

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad \wedge \quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$



## 20.5. R.T. DE LOS SEMIÁNGULOS

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

## 20.6. SEMIPERÍMETRO ($p$), INRADIO ($r$) Y EXRADIO ($R$)

$$p = 4\,R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad r = 4\,R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

$$r_a = 4\,R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad r_b = 4\,R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_c = 4\,R\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

De estas relaciones se deducen los inradios:

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} \qquad r_b = p\tan\frac{B}{2} \qquad r_c = p\tan\frac{C}{2}$$

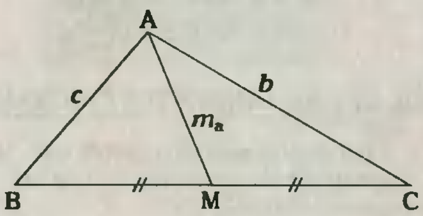
$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} \qquad r = (p-b)\tan\frac{B}{2} \qquad r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

## 20.7. MEDIANA DE UN TRIÁNGULO ABC

$$4\,m_a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc\cos A$$

$$4\,m_b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac\cos B$$

$$4\,m_c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos C$$

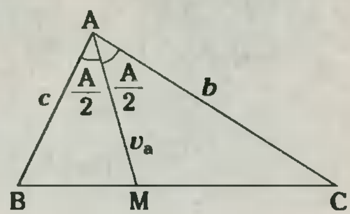



## 20.8. BISECTRIZ INTERIOR DE UN TRIÁNGULO

$$v_a = \frac{2\,bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$v_b = \frac{2\,ac}{a+c}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$v_c = \frac{2\,ab}{a+b}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

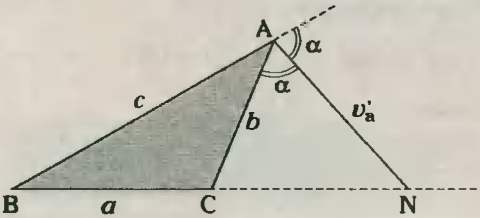


## 20.9. BISECTRIZ EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

$$v'_a = \frac{2bc}{|b-c|}\,.\,\text{sen}\frac{A}{2}$$

$$v'_b = \frac{2ac}{|a-c|}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}$$

$$v'_c = \frac{2ab}{|a-b|}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

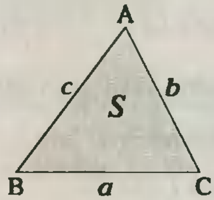



## 20.10. ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

$$S = \frac{bc}{2}\ \text{sen A}$$

$$S = \frac{ab}{2}\ \text{sen C}$$

$$S = \frac{ac}{2}\ \text{sen B}$$




$S = 2R^2\ \text{sen A sen B sen C}$ $\qquad S = \dfrac{abc}{4R}$ $\qquad S = p.r$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\qquad S = r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$ $\qquad S = p^2\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

$S = p(p-a)\tan\dfrac{A}{2}$ $\qquad S = p(p-b)\tan\dfrac{B}{2}$ $\qquad S = p(p-c)\tan\dfrac{C}{2}$

$S = r_a(p-a)$ $\qquad S = r_b(p-b)$ $\qquad S = r_c(p-c)$

$S = \sqrt{r\,r_a r_b r_c}$ $\qquad S = \sqrt{h_a h_b h_c R}\ \text{sen } 45^\circ$ $\qquad S = r_a r_b r_c \cdot p^{-1}$

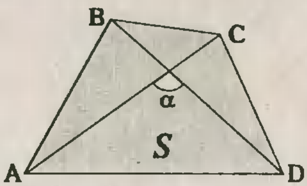
Siendo: «S» Área de la región triangular

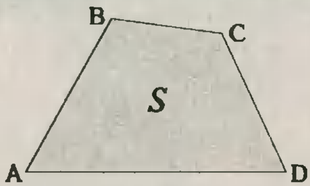
## 20.11. ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

$$S = \frac{(AC)(BD)}{2}\ \text{sen}\,\alpha$$

Si: $\dfrac{A+C}{2} = \phi \ \vee\ \dfrac{B+D}{2} = \phi$

$$\Rightarrow\ S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\phi}$$

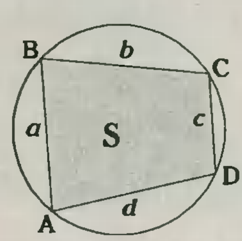


## 20.12. PARA CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES

Si se cumple que:

$A + C = 180°$ ó $B + D = 180°$ $\Rightarrow$ $\phi = 90°$




Luego:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

En este tipo de cuadriláteros se cumple que:

«El producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos», así:

**(AC) (BD) =** $ac + bd$ (Teorema de Ptolomeo)

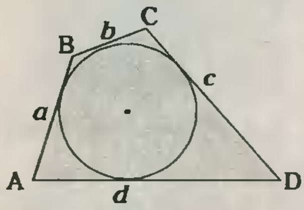
## 20.13. PARA CUADRILÁTEROS CIRCUNSCRIPTIBLES

Se cumple el Teorema de Pitot:

$$a + c = b + d$$

$$\Rightarrow \quad p = a + c \quad ó \quad p = b + d$$

Luego: $S = \sqrt{abcd}\ \text{sen}\ \phi$

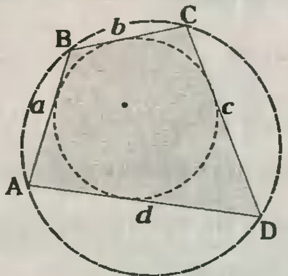


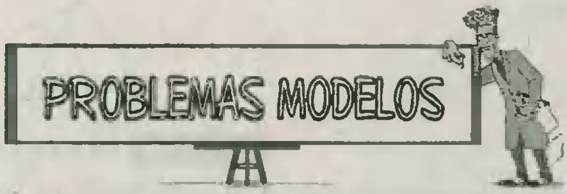

## 20.14. PARA CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES Y CIRCUNSCRIPTIBLES

Para éstos cuadriláteros $\phi = 90°$ , y se llaman Bicéntricos. Luego:

$$S = \sqrt{abcd}$$

Siendo: «S» Área de la región cuadrangular.






**PROB. 1**

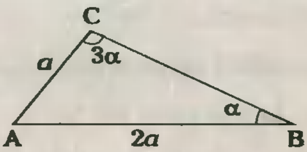
Se tiene un triángulo ABC, en el que su lado mayor es el doble del menor, y su menor ángulo es la tercera parte del mayor.

a) Calcular la medida de los tres ángulos del triángulo ABC.

b) ¿Qué clase de triángulo es?

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Elaboramos una gráfica:




Apliquemos la ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2a}{\operatorname{sen}3\alpha}$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha\,(2\cos2\alpha + 1) = 2\operatorname{sen}\alpha$

$2\cos2\alpha + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\cos2\alpha = 1$

$\Rightarrow \quad \cos2\alpha = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$

Luego:

a) $A = 60°$ ; $B = 30°$ y $C = 90°$

b) El triángulo es rectángulo.

**PROB. 2**

Los lados de un triángulo son números enteros y consecutivos. Si su mayor ángulo es el doble del menor, determine:

a) Las medidas de los tres lados.

b) El valor del coseno del mayor ángulo.

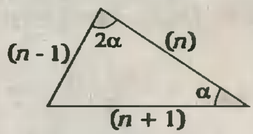
c) El área de la región triangular.

d) La medida del inradio

e) La medida del circunradio.

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Por ley de senos:




$$\frac{(n+1)}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{n-1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{2\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha} = \frac{n-1}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$\frac{n+1}{2\cos\alpha} = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{n+1}{2(n-1)} \quad ...(*)$$

Pero por ley de cosenos:

$$(n - 1)^2 = (n+1)^2 + (n)^2 - 2\,(n+1)\,(n)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 2n(n+1)\cos\alpha = (n+1)^2 - (n-1)^2 + n^2$$

$$2n(n+1)\cos\alpha = 4n + n^2 \qquad ...(**)$$

Reemplazando (*) en (**), tendremos:

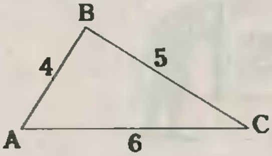
$$\cancel{2}n\,(n + 1)\frac{(n+1)}{\cancel{2}(n-1)} = 4n + n^2$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n}(n+1)^2}{(n-1)} = \cancel{n}(n + 4) \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{(n-1)} = (n + 4)$$

$$(n+1)^2 = (n + 4)\,(n - 1)$$

$$\Rightarrow \quad n^2 + 2n + 1 = n^2 + 3n - 4 \quad \Rightarrow \quad n = 5$$

Luego el triángulo es así:




a) $a = 5$ ; $b = 6$ ; $c = 4$

b) $(6)^2 = (4)^2 + (5)^2 - 2\,(4)(5)\cos B$

$40\cos B = 16 + 25 - 36$

$\Rightarrow\ 40\cos B = 5$

$\therefore\ \cos B = 1/8$

c) Cálculo del área (S)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ;\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow\ p = \frac{5+6+4}{2} \quad \Rightarrow\ p = \frac{15}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)}$$

$$\Rightarrow\ S = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}}$$

$$\therefore\ S = \frac{15}{4}\sqrt{7}\ u^2$$

d) Se sabe que: $S = pr$

$$\Rightarrow\ \frac{15}{4}\sqrt{7} = \frac{15}{2}r \qquad \therefore\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}\ u$$

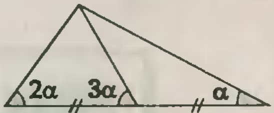
e) Se sabe que: $S = \dfrac{abc}{4R}$

$$\Rightarrow\ \frac{15}{4} = \frac{5+6+4}{4R} \quad \Rightarrow\ 15R = 5\times 6\times 4$$

$$\Rightarrow\ 15R = 15\times 8 \qquad \therefore\quad \mathbf{R = 8}$$

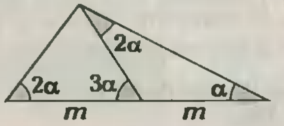
**PROB. 3**

A partir de la figura que se muestra, calcule la medida del ángulo $\alpha$.




**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Aplicando la ley de senos (la proporcionalidad en dos triángulos que tienen los mismos lados).




$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}5\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}5\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

$$\Rightarrow\ 2\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}5\alpha$$

Transformando a sumas el primer miembro:

$$\operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}5\alpha$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}5\alpha - \operatorname{sen}3\alpha$$

Transformando a producto el 2do. miembro

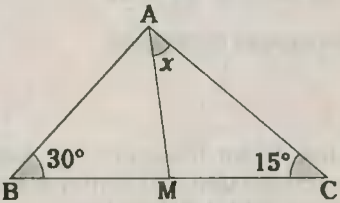
$$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos 4\alpha\operatorname{sen}\alpha \ \Rightarrow\ 1 = 2\cos 4\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 1/2 \ \Rightarrow\ 4\alpha = 60°$$

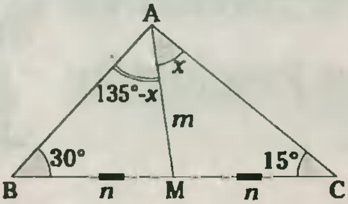
$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha = 15°}$$

**PROB. 4**

Al resolver el siguiente triángulo donde $\overline{AM}$ es mediana; el ángulo $x$ es:



**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★




En el $\Delta$ABM aplicamos el Teorema de los Senos:

$$\frac{m}{\text{sen}30°} = \frac{n}{\text{sen}(135°-x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{\text{sen}30°}{\text{sen}(45°+x)} \quad ...(I)$$

$\Delta$AMC: aplicamos el Teorema de los Senos:

$$\frac{m}{\text{sen}15°} = \frac{n}{\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{\text{sen}15°}{\text{sen}x} \quad ...(II)$$

Igualando (I) y (II), tendremos:

$$\frac{\text{sen}30°}{\text{sen}(45°+x)} = \frac{\text{sen}15°}{\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{sen}(45+x)}{\text{sen}\,x} = \frac{\text{sen}30°}{\text{sen}15°}$$

Desarrollando el sen de $(45° + x)$ y efectuando como sigue, deducimos :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cot x + 1 = \sqrt{3} + 1$$

Finalmente: $\cot x = \sqrt{3}$

De donde: $\boxed{x = 30°}$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Cuando en un triángulo se conocen sus tres lados y se desea calcular sus ángulos, se aplica ley de cosenos.*

2) *En un triángulo cuando se conoce la relación de lados y ángulos, se aplica la ley de senos.*

3) *Si se tienen dos triángulos de lados iguales, los senos de sus respectivos ángulos son proporcionales.*

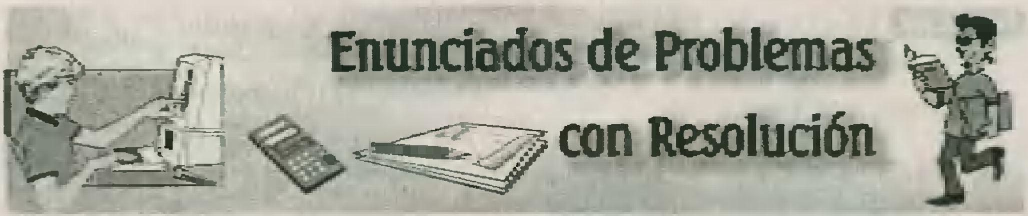
4) *En cualquier triángulo, tanto sus lados, perímetro, inradio; área, se expresan en función del circunradio y los ángulos. Así:*

$$a = 2R\,\text{sen}A \quad ; \quad b = 2R\,\text{sen}B \quad ; \quad c = 2R\,\text{sen}C$$

$$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad r = 4R\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

$$r_a = 4R\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad r_b = 4R\,\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_b = 4R\,\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad S = 2R^2\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C$$




***LEY DE SENOS***

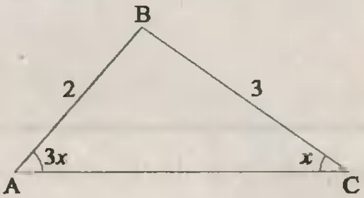
**01.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$BC = a \ , \ AC = b \ , \ AB = c \ ;$$

calcula: $M = \dfrac{a}{b} - \dfrac{\text{sen}A}{\text{sen}B}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**02.-** En la figura mostrada determine el valor de $x$:



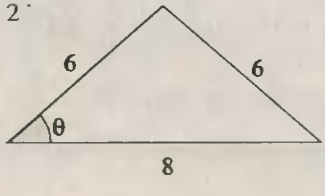

A) $\text{arc}\cos\dfrac{1}{3}$ B) $\text{arc}\cos\dfrac{1}{4}$ C) $\text{arc}\cos\dfrac{1}{7}$

D) $\dfrac{1}{2}\ .\ \text{arc sen}\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}\ .\ \text{arc}\cos\dfrac{1}{4}$

**03.-** Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden $2\theta$ y $6\theta$ los lados opuestos miden 4 y 8 respectivamente, determine el valor de $\theta$.

A) 12° B) 14° C) 15° D) 20° E) 30°

**04.-** De la figura mostrada, determine el valor de: $\tan\dfrac{\theta}{2}$.




A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{4}{3}$

**05.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$BC = a \ , \ AC = b \ \text{y} \ AB = c \ ,$$

reducir: $M = abc.\text{sen}\,C.(\cot A + \cot B)$

A) $ab$ B) $ac$ C) $c^3$ D) $b^3$ E) $a^3$

**06.-** En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, reducir:

$$M = \frac{b\text{sen}B - c\text{sen}C}{2a.\text{sen}(B - C)}$$

A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 1/3 E) 1/4

**07.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, $m\angle B - m\angle C = 90°$ y $b + c = a\sqrt{2}$, determinar: $m\angle A$.

A) 30° B) 37° C) 60° D) 45° E) 53°

**08.-** En un $\Delta$ABC, de lados: BC = $a$, AC = $b$ y AB = $c$, reducir:

$$M = \frac{b\cos B + c.\cos C}{\cos(B - C)}$$

A) $b$ B) $c$ C) $a+b$ D) $a$ E) $a$-$b$

**09.-** En un $\Delta$ ABC, se cumple que: BC = 20, AC = 30 y $m\angle A = 37°$. Determine "cos 2B".

A) $\dfrac{13}{100}$ B) $-\dfrac{81}{50}$ C) $\dfrac{81}{50}$

D) $\dfrac{17}{100}$ E) $\dfrac{19}{100}$

**10.-** Dado un triángulo ABC, si el ángulo "B" es el triple del ángulo "C" y AB = 5, AC = 7, determine: " cos 2C"

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

**11.-** ¿En qué tipo de triángulo ABC, de lados BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, se cumple que:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C} \ ?$$

A) isósceles B) rectángulo

C) obtusángulo D) acutángulo

E) equilátero

**12.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{c}{a.b},$$

determine la medida del ángulo C.

A) 45° B) 37° C) 60° D) 53° E) 90°

**13.-** En un $\Delta$ABC se cumple BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, reducir:

$$M = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B}{\text{sen}B + \text{sen}C} + \frac{c-a}{b+c}$$

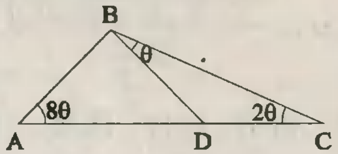
A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 1/3 E) 3

**14.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además R. tan A. tan B . tan C = 2, donde R es el circunradio, determine:

$$M = a.\sec A + b.\sec B + c.\sec C$$

A) 1/2 B) 5 C) 2 D) 4 E) 1/4

**15.-** De la figura mostrada determine el valor de "θ", si AB = CD




A) 15° B) 18° C) 13° D) 20° E) 10°

**16.-** En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$ y AB = $c$, reducir:

$$M = (a - b)\,\text{sen}\,C + (b - c)\,\text{sen}\,A + (c - a)\,\text{sen}\,B$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) -2

***LEY DE COSENOS***

**17.-** En un $\Delta$ ABC se cumple: AC = $2\sqrt{5}$ , AB = $3\sqrt{5}$ y $m\angle A = 60°$, determine el lado BC.

A) $\sqrt{35}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{19}$ D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{21}$

**18.-** En un $\Delta$ ABC se cumple AB = cos 3θ, AC = cos θ y $m\angle A = 4\theta$, determine BC.

A) sen θ B) sen 2θ C) sen 4θ

D) sen 3θ E) sen 5θ

**19.-** En un $\Delta$ABC de lados $a$, $b$, y $c$ se cumple: $3a = 7c$ y $3b = 8c$, determine la medida del ángulo A.

A) 30° B) 45° C) 80° D) 120° E) 60°

**20.-** En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además: $a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2}{3}bc$, determine el valor de $\tan\frac{A}{2}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

**21.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$BC = a\ ,\ AC = b\ ,\ AB = c$$

y además: $3(a^2 - b^2 - c^2) = 2bc$ ,

determine: $\cos^2\frac{A}{2}$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

22.- En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AC = $c$, además: $(a+b+c)(a+b-c)=\dfrac{7ab}{3}$, determine el valor de: "cos C"

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/6 E) 1/8

23.- En un $\Delta$ABC, se cumple: AC = $b$, BC = $a$, AB = $c$, determinar: M = $a(b \cos C - c \cos B)$, en términos de los lados "$b$" y "$c$"

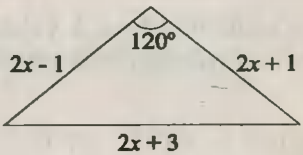
A) $bc$ B) $2b^2$ C) $c^2 - b^2$

D) $b^2 + c^2$ E) $b^2 - c^2$

24.- Determine el mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son proporcionales a 7,8 y 13.

A) 60° B) 105° C) 150° D) 90° E) 120°

25.- De la figura mostrada, determine el valor de "$x$".




A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 0,5

26.- En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y se cumple que: $a + b = \sqrt{2}\,c$, determinar el valor de "1 + cos C"

A) $\dfrac{c^2}{bc}$ B) $\dfrac{2c^2}{ab}$ C) $\dfrac{b^2}{ac}$

D) $\dfrac{c^2}{2ab}$ E) $\dfrac{2b^2}{ac}$

27.- En un $\Delta$ ABC se conocen: BC = 8, AC = 7 y $m\angle$B = 60°, determine el valor de: $\sqrt{3}\cot C$.

A) 5/11 B) 11/5 C) 11/3 D) 3/11 E) 11

28.- En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además: $a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2(b^2 + c^2)$, determinar la medida del ángulo A.

A) 45° B) 60° C) 90° D) 120° E) 135°

29.- Los lados en un triángulo son 3 números consecutivos y el ángulo mayor es el doble del menor, determinar el perímetro de dicho triángulo.

A) 9 B) 12 C) 18 D) 15 E) 21

30.- En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y $a \,.\, \cos^2\left(\dfrac{B}{2}\right) + b.\cos^2\left(\dfrac{A}{2}\right) = \sqrt{3}$, determine el perímetro de dicho triángulo

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

***LEY DE TANGENTES***

31.- En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ además: $\tan\dfrac{A}{2} = 1$ y $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{4}$, determine el valor de: $M = \dfrac{a-b}{a+b}$.

A) 3/5 B) 9/25 C) 4/5 D) 16/25 E) 9/16

32.- En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, $a = 4b$ además: $\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + \tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right) = 8$, determine el valor de: $\cot\dfrac{C}{2}$.

A) 3 B) 5 C) 7 D) 1 E) 2

33.- En un $\Delta$ ABC se cumple BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, además: $b = 5c$. Reducir :

$$M = \frac{\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right) - \tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\cot\dfrac{A}{2}}$$

A) -1/3 B) 1/4 C) 1/2 D) 1/5 E) 1/7

**34.-** En un $\Delta$ABC se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además: $b$ . cot B = $(2c - b)$ cot A, determine:

$$M = \left(\frac{b+c}{b-c}\right) . \tan\left(\frac{B - C}{2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

**35.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, $m\angle C = 60°$ y $a = 3b$, determinar:

$$\tan(A - B).$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

### *LEY DE PROYECCIONES*

**36.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$, reducir:

$$M = \left(\frac{a - c.\cos B}{b}\right) . \sec C$$

A) 1 B) 2 C) 0,5 D) 3 E) 1/3

**37.-** En un $\Delta$ABC, de lados BC = $a$, AC = $b$ y AB = $c$, reducir:

$$M = \left(\frac{a - c.\cos B}{c - a.\cos B}\right) . \sec C$$

A) sec B B) sec C C) csc A

D) csc B E) sen A

**38.-** En un $\Delta$ABC, se cumple: BC = $a$, AC = $b$ y AB = $c$, reducir:

$$M = \frac{c.\cos(A + C) + b.\cos(A + B)}{a}$$

A) -1 B) 1 C) 0,5 D) - 0,5 E) 0

**39.-** En un $\Delta$ABC, se cumple BC = $a$, AC = $b$, AB = $c$ y además: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$, calcular:

$$M = bc. \cos A + ac . \cos B + ab \cos C$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 4

**40.-** En un $\Delta$ ABC acutángulo se cumple:

$$BC = a \ , \ AC = b \ , \ AB = c \ ;$$

simplificar:

$$M = bc.\sqrt{1+\cos 2A} + ac.\sqrt{1+\cos 2B} + ab.\sqrt{1+\cos 2C}$$

A) $\sqrt{2}\,(a^2 - b^2 + c^2)$ D) $\sqrt{3}\,(a^2 + b^2 - c^2)$

B) $\sqrt{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)$ E) $\sqrt{3}\,(a^2 + b^2 + c^2)$

C) $\sqrt{3}\,(a^2 + b^2 + c^2)$

### *ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR*

**41.-** En un $\Delta$ABC se cumple: los ángulos interiores de dicho triángulo son proporcionales a los números 1, 2, 3 y la diferencia de longitudes entre el lado mayor y el lado menor es "$2k$", determine el área de la región triangular ABC.

A) $k^2$ B) $\sqrt{2}\,.k^2$ C) $2\sqrt{3}\,.k^2$

D) $\sqrt{3}\,.k^2$ E) $2\sqrt{2}\,.k^2$

**42.-** En un $\Delta$ABC se cumple: el área (S) de dicha región triangular es $90\sqrt{3}\ cm^2$ y los senos de los ángulos A, B, C son proporcionales a los números 5; 7; 8, determine la medida del ángulo B.

A) 60° B) 30° C) 90° D) 45° E) 120°

**43.-** En un $\Delta$ ABC se cumple: los lados son tres números impares consecutivos y uno de sus ángulos mide 120°, determine el área de la región triangular en $\mu^2$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}u^2$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}u^2$

D) $\frac{15\sqrt{3}}{2}u^2$ E) $\frac{15\sqrt{3}}{4}u^2$

**44.-** En un $\Delta ABC$ se cumple:

$$4S = (\rho - a)(\rho - b) + \rho \,.\, (\rho - c)$$

donde S es el área de la región triangular ABC y ρ es el semiperímetro, determine la medida del ángulo C.

A) 60º ó 120º  C) 20º ó 160º  B) 45º ó 135º

D) 90º  E) 30º ó 170º

**45.-** En un $\Delta ABC$ se cumple:

$$4S.\tan\frac{C}{2} = ab,$$

donde S es el área de la región triangular ABC, determinar el valor de: $\tan\frac{C}{4}$.

A) 2  B) $3 + \sqrt{3}$  C) $2 - \sqrt{2}$

D) $2 - \sqrt{3}$  E) $2 + \sqrt{3}$

**46.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = a^2b^2c^2.\text{sen A sen B sen C}$$

en términos del área (S) de la región triangular ABC.

A) $S^3$  B) $2S^3$  C) $4S^3$  D) $8S^3$  E) $0{,}5S^3$

**47.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$W = \left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right)^{-1}$ en términos del circunradio (R) y el inradio ($r$), donde $a$, $b$, y $c$ son los lados de dicho triángulo.

A) $2R.r$  B) $Rr$  C) $0{,}5Rr$

D) $3Rr$  E) $0{,}2R.r$

**48.-** En un $\Delta ABC$, se cumple la longitud del circunradio (R) es $13\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $cm$ y la media geométrica de sus lados $a$, $b$ y $c$ es $2\sqrt[3]{91}$, determine el área de la región triangular.

A) $7\sqrt{3}\ cm^2$  B) $14\sqrt{3}\ cm^2$  C) $16\sqrt{3}\ cm^2$

D) $12\sqrt{3}\ cm^2$  E) $16\sqrt{2}\ cm^2$

**49.-** En un $\Delta ABC$; calcule:

$$W = \frac{a^2}{\tan A} + \frac{b^2}{\tan B} + \frac{c^2}{\tan C},$$

en términos de los lados $a$, $b$ y $c$ de dicho triángulo si además el circunradio (R) mide 1 $cm$.

A) $abc$  B) $a$  C) $b$  D) $c$  E) $a+b+c$

**50.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$W = \dfrac{(b^2 - c^2).\text{senB.senC}}{2\text{sen}(B - C)}$, en términos del área (S) de la región triangular ABC.

A) 0,5 S  B) 2 S  C) 3 S  D) 4S  E) S

**51.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = 2S(\cot B + \cot C),$$

en términos del lado "$a$", donde S es el área de la región triangular ABC.

A) $2a^2$  B) $3a^2$  C) $4a^2$  D) $a^2$  E) $6a^2$

**52.-** En un $\Delta ABC$ se cumple:

$$S = a\cos A + b\cos B + c.\cos C,$$

donde S es el área de la región triangular ABC, determine el circunradio (R) respecto a dicho triángulo.

A) 0,5  B) 1  C) 1,5  D) 2  E) 2,5

**53.-** En un $\Delta ABC$ se cumple:

$$a\cos A + b\cos B + c.\cos C = \frac{2}{R},$$

donde R es el circunradio, determine el área de la región triangular en $\mu^2$.

A) 0,5 B) 0,25 C) 3 D) 2 E) 1 $\mu^2$

**54.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$$W=\frac{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}},$$

si el perímetro es igual a cuatro veces el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

A) 2 B) 1 C) 1,5 D) 2,5 E) 3

**55.-** En un $\Delta$ABC se cumple: $S = \rho\ .\ (\rho - a)$, donde es el área de la región triangular ABC y $\rho$ es el semiperímetro de dicho triángulo, determine la medida del ángulo A.

A) 60° B) 45° C) 75° D) 30° E) 90°

**56.-** En un $\Delta$ABC se cumple: $a\operatorname{sen}B + b\operatorname{sen}A = c$, donde $a$, $b$ y $c$ son las longitudes de los lados de dicho triángulo, determine la longitud del lado "$c$" en función del área (S) de la región triangular ABC.

A) $2\sqrt{S}$ B) $\sqrt{S}$ C) $0.5\sqrt{S}$

D) $3\sqrt{S}$ E) $4\sqrt{S}$

**57.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$$W=\frac{a.\sec A+b.\sec B}{\csc 2A.\csc 2B},$$

en términos del área (S) de la región triangular ABC y el circunradio (R).

A) $\frac{S}{R}$ B) $\frac{2S}{R}$ C) $\frac{3S}{R}$ D) $\frac{4S}{R}$ E) $5\frac{S}{R}$

**58.-** En un $\Delta$ABC los ángulos de dicho triángulo miden $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ y $\frac{4\pi}{7}$; asimismo el circunradio mide 4 $m$, determine el área de la región triangular.

A) $\sqrt{7}\ m^2$ B) $2\sqrt{7}\ m^2$ C) $3\sqrt{7}\ m^2$

D) $0,5\sqrt{7}\ m^2$ E) $4\sqrt{7}\ m^2$

**59.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$a^2.\cot A + b^2.\cot B + c^2.\cot C = 4,$$

donde $a,b,$ y $c$ son las longitudes de los lados de dicho triángulo, determine el área de la región triangular.

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 1

**60.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$\cot A + \cot B = 1\ ;\ \cos C = \frac{3}{5}\ ;$$

el circunradio R = 10 $m$, determine el área de la región triangular en ABC.

A) 16 $m^2$ B) 32 $m^2$ C) 128 $m^2$

D) 64 $m^2$ E) 68 $m^2$

**61.-** En un $\Delta$ ABC se cumple: las cotangentes de sus ángulos interiores son proporcionales a 3, 5, 7 y dicho triángulo está inscrito en una circunferencia cuya región circular tiene un área de 90 $\pi\ cm^2$, determinar el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{13}{16}$ B) $\frac{15}{17}$ C) $\frac{213}{16}$

D) $\sqrt{71}\ cm^2$ E) $\frac{213}{16}\sqrt{71}\ cm^2$

**62.-** En un $\Delta$ ABC, calcule:

$$W=\tan\frac{A}{2}\ .\ \tan\frac{B}{2}\ .\ \tan\frac{C}{2},$$

en términos del semiperímetro $\rho$ y el área S de la región triangular ABC.

A) S. $\rho$ B) S. $\rho^2$ C) 2S. $\rho$

D) S. $\rho^{-2}$ E) S. $\rho^{-1}$

**63.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$$W=\frac{a+b+c}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}},$$

en términos del inradio ($r$)

A) $0{,}5r$  B) $r$  C) $1{,}5r$  D) $2r$  E) $2{,}5r$

**64.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=k$ y el inradio $r=\sqrt{3}\ \mu$, determine el área de la región triangular ABC en $\mu^2$.

A) $2k$  B) $3k\mu^2$  C) $k$  D) $4k$  E) $0{,}5k$

**65.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$b+c=2a$, donde $a, b, c$ son las medidas de los lados de dicho triángulo, determine el área de la región triangular ABC en términos del lado "$a$" y la medida de su ángulo opuesto A, respecto a dicho lado.

A) $\frac{a^2}{2}$  B) $\frac{a^2}{4}$  C) $\frac{3a^2}{4}$

D) $\frac{3a^2}{6}.\cot\frac{A}{2}$  E) $\frac{3a^2}{2}.\tan\frac{A}{2}$

**66.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$r_a.r_b+r_b.r_c+r_a.r_c=\frac{4k^2}{r^2}$, $k>0$, donde $r_a$, $r_b$, $r_c$ son las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas y $r$ el inradio, determine el área de la región triangular ABC.

A) $0{,}5k$  B) $k$  C) $2k$  D) $3k$  E) $2{,}5k$

**67.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$$W=\frac{\csc^2\left(\frac{A}{2}\right)}{bc}+\frac{\csc^2\left(\frac{B}{2}\right)}{ac}+\frac{\csc^2\left(\frac{C}{2}\right)}{ab},$$ en términos del inradio ($r$).

A) $\frac{1}{r}$  B) $\frac{2}{r}$  C) $\frac{2}{r^2}$  D) $\frac{3}{r}$  E) $\frac{1}{r^2}$

**68.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$$W=\frac{\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right).S^2}{(bc)^2.\text{sen}^4\frac{A}{2}+(ac)^2.\text{sen}^4\frac{B}{2}+(ab)^2.\text{sen}^4\frac{C}{2}},$$

donde S es el área de la región triangular.

A) 1  B) 1,5  C) 2  D) 2,5  E) 3

**69.-** En un $\Delta$ABC, se cumple:

el lado BC es igual a $2\sqrt{2}$ $cm$, las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son $\overline{PS}$ y $\overline{SM}$, determine el área de la región triangular PSM en términos de los ángulos A, B, y C.

A) $\frac{\text{sen}B}{\cos A\ \cos B}$  D) $\frac{\cos(B-C)}{\text{sen}A}$

B) $\frac{\text{sen}A}{\cos B.\cos C}$  E) $\frac{\cos B.\cos C}{\text{sen}A}$

C) $\frac{\cos B.\cos C}{\cos A}$

**70.-** En un $\Delta$ABC, calcule: $W=\frac{r.r_a+r_b.r_c}{2bc}$, donde $r_a$, $r_b$, $r_c$ son las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas y $r$ el inradio respecto a dicho triángulo.

A) 2  B) 1/3  C) 3  D) 1/2  E) 4

**71.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$(r_b-r_a)(r_c-r_a)=2.r_b.r_c,$$

donde $r_a$, $r_b$ y $r_c$ son las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas, determine que tipo de triángulo es:

A) acutángulo  B) rectángulo

C) equilátero  D) isósceles

E) escaleno

**72.-** En un $\Delta$ABC , calcule:

$W=\dfrac{r_a-r}{a}+\dfrac{r_b-r}{b}$ , donde $r_a$, $r_b$ son las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas y $r$ la longitud del inradio; además $r_c=2\ cm$ y $c=4\ cm$.

A) 0,5 B) 2 C) 1 D) 3 E) 0,25

**73.-** En un $\Delta$ABC , calcule:

$W=\dfrac{r-r_b+2R}{2R}$ en términos de alguna razón trigonométrica, si $r$ es el inradio, $r_b$ es el exradio y R el circunradio.

A) cos B B) cos C C) cos A

D) sen A E) sen B

***LÍNEAS NOTABLES***

**74.-** En un $\Delta$ABC, calcule:

$W=\dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}$ , donde $m_a$, $m_b$ , $m_c$ son las longitudes de las medianas de dicho triángulo.

A) 3/4 B) 4/3 C) 1/2 D) 2/3 E) 3/2

**75.-** En un $\Delta$ABC se cumple: el lado mayor y menor miden 26 *cm* y 10 *cm*, además sus ángulos están en progresión aritmética, determine una de las medianas de dicho triángulo.

A) 14 *cm* B) 14,09 *cm* C) 15 *cm*

D) 15,09 *cm* E) 16,09 *cm*

**76.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$2\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}\ ,$$

determine la longitud de la mediana relativo al lado "$a$" ($m_a$) en términos de los lados "$b$" y "$c$".

A) $b+c$ B) $b-c$ C) $2bc$

D) $2\sqrt{bc}$ E) $\sqrt{bc}$

**77.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

la longitud de la mediana relativa al lado "$a$" es media proporcional entre las longitudes de los lados "$b$" y "$c$", determine $W=\operatorname{sen}^2\dfrac{A}{2}$ en función de los lados de dicho triángulo.

A) $bc$ B) $\dfrac{(b+c)^2}{bc}$ C) $\dfrac{(b-c)^2}{2bc}$

D) $\dfrac{(b+c)^2}{4bc}$ E) $\dfrac{(b-c)^2}{4cb}$

**78.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$R^2.\operatorname{sen}^3A+2S.\cos A=\operatorname{sen}A\ ,$$

donde S es el área de la región triangular ABC y R es el circunradio, determine la longitud de la mediana relativa ($m_a$) al lado "$a$".

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) $\sqrt{2}$

**79.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$\frac{1}{k}.\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{q}\operatorname{sen}\frac{A}{2}=13\ ,$$

donde $k$ y $q$ son las longitudes de la bisectriz interior y exterior respectivamente del ángulo A, determine el lado "$c$" si $b>c$.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

**80.-** En un $\Delta$ABC se cumple:

$$W=\frac{1}{k}.\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{q}.\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{t}\cos\frac{C}{2}\ ,$$

en términos de los lados $a$, $b$ y $c$ de dicho triángulo, si $k$, $q$, $t$ son las longitudes de las bisectrices interiores para sus respectivos ángulos A, B, y C.

A) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ B) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ C) $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

D) $\dfrac{a+b+c}{abc}$ E) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

**81.-** En un $\Delta ABC$ se cumple: la bisectriz exterior relativa al lado "$c$" mide $\sqrt{2}+1$ $cm$; $m\angle A - m\angle B = 45°$, determine el valor de la bisectriz interior relativa al mismo lado en $cm$.

A) 0,5 B) 2 C) 1 D) 1,5 E) 3

**82.-** En un $\Delta ABC$ se cumple: la medida del ángulo A es 60° y la longitud de la bisectriz interior ($V_a$) es media proporcional entre los segmentos que determina sobre el lado BC, determine la medida de los ángulos B y C.

A) 100° y 20° B) 90° y 30° C) 110° y 10°

D) 108° y 120° E) 105° y 15°

**83.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = 2R\,.\,r \operatorname{sen} A + r^2\,.\,\csc A + r^2\,.\,\cot A,$$

en términos del área (S) de la región triangular ABC, donde R es el circunradio y $r$ es el inradio respecto a dicho triángulo.

A) 2S B) 0,5 S C) 3 S D) 2,5 S E) S

**84.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = \frac{abc.r_a}{S.(\rho-b)(\rho-c)}\ ,\ \text{si: } \frac{R}{r}=\frac{5}{2}$$

y además $a$, $b$, $c$ son las longitudes de los lados, ra es la longitud del exradio y S es el área de la región triangular.

A) 10 B) 20 C) 15 D) 8 E) 4

**85.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = \rho[r.\cot A + r_a.\cot B] - a.r_a.\cot B,$$

en términos de la longitud del lado "$c$", donde $\rho$ es el semiperímetro $r$ la longitud del inradio y $r_a$ es la longitud del exradio.

A) $4c^2$ B) $3c^2$ C) $2{,}5c^2$ D) $c^2$ E) $\frac{c^2}{2}$

**86.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$r_a.\cot\frac{A}{2} = 2a,$$

donde $r_a$ es el exradio, determine el valor de:

$$\csc A - \frac{r}{a}$$

A) sen A B) cos A C) tan A

D) sec A E) cot A

**87.-** En un $\Delta ABC$ se cumple:

$r_b = 3r$, donde $r_b$ es exradio y $r$ es el inradio, determine cuál es la relación entre los lados $a,b$ y $c$ de dicho triángulo.

A) $a+b=2c$ B) $a+c=2b$ C) $b-c=2a$

D) $a-b=2c$ E) $b+c=2a$

**88.-** En un $\Delta ABC$, calcule:

$$W = r_b\,.\left[\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right],$$

en términos de las longitudes de los lados de dicho triángulo, donde $r_b$ es la longitud del exradio respecto al lado $b$.

A) $a$ B) $b$ C) $c$ D) $2a$ E) $2b$

**89.-** En un $\Delta$ ABC, calcule:

$$W = \frac{r_a.(r_b+r_c).\csc A}{r_b.(r_a+r_c)},$$

donde $r_a$, $r_b$, $r_c$ son las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas.

A) sec B B) csc C C) sen C

D) csc B E) csc A

### CUADRILÁTEROS

**90.-** Sea ABCD un cuadrilátero, O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Si las áreas de las regiones triangulares AOB, BOC y COD son 1, 2 y 4 $m^2$ respectivamente, determine el área de la región triangular AOD.

A) $1m^2$ B) $3m^2$ C) $2m^2$ D) $4m^2$ E) $5m^2$

**91.-** En un cuadrilátero ABCD se cumple: AB $=7u$, AC $=20\,u$ y AD $=25\,u$. Si AD es diámetro de la circunferencia, determine la medida del lado BC.

A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 15

**92.-** Los lados de un cuadrilátero inscriptible son 3, 5, 6 y 8 $cm$, determine: "29 sen $\alpha$", siendo "$\alpha$" el menor ángulo agudo que forman las diagonales.

A) 13 B) $13\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) 6 E) $6\sqrt{5}$

**93.-** Los lados de un cuadrilátero circunscriptible ABCD miden AB $=12\,u$, BC $=25\,u$ y CD $=52\,u$, determine cos (A + C) sabiendo que el área de la región cuadrangular es $650\,u^2$.

A) $-\frac{5}{13}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $-\frac{7}{18}$ E) $-\frac{9}{13}$

**94.-** Se tiene un cuadrilátero inscriptible de $a=1, b=2, c=3$ y $d=4$, determine el coseno del ángulo formado por los menores lados.

A) 3/5 B) -3/5 C) 5/79 D) 3/11 E) -5/7

**95.-** Se tiene un cuadrilátero bicéntrico ABCD de lados AB = sen $\theta$, CD = tan $\theta$, BC = cos $\theta$ y AD = cot $\theta$, determine el área de dicha región cuadrangular.

A) $\sqrt{2}\,u^2$ B) $\sqrt{3}\,u^2$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2$

D) $4\sqrt{2}\,u^2$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}\,u^2$

**96.-** Se tiene un cuadrilátero inscriptible ABCD de lados AB = $a$, BC = $b$, CD = $c$ y AD = $d$, demostrar que:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-d)}{(\rho-b)(\rho-c)}}$$

**97.-** Si en un cuadrilátero inscriptible ABCD de lados AB = $a$, BC = $b$, CD = $c$ y AD = $d$, se cumple:

$a+c=b+d$, determine el valor de:

$$M=\frac{\sqrt{abcd}}{(ab+bc)\text{sen}A}$$

A) 1/2 B) 2 C) 1 D) 1/4 E) 4

**98.-** Se tiene un cuadrilátero circunscriptible ABCD de lados AB = $a$, BC = $b$, CD = $c$ y AD = $d$, demostrar que:

$$\sqrt{ab}.\text{sen}\,\frac{B}{2}=\sqrt{cd}\ \text{sen}\,\frac{D}{2}$$

**99.-** Si ABCD es un cuadrilátero circunscriptible que cumple: AB = $a$, BC = $b$, CD = $d$ y AD = $d$, demostrar que:

$$S=ab\ .\ \text{sen}\frac{B}{2}\ .\ \csc\frac{D}{2}\ .\ \text{sen}\left(\frac{B+D}{2}\right)\text{, donde}$$

S es el área de la región cuadrangular.

**100.-** En un paralelogramo se cumple:

la medida de sus diagonales son $2a$ y $2b$ y la medida de uno de sus ángulos agudos es "$\alpha$", determine el área de dicho paralelogramo, si $a>b$.

A) $ab$ B) $ab$ cos $\alpha$ C) $ab$ sen $\alpha$

D) $ab$ tan $\alpha$ E) $(a^2+b^2)$ . tan $\alpha$

# Estudio de la Trigonometría con Números Complejos

CAP 21

## 21.1. DEFINICIÓN

$$\mathbb{C} = \{(x\,;y)/z = x + iy \quad ; \quad x\,,y \in \mathbb{R} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}\}$$

Donde: $\mathrm{Re}(z) = x$ : parte real del complejo $z$

$\mathrm{Im}(z) = y$ : parte imaginaria del complejo $z$.

$i$ = unidad imaginaria que satisface la propiedad.

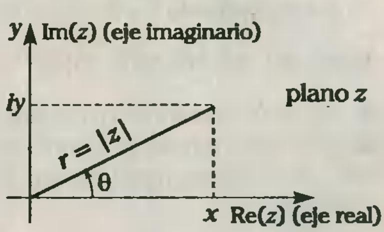
$i^2 = (0\,;1)\,(0\,;1) = (-1\,;0) \quad \vee \quad i^2 = -1$

$\overline{z} = x - iy$: conjugando de $z$ , y que verifica la propiedad: $z\,.\,\overline{z}\,. = x^2 + y^2$

## 21.2. REPRESENTACIÓN POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si: $z = x + iy = (x\,;y)$, puede representarse como un vector en el plano complejo (o plano de Gaüss).

Del gráfico se observa que:




$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ : módulo del complejo $z$

$x = r\cos\theta\,;\, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, luego:

$\boldsymbol{z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$

Representación polar de $z$ ($z \neq 0$)

$r$ : módulo o magnitud de z $\qquad \theta$ = argumento de z (Arg $z$)

$$0 \leq \mathrm{Arg}\,z < 2\pi \quad \vee \quad -\pi \leq \mathrm{Arg}\,z < \pi$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arg z = \mathrm{Arg}\,z + 2k\pi\,;\, k \in z$$

La representación polar o trigonométrica se suele denotar así:

$\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{cis}\,\theta$

## 21.3. REPRESENTACIÓN EXPONENCIAL DEL COMPLEJO z

$$z = re^{i\theta}$$

## 21.4. EXPONENCIAL COMPLEJA

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Está notación conduce a: $\quad e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \; ; \; |e^{iy}| = 1$

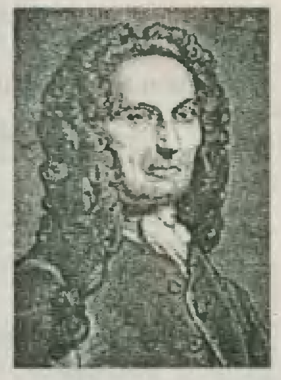
## 21.5. TEOREMA DE DEMOIVRÉ

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

**Fórmulas de Euler**

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad\qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

### ABRAHAM DE MOIVRE
(1667-1754)



De Moivre fue francés de nacimiento. Al trasladarse a Inglaterra, hizo amistad con Newton y con Halley, y se dedicó a dar clases particulares de matemáticas. En 1697 fue elegido miembro de la Royal Society, y poco después de las Academias de París y Berlín. Su trabajo tuvo gran importancia en el desarrollo de las matemáticas actuales y en la aplicación del recién creado Cálculo Infinitesimal y el Cálculo de Probabilidades. A pesar de su reconocido talento nunca pudo ingresar a la cátedra universitaria. Su obra titulada Miscellanea analytica es importante tanto para la teoría de las probabilidades como para la Trigonometría, proponiendo su conocido teorema:

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

Y asi mismo propuso :

$$(\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi \pm \theta}{n} \pm i.\operatorname{sen}\frac{2k\pi \pm \theta}{n}$$


**PROB. 1**

Dado el complejo $z/z = x + iy$

Demuestre que:

a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

b) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

c) $\operatorname{sen} 3z = 3 \operatorname{sen} z - 4 \operatorname{sen}^3 z$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Si: $z = x + iy$ , podemos expresar en la forma polar y forma exponencial respectivamente.

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \;;\; z = re^{i\theta}$$

Puesto que: $\bar{z} = r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \;;\; \bar{z} = re^{-i\theta}$

De donde:

$$z + \bar{z} = 2r\cos\theta \quad \wedge \quad z + \bar{z} = r(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

o sea: $\quad 2r\cos\theta = r(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

En forma análoga se deduce que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$$

Luego: $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ; $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

a) $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$

$$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 z = \frac{4(e^{iz})(e^{-iz})}{4} = 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{sen^2\, z + cos^2\, z = \boxed{1}}$$

b) $\operatorname{sen} 2z = \dfrac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i}$

$$\operatorname{sen} 2z = \frac{(e^{iz})^2 - (e^{-iz})^2}{2i}$$

$$\operatorname{sen} 2z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}$$

$$\operatorname{sen} 2z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)(2)$$

$$\operatorname{sen} 2z = (\operatorname{sen} z)(\cos z)(2)$$

$$\therefore \quad \mathbf{sen\, 2z = \boxed{2\, sen\, z\, cos\, z}}$$

c) $\operatorname{sen} 3z = \dfrac{e^{3iz} - e^{-3iz}}{2i} = \dfrac{(e^{iz})^3 - (e^{-iz})^3}{2i}$

$$\operatorname{sen} 3z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}.[e^{2iz} + e^{iz}.e^{-iz} + e^{-2iz}]$$

$$\operatorname{sen} 3z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.[e^{2iz} + e^{-2iz} + 1]$$

$$\operatorname{sen} 3z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)[(e^{iz} - e^{-iz})^2 + 3]$$

$$\operatorname{sen} 3z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left[\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 (2i)^2 + 3\right]$$

$$\operatorname{sen} 3z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)[(\operatorname{sen} z)^2(-4) + 3]$$

$$\operatorname{sen} 3z = (\operatorname{sen} z)(3 - 4\operatorname{sen}^2 z)$$

$$\therefore \quad \mathbf{sen\ 3z} = \boxed{\mathbf{3\,sen\,z - 4\,sen^3 z}}$$

**PROB. 2**

Sean los complejos:

$z_1 = 1 + i \wedge z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$, calcule:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 . z_2$

d) $z_1/z_2$ e) $z_1^2 + z^3$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Primeramente expresemos $z_1 \wedge z_2$ en sus formas cartesianas y exponencial.

$$z_1 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 1 - i$$

a) Para sumar o restar complejos es conveniente que deben estar expresados en su forma cartesiana o binómica, luego:

$$z_1 + z_2 = (1 + i) + (1 - i) \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 = 2$$

b) $z_1 - z_2 = (1 + i) + (1 - i) \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_2 = 2i$

Sin embargo también pueden estar expresados en su forma exponencial, así:

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} + \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2}\,(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4})$$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2}\right)(2)$$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4)(2)$$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2)$$

$$z_1 + z_2 = 2$$

$$z_1 - z_2 = \sqrt{2}\,(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4})$$

$$z_1 - z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i}\right)(2i)$$

$$z_1 - z_2 = \sqrt{2}\,(\operatorname{sen} \pi/4)(2i)$$

$$z_1 - z_2 = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}/2)\,(2i)$$

$$z_1 - z_2 = (2i)$$

c) $z_1 . z_2 = (1 + i)(1 - i)$

$$z_1 . z_2 = 1 - i^2$$

$$z_1 . z_2 = 2$$

$$z_1 . z_2 = (\sqrt{2}\, e^{i\pi/4})(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4})$$

$$z_1 . z_2 = 2$$

d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1+i}\right) = \dfrac{(1+i)^2}{1+i^2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = \frac{0+2i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = i$$

e) $z_1^2 . z_2^3 = (1 + i)^2.(1 - i)^3$

$$z_1^2 . z_2^3 = (1 + i)^2(1 - i)^2(1 - i)$$

$$z_1^2 . z_2^3 = [(1 + i)(1 - i)]^2(1 - i)$$

$$z_1^2 \cdot z_2^3 = (1 - i^2)^2(1 - i) = 4(1 - i)$$

o también: $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \Rightarrow \quad z_1^2 = 2e^{i\pi/2}$

$$z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad z_2^3 = 2\sqrt{2}\,e^{-i3\pi/4}$$

Multiplicado: $z_1^2 \cdot z_2^3 = 4\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}.e^{-i3\pi/4}$

$$z_1^2 \cdot z_2^3 = 4\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$$

$$z_1^2 \cdot z_2^3 = 4\sqrt{2}\,[\cos(-\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/4)]$$

$$z_1^2 \cdot z_2^3 = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4(1 - i)$$

**03.**- Resolver: $\cos x = 2$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

De hecho esta es una ecuación que no pertenece al campo de los números reales, puesto que en dicho campo se cumple que:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

Luego, la validez de la ecuación dada se encuentra en el campo de los números complejos además se sabe que:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \wedge \quad \mathrm{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Luego: $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{ix} + e^{-ix} = 4$

$$\Rightarrow (e^{ix})^2 + 1 = 4(e^{ix}) \Rightarrow (e^{ix})^2 - 4(e^{ix}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (e^{ix})^2 - 4(e^{ix}) + 1 + 4 = 4 \quad \Rightarrow (e^{ix} - 2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad e^{ix} - 2 = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad e^{ix} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$ix = \mathrm{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow \quad x = -i\,\mathrm{Ln}\,(2 \pm \sqrt{3})$$

Es decir: $x_1 = -i\,\mathrm{Ln}\,(2 + \sqrt{3})$

$$x_2 = -i\,\mathrm{Ln}\,(2 - \sqrt{3})$$

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *Para realizar sumas de números complejos, éstos deben estar expresados en su forma cartesiana.*

2) *Para realizar productos o divisiones de números complejos, estos deben estar expresados en su forma exponencial.*

3) *Si se realizan potencias de números complejos, éstos deben estar expresados en su forma exponencial.*

4) *Para demostrar cualquier identidad trigonométrica la teoría de los números complejos es una nueva vía para su ejecución.*

5) *Toda ecuación trigonométrica que no está en el campo de los reales, es solucionado por complejos, teniendo en cuenta las relaciones siguientes:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \wedge \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$


### FORMA POLAR

**01.-** Determine el valor de:

$$Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{40}$$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**02.-** Si: $Z = 1 + i\sqrt{3}$ , determine el valor de $Z^6$.

A) 62  B) 70  C) 64  D) 68  E) 65

**03.-** Sea el número complejo:

$$Z=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right),$$

determine: $M=\frac{1}{64}(-\sqrt{3}\ .Z^6+8Z^4)$

A) 5  B) 4  C) 3  D) 2  E) 1

**04.-** Dada las condiciones:

$$\frac{\sqrt{3}.Z.\overline{Z}}{Z+\overline{Z}}=-1 \qquad \ldots (1)$$

$$Z=\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta \quad ; \quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2} \ \ldots (2)$$

determine el valor de "θ".

A) $\frac{5\pi}{4}$  B) $\frac{1\pi}{12}$  C) $\frac{5\pi}{12}$  D) $\frac{5\pi}{6}$  E) $\frac{7\pi}{12}$

**05.-** Sea: $Z=i\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)$, determine:

$$arg(Z)\text{ , si: } \pi<arg(Z)<\frac{3\pi}{2}$$

A) $\frac{7\pi}{3}$  B) $\frac{7\pi}{4}$  C) $\frac{5\pi}{6}$  D) $\frac{\pi}{6}$  E) $\frac{7\pi}{6}$

**06.-** Sean: $Z_1=2+i \quad \wedge \quad Z_2=3+i$,

determine: $Z_1.Z_2$ en su forma Polar.

A) $5\sqrt{3}.\text{cis}\frac{\pi}{4}$  D) $5\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}$

B) $3\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}$  E) $2\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}$

C) $5\sqrt{5}\text{cis}\frac{\pi}{4}$

**07.-** Si se cumple: $\frac{a+bi}{a-bi}=e^{i\alpha}$, determine: "tan α"

A) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$  B) $\frac{ab}{a^2-b^2}$  C) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$

D) $\frac{8ab}{a^2-b^2}$  E) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$

### FORMA EXPONENCIAL

**08.-** Determine el mayor valor de la expresión:

$$M=\frac{\text{Re}(Z^3+Z^2+Z)+1}{2\cos\theta}\text{ , si: } Z=e^{i\theta}$$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**09.-** Sea el número complejo:

$$Z = \cos 5^\circ - i \operatorname{sen} 5^\circ \ ,$$

determine: $M = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z^{27} + Z^{-27})$

A) -1 B) 2 C) -2 D) 1 E) 3

**10.-** Reducir: $Z = \dfrac{e^{\frac{i.\pi}{8}}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + i\cos\frac{3\pi}{8}\right)}{\sqrt{2} + i.\sqrt{2}}$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 1/4 E) 2

**11.-** Si se cumple:

$$Z = 2 \operatorname{sen} \theta + 2\sqrt{3} \ \cos\theta - 4i \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right),$$

determine: $|Z|$.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2 E) 5

**12.-** Sea el número complejo: $Z = e^{-2i\theta}(1 - e^{8i\theta})$,

determine: $M = \dfrac{Re(Z)}{Im(Z)}$.

A) -tan 3θ B) tan 2θ C) -tan 5θ

D) tan 3θ E) -tan 2θ

**13.-** Sea: $W = \dfrac{(e^{-i\theta} - 1)i}{\theta}$ , $-\pi < \theta < 0$, determine: $|W|$

A) $\frac{4}{\theta}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ B) $\frac{\theta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ C) $\frac{2}{\theta}.\csc\frac{\theta}{2}$

D) $\frac{2}{\theta}.\tan\frac{\theta}{2}$ E) $\frac{2}{\theta}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

**14.-** Si se cumple:

$$\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\theta\right)^2 = M\cos^2\frac{\theta}{2} \ . \operatorname{cis}\theta,$$

determine del valor de "M":

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**15.-** Sea: $Z + \dfrac{1}{Z} = 2\cos\theta$, determine:

$$M = \left(Z^4 - \frac{1}{Z^4}\right)i$$

A) -2 sen 4θ B) -2 sen 2θ C) -3 cos 4θ

D) sen 4θ E) -4 sen 2θ

**16.-** ¿Cuál será el número complejo en forma exponencial que al multiplicar a $(\sqrt{3}\,i - 1)^4$ dé otro número complejo tal que su módulo sea 4 y el argumento 180°.

A) $\frac{1}{4}.e^{i2\pi/3}$ B) $\frac{3}{4}.e^{i\pi/3}$ C) $\frac{1}{4}.e^{i\pi/3}$

D) $\frac{1}{2}.e^{i\pi/3}$ E) $\frac{5}{4}.e^{i\pi/3}$

**17.-** Sea:

$$Z = \left[\frac{(\operatorname{sen}3x + i\cos 3x) + (i\cos x - \operatorname{sen}x)}{\cos x + \cos 3x}\right]^n,$$

$x \in \left\langle 0 ; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, determine: $|Z|$

A) $\csc^n x$ B) $\sec^n x$ C) $\tan^n x$

D) $\operatorname{sen}^n x$ E) $\cos^n x$

**18.-** Sea: $Z = \operatorname{sen} 82^\circ + i \cos 82^\circ$,

determine: $W = Z^{15} + \dfrac{1}{Z^{15}} + 1$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**19.-** Simplificar:

$$M = \frac{[\sqrt[3]{3}(\cos 31^\circ + i\operatorname{sen}31^\circ)]^3.[\sqrt[5]{5}(\cos 12^\circ + i\operatorname{sen}12^\circ)]^5}{[\sqrt[3]{15}(\cos 11^\circ + i\operatorname{sen}11^\circ)]^3}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**20.-** Sea: $M=\dfrac{e^{8ix}+e^{4ix}-2}{1-e^{8ix}}+1$, determine la parte real de M.

A) -1/2   B) 1/2   C) 1/3   D) -1/3   E) 2

**21.-** Resolver la ecuación:

$$|e^{i\theta}-1|=2\,,\,0\leq\theta<2\pi$$

A) $\pi/2$   B) $2\pi$   C) $3\pi$   D) $\pi$   E) $\pi/3$

**22.-** Sea el número complejo:

$$Z=\operatorname{sen}x-i\cos x\,,$$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, determine: $arg(Z+1)$

A) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{5}$   B) $\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{2}$   C) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

D) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$   E) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}$

**23.-** Sea: $Z=\dfrac{e^{i4\theta}+2e^{i2\theta}+1}{e^{i2\theta}-2e^{i\theta}+1}$, determine la parte imaginaria de Z.

A) $-2\cos^2\theta.\cot\dfrac{\theta}{2}$   D) $-2\cot^2\theta.\cos\dfrac{\theta}{2}$

B) $-1\cos^2\theta.\cot\dfrac{\theta}{4}$   E) $2\cos\theta\,.\cot\dfrac{\theta}{2}$

C) $-2\cos\theta\,.\cos\dfrac{\theta}{2}$

**24.-** Si se cumple:

$\dfrac{(1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=a-b\cos\theta$, determine el valor de: "$2a+b$".

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

**25.-** Si se verifica:

$2+\sqrt{3}+i=(\sqrt{A}+\sqrt{B})\operatorname{cis}\theta$, $A>B$, determine el valor de: $\dfrac{B}{A\theta}$ ; $(0<\theta<\pi/2)$

A) $2/\pi$   B) $4/\pi$   C) $5/\pi$   D) $9/\pi$   E) $7/\pi$

**26.-** Sea: $Z=\cos2\theta+i\operatorname{sen}2\theta$, determine el equivalente de:

$$M=\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^2+\cot^2\theta$$

A) 5   B) 4   C) 3   D) 2   E) 0

**27-** Sea: $Z=\dfrac{\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta-i\cos\theta}$, determine: $arg(-Z)$

A) $3\theta$   B) $-5\theta$   C) $-2\theta$   D) $-2\theta$   E) $-7\theta$

**28.-** Sea: $Z=\operatorname{sen}2\theta+i\cos2\theta$ y $\theta\in\langle0;\pi/2\rangle$, determine el módulo de $(Z+1)$

A) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$   D) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

B) $2\csc\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$   E) $3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

C) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

**29.-** Si se cumple: $e^{a+ib}=\sqrt{3}+i$,

determine el valor de "$a$".

A) $ln\,2$   B) $ln\,4$   C) $-ln^2$   D) $ln\,3$   E) $-ln^3$

**30.-** Sea el número complejo:

$$Z=\frac{1+\cos2\theta-i\operatorname{sen}2\theta}{1-\cos2\theta+i\operatorname{sen}2\theta}\,,\pi<\theta<3\pi/2,$$

determine: $|Z|$

A) $\csc\theta$   B) $\tan\theta$   C) $\cot\theta$

D) $\operatorname{sen}\theta$   E) $\cos\theta$

**31.-** Si: $W=e^{iZ^2}$ y $Z=re^{i\theta}$, determine: $|W|$

A) $e^{r\operatorname{sen}^2\theta}$   B) $e^{r^2\operatorname{sen}2\theta}$   C) $e^{-r^2\cos2\theta}$

D) $e^{r\operatorname{sen}\theta}$   E) $e^{-r^2.\operatorname{sen}2\theta}$

**32.-** Sea: $W = e^{(iZ)^2}$,

donde: $Z = \sqrt{5}\, e^{i\theta}$ , $\theta = \text{arc tan } \dfrac{1}{2}$.

Determine: $|W|$

A) $e^{-2}$ B) $e^{-3}$ C) $e^{5}$ D) $e$ E) $e^{3}$

**33.-** Sea:

$$Z = \frac{1 + i\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + i\text{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}} \ , \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \ ,$$

determine: $|Z|$

A) $\cos\dfrac{\theta}{4}$ B) $\cot\dfrac{\theta}{2}$ C) $\cot\dfrac{\theta}{4}$

D) $\csc\dfrac{\theta}{6}$ E) $\text{sen}\dfrac{\theta}{2}$

**34.-** Simplificar:

$$M = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + e^{-i2\theta}}{1 - e^{-i2\theta}}\right)^2} \ , \ \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

A) $M = \csc\theta$ ; $\theta \in \langle 0; \pi/2\rangle$

B) $M = \cot\theta$ ; $\theta \in \langle 0; \pi/6\rangle$

C) $M = \csc\theta$ ; $\theta \in \langle 0; \pi/9\rangle$

D) $M = \cos\theta$ ; $\theta \in \langle 0; \pi/4\rangle$

E) $M = \csc\theta$ ; $\theta \in \langle 0; \pi/5\rangle$

**35.-** Sea: $Z = \dfrac{\text{sen}4\theta - i\cos 4\theta}{\text{sen}4\theta + i\cos 4\theta}$ ,

si: $arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}$,

determine el valor de "$\theta$".

A) $\dfrac{3\pi}{16}$ B) $\dfrac{3\pi}{11}$ C) $\dfrac{\pi}{16}$ D) $\dfrac{5\pi}{16}$ E) $\dfrac{\pi}{3}$

**36.-** Si se cumple que:

$$\frac{\cos(4\alpha + \beta) - i\text{sen}(4\alpha + \beta)}{\cos 2\alpha - i\text{sen}2\alpha} +$$

$$\frac{\cos(4\alpha + \beta) + i\text{sen}(4\alpha + \beta)}{\cos 2\alpha + i\text{sen}2\alpha} = A \,.\, \cos(B\alpha + \beta),$$

determine: "A + B"

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**37.-** Si se cumple:

$$\frac{(1 + e^{i2\theta})^4}{e^{i4\theta}} = A + B\cos 2\theta + C.\cos 4\theta,$$

determine: $M = \dfrac{B - C}{A}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**38.-** Sea: $Z = \dfrac{1 + e^{i2\theta} + e^{i4\theta} + e^{i6\theta}}{e^{i2\theta} + 1}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$,

determine: $|Z|$

A) $5\cos 3\theta$ B) $4\cos 4\theta$ C) $2\csc 3\theta$

D) $2\cos 2\theta$ E) $3\cot 2\theta$

**39.-** Sea: $Z = \dfrac{1 + e^{i(-3x)}}{e^{i(-6x)} - 1}$, determine la parte real de Z.

A) -1/2 B) -1/4 C) -1 D) -5/2 E) 1

## *REGIONES SOMBREADAS*

**40.-** Determine el área de la región R del plano complejo definido por:

$$R = \left\{ Z \in C / Z.\,\overline{Z} \leq 1 \wedge 0 \leq arg\,(Z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

A) $\dfrac{\pi}{7}\, u^2$ B) $\dfrac{\pi}{2}\, u^2$ C) $\dfrac{\pi}{6}\, u^2$

D) $\dfrac{\pi}{4}\, u^2$ E) $\dfrac{\pi}{8}\, u^2$

**41.-** Determine el área de la región sombreada R, definida por:

$$R=\left\{Z\in C/|Z|\in[2;4]\wedge arg(Z^3)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

A) $2u^2$ B) $\pi u^2$ C) $2\pi u^2$ D) $\frac{\pi}{2}u^2$ E) $\frac{3\pi}{4}u^2$

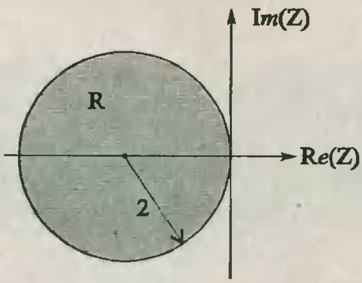
**42.-** Determine el área de la región sombreada por:

$$R=\{Z\in C/\ 1\leq|\overline{Z}|\leq 2\ ,0\leq arg(Z^3)\leq 3\pi\}$$

A) $\frac{5\pi}{3}u^2$ B) $\frac{5\pi}{2}u^2$ C) $\frac{3\pi}{2}u^2$

D) $\frac{3\pi}{5}u^2$ E) $\frac{6\pi}{5}u^2$

**43.-** ¿A qué conjuntos de números complejos corresponde la región sombreada R.?




A) $\left\{Z\in C/|Z|\leq 2\leq 2\ ,\ \frac{\pi}{2}\leq \arg(Z)\leq\pi\right\}$

B) $\left\{Z\in C/\ |Z+2|\leq 2\ ,\ \frac{\pi}{2}\leq \arg(Z)\leq 3\frac{\pi}{2}\right\}$

C) $\left\{Z\in C/\ |Z+2|\leq 2\ ,\ -\frac{\pi}{3}\leq \arg(Z)\leq\frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{Z\in C/\ |Z+4|<2\ ,\ \frac{\pi}{4}<\arg(Z)<\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\left\{Z\in C/\ |Z+2|<2\ ,\ \frac{\pi}{2}\leq \arg(Z)\leq\pi\right\}$

**44.-** Determine el área de la región R del plano complejo definido por:

$$R=\{Z\in C/\ (Z+1)\ (\overline{Z}+1)\leq 1\ \wedge\ 2\ \pi\leq arg\ (iZ^2)\leq 3\pi\}$$

A) $\left(\frac{\pi+3}{3}\right)u^2$ B) $\left(\frac{\pi}{2}\right)u^2$ C) $\left(\frac{3\pi-4}{2}\right)u^2$

D) $\left(\frac{\pi+2}{4}\right)u^2$ E) $\left(\frac{\pi+2}{2}\right)u^2$

**45.-** Determine el área de la región triangular potencial cuyos vértices son las raíces cúbicas del número complejo:

$$Z=4\sqrt{2}\ +i.4\sqrt{2}$$

A) $2\sqrt{3}\,u^2$ B) $3\sqrt{3}\,u^2$ C) $\sqrt{3}\,u^2$

D) $-2u^2$ E) $2\sqrt{2}\,u^2$

**46.-** Determine el área de la región sombreada de la región:

$$R=\{Z\in C/|Re(Z)|+|Im(Z)|\leq 1\}$$

A) $9u^2$ B) $6u^2$ C) $4u^2$ D) $2u^2$ E) $3u^2$

**47.-** Determine el área de la región triangular cuyos vértices son:

$$Z_1=2e^{-i\pi/3}\ ,\ Z_2=4e^{i\pi/6}\ ,\ Z_3=e^{i\pi/2}\ ;$$

ubicados en el plano complejo.

A) $(7+2\sqrt{3})u^2$ D) $\frac{1}{2}(7+2\sqrt{3})u^2$

B) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+5)u^2$ E) $\frac{1}{2}u^2$

C) $\frac{3}{2}(2+7\sqrt{3})u^2$

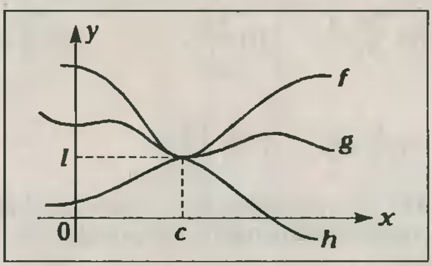
# Límites y Derivadas Trigonométricas

CAP 22

## 22.1. LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

### 22.1A Teorema de la función intermedia o teorema del sandwich

Si las funciones $f$, $g$ y $h$ están definidas en algún intervalo abierto I, donde está contenido el número $c$, excepto posiblemente el $c$ mismo, y que: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall\ x \in$ I, para lo cual $x \neq c$, entonces:




**Si:** $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = l$,

**entonces:** $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l$

### 22.1B Límites Trigonométricos Fundamentales

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

De donde: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc sen}\, x}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc tan}\, x}{x} = 1$

### 22.1C Teorema

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ diferente de cero, se verifica:

I. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, px}{x} = p$ $\qquad$ II. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan px}{x} = p$

### 22.1D Propiedades

I. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

II. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

III. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ ; $g(x) \neq 0$

IV. $\lim\limits_{x \to a} c = c$, siendo «$c$» una constante

V. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

VI. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ ; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ ; $(n \geq 2)$

Las propiedades V y VI tienen la condición de que si $n$ es par, $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$

### 22.1 E El número *e*

Sean las funciones $f$ y $g$ cuyas reglas de correspondencias son:

$$f(x) = (1+x)^{1/x} \quad \wedge \quad g(x) = (1+1/x)^{x}$$

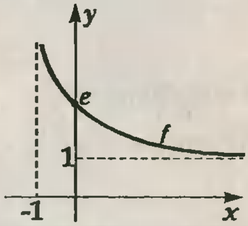
Para que $f$ y $g$ estén definidas en el campo de las reales, las bases de dichas potencias deben ser positivas y diferentes de la unidad, es decir:

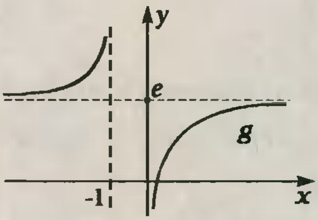
$$1 + x > 0 \ \wedge \ x \neq 0 \quad ; \quad 1 + 1/x > 0 \ \wedge \ x \neq 0$$

Bajo estas condiciones los dominios de $f$ y $g$ serán:

$$Df = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle \quad ; \quad Dg = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

Y sus correspondientes gráficas son:




Luego podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (1+1/x)^{x} = e$$

El número *e* es irracional, y su valor aproximado es: $e = 2{,}7182$

## 22.2. DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS

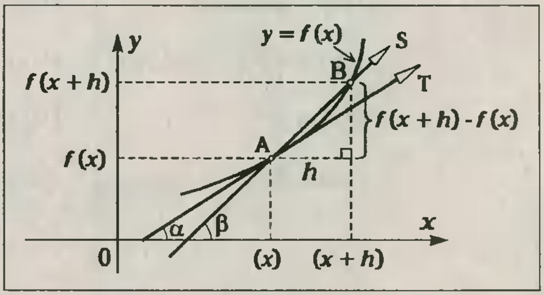
Observemos la gráfica de la función $f$, asimismo observemos la recta tangente (T) trazada por el punto $A(x\,;f(x))$.

De la figura se observa que:

$$\tan\beta = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si hacemos que $h$ tienda a cero ($h \to 0$), en el límite ocurre lo siguiente:

$$\tan\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

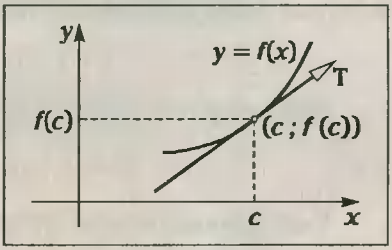


Si éste existe, diremos que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la derivada de la función $f(x)$ respecto a $x$, y se denota como $f'(x)$, es decir:

$$\text{Si: } y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

**Nota.-** La derivada de una función es otra función, siempre que la función sea derivable.

La interpretación geométrica de la derivada es que su valor coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto de una curva. En la gráfica, si $f(x)$ es la función y T es la recta tangente en el punto $(c;f(c))$, cuya pendiente es $m_T$ en dicho lugar, se verificará que:




$$\boldsymbol{m_T = f'(c)}$$

### 22.2A Teorema

Si una función $f$ es diferenciable en $c$, entonces $f$ es continua en $c$.

Nota: Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x \;\wedge\; g(x) = \cos x$, son continuas $\forall\; x \in \mathbb{R}$

### 22.2B Teoremas

| $y = f(x)$ (función) | $f'(x)$ (derivada) |
|---|---|
| $f(x) = c$ | $f'(x) = 0$ ; $\forall\, c$ constante |
| $f(x) = x^n$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ ; $\forall\, x \in$ Racionales |
| $f(x) = c.g(x)$ | $f'(x) = c.g'(x)$ ; $\forall\, c$ constante |
| $f(x) = u(x).v(x)$ | $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ |
| $f(x) = u(x).v(x)$ | $f'(x) = u'.v + v'.u$ |
| $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ ; $v(x) \neq 0$ | $f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = Ln\, x$ | $f'(x) = 1/x$ |

### 22.2C Derivada de las funciones trigonométricas

| $y = f.t\,(x)$ | $y' = f.t'\,(x)$ |
|---|---|
| $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |
| $f(x) = \tan x$ | $f'(x) = \sec^2 x$ |
| $f(x) = \cot x$ | $f'(x) = -\csc^2 x$ |
| $f(x) = \sec x$ | $f'(x) = \sec x \tan x$ |
| $f(x) = \csc x$ | $f'(x) = -\csc x \cot x$ |

### 22.2D Derivada de las funciones trigonométricas inversas

| $f(x) = \text{arc f.t}(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $f(x) = \text{arc sen}\,(x)$ | $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \text{arc cos}\,(x)$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \text{arc tan}\,(x)$ | $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $f(x) = \text{arc cot}\,(x)$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $f(x) = \text{arc sec}\,(x)$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{x^2-1}}$ |
| $f(x) = \text{arc csc}\,(x)$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{x^2-1}}$ |

### 22.2E Teorema 1

Si $f$ es una función inyectiva y diferenciable, y $f^*$ es su correspondiente función inversa, entonces $f^*$ será diferenciable, siempre que $f$ no tome el valor de cero, y se verificará que:

$$(f^*)'_{(x)} = \frac{1}{f'(f^*_{(x)})}$$

### 22.2F Teorema 2

Si $g$ es diferenciable en $x$, y $f$ es diferenciable en $g(x)$, la composición $(f \circ g)$ es diferenciable en $x$, entonces se verifica:

$$(f \circ g)'_{(x)} = f'(g(x))\,.\,g(x)$$

### 22.2G Teorema 3

Si $f$ es una función diferenciable de $u$, y $u$ es una función diferenciable en $x$, tenemos que:

$$\frac{d}{d_x}[f(u)] = \frac{d}{d_u}[f(u)]\,.\frac{d_u}{d_x}$$

## 22.3. REGLA DE LA CADENA PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea $f(x) = f.t^{n}(u(x))$ una función derivable, entonces se verifica que:

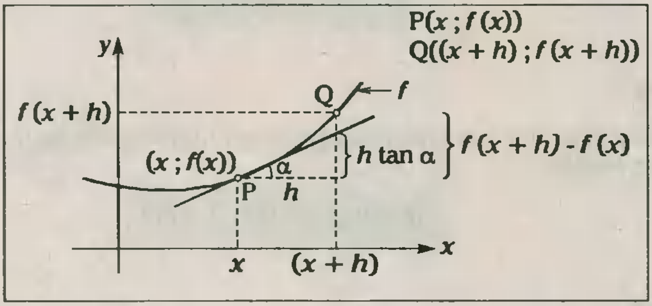
$$f'(x) = n\, f.t^{n-1}(u_{(x)})\,.\, f.t'(u_{(x)})\,.\,u'(u_{(x)})$$

Según esta regla se tendrá que:

| | |
|---|---|
| $(\text{sen}\, u)'$ | $\cos u.u'$ |
| $(\cos u)'$ | $-\text{sen}\, u.u'$ |
| $(\tan u)'$ | $\sec^2 u.u'$ |
| $(\cot u)'$ | $-\csc^2 u.u'$ |
| $(\sec u)'$ | $\sec u.\tan u.u'$ |
| $(\csc u)'$ | $-\csc u.\cot u.u'$ |

| | |
|---|---|
| $(\text{arc sen}\, u)'$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$ |
| $(\text{arc cos}\, u)'$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$ |
| $(\text{arc tan}\, u)'$ | $\dfrac{1}{1+u^2}.u'$ |
| $(\text{arc cot}\, u)'$ | $-\dfrac{1}{1+u^2}.u'$ |
| $(\text{arc sec}\, u)'$ | $\dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}.u'$ |
| $(\text{arc csc}\, u)'$ | $-\dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}.u'$ |

## 22.4. LA DIFERENCIAL




Según la figura, para «$h$» muy pequeño ($h \to 0$) se puede afirmar que:

$$f(x+h) - f(x) \approx h.f'(x)$$

Nota. La expresión $f(x+h) - f(x)$ recibe el nombre de incremento o variación de $f$ desde $x$ hasta $(x+h)$, y se denota por $\Delta f$:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

El producto $h \, . \, f(x)$ se denomina *diferencial* en $x$ con incremento $h$ y se denota por $df$.

$$df = h f'(x)$$

También se suele denotar $h = \Delta x$, luego: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ ; $df = f'(x)\Delta x$

Cuando $\Delta x$ es muy pequeño ($\Delta x \approx 0$), $\Delta f$ y de $df$ son aproximadamente iguales $\Delta f \approx df$.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

## S22.4. REGLA DE L' HOSPITAL

Se aplica para determinar límites, siempre y cuando éstos sean de las formas $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$ llamadas *formas indeterminadas*.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots.$$

## 22.5. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Sea $f$ una función cuya gráfica es como la que se muestra, observándose que:

En A, B, C, D, E, F y G las pendiente son nulas, es decir $f'_{(x)} = 0$

En B, D y F hay máximos

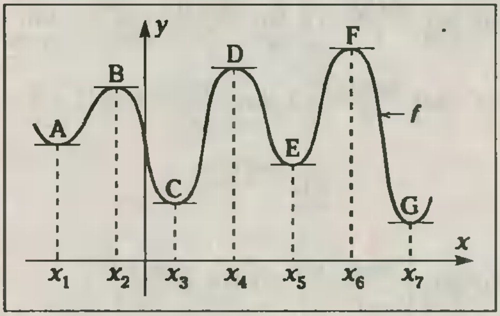
En A, C, E y G hay mínimos

En B y D los máximos son relativos

En F el máximo es absoluto

En A, C y E los mínimos son relativos

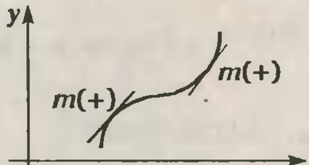
En G el mínimo es absoluto



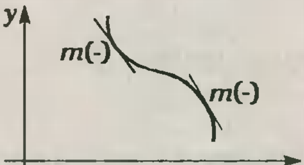

## 22.6. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Teorema: Si $f$ es una función derivable en $\langle a\,;b\rangle$, entonces la función $f$ es estrictamente creciente en $\langle a\,;b\rangle$, si:

$$f'_{(x)} > 0\,;\ \forall\, x \in \langle a\,;b\rangle$$



Función creciente



Función decreciente


**PROB. 1**

Calcule el límite de:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3\operatorname{sen}\pi x-\operatorname{sen}3\pi x}{x^3}\right)$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Si se evalúa cada expresión en $x = 0$, se obtienen indeterminaciones de la forma 0/0.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{x} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}$ ; $\lim\limits_{x\to 0} <> \lim\limits_{3x\to 0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{x} = 3 \lim\limits_{3x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x} = 3(1) = 3$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}ux}{x} = u$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) = 2 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) = 2\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) = 2(1)^2 = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3\operatorname{sen}\pi x-\operatorname{sen}3\pi x}{x^3}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3\operatorname{sen}\pi x-(3\operatorname{sen}\pi x-4\operatorname{sen}^3\pi x}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4\operatorname{sen}^3\pi x}{x^3}\right) = 4 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}^3\pi x}{x^3}\right)$

$= 4 \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right)^3 = 4\pi^3\left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}\right]^3$

$= 4[\pi]^3 = 4\pi^3$

Cuando se tienen límites de la forma $\dfrac{0}{0}$ ; $\dfrac{\infty}{\infty}$ ; $\infty.0 \wedge 0.\infty$; también se puedenaplicar derivadas sucesivas (regla de L'Hospithal). Veamos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$, evaluando $\dfrac{0}{0}$.

Derivando tanto al numerador como al denominador, se tendrá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3.\cos 3x}{1} = 3(1) = 3$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$, evaluando: $\dfrac{0}{0}$.

Derivamoa al numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{0+2\operatorname{sen}2x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}2x}{x}$$

evaluando: $\dfrac{0}{0}$

Nuevamente derivamos al numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = 2 \lim_{x\to 0} \cos 2x = 2(1) = 2$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3\operatorname{sen}\pi x-\operatorname{sen}3\pi x}{x^3}\right)$

Evaluando: $\frac{0}{0}$

Derivando: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{3}\pi\cos\pi x - \cancel{3}\pi\cos 3\pi x}{\cancel{3}x^2}\right)$

$$\pi \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos\pi x - \cos 3\pi x}{x^2}\right)$$

Evaluando: $\frac{0}{0}$ .

Nuevamente derivando:

$$\pi \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\pi\operatorname{sen}\pi x + 3\pi\operatorname{sen}3\pi x}{2x}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen}3\pi x - \operatorname{sen}\pi x}{x}\right)$$

Evaluando : $\frac{0}{0}$ . Volvemos a derivar

$$\frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{9\pi\cos 3\pi x - \pi\cos\pi x}{1}\right) =$$

$$\frac{\pi^3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{9\cos 3\pi x - \cos\pi x}{1}\right)$$

Evaluando se tiene:

$$\frac{\pi^3}{2}(9(1) - 1) = \frac{\pi^3}{2}(8) = 4\pi^3$$

**PROB. 2**

Calcule los valores de $x$, donde la función $f$ es máximo y mínimo, usando el criterio de la segunda derivada:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

**RESOLUCIÓN** ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Calculamos los valores críticos de la función $f$, para lo calculamos la primera derivada de l función $f$: $f'(x)$, y resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}\, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \left\{\ldots; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \ldots\right\}$$

Para obtener los máximos o mínimos relativos, se debe calcular la segunda derivada de la función $f$: $f''(x)$, y luego resolver la ecuación:

$$f''(x) = -2\operatorname{sen} 2x$$

Apliquemos ahora el criterio de la segunda derivada como sigue:

$$x = \frac{\pi}{4}\; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ es máximo}$$

$$x = \frac{3\pi}{4}\; f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 > 0 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ es mínimo}$$

$$x = \frac{5\pi}{4}\; f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ es máximo}$$

$$\vdots \quad \vdots\,\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Entonces se deduce que:

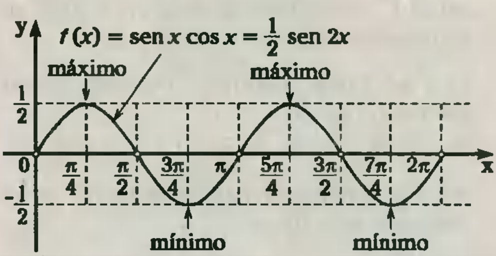
a) $f$ es máximo en:

$$x = \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4};\ \ldots;\ (4k+1)\frac{\pi}{4}\ ; k \in \mathbb{Z}$$

b) $f$ es mínimo en:

$$x = \frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \ldots;\ (4k+3)\frac{\pi}{4}\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Su gráfica sería:



# ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1) *En el cálculo de límites (especialmente límites trigonométricos), se debe tener en cuenta que:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } mx}{x} = m$$

2) *En el cálculo de límites, si al evaluar se obtienen de la forma* $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ ; *se deben aplicar las derivadas sucesivas, evaluando en cada derivada que se realice hasta obtener un número real.*

3) *Si se tiene una función:* $y = f(x)$ *al calcular la primera derivada* $f'(x)$ , *y luego resolver la ecuación:*

$$f'(x) = 0$$

*lo que estamos obteniendo son los posibles máximos o posibles mínimos.*

4) *El criterio de la primera derivada nos indica lo siguiente:*

*i) Si f tiene máximo o mínimo, entonces:*

$$f'(c) = 0 \quad \text{o} \quad f'(c) \text{ no existe}$$

*ii) Si f' cambia de signo de (-) a (+) en c, entonces f(c) es un mínimo relativo de f.*

*iii) Si f' cambia de signo (+) a (-) en c, entonces f(c) es un máximo relativo de f.*

*iv) Si f' no cambia de signo en c, f(c) no es máximo ni mínimo relativo de f.*

*v) f es estrictamente creciente en el intervalo* $\langle a \,;\, b\rangle$

Si: $\quad f'(x) > 0$ ; *para* $a < x < b$

*vi) f es estrictamente decreciente en el intervalo* $\langle a \,;\, b\rangle$

*si* $f'(x) < 0$ ; *para* $a < x < b$

5) *El criterio de la segunda derivada* $f''(x) > 0$

*i) La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en cualquier intervalo I, si* $f''(x) > 0$.

*ii) La gráfica de una función f es cóncava hacia abajo en cualquier intervalo I, si* $f''(x) < 0$.

*iii) Si* $f''(x) = 0$, *significa que los valores de x que solucionan la ecuación son los puntos (x ; f(x)) donde la gráfica cambia de curvatura (llamados puntos de inflexión).*

6) *Si f es una función tal que* $f'(c) = 0$, *y tal que su segunda derivada* $f''(x)$ *exista en un intervalo abierto que contiene a «c», entonces:*

*i) Si* $f''(x) > 0$, *entonces f(c) es un mínimo relativo.*

*ii) Si* $f''(c) < 0$, *entonces f(c) es un máximo relativo.*

7) *Para graficar a una función seguir los pasos siguiente:*

*a) Calcule los puntos críticos, para ello resuelva la ecuación:* $f'(x) = 0$.

*b) Calcule los puntos de inflexión, para ello resuelva* $f''(x) = 0$.

*c) Calcule el signo de f' y f'' en cada uno de los intervalos, así como también ver si la función es creciente o decreciente.*

*d) Con toda información de a, b y c realice la gráfica de f en el sistema de coordenadas cartesianas (sistema xy)*


### LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

**01.-** Calcule: $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\text{sen}(2\cos\theta)}{\cos\theta}$

A) 1/2 B) 5 C) $\pi$ D) 3 E) 2

**02.-** Calcule: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h}$

A) sen $x$ B) cos $x$ C) $h$

D) csc $x$ E) 2 cos $x$

**03.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

A) $\dfrac{\text{sen}\, a}{2}$ B) $\dfrac{\cot^2 a}{2a}$ C) $\dfrac{\text{sen}2a}{2a}$

D) $\dfrac{\text{sen}a}{2a}$ E) $\dfrac{\text{sen}^2}{2a}$

**04.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{\text{sen}(1 - x^2)}$

A) $-\dfrac{3}{2}$ B) 1 C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

**05.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)}{x^2}$

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{2}{4}$

**06.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{sen}x} - \sqrt{1-\text{sen}x}}{x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**07.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 - \text{sen}\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$

A) 1 B) 4 C) 6 D) 0 E) 2

**08.-** Calcular: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\text{sen}(x-2)}{x^3 - 8}$

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{10}$ E) $\dfrac{1}{12}$

**09.-** Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}{(x - x^3)^2}$

A) 0 B) 15 C) 5 D) 10 E) 3

**10.-** Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{5x^2 - 2x}$

A) -1 B) $\dfrac{3}{2}$ C) $-\dfrac{3}{2}$ D) $-\dfrac{2}{5}$ E) $-\dfrac{3}{5}$

**11.-** Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x - \text{sen}2x}$

A) 3 B) 0 C) 2 D) - 3 E) -2

**12.-** Calcule: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen}2x}{x + \text{sen}3x}$

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $-\dfrac{1}{3}$

**13.-** Calcular: $\lim\limits_{\theta \to 4} \dfrac{(\theta + 4).\text{sen}(\pi\theta)}{\theta^2 - 16}$

A) $\theta$ B) $2\pi$ C) $\theta^2$ D) $\pi/2$ E) $\pi$

14.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\text{sen}(\pi x)-\text{sen}(3\pi x)}{x}$

A) 4 B) 3 C) 0 D) 1 E) 2

15.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

A) $\dfrac{m-n}{2}$ B) $\dfrac{n^2-m^2}{2}$ C) $\dfrac{n^2+m^2}{2}$

D) $\dfrac{m^2-n^2}{2}$ E) $\dfrac{n+m}{3}$

16.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$

A) $\dfrac{3}{7}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{9}{16}$ D) $\dfrac{1}{16}$ E) $\dfrac{3}{16}$

17.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

18.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(2-\sqrt{\cos x}-\cos x\right)}{x^2}$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{4}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{3}{2}$

19.- Calcular: $\lim_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

A) $\dfrac{\pi^2}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{4}$ C) $-\dfrac{\pi^2}{2}$ D) $-\dfrac{\pi}{2}$ E) $\dfrac{\pi}{2}$

20.- Calcule: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) 2 D) 0 E) $2\pi$

21.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$

A) $\dfrac{1}{18}$ B) $\dfrac{1}{36}$ C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{6}$

22.- Calcular: $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi-3x}{1-2\cos x}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}$

23.- Calcular: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$

A) 4 B) 0 C) 2 D) 1 E) 3

24.- Calcular: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{10}$ E) $\dfrac{1}{6}$

25.- Calcular: $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta.\text{sen}\theta}{1-\cos^2\theta}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

26.- Calcular: $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{1+\text{sen}x}{1+\cos 2x}$

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

27.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x.\text{sen}x}$

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{2}{9}$ E) $\dfrac{1}{4}$

28.- Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{\text{sen}8x}$

A) 4 B) 1 C) 0 D) 2 E) 3

29.- Calcular: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\text{sen}x-\cos x}{1-\text{sen}x-\cos x}$

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

30.- Calcule: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}2x}{\cos x+\cos 3x}$

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 1

**31.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\operatorname{sen}x)^3}{(1+\cos 2x)^3}$

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{8}$

**32.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}2x+2\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x}{\cos x-\cos^2 x}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**33.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 1

**34.-** Calcule:

$$\lim_{B\to C} \frac{\operatorname{sen}(A+B).\cos B-\operatorname{sen}(A+C).\cos C}{\operatorname{sen}(B-C)}$$

A) cos(A + 2C) D) cos(A + B)

B) cos(A + 2C) E) cos(A + B + 2C)

C) cos(A + C)

**35.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 3x}$

A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{108}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{108}$

**36.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\tan x}$

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) -1 E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**37.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

**38.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $-\frac{3}{2}$

**39.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi}{x}.\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**40.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

**41.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

**42.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{sen}^2 x}{x.\tan 4x}$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{9}$

**43.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x)-1}$

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

**44.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan x+\tan 2x}{\cos x+\cos 2x}$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{8}{3}$

D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{8\sqrt{3}}{3}$

**45.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan x+\cot x-\csc x)^2}{\sec x-1}$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{2}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

**46.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{(1-\cos(ax)+x)(\sec(ax))}$

A) 0 B) $a$ C) $\dfrac{a}{2}$ D) $2a$ E) $\dfrac{a}{3}$

**47.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\tan x.\sec x}{(1+x^2).\sec^3 x-1}$

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{4}{7}$ C) -1 D) 2 E) 1

**48.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2\arccos x-\pi}$

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $-\dfrac{2}{5}$ C) 1 D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{5}{7}$

**49.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan x - \arcsen x}{\operatorname{sen} x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**50.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 1} (1-x).\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

A) $\dfrac{6}{\pi}$ B) $\dfrac{3}{\pi}$ C) $\dfrac{8}{\pi}$ D) $\dfrac{5}{\pi}$ E) $\dfrac{2}{\pi}$

### *DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS*

**51.-** Calcule: $\dfrac{dy}{dx}$ , si: $y = \operatorname{sen}(3x^2 + 2x + 1)$

A) $\operatorname{sen} 3x^2 . (6x + 2)$

B) $\cos(3x + 2x + 1) . (6x + 2)$

C) $\cos(3x^2 + 2x + 1) . (6x + 2)$

D) $\cos(3x^2 + 2x + 1).(6x + 4)$

E) $\operatorname{sen}(2x + 1) . (6x + 2)$

**52.-** Sea: $y = \operatorname{sen}(e^x - \operatorname{sen} x) + \cos\dfrac{\pi}{9}$.

Calcule: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\cos e^x - \operatorname{sen} x . e^x - \cos x$

B) $(\cos e^x - \operatorname{sen} x) . (e^x - \cos x)$

C) $(\cos x - \operatorname{sen} x).(e^x + \cos x)$

D) $(e^x - \cos x)$

E) $\cos(e^x) . (e^x - \cos x)$

**53.-** Sea: $y = 3\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x + 5) + 1$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $6\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x + 5) . (\cos x))$

B) $12\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^3 x + 5) . (\cos x)$

C) $7\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen} x + 5 . \cos x)$

D) $12\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen} x + 5) . \cos(\operatorname{sen} x + 5)(\cos x)$

E) $10\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x + 5) . (\cos x)$

**54.-** Sea: $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$; evalúa: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) . \cos(\operatorname{sen} x) . \cos x$

B) $\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) . \cos(\cos x)$

C) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) . \cos(\operatorname{sen} x) . \cos x$

D) $\cos(\operatorname{sen}(\cos x) . \cos(\operatorname{sen}(\cos x))$

E) $\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) . \cos(\operatorname{sen} x) . \cos x$

**55.-** Determine: $\dfrac{dy}{dx}$ , si: $y = \operatorname{sen}^2(3x + 1) - 3$

A) $2\operatorname{sen}(3x + 2)$

B) $3\operatorname{sen}^2(6x + 5)$

C) $-2\operatorname{sen}(3x + 2)$

D) $3\operatorname{sen}(6x - 3)$

E) $3\operatorname{sen}(6x + 2)$

**56.-** Sea: $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \text{sen}^2 x\right) - \frac{\pi}{8}$.

determinar: $\frac{dy}{dx}$

A) $-\text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \text{sen}^2 x\right)$. sen $2x$

B) $-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \text{sen}^2 x\right)$. sen $2x$

C) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \text{sen}^2 x\right)$. sen $2x$

D) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \text{sen}\, 2x\right)$. $\text{sen}^2 x$

E) $-\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \text{sen}^2 x\right)$. sen $2x$

**57.-** Sea: $y = 4\cos^3(2x + 5) - 7$, determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $-24\cos^2(2x + 6)$ . sen $2x + 5$

B) $24\cos^3(2x + 5)$ . sen $(2x + 4)$

C) $-24\cos^2(2x + 5)$ . sen $(2x + 5)$

D) $24\cos^2(2x + 5)$ . sen $(2x + 2)$

E) $-24\cos(x - 2)$ . sen $(2x - 5)$

**58.-** Determine: $\frac{dy}{dx}$, si: $y = \tan(\text{sen}\, x) + 1$

A) $\sec^2((\text{sen}\, x).(\cos x)$ D) $\sec^2(\cos x)$ . sen $x$

B) $\sec^2(\text{sen}\, x).\cos x$ E) $\sec^2(\text{sen}\, x \,.\, \cos x)$

C) $\sec^2(\text{sen}\, x)$ . $\cos^2 x$

**59.-** Sea: $y = \tan(\ln(x^2)) + \csc^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Calcula: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{2}{x}$ . $\sec(ln(x^2))$ B) $\frac{4}{x}$ . $\tan(ln(x^2))$

C) $\sec^2(ln(x^2))$ . $2x$ D) $\frac{2}{x}$ . $\sec^2(ln(x^2))$

E) $\frac{1}{x}$ . $\csc^2(ln(x^2))$

**60.-** Sea: $y = 3\tan(x^2 + \text{sen}\, x) - 1$,

determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $(3\sec^2 x(x^2 + \text{sen}\, x))(2x + \cos x)$

B) $(x^2 + \text{sen}\, x)(2x + \cos x))$

C) $(3\tan^2(x^2 + \text{sen}\, 2x))(x + \text{sen}\, x)$

D) $(x^2 + \text{sen}\, x)(x + \cos x)$

E) $(3\tan^2 x)(2x + \cos x)$

**61.-** Sea: $y = (3x^4 - 7) . \cot(x^2 + 1) - 5$;

determinar: $\frac{dy}{dx}$

A) $12x. \tan(3x^2 + 1) - 2x(x^4 - 7) . \csc^2(x^2 + 1)$

B) $2x^3. (\cot(x^2 + 1) - 2x(3x^4 - 7)) . \csc^2(x^2 + 1)$

C) $12x^3. \sec(x^2 + 1) - 2x(3x^4 - 7) . \cot^2(x^2 + 1)$

D) $2x(3x^4 - 7) . \csc^2(x^2 + 1) - 12x^3. \cot(x^2 + 1)$

E) $12x^3. \cot(x^2 + 1) - 2x(3x^4 - 7) . \csc^2(x^2 + 1)$

**62.-** Sea: $y = \sec(2x + \tan x) - \frac{\pi}{8}$,

determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\sec(2 + \sec^2 x)$ . $\tan(2x + \tan x)$ . $(x + \tan x)$

B) $\sec(2x + \tan x)$ . $\tan(2x + \tan x)$ . $(2 + \sec^2 x)$

C) $\sec(2x + \sec^2 x)$ . $\tan(2x + \tan x)$ . $(2 + \sec^2 x)$

D) $\sec^2(2x+\tan x) \,.\, \tan(2x+\tan x) \,.\, (1 + \sec x)$

E) $\sec(2 + \tan x) \,.\, \tan(2 + \tan x) \,.\, (2 + \sec^2 x)$

**63.-** Sea: $y = \csc(\operatorname{sen} x - x^2) + 1$;determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $-\csc(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x^2 - x) \,.\, (\cos x - 2)$

B) $-\csc(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, (\operatorname{sen} x - 2x)$

C) $-\csc(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, (\cos x - 2x)$

D) $\csc(\operatorname{sen} x^2 - x) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, (\operatorname{sen} x - 2)$

E) $-\csc(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, (\cos x - 2)$

**64.-** Determine: $ab$ , si: $f(x) = a \cos x + b$, además se cumple:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \;\wedge\; f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

A) $\frac{7}{2}$ B) $-\frac{21}{2}$ C) $-3$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{11}{2}$

**65.-** Sea la función $f$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \frac{x}{2},$$

determine los valores de $x \in \langle 0; \pi \rangle$ de modo que $f'_{(x)} = 0$

A) $\left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{13}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{5}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$

### DERIVADA DE F. T. INVERSAS

**66.-** Sea: $y = \dfrac{\frac{\pi}{2} - arc\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-\sqrt{3+x^2} - x.arc\cos x}{(1-x^2)^{3/2}}$

B) $\dfrac{\sqrt{5-x^2} + x.arc\cos x}{(1-x^2)^{3/2}}$

C) $\dfrac{-(8-x^2) + x.arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3/2}}$

D) $\dfrac{-\sqrt{1-x^2} + x.arc\cos x}{(1-x^2)^{3/2}}$

E) $\dfrac{-\sqrt{2-x^2} + x.arc\cos x}{1-x^2}$

**67.-** Sea: $y = arc\ \operatorname{sen}(ln\ x) + arc\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{1}{x.\sqrt{1-ln^2 x}}$ B) $-\dfrac{-2}{x.\sqrt{1-ln^2 x}}$

C) $\dfrac{3}{\sqrt{1-ln^2 x}}$ D) $\dfrac{4}{\sqrt{1-(ln x)^2}} \,.\, x$

E) $\dfrac{7}{x \cdot \sqrt{1-ln^2 x}}$

**68.-** Sea: $y = \cos(arc\ \operatorname{sen} \sqrt{x}) - 1$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{2}{1-x}$ B) $-\dfrac{6}{\sqrt{x}}$ C) $\dfrac{-1}{1-x}$ D) $\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ E) $\dfrac{-8}{\sqrt{x}}$

**69.-** Sea: $y = arc\cos(\sqrt{1-x^2}) + \dfrac{\pi}{3}$

A) $\dfrac{9}{\sqrt{1-x^2}}$ B) $\dfrac{-1}{x.\sqrt{1-x^2}}$ C) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-x}}$

D) $\dfrac{-3}{1-\sqrt{1-x^2}}$ E) $\dfrac{-1}{\sqrt{2-x^2}}$

**70.-** Sea: $y = arc\cos\sqrt{x} - arc\tan(3), x \in \langle 0; 1\rangle$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-4}{\sqrt{x-x^2}}$ B) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$ C) $-\dfrac{3}{\sqrt{x-x^2}}$

D) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x^2}}$ E) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$

**71.-** Sea: $y = arc\cos(e^x) + arc\cos\sqrt{1-e^{2x}}$ ,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**72.-** Sea: $y = 2^{arc\ sen\ 3x} + arc\ sec\dfrac{8}{5}$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{(ln3).(2^{arcsen3x})}{\sqrt{1-9x^2}}$ B) $\dfrac{(ln2).2^{arcsen3x}}{\sqrt{1-3x^2}}$

C) $\dfrac{ln4.(2^{arcsen3x})}{\sqrt{1-9x^2}}$ D) $\dfrac{(ln2).2^{arcsen3x}}{\sqrt{1-9x^2}}$

E) $\dfrac{ln2.2^{arcsen3x}}{\sqrt{1+9x^2}}$

**73.-** Sea: $y = arc\tan(2x-5) - arc\csc(4)$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{1}{2x-10+13}$ B) $\dfrac{1}{2x-10x-13}$

C) $\dfrac{1}{2x^2-10x+13}$ D) $\dfrac{1}{2x^2-10x+26}$

E) $\dfrac{1}{4x^2-10x+13}$

**74.-** Sea: $y = arc\tan(\sqrt{4x^2-1})$

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{4x^2-1}}$ B) $\dfrac{1}{x.\sqrt{4x^2-1}}$ C) $\dfrac{1}{x.\sqrt{4x^2+1}}$

D) $\dfrac{1}{x.\sqrt{4x-1}}$ E) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$

**75.-** Sea: $y = arc\tan(3\ sen\ x) - \cos\dfrac{\pi}{7}$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{\cos^2 x}{1+9sen\,x}$ B) $\dfrac{3\cos x}{1+3sen^2 x}$

C) $\dfrac{3\cos x}{1+9sen^2 x}$ D) $\dfrac{\cos x}{1+(sen\,x)^2}$

E) $\dfrac{3\cos x}{1+9sen^2 x}$

**76.-** Sea: $y = \tan\left(arc\cos(x) - \dfrac{\pi}{2}\right) + \tan\dfrac{3\pi}{5}$,

$x \in \langle -1;1\rangle$, determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-1}{(1-x^2)^3}$ B) $\dfrac{-1}{(1-x)^{3/2}}$ C) $\dfrac{-1}{1-x^2}$

D) $\dfrac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}$ E) $\dfrac{-1}{(1-x^2)^2}$

**77.-** Sea: $y = arc\cot(\sqrt{2x^2-1}) - \dfrac{\pi}{8}$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$ B) $\dfrac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$ C) $\dfrac{1}{x.\sqrt{2x^2-1}}$

D) $\dfrac{1}{x.\sqrt{2x^2+1}}$ E) $\dfrac{1}{x.\sqrt{x^2+1}}$

**78.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = x \,.\, arc \text{ sen } x,$$

determine el valor de: $f'_{(1/2)}$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\sqrt{4}}{3} - \frac{\pi}{6}$

### *DERIVACIÓN IMPLICITA*

**79.-** Sea la ecuación:

$$\text{sen } y + y - 1 = 0 \,,\, y \neq (3k+1)\pi,\, k \in \mathbb{Z},$$

determine: $\frac{dy}{dx}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

**80.-** Sea la ecuación: $\text{sen}^2 y - x^2 + 1 = 0$, determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{4x}{\text{sen } y}$ B) $\frac{3x}{\text{sen}^2 y}$ C) $\frac{2x}{\text{sen } 2y}$

D) $\frac{5x}{\text{sen } y}$ E) $\frac{5y}{\text{sen } 2x}$

**81.-** Sea la ecuación: $y \,.\, \text{sen } x - x \cos y + 1 = 0$, determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{\cos y - y\cos x}{\text{sen } x + \text{sen } y}$ B) $\frac{\cos y - y\cos x}{\text{sen } x + x\,\text{sen } y}$

C) $\frac{y\cos x - \cos y}{\text{sen } x + x\,\text{sen } y}$ D) $\frac{\cos y - \cos x}{\text{sen } x + \text{sen } y}$

E) $\frac{\cos y - \text{sen } x}{\text{sen } x + x\cos y}$

**82.-** Sea la ecuación: $y \text{ sen } x + \cos y = 0$, determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{y.\cos x}{\text{sen } x - \text{sen } y}$ B) $\frac{-y.\cos x}{\text{sen } x - \cos y}$

C) $\frac{-y.\cos x}{\text{sen } x - \text{sen } y}$ D) $\frac{\cos x}{\text{sen } x - \text{sen } y}$

E) $\frac{-y.\cos x}{\text{sen } x + \text{sen } y}$

**83.-** Sea la ecuación: $y = \cos(xy) + y^2$,

determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{-y.\text{sen}(xy)}{1 + x\,\text{sen}(xy) - 2y}$ D) $\frac{-\text{sen}(xy)}{1 + \text{sen}(xy) - 2y}$

B) $\frac{-y.\text{sen}(xy)}{1 - x\,\text{sen}(xy) - 2y}$ E) $\frac{-y.\text{sen}(xy)}{1 + x\,\text{sen}(xy)}$

C) $\frac{-y.\text{sen}(xy)}{1 - x\,\text{sen}(xy) + 2y}$

**84.-** Sea la ecuación: $\cos(x^2) - \text{sen } y + y = 0$, determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{2x.\text{sen } y}{1 + \cos y}$ B) $\frac{2x.\text{sen}(x)}{3 + \cos y^2}$

C) $\frac{2x.\text{sen}(x^2)}{4 - \cos y}$ D) $\frac{2x.\text{sen}(x^2)}{1 + \cos y}$

E) $\frac{3x^2.\text{sen}(x^2)}{1 + \cos y}$

**85.-** Sea la ecuación: $\tan(x + y) + \cos y - 1 = 0$,

determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{-\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y) + \cos y}$

B) $\frac{-\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y) - \text{sen } y}$

C) $\dfrac{\cos^2(x+y)}{\cos^2(x-y)-\text{sen } y}$

D) $\dfrac{-\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)-\text{sen } y}$

E) $\dfrac{-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-\text{sen } y}$

**86.-** Sea la ecuación: sec $(x + y) - y^2 + 1 = 0$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-\sec(x+y).\tan(x+y)}{\sec x+y.\tan(x+y)-2y}$

B) $\dfrac{\sec(x+y).\tan(x+y)}{\sec(x+y).\tan(x+y)-2}$

C) $\dfrac{-\sec(x+y).\tan(x+y)}{\sec(x+y).\tan(x-y)}$

D) $\dfrac{-\sec(x+y^2).\tan(x+y)}{\sec(x+y^2).\tan(x+y)-2y}$

E) $\dfrac{-\sec(x+y).\tan(x+y)}{\sec(x+y).\tan(x+y)-2y}$

**87.-** Sea la ecuación: tan $(xy) - y^3 = 0$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-y.\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy)-3y^2}$ B) $\dfrac{-y^3.\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy)-3y^2}$

C) $\dfrac{-y.\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy)-3y^2}$ D) $\dfrac{-y^2.\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy)-3y^2}$

E) $\dfrac{-y\cdot\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy)+3y^2}$

**88.-** Sea la ecuación: *arc* cos $x - \sqrt{y} = 0$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $\dfrac{-2y}{\sqrt{1-x^2}}$ B) $\dfrac{2y}{\sqrt{2x-1}}$ C) $\dfrac{2y}{\sqrt{1-2x}}$

D) $\dfrac{1-2y}{\sqrt{2-x^2}}$ E) $\dfrac{-2y}{\sqrt{1-x}}$

**89.-** Sea la ecuación: *arc* cos $y - x + 1 = 0$,

determine: $\dfrac{dy}{dx}$

A) $-\sqrt{1-y^2}$ B) $-\sqrt{1+y^2}$ C) $\sqrt{1-y^2}$

D) $y\sqrt{1-y^2}$ E) $-\sqrt{1-y}$

**90.-** Sea la ecuación: *arc* sen $(xy) + yx = 0$,

determine: $\dfrac{d(yx)}{dx}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

### *REGLA DE L'HOSPITAL*

**91.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{sen}(\pi x)}{x+\text{sen}(\pi x)}$

A) $\dfrac{1+\pi}{1-\pi}$ B) $\dfrac{2-\pi}{1+\pi}$ C) $\dfrac{1}{1+\pi}$

D) $\dfrac{\pi}{1+\pi}$ E) $\dfrac{1-\pi}{1-\pi}$

**92.-** Calcule: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 1 E) 2

**93.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2x}{\text{sen}3x}$

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $-\dfrac{2}{5}$

94.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{sen}x-\cos x}{1+\text{sen}x-\cos x}$

A) -5 B) - 4 C) -3 D) -2 E) - 1

95.- Calcule: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{sen}(1-x^2)}{x^3+1}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

96.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-2\text{sen}4x}{6x-7\text{sen}5x}$

A) $\frac{5}{29}$ B) $\frac{5}{19}$ C) $\frac{3}{35}$ D) $\frac{3}{29}$ E) $\frac{5}{39}$

97.- Calcule: $\lim\limits_{\theta\to 4} \dfrac{\theta^2-16}{(\theta+4)\cdot\text{sen}(\pi\theta)}$

A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{\pi}$

98.- Calcule: $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\frac{x^2}{\pi^2}}{\text{sen}x}$

A) $\frac{3}{\pi}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{6}{\pi}$

99.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x-\text{sen}2x}{\text{sen}3x}$

A) $\frac{2}{4}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{3}$

100.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

101.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{sen}x}-\sqrt{1-\text{sen}x}}{x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

102.- Calcule: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi-3x}{1-2\cos x}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $-\sqrt{3}$

D) 2 E) $-\sqrt{7}$

103.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

A) 4π B) π C) 2 π D) 3π E) 5π

104.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{\text{sen}8x}$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) 0

105.- Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\pi.\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

A) $\frac{5}{\pi^2}$ B) $\frac{7}{\pi^2}$ C) $\frac{2}{\pi^2}$ D) $\frac{1}{\pi^2}$ E) $\frac{3}{\pi}$

106.- Calcule: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{\text{sen}x-\cos x}$

A) $-\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{5}$ C) $-2\sqrt{2}$

D) $-\sqrt{3}$ E) $-\sqrt{6}$

107.- Calcule: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos 2x+\cos x}{\tan 2x+\tan x}$

A) $\frac{-\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{-3}{2}$ C) $\frac{-1}{3}$

D) $\frac{-\sqrt{3}}{8}$ E) $\frac{-1}{2}$

108.- Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{[1+x-\cos(ax)][\sec(ax)]}$$

A) 0 B) $\frac{a}{2}$ C) $a^2$ D) $3a$ E) $a$

**109.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{\arctan x}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**110.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan x - \arcsin x}{\operatorname{sen} x}$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**111.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi - 2\arccos x}{x}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**112.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

**113.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{8}$

**114.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{1+\cos(\pi x)}$

A) $\frac{1}{\pi^2}$ B) $\frac{6}{\pi^2}$ C) $\frac{4}{\pi^2}$ D) $\frac{3}{\pi^2}$ E) $\frac{2}{\pi^2}$

**115.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

A) $\frac{n^2-m^2}{4}$ B) $\frac{n^2-m^2}{2}$ C) $\frac{n^2-m^2}{3}$

D) $\frac{n^2-m^2}{6}$ E) $\frac{n^2-m^2}{8}$

**116.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 3x}$

A) $\frac{16}{9}$ B) 2 C) $\frac{3}{16}$ D) 5 E) $\frac{13}{9}$

**117.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

**118.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 3x}$

A) $\frac{\sqrt{3}}{100}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{51}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{108}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{114}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{128}$

**119.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)}{1-\cos(\operatorname{sen} 4x)}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

**120.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x.\operatorname{sen} x}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) 3 E) $\frac{1}{3}$

**121.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$

A) 2 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

**122.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{sen}^2 x}{x.\tan 4x}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) 3 E) $\frac{2}{9}$

**123.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

**124.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x)-1}$

A) -6  B) -5  C) -4  D) -2  E) -1

**125.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-x^3)^2}{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}$

A) $\frac{1}{10}$  B) $\frac{1}{15}$  C) $\frac{2}{13}$  D) $-\frac{1}{15}$  E) $\frac{1}{18}$

**126.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x-2+x^2}{3x^4}$

A) $\frac{1}{26}$  B) $\frac{1}{16}$  C) 1  D) $\frac{1}{36}$  E) $\frac{2}{18}$

**127.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x-\text{sen}x}$

A) -2  B) -1  C) 0  D) 1  E) 2

**128.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\text{sen}x}{x^3}$

A) $\frac{1}{4}$  B) $\frac{5}{3}$  C) $\frac{1}{2}$  D) $\frac{2}{11}$  E) $\frac{1}{5}$

**129.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

A) $\frac{1}{3}$  B) $\frac{1}{5}$  C) $\frac{1}{2}$  D) $\frac{1}{7}$  E) $\frac{1}{8}$

**130.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to\pi} (1+\cos x)\,.\,(1+\cot x)$

A) -1  B) 0  C) 1  D) 2  E) 3

**131.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\text{sen}2x-\text{sen}3x}$

A) 4  B) 3  C) 2  D) 1  E) 0

**132.-** Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$

A) -1  B) -2  C) -3  D) -4  E) -5

**133.-** Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \cot 2x\,.\,\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

A) $\frac{2}{3}$  B) $\frac{1}{5}$  C) $\frac{3}{8}$  D) $\frac{5}{3}$  E) $\frac{1}{2}$

**134.-** Calcule:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x}$$

A) $e^2$  B) $e$  C) $e^3$  D) $e^4$  E) $e^{1/2}$

**135.-** Calcule:

$$\lim_{x\to 0} (1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$$

A) $e$  B) $e^5$  C) $e^2$  D) $e^3$  E) $e^{3/4}$

### *APLICACIONES DE LA DERIVADA*

**136.-** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = \text{sen}^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 1,$$

determine el valor de $x$ en $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$ para que $f$ tome su mínimo valor.

A) $\frac{\pi}{6}$  B) $\frac{\pi}{7}$  C) $\frac{\pi}{9}$  D) $\frac{\pi}{8}$  E) $\frac{\pi}{5}$

**137.-** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva: $y = \text{sen}\,x + 2$ en el punto (0; 2)

A) $x - 2 = y$  B) $x + 4 = y$  C) $x + 3 = y$
D) $x + 9 = y$  E) $x + 2 = y$

**138.-** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva: $y = \text{arc}\tan x - \frac{\pi}{4}$ en el punto: (1; 0)

A) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = y$ B) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = y$

C) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = y$ D) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = y$

E) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{7} = y$

**139.-** Determine la ecuación de la recta normal a la curva: $y = 2$ sen $x - 3$ en el punto: (0; -3)

A) $-\frac{1}{6}x - 3 = y$ B) $-\frac{1}{2}x - 3 = y$

C) $-\frac{1}{2}x - 2 = y$ D) $-\frac{1}{8}x - 3 = y$

E) $-\frac{1}{3}x - 3 = y$

**140.-** Determine la ecuación de la recta normal a la curva: $y = arc\ \tan(x+1) - \frac{\pi}{4}$ en el punto: (0; 0)

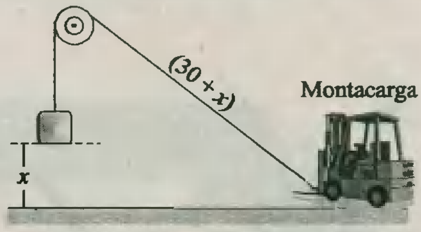
A) $-5x = y$ B) $-4x = y$ C) $-3x = y$

D) $-2x = y$ E) $-\frac{1}{2}x = y$

**141.-** El perímetro de un sector circular es $8u$, determine el valor de su radio para que el área del sector circular sea máximo.

A) $4u$ B) $3u$ C) $2u$ D) $1u$ E) $0u$

**142.-** Un bloque de peso "P" se cuelga de una cuerda que pasa por una polea, tal como se muestra en la figura y a una altura de 20 $m$, sobre la superficie del suelo. El otro extremo es tirado por un montacargas que está a una altura de 2 $m$ del suelo. Si el montacargas se aleja a una velocidad de 9 $m/s$; ¿a qué velocidad sube el peso cuando está a una altura de 6 $m$ del suelo?




A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $m/s$ B) $\frac{6\sqrt{3}}{2}$ $m/s$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $m/s$

D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $m/s$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ $m/s$

**143.-** Se desea cercar un lote rectangular que tiene 4 000 $m^2$ de superficie, uno de cuyos lados está definido por la ribera de un río recto. Si no se necesita cercar por el lado que da al río; ¿qué dimensiones requiere la menor cantidad de cerca? .

A) $11\sqrt{5}$ B) $9\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$

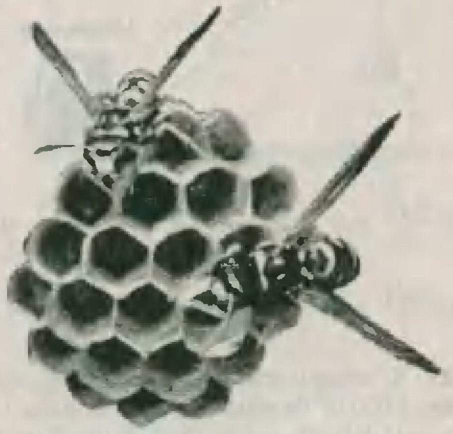
D) $5\sqrt{5}$ E) $20\sqrt{5}$

**144.-** Una estatua de 6 $m$ de altura tiene su base 2 $m$ arriba del nivel del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la estatua debe colocarse el observador para que el ángulo subtendido desde su ojo por la estatua sea máxima?.

A) $\sqrt{3}\ u$ B) $7\sqrt{3}\ u$ C) $2\sqrt{3}\ u$

D) $3\sqrt{3}\ u$ E) $5\sqrt{3}\ u$

# LA TRIGONOMETRIA EN NUESTRA NATURALEZA



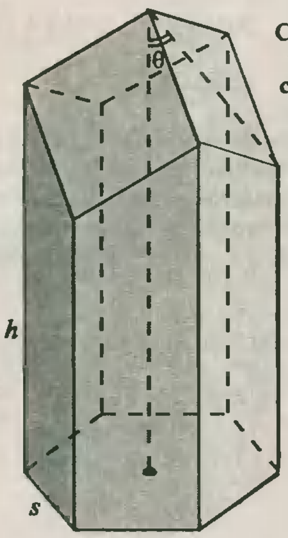
CONSTRUCCIÓN DE UNA COLMENA

Las abejas *construyen* sus colmenas con cera pura, que solo pueden producir las obreras. Ambos lados de la colmena constan de celdas hexagonales geométricamente perfectas y se construyen de forma tal que la cantidad de material requerida es la *mínima* posible. Hay unos 5 millones de colonias de abejas en los Estados Unidos que producen en el orden de 125 millones de *kilogramos* de miel cada año.

Las abejas construyen sus compartimentos de almacenamiento en forma de celdillas hexagonales.

Cada celda tiene una base hexagonal y tres caras superiores rómbicas que se cortan con la altura de la celda formando un ángulo θ. El volumen de cada celda viene dado por la siguiente expresión:

$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2h$$




Celda hexagonal utilizada en la construcción de una colmena

y es independiente del ángulo θ. Por otra parte, el área superficial de la celda, viene dada por:

$$S=6hs+\frac{3s^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

dependiente del ángulo θ. El ángulo que hace mínima el área (y, por tanto, la cantidad de material requerida) se determina resolviendo la siguiente ecuación obtenida luego de derivar la expresión anterior:

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{3s}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)=0$$

La solución de esta ecuación es:

$$\cos\theta=1/\sqrt{3} \text{ o sea } \theta \ 54,74^\circ$$

# PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA Y COMO RESOLVERLOS

## PARTE 2

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

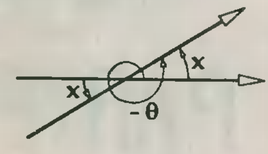
NUEVA

COLECCION RACSO

# CAP. 1 Sistemas de Medida Angular

**01.-** Graficamos los ángulos en sentido antihorario.

De esta nueva figura podemos establecer que:

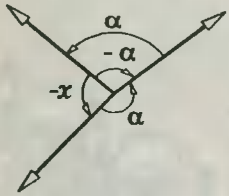



$-\theta = 2\pi + x$

$\therefore$ $\boxed{x = -2\pi - \theta}$

**02.-** Graficamos los ángulos en sentido antihorario.

De esta nueva figura podemos establecer que:




$\alpha + \alpha - x = 360°$

Despejando "$x$":

$\therefore$ $\boxed{x = 2\alpha - 360°}$

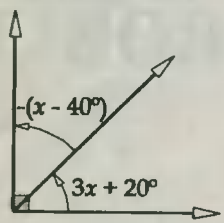
**03.-** Graficando los ángulos en sentido antihorario, podemos establecer que:

$3x + 20° - (x - 40°) = 90°$

$\Rightarrow$ $3x + 20° - x + 40° = 90°$

$\Rightarrow$ $2x = 30°$

$\therefore$ $\boxed{x = 15°}$

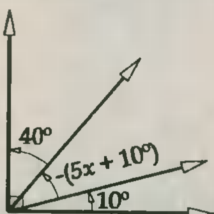



**04.-** Graficando los ángulos en un mismo sentido (antihorario), se propone que:

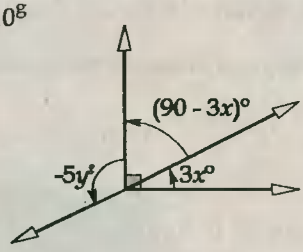
$10° + 40° - 5x - 10° = 90°$

$\Rightarrow$ $-5x = 50°$

$\therefore$ $\boxed{x = -10°}$



**05.-** De la figura: $(90 - 3x)^o - 5y^g = 180^o$ , y además $9^o <> 10^g$



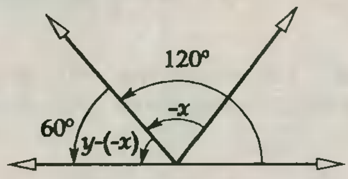

$$\Rightarrow \; 5y^g <> \left(\frac{9y}{2}\right)^o \quad \Rightarrow \quad 90^o - (3x)^o - \left(\frac{9y}{2}\right)^o = 180^o$$

$$\Rightarrow \quad -2x - 3y = 60 \quad \Rightarrow \quad -2x = 3(20 + y)$$

$$M = \frac{x}{20+y} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \frac{-3}{2}}$$

**06.-** Siendo AC una línea recta, graficamos todos los ángulos en un mismo sentido.

Se observa que: $y - (-x) = 60^o \quad \Rightarrow \quad y + x = 60^o$

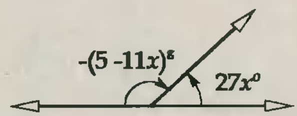



Pero: $180^o = \pi rad \quad \Rightarrow \quad x + y = 60^o . \dfrac{\pi\, rad}{180^o}$

$$\therefore \quad \boxed{x + y = \frac{\pi}{3}\, rad}$$

**07.-** Al graficar los ángulos en sentido antihorario tendremos:

$$27x^o - (5 - 11x)^g = 180^o \qquad \ldots (1)$$

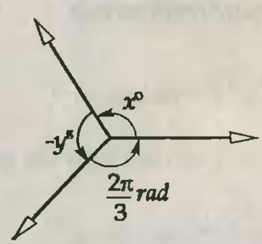



Pero: $9^o <> 10^g \quad \Rightarrow \quad (5 - 11x)^g = (5 - 11x)^g . \dfrac{9^o}{10^g} \ldots (2)$

(2) en (1): $27x^o - (5 - 11x) . \dfrac{9^o}{10} = 180^o$

Efectuando: $30x^o - 5 + 11x^o = 200^o \quad \Rightarrow \quad 41x = 205 \qquad \therefore \quad \boxed{x = 5}$

**08.-** De la figura: $x^o - y^g + \dfrac{2\pi}{3} rad = 360^o \ldots (*)$




Pero: $9^o <> 10^g \quad \Rightarrow \quad y^g = y^g . \dfrac{9^o}{10^g} = \left(\dfrac{9y}{10}\right)^o$

$$\pi rad <> 180^o \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} rad = 120^o$$

En (*) : $x^o - \left(\dfrac{9y}{10}\right)^o + 120^o = 360^o \quad \Rightarrow \quad \dfrac{10x - 9y}{10} = 240$

$$\therefore \quad \boxed{10x - 9y = 2\,400}$$

**09.-** Como: $\theta = x - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + \theta = 0$

Para que la ecuación tenga solución, el discriminante de la solución general debe ser tal que:

$$1 - 4\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta_{máx} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Luego de la figura original se establece que: $\alpha + \theta - \left(\frac{x}{2} - 2\right) rad = 2\pi rad$

Y para que $\theta$ sea máximo sustituimos los valores encontrados:

$$\Rightarrow \quad \alpha + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\pi - 2 \qquad \therefore \quad \boxed{\alpha = 4{,}2832\ rad}$$

**10.-** Los números $\alpha$, $-\theta$ y $\beta$ que representan la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, y en el mismo sentido se relacionan por:

$$\frac{\alpha}{9} = \frac{-\theta}{10} = \frac{20\beta}{\pi}$$

Por lo tanto: $\frac{\alpha}{9} = \frac{-\theta}{10} \quad \Rightarrow \quad 10\alpha + 9\theta = 0$ .... (A) correcto

$\frac{\alpha}{9} = \frac{20\beta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad 180\beta - \alpha\pi = 0$ .... (B) correcto

$\frac{-\theta}{10} = \frac{20\beta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad 200\beta + \theta\pi = 0$ .... (C) correcto

De (B) + (C): $380\beta - \alpha\pi + \theta\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad 380\beta = \pi(\alpha + \theta)$ .... (D) correcto

$\therefore \quad 900\beta = \pi(9\theta + 5\alpha)$ .... (E) incorrecto

***CONVERSIONES***

**11.-** Recordemos: $9^\circ <> 10^g \quad \Rightarrow \quad M = \frac{(1+2+....+2005)^g}{(1+2+....+2005)^\circ} \cdot \frac{9^\circ}{10^g} .10 \qquad \therefore \quad \boxed{M = 9}$

**12.-** Convirtiendo los ángulos $\alpha$ y $\beta$ a grados sexagesimales tendremos:

$\alpha = 0{,}5236\ rad \cdot \frac{180^\circ}{\pi rad} = \left(\frac{0{,}5236.180}{3{,}1416}\right)^\circ = 30^\circ \qquad \beta = 30^g 50^m = 30^g \frac{9^\circ}{10^g} 50^m . \frac{1^g}{100^m} \cdot \frac{9^\circ}{10^g} \cdot \frac{60'}{1^\circ}$

$\beta = 27^\circ 27'$ $\qquad \theta = 27^\circ 25'$

Por lo tanto se observa que: $\boxed{\theta < \beta < \alpha}$

13.- $1°15' = 1° + \left(\frac{1}{4}\right)^{°} = \left(\frac{5}{4}\right)^{°}$

Luego: $\left(\frac{5}{4}\right)^{°} = \left(\frac{5}{4}\right)^{°} \cdot \frac{\pi\ rad}{180°} = \frac{\pi}{144}\ rad \quad \therefore \quad \boxed{1°15' <> \frac{\pi}{144}\ rad}$

14.- Por dato: $\frac{\pi}{50}\ rad <> A°B'$

Pero: $\pi rad = 180° \Rightarrow \frac{\pi rad}{50} = \frac{180°}{50} = 3° + 0,6°$

Pero: $1° <> 60' \Rightarrow 0,6° = 36'$

Luego: $\frac{\pi}{50}\ rad = 3° + 36' = 3°36' = A°B' \Rightarrow A = 3 \quad \wedge \quad B = 36$

Luego: $M = \frac{36-2(3)}{36-10(3)} = \frac{30}{6} \quad \therefore \quad \boxed{M = 5}$

15.- Por dato: $\frac{\pi}{69}\ rad <> x°y'z''$ Pero: $\pi rad <> 180°$

$\Rightarrow \frac{\pi}{69}\ rad = \frac{180°}{69} = 2° + \left(\frac{42}{69}\right)^{°}$ Pero: $1° <> 60'$

$\Rightarrow \left(\frac{42}{69}\right)^{°} = \left(\frac{42}{69}.60\right)' = \left(\frac{840}{23}\right)' \Rightarrow \left(\frac{42}{69}\right)^{°} = 36' + \left(\frac{12}{23}\right)' \Rightarrow \frac{\pi}{69}\ rad = 2° + 36' + \left(\frac{12}{23}\right)'$

Pero: $1' <> 60'' \Rightarrow \left(\frac{12}{23}\right)' = \left(\frac{12}{23}.60\right)'' \approx 31''$

Luego: $\frac{\pi}{69}\ rad = 2°36'31'' = x°y'z'' \Rightarrow x = 2, y = 36, z = 31 \Rightarrow (x + y - z)° = 7°$

$\therefore$ Complemento de $(x + y - z) = 90° - 7° = \boxed{83°}$

16.-Nuestra estrategia consistirá en convertir los grados a minutos y segundos sexagesimales. Para tal efecto hacemos:

$$37,98° = 36° + 1,98°$$

Como: $1° <> 60' \Rightarrow 1,98° <> (1,98)(60') <> 118,8' \Rightarrow 37,98° = 36° + 108' + 10,8'$

Asimismo: $1' <> 60'' \Rightarrow 10,8' <> (10,8)(60'') <> 648''$

Luego: $37,98° = 36° + 108' + 648''$

También: $\left.\begin{array}{l} 9^\circ <> 10^g \\ 27' <> 50^m \\ 80'' <> 250^s \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 36^\circ <> 40^g \\ 108' <> 200^m \\ 648'' <> 2000^s \end{array}\right.$

$$\Rightarrow\ 37{,}98^\circ = 40^g + \underbrace{200^m}_{2^g} + \underbrace{2000^s}_{20^m} \qquad \therefore \qquad 37{,}98^\circ <> 42^g20^m <> \overline{AB}^g\ \overline{B0}^m$$

De donde reconocemos que: $A = 4 \ \wedge \ B = 2 \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 12}$

**17.-** Nuestra estrategia consistirá en convertir todos los grados en minutos sexagesimales.

Luego: $M = \left(\dfrac{1^\circ 21'}{3'}\right)^\circ \left(\dfrac{2^\circ 15'}{5'}\right)^{'} \left(\dfrac{1^\circ 3'}{3'}\right)^{''} \Rightarrow \quad M = \left(\dfrac{1^\circ + 21'}{3'}\right)^\circ \left(\dfrac{2^\circ + 15'}{5'}\right)^{'} \left(\dfrac{1^\circ + 3'}{3'}\right)^{''}$

Como: $2^\circ <> 120' \quad \Rightarrow \quad M = \left(\dfrac{81'}{3'}\right)^\circ \left(\dfrac{135'}{5'}\right)^{'} \left(\dfrac{63'}{3'}\right)^{''} = 27^\circ 27' 21''$

Pero: $9^\circ <> 10^g \quad \Rightarrow \quad 27^\circ <> 30^g$

Asimismo: $27' <> 50^m \ \wedge \ 21'' <> 65^s$

$\Rightarrow\ 27^\circ 27' 21'' = 30^g 50^m 65^s \quad \Rightarrow \quad 27^\circ 27' 21'' = 30^g + 50^m + 65^s$

$\Rightarrow 27^\circ 27' 21'' <> 30^g 50^m 65^s = \overline{a0}^g\ \overline{bc}^m\ \overline{de}^s \qquad \therefore \qquad a = 3,\ b = 5,\ c = 0,\ d = 6,\ e = 5$

Luego: $M = \dfrac{5+6+5+5}{3+0+2.2} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 3}$

**18.-** La estrategia que utilizaremos consiste en transformar minutos y segundos a grados sexagesimales. Para ello requerimos establecer las siguientes equivalencias:

$$1^\circ = 60' \ \Rightarrow \ 15' = \frac{60'}{4} = \frac{1^\circ}{4} \ \Rightarrow \ 1^\circ = 3600'' \ \Rightarrow \ 36'' = \frac{3600''}{100} = \frac{1^\circ}{100}$$

Entonces: $\theta = 16^\circ 15' 36'' = 16^\circ + 15' + 36'' \ \Rightarrow \ \theta = 16^\circ + \left(\dfrac{1}{4}\right)^\circ + \left(\dfrac{1}{100}\right)^\circ$

$\theta = (16 + 0{,}25 + 0{,}01)^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 16{,}26^\circ$

Pero también: $\pi\ rad = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 16{,}26^\circ \cdot \dfrac{\pi\ rad}{180^\circ}$

$$\theta = \left(\frac{16{,}26 \times 3{,}14}{180}\right) rad \ \therefore \ \boxed{\theta = 0{,}2836}$$

**19.-** Del ejercicio anterior se sabe que: $15' \cdot \dfrac{1^\circ}{60'} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^\circ \Rightarrow 45'' \cdot \dfrac{1^\circ}{3600''} = \left(\dfrac{1}{80}\right)^\circ$

Entonces: $36^\circ15'45'' = 36^\circ + 15' + 45'' \Rightarrow 36^\circ15'45'' = 36^\circ + \left(\dfrac{1}{4}\right)^\circ + \left(\dfrac{1}{80}\right)^\circ$

$$\Rightarrow 36^\circ15'45'' = \left(\frac{2880+20+1}{80}\right)^\circ \Rightarrow 36^\circ15'45'' = \left(\frac{2901}{80}\right)^\circ$$

Convirtiendo grados sexagesimales a *radianes*, por el criterio del factor unidad tenemos:

$$36^\circ15'45'' = \left(\frac{2901}{80}\right)^\circ \cdot \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = \frac{(967)(3{,}14)}{4800}\, rad \qquad \therefore \qquad 36^\circ15'45'' = \boxed{\mathbf{0{,}6326}\ \boldsymbol{rad}}$$

**20.-** De la condición: $x^\circ y' z'' = a^\circ b' c'' + c^\circ a' b'' + b^\circ c' a''$

$$\Rightarrow x^\circ y' z'' = (a+b+c)^\circ (a+b+c)' (a+b+c)''$$

Y según la condición: $x^\circ y' z'' = 63^\circ 63' 63''$

Asimismo recordamos que: $1^\circ = 60'$ ; $1' = 60''$ ; $1^\circ = 3600''$

Entonces: $x^\circ y' z'' = 63^\circ + 63' + \underbrace{60''}_{1'} + 3'' \Rightarrow x^\circ y' z'' = 63^\circ + \underbrace{60'}_{1^\circ} + 4' + 3''$

$$x^\circ y' z'' = 64^\circ 4' 3'' \Rightarrow x = 64 \quad ; \quad y = 4 \quad ; \quad z = 3$$

$$\Rightarrow \qquad W = \frac{64-4}{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{W = 20}}$$

## MEDIDAS DE ÁNGULOS RELACIONADOS

**21.-** Recordemos: $S = \dfrac{180R}{\pi} \wedge C = \dfrac{200R}{\pi}$

Reemplazando en la condición: $S^R = R^C \Rightarrow \left(\dfrac{180R}{\pi}\right)^R = R^{\frac{200R}{\pi}}$

Ordenando las potencias convenientemente y simplificando:

$$\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(R^{\frac{200-\pi}{\pi}}\right)$$

Se observa potencias iguales, entonces: $\dfrac{180}{\pi} = R^{\frac{200-\pi}{\pi}}$

Luego: $M = \sqrt[\frac{200-\pi}{\pi}]{\dfrac{180}{\pi}} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt[\frac{200-\pi}{\pi}]{R^{\frac{200-\pi}{\pi}}} \qquad \therefore \quad \boxed{M = R}$

**22.-** Los números S y C están relacionados por: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10}$

De la condición tenemos: $\dfrac{x+\dfrac{\pi}{4}}{9} = \dfrac{x+\dfrac{\pi}{2}}{10} \Rightarrow 10x + \dfrac{5}{2}\pi = 9x + \dfrac{9\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$

$$\therefore \qquad S = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

Convirtiendo los grados sexagesimales a radianes, tendremos:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\circ} \cdot \frac{\pi\ rad}{180^{\circ}} \qquad \therefore \qquad \boxed{R = \frac{\pi^2}{80}\,rad}$$

**23.-** Recordando la identidad algebraica:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Entonces: $W = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{C}-\sqrt{S})^2+(\sqrt{C}+\sqrt{S})^2}{(\sqrt{C})^2-(\sqrt{S})^2}-13}$

En donde al aplicar la identidad, obtenemos: $W = \sqrt{\dfrac{2(C+S)}{C-S}-13} \quad \ldots (*)$

Además se sabe que: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10k \end{cases}$

Reemplazando en (*): $W = \sqrt{2\dfrac{(10k+9k)}{10k-9k}-13}$

$$\Rightarrow \quad W = \sqrt{2(19)-13} = \sqrt{25} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 5}$$

**24.-** Efectuando las operaciones en cada paréntesis, tendremos:

$$\frac{n}{S} = \left(1+\frac{1}{C}\right)\left(1+\frac{1}{C+1}\right)\left(1+\frac{1}{C+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{C+n-1}\right)$$

$$\frac{n}{S} = \left(\frac{C+1}{C}\right)\left(\frac{C+2}{C+1}\right)\left(\frac{C+3}{C+2}\right)\ldots\left(\frac{C+n}{C+n-1}\right)$$

De donde obtenemos: $\dfrac{n}{S} = \dfrac{C+n}{C} \Rightarrow n\left(\dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{C}\right) = 1$

Pero: $S = 9k$ , $C = 10k \Rightarrow n\left(\dfrac{1}{9k} - \dfrac{1}{10k}\right) = 1 \Rightarrow k = \dfrac{n}{90} \Rightarrow S = (9k)^{\circ} \quad \therefore \quad \boxed{S = \left(\dfrac{n}{10}\right)^{\circ}}$

**25.-** Los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, se relacionan por: $S = \dfrac{9C}{10}$ ; $R = \dfrac{\pi C}{200}$ . . . (1)

De la condición: $\dfrac{S}{2} = 5R + 52$ . . . (2)

Reemplazando (1) en (2) y simplificando:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}C = 5 \cdot \frac{\pi C}{200} + 52 \Rightarrow \frac{9}{20}C - \frac{1}{40} \cdot \frac{22}{7}C = 52 \Rightarrow \left(\frac{126-22}{280}\right)C = 52$$

$$C = \frac{(52)(280)}{104} \qquad \therefore \qquad \boxed{C = 140}$$

**26.-** Sean S y C los números que representan los grados de un ángulo en el sistema sexagesimal y centesimal, entonces se tendrá que:

Media armónica: $Ma = \dfrac{2}{\dfrac{1}{S} + \dfrac{1}{C}} = \dfrac{2SC}{S+C}$

Media geométrica: $Mg = \sqrt{SC}$

Y según condición del problema: $Ma = 36(Mg)^2$

Reemplazando y simplificando: $\dfrac{2SC}{S+C} = 36. \left(\sqrt{SC}\right)^2 \Rightarrow S + C = \dfrac{1}{18}$ . . . (1)

Además se sabe que: $S = 180\dfrac{R}{\pi}$ ; $C = 200\dfrac{R}{\pi}$ . . . (2)

Reemplazando (2) en (1): $180\dfrac{R}{\pi} + 200\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{1}{18} \Rightarrow R = \dfrac{\pi}{18(380)} \quad \therefore \quad \boxed{R = \dfrac{\pi}{6840} \; rad}$

**27.-** Se sabe que los números que representan los grados en los tres sistemas de medición angular se relacionan por:

$$S = \frac{180R}{\pi} \quad ; \quad C = \frac{200R}{\pi} \quad \ldots (1)$$

Según condición del problema: $C + 3S = \dfrac{37}{\pi}R^2 \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2): $200\dfrac{R}{\pi} + 3\left(\dfrac{180R}{\pi}\right) = \dfrac{37}{\pi}R^2$

$$\Rightarrow \quad 740\frac{R}{\pi} = \frac{37R^2}{\pi}$$

Simplificando: $\boxed{R = 20}$

**28.-** Para un mismo ángulo, representamos:

- El número de segundos sexagesimales: $3\,600\,.\,S \quad ...(i)$
- El número de minutos centesimales: $100\,.\,C \quad ...(ii)$

En los cuales:

S: Número de grados sexagesimales

C: Número de grados centesimales

y se relacionan: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} \vee (S = 9.a \wedge C = 10.a)$

(*) Reemplazamos según el dato: $3\,600\,S + 100.C = 367\,400$

Simplificando: $36.S + C = 3\,674 \quad \Rightarrow \quad 36(9a) + (10a) = 3\,674$

Resolviendo: $a = 11 \quad \Rightarrow \quad S = 99$

(*) En la fórmula general de conversión: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{R}{\pi}$

Se obtiene: $R = \dfrac{99.\pi}{180} \quad \therefore \quad \boxed{R = \dfrac{11\pi}{20}}$

**29.-** Como en el caso anterior, representamos:

- El número de minutos sexagesimales: $60.S \quad ...(i)$
- En número de minutos centesimales: $100.C \quad ...(ii)$
- Relación entre S y C: $\dfrac{C}{10} = \dfrac{S}{9} \quad ...(iii)$

En el dato reemplazamos (i) y (ii): $(60.S)\,.\,(100.C) = \dfrac{(a+b)^2 + 8ab}{18.a.b}$

Efectuando: $6\,000.S.\left(\frac{10.S}{9}\right) = \frac{a^2+b^2+2ab+8ab}{18.ab}$

$$S_2 = \frac{1}{120\,000}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+10\right)$$

Siendo: $a > 0 \wedge b > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

De los cual: $\frac{1}{120\,000}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+10\right) \geq \frac{1}{120\,000}.(12)$

$$S^2 \geq \frac{1}{10\,000} \quad ; \quad (S > 0)$$

$$\Rightarrow \; Smin = \frac{1}{100} \quad ; \measuredangle\, min = \frac{1°}{100} = \frac{3\,600''}{100} = \boxed{36''}$$

**30.-** Según el dato: $a = 60.S \wedge b = C$

En los cuales: S es el número de grados sexagesimales, C es el número de grados centesimales.

Que se relacionan: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \wedge (S = 9\,.\,a \wedge C = 10\,.\,a)$

Reemplazando en lo que se pide: $W = \frac{4.(60.S)-16(C)}{C}$

$$W = \frac{240(9a)-16(10a)}{(10.a)}$$

Efectuando: $\boxed{W = 200}$

**31.-** Según dato: $3\,600\,.\,S + 100\,.\,C = 33\,400 \ldots$ (i)

De la fórmula general de conversión: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \ldots$ (ii).

De ii, reemplazamos en i: $3\,600.\left(180.\frac{R}{\pi}\right) + 100\left(200.\frac{R}{\pi}\right) = 33\,400$

Simplificando «100», se obtiene: $6\,480\,R + 200\,R = 334.\pi$

$$\Rightarrow \quad 6\,680.R = 334.\pi$$

Efectuando: $\boxed{R = \frac{\pi}{20}}$

**32.-** Los números S, C y R se relacionan por: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} = \dfrac{20R}{\pi} = k \Rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10k \\ R = \dfrac{\pi k}{20} \end{cases}$

Reemplazando en W tenemos: $W = \dfrac{\dfrac{60}{\pi}.\dfrac{\pi k}{20}.\sqrt{19}}{\sqrt{(10k)^2 - (9k)^2}} \Rightarrow W = \dfrac{3k\sqrt{19}}{k\sqrt{19}} \quad \therefore \quad \boxed{W = 3}$

**33.-** Reemplazando las relaciones entre S, C y R del ejercicio anterior en el dato se tiene:

$$10(9k) + 3(10k) + \frac{\pi k}{20} = 2400 + \pi \quad \Rightarrow \quad 120k + \frac{\pi k}{20} = 2\,400 + \pi$$

$$k(2\,400 + \pi) = 20(2\,400 + \pi) \quad \Rightarrow \quad k = 20$$

Por lo tanto: $R = \dfrac{\pi}{20}(20) \quad \therefore \quad \boxed{R = \pi}$

**34.-** Reemplazando las relaciones entre S, C y R del ejercicio anterior en el dato se tiene:

$$mS + nC = 20R \quad \Rightarrow \quad 9m + 10n = \pi \quad \ldots (1)$$

$$6m + 5n = \frac{7\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad 12m + 10n = \frac{7\pi}{6} \quad \ldots (2)$$

Restando (2) - (1), obtenemos: $3m = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow m = \dfrac{\pi}{18}$

Reemplazando en (1): $9\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + 10m = \pi \Rightarrow n = \dfrac{\pi}{20}$

De este modo se tendrá que: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\pi/18}{\pi/20} \quad \therefore \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{10}{9}$

**35.-** Reemplazando las relaciones entre S, C y R del ejercicio anterior en el dato se tiene:

$$\left(\frac{6}{S}\right)^{\left(\frac{20}{3C}\right)^{\left(\frac{\pi}{30R}\right)}} = \left(\frac{2}{3k}\right)^{\left(\frac{2}{3k}\right)^{\left(\frac{2}{3k}\right)}} = 3^{26}.\left(\frac{10\pi k - \pi k}{9\pi k - 6\pi k}\right) \Rightarrow \left(\frac{2}{3k}\right)^{\left(\frac{2}{3k}\right)^{\left(\frac{2}{3k}\right)}} = 3^{26}.\,3 = 3^{2^7}.\,3^{3^3}$$

Por analogía: $\dfrac{2}{3k} = 3 \Rightarrow k = \dfrac{2}{9} \Rightarrow R = \dfrac{\pi}{20}k \quad \therefore \quad \boxed{R = \dfrac{\pi}{90}}$

**36.-** Nuestra estrategia consistirá en expresar matemáticamente las condiciones del problema. Luego:

$$\frac{\frac{C-S}{2}}{7SC}=\frac{C+S}{133R} \quad\Rightarrow\quad \frac{C-S}{C+S}=\frac{14SC}{133R}\ \ldots(*)$$

Reemplazando $S = 9k$, $C = 10k$, $R = \frac{\pi}{20}k$ en (*) obtenemos:

$$\frac{1}{19}=\frac{14(90k^2)}{133\left(\frac{\pi}{20}k\right)} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{\pi}{3600}$$

Finalmente se tendrá que: $R=\frac{\pi}{20}k=\frac{\pi}{20}\left(\frac{\pi}{3\,600}\right)$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{R=\frac{\pi^2}{72\,000}}$

**37.-** Recordemos que todo número real positivo verifica las siguientes relaciones:

$$\text{Si}: x>0 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=1 \quad\ldots(*)$$

De la condición del problema: $\sqrt{R-1}+\frac{1}{\sqrt{R-1}}=2 \quad\ldots(**)$

Reemplazamos (*) en (**): $\sqrt{R-1}=1 \quad\Rightarrow\quad R=2$

Sea: "θ" el ángulo $\Rightarrow\ \theta=2rad \ \Rightarrow\ \theta=2rad.\frac{180°}{\pi\ rad}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\theta=\left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ}}$

**38.-** Sustituyendo las relaciones conocidas: $S = 9k$, $C = 10k$, $R = \frac{\pi}{20}k$, en la condición dada:

$$x^2(C-S)=x^4-x^2+1 \quad\Rightarrow\quad C-S=x^2+\frac{1}{x^2}-1 \quad\Rightarrow\quad k=x^2+\frac{1}{x^2}-1$$

Empleando la propiedad (*) deducida en el ejercicio anterior, diremos que:

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\,,\,x\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{1}{x^2}-1\geq 1 \quad\Rightarrow\quad k\geq 1 \quad\Rightarrow\quad k_{min}=1 \quad\therefore\quad \boxed{R=\frac{\pi}{20}}$$

**39.-** Sustituyendo las relaciones conocidas: $S = 9k$, $C = 10k$, $R = \frac{\pi}{20}k$, en la condición dada:

$$\sqrt[3]{\frac{162(9k)(10k)\left(\frac{\pi k}{20}\right)}{\pi}}=\frac{12\left(\frac{\pi k}{20}\right)(10k-9k)}{5\pi}$$

Simplificando: $\sqrt[3]{9^3.k^3} = \dfrac{3k^2}{25} \Rightarrow 9k = \dfrac{3k^2}{25} \Rightarrow k = 75$

Luego podemos afirmar que: $R = \dfrac{\pi}{20}(75) \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{R = \dfrac{15\pi}{4}\,rad}}$

**40.**- Sustituyendo las relaciones conocidas: $S = 9k$, $C = 10k$ , $R = \dfrac{\pi}{20}k$, en cada ecuación:

En (1): $\left(\dfrac{20}{9\pi}\cdot\dfrac{\pi}{20}k.9k\right)^3 + \left(\dfrac{10k}{10}\right)^6 = x \Rightarrow 2k^6 = x$

En (2): $\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{20}k.10k\right)^4 + \left(\dfrac{9k}{9}\right)^8 = y \Rightarrow 2k^8 = y$

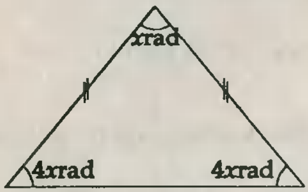
Ý reemplazando estos resultados en la condición dada:

$$yS^2 = xC^2 \Rightarrow 2\,k^8\,.\,S^2 = 2k^6C^2 \Rightarrow 2\,k^8\,.\,(9k)^2 = 2k^6(10k)^2$$

$$\Rightarrow 81k^{10} = 100k^8 \Rightarrow k = \frac{10}{9} \Rightarrow S^\circ = (9k)^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{S^\circ = 10^\circ}}$$

***FIGURAS GEOMÉTRICAS***

**41.**- Elaboramos un gráfico con los datos del problema:

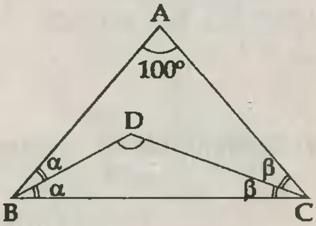



De acuerdo con la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo, tendremos:

$$xrad + 4xrad + 4xrad = \pi rad$$

$\Rightarrow 9xrad = \pi rad \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{9} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{x = \dfrac{\pi}{9}\,rad}}$

**42.**- De acuerdo con la propiedad del ángulo formado por dos bisectrices interiores, planteamos que:




$$m\angle D = 90^\circ + \frac{m\angle A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m\angle D = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$$

$$\therefore \quad m\angle D = 140^\circ\,.\,\frac{\pi\,rad}{180^\circ} = \frac{7\pi}{9}\,rad$$

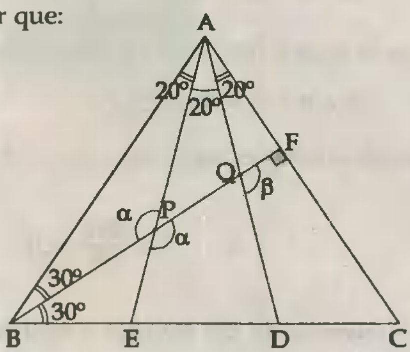
**43.-** Tratándose de un triángulo se verifica que: $\quad A + B + C = 180° \ldots (*)$

Donde: $\quad m\angle C = \dfrac{\pi}{3}\,rad = \dfrac{180°}{3} = 60° \quad ; \quad m\angle B = x^g \,.\, \dfrac{9°}{10^g} = \left(\dfrac{9x}{10}\right)^{\circ}$

$$m\angle A = 9°18' = 9° + 18' . \frac{1°}{60'} = 9° + 0{,}3° = 9{,}3°$$

En $(*)$ : $9{,}3° + \left(\dfrac{9x}{10}\right)^{\circ} + 60° = 180° \Rightarrow \dfrac{9x}{10} = 110{,}7° \qquad \therefore \qquad \boxed{x = 123}$

**44.-** Como el $\Delta ABC$ es equilátero, se debe cumplir que:




$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$$

$\triangle AFQ$: $\quad \beta = 90° + 20° = 110°$

$\Delta BPA$: $30° + \alpha + 20° = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 130°$

Luego: $\alpha + \beta = 240° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 240° \,.\, \dfrac{\pi}{180°}\,rad$

$$\therefore \qquad \boxed{\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}\,rad}$$

**45.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar cada una de las medidas de los ángulos al sistema sexagesimal. Luego:

$$A = \frac{50}{9}\,x^g . \frac{9°}{10^g} = 5x° \quad ; \quad B = 8x° \quad ; \quad C = \frac{7\pi x}{180}\,rad \,.\, \frac{180°}{\pi rad} = 7x°$$

Por tratarse de un triángulo se cumple: $\qquad m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

Reemplazando las equivalencias en esta relación, tendremos:

$$\Rightarrow \quad 5x° + 8x° + 7x° = 180° \quad \Rightarrow \quad 20x° = 180° \qquad \therefore \quad \boxed{x = 9}$$

**46.-** De acuerdo con la información que brinda la figura, podemos establecer que:

$$3\theta = x° \ldots (1) \quad ; \quad 5\theta = y^g \ldots (2)$$

(1) ÷ (2): $\quad \dfrac{3}{5} = \dfrac{x°}{y^g} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{5} = \dfrac{x°}{y^g} \,.\, \dfrac{10^g}{9°}$

Eliminando las unidades y despejando: $\qquad \dfrac{x}{y} = \dfrac{27}{50} \qquad \ldots (3)$

Transformando la condición dada: $M = \dfrac{2x - y}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1 \ldots (4)$

Reemplazamos (3) en (4): $M = 2\left(\dfrac{27}{50}\right) - 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{2}{25}}$

**47.-** Convirtiendo las medidas de los ángulos dados al sistema radial, tendremos:

$$m\angle B = 88^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{22\pi}{45} rad \quad \Rightarrow \quad m\angle D = 80^g \cdot \frac{\pi rad}{200^g} = \frac{2\pi}{5} rad$$

Como la figura ABCD es un cuadrilátero, sus ángulos interiores verifican:

$$A + B + C + D = 2\pi rad$$

Reemplazando las equivalencias: $A + \dfrac{22\pi}{45} rad + \dfrac{3\pi}{4} rad + \dfrac{2\pi}{5} rad = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad A + \frac{59\pi}{36} = 2\pi \quad \therefore \quad \boxed{A = \frac{13\pi}{36} rad}$$

**48.-** Convirtiendo los ángulos a radianes:

$$m\angle B = \frac{40}{3} x^g \cdot \frac{\pi\ rad}{200^g} = \frac{x}{15} \pi rad \quad ; \quad m\angle C = 10x^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{x\pi}{18} rad$$

$$m\angle D = 6x^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{x\pi}{30} rad$$

Por ser la figura un cuadrilátero : $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 2\pi rad$

$$\Rightarrow \frac{2\pi x}{45} rad + \frac{x}{15} x rad + \frac{\pi x}{18} rad + \frac{\pi x}{30} rd = 2\pi\ rad \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{5} x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

Reconocemos que el mayor ángulo: $m\angle B = \dfrac{10\pi}{15} rad \quad \therefore \quad \boxed{m\angle B = \dfrac{2\pi}{3}}$

**49.-** Sean: $\alpha$, $\beta$, $\theta$, y $\delta$ los ángulos internos de un cuadrilátero

Y según condición del problema: $\left.\begin{array}{l} \alpha = x - 2r \\ \beta = x - r \\ \theta = x \\ \delta = x + r \end{array}\right\}$ (Progresión Aritmética)

Se sabe que: $\alpha + \beta + \theta + \delta = 360^\circ = 400^g \quad \Rightarrow \quad x - 2r + 3x = 400g \ldots (1)$

Estableciendo las equivalencias entre el sistema centesimal y el sistema M, se tendrá:

$$50^g <> 40^M \quad \Rightarrow \quad 400^g <> 320^M \quad \ldots (2)$$

Por dato: $\qquad x - 2r = 5^M \qquad \ldots (3)$

(2) y (3) en (1): $\qquad 5^M + 3x = 320^M \Rightarrow x = 105^M \qquad \ldots (4)$

(4) en (3): $\qquad 105^M - 2r = 5^M \quad \Rightarrow \quad r = 50^M$

Luego el mayor ángulo será: $\qquad \boxed{\delta = x + r = 155^M}$

**50.-** Sean los siguientes las medidas de los ángulos del hexágono:

$$a \;\; ; \;\; b = a - r \;\; ; \;\; c = a - 2r \;\; ; \;\; d = a - 3r \;\; ; \;\; e = a - 4r \;\; ; \;\; f = a - 5r$$

Donde $r$ es la razón de la progresión aritmética. Asimismo en un hexágono se cumple:

Suma ángulos interiores = $180°(n - 2)$ , $n$ = #de lados , donde: $n = 6$

$$\Rightarrow \quad a + (a - r) + (a - 3r) + (a - 3r) + (a - 4r) + (a - 5r) = 180°(4)$$

$$\Rightarrow \quad 6a - 15r = 720° \ldots (*)$$

Pero por dato: $a = 125°$ ; luego de (*) se puede despejar $r$ , tal que:

$$r = \frac{6a - 720°}{15} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{6(125°) - 720°}{15} \quad \Rightarrow \quad r = 2°$$

Luego, el menor ángulo es: $\qquad f = a - 5r = 125° - 5(2°) = 115°$

$$\Rightarrow \quad f = 115° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} \qquad \therefore \qquad \boxed{f = \frac{23\pi}{36} rad}$$


## LONGITUD DE ARCO

01.- Para determinar la longitud del arco necesitamos convertir el ángulo dado en *radianes*, para ello utilizaremos la equivalencia dada y una regla de tres simple:

$$1\,rad \;\text{———}\; 57°17'44''$$

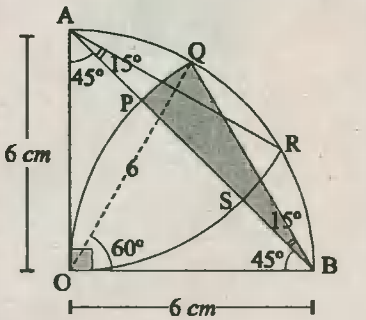
$$\theta \;\text{———}\; 171°53'12''$$

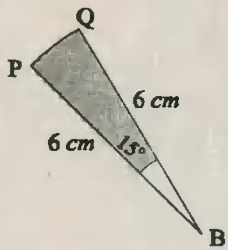
$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1\,rad.171°53'12''}{57°17'44''} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1\,rad(171°51'+\overbrace{120''+12''})}{57°17'44''}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1\,rad(3)(57°17'44'')}{57°17'44''} \qquad \Rightarrow \quad \theta = 3\,rad$$

Como: $L = \theta.R \quad \Rightarrow \quad L = (3)(40\,cm) \quad \therefore \quad \boxed{L = 120\,cm}$

02.- Unimos O con Q y Q con B, logrando formar el triángulo equilátero OQB, de donde: $m\angle OBQ = 60°$. Además: $m\angle OBA = 45°$, de este modo: $m\angle ABQ = 15°$.



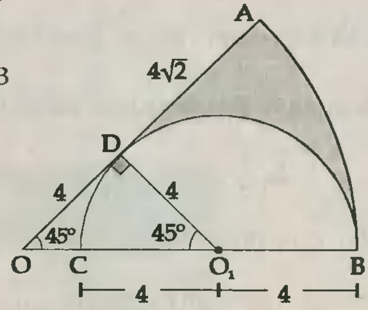




De la figura : $\quad L_{\widehat{PQ}} = L_{\widehat{SR}} \quad \Rightarrow \quad M = 2L_{\widehat{PQ}}$

Como: $\quad 15° <> \frac{\pi}{12}\,rad \quad \Rightarrow \quad L_{\widehat{PQ}} = \frac{\pi}{12}\cdot(6\,cm) = \frac{\pi}{2}\,cm$

$$\Rightarrow \quad L_{\widehat{PQ}} = \frac{\pi}{2}\,cm \quad \therefore \quad \boxed{M = \pi\,cm}$$

**03.-** En el $\triangle ODO_1$: $O_1D = OD = 4 \quad \Rightarrow \quad OO_1 = 4\sqrt{2}$




En el sector circular AOB tenemos : $OB = OO_1 + O_1B$

$$\Rightarrow OA = OB = 4\sqrt{2} + 4 \quad \Rightarrow \quad AD = 4\sqrt{2}$$

$$L_{\widehat{AB}} = OA \cdot \frac{\pi}{4} = 4(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad L_{\widehat{AB}} = \pi(\sqrt{2} + 1)$$

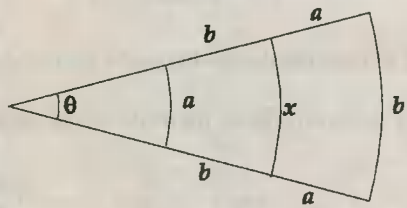
En el sector circular $BDO_1$ tenemos :

$$m \angle BO_1D = 135° = 3\frac{\pi}{4}\ rad \quad \Rightarrow \quad L_{\widehat{BD}} = O_1B \cdot 3\frac{\pi}{4} = 4\left(3\frac{\pi}{4}\right) = 3\pi$$

$$\Rightarrow p_{\text{reg. somb.}} = L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{BD}} + L_{AD} = \pi(\sqrt{2} + 1) + 3\pi + 4\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{p_{\text{reg. somb.}} = \pi(\sqrt{2} + 4) + 4\sqrt{2}\,)}$$

**04.-** Recordando la fórmula especial:

$$\theta = \frac{L_2 - L_1}{a}$$




La aplicamos dos veces en el caso dado:

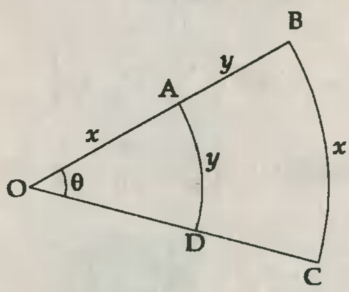
$$\theta = \frac{x-a}{b} = \frac{b-x}{a} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}}$$

**05.-** Nuestra estrategia consistirá en atribuir a cada arco una medida según las condiciones establecidas:

$$x = OA = L_{\widehat{BC}} \quad ; \quad y = AB = L_{\widehat{AD}}$$

Haciendo un gráfico y aplicando la propiedad del problema anterior, se tendrá:

$$\theta = \frac{x-y}{y} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{x}{y} - 1$$




Donde: $y = x\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{\theta} - 1$

$$\Rightarrow \quad \theta^2 + \theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Pero: $\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) rad}$

06.- La expresión "M" se puede escribir así: $\quad M = \sqrt{\left(\frac{z-y}{c}\right)\cdot\left(\frac{y-x}{b}\right)} - \frac{x}{a} \quad \ldots (*)$

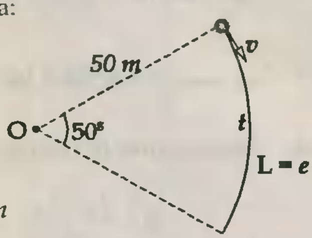
Aplicando la propiedad de los ejercicios anteriores en el gráfico dado se tendrá:

$$\frac{y-x}{b} = \theta \ldots (1) \quad ; \quad \frac{z-y}{c} = \theta \ldots (2) \quad ; \quad \frac{x}{a} = \theta \quad \ldots (3)$$

De (1), (2) y (3) en (*), la expresión queda como:

$$M = \sqrt{\theta.\theta} - \theta = \sqrt{\theta^2} - \theta \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 0}$$

07.- Elaboramos un gráfico según el enunciado del problema:




Dato: $\quad 2R = 100\ m \quad \Rightarrow \quad R = 50\ m$

Luego: $\quad \theta = 50^g . \frac{\pi rad}{200^g} = \frac{\pi}{4} rad \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} rad$

De este modo la distancia recorrida será: $\quad e = \frac{\pi}{4} . 50 = \frac{25\pi}{2}\ m$

Y recordando la fórmula de la rapidez:

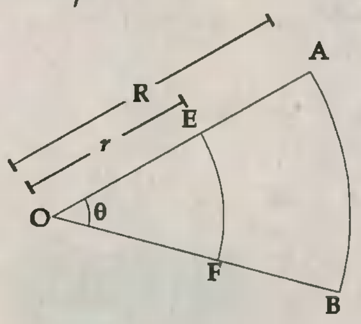
$$v = \frac{e}{t} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{25\pi/2\ m}{20\ s} \qquad \therefore \qquad \boxed{v = \frac{5\pi}{8} m/s}$$

***ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR***

08.- Sea OA = R ; OE = $r$ ; $m \angle$ AOB = $\theta$. Entonces de la condición del problema, se tiene:

$$\frac{\text{Área sector AOB}}{\text{Área sector EOF}} = \frac{16}{1} = \frac{\frac{R^2\theta}{2}}{r^2\frac{\theta}{2}} \qquad \Rightarrow \quad 16 = \frac{R^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{4} \quad \ldots (1)$$

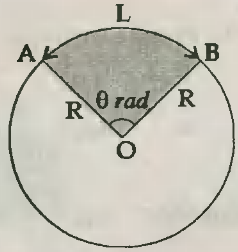



También: $\quad \frac{L_{\widehat{EF}}}{L_{\widehat{AB}}} = \frac{r\theta}{R\theta} = \frac{r}{R} \quad \ldots (2)$

De (1) y (2) : $\quad \boxed{\frac{L_{\widehat{EF}}}{L_{\widehat{AB}}} = \frac{1}{4}}$

**09.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar el dato en una expresión cuyos términos podamos reconocer como áreas de regiones circulares:

$$R^2\theta + RL = 80$$



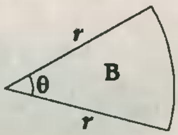

Multiplicando por 1/2: $\underbrace{\frac{1}{2}R^2\theta}_{A} + \underbrace{\frac{RL}{2}}_{A} = 40$

Donde: Área sector circular AOB $= \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}RL$

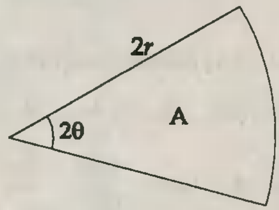
$\Rightarrow \quad 2A = 40 \qquad \therefore \quad \boxed{A = 20\ m^2}$

**10.-** Haciendo el cálculo de las áreas de cada sector circular según las condiciones del problema, tendremos:

$B = \dfrac{\theta r^2}{2}$

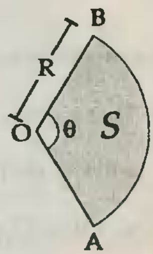



$\wedge \quad A = \dfrac{(2\theta)(2r)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 4\theta r^2$




Luego: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{4\theta r^2}{\dfrac{\theta r^2}{2}} \qquad \therefore \quad \boxed{\dfrac{A}{B} = 8}$

**11.-** En el sector circular AOB:




$$OB = OA = R = \sqrt{\frac{36}{7}}\ cm$$

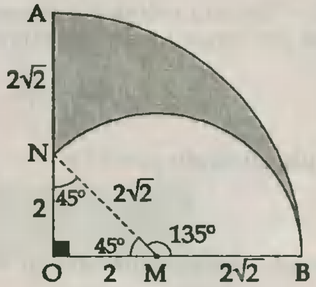
$$m\angle AOB = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \left[\frac{b^g(5b)^m}{(15b)^m}\right]^\circ \quad \ldots\ (1^g = 100^m)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \left[\frac{(100b)^m + (5b)^m}{(15b)^m}\right]^\circ = \left(\frac{105b}{15b}\right)^\circ \Rightarrow \theta = 7^\circ . \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{7\pi}{180} rad$$

Luego el área del sector será: $S = \dfrac{R^2\theta}{2} \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{36}{7}}\right)^2 . \dfrac{7\pi}{180}$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} . \frac{36}{7} . \frac{7\pi}{180} \qquad \therefore \quad \boxed{S = \frac{\pi}{10} cm^2}$$

## *ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR*




**12.-** Recordemos que: $135° = \dfrac{3\pi}{4}\, rad$

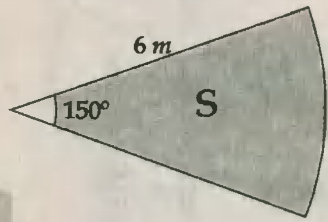
$$\Rightarrow \quad L_{\widehat{NB}} = \frac{3\pi}{4}(2\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\, m$$

También: $L_{\widehat{AB}} = \dfrac{\pi}{2}(2 + 2\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad L_{\widehat{AB}} = \pi + \sqrt{2}\,\pi$

Luego el perímetro de la región sombreada es:

$$L = AN + L_{\widehat{NB}} + L_{\widehat{AB}} = 2\sqrt{2} + \pi + \sqrt{2}\,\pi + \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi \quad \therefore \quad \boxed{L = \left(2\sqrt{2} + \pi + \frac{5\sqrt{2}}{2}\pi\right)}$$

**13.-** Graficamos según el enunciado del problema:

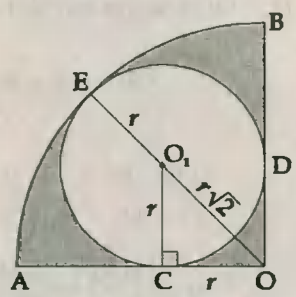



Donde: $R = 6\ m \quad ; \quad \theta = 150°$

$$\Rightarrow \theta = 150° \cdot \frac{\pi rad}{180°} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{6}\, rad$$

Como: $S = \dfrac{\theta R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{5\pi}{6} \cdot \dfrac{6^2}{2}\, m^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 15\pi\ m^2}$

**14.-** Reconocemos que: $O_1C = OC = O_1E = r$




$\Rightarrow \triangle O_1CO$ es Isósceles.

Por el teorema de Pitágoras: $O_1O = r\sqrt{2}$

También: $OE = O_1O + O_1E \quad \Rightarrow \quad OE = r\sqrt{2} + r$

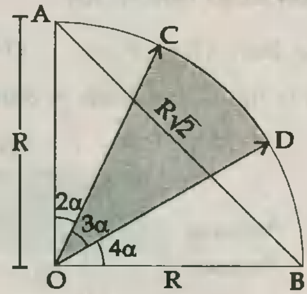
Pero: $AO = OE \quad \Rightarrow \quad r(\sqrt{2} + 1) = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 8(\sqrt{2} - 1)\, cm$

Luego: **Área sector sombreado** = **Área sector circular AOB** − **Área círculo**

$$S = \frac{\pi}{4}AO^2 - \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\pi}{4}\cdot 8^2 - \pi[8(\sqrt{2} - 1)]^2$$

$$\Rightarrow \quad S = 16\pi - \pi[192 - 128\sqrt{2}] \quad \therefore \quad \boxed{S = \pi[128\sqrt{2} - 176]\ cm^2}$$

**15.-** De la figura tenemos:




$$2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{18}$$

Según dato: $AB = 3\sqrt{2} \;\Rightarrow\; R = 3$

Área región sombreada: $S = \frac{1}{2}R^2(3\alpha)$

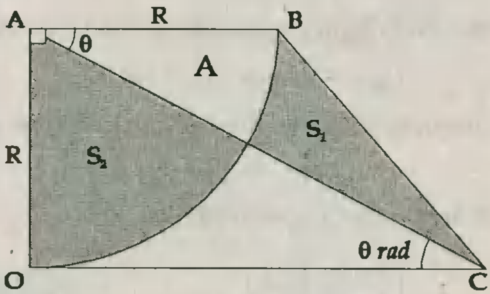
$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}(9)\left(3.\frac{\pi}{18}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{S = \frac{3\pi}{4}m^2}$$

**16.-** De la figura: $A = \dfrac{\theta R^2}{2}$

Luego: $S_2 + A = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{R^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad S_2 = \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

Asimismo (*): $S_1 + A = \dfrac{R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \dfrac{R^2}{2}(1 - \theta)$

Según condición: $13S_1 = 7S_2$

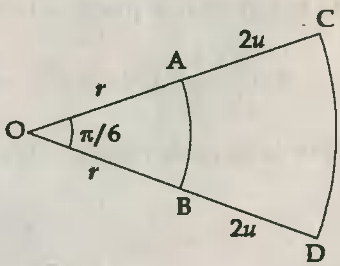



$$\Rightarrow \quad 13.\frac{R^2}{2}(1 - \theta) = 7.\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\Rightarrow \; 13 - 13\theta = \frac{7\pi}{2} - 7\theta \;\Rightarrow\; 6\theta = 13 - \frac{7\pi}{2}$$

Pero: $7\pi = 22 \quad \Rightarrow \quad 6\theta = 2 \qquad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{1}{3}}$

**17.-** De acuerdo con el dato se tiene:



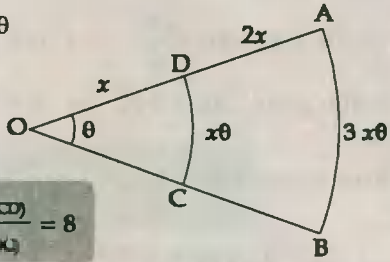

$S_{AOB} = 3\pi \;\Rightarrow\; \dfrac{\pi}{6}.\dfrac{r^2}{2} = 3\pi \;\Rightarrow\; r = 6$

Luego: $L_{\overset{\frown}{CD}} = \theta\,.\,OC = \dfrac{\pi}{6}(8)$

$$\therefore \quad \boxed{L_{\overset{\frown}{CD}} = \frac{4\pi}{3}}$$

### *TRAPECIO CIRCULAR*

**18.-** Sea: $OD = x \;\Rightarrow\; OA = 3x \;\wedge\; m\angle DOC = \theta$

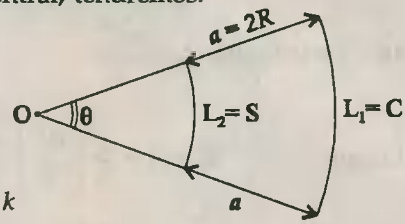



En la figura mostrada podemos reconocer que:

$$L_{\overset{\frown}{CD}} = x\theta \quad \wedge \quad L_{\overset{\frown}{AB}} = 3x\theta$$

$$\Rightarrow \frac{A_{TC(ABCD)}}{A_{SC(DOC)}} = \frac{\left(\dfrac{x\theta + 3x\theta}{2}\right).2x}{\dfrac{1}{2}x^2\theta} = \frac{4x^2\theta}{\dfrac{x^2\theta}{2}} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{A_{TC(ABCD)}}{A_{SC(DOC)}} = 8}$$

**19.-** Aplicando la fórmula especial para el ángulo central, tendremos:



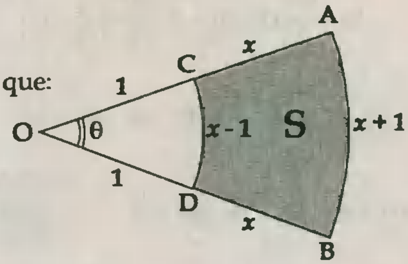

$$\theta = \frac{L_1 - L_2}{a}$$

Sustituyendo los datos: $\theta = \dfrac{C - S}{2R} \; \ldots (*)$

Del Cap. 1 recordamos que: $C = 10k$ ; $S = 9k$ ; $R = \dfrac{\pi}{20}k$

Al reemplazar en (*): $\theta = \dfrac{k}{\dfrac{\pi}{10}k} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \dfrac{10}{\pi}}$

**20.-** En la figura mostrada se puede reconocer que:




$$L_{\overset{\frown}{AB}} = OA \;\Rightarrow\; \theta = 1\ rad$$

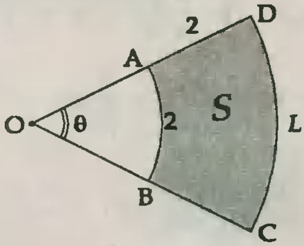
Luego, en el sector circular COD, se debe cumplir que:

$$x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$$

El área de un trapecio circular será:

$$S = \left(\frac{x + 1 + x - 1}{2}\right).\, x = x^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 4}$$

**21.-** Del gráfico se puede establecer que el área del trapecio está dado por:

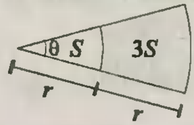



$$S = \left(\frac{L + 2}{2}\right).\, 2 = 5\,m^2 \;\Rightarrow\; L = 3\,m$$

Y por la fórmula especial: $\theta = \dfrac{L - 2}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\theta = \frac{1}{2}\ rad}$$

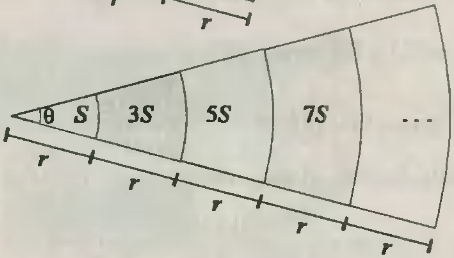
**22.-** Nuestra estrategia consistirá en determinar el área de las regiones sombreadas en función de las magnitudes θ y $r$. Veamos:




$$S = \frac{\theta r^2}{2} \quad \ldots (*)$$

$$\Rightarrow \quad S_T = 2\theta r^2 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 2\theta r^2 - \frac{\theta r^2}{2} = 3S$$

Análogamente calculamos las demás regiones, tal como se muestra en la figura.



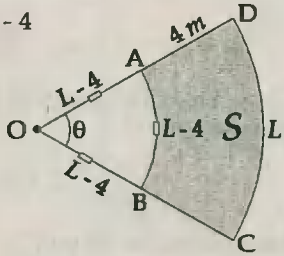

Luego la región sombreada es: A = 10S

Y de (*) : $A = 10\left(\frac{\theta r^2}{2}\right) \quad \therefore \quad \boxed{A = 5\theta r^2}$

**23.-** Sustituyendo los datos en la figura, reconocemos que:

$\sphericalangle_{AOB}$: $OA = L_{\widehat{AB}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 1\ rad \quad \Rightarrow \quad OD = L_{\widehat{CD}} = L \Rightarrow \quad L_{\widehat{AB}} = L - 4$

Luego usando la formula del área del trapecio circular:




$$S = \left(\frac{L + L - 4}{2}\right)4 = 2(2L - 4)$$

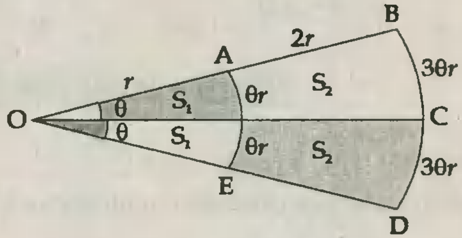
Pero: $S = 20 \quad \Rightarrow \quad 2(2L - 4) = 20$

$$\therefore \quad \boxed{L = 7}$$

**24.-** Puesto que la figura dada es simétrica respecto de OC, podemos establecer que:

$$2S_1 = \frac{(2\theta)\, r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{\theta r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

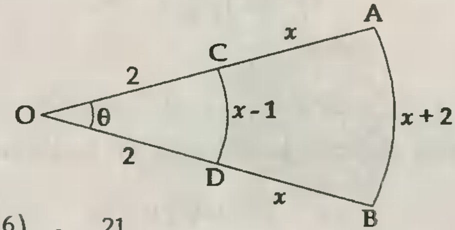
Y del trapecio circular ABDE:




$$2S_2 = \left(\frac{2\theta r + 6\theta r}{2}\right)2r \quad \Rightarrow \quad S_2 = 4\,\theta r^2 \ldots (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1): $\boxed{\frac{S_2}{S_1} = 8}$

**25.-** Sea θ la medida del ángulo central.




$AO = 2 + x\ ;\ \widehat{AB} = x + 2 \quad \therefore \quad \theta = 1\ rad$

En el sector COD: $2 = x - 1 \Rightarrow \quad x = 3$

El área $S_D$ calcular: $S_D = \left(\frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2}\right) . AC = \left(\frac{2 + 6}{2}\right) . 3 = \frac{21}{2}$

Aplicando la fórmula especial se cumple: $\theta = \dfrac{(x+2)-(x-1)}{x} \Rightarrow \theta = \dfrac{3}{x}$ ... (1)

Y del sector OCD, se verifica que: $\theta = \dfrac{x-1}{2}$ ... (2)

De (1) y (2) tenemos: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{2} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

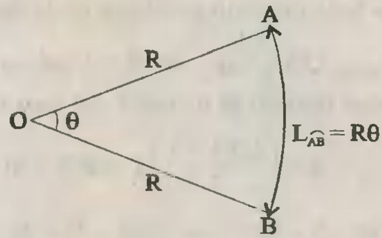
Como (1) = (2): $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (absurdo)} \\ x = 3 \end{cases}$

Finalmente el área del trapecio circular viene dado por:

$$A = \left[\frac{(x+2)+(x-1)}{2}\right].x \Rightarrow A = \left(\frac{5+2}{2}\right).3 \quad \therefore \quad \boxed{A = \frac{21}{2}}$$

**26.**- De la condición del problema tenemos:

$$2R + R\theta = 6 \Rightarrow \theta = \frac{6-2R}{R} \ \ldots (1)$$




De la figura mostrada, el área del sector circular está dado por:

$$\frac{1}{2}R^2\theta = 2 \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) : $\dfrac{1}{2}R^2.\dfrac{(6-2R)}{R} = 2$

$$6R - 2R^2 = 4 \Rightarrow R^2 - 3R + 2 = 0 \Rightarrow (R-2)(R-1) = 0 \Rightarrow R = 2\,m \text{ ó } R = 1m$$

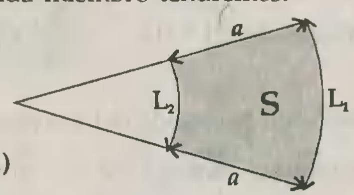
$$\Rightarrow \theta = \frac{6-2(2)}{2} = 1\ rad \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{6-2(1)}{1} = 4\ rad$$

$\therefore$ **El mayor ángulo central mide 4 *rad*.**

**27.**- Por dato : $L_1 + L_2 + 2a = P$

Transformando esta expresión, multiplicando por $\frac{a}{2}$, cada miembro tendremos:

$$\underbrace{\left(\frac{L_1+L_2}{2}\right)a}_{S} + a^2 = \frac{P}{2}.a$$



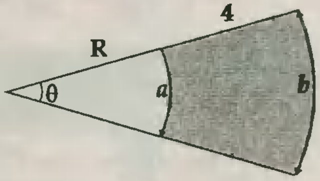

$\Rightarrow 2a^2 + 2S = Pa \Rightarrow 2a^2 - Pa + 2S = 0$ (Ec. cuadrática)

Esta ecuación tendrá solución en los reales, si: discriminante $\geq 0$

$$\Rightarrow P^2 - 16S \geq 0 \Rightarrow S \leq \frac{P^2}{16} \quad \therefore \quad \boxed{S_{máx} = \frac{P^2}{16}}$$

**28.-** Nuestra estrategia consistirá en determinar el valor mínimo que tiene el área del trapecio circular. Luego determinaremos los valores de $x$ que lo hacen posible, a continuación calcularemos los valores de $a$ y $b$ que se corresponden con dicho valor y finalmente se determinará la medida del ángulo central $\theta$.

En el gráfico mostrado calculamos las longitudes de arco:




$$a = R\theta \quad \wedge \quad b = (R+4)\theta = \underbrace{R\theta}_{a} + 4\theta$$

$$\Rightarrow \quad b = a + 4\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{b-a}{4} \quad \ldots (1)$$

A continuación calculamos el área S del trapecio circular: $S = \left(\frac{a+b}{2}\right).4 \quad \ldots (2)$

Sustituyendo los datos para $a$ y $b$, se obtiene:

$$S = 2[210 - 40x + 7x^2 - 30x] \quad \Rightarrow \quad 14x^2 - 140x + 420 - S = 0 \quad \ldots (*)$$

Puesto que el discriminante debe ser $\geq 0$ , tendremos:

$$(-140)^2 - 4(14)(420 - S) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 350 \geq 420 - S \quad \Rightarrow \quad S \geq 70 \quad \therefore \quad S_{mín} = 70$$

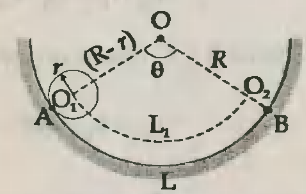
Sustituyendo este valor en (*), descubriremos el valor de $x$:

$$14x^2 - 140x + 350 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Con este valor encontramos: $a = 210 - 40(5) = 10 \quad \wedge \quad b = 7(5)^2 - 30(5) = 25$

Finalmente reemplazamos en (1) y obtenemos: $\theta = \frac{25-10}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 3{,}75}$

***APLICACIONES MECÁNICAS***




**29.-** En el sector OAB, se verifica que:

$$L = \theta R \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{L}{R}$$

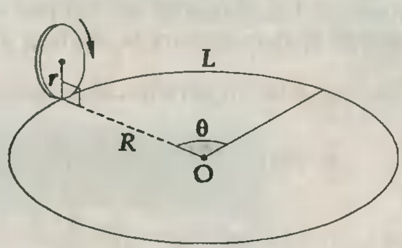
En el sector $O_1OO_2$: $L_1 = \theta(R - r) \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{L}{R}(R - r) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{L_{CR}}{p}$

donde: $L_{CR}$ = longitud recorrida por el centro de la rueda.

Y: $\quad p$ = perímetro de la circunferencia del móvil.

Luego: $n = \frac{L_1}{2\pi r} = \frac{\frac{L(R-r)}{R}}{2\pi r} \quad \therefore \quad \boxed{n = \frac{L(R-r)}{2\pi R r}}$

30.- Convertimos θ a *radianes* y a continuación determinamos el número de vueltas de la rueda para lo cual reconocemos que su centro recorre una trayectoria idéntica a la circunferencia del piso.

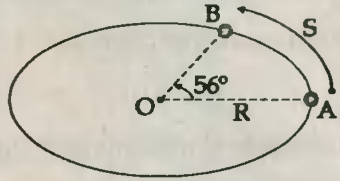



$$\theta = \theta \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{\theta\pi}{180}\ rad$$

Luego: $L = \frac{\theta\pi}{180} \cdot R \Rightarrow n = \frac{L}{2\pi r}$

$$\Rightarrow n = \frac{\frac{\theta\pi}{180}R}{2\pi r} \quad \therefore \quad \boxed{n = \frac{\theta R}{360\, r}}$$

31.- Sea $s$ la longitud de arco recorrido por el atleta.




Como: $s = vt \Rightarrow s = (17{,}6 \cdot \frac{5m}{18s}).36s \Rightarrow s = 176\ m$

Sea: $\theta = m\angle AOB = 56^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{14\pi}{45}\ rad$

Pero recordando que: $s = \theta R \Rightarrow R = \frac{s}{\theta} = \frac{176\ m}{\frac{14}{45}\cdot\frac{22}{7}} = \frac{176}{\frac{44}{45}} \Rightarrow R = 180\ m$

El diámetro de la circunferencia es igual a: $\boxed{2R = 360\ m}$

32.- Los discos A y B tienen un punto de contacto, entonces se cumple :

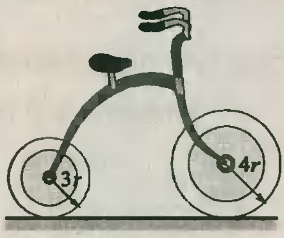
$$\theta_B \cdot r_B = \theta_A \cdot r_A \Rightarrow \theta_B = \theta_A \cdot \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \theta_B = 90^\circ \cdot \frac{3}{5}$$

Los discos B y C tienen un eje común de giro (O), entonces se cumple :

$$\theta_C = \theta_B = 90^\circ \cdot \frac{3}{5} = 54^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\theta_C = 54^\circ}$$

33.- Rueda menor gira $8\pi rad$

$1v$ ____ $2\pi\ rad$
$\rightarrow n_1 = 4\ vueltas$
$n_1$ ____ $8\pi\ rad$




Entre las ruedas se verifica que: $n_1 \cdot R_1 = n_2 \cdot R_2$

Donde: $R_1 = 3r \quad \wedge \quad R_2 = 4r$

Luego: $(4v)(3r) = n_2(4r) \quad \therefore \quad \boxed{n_2 = 3v}$

**34.-** Por estar en contacto las poleas 1 y 2 verifican: $L_1 = L_2 \Rightarrow \theta_1 \cdot r_1 = \theta_2 r_2$

$$\Rightarrow \quad \theta(6) = \theta_2(9) \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{2}{3}\theta$$

Entre las poleas (2) y (3) que tienen eje común, se cumple: $\theta_2 = \theta_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \frac{2}{3}\theta$

Como: $L = \theta . r$ , tendremos: $L_3 = \theta_3 \cdot r_3 \Rightarrow L_3 = \frac{2}{3}\theta(12) = 8\theta$

Finalmente la distancia que recorre el bloque es igual a la longitud de la cuerda que se envuelve en la polea 3:

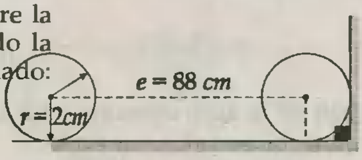
$$\therefore \quad \boxed{L_3 = 8\theta}$$

**35.-** Desde que las ruedas recorren la misma longitud, se verificará que el número de vueltas que estas dan, se encuentran relacionadas del siguiente modo:

Rueda menor: $n_1 = \dfrac{L}{2\pi r} \quad \wedge \quad$ Rueda mayor: $n_2 = \dfrac{L}{2\pi R}$

De la condición: $n_1 - n_2 = \dfrac{L}{8\pi r} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{L}{2\pi r} - \dfrac{L}{2\pi R} = \dfrac{L}{8\pi r} \quad \therefore \quad \boxed{\dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{4}}$

**36.-** Se oberva que el centro de la rueda recorre la distancia: $e = 90 - 2 = 88\ cm$. Luego aplicando la relación conocida para el número de vueltas dado:



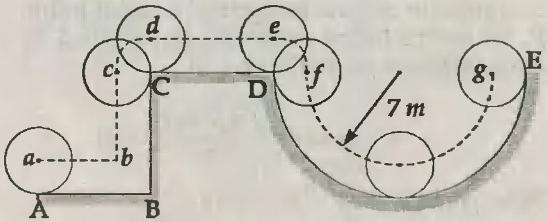

$$\Rightarrow \quad n = \frac{e}{2\pi r} = \frac{88}{2\left(\frac{22}{7}\right)(2)} \quad \therefore \quad \boxed{n = 7}$$

**37.-** Nuestra estrategia consiste en determinar la longitud «$L$» que recorre el centro de la rueda y que de acuerdo con los datos se puede determinar a partir de la relación conocida:

$n = \dfrac{L}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{L}{2\left(\frac{22}{7}\right)} \Rightarrow L = \dfrac{44n}{7}$ , donde: $L = \overline{ab} + \overline{bc} + L_{\overset{\frown}{cd}} + \overline{de} + L_{\overset{\frown}{ef}} + L_{\overset{\frown}{fg}}$

$$\Rightarrow L = 4 + 4 + 1\left(\frac{\pi}{2}\right) + 5 + 1\left(\frac{\pi}{2}\right) + 7(\pi)$$

$$L = 13 + 8\pi = 13 + 8\left(\frac{22}{7}\right) = 267$$

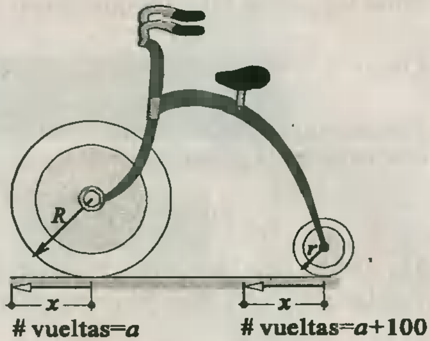



Luego: $\dfrac{44n}{7} = 267 \quad \therefore \quad \boxed{44n = 267}$

**38.-** Datos: $R = 70\ cm$ $\quad r = 20\ cm$ $\quad$ Incógnita: $x = ?$

Debemos reconocer que la relación entre el número de vueltas y los radios es inversamente proporcional, luego:

| VUELTAS | | RADIOS |
|---|---|---|
| $a$ | .......................... | 70 |
| $a + 100$ | .......................... | 20 |




$$\frac{a}{a+100} = \frac{20}{70} \quad \Rightarrow \quad 70a = 20(a + 100)$$

Y efectuando operaciones, obtendremos: $a = 40$

A partir de la siguiente relación, sabemos que:

$$\#\ \text{vueltas} = \frac{\text{espacio recorrido}}{2\pi(\text{radio})}$$

De donde : Espacio recorrido = $2\pi$ (radio). # vueltas

Utilizando "cualquiera" de las ruedas obtendremos el espacio recorrido solicitado:

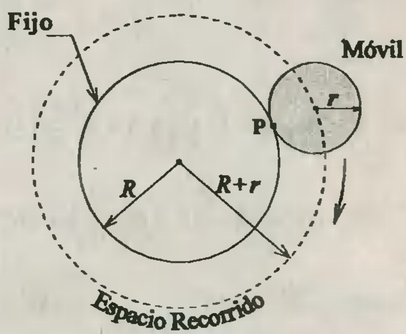
$$x = 2\pi\,(70\ cm)\ .\ 40\ .\ \frac{1\,m}{100cm} \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi.\ 28m$$

Haciendo uso de la aproximación para $\pi$ dada en la condición, tendremos :

$$x = 2\left(\frac{22}{7}\right)28\ m \quad \Rightarrow \quad x = 176\ m$$

Finalmente: **espacio recorrido = 176 *m***

**39.-** Se sabe que: $\#\ \text{vueltas} = \dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{Perímetro de una vuelta}}$




Luego en relación al disco móvil diremos que, cuando este retorna por primera vez al punto P, su centro habrá recorrido la longitud de circunferencia de radio $(R + r)$

$$\#\ \text{vueltas} = \frac{2\pi(R+r)}{2\pi r}\ \ ....\ (*)$$

Pero, como: $R = 6a \quad$ y $\quad r = a$

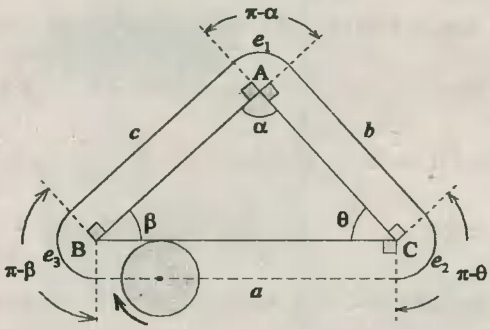
Luego al reemplazar en (*)

Se tendrá que: $\quad \text{\# de vueltas} = \frac{7a}{a} \quad \therefore \quad$ **# de vueltas = 7**

**40.-** Para determinar el número de vueltas solicitado calcuremos primero las vueltas que da sobre los lados del triángulo

$$\text{\# vueltas } 3 = \frac{\text{espacio}}{2\pi r} = \frac{\text{perímetro}}{2\pi(1)} = \frac{44}{2\pi} \quad \therefore \quad \text{\# vueltas} = \frac{44}{2\left(\frac{22}{7}\right)} = 7$$

Ahora calcularemos las vueltas que da la rueda en los vértices del triángulo . Para ello basta con apreciar la figura adjunta en donde se nota que la rueda da un número de vueltas que viene dado por la suma de los giros que ella experimenta cuando pasa de un lado a otro, teniendo en los vértices a su centro de giro.




$$n = \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \theta = 3\pi - (\alpha + \beta + \theta)$$

$$n = 3\pi - \pi = 2\pi \; rad$$

$$n = 1 \text{ vuelta}$$

Finalmente, el número de vueltas que en total da la rueda el recorrer el perímetro del triángulo, será:

**# vueltas = 8**

**Método abreviado**

Bajo el supuesto que lo anterior se ha comprendido, te sugiero resolver lo mismo del sgte. modo:

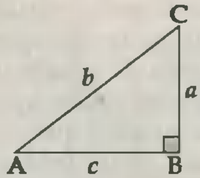
$$\#V = \frac{e}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \#V = \frac{\sum \text{lados} + \sum e}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \#V = \frac{(a+b+c)+2\pi r}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \quad \#V = \frac{(a+b+c)}{2\pi r} + 1 \quad \Rightarrow \quad \#V = \frac{44}{2.\frac{22}{7}.1} + 1 \quad \therefore \quad \boxed{\#V = 8}$$

# CAP. 3 Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos

**01.-** En base a la figura construida, reemplazamos en la condición dada:

$$\tan A + \tan C = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + c^2 = 2ac \quad \ldots (1)$$



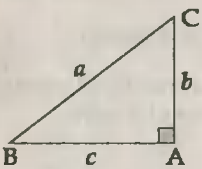

Pero: $b^2 = a^2 + c^2 \ldots (2)$

De (2) en (1): $b^2 = 2ac \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{ac} = \frac{2ac}{ac}$

Luego: $\boxed{\csc A \,.\, \csc C = 2}$

**02.-** Sean : BC = $a$, AC = $b$, BA = $c$ . Sustituyendo en la condición dada:

$$\cot C + \cot B = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2 + c^2}{bc} = 4 \ldots (*)$$




Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

En (*): $\frac{a^2}{bc} = 4 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4ab \quad \Rightarrow \quad a^4 = 16b^2c^2$

Calculando y reemplazando $a^4$ en: F = 16 sen B. sen C. cos B. cos C

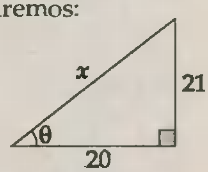
$$F = 16\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{16b^2c^2}{a^4} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{16b^2c^2}{16b^2c^2} \quad \therefore \quad \boxed{F = 1}$$

**03.-** Construimos un triángulo rectángulo en base al dato de: $\tan \theta = \frac{21}{20}$

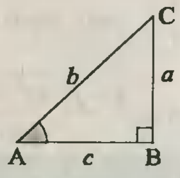
Donde: $x^2 = 21^2 + 20^2 \quad \Rightarrow \quad x = 29$

Reemplazando los valores de las RT en la expresión para M, tendremos:

$$M = \frac{1}{3}\left(\frac{21}{29}\right) + 4\left(\frac{20}{29}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = 3}$$



04.- Se pide: $W = \tan C - \dfrac{\cot^2 A}{2} \ \ldots (1)$



Graficamos el ⊿ con los datos:

Teorema de Pitágoras: $a^2 + c^2 = b^2 \ \ldots (*)$

$$a^2 = b^2 - c^2$$

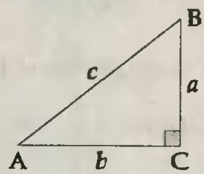
Reemplazando en: 2 sen A = csc C , $2.\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow 2.a.c = b^2 \ \ldots (2)$

En (1): $W = \dfrac{c}{a} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = \dfrac{2ac}{2a^2} - \dfrac{c^2}{2.a^2}$ , de (2)

$$W = \frac{b^2 - c^2}{2.a^2} = \frac{a^2}{2.a^2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{2}}$$

05.- Sean $a$, $b$ y $c$ los lados del triángulo rectángulo en progresión aritmética, tal que:

$a = x - r$ , $b = x$ y $c = x + r$



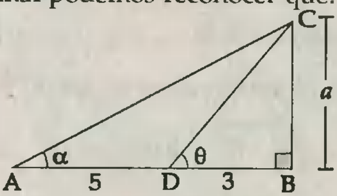
Como: $b > a \Rightarrow B > A$

También se cumple que: $c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow (x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2 \Rightarrow 4xr = x^2 \Rightarrow x = 4r$

Luego : $\sec B = \dfrac{x+r}{x-r} = \dfrac{5r}{3r} \quad \therefore \quad \boxed{\sec B = \dfrac{5}{3}}$

06.- Sustituyendo los datos en el gráfico original podemos reconocer que:



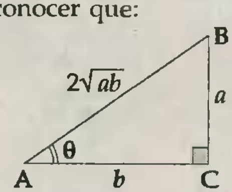
En el ⊿ABC: $\tan \alpha = \dfrac{a}{8}$

En el ⊿CBD: $\tan \theta = \dfrac{a}{3}$

Sustituyendo en la condición dada:

$\tan \alpha + \tan \theta = 77 \Rightarrow \dfrac{a}{8} + \dfrac{a}{3} = 77 \Rightarrow \dfrac{11a}{24} = 77 \Rightarrow a = 7(24) \quad \therefore \quad \boxed{a = 168}$

07.- Sustituyendo los datos en el gráfico original podemos reconocer que:



En el ⊿ACB tenemos: $\tan \theta = \dfrac{a}{b} < 1$

Por el teorema de Pitágoras se cumple que:

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 4\frac{a}{b}\ ; \quad \text{pero } \tan\theta = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \tan^2\theta - 4\tan\theta + 1 = 0$$

Resolviendo: $\tan\theta = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

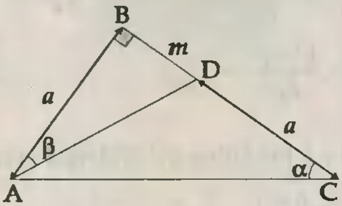
$$\tan\theta = \underbrace{2+\sqrt{3}}_{>2} \quad \text{ó} \quad \tan\theta = \underbrace{2-\sqrt{3}}_{<1} \qquad \therefore \quad \boxed{\tan\theta = 2 - \sqrt{3}}$$

**08.-**Sustituyendo los datos en el gráfico original podemos reconocer que:

$$\cot\alpha = \frac{m+a}{a} \quad \wedge \quad \tan\beta = \frac{m}{a}$$

Luego: $\quad M = \dfrac{m+a}{a} - \dfrac{m}{a}$

$\therefore \quad \boxed{M = 1}$




**09.-** Construyendo el rectángulo ABCD y trazando su diagonal $\overline{AC}$, nos muestra que:

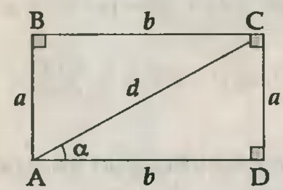
$AB = DC = a \quad , \quad BC = AD = b \quad , \quad m\angle CAD = \alpha$

Según condición: $\cot\alpha = \dfrac{b}{a} = 1{,}05 = \dfrac{105}{100} = \dfrac{21}{20} = \dfrac{21k}{20k}$

El perímetro es: $2a + 2b = 492 \quad \Rightarrow \quad 2(20k) + 2(21k) = 492$

$$\Rightarrow \quad 82k = 492 \quad \Rightarrow \quad k = 6$$

$\Rightarrow a = 20k = 20(6) = 120\ m \quad \wedge \quad b = 21k = 21(6) = 126\ m$



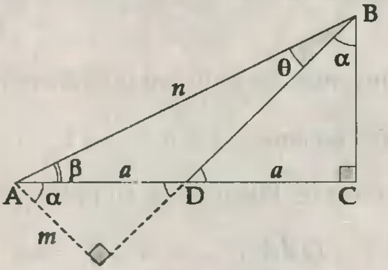

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle$ADC tenemos:

diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{120^2 + 126^2} \Rightarrow d = \sqrt{30276} \qquad \therefore \quad \boxed{d = 174\ m}$

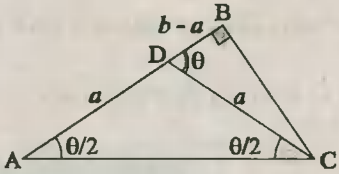
**10.-** De A trazamos una perpendicular a la prolongación de $\overline{BD}$, observándose que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m}{n} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{m}{a} \quad , \quad \cos\beta = \frac{2a}{n}$$

Luego: $\quad M = \dfrac{2\frac{m}{n}}{\frac{m}{a}\cdot\frac{2a}{n}} \qquad \therefore \quad \boxed{M = 1}$



**11.-** Completamos los lados del ◺, con los datos:

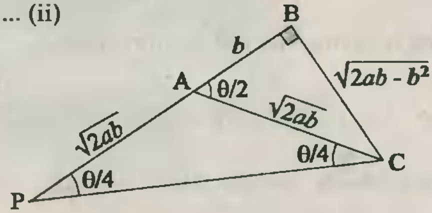



En el ◺ DBCA hallamos BC: $(BC)^2 = (a)^2 - (b - a)^2$

$$BC = \sqrt{2ab - b^2} \quad \text{... (i)}$$

En el ◺ ABC, hallamos AC: $(AC)^2 = (BC)^2 + b^2$

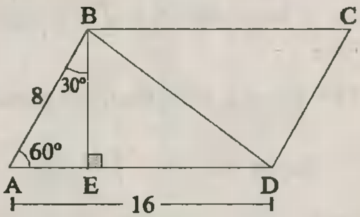
$$AC = \sqrt{2ab} \quad \text{... (ii)}$$




En el ◺ ABC, prolongamos AB, como se muestra para obtener la mitad de $\left(\frac{\theta}{2}\right)$; es decir « $\frac{\theta}{4}$ »

En el ◺ ABC: $\cot\left(\frac{\theta}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2ab} + b}{\sqrt{2ab} - b^2}$

**12.-** Sea el paralelogramo ABCD: AB = 8 $m$ , AD = 16 $m$. BD es la longitud menor.




En el ◺AEB: se traza $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ , además para ángulos notables de 30° y 60° se cumple:

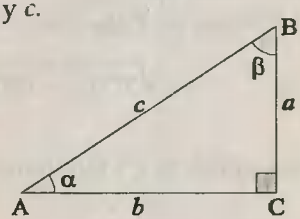
$$AE = 4\ m \ ,\ BE = 4\sqrt{3}\ m$$

En el ◺BED tenemos: $ED = AD - AE = 16 - 4 = 12$

Por el teorema de Pitágoras: $BD = \sqrt{BE^2 + ED^2}\ \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = \sqrt{192}\ m$

$$BD = \sqrt{64(3)}\ m \qquad \therefore \qquad BD = 8\sqrt{3}\ m$$

**13.-** Sea el ◺ al que se refiere el enunciado, de casos $a$, $b$ y $c$.




Según datos: $a + b + c = 132$ ... (i)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6050 \text{ ... (ii)}$$

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$ ... (iii)

De (iii) en (ii): $c^2 + c^2 = 6050$, de lo cual: $c = 55$

El problema se reduce a resolver: $a + b = 77$ ... , de (i)

$$a^2 + b^2 = 3025 \text{ ... , (iii)}$$

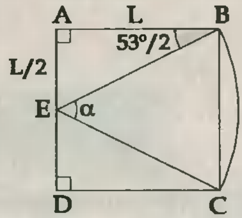
Haciendo: $a = 77 - b$, reemplazando: $(77 - b)^2 + b^2 = 3025$

Resolviendo: $b = 44 \Rightarrow a = 33 \Rightarrow \alpha$, es el menor ángulo agudo.

$$\therefore \qquad \tan\alpha = \frac{33}{44} = \frac{3}{4}$$

**14.-** Reconocemos que el $\triangle$BAE es de los notables: $m\angle ABE = \dfrac{53^\circ}{2} = m\angle ECD$

Por el teorema de Pitágoras:




$$\overline{BE} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{5}\,\frac{L}{2}$$

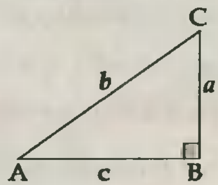
Sea $\alpha$ la medida del ángulo central:

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2m\angle ABE = 53^\circ \quad \Rightarrow \alpha = 53^\circ.\frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{53\pi}{180}\,rad$$

En el sector circular BEC: BE = EC (radio del arco $\overset{\frown}{BC}$)

$$\Rightarrow \quad L_{\overset{\frown}{BC}} = \overline{BE}\,.\,\alpha = \sqrt{5}\,\frac{L}{2}\cdot\frac{53\pi}{180} \qquad \therefore \qquad \boxed{L_{\overset{\frown}{BC}} = \frac{53\sqrt{5}\pi L}{360}}$$

**15.-** En el $\triangle$ABC dado se puede identificar que:




$$\tan A = \frac{a}{c} \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{12}{11}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{12}\cdot\frac{a}{c} \quad \ldots (*)$$

De la otra condición: $10(6c - b) = b - c \Rightarrow 60c - 10b = b - c$

$$61c = 11b \Rightarrow \quad \frac{c}{b} = \frac{11}{61} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{b} = \frac{11k}{61k}$$

De donde deducimos que: $c = 11k \quad \wedge \quad b = 61k$

Por el teorema de Pitágoras: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow (61k)^2 = a^2 + (11k)^2$

$$a = \sqrt{3721k^2 - 121k^2} \quad \Rightarrow \quad a = 60k$$

Reemplazando en (*) tendremos: $x = \dfrac{11}{12}\cdot\dfrac{60k}{11k} \qquad \therefore \qquad \boxed{x = 5}$

***R.T. RECÍPROCAS***

**16.-** Efectuando la multiplicación indicada en la expresión original, tendremos:

$$M = \sqrt{\frac{4\cos 36^\circ.\sec 36^\circ + 9\,\text{sen}\,54^\circ.\sec 36^\circ}{\cot 18^\circ.\cot 72^\circ}}$$

Por la propiedad de las razones recíprocas se tiene que: $\cos 36^\circ.\sec 36^\circ = 1$

Por la propiedad de las Co-razones trigonométricas: $\sec 36° = \csc 54°$ $\wedge$ $\cot 72° = \tan 18°$

$\Rightarrow$ $\text{sen } 54° . \sec 36° = \text{sen } 54° . \csc 54° = 1$

$\Rightarrow$ $\cot 18° . \cot 72° = \cot 18° . \tan 18° = 1$

Sustituyendo estos productos en (*): $M = \sqrt{\dfrac{4(1)+9(1)}{1}}$ $\therefore$ $\boxed{M = \sqrt{13}}$

**17.-** Aplicando la propiedad de las Co-razones, se tendrá que:

$$(+)\begin{cases} \text{sen}10° = \cos 80° \\ \text{sen}20° = \cos 70° \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \text{sen}70 = \cos 20 \\ \text{sen}80 = \cos 10 \end{cases}$$

$\text{sen } 10° + \text{sen } 20° + \ldots + \text{sen } 80 = \cos 10° + \cos 20° + \ldots + \cos 80°$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{sen}10° + \text{sen}20° + \ldots + \text{sen}80°}{\cos 10° + \cos 20° + \ldots + \cos 80°} = 1$$

Reemplazando en la condición del problema: $\dfrac{\sec(3x - 15°)}{2} = 1$ $\Rightarrow \sec(3x - 15°) = 2$

Pero: $\sec 60° = 2$ $\Rightarrow$ $3x - 15° = 60°$ $\therefore$ $\boxed{x = 25°}$

**18.-** Tenemos: $\text{sen }(50° + x) - \cos(40° - x) + \tan(x + 10°) . \tan(x + 40°) = 1$ ... (*)

Por la propiedad de las Co-razones: $\text{sen }(50° + x) = \cos(40° - x)$

Transponiendo términos: $\text{sen }(50° + x) - \cos(40° - x) = 0$

Reemplazando en (*) obtenemos: $\tan(x + 10°) . \tan(x + 40°) = 1$

Transponiendo términos: $\tan(x + 10°) = \dfrac{1}{\tan(x + 40°)}$ ... (**)

Por razones recíprocas: $\dfrac{1}{\tan(x + 40°)} = \cot(x + 40°)$

Reemplazando en (**) : $\tan(x + 10°) = \cot(x + 40°)$

Por co-razones trigonométricas: $x + 10° + x + 40° = 90°$ $\Rightarrow$ $x = 20°$

Luego en : $M = \sec(3.20°) + \cot^2 \dfrac{3(20°)}{2} = 2 + (\sqrt{3})^2$ $\therefore$ $\boxed{M = 5}$

**19.-** De la condición (1) despejamos: $\operatorname{sen}(x+y)=\cos(85^\circ-y-z)$

Por la propiedad de co-razones: $x+y+85^\circ-y-z=90^\circ \Rightarrow x-z=5^\circ \ldots (3)$

De la condición (2) despejamos: $\tan 2x = \dfrac{1}{\tan 3z}$

Por razones recíprocas: $\tan 2x = \cot 3z$

Luego por la propiedad de co-razones: $2x+3z=90^\circ \ldots (4)$

Hacemos: 3(3) + (4): $\left.\begin{matrix} 3x-3z=15^\circ \\ 2x+3z=90^\circ \end{matrix}\right\}+ \quad \Rightarrow \quad 5x=105^\circ \quad \Rightarrow \quad x=21^\circ$

Sustituyendo en (3): $21^\circ - z = 5^\circ \quad \Rightarrow \quad z=16^\circ$

Luego: $M=\tan[2(21^\circ)+11^\circ]-\tan(21^\circ+16^\circ)$

$$\Rightarrow \quad M=\tan 53^\circ-\tan 37^\circ=\frac{4}{3}-\frac{3}{4} \quad \therefore \quad \boxed{M=\frac{7}{12}}$$

**20.-** Por la propiedad de Co - razones tenemos:

$$\left.\begin{matrix} \tan 89^\circ=\cot 91^\circ \\ \tan 88^\circ=\cot 92^\circ \\ \tan 87^\circ=\cot 93^\circ \\ \vdots \qquad \vdots \\ \tan 46^\circ=\cot 44^\circ \end{matrix}\right\} \text{(multiplicando)} \Rightarrow \quad B=\cot 1^\circ.\cot 2^\circ.\cot 3^\circ.\ldots\cot 44^\circ$$

Luego:

$$AB=\underbrace{(\tan 1^\circ.\cot 1^\circ)}_{1}.\underbrace{(\tan 2^\circ.\cot 2^\circ)}_{1}\underbrace{(\tan 3^\circ.\cot 3^\circ)}_{1}\ldots\underbrace{(\tan 44^\circ.\cot 44^\circ)}_{1}.\underbrace{(\tan 45^\circ)}_{1} \quad \Rightarrow \quad AB=1$$

Finalmente tendremos que: $M=(1)^2.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M=1}$

**21.-** Según las propiedades de las co-razones: $\operatorname{sen} 10^\circ = \cos 80^\circ$

Esto nos permite expresar M en términos del seno, así tendremos:

$$\Rightarrow \quad M=\frac{ab(\operatorname{sen}10^\circ-1)+a^2-b^2\operatorname{sen}10^\circ}{ab(\operatorname{sen}10^\circ+1)+a^2+b^2\operatorname{sen}10^\circ} \quad \Rightarrow \quad M=\frac{ab\operatorname{sen}10^\circ-ab+a^2-b^2\operatorname{sen}10^\circ}{ab\operatorname{sen}10^\circ+ab+a^2+b^2\operatorname{sen}10^\circ}$$

Usando la propiedad de las proporciones, tendremos:

$$\frac{1+\text{M}}{1-\text{M}}=\frac{1ab\,\text{sen}10°+2a^2}{2ab+2b^2\,\text{sen}10°}\Rightarrow\frac{1+\text{M}}{1-\text{M}}=\frac{2a(\cancel{b\,\text{sen}10°+a})}{2b(\cancel{a+b\,\text{sen}10°})}\quad\therefore\quad\boxed{\frac{1+\text{M}}{1-\text{M}}=\frac{a}{b}}$$

**22.-** Como: $m\angle\text{B}=90°\Rightarrow m\angle\text{A}+m\angle\text{C}=90°$

Luego por la propiedad de las co-razones: sen A = cos C

Reemplazando en (*) : $(\text{sen A})^{(\text{sen A})}+(\text{sen A})^{(\text{sen A})}=\dfrac{2.3^{\frac{2}{3}}}{3}$

$$\Rightarrow 2(\text{sen A})^{(\text{sen A})}=2\,.\,3^{\frac{2}{3}-1}\Rightarrow(\text{sen A})^{(\text{sen A})}=3^{\frac{2}{3}-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Finalmente por analogía deducimos que: $\boxed{\textbf{sen A = 1/3}}$

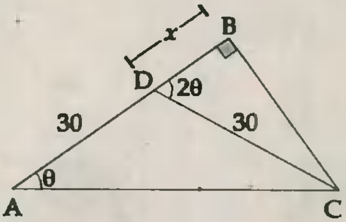
**23.-** Como: sen (39° - θ) = cos (14° + 3θ) ⇒ 39° - θ + 14° + 3θ = 90° ⇒ 2θ = 37°

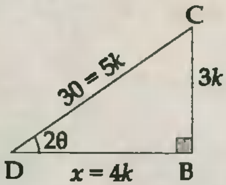
Luego en el ⊿DBC (notable)

Se observa: $5k=30$

$\Rightarrow\quad k=6$

$\Rightarrow\quad x=4k\quad\therefore\quad\boxed{x=24}$




**24.-** Por co-razones trigonométricas: tan 80° = cot 10° ∧ sec 70° = csc 20°

Entonces en la condición del problema: $\csc(\theta+20°)=\underbrace{2\tan10°.\cot20°}_{1}\cdot\underbrace{\text{sen}20°.\csc20°}_{1}$

$\Rightarrow\quad\csc(\theta+20°)=2\quad\Rightarrow\quad\theta=10°$

Luego: $\text{M}=\cos60°+\tan45°\quad\Rightarrow\quad\text{M}=\dfrac{1}{2}+1\quad\therefore\quad\boxed{\text{M}=\dfrac{3}{2}}$

**25.-** De la condición (1): $5a+2b+c+20°-3a=90°\quad\Rightarrow\quad 2a+2b+c=70°$

$\Rightarrow\quad 2(a+b)+c=70°$

Sustituyendo en (*) la condición (3): $2(30°)+c=70°\quad\Rightarrow\quad c=10°$

De la condición (2): $4d+e=40°+e\quad\Rightarrow\quad d=10°$

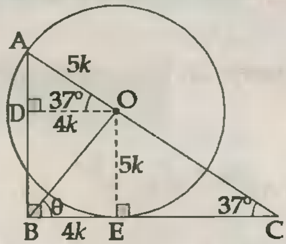
Finalmente remplazamos estos valores en la expresión dada:

$$D = \tan\left[(10° + 2(10°) + \frac{3}{2}(10°)\right] = \tan 45° \qquad \therefore \quad \boxed{D = 1}$$

***R.T. DE ÁNGULOS NOTABLES***

**26.-** Colocando los datos en la figura original, reconocemos que: ⊾ODA es notable.

$\Rightarrow \qquad OD = 4k \quad \wedge \quad OA = 5k$



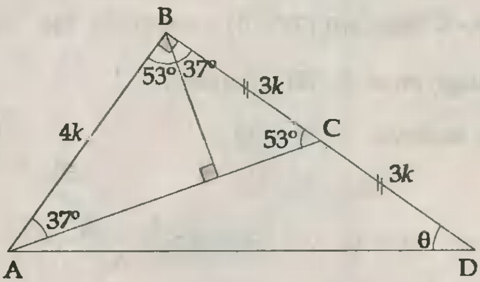

También se observa que: $OD = BE = 4k$

$OA = DE = 5k$

Finalmente en el ⊾OEB: $\boxed{\tan\theta = \frac{5}{4}}$

**27.-** Reconociendo que el ⊾ABC es notable, anotamos los valores de sus lados y ángulos:

$AB = 4k \quad , \quad BC = 3k$




Por dato: $BC = CD \quad \Rightarrow \quad CD = 3k$

Luego ⊾ABC: $\tan\theta = \frac{4k}{6k}$

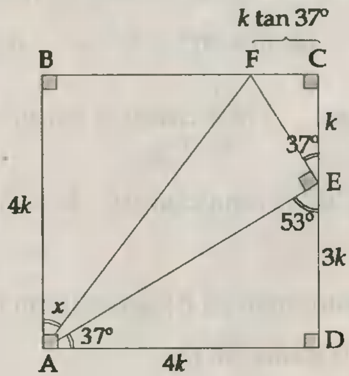
$\therefore \quad \boxed{\tan\theta = \frac{2}{3}}$

**28.-** Del ⊾ADE Notable, afirmamos que: $DE = 3k \quad \wedge \quad AD = 4k$

En el cuadrado ABCD: $CD = AD = 4k \Rightarrow \quad CE = k$

De la figura: $BF = 4k - k\tan 37°$

$\Rightarrow \qquad BF = 4k - \frac{3}{4}k = \frac{13}{4}k$




Luego: ⊾ABF: $\tan x = \frac{BF}{AB} = \frac{\frac{13k}{4}}{4k}$

$\therefore \quad \boxed{\tan x = \frac{13}{16}}$

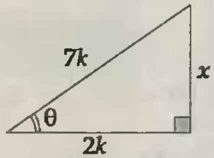
**29.-** Reemplazando los valores notables en la ecuación dada tendremos:

$$2x\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - x \quad \Rightarrow \quad 2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - x$$

Efectuando obtenemos: $x = 2 - x$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{x = 1}$

**30.-** Recordando que: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ , $\text{sen } 30^\circ = 1/2$, reemplazamos en la expresión dada:

$$\sec\theta = \tan^2 60^\circ + \text{sen } 30^\circ \Rightarrow \sec\theta = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}$$




$$\sec\theta = \frac{7}{2} = \frac{\text{Hi}}{\text{C.A}} \text{ ("}\theta\text{" es agudo)}$$

Pero: $x^2 = 49k^2 - 4k^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 45k^2 \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{5}\,k$

Luego: $\tan\theta = \dfrac{x}{2k} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{5}\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{2} + \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{M = 8}$

**31.-** Recordando las R.T de los ángulos de 30°- 45° - 60°, reemplazamos en la expresión dada:

$$W = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^3 - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{2})^2}{(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{9}{4}}} \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2}{\frac{3}{4} + 2 - \frac{9}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{2}{4}}} \quad \therefore \quad \boxed{W = 2}$$

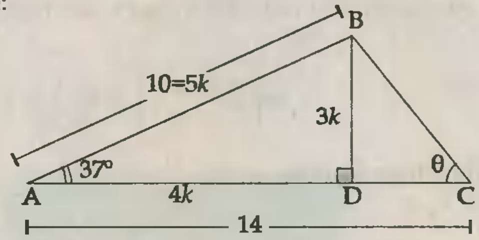
**32.-** Reemplazando el valor de $x = 15^\circ$, tenemos : $W = \dfrac{\tan^2(60^\circ) + \cos^2(45^\circ)}{\text{sen}30^\circ} + \cot^2 60^\circ$

Recordando que: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ; $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ; $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ; $\text{sen } 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

Calculando: $$W = \frac{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{3 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

Según condición: $W = \dfrac{a}{B} = \dfrac{22}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 22$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{a + 3 = 25}$

33.- Construimos el ⊿ADB y reconocemos que:




$5k = 10 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow BD = 6$

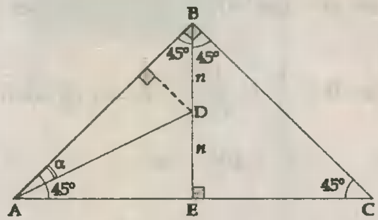
Asimismo: $AD = 8$ y $DC = 6$

Luego el Δ BAC es isósceles, luego: $\theta = 45°$

$\Rightarrow M = \tan 60° \cdot \cot 45° = (\sqrt{3})(1)$

$\therefore$ $\boxed{M = \sqrt{3}}$

34.- En el gráfico:



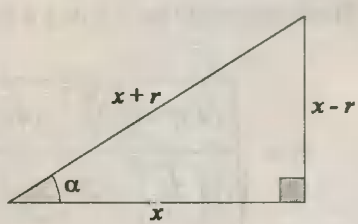

Haciendo: $BD = DE = M \Rightarrow AE = 2n$

$\Rightarrow$ ⊿ADE es notable: $D\widehat{A}E = \frac{53°}{2}$

Calculamos: $\alpha = 45° - \frac{53°}{2} = \frac{37°}{2}$

$\cot\left(\frac{37°}{2}\right)$ $\therefore$ $\boxed{\cot = 3}$

35.- Sean los números: $(x - r)$, $x$, $y$, $(x + r)$ los lados del triángulo rectángulo. A partir de la figura podemos reconocer que el menor ángulo es el indicado con α, dado que él se opone al cateto de menor longitud, luego:




$$\cos\alpha = \frac{x}{x+r} \ldots (*)$$

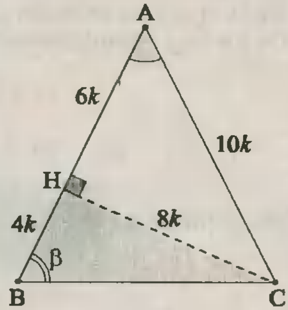
A continuación aplicamos Pitágoras, para reconocer una relación entre $x$ y $r$:

$$(x - r)^2 + x^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x^2 + r^2 - 2xr + x^2 = x^2 + r^2 + 2xr$$

$$\Rightarrow x^2 = 4xr \Rightarrow x = 4r \ldots (**)$$

Finalmente reemplazamos (**) en (*) : $\cos\alpha = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$ $\therefore$ $\boxed{\cos\alpha = 0{,}8}$

**36.-** Luego de graficar el enunciado del problema tendremos:



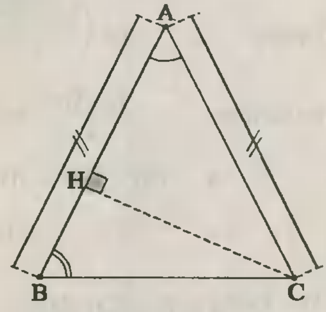

$$\cos A = 0{,}6 = \frac{6}{10}$$

Dado que no aparece un triángulo rectángulo donde intervenga el ángulo A, trazamos la altura $\overline{CH}$.

En consecuencia por "la propiedad fundamental" de las R.T. de un ángulo agudo.

Podemos decir que:

$$\cos A = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} \quad \Rightarrow \quad AH = 6k \ \wedge \ AC = 10k$$




Graficando una vez más el problema y reemplazando los valores obtenidos, concluímos que:

$$\overline{HC} = 8k \ \wedge \ \overline{BH} = 4k$$

Finalmente: $\tan\beta = \dfrac{\overline{HC}}{\overline{BH}} = \dfrac{8k}{4k} \quad \therefore \quad \boxed{\tan\beta = 2}$

**37.-** De acuerdo con el item 3.2.3 se sabe que: $\quad \text{sen } 3x = \cos 75° \iff 3x + 75° = 90°$

Luego: $\quad 3x = 15° \quad \therefore \quad \boxed{x = 5°}$

**38.-** Al igual que en el problema anterior, se cumple que:

$$2x + 25° + 5x - 5° = 90° \quad \Rightarrow \quad 7x + 20° = 90°$$

Finalmente: $\quad 7x = 70° \quad \therefore \quad \boxed{x = 10°}$

**39.-** Trabajando con la condición dada :

$$\tan(x + 41°) \,.\, \tan(2x - 31°) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(x + 41°) = \frac{1}{\tan(2x - 31°)} \ \ldots (*)$$

Por lo visto y explicado en el item 3.2.1 sobre razones recíprocas, podemos afirmar que:

$$\frac{1}{\tan(2x - 31°)} = \cot(2x - 31°)$$

Luego al reemplazar en (*) tendremos: $\quad \tan(x + 41°) = \cot(2x - 31°)$

Dado que esta relación corresponde a una razón y su co-razón,diremos que los ángulos dados son complementarios, por lo tanto:

$$(x + 41°) + (2x - 31°) = 90° \quad \Rightarrow \quad 3x + 10° = 90°$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 80° \quad \Rightarrow \quad x = 26,\hat{6}° \quad \therefore \quad \boxed{x = 26°\ 40'}$$

**40.-** Utilizando el mismo procedimiento del problema anterior, tendremos que:

$$\frac{1}{\cot\left(\frac{4x}{3}\right)} = \tan\left(\frac{4x}{3}\right) \left(\begin{matrix}\text{por razones}\\ \text{recíprocas}\end{matrix}\right)$$

Luego: $\qquad \cot\left(\frac{5x-96°}{2}\right) = \tan\left(\frac{4x}{3}\right)$

Entonces: $\qquad \frac{5x-96°}{2} + \frac{4x}{3} = 90°$ (por tratarse de co-razones)

$$\Rightarrow \quad 15x - 288° + 8x = 540° \quad \Rightarrow \quad 23x = 540° + 288°$$

$$\Rightarrow \quad 23x = 828° \quad \therefore \quad \boxed{x = 36°}$$

**41.-** De la condición dada: $\qquad \cot 2x = \tan 3y$

Luego por ser co-razones: $\qquad 2x + 3y = 90° \ldots (1)$

Y por condición del problema: $\qquad 2x - y = 10° \ldots (2)$

Restando (1) - (2) m.a.m. $\qquad 4y = 80° \quad \therefore \quad y = 20°$

Y reemplazando en (2): $\qquad 2x - 20° = 10° \quad \Rightarrow \quad 2x = 30° \quad \therefore \quad x = 15°$

Finalmente: **el mayor ángulo es: 20°**

**42.-** Se sabe que : $\qquad \text{sen}\,\alpha - \cos 2\beta = 0 \ \Rightarrow \ \text{sen}\,\alpha = \cos 2\beta$

Luego: $\qquad \alpha + 2\beta = 90° \ \ldots (1)$

Análogamente, si: $\qquad \text{sen}\,\beta . \csc 4\alpha = 1$

deducimos que: $\qquad \beta = 4\alpha \quad \ldots (2)$

A continuación trabajando con (1) y (2) obtendremos:

$$\alpha + 2(4\alpha) = 90° \quad \Rightarrow \quad 9\alpha = 90°$$

Entonces: $\qquad \alpha = 10° \quad$ y $\quad \beta = 40°$

Finalmente: $\qquad \boxed{\alpha + \beta = 50°}$

**43.-** Por razones trigonométricas de ángulos notables, tendremos:

$$\tan(a-b)=1 \quad \Leftrightarrow \quad a-b=45°$$

$$\tan(a+b)=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a+b=60°$$

Luego, resolviendo el sistema anterior, obtendremos: $a = 52°\,30'$ y $b = 7°\,30'$

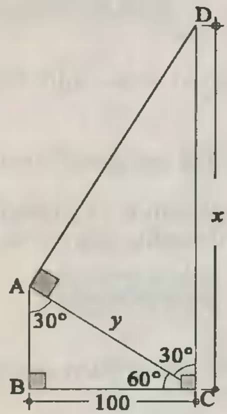
Finalmente: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{52°30'}{7°30'} \quad \therefore \quad \boxed{\dfrac{a}{b}=7}$

**44.-** En el triángulo rectángulo BAD: $\tan 60° = \dfrac{b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow b=6$

Finalmente, en el triángulo rectángulo CAD:

$$\text{sen } 30° = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a=2b \quad \Rightarrow \quad a=2\,(6) \quad \therefore \quad a=12$$

**45.-** En el triángulo rectángulo ABC:




$$\text{sen } 30° = \frac{100}{y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y=200$$

En el triángulo rectángulo CAD:

$$\cos 30° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego: $\dfrac{200}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{x=\frac{400}{\sqrt{3}}}$$

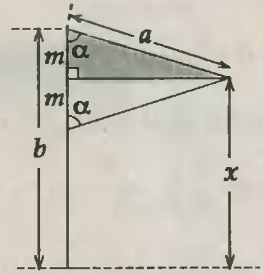
**46.-** Reemplazando el valor de "θ"en la expresión tendremos:

$$E=\frac{\cot^2 60° + \sec^2 30°}{\sec 60°} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{\frac{3}{9}+\frac{4(3)}{9}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\frac{\frac{3+12}{9}}{\frac{2}{1}} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{15}{18} \quad \therefore \quad \boxed{E=\frac{5}{6}}$$


### *TEOREMA 1*

**01.-** Con ayuda del siguiente gráfico, podemos deducir el valor de «$x$», así:



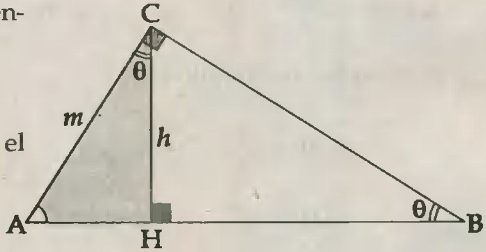

$$x = b - m$$

Pero:

$m = a$ cos a (usando el teorema 1)

Finalmente: $\boxed{x = b - a \cos \alpha}$

**02.-** Graficando el enunciado del problema tendremos:




$\angle$ ACH = θ (Por ser complemento del $\angle$ A)

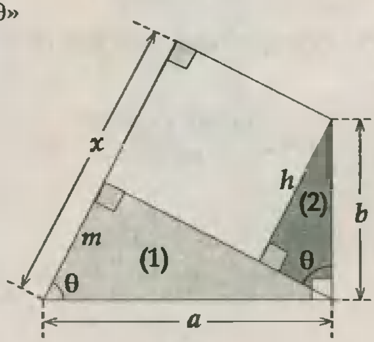
Finalmente aplicamos el primer teorema en el triángulo sombreado, obteniendo:

$$\boxed{h = m \cos \theta}$$

**03.-** Con ayuda del gráfico siguiente, podremos trabajar en dos triángulos rectángulos parciales, así:

En el triángulo (1), calculamos el cateto adyacente a «θ»

$$m = a \cos \theta$$




En el triángulo (2), calculamos el cateto opuesto a «θ»

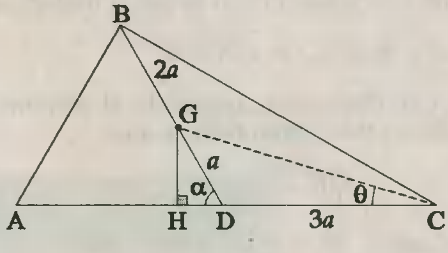
$$h = b \operatorname{sen} \theta$$

Finalmente:

$$x = m + h$$

$$\therefore \quad \boxed{x = a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}$$

**04.-** Reconociendo que: $AD = DC = BD = 3a$




Encontramos: $BG = 2a$ y $GD = a$

En el $\triangle$GHD: $\tan(\angle DCG) = \tan\theta = \dfrac{GH}{HC}$ . . . (1)

En el triángulo GHD:

$$HD = a\cos\alpha \text{ y } GH = a\,\text{sen}\,\alpha$$

Entonces en (1): $\tan\theta = \dfrac{a\,\text{sen}\,\alpha}{a\cos\alpha + 3a} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha + 3}$ . . (2)

Por dato: $\cos\alpha + 3 = 3\,\text{sen}\,\alpha$; luego al reemplazar en (2) tendremos:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\alpha}{3\,\text{sen}\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta = \frac{1}{3}}$$

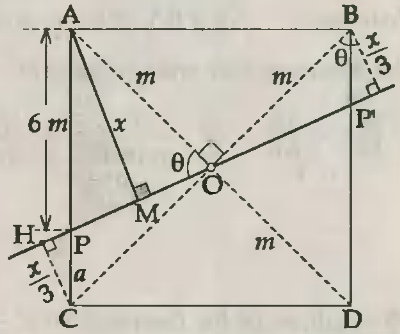
**Observación.-** Demuestra que $\alpha$ es un ángulo obtuso

**05.-** Area del cuadrado $= (6 + a)^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad 6 + a = 8 \Rightarrow a = 2$

Asimismo se observa que: $2m = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad m = 4\sqrt{2}$

Reconociendo que: $\triangle$ CHP ~ $\triangle$ AMP: $\Rightarrow \dfrac{HC}{AM} = \dfrac{PC}{AP} = \dfrac{HC}{x} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow HC = \dfrac{x}{3}$

A continuación recurriremos a la variable auxiliar θ, la que nos permitirá relacionar aún más los lados conocidos con el que buscamos.




En el triángulo AMO: $x = m\,\text{sen}\,\theta$ . . . (1)

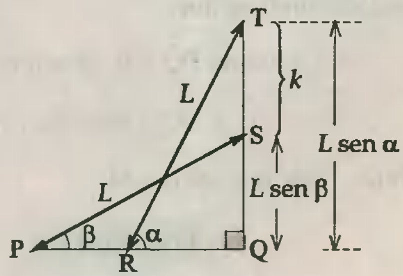
En el triángulo BP'O: $\dfrac{x}{3} = m\cos\theta$ . . . (2)

Dividiendo (1) ÷ (2) tendremos: $\tan\theta = 3 = 3/1$

Finalmente: en (1) $x = m\,\text{sen}\,\theta$

$$x = 4\sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{10}} \qquad \therefore \qquad \boxed{x = \frac{12\sqrt{5}}{5}}$$

**06.-** En el triángulo TQR: $\overline{TQ} = L\,\text{sen}\,\alpha$ (Teorema 1)




En el triángulo PQS: $\overline{QS} = L\,\text{sen}\,\beta$ (Teorema 1)

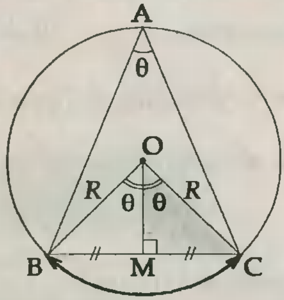
De la figura: $\overline{TS} = \overline{TQ} - \overline{QS}$

$$\Rightarrow \quad k = L\,\text{sen}\,\alpha - L\,\text{sen}\,\beta$$

$$\therefore \quad \boxed{k = L(\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)}$$

**07.-** De acuerdo con la teoría de los ángulos inscritos vistas en Geometría, diremos que:

$m\angle BOC = 2\,m\angle A = 2\theta$



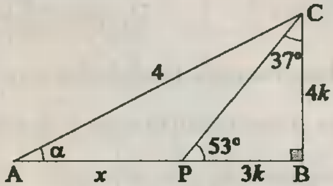

A continuación, aplicando el teorema «1» en el triángulo OMC obtendremos que:

$$\overline{MC} = R \text{ sen } \theta$$

Luego: $\overline{BC} = 2\overline{MC}$ $(\overline{MC} = \overline{BM})$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{BC} = 2\,R\text{sen }\theta}$$

**08.-** Colocando los datos en la figura dada, aplicamos los teoremas de resolución en el triángulo rectángulo ABC:

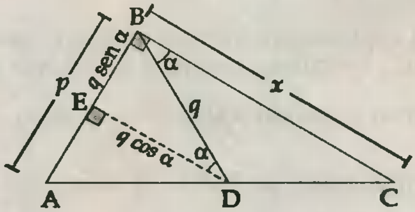



(*) $\quad 4k = 4 \text{ sen } \alpha \Rightarrow \quad k = \text{sen } \alpha \quad \ldots (1)$

(*) $\quad x + 3k = 4 \cos \alpha \Rightarrow \quad x = 4 \cos \alpha - 3k \ldots (2)$

De (1) en (2) tendremos: $\boxed{x = 4 \cos \alpha - 3 \text{ sen } \alpha}$

**09.-** Tracemos $\overline{DE} \perp \overline{AB}$




En el ⊿BED: BE = $q$ sen α ; ED = $q$ cos α

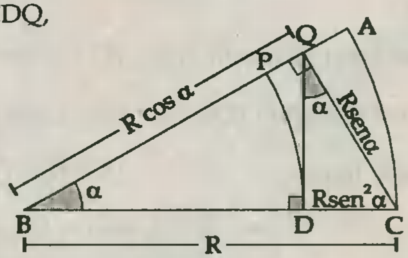
Asimismo: AE = BA - BE = $p - q$ sen α

Por semejanza de triángulos (ABC y AED):

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{q\cos\alpha} = \frac{p}{p - q\text{sen}\alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{pq\cos\alpha}{p - q\text{ sen }\alpha}}$$

**10.-** Aplicamos los teoremas en el ⊿ BQC y el ⊿ CDQ, estableciéndose que:



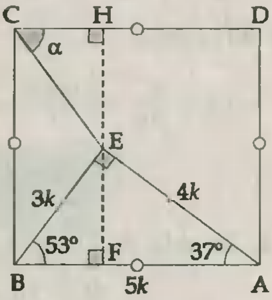

$$\text{R} \cos \alpha - \text{PQ} = \text{R} - \text{R sen}^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \text{PQ} = \text{R}(\text{sen}^2\alpha + \cos \alpha - 1)$$

Pero: $\text{sen}^2\alpha + \cos \alpha = \text{M}$

$$\therefore \quad \boxed{\text{PQ} = \text{R(M - 1)}}$$

**11.-** Sustituyendo los datos en la figura original, identificamos:




El ⊿ BEA, donde: BE = $3k$ $\Rightarrow$ $BF = 3k\cos 53° = \dfrac{9k}{5}$

En el ⊿ BFE: $EF = 3k \text{ sen } 53° = \dfrac{12k}{5}$

En el ⊿ CHE: $HE = HF - EF$

Luego: $HE = 5k - \dfrac{12k}{5} = \dfrac{13k}{5}$

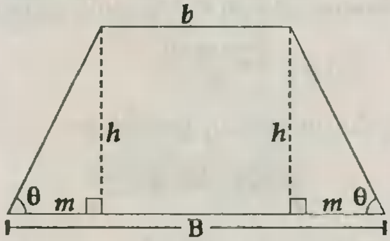
Además se observa que: $CH = BF = \dfrac{9k}{5}$

Por el teorema de Pitágoras: $CE = \sqrt{(CH)^2 + (HE)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{9k}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{13k}{5}\right)^2} \Rightarrow CE = k\sqrt{10}$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{CH}{CE} = \frac{\frac{9}{5}k}{\sqrt{10}k} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{10} \,.\, \cos\alpha = 9 \quad \therefore \quad \boxed{W = 9}$$

### TEOREMA 2

**12.-** Graficando el enunciado del problema, tendremos que:




Area Trapecio: $A = \left(\dfrac{B+b}{2}\right)h \ldots (1)$

Por el teorema «2»: $h = m \tan\theta \ldots (2)$

Pero: $2m + b = B \Rightarrow 2m = B - b$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{B-b}{2} \ldots (3)$$

A continuación reeplazamos (3) en (2): $h = \left(\dfrac{B-b}{2}\right)\tan\theta$

Finalmente sustituiremos el resultado en (1): $A = \left(\dfrac{B+b}{2}\right).\left(\dfrac{B-b}{2}\right)\tan\theta$

$$\therefore \quad \boxed{A = \left(\frac{B^2 - b^2}{4}\right)\tan\theta}$$

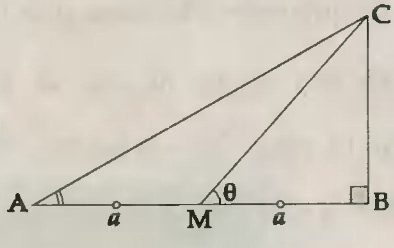
**13.-** Graficando el enunciado del problema, consideremos que: $m\angle CMB = \theta$, luego en el ⊿ MBC aplicamos el teorema 2.

$BC = a \tan\theta$

Y del ⊿ ABC:

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{a\tan\theta}{2a} \Rightarrow \tan A = \frac{\tan\theta}{2}$$

$\therefore$ $\boxed{\tan\theta = 2\tan\hat{A}}$




**14.-** En el ⊿ ACD: Aplicamos el teorema 1

$$AC = 2R\cos\alpha$$

En el ⊿ AOC: Aplicamos el teorema 2

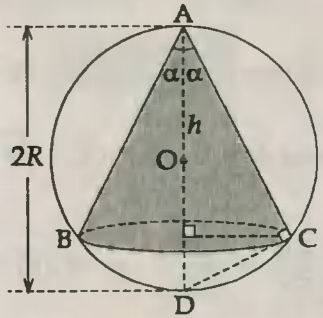
$$AC = h\sec\alpha$$

Luego: $2R\cos\alpha = h\sec\alpha$

$$2R\underbrace{\cos\alpha \,.\, \sec\alpha}_{1} = h\sec^2\alpha$$

$$R = \frac{1}{2}h\sec^2\alpha$$

$\therefore$ $\boxed{R = 0{,}5\, h\sec^2\alpha}$

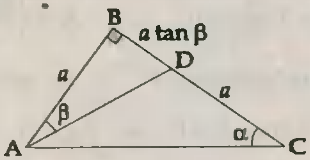



**15.-** Aplicando los teoremas de resolución de triángulos en el triángulo rectángulo ABD y a continuación en el triángulo rectángulo ABC, tendremos:

$$\cot\alpha = \frac{a + a\tan\beta}{a}$$

Luego de simplificar, tendremos:

$\therefore$ $\boxed{\cot\alpha - \tan\beta = 1}$




**16.-** Sea $BC = a \Rightarrow AD = 2a$

En el ⊿CBD: $BD = a\tan\alpha$

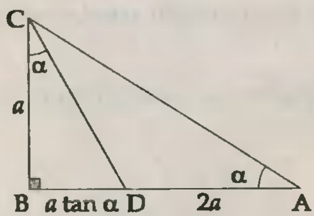
En el ⊿ABC: $BA = 2a + a\tan\alpha$

En el ⊿ABC: $\cot\alpha = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{2a + a\tan\alpha}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} = 2 + \tan\alpha \Rightarrow \tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática: $\tan\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$

Pero $a$ es agudo, entonces: $\boxed{\tan\alpha = \sqrt{2} - 1 > 0}$

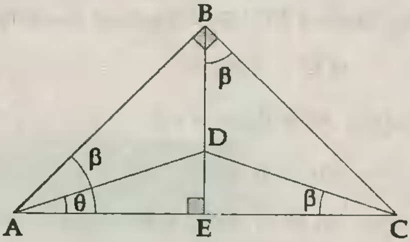


17.- En el ⊿ BEC hacemos: BE = $a$ ⇒ EC = $a \tan\beta$

En el ⊿ DEC: DE = EC . $\tan\beta = a\tan\beta . \tan\beta$

⇒ DE = $a\tan^2\beta$

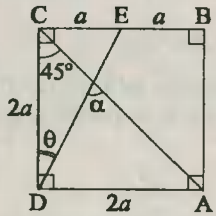
En el ⊿ AEB: $m\angle BAE = \beta$ ⇒ AE = $a . \cot\beta$




En el ⊿ AED: $\tan\theta = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{a\tan^2\beta}{a\cot\beta}$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\theta = \tan^3\beta}$$

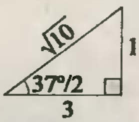
18.- En la gráfica, ubicamos «θ» en el ⊿DCE, en el cual por la relación 1 a 2 de los catetos se reconoce:




$$\theta = \frac{53°}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45° + \frac{53°}{2}$$

Se pide: sec α ; que por de arcos complementarios:

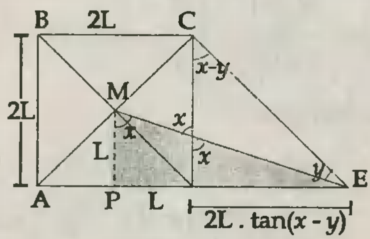
$$\sec\alpha = \csc(90° - \alpha) = \csc\left(\frac{37°}{2}\right)$$

De la figura: 


$$\therefore \quad \boxed{\sec\alpha = \sqrt{10}}$$

19.- Considerando que el lado del cuadrado mide 2L e identificando los ángulos más adecuados, la figura dada queda según como se muestra:

En el ⊿ MPE:

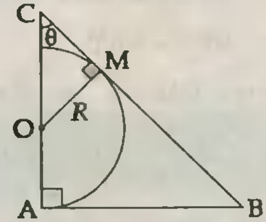



$$\tan x = \frac{2L\tan(x-y)+L}{L}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan x - 2\tan(x-y) = 1}$$

### TEOREMA 3

**20.-** En ⊾ CMO aplicamos el teorema 3.




$$OC = R \csc\theta$$

Luego: $AC = R\csc\theta + R$

$$AC = R(\csc\theta + 1)\ldots(1)$$

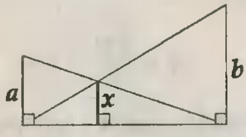
Ahora, en el ⊾ BAC aplicamos el teorema 2.

$$AB = AC \cdot \tan\theta \ldots (2)$$

Finalmente reemplazamos (1) en (2):

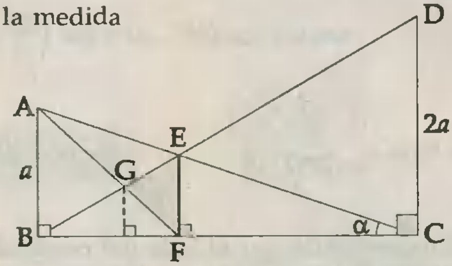
$$\therefore \quad \mathbf{AB = R(\csc\theta + 1)\tan\theta}$$

**21.-** Recordemos primero la propiedada geométrica, en donde conocidos $a$ y $b$ se podrá calcular $x$ a partir de:




$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Ahora en base a esta relación encontremos la medida de EF el cual aparece en la figura adjunta:

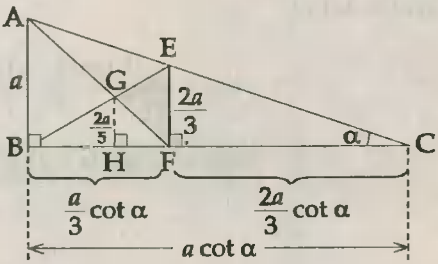



$$EF = \frac{a(2a)}{a+2a} = \frac{2a^2}{3a}$$

$$\Rightarrow \quad EF = \frac{2a}{3}$$

Análaogamente, calculemos: GH.

$$GH = \frac{a\left(\frac{2}{3}a\right)}{a+\frac{2a}{3}} = \frac{\frac{2}{3}a^2}{\frac{5}{3}a} \quad \Rightarrow \quad GH = \frac{2a}{5}$$




De la figura:

Area Δ EFG = Area ⊾ BFE - Área BGF

$$A_{\Delta EFG} = \frac{\frac{a}{3}\cot\alpha \cdot \frac{2}{3}a}{2} - \frac{\frac{2a}{5}\cdot\frac{a}{3}\cot\alpha}{2}$$

$$A_{\Delta EFG} = \frac{a^2}{9}\cot\alpha - \frac{a^2}{15}\cot\alpha = \frac{5a^2\cot\alpha - 3a^2\cot\alpha}{45}$$

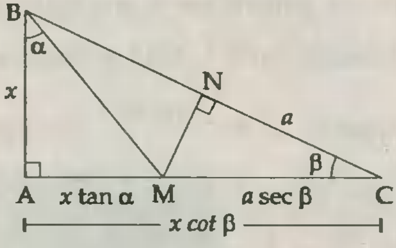
$$\therefore \quad A_{\Delta EFG} = \frac{2a^2}{45}\cot\alpha$$

**22.-** Aplicando los teoremas de resolución de triángulos rectángulos en el ⊿ BAM y el ⊿MNC, tendremos:

$$x \cot \beta = x \tan \alpha + a \sec \beta$$

$$\Rightarrow \quad x(\cot \beta - \tan \alpha) = a \sec \beta$$

Finalmente: $\boxed{x = \dfrac{a \sec \beta}{\cot \beta - \tan \alpha}}$



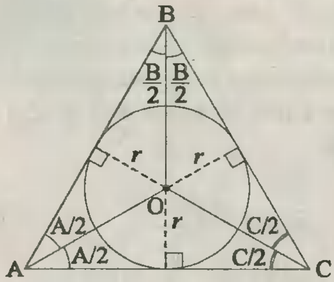

**23.-** Por dato se sabe que O es centro del Δ ABC. Por resolución de triángulos rectángulos se tiene:

$$AO = r.\csc\frac{A}{2} \quad ; \quad OC = r.\csc\frac{C}{2} \quad ; \quad OB = r.\csc\frac{B}{2}$$

Por ser AO media proporcional de OC y OB:

$$r.\csc\frac{A}{2} = \sqrt{r.\csc\frac{B}{2}.r.\csc\frac{C}{2}} \Rightarrow \csc^2\frac{A}{2} = \csc\frac{B}{2}.\csc\frac{C}{2}$$

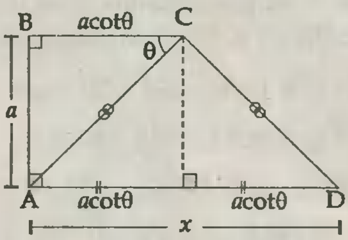
Invirtiendo: $\boxed{\text{sen}^2\frac{A}{2} = \text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2}}$




**24.-** Desde que AC = CD, podemos reconocer que el ΔACD es un triángulo isósceles.

Empleando los teoremas de resolución de triángulos rectángulos, en el ⊿ ABC y trazando la altura del ΔACD, se puede establecer que:

$$\boxed{x = 2a \cot \theta}$$




**25.-** Instalando los datos y haciendo que: BD = ED = $a$

En el ⊿ DAB: DA = DB sen α = $a$ sen α

AB = DB cos α = $a$ cos α

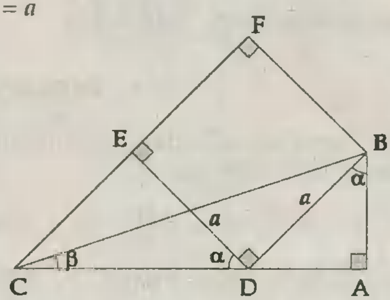
En el ⊿ DEC: $m\angle$ EDC = $m\angle$ ABD = α

CD = ED. sec α = $a$ sec α

$\Rightarrow$ CA = CD + DA = $a$ sec α + $a$ sen α

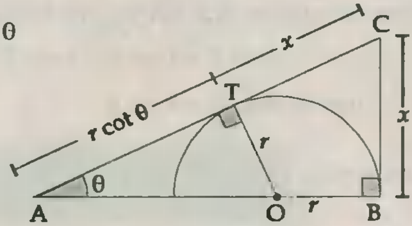
En el ⊿ CBA: $\cot \beta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a\sec\alpha + a\,\text{sen}\alpha}{a\cos\alpha}$

$\therefore \quad \boxed{\cot \beta = \sec^2\alpha + \tan \alpha}$



26.- De acuerdo con la propiedad de las tangentes geométricas, se verifica que: CT = CB.

Asimismo en el ⊿ ATO, se observa que: AT = $r \cot \theta$

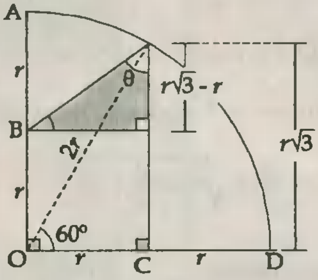



Además: $\csc \theta = \dfrac{r \cot\theta + x}{x} \Rightarrow x \csc \theta - x = r \cot \theta$

$\Rightarrow \quad x(\csc \theta - 1) = r \cot \theta$

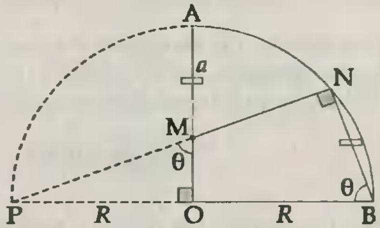
$\therefore \quad \boxed{x = \dfrac{r \cot \theta}{\csc \theta - 1}}$

27.- De acuerdo con los datos: AOD es un cuarto de circunferencia. Asumiendo que el radio de la circunferencia es $2r$, procedemos a identificar los lados conocidos. De este modo podemos establecer que:




$\cot \theta = \dfrac{r(\sqrt{3} - 1)}{r} \qquad \therefore \qquad \boxed{\cot \theta = \sqrt{3} - 1}$

28.- Completando una semicircunferencia y prolongando $\overline{MN}$ y $\overline{BO}$ encontramos que ∠ OBN y ∠ OMP son congruentes.




En el ⊿ PNB: NB = 2R cos θ

En el ⊿ POM: OM = R cot θ

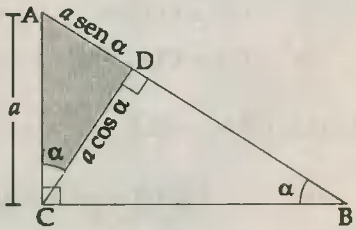
Luego, en la figura: AM + OM = AO

$2R \cos \theta + R \cot \theta = R \Rightarrow 2 \cos \theta + \cot \theta = 1$

Por consiguiente: $\boxed{M = 1}$

### *ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR*

29.- Reemplazando datos y aplicando los teoremas de resolución en la figura dada, se puede establecer que:




$m \angle AED = m \angle ABC = \alpha$ , sea: AC = $a$

En el ⊿ADC: AD = $a$ sen α ∧ CD = $a$ cos α

Si: $k$ = área de la región triangular ADC

$\Rightarrow \; k = \dfrac{(AD)(CD)}{2} = \dfrac{1}{2}(a \text{ sen } \alpha)(a \cos \alpha)$

$$\Rightarrow\ k = \frac{a^2}{2}\ \text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha \Rightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{k}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

En el ⊿ ACB: $CB = AC\,.\cot\alpha = a\cot\alpha$

Sea: $S$ = área de la región triangular ADC

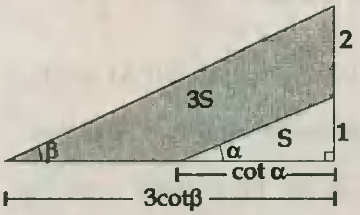
$$S = \frac{(AC)(CB)}{2} = \frac{a.a\cot\alpha}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2.\cot\alpha}{2} = \frac{k}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\therefore\quad \boxed{S = k\csc^2\alpha}$$

**30.-** Nuestra estrategia consistirá en determinar los valores de la tangente y la cotangente de los ángulos dados por medio del cálculo de áreas de cada triángulo dado.

De la figura: $S = \dfrac{\cot\alpha}{2}$ ... (1)

Además: $4S = \dfrac{(3\text{ctg}\beta)(3)}{2}$ ... (2)




Dividiendo las relaciones (2) ÷ (1):

$$\frac{9\cot\beta}{\cot\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} = \frac{4}{9}$$

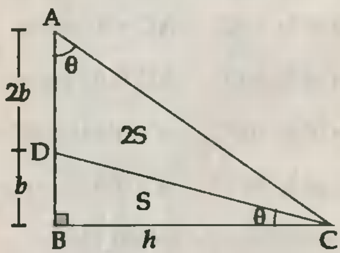
De donde, obtenemos: $\cot\beta = 4k \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{1}{4k} \wedge \cot\alpha = 9k \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{9k}$

Luego: $$M = \frac{9\sqrt{4k} - \dfrac{1}{\sqrt{4k}}}{4\sqrt{9k} - \dfrac{1}{\sqrt{9k}}} = \frac{\dfrac{9.4k-1}{2\sqrt{k}}}{\dfrac{4.9k-1}{3\sqrt{k}}} = \frac{\dfrac{36k-1}{2\sqrt{k}}}{\dfrac{36k-1}{3\sqrt{k}}} \quad\therefore\quad \boxed{M = \frac{3}{2}}$$

**31.-** Observando la relación de áreas, podemos afirmar que: $AD = 2DB$.

Si hacemos: $BD = b \Rightarrow AD = 2b \wedge BC = h$

$$\Rightarrow S = \frac{bh}{2} \Rightarrow 2S = \frac{AD}{2} \Rightarrow AD = 2b$$

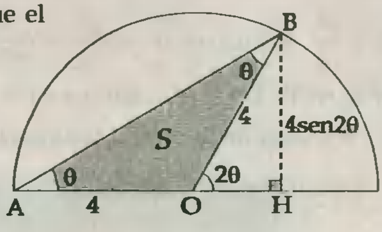



En el ⊿ DBC: $\tan\theta = \dfrac{b}{h}$ ... (1)

En el ⊿ ABC: $\tan\theta = \dfrac{h}{3b}$ ... (2)

Multiplicando (1) × (2): $\tan^2\theta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\therefore\quad \boxed{\theta = 30°}$

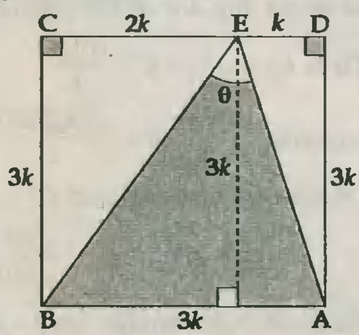
**32.**-Construimos el ⊾AHB, podemos establecer que el área de la región triangular AOB. Luego:




$$S = \frac{4.4\text{sen}2\theta}{2}$$

$\therefore$ $\boxed{S = 8 \text{ sen } 2\theta}$

**33.**- Tal como se ha hecho en los ejercicios anteriores, aprovecharemos la fórmula del área de una región triangular para determinar el valor de la razón trigonométrica pedida. Con este propósito trazamos la altura $\overline{EH}$ del triángulo ABE y, colocando los datos en el gráfico se establece que: $ED = k \quad \Rightarrow \quad CD = 3k$




$$\text{Área } \Delta \text{ ABE} = \frac{3k(3k)}{2} = \frac{9}{2}k^2 \quad \ldots (1)$$

$$\text{Pero: Área } \Delta\text{ABE} = \frac{1}{2}(\text{EB})(\text{EA}).\text{ sen } \theta \quad \ldots (2)$$

Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

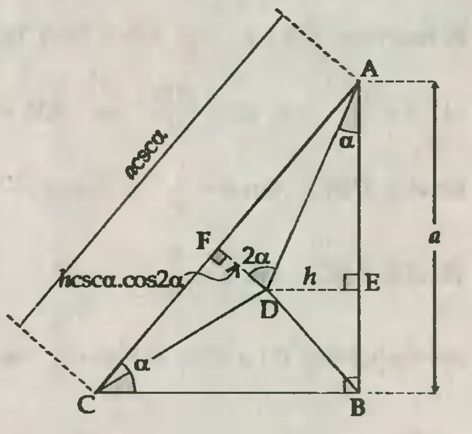
En el ⊾ ECB $\Rightarrow$ $EB = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13}\,.\,k$

En el ⊾ EDA $\Rightarrow$ $EA = \sqrt{k^2 + (3k)^2} = \sqrt{10}$

Igualando (2) y (1) tenemos: $\frac{1}{2}(\sqrt{13}\ k)(\sqrt{10}\ k)\text{ sen }\theta = \frac{9}{2}k^2$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{130}\,.\text{ sen }\theta = 9 \qquad \therefore \qquad \boxed{\csc\theta = \frac{\sqrt{130}}{9}}$$

**34.** - Sea $AB = a$ ; $DE = h$ y tracemos $\overline{FD} \perp \overline{CA}$




En el ⊾ ABC: $AC = a\,.\,\csc\alpha$

En el ⊾ AED: $AD = h\,.\,\csc\alpha.$

En el ⊾ ABC: $m\angle FAB = 90° - \alpha$ ... (1)

En el ⊾ AFD: $m\angle FAD + \alpha = m\angle FAB$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2):

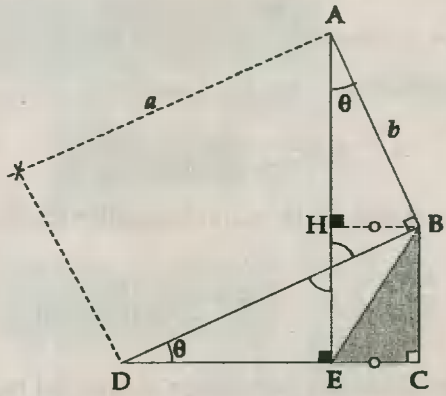
$m\angle FAD = 90° - 2\alpha \quad \Rightarrow \quad m\angle FDA = 2\alpha$

De este modo: $FD = AD\,.\,\cos 2\alpha$

$\Rightarrow \quad FD = h \,.\, \csc\alpha \,.\, \cos 2\alpha$

Según condición: Área región $\Delta ABD$ = Área región $\Delta$ ADC

$$\frac{(a\csc\alpha)(h\csc\alpha\,.\cos 2\alpha)}{2} = \frac{ah}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha \,.\, \csc^2\alpha = 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$$




**35.-** En el ⊿ BCD: BC = BD sen θ = $a$ sen θ

Tracemos $\overline{BH} \perp \overline{AE}$

En el ⊿ AHB: $\quad m\angle BAH = \theta$

HB = AB sen θ = $b$ sen θ $\Rightarrow$ EC = $b$ sen θ

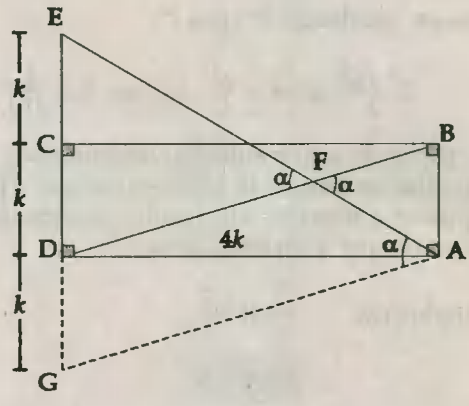
En el ⊿ ECB: Área ⊿ ECB $= \dfrac{(EC)(BC)}{2}$

Área ⊿ ECB $= \dfrac{(b\,\text{sen}\theta)(a\,\text{sen}\theta)}{2}$

Área ⊿ ECB $= \dfrac{ab\ \text{sen}^2\theta}{2}$

$\therefore \quad$ **Área ⊿ ECB = $\frac{1}{2}ab\ \text{sen}^2\theta$**

**36.-** Sea CD = $k$ $\Rightarrow$ BC = 4$k$ $\therefore$ AD = 4$k$




Trazamos $\overline{AG} // \overline{BD}$ y prolongamos $\overline{CD}$ hasta que se intersecten en el punto G. Siendo ángulos opuestos por el vértice, se observa que:

$m\angle BFA = m\angle EFD = \alpha$

Siendo ángulos correspondientes, se observa que:

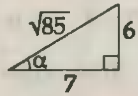
$m\angle GAE = m\angle EFD = \alpha$

En el ⊿ EDA: $\quad EA = 2\sqrt{5}\,k$

En el ⊿ ADG: $\quad AG = \sqrt{17}\,k$

Calcularemos el valor de la tan a a partir del cálculo del área de la región triangular AEG:

$$\frac{(3k)(4k)}{2}=\frac{(2\sqrt{5}k)(\sqrt{17}k)}{2}\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{6}{\sqrt{85}} \Rightarrow$$




$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{6}{7} \Rightarrow W=\sqrt{3+7\left(\frac{6}{7}\right)} \quad \therefore \quad \boxed{W=3}$$

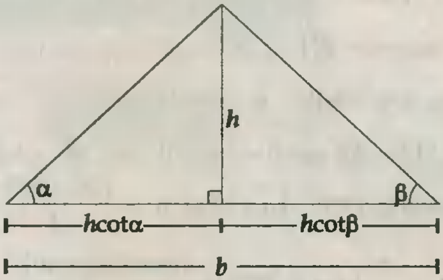
**37.-** De la figura: $h\cot\alpha + h\cot\beta = b$

Factorizando: $h(\cot\alpha+\cot\beta)=b$

$$\Rightarrow \quad h=\frac{b}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

Luego el área de la región triangular (S) será:

$$S=\frac{bh}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S=\frac{b^2}{2(\cot\alpha+\cot\beta)}}$$




**38.-** Inicialmente, calculamos el área del triángulo MDN, así:

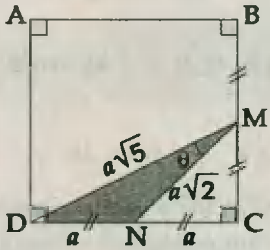
$$A_{\Delta MDN}=\frac{base \cdot altura}{2}=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{a^2}{2} \ldots\ldots (*)$$

Y de acuerdo con lo visto, tendremos:

$$A_{\Delta MDN}=\frac{a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta \ldots\ldots (**)$$

Luego, igualando (**) con (*):

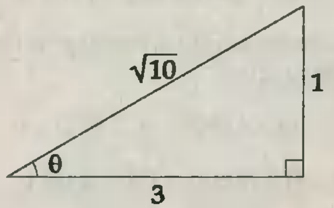
$$\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\operatorname{sen}\theta=\frac{a^2}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

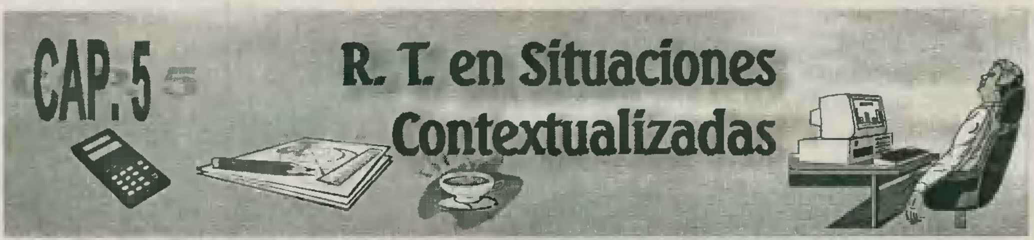



A partir de este resultado construiremos un triángulo auxiliar en donde la hipotenusa sea $\sqrt{10}$ y el cateto opuesto a $\theta$ sea 1. Allí resultará evidente que el otro cateto es por Pitágoras, igual a 3.

Finalmente: $\cot\theta=\frac{3}{1}$

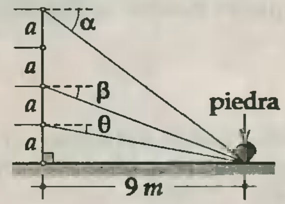
$$\therefore \quad \boxed{\cot\theta=3}$$






### ÁNGULOS VERTICALES

01.- Con la ayuda del gráfico y la propiedad de los ángulos alternos internos, la condición del problema queda así:




$$\tan\alpha - \tan\beta - \tan\theta = \frac{1}{4}$$

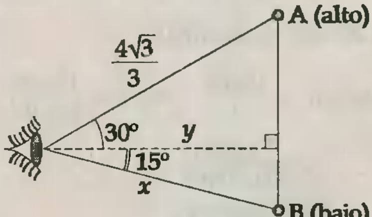
$$\frac{4a}{9} - \frac{2a}{9} - \frac{a}{9} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{4}$$

Finalmente la altura del edificio será: $\text{Altura} = 4a = 4\left(\frac{9}{4}m\right) = \boxed{9\ m}$

02.- Del triángulo superior, tenemos: $\cos 30° = \dfrac{y}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2$

Finalmente en el triángulo inferior tenemos:

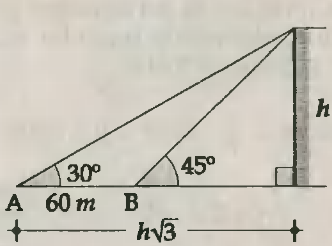



$$\cos 15° = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{\cos 15°}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\ m}$$

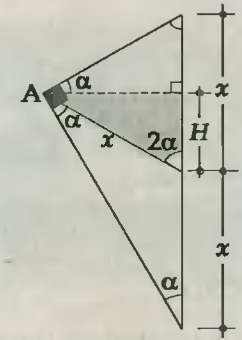
03.- Finalmente:




$$h\sqrt{3} - h = 60m$$

$$\therefore \quad \boxed{h = \left(\frac{60}{\sqrt{3}-1}\right) m}$$

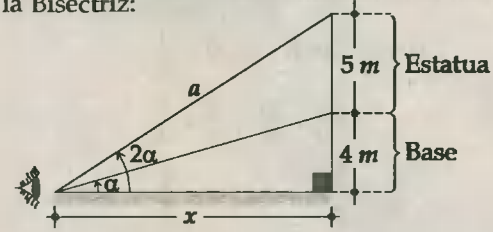
**04.-** Elaboramos un gráfico en donde indicamos que el objeto y su imagen equidistan del lago, quien hace las veces de un espejo. Luego en el triángulo sombreado, tendremos:




$$\sec 2\alpha = \frac{x}{H}$$

$\therefore$ $\boxed{x = \text{H} \sec 2\alpha}$

**05.-** Haciendo un gráfico adecuado como el mostrado, notamos que es posible aplicar allí el teorema de la Bisectriz:




$$\frac{a}{5} = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 5k \\ x &= 4k \end{aligned}$$

A continuación aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo mayor así:

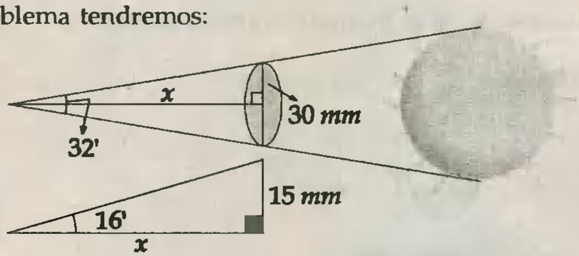
$$(5k)^2 = (4k)^2 + 92 \;\Rightarrow\; 25k^2 - 16k^2 = 81$$

Luego: $9k = 81 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 9 \;\Rightarrow\; k = 3$

De este modo: $x = 4(3) = 12 \;\Rightarrow\; \tan 2\alpha = \frac{9}{x}$ $\quad \therefore \quad \boxed{\tan 2\alpha = \frac{3}{4}}$

**06.-** Al graficar el enunciado del problema tendremos:

De donde deducimos:

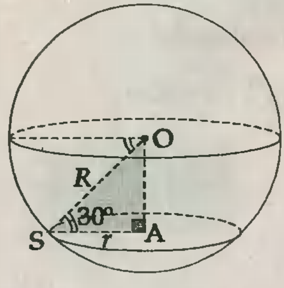



$$\tan 16' = \frac{15mm}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{15mm}{\tan 16'}$$

$$x = \frac{15mm}{0{,}00465}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 3{,}22\ m}$

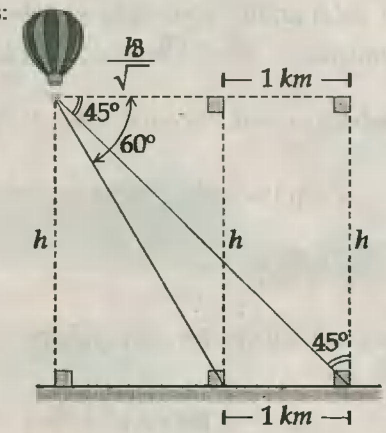
**07.-** Con la ayuda del siguiente gráfico, observamos que resulta conveniente trasladar el ángulo dado al triángulo rectángulo SAO.




$$\cos 30^\circ = \frac{r}{R} \;\Rightarrow\; r = R \cos 30^\circ$$

$$r = 6370 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{r \approx 5516\ km}$$

08.- En el triángulo notable de 45° ∧ 45°, tendremos:




$$h=\frac{h}{\sqrt{3}}+1 \quad \Rightarrow \quad h=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

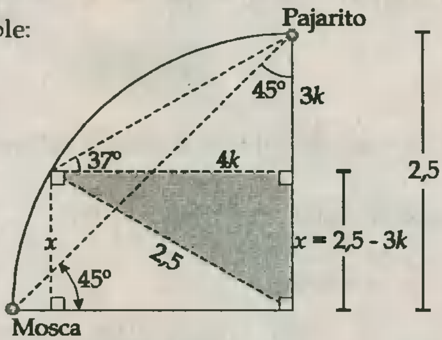
$$h=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)km$$

Finalmente:

$$h=2{,}366\ m\times\frac{1\ 000m}{1\ km}$$

$\therefore$ $\boxed{h = 2\ 366\ m}$

09.- Construimos el gráfico, según el enunciado.




En el triángulo rectángulo sombreado se cumple:

$$(2{,}5)^2=(4k)^2+(2{,}5-3k)^2$$

$$\Rightarrow \quad (2{,}5)^2=16k^2+(2{,}5)^2-15k+9k^2$$

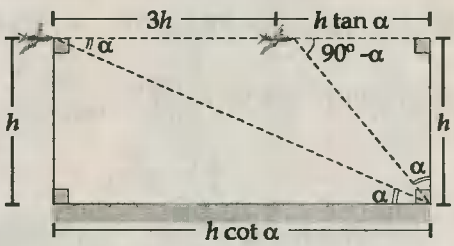
Reduciendo:

$$25k^2=15k \Rightarrow k=\frac{3}{5}$$

Luego: $x=\frac{5}{2}-3k=\frac{5}{2}-\frac{9}{5}=\frac{7}{10}\,m$

$\therefore$ $\boxed{x = 0{,}7\ m}$

10.- Elaboramos una gráfica, en ella se observa:




$h\cot\alpha=3h+h\tan\alpha \Rightarrow \cot\alpha-\tan\alpha=3$

Elevando al cuadrado:

$$(\cot\alpha-\tan\alpha)^2=3^2$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2\alpha+\tan^2\alpha-2\tan\alpha\,.\,\cot\alpha=9$$

$\therefore$ $\boxed{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=11}$

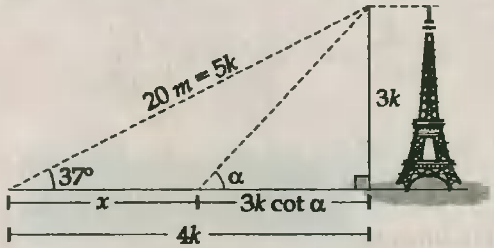
**11.-** En el gráfico elaborado se debe verificar que: $\tan\alpha = 2$

Asimismo: $5k = 20\ m \Rightarrow k = 4\ m$

También: $x = 4k - 3k\cot\alpha = 4k - 3k.\ \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$\Rightarrow \quad x = 4(4) - 3(4)\ .\ \dfrac{1}{2} = 16 - 6$

$\therefore \quad \boxed{x = 10\ m}$

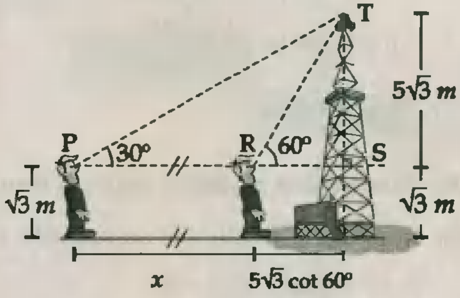



**12.-** En el ⊿RST: $RS = ST\cot 60°$

$$RS = 5\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 5$$

En el ⊿PST: $\cot 30° = \dfrac{PS}{ST} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x+5}{5\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \boxed{x = 10\ m}$



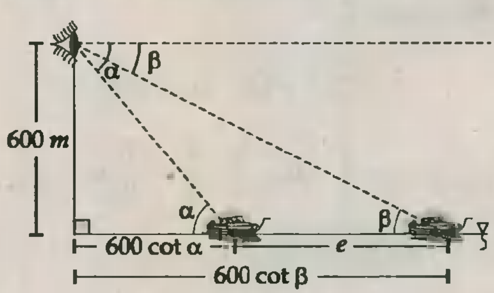

**13.-** Luego de elaborar el gráfico, reconocemos que: $e = 600(\cot\beta - \cot\alpha)$ ; $e = v.t$

$$\Rightarrow \quad e = 600\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)m$$

$$\Rightarrow \quad e = 600\ m$$

Luego: $v = \dfrac{600m}{6min}\ .\ \dfrac{60min}{1h}\ \dfrac{1km}{1000m}$

$\therefore \quad \boxed{v = 6}$



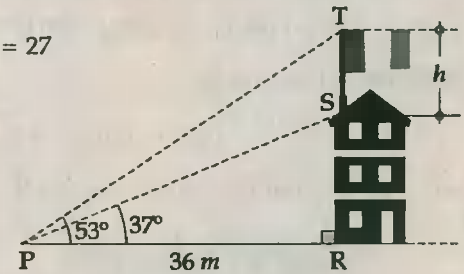

**14.-** Al elaborar el gráfico según el enunciado, se pueden reconocer tres triángulos.

En el ⊿PRS: $RS = PR\tan 37° \Rightarrow RS = 36\left(\dfrac{3}{4}\right) = 27$

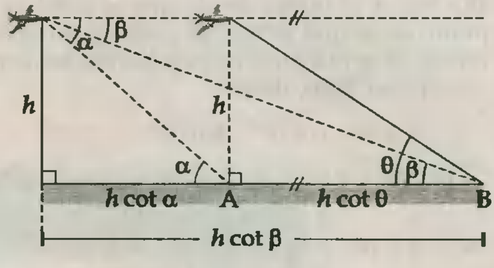
En el ⊿PRT: $\cot 53° = \dfrac{PR}{RT} = \dfrac{PR}{RS+ST}$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{36}{27+h}$$

$\Rightarrow \quad 27 + h = 48 \qquad \therefore \quad \boxed{h = 21\ m}$



**15.-** Suponiendo que el avión se mueve en el mismo plano vertical que contiene a los puntos A y B, se tendrá que:

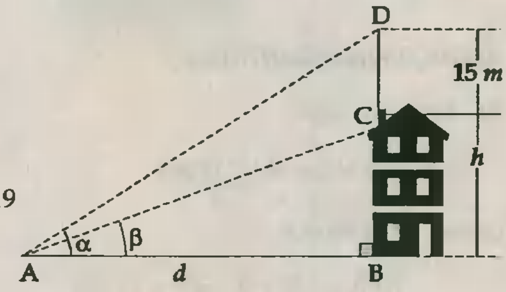



$$h \cot \theta = h \cot \beta - h \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \cot \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\tan \theta = 6}$$

**16.-** En el gráfico elaborado la antena está representada por $\overline{CD}$




En el ⊿ ABC: $\qquad h = d \tan \beta \quad \ldots (1)$

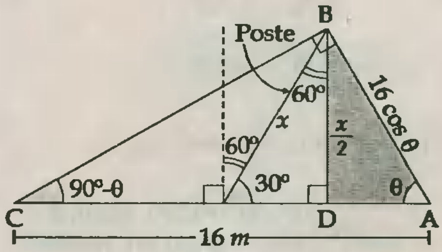
En el ⊿ ABD: $\qquad h + 15 = d \tan \alpha \quad \ldots (2)$

(2) ÷ (1): $\qquad \dfrac{h+15}{h} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

Pero: $\qquad \tan \alpha = 0{,}76 \qquad$ y $\qquad \tan \beta = 0{,}19$

$$\Rightarrow \quad \frac{h+15}{h} = 4 \quad \therefore \quad \boxed{h = 5\, m}$$

**17.-** En el ⊿ ADB se verifica que:

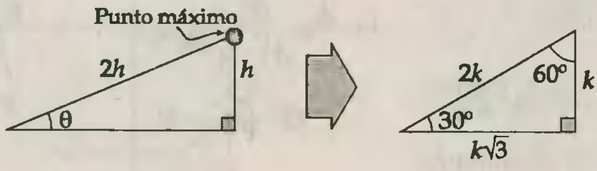



$$\frac{x}{2} = 16 \cos \theta \,.\, \operatorname{sen} \theta$$

$$\Rightarrow \qquad x = 16.2 \operatorname{sen} \theta \,.\, \cos \theta$$

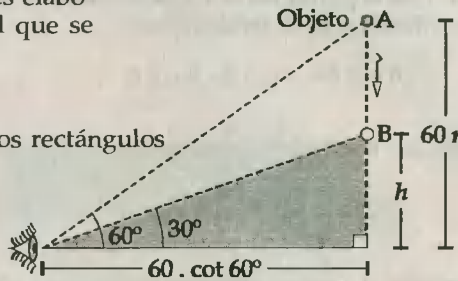
$$\therefore \qquad \boxed{x = 16 \operatorname{sen} 2\theta}$$

**18.-** Elaborando un gráfico correspondiente del contexto en el que se desarrolla la situación, podemos reconocer que el triángulo rectángulo formado es un triángulo rectángulo notable. Veamos:




$$\therefore \qquad \boxed{\theta = 30°}$$

19.- Sea A el punto desde que se soltó el objeto y B el punto en el que se volvió a visualizar. Entonces elaboramos el gráfico correspondiente, tal como el que se muestra al lado, dende:




$$h = 60 \ . \ \cot 60^\circ \ . \ \tan 30^\circ$$

Obtenido a partir de la resolución de triángulos rectángulos

$$\Rightarrow \quad h = 60 \ . \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)m \ = 20\ m$$

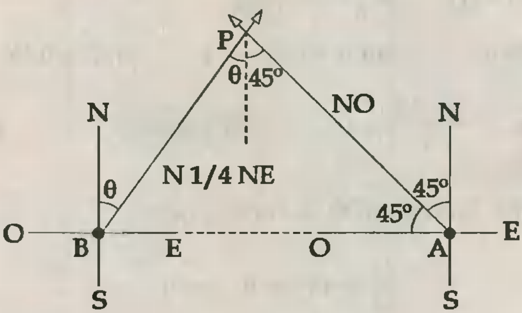
$\therefore \quad \boxed{h = 20}$

### ÁNGULOS HORIZONTALES

20.- Sabemos que:

$$\text{N } 1/4 \text{ NE} \equiv \text{N } \underbrace{11^\circ 15' \text{N}}_{\theta} \text{E}$$

Luego, en la figura:




$$\widehat{APB} = 45^\circ + \theta = 45^\circ + 11^\circ\ 15'$$

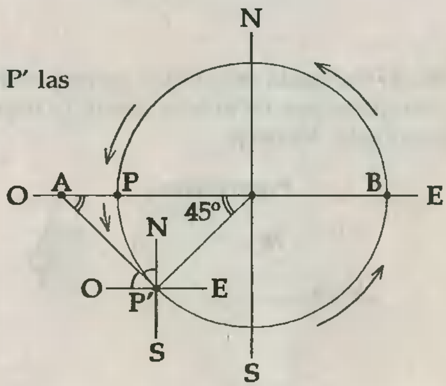
$$\widehat{APB} = 56^\circ 15'$$

$\therefore \quad \boxed{m\ \widehat{APB} = 56^\circ 15'}$

21.- Por Física sabemos que:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \begin{cases} \omega\text{-- Velocidad angular} \\ \theta\text{-- Ángulo en radianes} \\ t\text{-- tiempo} \end{cases}$$

Siendo A la posición del amigo observado y P y P' las posiciones del observador



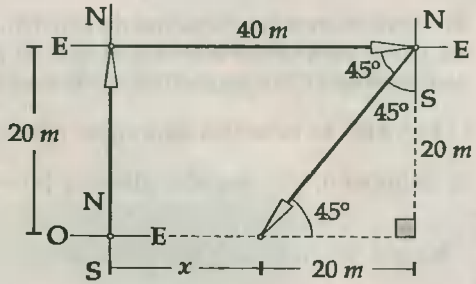

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\frac{\pi}{4} rad.}{0,15} \times \frac{1\ vuelta}{2\pi\ rad.} \times \frac{60}{1 min.}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{\frac{15}{15 \times 2}}{100} \frac{vueltas}{min.} \qquad \therefore \quad \omega = 50 \frac{vueltas}{min.}$$

El carrusel da 50 revoluciones en un minuto.

$\therefore \quad \boxed{50 \text{ RPM}}$

22.- Tratándose de desplazamientos rectilíneos, lo conveniente es elaborar un gráfico de todos ellos, tal como el que se muestra al lado:

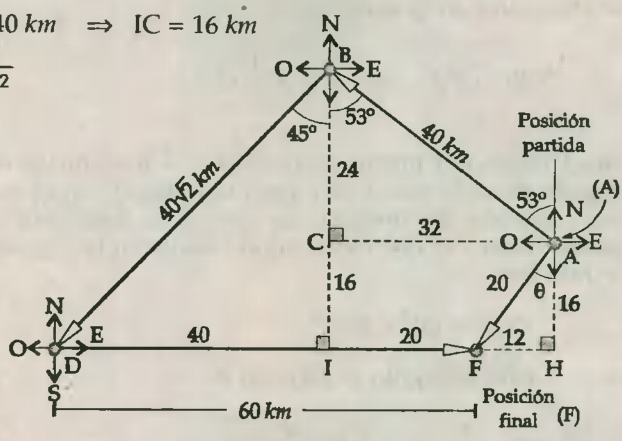



$$x + 20\ m = 40\ m$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 20\ m}$$

23.- En el ⊾BCA reconocemos que: $CA = 32\ km$, $CB = 24\ km$

Asimismo, en el ⊾BID: $DI = BI = 40\ km \Rightarrow IC = 16\ km$




En el ⊾AHF: $AF = \sqrt{(FH)^2 + (HA)^2}$

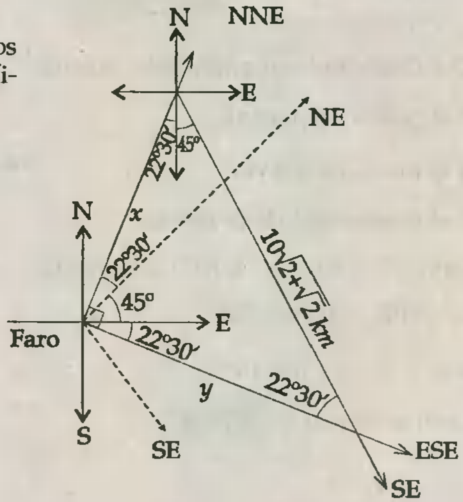
$$\Rightarrow \quad AF = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\ km$$

También: $\tan\theta = \dfrac{FH}{HA} = \dfrac{12}{16}$

$$\Rightarrow \quad \theta = 37^\circ$$

Finalmente el auto se encuentra en la dirección S 37° O respecto del punto de partida y a una distancia de 20 *km*.

24.- Elaborando el gráfico correspondiente a los desplazamientos efectuados, logramos identificar que:




1) $x = 10\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \text{sen}\ 22^\circ 30'$

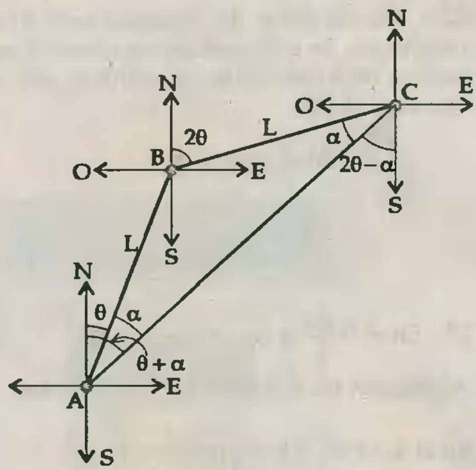
$$x = 10\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 5\sqrt{2}$$

2) $y = 10\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \cos 22^\circ 30'$

$$y = 10\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 5\,(2 + \sqrt{2})$$

$$\therefore \qquad \boxed{y - x = 10\ km}$$

25.- Elaboramos un esquema de acuerdo con los datos proporcionados en el que se pueden establecer las siguientes observaciones:




1) El $\Delta ABC$ es isósceles dado que: $AB = BC$

2) Asimismo, por ángulos alternos internos:

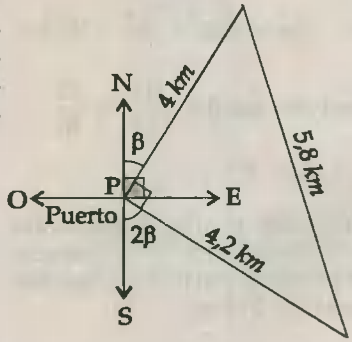
$$\theta + \alpha = 2\theta - \alpha \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$

Por lo tanto la estación A respecto de C

se encuentra en la dirección:

$$S(2\theta - \alpha)O \quad \Rightarrow \quad \boxed{S\frac{3\theta}{2}O}$$

26.- Uniendo el punto de partida con los puntos de llegada de cada móvil, se forma un triángulo en el que son conocidas las medidas de sus lados. Asimismo se puede reconocer que estos valores verifican la siguiente relación:

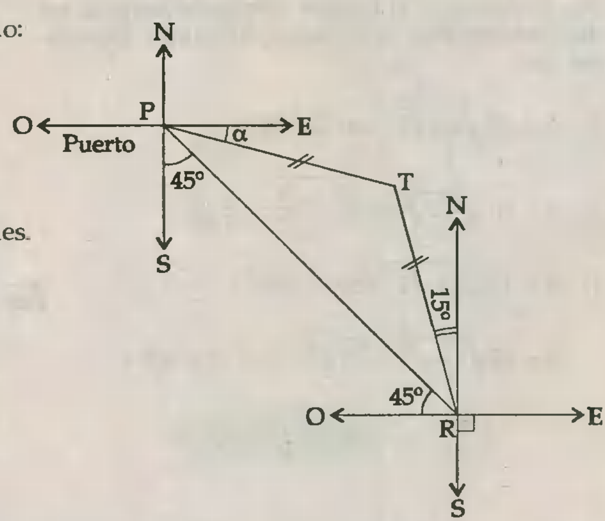



$$(5{,}8)^2 = (4)^2 + (4{,}2)^2$$

$\Rightarrow$ Dicho triángulo es recto en P.

$$\beta + 2\beta = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\beta = \frac{\pi}{6}\,rad}$$

27.- Graficando el enunciado, siendo:




P el punto de partida

R el punto de desvío

T el punto final de la lancha.

Dato: $PT = RT \Rightarrow \Delta\ PTR$ es isósceles.

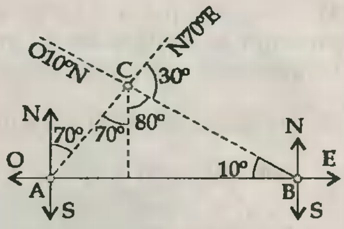
$\Rightarrow \ T\hat{P}R = P\hat{R}T = 30°$

Así: $\alpha = 15°$

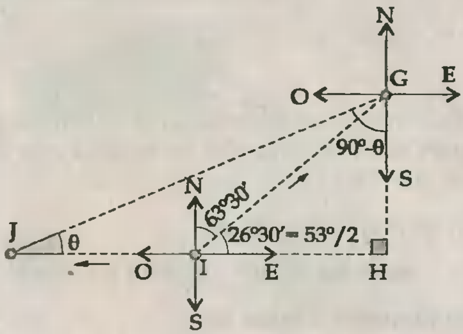
La dirección es: $\boxed{S75°E}$

**28.-** De acuerdo con el enunciado, las personas ubicadas en A y B se desplazan rectilíneamente hasta encontrarse en C. Se observa que sus direcciones forman los ángulos de medida 150° y 30°.

Por lo tanto el menor ángulo formado por ellos mide 30°.




**29.-** Al hacer la construcción gráfica, reconocemos la presencia de un triángulo rectángulo notable uno de cuyos ángulos agudos es: 53°/2. Aplicando la proporcionalidad de los lados: JO = 200 ; IG = $100\sqrt{5}$. Y en el ⊿ IHG:




$$IH = IG.\cos\left(\frac{53°}{2}\right) = 100\sqrt{5}\ .\ \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \quad IH = 200$$

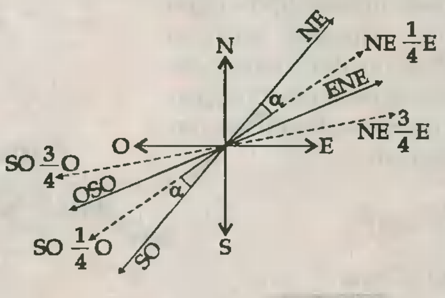
$$GH = IG.\text{sen}\left(\frac{53°}{2}\right) = 100\sqrt{5}\ .\ \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow GH = 100$$

Finalmente en el ⊿JHG:

$$\cot\theta = \frac{JH}{GH} = \frac{JO + IH}{GH} = \frac{200 + 200}{100}$$

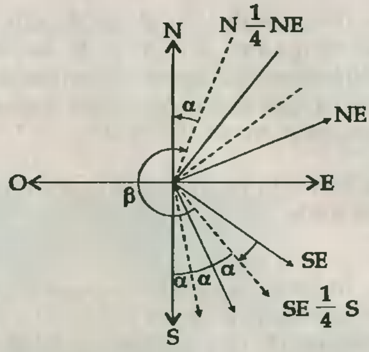
$$\therefore \quad \boxed{\cot\theta = 4}$$

**30.-** Este tipo de situaciones problémicas requieren de una buena dósis de paciencia, Ya que la estrategia consistirá en trazar, sobre un esquema, las direcciones más usuales, cuyas prolongaciones nos indicarán sus respectivas direcciones opuestas.




La dirección opuesta al NE$\frac{1}{4}$E es la dirección: $\boxed{SO\frac{1}{4}O}$

**31.-** Se sabe que $\alpha = 11°15'$ es el ángulo que representa la medida de un ángulo en el sistema sexagesimal entre dos direcciones contiguas.



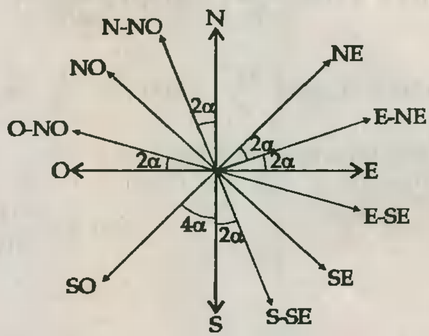

De la figura: El mayor ángulo "β" será:

$$\beta = 180° + 4\alpha = 180° + 4(11°15')$$

$$\beta = 180° + 44°\underbrace{60'}_{1°}$$

$$\therefore \quad \boxed{\beta = 225°}$$

**32.-** Tal como hicimos en el problema 20, elaboramos las direcciones correspondientes para cada proposición. Se verifica que el ángulo formado por dos direcciones sucesivas es: $\alpha = 11°15'$.




a) El mayor ángulo es:

$$360° - 6\alpha = 360° - 6(11°15') = 292{,}5°$$

b) El menor ángulo es:

$$180° - 4\alpha = 180° - 4(11°15') = 135°$$

c) El menor ángulo es:

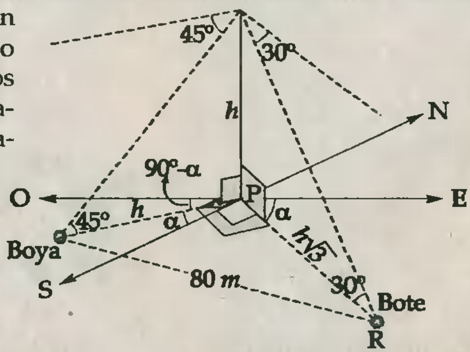
$$90° + 4\alpha = 90° + 4(11°15') = 135°$$

Por lo tanto tenemos:

$$\boxed{\text{a) F} \quad \text{b) V} \quad \text{c) F}}$$

***PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES***

**33.-** Situaciones problémicas de este tipo exigen la elaboración de un esquema gráfico tridimensional, en el que se puedan colocar los datos correspondientes. En nuestro caso el plano horizontal es el lugar donde se hacen los trazos de las direcciones náuticas.




En el ⊾PQR: $(h\sqrt{3})^2 + (h)^2 = 80^2$

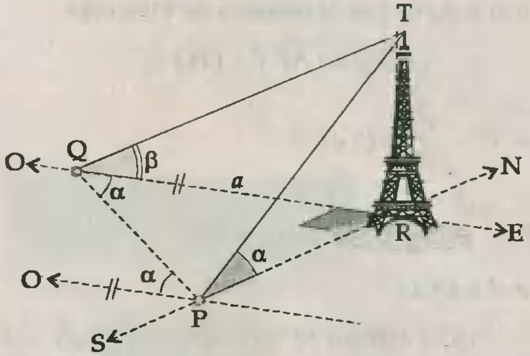
$$\Rightarrow \quad 4h^2 = 6400 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 1600$$

$$\therefore \quad \boxed{h = 40\ m}$$

**34.-** Sea QR = $a$

En el ⊾QRP: PR = QR . tan $\alpha$ = $a$ tan $\alpha$

En el ⊾PRT: TR = PR tan $\alpha$ = $a$ $\tan^2\alpha$

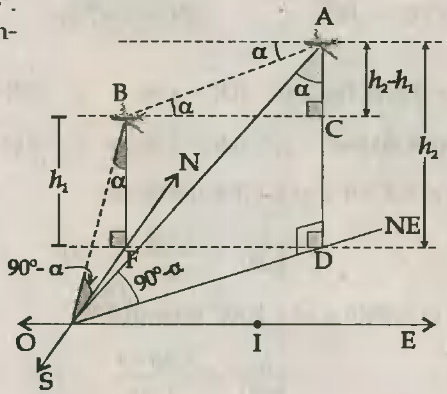



En el ⊾QRT: $\cot\beta = \dfrac{QR}{TR}$

$$\Rightarrow \quad \cot\beta = \frac{a}{a\tan^2\alpha}$$

$\therefore$ $\boxed{\cot\beta = \cot^2\alpha}$

**35.-** En la figura: $m\angle IHD = m\angle DHF = 45°$. Asimismo reconocemos que el $\Delta DFH$ es rectángulo e isósceles.




En el ⊾HFB:

$$HF = h_1 \,.\, \tan\alpha \;\Rightarrow\; HF = FD = BC$$

En el ⊾HDA: $\quad HD = h_2 \tan\alpha$

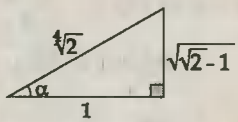
En el ⊾HFD: Por teorema de Pitágoras

$$(\overline{HD})^2 = (\overline{HF})^2 + (\overline{FD})^2$$

$$\Rightarrow \quad h_2^{\,2}\tan^2\alpha = h_1^{\,2}\tan^2\alpha + h_1^{\,2}.\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{2}\,h_1$$

En el ⊾ BCA: $\tan\alpha = \dfrac{h_2 - h_1}{h_1\tan\alpha} \;\Rightarrow\; \tan^2\alpha = \dfrac{h_1(\sqrt{2}-1)}{h_1}$




$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ : que permite elaborar el gráfico adjunto.

$\therefore$ $\boxed{\sec\alpha = \sqrt[4]{2}}$

**36.-** Sea PQ = $3\sqrt{2}\,m$

En el ⊾BAQ es isósceles $\quad\Rightarrow\quad AQ = AB = h$.

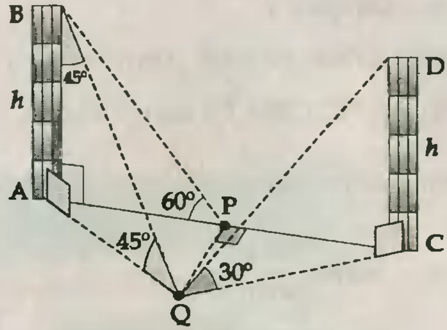
En el ⊾BAP $\Rightarrow$ AP = AB cot 60° $\Rightarrow$ $AP = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

En el ◺APQ: Por el teorema de Pitágoras.

$$(\overline{AQ})^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{PQ})^2$$

$$\Rightarrow \; h^2 = \frac{h^2}{3} + (3\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \; \frac{2h^2}{3} = 18 \; \Rightarrow \; h = 3\sqrt{3}\ m$$




En el ◺QCD:

$$QC = CD \cot 30° = h\,.\,\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3} = 9\ m$$

Aplicando el teorema de Pitágoras : $(PC)^2 = (QC)^2 - (PQ)^2 = (9)^2 - (3\sqrt{2})^2 = 81 - 18$

$$\Rightarrow \; PC = \sqrt{63} \qquad \therefore \qquad \boxed{PC = 3\sqrt{7}\ m}$$

**37.-** En la figura: $AR = x\ m$ ; $DR = y\ m$

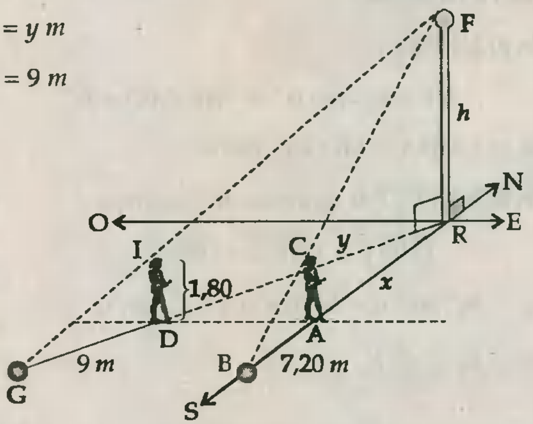
Según datos: $AB = 7{,}20\ m$ ; $CD = 9\ m$

En el ◺GDI y el ◺GRF tenemos:

$$\frac{h}{1{,}80} = \frac{9+y}{9} \; \ldots \; (1)$$

En el ◺BRF y el ◺BAC tenemos:

$$\frac{h}{1{,}80} = \frac{7{,}20+x}{7{,}20} \; \ldots \; (2)$$




De (1) y (2): $$\frac{9+y}{9} = \frac{7{,}20+x}{7{,}20}$$

$$9(7{,}20) + 7{,}20y = 9(7{,}20) + 9x$$

$$\frac{36}{5}y = 9x \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{x}{y} = \frac{4}{5}}$$

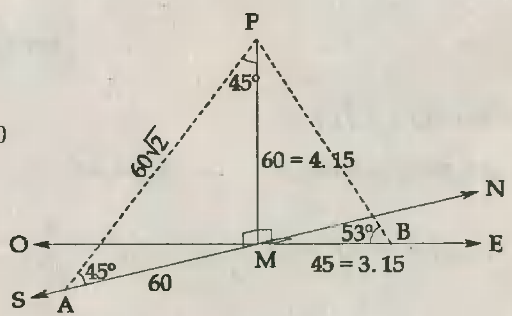
**38.-** Por dato: $AP = 60\sqrt{2}$

Como: ◺AMP es notable $PM = 60$

También:

◺PMB es notable

$$\therefore \qquad \boxed{MB = 45\ m}$$



**39.-** En el ⊿ AMB:

Hacemos: $MB = 4k$

$AM = 3k$

$\Rightarrow\ HR = 3k \wedge PR = 2k$

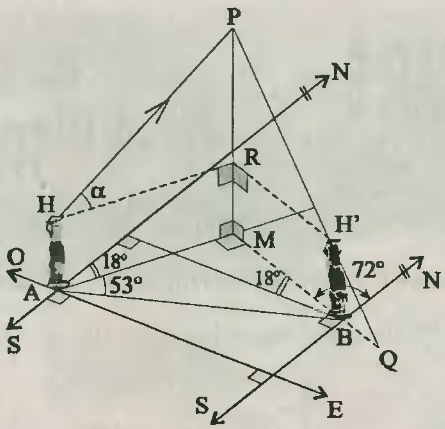
Pues: $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$

⊿ PRH' ≅ ⊿H'BQ

$$\frac{2k}{4k} = \frac{1}{BQ}$$

$\therefore\quad BQ = 2m$

La sombra mide: **2 m**




**40.-** Sea: $CD = h$ ; $AG = H$

En ⊿FDC $\Rightarrow$ $FD = h\cot\theta$

En ⊿ FGA $\Rightarrow$ $FG = H\cot\theta$

En ⊿ FDG $\Rightarrow$ es isósceles

$\Rightarrow$ $FD = FG \text{ sen } 45°$

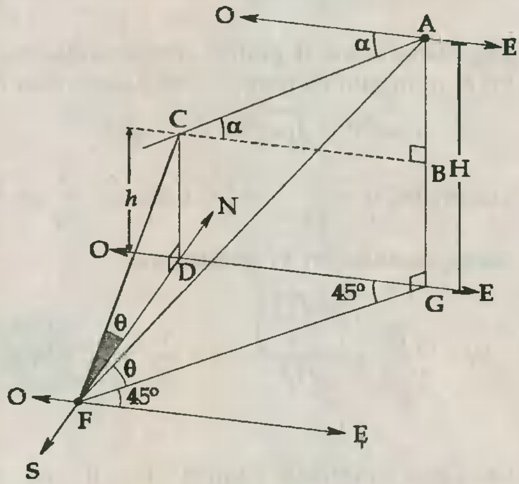
$$h\cot\theta = H\cot\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\quad H = \sqrt{2}\,h.$

En ⊿CBA: $\tan\alpha = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AB}{DG} = \dfrac{AB}{FD}$

$$\tan\alpha = \frac{H-h}{h\cot\theta} = \frac{h(\sqrt{2}-1)}{h\cot\theta}$$

$$= \boxed{(\sqrt{2}-1)\cdot\tan\theta}$$

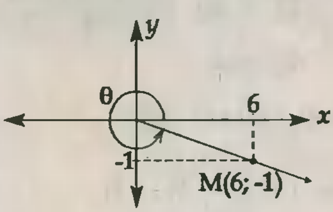


# CAP. 6 R. T. de Ángulos en el Plano Cartesiano

## *RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL*

**01.-** Graficando según los datos del problema, reconocemos que:

$$x = 6 \quad ; \quad y = -1$$



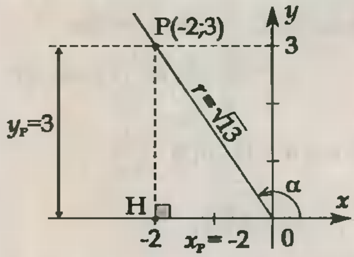

Luego: $r = \sqrt{6^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$

Finalmente: $E = \sqrt{37}\left(\dfrac{\sqrt{37}}{-1}\right) - \dfrac{6}{(-1)}$

$\therefore$ $\boxed{E = -43}$

**02.-** Elaboramos el gráfico correspondiente indicando el ángulo en posición normal $\alpha$. En el triángulo rectángulo PHO se verifica que:

$$r = OP = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$$




Luego: $\csc\alpha = \dfrac{r}{y_P} = \dfrac{\sqrt{13}}{3} \wedge \sec\alpha = \dfrac{r}{x_P} = \dfrac{\sqrt{13}}{-2}$

Reemplazando en W obtenemos:

$$W = \frac{\sqrt{13}}{\dfrac{\sqrt{13}}{3}} - \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)}{\sqrt{13}} = 3 + \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{7}{2}}$$

**03.-** De la condición: $9\tan^2\alpha - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \dfrac{4}{3} \wedge \tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$

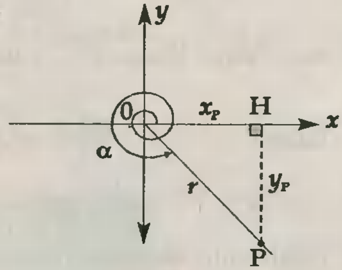
Dado que: $7\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 4\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \in IVC \Rightarrow \tan\alpha < 0 \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{-4}{3}$ ... (*)

Sea $P = (x_P\,;\,y_P)$ un punto que pertenece al lado final del ángulo $\alpha$ en posición normal. Luego al aplicar la R.T. de (*), se puede establecer que:

$$\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{-4}{+3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_P = 4 \\ x_P = 3 \end{array}$$

Haciendo: $y_P = -4 \; ; \; x_P = +3$

Luego: $\quad r = OP = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5$




$\therefore \quad \csc\alpha = \dfrac{r}{y_P} = \dfrac{5}{4} \quad ; \quad \cot\alpha = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{+3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$

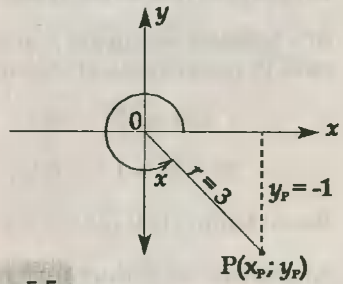
Finalmente, obtenemos: $\quad W = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$

$$\therefore \quad \boxed{W = -2}$$

**04.-** Efectuando como sigue: $\qquad -\,0{,}25 = \text{sen}\, x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x + \ldots$

$-\dfrac{1}{4} = \text{sen}\, x\,[1 + \underbrace{\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x + \ldots}_{-\frac{1}{4}}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{4} = \text{sen}\, x\left(\dfrac{3}{4}\right) \;\Rightarrow\; \text{sen}\, x = -\dfrac{1}{3} = \dfrac{y_P}{r}$

Como: $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \quad \Rightarrow \quad x \in \text{IVC}$




Por el teorema de Pitágoras:

$x_P = \sqrt{r^2 - (y_P)^2} \Rightarrow x_P = \sqrt{3^2 - (-1)^2} = 2\sqrt{2}$

Luego: $W = \sqrt{2}\,(\sec x - \cot x)$

$\Rightarrow \quad W = \sqrt{2}\left[\dfrac{3}{2\sqrt{2}} - \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{-1}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\dfrac{3+8}{2\sqrt{2}}\right] = \dfrac{11}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = 5{,}5}$

**05.-** Escribiendo como sigue la condición: $\qquad \text{sen}\,\theta = -\dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{2}{25} + \ldots\right)}_{\text{"n" términos}}$

Luego: $\qquad \text{sen}\,\theta = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

$\Rightarrow \qquad \text{sen}\,\theta = -\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{-n}{2n+1} \ldots (*)$

Como: $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\cos\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \in \text{III C}$

Luego de (*): $y = -n$ , $r = 2n + 1$ , $x < 0$ , siendo $(x\,;y)$ un punto del lado final de «θ» y $r$ su radio vector.

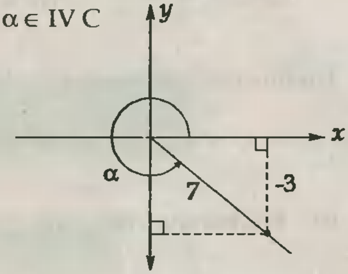
$\Rightarrow \qquad x^2 = (2n + 1)^2 - n^2 = (2n + 1)(n + 1) \quad \Rightarrow \qquad x = -\sqrt{3n+1}\,.\,\sqrt{n-1}$

Luego: $\quad M = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}\left(\dfrac{-n}{-\sqrt{3n+1}.\sqrt{n+1}} - \dfrac{(2n+1)}{-\sqrt{3n+1}.\sqrt{n+1}}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{3n+1}{3n+1} = 1}$

06.- Como: $\left(\sqrt[3]{\cos\alpha}\right)^{\operatorname{sen}\alpha} = (\sec\alpha)^{7^{-4^{0}}} \Rightarrow (\cos\alpha)^{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3}} = (\sec\alpha)^{\frac{1}{7}} = (\cos\alpha)^{-\frac{1}{7}}$

Luego: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{3} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{3}{7}$ , $\alpha \in$ IV C

$\Rightarrow x^2 = 7^2 - (-3)^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$




Finalmente, reemplazando en M tendremos:

$$M = 7\left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right) + 3\left(\frac{2\sqrt{10}}{-3}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$$

## SITUACIONES GRÁFICAS

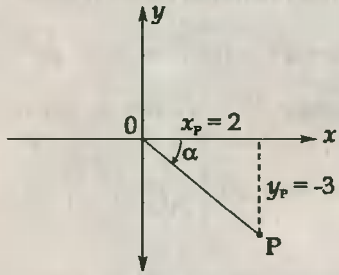
07.- Nuestra estrategia consistirá en determinar las coordenadas del punto de intersección P; resolviendo el sistema de ecuaciones dado:

$x + 3y = -7 \ldots (1)$

$5x + 2y = 4 \ldots (2)$

Resolviendo (1) y (2): $x = 2$ ; $y = -3$

Al graficar, se deduce que: $r = \sqrt{13}$



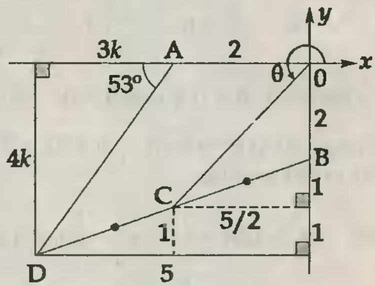

Finalmente: $W = \tan\alpha + \sec^2\alpha = \dfrac{-3}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{-3}{2}\cdot\frac{2}{2} + \frac{13}{4} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad \boxed{W = 1{,}75}$$

08.- Utilizando la ordenada del punto «D» y haciendo que: $4k = 4$

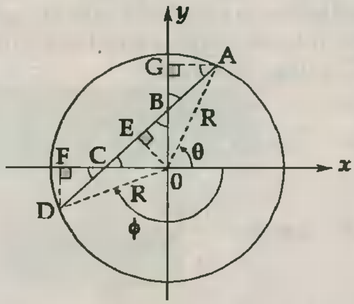
$k = 1 \rightarrow OA = OB = 2$

De la figura: $C\left(-\dfrac{5}{2};-3\right)$: Punto del lado final del ángulo en posición normal "θ"




Luego: $M = 5\left(\dfrac{-3}{-\frac{5}{2}}\right) - 6\left(\dfrac{\frac{-5}{2}}{-3}\right) = 6 - 5 \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**09.-** Sea OA = OD = R, radio de la circunferencia. Reconociendo que el triángulo AOD es isósceles, trazamos $\overline{EO} \perp \overline{AD}$. De este modo se evidencia que $\overline{EO}$ es altura, mediana, mediatriz y bisectriz interior del $\Delta AOD$.




Hagamos que: $AB = BC = CD = k$

En el ⊾ COB $\Rightarrow$ $OC = OB = \dfrac{k\sqrt{2}}{2}$

En el ⊾ CFD $\Rightarrow$ $CF = FD = \dfrac{k\sqrt{2}}{2}$

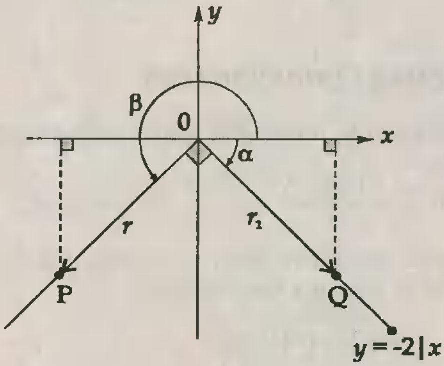
En el ⊾ AGB $\Rightarrow$ $GA = GB = \dfrac{k\sqrt{2}}{2}$

De este modo podemos reconocer que las coordenadas de A y D son:

$$A = (x_A ; y_A) = \left(\frac{k\sqrt{2}}{2} ; k\sqrt{2}\right) \quad \wedge \quad D = (x_D ; y_D) = \left(-k\sqrt{2} ; -\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)$$

Finalmente: $W = \tan\theta - \tan\phi \Rightarrow W = \dfrac{k\sqrt{2}}{\dfrac{k\sqrt{2}}{2}} - \left(\dfrac{\dfrac{k\sqrt{2}}{2}}{-k\sqrt{2}}\right) = 2 - \dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore$ **W = 1,5**

**10.-** Sean P y Q dos puntos que pertenecen a los lados finales de los ángulos $\beta$ y $\alpha$. Teniendo en cuenta que la gráfica corresponde a la función: $y = -2|x|$, evaluaremos así:




Si: $x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -2|-1| = -2$

$\Rightarrow \quad P = (-1; -2)$

Si: $x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -2|\ 1| = -2$

$\Rightarrow \quad Q = (1; -2)$

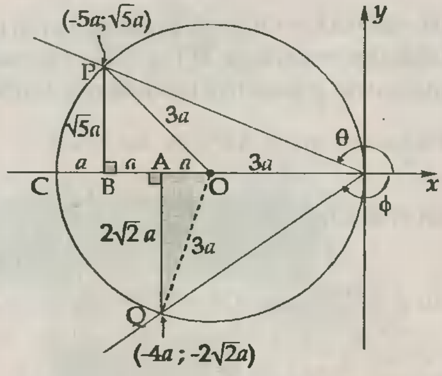
De este modo deducimos que:

$$OP = r = \sqrt{5} \quad \wedge \quad OQ = r_1 = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad \wedge \quad \sec\alpha = \sqrt{5}$$

Finalmente: $W = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sec\alpha - \sqrt{5}\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}) - \sqrt{5}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad \therefore$ **W = 3**

**11.-** Nuestra estrategia consistirá en determinar las coordenadas de los punto de intersección entre los lados finales de los ángulos dados y la circunferencia. Para este propósito asumiremos que el radio de ésta mide $3a$, con lo cual se puede utilizar la relación dada entre los segmentos OA, AB y BC. Luego se tendrá:




Punto P: $\cot\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

Punto Q: $\tan\phi = \dfrac{-2\sqrt{2}}{-4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $M = -\sqrt{5} + \sqrt{10}\,.\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M = -\sqrt{5} + \sqrt{5} \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$

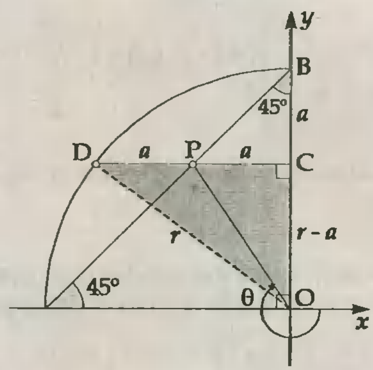
**12.-** En el ⊾ OCD: $r^2 = (r-a)^2 + (2a)^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = r^2 - 2ar + a^2 + 4a^2 \quad \Rightarrow \quad 2ar = 5a^2$

Luego: $r = \dfrac{5}{2}a \Rightarrow r - a = \dfrac{5}{2}a - a = \dfrac{3}{2}a$

De este modo: $P(-a;\ \dfrac{3}{2}a)$

Luego: $\cot\theta = \dfrac{-a}{\dfrac{3}{2}a} \quad \therefore \quad \boxed{\cot\theta = -\dfrac{2}{3}}$



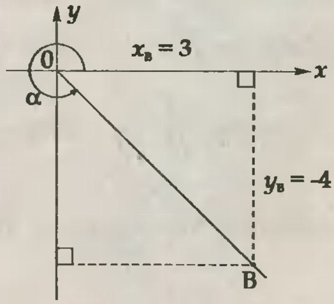

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**13.-** Aplicando la propiedad dada, las coordenadas del baricentro B será:

$$B = \left(\frac{-1+4+6}{3}\ ;\ \frac{-5+3+10}{3}\right) = (3;-4)$$

Elaborando un gráfico de B y sus coordenadas, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

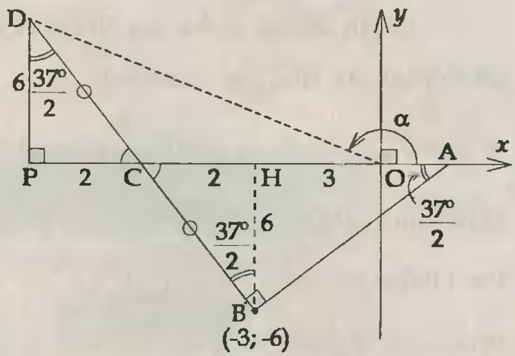



De este modo se tendrá que:

$W = 5(\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad W = 5\left[\dfrac{-4}{5} - \dfrac{3}{5}\right]$

$\therefore \quad \boxed{W = -7}$

14.- Sobre el gráfico dado, indicamos el ángulo trigonométrico «α» reconocemos que el ∠ HAB es notable, nuestra estrategia consistirá en hallar las coordenadas del punto D.




En el ⊿ DHC: $\quad HC = 6.\tan\dfrac{37^\circ}{2} = 2$

Por congruencia entre ⊿CPD y ⊿CHB:

$$HC = PC = 2$$

Se pueden hallar las coordenadas de «D»:

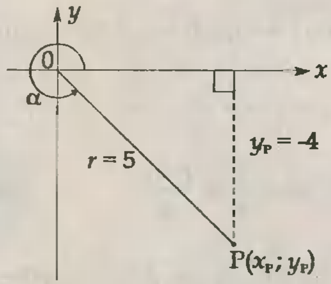
$$D = (-7\,;6)$$

Calculamos: $\quad \tan\alpha = \dfrac{6}{-7} = \dfrac{-6}{7} \quad \wedge \quad \cot\alpha = \dfrac{-7}{6}$

Efectuando: $\quad W = \dfrac{-6}{7} + \dfrac{-7}{6} \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{-85}{42}}$

15.- Si $\tan\alpha < 0 \;\Rightarrow\; \alpha \in$ IIC ó IV C $\quad \ldots.(1)$

Si $\cos\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \alpha \in$ IC ó IV C $\quad \ldots.(2)$




De (1) y (2) podemos concluir que:

$\alpha \in$ IV C $\quad \ldots.(3)$

Del dato: $\quad 2^{2\csc\alpha} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow \quad 2^{2\csc\alpha} = (2^{-2})^{5/4}$

Como las bases son no nulas e iguales, la igualdad se verifica si los exponentes son iguales.

Luego: $\quad 2\csc\alpha = \dfrac{-5}{2} \;\Rightarrow\; \csc\alpha = -\dfrac{-5}{2} = \dfrac{5}{-4} \quad \ldots(4)$

De (3) y (4), aplicamos el teorema de Pitágoras y determinamos que: $x_P = 3$

$\Rightarrow \quad W = 5\cos\alpha - 4\cot\alpha \quad \Rightarrow \quad W = 5\left(\dfrac{3}{5}\right) - 4\left(\dfrac{3}{-4}\right)$

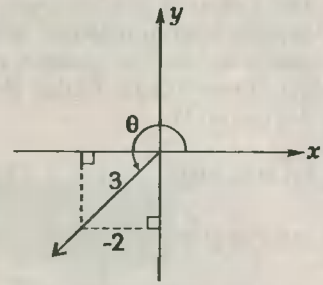
$\Rightarrow \quad W = 3 + 3 \quad \therefore \quad \boxed{W = 6}$

16.- Como: i) $\tan\theta > 0 \Rightarrow \theta \in$ IC ó IIIC

ii) $\text{sen}\,\theta < 0 \Rightarrow \theta \in$ IIIC ó IVC

De (i) y (ii) : $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow \cos\theta < 0$

$\Rightarrow |\cos\theta| = -\cos\theta \Rightarrow -\cos\theta \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\theta \leq -\frac{2}{3}$




El máximo valor de $\cos\theta$ es: $\cos\theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -2,\ r = 3$

Por Pitágoras: $y^2 = 3^2 - (-2)^2 = 5$

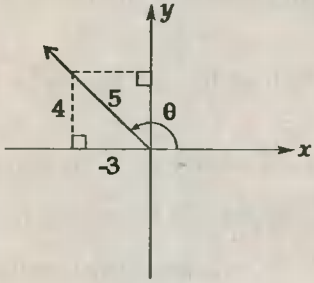
Pero: $y < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$ $\therefore$ $\boxed{\textbf{sen}\,\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}}$

17.- Analizando cada proposición tendremos:

i) $|\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta > 0 \Rightarrow \theta \in$ IC ó IIC

ii) $|\cos\theta| = -\cos\theta \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta \in$ IIC ó IIIC

De (i) y (ii) concluimos que: $\theta \in$ IIC




$\Rightarrow |\tan\theta| = -\tan\theta = 1,\hat{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow y = 4,\ x = -3 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow \csc\theta = \frac{5}{4}$

Luego: $M = \frac{5}{4} + \frac{(-3)}{4}$ $\therefore$ $\boxed{\mathbf{M = \frac{1}{2}}}$

18.- Si: $|\cos\beta| = -\cos\beta \Rightarrow \cos\beta < 0 \Rightarrow \beta \in$ IIC ó IIIC ... (1)

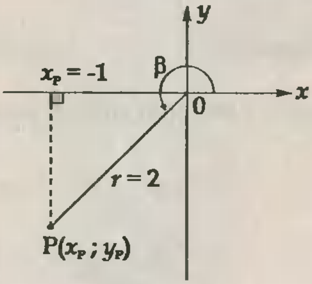
Si: $|\cot\beta| = \cot\beta \Rightarrow \cot\beta > 0 \Rightarrow \beta \in$ IC ó IIIC ... (2)

De (1) y (2) se concluye que: $\beta \in$ IIIC $\Rightarrow \sec\beta < 0$

Si: $|\sec\beta| = 2 \Rightarrow -\sec\beta = 2 \Rightarrow \sec\beta = \frac{2}{-1}$

Por el teorema de Pitágoras: $y_P = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow W = \text{sen}\,\beta \cdot \tan\beta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{-1}$




Finalmente: $W = -\frac{3}{2}$ $\therefore$ $\boxed{\mathbf{W = -1{,}5}}$

**19.-** Nuestra estrategia consistirá en utilizar las condiciones dadas para determinar el valor y signo de tan ($\alpha/2$). De este modo sec $\alpha$ se determinará por medio de la relación dada. Veamos:

Si: $|\csc\alpha| = -\csc\alpha \Rightarrow \csc\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in$ IIC ó IVC ... (1)

Si: $|\sec\alpha| = \sec\alpha \Rightarrow \sec\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in$ IC ó IVC ... (2)

De (1) y (2) se desprende que: $\alpha \in$ IV C

De la 3ra condición: $|\csc\alpha - \cot\alpha| = k$

Sustituyendo el primer miembro: $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| = k$ ... (3)

$$\text{si } \alpha \in \text{IVC} \Rightarrow 3\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow 3\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi;\ \frac{\alpha}{2} \in \text{IIC} \Rightarrow \left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| = -\tan\frac{\alpha}{2}$$

En (3): $-\tan\dfrac{\alpha}{2} = k \Rightarrow \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = -k$

De la sugerencia: $\sec\alpha = \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ $\therefore$ $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1+k^2}{1-k^2}}$

## *SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS*

**20.-** Del dato: sen $\theta > \sqrt{\cos\phi - \text{sen}\,\theta}$

a) Por definición la raíz cuadrada es mayor o igual a cero, luego:

$$\text{sen}\,\theta > 0 \Rightarrow \theta \in \text{IC ó II C} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

b) De esta misma condición se puede afirmar que:

$$\cos\phi - \text{sen}\,\theta > 0 \Rightarrow \cos\phi > \text{sen}\,\theta$$

Y por el paso (a), podemos afirmar que: $\cos\phi > 0 \Rightarrow \phi \in$ IC ó IVC

c) Según condición: $\phi > \theta \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$

$$\Rightarrow W = \underbrace{\tan\theta}_{\theta\in IIC,<0} + \underbrace{\cot\phi}_{\phi\in IVC,<0} \Rightarrow W < 0$$ $\therefore$ **W es siempre negativo**

**21.-** De la condición: $\pi < \theta < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi$

Luego: $\frac{\theta}{2} \in IIC \quad \Rightarrow \quad \csc\frac{\theta}{2}$ es (+)

De la otra condición : $0 < \alpha < \pi$

Sumando $2\pi$ en cada miembro: $2\pi < 2\pi + \alpha < 3\pi$

Dividiendo entre 2: $\pi < \frac{2\pi + \alpha}{2} < \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi + \alpha}{2} \in IIIC$

Entonces: $\tan\left(\frac{2\pi + \alpha}{2}\right)$ es (+)

Finalmente el signo de M será: $M = (+) + (+) = \boxed{(+)}$

**22.-** Por definición de valor absoluto: $|\text{sen}\,\theta| = -\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad -\text{sen}\,\theta > 0$

$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \in III\,C$ ó $\theta \in IV\,C \ldots (*)$

De esta conclusión: $\csc\theta < 0$

Luego de la condición: $\csc\theta \,.\, \cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \in IIC$ ó $\theta \in IIIC \ldots (**)$

De (*) $\wedge$ (**) concluimos que: $\theta \in IIIC \quad \Rightarrow \quad 180^\circ < \theta < 270^\circ$

Dividiendo por 3 se tiene: $60^\circ < \frac{\theta}{3} < 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{3} \in IC \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\frac{\theta}{3}$ es (+)

Asimismo: $45^\circ < \frac{\theta}{4} < 67{,}5^\circ \Rightarrow \quad \frac{\theta}{4} \in IC \quad \Rightarrow \quad \cot\frac{\theta}{4}$ es (+)

Del mismo modo: $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ \Rightarrow \quad 135^\circ < \frac{\theta}{2} + 45^\circ < 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{\theta}{2} + 45^\circ\right) \in IIC \quad \Rightarrow \quad \sec\left(\frac{\theta}{2} + 45^\circ\right)$ es (-)

Finalmente el signo de M será: $M = (+)\,.\,(+)\,.\,(-) \quad \therefore \quad \boxed{M = (-)}$

**23.-** Como: i) $\text{sen}\,\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \in IIIC \vee \mathbf{IV\,C}$

ii) $\cot\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \in IIC \vee \mathbf{IV\,C}$

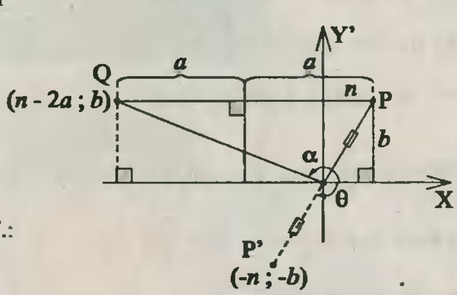
De (i) y (ii) se puede concluir que: $\theta \in IVC \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad ...(*)$

a) Dividiendo (*) por 2, se tiene: $\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} \in IIC \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\frac{\theta}{2} = (+)$

b) Multiplicando (*) por 2/3, se obtiene: $\pi < \frac{2\theta}{3} < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\theta}{3} \in$ IIIC $\Rightarrow \tan\frac{2\theta}{3} = (+)$

c) Dividiendo (*) por 8, se obtiene: $\frac{3\pi}{16} < \frac{\theta}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\theta}{4} \in$ IC $\Rightarrow \sec\frac{\theta}{4} = (+)$

**24.-** Colocándolos ángulos en posición normal para ello trasladamos el origen del sistema.




$\alpha \in$ IIC $\Rightarrow |\cot\alpha| = -\cot\alpha$

$\theta \in$ IIIC $\Rightarrow |\cot\theta| = \cot\theta$

Se dice:

$H = \cot\theta + (-\cot\alpha)$; aplicando definición de R.T.:

$$H = \frac{-n}{-b} - \left(\frac{n-2a}{b}\right) = \frac{n-n+2a}{b} \quad \therefore \quad \boxed{H = \frac{2a}{b}}$$

**25.-** Nuestra estrategia consistirá en analizar radicandos que figuran en los términos de la desigualdad dada:

$$\sqrt[3]{-\sec\theta} < 0 < \sqrt{-\text{sen}\theta}$$

i) $-\text{sen}\,\theta > 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta < 0 \Rightarrow \theta \in$ IIIC ó IV C

ii) $-\sec\theta < 0 \Rightarrow \sec\theta > 0 \Rightarrow \theta \in$ IC ó IV C

De (i) y (ii): $\theta \in$ IVC

Luego el signo será: $M = (-) + (-)(+) = (-) + (-) \quad \therefore \quad \boxed{M = (-)}$

## *RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES*

**26.-** Los fundamentos en los que nos basaremos, para la resolución, provienen de la definición de raíz cuadrada. Así tendremos que:

Si: $\cos\beta = \sqrt{\text{sen}\theta - \sqrt{\text{sen}\alpha}} \Rightarrow \cos\beta \geq 0 \wedge \text{sen}\,\alpha \geq 0 \wedge \text{sen}\,\theta \geq 0 \ldots (*)$

También: $\text{sen}\,\theta > \text{sen}\,\alpha \ldots (**)$

Puesto que: α, β, θ son ángulos cuadrantales ubicados en el intervalo [0° ; 270°], las relaciones de (*) y (**) se verifican si: $\text{sen}\,\theta = 1$ ; $\text{sen}\,\alpha = 0$ ; $\cos\beta = +1$

$$\theta = 90° \quad , \quad \alpha = 180° \quad , \quad \beta = 0°$$

Luego: $\cos(\alpha+\beta+\theta) = \cos(180^\circ + 0^\circ + 90^\circ) = \cos 270^\circ = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\cos(\alpha+\beta+\theta) = 0}$

**27.-** Analizando los radicandos de la expresión "M" , se deduce que:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)}\ \theta - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \geq 2 \\ \text{b)}\ 4 - \theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2 \leq \theta \leq 4$$

El menor ángulo cuadrantal que pertenece a [2 ; 4] es: $\pi rad \approx 3{,}1416\ rad$

$\Rightarrow\ R = \text{sen}\,\pi + \tan\pi + \cos\pi \quad \Rightarrow \quad R = 0 + 0 + (-1) \quad \therefore \quad \mathbf{R = -1}$

**28.-** Como: $\text{sen}\,\alpha = \tan\theta + 1 \wedge \alpha$ y $\theta$ son cuadrantales, podemos inferir que:

a) $\text{sen}\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\tan\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$ ó $\pi$

Dado que $\theta$ es positivo: $\theta = \pi$

Luego: $M = \dfrac{\text{sen}\pi + \text{sen}3\pi/2}{\tan\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{0-1}{1} \quad \therefore \quad \boxed{M = -1}$

**29.-** Al inspeccionar la expresión "M", se puede reconocer que:

a) $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$ ó $\alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = +1 \vee \cos\alpha = -1$

b) $\beta \neq 0,\ \pi,\ 2\pi \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ó $\beta = 3\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cot\beta = 0 \quad \wedge \quad \cos\beta = 0$

A continuación inspeccionaremos cada término por separado:

$$B = \sqrt{\underbrace{\cot\beta}_{0} - \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$C = \sqrt{\underbrace{\cos\alpha}_{-1} - \underbrace{\cos\beta}_{0} + \text{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$A = \sqrt{\tan\alpha + \text{sen}\beta + \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Finalmente: $M = 1 + 0 + 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$

**30.-** Como: $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{15}{17}$ y $\alpha \in$ IIIC

a) De la definición del seno: $y = -15 \wedge r = 17$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 17^2 - (-15)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = -8\,(x < 0)$$

b) Luego como "$\alpha$" y "$\theta$" son coterminales:

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \tan\theta = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$$

c) De la figura: $\alpha - \theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha - \theta) = 0$

Finalmente: $M = \dfrac{15}{8} + \dfrac{15}{8} + 0 \quad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{15}{4}}$

**31.-** Sean "$\alpha$" y "$\beta$", ($\alpha > \beta$), los ángulos coterminales dados, nuestra estrategia consistirá en establecer las relaciones existentes entre estos ángulos que nos permita determinar el número ($n$) exacto de vueltas que los diferencia, para que sea posible identificar al menor de ellos a partir de sus valores. Veamos:

a) De la 1ra condición: $\alpha + \beta = 1320°$ ... (1)

b) De la 2da condición: $900° < \alpha < 1200°$ ... (2)

c) Por teoría se sabe que: $\alpha - \beta = 360°n \ , \ n \in \mathbb{Z}$ ... (3)

Efectuando (1) + (2) y simplificando: $\alpha = 180°\,n + 660°$ ... (4)

Reemplazando (4) en (2): $900° < 660° + 180°\,n < 1200°$

$$\Rightarrow \quad 1{,}3 < n < 3 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

Reemplazando en (4): $\alpha = 180°\,(2) + 660° = 1020°$

Reemplazando en (1): $\beta = 1320° - 1020° = 300° \quad \therefore$ **«300°: es el menor»**

**32.-** Decodificando la proporción establecida en la condición del problema, tendremos:

$$\frac{2\beta}{\alpha + \beta} = \frac{13}{23} \quad \Rightarrow \quad 46\beta = 13\alpha + 13\beta \quad \Rightarrow \quad 33\beta = 13\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{13}{33}\alpha \quad \ldots (1)$$

Y según la otra condición, se debe cumplir que: $\alpha - \beta = k(360°)$ ... (2)

Sustituyendo (1) en (2): $\alpha - \frac{13}{33}\alpha = k\,(360°)$

$$\Rightarrow \quad \frac{20}{33}\alpha = k(360°) \quad \Rightarrow \quad \alpha = k(594°)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

De (1) reconocemos que $\alpha$ es el mayor, luego según condición del problema:

$$1100° < \alpha < 1300° \quad \Rightarrow \quad 1\,100° < k(5940) < 1\,300°$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}85 < k < 2{,}18 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Finalmente el mayor ángulo mide: $\alpha = 2(594°) \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 1\,188°}$

**33.-** Procediendo como en el ejercicio anterior, sean $\alpha$ y $\beta$ los ángulos coterminales positivos, tal que $\alpha > \beta$ , entonces se cumplirá:

$$\alpha - \beta = k(360°)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

De la condición: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2}\beta \Rightarrow \frac{7}{2}\beta - \beta = k(360°)$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}\beta = k(360°) \quad \Rightarrow \quad \beta = k(144°) \quad \ldots (*)$$

Pero también de la condición: $1\,200° < \alpha - \beta < 1\,500° \Rightarrow 1\,200° < k(360°) < 1\,500°$

$$\Rightarrow \quad 3{,}33 < k < 4{,}167 \quad \Rightarrow \quad k = 4 \in \mathbb{Z}$$

En (*): $\beta = 4(144°) \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 576°}$

**34.-** Sean $\alpha$ y $\beta$ los ángulos coterminales negativos, tal que $\alpha > \beta$ de la condición: $\beta = 7k$ y $\alpha = 5k$ , lo que por ser coterminales verifican: $7k - 5k = 360°n \;\rightarrow\; k = 180°n$

Además se sabe que:

$$540° < \alpha - \beta < 900° \;\Rightarrow\; 540° < 7k - 5k < 900° \;\Rightarrow\; 540° < -2k < 900°$$

$$\Rightarrow \; 270° < -180°n < 450° \;\Rightarrow\; 3 < -2n < 5$$

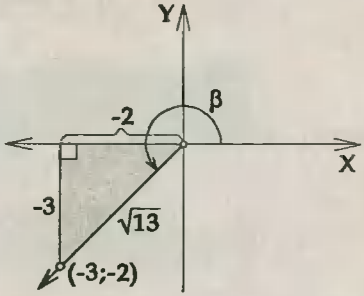
De donde reconocemos que: $n = -1$ (único entero que verifica la desigualdad)

Finalmente el mayor de los ángulos mide:

$$\alpha = 5k = 5(180°)(-1) \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = -900°}$$

**35.-** A partir del gráfico notamos que los valores de $x$ e $y$ son negativos; por ello al utilizar el dato de la tangente y expresarse bajo la forma de una razón, tendremos:

$$\tan\beta = 1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{-3}{-2}$$

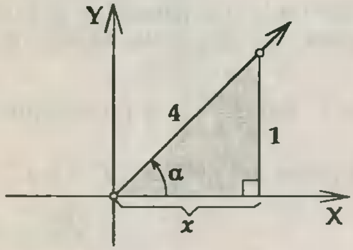



De donde: $\sec\beta = \dfrac{\sqrt{13}}{-2}$ , *y* , $\csc\beta\ \dfrac{\sqrt{13}}{-3}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\frac{\sqrt{13}}{-2} - \frac{\sqrt{13}}{-3}\right\}$$

$$\Rightarrow\ M = \frac{-3+2}{6}\ \therefore\ \boxed{M = \frac{-1}{6}}$$

**36.-** Por dato: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}25 = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$




Como: $\alpha \in$ I Q, podemos reconocer que el valor de $x$ es positivo, tal como se indica en el gráfico. Luego aplicando Pitágoras encontramos:

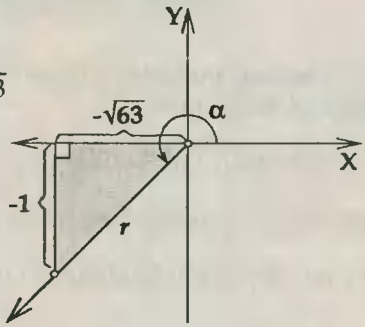
$$x^2 + 1^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 16$$

$$x^2 = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{15}$$

Finalmente: $\csc\alpha + \cot^2\alpha = \dfrac{4}{1} + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{1}\right)^2 = 4 + 15 \quad \therefore \quad \boxed{\csc\alpha + \cot^2\alpha = 19}$

**37.-** Del dato: $\sqrt{1+\cot^2\alpha} = 8 \quad \Rightarrow \quad 1 + \cot^2\alpha = 64$

$$\cot^2\alpha = 63 \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha = \pm\sqrt{63}$$




Como: $\alpha \in$ III Q , entonces $\cot\alpha$ es positiva

Luego: $\cot\alpha = \sqrt{63}$

Asimismo: $r^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{63})^2$

$$r^2 = 1 + 63 = 64 \quad \Rightarrow \quad r = 8$$

Finalmente : $(8\sec\alpha)^3 = \left(8.\dfrac{8}{-\sqrt{63}}\right)^3 \quad \therefore \quad \boxed{(8\sec\alpha)^3 = -\dfrac{8^6}{63\sqrt{63}}}$

**38.-** Haciendo uso de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales, tendremos:

$$R = \frac{a^2 \overbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}^{1} + 2ab\overbrace{\cos 0}^{1} - b^2 \overbrace{\text{sen}\frac{3\pi}{2}}^{-1}}{(a-b)^2 \underbrace{\cos 720^\circ}_{1} + 4ab}$$

Efectuando, obtendremos: $R = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^2+4ab} \Rightarrow R = \dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2-2ab+4ab}$

$$\Rightarrow\quad R = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2ab} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} \qquad\therefore\qquad \boxed{R = 1}$$

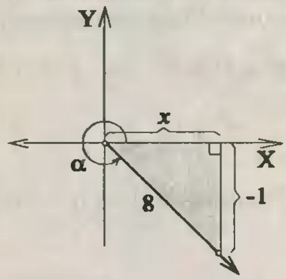
**39.-** Efectuando, las potencias de potencias, tendremos: $(\cos\alpha)^{1/8} = (\cos\alpha)^{-\text{sen}\,\alpha}$

Dado que trabajamos en el campo de los números reales diremos que : *Si las bases son iguales, los exponentes también lo serán:*

$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{8}$ , y puesto que: $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad\Rightarrow\quad \alpha \in \text{IV Q}$

A partir del gráfico : $x^2 + (-1)^2 = 8^2 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 63$

$$x = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$




Finalmente: $\cot\alpha - \cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{-1} - \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$$\boxed{\cot\alpha - \cos\alpha = -\frac{27\sqrt{7}}{8}}$$

**40.-** Del gráfico podemos calcular "$R$", para lo cual aplicaremos la distancia entre dos puntos; así tendremos :

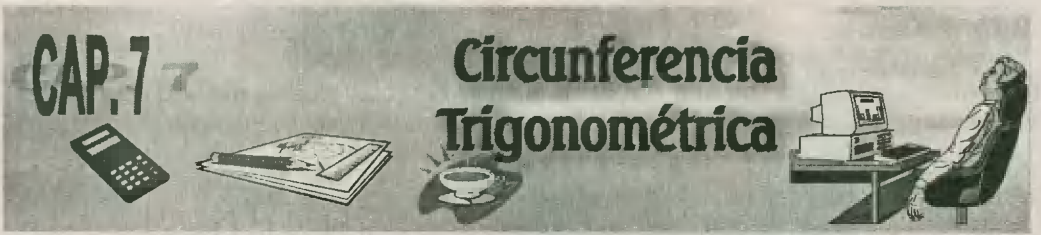
$$R^2 = (2a)^2 + a^2 = (-4)^2 + (-a)^2 \qquad\Rightarrow\qquad 4a^2 = 16$$

Luego: $a = 2$ , y puesto que : $R^2 = 5a^2 \quad\Rightarrow\quad R = 2\sqrt{5}$

Ahora por definición tendremos que:

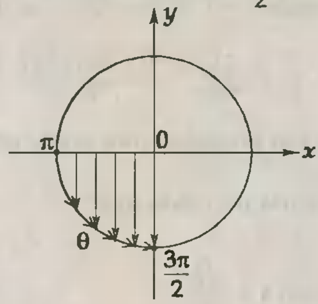
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{R} = \frac{-a}{R} = \frac{-2}{2\sqrt{5}}, \quad y, \quad \cos\theta = \frac{x}{R} = \frac{2a}{R} = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

Finalmente: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\theta = \dfrac{4}{20} + \dfrac{16}{20} = \dfrac{20}{20} = 1 \qquad\therefore\qquad \boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\theta = 1}$




### *LÍNEA TRIGONOMÉTRICA SENO*

01.- De la C.T. se observa que para el rango de variación de θ: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, la linea del seno varía de modo que:



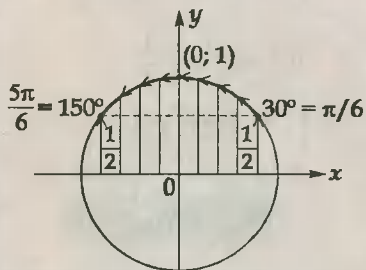

$\Rightarrow \quad 0 > \text{sen}\,\theta > -1$ , es decreciente

$\Rightarrow \quad 0 < -3\text{sen}\,\theta < 3$

$\Rightarrow \quad 5 < 5 - 3\,\text{sen}\,\theta < 8$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{4} < \frac{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}{4} < 2 \qquad \therefore \quad \boxed{W \in \left\langle \frac{5}{4}; 2 \right\rangle}$

02.- Como: 30° ≤ θ ≤ 150°, en este rango de valores la linea del seno varía de modo que:

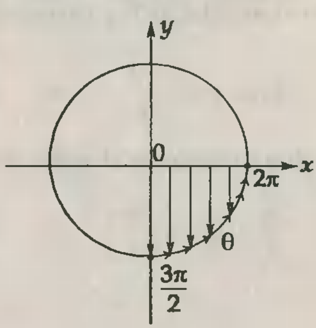



$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \text{sen}\,\theta \leq 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq 2\,\text{sen}\theta \leq 2$

$\Rightarrow \quad 4 \leq \underbrace{2\,\text{sen}\,\theta + 3}_{M} \leq 5$

$\therefore \quad \boxed{M \in [4; 5]}$

03.- De la C. T. se observa que para el rango de valores de θ, la linea del seno varía de modo que:




$\Rightarrow \quad -1 < \text{sen}\,\theta < 0$, es creciente

Sustituyendo el seno por la expresión dada:

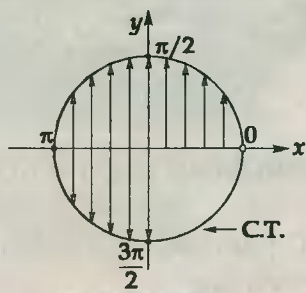
$\Rightarrow \quad -1 < \frac{4(x-2) + 3(x+1)}{12} < 0$

$\Rightarrow \quad -12 < 7x - 5 < 0$

$$-7 < 7x < 5 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < \frac{5}{7} \qquad \therefore \quad \boxed{x \in \left\langle -1; \frac{5}{7} \right\rangle}$$

**04.-** Nuestra estrategia consistirá en determinar el rango de valores de $|2x|$ y a partir de éste reconocer el intervalo de valores correspondientes del seno. Veamos:

Si: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right\rangle \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right\rangle \Rightarrow |2x| \in \left\langle 0; \frac{3\pi}{2}\right]$




Si: $-\frac{3\pi}{4} \leq x < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3\pi}{2} \leq 2x < 0$

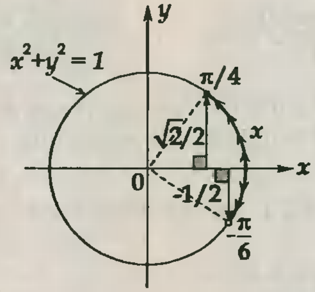
$\Rightarrow \quad 0 < |2x| \leq \frac{3\pi}{2}$

De la C.T. tenemos: $-1 \leq \operatorname{sen}|2x| \leq 1$

$$\underbrace{0}_{Wmín} \leq \underbrace{1 + \operatorname{sen}|2x|}_{W} \leq \underbrace{2}_{Wmáx} \qquad \therefore \quad \boxed{Wmín = 0}$$

**05.-** Para este caso procederemos como en el ejercicio anterior. Como: $-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4}$, la linea del seno varía de modo que:

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



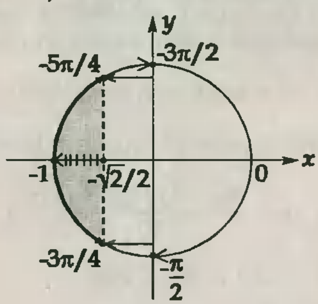

$\Rightarrow \quad 0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ mín}}{-1} \leq \underbrace{4\operatorname{sen}^2 x - 1}_{M} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ máx}}{1}$$

$$\therefore \quad \boxed{M_{máx} + M_{mín} = 0}$$

**06.-** A partir de la condición dada para los valores del coseno se puede deducir el rango de valores del arco $x$ correspondiente, que trasladado a la C.T., es como se muestra:

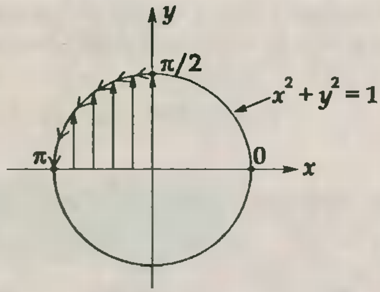
$$-1 \leq \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5\pi}{4} \leq x \leq -\frac{3\pi}{4}$$




Si ahora tomamos el valor absoluto a esta desigualdad:

$$\frac{3\pi}{4} \leq |x| \leq \frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq |x| - \frac{\pi}{4} \leq \pi$$

De este modo se concluye que: $\left(|x|-\frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$




También de la C.T. se observa que la variación del seno para este nuevo arco varía de modo que:

$$0 \le \text{sen}\left(|x|-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

$\therefore$ $\boxed{W \in [0;\, 1]}$

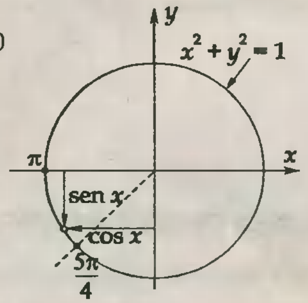
**07.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión para W, de modo que sea posible analizar su variación a partir de una expresión equivalente. Veamos:

$$W = -\,\text{sen}\, x - \sqrt{(\text{sen}x - \cos x)^2} - \cos x$$

$\Rightarrow$ $W = -\,\text{sen}\, x - \cos x - |\text{sen}\, x - \cos x|$ $\quad ...(*)$

Si: $x \in \langle \pi; 5\pi/4\rangle$ $\Rightarrow$ $\text{sen}\, x > \cos x$ $\Rightarrow$ $\text{sen}\, x - \cos x > 0$

$\Rightarrow$ $|\text{sen}\, x - \cos x| = \text{sen}\, x - \cos x$




Sustituyendo en (*), tendremos:

$\therefore$ $W = -\,\text{sen}\, x - \cos x - (\text{sen}\, x - \cos x) = -2\,\text{sen}\, x$

Si: $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $0 > \text{sen}\, x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $0 < -\,\text{sen}\, x < \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $0 < -2\text{sen}\, x < 2\sqrt{2}$ $\quad\therefore$ $\boxed{W \in \langle 0;\; 2\sqrt{2}\rangle}$

**08.-** De la figura (1) se puede establecer que:

**Fig. (1)**

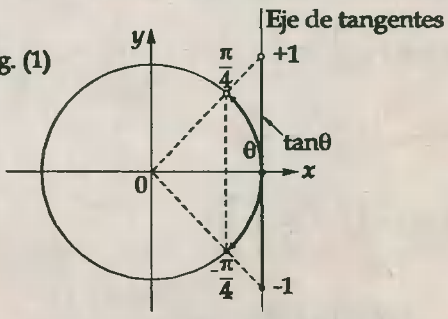
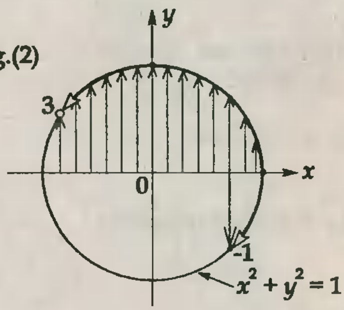



**Fig.(2)**




$$-\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad -1 \le \tan\theta < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le 2\tan\theta + 1 < 3 \quad ...(*)$$

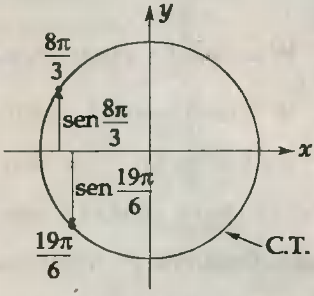
En la figura (2) se muestran los segmentos dirigidos que señalan la variación del seno cuyo arco se encuentra definido en el intervalo dado por la expresión (*). Luego:

$$\operatorname{sen}(-1) \leq \underbrace{\operatorname{sen}(2\tan\theta + 1)}_{M} \leq 1 \qquad \therefore \quad \boxed{M \in [-\operatorname{sen} 1; 1]}$$

**09.-** Trabajando con el intervalo de definición del arco se tiene:

$$\frac{5\pi}{2} \leq x \leq 3\pi \;\Rightarrow\; \frac{8\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{19\pi}{6} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\frac{8\pi}{3}) = \operatorname{sen}(\frac{6+2}{3}\pi) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}(\frac{19\pi}{6}) = \operatorname{sen}(\frac{18+1}{6}\pi) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \end{array}\right\}$$

De la C. T se observa: $-\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} \leq \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leq \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}$




Sustituyendo la condición: $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{a-\sqrt{2}}{2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{2} - 1 \leq a \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{(a)_{\text{máximo}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

### *LÍNEA TRIGONOMÉTRICA COSENO*

**10.-** Según los datos tenemos: $M = 1 + \cos x + \cos^2 x$

Completando cuadrados obtenemos: $M = \left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Sabemos por la variación de la línea coseno: $-1 \leq \cos x \leq 1\,;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Sumando 1/2 a cada miembro: $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{2}$

Elevando al cuadrado: $0 \leq \left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{9}{4}$

Sumando 3/4 cada miembro: $\dfrac{3}{4} \leq \underbrace{\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}_{M} \leq \dfrac{12}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{M \in [3/4; 3]}$$

**11.-** Por la variación de la línea coseno sabemos que: $-1 \le \cos\theta \le 1 \quad , \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$

Multiplicando por "7"a toda la expresión: $\qquad -7 \le 7\cos\theta \le 7$

Sumando -3 a cada miembro: $\qquad -10 \le 7\cos\theta - 3 \le 4$

Dividiendo por 2 a toda la expresión: $\qquad -5 \le \dfrac{7\cos\theta - 3}{2} \le 2$

Comparando esta expresión con la propuesta: $\qquad a \le \dfrac{7\cos\theta - 3}{2} \le b$

Concluimos que: $\qquad a = -5 \ \wedge \ b = 2 \qquad \therefore \quad a + b = -3$

**12.-** Sea la circunferencia trigonométrica.

I. De la figura (1) se observa: $\cos 1 > \cos 3$, es correcto.

II.De la figura (2) se observa: $|\cos 4| > \cos 5$, es correcto

III. De la figura (3) se observa: $\cos 2 > \cos 3$, es Incorrecto

Fig.(1)

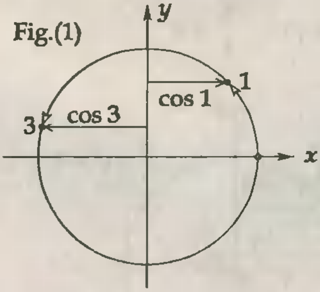



Fig.(2)

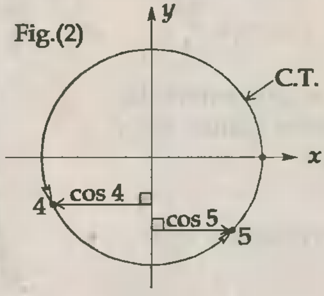
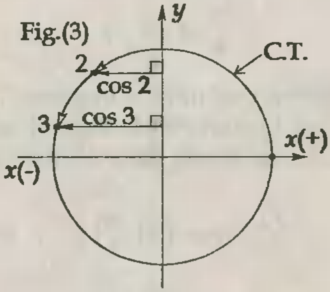



Fig.(3)




**13.-** De acuerdo con la condición del problema: $3\dfrac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

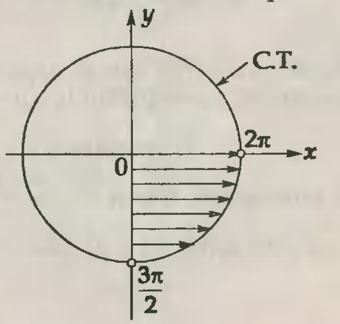
Y de la C.T. se observa que en este intervalo la variación del coseno está dada por:

$0 < \cos\theta < 1$ (creciente)

$\Rightarrow \quad 0 > -2\cos\theta > -2$

$\Rightarrow \quad 3 > 3 - 2\cos\theta > 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{5} < \dfrac{3 - 2\cos\theta}{5} < \dfrac{3}{5} \qquad \therefore \quad W \in \left\langle \dfrac{1}{5} ; \dfrac{3}{5} \right\rangle$



**14.-** De la condición dada, efectuamos la división indicada, y obtenemos:

$$W = \frac{2}{\cos\theta + 1} + 1 \; \ldots (1)$$

Asimismo, si: $\theta \in IC \Rightarrow 0 < \cos\theta < 1$

Sumando 2 a cada término, se tendrá: $1 < \cos\theta + 1 < 2$

Elevando a la -1 toda la desigualdad: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\cos\theta + 1} < 1$

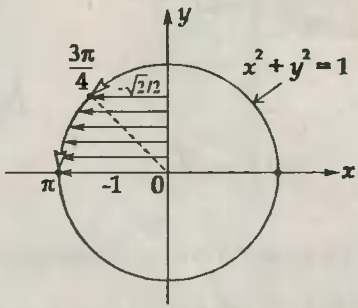
$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{\cos\theta + 1} < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < 1 + \frac{2}{\cos\theta + 1} < 3 \; \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $2 < W < 3 \quad \therefore \quad \boxed{W \in \langle 2; 3 \rangle}$

**15.-** Procederemos según como se hizo en el Prob.7. Empezaremos determinando el intervalo de valores del arco $\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$ para el coseno. Para ello, utilizaremos el intervalo dado para $x$ en la condición del problema. Veamos:

$$-\frac{5\pi}{4} \leq x \leq -\pi \quad \Rightarrow \quad \pi \leq |x| \leq \frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \leq |x| - \frac{\pi}{4} \leq \pi$$

Ahora evaluamos el coseno en este intervalo, para lo cual empleamos el recurso gráfico de la C.T., de donde reconocemos que:

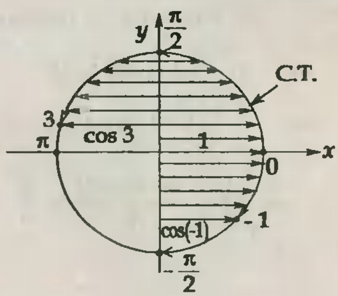



$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \cos\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \quad \text{(decreciente)}$$

$$-2 \leq 2\cos\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \leq \left|2\cos\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 2 \quad \therefore \quad \boxed{W \in [\sqrt{2}; 2]}$$

**16.-** Reconocemos que la expresión W, se puede transformar completando cuadrados:




$$W = \cos((\text{sen}\,\theta + 1)^2 - 1)$$

Se sabe que si: $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}\,\theta + 1 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq (\text{sen}\,\theta + 1)^2 - 1 \leq 3$$

De la C.T. se observa que al evaluar el coseno en el intervalo correspondiente a su arco, encontramos que sus valores están comprendidos entre los siguientes límites:

$$\cos 3 \le \cos[(\text{sen}\,\theta + 1)^2 - 1] \le 1 \quad \Rightarrow \quad W \in [\cos 3\,;\,1] \quad \therefore \quad \boxed{W_{mín} = \cos 3}$$

**17.-** Nuestra estrategia consistirá en encontrar una expresión equivalente a la propuesta para M, la cual sea posible de construir a partir de las condiciones establecidas por la R.T. que en ella se encuentra. Veamos:

a) Analizando el denominador de M, se plantea que: $2\cos\alpha - 1 \neq 0 \Rightarrow \cos\alpha \neq \frac{1}{2}$

b) Para poder efectuar la división indicada, transformamos «M» como sigue:

$$M = \frac{\frac{1}{2}(2\cos\alpha - 1) + \frac{7}{2}}{2\cos\alpha - 1} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\frac{7}{2}}{2\cos\alpha - 1} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{7}{2(2\cos\alpha - 1)} + \frac{1}{2}$$

c) Sabemos que: $\{-1 \le \cos\alpha \le 1\} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \Rightarrow \quad -3 \le 2\cos\alpha - 1 \le 1 - \{0\}$

$$\Rightarrow \quad -\infty < \frac{1}{2\cos\alpha - 1} \le -\frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \le \frac{1}{2\cos\alpha - 1} < +\infty$$

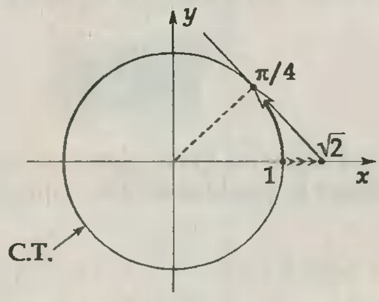
$$\Rightarrow \quad -\infty < \frac{7}{2(2\cos\alpha - 1)} \le -\frac{7}{6} \quad \vee \quad \frac{7}{2} \le \frac{7}{2(2\cos\alpha - 1)} < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad -\infty < \frac{7}{2(2\cos\alpha - 1)} + \frac{1}{2} \le -\frac{2}{3} \quad \vee \quad 4 \le \frac{7}{2(2\cos\alpha - 1)} + \frac{1}{2} < +\infty$$

$$\therefore \quad \boxed{M \in \left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right] \wedge [4; +\infty\rangle}$$

## *LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS: TAN - COT - SEC - CSC*

**18.-** Como: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, trazando la línea secante en la C.T., tenemos: $1 \le \sec\theta \le \sqrt{2}$. Luego:




$$\sec\theta = \frac{4m - 3}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 \le \frac{4m - 3}{2} \le \sqrt{2}$$

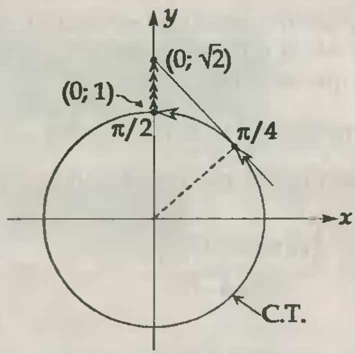
Multiplicando por "2": $\quad 2 \le 4m - 3 \le 2\sqrt{2}$

Sumando 3: $\quad 5 \le 4m \le 2\sqrt{2} + 3$

Dividiendo por 4: $\quad \frac{5}{4} \le m \le \frac{2\sqrt{2} + 3}{4} \quad \therefore \quad \boxed{m \in = \left[\frac{5}{4}; \frac{2\sqrt{2}+3}{4}\right]}$

**19.-** Reconociendo que: $\theta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, trazamos la linea cosecante en la C.T., observándose que ésta tiene valores comprendidos entre los siguientes límites:

$$1 \leq \csc\theta \leq \sqrt{2}$$




Elevando al cuadrado: $1 \leq \csc^2\theta \leq 2$

Por condición: $\csc^2\theta = \dfrac{3}{n+1} \Rightarrow 1 \leq \dfrac{3}{n+1} \leq 2$

Elevando a la -1: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n+1}{3} \leq 1$

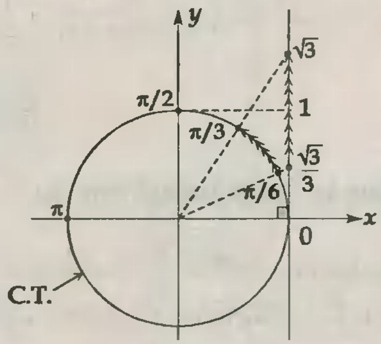
Multiplicando por 3: $\dfrac{3}{2} \leq n+1 \leq 3$

Sumando -1: $\dfrac{1}{2} \leq n \leq 2 \quad \therefore \quad \boxed{n \in \left[\frac{1}{2};\ 2\right]}$

**20.-** Para determinar el intervalo de valores del arco $x$, que verifica la relación dada en la condición, nuestra estrategia consistirá en graficar en la C.T. el resultado del análisis que hagamos de la condición establecida. Veamos:

$$-1 \leq 2 - \sqrt{3}\tan x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq -\sqrt{3}\tan x \leq -1$$

$$3 \geq \sqrt{3}\tan x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$$




De la C.T. se observa que los valores de $x$, en el intervalo de 0 a $\pi$, que verifican esta relación están comprendidos en el siguiente intervalo :

$$\boxed{x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]}$$

**21.-** La sec $x$ no toma valores comprendidos en $\langle -1; 1\rangle$, por lo tanto para que no se verifique la igualdad se debe cumplir que:

$$-1 < \sec x < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{2m+1}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad -3 < 2m+1 < 3 \quad \Rightarrow \quad -4 < 2m < 2$$

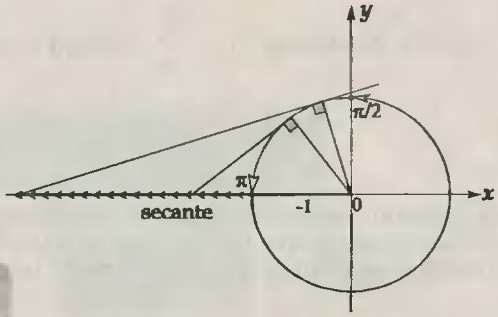
$$\Rightarrow \quad -2 < m < 1 \quad \therefore \quad \boxed{m \in \langle -2; 1\rangle}$$

**22.-** Si $\theta \in$ IIC, se verifica que los valores de la secante en dicho cuadrante están comprendidos en el siguiente intervalo:

$$\Rightarrow -\infty < \sec\theta < -1 \qquad \Rightarrow \quad -\infty < \frac{x+3}{x+2} < -1$$

$$\Rightarrow -\infty < \frac{1}{x+2} + 1 < -1 \quad \Rightarrow \quad -\infty < \frac{1}{x+2} < -2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x+2 < 0 \qquad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < -2$$




$$\therefore \qquad \boxed{x \in \left\langle -\frac{5}{2} ; -2 \right\rangle}$$

**23.-** Tal como se vienen resolviendo los casos anteriores, construiremos la expresión de W a partir del intervalo de valores para el que está definido el arco $x$. Veamos:

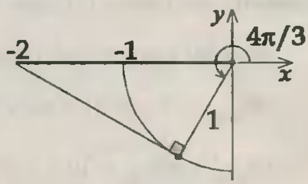
Por condición del problema: $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \pi < \dfrac{2x}{3} < \dfrac{4\pi}{3}$

Graficando este arco en la C.T., vemos que la secante tiene valores comprendidos entre los siguientes límites:

$$\Rightarrow \; -1 > \sec\left(\frac{2x}{3}\right) > -2 \qquad \Rightarrow \; 1 < \left|\sec\frac{2x}{3}\right| < 2$$

$$\Rightarrow \; -2 > -2\left|\sec\frac{2x}{3}\right| > -4 \qquad \Rightarrow \; -1 > 1 - 2\left|\sec\frac{2x}{3}\right| > -3$$

$$\Rightarrow \; -1 > -3 \qquad \therefore \qquad \boxed{W \in \langle -3 \, ; -1 \rangle}$$




**24.-** Este modelo de ejercicio se resolverá aplicando la misma estrategia que empleamos para los problemas 14 y 17. Esto lo iniciamos analizando la extensión del arco $\theta$ y desde este intervalo reconocer el intervalo de valores del seno, lo cual nos permitirá llegar a la expresión dada. Veamos:

Como $\theta \in$ IIC $\;\Rightarrow\; 0 < \text{sen}\,\theta < 1 \quad \ldots (*)$

Transformamos la expresión dada efectuado la división indicada:

$$\frac{\text{sen}\theta + 2}{\text{sen}\theta + 1} = 1 + \frac{1}{\text{sen}\theta + 1} = \csc\phi \ldots (1)$$

Ahora en (*): $\quad 1 < \operatorname{sen}\theta + 1 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta + 1} < 1 \Rightarrow \dfrac{3}{2} < 1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta + 1} < 2$

Debido a la relación (1): $\quad \dfrac{3}{2} < \csc\phi < 2 \quad \Rightarrow \quad 4 < \csc^2\phi < 4$

$$\therefore \quad \boxed{\csc^2\phi \in \left\langle \frac{9}{4} ; 4 \right\rangle}$$

25.- Sabemos que $\csc\theta$ no toma valores en el intervalo $\langle -1; 1\rangle$. Luego, para determinar los valores de $x$, que no verifican la relación dada para la cosecante, nuestra estrategia consistirá en evaluar a dicha R.T. en el intervalo que no la define. Veamos:

$$-1 < \csc\theta < 1 \Rightarrow -1 < \frac{3x+2}{2x+3} < 1 \text{ restamos } \left(\frac{3}{2}\right) \text{ a cada miembro}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{2} < \frac{-5/2}{2x+3} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{2x+3} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < 2x + 3 < 5$$

$$\Rightarrow \quad -1 < x < 1 \qquad \therefore \quad \boxed{x \in \langle -1; 1\rangle}$$

26.- En este caso, lo conveniente es determinar el intervalo en el que se encuentra definido W, de este modo sus valores extremos se constituyen en los valores mínimos y máximos que puede tomar. Nuestro procedimiento se iniciará expresando las relaciones auxiliares del seno verso y coseno verso en términos del seno y coseno, luego evaluamos los valores extremos en base a los que toman éstos en la recta numérica. Veamos:

$$W = 5(1 - \cos\alpha) - 4(1 - \operatorname{sen}\beta) \quad \Rightarrow \quad W = 1 - 5\cos\alpha + 4\operatorname{sen}\beta$$

$$\Rightarrow \quad W_{máx} = 1 - 5(-1) + 4(1) = 10 \quad \wedge \quad W_{mín} = 1 - 5(1) + 4(-1) = -8$$

$$\Rightarrow \quad W_{máx} + W_{mín} = 10 + (-8) \qquad \therefore \quad \boxed{W_{máx} + W_{mín} = 2}$$

27.- Empezaremos nuestra solución analizando el radicando de la 1ra condición, sus conclusiones serán utilizadas en el análisis de las siguientes condiciones. Veamos:

i) $\; -\operatorname{cov} y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cov} y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \operatorname{sen} y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y \geq 1$

Esta relación solo se verifica para: $\operatorname{sen} y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{9\pi}{2}; \ldots$

ii) Como: $\quad 7 < y < 9 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5\pi}{2}$

iii) De las conclusiones anteriores, se desprende que: $\operatorname{exsec} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \sec x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0; 2\pi; 4\pi; \ldots$$

Dado que: $5 < x < 7 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi$

Finalmente podemos concluir que: $x + 2y = 2\pi + 2\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) \quad \therefore \quad \boxed{x + 2y = 7\pi}$

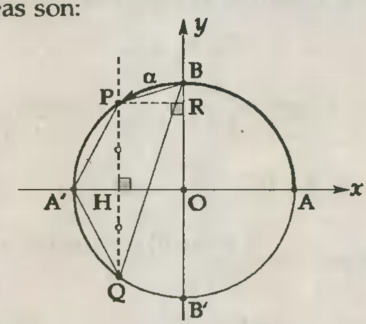
## ÁREAS EN EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

**28.-** Nuestra estrategia consistirá en seccionar la región dada en dos triángulos y determinar las áreas de éstos determinando las longitudes de sus bases y alturas correspondientes. De la C.T. reconocemos que:

$$PH = \operatorname{sen}\alpha \quad \wedge \quad PR = |\cos\alpha| = -\cos\alpha \qquad (\alpha \in IIC, \cos\alpha < 0)$$

$$A'H = AO - HO = 1 - PR \Rightarrow A'H = 1 + \cos\alpha \qquad (HO = PR)$$

Los triángulos son: $\Delta PA'Q$ y $\Delta PBQ$. La base y altura del primero son PQ y A'H; para el segundo son PQ y PR respectivamente. Luego las áreas son:



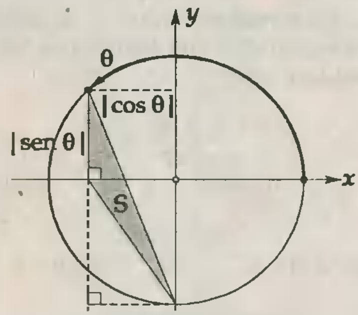

$$S = S_{\Delta PA'Q} + S_{\Delta PBQ} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{PQ.AH}{2} + \frac{PQ.PR}{2}$$

$$\Rightarrow \; S = \frac{(2\operatorname{sen}\alpha)(1+\cos\alpha)}{2} + \frac{(2\operatorname{sen}\alpha)(-\cos\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \; S = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \operatorname{sen}\alpha}$$

**29.-** En base al procedimiento seguido en el ejercicio anterior, podemos calcular el área de la región triangular indicada reconociendo que su base y altura coinciden con las líneas del seno y coseno respectivamente. Luego:



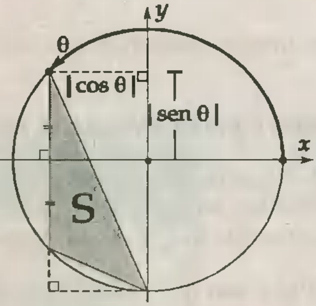

$$S = \frac{|\operatorname{sen}\theta|\,|\cos\theta|}{2}$$

Como: $\theta \in IIC \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta > 0 \quad \wedge \quad \cos\theta < 0$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left(\frac{-\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{2}\right)}$$

*) Aunque la expresión obtenida para el área presenta un signo menos (-) adelante, esto no debe significar que ésta sea negativa. El signo del área es positivo y esto se confirma porque en la expresión dada, el seno es positivo en el 2do. cuadrante mientras que el coseno es negativo en el mismo.

**30.-** Este ejercicio es una variante del anterior, por tal motivo determinamos la base del triángulo y su correspondiente altura. De la figura:




Base: $|2\text{sen}\ \theta|$ $\wedge$ Altura: $|\cos\theta|$

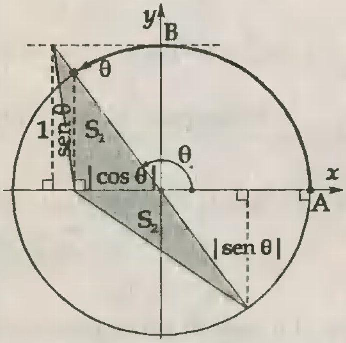
Luego la altura estará dada por:

$$S = \frac{|2\text{sen}\theta|.|\cos\theta|}{2}$$

Como: $\theta \in IIC \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \theta > 0 \quad \wedge \quad \cos\theta < 0$

$\therefore \quad \boxed{S = -(\text{sen}\ \theta\ .\ \cos\theta)u^2}$

**31.-** Reconocemos que los triángulos tienen de base común a $|\cos\theta|$. Asimismo podemos reconocer que existen dos triángulos rectángulos congruentes cuyas alturas miden sen θ. Luego de la figura se puede establecer que:




$$S = S_1 + S_2$$

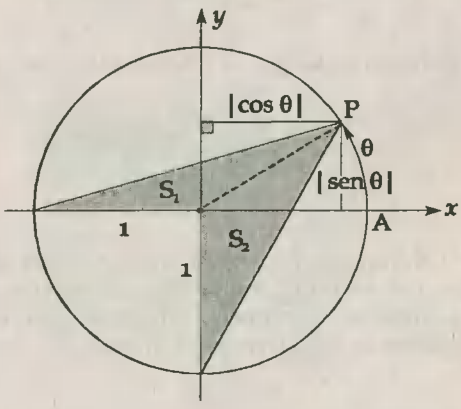
$$S_1 = \frac{|\cos\theta|}{2}.1 \quad \wedge \quad S_2 = \frac{|\cos\theta|.|\text{sen}\theta|}{2}$$

Como: $\theta \in IIC \Rightarrow \text{sen}\ \theta > 0 \wedge \cos\theta < 0$

Luego: $\quad S = \dfrac{(-\cos\theta)+(-\cos\theta)\text{sen}\theta}{2}$

$\Rightarrow S = \dfrac{-\cos\theta}{2}(1 + \text{sen}\ \theta) \quad \therefore \quad \boxed{S = \dfrac{-1}{2}\cos\theta\ (1 + \text{sen}\theta)}$

**32.-** La estrategia consiste en seccionar el gráfico original, reconociéndose que las partes son triángulos que tienen por base al radio de la C.T., es decir, de medida: 1. Luego se establece que:



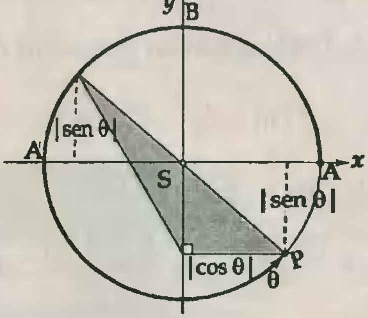

$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \frac{1.|\text{sen}\theta|}{2} \quad ; \quad S_2 = \frac{1.|\cos\theta|}{2}$$

Como: $\theta \in IC \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \theta > 0 \wedge \cos\theta > 0$

$\therefore \quad \boxed{S = \left(\dfrac{\text{sen}\theta+\cos\theta}{2}\right)}$

**33.-** De la figura:




$$S = \frac{|\cos\theta|(2|\operatorname{sen}\theta|)}{2}$$

Como: $\theta \in IVC \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < 0 \wedge \cos\theta > 0$

Luego: $S = (-\operatorname{sen}\theta \, . \cos\theta)$

$\therefore$ $\boxed{S = \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$

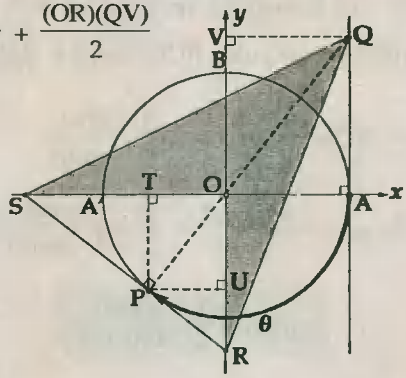
**34.-** De la figura tenemos:

a) Como: $\theta \in IIIC$, $\operatorname{sen}\theta < 0 \Rightarrow PT = |\operatorname{sen}\theta| = -\operatorname{sen}\theta$ ; $OR = -\csc\theta$

b) Como: $\theta \in IIIC$, $\cos\theta < 0 \wedge \tan\theta > 0 \Rightarrow PU = |\cos\theta| = -\cos\theta$ ; $SO = -\sec\theta$

También: $AQ = \tan\theta$ ; $QV = 1$

Finalmente: $S = S_{\Delta SOQ} + S_{\Delta ROQ} \Rightarrow S = \dfrac{(SO)(AQ)}{2} + \dfrac{(OR)(QV)}{2}$

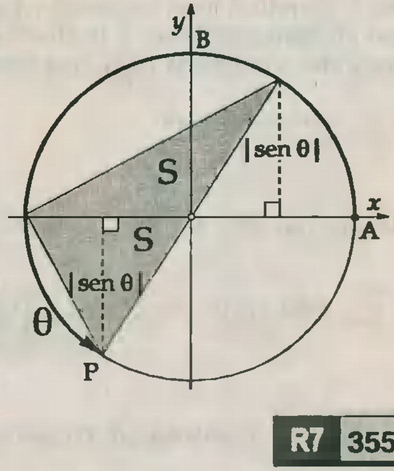



$$\Rightarrow S = \frac{(-\sec\theta)(\tan\theta)}{2} + \frac{(-\csc\theta)(1)}{2}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos\theta}.\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta . \operatorname{sen}\theta}\right]$$

$\therefore$ $\boxed{S = -\dfrac{1}{2}\sec^2\theta \csc\theta}$

**35.-** De la figura: $2S = 2\left(\dfrac{1.|\operatorname{sen}\theta|}{2}\right)$



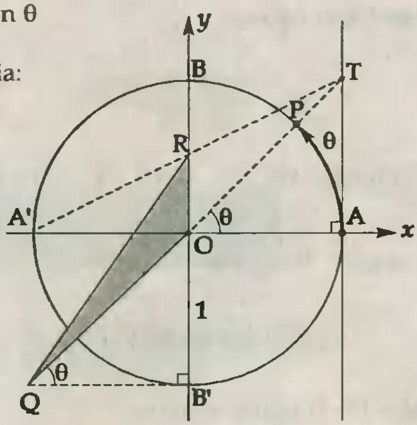

Como: $\theta \in IIIC \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < 0 \Rightarrow 2S = (-\operatorname{sen}\theta)$

Como: $\dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{sen}\theta \leq \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow +\frac{\sqrt{3}}{2} \geq -\operatorname{sen}\theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 2S \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 2S \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

36.- A partir de la figura reconocemos que: AT = tan θ




En el ⊾A'AT, aplicamos el teorema de la base media:

$$OR = \frac{AT}{2} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

En el ⊾ QB'O: QB' = cot θ

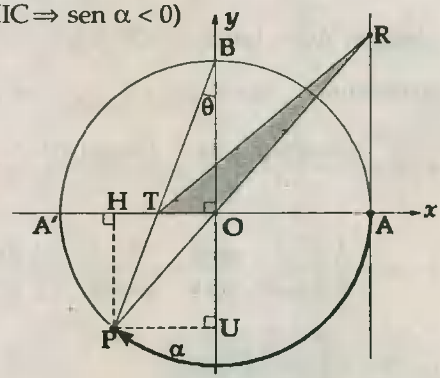
$$S_{\Delta ORQ} = \frac{OR.QB'}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\tan\theta.\cot\theta}_{1}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \frac{1}{4}}$$

37.- De la figura tenemos: $AR = \tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Además: $PU = |\cos\alpha| = -\cos\alpha$ $(\alpha \in IIIC \Rightarrow \cos\alpha < 0)$

También: $PH = UO = |\operatorname{sen}\alpha| = -\operatorname{sen}\alpha$ $(\alpha \in IIIC \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha < 0)$



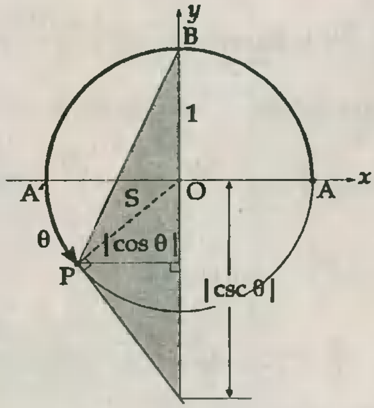

En los triángulos rectángulos BOT y los triángulos rectángulos BUP: $\tan\theta = \dfrac{TO}{BO} = \dfrac{PU}{BU}$

$$\Rightarrow TO = \frac{BO.PU}{BU} = \frac{1(-\cos\alpha)}{1+(-\operatorname{sen}\alpha)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta RTO} = \frac{TO.AR}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos\alpha}{(1-\operatorname{sen}\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{\Delta RTO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-1}}$$

38.- Trazando la línea cosecante y coseno, se pueden identificar la base y la altura del la región triangular sombreada cuya área estará dada por:

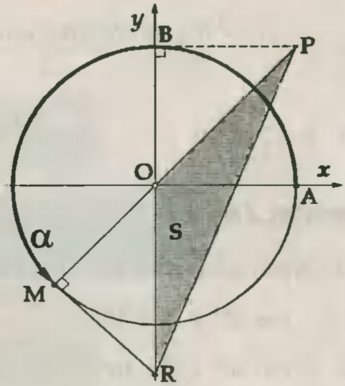



$$S = \frac{(1+|\csc\theta|)|\cos\theta|}{2}$$

Donde: $|\cos\theta| > 0 \Rightarrow S = \dfrac{(1-\csc\theta)^2.(-\cos\theta)}{2}$

$$S = \frac{\cot\theta-\cos\theta}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{1}{2}(\cot\theta - \cos\theta)}$$

**39.-** De la figura tenemos:




a) $OR = |\csc\alpha| = -\csc\alpha \quad (\alpha \in \text{IIIC} \quad \Rightarrow \quad \csc\alpha < 0)$

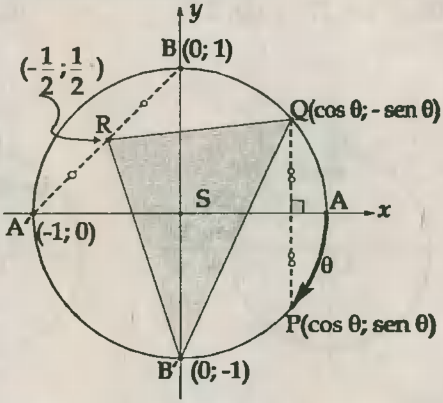
b) $BP = \cot\alpha \quad (\alpha \in \text{IIIC} \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha > 0)$

Luego:

$$S_{\Delta POR} = \frac{(OR)(BP)}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{(-\csc\alpha)(\cot\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \therefore \quad \boxed{S = -\frac{1}{2}\cos\alpha \cdot \csc^2\alpha}$$

**40.-** Hallaremos el área de la región identificando las coordenadas de sus vértices y aplicando el ordenamiento propuesto en el resumen, de este modo:




$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right]$$

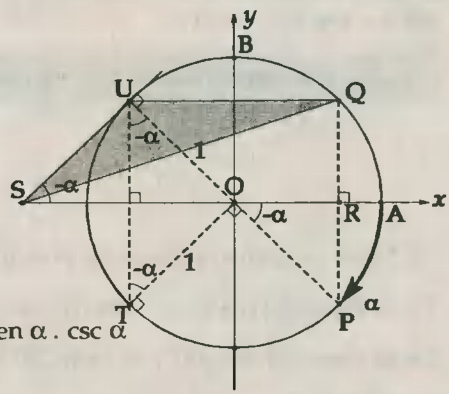
$$\Rightarrow S = \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{4}; \qquad N = 3/4; \qquad M = 1/4$$

$$\therefore \quad \boxed{M + N + T = 3/4}$$

**41.-** Podemos reconocer las coordenadas de los vértices: P $(\cos\alpha\ ;\ \operatorname{sen}\alpha)$, Q $(\cos\alpha\ ; -\operatorname{sen}\alpha)$, T $(\operatorname{sen}\alpha\ ; -\cos\alpha)$, U $(\operatorname{sen}\alpha\ ; \cos\alpha)$ y S $(\csc\alpha\ ; 0)$. Luego el área de la región triangular QSU se calculará en base a la matriz:

$$\begin{array}{r|cc|l} & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & \\ -\operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \csc\alpha \cdot \cos\alpha & \csc\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha \\ \hline \text{I} & & & \text{D} \end{array}$$




$$\text{I} = -\operatorname{sen}^2\alpha + \csc\alpha \cdot \cos\alpha \ ; \ \ \text{D} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 2S = D - I \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{D - I}{2}$$

$$\Rightarrow \; S = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}\alpha\csc\alpha + \text{sen}^2\alpha - \csc\alpha.\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{-\csc\alpha.\cos\alpha}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \; S - \frac{1}{2}\cot\alpha \quad \therefore \quad \boxed{S = -\frac{1}{2}\cot\alpha}$$

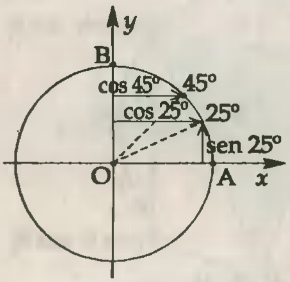
## MISCELÁNEA

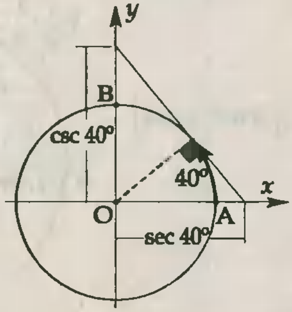
**42.-** Apoyados en los gráficos de la C.T. se puede establecer que:

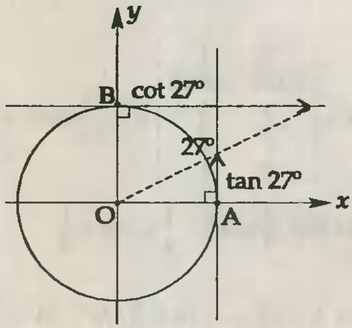
I. $\cos 25° > \text{sen } 25°$ $\Rightarrow$ I. F

II. $\csc 40° > \sec 40°$ $\Rightarrow$ II. V

III. $\cot 27° > \tan 27°$ $\Rightarrow$ III. F



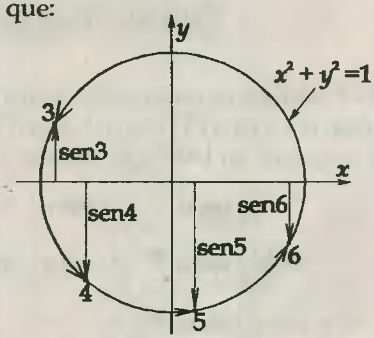

**43.-** En base al gráfico elaborado, podemos establecer que:

I. $\text{sen } 3 > \text{sen } 4$ $\Rightarrow$ V

II. $\text{sen } 4 > \text{sen } 5$ $\Rightarrow$ V

III. $\text{sen } 3 > \text{sen } 6$ $\Rightarrow$ V

$\therefore$ **Todas las proposiciones son verdaderas.**




**44.-** En base al gráfico elaborado, podemos establecer que

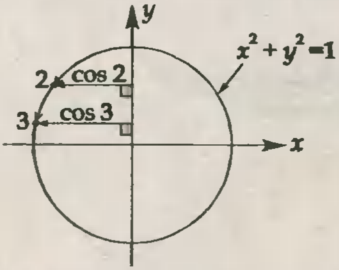
I. De la figura: $|\cos 2| < |\cos 3|$ $\Rightarrow$ F

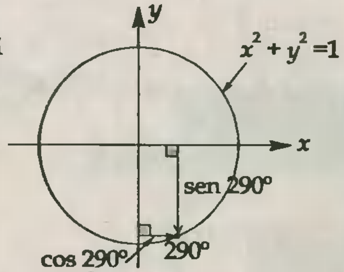
II. De la figura: $|\cos 290°| < |\text{sen } 290°|$

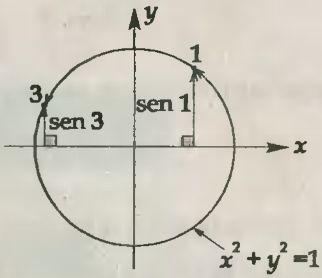
Pero: $290° \in$ IVC $\Rightarrow$ $\cos 290° > 0$ $\Rightarrow$ $\text{sen } 290° < 0$

$\Rightarrow \quad \cos 290° < -\text{ sen } 290° \Rightarrow \quad \cos 290° + \text{sen } 290 < 0 \quad \Rightarrow$ II. F

III. De la figura: $\quad |\text{sen } 1| > |\text{sen } 3| \quad \Rightarrow$ III. F



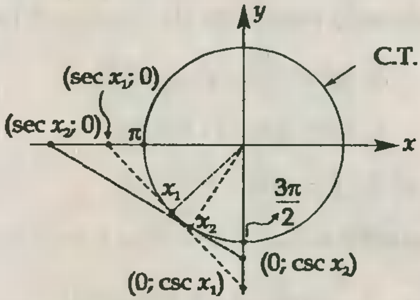




**45.-** Trazamos las líneas de la secante y cosecante de los arcos $x_1$ y $x_2$ según como lo establece la condición. Luego, de la figura:

I. $\quad \sec x_1 > \sec x_2 \quad \Rightarrow \quad$ F

II. $\quad \csc x_1 < \csc x_2 \quad \Rightarrow \quad$ F

III. $|\sec x_1| < |\sec x_2| \quad \Rightarrow \quad$ F




**46.-** Para resolver este ejercicio graficaremos las líneas del coseno y la tangente de los arcos correspondientes y según la condición del problema. De esta figura tenemos:

I. AP = $\tan x_2 \quad$ AQ = $\tan x_1$

$\therefore \quad$ **$\tan x_2 > \tan x_1$** $\quad$ .... FALSO

II. TV = $\cos x_1 \quad \wedge \quad$ UW = $\cos x_2$

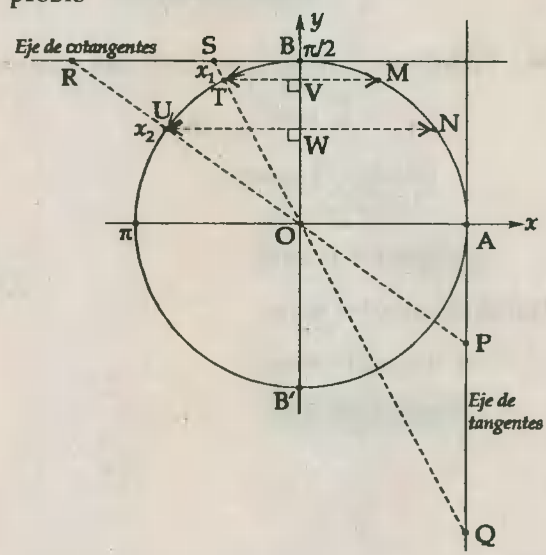
VM = $|\cos x_1| \quad \wedge$ WN = $|\cos x_2|$

WN = $|\cos x_2|$

$\therefore \quad$ **$|\cos x_2| > |\cos x_1|$** .... FALSO

III. $\overline{BS} = \cot x_1 \quad \wedge \quad \overline{BR} = \cot x_2$

$\therefore \quad$ **$\cot x_1 > \cot x_2$** $\quad$ .... FALSO



**47.-** De la figura: $a = \cos\theta$ $\quad d = \csc\theta$

$b = \text{sen}\,\theta$ $\quad e = \tan\theta$

$c = \sec\theta$ $\quad f = \cot\theta$

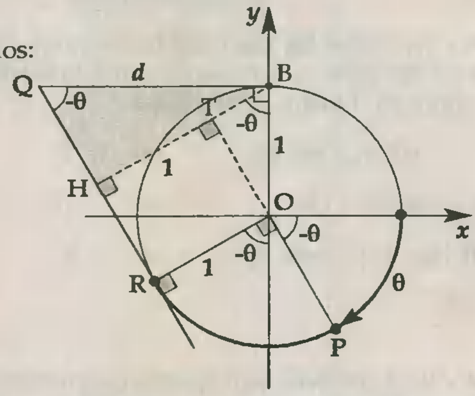
Luego, sustituimos en la expresión dada: $\quad M = \dfrac{\cos\theta.\sec\theta+\text{sen}\,\theta.\csc\theta+1}{\tan\theta.\cot\theta}$

$\therefore \quad \boxed{M = 3}$

**48.-** Debemos notar que: «$-\theta$» es ángulo agudo.

Trazamos $BH \perp RQ$ y $OT \perp BH$.

Aplicando resolución de triángulos rectángulos:




⊾ QHB: $BH = d\,.\,\text{sen}\,(-\theta)$

⊾ OTB: $TB = 1\,.\,\text{sen}\,(-\theta)$

En el ⊾QHB: $BH = HT + TB$

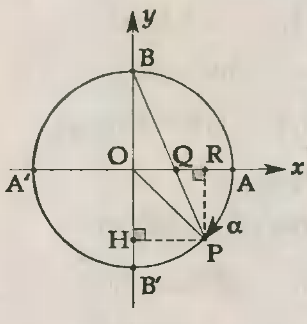
Reemplazando: $d\,\text{sen}\,(-\theta) = 1 + \cos\,(-\theta)$

Según la sugerencia: $d = \dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

$\therefore \quad \boxed{d = \dfrac{-(1+\cos\theta)}{-\text{sen}\,\theta}}$

**49.-** Podemos reconocer que existe una congruencia entre dos triángulos:

⊾ PHB ~ ⊾QOB:




$\Rightarrow \dfrac{|\cos\alpha|}{1/2} = \dfrac{1+|\text{sen}\,\alpha|}{1}$

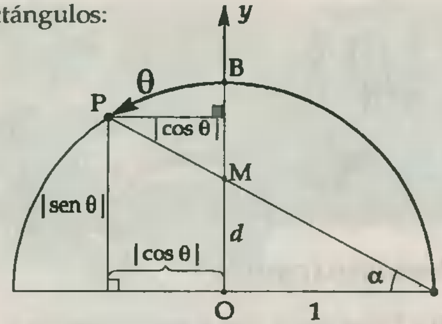
$\Rightarrow 2\cos\alpha = 1 - \text{sen}\,\alpha$

Transformando, se tiene:

$\Rightarrow 2 = \sec\alpha - \tan\alpha$

$\therefore \quad \boxed{\sec\alpha - \tan\alpha = 2}$

**50.-** De la figura por semejanza de triángulos rectángulos:



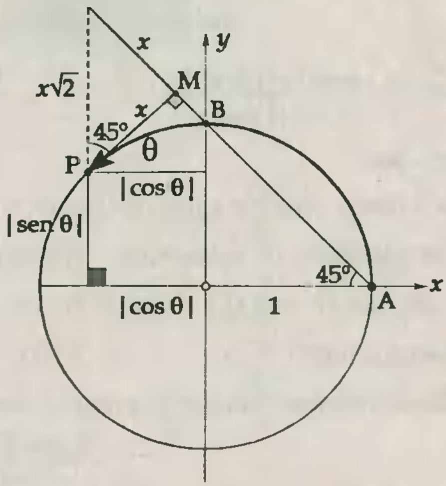

$$\frac{d}{1} = \frac{|\text{sen}\,\theta|}{|\cos\theta|+1}$$

Como: $\theta \in IIC$

$$\text{sen}\,\theta > 0 \wedge \cos\theta < 0$$

$$\therefore \quad \boxed{d = \frac{\textbf{sen}\boldsymbol{\theta}}{\textbf{1-cos}\boldsymbol{\theta}}}$$

**51.-** Luego de trazar las líneas del seno y coseno, hacemos: PM = $x$. Al disponer de las líneas se logra visualizar un triángulo rectángulo isósceles. Es así que se puede establecer la siguiente relación:




$$x\sqrt{2} + |\text{sen}\,\theta| = 1 + |\cos\theta|$$

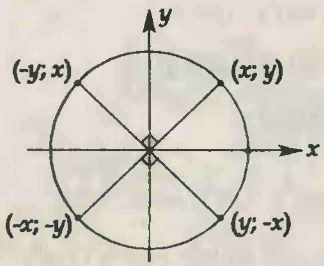
Como: $\theta \in IIC$

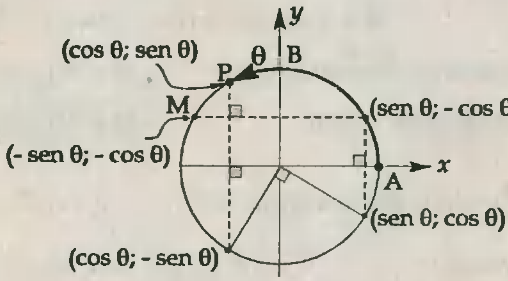
$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta > 0 \quad \wedge \quad \cos\theta < 0$

$\Rightarrow \quad x\sqrt{2} + \text{sen}\,\theta = 1 - \cos\theta$

$\therefore \quad \sqrt{2}\,\text{PM} = \boxed{\textbf{1 - sen θ - cos θ}}$

**52.-** La identificación de las coordenadas se hará en base al gráfico, en el que se puede reconocer que los pares ordenados verifican una disposición simétrica respecto de los ejes cartesianos. Veamos:




De la figura, las coordenadas de M son: $\boxed{\textbf{(- sen θ ; - cos θ)}}$


***DEMOSTRACIONES***

**01.-** Trabajemos con el primer miembro, para lo cual debemos reconocer que:

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = (1 + \text{sen}\,x)(1 - \text{sen}\,x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+\text{sen}x)+(1+\text{sen}x)(1-\text{sen}x)}{(1+\text{sen}x)} = \frac{\cancel{(1+\text{sen}x)}[(1+1-\text{sen}\,x)]}{\cancel{(1+\text{sen}x)}} = \boxed{2 - \text{sen}\,x}$$

**02.-** Sea:

$N = (\text{sen}\,x - \cos x + 1)(\text{sen}\,x + \cos x - 1) \quad \Rightarrow \quad N = [\text{sen}\,x - (\cos x - 1)]\,[\text{sen}\,x + (\cos x - 1)]$

Por diferencia de cuadrados: $N = \text{sen}^2 x - (\cos x - 1)^2 = (1 - \cos^2 x) - (1 - \cos x)^2$

$\Rightarrow \quad N = (1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 - \cos x)^2 \quad \Rightarrow \quad N = (1 - \cos x)[1 + \cos x - (1 - \cos x)]$

Factorizando: $N = (1 - \cos x)(2\cos x) = (1 - \cos x).\,2\cos x$

Luego reemplazando en el primer miembro de la expresión:

$$\frac{\cancel{(1-\cos x)}.2\cos x}{\cancel{1-\cos x}} = \boxed{2\cos x}$$

**03.-** Sea: $M = (1 - \text{sen}\,x + \cos x)^2$

Desarrollando el trinomio al cuadrado:

$$M = 1 + \text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\text{sen}\,x + 2\cos x - 2\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$$

Agrupando convenientemente: $M = 2(\underline{1 - \text{sen}\,x}) + 2\cos x(\underline{1 - \text{sen}\,x})$

Volviendo a factorizar: $\boxed{M = 2(1 - \text{sen}\,x)(1 + \cos x)}$

**04.-** Partiendo del primer miembro: $V = \cot^4 x\,.\,\csc^2 x - \cot^2 x\,.\,\csc^2 x + \overbrace{\csc^2 x - 1}^{\cot^2 x}$

Factorizando: $V = \cot^4 x.\,\csc^2 x - \cot^2 x\underbrace{(\csc^2 x - 1)}_{\cot^2 x} \quad \Rightarrow \quad V = \cot^4 x\,.\,\csc^2 x - \cot^4 x$

Finalmente factorizando, tendremos: $V = \cot^4 x\underbrace{(\csc^2 x - 1)}_{\cot^2 x} = \cot^6 x$

05.- Recordemos que: $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$

Luego, efectuando en el primer miembro como sigue, tendremos:

$$A = \frac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{\cancel{\text{sen}\,x}(1-\cos x)}{\text{sen}^{\cancel{2}}\,x}$$

Simplificando, obtenemos: $\boxed{A = \dfrac{1-\cos x}{\text{sen}\,x}}$

06.-Nuestra estrategia consistirá en transformar el primer miembro haciendo las siguientes operaciones:

$$N = \tan^2x - \text{sen}^2x \quad\Rightarrow\quad N = \tan^2x - \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}.\cos^2x$$

$$\Rightarrow\ N = \tan^2x\,(1 - \cos^2x) \quad\Rightarrow\quad N= \tan^2x\,.\,\text{sen}^2x$$

$$\therefore\quad \boxed{\tan^2x - \text{sen}^2x = \tan^2x\,.\,\text{sen}^2x}$$

07.- Se sabe que: $\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x$

Elevando al cuadrado a ambos miembros de la igualdad tendremos:

$$(\text{sen}^4x + \cos^4x)^2 = (1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x)^2$$

$$\text{sen}^8x + \underline{2\text{sen}^4x\cos^4x} + \cos^8x = 1- 4\text{sen}^2x\cos^2x + \underline{4\text{sen}^4x\cos^4x}$$

$$\therefore\quad \boxed{\text{sen}^8x+\cos^8x = 1-4\text{sen}^2x.\cos^2x+2\text{sen}^4x\cos^4x}$$

08.- Efectuando la suma indicada en el primer miembro de la igualdad tendremos:

$$\Rightarrow\quad E = \frac{1-\text{sen}a+1+\text{sen}a}{(1+\text{sen}a)(1-\text{sen}a)} - 1 - \text{sen}^2a - 2\tan^2a$$

$$\Rightarrow\quad E = \frac{2}{1-\text{sen}^2a} - 1 - \text{sen}^2a - 2\tan^2a \quad\Rightarrow\quad E = \frac{2}{\cos^2a} - 1 - \text{sen}^2a - 2\tan^2a$$

$$\Rightarrow\quad E = 2\sec^2a - 1 - \text{sen}^2a - 2\tan^2a$$

Y recordando que: $\sec^2a - \tan^2a = 1$

$$\Rightarrow\quad E = 2(\sec^2a - \tan^2a) - 1 - \text{sen}^2a$$

$$\Rightarrow\quad E = 1 - \text{sen}^2a \qquad \therefore\quad \boxed{E = \cos^2a}$$

**09.-** Efectuando la adición indicada en el primer miembro de la igualdad tendremos:

$$S = \frac{(1-\text{sen}x)^2 + (1+\text{sen}x)^2}{(1+\text{sen}x)(1-\text{sen}x)}$$

Aplicando las identidades algebraicas: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{2(1+\text{sen}^2x)}{1-\text{sen}^2x} \quad \Rightarrow \quad S = 2\left(\frac{1+\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}\right) = 2\left[\frac{1+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right] = 2\left[\frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right]$$

Recordando que: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad S = 2(2.\sec^2 x - 1) \quad \therefore \quad \boxed{S = 4\sec^2 x - 2}$

**10.-** Efectuando las operaciones indicadas del primer miembro de la igualdad tenemos:

$$S = \cot^2 x + \cot^2 x \,.\, \cos^2 x + \tan^2 x + \tan^2 x \,.\, \text{sen}^2 x$$

Utilizando las identidades pitagóricas y las de división, se obtiene:

$$S = \csc^2 x - 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}.\cos^2 x + \sec^2 x - 1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \,.\, \text{sen}^2 x$$

Efectuando y agrupando:

$$S = \sec^2 x + \csc^2 x - 2 + \frac{\cos^4 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad S = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 2 + \frac{\cos^6 x + \text{sen}^6 x}{\text{sen}^2 x.\cos^2 x}$$

Recordando que: $\cos^6 x + \text{sen}^6 x = 1 - 3\text{sen}^2 x.\cos^2 x$

$$\Rightarrow \quad S = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 2 + \frac{1-3\text{sen}^2 x.\cos^2 x}{\text{sen}^2 x.\cos^2 x}$$

Efectuando la división indicada:

$$S = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 2 + \sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 3 \quad \therefore \quad \boxed{S = 2\sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 5}$$

***SIMPLIFICACIONES***

**11.-** Recordando que: $\sec x \,.\, \csc x = \tan x + \cot x$

Reemplazamos en "M": $$M=\left(\frac{\tan x+\cot x-\tan x}{\csc x}\right)^2+\left(\frac{\tan x+\cot x-\cot x}{\sec x}\right)^2$$

Reduciendo la expresión : $$M=\left(\frac{\cot x}{\csc x}\right)^2+\left(\frac{\tan x}{\sec x}\right)^2$$

Expresando a términos de sen $x$ y cos $x$: $$M=\left(\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)^2+\left(\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}\right)^2$$

Simplificando la expresión : $$M=\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x$$

$$\therefore \quad \boxed{M=1}$$

**12.-** Expresando en términos de sen $x$ y cos $x$ , se obtiene:

$$M=\left(\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{-2}+\left(\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\cos x+1}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \qquad M=\left(\frac{\cancel{(\operatorname{sen} x+1)}}{\cos x\cancel{(\operatorname{sen} x+1)}}\right)^{-2}+\left(\frac{\cancel{(\cos x+1)}}{\operatorname{sen} x\cancel{(\cos x+1)}}\right)^{-2}$$

Simplificando: $M=\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^{-2}$

Aplicando la definición de exponentes negativos para expresiones reales, tendremos:

$M=\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x$ (Identidad) $\quad \therefore \quad \boxed{M=1}$

**13.-** Recordemos que: $\sec^2 x=1+\tan^2 x$

Sumando 2tan $x$ a ambos miembros se obtiene:

$$\sec^2 x+2\tan x=1+\tan^2 x+2\tan x$$

En donde el 2do. miembro concuerda con el desarrollo de un binomio al cuadrado:

$$\Rightarrow \qquad \sec^2 x+2\tan x=(\tan x+1)^2 \quad \ldots (1)$$

También recordemos: $\csc^2 x=1+\cot^2 x$

Restando a ambos membros 2cot $x$, se tiene:

$$\csc^2 x - 2\cot^2 x = 1 + \cot^2 x - 2\cot x$$

Cuyo 2do. miembro es también el desarrollo de un binomio al cuadrado:

$$\Rightarrow \qquad \csc^2 x - 2\cot x = (\cot x - 1)^2 \ldots (2)$$

Reemplazando (1) $\wedge$ (2) en la expresión original de M, obtenemos:

$$M = \frac{(\tan x + 1)^2}{\tan x + 1} + \frac{(\cot x - 1)^2}{\cot x - 1}$$

Simplificando: $M = \tan x + 1 \cot x - 1$

$$\therefore \qquad \boxed{M = \tan x + \cot x = \sec x . \csc x}$$

**14.-** Transformamos la expresión original escribiendo en términos de seno y coseno, obteniéndose:

$$M = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x . \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x . \dfrac{1}{\cos x}}$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando: $M = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x.}{\operatorname{sen} x}$

Sustituyendo el numerador por la identidad pitagórica: $M = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$\therefore \qquad \boxed{M = \csc x}$$

**15.-** Transformamos el numerador en términos de seno y coseno y, el denominador lo transformamos adecuadamente para factorizar la tangente. Veamos:

$$M = \frac{\dfrac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen} x . \cos x} - \dfrac{(1 - \cos x) . \cos^2 x}{\operatorname{sen} x . \cos x}}{\tan x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} . \cos x}$$

Factorizando en el numerador y denominador: $M = \dfrac{\dfrac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen} x . \cos x}\left[(1 - \cos^2 x)\right]}{\tan x [1 - \cos x]}$

Simplificando y transformando a seno y coseno: $M = \dfrac{\dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x.\cos x}}{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}}$

$$\therefore \quad \boxed{M = 1}$$

**16.-** Efectuamos las operaciones indicadas y obtenemos:

$$M = \underbrace{\sec x.\csc x - \sec x}_{\tan x + \cot x} + \underbrace{\cos x.\sec^2 x}_{\sec x} - \underbrace{\cos x.\csc x}_{\cot x}$$

Haciendo las sustituciones indicadas, la expresión queda así:

$$M = \tan x + \cot x - \sec x + \sec x - \cot x$$

Reduciendo términos nos queda: $\boxed{\mathbf{M = \tan x}}$

**17.-** Sabiendo que: $2 \sec x \,.\, \cos x = 2$ , nuestro siguiente paso consistirá en completar cuadrados en los numeradores de la expresión dada:

$$W = \frac{(\sec x + \cos x)^2 - 4}{\sec x + \cos x - 2} - \frac{(\sec x + \cos x)^2 - 1}{\sec x + \cos x + 1}$$

Aplicando la identidad algebraica: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, tendremos:

$$W = \frac{\cancel{(\sec x + \cos x - 2)}(\sec x + \cos x + 2)}{\cancel{\sec x + \cos x - 2}} - \frac{\cancel{(\sec x + \cos x + 1)}(\sec x + \cos x - 1)}{\cancel{\sec x + \cos x + 1}}$$

Luego de efectuar las simplificaciones indicadas, nos queda:

$$W = \sec x + \cos x + 2 - \sec x - \cos x + 1$$

Finalmente, reducimos términos y obtenemos: $\boxed{W = 3}$

**18.-** Nuestra estrategia consistirá en sustituir $\sec^2 x$ y $\csc^2 x$ para poder obtener una expresión en términos de tangente y cotangente. Para ello es necesario recordar que:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad \wedge \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\cot^6 x + 3(1 + \cot^2 x).\cot^2 x + 1}{\tan^6 x + 3(1 + \tan^2 x).\tan^2 x + 1} \qquad \Rightarrow \qquad W = \frac{\cot^6 x + 3\cot^2 x + 3\cot^4 x + 1}{\tan^6 x + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x + 1}$$

Logramos reconocer que los términos de la fracción obtenida corresponden a los de la identidad algebraica del binomio al cubo:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow \; W = \frac{(\cot^2 x+1)^3}{(\tan^2 x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(\csc^2 x)^3}{(\sec^2 x)^3} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\csc^6 x}{\sec^6 x}$$

Transformando esta expresión a seno y coseno, obtenemos:

$$\Rightarrow \; W = \frac{\cos^6 x}{\operatorname{sen}^6 x} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \cot^6 x}$$

**19.-** Nuestra estrategia de resolución consistirá en investigar toda la expresión como si estuviese constituída por dos términos, los cuales serán trabajados de un modo independiente. Veamos:

$$M = \underbrace{\sec^6 x - \tan^6 x - 3\sec^2 x\tan^2 x}_{(A)} + \underbrace{2\tan x.(\sec x - \tan x).(\csc x + 1)}_{(B)}$$

a) Determinemos a qué se reduce el término (A), para lo cual vale recordar que:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \qquad \ldots (*)$$

Luego de elevar al cuadrado, se obtiene: $\sec^4 x + \tan^4 x = 1 + 2\sec^2 x \tan^2 x$

Y elevando (*) al cubo se obtiene: $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \tan^2 x$

Esto nos permite reconocer que la expresión (A), se reduce a:

$$A = 1 + 3\sec^2 x\tan^2 x - 3\sec^2 x \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad A = 1 \qquad \ldots (1)$$

b) Trabajamos ahora con la expresión (B), en donde todo lo transformamos a seno y coseno:

$$B = \frac{2\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x}\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\right) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad B = 2 \qquad \ldots (2).$$

Finalmente de (1) y (2), obtenemos: $W = 1 + 2 \quad \therefore \quad \boxed{W = 3}$

**20.-** Efectuamos la multiplicación indicada en el denominador de la expresión dada:

$$\Rightarrow \; M = \frac{(\tan^4 x + \operatorname{sen}^4 x - \tan^4 x.\operatorname{sen}^4 x)}{(\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}$$

Ahora transformamos el denominador para poder factorizar $\tan^2 x$:

$$\Rightarrow \; M = \frac{\tan^4 x + \operatorname{sen}^4 x - \tan^4 x.\operatorname{sen}^4 x}{\tan^2 x - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}.\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{\tan^4 x + \operatorname{sen}^4 x - \tan^4 x.\operatorname{sen}^4 x}{\tan^2 x.(\underbrace{1 - \cos^2 x}_{\operatorname{sen}^2 x})}$$

Después de efectuar la sustitución indicada, efectuamos la división y obtenemos:

$$M = \tan^2 x \,.\, \csc^2 x + \cot^2 x \,.\, \text{sen}^2 x - \tan^2 x \,.\, \text{sen}^2 x$$

Transformando convenientemente a seno y coseno:

$$M = \frac{\cancel{\text{sen}^2 x}}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{sen}^2 x}} + \frac{\cos^2 x}{\cancel{\text{sen}^2 x}} \,.\, \underbrace{\cancel{\text{sen}^2 x}}_{\sec^2 x - 1} - \tan^2 x \,.\, \text{sen}^2 x$$

$$\Rightarrow \quad M = \sec^2 x + \cos^2 x - (\sec^2 x - 1)\text{sen}^2 x \qquad \Rightarrow \qquad M = \sec^2 x + \cos^2 x - \tan^2 x + \text{sen}^2 x$$

Y reconociendo que: $M = \underbrace{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}_{1} + \underbrace{\sec^2 x - \tan^2 x}_{1} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 2}$

21.-Nuestra estrategia consistirá en sustituir las relaciones auxiliares según sus respectivas definiciones. Veamos:

$$W = \frac{(1-\cos x)[3-(\sec x - 1)] + 2 + (\sec x - 1)}{3 - 2\cos x}$$

Reduciendo términos obtenemos: $\quad W = \dfrac{(1-\cos x)(4-\sec x) + 1 + \sec x}{3-2\cos x}$

Efectuando las operaciones indicadas: $\quad W = \dfrac{4 - 4\cos x - \cancel{\sec x} + \overbrace{\sec x \,.\, \cos x}^{=1} + 1 + \cancel{\sec x}}{3 - 2\cos x}$

Reduciendo términos: $\quad W = \dfrac{2\cancel{(3-2\cos x)}}{\cancel{3-2\cos x}} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 2}$

**22.**- Efectuando la potencia indicada, se obtiene:

$$M = \underbrace{\frac{1}{3}(1 - 3\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x)}_{} - \underbrace{\frac{1}{4}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x)}_{}$$

Efectuamos la multiplicación en el primer término, mientras que en el segundo aplicamos la identidad auxiliar para la suma de las cuartas potencias del seno y coseno:

$$M = \frac{1}{3} - \text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x - \frac{1}{4}(1 - 4\text{sen}^2 x .\, \cos^2 x)$$

Efectuando la multiplicación indicada, se obtiene:

$$M = \frac{1}{3} - \cancel{\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x} - \frac{1}{4} + \cancel{\text{sen}^2 x .\, \cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{12}}$$

**23.-** Trabajando en términos de senos y cosenos obtenemos:

$$M = \frac{\dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\text{sen}x}{\text{sen}x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}x} + \dfrac{1}{\text{sen}x}} + \frac{(1+\text{sen}x)(1-\text{sen}x)}{\cos x(1+\text{sen}x)}$$

Simplificando en ambos sumandos, nos queda:

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{1-\text{sen}x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{\cos x} \qquad \therefore \quad \boxed{M = \sec x}$$

**24.-** Nuestra estrategia consistirá en sustituir las relaciones auxiliares por sus correspondientes definiciones, para lo cual recordamos que:

$$\textit{vers}\ x = 1 - \cos x \qquad \wedge \qquad \textit{cov}\ x = 1 - \text{sen}\ x$$

$$\Rightarrow \ M = \frac{\cos x}{1+\text{sen}x} + \frac{1-\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}x - \cos x}{\cos^3 x}$$

Transformamos el término indicado, multiplicándolo y dividiéndolo por: 1 - sen $x$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1-\text{sen}x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}x - \cos x}{\cos^3 x}$$

Efectuando las divisiones indicadas:

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{\cos^3 x}$$

$$\Rightarrow \quad M = \cancel{\sec x} - \tan x + \cancel{\sec^2 x} - \cancel{\sec x} + \tan x \,.\, \sec^2 x - \cancel{\sec^2 x}$$

Simplificando y ordenando nos queda:

$$M = \tan x\ \underbrace{(\sec^2 x - 1)}_{\tan^2 x} \qquad \therefore \quad \boxed{M = \tan^3 x}$$

**25.-** Sustituyendo cada relación auxiliar por sus correspondientes definiciones, nos da:

$$M = (1 - \cos x)^2 + (1 - \text{sen}\ x)^2 + 2(\text{sen}\ x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \ M = 1 + \cos^2 x - 2\cos x + 1 + \text{sen}^2 x \ - \ 2\text{sen}\ x + 2\text{sen}\ x + 2\cos x$$

$$\Rightarrow \ M = 2 + \underbrace{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1} \qquad \therefore \quad \boxed{M = 3}$$

### *PROBLEMIZACIÓN CONDICIONAL*

**26.-** Nuestra estrategia consistirá en aprovechar la condición dada y a partir de ella obtener una relación que nos permita reducir o valuar la expresión dada. Veamos:

De la condición: $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\theta = \cos^4\theta$$

Luego, sustituimos (*) en la expresión dada: $M = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**27.-** Tal como procedimos en el problema anterior, empezaremos nuestra resolución por las condiciones dadas. Veamos:

De la condición: $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x = m$

Dividiendo por sen $x$: $\operatorname{sen}^2 x + 1 = m \csc x \quad . \; . \; . \; (1)$

De la condición: $\cos^3 x + \cos x = n$

Dividiendo por cos $x$: $\cos^2 x + 1 = n \sec x \quad . \; . \; . \; (2)$

Ahora conviene efectuar (1) + (2): $\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2 = \underbrace{m \csc x + n \sec x}_{M}$

$$\therefore \quad \boxed{M = 3}$$

**28.-** Efectuando las operaciones indicadas en la condición, tendremos:

$$\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)+(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1-\operatorname{sen} x)} = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\operatorname{sen}^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)(1-\operatorname{sen} x)} = k^2 \quad \Rightarrow \quad (1 - \cos x)(1 - \operatorname{sen} x) = \frac{1}{k^2} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Para poder aprovechar esta nueva relación, será conveniente elevar al cuadrado a la expresión a calcular, esto es:

$$M^2 = (1 - \operatorname{sen} x - \cos x)^2 \quad \Rightarrow \quad M^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x) \,.\, (1 - \cos x) \; . \; . \; . \; (2)$$

Reemplazando (1) en (2), obtenemos:

$$M^2 = \frac{2}{k^2} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \frac{\sqrt{2}}{k}}$$

**29.-** Desarrollando las potencias indicadas, obtenemos:

$W = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x.\cos^3 x + \cos^6 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x.\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x + 2 \cos x \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^6 x$

Agrupamos convenientemente y factorizamos:

$W = 2(\text{sen}^2x+\cos^2x)+2\text{sen } x.\cos x(\text{sen}^2x + \cos^2x) + \text{sen}^6x + \cos^6x - 2 \text{ sen } x \cos x$

Sustituimos las expresiones entre paréntesis por 1, y nos queda:

$$W = 2 + \cancel{2 \text{ sen } x \cos x} + \underbrace{\text{sen}^6x + \cos^6x} - \cancel{2 \text{ sen } x \cos x}$$

Reemplazamos la expresión indicada por la identidad auxiliar correspondiente:

$$W = 2 + 1 - 3 \text{ sen}^2x.\cos^2x \quad \Rightarrow \quad W = 3 - 3 \text{ sen}^2 x \cos^2x \quad \ldots (1)$$

De la condición: $1 - 2 \text{ sen}^2x \cos^2x = k \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2x \cos^2x = \dfrac{1-k}{2} \quad \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1): $W = 3 - 3\left[\dfrac{1-k}{2}\right] \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{3}{2}(1 + k)}$

**30.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar, de un modo controlado, la expresión dada para «M», tal que sea posible identificar en ella un término que pueda ser obtenido de la condición planteada. Veamos:

$$M = \text{sen}^4x + \cos^4x \quad \Rightarrow \quad M = 1 - 2 \text{ sen}^2x \cos^2x \quad \Rightarrow \quad M = 1 - 2\underbrace{\text{sen}^2x . \cos^2x} \quad \ldots (1)$$

De la condición dada trataremos de obtener el equivalente de la expresión indicada:

$$\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (\text{sen } x + \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \text{ sen } x. \cos x = 2$$

Finalmente despejamos y obtenemos: $\text{sen } x . \cos x = \dfrac{1}{2} \quad \ldots (2)$

Luego reemplazamos (2) en (1): $\Rightarrow \quad M = 1 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad M = 1 - \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{2}}$$

**31.-** Nuestro procedimiento consistirá en transformar la expresión dada en términos de $\sec^2y$ y $\csc^2x$. Para ello es necesario recordar que:

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad \wedge \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Aplicando estas identidades en la condición dada:

$$2(1 + \tan^2x) - (1 + \cot^2y) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2\tan^2x - 1 - \cot^2y = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\tan^2 x = \cot^2 y \quad \Rightarrow \quad 2\tan^2 y = \cot^2 x$$

Aplicando por 2da vez las mismas identidades en cada miembro, tendremos:

$$2(\sec^2 y - 1) = \csc^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sec^2 y - \csc^2 x = 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$$

**32.-** Procediendo como en la resolución del problema 30, transformamos de manera controlada a la condición dada. Veamos:

Se tiene que: $$\frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x} = m$$

Transformamos el denominador: $$\frac{\cancel{(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)}}{\cancel{(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)}(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x)} = m$$

Despejando lo que queda: $$\frac{1}{m} = \cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x$$

Aplicando la identidad auxiliar correspondiente: $$\frac{1}{m} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

De lo cual podemos deducir que: $$\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{m-1}{2m} \quad \ldots (1)$$

Ahora trabajamos con la expresión «M», en donde aplicamos la identidad auxiliar:

$$M = 1 + 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad M = 2 - 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), tendremos: $M = 2 - 3\dfrac{(m-1)}{2m} \quad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{m+3}{2m}}$

**33.-** En este caso resulta conveniente sustituir la condición dada en la expresión solicitada, obteniéndose:

$$W = \frac{\operatorname{sen} x - vers\, x}{\operatorname{sen} x + vers\, x} - \frac{\operatorname{sen} x + vers\, x}{\operatorname{sen} x - vers\, x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{[\operatorname{sen} x - vers\, x]^2 - [\operatorname{sen} x + vers\, x]^2}{\operatorname{sen}^2 x - vers^2 x}$$

Apliquemos, en el numerador, la identidad algebraica: $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$

En el denominador sustituiremos el $\operatorname{sen}^2 x$ por su identidad pitagórica asi como reemplazaremos la relación auxiliar vers$x$ por su correspondiente definición. Veamos:

$$W = \frac{-4.\operatorname{sen} x.vers\, x}{1 - \cos^2 x - [1 - \cos x]^2} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{-4.\operatorname{sen} x.vers\, x}{1 - \cos^2 x - [1 - 2\cos x + \cos^2 x]}$$

Eliminado los corchetes y reduciendo: $W = \dfrac{-4.\operatorname{sen} x.\cancel{vers\, x}}{2\cos x.\cancel{(1-\cos x)}} \quad \therefore \quad \boxed{W = -2\tan x}$

**34.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la condición dada de modo que de ella se obtenga la expresión «M». Veamos:

$$\sec x - \csc x = a \quad \Rightarrow \quad (\sec x - \csc x)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \sec^2 x + \csc^2 x - 2\sec x \,.\, \csc x = a^2 \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x \,.\, \csc^2 x - 2 \sec x \,.\, \csc x + 1 = a^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad (\sec x \,.\, \csc x - 1)^2 = a^2 + 1$$

Aplicando la identidad auxiliar en el primer miembro: $(\tan x + \cot x - 1)^2 = a^2 + 1 \quad \ldots (*)$

Identificamos en el 1er miembro a la expresión solicitada pero afectada del exponente 2. Lo pertinente será extraer raíz cuadrada a ambos miembros, lo cual requiere analizar previamente el signo de la expresión buscada. Veamos:

Como: $x \in$ IIC $\Rightarrow$ $\tan x + \cot x \leq -2 \Rightarrow \tan x + \cot x - 1 \leq -3$

Extrayendo raíz cuadrada a (*): $\underbrace{|\tan x + \cot x - 1|}_{(-)} = \sqrt{a^2+1}$

Aplicando la definición de valor absoluto: $\tan x + \cot x - 1 = -\sqrt{a^2+1}$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{M = -\sqrt{a^2+1}}}$$

**35.-** Expresemos W en términos de senos y cosenos, y tendremos:

$$W = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \cos\alpha\right)\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(1-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} \quad \ldots (*)$$

A continuación transformamos la condición dada en términos de senos y cosenos con el propósito de obtener expresiones equivalentes los términos que forman a «W»:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha + \cos\alpha \ldots (1) \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (*) tendremos: $W = \dfrac{(\cos^2\alpha+\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

$$W = \frac{\cos\alpha(\cos\alpha+1)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} \quad \ldots (**)$$

Reemplazando (2) en (*), tendremos: $W = \dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W = 1}}$

**36.-** Lo que haremos es transformar la expresión dada para «W», en términos de tan $x$ y cot $x$. Para ello aplicaremos las identidades correspondientes:

$$W = 1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x)$$

Aqui es conveniente que la expresión quede solo en términos de la tan $x$, veamos:

$$W = 2 + \underbrace{\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x}}_{(*)} + \underbrace{2\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)}_{(**)}$$

Debemos señalar aquí que la condición dada es en realidad una propiedad general de los números reales y positivos. De este modo queda claro que:

$$\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} \geq 2 \quad \wedge \quad \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) \geq 2$$

Operando estas desigualdades podemos establecer que:

$$W \geq 2 + 2 + 2(2) \quad \Rightarrow \quad W \geq 8 \quad \therefore \quad \boxed{W_{mínimo} = 8}$$

**37.-** Nuestra estrategia consistirá en aplicar la condición en la expresión dada. Veamos:

De la condición despejamos: $\tan\alpha = 1 + \operatorname{sen}\alpha$ ... (1)

Identificamos en W la expresión (*): $W = \underbrace{\sec\alpha \,.\csc\alpha}_{(*)} - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

Sustituimos (*) por la identidad : $W = \tan\alpha + \cot\alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ ... (2)

Sustituimos (1) en (2), tenemos: $W = 1 + \operatorname{sen}\alpha + \cot\alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

Expresando en términos de senos y cosenos: $W = 1 + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \cos\alpha$

$$W = 1 + \cos\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + 1\right) \quad \Rightarrow \quad W = 1 + \cot\alpha\,(1 + \operatorname{sen}\alpha) \;...\; (3)$$

Reemplazando (1) en (3) tenemos: $W = 1 + \underbrace{\cot\alpha \,.\, \tan\alpha}_{1} \quad \therefore \quad \boxed{W = 2}$

**38.-** Transformando la expresión dada en términos del seno, tendremos:

$$W = \frac{1}{\operatorname{sen}x} + \operatorname{sen}^3 x \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1 + \operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}x} \;...\; (1)$$

En la condición sustituimos $\cos^2 x$ por su equivalente y tendremos:

$\text{sen } x - 1 - \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x = 1$

Multiplicando por sen $x$, nos queda: $\text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x + \text{sen}^4 x = \text{sen } x$

Despejando, tendremos que: $\text{sen}^4 x = \text{sen } x - \text{sen}^2 x - \text{sen}^3 x \quad \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1) tendremos: $W = \dfrac{1 + \text{sen}x - \text{sen}^2 x - \text{sen}^3 x}{\text{sen}x}$

Aplicando la identidad pitagórica: $W = \dfrac{\text{sen}x + \cos^2 x - \text{sen}^3 x}{\text{sen}x} \quad \ldots (3)$

De la condición inicial despejamos: $\cos^2 x - \text{sen}^3 x = \text{sen } x \quad \ldots (4)$

Reemplazando (4) en (3): $W = \dfrac{\text{sen}x + \text{sen}x}{\text{sen}x} \quad \therefore \quad \boxed{W = 2}$

**39.-** Completamos cuadrados en la condición dada y recordando que las razones seno y cosecante son recíprocas, tendremos:

$$\text{sen}^2 x + \underbrace{2\text{sen } x.\ \csc x}_{=1} + \csc^2 x = 7 + 2$$

Sustituimos el 1er miembro por un cuadrado perfecto: $(\text{sen } x + \csc x)^2 = 9$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros: $\text{sen } x + \csc x = \pm 3 \quad \ldots (1)$

Expresando W en términos de senos y cosenos: $W = \cos x.\ \dfrac{\cos x}{\text{sen}x} + 2 \text{ sen } x$

Efectuando las operaciones indicadas: $W = \dfrac{\cos^2 x + 2\text{sen}^2 x}{\text{sen}x}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\text{sen}x}$$

A continuación realizamos la división indicada: $W = \csc x + \text{sen } x \quad \ldots (2)$

Finalmente reemplazamos (1) en (2): $\boxed{W = \pm 3}$

**40.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada e identificar en ella una relación que sea obtenible de la condición establecida. Veamos:

$$W = \csc^2 x - 1 + \csc x \quad \Rightarrow \quad W = \csc x(\csc x + 1) - 1 \quad \ldots (1)$$

De la condición despejamos convenientemente:

$$\cos x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}+1\right)=1 \qquad \Rightarrow \qquad \csc x+1=\sec x$$

$$\Rightarrow \qquad \sec x-\csc x=1 \quad \ldots(*) \quad \vee \quad \sec x=\csc x+1 \quad \ldots(**)$$

Reemplazando (**) en (1): $W=\underbrace{\sec x \, . \, \csc x}-1 \quad \ldots(2)$

Nos concentraremos ahora en determinar el valor de la expresión indicada. Para ello nos apoyaremos en las relaciones obtenidas de la condición dada. Veamos:

Elevando (*) al cuadrado tenemos: $\underbrace{\sec^2 x+\csc^2 x}-2(\sec x \, . \, \csc x)=1$

Por la identidad auxiliar nos queda: $(\sec x \, . \, \csc x)^2-2(\sec x \, . \, \csc x)-1=0$

Resolviendo la ecuación cuadrática: $\sec x \, . \, \csc x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sec x \, . \, \csc x=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec x \, . \, \csc x=1\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sec x \, . \, \csc x=1-\sqrt{2} \quad \vee \quad \sec x \, . \, \csc x=1+\sqrt{2}$$

Debemos recordar que: $\sec x \, . \, \csc x\leq -2 \quad \vee \quad \sec x \, . \, \csc x\geq 2$

$$\therefore \quad \sec x \, . \, \csc x=1+\sqrt{2}$$

Reemplazando en (2): $W=(1+\sqrt{2})-1 \quad \therefore \quad \boxed{W=\sqrt{2}}$

**41.-** Nuestra estrategia consistirá en despejar «$a$» y «$b$» de las condiciones dadas.

a) Despejando "$a$" de la condición (1), tenemos: $a=\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha-2\cos^4\alpha}{\csc^4\alpha}$

Aplicando la identidad recíproca para la csc $x$: $a=\operatorname{sen}^4\alpha \, . \, \operatorname{sen}^4\alpha-2\operatorname{sen}^4\alpha \, . \, \cos^2\alpha$

Efectuando operaciones, nos queda: $a=\operatorname{sen}^8\alpha-2\operatorname{sen}^4\alpha \, . \, \cos^4\alpha \quad \ldots(1)$

Despejando "$b$" de la condición (2) tenemos: $b=\dfrac{\cos^6\alpha+4\operatorname{sen}^2\alpha}{\sec^2\alpha}$

Aplicando la identidad recíproca para la sec $x$: $b=\cos^6\alpha \, . \, \cos^2\alpha+4\operatorname{sen}^2\alpha . \, \cos^2\alpha$

Efectuando operaciones, nos queda: $b=\cos^8\alpha+4\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha \quad \ldots(2)$

Sumando (1)+ (2) : $a+b = \text{sen}^8\alpha + \cos^8\alpha - 2\text{sen}^4\alpha\cos^4\alpha + 4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$ . . . (*)

Del Prob. 7, recordamos que: $\text{sen}^8\alpha + \cos^8\alpha = 1 - 4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + 2\text{sen}^4\alpha\cos^4\alpha$

Sustituyendo en (*), obtenemos: $\boxed{a + b = 1}$

**42.**- Lo que haremos es transformar el 2do. miembro de la expresión dada de modo que adquiera la forma del 1er. miembro, para luego determinar «$m$» por simple comparación. Veamos:

En el 2do. miembro aplicamos la identidad algebraica: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:

$$\frac{\sec x.\csc x + m}{\sec x.\csc x + 2} = \frac{\cancel{(\sec x + \csc x)}(\sec^2 x - \sec x.\csc x + \csc^2 x)}{\cancel{(\sec x + \csc x)}(\sec x + \csc x)^2}$$

Aplicando la identidad auxiliar: $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x$, tendremos:

$$\frac{\sec x.\csc x + m}{\sec x.\csc x + 2} = \frac{(\sec^2 x.\csc^2 x - \sec x.\csc x)}{(\sec x + \csc x)^2}$$

Factorizando, nos queda: $\dfrac{\sec x.\csc x + m}{\sec x.\csc x + 2} = \dfrac{\cancel{\sec x.\csc x}(\sec x.\csc x - 1)}{\cancel{\sec x.\csc x}(\sec x.\csc x + 2)}$

Simplificando se obtiene: $\dfrac{\sec x.\csc x + m}{\sec x.\csc x + 2} = \dfrac{\sec x.\csc x - 1}{\sec x.\csc x + 2}$ $\therefore$ $\boxed{m = -1}$

**43.**-Expresando el primer miembro de la igualdad en términos de senos y cosenos tenemos:

$$\frac{(2 - \cos^2\alpha)\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{1 + 2.\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2 + \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{(2 - \cos^2\alpha)(\cos^2\alpha + 1)}{\cos^2\alpha + 2\underbrace{\text{sen}^2\alpha}} = 2 + \frac{1}{k}$$

Aplicando la identidad pitagórica en la expresión indicada, tendremos:

$$\frac{\cancel{(2 - \cos^2\alpha)}(1 + \cos^2\alpha)}{\cancel{(2 - \cos^2\alpha)}} = 2 + \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad 1 + \cos^2\alpha = 2 + \frac{1}{k}$$

Nuevamente aplicamos la identidad pitagórica: $2 - \text{sen}^2\alpha = 2 + \dfrac{1}{k}$

Aplicando la identidad recíproca para el $\text{sen}^2x$: $2 + \dfrac{1}{-\csc^2\alpha} = 2 + \dfrac{1}{k}$

Finalmente por comparación obtenemos que: $\boxed{k = -\csc^2\alpha}$

**44.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión original con el propósito de reducirla y poder despejar el cos $x$. Veamos:

Aplicando la identidad por cociente para la tan $x$, la expresión se transforma en:

$$\frac{(\tan a - \tan b.\cos x)^2}{(\text{sen} x)^2} = \tan^2 a - \tan^2 b$$

Teniendo en cuenta que: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, transponemos términos:

$$(\tan a - \tan b.\cos x)^2 = (1 - \cos^2 x)(\tan^2 a - \tan^2 b)$$

Desarrollando las operaciones indicadas, tendremos:

$$\cancel{\tan^2 a} - 2\tan a \,.\, \tan b.\ \cos x + \cancel{\tan^2 b \cos^2 x} = \cancel{\tan^2 a} - \tan^2 b - \cos^2 x \,.\, \tan^2 a + \cancel{\cos^2 x.\ \tan^2 b}$$

Transponiendo todos los términos al primer miembro, tendremos:

$$\tan^2 b - 2\tan a \,.\, \tan b \,.\, \cos x + \cos^2 x \,.\, \tan^2 a = 0$$

Reconociendo que el 1er. miembro es el desarrollo de un binomio al cuadrado, se tiene:

$$(\tan b - \cos x \,.\, \tan a)^2 = 0 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{\cos x = \cot a \,.\, \tan b}$$

**45.-** Utilizando las identidades pitagóricas en los numeradores tendremos:

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} + \frac{\csc^2 x - 1}{\csc x - 1} = 4 + \sec x$$

Aplicando la identidad algebraica de la diferencia de cuadrados, se obtiene:

$$\frac{\cancel{(\sec x - 1)}(\sec x + 1)}{\cancel{\sec x - 1}} + \frac{\cancel{(\csc x - 1)}(\csc x + 1)}{\cancel{\csc x - 1}} = 4 + \sec x$$

Al simplificar, la expresión se convierte en:

$$\cancel{\sec x} + 1 + \csc x + 1 = 4 + \cancel{\sec x} \quad \Rightarrow \quad \csc x = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{\text{sen } x + \csc x = \frac{5}{2}}$$

**46.-** Procederemos tal como se hizo en el Prob. 42, es decir, transformaremos la expresión dada en el 1er. miembro de modo que adquiera la forma del 2do. miembro. Luego el valor de «$m$» se determinará por una simple comparación de términos. Empezaremos realizando la adición indicada:

$$\frac{(\sec x - \tan x)^2 + (\sec x + \tan x)^2}{\sec^2 x - \tan^2 x} = m + m^m \,.\, (\cot x)^{-m}$$

Aplicando la identidad algebraica de Legendre en el numerador del 1er. miembro:

$$\frac{2(\overbrace{\sec^2 x}^{1+\tan^2 x} + \tan^2 x)}{1} = m + m^m \,.\, (\cot x)^{-m} \quad \Rightarrow \quad 2(1 + 2\tan^2 x) = m + m^m \,.\, (\cot x)^{-m}$$

Transformando esta última expresión en términos de cot $x$, nos queda:

$$2(1 + 2[\cot^{-1} x]^2\,) = m + m^m \,.\, (\cot x)^{-m} \quad \Rightarrow \quad 2 + 2^2.(\cot x)^{-2} = m + m^m \,.\, (\cot x)^{-m}$$

$$\therefore \quad \boxed{m = 2}$$

**47.-** La estrategia será la misma que el del problema anterior. Empezaremos transformando el 1er. miembro sustituyendo la $\sec^2 x$ por su identidad pitagórica. Veamos:

$$\frac{\cos x(3 + \tan x - 2\overbrace{\sec^2 x}^{1+\tan^2 x})}{2\tan x + 1} = \frac{1-m}{\sec x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x(1 + \tan x - 2\tan^2 x)}{2\tan x + 1} = \frac{1-m}{\sec x}$$

Factorizando el numerador del 1er. miembro, tendremos:

$$\frac{\cos x.(1-\tan x)\cancel{(2\tan x+1)}}{\cancel{(2\tan x+1)}} = \frac{1-m}{\sec x} \quad \Rightarrow \quad \cos x \,.\, (1 - \tan x) = \frac{1-m}{\sec x}$$

Finalmente por la identidad recíproca: $\dfrac{1-\tan x}{\sec x} = \dfrac{1-m}{\sec x}$ $\quad \therefore \quad \boxed{m = \tan x}$

**48.-** Sustituimos en la condición dada la relación auxiliar exsec $x$ por su correspondiente definición. De este modo nos queda:

$$\sec x - 1 + \tan x + 1 = a \quad \Rightarrow \quad \sec x + \tan x = a \quad \ldots (1)$$

De la identidad pitagórica para la tan $x$ y sec $x$ se puede deducir que:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x\,) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sec x - \tan x = \frac{1}{\sec x + \tan x}$$

Y de (1), tendremos que: $\quad \sec x - \tan x = \dfrac{1}{a} \quad \ldots (2)$

Restando (1) - (2): $\quad 2\tan x = a - \dfrac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \dfrac{a^2 - 1}{2a}$

$$\therefore \quad \boxed{\cot x = \frac{2a}{a^2 - 1}}$$

**49.-** En este caso conviene expresar todos los términos de la expresión original en base a seno y coseno, para lo cual sustituiremos las relaciones auxiliares por sus correspondientes definiciones. Veamos:

$$(x + 1 - \text{sen}\ \theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad (x + 1 - \text{sen}\ \theta)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta} - (1 - \cos\theta)^2$$

Ahora podemos factorizar el 2do. miembro, obteniéndose:

$$(x + 1 - \text{sen}\ \theta)^2 = (1 - \cos\theta)^2 \cdot \left[\frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\right] \quad \Rightarrow \quad (x + 1 - \text{sen}\ \theta)^2 = (1 - \cos\theta)^2 \cdot \left[\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, tendremos:

$$|x + 1 - \text{sen}\ \theta| = |1 - \cos\theta| \cdot |\tan\theta|$$

Siendo: $x > 0 \wedge \theta \in \text{IC}$

$$\Rightarrow \quad |x + 1 - \text{sen}\ \theta| = x + 1 - \text{sen}\ \theta\ ;\ |1 - \cos\theta| = 1 - \cos\theta\ ,\ |\tan\theta| = \tan\theta$$

$$x + 1 - \text{sen}\ \theta = (1 - \cos\theta) \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad x + 1 - \cancel{\text{sen}\theta} = \tan\theta - \cancel{\text{sen}\theta} \quad \therefore \quad \boxed{x = \tan\theta - 1}$$

**50.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar, de forma controlada, la expresión dada para «M», hasta que sea posible identificar entres sus términos a la condición dada. Veamos:

$$\text{M} = \frac{\text{sen}\,x + \text{sen}^5 x - \text{sen}^3 x - \text{sen}^7 x}{\cos x + \cos^5 x - \cos^3 x - \cos^7 x} \quad \Rightarrow \quad \text{M} = \frac{\text{sen}\,x(1+\text{sen}^4 x) - \text{sen}^3 x(1+\text{sen}^4 x)}{\cos x(1+\cos^4 x) - \cos^3 x(1+\cos^4 x)}$$

Factorizamos en ambos términos de la fracción y obtenemos:

$$\text{M} = \frac{\text{sen}x(1+\text{sen}^4x)(1-\text{sen}^2x)}{\cos x(1+\cos^4x)(1-\cos^2x)} \quad \Rightarrow \quad \text{M} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \frac{(1+\text{sen}^4 x)}{(1+\cos^4 x)} \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$$

Reemplazando la condición dada en esta última expresión, tendremos:

$$\text{M} = \tan x \cdot \tan x \cdot \cot^2 x \quad \Rightarrow \quad \text{M} = \tan^2 x \cdot \cot^2 x$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{M} = 1}$$

***ELIMINACIÓN DE ARCOS***

**51.-** Este tipo de ejercicios se caracterizan por que la tarea consiste en obtener una expresión trigonométrica independiente de la variable angular. Esto se logra apelando a las identidades conocidas y a la transformación de las condiciones dadas. Veamos:

De la condición (1): $\dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \dfrac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \dfrac{a}{b} \quad \ldots (*)$

De la condición (2) se deduce que:

$$\underbrace{\sec x \csc x}=3$$

Por la identidad auxiliar la expresión queda así: $\tan x + \cot x = 3$ ... (**)

Si ahora reemplazamos (*) en (**) obtenemos una expresión independiente de «$x$»:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$$

Efectuando y transponiendo nos queda: $a^2+b^2=3ab$

**52.-** Se pide: $F=(b-a)^2$

Por ello restamos convenientemente miembro a miembro: (2) - (1)

Obteniéndose: $(2-\cos^4 x)-(1+\text{sen}^4 x)=b\ \text{sen}^2 x.\cos^2 x - a\cos^2 x\ \text{sen}^2 x$

$$1-(\text{sen}^4 x+\cos^4 x)=(b-a)\ \text{sen}^2 x.\cos^2 x$$

Por identidades auxiliares: $1-(1-2\ \text{sen}^2 x.\cos^2 x)=(b-a)\ \text{sen}^2 x\ .\ \cos^2 x$

$$2=(b-a) \quad \therefore \quad F=(2)^2=4$$

**53.-** En primer lugar de la condición se puede deducir que:

$$\frac{\text{sen}\,x}{a}=\frac{\cos x}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \tan x=\frac{a}{b}$$

Nuestro problema se puede resolver fácilmente si ahora aplicamos en la condición dada una de las propiedades de las proporciones. Veamos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{a^2}=\frac{\cos^2 x}{b^2}=\frac{\tan^2 x}{c^2}$$

Aplicando la propiedad de razones y proporciones en la primera igualdad:

$$\frac{\text{sen}^2 x+\cos^2 x}{a^2+b^2}=\frac{\tan^2 x}{c^2}$$

Reemplazamos (*) en (**) y además aplicamos la identidad pitagórica en el 1er. miembro:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2+b^2}=\dfrac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{c^2}{1}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{b^2.c^2} \qquad \therefore \quad \boxed{a^2(a^2+b^2)=b^2c^2}$$

**54.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar las condiciones dadas hasta que sea posible independizarnos de la variable angular. Veamos:

Transformamos la condición (2), expresándolo en términos de la tan $x$:

$$(1-\frac{1}{\tan x})^2=(b-1)(1+\frac{1}{\tan^2 x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{(\tan x-1)^2}{\cancel{\tan^2 x}}=(b-1)\frac{(1+\tan^2 x)}{\cancel{\tan^2 x}}$$

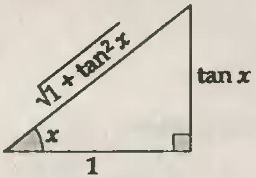
Luego e simplificar nos queda la expresión: $(b-1)(1+\tan^2 x)=(1-\tan x)^2 \;\ldots (*)$

Ahora es conveniente dividir (1) ÷ (*) para liberarnos de la variable angular:

$$\frac{a}{b-1}=1 \qquad \Rightarrow \qquad a=b-1 \qquad \therefore \qquad \boxed{\boldsymbol{b-a=1}}$$

**55.-** Dividiendo (2) ÷ (1): $\dfrac{\cancel{p}\,\text{sen}^{\cancel{2}} x.\cancel{\cos x}}{\cancel{p}\,\cos^2 x.\cancel{\text{sen}\,x}}=\dfrac{r}{q} \quad \Rightarrow \quad \tan x=\dfrac{r}{q} \quad \ldots (*)$

Utilizando el siguiente triángulo, podemos escribir la condición (2) en términos de la función «tan $x$», así:




$$p\,\text{sen}^2 x\,.\cos x=r \;\Rightarrow\; p.\,\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=r \;\ldots (**)$$

Sustituyendo (*) en (**) y elevando al cuadrado:

$$p^2.\frac{\frac{r^2}{q^2}}{\left(1+\frac{r^2}{q^2}\right)^2}.\frac{1}{\left(1+\frac{r^2}{q^2}\right)}=r^2$$

Efectuando y simplificando obtenemos: $\boxed{r^2p^2q^2=(r^2+q^2)^3}$

**56.-** Transformaremos las condiciones dadas de modo que sea posible establecer con estas las relaciones necesarias para poder eliminar la variable angular. Veamos:

De (1): $\tan x + \tan x \cdot \cos x = 4p \Rightarrow \tan x + \text{sen}\, x = 4p$ ... (3)

De (2): $\tan x - \tan x \cos x = 4q \Rightarrow \tan x - \text{sen}\, x = 4q$ ... (4)

De (3) + (4) y despejando: $\tan x = 2(p + q)$ ... (5)

De (3) - (4) y despejando: $\text{sen}\, x = 2(p - q)$ ... (6)

De (1) x (2) tenemos: $\tan^2 x \,.(1 - \cos^2 x) = 16\, pq$

$\tan^2 x \,.\, \text{sen}^2 x = 16\, pq$ ... (7)

Reemplazando (5) y (6) en (7): $4(p + q)^2 \,.\, 4(p - q)^2 = 16\, pq$

$$\therefore \quad \boxed{p^2 - q^2 = \sqrt{pq}}$$

**57.-** Por tratarse de condiciones que tienen entre sus términos al seno y coseno, lo conveniente es elevarlas al cuadrado, para luego agrupar convenientemente e independizarnos de la variable angular aplicando las identidades conocidas. Veamos:

De la condición $(1)^2$: $(m\, \text{sen}\, x - n \cos x)^2 = (m + 1)^2$ ,

$\Rightarrow \quad m^2\, \text{sen}^2 x + n^2 \cos^2 x - 2mn\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x = m^2 + 2m + 1$ ... (3)

De la condición $(2)^2$: $(n\, \text{sen}\, x + m \cos x)^2 = (n + 1)^2$

$\Rightarrow \quad m^2 \cos^2 x + n^2 \text{sen}^2 x + 2mn\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x = n^2 + 2n + 1$ ... (4)

Efectuamos la adición de (3) + (4) y factorizamos convenientemente:

$$m^2\underbrace{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1} + n^2\underbrace{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1} = m^2 + n^2 + 2m + 2n + 2$$

$$\therefore \quad \boxed{m + n + 1 = 0}$$

**58.-** Si dividimos ambos miembros de la condición (1), por $\cos^2 x$, tendremos:

$$\frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{a}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x - 1 = a \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x - 1 = a(1 + \tan^2 x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Despejando: } \tan^2 x = \dfrac{a+1}{1-a} \\[2ex] \text{También : } \quad \cot^2 x = \dfrac{1-a}{a+1} \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Reemplazando (3) en la condición(2): $\left(\dfrac{a+1}{1-a}\right)^2 - \left(\dfrac{1-a}{a+1}\right)^2 = b$

De donde al efectuar se obtiene: $\boxed{8a(a^2 + 1) = b(1- a^2)^2}$

**59.-** Lo conveniente es transformar las condiciones para obtener relaciones adecuadas que logren expresarse independientemente de la variable angular. Observa:

De (1): $\tan^3 x\,(1 + \tan^2 x) = m^8 \Rightarrow \tan^3 x\,.\sec^2 x = m^8$ ... (3)

De (2): $\cot^3 x(1 + \cot^2 x) = n^8 \Rightarrow \cot^3 x\,.\,\csc^2 x = n^8$ ... (4)

Multiplicando (3) . (4): $\sec^2 x\,.\,\csc^2 x = m^8\,.\,n^8$ ... (5)

Por la identidad auxiliar se tendrá: $(\tan x + \cot x)^2 = m^8\,.\,n^8$

Dividiendo (3) ÷ (4) y aplicando las identidades recíprocas:

$$\frac{\tan^3 x.\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\tan^3 x}.\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{m^8}{n^8} \Rightarrow \tan^8 x = \frac{m^8}{n^8} \Rightarrow \tan x = \frac{m}{n} \wedge \cot x = \frac{n}{m} \quad \ldots (*)$$

Reemplazando (*) en (5): $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2 = m^8\,.\,n^8 \quad \therefore \quad \boxed{m^2 + n^2 = m^5\,.\,n^5}$

**60.-** Transformaremos las condiciones hasta que logremos aislar a «$m$» y «$n$». Veamos:

De la condición (1): $m = \dfrac{(1+\operatorname{sen}x)}{(1-\operatorname{sen}x)}.\dfrac{(1+\operatorname{sen}x)}{(1+\operatorname{sen}x)}$

$$\Rightarrow m = \frac{(1+\operatorname{sen}x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow m = \left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{m} = \sec x + \tan x \ldots (3)$$

Reemplazando (3) en la condición (2), tendremos: $n = (\sqrt{m} - 1)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{m} - 1 \quad \therefore \quad \boxed{\sqrt{m} - \sqrt{n} = 1}$$

# CAP. 9 Identidades Trigonométricas de Arcos Compuestos

### *SENO, COSENO DE ARCOS COMPUESTOS*

**01.-** Recordemos: $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

Luego: $\quad M = 16\left(\dfrac{1}{8}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$

**02.-** Desarrollando los binomios y ordenando como sigue obtenemos:

$$M = \operatorname{sen}^2 18° + \cos^2 12° + 2 \operatorname{sen} 18° \cos 12° + \operatorname{sen}^2 12° + \cos^2 18° + 2 \operatorname{sen} 12° \,.\, \cos 18°$$

$$M = \underbrace{(\operatorname{sen}^2 18° + \cos^2 18°)}_{1} + \underbrace{(\operatorname{sen}^2 12° + \cos^2 12°)}_{1} + \underbrace{2(\operatorname{sen} 18° . \cos 12° + \cos 18° . \operatorname{sen} 12°)}_{\operatorname{sen}(18°+12°)}$$

Finalmente: $\quad M = 2 + 2 \operatorname{sen} 30° = 2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = 3}$

**03.-** Escribiendo la expresión en forma apropiada obtenemos:

$$M = \frac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}50° - \dfrac{1}{2}.\cos 50°\right)}{\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}25° - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos 25°\right)} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2(\operatorname{sen}50°.\cos 30° - \cos 50°.\operatorname{sen}30°)}{\sqrt{2}(\operatorname{sen}25°.\cos 45° - \cos 25°.\operatorname{sen}45°)}$$

Luego aplicando las fórmulas de los arcos compuestos:

$$M = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(50°\text{-}30°)}{\operatorname{sen}(25°\text{-}45°)} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} 20°}{(-\operatorname{sen} 20°)}$$

Finalmente al simplificar se obtendrá: $\quad \boxed{M = -\sqrt{2}}$

**04.-** Factorizamos: sen $(a + b)$ en los dos primeros términos:

$$M = \text{sen}^2(a + b) - 2\,\text{sen}(a + b).\cos a\,.\,\text{sen}\,b + \text{sen}^2 b$$

$$M = \text{sen}(a + b).[\text{sen}(a + b) - 2\cos a\,\text{sen}\,b] + \text{sen}^2 b$$

A continuación desarrollamos el seno del arco compuesto, así:

$$M = \text{sen}(a + b)\,.\,[\text{sen}\,a\,.\cos b + \cos a\,.\,\text{sen}\,b - 2\cos a\,.\,\text{sen}\,b] + \text{sen}^2 b$$

Luego, observamos la presencia del desarrollo de un arco compuesto.

$$M = \text{sen}(a+ b).\,[\text{sen}\,a.\cos b - \cos a\,.\text{sen}\,b] + \text{sen}^2 b$$

Finalmente utilizamos una propiedad especial, obteniendo:

$$M = \underbrace{\text{sen}(a+b).\,\text{sen}\,(a-b)}_{\text{sen}^2 a\,-\,\text{sen}^2 b} + \text{sen}^2 b \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \text{sen}^2 a}$$

**05.-** Completando cuadrados, tenemos:

$$W = \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\beta$$

Luego de agrupar convenientemente obtenemos:

$$W = [\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta]^2 + \cos^2\beta(1 - \cos^2\alpha)$$

$$W = [\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta - \cos\alpha\cos\beta]^2 + \cos^2\beta\,.\,\text{sen}^2\alpha$$

A continuación al simplificar, tendremos: $W = \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta.\,\text{sen}^2\alpha$

Finalmente al factorizar «$\text{sen}^2\alpha$» obtendremos:

$$W = \text{sen}^2\alpha\underbrace{\left(\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta\right)}_{1} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \text{sen}^2\alpha}$$

**06.-** Escribiendo apropiadamente como sigue: $W = \underbrace{\text{sen}^2 y - \text{sen}^2 x} + 1 - \text{sen}\,y\cos x$

Utilizamos una propiedad que nos permite utilizar la condición $x + y = 30°$, así:

$$W = \text{sen}(\underbrace{y + x}_{30°})\text{sen}\,(y - x) + 1 - \text{sen}\,y\cos x \;\Rightarrow\; W = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(y - x) + 1 - \text{sen}\,y\cos x$$

Luego multiplicamos por 2 ambos miembros y desarrollamos el arco compuesto:

$$2W = \text{sen}\,y\cos x - \cos y\,\text{sen}\,x + 2 - 2\,\text{sen}\,y\cos x \;\Rightarrow\; 2W = 2 - \text{sen}\,y\cos x - \cos y\,\text{sen}\,x$$

Luego de agrupar convenientemente y aplicar el seno de un arco compuesto con su respectivo valor numérico obtenemos:

$$2W = 2 - \text{sen}\,(y + x) \;\Rightarrow\; 2W = 2 - \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2W = 2 - \frac{1}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \frac{3}{4}}$$

**07.-** Escribiendo las condiciones (1) y (2) de otra manera, al utilizar las propiedades especiales de arcos compuestos, así:

$$\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = a \ldots (1) \qquad\qquad \cos^2 x - \text{sen}^2 y = b \ldots (2)$$

Sumando las condiciones (1) y (2): $\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\,\text{sen}^2 y = a + b$

Al efectuar y despejar en la igualdad anterior, obtenemos: $\text{sen}^2 y = \dfrac{1-a-b}{2} \ldots (4)$

En (2) reemplazando (4), tenemos: $\cos^2 x - \left(\dfrac{1-a-b}{2}\right) = b \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1-a+b}{2} \ldots (5)$

La condición (3) elevando al cuadrado en ambos miembros de la igualdad:

$$\cos^2 x \,.\, \text{sen}^2 y = c^2 \qquad \ldots (6)$$

Reemplazando (4) y (5) en (6), tenemos: $\left[\dfrac{(1-a)+b}{2}\right]\left[\dfrac{(1-a)-b}{2}\right] = c^2$

Al reducir, obtenemos: $(1 - a)^2 - b^2 = 4c^2 \quad \therefore \quad \boxed{(1 - a)^2 = b^2 + 4c^2}$

**08.-** Elevar al cuadrado en ambos miembros de la igualdad la condición (1) y (2) tenemos:

$$(\text{sen}\, x + \text{sen}\, y)^2 = m^2 \Rightarrow \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x\,\text{sen}\, y + \text{sen}^2 y = m^2 \ldots (4)$$

$$(\cos x + \cos y)^2 = n^2 \Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x \,.\, \cos y + \cos^2 y = n^2 \ldots (5)$$

Sumando (4) y (5), luego agrupando convenientemente y aplicando las propiedades tendremos:

$$\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\underbrace{[\cos x\cos y + \text{sen}\, x\,\text{sen}\, y]}_{\cos(x-y)=p\ldots\text{de}(3)} + \underbrace{\text{sen}^2 y + \cos^2 y}_{=1} = m^2 + n^2$$

$$2 + 2p = m^2 + n^2 \quad \therefore \quad \boxed{2(1 + p) = m^2 + n^2}$$

### *TANGENTE, COTANGENTE DE ARCOS COMPUESTOS*

**09.-** Escribiendo la expresión «M» en términos de la función tangente, obtenemos:

$$\text{M} = \frac{1}{\tan x + \tan y} - \frac{\tan x . \tan y}{\tan x + \tan y} \Rightarrow \text{M} = \frac{1 - \tan x . \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1}{\tan(x+y)}$$

Finalmente: $\text{M} = \dfrac{1}{\tan \pi/4} \quad \therefore \quad \boxed{\text{M} = 1}$

**10.-** Si utilizamos: $\tan A + \tan B = \dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A.\cos B}$

En nuestro problema obtendremos: $W = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha+\alpha)}{\cos 2\alpha.\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\cos 3\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

Agrupando como sigue:

$$W = \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\cos 2\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos 3\alpha}\right) \Rightarrow W = \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\cos 2\alpha}\left(\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\cos 3\alpha.\cos\alpha}\right) \ldots (1)$$

A continuación, utilizando arcos compuestos desarrollamos los equivalentes de: $\cos 3\alpha$ y $\cos\alpha$.

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

Luego de sumar los resultados anteriores, obtenemos:

$$\cos\alpha = \cos(2\alpha - \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos 3\alpha + \cos\alpha = 2\cos 2\alpha \cos\alpha \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $W = \dfrac{\operatorname{sen}3\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{2\cos 2\alpha.\cos\alpha}{\cos 3\alpha.\cos\alpha}$

Al simplificar tendremos: $\boxed{W = 2\tan 3\alpha}$

**11.-** Factorizamos como sigue: $W = \dfrac{2\tan A + 3\tan B - \tan C(1 + \tan A \tan B)}{\tan A + 4\tan B - 2\tan C(1 + \tan A \tan B)} \ldots (1)$

A continuación operamos con el dato:

$$B - A = C \Rightarrow \tan(B - A) = \tan C \Rightarrow \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A} = \tan C$$

Deduciendo: $\tan B - \tan A = \tan C(1 + \tan A \tan B) \quad \ldots (2)$

Reemplazando lo obtenido en (2) en (1): $W = \dfrac{2\tan A + 3\tan B - (\tan B - \tan A)}{\tan A + 4\tan B - 2(\tan B - \tan A)}$

Luego de efectuar y reducir obtenemos:

$$W = \frac{3\tan A + 2\tan B}{3\tan A + 2\tan B} \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$$

**12.-** Escribiendo como sigue tendremos: $3 \sec x \,.\, \csc x = 4[\tan(x) - \tan(x - y)]$

Desarrollando ambos miembros, el primero en términos de senos y cosenos y en el segundo la fórmula especial:

$$\frac{3}{\operatorname{sen}x.\cos x} = 4 \,.\, \frac{\operatorname{sen}[x-(x-y)]}{\cos x.\cos(x-y)} \quad \Rightarrow \quad 3\cos(x - y) = 4 \,.\, \operatorname{sen} y \,.\, \operatorname{sen} x$$

$$3\cos x \cos y + 3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Luego de efectuar y simplificar, obtenemos:

$$3\cos x \,.\, \cos y = \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} y \qquad \therefore \qquad \boxed{\cot x \,.\, \cot y = \frac{1}{3}}$$

**13.-** Escribiendo en términos de la función tangente:

$$\tan^2 x + 2\tan^2 x \,.\, \tan^2 y = 1 + \underbrace{\sec^2 y}_{1+\tan^2 y} \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x - \tan^2 y = 2(1 - \tan^2 x \,.\, \tan^2 y)$$

$$\Rightarrow \quad (\tan x + \tan y)(\tan x - \tan y) = 2(1 - \tan x \,.\, \tan y)(1 + \tan x \,.\, \tan y)$$

A continuación ordenamos apropiadamente, logrando:

$$\left(\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}\right)\left(\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x.\tan y}\right) = 2$$

Finalmente al reemplazar la segunda condición, obtenemos:

$$\tan(x+y) \,.\, \underbrace{\tan(x-y)}_{3} = 2 \qquad \therefore \qquad \boxed{\tan(x+y) = \frac{2}{3}}$$

**14.-** Efectuando los productos indicados tenemos:

$$W = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 5°.\tan 10° + \tan 5° + \tan 5°.\tan 10° + \tan 10° + \tan 5°.\tan 10°$$

A continuación agrupamos y ordenamos:

$$W = \tan 10° + \tan 5° + (2 - \sqrt{3}).\tan 10°.\tan 5° + \sqrt{3}$$

Recordando que: $\tan(\alpha + \beta) = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha \,.\, \tan\beta \,.\, \tan(\alpha+\beta)$

En el problema tendremos: $W = \tan(10° + 5°) + \sqrt{3} = \tan 15° + \sqrt{3}$

Finalmente reemplazando el valor de la tan 15°, obtenemos:

$$W = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 2}$$

**15.-** Luego de ordenar y agrupar apropiadamente, tendremos:

$$W=\frac{\sqrt{3}(1-\cot 65^\circ)+\cot 80^\circ(1-\cot 65^\circ)}{1+\cot 65^\circ-\sqrt{3}\cot 80^\circ(\cot 65^\circ+1)}\Rightarrow W=\frac{(1-\cot 65^\circ)(\sqrt{3}+\cot 80^\circ)}{(1+\cot 65^\circ)(1-\sqrt{3}\cot 80^\circ)}$$

A continuación la expresión se expresa en función de tangentes:

$$W=\frac{\tan 45^\circ-\tan 25^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 25^\circ}\cdot\frac{\tan 60^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 60^\circ.\tan 10^\circ}$$

Utilizando fórmulas de la tangente de ángulos compuestos obtenemos:

$W = \tan(45^\circ - 25^\circ).\tan(60^\circ + 10^\circ) \Rightarrow W = \tan 20^\circ.\tan 70^\circ = \tan 20^\circ.\cot 20^\circ \therefore$ **W = 1**

**16.-** Por ángulos complementarios: $\cot 54^\circ = \tan 36^\circ \wedge \cot 81^\circ = \tan 9^\circ$

Al reemplazar en W tenemos:

$$W = \tan^2 36^\circ - \tan^2 36^\circ.\tan^2 9^\circ + \tan^2 9^\circ + 4\tan 36^\circ.\tan 9^\circ$$

Escribiendo apropiadamente, obtenemos:

$$W = \tan^2 36^\circ + 2\tan 36^\circ\tan 9^\circ + \tan^2 9^\circ - \tan^2 36^\circ.\tan^2 9^\circ + 2\tan 36^\circ.\tan 9^\circ$$

$$W = (\tan 36^\circ + \tan 9^\circ)^2 - \tan^2 36^\circ.\tan^2 9^\circ + 2\tan 36^\circ.\tan 9^\circ \qquad \ldots (1)$$

Relacionando los ángulos $45^\circ = 36^\circ + 9^\circ$ y recordando:

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha.\tan\beta.\tan(\alpha+\beta)$$

En el problema, tendremos:

$$\tan(36^\circ + 9^\circ) = \tan 36^\circ + \tan 9^\circ + \tan 36^\circ.\tan 9^\circ.\tan(36^\circ + 9^\circ)$$

$$\therefore \quad \tan 36^\circ + \tan 9^\circ = 1 - \tan 36^\circ.\tan 9^\circ \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$W = (1 - \tan 36^\circ.\tan 9^\circ)^2 - \tan^2 36^\circ\tan^2 9^\circ + 2\tan 36^\circ\tan 9^\circ$$

Luego de efectuar y simplificar, obtendremos:

$$W = 1 - 2\tan 36^\circ\tan 9^\circ + \tan^2 36^\circ\tan^2 9^\circ + \tan^2 36^\circ\tan^2 9^\circ + 2\tan 36^\circ\tan 9^\circ$$

**W = 1**

**17.-** Observamos que: $2x = (x + y + z) + (x - y - z)$

Luego: $\tan 2x = \tan[(x + y + z) + (x - y - z)]$

Aplicando la identidad de la tangente del arco compuesto, obtenemos:

$$\tan 2x = \frac{\tan(x+y+z)+\tan(x-y-z)}{1-\tan(x+y+z).\tan(x-y-z)} \quad \Rightarrow \quad \tan 2x = \frac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{1-\dfrac{a+b}{a-b}} = \frac{2a}{-2b}$$

Finalmente: $\tan 2x = \dfrac{a}{-b}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\tan 2x = -\dfrac{a}{b}}$

**18.-** Hallemos la relación angular:

$$\left(\frac{\pi}{14}-\alpha\right) + \left(\frac{5\pi}{28}+\alpha\right) = \frac{7\pi}{28} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{28} + \alpha = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{14}-\alpha\right)$$

Aplicando la tangente en ambos lados es la igualdad tenemos:

$$\tan\left[\frac{5\pi}{28}+\alpha\right] = \tan\left[\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{14}-\alpha\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \tan\left[\frac{5\pi}{28}-\alpha\right] = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\frac{\pi}{14}-\alpha\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\left(\frac{\pi}{14}-\alpha\right)}$$

Luego de efectuar, obtenemos: $\tan\left[\dfrac{5\pi}{28}-\alpha\right] = \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\cot\left(\dfrac{5\pi}{28} - \alpha\right) = 3}$

**19.-** De la condición: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 3 . \cos[-(\alpha - \beta)] \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha - \beta) = 3 \quad ...(1)$

También: $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha + \beta) = 2 \quad ...(2)$

La relación angular es: $2\alpha = (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)$

Tomando tangente a ambos miembros:

$$\tan(2\alpha) = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] \quad \Rightarrow \quad \tan(2\alpha) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta)}$$

Reemplazando (1) y (2) tenemos: $\tan(2\alpha) = \dfrac{2+3}{1-(2)(3)}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\tan(2\alpha) = -1}$

**20.-** Recordando la Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

De soluciones (raíces) $x_1$ y $x_2$

Se cumple: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

En el problema: $k^2x^2 + x - k^2x - 1 = 2k \quad \Rightarrow \quad k^2x^2 + (1 - k^2)x + (-1 - 2k) = 0$

De la condición: $x_1 = \tan p$, $x_2 = \tan q$, tenemos:

$$x_1 + x_2 = \tan p + \tan q = \frac{-(1-k^2)}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \tan p \cdot \tan q = \frac{-1-2k}{k^2}$$

Luego de efectuar el ángulo compuesto y reemplazando lo anterior, obtenemos:

$$\tan(p+q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p . \tan q} = \frac{\dfrac{k^2-1}{k^2}}{1 + \dfrac{1+2k}{k^2}},$$

Finalmente: $\tan(p+q) = \dfrac{k^2-1}{k^2+2k+1} \Rightarrow \tan(p+q) = \dfrac{(k-1)(k+1)}{(k+1)^2} \quad \therefore \quad \boxed{\tan(p+q) = \dfrac{k-1}{k+1}}$

**21.-** Escribiendo apropiadamente el desarrollo de la tangente de un arco compuesto obtenemos:

$$\underbrace{\tan(24°+21°)}_{1} = \frac{\tan 24° + \tan 21°}{1 - \tan 24° . \tan 21°} \quad \Rightarrow \quad 1 - \tan 24° . \tan 21° = \tan 24° + \tan 21°$$

Luego de efectuar obtenemos: $1 = \tan 24° + \tan 21° + \tan 24° . \tan 21° \Rightarrow N = 1$

En forma análoga obtendremos: $\underbrace{\tan(63°-3°)}_{\sqrt{3}} = \dfrac{\tan 63° - \tan 3°}{1 + \tan 63° . \tan 3°}$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3}\tan 63° . \tan 3° = \tan 63° - \tan 3°$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \tan 63° - \tan 3° - \sqrt{3} . \tan 63° . \tan 3° \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{3}$$

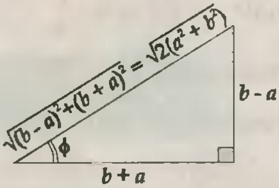
Luego: $N.M^2 = 1(\sqrt{3})^2 \quad \therefore \quad \boxed{N.M^2 = 3}$

**22.-** Efectuando y ordenando apropiadamente, obtenemos:

$$W = a \text{ sen } x - a \cos x + b \text{ sen } x + b \cos x$$

$$W = (a + b)\text{sen } x + (b - a)\cos x$$

Construyendo un ⊿ cuyos lados sean: $(a + b)$ y $(b - a)$




Así: $\quad \tan \phi = \dfrac{b-a}{a+b} \quad \Rightarrow$

La hipotenusa se calcula por Pitágoras, multiplicando y dividiendo la expresión W por $\sqrt{2(a^2+b^2)}$, tenemos:

$$W = \sqrt{2(a^2+b^2)}\left[\frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.\text{sen}\, x + \frac{b-a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.\cos x\right]$$

$$W = \sqrt{2(a^2+b^2)}\,[\cos \phi \,.\, \text{sen } x + \text{sen } \phi \,.\, \cos x]$$

Como se puede observar la expresión anterior es el desarrollo del seno de un ángulo compuesto, luego:

$$\underset{\text{Wmín}}{\underset{\downarrow}{W}} = \sqrt{2(a^2+b^2)}\,\underbrace{.\,\text{sen}(\phi + x)}_{\text{mínimo valor}=-1}$$

Finalmente el mínimo valor de W será: $\quad \boxed{W_{mín} = -\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

**23.-** Se sabe que: $\text{sen}(x + y)\,.\,\text{sen}(x - y) = \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y$

Aplicando dicha identidad en el problema, tenemos:

$$W = \frac{\text{sen}\left[\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right].\text{sen}\left[\frac{a+b}{2}-\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]}{\cos a\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b - (\cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b)}$$

Finalmente: $\quad W = \dfrac{\text{sen}\,a.\text{sen}\,b}{2\text{sen}\,a.\text{sen}\,b} \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{1}{2}}$

**24.-** Utilizando las siguientes identidades: $\quad \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \text{sen}(\alpha + \beta).\text{sen}(\alpha - \beta)$

$$\cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos(\alpha + \beta)\,.\,\cos(\alpha - \beta)$$

Aplicando dichas identidades en el problema, tenemos:

$$M = \frac{\text{sen}(38^\circ+8^\circ).\text{sen}(38^\circ-8^\circ)}{\cos(38^\circ+8^\circ).\cos(38^\circ-8^\circ)} \quad \Rightarrow \quad M = \tan 46^\circ.\tan 30^\circ.\underline{\tan 44^\circ}$$

Finalmente por ángulos complementarios, obtenemos:

$$M = \tan 46^\circ \,.\, \underline{\cot 46^\circ} \,.\, \tan 30^\circ \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

**25.-** Escribiendo apropiadamente en el numerador y aplicando una identidad especial en el denominador, tendremos:

$$M = \frac{4\left(\frac{1}{2}.\text{sen}10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ\right) + 3\cos 70^\circ}{\text{sen}(55^\circ+18^\circ).\text{sen}(55^\circ-18^\circ)}$$

A continuación notamos que en el numerador aparece el desarrollo del coseno de un arco compuesto, también cambiamos: cos 70° por sen 20°, por ángulos complementarios:

$$M = \frac{4(\text{sen}30^\circ.\text{sen}10^\circ + \cos 30^\circ.\cos 10^\circ) + 3\cos 70^\circ}{\text{sen}73^\circ.\text{sen}37^\circ} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\cos(30^\circ-10^\circ) + 3\,\text{sen}\,20^\circ}{\text{sen}\,73^\circ.\text{sen}\,33^\circ}$$

En forma similar escribiendo apropiadamente formamos el desarrollo del seno de un arco compuesto:

$$M = \frac{5\left(\frac{4}{5}\cos 20^\circ + \frac{3}{5}\text{sen}\,20^\circ\right)}{\text{sen}\,73^\circ.\text{sen}\,37^\circ} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{5(\text{sen}53^\circ.\cos 20^\circ + \cos 53^\circ.\text{sen}20^\circ)}{\text{sen}73^\circ.\text{sen}37^\circ}$$

Finalmente, luego de simplificar y reemplazar los valores numéricos notables tendremos:

$$M = \frac{5.\text{sen}(53^\circ+20^\circ)}{\text{sen}73^\circ.\text{sen}37^\circ} = \frac{5}{3/5} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{25}{3}}$$

**26.-** A continuación utilizaremos las siguientes propiedades:

$$\tan a + \tan b = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b} \quad \wedge \quad \cot a + \cot b = \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}a.\text{sen}b}$$

En el problema, luego de expresar adecuadamente el denominador, tendremos:

$$W = \frac{\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b}.\frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}a.\text{sen}b}}{\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b} - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}a.\text{sen}b}}$$

Efectuando el numerador y factorizando: -sen $(a + b)$ en el denominador obtenemos:

$$W = \frac{\dfrac{\text{sen}^2(a+b)}{\text{sen}a\cos a\,\text{sen}b\cos b}}{-\text{sen}(a+b)\left[\dfrac{1}{\text{sen}a\,\text{sen}b} - \dfrac{1}{\cos a\cos b}\right]}$$

Luego de efectuar y simplificar, obtenemos:

$$\Rightarrow \quad W = \frac{-\dfrac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}a.\cos a.\text{sen}b.\cos b}}{\dfrac{\cos(a+b)}{\text{sen}a\cos a\,\text{sen}b\cos b}} \quad \therefore \quad \boxed{W = -\tan(a+b)}$$

**27.-** Se sabe que: $\cos(a+b)\,.\,\cos(a-b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b$

De la condición: $\tan x\,.\,\tan y = \cos^2 a - \text{sen}^2 b \Rightarrow \tan x\,.\,\tan y = (1 - \text{sen}^2 a) - (\text{sen}^2 b)$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b = 1 - \tan x\,.\,\tan y \;\ldots (1)$$

De las condiciones: $\tan x = \cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \;\ldots (2)$

$$\tan y = \cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \;\ldots (3)$$

Sumando (2) y (3), tenemos: $\tan x + \tan y = 2\cos a\,.\,\cos b \quad \ldots (4)$

Reemplazando (1) y (4) en W tenemos: $W = \dfrac{\cot(x+y).[\tan x + \tan y]}{1 - \tan x.\tan y}$

Finalmente: $W = \cot(x+y)\,.\,\tan(x+y) \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$

**28.-** Se sabe que: $\tan a + \tan b = \dfrac{\text{sen}(a+b)}{\cos a.\cos b}$, luego:

De (1): $\dfrac{\text{sen}(x+y)}{\cos x.\cos y} = m\,\text{sen}(x+y) \quad \Rightarrow \quad \cos x\,.\,\cos y = \dfrac{1}{m} \;\ldots (4)$

De (2): $\dfrac{\text{sen}(y+z)}{\cos y.\cos z} = n\,\text{sen}\,(y+z) \quad \Rightarrow \quad \cos y\,.\,\cos z = \dfrac{1}{n} \;\ldots (5)$

De (3): $\dfrac{\text{sen}(x+z)}{\cos x.\cos z} = p\,\text{sen}(x+z) \quad \Rightarrow \quad \cos x\,.\,\cos z = \dfrac{1}{p} \;\ldots (6)$

Multiplicando las expresiones (4), (5) y (6), obtenemos:

$$(\cos x\,.\,\cos y\,.\,\cos z)^2 = \frac{1}{mnp} \quad \therefore \quad \boxed{\cos x\,.\,\cos y.\,\cos z = (mnp)^{-1/2}}$$

**29.-** Dato: $\tan 14^\circ = a[\tan 52^\circ - \tan 38^\circ]$

Expresando: 14° como «52° - 38°»

Se tiene: $\tan(52^\circ - 38^\circ) = a(\tan 52^\circ - \tan 38^\circ)$

Efectuando: $\left[\dfrac{\tan 52^\circ - \tan 38^\circ}{1+\tan 52^\circ.\tan 38^\circ}\right] = a(\tan 52^\circ - \tan 38^\circ)$

Simplificando: $\dfrac{1}{\underbrace{1+\tan 52^\circ.\cot 52^\circ}_{=1}} = a$

Pues: $38^\circ + 52^\circ = 90^\circ$

De los cual: $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$

**30.-** En general:

$\text{sen}(x+y+z) = \text{sen}\,x\cos y\cos z + \text{sen}\,y\cos x\cos z + \text{sen}\,z\cos y\cos x - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\,\text{sen}\,z$

Dividiendo a todo entre: $\cos x \,.\, \cos y \,.\, \cos z$

Se obtiene: $\dfrac{\text{sen}(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z} = \tan x + \tan y + \tan z - \tan x \,.\, \tan y \,.\, \tan z$

En el problema: $x = 19^\circ$ ; $y = 38^\circ$ ; $z = 33^\circ$

Efectuando: $\dfrac{\text{sen}(19^\circ + 38^\circ + 33^\circ)}{\cos 19^\circ.\cos 38^\circ.\cos 33^\circ} = \tan 19 + \tan 38^\circ + \tan 33^\circ - \tan 19^\circ.\tan 38^\circ.\tan 33^\circ$

Como: $\text{sen}\,90^\circ = 1 \quad \wedge \quad \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

Se obtiene: $\tan 19^\circ + \tan 38^\circ + \tan 33^\circ - \tan 19^\circ \,.\, \tan 38^\circ.\ \tan 33^\circ = \dfrac{1}{\cos 19^\circ \cos 38^\circ \cos 33^\circ}$

$\therefore \qquad \boxed{\mathbf{W = \sec 19^\circ \,.\, \sec 38^\circ \,.\, \sec 33^\circ}}$

**31.-** Según el enunciado, los datos son:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{... (i)}$$

$$x \cdot \text{sen}\,\theta + y\cos\theta = z \quad \text{... (ii)}$$

Apartir de los cuales, por propiedad de identidades se obtienen:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{z} \quad \wedge \quad \cos\theta = \frac{y}{z}$$

Se pide: $M = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Que luego de desarrollar, se transforma en:

$$M = \text{sen}\,\theta + \cos\theta \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \frac{x+y}{z}}$$

**32.-** Recordemos: $\tan a \pm \tan b = \dfrac{\text{sen}(a \pm b)}{\cos a.\cos b}$

Luego en la condición: $\tan x - \tan y + \tan y + \tan z = 2\,\text{sen}(x+z)$

Finalmente al simplificar, obtenemos:

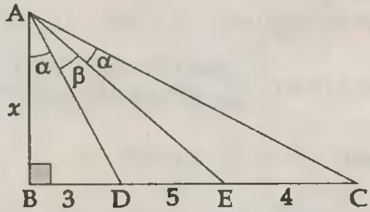
$$\frac{\text{sen}(x+z)}{\cos x.\cos z} = 2\,\text{sen}\,(x+z) \qquad \therefore \qquad \boxed{\cos x\,.\,\cos z = \frac{1}{2}}$$

***SITUACIONES GRÁFICAS***

**33.-** De la figura: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{8}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \dfrac{3}{x}$

$$\tan(\alpha+\beta+\alpha) = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan\alpha} = \frac{12}{x}$$

Efectuando, tendremos:



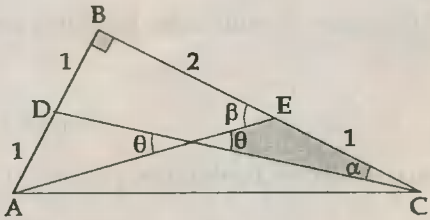

$$\frac{\frac{8}{x}+\frac{3}{x}}{1-\frac{24}{x^2}} = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{11x}{x^2-24} = \frac{12}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 11x^2 = 12x^2 - 288$$

Luego: $x^2 = 288 \quad \therefore \quad \boxed{x = 12\sqrt{2}}$

**34.-** En la figura: $\alpha + \theta = \beta \quad \Rightarrow \quad \theta = \beta - \alpha$

Luego: $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$

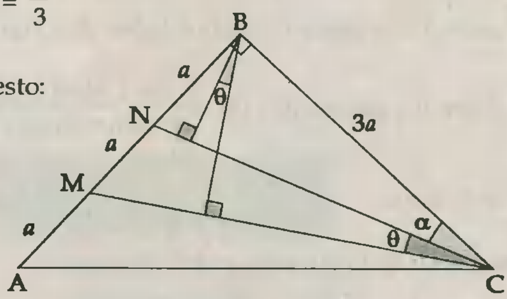



$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta.\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Finalmente: $\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}}$

**35.-** De la figura: $\tan\alpha = \dfrac{1}{3} \quad \wedge \quad \tan(\alpha+\theta) = \dfrac{2}{3}$



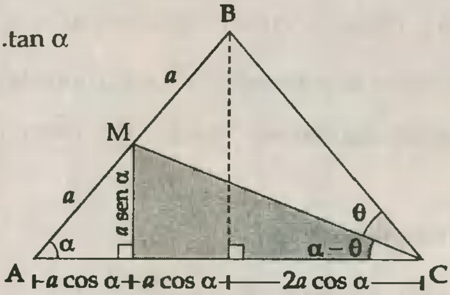

Desarrollando la tangente del arco compuesto:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1-\tan\alpha.\tan\theta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}+\tan\theta}{1-\frac{1}{3}.\tan\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1+3\tan\theta}{3-\tan\theta} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 11\tan\theta = 3$$

$\therefore \qquad \boxed{\tan\theta = \dfrac{3}{11}}$

**36.-** En la figura: $\tan(\alpha-\theta) = \dfrac{a\operatorname{sen}\alpha}{3a\cos\alpha} = \dfrac{1}{3}.\tan\alpha$




$$\Rightarrow \qquad \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha.\tan\theta} = \frac{\tan\alpha}{3}$$

$\Rightarrow \ (\tan\theta)\,.\,\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 3\tan\theta = 0$

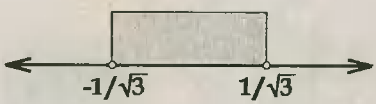
(Ecuación cuadrática en $\tan\alpha$)

Para que la ecuación cuadrática exista:

$$(-2)^2 - 4(\tan\theta)(3\tan\theta) \geq 0$$

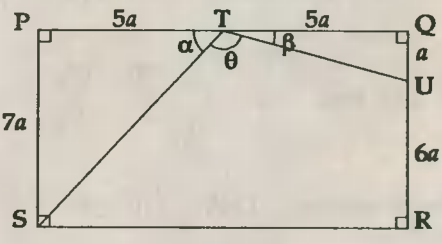
Simplificando, obtenemos:

$$4 - 12\tan^2\theta \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan^2\theta \leq \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow$$




Luego $\theta$ es máximo si: $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 30°}$

**37.-** Sea UR = 6a, $m\angle PTS = \alpha$, $m\angle QTU = \beta$




En el ⊿TPS: $\tan\alpha = \dfrac{PS}{PT} = \dfrac{7a}{5a} = \dfrac{7}{5} \ \ldots (1)$

En el ⊿TQU: $\tan\beta = \dfrac{QU}{QT} = \dfrac{a}{5a} = \dfrac{1}{5} \ \ldots (2)$

La relación angular de la figura es:

$$\alpha + \theta + \beta = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - (\alpha + \beta)$$

Tomando tangente en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\tan\theta = \tan[\pi - (\alpha + \beta)] = \frac{\tan\pi - \tan(\alpha+\beta)}{1 + \tan\pi . \tan(\alpha+\beta)} = -\tan(\alpha + \beta)\ ; \qquad \text{pues:} \quad \tan\pi = 0$$

Por lo tanto: $\tan\theta = -\left[\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\right] \ldots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3) tenemos:

$$\tan\theta = -\left[\frac{\frac{7}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{5}}\right] = -\frac{\frac{8}{5}}{\frac{18}{25}} = -\frac{40}{18} \qquad \therefore \qquad \boxed{\tan\theta = -\frac{20}{9}}$$

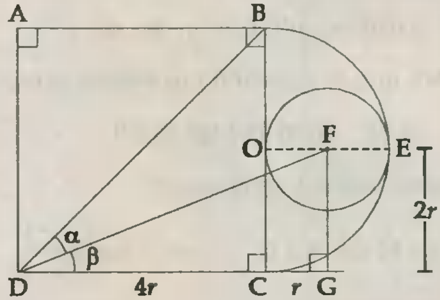
**38.-** Sea: $OE = 2r$ ; $OF = r$ ; $OB = 2r$ ; $BC = 4r$ , $m\angle FDC = \beta$

Prolongamos el segmento $\overline{DC}$ y bajamos la perpendicular FG.

La relación angular es: $\alpha + \beta = 45^\circ$ ; de lo cual:

$$\alpha = 45^\circ - \beta$$

Aplicando tangentes:



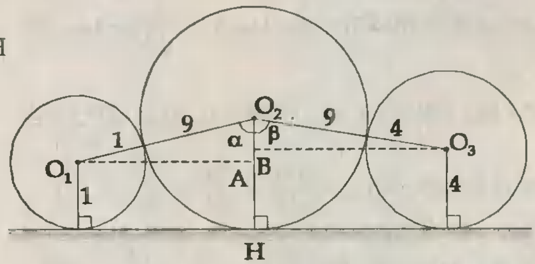

$$\tan\alpha = \tan(45^\circ - \beta) = \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$$

En el ⊿DGF: $\tan\beta = \dfrac{2r}{5r} = \dfrac{2}{5}$

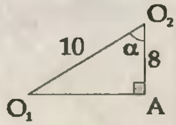
$$\tan\alpha = \frac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} \qquad \therefore \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{7}{3}}$$

**39.-** Sea: $O_1A \perp O_2H$ , $O_3B \perp O_2H$

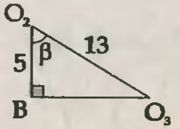
$m\angle O_1O_2A = \alpha$ , $m\angle O_3O_2B = \beta$




En ⊿$O_1AO_2$ $\Rightarrow$




Por Pitágoras: $O_1A = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \qquad \therefore \qquad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}\ ;\ \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

En el $\triangle O_2B_2 \quad \Rightarrow$ 


Por Pitágoras: $\quad O_3B = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \qquad \therefore \quad \text{sen}\,\beta = \dfrac{12}{13}\ ; \ \cos\beta = \dfrac{5}{13}$

La relación angular es: $\quad \theta = \alpha + \beta$

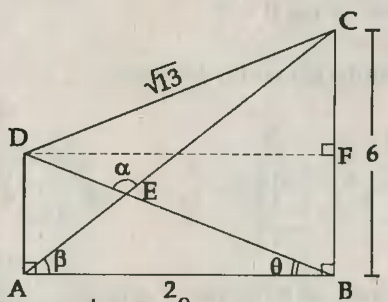
Luego: $\qquad \text{sen}\,\theta = \text{sen}(\alpha + \beta) \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha.\text{sen}\,\beta$

Finalmente: $\qquad \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{13} + \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13} \qquad \therefore \qquad \boxed{\text{sen}\,\theta = \dfrac{63}{65}}$

**40.-** Sea $\beta = m\angle EAB$ y $\theta = m\angle ABE$

$$m\angle AEB = m\angle CED = \alpha$$

Por ser ángulos opuestos por el vértice.




En $\Delta$ ABE se cumple: $\quad \alpha + \beta + \theta = \pi$

$$\alpha = \pi - (\theta - \beta)$$

$\therefore \quad \tan\alpha = \tan[\pi - (\theta + \beta)]$

Desarrollando: $\tan(\pi - x)$; se obtiene: $-\tan x$ ; ya que: $\tan\pi = 0$

$$\tan\alpha = -\tan(\theta + \beta) \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{-[\tan\theta + \tan\beta]}{1 - \tan\theta.\tan\beta} \quad \ldots (1)$$

Sea DE $\perp$ BC $\Rightarrow$ en el $\triangle$DFC por Pitágoras tenemos:

$$FC = \sqrt{DC^2 - DF^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 2^2}$$

$$FC = 3 \qquad \therefore \qquad FB = AD = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En el } \triangle BAD \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] \text{En el } \triangle ABC \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{array}\right\} \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1): $\quad \tan\alpha = -\dfrac{\left(\dfrac{3}{2} + 3\right)}{1 - \dfrac{3}{2}.3} = \dfrac{-\dfrac{9}{2}}{-\dfrac{7}{2}} = \dfrac{9}{7} \qquad \therefore \quad \boxed{\cot\alpha = \dfrac{7}{9}}$

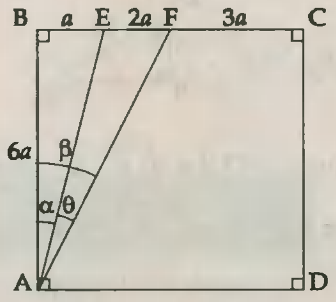
**41.-** Sea EF = $2a$ $\Rightarrow$ BE = $a$

BF = FC = $3a$ $\Rightarrow$ AB = $6a$

Sea: $m\angle BAE = \alpha$ $\vee$ $m\angle BAF = \beta$

La relación angular es: $\theta = \beta - \alpha$

Luego: $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$

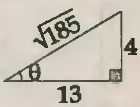



$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \quad \ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En el } \triangle BAE \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{6} \\[2ex] \text{En el } \triangle BAF \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{6}} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{13}{12}} = \frac{4}{13} \Rightarrow$$

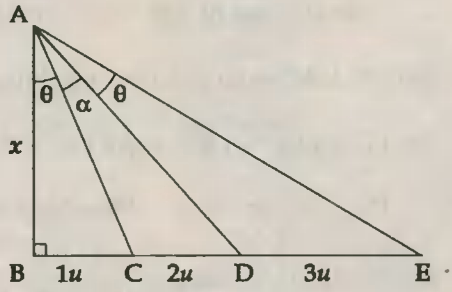



La hipotenusa se halla por Pitágoras: $\boxed{\sec\theta = \frac{\sqrt{185}}{13}}$

**42.-** Sea AB = $x$, $m\angle BAC = m\angle DAE = \theta$,

$m\angle CAD = \alpha$

Planteamos las siguientes relaciones angulares.




$$\left.\begin{array}{l} \text{En el } \triangle ABC \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \text{En el } \triangle ABD \Rightarrow \tan(\theta + \alpha) = \dfrac{3}{x} \\[2ex] \text{En el } \triangle ABE \Rightarrow \tan(2\theta + \alpha) = \dfrac{x}{6} \end{array}\right\} \ldots (1)$$

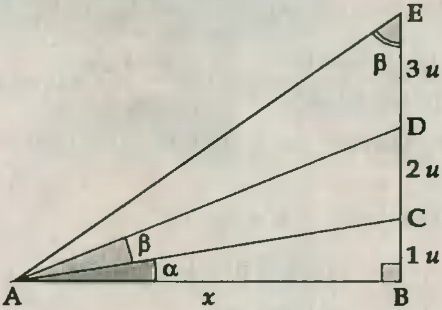
También se debe cumplir: $\theta = (2\theta + \alpha) - (\theta + \alpha)$

$$\tan\theta = \tan[(2\theta + \alpha)-(\theta + \alpha)] \Rightarrow \tan\theta = \frac{\tan(2\theta+\alpha) - \tan(\theta+\alpha)}{1 + \tan(2\theta+\alpha).\tan(\theta+\alpha)} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\dfrac{6}{x} - \dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{6}{x}.\dfrac{3}{x}} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2+18}{x^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x}{x^2+18}$

$x^2 + 18 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \therefore \quad \boxed{AB = x = 3\ u}$

**43.**- Sea: $AB = x$ ; $m\angle CAB = \alpha$



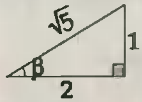

$$\left.\begin{array}{l} \text{En el} \triangle \text{ ABC} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{x} \\ \text{En el} \triangle \text{ ABD} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{3}{x} \\ \text{En el} \triangle \text{ABE} \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{x}{6} \end{array}\right\} \ldots (1)$$

La relación angular es: $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$

$$\tan\beta = \tan[(\alpha+\beta) - \alpha] \Rightarrow \tan\beta = \frac{\tan(\alpha-\beta) - \tan\alpha}{1 + \tan(\alpha+\beta).\tan\alpha} \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $\dfrac{x}{6} = \dfrac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}.\dfrac{1}{x}} \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{x^2+3}{x^2}} \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{2x}{x^2+3}$

$\Rightarrow \quad x^2 + 3 = 12 \Rightarrow x = AB = 3 \quad \therefore \quad \tan\beta = \dfrac{x}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$




La hipotenusa se halla por Pitágoras: $\text{sen}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \therefore \quad \boxed{\text{sen}\,\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

### *IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE 3 ARCOS*

**44.**- Se cumple que: $\dfrac{\cos(a-b)}{\cos a.\cos b} = 1 + \tan a\,.\,\tan b$

Aplicando dicho teorema en el problema, tendremos:

$$M = 1 + \tan x.\tan y + 1 + \tan y.\tan z + 1 + \tan x.\tan z$$

$$M = 3 + (\tan x\,.\,\tan y + \tan y\,.\,\tan z + \tan x\,.\,\tan z)$$

Como: $x + y + z = 90° \Rightarrow \tan x \,.\, \tan y + \tan y \,.\, \tan z + \tan x \,.\, \tan z = 1$

Finalmente: $\boxed{M = 4}$

**45.-** Del dato: $A + B = 90° - C \Rightarrow \quad \tan(A + B) = \tan(90° - C) \ldots (1)$

Pero: $\tan(90° - C) = \cot C$ (por arcos complementarios)

En (1): desarrollando al lado izquierdo tenemos:

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \cot C = \frac{1}{\tan C} \Rightarrow \tan A \tan C = \tan B \tan C = 1 - \tan A \tan B$$

$\Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$

**46.-** Del dato: $A + B = 180° - C$

$$\tan(A + B) = \tan(180° - C) \ \ldots (1)$$

Pero: $\tan(180° - C) = -\tan C$ (Por reducción al I C)

En (1): desarrollando el lado izquierdo tenemos: $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B} = -\tan C$

$$\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$$

$\therefore \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \quad W = \tan A \tan B \tan C - \tan A \tan B \tan C$

$\therefore \quad \boxed{W = 0}$

**47.-** Como:

$\cot x - \tan y = m \Rightarrow 1 - \tan x . \tan y = m \tan x \quad \ldots (1)$

$\cot y - \tan z = n \Rightarrow 1 - \tan y \,.\, \tan z = n \tan y \quad \ldots (2)$

$\cot z - \tan x = p \Rightarrow 1 - \tan x \,.\, \tan z = p \tan z \quad \ldots (3)$

Sumando las igualdades: (1), (2) y (3) obtenemos:

$$3 - (\tan x \,.\, \tan y + \tan y \,.\, \tan z + \tan x \,.\, \tan z) = m \,.\, \tan x - n \,.\, \tan y + p \tan z \ldots (*)$$

Como: $x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \,.\, \tan y + \tan x \,.\, \tan z + \tan y \,.\, \tan z = 1$

Luego en (*): $3 - (1) = m \,.\, \tan x + n \,.\, \tan y + p \tan z \quad \therefore \quad m \tan x + n \tan y + p \tan z = \boxed{2}$

**48.-** Como: sen $x$ + cos $y$ . cos z = 0 $\Rightarrow$ $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y . \cos z} = -1 \; \ldots (*)$

Pero: $x + y + z = 180^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(y + z)$

En (*): $\dfrac{\operatorname{sen}(y+z)}{\cos y . \cos z} = -1 \quad \Rightarrow \quad \tan y + \tan z = -1 \; \ldots (1)$

También si: $x + y + z = 180^\circ \Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \, . \tan y \, . \tan z$

Por (1): $\tan x - 1 = \tan x \, . \tan y \, . \tan z \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{M = \tan x - 1}}$

**49.-** Agrupando convenientemente los ángulos, tenemos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}[(x+z)+y)]}{\cos[(x+z)-y)]} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}(x+z)\cos y + \cos(x+z).\operatorname{sen} y}{\cos(x+z).\cos y + \operatorname{sen}(x+z).\operatorname{sen} y}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre cos $y$ . cos($x$ + z) tenemos:

$$W = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x+z)\cos y + \cos(x+z).\operatorname{sen} y}{\cos y.\cos(x+z)}}{\dfrac{\cos(x+z).\cos y + \operatorname{sen}(x+z).\operatorname{sen} y}{\cos y.\cos(x+z)}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\tan(x+z) + \tan y}{1 + \tan(x+z).\tan y} \; \ldots (1)$$

Pero: $\tan(x + z) = \dfrac{\tan x + \tan z}{1 - \tan x . \tan z} = \dfrac{2+3}{1-2(3)} = -1 \; \ldots (2)$

(2) en (1): $W = \dfrac{(-1)+4}{1+(-1)(4)} = \dfrac{3}{-3} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W = -1}}$

**50.-** Sumando miembro a miembro tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \tan A + \tan B = k \\ \tan A + \tan C = l \\ \tan B + \tan C = m \end{array}\right\}$$

$$2\,(\underbrace{\tan A + \tan B + \tan C}) = k + l + m \quad \Rightarrow \quad \tan A.\tan B.\tan C = \frac{k+l+m}{2} \; \ldots (1)$$

De la condición: $\tan A + \tan B = k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}(A+B)}^{\operatorname{sen} C}}{\cos A \cos B} = k$

Luego: $\operatorname{sen} C = k \cos A \cos B$

Análogamente: $\quad \text{sen } B = l \cos A \cos C$

$$\text{sen } A = m \cos B \cos C$$

Ahora multiplicamos las expresiones anteriores, obteniendo:

$\text{sen } A.\text{sen } B.\text{sen } C = klm \cos^2 A.\cos^2 B.\cos^2 C$

$\tan A.\tan B.\tan C = klm \cos A \cos B \cos C \ldots (2)$

De (1) y (2) obtenemos: $klm \cos A.\cos B.\cos C = \dfrac{k+l+m}{2}$

$\sec A.\sec B.\sec C = \boxed{\dfrac{2klm}{k+l+m}}$

51.- Reduciendo aproximadamente las expresiones indicadas tendremos:

* $\text{sen}(B + C) = \text{sen }(\pi - A) = \text{sen } A$

* $\cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$

* $\cos C = \cos[\pi - (A + B)] = -\cos(A + B)$

* $\cos(B - A) + \cos(A + B) = \cos B \cos A + \text{sen } B \text{ sen } A + \cos A \cos B - \text{sen } A \text{ sen } B = 2 \cos A \cos B$

Luego en la expresión W, obtenemos:

$$W = \frac{\text{sen}^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C}{-\cos A.\cos B.\cos C} \Rightarrow \quad W = \frac{\cos^2 B - \text{sen}^2 A + \cos^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\cos(B+A).\cos(B-A) + [-\cos(A+B)]^2}{\cos A \cos B \cos C} \Rightarrow \quad W = \frac{\cos(A+B)\overbrace{[\cos(B-A) + \cos(A+B)]}}{\cos A \cos B \cos C}$$

Finalmente: $\quad W = \dfrac{-\cos C.2\cos B.\cos A}{\cos A.\cos B.\cos C} \quad \therefore \quad \boxed{W = -2}$


**01.-** Del enunciado del problema, podemos reconocer que:

$$\underbrace{\csc(90^\circ - A)}_{\sec A} - x \cdot \cos A \cdot \underbrace{\cot(90^\circ - A)}_{\tan A} = \underbrace{\operatorname{sen}(90^\circ - A)}_{\cos A}$$

Todas las equivalencias indicadas se deducen de la aplicación de reducción al IC expuesta en el caso 1 (item 10.1) sobre ángulos complementarios.

Ahora, escribimos el problema como sigue:

$$\sec A - x \cdot \cos A \cdot \tan A = \cos A \quad \Rightarrow \quad \sec A - \cos A = x \cdot \cos A \cdot \tan A$$

Por identidades trigonométricas, deducimos:

$$\frac{1}{\cos A} - \cos A = x \cdot \cancel{\cos} A \cdot \frac{\operatorname{sen} A}{\cancel{\cos A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\cos^2 A}{\cos A} = x \cdot \operatorname{sen} A \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A} = x \operatorname{sen} A$$

Luego de simplificar: sen A , se obtiene: $\boxed{x = \tan A}$

**02.-** Se pide: $E = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos 179^\circ + \underline{\cos 180^\circ}$ . . . (i)

Que también se puede expresar como sigue:

$$E = \cos 179^\circ + \cos 178^\circ + \cos 177^\circ + \ldots + \cos 1^\circ + \underline{\cos 180^\circ} \quad \ldots \text{(ii)}$$

Sumando miembro a miembro, y aplicando: $\cos x + \cos y = 0$; cada vez que: $x + y = 180^\circ$.

Se obtiene: $2E = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 2 \cdot \cos 180^\circ$

$$2E = 2 \cdot \cos 180^\circ = 2(-1) \qquad \therefore \qquad \boxed{E = -1}$$

**03.-** Por ángulos suplementarios, tendremos: $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$

Y por ángulos complementarios: $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{5\pi}{12} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$$

Y por ángulos complementarios: $\cos\frac{5\pi}{12} = \text{sen}\frac{\pi}{12} \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = -\text{sen}\frac{\pi}{12}$

Reemplazando en la expresión inicial, obtendremos:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} + \frac{\text{sen}\frac{\pi}{12}}{-\text{sen}\frac{\pi}{12}} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

**04.-** a) Eliminamos el número entero de vueltas, para ello se descompone el ángulo a reducir en múltiplos de 2 $\pi$ más un cierto ángulo.

$$\text{sen}\frac{52\pi}{3}.\cos\frac{25\pi}{3} = \text{sen}\left(\cancel{16\pi} + \frac{4\pi}{3}\right).\cos\left(\cancel{8\pi} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{sen}\frac{52\pi}{3}.\cos\frac{25\pi}{3} = \text{sen}\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\text{III C}}.\cos\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{I C}} = (-)\,(+) = (-)$$

b) Eliminamos el número entero de vueltas

$$\text{sen}\frac{32\pi}{5}.\cot\frac{22\pi}{3} = \text{sen}\left(\cancel{6\pi} + \frac{2\pi}{5}\right).\cot\left(\cancel{6\pi} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\text{sen}\frac{32\pi}{5}.\cot\frac{22\pi}{3} = \text{sen}\underbrace{\frac{2\pi}{5}}_{\text{I C}}.\cot\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\text{III C}} = (+)\,(+) = (+)$$

c) $\text{sen}\left(-\frac{205\pi}{3}\right).\cot\frac{73\pi}{10} = -\text{sen}\frac{205\pi}{3}.\cot\frac{73\pi}{10}$

Eliminamos el número entero de vueltas

$$\text{sen}\left(-\frac{205\pi}{3}\right).\cot\frac{73\pi}{10} = -\text{sen}\left(\cancel{68\pi} + \frac{\pi}{3}\right).\cot\left(\cancel{6\pi} + \frac{13\pi}{10}\right)$$

$$\text{sen}\left(-\frac{205\pi}{3}\right).\cot\frac{73\pi}{10} = -\text{sen}\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{I C}}.\cot\underbrace{\left(\pi + \frac{13\pi}{10}\right)}_{\text{III C}} = (-)\,(+)\,(+) = (-)$$

Finalmente, los signos serán: **(-) ; (+) ; (-)**

**05.-** Trabajando por separado con cada expresión, obtendremos:

$R = \cos(\cancel{720°} + 90°) + \cot(\cancel{360°} + 65°)$ (eliminando el número entero de vueltas)

$$R = \underbrace{\cancel{\cos 90°}}_{0} + \cot 65° \quad \Rightarrow \quad R = \cot 65°$$

$$S = \text{sen}\,(\cancel{360°} + 90°)\,.\,\tan\,(\cancel{720°} + 65°) \quad \Rightarrow \quad S = \underbrace{\text{sen}\,90°}_{1}\,.\,\tan 65°$$

Finalmente: R.S. = cot 65°.tan 65° $\therefore$ **R.S = 1**

**06.-** Descomponiendo cada ángulo convenientemente:

(*) $11\frac{\pi}{4} + x = 2\pi + 3\frac{\pi}{4} + x \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(11\frac{\pi}{4}+x\right) = \text{sen}\left(3\frac{\pi}{4}+x\right)$

(*) $33\frac{\pi}{4} + y = 8\pi + \frac{\pi}{4} + y \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(33\frac{\pi}{4}+y\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)$

(*) $55\frac{\pi}{4} + x = 13\pi + 3\frac{\pi}{4} + x \quad \Rightarrow \quad \cos\left(55\frac{\pi}{4}+x\right) = -\cos\left(3\frac{\pi}{4}+x\right)$

(*) $77\frac{\pi}{4} + y = 19\pi + \frac{\pi}{4} + y \quad \Rightarrow \quad \cos\left(77\frac{\pi}{4}+y\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)$

Reemplazando en lo que se pide: A - B , se tiene:

$$A - B = \text{sen}\left(3\frac{\pi}{4}+x\right).\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y\right) - \left[-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)\right].\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right]$$

Factorizando (-) , y ordenando:

$$A - B = -\left[\cos\left(3\frac{\pi}{4}+x\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right) - \text{sen}\left(3\frac{\pi}{4}+x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right]$$

$$A - B = -\left[\cos\left(3\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}+y\right)\right] = -[\cos\,(\pi + x + y)] = -[-\cos(x + y)]$$

$\therefore$ **A - B = cos (x + y)**

**07.-** Utilizando cada uno de los casos de reducción al primer cuadrante, tendremos:

$\text{sen}\,(\pi + x) = -\,\text{sen}\,x$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\,\text{sen}\,x$ $\qquad \cos\,(x - \pi) = -\cos x$

$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$ $\qquad \csc\,(\pi + x) = -\csc x$ $\qquad \sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = +\csc x$

$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$ $\qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = +\tan x$

Luego: $W = \dfrac{(-\text{sen}x)(-\text{sen}x)+(-\cos x)(-\cos x)}{(-\csc x)(\csc x)-(-\cot x)(\tan x)} \Rightarrow W = \dfrac{\text{sen}^2 x+\cos^2 x}{-\csc^2 x+1}$

Finalmente: $W = \dfrac{1}{-\cot^2 x} \quad \therefore \quad \boxed{W = -\tan^2 x}$

08.- Reduciendo cada uno de los factores al primer cuadrante, tendremos:

Se observa que: $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right) = +\cot\alpha \qquad \sec(3\pi-\alpha) = -\sec\alpha$

$\text{sen}\left(\dfrac{11\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \cos(-40\pi+\alpha) = +\cos\alpha$

$$W = \frac{(\cot\alpha)(-\sec\alpha)(-\cos\alpha)}{\cos\alpha} \Rightarrow W = \cot\alpha\,.\sec\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{W = \csc\alpha}$$

09.- Reduciendo cada uno de los factores al primer cuadrante, tendremos:

( . ) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,x$

( . ) $\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = \cot\left[-\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)\right] \Rightarrow \cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = -\cot\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)$

$\cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = -(+\tan x) \quad \therefore \quad \cot\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = -\tan x$

( . ) $\cos(x-36\pi) = \cos x$ ( . ) $\tan(13\pi + x) = \tan x$

( . ) $\cancel{\tan}\left(x+\dfrac{17\pi}{2}\right) = -\cot x$ ( . ) $\cos\left(\dfrac{47\pi}{2}+x\right) = +\text{sen}\,x$

Luego: $W = \dfrac{\cancel{(\text{sen}x)}\cancel{(-\tan x)}(\cos x)}{\cancel{(\tan x)}(-\cot x)(\text{sen}x)^{\cancel{2}}} \Rightarrow W = \dfrac{\cos x}{\cot x.\text{sen}x}$

$\Rightarrow W = \dfrac{\cos x}{\dfrac{\cos x}{\cancel{\text{sen}x}}.\cancel{\text{sen}x}} \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$

Nota: Recuerda que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{R.T.}(2k\pi \pm \alpha) = \text{R.T.}(\pm\alpha)$

$\text{R.T.}\left[(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right] = \pm\,\text{CO-R.T.}(\alpha)$

$\text{R.T.}(k\pi \pm \alpha) = \pm\,\text{R.T.}(\alpha)$

**10.-** Utilizando los casos de reducción, tenemos:

$\cot(1995\pi - \theta) = -\cot\theta$ $\qquad$ $\cos\left(239\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\left(118\pi+\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = +\operatorname{sen}\theta$

$\sec(-804\pi + \theta) = +\sec\theta$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\left(-161\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{sen}\left(80\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta$

Además se debe tener en cuenta que:

$$239 = 60(4) - 1 = \overset{\circ}{4} - 1 \qquad\qquad -161 = -40(4) - 1 = \overset{\circ}{4} - 1$$

Luego: $W = \dfrac{(-\cot\theta)(\operatorname{sen}\theta)}{(\sec\theta)(-\cos\theta)} \quad\Rightarrow\quad W = \cot\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.\,\operatorname{sen}\theta \qquad \therefore \quad \boxed{W = \cos\theta}$$

**11.-** Reduciendo al primer cuadrante, como sigue, tendremos:

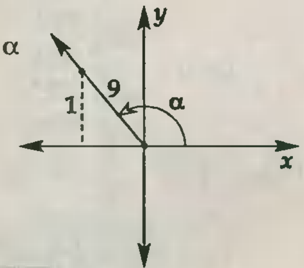
(*) $\tan\left(37\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\qquad$ (*) $\cot(175\,\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

(*) $\operatorname{sen}(809\,\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ (*) $\cot(72\,\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

(*) $\operatorname{sen}\left(91\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ (*) $\sec\left(55\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \csc\alpha$

Luego: $\dfrac{(-\cot\alpha).(-\cot\alpha).(-\operatorname{sen}\alpha)}{(-\cot\alpha).(-\cos\alpha).(\csc\alpha)} = -\dfrac{1}{9}$

**sen α =** $\dfrac{1}{9}$




$$\Rightarrow \quad x^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = 80 \quad\Rightarrow\quad x = -4\sqrt{5}$$

Finalmente: $\quad M = 2\sqrt{5}\,.\left(\dfrac{-4\sqrt{5}}{1}\right) + \dfrac{9}{1} \qquad \therefore \quad \boxed{M = -40 + 9 = -31}$

**12.-** Efectuando en la expresión la reducción al primer cuadrante, tendremos:

$$W = \frac{1-\operatorname{sen}(x-27\pi)}{1-\cos\left(-x+23\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1-\cos(-10\pi+x)}{1-\operatorname{sen}\left(-x+13\frac{\pi}{2}\right)}$$

(*) $\quad \operatorname{sen}(x - 27\pi) = -\operatorname{sen}x$ $\qquad$ (*) $\cos(-10\pi + x) = +\cos x$

(*) $\quad \cos\left(-x+23\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}x$ $\qquad$ (*) $\operatorname{sen}\left(-x+13\frac{\pi}{2}\right) = +\cos x$

Luego: $W = \dfrac{1-(-\text{sen}x)}{1-(-\text{sen}x)} - \dfrac{1-(\cos x)}{1-(\cos x)} \Rightarrow W = 1 - 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = 0}$

**13.-** Para el calculo de «M», analizamos para «$n$» par y «$n$» impar, así:

Si "$n$" par: $(-1)^n = 1$

$$M = \text{sen}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) . \csc\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow M = \left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\left(+\csc\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Si "$n$" Impar: $(-1)^n = -1$:

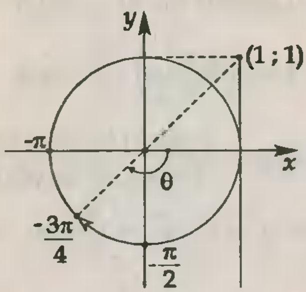
$$M = \text{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) . \csc\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow M = \left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) . \csc\frac{\pi}{4} = -1$$

Finalmente: $\boxed{M = -1}$

**14.-** Como: $x + y = \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) . \tan(\pi + y)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) . \tan\left(3\frac{\pi}{2} + x\right)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{(\cos y).(\tan y)}{(-\text{sen}\,x).(-\cot x)}$$

$$\tan\theta = \frac{\cos y \dfrac{\text{sen}y}{\cos y}}{\text{sen}x \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{sen}\,y}{\cos x}$$




Pero: $x + y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\,y = \cos x \Rightarrow \tan\theta = 1$

$$\therefore \quad \boxed{\theta = -\frac{3\pi}{4} \in \left\langle -\pi ; -\frac{\pi}{2} \right\rangle}$$

**15.-** Reduciendo cada uno de los factores de la expresión «M» al primer cuadrante, tendremos:

(*) $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

(*) $\cos(\alpha - 90°) = \cos(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

(*) $\tan(1260° + \alpha) = \tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$

(*) $\cos(540° - \alpha) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

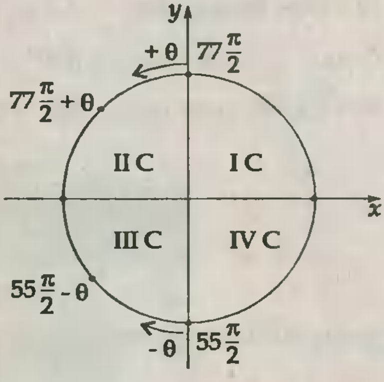
(*) $\text{sen}(450° + \alpha) = \cos\alpha$

(*) $\tan(360° + \alpha) = \tan\alpha$

Luego: $M = \dfrac{(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\alpha)(\tan\alpha)}{(-\cos\alpha)(\cos\alpha).\tan\alpha} \Rightarrow M = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{-\cos^2\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{M = -\tan^2\alpha}$

16.- $\operatorname{sen}\left(55\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta$

$\cos\left(77\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$




En la condición tenemos: $k(-\cos\theta)(-\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta \, . \cos\theta = \frac{1}{2k} \quad \ldots (1)$$

Se pide: $W = \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta \ldots (2)$

(1) en (2): $W = 1 + 2\left(\frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{k} = \boxed{\frac{k+1}{k}}$

17.- Reduciendo al primer cuadrante, tendremos:

$$\cos\left(159\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(11\pi + \frac{5\pi}{14}\right) = -\cos\frac{5\pi}{14} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} \text{ ; pues: } \frac{5\pi}{14} + \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec\left(242\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(81\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sec\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(125\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\left(18\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

Reemplazando los resultados anteriores en W, obtenemos:

$$W = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(-\sec\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right) \Rightarrow W = -\sec\frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad \boxed{W = -2}$$

18.- Aplicando el caso de reducción para ángulos mayores de una vuelta, tendremos:

$$3000° = 8(360°) + 120° \quad \Rightarrow \quad \cos(3000°) = \cos 120° = -\cos 60°$$

$$2000° = 5(360°) + 200° \quad \Rightarrow \quad \cos(2000°) = \cos 200° = -\cos 20°$$

Reemplazando: $\cos 300° = +\cos 60°$

En la condición tenemos: $\frac{(-\cos 60°) - (-\cos 20°)}{\cos 60° - (-\cos 20°)} = k \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{\cos 60° + \cos 20°}{-\cos 60° + \cos 20°} \ldots (1)$

Se pide: $W = \frac{(-\cos 60°) + (-\cos 20°)}{\cos 60° + (-\cos 20°)} \Rightarrow W = \frac{\cos 60° + \cos 20°}{-\cos 60° + \cos 20°} \ldots (2)$

Reemplazando (1) en (2), tenemos: $\boxed{W = \frac{1}{k}}$

**19.**- Sean los ángulos: $A = \alpha - r$; $B = \alpha$; $C = \alpha + r$ (ángulos en progresión aritmética)

Como: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Escribiendo como sigue «M», tendremos:

$$M = \frac{\text{sen}(180^\circ + 2B + C)}{\text{sen}(B - C)} + \frac{\cos(180^\circ + A + 2C)}{\cos(B - C)}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{-\text{sen}(2B + C)}{\text{sen}(B - C)} + \frac{-\cos(A + 2C)}{\cos(B - C)}$$

Reemplazando sus respectivos equivalentes en términos de a y r, tendremos:

$$M = \frac{-\text{sen}(3\alpha + r)}{\text{sen}(-r)} + \frac{-\cos(3\alpha + r)}{\cos(-r)}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{-\text{sen}(180^\circ + r)}{-\text{sen}r} + \frac{-\cos(180^\circ + r)}{\cos r}$$

Luego de simplificar, obtenemos:

$$M = \frac{\text{sen}r}{-\text{sen}r} + \frac{\cos r}{\cos r} = -1 + 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$$

**20.**- Reduciendo cada uno de los factores y reemplazando su respectivo valor numérico tendremos:

$$\text{sen } 420^\circ = \text{sen}(360^\circ + 60^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{sen } 210^\circ = \text{sen}(180^\circ + 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 570^\circ = \tan(540^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego: $$M = \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right).(1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \right)^2 = \left(\frac{3}{-\sqrt{2}}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{9}{2}}$$

**21.-** Si: $2\,540° = 7(360°) + 20°$ luego: $\text{sen}(2\,540°) = \text{sen } 20°$

Del mismo modo:

$$1910° = 5(360°) + 110° \Rightarrow \cos(1910°) = \cos(110°) = -\cos 70°$$

$$2680° = 7(360°) + 160° \Rightarrow \cos(2680°) = \cos(160°) = -\cos 20°$$

$$2630° = 7(360°) + 110° \Rightarrow \text{sen}(2630°) = \text{sen}(110°) = +\text{sen } 70°$$

Reemplazando en W:

$$W = \frac{\text{sen}20°+2.[-\cos 70°]^3}{-\cos 20°+2[\text{sen}70°]^3} \Rightarrow W = \frac{\text{sen}\,20° - 2\,\text{sen}^3 20°}{-\cos 20° + 2\cos^3 20°}$$

Ordenando y factorizando:

$$W = \frac{\text{sen}20°(1-2\text{sen}^2 20°)}{\cos 20°(-1+2\cos^2 20°)} \Rightarrow W = \frac{\text{sen}\,20°(1-2\,\text{sen}^2 20°)}{\cos 20°(1-2\,\text{sen}^2 20°)}$$

Luego de simplificar, obtenemos: $\boxed{W = \tan 20°}$

### *CASOS PARTICULARES DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE*

**22.-** Trabajando como en el problema anterior, tendremos :

$$\cancel{\cos 10°} + \cancel{\cos 30°} + \cancel{\cos 50°} + \cos 90° \ldots + \underbrace{\cos 130°}_{-\cancel{\cos 50°}} + \underbrace{\cos 150°}_{-\cancel{\cos 30°}} + \underbrace{\cos 170°}_{-\cancel{\cos 10°}}$$

Efectuando las simplificaciones indicadas obtendremos :

$$\cos 10° + \cos 30° + \cos 50° + \ldots + \cos 170° = \boxed{0} \quad ; \quad \text{pues: } \cos 90° = 0$$

**23.-** Si : $\quad \underset{\uparrow}{A} + \underbrace{B + C} = 180°$ , entonces: $\quad \tan A = -\tan(B + C)$

Desarrollando el segundo miembro, obtendremos: $\tan A = \dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B . \tan C}$

$$\Rightarrow \quad \tan A - \tan A . \tan B . \tan C = -\tan B - \tan C$$

de donde : $\quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

Luego: $$\frac{1}{\tan A + \tan B + \tan C} = \frac{1}{\tan A . \tan B . \tan C}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\tan A + \tan B + \tan C} = \boxed{\cot A . \cot B . \cot C}$$

24.- De la ecuación inicial, transponiendo términos, tendremos:

$$\tan\left(\frac{2a-3b}{8}\right) = -\cot\left(\frac{6\pi+3a-2b}{4}\right)$$

Usando la tranformación II: $\tan\left(\frac{2a-3b}{8}\right) = -\cot\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3a-2b}{4}\right)}_{\text{IV Q}}$

$$\tan\left(\frac{2a-3b}{8}\right) = -\left\{-\tan\left(\frac{3a-2b}{4}\right)\right\}$$

$$\tan\left(\frac{2a-3b}{8}\right) = \tan\left(\frac{3a-2b}{4}\right)$$

De donde, deducimos: $\dfrac{2a-3b}{\cancel{8}} = \dfrac{3a-2b}{\cancel{4}}$

$$2a - 3b = 6a - 4b \quad\Rightarrow\quad b = 4a \quad\therefore\quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{4}}$$

25.- Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow$ $\text{sen}(A + B) = \text{sen}\, C$ $\Rightarrow$ $\cot(A + B) = -\cot C$

También: $\tan(A + B + C + C) = \tan(180° + C) = \tan C$

Luego reemplazando en M: $M = \dfrac{\text{sen}C}{\text{sen}C} + \tan C \,.\, (-\cot C)$

$$\Rightarrow \quad M = 1 - \underbrace{\tan C \,.\, \cot C}_{1} \quad\therefore\quad \boxed{M = 0}$$

26.-Como: $x + y = \pi \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\, x = \text{sen}\, y$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$2x + 2y = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\, 2x = -\text{sen}\, 2y$$

Reemplazando en M obtenemos:

$$M = \frac{\text{sen}\, y}{\text{sen}\, y} + \frac{2\cot\frac{y}{2}}{\cot\frac{y}{2}} + \frac{3(-\text{sen}\, 2y)}{\text{sen}\, 2y} \quad\Rightarrow\quad M = 1 + 2 - 3 \quad\therefore\quad \boxed{M = 0}$$

**27.-** Recordemos, si: $x + y = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\cos y$

Entonces: $\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8}$

Reemplazando en "M" obtenemos:

$$M = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$$

Nota: Recuerda que, si: $x + y = \pi \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$

**28.-** Como: $x + y = 180^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \Rightarrow \tan x = -\tan y$

Como: $y + z = 270^\circ \Rightarrow \cos y = -\operatorname{sen} z \Rightarrow \tan z = \cot y$

Luego reemplazando en "M" obtenemos:

$$M = \left(\frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} z}\right) + (-2\tan y).(2\cot y) \Rightarrow M = 1 - 4.\tan y.\cot y$$

Pero: $\tan y.\cot y = 1 \Rightarrow M = 1 - 4(1) \quad \therefore \quad \boxed{M = -3}$

**29.-** Si: $\alpha + \beta = 270^\circ \Rightarrow \tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \tan(230^\circ + x) = \cot(40^\circ - x)$

Si: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \tan(50^\circ + x) = \cot(40^\circ - x)$

En «M», tendremos: $M = \dfrac{\cot(40^\circ - x) + \cot(40^\circ - x)}{\cot(40^\circ - x)} \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$

**30.-** Como: $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \csc\alpha = \csc\beta$

Luego: $\dfrac{2m+1}{2m-1} = \dfrac{m+2}{m-1} \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 2m^2 + 3m - 2$

A continuación al simplificar obtenemos: $4m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{4}}$

**31.-** Sea: $N = \operatorname{sen} 120^\circ + \operatorname{sen} 140^\circ + \operatorname{sen} 160^\circ + \ldots + \operatorname{sen} 260^\circ$

$D = \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \ldots + \cos 170^\circ$

Si: $\alpha + \beta = 180^\circ \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha + \cos\beta = 0 \ \vee \ \cos\alpha = -\cos\beta \end{cases}$

Si: $\alpha + \beta = 360° \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,\beta \ \vee \ \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 0 \\ \cos\alpha = \cos\beta \end{cases}$

Entonces: $\underbrace{\text{sen}\,120° + \text{sen}\,140° + \text{sen}\,160° + \text{sen}\,180° + \text{sen}\,200° + \text{sen}\,220° + \text{sen}\,240°}_{0} + \text{sen}\ 260°$

$\Rightarrow \quad N = \text{sen}\ (270° - 10°) = -\cos 10°$

$D = \underbrace{\cos 20° + \cos 30° + \cos 40° + \ldots + \cos 160°}_{0} + \cos 170°$

$D = \cos 170° \quad \Rightarrow \quad D = \cos(180° - 10°) = -\cos 10°$

Finalmente: $\quad M = \dfrac{N}{D} = \dfrac{-\cos 10°}{-\cos 10°} \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**32.-** Como: $\text{sen}\ \alpha = \cos(\beta + \theta) \Rightarrow \alpha + \beta + \theta = (4k + 1)\dfrac{\pi}{2}$ , $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\theta = 4k\pi + \pi$

Finalmente: $\quad M = \dfrac{\tan\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} + \theta\right]}{\cot(4k\pi + \pi + \theta)} = \dfrac{-\cot\theta}{\cot\theta} \quad \therefore \quad \boxed{M = -1}$

**33.-** Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow 2A + 2B + 2C = 360°$

$\Rightarrow \sec(360° - A) = \csc(360° + B) \Rightarrow \sec A = \csc B \quad \Rightarrow \quad A + B = 90°$

Luego: $\quad C = 90° \qquad \therefore$ **El triángulo ABC es un triángulo rectángulo**

**34.-** Como $A + B + C = 180° \quad \Rightarrow \quad \cos(A + B) = -\cos C$

$\cos(B + C) = -\cos A \qquad \cos(A + C) = -\cos B$

Luego: $\quad M = \dfrac{-\cos C}{\cos C} + \dfrac{-\cos A}{\cos A} + \dfrac{-\cos B}{\cos B} \quad \therefore \quad \boxed{M = -3}$

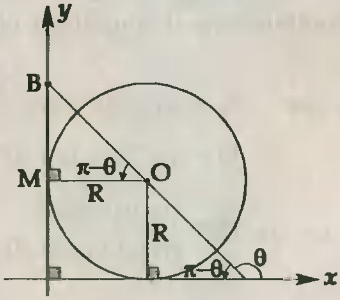
### *PROBLEMAS GRÁFICOS DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE*

**35.-** $\triangle$BMO: $\quad \tan(\pi - \theta) = \dfrac{BM}{R}$

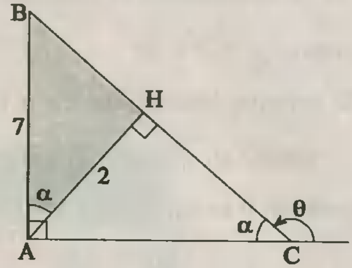
$\Rightarrow \ BM = R\tan(\pi - \theta)$

Utilizando la relación al primer cuadrante:

$\boxed{BM = -R\tan\theta}$



**36.-** En el gráfico, introducimos el ángulo auxiliar «$\alpha$», notar que: $\alpha + \theta = 180°$




En el ⊾BAH; calculamos BH, así:

$$BH = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

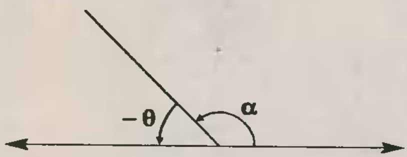
Por propiedad, si: $\alpha + \theta = 180°$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = -\tan\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\theta = \frac{-3\sqrt{5}}{2}}$$

**37.-** De la figura: $\alpha + (-\theta) = \pi$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \pi + \theta \quad y \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$




Luego: $M = \dfrac{\text{sen}(\pi+\theta)}{\text{sen}\theta} - \dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cot\frac{\theta}{2}}$

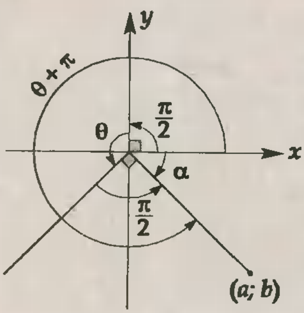
Pero: $\text{sen}(\pi + \theta) = -\,\text{sen}\,\theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = -\cot\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{-\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} - \frac{-2\cot\frac{\theta}{2}}{\cot\frac{\theta}{2}}$$

Simplificando: $M = -1 + 2$ $\qquad \therefore \boxed{M = 1}$

**38.-** De la figura los ángulos $\alpha$ y $\theta + \pi$ son coterminales.

$$\tan(\alpha) = \tan(\theta + \pi) \quad \therefore \quad \tan\alpha = \tan\theta$$




También $\alpha$ es un ángulo en posición normal

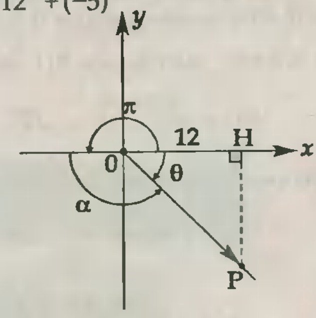
$$\frac{b}{a} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \tan\theta$$

$$a\tan\theta = b \quad \Rightarrow \quad W = b - 2b$$

$$\therefore \quad \boxed{W = -b}$$

**39.-** Determinamos la longitud del radio vector $OP = \sqrt{12^2 + (-5)^2}$

Luego: $OP = 13$




De la figura los ángulos $\pi + \alpha$ y $\theta$ son coterminales.

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = \text{sen}\,\theta \quad \therefore \quad -\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\theta \; \ldots (1)$$

También $\theta$ es un ángulo en posición normal

$$\Rightarrow \; \text{sen}\,\theta = \frac{HP}{OP} = \frac{-5}{13}$$

En (1): $\text{sen}\,\alpha = -\,\text{sen}\,\theta = -\left(\frac{-5}{13}\right)$

Finalmente: $13\,\text{sen}\,\alpha = 5 \quad \therefore \quad \boxed{W = 5}$

# CAP. 11 Identidades Trigonométricas del Arco Doble

**01.-** Escribiendo apropiadamente la expresión W, tendremos:

$$W = 3 + \cos 4x - 2(2\,\text{sen}^2 x)^2 \quad \Rightarrow \quad W = 3 + \cos 4x - 2(1 - \cos 2x)^2$$

A continuación aplicamos la fórmula para «degradar» cosenos, así:

$$W = 3 + \cos 4x - 2 + 4\cos 2x - 2\cos^2 2x$$

$$W = 1 + \cos 4x + 4\cos 2x - (1 + \cos 4x)$$

Efectuando: $\boxed{W = 4\cos 2x}$

**02.-** Recordemos: $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)(\cos^2 x + \text{sen}^2 x) = \cos 2x$

Luego: $M = 2\cos^2 2x - 1 = \cos 2(2x)$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{M = \cos 4x}$

**03.-** Descomponiendo la suma de cubos como el producto de dos factores, tendremos:

$$M = \frac{\cancel{(\text{sen}\,x + \cos x)}(\overbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}^{1} - \text{sen}\,x.\cos x)}{\cancel{\text{sen}\,x + \cos x}} + \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\,\text{sen}\,x.\cos x)$$

A continuación luego de simplificar lo indicado, obtenemos:

$$M = 1 - \text{sen}\,x\,.\,\cos x + \text{sen}\,x\,.\,\cos x \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 1}$$

**04.-** Recordar: $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \;\Rightarrow\; 1 - \cos 2\alpha = 2\,\text{sen}^2\alpha$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{2\cos^2\alpha}{2\text{sen}^2 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{(2\text{sen}\alpha.\cos\alpha)^2} \;\Rightarrow\; W = \frac{\cos^2\alpha}{4.\text{sen}^2\alpha.\cos^2\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{4}\,.\,\csc^2\alpha}$$

**05.-** Recordemos: $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \cos 2x \;\Rightarrow\; M = \cos^6 x - \cos^2 x.\text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x.\cos^4 x - \text{sen}^6 x$

Factorizando como sigue: $\quad M = \cos^2 x(\cos^4 x - \text{sen}^4 x) + \text{sen}^2 x(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)$

$$M = (\underbrace{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}_{\cos 2x})\,.\,(\underbrace{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}_{1}) \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \cos 2x}$$

**06.-** Utilizando las identidades pitagóricas en los denominadores, tendremos:

$$M = \frac{\cos x}{\sec x . \sec^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\csc x . \csc^2 x}$$

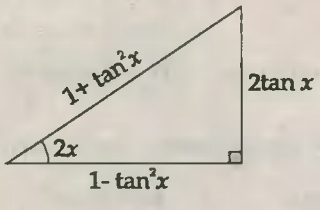
A continuación escribiendo en términos de senos y cosenos obtenemos:

$$M = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^3 x}} - \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}} = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$$

Finalmente: $M = (\underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1})(\underbrace{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos 2x}) \quad \therefore \quad \boxed{M = \cos 2x}$

**07.-** Recordando: $\sec 2x = \dfrac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$

Luego en el problema, tendremos:




$$W = \sec\left[2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right] \quad \Rightarrow \quad W = \sec\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{W = \csc 4\alpha}$$

**08.-** Escribiendo apropiadamente la expresión tendremos:

$$M = \tan^2 x . \left(\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}\right) - \operatorname{sen} 2x . \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad M = \tan^2 x . \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x . \sec^2 x$$

Luego de factorizar «-sen $2x$», obtendremos: $M = -\operatorname{sen} 2x(\sec^2 x - \tan^2 x)$

$$\Rightarrow \quad M = -\operatorname{sen} 2x(1) \quad \therefore \quad \boxed{M = -\operatorname{sen} 2x}$$

**09.-** Escribiendo la expresión en términos de la «tan $x$», tendremos:

$$M = \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)^2} + \frac{\cot x}{\left(\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)^2} + \frac{\cot x . \tan^4 x}{(1 + \tan^2 x)^2}$$

Factorizando como sigue obtenemos: $M = \dfrac{\tan x(1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2} \quad \Rightarrow \quad M = \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$

Pero: $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{1}{2} . \operatorname{sen} 2x}$

**10.-** Se pide: $W = \cot 7° - 2\cot 14°$

Por propiedad de arco doble: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

En el problema: $\cot 7° - \tan 7° = 2\cot 14°$

Agrupando convenientemente: $\cot 7° - 2\cot 14° = \tan 7°$

$$\therefore \quad \boxed{W = \tan 7°}$$

**11.-** Escribiendo como sigue la expresión:

$$W = \cos 2x - (\operatorname{sen} x + \cos x).\sqrt{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \Rightarrow W = \cos 2x - (\operatorname{sen} x + \cos x).\underbrace{|\operatorname{sen} x - \cos x|}_{<0}$$

Pero del dato: $\operatorname{sen} x < \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x - \cos x < 0$

Luego en W, tendremos: $W = \cos 2x - (\operatorname{sen} x + \cos x).(\cos x - \operatorname{sen} x)$

Finalmente: $W = \cos 2x - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

$$\Rightarrow \quad W = \cos 2x - \cos 2x \quad \therefore \quad \boxed{W = 0}$$

**12.-** Escribiendo en términos de senos y cosenos, tendremos:

$$M = \left(\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}.\cos\dfrac{\theta}{2}} - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \left(\frac{1 - 4\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}.\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right).\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Finalmente, utilizando las fórmulas del doble y las identidades trigonométricas fundamentales, obtendremos:

$$M = \frac{1 - \left(2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}.\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{2} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{\cos^2\theta}{2}}$$

**13.-** Escribiendo en términos de senos y cosenos y efectuando apropiadamente, tendremos:

$$W = 1 + \cos x + \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad W = 1 + \cos x + \frac{\operatorname{sen} x(\cos x + 1)}{\cos x}$$

$$W = (1 + \cos x)\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \quad \Rightarrow \quad W = (1 + \cos x)\,\frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\cos x}$$

Expresando los factores lo más abreviadamente posible, tendremos:

$$W = 2\cos^2\frac{x}{2}\ .\ \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\sec x \quad \therefore \quad \boxed{W = 2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\sec x}$$

***PROBLEMAS CONDICIONALES***

**14.-** Resolviendo en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$= \frac{7}{4}(2\,\text{sen}^2\alpha)^2 + \frac{1}{4}(2\cos^2\alpha)^2$$

A continuación, utilizamos las fórmulas de «degradación» del doble, obteniendo:

$$= \frac{7}{4}(1-\cos 2\alpha)^2 + \frac{1}{4}(1+\cos 2\alpha)^2$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{7}{2}\cos 2\alpha + \frac{7}{4}\cos^2 2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos^2 2\alpha$$

$$= 2 - 3\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha$$

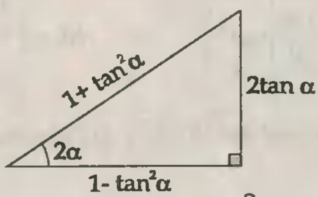
$$= 2 - 3\cos 2\alpha + (1 + \cos 4\alpha)$$

$$= 3 - 3\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$

Comparando con el lado derecho: $m = 3$ ; $n = -3$ ; $p = 1$

$\therefore \quad m - n - p = 3 + 3 - 1 = \boxed{5}$

**15.-** Sabemos que:




$$\Rightarrow \quad \sec 2\alpha = \frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Analizando el primer factor:

$$1 + \sec 2x = 1 + \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} \quad \Rightarrow \quad 1 + \sec 2x = \frac{2}{1-\tan^2 x}\cdot\frac{\tan x}{\tan x} \quad \Rightarrow \quad 1 + \sec 2x = \frac{\tan 2x}{\tan x}$$

Análogamente:

$$(1 + \sec 2x).\ (1 + \sec 4x).(1 + \sec 8x) = \frac{\tan 2x}{\tan x}\cdot\frac{\tan 4x}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 8x}{\tan 4x} = \tan 8x\ .\ \cot x$$

Comparando tenemos: A = 1, B = 8, C = 1 $\therefore$ $\boxed{\frac{B}{A+C} = 4}$

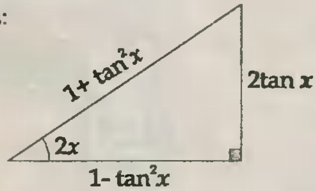
**16.-** Desarrollando en el lado izquierdo de la igualdad:

$$= \frac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{8}\right)} = \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{8}\right)}\right]^2 = \left[\frac{2\text{sen}\left(\frac{x}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{8}\right)}\right]^2 = 4\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = 4 \;,\; n = 2 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{A} = \sqrt{4} \quad \therefore \quad \boxed{\sqrt[n]{A} = 2}$$

**17.-** Utilizando el triángulo del ángulo doble, tendremos:

$$\text{sen}\,2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \quad \wedge \quad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$




Desarrollando en el lado izquierdo de la igualdad:

$$A\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) + B\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right) + C = 0 \;\Rightarrow\; 2A\,.\,\tan x + B - B\tan^2 x + C + C\tan^2 x = 0$$

$$\underbrace{(C-B)}_{p}\;\underbrace{\tan^2 x} + \underbrace{2A}_{q}\;\underbrace{\tan x} + \underbrace{B+C}_{r} = 0 \quad \therefore \quad p = C - B$$

$$r = B + C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{2A}{B+C} = \frac{q}{r}}$$

**18.-** De la condición: $\cos 2x = 1 - 8\cos^2\frac{x}{2}\underbrace{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)}_{\text{sen}^2\frac{x}{2}} \;\Rightarrow\; \cos 2x = 1 - 2\left(2\text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \;\Rightarrow\; \cos 2x = -\cos 2x$$

Finalmente: $\quad \cos 2x = 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 3}$

**19.-** Del dato, elevamos al cuadrado: $(4\,\text{sen}\,\alpha - 3\sqrt{2}\,\cos\alpha)^2 = 5^2$

$$16.\text{sen}^2\alpha - 2(4\,\text{sen}\,\alpha)(3\sqrt{2}\cos\alpha) + (3\sqrt{2}\,\cos\alpha)^2 = 5^2$$

$$8\underbrace{(2\,\text{sen}^2\alpha)}_{1-\cos 2\alpha} - 12\sqrt{2}\,\underbrace{(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)}_{\text{sen}\,2\alpha} + 9\underbrace{(2\cos^2\alpha)}_{1+\cos 2\alpha} = 25 \;\ldots (1)$$

$$8(1-\cos 2\alpha) - 12\sqrt{2}\;.\;\text{sen}\,2\alpha + 9(1+\cos 2\alpha) = 25$$

$$8 - 8\cos 2\alpha - 12\sqrt{2}\;\text{sen}\,2\alpha + 9 + 9\cos 2\alpha = 25$$

$$\cos 2\alpha - 12\sqrt{2}\,\text{sen}\,2\alpha = 8$$

Finalmente: $\qquad \boxed{W = 8}$

20.- De la condición: $\cos x - \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{(2\cos x)m} \Rightarrow 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x = \dfrac{1}{m}$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{m} \Rightarrow \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = \frac{1-m}{m}$$

Elevando al cuadrado: $(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)^2 = \left(\dfrac{1-m}{m}\right)^2$

$$\Rightarrow \cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x.\cos 2x = \left(\frac{1-m}{m}\right)^2$$

$$1 - \left(\frac{1-m}{m}\right)^2 = \operatorname{sen} 4x \Rightarrow \operatorname{sen} 4x = \frac{2m-1}{m^2} \quad \therefore \quad \boxed{\csc 4x = \frac{m^2}{2m-1}}$$

21.- Escribimos convenientemente, para hacer aparecer la fórmula del seno del doble:

$$W = 1 - \frac{3}{4}(2\operatorname{sen} x \cos x)^2 \Rightarrow W = 1 - \frac{3}{4} \,.\, \operatorname{sen}^2 2x$$

Finalmente reemplazamos el seno del doble, obtendremos:

$$W = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right) \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{3}{4}}$$

22.- Como: $\dfrac{\cos x}{m} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{n} \Rightarrow \tan x = \dfrac{n}{m}$

Reemplazando el valor de la $\tan x$, en la expresión «E», obtendremos:

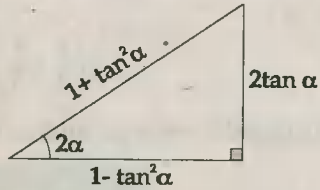
$$E = m\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right) + n\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \Rightarrow E = \frac{m\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)+n\left(2\frac{n}{m}\right)}{1+\frac{n^2}{m^2}}$$

Luego de simplificar y agrupar convenientemente tendremos:

$$\Rightarrow \quad E = \frac{m^3 - mn^2 + 2mn^2}{m^2+n^2} \Rightarrow E = \frac{m^3+mn^2}{m^2+n^2}$$

Finalmente: $E = \dfrac{m(m^2+n^2)}{m^2+n^2} \quad \therefore \quad \boxed{E = m}$

23.- Utilizando el triángulo del doble en el problema, así:




$$\text{En el dato: } k = \frac{1+\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{1-\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\dfrac{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\dfrac{1+\tan^2\alpha-1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{(1+\tan\alpha)^2}{2\tan^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\tan^2\alpha}{(1+\tan\alpha)^2} = \frac{1}{k} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{k}}$$

24.- Como:

$$\cos x \,.\, \cos y = \operatorname{sen} a \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} y = \cos a \quad \ldots (2)$$

Sumando las proposiciones (1) y (2): $\cos x \,.\, \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} a + \cos a$

Luego obtenemos: $\cos(x - y) = \operatorname{sen} a + \cos a \quad \ldots (3)$

Elevando al cuadrado la expresión (3): $\cos^2(x - y) = (\operatorname{sen} a + \cos a)^2$

A continuación utilizamos la identidad trigonométrica fundamental obteniendo:

$$1 - \operatorname{sen}^2(x - y) = \underbrace{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}_{1} + \underbrace{2 \operatorname{sen} a \cos a}_{\operatorname{sen} 2a}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \operatorname{sen}^2(x - y) = 1 + \operatorname{sen} 2a$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}^2(x - y) = -\operatorname{sen} 2a}$$

25.- Hallemos la relación angular, así:

$$2\left(\frac{\pi}{17}+x\right) - \left(2x - 15\frac{\pi}{17}\right) = \pi \quad \Rightarrow \quad \left(2x - 15\frac{\pi}{17}\right) = 2\left(\frac{\pi}{17}+x\right) - \pi$$

Aplicando cosenos en ambos miembros de la igualdad:

$$\cos\left[2x - 15\frac{\pi}{17}\right] = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{17}+x\right) - \pi\right] = -\cos\left[2\left(\frac{\pi}{17}+x\right)\right] = -\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{17}+x\right)\right] \ldots (1)$$

Reemplazando la condición en la expresión (1), obtendremos:

$$\cos\left(2x - 15\frac{\pi}{17}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \boxed{-\frac{7}{9}}$$

**26.-** Hallemos la relación angular:

$$2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)-\left(\frac{2x}{5}\right)=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{2x}{5}\right)=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)-\frac{\pi}{2}$$

Aplicando senos en ambos lados de la igualdad:

$$\text{sen}\left(\frac{2x}{5}\right)=\text{sen}\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\left(\frac{2x}{5}\right)=-\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)\right]$$

$$\text{sen}\left(\frac{2x}{5}\right)=-\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)-1\right)\ldots(1)$$

Reemplazando la condición en (1): $\text{sen}\left(\frac{2x}{5}\right)=$ **$-2k^2+1$**

**27.-** Se sabe que: $\tan a+\cot b=\dfrac{\cos(a-b)}{\cos a.\text{sen}b}$

Del dato: $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$

Efectuando como sigue en el problema obtenemos:

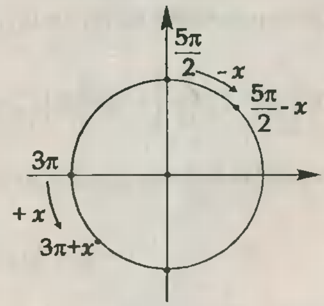
$$\frac{\cos(2x-x)}{\cos 2x.\text{sen}x}=8\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos x}{\cos 2x.\text{sen}x}=8\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad 1=4\underbrace{(2\,\text{sen}\,x.\cos x)}_{\text{sen}\,2x}.\cos 2x$$

Efectuando como sigue:

$$1=2\underbrace{(2\,\text{sen}\,2x\,.\cos 2x)}_{\text{sen}\,4x} \quad\Rightarrow\quad 2\,\text{sen}\,4x=1 \quad\therefore\quad \boxed{M=1-1=0}$$

**28.-** De la C.T. se observa que: $\tan\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\cot x \quad\Rightarrow\quad \tan(3\pi+x)=\tan x$

En el dato: $\cot x-\tan x=2k$




$$\Rightarrow\quad \frac{\cos x}{\text{sen}x}-\frac{\text{sen}x}{\cos x}=2k \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x\cos x}=k$$

De donde: $\dfrac{\cos 2x}{\text{sen}2x}=k \quad\Rightarrow\quad \tan 2x=\dfrac{1}{k}$

Luego: $\sec 2\alpha=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad\wedge\quad \cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

En el problema: $\quad W = \dfrac{1+\tan^2 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} - \dfrac{1-\tan^2 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1+\dfrac{1}{k^2}}{1-\dfrac{1}{k^2}} - \frac{1-\dfrac{1}{k^2}}{1+\dfrac{1}{k^2}} \qquad \Rightarrow \quad W = \frac{k^2+1}{k^2-1} - \frac{k^2-1}{k^2+1}$$

Efectuando y simplificando obtenemos:

$$\Rightarrow \quad W = \frac{k^4+2k^2+1-k^4+2k^2-1}{k^4-1} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \frac{4k^2}{k^4-1}}$$

**29.-** De: $\quad \operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

Al despejar obtenemos: $\quad \dfrac{1+\tan^2 x}{2} = \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen}2x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen}2x} = \dfrac{\sec^2 x}{2}$

Luego en M, tendremos: $\quad M = \dfrac{\sec^2\alpha}{2} - \dfrac{\sec^2\beta}{2} = \dfrac{1}{2}(\sec^2 a - \sec^2 b)$

Pero por dato: $\quad \sec^2 a - \sec^2 b = 2$

Finalmente: $\quad \boxed{M = 1}$

**30.-** Del dato: $\quad 2 - (1 + \tan^2 x) = 3\tan x \quad \Rightarrow \quad 1 - \tan^2 x = 3\tan x$

A continuación: $\quad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{2\tan x}{3\tan x}$

Luego: $\quad \tan 2x = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \cot 4x = \dfrac{1-\tan^2 2x}{2\tan 2x} \quad \Rightarrow \quad \cot 4x = \dfrac{1-\dfrac{4}{9}}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

Finalmente: $\quad \cot 4x = \dfrac{\dfrac{5}{9}}{\dfrac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad \cot 4x = \dfrac{5}{12} \qquad \therefore \quad \boxed{\cot 4x = \dfrac{5}{12}}$

**31.-** Efectuando como sigue obtenemos:

$$W = \frac{1-\sqrt{2}\operatorname{sen}x-(1+\sqrt{2}\operatorname{sen}x)}{\underbrace{(1+\sqrt{2}\operatorname{sen}x)(1-\sqrt{2}\operatorname{sen}x)}_{\cos 2x}} + \frac{2\sqrt{2}\cos x}{\operatorname{sen}2x} \Rightarrow W = \frac{-2\sqrt{2}\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}2x+2\sqrt{2}\cos x.\cos 2x}{\cos 2x.\operatorname{sen}2x}$$

$$\Rightarrow \quad W = 2\sqrt{2}\,\frac{(\cos 2x.\cos x - \operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} x)}{2\operatorname{sen} 2x.\cos 2x}.2 \quad \Rightarrow \quad W = 4\sqrt{2}\,.\,\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 4x}$$

Como: $3x + 4x = \frac{\pi}{2}$ ; pues: $7x = \frac{\pi}{2}$

Por ángulos complementarios: $\cos\frac{3\pi}{14} = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} \quad \therefore \quad \boxed{W = 4\sqrt{2}}$

32.- Efectuando como sigue:

$$M = 49\left(\frac{\cos 22^\circ.\cos 8^\circ - \operatorname{sen} 8^\circ.\operatorname{sen} 22^\circ}{\operatorname{sen} 8^\circ.\cos 8^\circ}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad M = 49\left(\frac{2\cos(22^\circ+8^\circ)}{2\operatorname{sen} 8^\circ.\cos 8^\circ}\right)^2 = 49\left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 16^\circ}\right)^2$$

Luego de reemplazar los valores, obtenemos:

$$M = 49\,.\,\frac{3}{7^2}\,.\,25^2 = 3.\,(625) \qquad \therefore \quad \boxed{M = 1\,875}$$

33.- Por teoría de ángulos suplementarios tendremos:

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\frac{11\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\frac{\pi}{12}$$

Por lo tanto: $W = \tan\frac{\pi}{12} - \left(-\tan\frac{5\pi}{12}\right) + \tan\frac{5\pi}{12} - \left(-\tan\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow W = 2\left(\tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12}\right)$

Reemplazando los valores notables, tendremos:

$$W = 2[2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}\,] \qquad \therefore \quad \boxed{W = 8}$$

34.- Se sabe que: $\quad 8\operatorname{sen}^4\alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$

Luego, multiplicando por 8 en la expresión dada tendremos:

$$8W = 8\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{16} + 8\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{16} + 4\cos\frac{3\pi}{8} + 4\cos\frac{\pi}{8}$$

Y reemplazando la identidad inicial, obtenemos:

$$8W = 3 - 4\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{4} + 3 - 4\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{4} + 4\cos\frac{3\pi}{8} + 4\cos\frac{\pi}{8}$$

$$8W = 6 + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 8W = 6 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \frac{3}{4}}$$

35.- Como: $\cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8}$

$$M = \left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$M = \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1 - \cos^2\frac{3\pi}{8}\right) = \text{sen}^2\frac{\pi}{8} \cdot \text{sen}^2\frac{3\pi}{8}$$

Pero: $\text{sen}\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$ pues: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

Buscando la fórmula del seno del doble, tendremos:

$$M = \text{sen}^2\frac{\pi}{8} \cdot \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\left(2\,\text{sen}\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 \Rightarrow M = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

36.- Se sabe que: $1 + \cos 40° = 2\cos^2 20°$

Luego: $M = \frac{\sqrt{2\cos^2 20°}}{\sqrt{2}} \cdot \sec 20° \Rightarrow M = \frac{\sqrt{2}.\cos 20°}{\sqrt{2}} \cdot \sec 20° \therefore \boxed{M = 1}$

37.- Escribiendo como sigue el problema, tendremos:

$$M = \text{sen}\,5° \cdot \cos 5° - (1 - \text{sen}^2 40°) \Rightarrow 2M = \underbrace{2\,\text{sen}\,5°.\cos 5°}_{\text{sen}\,10°} - \underbrace{2\cos^2 40°}_{1+\cos 80°}$$

Utilizando las fórmulas del doble, obtenemos:

$$2M = \text{sen}\,10° - \underbrace{(1 + \cos 80°)}_{\text{sen}\,10°} \Rightarrow 2M = \text{sen}\,10° - 1 - \text{sen}\,10° \therefore \boxed{M = -\frac{1}{2}}$$

## *VARIACIÓN DE EXPRESIONES*

38.- Factorizando tenemos: $W = \text{sen}\,x \cdot \cos x(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)$

$$W = \text{sen}\,x \cdot \cos x\underbrace{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}_{\cos 2x}\underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{1} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2\,\text{sen}\,x\cos x}_{\text{sen}\,2x} \cdot \cos 2x$$

$$W = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{2\,\text{sen}\,2x.\cos 2x} \quad \therefore \quad W = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\,4x$$

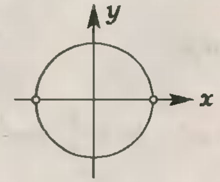
Como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \text{sen}\, 4x \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{4} \leq \underbrace{\dfrac{1}{4}\text{sen}\, 4x}_{W} \leq \dfrac{1}{4}$

Finalmente el máximo valor será: $\boxed{W_{máx} = \dfrac{1}{4}}$

**39.-** Debemos plantear la siguiente restricción:

$1 - \cos 2x \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 2k\pi$

$x \neq k\pi \Rightarrow$




De la C.T tenemos: $-1 < \cos x < 1$ ... (1)

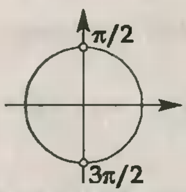
También recordar: $2\,\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$W = \frac{2\text{sen}^2 2x}{2\text{sen}^2 x} = \frac{(2\text{sen}x\cos x)^2}{\text{sen}^2 x} = \frac{4\text{sen}^2 x\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow W = 4\cos^2 x$$

De la condición (1): $0 \leq \cos^2 x < 1 \Rightarrow 0 \leq 4\cos^2 x < 4 \quad \therefore \quad \boxed{W \in [0\,;4\rangle}$

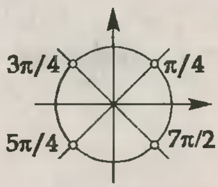
**40.-** Debemos plantear las siguientes restricciones:

i) $\tan\theta\ \exists$ si $\theta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$




ii) $\tan 2\theta\ \exists$ si $2\theta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

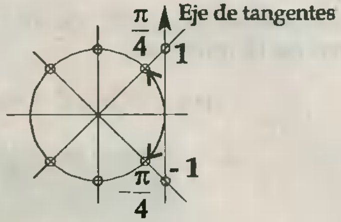
Luego:




Resolviendo: $W = \tan\theta - \tan 2\theta[1 - \tan^2\theta]$

$$\Rightarrow \ W = \tan\theta - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \cdot [1 - \tan^2\theta] \quad \Rightarrow \quad W = -\tan\theta$$

De la C.T. tenemos:




si: $\quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad -1 < \tan\theta < 1$

$$\Rightarrow \ 1 > -\underbrace{\tan\theta}_{W} > -1 \quad \therefore \quad \boxed{W \in \langle -1\,;\,1\rangle}$$

### *IDENTIDADES AUXILIARES*

**41.-** Recordemos: $\quad sen^4x + \cos^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \ \wedge \ sen^6x + \cos^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Reemplazando las identidades anteriores en el problema:

$$M = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{4}}{\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) - \frac{5}{8}}$$

Luego de efectuar las operaciones anteriores, obtenemos:

$$M = \frac{\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\frac{3}{8}\cos(\pi - \alpha)} = \frac{2}{3}\,\frac{(-sen2\alpha)}{(-\cos\alpha)} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{3} \cdot \frac{2sen\alpha.\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}\ sen\,\alpha$$

Pero: $\quad \csc\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad sen\,\alpha = \frac{1}{4}$

Finalmente: $\quad M = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \ \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{3}}$

**42.-** Recordar: $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha \,.\, \csc\alpha = 2\csc 2\alpha$

En el dato: $\quad \tan\frac{2\pi}{9} + \cot\frac{2\pi}{9} = k \quad \Rightarrow \quad \left(\tan\frac{5\pi}{18} = \cot\frac{2\pi}{9}\right)$

$$2\csc\frac{4\pi}{9} = k \quad \Rightarrow \quad sen\,\frac{4\pi}{9} = \frac{2}{k}$$

Finalmente: $\quad W = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{k^2} = \frac{1}{k^2}$

**43.-** Como: $\tan^2 x + \cot^2 x = m$

Buscando el desarrollo de un trinomio cuadrado perfecto sumamos (2) a ambos miembros de la igualdad:

$$(\tan x + \cot x)^2 = m + 2 \qquad \Rightarrow \qquad (2 \csc 2x)^2 = m + 2$$

$$\Rightarrow \qquad 2 \csc 2x = \sqrt{m+2} \qquad \therefore \quad \sqrt{m+2} \,.\, \text{sen}\, 2x = \boxed{2}$$

**44.-** Recordemos: $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \cos 2x \ \wedge \ \cos^4 x + \text{sen}^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$$\text{Como:} \quad \frac{\cos^8 x - \text{sen}^8 x}{\cos 2x} = \frac{(\cos^4 x + \text{sen}^4 x).(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x.\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)}{\cos 2x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = \text{A} + \text{B}\cos 4x$$

Luego de comparar las proposiciones anteriores, obtenemos:

$$\text{A} = \frac{3}{4} \ ; \ \text{B} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{\textbf{A + B = 1}}$$

**45.-** Recordemos que: $\cos^4 x + \text{sen}^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x$

$$\text{En la condición:} \qquad \frac{(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)}{(\cos^4 x + \text{sen}^4 x)(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)} = m$$

Efectuando y simplificando tendremos:

$$\cos^4 x + \text{sen}^4 x = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \,.\, \cos 4x = \frac{4}{4m}$$

$$\text{Luego:} \quad 3 - \frac{4}{m} = \cos 4x \quad \Rightarrow \quad 3 - \cos 4x = \boxed{\frac{4}{m}}$$

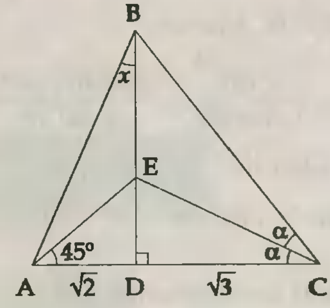
**46.-** Recordemos: $\quad \text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Reemplazando en la identidad:

$$8\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right) = \text{A} + \text{B}\cos 4x \ \Rightarrow \quad 5 + 3\cos 4x = \text{A} + \text{B}\cos 4x$$

Al comparar tendremos: $\text{A} = 5 \ \wedge \ \text{B} = 3 \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{A - B = 2}}$

## *SITUACIONES GRÁFICAS*




47.- En ◺ ADE: $ED = AD = \sqrt{2}$

En ◺ ADB: $BD = \sqrt{2}\,\cot x \;\ldots (1)$

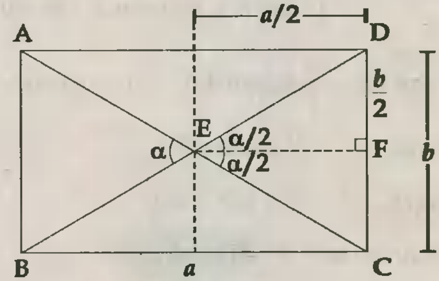
En ◺ EDC: $\tan\alpha = \dfrac{ED}{DC} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

A continuación calculamos «tan 2α», así:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

En ◺BDC: $BD = \sqrt{3}\;.\tan 2\alpha = \sqrt{3}\left(\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{2}\ldots (2)$

De (1) = (2): $\sqrt{2}\,\cot x = 6\sqrt{2}$ ∴ $\boxed{\cot x = 6}$




48.- En el ◺EFD: $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\dfrac{b}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \dfrac{b}{a} \;\ldots (1)$

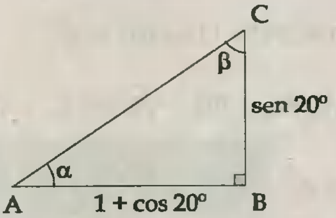
$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{2\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \;\ldots (2)$$

(1) en (2): $\tan\alpha = \dfrac{2\dfrac{b}{a}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} = \dfrac{2\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{2ab}{a^2-b^2}}$$

**49.-** Sean los ángulos agudos $\alpha$ y $\beta$.

En el ⊿ ABC tenemos:

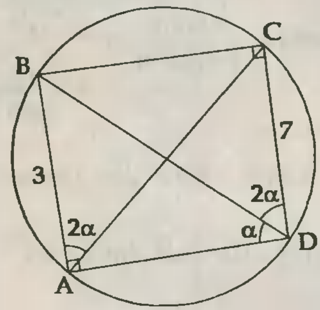



$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}20°}{1+\cos 20°} = \frac{2\text{sen}10°\cos 10°}{2\cos^2 10°}$$

$\tan\alpha = \tan 10° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 10°$

Además: $\alpha + \beta = 90° \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 80°}$

**50.-** De la figura tenemos que el cuadrilátero ABCD es inscriptible, $\overline{BD}$ es diámetro de una circunferencia.




$$m\angle BDC = m\angle BAC = 2\alpha$$

Por ser ángulos inscritos.

En ⊿BAD: $BD = 3\,.\,\csc\alpha \quad \ldots (1)$

En ⊿BCD: $BD = 7\sec 2\alpha \quad \ldots (2)$

De (1) y (2): $\dfrac{3}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{7}{\cos 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad 3[1 - 2\,\text{sen}^2\alpha] = 7\,\text{sen}\,\alpha$

$$6\,\text{sen}^2\alpha + 7\text{sen}\,\alpha - 3 = 0$$

$$(2\,\text{sen}\,\alpha + 3)(3\,\text{sen}\,\alpha - 1) = 0$$

$\therefore\ \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{3}{2}$ (absurdo) ó $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$

Luego: $\csc\alpha = 3$

En (1): $BD = 3(3)$

Finalmente: $\boxed{BD = 9\ cm}$

# CAP. 12 Identidades Trigonométricas del Arco Mitad

***RELACIONES FUNDAMENTALES***

**01.-** Utilizando la fórmula del «cos» del ángulo mitad obtenemos:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}} = \frac{3}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{4\cos\frac{x}{2} = 3}$$

**02.-** Escribiendo «M» en términos del cos $x$, obtenemos.

$$M = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

A continuación observamos que cada una de estas expresiones son $\tan\frac{x}{2}$ y $\cot\frac{x}{2}$.

Además: $\frac{x}{2} \in$ IC, por lo tanto:

$$M = \tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2} = 2\csc x \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 2\csc x}$$

**03.-** Escribiendo apropiadamente la expresión, tendremos:

$$M = \frac{\cot\frac{x}{2}.\cos x}{\sec x.\cot\frac{x}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{x}{2}.\tan x}{\sec x.\cot\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} + \frac{2\cos^2\frac{x}{2}.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}.\frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}$$

A continuación, utilizando arco doble, tendremos :

$$M = \cos^2 x + \underbrace{2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,.\,\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad M = \cos^2 x + \operatorname{sen} x\,.\,\operatorname{sen} x$$

$$M = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 1}$$

**04.-** En la condición: $\underbrace{\csc 2x - \cot 2x}_{\tan x} = \dfrac{1}{3}$

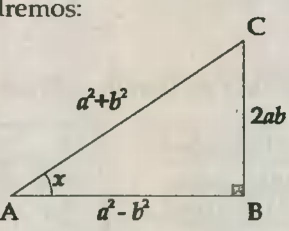
Luego: $\tan x = \dfrac{1}{3}$ $\quad \ldots (1)$

A continuación: $W = \csc 4x + \cot 4x = \cot 2x$ (fórmula racionalizada)

Luego: $W = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

Reemplazando (1) en W obtendremos: $W = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2\left(\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{1 - \frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}$ $\therefore$ $\boxed{W = \dfrac{4}{3}}$

**05.-** En ⊿ABC por el teorema de Pitágoras, tendremos:




$AB = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2}$

$AB = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}$

$AB = \sqrt{(a^2 - b^2)^2} = |a^2 - b^2|$

Como $a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \therefore AB = a^2 - b^2$

Entonces: $\tan\dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab} - \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$

$\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{2b^2}{2ab} = \dfrac{b}{a}$ $\therefore$ $\boxed{\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{b}{a}}$

**06.-** Por identidades trigonométricas, sabemos que:

(*) $(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(\underline{1 + \cos x})$

(*) $(1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x)(\underline{1 + \cos x})$

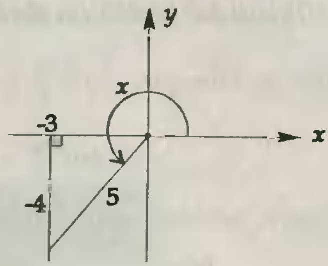
(*) $\cot\dfrac{x}{2} = \csc x + \cot x = \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \cot\dfrac{x}{2} = \csc x + \cot x = \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

Luego trabajando con la condición reemplazando las identidades anteriores, y factorizando tendremos:

$$2(1 + \cos x)[1 + \operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen} x] = W \cdot \left(\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

Finalmente: $4(1 + \cos x) = \dfrac{W(1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x}$ $\therefore$ $\boxed{W = 4 \operatorname{sen} x}$

07.- Según dato: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$




$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2} \in \text{II C}$$

Además: $\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Pero: $\cot x = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\frac{3}{5} \quad \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1): $\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}} = -2$

Además: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = -\frac{7}{25}$

Finalmente: $W = \left(-\frac{7}{25}\right) - (-2) = \frac{43}{25} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{43}{25}}$

08.- Se pide calcular: $W = \underbrace{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}_{\text{arco doble}} \cdot \tan x - 2\operatorname{sen}^2 + 1$

Por degradación: $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$$W = \operatorname{sen} x \cdot \tan x - 2\underbrace{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}_{\text{arco mitad}} + 1$$

A continuación escribimos «W» en términos de senos y cosenos:

$$W = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right) + 1$$

$$W = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} - 1 + \cos x + 1 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$W = \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

**09.-** Se sabe que: $\cot\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \cot\alpha$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$$

luego, aplicando dichas propiedades en el problema, tendremos:

$$W = \csc 2x + 2[\csc 2x + \cot 2x] - 3[\csc 2x - \cot 2x]$$

A continuación efectuando y simplificando obtenemos:

$$W = \csc 2x + 2\csc 2x + 2\cot 2x - 3\csc 2x + 3\cot 2x$$

Finalmente: $\boxed{W = 5\cot 2x}$

**10.-** Utilizando las fórmulas racionalizadas tenemos:

(*) $\tan 20^\circ = \csc 40^\circ - \cot 40^\circ$ (*) $\cot 20^\circ = \csc 40^\circ + \cot 40^\circ$

Luego: $M = \dfrac{\csc 40^\circ - \cot 40^\circ + \cot 40^\circ}{\csc 40^\circ + \cot 40^\circ - \cot 40^\circ} = \dfrac{\csc 40^\circ}{\csc 40^\circ}$ $\therefore$ $\boxed{M = 1}$

**11.-** Recordar: $\cot\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \csc\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ ; además: $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

Luego: $W = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} - (1 + \cos x).\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow W = \dfrac{1+\cos x - \cos x - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$

$\therefore$ $\boxed{W = \operatorname{sen} x}$

**12.-** $M = \overline{\tan\frac{x}{2}} + (1 - \cos x)\,.\,\cot x \Rightarrow M = \overline{\csc x - \cot x} + \cot x - \cos x\,.\,\cot x$

A continuación luego de cancelar: $\cot x$ y $-\cot x$, escribimos «M» en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$M = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow M = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \quad \therefore \boxed{M = \operatorname{sen} x}$$

**13.-** Por arco mitad: $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \csc x - \cot x = \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Arco doble: $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x \;\wedge\; \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Utilizando las propiedades anteriores tendremos:

$$W = \tan\left(\frac{x}{2}\right).\ \tan 2x.\ \left(\frac{\cos^2 x\text{-}(1\text{-}\cos^2 x)}{\cos x(1\text{-}\cos x)}\right) \Rightarrow W = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}\cdot\frac{2\cos^2 x\text{-}1}{\cos x(1\text{-}\cos x)}$$

$$W = \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x} = 2 \qquad \therefore\ \boxed{W = 2}$$

**14.-** Utilizando las fórmulas racionalizadas de arco mitad, tendremos:

$$M = \frac{\csc x - \frac{1}{2}(\csc x - \cot x)}{\frac{1}{2}(\csc x - \cot x) + \cot x} \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{\csc x - \frac{1}{2}.\csc x + \frac{1}{2}.\cot x}{\frac{1}{2}.\csc x - \frac{1}{2}.\cot x + \cot x}$$

A continuación simplificamos y obtenemos:

$$M = \frac{\frac{1}{2}(\csc x + \cot x)}{\frac{1}{2}(\csc x + \cot x)} = 1 \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 1}$$

**15.-** Escribimos apropiadamente la tangente de un ángulo mitad, obteniéndose que:

$$\tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right] = \tan\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x - \tan x = \frac{1 - \operatorname{sen}x}{\cos x}$$

Finalmente al reemplazar dicho resultado en W, obtenemos:

$$W = \frac{1 - \operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{(1 + \operatorname{sen}x)}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow W = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 \qquad \therefore\ \boxed{W = 1}$$

**16.-** Si: $\csc x + \cot x = \cot\frac{x}{2}$ , luego: $\csc x = \cot\frac{x}{2} - \cot x$

En «M», tendremos:

$$\left.\begin{aligned}
\csc x &= \cot\frac{x}{2} - \cot x\\
\csc\frac{x}{2} &= \cot\frac{x}{4} - \cot\frac{x}{2}\\
\csc\frac{x}{4} &= \cot\frac{x}{8} - \cot\frac{x}{4}\\
\csc\frac{x}{8} &= \cot\frac{x}{16} - \cot\frac{x}{8}\\
\csc\frac{x}{16} &= \cot\frac{x}{32} - \cot\frac{x}{16}
\end{aligned}\right\}(+)$$

Finalmente al simplificar obtenemos: $\boxed{M = \cot\frac{x}{32} - \cot x}$

17.- Sabemos que: $\tan x + \cot x = 2 \csc 2x$, a continuación reemplazamos dicha propiedad en el problema obteniendo:

$$M = \cos^2 2x - \left(\frac{2}{\tan x + \cot x}\right)^2 \Rightarrow M = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x \quad \therefore \quad \boxed{M = \cos 4x}$$

18.- Utilizando las fórmulas racionalizadas como sigue:

$$W = \csc 2x + \underbrace{\cot 4x + \csc 4x}_{\text{del arco mitad}} \Rightarrow W = \underbrace{\csc 2x + \cot 2x}_{\text{del arco mitad}} \quad \therefore \quad \boxed{W = \cot x}$$

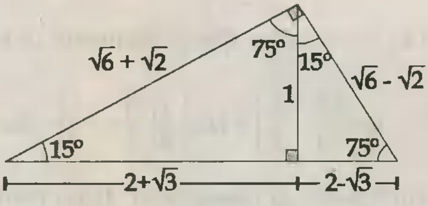
19.- Utilizando las fórmulas racionalizadas en el numerador y denominador se obtiene:

$$W = \frac{(\csc x + \cot x) - (\csc x - \cot x)}{\underbrace{\csc 2x + \cot 2x}_{\text{arco de mitad}}} \Rightarrow W = \frac{2\cot x}{\cot x} = 2 \quad \therefore \quad \boxed{W = 2}$$

20.- Del arco mitad se sabe que: $\tan \frac{\alpha}{2} = \csc \alpha - \cot \alpha$

Luego: $\tan 7°30' = \csc 15° - \cot 15°$

Con ayuda de las R.T. de 15°, tendremos:




$$\tan 7°30' = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{3})$$

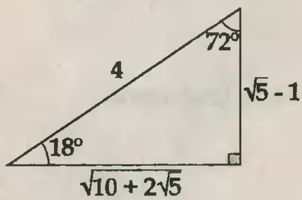
$$\therefore \quad \boxed{\tan 7° 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}$$

21.- Sabemos que: $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \csc \alpha - \cot \alpha$, luego:

$$* \ \tan(9°) = \tan\left(\frac{18°}{2}\right) = \csc 18° - \cot 18° \Rightarrow \tan(9°) = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

Racionalizando tenemos:

$$\tan(9°) = \frac{4}{(\sqrt{5}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,(\sqrt{\sqrt{5}+1})^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$




$$\tan(9°) = \sqrt{5} + 1 - \frac{\sqrt{80+32\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan(9°) = \sqrt{5} + 1 - \frac{\sqrt{16(5+2\sqrt{5})}}{4}$$

Finalmente: $\boxed{\tan(9°) = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$

**22.-** Se sabe que: $\cot x + \tan x = 2\csc 2x \quad (1)$

$$\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x \qquad (2)$$

Utilizando la primera propiedad en el segundo miembro de la condición obteniendo:

$$\tan\cancel{\frac{x}{4}} + \tan\frac{x}{8} = \tan\cancel{\frac{x}{4}} + \cot\frac{x}{4}$$

A continuación utilizamos la propiedad (2) en el primer miembro.

$$\csc\frac{x}{4} - \cot\frac{x}{4} = \cot\frac{x}{4} \ ; \ \csc\frac{x}{4} = 2\cot\frac{x}{4}$$

A continuación escribiendo en términos de senos y cosenos:

$$\frac{1}{\text{sen}\frac{x}{4}} = \frac{2\cos\frac{x}{4}}{\text{sen}\frac{x}{4}} \ , \ \text{sen}\frac{x}{4} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec\frac{x}{4} = 2$$

Luego: $M = \frac{1}{2} + 2 = 2,5 \quad \therefore \quad$ **M = 2,5**

**23.-** Utilizando las fórmulas adecuadas del ángulo mitad tendremos:

$$W = \frac{\csc 20^\circ + \cot 20^\circ - (\csc 20^\circ - \cot 20^\circ)}{\cot 20^\circ}$$

A continuación simplificando obtendremos: $W = \frac{2\cot 20^\circ}{\cot 20^\circ} \quad \therefore \quad$ **W = 2**

**24.-** Recordemos: $\cot\frac{x}{2} = \csc x + \cot x$

Escribiendo como sigue la expresión «E» se tendrá que :

$$E = \csc(90^\circ - 2x) + \cot(90^\circ - 2x) \quad \Rightarrow \quad E = \cot\left(\frac{90^\circ - 2x}{2}\right) = \cot(45^\circ - x)$$

$$E = \frac{1}{\tan(45^\circ - x)} = \frac{1}{m} \quad \therefore \quad \boxed{E = \frac{1}{m}}$$

25.- Como: $\csc x - \cot x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\theta \quad \wedge \quad \cot\frac{x}{2} = \csc\theta$

Utilizando las identidades trigonométricas apropiadas y las igualdades anteriores, obtenemos:

$$M = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}+\cos^2\theta}{\csc\theta-\csc\theta+1} \Rightarrow M = \frac{1+\overbrace{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}^{1}}{1} = 2 \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$$

26.- Como: cot x - tan x = 2 cot 2x, en el problema se tendrá:

$$M = (\tan 10^\circ + \cot 10^\circ - \tan 10^\circ)(\csc 20^\circ - \cot 20^\circ)$$

Finalmente: $M = \cot 10^\circ . \tan 10^\circ = 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

27.- Como: $\operatorname{sen} x + m\cos x = m \Rightarrow \operatorname{sen} x = m(1 - \cos x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} \Rightarrow \csc x - \cot x = \frac{1}{m} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{m}$$

Finalmente: $\boxed{\cot\frac{x}{2} = m}$

28.- Completamos cuadrados como sigue, tendremos:

$$x^2 - (2\csc\alpha)x + \csc^2 x + 1 - \csc^2\alpha = 0$$

$$(x - \csc\alpha)^2 = \csc^2\alpha - 1 \Rightarrow (x - \csc\alpha)^2 = \cot^2\alpha$$

$$\therefore \quad x - \csc\alpha = \cot\alpha \;\; ó \;\; x - \csc\alpha = -\cot\alpha \Rightarrow x = \csc\alpha + \cot\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$ó \quad x = \csc\alpha - \cot\alpha = \boxed{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

29.- El lado izquierdo de la igualdad, expresando en términos senos y cosenos.

$$\frac{\cos 6x}{\operatorname{sen}8x.\cos 2x} = \frac{\cos(8x-2x)}{\operatorname{sen}8x.\cos 2x} = \frac{\cos 8x\cos 2x + \operatorname{sen}8x.\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}8x.\cos 2x}$$

$$= \cot 8x + \underbrace{\tan 2x}_{\text{del arco mitad}} = \cot 8x + \csc 4x - \underbrace{\cot 4x}_{\text{del arco mitad}}$$

$$= \cot 8x + \csc 4x - (\csc 8x + \cot 8x) = \csc 4x - \csc 8x$$

Comparando: $A = 4$ , $B = 8$

Finalmente: $\boxed{\dfrac{B}{A} = 2}$

**30.-** Escribiendo la expresión pedida como sigue: $\tan\left(\dfrac{\pi-\alpha}{4}\right) \tan\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\right)$

Y ahora, usando la siguiente fórmula, tendremos :

$$\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Y reduciendo al IC nos queda: $= \sec\dfrac{\alpha}{2} - \tan\dfrac{\alpha}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) = \sec\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}$$

**31.-** Dándole una forma más apropiada a la expresión "$p$", tendremos:

$$p = 2\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}\ ; \ (\operatorname{sen}\theta > 0)$$

$$\Rightarrow \quad p = 2\csc\theta$$

Asimismo, del dato deducimos que : $k = \cot\dfrac{\theta}{2} \quad \vee \quad \dfrac{1}{k} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

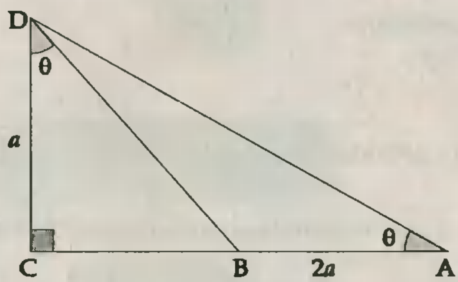
A continuación, sumamos las siguientes propiedades y obtendremos:

$$\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\csc\theta$$

Finalmente tendremos : $p = 2\csc\theta = \tan\dfrac{\theta}{2} + \cot\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{k} + k \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = k + k^{-1}}$$

**32.-** Sea $CD = a \quad \Rightarrow \quad AB = 2a$




En ⊿DCB: $\quad CB = a \tan\theta$

En ⊿ACD: $\quad \cot\theta = \dfrac{CA}{CD}$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{a(\tan\theta + 2)}{a}$$

Efectuando: $\quad \underbrace{\cot\theta - \tan\theta} = 2$

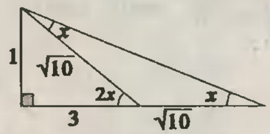
Por arco mitad: $\quad 2\cot 2\theta = 2 \Rightarrow \cot 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{8}\ rad}$

**33.-** Dado que $x$ es agudo y $4x$ también lo es, podemos usar un método gráfico que a continuación presentamos:

Se sabe que: $\quad \text{sen}\,4x = 0{,}6 = \dfrac{6}{10} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,4x = \dfrac{3}{5}$

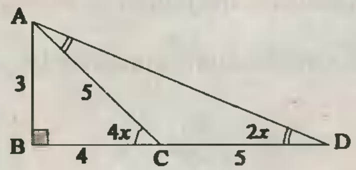
Utilizando el "Método Griego" prolongamos el cateto adyacente al ángulo "$4x$" una longitud igual al valor de la hipotenusa.

A continuación unimos su extremo con el extremo de la hipotenusa, logrando un triángulo isósceles tal como ACD $\Rightarrow \angle\ ADC = 2x$




Luego: $\tan 2x = \dfrac{3}{(4+5)} \quad \Rightarrow \quad \tan 2x = \dfrac{1}{3}$

Haciendo el mismo procedimiento, y en base a este último resultado construímos el triángulo adjunto, de donde:




$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} \cdot \frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{10} + 3} \quad \therefore \quad \boxed{\tan x = \sqrt{10} + 3}$$


**01.-** Utilizando las relaciones fundamentales del seno y coseno del triple, obtenemos:

$$W = \frac{\cos^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)}{\cos x} + \frac{\text{sen}^3 x + 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x}{\text{sen}x}$$

A continuación al simplificar obtenemos:

$$W = \frac{3\cos x(1-\cos^2 x)}{\cos x} + \frac{3\text{sen}x(1-\text{sen}^2 x)}{\text{sen}x}$$

$$W = 3[\text{sen}^2 x + \cos^2 x] \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 3}$$

**02.-** Recordar que: $\cos(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

Luego: $\quad W = 4 \cos x\, [\, \cos^2 60° - \text{sen}^2 x] \;\Rightarrow\; W = 4 \cos x\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{sen}\, x\right]$

Escribiendo como sigue, tendremos:

$$W = 4 \cos x \left[\frac{1}{4} - (1 - \cos^2 x\right] \quad \Rightarrow \quad W = 4 \cos x\left[\cos^2 x - \frac{3}{4}\right]$$

$$W = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \cos 3x}$$

**03.-** Utilizando las fórmulas fundamentales del triple, tenemos:

$$W = \frac{\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}}{\dfrac{3}{4} - \text{sen}^2 x} + \frac{3\cos x + (4\cos^3 x - 3\cos x)}{3\text{sen}x - (3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{4\text{sen}3x}{\text{sen}x(3 - 4\text{sen}^2 x)} + \frac{4\cos^3 x}{4\text{sen}^3 x}$$

Finalmente: $\quad W = \dfrac{4\text{sen}3x}{\text{sen}3x} + \cot^3 x$

$$\therefore \qquad \boxed{W = 4 + \cot^3 x}$$

**04.-** Escribiendo en términos de senos y cosenos :

$$M=\tan x.\left(\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{4\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 x}-\dfrac{4\cos^2 x}{\cos^2 x}}\right)\Rightarrow M=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{(1-4\cos^2 x)}{(3-4\cos^2 x)}\Rightarrow M=\frac{\operatorname{sen}x(1-4(1-\operatorname{sen}^2 x))}{-(4\cos^3 x-3\cos x)}$$

Enseguida damos forma al numerador y denominador formando las fórmulas básicas del seno y coseno del triple:

$$M=\frac{\operatorname{sen}x(4\operatorname{sen}^2 x-3)}{-\cos 3x}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{-(3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x)}{-\cos 3x}=\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}$$

$$\therefore\quad \boxed{M=\tan 3x}$$

**05.-** Escribiendo como sigue, tendremos: $W=\dfrac{\cos 3x}{\cos^3 x}+\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}-\dfrac{8\tan x}{\tan 2x}$

A continuación utilizamos las fórmulas del doble y el triple:

$$W=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos^3 x}+\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}-\frac{8\tan x}{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

Finalmente obtenemos: $W=4-3\sec^2 x+2-\sec^2 x-4(1-\tan^2 x)$

$$W=2-4\underbrace{(\sec^2 x-\tan^2 x)}_{1}\quad\therefore\quad\boxed{W=-2}$$

**06.-** Escribiendo en términos de senos y cosenos:

$$W=\frac{1+\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x+\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\cos x}}\quad\Rightarrow\quad W=\frac{\cos x+1+\cos 2x}{\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}3x}$$

A continuación efectuando operaciones apropiadas en el denominador y factorizando, tendremos:

$$W=\frac{\cos x+1+\cos 2x}{\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}x(2\cos 2x+1)}\Rightarrow W=\frac{(\cos x+1+\cos 2x)}{2\operatorname{sen}x(1+\cos x+\cos 2x)}$$

Finalmente: $\boxed{W=\dfrac{1}{2}\csc x}$

07.- Como: $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \dfrac{5}{4}$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2 \operatorname{sen} x \cos x}_{\operatorname{sen} 2x} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{4}$$

Luego: $\operatorname{sen} 6x = \operatorname{sen} 3(2x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 4 \operatorname{sen}^3 2x$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 6x = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4^3}\right) = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

Finalmente: $16 \operatorname{sen} 6x = 11 \qquad \therefore \qquad \boxed{M = 11}$

08.- Del dato: $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x = 4 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 2, x \in \text{I C}$

Luego: $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} \quad \Rightarrow \quad \tan 3x = \dfrac{3(2)-(2)^3}{1-3(2)^2}$

$$\Rightarrow \quad \tan 3x = \frac{-2}{-11} \qquad \therefore \qquad \boxed{\tan 3x = \frac{2}{11}}$$

09.- Utilizando la fórmula del coseno doble, tendremos:

$$W = 4(1 - 2\operatorname{sen}^2 9^\circ) - \frac{3}{\cos 18^\circ} \quad \Rightarrow \quad W = 4 \,.\, \cos 18^\circ - \frac{3}{\cos 18^\circ}$$

A continuación efectuamos para generar el desarrollo del coseno del triple, así:

$$W = \frac{4\cos^2 18^\circ - 3}{\cos 18^\circ} \cdot \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ}{\cos^2 18^\circ} = \frac{\cos 3(18^\circ)}{\cos^2 18^\circ}$$

Finalmente: $W = \dfrac{\cos 54^\circ}{\cos^2 18^\circ} = \dfrac{\operatorname{sen} 36^\circ}{\cos^2 18^\circ} = \dfrac{2\operatorname{sen} 18^\circ . \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ . \cos 18^\circ} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 2 \tan 18^\circ}$

10.- Trabajando con la ecuación del problema:

$$2(3\tan x - \tan^3 x) = 1 - 3\tan^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{1}{2}$$

Por arco triple: $\tan 3x = \dfrac{1}{2}$

Luego: $$W = \tan 6x = \tan 2(3x) = \frac{3\tan 3x}{1-\tan^2 3x}$$

Finalmente: $$W = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \frac{4}{3}}$$

***RELACIONES AUXILIARES***

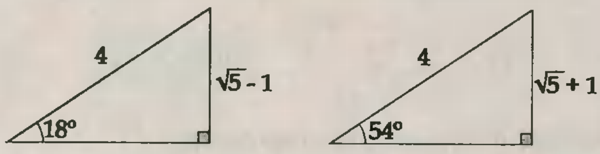
**11.-** Utilizando la siguiente identidad, tendremos:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha \,.\, \csc\alpha = 2\csc 2\alpha$$

Luego: $$W = \tan 9^\circ + \tan 27^\circ + \cot 27^\circ + \cot 9^\circ$$

En el problema: $W = \underbrace{\tan 9^\circ + \cot 9^\circ} + \underbrace{\tan 27^\circ + \cot 27^\circ} \Rightarrow W = 2\csc 18^\circ + 2\csc 54^\circ$

A continuación recordamos los siguientes triángulos notables:



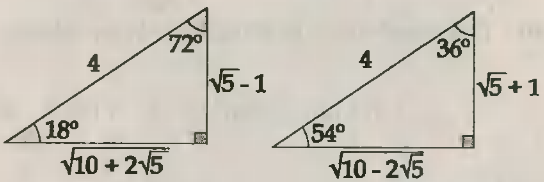

Finalmente utilizando los triángulos notables en el problema obtendremos:

$$W = 2\left(\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{4}{\sqrt{5}+1}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{4}\right) \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 4\sqrt{5}}$$

**12.-** Si recordamos que: $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \quad \wedge \quad \cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}$

En el problema:

$$W = \frac{\dfrac{\text{sen}(72^\circ+36^\circ)}{\cos 72^\circ.\cos 36^\circ}}{\dfrac{\text{sen}(72^\circ+36^\circ)}{\text{sen}72^\circ.\text{sen}36^\circ}} = \frac{\text{sen}72^\circ.\text{sen}36^\circ}{\cos 72^\circ.\cos 36^\circ} \Rightarrow$$



Luego de los triángulos mostrados:

$$W = \tan 72^\circ \cdot \tan 36^\circ \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$

Finalmente: $W = \dfrac{\sqrt{100-20}}{4} = \dfrac{4\sqrt{5}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{W = \sqrt{5}}$

**13.-** Aplicando reducción al I cuadrante tendremos:

$\cos 380^\circ = \cos(360^\circ + 20^\circ) = +\cos 20^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ$

$\cos 260^\circ = \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ \quad \Rightarrow \quad W = (\cos 20^\circ)(-\cos 40^\circ)(-\cos 80^\circ)$

Pero se sabe que: $\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ + \alpha).\cos(60^\circ - \alpha)$

Luego en el problema, tendremos: $W = \cos 20^\circ.\cos(60^\circ + 20^\circ).\cos(60^\circ - 20^\circ)$

Finalmente: $W = \dfrac{1}{4} \cos 3.\,(20^\circ) = \dfrac{1}{4} \cos 60^\circ = \dfrac{1}{8} \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{1}{8}}$

**14.-** Escribiendo como sigue el problema: $M = 3(\sec 10^\circ \cdot \sec 50^\circ \cdot \sec 70^\circ)^2$

A continuación le damos una forma conveniente a la siguiente propiedad:

$$M = 3[\sec 10^\circ \cdot \sec(60^\circ - 10^\circ).\sec(60^\circ + 10^\circ)]^2$$

$$M = 3.16. \left[\frac{1}{4} \cdot \sec 10^\circ.\sec(60^\circ-10^\circ).\sec(60^\circ+10)\right]^2$$

Pero: $\dfrac{1}{4} \sec x \cdot \sec(60^\circ - x) \cdot \sec(60^\circ + x) = \sec 3x$

Finalmente: $M = 3 \cdot 16 \cdot \sec^2 30^\circ = 3 \cdot 16. \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{M = 64}$

**15.-** Sabemos que:

$$4 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{sen}(60^\circ + x) = \operatorname{sen} 3x \quad \wedge \quad \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$$

Aplicando dichas propiedades al problema tendremos:

$$4M = \frac{4\operatorname{sen}22^\circ.\operatorname{sen}(60^\circ-22^\circ).\operatorname{sen}(60^\circ+22^\circ)}{\cos 2(12^\circ)} \Rightarrow 4M = \frac{\operatorname{sen}3(22^\circ)}{\cos 24^\circ} = \frac{\operatorname{sen}66^\circ}{\cos 24^\circ}$$

Como: sen 66° = cos 24° , de donde: 4M = 1 $\therefore$ $\boxed{M = \frac{1}{4}}$

**16.-** Escribiendo como sigue la expresión, tendremos:

$$W = \frac{\overbrace{(2\cos 6x+1)\text{sen}\,3x}}{\underbrace{(2\cos 6x-1)\cos 3x}} \Rightarrow W = \frac{\text{sen}3(3x)}{\cos 3(3x)} = \frac{\text{sen}9x}{\cos 9x} \quad \therefore \quad \boxed{W = \tan 9x}$$

**17.-** Escribiendo como sigue: $W = \dfrac{4\,\text{sen}\,x.\text{sen}\frac{x}{2}}{\text{sen}\frac{3x}{2}} + \dfrac{3\cos\frac{3x}{2}}{\text{sen}\frac{3x}{2}}$

Luego de efectuar y agrupar conveniente tendremos:

$$W = \frac{4.2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}(2\cos x - 1)}{\text{sen}\frac{3x}{2}} \Rightarrow W = \frac{\cos\frac{x}{2}\left(8\,\text{sen}^2\frac{x}{2} + 6\cos x - 3\right)}{\text{sen}\frac{3x}{2}}$$

Finalmente: $W = \dfrac{\cos\frac{x}{2}(1+2\cos x)}{\text{sen}\frac{x}{2}(2\cos x+1)}$ $\therefore$ $\boxed{W = \cot\frac{x}{2}}$

**18.-** Aplicando las propiedades: $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = 2\cos 2x + 1 \quad \wedge \quad \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 2x - 1$

En el problema tendremos: M + 2 cos 2$x$ + 1 = 2 cos 2$x$ - 1

Luego de simplificar, obtendremos: $\boxed{M = -2}$

**19.-** Escribiendo en términos de senos y cosenos:

$$W = \frac{\text{sen}10°}{\cos 10°}(3\cos 10° - 2\,\text{sen}\,10°.\cos 70°) \Rightarrow W = 3\,\text{sen}\,10° - \frac{2\text{sen}^2 10°.\cos 70°}{\cos 10°}$$

Pero, por arco complementario: cos 70° = sen 20°

En la expresión tenemos: $W = 3\,\text{sen}\,10° - \dfrac{2\text{sen}^2 10°}{\cos 10°}.\,2\,\text{sen}\,10°\cos 10°$

Ordenando y simplificando: $W = 3\,\text{sen}\,10° - 4\,\text{sen}^3 10°$

Entonces por arco triple tenemos: $W = \text{sen}\,3(10°) = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\boxed{W = \frac{1}{2}}$

## *PROBLEMAS CONDICIONALES*

**20.-** Del lado derecho de la igualdad tenemos:

$$(3\text{sen } x - 4\text{sen}^3 x).\frac{\cos x}{\text{sen}x} + (4\cos^3 x - 3\cos x).\frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$= 3\cos x - 4\text{sen}^2 x \cos x + 4\cos^2 x \text{ sen } x - 3\text{sen } x$

$\Rightarrow 3(\cos x - \text{sen } x) + 4 \text{ sen } x \cos x(\cos x - \text{sen } x) \Rightarrow (\cos x - \text{sen } x)[3 + 2(2 \text{ sen } x \cos x)]$

Multiplicando el numerador y denominador por: $\cos x + \text{sen } x$

$$= \frac{(\cos x - \text{sen}x)(\cos x + \text{sen}x)[3 + 2.\text{sen}2x]}{\cos x + \text{sen}x} \Rightarrow \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)[3 + 2\text{sen}2x]}{\text{sen}x + \cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x[3 + 2\text{sen}2x]}{\text{sen}x + \cos x} = \frac{2\text{sen}2x\cos 2x + 3\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = \frac{\text{sen}4x + 3\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x}$$

Luego, al comparar tendremos: $A = 1$ ; $B = 3$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{A + B = 4}$

**21.-** De la condición: $\sec 2x = \dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \dfrac{\text{sen}x}{\text{sen}x} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos 2x} = 2 \cos 2x + 1 - 1$

$$\Rightarrow \quad 1 = 2 \cos^2 2x \quad \Rightarrow \quad 0 = 2\cos^2 2x - 1$$

Pero: $\underbrace{2\cos^2 2x - 1}_{\cos 4x} = 0 \quad\therefore\quad \boxed{\cos 4x = 0}$

**22.-** Utilizando una fórmula especial del triple, tendremos:

Por arco triple: $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = 2 \cos 2x + 1 = \dfrac{1}{3}$

Luego: $\cos 2x = -\dfrac{1}{3}$

Finalmente por arco doble: $W = \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - 1 \quad\therefore\quad \boxed{W = -\dfrac{7}{9}}$

**23.-** Como: $a \csc x = 3 - 4 \text{ sen}^2 x \Rightarrow a = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x \Rightarrow a = \text{sen } 3x \quad \ldots (1)$

Como: $b \sec x = 4 \cos^2 x - 3 \Rightarrow b = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \Rightarrow b = \cos 3x \quad \ldots (2)$

Sumando los cuadrados de las relaciones (1) y (2), obtendremos: $a^2 + b^2 = \text{sen}^2 3x + \cos^2 3x$

Finalmente: $\boxed{a^2 + b^2 = 1}$

24.- En la condición del problema, desarrollamos las fórmulas del seno y coseno del triple de un ángulo, así:

$$\frac{\text{sen}3x+\text{sen}^3x}{\cos 3x-\cos^3 x}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{3\text{sen}x-4\text{sen}^3x+\text{sen}^3x}{4\cos^3 x-3\cos x-\cos^3 x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3\text{sen}x(1-\text{sen}^2x)}{-3\cos x(1-\cos^2 x)}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\text{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2x}=-\frac{1}{2}$$

Al simplificar obtenemos: $\cot x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\tan x=-2}$

25.- Hallemos la relación angular:

$$3x = 180° - 3(60° - x) \;\Rightarrow\; \text{sen } 3x = \text{sen}[180° - 3(60° - x)]$$

Luego: $\quad \text{sen } 3x = \text{sen } 3[60° - x] \;\Rightarrow\; \text{sen } 3x = 3 \text{ sen}(60° - x) - 4 \text{ sen}^3(60°- x)$

Reemplazando el dato: $\text{sen } 3x = 3\left(\dfrac{1}{3}\right) - 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = 1 - \dfrac{4}{27} = \dfrac{23}{27}$

$$W = -\cos 6x = -\cos 2(3x) = -[1 - 2 \text{ sen}^2 3x]$$

Al reemplazar el valor de «sen $3x$», tendremos:

$$W = -1 + 2\left(\frac{23}{27}\right)^2 \quad\therefore\quad \boxed{W = \frac{329}{729}}$$

26.- Si se sabe que: $\quad 1 - \cos 2x = 2 \text{ sen}^2x$

Luego: $\quad \dfrac{2\text{sen}^2\dfrac{9\alpha}{2}}{2\text{sen}^2\dfrac{3\alpha}{2}} = (x^3 - 3x + 1)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{\text{sen}\dfrac{3\alpha}{2}.(2\cos 3\alpha+1)}{\text{sen}\dfrac{3\alpha}{2}}\right)^2 = (x^3 - 3x + 1)^2$

A continuación comparando podemos lograr la siguiente igualdad que al darle forma quedará:

$$2 \cos 3\alpha = x^3 - 3x \quad\Rightarrow\quad 2(4\cos^3\alpha - 3 \cos \alpha) = x^3 - 3x$$

$$(2 \cos \alpha)^3 - 3(2 \cos \alpha) = x^3 - 3x \quad\therefore\quad \boxed{x = 2 \cos \alpha}$$

27.- Escribiendo en términos de senos y cosenos, tendremos:

$$\frac{\text{sen}3x}{\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\cos^2 x}{\cos x}}+\frac{\cos 3x}{\dfrac{1}{\text{sen}x}-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}x}}=m$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen} 3x . \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos 3x . \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = m$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen} 3x . \cos x}{\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x} + \frac{\cos 3x . \operatorname{sen} x}{\cos x . \cos x} = m$$

A continuación utilizamos las fórmulas especiales del triple:

$$(2 \cos 2x + 1)\cot x + (2 \cos 2x - 1) \tan x = m$$

Al agrupar convenientemente encontramos algunas fórmulas especiales del doble, así:

$$2 \cos 2x \,.\, \underbrace{(\cot x + \tan x)}_{2\csc 2x} + \underbrace{(\cot x - \tan x)}_{2\cot 2x} = m$$

Luego de efectuar tendremos:

$$4 \cos 2x . \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + 2 \cot 2x = m \qquad \Rightarrow \qquad 4 \cot 2x + 2 \cot 2x = m$$

Finalmente: $\qquad 6 \cot 2x = m \qquad \therefore \qquad \boxed{\cot 2x = \frac{m}{6}}$

**28.-** Utilizando las fórmulas básicas del seno y coseno del triple y operando apropiadamente, tendremos:

$W = (4 \cos^3 x - 3 \cos x) - ( 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x) \quad \Rightarrow \quad W = 4(\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x) - 3(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Recordemos el producto notable: $\quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Luego aplicando en W:

$$W = 4(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x) - 3(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$1$$

$W = (\cos x + \operatorname{sen} x)[4(1 - \operatorname{sen} x \cos x) - 3] \;\Rightarrow\; W = (\cos x + \operatorname{sen} x)[1 - 4 \operatorname{sen} x \cos x] \ldots (1)$

Del dato, elevando al cuadrado tenemos:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = k^2 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = k^2$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = k^2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad 4 \operatorname{sen} x \cos x = 2(k^2 - 1) \qquad \ldots (2)$$

A continuación (2) en (1): $\qquad W = k[1 - 2(k^2 - 1)] \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 3k - 2k^3}$

**29.-** Escribiendo apropiadamente la condición tendremos:

$$-\sqrt{5} . \tan \phi = 1 - \tan^2\phi \Rightarrow \quad \frac{2\tan\phi}{1 - \tan^2\phi} = -\frac{1}{\sqrt{5}} . 2 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\phi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Luego utilizamos la fórmula de la tangente del triple:

$$\tan 6\phi = \tan 3(2\phi) = \frac{3\tan 2\phi - \tan^3 2\phi}{1 - 3\tan^2 2\phi}$$

Finalmente, si reemplazamos el valor de tan 2ϕ, obtendremos:

$$\tan 6\phi = \frac{-\frac{6\sqrt{5}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{25}}{1 - 3.\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{22}{25}\sqrt{5}}{-\frac{7}{5}} \quad \therefore \quad \boxed{\tan 6\phi = \frac{22\sqrt{5}}{35}}$$

**30.-** Trabajando con la condición del problema: $\tan 3x = k \,.\, \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan 3x}{\tan x} = k$

$$\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} = k \quad \Rightarrow \quad 2\cos 2x + 1 = k \,.\, 2\cos 2x - k$$

Luego: $\quad 2\cos 2x = \frac{1+k}{k-1} \quad \ldots (1)$

Se pide: $\quad W = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = 2\cos 2x + 1 \quad \ldots (2)$

Reemplazando (1) en (2), obtendremos: $\quad W = \frac{1+k}{k-1} + 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{2k}{k-1}}$

**31.-** Haciendo: $x = 3\alpha$, reemplazamos en el dato: $\tan 3\alpha = \tan \alpha(2 + \sqrt{3})$

Luego: $\quad \frac{\tan 3\alpha}{\tan \alpha} = 2 + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1} = 2 + \sqrt{3}$

Como: $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Aplicando dicha propiedad al problema: $\frac{4\cos 2\alpha}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow 2\cos 2\alpha = \sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}+1)}{1+\sqrt{3}}$

De donde: $\quad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 30° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15° \quad \therefore \quad x = 3\alpha = 45°$

Finalmente: $\quad W = \text{sen}(75°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**32.-** Escribiendo como sigue, tenemos:

$$3 \text{ sen } 2x = 2(1 - \cos 2x) \quad \Rightarrow \quad 3(2 \text{ sen } x \cos x) = 2(2 \text{ sen}^2 x)$$

$$3 \cos x = 2 \text{ sen } x \quad ; \quad \text{como } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan x = \frac{3}{2} \qquad \therefore \qquad \text{sen } x \neq 0$$

A continuación la fórmula del triple:

$$\tan 3x = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{27}{8}}{1 - \frac{27}{4}}$$

Finalmente: $\tan 3x = \dfrac{\frac{9}{8}}{-\frac{23}{4}} \qquad \therefore \qquad \tan 3x = -\dfrac{9}{46}$

**33.-** Hallemos la relación angular: $\quad 3x = 3(x + 15^\circ) - 45^\circ$

Luego: $\quad \tan 3x = \tan[3(x + 15^\circ) - 45^\circ]$

$$\Rightarrow \quad \tan 3x = \frac{\tan 3(x + 15^\circ) - \tan 45^\circ}{1 + \tan 3(x + 15^\circ).\tan 45^\circ} \quad \ldots (1)$$

Pero: $\quad \tan 3(x+15^\circ) = \dfrac{3\tan(x + 15^\circ) - \tan 3(x + 15^\circ)}{1 - 3\tan 2(x + 15^\circ)} \quad \ldots (2)$

Reemplazando el dato: $\quad \tan(x + 15^\circ) = \dfrac{2}{3}$

En (2) tenemos: $\quad \tan 3(x + 15^\circ) = \dfrac{3\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{2 - \frac{8}{27}}{1 - \frac{4}{3}}$

$$\Rightarrow \quad \tan 3(x + 15^\circ) = -\frac{46}{9} \quad \ldots (3)$$

Reemplazando (3) en (1), tenemos:

Finalmente: $\quad \tan 3x = \dfrac{-\frac{46}{9} - 1}{1 + \left(-\frac{46}{9}\right)(1)} = \dfrac{-\frac{55}{9}}{-\frac{37}{9}} \qquad \therefore \qquad \tan 3x = \dfrac{55}{37}$

34.- Escribiendo el problema de la siguiente manera:

$$W = \frac{\sqrt[3]{1-6\text{sen}10^\circ}}{\cos 80^\circ} = \sqrt[3]{\frac{1-6\text{sen}10^\circ}{\cos^3 80^\circ}}\ , \text{ pero: } \quad \cos 80^\circ = \text{sen } 10^\circ$$

$$W = \sqrt[3]{\frac{4(1-6\text{sen}10^\circ)}{4\text{sen}^3 10^\circ}} \quad , \text{ pero: } \quad 4 \text{ sen}^3 x = 3 \text{ sen } x - \text{sen } 3x$$

Luego: $W = \sqrt[3]{\dfrac{-4(6\text{sen}10^\circ-1)}{3\text{sen}10^\circ-\text{sen}30^\circ}}$

Finalmente: $W = \sqrt[3]{\dfrac{-4(6\text{sen}10^\circ-1)}{\dfrac{6\text{sen}10^\circ-1}{2}}} \Rightarrow W = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \therefore \quad \boxed{W = -2}$

35.- Se sabe: $\dfrac{\text{sen}3\alpha}{\text{sen}\alpha} = 2 \cos 2\alpha + 1 \ \wedge \ \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2 \cos 2\alpha - 1$

Por arcos suplementarios: $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$

Por arcos complementarios: $\text{sen } 20^\circ = \cos 70^\circ$

Aplicando estas propiedades a nuestro problema, tendremos:

$$W = 2(-\cos 20^\circ)(2 \cos 70^\circ - 1)(2 \cos 70^\circ + 1)$$

En las propiedades utilizadas en el problema observamos que: $2\alpha = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$

$$W = -2 \cos 20^\circ \cdot \frac{\cos 3(35^\circ)}{\cos 35^\circ} \cdot \frac{\text{sen}3(35^\circ)}{\text{sen}35^\circ}$$

Luego «W» tendrá la siguiente forma: $W = \dfrac{-2\cos 20^\circ.\cos 105^\circ.\text{sen}105^\circ}{2\text{sen}35^\circ.\cos 35^\circ} . 2$

Simplificando: $W = -\dfrac{2\cos 20^\circ}{\text{sen}70^\circ} . \text{ sen } 210^\circ$ pero $\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ$

Finalmente: $\text{sen } 210^\circ = -\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$

36.- Utilizando ángulos complementarios en el numerador y la propiedad $\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = \text{sen}(x + y) \text{ sen}(x - y)$, en el denominador obtenemos:

$$M = \frac{(3\text{sen}25^\circ-4\text{sen}^3 25^\circ)\text{sen}50^\circ}{\text{sen}(70^\circ+20^\circ).\text{sen}(70^\circ-20^\circ)}$$

Al efectuar en el numerador y denominador: $M = \dfrac{\text{sen}3(25°)}{\text{sen}90°.\text{sen}50°}.\text{sen } 50°$

De donde: $M = \text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\therefore$ $\boxed{M = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**37.-** Escribiendo «M» en términos de senos y cosenos:

$$M = \dfrac{\dfrac{4\cos^2 18°}{\cos 18°} - \dfrac{3}{\cos 18°}}{\dfrac{\text{sen}18°}{\cos 18°}} \Rightarrow M = \dfrac{2(4\cos^3 18° - 3\cos 18°)}{2\text{sen}18°.\cos 18°}$$

Por identidades del doble y triple tenemos: $M = \dfrac{2\cos 3(18°)}{\text{sen}2(18°)} \Rightarrow M = \dfrac{2\cos 54°}{\text{sen}36°}$

Pero: $\text{sen } 36° = \cos 54°$ , luego: $M = \dfrac{2\,\text{sen}\,36°}{\text{sen}\,36°}$ $\therefore$ $\boxed{M = 2}$

**38.-** Como: $\cos 3(20°) = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° \Rightarrow \underbrace{\cos 60°}_{1/2} + 3\cos 20° = 4\cos^3 20°$ . . . (1)

Efectuando como sigue: $1 + 6\cos 20° = 8\cos^3 20°$

Reemplazando en «M», tendremos: $M = \dfrac{\sqrt[3]{8\cos^3 20°}}{2\cos 20°} = \dfrac{2\cos 20°}{2\cos 20°}$ $\therefore$ $\boxed{M = 1}$

**39.-** De (1): $\dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \dfrac{a+b}{a-b}$

Por propiedad del arco triple tendremos: $\dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} = \dfrac{a+b}{a-b}$

Despejando $\cos 2x$: $\cos 2x = \dfrac{a}{2b}$ . . . (3)

De (2), multiplicando por 2: $a\,2\text{sen}^2 x = 2b\cos 3(2x)$

Del arco doble y arco triple tenemos: $a(1 - \cos 2x) = 2b[4\cos^3 2x - 3\cos^2 2x]$ . . . (4)

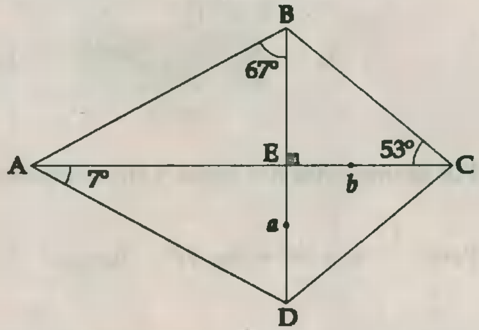
Reemplazando (3) en (4): $a\left(1 - \dfrac{a}{2b}\right) = 8b\left(\dfrac{a}{2b}\right)^3 - 6b\left(\dfrac{a}{2b}\right) \Rightarrow a\left(\dfrac{2b-a}{2b}\right) = \dfrac{a^3}{b^2} - 3a$

Efectuando y simplificando tendremos: $a\left(\dfrac{2b-a}{2b}\right)=a\left(\dfrac{a^2-3b^2}{b^2}\right)$

$$\Rightarrow \qquad 2b^2 - ab = 2a^2 - 6b^2 \quad \therefore \quad \boxed{8b^2 - 2a^2 = ab}$$

## *SITUACIONES GRÁFICAS*

**40.-** Haciendo: DE = $a$ y EC = $b$, luego:




En el $\triangle$BEC: BE = $b$.tan 53° . . . (1)

En el $\triangle$AEB: AE = BE.tan 67° . . . (2)

(1 ) en (2): AE = $b$ tan 53°.tan 67°. . . (3)

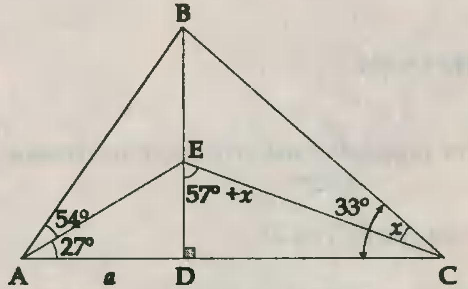
En $\triangle$AED: ED = AE.tan 7° . . . (4)

(3) en (4): $a = b$ tan 53° . tan 67° . tan 7°

Despejando tendremos: $\dfrac{a}{b}$ = tan 7°.tan(60° + 7°).tan(60° - 7°)

Finalmente: $\dfrac{a}{b}$ = tan 3(7°) $\therefore$ $\boxed{\dfrac{a}{b} = \tan 21^\circ}$

**41.-** Sea: AD = $a$




En $\triangle$ADE: ED = $a$ tan 27°

En $\triangle$EDC: DC = $a$ tan 27°.tan(57° + $x$)

En $\triangle$BDC: $m\angle$BCD = 33°

BD = $a$ tan 27°.tan(57° + $x$).tan 33°

En $\triangle$ADB: BD = $a$ tan 81°

Se cumple: $a$ tan 81° = $a$ tan 27°.tan(57° + $x$).tan 33°

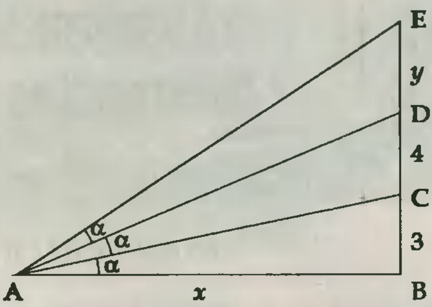
A continuación aplicamos la siguiente propiedad:

$$\tan 3\theta = \tan\theta \,.\, \tan(60^\circ + \theta).\, \tan(60^\circ - \theta)$$

Si: θ = 27° $\Rightarrow$ 57° + $x$ = 60° + θ $\Rightarrow$ 57° + $x$ = 60° + 27° $\therefore$ $\boxed{x = 30^\circ}$

42.- Sea: $m\angle BAC = m\angle CAD = m\angle DAB = \alpha$

Sea: $AB = x$ , $DE = y$




En ◺ ABC: $\tan\alpha = \dfrac{3}{x}$ . . . (1)

En ◺ ABD: $\tan 2\alpha = \dfrac{7}{x}$

Luego: $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{7}{x}$ . . . (2)

Reemplazando (1) en (2): $\dfrac{2\left(\dfrac{3}{x}\right)}{1-\left(\dfrac{3}{x}\right)^2} = \dfrac{7}{x}$

Resolviendo la ecuación: $x = 3\sqrt{7}$

En ◺ ABE: $\tan 3\alpha = \dfrac{y+7}{x} \Rightarrow \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \dfrac{y+7}{3\sqrt{7}}$ . . . (3)

Reemplazando (1) en (3): Pero $\tan\alpha = \dfrac{3}{3\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right) - \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^3}{1-3\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{y+7}{3\sqrt{7}}$$

Resolviendo la ecuación: $y = 8\ u$

Finalmente: $\text{área } \Delta\, ABE = \dfrac{(AB)(BE)}{2} = \dfrac{(3\sqrt{7})(15)}{2}$ $\therefore$ **área Δ ABE = 59,53 $u^2$**

# CAP. 14 Transformaciones de Sumas o Diferencias a Productos

## TRANSFORMACIONES A PRODUCTO

**01.-** Escribiendo como sigue: $$M = \frac{\cos 15x + \cos 5x + 10\cos 10x}{\operatorname{sen} 15x + \operatorname{sen} 5x + 10\operatorname{sen} 10x}$$

Transformando a producto: $$M = \frac{2\cos 10x.\cos 5x + 10\cos 10x}{2\operatorname{sen} 10x.\operatorname{sen} 5x + 10\operatorname{sen} 10x}$$

Finalmente: $M = \dfrac{2\cos 10x(\cos 5x + 5)}{2\operatorname{sen} 10x(\cos 5x + 5)}$ $\therefore$ $\boxed{\mathbf{M = \cot 10\,x}}$

**02.-** Transformando a producto: $M = \dfrac{-2\operatorname{sen} 45°.\operatorname{sen} x}{2\cos 120°.\operatorname{sen} x}$

Luego de simplificar y reemplazar los valores numéricos correspondientes tendremos:

$$M = \frac{-\operatorname{sen} 45°}{\cos 120°} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}} \qquad \therefore \quad \boxed{M = \sqrt{2}}$$

**03.-** Escribiendo como sigue tendremos:

$$M = \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{3}.\operatorname{sen} 2x}{(\cos 2x + \cos 60°).\tan(x + 30°)}$$

A continuación trabajando en términos de senos y cosenos:

$$M = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}/2 + \operatorname{sen} 2x)}{2\cos(x + 30°).\cos(x - 30°).\dfrac{\operatorname{sen}(x + 30°)}{\cos(x + 30°)}}$$

$$M = \frac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} 2x\right)}{2\cos(x - 30°)\operatorname{sen}(x + 30°)} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\sqrt{3}\,(2\operatorname{sen}(30° + x)\cos(30° - x))}{2\cos(x - 30°)\operatorname{sen}(30° + x)}$$

Finalmente simplificamos: $\therefore$ $\boxed{M = \sqrt{3}}$

**04.-** Se sabe que: $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ; $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Utilizando dichas propiedades en el problema:

$$W = \underbrace{\cos 10x + \cos 8x}_{\text{a producto}} + \underbrace{3(2\cos^2 2x)}_{\substack{\text{degradar}\\\text{(doble)}}} + 3\cos 2x - 3 - 2\cos x\underbrace{(4\cos^3 3x)}_{\substack{\text{degradar}\\\text{(triple)}}}$$

$$W = 2\cos 9x\cos x + 3(1 + \cos 4x) + 3\cos 2x - 3 - 2\cos x(3\cos 3x + \cos 9x)$$

$$W = \cancel{2\cos 9x\cos x} + \cancel{3} + 3\cos 4x + 3\cos 2x - \cancel{3} - 6\cos x\cos 3x - \cancel{2\cos 9x\cos x}$$

Agrupando convenientemente, tendremos:

$$W = 3(\cos 4x + \cos 2x) - 6\cos x \,.\, \cos 3x \;\Rightarrow\; W = 3(2\cos 3x\cos x) - 6\cos x \,.\, \cos 3x$$

Finalmente: $W = 3(2\cos 3x\cos x) - 6\cos x\cos 3x$ $\therefore$ $\boxed{W = 0}$

**05.-** Transformando a producto tanto el numerador como el denominador obtenemos.

$$M = \frac{2.2\operatorname{sen}(x+y).\cos(x-y)}{2\cos^2(x-y) + 2\cos(x+y).\cos(x-y)}$$

A continuación simplificamos y luego de factorizar tendremos:

$$M = \frac{2\cos(x-y).\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)[\underbrace{\cos(x-y)+\cos(x+y)}]}$$

Finalmente: $M = \dfrac{2\operatorname{sen}(x+y)}{2\cos x.\cos y} = \tan x + \tan y$ $\therefore$ $\boxed{M = \tan x + \tan y}$

**06.-** Escribiendo como sigue: $W = \dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x \operatorname{sen} x} - 4\cos^2 x\right)(2\operatorname{sen} x\cos 2x)}{(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x - 1)^2}$

Simplificando logramos: $W = \dfrac{\left(\dfrac{\cos x - 4\cos^2 x\cos 2x\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos 2x}.\cancel{\operatorname{sen} x}}\right)(2\cancel{\operatorname{sen} x}\,\cancel{\cos 2x})}{(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)^2}$

$$W = \frac{2\cos x\cancel{(1 - 2\operatorname{sen} 2x\cos 2x)}}{\cancel{(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)^2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 2\cos x}$$

07.- Agrupando como sigue:

$M = \text{sen } x + \text{sen } 7x + 2(\text{sen } 3x + \text{sen } 5x) \Rightarrow \quad M = 2 \text{ sen } 4x \cos 3x + 4 \text{ sen } 4x. \cos x$

A continuación factorizamos:

$\Rightarrow M = 2 \text{ sen } 4x(\cos 3x + 2 \cos x) \quad \Rightarrow \quad M = 2 \text{ sen } 4x(\cos 3x + \cos x + \cos x)$

$\Rightarrow M = 2 \text{ sen } 4x(2 \cos 2x . \cos x + \cos x) \quad \Rightarrow \quad M = 2 \text{ sen } 4x . \cos x(2 \cos 2x + 1)$

Pero: $2 \cos 2x + 1 = \dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}$

Aplicando la propiedad a M, tendremos:

$$M = 2 \text{ sen } 4x . \cos x . \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} \quad \therefore \quad \mathbf{M = 2 \text{ sen } 4x \cot x . \text{ sen } 3x}$$

08.- Transformando a producto tanto el numerador como el denominador:

$$W = \frac{\cos 12°+\text{sen}30°+\text{sen}6°}{\cos 24°+\cos 48°}$$

Al simplificar factores comunes, tendremos:

$$W = \frac{\cos 12°+2\text{sen}(18°)\cos(12°)}{2\cos(36°)\cos(12°)} \Rightarrow W = \frac{1+2\text{sen}18°}{2\text{sen}54°} \Rightarrow W = \frac{2\cos 72°+1}{2\cos 36°}$$

Utilizando ángulo triple en el numerador y doble en el denominador tendremos:

$$W = \left(\frac{2\cos 72°+1}{2\cos 36°}\right) . \frac{\text{sen}36°}{\text{sen}36°} \Rightarrow W = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}72°} \quad \therefore \quad \mathbf{W = 1}$$

09.- Sabemos que: $2 \text{ sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \wedge \quad 2 \cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$2 \text{ sen } \alpha \cos \beta = \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)$

Utilizando dichas propiedades en el problema, tendremos:

$$W = \frac{2\cos^2 10°+2\text{sen}^2 20°-2\text{sen}20°\cos 10°}{2}$$

$$W = \frac{1+\cos 20°+1-\cos 40°-2\,\text{sen}\,20°+\cos 10°}{2}$$

$$W = \frac{2+2\,\text{sen}\,30°\text{sen}\,10°-2\ .\ 2\text{sen}\,10°\cos^2 10°}{2}$$

$$W = \frac{2 + \operatorname{sen} 10°(1 - 4\cos^2 10°)}{2}$$

Efectuando y simplificando, obtendremos:

$$W = \frac{2 + \operatorname{sen} 10°(4\operatorname{sen}^2 10° - 3)}{2} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2 + (4\operatorname{sen}^3 10° - 3\operatorname{sen} 10°)}{2}$$

Finalmente: $W = \dfrac{2 - \operatorname{sen} 30°}{2} \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{3}{4}}$

**10.-** Utilizando la propiedad: $\tan x + \cot x = 2 \csc 2x$ en el denominador y a continuación expresando «W» en términos de senos y cosenos, se tendrá:

$$W = \frac{2\cos 40° - 1}{2\csc 70°} = \frac{1}{2} \cos 20°(2 \cos 40° - 1)$$

Al efectuar en el numerador obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} . \cos 60° \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{4}}$$

**11.-** Transformando a producto en el numerador obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2\operatorname{sen} 5x . \cos x}{2\operatorname{sen} x . \cos x}$$

Al simplificar y comparar logramos: $\dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} \quad \therefore \quad \boxed{m = 5}$

**12.-** Transformando a producto como sigue: $M = \cos 20° + 2 \cos 120° . \cos 20°$

$\Rightarrow \quad M = \cos 20° + 2(-1/2).\cos 20° \quad \Rightarrow \quad M = \cos 20° - \cos 20° \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$

En general se cumple: $\cos x + \cos (120° - x) + \cos(120° + x) = 0$

**13.-** Al elegir convenientemente los extremos, transformamos a producto tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x} = \frac{2\operatorname{sen} 6x . \cos x + \operatorname{sen} 6x}{2\operatorname{sen} 2x . \cos x + \operatorname{sen} 2x}$$

A continuación factorizamos: $\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} \dfrac{(2\cos x + 1)}{(2\cos x + 1)}$

Luego: $\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{\operatorname{sen} 2x(2\cos 4x + 1)}{\operatorname{sen} 2x} = 2 \cos 4x + 1$

Al simplificar obtenemos: $M \cos 4x + 1 = 2 \cos 4x + 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$

**14.**-Transformamos a producto como sigue:

$$M=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}9\alpha+\operatorname{sen}5\alpha}{\cos\alpha+\cos9\alpha+\cos5\alpha}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{2\operatorname{sen}5\alpha.\cos4\alpha+\operatorname{sen}5\alpha}{2\cos5\alpha.\cos4\alpha+\cos5\alpha}$$

A continuación factorizamos y simplificamos obteniendo: $M=\dfrac{\operatorname{sen}5\alpha(2\cos4\alpha+1)}{\cos5\alpha(2\cos4\alpha+1)}$

Luego: **$M = \tan 5\alpha$** Pero: $\alpha = 10^g = 9^o$

Finalmente: $M = \tan 45^o$ $\therefore$ **$M = 1$**

***PROBLEMAS CONDICIONALES***

**15.**-Transformando a producto, tenemos: $W=\dfrac{2\operatorname{sen}8\alpha.\cos15\alpha}{2\operatorname{sen}8\alpha.\cos6\alpha}$

Reemplazando el valor de $\alpha$: $W=\dfrac{\cos\frac{15\pi}{21}}{\cos\frac{6\pi}{21}}$

Por suplementarios: $W=\dfrac{-\cos\frac{6\pi}{21}}{\cos\frac{6\pi}{21}}$ $\therefore$ **$W = -1$**

**16.**- Se sabe que: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\iff\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+b}{c-d}$ propiedad de las proporciones.

Utilizando la propiedad anterior en el problema:

$$\frac{\cos a+\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}a+\cos b}{\cos a+\operatorname{sen}b-\operatorname{sen}a-\cos b}=\frac{k+1}{k-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{(\cos a+\cos b)+(\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b)}{(\cos a-\cos b)-(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b)}=\frac{k+1}{k-1}$$

Transformando a producto tenemos:

$$\frac{2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{-2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)-2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}=\frac{k+1}{k-1}$$

$$\frac{2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{-2sen\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[sen\left(\frac{a+b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}=\frac{k+1}{k-1}$$

Simplificando, obtenemos:

$$-\cot\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{k+1}{k-1} \quad \Rightarrow \quad \cot\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{k+1}{1-k} \quad \therefore \quad \boxed{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1-k}{1+k}}$$

**17.-** Simplificando a producto los términos de «W»:

$$W = \underbrace{\text{sen}\,4A + \text{sen}\,4B}_{\text{a producto}} + \text{sen}\,4C$$

$$W = 2\text{sen}(2A + 2B)\cos(2A - 2B) + \underbrace{\text{sen}\,4C}_{\text{doble}}$$

Pero: $2A + 2B = 2\pi - 2C \Rightarrow \text{sen}(2A + 2B) = -\,\text{sen}\,2C$

Utilizando las propiedades anteriores tenemos:

$$W = 2(-\,\text{sen}\,2C).\cos(2A - 2B) + 2\text{sen}\,2C\cos 2C$$

Efectuando y agrupando convenientemente obtenemos:

$$W = 2\,\text{sen}\,2C[\cos 2C - \cos(2A - 2B)]$$

Pero: $2C = 2\pi - (2A + 2B) \Rightarrow \cos 2C = \cos(2A + 2B)$

A continuación factorizamos la parte indicada:

$$W = 2\,\text{sen}\,2C[\underbrace{\cos(2A + 2B) - \cos(2A - 2B)}]$$

$$W = 2\text{sen}\,2C[-\,2\,\text{sen}\,(2B)\,\text{sen}\,(2A)]$$

Finalmente: $\boxed{\mathbf{W = -\,4\,sen\,2A\,.\,sen\,2B\,.\,sen\,2C}}$

**18.-** Transformando a producto: $M = \dfrac{2\text{sen}4x.\cos x}{2\cos 4x.\cos x} = \tan 4x$

Pero: $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$$

Finalmente: $$\tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} \quad \therefore \quad \boxed{\tan 4x = \frac{24}{7}}$$

**19.-** Del primer miembro de la igualdad tenemos:

$$= \frac{-2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{15x}{2}\right)}{-2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right)} = \frac{\text{sen}3\left(\frac{5x}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right)}$$

Utilizando la propiedad: sen 3α = sen α [2 cos 2α + 1] en el numerador:

$$= \frac{\text{sen}\frac{5x}{2}(2\cos 5x+1)}{\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right)} = 2\cos 5x + 1$$

Comparando, tendremos: P = 2 ; Q = 1

Finalmente: **P + Q = 3**

**20.-** Transformando a producto ambas condiciones.

$$\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = a \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \quad \ldots(1)$$

$$\cos x + \cos y = b \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = b \quad \ldots(2)$$

Al dividir las condiciones (1) entre (2) obtenemos: $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{a}{b}$

Luego: $\text{sen}(x+y) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,(x+y) = \dfrac{\frac{2a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}$

$$\therefore \quad \boxed{\text{sen}\,(x+y) = \frac{2ab}{b^2+a^2}}$$

**21.-** Como: $\frac{\text{sen}5x}{\text{sen}3x} = \frac{m}{1}$, usando proporciones: $\frac{\text{sen}5x+\text{sen}3x}{\text{sen}5x-\text{sen}3x} = \frac{m+1}{m-1}$

Transformamos a producto el numerador y el denominador del primer miembro:

$$\frac{2\text{sen}4x.\cos x}{2\cos 4x.\text{sen}x} = \frac{m+1}{m-1}$$

Finalmente: $\tan 4x \,.\, \cot x = \frac{m+1}{m-1} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\tan 4x}{\tan x} = \frac{m+1}{m-1}}$

**22.-** Del segundo miembro de la igualdad tenemos:

$$\underbrace{\cos 8x + \cos 4x}_{\text{a producto}} + \underbrace{2(1-2\,\text{sen}\,2x)}_{\text{arco doble}}$$

$$= 2\cos 6x \cos 2x + 2\,.\cos 2x = 2\cos 2x\,.\,(1 + \cos 6x)$$

Luego de factorizar y utilizar las fórmulas apropiadas tenemos:

$$= 2\cos 2x\,.\,2\cos^2 3x = 4\cos(2x)\,.\,\cos^2(3x)$$

Comparando con la expresión inicial, obtenemos:

$\Rightarrow \quad P = 4\ ;\ Q = 2\ ;\ R = 2\ ;\ S = 3 \quad \therefore \quad \boxed{(P+Q)-(R+S)=1}$

**23.-** Transformando a producto el numerador y el denominador tenemos:

$$\frac{-2\text{sen}(-13^\circ).\text{sen}(60^\circ)}{2\text{sen}(30^\circ).\cos(13^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{3}k \;\Rightarrow\; \tan 13^\circ.\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,k$$

Luego: $\tan 13^\circ = \dfrac{k}{3}\ \ldots (1)$

Hallemos la relación angular: $32^\circ + 13^\circ = 45^\circ \Rightarrow 32^\circ = 45^\circ - 13^\circ$

De donde: $\tan 32^\circ = \tan(45^\circ - 13^\circ) \Rightarrow \tan 32^\circ = \dfrac{1-\tan 13^\circ}{1+\tan 13^\circ}\ \ldots (2)$

Al reemplazar (1) en (2), tendremos: $W = \tan 32^\circ = \dfrac{1-\dfrac{k}{3}}{1+\dfrac{k}{3}} \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{3-k}{3+k}}$

**24.-** Transformando a producto:

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B - \text{sen}\,C = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{sen}\,C\ \ldots (1)$$

Como: $A + B + C = \pi \Rightarrow \text{sen}\,C = \text{sen}(A+B) = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

En (1): $\text{sen}\,A + \text{sen}\,B - \text{sen}\,C = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right).\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) - 2\,\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) =$

$$= \underbrace{2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}_{\cos\frac{C}{2}}\,.\,2\,\text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2} = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}\,.\cos\frac{C}{2}$$

Luego: $4\,\text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\cos\frac{C}{2} = M\,\text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\cos\frac{C}{2}$ $\therefore$ $\boxed{M = 4}$

25.-Colocando la expresión en términos de senos y cosenos y además transformamos a producto donde corresponde.

$$W = \frac{\dfrac{\text{sen}A}{\cos\frac{A}{2}} + \left[2\,\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right).\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right].\dfrac{\text{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{2\,\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Por condición del problema se cumple:

$$\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \text{sen}\frac{A}{2}$$

Reemplazando las equivalencias anteriores en «W» obtenemos:

$$W = \frac{\text{sen}A + 2\cos\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{A}{2}.\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right).\text{sen}\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}$$

A continuación factorizamos y simplificamos, obteniendo:

$$W = \frac{\text{sen}A\left[1 + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]}{\text{sen}A.\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

Finalmente: $W = \csc\left(\frac{B-C}{2}\right) + \cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$ $\therefore$ $\boxed{W = \cot\left(\frac{B-C}{4}\right)}$

26.- Transformando a producto la suma de senos y de cosenos tenemos:

$$2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = m \;\ldots\; (1)$$

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = n \;\ldots\; (2)$$

A continuación dividimos las condiciones (1) y (2): $\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{m}{n} \ldots (3)$

Asimismo recordamos que: $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Utilizando dicha propiedad para un arco tal como: $(x + 4)$

$$\cos(x+y) = \frac{1-\tan^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} = \frac{1-\left(\dfrac{m}{n}\right)^2}{1+\left(\dfrac{m}{n}\right)^2}$$

Finalmente al efectuar obtenemos:

$$W = \cos(x+y) = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}}$$

**27.-** Descomponiendo el numerador como sigue para luego transformar a producto, tenemos:

$$\tan\theta = \frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ + \cos 20^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2\operatorname{sen} 30^\circ . \operatorname{sen} 10^\circ + \cos 20^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}$$

A continuación transformamos a producto el numerador:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen} 10^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2\operatorname{sen} 40^\circ . \cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}$$

Finalmente: $\tan\theta = 2\cos 30^\circ = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \theta \in \text{III C}}$

**28.-** Trabajando la condición en términos de cosenos, tendremos:

$$\frac{1}{\cos(x+a)} + \frac{1}{\cos(x-a)} = 2\sec x \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x+a)+\cos(x-a)}{\cos(x+a).\cos(x-a)} = \frac{2}{\cos x}$$

Transformando a producto el numerador: $\dfrac{2\cos x . \cos a}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 a} = \dfrac{2}{\cos x}$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x \,.\, \cos a = 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 a \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}^2 a = (1-\cos a).\, 2\cos^2 x$$

A continuación efectuamos y despejamos el «$\cos^2 x$», así:

$$\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{1-\cos a} = \frac{4\operatorname{sen}^2\dfrac{a}{2}.\cos^2\dfrac{a}{2}}{2\operatorname{sen}^2\dfrac{a}{2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\cos^2 x = 2\cos^2\frac{a}{2}}$$

**29.-** Si $x = \theta$ y $x = \phi$ son las raíces de la ecuación, entonces se debe cumplir:

$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = c \ldots (1) \qquad a \operatorname{sen} \phi + b \cos \phi = c \ldots (2)$$

A continuación igualamos las condiciones (1) y (2):

$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = a \operatorname{sen} \phi + b \cos \phi \quad \Rightarrow \quad a(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \phi) = -b(\cos \theta - \cos \phi)$$

$$a\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right] = -b\left[-2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right] \Rightarrow \tan\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \frac{a}{b}$$

Luego: $\quad W = \tan\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right) = \dfrac{a}{b} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{a}{b}}$

**30.-** Del primer miembro de la igualdad tenemos:

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x$$

Efectuando como sigue: $\qquad = \operatorname{sen} 3x(2 \cos 2x + 1) = \operatorname{sen} 3x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$

Desarrollando el seno del triple, así:

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x)^2}{\operatorname{sen} x} = \frac{9\operatorname{sen}^2 x - 24\operatorname{sen}^4 x + 16\operatorname{sen}^6 x}{\operatorname{sen} x}$$

A continuación comparando la condición inicial obtenemos:

$$= \underbrace{16}_{M=16} \operatorname{sen}^5 x \underbrace{-24}_{N=-24} \operatorname{sen}^3 x \underbrace{+9}_{P=9} \operatorname{sen} x$$

Finalmente: $\quad W = 9 - (-24) - 2(16) = 1 \qquad \therefore \quad \boxed{W = 1}$

**31.-** Transformando a producto la expresión W, tenemos: $W = 2 \operatorname{sen}(x - 15^\circ) \cdot \cos(35^\circ)$

Para que W sea máximo $\quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x - 15^\circ)$ debe ser máximo.

$$\operatorname{sen}(x - 15^\circ) = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 15^\circ = 90^\circ \qquad \therefore \quad \boxed{x = 105^\circ \,;\, x \in [0 \,;\, 360^\circ]}$$

## *EXPRESIONES EQUIVALENTES*

**32.-** Colocando la expresión en términos de cosenos:

$$W = \frac{2(2\operatorname{sen} x \cos x) + 1}{\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} 2x + 1}{\cos x}$$

A continuación factorizamos el 2, logrando una suma de senos que ha de transformarse a producto.

$$W = \frac{2\left[\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\right]}{\cos x} = 2 \sec x \,.\, \left[\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right]$$

$$W = 2 \sec x \,.\, 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2x+\pi/6}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-\pi/6}{2}\right)$$

Finalmente tendremos: $\boxed{\mathbf{W = 4 \sec x . sen\left(x+\frac{\pi}{12}\right) . \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}}$

**33.**- Escribiendo «W» como sigue: W = 2 sen 40° + 2 sen 40° - $\sqrt{3}$

Pero: $\sqrt{3}$ = 2 sen 60°

A continuación agrupamos convenientemente, tal que:

$$W = 2 \text{ sen } 40° - 2(\text{sen } 60° - \text{sen } 40°) \Rightarrow W = 2 \text{ sen } 40° -2(2 \text{ sen } 10° \cos 50°)$$

Pero: cos 50° = sen 40° ; sen 10° = cos 80° (por arcos complementarios).

Escribimos la expresión como una propiedad especial del triple, así:

$$W = 2 \text{ sen } 40 [1 - 2 \text{ sen } 10°] \quad \Rightarrow \quad W = -2 \text{ sen } 40°[2 \cos 80° - 1] \quad \ldots (*)$$

$$2 \cos 2\alpha - 1 = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(es la propiedad a utilizar)}$$

Finalmente utilizamos esta propiedad en (*): $W = -2\text{sen } 40° . \frac{\cos 3(40°)}{\cos 40°}$

De donde: $W = \frac{-2\text{sen}40°\left(-\frac{1}{2}\right)}{\cos 40°}$ $\therefore$ $\boxed{\mathbf{W = \tan 40°}}$

**34.**- Escribiendo como sigue la expresión, tendremos:

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{2} + 2 \cos 20° \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2} = \frac{1}{2} + \cos 20° + \cos 20°$$

A continuación transformamos a producto los dos primeros términos, así:

$$\frac{M}{2} = \cos \underbrace{60° + \cos 20°} + \cos 20°$$

$$\frac{M}{2} = 2 \cos 40° . \cos 20° + \cos 20° \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2} = \cos 20°(2 \cos 40° + 1)$$

Pero: $$2\cos 40^\circ + 1 = \frac{\text{sen}60^\circ}{\text{sen}20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\text{sen}20^\circ}$$

Luego: $$\frac{M}{2} = \cos 20^\circ . \frac{\sqrt{3}}{2\text{sen}20^\circ} \quad \therefore \quad \boxed{M = \sqrt{3}\ .\ \cot 20^\circ}$$

**35.-** Escribiendo como sigue la expresión, tendremos:

$$W = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Pero: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } 60^\circ \ \wedge \ \frac{1}{2} = \text{sen } 30^\circ$,

Luego: $$W = 2\sqrt{3}\ \underbrace{(\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 30^\circ)}_{\text{a producto}}$$

Transformando a producto tendremos:

$$W = 2\sqrt{3}\ .\ 2\ \text{sen } 45^\circ \cos 15^\circ \ \Rightarrow\ W = 4\sqrt{3}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ .\ \cos 15^\circ \quad \therefore \quad \boxed{W = 2\sqrt{6}\ \text{sen } 75^\circ}$$

**36.-** Transformamos a producto como sigue:

$$W = 1 + \cos 2x + \cos x \ \Rightarrow\ W = 2\cos^2 x + \cos x \quad \therefore\ W = 2\cos x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)$$

Al cambiar $1/2$ por $\pi/3$ podemos transformar a producto:

$$W = 2\cos x\ \underbrace{\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{a producto}} \ \Rightarrow\ W = 2\cos x\ .\ 2\cos\left(\frac{x + \pi/3}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \pi/3}{2}\right)$$

Finalmente: $$W = 4\cos x\ .\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\ .\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

**37.-** Recordando: $$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

el doble

la mitad

$$W = 1 + \cos 14^\circ + \text{sen } 14^\circ$$

Aplicando dicha propiedad en «W», tendremos:

$$W = 2\cos^2 7^\circ + 2\ \text{sen } 7^\circ \cos 7^\circ$$

A continuación factorizamos 2 cos 7° para luego transformar a producto:

$$W = 2\cos 7^\circ(\cos 7^\circ + \operatorname{sen} 7^\circ) \quad \Rightarrow \quad W = 2\cos 7^\circ\underbrace{(\operatorname{sen} 83^\circ + \operatorname{sen} 7^\circ)}_{\text{a producto}}$$

$$W = 2\cos 7^\circ \,.\, 2\operatorname{sen}(45^\circ)\cos(38^\circ) \quad \therefore \quad \boxed{W = 2\sqrt{2}\,.\,\cos 38^\circ\,.\,\cos 7^\circ}$$

**38.-** Igualando a una constante «$k$» tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen} 5x}{a} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{b} = \frac{\operatorname{sen} x}{c} = k$$

Luego: $\operatorname{sen} 5x = ak \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = bk \Rightarrow \operatorname{sen} x = ck$

Sumando: $\underbrace{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x}_{a\,\text{producto}} + \operatorname{sen} 3x = k(a + b + c)$

De donde: $2\operatorname{sen} 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x = k(a + b + c)$

Factorizando sen $3x$: $\operatorname{sen} 3x\,[2\cos 2x + 1] = k(a + b + c)$

A continuación utilizando la proporcionalidad inicial tendremos:

$$\operatorname{sen} 3x \,.\, \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = k(a + b + c) \quad \Rightarrow \quad bk.\ \frac{bk}{ck} = k(a + b + c)$$

Finalmente simplificamos obteniendo:

$$b^2 = ac + bc + c^2 \quad \therefore \quad \boxed{b(b - c) = c(a + c)}$$

**39.-** De (1): $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen} x = m \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = m \ \ldots (3)$

De (2): $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos x = n \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = n \ \ldots (4)$

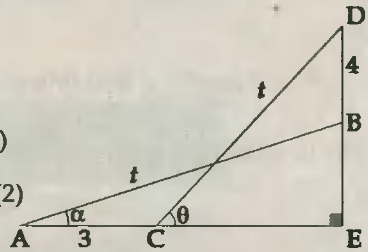
Al dividir las proposiciones (3) y (4) obtenemos:

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}.\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{2\cos\frac{\pi}{12}\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{12} = \frac{m}{n}$$

Pero: $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

Finalmente: $\boxed{m = (2 - \sqrt{3})n}$

**40.**- Sea AB = CD = $t$




En el ⊿AEB: BE = $t$ sen α ⇒ AE = $t$ cos α

En el ⊿CED: ED = $t$ sen θ ⇒ CE = $t$ cos θ

Pero AC = AE - CE ⇒ $3 = t\cos\alpha - t\cos\theta$ . . . (1)

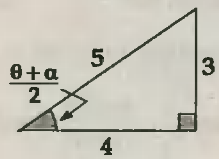
También BD = ED - BE ⇒ $4 = t\,\text{sen}\,\theta - t\,\text{sen}\,\alpha$ . . . (2)

Al dividir las proposiciones (1) y (2)

tenemos: $\dfrac{\text{sen}\theta - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \cos\theta} = \dfrac{4}{3}$

A continuación transformamos a producto tanto el numerador como el denominador, obteniendo:

$$\frac{2\text{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \cot\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

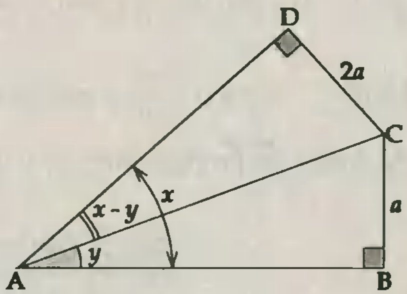



Con ayuda del triángulo rectángulo obtenemos:

$$\therefore \quad \boxed{\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) = \frac{3}{5}}$$

**41.**- Sea CB = $a$ ⇒ DC = $2a$

$m\angle$DAC = $x - y$




En el ⊿ABC: AC = $a$ . csc $y$ . . . (1)

En el ⊿ADC: AC = $2a$ . csc($x$ - $y$) . . . (2)

Al igualar las proposiciones (1) y (2), tendremos:

$a\csc y = 2a\csc(x - y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}y} = 2$

Por proporciones: $\dfrac{\text{sen}(x-y)+\text{sen}y}{\text{sen}(x-y)-\text{sen}y} = \dfrac{2+1}{2-1}$

Transformando a producto, obtenemos:

$$\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).\cos(\frac{x}{2}-y)}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2}-y).\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=3 \Rightarrow \tan\frac{x}{2}\,.\cot\left(\frac{x}{2}-y\right)=3 \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=3\,.\tan\left(\frac{x}{2}-y\right)$$

Finalmente se tiene: $W=\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}-y\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}-y\right)}{3\tan\left(\frac{x}{2}-y\right)}$

Al simplificar: $\therefore\ \boxed{W=\dfrac{1}{3}}$

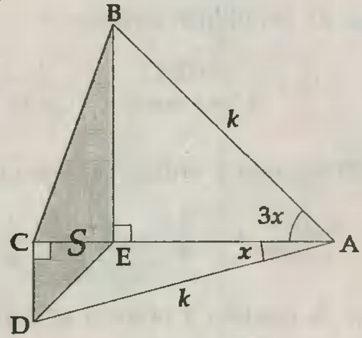
**42.-** De la figura deducimos que:

$$S=\frac{(CE)(EB)}{2}+\frac{(CE)(DC)}{2}=\frac{(CE)}{2}(EB+DC)$$

Pero: En el ◺AEB: $EA=k\,.\cos 3x \Rightarrow EB=k\operatorname{sen}3x$

En el ◺ACD: $CA=k\cos x \Rightarrow CD=k\operatorname{sen}x$

$CE=CA-EA=k(\cos x-\cos 3x)$




A continuación, tendremos:

$$S=\frac{k}{2}(\cos x-\cos 3x).[\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x].k$$

$$S=\frac{k^2}{2}[-2\operatorname{sen}(-x).\operatorname{sen}(2x)][2\operatorname{sen}2x.\cos x]$$

Efectuando apropiadamente:

$$S=\frac{k^2}{2}.2\operatorname{sen}x\cos x.\,2\operatorname{sen}^2 2x$$

$$S=k^2.\overbrace{2\operatorname{sen}x.\cos x}.\operatorname{sen}^2 2x$$

Finalmente: $\boxed{S=k^2.\operatorname{sen}^3 2x}$

# CAP. 15 Transformaciones de Producto a Sumas o Diferencias

### *SIMPLIFICACIONES*

**01.-** Se sabe que: $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$ ; $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Multiplicamos por 2 el numerador y el denominador para aplicar la primera propiedad y a continuación factorizar en el denominador convenientemente para aplicar la fórmula básica del coseno triple:

$$W = \frac{4\cos^3 x - 2\cos 2x.\cos x + 2\cos x}{2.2\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x)} \Rightarrow W = \frac{3\cos x + \cos 3x - [\cos 3x + \cos x] + 2\cos x}{4\cos x.\cos 3x}$$

Luego de simplificar obtenemos:

$$W = \frac{4\cos x}{4\cos x.\cos 3x} = \frac{1}{\cos 3x} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \sec 3x}$$

**02.-** Al efectuar y ordenar apropiadamente tenemos:

$$W = \frac{3}{2}\underbrace{(2\,\mathrm{sen}^2 3x)}_{\text{degradar}} - \frac{1}{2}\underbrace{(2\,\mathrm{sen}\,9x\,\mathrm{sen}\,3x)}_{\text{transformar}} + \underbrace{(2\,\mathrm{sen}\,3x\cos 3x)^2}_{\text{dobles}}$$

Luego de efectuar y ordenar apropiadamente, obtenemos:

$$W = \frac{3}{2}(1 - \cos 6x) - \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) + (\mathrm{sen}\,6x)^2$$

$$W = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x + \frac{1}{2}(2\,\mathrm{sen}^2 6x)$$

$$W = \frac{3}{2} - 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x + \frac{1}{2}(1 - \cos 12x)$$

Al simplificar tenemos:

$$W = \frac{3}{2} - 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 12x \Rightarrow W = 2 - 2\cos 6x = 2(1 - \cos 6x)$$

$$W = 2(2\,\mathrm{sen}^2 3x) \qquad \therefore \quad \boxed{W = 4\,\mathrm{sen}^2 3x}$$

**03.-** Al efectuar y ordenar apropiadamente, tenemos:

$$W = 2\cos 5x\cos x + 5(2\cos 3x\cos x) + 10(2\cos^2 x)$$

Luego de aplicar las transformaciones indicadas, obtenemos:

$$W = \cos 6x + \cos 4x + 5(\cos 4x + \cos 2x) + 10(1 + \cos 2x)$$

$$W = \cos 6x + \cos 4x + 5\cos 4x + 5\cos 2x + 10 + 10\cos 2x$$

$$W = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$

A continuación expresamos «W» en función del cos $2x$, así:

$$W = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 6[2\cos^2 2x - 1] + 15\cos 2x + 10$$

$$W = 4\cos^3 2x + 12\cos^2 2x + 12\cos 2x + 4$$

Al factorizar 4 notamos que la expresión entre paréntesis es el desarrollo de un binomio al cubo.

$$W = 4(\cos^3 2x + 3\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1)$$

Finalmente: $W = 4(\cos 2x + 1)^3 = 4(2\cos^2 x)^3$

$\therefore$ $\boxed{W = 32\cos^6 x}$

**04.-** Escribiendo como sigue, tendremos:

$$\frac{2\operatorname{sen} 5x\,\cancel{(2\cos x + 1)}\operatorname{sen} x}{\cancel{(2\cos 10x + 1)}} + \cos 6x$$

A continuación transformamos a una diferencia de cosenos, así:

$$\cos 4x - \cancel{\cos 6x} + \cancel{\cos 6x} = \cos 4x$$

$\therefore$ $\boxed{M = \cos 4x}$

**05.-** Multiplicando la expresión «M» por sen $x$, tendremos:

$$\operatorname{sen} x.M = 2\cos 6x.\operatorname{sen} x + 2\cos 4x.\operatorname{sen} x + 2\cos 2x.\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 7x$$

Luego de efectuar las transformaciones anteriores obtenemos:

$$M.\text{sen } x = \text{sen } 7x - \text{sen } 5x + \text{sen } 5x - \text{sen } 3x + \text{sen } 3x - \text{sen } x - \text{sen } 7x$$

Finalmente: $M(\text{sen } x) = -\text{sen } x \quad \therefore \quad \boxed{M = -1}$

**06.-** Al efectuar la expresión tenemos:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\text{sen}7x}{\text{sen}x} - \cos 2x - (\cos 6x + \cos 4x)$$

$$W = \frac{\text{sen}7x - 2\text{sen}\,x.\cos 2x - 2\text{sen}\,x.\cos 6x - 2\text{sen}\,x\cos 4x}{2\text{sen}\,x}$$

Al transformar de producto a suma o diferencia cada uno de los casos anteriores, obtenemos:

$$W = \frac{\text{sen}7x - [\text{sen}3x + \text{sen}(-x)] - [\text{sen}7x + \text{sen}(-5x)] - [\text{sen}5x + \text{sen} - 3x]}{2\text{sen}x}$$

En seguida simplificamos, de donde obtenemos:

$$W = \frac{\text{sen}7x - \text{sen}3x + \text{sen}\,x - \text{sen}7x + \text{sen}5x - \text{sen}5x + \text{sen}3x}{2\text{sen}\,x}$$

Finalmente: $W = \frac{\text{sen}x}{2\text{sen}x} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{2}}$

**07.-** Al efectuar notamos que el m.c.m. de M es: 2 cos 72°

$$M = \frac{\cos 12^\circ - 2\cos 24^\circ.\cos 72^\circ}{2\cos 72^\circ}$$

A continuación efectuamos la transformación presente:

$$M = \frac{\cos 12^\circ - \cos 96^\circ - \cos 48^\circ}{2\cos 72^\circ} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2\text{sen}\,30^\circ.\text{sen}\,18^\circ - \overbrace{\cos 96^\circ}^{-\text{sen}\,6^\circ}}{2\cos 72^\circ}$$

Luego de simplificar en el numerador obtenemos: $M = \frac{\text{sen}18^\circ + \text{sen}6^\circ}{2\cos 72^\circ}$

En seguida transformamos a producto y deducimos que $\alpha = 36^\circ$: $M = \frac{2\text{sen}12^\circ.\cos 6^\circ}{2\text{sen}18^\circ}$

Finalmente al comparar las expresiones trigonométricas:

$$\frac{\text{sen}12^\circ.\cos 6^\circ}{\text{sen}18^\circ} = \frac{\text{sen}2\alpha.\cos\alpha}{\text{sen}3\alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = 6^\circ}$$

***PROBLEMAS CONDICIONALES***

08.- Expresando W en términos de senos y cosenos, tenemos:

$$W = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Transformando a una diferencia o a una suma de cosenos tenemos:

$$W = \frac{\cos(B)-\cos(A)}{\cos(A)+\cos(B)}$$

Reemplazando el dato: $$W = \frac{\cos B - \cos B\cos C}{\cos B\cos C + \cos B}$$

Luego de factorizar apropiadamente, obtenemos:

$$W = \frac{\cos B(1-\cos C)}{\cos B(1+\cos C)} = \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \tan^2\left(\frac{C}{2}\right)}$$

09.- Expresando en términos de senos y cosenos, tenemos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos x.\cos(x+y)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}(x+y).\cos x - \operatorname{sen} y}{\cos x.\cos(x+y)}$$

A continuación efectuando la transformación en el numerador obtenemos:

$$W = \frac{2\operatorname{sen}(x+y).\cos x - 2\operatorname{sen} y}{2\cos x.\cos(x+y)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}(2x+y)+\operatorname{sen}(y)-2\operatorname{sen} y}{2\cos x.\cos(x+y)}$$

En seguida transformamos a producto el numerador:

$$W = \frac{\operatorname{sen}(2x+y)-\operatorname{sen} y}{2\cos x.\cos(x+y)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2\operatorname{sen} x.\cos(x+y)}{2\cos x.\cos(x+y)} = \tan x$$

Al reemplazar el valor de $x$ al problema tenemos:

$$W = \tan x = \tan \frac{7\pi}{60} = \tan 21^\circ = \tan(37^\circ - 16^\circ)$$

Finalmente: $$W = \frac{\tan 37^\circ - \tan 16^\circ}{1+\tan 37^\circ.\tan 16^\circ} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{7}{24}}{1+\frac{3}{4}.\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{96}}{\frac{117}{96}} \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \frac{44}{117}}$$

**10.-** Agrupando en forma conveniente tenemos:

$$W = \underbrace{\cos 6x + \cos 2x}_{\text{a producto}} + \cos 4x \quad \Rightarrow \quad W = 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x$$

$$W = \cos 4x\underbrace{[2\cos 2x + 1]}_{\text{del arco triple}} \quad \Rightarrow \quad W = \cos 4x.\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$$

A continuación transformamos el numerador a producto obteniendo:

$$W = \frac{2\operatorname{sen}3x.\cos 4x}{2\operatorname{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}7x + \operatorname{sen}(-x)}{2\operatorname{sen}x} \ \ldots (*)$$

Por dato: $\operatorname{sen} 7x = 2 \operatorname{sen} x$, al reemplazarlo en (*), obtenemos:

$$W = \frac{2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x} = \frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{2}}$$

**11.-** Sabemos que: $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x.\cos y}$

Como: $\tan(\alpha + \theta) + \tan(\alpha - \theta) = 2$

Entonces: $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos(\alpha+\theta).\cos(\alpha-\theta)} = 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\alpha = 2\cos(\alpha + \theta).\cos(\alpha - \theta)$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\alpha - \cos 2\alpha = \cos 2\theta$

Elevando al cuadrado: $\operatorname{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2 \operatorname{sen} 2\alpha. \cos 2\alpha = \cos^2 2\theta$

Aplicando convenientemente propiedades

$$1 - \operatorname{sen} 4\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 2\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 4\alpha - \operatorname{sen}^2 2\theta = 0 \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$$

**12.-** Del dato: $2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$

Degradando tenemos: $2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 1 + \cos A$

Efectuando la transformación de producto a diferencia:

$$\cos(B - C) - \cos(B + C) = 1 + \cos A \quad \ldots (1)$$

Pero: $\cos(B + C) = -\cos A$

Luego en (1) obtenemos: $\cos(B - C) + \cos A = 1 + \cos A$

Finalmente en un triángulo se cumple que: $\cos(B - C) = 1 \Rightarrow B - C = 0$

Por lo tanto **el triángulo es isósceles.**

**13.-** Del primer miembro de la igualdad tenemos:

$$W = \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}}{\cos\frac{6\pi}{7}} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

Pero: $\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ . . . (arcos suplementarios)

Efectuando como sigue, tenemos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\cos\frac{6\pi}{7}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\cos\frac{6\pi}{7}}$$

Transformando a producto como sigue: $W = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left[2\cos\frac{5\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right]}{\cos\frac{6\pi}{7}}$

Pero: $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$ ; $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$ (arcos suplementarios)

Utilizando las igualdades anteriores, obtenemos:

$$W = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left[\frac{2\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\cos\frac{6\pi}{7}} + 1\right] = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left[2\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right] = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} = \operatorname{sen}(W - 1)\frac{\pi}{7}$$

Finalmente: $W - 1 = 3$ $\therefore$ $\boxed{W = 4}$

**14.-** Efectuando como sigue, tenemos:

$$W = \operatorname{sen} 3x.\cos 3x - 2\operatorname{sen} x\cos 3x + 2\operatorname{sen} 3x.\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x$$

A continuación transformamos los productos indicados:

$$W = \frac{1}{2}(2\operatorname{sen} 3x.\cos 3x) - [\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen}(-2x)] + [\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x] - 2(2\operatorname{sen} x\cos x)$$

Al simplificar obtenemos: $W = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x - 2 . \operatorname{sen} 2x$

$$W = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 6x$$

Por ángulo doble se sabe que: $\text{sen } 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\tan 3x}{1+\tan^2 3x}$

Finalmente: $W = \dfrac{2}{1+2^2} = \dfrac{2}{5} \quad \therefore \quad \boxed{W = \dfrac{2}{5}}$

**15.-** Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se cumple que: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a+d}{c-d}$

Aplicando dicha propiedad al problema obtenemos:

$$\frac{\tan x + \tan\alpha}{\tan x - \tan\alpha} = \frac{1+\cos^2 x + 1 + \text{sen}^2 x}{1+\cos^2 x - (1+\text{sen}^2 x)}$$

Como: $\tan x + \tan y = \dfrac{\text{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}$ en el problema:

$$\frac{\dfrac{\text{sen}(x+\alpha)}{\cos x . \cos\alpha}}{\dfrac{\text{sen}(x-\alpha)}{\cos x . \cos\alpha}} = \frac{3}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}$$

$$\frac{\text{sen}(x+\alpha)}{\text{sen}(x-\alpha)} = \frac{3}{\cos 2x}$$

A continuación efectuamos como sigue: $\quad \text{sen } (x+\alpha) . \cos 2x = 3. \text{ sen}(x-\alpha)$

$2 \text{ sen}(x+\alpha) . \cos 2x = 6 \text{ sen}(x-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(3x+\alpha) + \text{sen}(\alpha - x) = 6 \text{ sen}(x-\alpha)$

$\text{sen}(3x+\alpha) - \text{sen}(x-\alpha) = 6 \text{ sen}(x-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(3x+\alpha) = 7 \text{ sen}(x-\alpha)$

Finalmente: $\quad \text{sen } (3x+\alpha) . \csc (x-\alpha) = \boxed{7}$

**16.-** Multiplicando por (2) ambos miembros:

$$2W = 2 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen}^2 y + 2 \text{ sen}^2 z$$

$$\Rightarrow \quad 2W = 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y + 1 - \cos 2z$$

A continuación transformamos a producto como se indica

$$2W = 3 - [\underbrace{\cos 2x + \cos 2y}_{\text{a producto}} + \underbrace{\cos 2z}_{\text{doble}}]$$

$$\Rightarrow \quad 2W = 3 - [2\cos(x+y) . \cos(x-y) + 2\cos^2 z - 1]$$

Pero: $\quad \cos(x+y) = \cos(2\pi - z) = \cos z$

En seguida agrupamos convenientemente, para transformar a producto:

$$2W = 4 - 2\cos z[\cos(x-y) + \cos z] \quad \Rightarrow \quad 2W = 4 - 2\cos z[\underbrace{\cos(x-y)+\cos(x+y)}_{\text{a producto}}]$$

$$W = 2 - \cos z[2\cos x \,.\, \cos(-y)]$$

Finalmente al efectuar y reemplazar la condición inicial obtenemos:

$$W = 2 - 2\cos x \cos y \,.\, \cos z \qquad \therefore \qquad \boxed{W = 2(1 - m)}$$

**17.-** En el dato, transformamos a producto y por arco doble tenemos:

$$\frac{2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = 3$$

Además sabemos que: $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$

Aplicando la propiedad anterior al problema, tendremos:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \text{sen}\frac{x}{2}.\text{sen}\frac{y}{2} = 3\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\text{sen}\frac{y}{2}\right)$$

Al efectuar obtenemos: $4\,\text{sen}\dfrac{x}{2}\,\text{sen}\dfrac{y}{2} = 2\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}$

Finalmente: $\tan\dfrac{x}{2}\,.\,\tan\dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{P.\,Q = \dfrac{1}{2}}$

**18.-** Del primer miembro de la igualdad tenemos:

$$32\,\text{sen}^6 x = 2(4\,\text{sen}^3 x)^2 \quad \Rightarrow \quad 32\,\text{sen}^6 x = 2(3\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x)^2$$

Al efectuar el binomio anterior obtenemos:

$$32\,\text{sen}^6 x = 2(9\,\text{sen}^2 x - 6\,\text{sen}\,3x.\text{sen}\,x + \text{sen}^2 3x)$$

Agrupando convenientemente, tendremos:

$$32\,\text{sen}^6 x = 9(2\,\text{sen}^2 x) - 6(2\,\text{sen}\,3x\,.\,\text{sen}\,x) + 2\,\text{sen}^2 3x$$

$$32\,\text{sen}^6 x = 9 - 9\cos 2x - 6\cos 2x + 6\cos 4x + 1 - \cos 6x$$

Al efectuar y simplificar nos queda:

$$32\,\text{sen}^6 x = 10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x$$

Identificando, tenemos: $M = 10\,;\, N = -15\,;\, P = 6\,;\, Q = -1 \qquad \therefore \quad \boxed{M + N + P + Q = 0}$

**19.-** Del segundo miembro de la igualdad tenemos:

$$\text{sen } x\,(8\text{ sen}^4 x) = \text{sen } x(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

$$3\text{ sen } x - 2\,\underbrace{(2\,\text{sen}\,x\cos 2x)}_{\text{sen}\,3x\,-\,\text{sen}\,x} + \frac{1}{2}\,\underbrace{(2\,\text{sen}\,x\cos 4x)}_{\text{sen}\,5x\,-\,\text{sen}\,3x}$$

Efectuando tendremos: $\quad 5\text{ sen } x - \dfrac{5}{2}\text{ sen } 3x + \dfrac{1}{2}\text{ sen } 5x$

Luego identificando se tiene: $\quad M = 5\,;\, N = -\dfrac{5}{2}\,;\, P = \dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{M + N + P = 3}}$

**20.-** Expresando «W» en términos de cosenos, obtenemos:

$$W = \frac{2\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} - \sqrt{3} = \frac{2\cos 10^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

Pero: $\quad \sqrt{3} = 2\text{ sen } 60^\circ \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{2\cos 10^\circ - 2\text{sen}60^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

Al efectuar la transformación anterior, tendremos:

$$W = \frac{2\cos 10^\circ - [\text{sen}80^\circ + \text{sen}40^\circ]}{\cos 20^\circ}$$

Pero $\cos 10^\circ = \text{sen } 80^\circ$ (arco complementario)

Finalmente transformamos a producto el numerador:

$$W = \frac{\text{sen}80^\circ - \text{sen}40^\circ}{\cos 20^\circ} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2\text{sen}20^\circ\cos 60^\circ}{\cos 20^\circ} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W = \tan 20^\circ}}$$

**21.-** Del segundo miembro de la igualdad tenemos:

$$= \frac{1}{2}[\,2\cos 16^\circ\cos 13^\circ - 2\cos 59^\circ\cos 20^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 29^\circ + \cos 3^\circ - \cos 79^\circ - \cos 39^\circ]$$

$$= -\frac{1}{2}[\underbrace{\cos 79^\circ - \cos 29^\circ}_{\text{a producto}} + \underbrace{\cos 39^\circ - \cos 3^\circ}_{\text{a producto}}]$$

Efectuando como se indicó, obtenemos:

$$= -\frac{1}{2}[-2 \text{ sen } 25° \text{ sen } 54° + (-2 \text{ sen } 18° \text{ sen } 21°)]$$

$$= \underbrace{\text{sen}54°}_{P} \cdot \text{sen } 25° + \underbrace{\text{sen}18°}_{-Q} \cdot \text{sen } 21°$$

$$\Rightarrow \quad P = \text{sen } 54° \qquad Q = -\text{ sen } 18°$$

Finalmente al comparar obtenemos:

$$P + Q = \text{sen } 54° - \text{sen } 18° = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{P + Q = \frac{1}{2}}}$$

**22.-** Escribiendo apropiadamente para realizar la transformación presente, obteniendo:

$$W = 2(2 \cos 3x \cdot \cos x) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad W = 2[\cos 4x + \cos 2x] + 1$$

A continuación agrupamos convenientemente logrando:

$$W = 2 \cos 4x + \underbrace{2 \cos 2x + 1}_{\text{triple}} \quad \Rightarrow \quad W = 2 \cos 4x + \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2\text{sen}x.\cos 4x + \text{sen}3x}{\text{sen}x}$$

Luego de efectuar la transformación anterior obteniendo:

$$W = \frac{\text{sen}5x + \text{sen}(-3x) + \text{sen}3x}{\text{sen}x} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W = sen\ 5x.csc\ x}}$$

### *PROBLEMAS DE CÁLCULO NUMÉRICO*

**23.-** Se sabe que: $\sqrt{2} = 2 \text{ sen } 45°$

Aplicando dicha equivalencia en el problema obteniendo:

$$W = \frac{\cos 19°}{\text{sen}19°} - \frac{2\text{sen}45°.\text{sen}26°}{\text{sen}19°}$$

A continuación al efectuar la transformación anterior tendremos:

$$W = \frac{\cos 19° - (\cos 19° - \cos 71°)}{\text{sen}19°}$$

Finalmente: $$W = \frac{\cos 71°}{\text{sen}19°} = 1 \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W = 1}}$$

**24.**- Al efectuar la transformación inicial, tendremos:

$$M = \frac{2\,\text{sen}\,40°(\text{sen}\,50° - \text{sen}\,50° + \text{sen}\,30°)}{2\,\text{sen}\,30°.\cos 50°}$$

Luego de simplificar, obtenemos:

$$M = \frac{2\text{sen}40°.\text{sen}30°}{2\text{sen}30°.\cos 50°} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\text{sen}40°}{\cos 50°}$$

Pero: $\quad \text{sen}\ 40° = \cos\ 50° \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**25.**- Escribiendo como sigue la expresión, tendremos:

$$M = \sqrt{\frac{1}{2}(2\,\text{sen}\,15x.\text{sen}\,6x + \cos 21x)}$$

A continuación efectuamos la transformación anterior obteniendo:

$$M = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 9x - \cos 21x + \cos 21x)} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{\frac{1}{2}.\cos 9x}$$

Pero: $\quad x = \frac{\pi}{27} \quad \Rightarrow \quad 9x = \frac{\pi}{3}$

Finalmente reemplazando el valor numérico del cos $9x$ en la expresión, logramos:

$$M = \sqrt{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{2}}$$

**26.**- Escribiendo la expresión en términos de senos y cosenos obtenemos:

$$M = \frac{1 - 2(2\text{sen}70°.\cos 80°)}{2\cos 80°} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1 - 2(\text{sen}150° - \text{sen}10°)}{2\cos 80°}$$

$$M = \frac{1 - 2\overbrace{\text{sen}150°}^{1/2} + 2\text{sen}10°}{2\cos 80°} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2\text{sen}10°}{2\cos 80°}$$

Pero: $\quad \text{sen}\ 10° = \cos\ 80° \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**27.**- Reduciendo al primer cuadrante tenemos:

$$\text{sen}\ 610° = \text{sen}(360° + 250°) = \text{sen}\ 250°\ \text{sen}\ 610°$$

$$\text{sen}\ 610° = \text{sen}\ (180° + 70°) = -\text{sen}\ 70°$$

$$\text{sen } 130° = \text{sen}(180° - 50°) = \text{sen } 50°$$

$$\text{sen } 430° = \text{sen}(360° + 70°) = \text{sen } 70°$$

$$\cos 280° = \cos(360° - 80°) = \cos 80°$$

Al reemplazar las reducciones anteriores tendremos:

$$2W = 2 \text{ sen } 50°.\text{sen } 10° - 2 \text{ sen } 70°.\text{sen } 50° - 2 \text{ sen } 70° \cos 80°$$

$$2 = \cos 40° - \cos 60° - [\cos 20° - \cos 120°] - [\text{sen } 150° + \text{sen}(-10°)]$$

A continuación simplificando términos, obtenemos:

$$2W = \cos 40° - \cos 60° - \cos 20° + \cos 120° - \text{sen } 30° + \text{sen } 10°$$

$$2W = \underbrace{\cos 40° - \cos 20°}_{\text{a producto}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \text{sen } 10°$$

Luego de simplificar obtenemos: $2W = -2 \text{ sen } 10°.\text{sen } 30° + \left(-\frac{3}{2}\right) + \text{sen } 10°$

Finalmente: $2W = -\text{sen } 10° + \left(-\frac{3}{2}\right) + \text{sen } 10° \quad \therefore \quad \boxed{W = -\frac{3}{4}}$

**28.-** Efectuando como sigue: $M = 3 \cos 4x + 2(2 \text{ sen } 3x \,.\, \text{sen } x)$

$$M = 3 \cos 4x + 2(\cos 2x - \cos 4x) \Rightarrow M = \cos 4x + 2 \cos 2x$$

A continuación expresamos «M» en términos del $\cos 2x$, así:

$$M = 2 \cos^2 2x - 1 + 2 \cos 2x \Rightarrow M = 2(\cos 2x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$$

Utilizando la siguiente igualdad: $2\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(\cos 2x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$

$$M \geq -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad \boxed{M_{\text{mínimo}} = -\frac{3}{2}}$$

**29.-** Se sabe que: $\sqrt{3} = 2 \text{ sen } 60°$

Luego en el problema: $\tan x = \dfrac{2\text{sen}60°.\cos 20° - \text{sen}40°}{1 + \text{sen}10°}$

Transformando a producto tanto numerador como denominador:

$$\tan x = \frac{\text{sen}80°+\text{sen}40°-\text{sen}40°}{1+\cos 80°} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{2\text{sen}40°\cos 40°}{2\cos^2 40°} = \frac{\text{sen}40°}{\cos 40°}$$

Simplificando obtenemos: $\tan x = \tan 40°$ $\therefore$ **Un valor de $x$ será 40°**

**30.-** Escribiendo como sigue, tendremos:

$$\frac{(1-2\text{sen}^2 B)-(1-2\text{sen}^2 A)}{2} = \frac{2\text{sen}^2 A - 2\text{sen}^2 B}{2}$$

Luego, por ángulo doble recordamos que: $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$ así:

$$\frac{(1-2\text{sen}^2 B)-(1-2\text{sen}^2 A)}{2} = \frac{2\text{sen}^2 A - 2\text{sen}^2 B}{2}$$

$$\therefore \qquad \text{sen}(A+B)\,\text{sen}(A-B) = \boxed{\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 B}$$

**31.-** Multiplicando numerador y denominador por 2 para luego aplicar las propiedades de transformación de productos a sumas, obtenemos:

$$= \frac{2\,\text{sen}\,2a.\text{sen}\,a + 2\,\text{sen}\,4a.\text{sen}\,a + 2\,\text{sen}\,7a.\text{sen}\,2a}{2\,\text{sen}\,a.\cos 2a + 2\,\text{sen}\,2a.\cos 5a + 2\,\text{sen}\,a.\cos 8a}$$

$$= \frac{\cos a - \cos 3a + \cos 3a - \cos 5a + \cos 5a - \cos 9a}{\text{sen}\,3a - \text{sen}\,a + \text{sen}\,7a - \text{sen}\,3a + \text{sen}\,9a - \text{sen}\,7a}$$

Luego de simplificar la expresión anterior tendremos:

$$= \frac{\cos a - \cos 9a}{\text{sen}\,9a - \text{sen}\,a} = \frac{2\,\text{sen}\,5a.\cancel{\text{sen}\,4a}}{2\,\cancel{\text{sen}\,4a}.\cos 5a} = \boxed{\tan 5a}$$

**32.-** Efectuando como sigue, tendremos:

$$\frac{\text{sen}\,7a - 2\cos 2a.\text{sen}\,a - 2\cos 4a.\text{sen}\,a - 2\cos 6a.\text{sen}\,a}{\text{sen}\,a}$$

A continuación utilizamos convenientemente las fórmulas de transformación de productos a suma o diferencia, obteniéndose:

$$\frac{\text{sen}\,7a - (\text{sen}\,3a - \text{sen}\,a) - (\text{sen}\,5a - \text{sen}\,3a) - (\text{sen}\,7a - \text{sen}\,5a)}{\text{sen}\,a}$$

$$\frac{\text{sen}\,7a - \text{sen}\,3a + \text{sen}\,a - \text{sen}\,5a + \text{sen}\,3a - \text{sen}\,7a + \text{sen}\,5a}{\text{sen}\,a}$$

Finalmente al simplificar, deducimos: $\boxed{\dfrac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,a} = 1}$

**33.-** Ordenando como sigue, tendremos: $\cos 6° \,.\, \cos 66° \,.\, \cos 42° \,.\, \cos 78°$

A continuación multiplicamos y dividimos por 2 para poder utilizar la fórmula siguiente:

$$= \frac{2\cos 6°.\cos 66°.2\cos 42°.\cos 78°}{2.2} = \frac{(\cos 72° + \cos 60°)(\cos 120° + \cos 36°)}{4}$$

Finalmente, al reemplazar los valores numéricos respectivos, obtendremos:

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}{4} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{4}{16}}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

**34.-** Agrupando como sigue, obtendremos:

$$\operatorname{sen} 6° \,(\operatorname{sen} 54° \,.\, \operatorname{sen} 60°) = \operatorname{sen} 6° \,.\, \frac{2\operatorname{sen} 54°.\operatorname{sen} 66°}{2}$$

Se ha multiplicado y dividido por 2 para poder transformar el numerador a una diferencia de cosenos, donde luego de multiplicar nos queda:

$$\frac{\operatorname{sen} 6° \,(\cos 12° - \cos 120°)}{2} = \frac{\operatorname{sen} 6°.\cos 12° - \operatorname{sen} 6°.\cos 120°}{2}$$

Una vez más multiplicamos y dividimos por 2 en este caso para realizar una transformación de producto a suma de senos:

$$\frac{2\operatorname{sen} 6°.\cos 12° - 2\operatorname{sen} 6°.\cos 120°}{4} = \frac{\operatorname{sen} 18° - \operatorname{sen} 6° - 2\operatorname{sen} 6°\left(-\frac{1}{2}\right)}{4}$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} 6°.\ \operatorname{sen} 54°.\ \operatorname{sen} 66° = \frac{\operatorname{sen} 18° - \cancel{\operatorname{sen} 6°} + \cancel{\operatorname{sen} 6°}}{4} = \boxed{\frac{\operatorname{sen} 18°}{4}}$$

**35.-** Multiplicando y dividiendo por 2, obtendremos:

$$\frac{2\operatorname{sen} 40°.\operatorname{sen} 80° + 2\operatorname{sen} 80°.\operatorname{sen} 160° + 2\operatorname{sen} 160°.\operatorname{sen} 320°}{2}$$

A continuación aplicamos en cada sumando la fórmula de transformación del producto a una diferencia de cosenos, obteniéndose:

$$= \frac{\cos 40° - \cos 120° + \cos 80° - \cos 240° + \cos 160° - \cos 480°}{2}$$

En seguida transformando a producto como sigue, deducimos:

$$= \frac{2\cos 60°.\cos 20° - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos 20° - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\cancel{\cos 20°} + \frac{3}{2} - \cancel{\cos 20°}}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

**36.-** Efectuando como sigue, se obtendrá: $\dfrac{\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 4x}$

A continuación aplicando la misma estrategia de los dos últimos problemas, tendremos:

$$\frac{2\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 4x - 2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 4x} = \frac{\cos 3x - \cos 5x - (\cos x - \cos 5x)}{2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 4x}$$

Luego de simplificar, se tendrá: $\dfrac{\cos 3x - \cos x}{2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 4x}$

Factorizando el numerador y transformando la diferencia de cosenos a un producto de senos, se obtiene:

$$\frac{-2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 4x} = \boxed{-\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 4x}}$$

**37.-** Utilizando la siguiente fórmula especial de transformación:

$$\operatorname{sen} a + \cos a = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(a + 45°)$$

Ahora la expresión dada tendrá la siguiente forma:

$$\cos b\ .\ \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(\underbrace{a + 45°}_{15° + b}) = \sqrt{2}\ \cos b\ .\ \operatorname{sen}(b + 60°)$$

Multiplicamos y dividimos por 2 para utilizar la fórmula de transformación de producto a suma de senos:

$$\frac{\sqrt{2}.2\operatorname{sen}(b+60°)\cos b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \{\operatorname{sen}(2b + 60°) + \operatorname{sen} 60°\}$$

Finalmente desarrollamos el ángulo compuesto tal como sigue:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\operatorname{sen} 2b\ .\ \cos 60° + \cos 2b\ .\ \operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 60°)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen} 2b.\frac{1}{2} + \cos 2b.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \cos b\ (\operatorname{sen} a + \cos a) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\ (\operatorname{sen} 2b + \sqrt{3}\ \cos 2b + \sqrt{3}\,)}$$

38.- Factorizando: 2 sen θ: $N = 2\text{sen}\,\theta(2\text{sen}\,6\theta \cdot \text{sen}\,4\theta + 1)$

Por transformación a suma: $N = 2\text{sen}\,\theta[\cos 2\theta - \cos 10 \cdot \theta + 1]$ ... (i)

Según dato: $\theta = \frac{\pi}{30} = 6°$

Reemplazando en (i): $N = 2\text{sen}\,6°\left[\cos 12° - \frac{1}{2} + 1\right]$

pues: $\cos 60° = \frac{1}{2}$

Efectuando: $N = \text{sen}\,6°[2\cos 12° + 1]$

Reconociendo: $\text{sen}\,x(2\cos 2x + 1) = \text{sen}\,3x$

Se tendrá: $N = \text{sen}\,3(6°) = \text{sen}18°$ $\therefore$ $\boxed{N = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

39.- Efectuando como sigue tendremos: $\sqrt{\text{sen}\,x.\text{sen}\,3x + \text{sen}^2 x}$

A continuación multiplicamos y dividimos por 2 así: $\sqrt{\frac{2\,\text{sen}\,x.\text{sen}\,3x + 2\text{sen}^2 x}{2}}$

Al transformar de producto a suma o diferencia tendremos:

$$\sqrt{\frac{\cos 2x - \cos 4x + 1 - \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}$$

Pero: $1 - \cos 4x = 2\,\text{sen}^2 2x$

Finalmente: $\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\text{sen}^2 2x}{\cancel{2}}} = \boxed{|\text{sen}\,2x|}$

40.- Utilizando la transformación a producto de una suma o diferencia, tendremos:

$$16\underbrace{\left(2\,\text{sen}\frac{3\theta}{2}\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)}_{\cos\theta - \cos 2\theta} = 16(\cos\theta - \cos 2\theta)$$

A continuación, calculamos el valor correspondiente del «cos 2θ», así:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \cancel{2}.\frac{9}{\cancel{16}_{8}} - 1 = \frac{9}{8} - 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{8}$$

Finalmente: $32\,\text{sen}\frac{3\theta}{2}.\text{sen}\frac{\theta}{2} = 16\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \cancel{16}\left(\frac{6-1}{\cancel{8}}\right) = 2(5) = 10$

$$\therefore \quad 32\,\text{sen}\frac{3\theta}{2}.\text{sen}\frac{\theta}{2} = \boxed{10}$$


***SUMATORIAS***

01.- De la expresión dada se pueden identificar los siguientes elementos:

P = Primer ángulo = $x$ U = último ángulo = $35x$

$r$ = razón de la progresión aritmética = $2x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{r}{2} = x$

$n$ = # de términos de la P.A. $\dfrac{\text{U-P}}{r} + 1$ $\Rightarrow$ $n = \dfrac{35x - x}{2x} + 1 = 18$

Aplicando la fórmula de la suma de senos para arcos en P. A. tendremos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}\left(n\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\text{P+V}}{2}\right) \Rightarrow W = \frac{\operatorname{sen}18x}{\operatorname{sen}x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+35x}{2}\right)$$

$$W = \frac{\operatorname{sen}18x . \operatorname{sen}18x}{\operatorname{sen}x} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \operatorname{sen}^2 18x \cdot \csc x}$$

02.- Identificando los elementos básicos de la serie dada, se tiene que:

P = Primer ángulo = $x$ U = último ángulo = $45x$

$r$ = razón de la progresión aritmética = $2x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{r}{2} = x$

$n$ = # de términos de la P.A. $\dfrac{\text{U-P}}{r} + 1$ $\Rightarrow$ $n = \dfrac{45x - x}{2x} + 1 = 23$

Aplicando la propiedad de suma de cosenos para arcos en P.A. tendremos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\text{P+U}}{2}\right) \Rightarrow W = \frac{\operatorname{sen}(23x)}{\operatorname{sen}x} \cdot \cos 23x$$

$$W = \frac{2\text{sen}23x.\cos 23x}{2\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\text{sen}46x}{2\text{sen}x} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{2}\,.\,\text{sen }46x\,.\,\csc x}$$

**03.-** Procediendo como en los ejercicios anteriores, podemos identificar que:

P = Primer ángulo = 2° U = último ángulo = 540°

$r$ = razón de la progresión aritmética = 2° $\Rightarrow \quad \frac{r}{2} = 1°$

$n$ = # de términos de la P.A. $\frac{\text{U-P}}{r} + 1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{540°-2°}{2°} + 1 = 270°$

Aplicando la fórmula de suma de senos para arcos en P.A. tendremos:

$$W = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\,.\,\text{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\text{sen}270°}{\text{sen}1°}\,.\,\text{sen }271°$$

Pero: sen 270° = - 1 $\Rightarrow$ sen 271° = sen(270° + 1) = - cos 1°

$$\Rightarrow \quad W = \frac{(-1)(-\cos 1°)}{\text{sen}1°} \quad \therefore \quad \boxed{W = \cot 1°}$$

**04.-** En la expresión dada identificamos que:

P = Primer ángulo = $\frac{\pi}{15}$ $\wedge$ U = último ángulo = $33\frac{\pi}{15}$

$r$ = razón de la progresión aritmética = $\frac{4\pi}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{2} = \frac{2\pi}{15}$

$n$ = # de términos de la P.A. $\frac{\text{U-P}}{r} + 1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{33\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{15}}{\frac{4\pi}{15}} + 1 = 9$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\,.\,\text{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\text{sen}\left(\frac{18\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\,.\,\text{sen}\left(\frac{17\pi}{15}\right)$$

Pero: $\text{sen}\frac{18\pi}{15} = \text{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{15}\right) = -\,\text{sen}\frac{3\pi}{15}$

También: $\operatorname{sen}\dfrac{17\pi}{15} = \operatorname{sen}\left(\pi + \dfrac{2\pi}{15}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{15}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\left(-\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{15}\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{15}} \cdot \left(-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{15}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \quad \Rightarrow \quad W = \operatorname{sen} 36^\circ$$

$$\therefore \quad \boxed{W = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

**05.-** Analizando los términos de la expresión dada se puede reconocer que:

$$\operatorname{sen}\frac{12\pi}{13} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{13}$$

Asimismo: $\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{13} = \operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{13}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{13}$

También: $\operatorname{sen}\dfrac{10\pi}{13} = \operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{3\pi}{13}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{13}$

Y así sucesivamente, por arcos suplementarios, se puede establecer que:

$$W = 13\left[\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{13}}_{\substack{\text{primer}\\ \text{ángulo P}}} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{13} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{13} + \ldots + \underbrace{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{13}}_{\substack{\text{último}\\ \text{ángulo U}}}\right]$$

De donde reconocemos que:

$r$ = razón de la progresión aritmética = $\dfrac{\pi}{13}$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{r}{2} = \dfrac{\pi}{26}$

$$W = 13 \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{r}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W = 13 \cdot \frac{\operatorname{sen}\dfrac{6\pi}{26}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{26}} \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{26}$$

Pero: $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{26} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{6\pi}{26}\right) = \cos\dfrac{6\pi}{26}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{13}{2}\cdot\frac{2\text{sen}\frac{6\pi}{26}\cos\frac{6\pi}{26}}{\text{sen}\frac{\pi}{26}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{\text{sen}\frac{12\pi}{26}}{\text{sen}\frac{\pi}{26}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{13}{2}\,\frac{\cos\frac{\pi}{26}}{\text{sen}\frac{\pi}{26}}$$

Pero: $\text{sen}\frac{12\pi}{26} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{26}\right) = \cos\frac{\pi}{26} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{13}{2}\,\frac{\cancel{\cos\frac{\pi}{26}}}{\cancel{\text{sen}\frac{\pi}{26}}}$

$$\therefore \quad \boxed{W = \frac{13}{2}\cot\frac{\pi}{26}}$$

**06.-** Multiplicando por 2 a ambos miembros de la expresión dada, se tendrá:

$$2M = 2\cos^2\frac{\pi}{n} + 2\cos^2\frac{3\pi}{n} + 2\cos^2\frac{5\pi}{n} + \ldots + 2\cos^2(2n-1)\frac{\pi}{n}$$

«Degradando»: $2M = n + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cos\frac{10\pi}{n} + \ldots + \cos 2(2n-1)\frac{\pi}{n}$

Usando la serie del coseno: $2M = n + \dfrac{\text{sen}\frac{4\pi n}{2n}}{\text{sen}\frac{4\pi}{2n}}\cdot\cos\left(\dfrac{\frac{2\pi}{n}+2(2n-1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)$

$$2M = n + \frac{\text{sen}2\pi}{\cancel{\text{sen}\frac{2\pi}{n}}}\cdot\cancel{\cos(2\pi)} \quad \Rightarrow \quad 2M = n \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{n}{2}}$$

**07.-** Aplicando la misma estrategia del problema anterior, multiplicamos por 2 con lo cual cada término adquiere una forma más adecuada para efectuar transformaciones:

$$2M = 2\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}$$

Transformando los productos a suma, tendremos:

$$2M = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7}$$

De donde podemos reconocer que: $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{10\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}$

$$\Rightarrow \quad 2M = \underbrace{2(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7})}_{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad \boxed{M = -\frac{1}{2}}$$

08.- La expresión será fácil de transformar si multiplicamos por 2 a ambos miembros:

$$2M = 2\,\text{sen}^2\frac{\pi}{7} + 2\,\text{sen}^2\frac{2\pi}{7} + 2\,\text{sen}^2\frac{3\pi}{7}$$

Haciendo una transformación para reducir los grados, tendremos:

$$2M = 1 - \cos\frac{2\pi}{7} + 1 - \cos\frac{4\pi}{7} + 1 - \cos\frac{6\pi}{7}$$

$$2M = 3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

De aquí reconocemos que: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ (Propiedad)

$$\Rightarrow \quad 2M = 3 + \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{7}{4}}$$

09.- Aplicando la identidad: $8\,\text{sen}^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$ ; tendremos:

$$8W = 3 - 4\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + 3 - 4\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + 3 - 4\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$$

$$8W = 9 - 4\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)} + \underbrace{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}}$$

$$8W = 9 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 8W = 9 + \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{21}{16}}$$

10.- Transformaremos cada término de la expresión dada para aplicar la serie telescópica. Empecemos por el último término, que se constituye en el término general de la serie:

$$\sec n\alpha.\sec(n+1)\alpha = \frac{1}{\cos n\alpha.\cos(n+1)\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha\cos n\alpha\cos(n+1)\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \sec n\alpha.\sec(n+1)\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}\{\tan(n+1)\alpha - \tan n\alpha\} = \frac{\tan(n+1)\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan n\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \sec n\alpha.\sec(n+1)\alpha = \frac{\tan(n+1)\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan n\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

Finalmente dando valores a $n$, en la expresión obtenida, la serie tendrá la forma:

$$N = \left( \frac{\tan 2\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan\alpha}{\text{sen}\alpha} \right) + \left( \frac{\tan 3\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan 2\alpha}{\text{sen}\alpha} \right) + \left( \frac{\tan(n+1)\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan n\alpha}{\text{sen}\alpha} \right) + \ldots$$

Donde luego de simplificar, se obtiene: $\boxed{\mathbf{N = \frac{\tan(n+1)\alpha}{\text{sen}\alpha} - \frac{\tan n\alpha}{\text{sen}\alpha}}}$

**11.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar las expresiones dadas empleando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \cot\alpha - 2\cot 2\alpha$$

Aplicando dicha identidad a la serie, tendremos:

$$\tan\frac{x}{2} = \cot\frac{x}{2} - 2\cot x$$

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2^2} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2^2} - \cot\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{x}{2^3} - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{x}{2^{n-2}}$$

Finalmente sumamos miembro a miembro: $\boxed{\mathbf{R = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^n} - 2\cot x}}$

**12.-** Se tiene que: $W = \underbrace{\text{sen}\frac{4\pi}{7} + \text{sen}\frac{2\pi}{7}}_{\text{a producto}} - \underbrace{\text{sen}\frac{6\pi}{7}}_{\text{arco doble}}$

Luego de las transformaciones se obtiene:

$$W = 2\,\text{sen}\frac{3\pi}{7} \,.\, \cos\frac{\pi}{7} - 2\,\text{sen}\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad W = -2\,\text{sen}\frac{3\pi}{7}\underbrace{[\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}]}_{\text{a producto}}$$

$$W = -2\,\text{sen}\frac{3\pi}{7}\,[-2\,\text{sen}\frac{\pi}{7} \,.\, \text{sen} + \frac{2\pi}{7}] \quad \Rightarrow \quad W = \underbrace{4\,\text{sen}\frac{\pi}{7} \,.\, \text{sen}\frac{2\pi}{7} \,.\, \text{sen}\frac{3\pi}{7}}$$

Dado que la expresión indicada es una productoria resulta conveniente identificar que:

$$2n + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

Aplicando la fórmula correspondiente, se tendrá que:

$$W = 4 \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} \quad \Rightarrow \quad W = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2^3} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

**13.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión en términos de coseno, luego efectuar las operaciones indicadas con lo cual surgirán los productos de cosenos, en donde será posible aplicar las fórmulas de productorias. Veamos:

$$M = \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}} \quad \ldots (*)$$

Pero: $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7} \quad \wedge \quad \cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$

Luego el denominador de la expresión (*) se transforma en:

$$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{3\pi}{7}$$

Por la productoria conocida: $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$

Por el prob. anterior , el numerador de (*) queda así:

$$\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

Luego: $M = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} \quad \therefore \quad \boxed{M = -4}$

**14.-** Buscando usar el *método telescópico*, tendremos:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad \csc\theta = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Desarrollando el numerador de la expresión anterior y simplificando, encontramos que:

$$\csc\theta = \cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta$$

$$\csc 2\theta = \cot\theta - \cot 2\theta$$

$$\csc 4\theta = \cot 2\theta - \cot 4\theta$$

$$\vdots$$

Y generalizando: $\csc 2^{n-1}\theta = \cot 2^{n-2}\theta - \cot 2^{n-1}\theta$

Finalmente: $S = \cot 2^{-1}\theta - \cancel{\cot\theta} + \cancel{\cot\theta} - \cancel{\cot 2\theta} + \cancel{\ldots} + \cancel{\cot 2^{n-2}\theta} - \cot 2^{n-1}\theta$

$\therefore$ $\boxed{S = \cot 2^{-1}\theta - \cot 2^{n-1}\theta}$

15.- Reemplazando $x = \frac{\pi}{7}$ en lo pedido; se tendrá:

$$R = \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{4\pi}{7} \ \ldots \text{(i)}$$

En el cual se puede notar que: $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$

Por lo cual se puede aplicar: $\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{4\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\frac{2\pi}{7}\cdot\tan\frac{4\pi}{7}$

En (i): $R = \tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\frac{2\pi}{7}\cdot\tan\frac{4\pi}{7} \ \ldots \text{(ii)}$

Además, por reducción al primer cuadrante: $\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$ ; pues: $\frac{4\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} = \pi$

Que al reemplazar en (ii): se obtiene: $R = -\left(\tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\frac{2\pi}{7}\cdot\tan\frac{3\pi}{7}\right) \ldots \text{(iii)}$

La expresión entre parentesis corresponde a un valor obtenido según:

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{3\pi}{2n+1}\ \ldots\ \tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

Así cuando: $n = 3$

$$\tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\frac{2\pi}{7}\cdot\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$$

Finalmente, en (iii): $\boxed{R = -(\sqrt{7})}$

16.- Multiplicando y dividiendo por "2 sen $x$" a cada término de la serie, tendremos:

$$\frac{2\operatorname{sen}(2n-1)x.\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x} = \frac{\cos(2n-2)x - \cos 2nx}{2\operatorname{sen}x}$$

Luego, dando valores a $n$, la serie tendrá la forma:

$$\frac{\cos 0}{2\operatorname{sen}x} - \cancel{\frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen}x}} + \cancel{\frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen}x}} - \frac{\cos 4x}{2\operatorname{sen}x} + \ldots + \cancel{\frac{\cos(2n-2)x}{2\operatorname{sen}x}} - \frac{\cos 2nx}{2\operatorname{sen}x}$$

Finalmente, quedará: $\frac{1}{2\operatorname{sen}x} - \frac{\cos 2nx}{2\operatorname{sen}x} = \frac{2\operatorname{sen}^2 nx}{2\operatorname{sen}x}$ $\therefore$ $\boxed{S = \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen}x}}$

**PROPIEDAD.-**

En general : *Si se tiene una suma de senos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética, se deduce la siguiente propiedad:*

$$S_1 = \text{sen } a + \text{sen } (\alpha + r) + \text{sen } (\alpha + 2\,r) + \ldots + \text{sen } \{\, \alpha + (n-1)\, r \,\}$$

$$\mathbf{S_1 = \frac{sen\frac{\mathit{n\,r}}{2}}{sen\frac{\mathit{r}}{2}} \;.\; sen\left\{\frac{\alpha+(\mathit{n}-1)\mathit{r}}{2}\right\}}$$

Donde: $n$ ..... número de términos de la serie $r$ ..... razón de la progresión

Más fácil aún: $$\mathbf{S_1 = \frac{sen\frac{\mathit{n\,r}}{2}}{sen\frac{\mathit{r}}{2}} \;.\; sen\left(\frac{\hat{P}+\hat{U}}{2}\right)}$$

$\hat{P}$ ..... primer ángulo $\hat{U}$ ..... último ángulo

En forma similar podemos deducir, la *suma de cosenos* cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética; así:

$$S_2 = \cos\alpha + \cos(\alpha + r) + \cos(\alpha + 2\,r) + \ldots + \cos\{\alpha + (n-1)\, r\}$$

$$\mathbf{S_2 = \frac{sen\frac{\mathit{n\,r}}{2}}{sen\frac{\mathit{r}}{2}} \;.\; cos\left(\frac{\hat{P}+\hat{U}}{2}\right)}$$

**17.-** Observando detenidamente los términos de la serie , reconocemos que:

$$\left.\begin{array}{l} n = ? \\ r = 20^\circ \\ \hat{P} = 10^\circ \\ \hat{U} = 170^\circ \end{array}\right\} 2n - 1 = 17 \quad \Rightarrow \quad n = 9$$

Luego, aplicando directamente la última relación de la propiedad anterior, la sumatoria tendrá un valor que viene dado así:

$$S = \frac{\text{sen}\,9\frac{(20^\circ)}{2}}{\text{sen}\,\frac{20^\circ}{2}} \,.\, \cos\left(\frac{10^\circ + 170^\circ}{2}\right)$$

$$S = \frac{\text{sen}\,90^\circ}{\cancel{\text{sen}\,10^\circ}} \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_{0} \qquad \therefore \quad \boxed{\mathbf{S = 0}}$$

18.- Inicialmente aplicamos la siguiente propiedad:

$2\,\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$ , obteniendo

$$2E = 1 - \cos 2° + 1 - \cos 4° + 1 - \cos 6° + \ldots + 1 - \cos 180°$$

$$2E = 90 - (\cos 2° + \cos 4° + \cos 6° + \ldots + \cos 180°)$$

Luego, para utilizar la fórmula (12.9) reconocemos que:

$$n = 90 \quad \wedge \quad \hat{P} = 2° \quad \wedge \quad r = 2° \quad \wedge \quad \hat{U} = 180°$$

$$2E = 90 - \frac{\text{sen}\frac{90(2°)}{2}}{\text{sen}\frac{2°}{2}} \cdot \cos\left(\frac{2° + 180°}{2}\right)$$

$$2E = 90 - \frac{\text{sen}\,90°}{\text{sen}\,1°} \cdot \cos(90° + 1°) \quad \Rightarrow \quad 2E = 90 - \frac{(-\text{sen}\,1°)}{\text{sen}\,1°}$$

Finalmente: $2E = 90 + 1$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{E = 45{,}5}$

19.- Aplicando la propiedad: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, tendremos:

$$2E = 1 + \cos 1° + 1 + \cos 2° + \ldots + 1 + \cos 180°$$

$$2E = 180 + \cos 1° + \cos 2° + \ldots + \cos 180°$$

$$\frac{\text{sen}\frac{180(1°)}{2}}{\text{sen}\left(\frac{1°}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{1° + 180°}{2}\right)$$

$$2E = 180 + \frac{\text{sen}\,90°}{\cancel{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}}}\left\{-\cancel{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2E = 180 - 1$$

Finalmente: $E = \frac{179}{2}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{E = 89{,}5}$

20.- Para utilizar la propiedad del Prob. 16, debemos reconocer que :

$$n = 3 \quad , \quad r = \frac{2\pi}{7} \quad , \quad \hat{P} = \frac{2\pi}{7} \quad , \quad \hat{U} = \frac{6\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\text{sen}\,3\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\text{sen}\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}}{2}\right)$$

$$S = \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}}$$

Utilizando la propiedad en el numerador, tendremos:

$$S = \frac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} = \frac{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}}$$

**PROPIEDAD.-**

En general, se cumple: $\boxed{\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}}$

Siendo: $n = \{1, 2, \forall\, n \in \mathbb{Z} \ldots\}$

Análogamente, se deduce: $\boxed{\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}}$

**21.-** Usando la propiedad del problema anterior, tendremos:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1+\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1+\cos\frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}}{2}$$

Luego, utilizando la fórmula del problema anterior deducimos:

$$= \frac{3+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{3-\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4} \qquad \therefore \quad \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

**22.-** Utilizando la identidad siguiente, tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}(U_n - U_{n-1})}{\cos U_n \cdot \cos U_{n-1}} = \tan U_n - \tan U_{n-1}$$

$\cancel{\tan U_1} - \cancel{\tan U_0}$

$\cancel{\tan U_2} - \cancel{\tan U_1}$

$\cancel{\tan U_3} - \cancel{\tan U_2}$

$\vdots$

$\tan U_{20} - \cancel{\tan U_{19}}$

Finalmente, obtendremos: $\dfrac{\text{sen}(U_1-U_0)}{\cos U_1\cdot\cos U_0}+\ldots+\dfrac{\text{sen}(U_{20}-U_{19})}{\cos U_{20}\cdot\cos U_{19}} = \boxed{\tan U_{20}-\tan U_0}$

**23.-** $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{6\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}$

Multiplicando y dividiendo por 2 sen $\dfrac{\pi}{9}$, obteniendo:

$$\frac{2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}+2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}}{2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}}$$

A continuación utilizamos la transformación de producto a diferencia, obteniendo:

$$\frac{\cancel{\text{sen}\frac{3\pi}{9}}-\text{sen}\frac{\pi}{9}+\cancel{\text{sen}\frac{5\pi}{9}}-\cancel{\text{sen}\frac{3\pi}{9}}+\cancel{\text{sen}\frac{7\pi}{9}}-\cancel{\text{sen}\frac{5\pi}{9}}+\text{sen}\frac{9\pi}{9}-\cancel{\text{sen}\frac{7\pi}{9}}}{2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}}$$

Finalmente nos queda: $\dfrac{-\text{sen}\frac{\pi}{9}+\cancel{\text{sen}\,\pi}}{2\,\text{sen}\frac{\pi}{9}}=\dfrac{-\cancel{\text{sen}}\frac{\pi}{9}}{2\,\cancel{\text{sen}}\frac{\pi}{9}} = -1/2$

$$\therefore\quad \cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

**24.-**Se sabe que:

$$\text{sen}^2x=\frac{1-\cos2x}{2}\qquad \cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$$

$$\text{sen}^3x=\frac{3\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,3x}{4}\qquad \cos^3x=\frac{3\cos x+\cos3x}{4}$$

$$\text{sen}^4x=\frac{3-4\cos2x+\cos4x}{8}\qquad \cos^4x=\frac{3+4\cos2x+\cos4x}{8}$$

$$\text{sen}^5x=\frac{10\,\text{sen}\,x-5\,\text{sen}\,3x+\text{sen}\,5x}{16}\qquad \cos^5x=\frac{10\cos x+5\cos3x+\cos5x}{16}$$

Al desarrollarse la sumatoria inicial , se obtiene tres sumas parciales así:

$$\Sigma_1=\cos x+\cos(120^\circ-x)+\cos(120^\circ+x)$$

$$\Sigma_2=\cos^2x+\cos^2(120^\circ-x)+\cos^2(120^\circ+x)$$

$$\Sigma_3=\cos^3x+\cos^3(120^\circ-x)+\cos^3(120^\circ+x)$$

Calculando una por una, obtendremos:

$$\Sigma_1 = \cos x + \underbrace{\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x)}_{2\cos 120^\circ \,.\, \cos x}$$

$$\Sigma_1 = \cos x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x = \cos x - \cos x \qquad \therefore \qquad \Sigma_1 = 0$$

Ahora: $\Sigma_2 = \cos^2 x + \cos^2(120^\circ - x) + \cos^2(120^\circ + x)$

Recordemos que: $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Luego, tendremos: $\Sigma_2 = \dfrac{1 + \cos 2x + 1 + \cos(240^\circ - 2x) + 1 + \cos(240^\circ + 2x)}{2}$

Agrupando convenientemente, lograremos:

$$\Sigma_2 = \frac{3 + \cos 2x + \overbrace{\cos(240^\circ - 2x) + \cos(240^\circ + 2x)}}{2}$$

$$\Sigma_2 = \frac{3 + \cos 2x + 2\cos 240^\circ \cos 2x}{2} = \frac{3 + \cos 2x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x}{2}$$

$$\Sigma_2 = \frac{3 + \cos 2x - \cos 2x}{2} \qquad \therefore \qquad \Sigma_2 = \frac{3}{2}$$

Trabajando con la sumatoria «$\Sigma_3$», tendremos:

$$\Sigma_3 = \cos^3 x + \cos^3(120^\circ - x) + \cos^3(120^\circ + x)$$

Para esta sumatoria, recordaremos que: $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

Luego, se obtendrá:

$$\Sigma_3 = \frac{3\cos x + \cos 3x + 3\cos(120^\circ - x) + \cos(360^\circ - 3x) + 3\cos(120^\circ + x) + \cos(360^\circ + 3x)}{4}$$

Ordenando apropiadamente, obtendremos:

$$\Sigma_3 = \frac{3\cos x + \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) + 3\cos 3x}{4}$$

Luego: $\Sigma_3 = \dfrac{3}{4}\cos 3x \qquad \therefore\ \Sigma_3 = \dfrac{3}{4}\cos 3x$

Finalmente: $\sum\limits_{n=1}^{n} \cos^n(x) + \cos^n(120° - x) + \cos^n(120 + x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$

$$\sum_{n=1}^{n} = 0 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\cos 3x = \frac{3(2+\cos 3x)}{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n} = \frac{3(2+\cos 3x)}{4}}$$

**25.-** Se sabe que:

$$* \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \dots\dots\dots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = -\frac{1}{2}$$

$$* \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \dots\dots\dots + \cos\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}$$

Siendo: «$n$» un número impar.

Luego de reducir al primer cuadrante, como se indica obtendremos:

$$\cos\frac{2\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} + 3\cos\frac{6\pi}{11} + \dots\dots\dots 8\underbrace{\cos\frac{16\pi}{11}}_{\cos\frac{6\pi}{11}} + 9\underbrace{\cos\frac{18\pi}{11}}_{\cos\frac{4\pi}{11}} + 10\underbrace{\cos\frac{20\pi}{11}}_{\cos\frac{2\pi}{11}}$$

Sumando los extremos, tendremos:

$$11\cos\frac{2\pi}{11} + 11\cos\frac{4\pi}{11} + 11\cos\frac{6\pi}{11} + \dots\dots\dots + 11\cos\frac{10\pi}{11}$$

Finalmente, factorizando «11», lograremos:

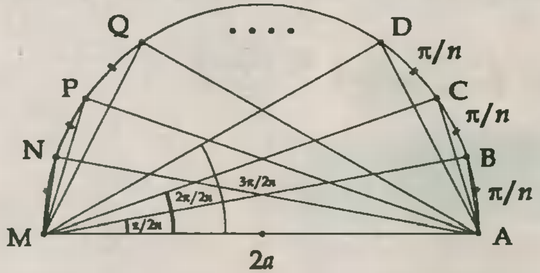
$$11\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \dots + \cos\frac{10\pi}{11}\right)}_{-1/2(\text{propiedad anterior})} = \boxed{-11/2}$$

**26.-** Se sabe que:

$$* \sum_{n=1}^{K} \operatorname{sen}\{\alpha + (n-1)r\} = \frac{\operatorname{sen}\frac{Kr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left\{\frac{2\alpha + (K-1)r}{2}\right\}$$

$$* \sum_{n=1}^{K} \cos\{\alpha + (n-1)r\} = \frac{\operatorname{sen}\frac{Kr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \cdot \cos\left\{\frac{2\alpha + (K-1)r}{2}\right\}$$

Graficando el enunciado del problema, tendremos:




Como nos piden calcular la distancia a cada uno de los extremos del diámetro, calcularemos primero con respecto al extremo «A», así:

$$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \ldots\ldots\ldots + \overline{AQ} + \overline{AP} + \overline{AN}$$

Luego: $$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = 2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + 2a \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + \ldots\ldots\ldots + 2a \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = 2a \underbrace{\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + \ldots\ldots\ldots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}}_{\text{senos enprogresión aritmética}}$$

Finalmente aplicamos la primera fórmula sobre sumatoria de senos y cosenos en progresión aritmética, así:

$$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = 2a \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}} \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{2n}}{2}\right]$$

Donde:
$K = n-1$ ........... #de términos
$r = \pi/2n$ ........... razón
$\alpha = \pi/2n$ ........... primer ángulo

Efectuando, tendremos: $$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = 2a \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego: $$\sum_{\text{"A"}} \text{distancia} = a\sqrt{2}\left\{\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}}\right\}$$

$$\sum \underset{\text{“A”}}{\text{distancia}} = a\sqrt{2}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cot\frac{\pi}{4n}-1\right\}$$

Análogamente: $\sum \underset{\text{“M”}}{\text{distancia}} = a\left\{\cot\frac{\pi}{4n}-1\right\}$

Finalmente: $\sum \underset{\text{ambos extremos}}{\text{distancia de}} = \boxed{2a\left\{\cot\frac{\pi}{4n}-1\right\}}$

**27.-** Transformando a producto como sigue, tendremos:

$$\cos x + \underbrace{\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x)}_{2\cos 120^\circ\ .\ \cos x}$$

Luego de efectuar, obtenemos: $\cos x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x = \cos x - \cos x = 0$

$$\therefore \quad \boxed{\cos x + \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) = 0}$$

**28.-** Efectuando como sigue tendremos:

$$E = \frac{2\cos.\cos(120^\circ - x) + 2\cos x.\cos(120^\circ + x) + 2\cos(120^\circ - x)\cos(120^\circ + x}{2}$$

$$E = \frac{\cos(120^\circ - 2x) + \cos 120^\circ + \cos 120^\circ + \cos(120^\circ + 2x) + \cos 2x + \cos 240^\circ}{2}$$

Agrupando los términos señalados y utilizando la propiedad del problema anterior, obtendremos:

$$E = \frac{\cos 2x + \cos(120^\circ - 2x) + \cos(120^\circ + 2x) + 3\cos 120^\circ}{2} = \frac{0 + 3(-1/2)}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = -3/4}$$

***PRODUCTORIAS***

**29.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar cada término de la productoria en factores que tengan términos comunes en el numerador y denominador. Para ello es pertinente recordar la identidad del ángulo doble:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \rightarrow \quad 1 - \tan^2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$$

Aplicando esta identidad en cada uno de los factores de la productoria, se obtiene:

$$P = \frac{2\tan x}{\tan 2x}\cdot\frac{2\tan 2x}{\tan 4x}\cdot\frac{2\tan 4x}{\tan 8x}\ \ldots\ \frac{2\tan 2^{n-1}x}{\tan 2^n x}$$

Luego de simplificar, obtenemos: $\boxed{P = \frac{2^n\tan x}{\tan 2^n x}}$

**30.-** Debemos reconocer que la sucesión de factores corresponden al cociente de los términos que componen las productorias dadas en la parte teórica. Procedamos así:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)} \ldots = \frac{\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}$$

De donde se obtiene: $\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).\tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).\tan\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \ldots = \sqrt{2n+1}$

Y de acuerdo con esta nueva productoria, de la relación dada podemos identificar los siguientes términos:

a) $2n + 1 = 9 \quad \Rightarrow \quad n = 4$ factores

b) Luego la productoria tiene un valor que se obtiene aplicando la relación obtenida:

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{3}\sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{3}\sqrt{9} \quad \therefore \quad \boxed{W = 1}$$

**31.-** En este caso nuestra estrategia consistirá en transformar cada término reduciendo al primer cuadrante. Veamos:

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} = \operatorname{sen}(\pi - \frac{3\pi}{7}) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\frac{5\pi}{7} = \operatorname{sen}(\pi - \frac{2\pi}{7}) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}$$

$$\Rightarrow W = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} . \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} . \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$$

De acuerdo con la fórmula de la productoria de senos, reconocemos que:

$$2n + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad n = 3 \text{ factores}$$

A continuación aplicamos la fórmula de productoria y encontramos que:

$$W = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} = \frac{\sqrt{7}}{2^3} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{\sqrt{7}}{8}}$$

**32.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar cada factor en una expresión mónica, para lo cual será útil aplicar la identidad del ángulo mitad:

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow M = (2^3\cos^2\frac{\pi}{7})(\cos^2\frac{2\pi}{7})(\cos^2\frac{3\pi}{7}) \quad \Rightarrow M = 8(\cos\frac{\pi}{7} . \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{3\pi}{7})^2$$

Pero, podemos identificar que: $\cos\frac{\pi}{7} . \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \quad M = 8.\,\frac{1}{8^2} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \frac{1}{8}}$$

**33.-** Este problema tiene relación con el problema anterior, por lo cual será conveniente transformar uno de sus factores:

$$\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$$

De este modo al sustituir en la expresión original, se tendrá que:

$$M = -\cos\frac{\pi}{7} . \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{3\pi}{7}$$

Y sabiendo que: $\cos\frac{\pi}{7} . \cos\frac{2\pi}{7} . \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$

Concluimos que: $\boxed{M = -\frac{1}{8}}$

**34.-** Utilizando la identidad: $(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 2\cos 2x + 1$

Despejando, se tiene: $2\cos x - 1 = \frac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}$

Entonces tendremos: $K = \frac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1} \times \frac{2\cos 4x+1}{2\cos 2x+1} \times \frac{2\cos 8x+1}{2\cos 4x+1}$

$$\therefore \qquad \boxed{K = \frac{2\cos 8x+1}{2\cos x+1}}$$

**35.-** Notamos que el término central es: $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{28} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego los otros factores los agrupamos de 2 en 2, así: .

$$\frac{1}{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{28}\cdot\operatorname{sen}\frac{13\pi}{28}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$

Análogamente se efectúa con los otras parejas, obteniéndose:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{7} \times \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7} \times \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2^4} \times \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{7}\times\cos\frac{2\pi}{7}\times\cos\frac{3\pi}{7}\right)}_{\frac{1}{2^3}}$$

Finalmente: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{28} . \operatorname{sen}\frac{3\pi}{28} ......\operatorname{sen}\frac{13\pi}{28} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2^7}}$

**36.-** Recordemos que: $2\ \operatorname{sen}x\ \cos x = \operatorname{sen}2x \rightarrow \cos x = \dfrac{\operatorname{sen}2x}{2\operatorname{sen}x}$

Sustituyendo en la expresión dada: $\dfrac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} . \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{4}} . \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{4}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{8}} ..... \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^{n-1}}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}$

Finalmente: $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} .....\cos\frac{x}{2^n} = \boxed{\dfrac{\operatorname{sen}x}{2^n.\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}}$

**37.-** Teniendo en cuenta la siguiente productoria:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\ \cos\frac{2\pi}{2n+1}\ \cos\frac{3\pi}{2n+1}\ \cos\frac{4\pi}{2n+1}\ \cdots\ \cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

En el problema reconocemos que $n = 3$ ; es decir:

$$P = \frac{1}{2^3} \quad \therefore \quad \boxed{P = \frac{1}{8}}$$

**38.-** Aplicando la siguiente productoria:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1} . \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1} . \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1} .....\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

Luego para el problema: $n = 9$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{P = \dfrac{\sqrt{19}}{2^9}}$

**39.-** * La notación $\prod_{n=1}^{k} a_n$ , se desarrolla así:

$$\prod_{n=1}^{K} a_n = a_1 . a_2 . a_3 ......... 1_{K-1} . a_K$$

Además se sabe que:

* $\prod_{n=1}^{k} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2k+1} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2k+1} \,.\, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2k+1} \,..........\, \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}$

* $\prod_{n=1}^{k} \cos\frac{n\pi}{2k+1} = \cos\frac{\pi}{2k+1} \,.\, \cos\frac{2\pi}{2k+1} \,..........\, \cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$

* $\prod_{n=1}^{k} \tan\frac{n\pi}{2k+1} = \tan\frac{\pi}{2k+1} \,.\, \tan\frac{2\pi}{2k+1} \,..........\, \tan\frac{k\pi}{2k+1} = \sqrt{2k+1}$

Desarrollando la expresión pedida obtendremos:

$$\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{7}\right)}{\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}$$

Pero: $\cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{6\pi}{7}$ , $\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}$ , $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$ (Arcos suplementarios)

Luego: $$\frac{\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)}{\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)} = \tan^2\frac{3\pi}{7} \,.\, \tan^2\frac{2\pi}{7} \,.\, \tan^2\frac{\pi}{7}$$

Ya que: $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan^2\alpha$ (Arco mitad)

Finalmente: $\tan^2\frac{\pi}{7} \,.\, \tan^2\frac{2\pi}{7} \,.\, \tan^2\frac{3\pi}{7} = \prod_{n=1}^{3} \tan^2\frac{n\pi}{7} = \sqrt{2(3)+1}^{\,2} = \sqrt{7}^{\,2} = \boxed{7}$

**40.-** Sabemos que: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

Luego: $\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}$

Aplicando dicha propiedad en el problema, tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{10\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}}$$

A continuación utilizando reducción al primer cuadrante obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}}{32\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{64\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

Finalmente: $\cos\frac{\pi}{7} \,.\, \cos\frac{2\pi}{7} \,.\, \cos\frac{3\pi}{7} \,.\, \cos\frac{4\pi}{7} \,.\, \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$

$$\boxed{\frac{1}{64}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}$$


# CAP. 17 Funciones Trigonométricas

### *DOMINIO DE LAS F.T. DIRECTAS*

**01.-** Para que $f$ esté definida en $\mathbb{R}$, se debe cumplir:

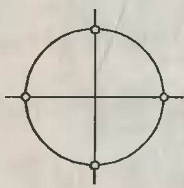
i) Ya que en $f$ interviene tan $x$ decimos que:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ , k \in \mathbb{Z}$$

ii) De la función valor absoluto deducimos que:

$$|\text{sen}\, x| \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq k\pi,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

De (i) $\wedge$ (ii): $x \neq \dfrac{k\pi}{2}\ ,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$



$\therefore$ $\boxed{\textbf{Dom} f = \mathbb{R} - \frac{k\pi}{2},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$

**02.-** Para que la función $f$ esté definida en $\mathbb{R}$ se debe cumplir que:

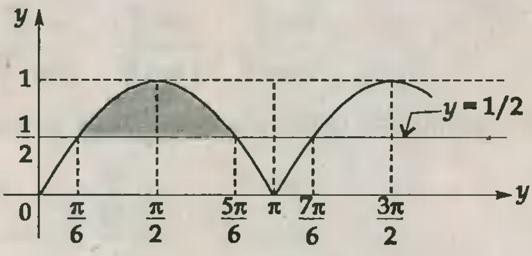
$$\text{sen}^2 x - \frac{1}{4} \geq 0 \ \Rightarrow\ \text{sen}^2 x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |\text{sen}\, x| \geq \frac{1}{2}$$

Grafiquemos: $y = |\text{sen}\, x| \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

De esto se deduce que: $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$

Pues en este intervalo: $|\text{sen}\, x| \geq \dfrac{1}{2}$

En general: $\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$




$\therefore$ $\boxed{\textbf{Dom} f = \left[\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi\right],\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$

**03.-** Para que la función $f$ esté definida en $\mathbb{R}$, se debe cumplir que: $\cos x - \cos 3x \neq 0$

Es decir: $\quad \cos 3x \neq \cos x \;\Rightarrow\; \dfrac{\cos 3x}{\cos x} \neq 1 \;\Rightarrow\; \cos x \neq 0 \Rightarrow\; x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \ldots (1)$

Pero: $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 2x - 1 \;\Rightarrow\; 2\cos 2x - 1 \neq 1 \Rightarrow\; \cos 2x \neq 1$

$$\Rightarrow\; 2x \neq 2k\pi \quad \Rightarrow\; x \neq k\pi \ldots (2)$$

De (1) y (2): $\quad x \neq \dfrac{k\pi}{2}\,,\ \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \therefore \quad$ **$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \dfrac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$**

**04.-** Sean las funciones: $f_1(x) = 3\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \wedge f_2(x) = \cos 2x$

$\Rightarrow\; \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, f_1 \cap \mathrm{Dom}\, f_2 \quad \ldots (1)$

Luego nos proponemos determinar cada dominio por separado. Veamos:

a) $f_1(x) = 3\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow\; 3x + \dfrac{\pi}{6}\ {}^{1}\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\; x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{18}\,,\ \forall\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow\; x \neq (3k+1)\dfrac{\pi}{9}\,, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\quad \mathrm{Dom}\, f_1 = \mathbb{R} - (3k+1)\dfrac{\pi}{9}\ ,\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \ldots (2)$

b) $f_2(x) = \cos 2x \quad \Rightarrow\; \mathrm{Dom}\, f_2 = \mathbb{R} \quad \ldots (3)$

c) Reemplazando (2) y (3) en (1): $\mathrm{Dom}\, f = \left[\mathbb{R} - (3k+1)\frac{\pi}{9}\right] \cap \mathbb{R}$

$$\therefore \quad \mathbf{Dom}\, f = \mathbb{R} - (3k+1)\frac{\pi}{9}\,, \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

**05.-** Nuestra estrategia consistirá en analizar la F.T. que interviene y a continuación haremos lo propio con los radicandos de la expresión. Veamos:

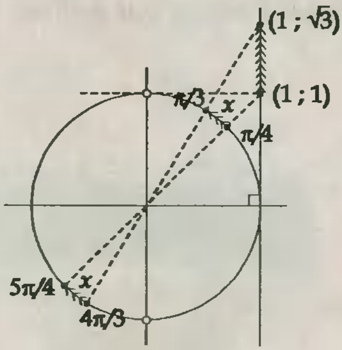
a) Dado que la función depende de la tangente, tan x, podemos afirmar que:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,, k \in \mathbb{Z}$$

b) Además, para que la función $f$ esté definida en $\mathbb{R}$, se debe cumplir que los radicandos deben ser positivos:

$$(\tan x - 1 \geq 0) \wedge (\sqrt{3} - \tan x \geq 0)$$

$\Rightarrow \ \tan x \geq 1 \ \wedge \ \tan x \leq \sqrt{3} \ \Rightarrow \ 1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$




Al graficar este resultado, se observa que:

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

Generalizando este resultado se tiene:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$\therefore$ $\mathbf{Dom}\, f = \left[\dfrac{\pi}{4} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

**06.**- Puesto que la función depende de tan $5x$, podemos afirmar que el dominio de «$f$» debe ser tal que:

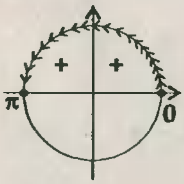
$$5x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{10}$$

Luego, se concluye que: $\boxed{\mathbf{Dom}\, f = \mathbb{R} - (2k+1)\dfrac{\pi}{10}\ ,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$

**07.**- Recordemos la función raíz cuadrada: $y = f(x) = \sqrt{x}$ ; existe , si $x \geq 0$

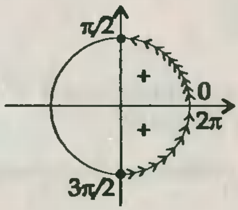
Por lo tanto para que la función $f$ se encuentre definida se debe cumplir que:

i) $\operatorname{sen} x \geq 0$



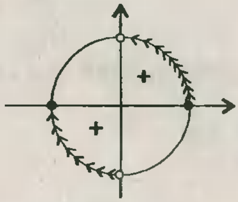

$\Rightarrow \ x \in [0; \pi]$

ii) $\cos x \geq 0$




$\Rightarrow \ x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

iii) $\tan x \geq 0$




$\Rightarrow \ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right\rangle$

El dominio de $f$ se obtiene al intersectar los 3 dominios: (i $\cap$ ii $\cap$ iii)

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle}$$

08.- Nuestra estrategia consistirá en analizar cada F.T. por separado y a continuación haremos el análisis de los radicandos para finalmente intersectar los dominios encontrados. Veamos:

i) La $\tan x \ \exists$ si $x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

ii) La $\cot x \ \exists$ si $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \ x \neq 0; \pi$

iii) La función $f$ existe si: $\quad 2(\tan x + \cot x) - 4 \geq 0$

Ahora, de los radicandos se tiene que: $\quad \tan x + \cot x \geq 2 \ \Rightarrow \ \tan x + \dfrac{1}{\tan x} \geq 2$

Esta relación solo se cumplirá si: $\ x \in$ I C ó III C

Teniendo en cuenta i), ii) , iii) y este último resultado, el dominio de $f$ será:

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle}$$

09.- Analizando cada F.T. por separado, se tiene:

i) La $\sec x \ \exists$ si $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , $n \in \mathbb{Z}$

ii) La $\csc x \ \exists$ si $x \neq m\pi$ , $m \in \mathbb{Z}$

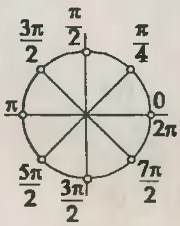
iii) La función $f \ \exists$ si el denominador es diferente de cero.

$$|\sec x| - |\csc x| \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\cos x}\right| \neq \left|\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\cos x|} \neq 1 \Rightarrow |\tan x| \neq 1 \ \Rightarrow \ \tan x \neq \pm 1$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \ldots \Rightarrow \therefore x \neq (2q+1)\frac{\pi}{4}; q \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto de i) $\cup$ ii) $\cup$ iii), tendremos:




$$x \neq \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z} \qquad \therefore \quad \boxed{\text{Dominio } D_f = \mathbb{R} - \frac{k\pi}{4}, \ \forall \ k \in \mathbb{Z}}$$

**10.-** Para que la función secante exista o se encuentre definida, se debe cumplir que:

$$3x + \frac{\pi}{6} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{9}(3k+1)$$

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{9}(2k+1);\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

***RANGO DE LAS F.T.***

**11.-** Analizando el denominador de la fracción, se deduce que: sen $x \neq 1$

Con el propósito de construir la función, empezamos por:

$$-1 \leq \text{sen}\, x < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq \text{sen}\, x - 1 < 0$$

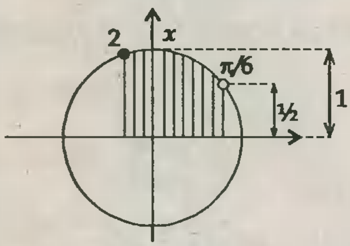
Invirtiendo: $\qquad -\infty < \dfrac{1}{\text{sen}x - 1} \leq -\dfrac{1}{2}$

Multiplicando por 3: $\qquad -\infty < \dfrac{3}{\text{sen}x - 1} \leq -\dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad -\infty < f(x) \leq -\frac{3}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\text{Ran}\, f = \left\langle \infty; -\frac{3}{2}\right]}$$

**12.-** Nuestra estrategia será construir la función dada a partir del dominio establecido.

$$\frac{\pi}{6} < x < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \text{sen}\, x \leq 1 \text{ ...(*)}$$




De (*) construimos $f$, veamos:

Multiplicando por 2: $\qquad 1 < 2\,\text{sen}\, x \leq 2$

Sumando 5: $\qquad 6 < 2\,\text{sen}\, x + 5 \leq 7$

Dividiendo por 3: $\qquad 2 < \dfrac{2\text{sen}x + 5}{3} \leq \dfrac{7}{3}$

$$\Rightarrow \quad 2 < f(x) \leq \frac{7}{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{\text{Ran}\, f = \left\langle 2; \frac{7}{3}\right]}$$

**13.-** Analizando el denominador de «$f$», reconocemos que:sen $x \neq 1$ . . . (1)

Para que $f$ esté definida en $\mathbb{R}$, se debe cumplir que:

$$|\text{sen}\, x| - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\text{sen}\, x| \geq 1 \text{ . . . (2)}$$

De (2) podemos deducir que:

*) $|\text{sen } x| > 1$ ; es absurdo

*) $|\text{sen } x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 1; \text{ no puede ser por (1)} \\ \vee \\ \text{sen } x = -1 \ (\checkmark) \end{cases}$ ; $\Rightarrow$ sen $x = -1$

Luego: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-1}}{-1-1} = \dfrac{0}{-2} = 0 \quad \therefore$ **Ran $f = \{0\}$**

**14.-** De la definición de valor absoluto se puede establecer que:

$$\text{sen}^2 x = |\text{sen } x|^2$$

Entonces al reemplazar en la función dada, ésta queda así:

$$f(x) = |\text{sen } x|^2 + 3|\text{sen } x|$$

Completando cuadrados: $f(x) = \left(|\text{sen} x| + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \ldots (1)$

Para determinar el rango de f, reconstruimos para dar la forma de (1). Veamos:

Por teoría sabemos que: $0 \leq |\text{sen } x| \leq 1$

Sumando $\frac{3}{2}$ a cada miembro: $\frac{3}{2} \leq |\text{sen } x| + \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}$

Elevando al cuadrado: $\frac{9}{4} \leq \left(|\text{sen} x| + \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$

Restando $\frac{9}{4}$: $0 \leq \underbrace{\left(|\text{sen} x| + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}_{f} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f \leq 4$

$\therefore$ **Ran $f = [0; 4]$**

**15.-** Efectuando la división indicada, se tiene:

$$f(x) = \frac{\cos x + 1 + 1}{\cos x + 1} = 1 + \frac{1}{\cos x + 1}$$

De donde deducimos que: $\cos x \neq -1$

A continuación reconstruímos la función, de: $-1 < \cos x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \cos x + 1 \leq 2$

Invirtiendo: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos x + 1} < +\infty$

Sumando 1: $\qquad \dfrac{3}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{\cos x + 1} < +\infty$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3}{2} \leq f(x) < +\infty \qquad \therefore \qquad \boxed{\text{Ran } f = \left[\dfrac{3}{2} ; +\infty\right\rangle}$

**16.-** De la fracción dada, se puede deducir que: $\quad |\text{sen } x| \neq 1$

Recordemos la identidad pitagórica: $\quad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - |\text{sen } x|^2$

Reemplazando en la función dada, se tendrá

$$f(x) = \frac{-(|\text{sen}x|^2 - 1)}{|\text{sen}x| - 1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{-(|\text{sen}x| + 1)(|\text{sen}x| - 1)}{|\text{sen}x| - 1}$$

Cancelando: $\qquad |\text{sen } x| - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |\text{sen } x| \neq 1 \ldots (*)$

Luego se obtiene: $\qquad f(x) = -(|\text{sen } x| + 1)$

Por teoría se sabe que: $\qquad 0 \leq |\text{sen } x| \leq 1$

Y considerando (*), deducimos que: $0 \leq |\text{sen } x| < 1 \ldots (**)$

A partir de esta relación reconstruimos *f*, veamos:

sumando 1: $\quad 1 \leq |\text{sen } x| + 1 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < f(x) \leq -1 \qquad \therefore \quad \boxed{\text{Ran } f = \langle -2; -1]}$

**17.-** En primer lugar transformamos convenientemente la expresión dada y luego reconstruimos la función para darle la forma obtenida. Veamos:

Si: $\quad f(x) = \cos^2 x + 4 \cos x + 7$

Completando cuadrados: $f(x) = (\cos x + 2)^2 + 3 \ldots (*)$

Por teoría se sabe que: $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

Construyendo *f*: $\qquad 1 \leq \cos x + 2 \leq 3$

Elevando al cuadrado: $\quad 1 \leq (\cos x + 2)^2 \leq 9$

Sumando 3: $\quad 4 \leq (\cos x + 2)^2 + 3 \leq 12$

Y de (*): $\quad 4 \leq f(x) \leq 12 \qquad \therefore \qquad \boxed{\text{Ran } f = [4 ; 12]}$

**18.-** Recordemos la identidad: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Reemplazando en *f*: $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x - \text{sen} x} = \dfrac{(\cos x + \text{sen } x)\cancel{(\cos x - \text{sen } x)}}{\cancel{\cos x - \text{sen } x}}$

Esta simplificación es posible si: $\operatorname{sen} x \neq \cos x \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Luego, nos queda: $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Como:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq \pm 1 \ldots (*)$$

Por teoría se sabe que: $-1 \leq \operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$

Pero de (*): $-1 < \operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) < 1, \forall\ x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Multiplicando por $\sqrt{2}$: $-\sqrt{2} < \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{2}$

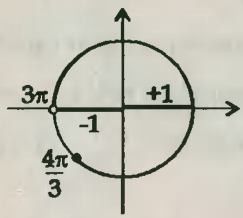
$$\therefore \quad \text{Ran } f = \left\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \right\rangle$$

**19.-** Transformamos la expresión de $f$ completando cuadrados:

$$f(x) = 4\cos^2(\pi x) - 4\cos(\pi x) \Rightarrow f(x) = [2\cos(\pi x) - 1]^2 - 1 \ldots (*)$$

Del dato: $\dfrac{4}{3} \leq x < 3 \Rightarrow \dfrac{4\pi}{3} \leq \pi x < 3\pi \Rightarrow -1 < \cos(\pi x) \leq 1$

De esta relación reconstruimos $f$, así:




Multiplicando por 2: $-2 < 2\cos(\pi x) \leq 2$

Restando 1: $-3 < 2\cos(\pi x) - 1 \leq 1$

Elevando al cuadrado: $0 \leq [2\cos(\pi x) - 1]^2 < 9$

Restando 1: $-1 \leq [2\cos(\pi x) - 1]^2 < 8$

De (*): $-1 \leq f < 8 \quad \therefore \quad \text{Ran } f = [-1; 8\rangle$

**20.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión hasta reducirla. Luego analizar la variación de la expresión obtenida. Veamos:

Factorizando: $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x \underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1}$

Multiplicando por 4: $4f(x) = 4\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x = \underbrace{(2\operatorname{sen} x.\cos x)}_{\operatorname{sen} 2x}{}^2$

Despejando se obtiene que: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}^2 2x \quad \ldots (*)$

Sabemos que para el caso del seno se verifica que: $0 \le \text{sen}^2 2x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$: $\quad 0 \le \frac{1}{4}\,\text{sen}^2 2x \le \frac{1}{4}$

Y de (*): $\quad 0 \le f(x) \le \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Ran } f = \left[0\,;\,\frac{1}{4}\right]}$

**21.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada y analizar lo obtenido:

Transformamos a producto el numerador de $f$.

$$f(x) = \frac{\text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}2x}{\text{sen}2x} \Rightarrow f(x) = \frac{2\text{sen}2x.\cos x + \text{sen}2x}{\text{sen}2x} \Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{\text{sen}2x}(2\cos x + 1)}{\cancel{\text{sen}2x}}$$

Analizando el denominador: $\quad \text{sen}\,2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Simplificando "sen $2x$", nos queda: $\quad f(x) = 2\cos x + 1$

Esto significa que: $\quad x \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \cos x \neq \{-1; 1; 0\}$

Luego: $\quad -1 < \cos x < 0 \cup 0 < \cos x < 1$

Construyendo $f$ con cada desigualdad, obtendremos el rango. Veamos:

Multiplicando por 2: $\quad -2 < 2\cos x < 0 \quad \vee \quad 0 < 2\cos x < 2$

Sumando 1: $\quad -1 < 2\cos x + 1 < 1 \quad \vee \quad 1 < 2\cos x + 1 < 3$

$\therefore \quad \boxed{\text{Ran } f = \langle -1\,;\,1\rangle \cup \langle 1\,;\,3\rangle}$

**22.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada hasta obtener una en términos de una sola F.T.. Veamos:

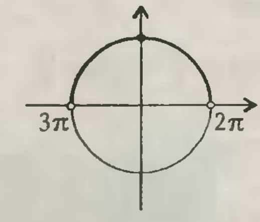
$$f(x) = \frac{1 + \tan^2 x + 2\tan x}{1 + \tan^2 x} + 3$$

Separando en 2 fracciones: $\quad f(x) = \frac{\cancel{1 + \tan^2 x}}{\cancel{1 + \tan^2 x}} + \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} + 3 = 4 + \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

De lo cual podemos concluir que: $\quad f(x) = 4 + \text{sen}\,2x$

Del dato: $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\pi < 2x < 3\pi$

$\Rightarrow \quad 0 < \text{sen } 2x \leq 1 \ldots (*)$



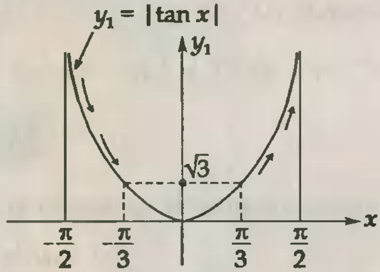

Partiendo de (*) construyamos $f$:

$4 < 4 + \text{sen } 2x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 4 < f \leq 5$

$\therefore$ **Ran $f = \langle 4; 5]$**

**23.-** Nuestra estrategia consistirá en graficar cada termino por separado y luego analizar la variación de $f$ en el intervalo dado. Veamos:

a) Graficamos: $y_1 = |\tan x|$

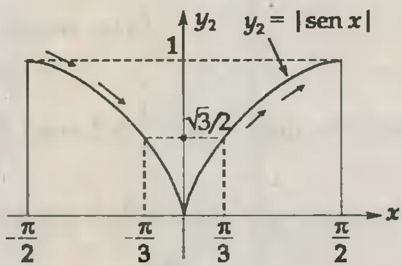



Como: $\quad |x| < \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$

En este intervalo se verifica que:

$0 \leq |\tan x| < \sqrt{3} \ldots (1)$

b) Graficamos: $y_2 = |\text{sen } x|$




En el intervalo: $-\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$

Se verifica que: $0 \leq |\text{sen } x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ldots (2)$

Podemos sumar (1) + (2):

$0 \leq |\text{sen } x| + |\tan x| < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f < \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$ **Ran $f = \left[ 0; \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$**

**24.-** Como en los ejercicios anteriores, nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada. Luego de la F.T. que aparece en la expresión obtenida, reconstruímos la función a partir del dominio de la F.T. referida. Veamos:

Completando cuadrados: $\quad f(x) = (\tan^2 x + 2)^2 + 3 \ldots (*)$

Como: $\tan^2 x \geq 0$ construyamos $f$: $\quad \tan^4 x + 2 \geq 2$

Elevando al cuadrado: $\quad (\tan^2 x + 2)^2 \geq 4$

Sumando 3: $\quad (\tan^2 x + 2)^2 + 3 \geq 7$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq 7 \quad \therefore$ **Ran $f = [7; +\infty\rangle$**

**25.-** Teniendo en cuenta que $x \in$ IIIC; analicemos cada término de «$f$» en el intervalo dado. Veamos:

a) Si: $\dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6} > \operatorname{sen} x > \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} > \operatorname{sen} x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad -1 > 2\operatorname{sen} x > -\sqrt{2} \quad \ldots (1)$$

b) Si: $\dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \tan\dfrac{7\pi}{6} < \tan x < \tan\dfrac{5\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} < \tan x < 1 \Rightarrow -\sqrt{3} > -3\tan x > -3 \quad \ldots (2)$$

c) Sumando (1) y (2) m. a m.: $\quad -\sqrt{3} - 1 > 2\operatorname{sen} x - 3\tan x > -3 - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} - 1 > f(x) > -3 - \sqrt{2} \Rightarrow -3 - \sqrt{2} < f(x) < -\sqrt{3} - 1$$

$$\therefore \quad \boxed{R_{f(x)} = \langle -\sqrt{2} - 3; -\sqrt{3} - 1 \rangle}$$

**26.-** Transformamos la expresión desarrollando la potencia indicada:

$$f(x) = \tan^2 x - 2\cancel{\tan}\ x \,.\, \cancel{\cot}\ x + \cot^2 x$$

$$f(x) = \underbrace{\tan 2x + \frac{1}{\tan^2 x}}_{\geq 2} - 2$$

Recordando que: $\quad a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, si $a \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_f = [\,0; +\infty\,\rangle}$

**27.-** Reconociendo que $x \in$ IIIC; procedemos tal como se hizo en el prob. 28. Veamos:

Si $\dfrac{5\pi}{4} < x < \dfrac{4\pi}{3}$

$$\tan\frac{5\pi}{4} < \tan x < \tan\frac{4\pi}{3} \Rightarrow 1 < \tan x < \sqrt{3} \quad \ldots (1)$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} < \cos x < \cos\frac{4\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < -\frac{1}{2} \quad \ldots (2)$$

Sumando: (1) + (2) , tenemos: $\quad 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \tan x + \cos x < \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$

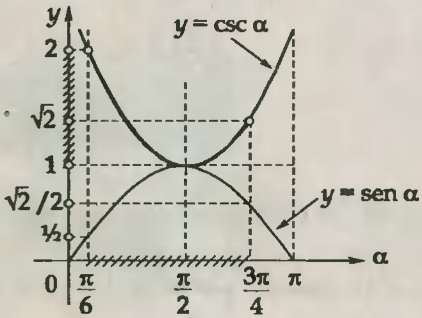
$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2} < f(x) < \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{R_{f(x)} = \left\langle \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right\rangle}$$

**28.-** Para determinar el rango, redefinimos la función $f$ usando identidades del arco simple y arco doble. Veamos:

$$f(x) = \tan x + \cot x \; f(x) = \sec x \,.\, \csc x$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{2}{2\text{sen}x.\cos x} \quad \Rightarrow\ f(x) = 2\csc 2x \ldots (1)$$

Del dato: $\dfrac{\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{6} \leq \underbrace{2x}_{\alpha} \leq \dfrac{3\pi}{4} \ \ldots (2)$




Analizando la gráfica de la cosecante reconocemos que ésta, en el intervalo dado por (2), varía así:

$$1 \leq \csc\alpha \leq 2 \ \Rightarrow\ 2 \leq \underbrace{2\csc 2x}_{f(x)} \leq 4$$

$\therefore$ $\mathbf{R_{f(x)} = [2;\, 4]}$

**29.-** Para que la función $f$ este definida en $\mathbb{R}$, la tangente debe estar bien definida en $\mathbb{R}$ para lo cual se debe cumplir que:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Dom} f = \mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$$

*) Como: $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos x.\dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \text{sen}\, x$

Como: $x \in \mathbb{Z} - (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow -1 < \text{sen}\, x < 1 \quad \Rightarrow \quad$ **Ran** $\mathbf{f = \langle -1;\, 1\rangle}$

Luego al intersectar estos intervalos, se tendrá que:

$$\mathbf{D_f \cap R_f = \langle -1;\, 1\rangle}$$

**30.-** La única restricción proviene de la cosecante, donde: $\csc x\ \exists \Rightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ analizando por cuadrantes se tiene:

1) Si $x \in$ I C ó II C

a) $|\text{sen}\, x| = \text{sen}\, x$ ; pues $\text{sen}\, x > 0$

b) $|\csc x| = \csc x$ , pues $\csc x > 0 \quad \therefore \quad f(x) = \underbrace{\text{sen}\, x.\csc x}_{1} + \underbrace{\csc x\,.\,\text{sen}\, x}_{1} = 2$

2) Si $x \in$ III C ó IV C

c) $|\text{sen}\, x| = -\text{sen}\, x$ , pues $\text{sen}\, x < 0$

d) $|\csc x| = -\csc x$ , pues $\csc x < 0 \quad \therefore \quad f(x) = \underbrace{(-\text{sen}\, x).\csc x}_{-1} + \underbrace{(-\csc x).\,\text{sen}\, x}_{-1} = -2$

3) Si $x = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

Evaluando $f$ en dichos puntos se tiene que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\text{sen}\ \frac{\pi}{2}\right| \csc \frac{\pi}{2} + \left|\csc \frac{\pi}{2}\right| \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 2$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left|\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}\right| \csc \frac{3\pi}{2} + \left|\csc \frac{3\pi}{2}\right| \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -2$$

De (1), (2) y (3) concluimos que: $\boxed{\mathbf{R_f = \{-2; 2\}}}$

**31.-** Analizando por separado cada sumando para las posibles restricciones.

i) El sen $x$, no tiene restricciones pues $x \in \mathbb{R}$

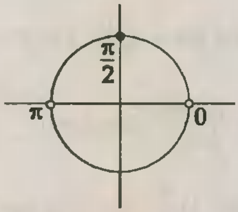
ii) La cot $x$ y la csc $x$ existen si: $x \neq n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

iii) También se debe cumplir: $\text{sen}\ x - 1 \geq 0 \ \Rightarrow\ \text{sen}\ x \geq 1$

Esta desigualdad implica que:

$$\text{sen}\ x = 1 \quad \cup \quad \underbrace{\text{sen}\ x > 1}_{\text{absurdo}}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots$$




Es decir x solo puede tomar valores dados por:

$$\Rightarrow \quad x = (4k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \qquad \therefore\ \boxed{\mathbf{D_f} = \left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}}$$

iv) Para determinar el rango evaluemos en cualquier punto de su dominio, pues $f$ es periódico en $\pi$, por ejemplo en $x = \frac{\pi}{2}$.

Veamos: $$f(x) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{2} + \sqrt{\text{sen}\frac{\pi}{2} - 1} + \csc\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2 \qquad \therefore\ \boxed{\textbf{Rango } \mathbf{R_f = \{2\}}}$$

**32.-** i) Para que la función $f$ exista, se debe cumplir que el radicando sea positivo o igual a cero.

$$\Rightarrow\ x^2 - 1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x^2 \geq 1 \ \Rightarrow\ \sqrt{x^2} \geq 1 \ \Rightarrow\ |x| \geq 1$$

De esta desigualdad se desprenden dos soluciones posibles:

$$x \leq -1 \cup x \geq 1 \quad \therefore \quad \boxed{D_f = \langle -\infty ; -1 \rangle \cap [1; +\infty \rangle} \ldots (1)$$

ii) De la excecante se sabe que: $ex - \sec(x) \leq -2 \cup ex - \sec(x) \geq 0,\ \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ |ex - \sec(x)| \geq 2 \cup |ex - \sec(x)| \geq 0$

$\Rightarrow \ |ex - \sec(x)| \geq 0 \quad \therefore \boxed{R_g \in [0 ; +\infty\rangle} \ldots (2)$

De (1) y (2) se concluye que: $\quad \boxed{D_f \cap R_g = [1; +\infty\rangle}$

## VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LAS F.T. DIRECTAS

**33.-** Por teoría sabemos que: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \ldots (*)$

$\Rightarrow -3 \leq \operatorname{sen} x - 2 \leq -1 \Rightarrow |\operatorname{sen} x - 2| = -(\operatorname{sen} x - 2) \Rightarrow |\operatorname{sen} x - 2| = -\operatorname{sen} x + 2$

Reemplazando en $f$: $\quad f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - 2}{3 - \operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{3 - \operatorname{sen} x} - 1 \ldots (**)$

Partiendo de (*) construimos $f$:

Multiplicamos por (-1): $-1 \leq -\operatorname{sen} x \leq 1$

Sumamos 3 a cada miembro: $2 \leq 3 - \operatorname{sen} x \leq 4$

Invirtiendo: $\quad \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{3 - \operatorname{sen} x} \leq \dfrac{1}{2}$

Restando 1: $\quad -\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{1}{3 - \operatorname{sen} x} - 1 \leq \dfrac{1}{2}$

Y de (**) establecemos que: $\quad -\dfrac{3}{4} \leq f(x) \leq -\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{f_{máx} = -\dfrac{1}{2}}$

**34.-** Recordemos la identidad de transformación de producto a suma:

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)\ ,\ A > B$$

Aplicándolo en la expresión dada, se tendrá:

$$2 \operatorname{sen} 7x \cdot \cos 3x = \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 4x$$

Reemplazando en $f$: $f(x) = \operatorname{sen} 10x + \cancel{\operatorname{sen}}\, 4x - \cancel{\operatorname{sen}}\, 4x - 5 \Rightarrow f(x) = \operatorname{sen} 10x - 5 \ldots (*)$

Por teoría se sabe que: $\quad -1 \leq \operatorname{sen} 10x \leq 1\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Restando 5: $\ -6 \leq \operatorname{sen} 10x - 5 \leq -4$

Y de (*) concluimos que:

$$\underset{\boxed{f_{min}}\nearrow}{-6} \le f(x) \le \underset{\nwarrow\boxed{f_{máx}}}{-4} \quad \Rightarrow \quad f_{máx} + 2f_{min} = -4 + 2(-6) \qquad \therefore \quad \boxed{f_{máx} + 2f_{min} = -16}$$

**35.-** Aplicando el producto notable de suma por diferencia de un binomio, se tendrá:

$$f(x) = 10 - \text{sen}^2 x \ldots (*)$$

Teniendo en cuenta que: $0 \le \text{sen}^2 x \le 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

Construimos la función $f$, para lo cual procedemos así:

Multiplicando por (- 1): $-1 \le -\text{sen}^2 x \le 0$

Sumando "10": $9 \le 10 - \text{sen}^2 x \le 10$

De (*) se deduce que: $9 \le f(x) \le 10 \qquad \therefore \quad \boxed{f_{máx} = 10}$

**36.-** Recordemos la identidad: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} . \cos 4x$

Aplicando esta identidad en $f$: $\quad f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} . \cos 4x \ldots (*)$

Sabiendo que: $\quad -1 \le \cos 4x \le 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

Construyamos la función $f$, para lo cual procedemos así:

Multiplicamos por $\dfrac{1}{4}$: $-\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4} \cos 4x \le \dfrac{1}{4}$

Sumando $\dfrac{3}{4}$: $\quad \dfrac{1}{2} \le \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \cos 4x \le 1$

Y de (*) se establece que: $\quad \dfrac{1}{2} \le f(x) \le 1$

Luego: $m = \dfrac{1}{2} \wedge \text{M} = 1 \qquad \therefore \quad \boxed{m + \text{M} = \dfrac{3}{2}}$

**37.-** Redefinimos la función $f$, completando cuadrados

$$f(x) = 35 - (\tan^2 x - 4 \tan x - 4) + 4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 39 - (\tan x - 2)^2$$

Para obtener el valor máximo de la función $f$ se debe cumplir: $(\tan x - 2)^2$ debe ser mínimo, es decir cero. Luego:

$$\therefore \quad \tan x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ \tan x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \approx 63°30'}$$

**38.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión en una ecuación cuadrática.

Efectuando: $y = 8 + 2\tan x - \tan^2 x$

$\Rightarrow \quad \tan^2 x - 2\tan x + (y - 8) = 0$ (Ec. cuadrática)

Para que "tan $x$" esté definida se debe cumplir que: $\quad \Delta \geq 0 \quad (b^2 - 4ac \geq 0)$

Es decir: $b = -2, a = 1, c = y - 8 \quad \Rightarrow \quad 4 - 4(y - 8) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq y - 8 \quad \Rightarrow \quad y \leq 9$

Pero: $\quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq 9 \quad \therefore \quad \boxed{f_{máx} = 9}$

**39.-** Transformamos la expresión completando cuadrados: $\quad f(x) = (\tan x + 1)^2 - 1$

De acuerdo con la teoría podemos afirmar que: $-\infty < \tan x + 1 < +\infty, \quad x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

Elevando al cuadrado: $\quad 0 \leq (\tan x + 1)^2 < +\infty$

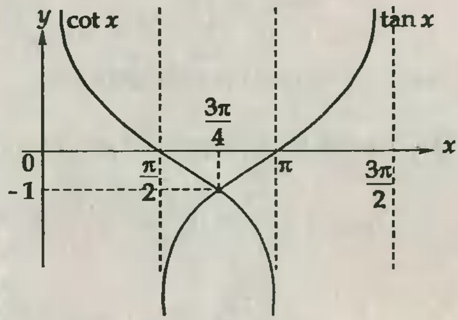
Restando 1: $-1 \leq (\tan x + 1)^2 - 1 < +\infty$

$\Rightarrow \quad -1 \leq f(x) < +\infty \quad \therefore \quad \boxed{f_{mín} = -1}$

**40.-** Analicemos $f(x)$ con las gráficas de las funciones tan $x$ y cot $x$, y en el intervalo de su definición:

Del gráfico se observa que éstos se intersectan en:

$$x = \frac{3\pi}{4}$$




además $|\tan x| \leq |\cot x|$ . . .(1)

Como:

$x \in$ II C $\Rightarrow |\tan x| = -\tan x \wedge |\cot x| = -\cot x$

En (1): $-\tan x \leq -\cot x \quad \Rightarrow \quad \tan x - \cot x \geq 0$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq 0 \quad \therefore \quad \boxed{[f(x)]_{mín} = 0}$

**41.-** Del dato $x \in$ I C y $x = 0 \qquad$ sen $x$ es creciente $\wedge$ tan $x$ es creciente

Ahora analizamos cada función en el intervalo dado:

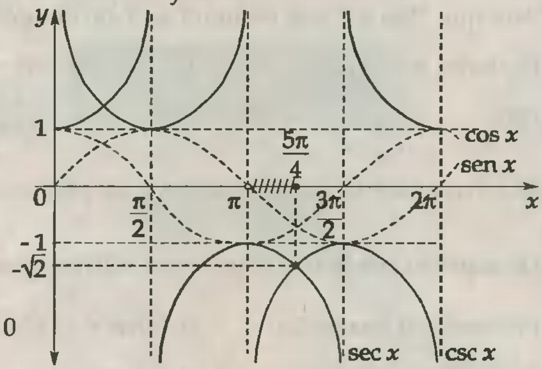
Si $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

- $\text{sen}(0) \leq \text{sen}\, x < \text{sen}\, \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \text{sen}\, x < 1$ . . . (1)
- $\tan(0) \leq \tan x < \tan \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \tan x < +\infty$ . . . (2)

Entonces (1) + (2), tenemos: $0 \leq \text{sen } x + \tan x < +\infty$

$0 \leq f(x) < +\infty \qquad \therefore \qquad \boxed{[f(x)]_{\text{mín}} = 0}$

**42.-** Analicemos con las gráficas de las funciones sec $x$ y csc $x$.




Del gráfico se observa que éstos se intersectan en:

$$x = \frac{5\pi}{4}$$

Además: $|\sec x| \leq |\csc x| \ldots (*)$

Como $x \in$ III C

$\Rightarrow |\sec x| = -\sec x \ \wedge \ |\csc x| = -\csc x$

En (*): $-\sec x \leq -\csc x \Rightarrow \sec x - \csc x \geq 0$

$f(x) \geq 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{[f(x)]_{\text{mín}} = 0}$

### *PERÍODO DE F.T. DIRECTAS*

**43.-** Usando la regla práctica de cálculo del período mínimo, tendremos:

$$T_{\left(\text{sen}\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \Rightarrow T_{\left(\text{sen}\frac{x}{3}\right)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \Rightarrow T_{\left(\text{sen}\frac{x}{4}\right)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \text{m.c.m}(4\pi; 6\pi; 8\pi) = 24\pi \qquad \therefore \qquad \boxed{T_{\text{mín}} = 24\pi}$$

**44.-** Usando la regla práctica de cálculo del período mínimo, tendremos:

$$T_{(\text{sen } 3x)} = \frac{2\pi}{3} \wedge T_{\left(\cos\frac{6x}{5}\right)} = \frac{2\pi}{\frac{6}{5}} \Rightarrow T\left(\cos\frac{6x}{5}\right) = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \text{m.c.m}\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\text{m.c.m}(2\pi; 5\pi)}{\text{m.c.d.}(3; 3)} = \frac{10\pi}{3} \qquad \therefore \qquad \boxed{T_f = \frac{10\pi}{3}}$$

**45.-** Usando la regla práctica para el calculo del periodo mínimo, tendremos para cada función:

a) $T_f = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow a = 14$

b) $T_g = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow b = 12 \qquad \therefore \qquad \boxed{a + b = 26}$

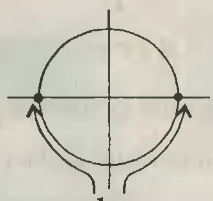
**46.-** Sabemos que $f(x)$ es periódica si $\exists\ T \neq 0$, tal que:

$$f(x + T) = f(x)\ ,\ \forall\ x \in \text{Dom} f,\ x + T \in \text{Dom} f$$

Como: $\quad f(x) = \cos(\pi \cos x) \quad \Rightarrow \quad f(x + T) = \cos(\pi \cos (x + T))$

$\Rightarrow \quad f(x + T) = \cos(\pi \cos x\ .\ \cos T - \pi\ \text{sen}\ x\ .\ \text{sen}\ T)$

Pero por definición se debe cumplir que: $\quad f(x + T) = f(x)$




Entonces se debe cumplir que:

$\pi \cos x\ .\ \cos T - \pi\ \text{sen}\ x\ .\ \text{sen}\ T = \pi \cos x$

$\Rightarrow \quad (\cos T = 1 \vee \cos T = -1) \wedge (\text{sen}\ T = 0)$

$\Rightarrow \quad T = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \therefore \quad \boxed{T_{\text{mín}} = \pi}$

**47.-** Analicemos cada caso por separado. Veamos:

a) La función $f$ es de la forma: $\quad f(x) = \tan^n(Bx)$

$\Rightarrow$ Si "$n$" es par ó impar $\quad \Rightarrow \quad$ el período $T = \dfrac{\pi}{B}$

Reemplazando valores: $\quad n = 15 \quad \wedge \quad B = \dfrac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad T_f = \dfrac{\pi}{\frac{2}{9}} \quad \Rightarrow \quad T_f = \dfrac{9\pi}{2}$

b) La función $g$ es de la forma: $\quad g(x) = \sec^n(Bx)$

$\Rightarrow$ Si "$n$" es par, el período es: $\quad T = \dfrac{\pi}{B}$

Reemplazando datos, tendremos: $\quad n = 10 \quad \wedge \quad B = 4 \quad \Rightarrow \quad T_g = \dfrac{\pi}{4}$

c) La función $h$ es de la forma: $h(x) = \csc^n(Bx)$

$\Rightarrow$ Si "$n$" es impar, $T_h = \dfrac{2\pi}{B}$

Reemplazando datos se tendrá:

$\Rightarrow$ Si $n = 3 \quad \wedge \quad B = \dfrac{3}{7}\ ,\ T_h = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{7}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_h = \dfrac{14\pi}{3}}$

**48.-** Agrupamos convenientemente en factores las funciones y, cofunciones y luego de aplicar las identidades trigonométricas, tendremos:

$$f(x) = \underbrace{(\text{sen}\, x . \csc x)}_{1} \quad \underbrace{(\cos x \,.\, \sec x)}_{1} \quad \underbrace{(\tan x \,.\, \cot x)}_{1}$$

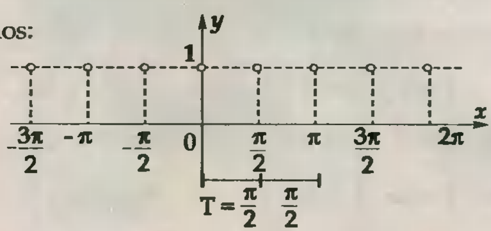
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\text{si } x \neq n\pi \qquad \text{si } x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{si } x \neq \frac{k\pi}{2} \quad \therefore \quad f(x) = 1;\ \text{si: } x \neq \frac{k\pi}{2}$$

Graficando la función $f$ redefinida, tendremos:

Finalmente del gráfico se observa que:

$$\boxed{T_{f(\text{mínimo})} = \frac{\pi}{2}}$$




**49.-** Debemos redefinir la función $f$ por medio de las identidades trigonométricas.

$$f(x) = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x + \sec x \,.\, \csc x + \frac{1}{4}$$

Y reconociendo que esta expresión corresponde a un binomio cuadrado perfecto, tendremos:

$$f(x) = \left(\sec x . \csc x + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \ldots (*)$$

Donde identificamos que: $\sec x \,.\, \csc x = \dfrac{2}{2\text{sen}x . \cos x} = \dfrac{2}{\text{sen}2x} \Rightarrow \sec x \,.\, \csc x = 2\csc 2x$

Luego en (*) tendremos que la función queda así: $f(x) = \left(\underbrace{2\ \csc\ 2x}_{} + \dfrac{1}{2}\right)^2$

Aplicando la regla práctica para calcular el período de la cosecante, tendremos:

$$(T_f)_{\text{mín}} = \frac{2\pi}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{(T_f)_{\text{mín}} = \pi}$$

### *GRÁFICAS DE LAS F.T. DIRECTAS*

**50.-** Podemos transformar la función dada, factorizando así: $f(x) = \sqrt{\text{sen}^2 x\underbrace{(1 - \text{sen}^2 x)}_{}}$

Usando identidades tenemos: $f(x) = \sqrt{\text{sen}^2 x . \cos^2 x}$

Multiplicando y dividiendo por 4: $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4}(2\text{sen}x . \cos x)^2}$

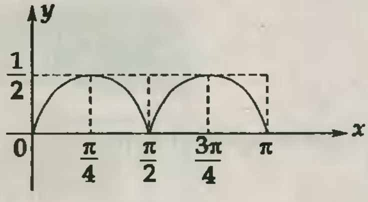
Pero: 2 sen $x$ . cos $x$ = sen $2x$, se tendrá: $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}.\text{sen}^2 2x}$

Luego nos queda: $f(x) = \frac{1}{2}\,|\text{sen } 2x|$

De aquí se observa que la amplitud de $f$ es: $A = \frac{1}{2}$

El periodo de $f$ es: $T = \frac{\pi}{2}$

Luego el gráfico será:




51.- Como: $P \in (y = \text{sen } x) \Rightarrow 2a + b = \text{sen } x_1 \; \ldots (1)$

$$Q \in (y = \cos x) \Rightarrow a - b = \cos x_2 \; \ldots (2)$$

Por dato: $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } x_1 = \cos x_2$

Haciendo (1) = (2): $2a + b = a - b \Rightarrow a = -2b \ldots (*)$

Ahora reemplazamos (*) en M: $M = \frac{a+b}{a-b} = \frac{-2b+b}{-2b-b} = \frac{-b}{-3b} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{3}}$

52.- Para que la función $f$ esté definida en $\mathbb{R}$ la "tan $x$" debe estar adecuadamente definida, es decir:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z} \;\ldots (1)$$

Asimismo, los denominadores de $f$ deben ser no nulos, es decir:

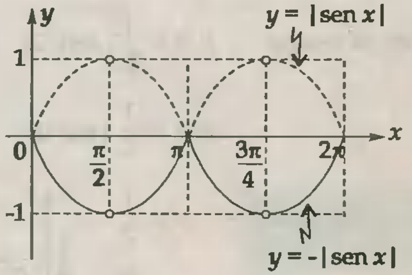
$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z} \;\ldots (2)$$

De (1) y (2) verificamos que ni tan $x$ ni cos $x$ se deben valuar en múltiplos impares de $\pi/2$. A continuación, usando identidades, reducimos $f(x)$:

$$f(x) = \left|\frac{\text{sen } x}{\cancel{\cos x}}.\cancel{\cos x}\right| - \left|\frac{2\text{sen } x.\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}\right| \Rightarrow f(x) = |\text{sen } x| - 2|\text{sen } x|$$

$$\therefore \quad f(x) = -|\text{sen } x|\,,\; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Y elaborando la gráfica correspondiente se obtiene:




**53.-** Analizando el denominador de la fracción se puede establecer que:

$$\operatorname{sen} x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi, \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

El numerador transformado a un producto, nos permite obtener:

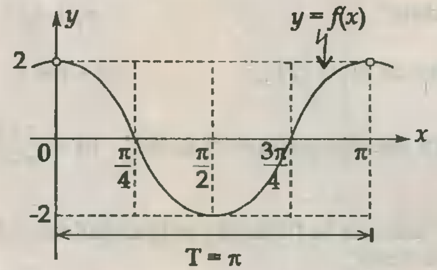
$$f(x) = \frac{2\cancel{\operatorname{sen}} x . \cos 2x}{\cancel{\operatorname{sen}} x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2\cos 2x\ ,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

De este modo el período de:

$f(x) = 2\cos 2x$, es: $T = \dfrac{2\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \pi$

Asimismo identificamos la amplitud de la función: $\quad A = 2$

De este modo el gráfico será así:




**54.-** Cada vez que la gráfica de $f$ intersecta al eje $x$: $f(x) = 0$, es decir:

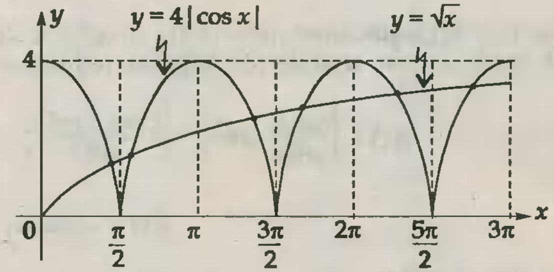
$$\sqrt{x} - 4|\cos x| = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 4|\cos x|$$

Entonces basta con encontrar el número de intersecciones de las gráficas: $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = 4|\cos x|$, en el intervalo: $x \in \langle 0 ; 3\pi\rangle$

Elaboramos las gráficas para $y_1$ e $y_2$, observándose que la amplitud de $y_2$ es 4 y su período es $\pi$.

Si además se verifica que $\sqrt{3\pi} < 4$; se concluye que:

$\therefore$ **# de intersecciones : 6**

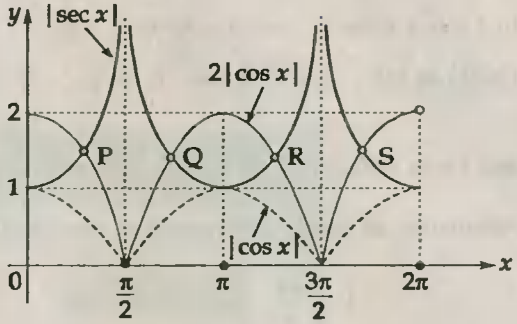


55.- Si la gráfica de la función $f$ intersecta al eje $x$, entonces:

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2|\cos x| - |\sec x| = 0$

$\therefore \quad 2|\cos x| = |\sec x| \ldots (1)$

Sea: $m(x) = 2|\cos x|$ y $n(x) = |\sec x|$, cuyas gráficas se muestran:




Se puede observar que los puntos P, Q, R, S tienen igual ordenada, lo cual resuelve la ecuación (1)

$\therefore$ **Son 4 puntos**

56.- Analizamos la función en dos intervalos: $[0; \pi]$ y $\langle \pi; 2\pi \rangle$. Veamos:

a) Si: $x \in [0; \pi] \quad \Rightarrow \quad |\text{sen}\, x| = \text{sen}\, x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2\ \text{sen}\, x$

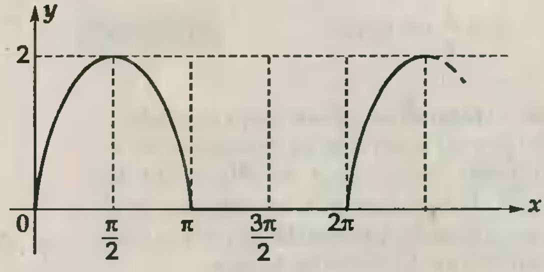
Como: $\quad 0 \leq \text{sen}\, x \leq 1\ ,\ \forall\ x \in [0\,;\pi] \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2\ \text{sen}\, x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(x) \leq 2$

b) Si: $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle \Rightarrow \quad |\text{sen}\, x| = -\text{sen}\, x$

$\Rightarrow \quad f(x) = -\ \text{sen}\, x + \text{sen}\, x$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0$

Graficamos en $[0\ ;\ 2\pi]$




57.- El gráfico corresponde a un sinusoide de la forma: $y = \text{A sen B}x + \text{C}$, y cuyas características identificaremos a continuación:

a) La amplitud: $\quad \text{A} = \dfrac{1}{2}(6 - (-2)) = 4$

b) El período: $\quad \text{T} = 6\pi \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2\pi}{\text{B}} = 6\pi \quad \Rightarrow \quad \text{B} = \dfrac{1}{3}$

c) Asimismo se observa que la función se ha desplazado 2 $u$ hacia arriba. Luego: C = 2

$\therefore \quad \boxed{y = 4\ \text{sen}\ \dfrac{x}{3} + 2}$

58.- Del gráfico se puede tabular la función: $y = \text{A} + \text{B}\cos x$

a) $1 = A + B\,\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} \;\Rightarrow\; A = 1 \ldots (1)$

b) $3 = A + B\cos\pi \;\Rightarrow\; 3 = A - B \ldots\ (2)$

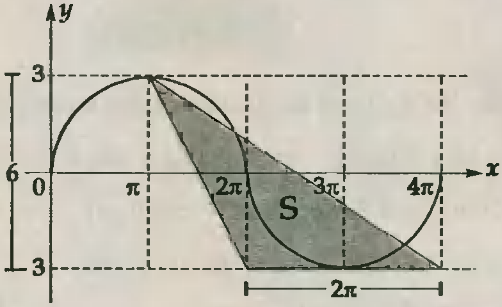
De (1) en (2): $3 = 1 - B \;\Rightarrow\; B = -2 \quad \therefore \quad \boxed{2A - B = 4}$

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $a$ | $\pi/2$ | 1 |
| $b$ | $\pi$ | 3 |

59.- De la función: $y = 3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$ podemos reconocer que la amplitud es: $A = 3$

Asimismo, se puede determinar el período (mínimo):

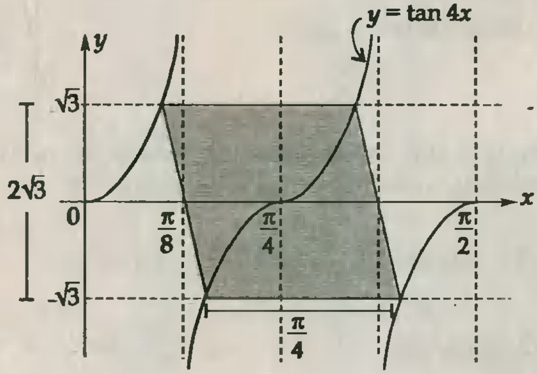
$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; T = 4\pi$$




Luego trasladando estos valores al gráfico dado, se tiene que el área de la región triangular sombreada tiene por base: $2\pi$ y por altura: 6. Luego:

$$S = \frac{1}{2}(2\pi)(6)u^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = 6\pi\, u^2}$$

60.- Tratándose de un trapecio definido por su base, que es el período de la función dada, y por su altura que es $2\sqrt{3}$, lo que hacemos es determinar el período de la función dada, para lo cual utilizamos la fórmula básica:




Si: $f_{(x)} = \tan 4x \;\Rightarrow\; T = \pi/4$

$\Rightarrow$ Área = base × altura

$$\Rightarrow \quad A = \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(2\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{A = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,u^2}$$

### *MISCELÁNEA*

61.- $f(x) = \text{sen}\,x\,.\,\cos x$

Multiplicando por 2: $2f(x) = 2\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$

Pero: $2\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x = \text{sen}\,2x \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{2}\,.\,\text{sen}\,2x \ldots (*)$

a) Evaluamos la función en $x = 0 \wedge x = \pi/4$:

$$f(0) = \frac{1}{2}\ \text{sen}\ 0 = 0 \quad \wedge \quad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Como: $\quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \wedge\ f(0) < f\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow f$ es creciente en $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ $\quad \therefore$ **I es (V)**

b) Como: $0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ 0 < \text{sen}\ 2x < 1 \ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{2}\ \text{sen}\ 2x < \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Ran $f = \left\langle 0\ ;\ \frac{1}{2}\right\rangle$ $\quad \therefore$ **II es (F)**

c) De (*) deducimos el período de la función, por teoría: $\quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \therefore$ **III es (F)**

**62.-** Nuestra estrategia consistirá en analizar la función a partir de los términos que determinan su dominio y rango utilizando para ello los cuadrantes comunes. Veamos:

a) Delimitación del dominio.-

i) La $\tan x\ \exists$ si $x \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}$; $m \in \mathbb{Z}$

ii) La $\cot x\ \exists$ si $x \neq n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

De (i) y (ii) $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Dominio $D_f = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

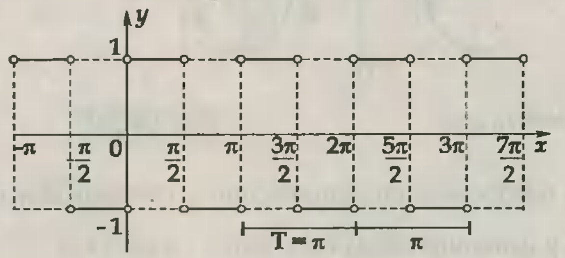
b) Identificación del rango.

Si $\ x \in$ I C ó III C $\quad \Rightarrow |\cot x| = \cot x \quad \therefore\ f(x) = \tan x\ (\cot x) \ \Rightarrow\ f(x) = 1$

Si $x \in$ II C ó IV C $\quad \Rightarrow |\cot x| = -\cot x \ \therefore\ f(x) = \tan x(-\cot x) \ \Rightarrow\ f(x) = -1$

$\therefore \quad$ Rango $D_f = \{-1; 1\}$

Ahora elaboramos el gráfico según los resultados obtenidos:




Del gráfico se observa que el período mínimo es $\pi$ .

63.- Analizando los puntos de discontinuidad para la función secante y cosecante, tenemos:

I) La secante no se encuentra definida si:

$$2x + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

II) La cosecante no se encuentra definida si:

$$2x + \frac{\pi}{3} = m\pi\ ;\ m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Por lo tanto de (I) y (II) se concluye que: $\boxed{x = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\ ;\ n \in \mathbb{Z}}$

64.- Se presenta una sola restricción, la csc $x$ $\exists$ si $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \quad D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

Del dominio, tenemos que: sen $x$ . csc $x = 1$ $\Rightarrow$ $f(x) = \cos(|x|)$

Además podemos reconocer que:

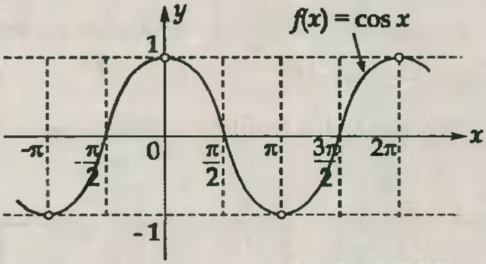
$$f(-x) = \cos|-x| = \cos|x| = f(x) \quad \therefore \quad \text{La función } f \text{ es par.}$$

Ahora analizamos la función por intervalos. Veamos:

i) Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \cos(|x|) = \cos(x)$

ii) Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = \cos(|x|) = \cos(-x) = \cos x$

Graficando la función $f$ por cuadrantes y en base a la gráfica de la función coseno se tiene:




De esta gráfica se observa que: $\boxed{R_f = \langle -1\ ;\ 1 \rangle}$

65.- Analizando las restricciones en el numerador y denominador tenemos:

i) En el numerador y denominador, la cot $x$ $\exists$ si: $x \neq n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

ii) En el denominador, la función $f$ $\exists$ si $\cot x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$

De (i) y (ii): $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ ; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{k\dfrac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

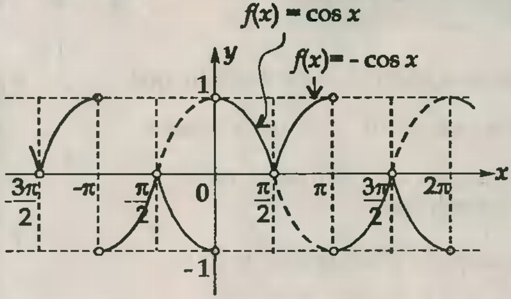
iii) Redefiniendo la función $f$ y recordando que:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}; \quad \text{tendremos:}$$

a) Si $x \in$ IC ó IIIC $\Rightarrow \cot x > 0 \Rightarrow |\cot x| = \cot x \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x.\cot x}{\cot x} = \cos x$

b) Si $x \in$ IIC ó IVC $\Rightarrow \cot x < 0 \Rightarrow |\cot x| = -\cot x \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x.\cot x}{(-\cot x)} = -\cos x$

Graficando la función $f$ por cuadrantes y en base a la gráfica de la función coseno se tiene:



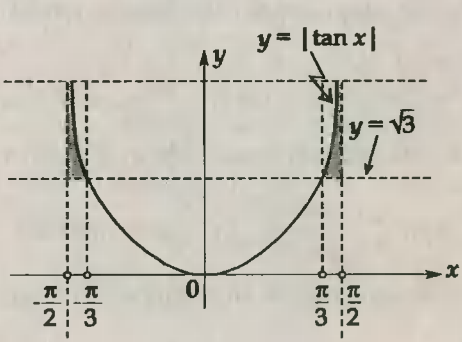

Del gráfico se observa que: $\quad R_f = \langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$

66.- Para que la función $f$ sea no negativa se debe cumplir que:

$$\tan^2 x - 3 \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x \geq 3 \Rightarrow |\tan x| \geq \sqrt{3}$$

A continuación elaboramos la gráfica de:

$$y = |\tan x| \text{ e } y = \sqrt{3} \text{ en } \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$




Podemos reconocer que solo la región sombreada corresponde a la relación:

$$|\tan x| \geq \sqrt{3}$$

Lo cual ocurre solo en los intervalos:

$$|\tan x| \geq 3 \text{, en} \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$\Rightarrow\ -\dfrac{\pi}{2} < x \leq -\dfrac{\pi}{3} \wedge \dfrac{\pi}{3} \leq x < \dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore$

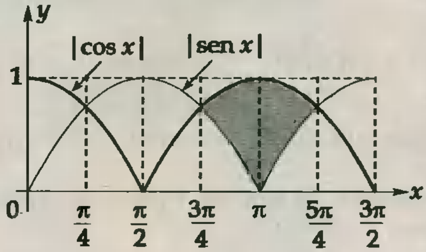
$$\text{Dom} f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

67.- Para que la función $f$ no esté definida, se debe cumplir:

$$|\text{sen } x| - |\cos x| < 0 \Rightarrow |\text{sen } x| < |\cos x|, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$$

En el intervalo dado: $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$, la relación: $|\text{sen } x| < |\cos x|$

Se verifica en el intervalo: $\left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4} \right\rangle$




$\therefore$ **$f$ no es definida en $x \in \left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4} \right\rangle$**

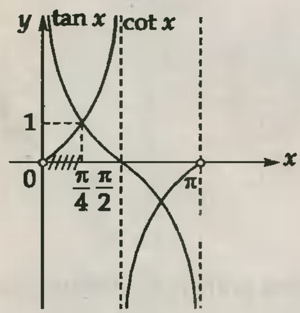
68.- De la condición del problema se debe cumplir que:

$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \cot x - \tan x > 0 \quad \therefore \quad \cot x > \tan x$$

La desigualdad la analizamos con la gráfica de la función tangente y cotangente.

Reconocemos que el punto de intersección está en: $x = \dfrac{\pi}{4}$

Del gráfico de observa que: $x \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{4} \right\rangle$




69.- Según la condición del problema tenemos que:

$$f(x) \geq 0 \ \Rightarrow \ |\csc x| - |\sec x| \geq 0 \ \therefore \ |\csc x| \geq |\sec x|$$

Por las identidades conocidas se tendrá que:

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\text{sen} x}\right| \geq \left|\frac{1}{\cos x}\right| \quad \Rightarrow \frac{1}{|\text{sen} x|} \geq \frac{1}{|\cos x|}$$

De esta relación deducimos que: $\text{sen } x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 ; \pi \qquad \cos \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}$

Luego: $\dfrac{|\text{sen} x|}{|\cos x|} \leq 1 \quad \Rightarrow |\tan x| \leq 1 \ \Rightarrow -1 \leq \tan x \leq 1$

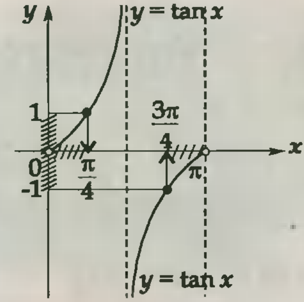
La desigualdad la analizamos con la gráfica de la función tangente.

i) $\tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

ii) $\tan x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$

De la gráfica se observa que:

$$\boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right\rangle}$$




**70.-** Según condición del problema se tiene que:

$$f(x) > 0 \;\Rightarrow\; 3 \tan x - 2 \text{ sen } 2x > 0 \quad \therefore \quad 3 \tan x > 2 \text{ sen } 2x$$

La solución de esta desigualdad la resolveremos primero en forma analítica resolviendo una ecuación trigonométrica elemental para hallar los puntos de intersección de las gráficas de: $h(x) = 3 \tan x \;\wedge\; m(x) = 2 \text{ sen } 2x$

Para luego determinar con las gráficas de dichas funciones los intervalos posibles de solución para la desigualdad: $h(x) > m(x)$

I) $3\tan x = 2 \text{ sen } 2x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3\cancel{\text{sen}\, x}}{\cos x} = 2.\,2\, \cancel{\text{sen}}\; x \cos x$

Al simplificar sen $x$, debemos reconocer que ello encierra una solución:

$$\text{sen } x = 0 \quad \wedge \quad \frac{3}{2} = 2 \cos^2 x$$

De donde deducimos que:

$$\Rightarrow \; x = 0 \;\wedge\; \frac{3}{2} = 2 \cos 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = 1 + \cos 2x$$

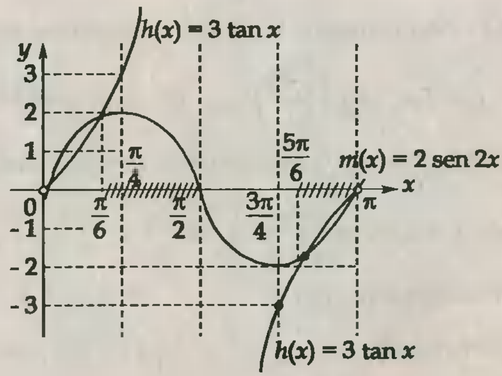
$$\Rightarrow \; \cos 2x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}}$$

II) Ahora graficamos las funciones $h(x)$ y $m(x)$, y tendremos:

Como: $h(x) > m(x)$, entonces se debe cumplir que:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi\right\rangle$$



# CAP. 18 Funciones Trigonométricas Inversas

### *DOMINIO DE LAS F.T. INVERSAS*

**01.-** Como: $0 \le \sqrt{3x-1} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le 3x - 1 \le 1$

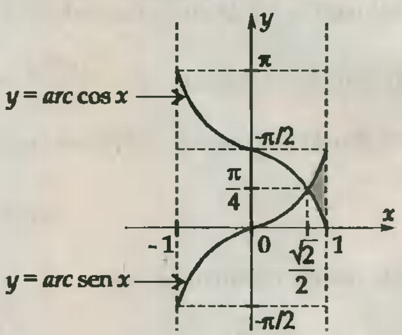
Sumando 1 a cada miembro: $1 \le 3x \le 2$

Dividiendo entre 3: $\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore\quad$ $\mathbf{Dom}\,f = \left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$

**02.-** Para que $f$ esté definida, se debe cumplir:

$arc$ sen $x$ - $arc$ cos $x \ge 0 \;\Rightarrow\;$ $arc$ sen $x \ge arc$ cos $x$

Del gráfico se observa que: $arc$ sen $x \ge arc$ cos $x$




En el intervalo: $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,1\right]$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{Dom}\,f = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,1\right]}$

Nota: En el punto de corte se verifica que: $arc$ sen $x = arc$ cos $x = \pi/4 \wedge x = \sqrt{2}\,/2$

**03.-** Analizaremos la función a partir de sus componentes. Hacemos

$$f_1 = 2\,arc\ \text{sen}\left(\frac{x-1}{2}\right) \;\wedge\; f_2 = 3\,arc\ \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right) \;\Rightarrow\; \text{Dom}\,f = \text{Dom}\,f_1 \cap \text{Dom}\,f_2$$

Determinaremos los dominios de cada función componente:

a) $f_1 = 2\,arc\ \text{sen}\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \;\Rightarrow\; -1 \le \dfrac{x-1}{2} \le 1$

Multiplicando por 2: $-2 \le x - 1 \le 2$

Sumando 1: $-1 \le x \le 3 \;\Rightarrow\; \mathbf{Dom}\,f_1 = [-1\,;\,3]$

b) $f_2 = 3\,arc\cos\left(\dfrac{2x+1}{3}\right) \Rightarrow -1 \le \dfrac{2x+1}{3} \le 1$

Multiplicando por 3: $-3 \le 2x+1 \le 3$

Restando 1: $-4 \le 2x \le 2$

Dividiendo entre 2: $-2 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom} f_2 = [-2\,;1]$

$$\Rightarrow \quad \text{Dom} f = [-1;3] \cap [-2;1] \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{D_f = [-1\,;1]}}$$

**04.-** Lo primero que reconocemos es que la función $f$ no está definida si:

$$\frac{\pi}{3} - arc\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad arc\cos x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \cos\frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

**05.-** La función $f$ la estudiaremos a partir de sus componentes por lo cual hacemos:

$$f_1(x) = 3\,arc\,\text{sen}\left(\frac{3x-1}{4}\right) \wedge f_2(x) = arc\tan(x-2) \Rightarrow \text{Dom} f = \text{Dom} f_1 \cap \text{Dom} f_2$$

Determinaremos los dominios de cada función componente.

a) $f_1(x) = 3\,arc\,\text{sen}\left(\dfrac{3x-1}{4}\right) \quad \Rightarrow -1 \le \dfrac{3x-1}{4} \le 1$

Multiplicando por 4: $-4 \le 3x - 1 \le 4$

Sumando 1 a cada miembro: $-3 \le 3x \le 5$

Dividiendo entre 3: $-1 \le x \le \dfrac{5}{3} \quad \therefore \quad \text{Dom} f_1 = \left[-1\,;\dfrac{5}{3}\right]$

b) $f_2(x) = arc\tan(x-2)$, $\infty < x - 2 < +\infty \quad \therefore \quad \text{Dom} f_2 = \mathbb{R}$

Luego: $\text{Dom} f = \left[-1\,;\dfrac{5}{3}\right] \cap \mathbb{R} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{D_f = \left[-1\,;\frac{5}{3}\right]}}$

**06.-** La función arco dada depende directamente del *arc* sec, por lo cual estará definida si se cumple:

$$4x - 3 \in \langle -\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty\rangle \Rightarrow 4x-3 \le -1 \cup 4x-3 \ge 1$$

$$4xs \le 2 \cup 4x \ge 4 \quad \Rightarrow \quad x \le \frac{1}{2} \cup x \ge 1$$

$$\therefore \quad \text{Dominio} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{D_f = \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1;+\infty\rangle}}$$

07.- En la aplicación de la definición del *arc* sec, se puede establecer que:

$$arc\ \sec\left(x+\frac{1}{2}\right) \in [0\,;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

Siempre que: $\left(x+\frac{1}{2}\right) \in \langle -\infty\,; -1] \cup [1\,; +\infty\rangle \quad \Rightarrow \quad -\infty < x + \frac{1}{2} \leq -1 \vee 1 \leq x + \frac{1}{2} + \infty$

Restando $\frac{1}{2}$: $\infty < x \leq -\frac{3}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x < +\infty \quad \therefore \quad \boxed{\text{Dom } f = \left\langle -\infty\,; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,; +\infty\right\rangle}$

08.- Para que el arco secante dado en el problema, se encuentre adecuadamente definido, se debe cumplir que:

$$8x^2 - 1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |x| \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \left\langle -\infty\,; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,; +\infty\right\rangle}$$

09.- Para que el arco cosecante se encuentre definido, se debe cumplir que:

$$2x^2 - 7 \leq -1 \quad \cup \quad 2x^2 - 7 \geq 1$$

$$x^2 \leq 3 \quad \cup \quad x^2 \geq 4$$

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}) \leq 0 \quad \cup \quad (x+2)(x-2) \geq 0$$

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \quad \cup \quad (x \leq -2 \cup x \geq 2)$$

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \langle -\infty\,; -2] \quad \cup \quad [-\sqrt{3}\,; \sqrt{3}\,] \cup [2; +\infty\rangle}$$

10.- Analizaremos la función dada a partir del estudio de los dominios de:

a) El arco secante se encuentra definido si:

$$8x + 3 \leq -1 \quad \cup \quad 8x + 3 \geq 1$$

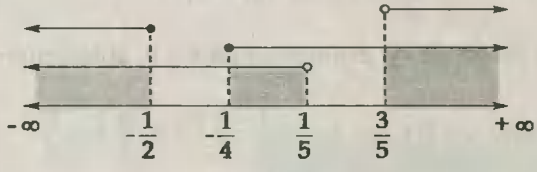
$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \cup \quad x \geq -\frac{1}{4} \ldots (1)$$

b) El arco cosecante se encuentra definido si:

$$5x - 2 \leq -1 \quad \cup \quad 5x - 2 \geq 1$$

$$x \leq \frac{1}{5} \quad \cup \quad x \geq \frac{3}{5} \qquad \ldots (2)$$

Graficamos los resultados obtenidos en (1) y (2) y al intersectarlos tendremos:




$\therefore$ El dominio está indicado por las regiones sombreadas:

$$D_f = \left\langle -\infty ; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1}{4} ; \frac{1}{5} \right] \cup \left[ \frac{3}{5} ; +\infty \right\rangle$$

**11.-** Analizamos cada sumando por separado y tenemos:

(1) El *arc* csc $x$ $\exists$ si $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty\rangle$

(2) El *arc* sen $x$ $\exists$ si $x \in [-1; 1]$

(3) El *arc* tan $x$, no representa restricción, $x \in \mathbb{R}$

Al intersectar estas tres soluciones encontramos solo dos elementos comunes a ellos: $-1 \wedge 1$. Luego:

$$D_f = \{-1 ; 1\}$$

***RANGO DE LAS F. T. INVERSAS***

**12.-** El rango de la función depende de su dominio

Sea: $f_1(x) = 2$ *arc* sen $(2x - 1)$ , $f_2(x) = 3$ *arc* sen $(3x + 1)$

$\Rightarrow$ Dom $f(x)$ = Dom $f_1(x) \cap$ Dom $f_2(x)$

a) En $f_1$ el dominio del *arc* sen es: $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$

Sumando 1: $0 \leq 2x \leq 2$

Dividiendo entre 2: $0 \leq x \leq 1$ $\therefore$ Dom $f_1 = [0; 1]$

b) En $f_2$ el dominio del *arc* sen permite establecer que: $-1 \leq 3x + 1 \leq 1$

Restando 1: $-2 \leq 3x \leq 0$

Dividiendo entre 3: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$ $\therefore$ Dom $f_2 = [-2/3 ; 0]$

Para determinar el dominio de «$f$» intersectamos las soluciones:

$\Rightarrow \quad \text{Dom} f = [0\ ;1] \quad \cap \quad \left[-\frac{2}{3} ; 0\right] \quad \Rightarrow \quad D_f = \{0\}$

Y para determinar el rango de «$f$» evaluamos en $x = 0$, obteniendo:

$f_{(0)} = 2\, arc \text{ sen } (-1) + 3\, arc \text{ sen } (1) \Rightarrow f_{(0)} = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran} f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}}$

**13.-** Como: $\quad |a|^2 = a^2 \quad \Rightarrow f(x) = |arc \text{ sen } x|^2 + 4|arc \text{ sen } x| - 2\pi$

Completando cuadrados: $\quad f(x) = (|arc \text{ sen } x| + 2)^2 - 2\pi - 4 \ \ldots \ (*)$

Según la teoría podemos establecer que: $0 \leq |arc \text{ sen } x| \leq \frac{\pi}{2}$

Sumando "2": $\quad 2 \leq |arc \text{ sen } x| + 2 \leq \frac{\pi}{2} + 2$

Elevando al cuadrado: $\quad 4 \leq (|arc \text{ sen } x| + 2)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)^2$

Sumando "- 2π - 4": $\quad -2\pi \leq \underbrace{(|arc \text{ sen } x| + 2)^2 - 2p - 4} \leq \frac{\pi^2}{4}$

Y de (*) podemos concluir que: $\quad -2\pi \leq f(x) \leq \frac{\pi^2}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran} f = \left[-2\pi ; \frac{\pi^2}{4}\right]}$

**14.-** Dado que «$f$» depende de $arc$ sen $x \wedge arc$ cos $x$, podemos afirmar que: $x \in [-1\ ;1]$

De acuerdo con la identidad aditiva de las F.T.I., $f(x)$ se reduce a:

$$f(x) = arc \text{ sen } x + \pi \ \ldots \ (*)$$

Como: $\quad -\frac{\pi}{2} \leq arc \text{ sen } x \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad \forall\ x \in [-1\ ;1]$

Sumando π: $\quad \frac{\pi}{2} \leq \pi + arc \text{ sen } x \leq \frac{3\pi}{2}$

De (*) se tendrá: $\quad \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran} f = \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]}$

15.- Como: $\quad 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq arc \cos \sqrt{x} \leq \frac{\pi}{2}$

Multiplicando por 2: $\quad 0 \leq 2\, arc \cos \sqrt{x} \leq \pi$

Sumando $\frac{\pi}{4}$ cada miembro: $\quad \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2\,arc\cos\sqrt{x} \leq \frac{5\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq f \leq \frac{5\pi}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran}\, f = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]}$$

**16.-** Analizando la variable del *arc* tan tendremos que ésta se puede transformar en:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

Por definición del cuadrado de un número real, tendremos:

$$0 \leq (x+1)^2 < +\infty \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Sumando «1» a cada miembro de la desigualdad:

$$1 \leq (x+1)^2 + 1 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq arc\tan(x^2 + 2x + 2) < \frac{\pi}{2}$$

Multiplicado por 2: $\quad \frac{\pi}{2} \leq 2\,.arc\tan(x^2 + 2x + 2) < \pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq f(x) < \pi \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran}\, f = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle}$$

**17.-** Según condición del problema tendremos que: $\quad 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < arc\tan x \leq \frac{\pi}{4}$

Multiplicando por 2: $\quad 0 < 2\,arc\tan x \leq \frac{\pi}{2}$

Sumando $\pi/4$: $\quad \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\,arc\tan x \leq \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < f(x) \leq \frac{3\pi}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran}\, f = \left\langle\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]}$$

**18.-** Debemos recordar que: $\quad \text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\ ,\ x \in \mathbb{R}$

Evaluando esta expresión, encontramos su máximo: 1 y su mínimo: 1/2; luego:

$$\frac{1}{2} \leq \text{sen}^4 x + \cos^4 x \leq 1$$

Como la función arco cotangente es decreciente en el intervalo [1/2 ; 1], se tiene:

$$arc\cot\left(\frac{1}{2}\right) \geq \underbrace{arc\cot(\text{sen}^4x + \cos^4x)}_{f(x)} \geq arc\cot(1)$$

Como: $\cot(127°/2) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{127°}{2} = arc\cot\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{127\pi}{360}° \geq f(x) \geq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{R_f} = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{127\pi}{360}\right]}$$

**19.-** Efectuamos la división indicada de la variable del *arc* cot:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Por definición del cuadrado de un número real: $x^2 \geq 0 \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

Sumando «1» a cada miembro: $1 + x^2 \geq 1$

Tomando la inversa: $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

Multiplicando por «-1»: $0 > -\frac{1}{1+x^2} \geq -1$

Sumando «1» a cada miembro: $1 > 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0$

Como la función arco cotangente es decreciente en el intervalo $[0 ; 1\rangle$ se tiene:

$$arc\cot(1) < \underbrace{arc\cot\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)}_{f(x)} \leq arc\cot(0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < f(x) \leq \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{R_f} = \left\langle\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]}$$

**20.-** Analizando cada sumando se tiene:

i) El *arc* cos $x$ está definida si $x \in [1; 1]$

ii) El *arc* cot $x$ está definida si $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ No hay restricción para la variable de la función «*f*», por lo tanto de (i) y (ii) al intersectar tendremos que el dominio de «*f*» es: $D_f = [-1; 1]$

Para determinar el rango, debemos tener en cuenta que el *arc* cos *x* y *arc* cot *x* son funciones decrecientes en el intervalo [-1 ; 1]. Veamos:

1) Si: $-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad arc\cos(-1) \geq arc\cos x \geq arc\cos(1)$

$\Rightarrow \quad \pi \geq arc\cos x \geq 0 \ldots (1)$

2) Si: $-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad arc\cot(-1) \geq arc\cot x \geq arc\cot(1)$

$$\Rightarrow \quad \pi - arc\cot(1) \geq arc\cot x \geq \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \geq arc\cot x \geq \frac{\pi}{4} \ldots (2)$$

De (1) + (2) tendremos:

$$\frac{7\pi}{4} \geq \underbrace{arc\cos x + arc\cot x}_{f(x)} \geq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{R_f = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]}$$

**21.-** Para las funciones arco tangente y arco cotangente (*arc* tan *x*, *arc* cot *x*) no hay restricciones dado que $x \in \mathbb{R}$. Asimismo debemos recordar la identidad:

$$arc\tan x + arc\cot x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad arc\cot x = \frac{\pi}{2} - arc\tan x$$

Sustituyendo en la función dada: $\quad f(x) = arc\tan x\left[\frac{\pi}{2} - arc\tan x\right]$

Efectuando la multiplicación indicada: $\quad f(x) = -\left[(arc\tan x)^2 - \frac{\pi}{2} arc\tan x + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16}\right]$

Completando cuadrados: $\quad f(x) = -\left(arc\tan x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{16}^2$

Como: $\quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad arc\tan x > arc\tan 1$

Dado que EL arco tangente es creciente en $\langle 1 ; \infty \rangle$:

$$arc\tan x - \frac{\pi}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(arc\tan x . \frac{\pi}{4}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(arc\tan x - \frac{\pi}{4}\right)^2 < 0$$

$$\underbrace{-\left(arc\tan x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{16}^2}_{f(x)} < \frac{\pi}{16}^2 \qquad \therefore \qquad \boxed{Rf = \left\langle -\infty ; \frac{\pi^2}{16} \right\rangle}$$

**22.-** Debemos recordar la identidad: $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ , $x \in \mathbb{R}$

Si evaluamos el máximo y mínimo de esta relación encontraremos que:

$$-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} x + \cos x \leq \sqrt{2} \quad \ldots (1)$$

A su vez, la función arco secante se encontrará definida si verifica que:

$$\operatorname{sen} x + \cos x \leq -1 \cup \operatorname{sen} x + \cos x \geq 1 \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) al intersectar los intervalos tendremos:

$$-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} x + \cos x \leq -1 \cup 1 \leq \operatorname{sen} x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

Tener en cuenta que en $[-\sqrt{2}\ ; -1]$ el arco secante es creciente, por otro lado en $[1\ ; \sqrt{2}\,]$ es creciente. Luego:

$$\mathit{arc}\sec(-\sqrt{2}\,) \leq \mathit{arc}\sec(\operatorname{sen} x + \cos x) \leq \mathit{arc}\sec(-1) \quad \cup$$

$$\mathit{arc}\sec(1) \leq \mathit{arc}\sec(\operatorname{sen} x + \cos x) \leq \mathit{arc}\sec(\sqrt{2}\,)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \leq f(x) \leq \pi \cup 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{R_f = \left[0\ ; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\ ; \pi\right]}$$

**23.-** Tener en cuenta que *arc* sec $x$ se encuentra definida si:

$$x \in \langle -\infty\ ; -1\,] \cup [1\ ; +\infty\rangle$$

Sea $\theta = \mathit{arc}\sec x$ , también se debe cumplir:

$$\theta = \mathit{arc}\sec x \in \left[0\ ; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}\ ; \pi\right] \ldots (1)$$

Asimismo csc θ se encuentra definida si:

$$\theta \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \theta \neq 0; \pi\ ; 2\pi$$

En (1) tenemos: $\theta \in \underbrace{\left\langle 0\ ; \frac{\pi}{2}\right\rangle}_{\text{la cosecante decrece}} \cup \underbrace{\left\langle\frac{\pi}{2}\ ; \pi\right\rangle}_{\text{la cosecante crece}}$

$$\Rightarrow \csc\theta \in \langle 1\ ; +\infty\rangle \cup \langle 1\ ; +\infty\rangle \qquad \therefore \qquad \boxed{R_f = \langle 1\ ; +\infty\rangle}$$

**24.-** Recordemos que: $-\frac{\pi}{2} \le arc\ \text{sen}\ x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in [-1 ; 1]$

a) Analizando la variable del *arc* sen dado, debe cumplirse que: $-1 \le \frac{2x-3}{5} \le 1$

Multiplicando por 5: $-5 \le 2x - 3 \le 5$

Sumando 3: $-2 \le 2x \le 8$

Dividiendo entre 2: $-1 \le x \le 4 \quad \therefore \quad$ **Dom $f$ = [-1; 4]**

b) Reconocemos que: $-\frac{\pi}{2} \le arc\ \text{sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) \le \frac{\pi}{2}$

Multiplicando por $\frac{2}{3}$: $-\frac{\pi}{3} \le \frac{2}{3}\ arc\ \text{sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) \le \frac{\pi}{3}$

Sumando $\frac{\pi}{6}$: $-\frac{\pi}{6} \le \frac{2}{3} \cdot arc\ \text{sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \underbrace{\left|\frac{2}{3} . arc\ \text{sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6}\right|}_{f(x)} \le \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran } f = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]}$$

**25.-** a) Para determinar el dominio analizamos la variable del *arc* sen: $-1 \le 3x - 2 \le 1$

Sumando 2: $1 \le 3x \le 3$

Dividiendo entre 3: $\frac{1}{3} \le x \le 1 \quad \therefore \quad$ **Dom $f$ =** $\left[\frac{1}{3} ; 1\right]$

b) Para determinar el rango analizamos el *arc* sen dado: $-\frac{\pi}{2} \le arc\ \text{sen}\ (3x - 2) \le \frac{\pi}{2}$

Multiplicado por $\frac{2}{3}$: $-\frac{\pi}{3} \le \frac{2}{3}\ arc\ \text{sen}\ (3x - 2) \le \frac{\pi}{3}$

Sumando $\frac{\pi}{4}$: $-\frac{\pi}{12} \le \frac{2}{3}\ arc\ \text{sen}\ (3x - 2) + \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{12}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{12} \le f \le \frac{\pi}{12} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{Ran } f = \left[\frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\right]}$$

**26.-** Tal como hicimos en los casos anteriores, haremos los cálculos así:

a) Analizamos la variable del *arc* coseno, el cual verifica: $-1 \leq \dfrac{2+x}{4} \leq 1$

Multiplicando por 4: $-4 \leq 2 + x \leq 4$

Restando 2: $-6 \leq x \leq 2 \quad \therefore \quad$ **Dom** $f = [-6; 2]$

b) Construimos la función a partir del *arc* cos, el cual verifica: $0 \leq arc\cos\left(\dfrac{2+x}{4}\right) \leq \pi$

Multiplicando por $\dfrac{1}{4}$: $0 \leq \dfrac{1}{4}.arc\cos\left(\dfrac{2+x}{4}\right) \leq \dfrac{\pi}{4}$

Sumando $\dfrac{3\pi}{8}$: $\dfrac{3\pi}{8} \leq \dfrac{3\pi}{8} \cdot \dfrac{1}{4}.arc\cos\left(\dfrac{2+x}{4}\right) \leq \dfrac{5\pi}{8}$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\pi}{8} \leq f(x) \leq \frac{5\pi}{8} \quad \therefore \quad \textbf{Ran } f = \left[\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$$

**27.-** Tal como hicimos en el problema anterior, analizamos por partes. Veamos:

a) Recordemos que la variable del *arc* cot debe estar comprendido en el intervalo:

$$-\infty < x - 1 < \infty \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < +\infty \quad \therefore \quad \textbf{Dom } f = \mathbb{R}$$

b) Reconstruimos la función a partir de: $0 < arc\cot(x-1) < \pi$

Restando $\dfrac{\pi}{6}$: $-\dfrac{\pi}{6} < arc\cot(x-1) - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{6}$

Tomando valor absoluto: $0 \leq \left|arc\cot(x-1) - \dfrac{\pi}{6}\right| < \dfrac{5\pi}{6} \quad \therefore \quad$ **Ran** $f = \left[0; \dfrac{5\pi}{6}\right\rangle$

**28.-** Es importante recordar que:

$$arc\,\text{sen}(-x) = -arc\,\text{sen}(x) \quad \wedge \quad arc\csc(-x) = -arc\csc(x)$$

$$arc\cos(-x) = \pi - arc\cos(x) \quad \wedge \quad arc\sec(-x) = \pi - arc\sec(x)$$

Sustituyendo convenientemente en la función dada, está queda así:

$$f(x) = -arc\,\text{sen}(x) + \pi - arc\cos(x) - arc\csc(x) + \pi - arc\sec(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\underbrace{[arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x]}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{[arc\ \sec x + arc\ \csc x]}_{=\frac{\pi}{2}} + 2\pi \ \ldots \ (*)$$

Si: $x \in [-1; 1]$ y si: $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

a) De (*) podemos afirmar que:

a1) En el primer sumando: $x \in [-1 ; 1]$

a2) En el segundo sumando: $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty\rangle$

Luego el intervalo común se obtiene intersectando los encontrados:

$$D_f = \{-1 ; 1\}$$

b) Si en (*) aplicamos las identidades correspondientes encontraremos que:

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \Rightarrow \quad f(x) = \pi \quad \therefore \quad \boxed{R_f = \{\pi\}}$$

**29.-** Analizando cada sumando se tiene:

i) El *arc* sen $x$ está definido si: $x \in [-1 ; 1]$

ii) El *arc* sec $x$ está definido si: $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty\rangle$

Por lo tanto de (i) y (ii) al intersectar obtenemos el dominio de la función:

$$D_f = \{-1; 1\}$$

Para determinar el rango evaluamos para cada "$x$", del dominio, su respectivo valor $f(x)$

1) $f(-1) = arc\ \text{sen}\ (-1) + arc\ \sec(-1) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = -\ arc\ \text{sen}(1) + \pi - \underbrace{arc\ \sec(1)}_{0} + 1$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi + 1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = \frac{\pi}{2} + 1$$

2) $f(1) = arc\ \text{sen}\ (1) + \underbrace{arc\ \sec\ (1)}_{0} + 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{\pi}{2} + 1$

Como los valores obtenidos son idénticos, concluimos que:

$$\boxed{R_f = \left\{\frac{\pi}{2} + 1\right\}}$$

**30.-** La función incluye el arco cosecante, la cual está definida si se cumple que:

$$3x \in \left\langle -\infty ; -1 \right] \cup [1 ; +\infty\rangle \Rightarrow x \in \left\langle -\infty ; -\frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{1}{3} ; +\infty \right\rangle \ldots (*)$$

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \left\langle -\infty ; -\frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{1}{3} ; +\infty \right\rangle}$$

Conociendo el dominio se determina el rango, de tal manera que:

$$arc\ \csc(3x) \in \left[ -\frac{\pi}{2} ; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0 ; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\ arc\ \csc(3x) \in \left[ -\frac{\pi}{8} ; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right] \ldots (**)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}\, arc\ \csc(3x) + \pi}_{f(x)} \in \underbrace{\left[ \frac{7\pi}{8} ; \pi \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{9\pi}{8} \right]}_{\text{Rango} = R_f}$$

$$\therefore \quad \boxed{R_f = \left[ \frac{\pi}{8} ; \pi \right\rangle \cup \left\langle \pi ; \frac{9\pi}{8} \right]}$$

Nota: Los despejes en (*) y (**) han sido directos. ¡verifícalos!

### *PROPIEDADES DE LAS F.T. INVERSAS*

**31.-** Hagamos una evaluación de cada término:

a) $\alpha = arc\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\beta = arc\ \tan(1) \Rightarrow \tan\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

c) $\theta = arc\ \cos(-1) \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

Reemplazando en la expresión dada tendremos:

$$M = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow M = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{5}{12}}$$

32.- Analicemos del siguiente modo:

a) $\alpha = arc\ \tan(-\sqrt{3}) \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$

b) $\beta = arc\ \text{sen}\ 1 \Rightarrow \text{sen}\ \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$

Luego: $M = \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow M = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow M = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

33.- Apliquemos la identidad aditiva especial con $x = y$, obteniéndose:

$$2\ arc\ \tan x = arc\ \tan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Ahora evaluamos para $x = 1/2$:

$$\Rightarrow 2\ arc\ \tan\left(\frac{1}{2}\right) = arc\ \tan\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow 2\ arc\ \tan\left(\frac{1}{2}\right) = arc\ \tan\ \frac{4}{3}$$

A continuación reemplazamos en la expresión dada para «M»

$$\Rightarrow M = \tan\left(\pi + arc\ \tan\ \frac{4}{3}\right) = \tan\left(arc\ \tan\ \frac{4}{3}\right)$$

Por propiedad: $\tan(arc\ \tan x) = x$ , si: $x \in \mathbb{R}$ $\therefore$ $\boxed{M = \frac{4}{3}}$

34.- Nuestra estrategia consistirá en aplicar el criterio de reducción al primer cuadrante:

a) $\text{sen}\ 5 = \text{sen}\ (5 - 2\pi)$ ... ver *Fig* (1)

$$\Rightarrow arc\ \text{sen}(\text{sen}\ 5) = arc\ \text{sen}(\text{sen}\ (5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

b) $\cos 6 = \cos(2\pi - 6)$ ... ver *Fig* (2)

$$\Rightarrow arc\ \cos(\cos 6) = arc\ \cos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6 \in [0; \pi]$$

$$M = 5 - 2\pi + 2\pi - 6 \quad \therefore \quad \boxed{M = -1}$$

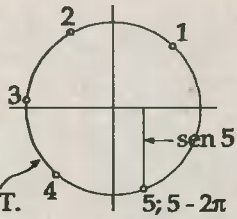



*Fig* (1)

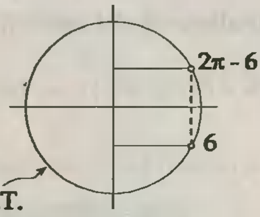



*Fig* (2)

**35.-** Recordamos que: $\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

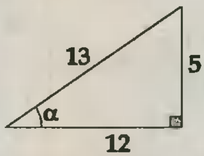
Luego en la expresión «M», se tendrá:

$$M = arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow M = \pi - arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M = \pi - \frac{\pi}{6} \qquad \therefore \quad \boxed{\mathbf{M = \frac{5\pi}{6}}}$$

**36.-** Elaboramos un análisis del *arc* tan $\left(\frac{5}{12}\right)$, para lo cual hacemos:

$$\alpha = arc\tan\left(\frac{5}{12}\right) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$$




A continuación evaluamos la expresión dada: $M = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Usando identidades de la cotangente del ángulo mitad nos queda: $M = \csc\alpha + \cot\alpha$

En atención al ⊿ elaborando la expresión queda así:

$$M = \frac{13}{5} + \frac{12}{5} \Rightarrow M = \frac{25}{5} \qquad \therefore \quad \boxed{\mathbf{M = 5}}$$

**37.-** Sea: $\theta = arc\cos\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow M = 3\cos 2\theta$

Pero: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos 2\theta = 2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 1$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow M = 3\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{\mathbf{M = 1}}$$

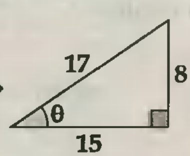
**38.-** Sea: $\alpha = arc\ \text{sen}\sqrt{\frac{7}{30}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{7}{30}}$

$$M = \cot\left\{\frac{1}{2}\ arc\ \tan\ \underbrace{[\cos 2\alpha]}\right\}$$

Recordamos aquí que: $\cos 2\alpha = 1 - 2\ \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\left(\sqrt{\frac{7}{30}}\right)^2 = \frac{8}{15}$

$$\Rightarrow \quad M = \cot\left\{\frac{1}{2}\ arc\ \tan\left(\frac{8}{15}\right)\right\} \quad \ldots (1)$$

En este punto conviene hacer: $\theta = arc\ \tan\left(\frac{8}{15}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{8}{15} \Rightarrow$




Reemplazando θ en (1): $M = \cot\frac{\theta}{2}$

Aquí conviene recordar que: $\cot\frac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta$

Del triángulo rectángulo: $\cot\frac{\theta}{2} = \frac{17}{8} + \frac{15}{8} = \frac{32}{8} \quad \therefore \quad \boxed{M = 4}$

**39.-** Nuestra estrategia consistirá en expresar todos los términos de modo que se puede identificar expresiones del tipo: F.T.(F.T.I. $x$) = $x$.

$$M = 1 - \cos^2\left(arc\ \cos\sqrt{\frac{7}{8}}\right) + 1 - \text{sen}^2\left(arc\ \text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\right)$$

$$M = 2 - \left(\cos\left(arc\ \cos\sqrt{\frac{7}{8}}\right)\right)^2 - \left(\text{sen}\left(arc\,\text{sen}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\right)^2$$

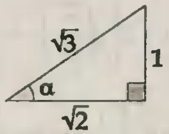
Recordando que: $\cos(arc\ \cos x) = x \quad \wedge \quad \text{sen}(arc\ \text{sen}\ x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1\ ;\ 1]$

Entonces: $M = 2 - \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = 2 - \frac{7}{8} - \frac{1}{8} \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**40.-** Analizamos la expresión en base a los términos de la fracción. Veamos del numerador:

$$\alpha = arc\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A partir de esta razón construimos un triángulo rectángulo:




$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es conveniente aquí, calcular el valor de tan 2α, para lo cual recordemos la identidad del ángulo doble:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tan 2\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

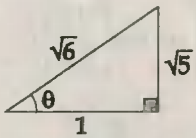
$$\Rightarrow \quad \tan 2\alpha = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = arc\tan(2\sqrt{2})$$

Reemplazando: $\quad M = \dfrac{\alpha}{2\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{M = \dfrac{1}{2}}$

**41.-** Procediendo como en el problema anterior, hacemos:

$$\theta = arc\tan(\sqrt{5}) \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{5}$$

Construyendo un triángulo rectángulo:




$$\Rightarrow \quad M = \text{sen}[2\, arc\tan\underbrace{(\cos 2\theta)}\,]$$

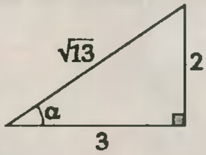
Recordando la identidad del ángulo doble se tendrá que:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \;\Rightarrow\; \cos 2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2 \Rightarrow\; \cos 2\theta = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \;\Rightarrow\; \cos 2\theta = -\frac{2}{3}$$

Reemplazando en la expresión para «M», tendremos:

$$\Rightarrow \quad M = \text{sen}\left[\,2\, arc\tan\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \text{sen}\left[\,-2\,\underbrace{arc\tan\frac{2}{3}}\,\right]$$

Ahora sea: $\alpha = arc\tan\frac{2}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}$




Construyendo un triángulo rectángulo

$$M = \text{sen}(2\alpha) = -2\ \text{sen}\ \alpha.\cos\alpha$$

A continuación reemplazamos valores según el $\triangle$ construido

$$M = -2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = -\frac{12}{13}}$$

**42.-** Nuestra estrategia consistirá en analizar cada sumando. Veamos:

a) Sea: $\alpha = arc\tan\frac{12}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{12}{5}$

Construyendo un triángulo rectángulo: Ver *Fig.* (1)

b) También sea: $\beta = arc\cot\frac{8}{15} \Rightarrow \cot\beta = \frac{8}{15}$

Construyendo un triángulo rectángulo Ver *Fig.* (2)

*Fig.* (1)

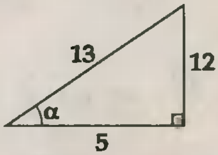
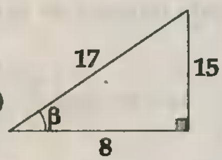



*Fig.* (2)




Utilizando estos triángulos se puede reemplazar en «M»:

Luego: $M = 13\ \text{sen}\ \alpha + 17\cos\beta \Rightarrow M = 13\left(\frac{12}{13}\right) + 17\left(\frac{8}{17}\right) \quad \therefore \quad \boxed{M = 20}$

**43.-** A partir de la identidad aditiva, se verifica que:

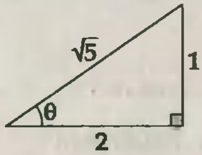
$$arc\ \text{sen}\frac{1}{3} + arc\cos\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la expresión dada se tendrá: $M = \cos\left(\frac{\pi}{2} - arc\tan\frac{1}{2}\right)$

Por ángulos complementarios: $M = \text{sen}\left(arc\tan\frac{1}{2}\right)$

Aquí conviene hacer: $\theta = arc\tan\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$

Construyendo un triángulo rectángulo:




$$\Rightarrow \quad M = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando: $\boxed{M = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

**44.-** Sean: $\alpha = arc\cos\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{3} \quad \ldots (1)$

$$\beta = arc\,\operatorname{sen}\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3} \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) podemos deducir que: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \ldots (\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta)$

Luego: $M = \cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\beta \;\Rightarrow\; M = \cos^4\alpha - \cos^4\alpha \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$

**45.-** Evaluemos cada término de la expresión:

$$\alpha = arc\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\beta = arc\tan 1 \Rightarrow \tan\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = arc\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\delta = \text{arc}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \cos\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{4}$$

Reemplazando estos valores en la expresión dada para «M», tendremos:

$$M = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\frac{4\pi}{12}}{\frac{4\pi}{12}} \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$$

**46.-** Como en el ejercicio anterior, conviene analizar cada término. Veamos:

$$\alpha = arc\ \text{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = arc\ \tan\,\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = arc\ \cos\,\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Luego: $M = \dfrac{2\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad M = \dfrac{2(1)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = \frac{5}{4}}$$

**47.-** Recordar: $arc\ \tan(-x) = -\ arc\ \tan(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$

Asimismo al racionalizar se tiene: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3 + 2\sqrt{2}$

$$W = arc\ \tan\,\underbrace{(3 + 2\sqrt{2})}_{M} + arc\ \tan\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{N} \qquad \ldots (*)$$

Reconocemos que la expresión se puede transformar por medio de la identidad aditiva especial, por lo que aplicamos la condición:

Si: $M.N < 0 \ \Rightarrow \ k = 0$

Luego (*) queda así: $\quad W = arc\ \tan\left[\dfrac{(3+2\sqrt{2}) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1 - (3+2\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right]$

$$\Rightarrow \quad W = arc\ \tan\left[\frac{3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}}\right] = arc\ \tan\,(1) \qquad \therefore \qquad \boxed{W = \frac{\pi}{4}}$$

**48.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada de modo que las funciones *arc* sen y *arc* cos quedan vinculadas por una adición, lo cual se logrará aplicando las propiedades de proporciones:

Usando proporciones: $$\frac{arc\ \text{sen}\ x}{arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x} = \frac{a}{a+b}$$

Como: $$arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x = \frac{\pi}{2}\ ,\quad \forall x \in [-1\ ;\ 1]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{arc\ \text{sen}\ x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{a+b} \quad \therefore \quad \boxed{arc\ \text{sen}\ x = \frac{a\pi}{2(a+b)}}$$

**49.-** Transformamos la expresión dada factorizando en el denominador:

$$M = \frac{\tan(arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x + arc\ \text{sen}\ x)}{\tan(2\underbrace{(arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x)}_{\pi/2} + arc\ \cos x)} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} + arc\ \text{sen}\ x\right)}{\tan(\pi + arc\ \cos x)}$$

Usando el criterio de reducción al primer cuadrante en cada término de la fracción, tendremos:

$$M = \frac{\cot(arc\ \text{sen}\ x)}{\tan(arc\ \cos x)}$$

Pero: $\tan(arc\ \cos x) = \cot(arc\ \text{sen}\ x)$ ya que: $arc\ \text{sen}\ x + arc\ \cos x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**50.-** Haciendo uso de la definición de F.T.I. , transformamos la expresión dada:

$\alpha = arc\ \tan x \Rightarrow \tan\alpha = x \qquad \beta = \text{arc}\ \tan y \Rightarrow \tan\beta = y \qquad \theta = \text{arc}\ \tan z \Rightarrow \tan\theta = z$

Si: $\alpha + \beta + \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha . \tan\beta . \tan\theta$

Aplicando la identidad condicional: $x + y + z = xyz$

Luego: $$M = \frac{xyz + 2xyz}{xyz} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{3xyz}{xyz} \quad \therefore \quad \boxed{M = 3}$$

**51.-** Nuestra estrategia consistirá en expresar la relación dada en base a una nueva variable N. A continuación procedemos a reducir la variable N en base a las identidades trigonométricas. Veamos:

Sea: $$N = \frac{1 - \text{sen}2x - \cos 2x}{1 - \text{sen}2x + \cos 2x} \quad \ldots\ (*)$$

Usando: $1 - \cos 2x = 2\,\text{sen}^2 x$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \;\wedge\; \text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \,.\, \cos x$$

Sustituyendo en (*) se tendrá:

$$N = \frac{2\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x.\cos x}{2\cos^2 x - 2\,\text{sen}\, x.\cos x} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2\,\text{sen}\, x\,\cancel{(\text{sen}\, x - \cos x)}}{-2\cos x\,\cancel{(\text{sen}\, x - \cos x)}}$$

Simplificando: $N = -\tan x \;,\; \text{sen}\, x \neq \cos x$

Luego: $M = arc\,\tan(-\tan x) = -arc\,\tan(\tan x)$

Pero: $arc\,\tan(\tan x) = x \;\Leftrightarrow\; x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \quad \therefore \quad \boxed{M = -x}$

**52.-** Analizamos la expresión dada a partir del radicando del segundo radical, el cual estará correctamente definido, si se verifica que:

$$arc\,\text{sen}\, x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} arc\,\text{sen}\, x > \dfrac{\pi}{2} \text{ (no puede ser)} \\ \vee \\ arc\,\text{sen}\, x = \dfrac{\pi}{2} \text{ (si puede ser)} \end{cases} \Rightarrow\; arc\,\text{sen}\, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow\; x = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Sustituimos estos resultados en la expresión original, obteniendo:

$$M = \sqrt{\pi^2 - 2\pi.\underbrace{arc\cos 1}_{0} + \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}}_{0}} \quad \therefore \quad \boxed{M = \sqrt{\pi^2} = \pi}$$

**53.-** En base a la resolución del problema anterior podemos afirmar que:

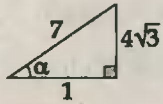
$$arc\,\text{sen}\, x = \frac{\pi}{2} \;\wedge\; x = 1$$

Al reemplazar estos valores en la expresión dada para «M», tendremos:

$$M = \frac{\sqrt{\pi^2 . 2\pi.arc\cos 1 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}}}}{arc\tan 1 + arc\,\text{sen}\, 0} \;\Rightarrow\; M = \frac{\sqrt{\pi^2 - 2\pi(0) + 0}}{\dfrac{\pi}{4} + 0} \;\Rightarrow\; M = \frac{\cancel{\pi}}{\dfrac{\cancel{\pi}}{4}} \quad \therefore \quad \boxed{M = 4}$$

**54.-** Analizamos la expresión dada a partir de sus términos. Así con el primer término hacemos:

$$\alpha = arc \cos \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow$$




Asimismo, de este triángulo rectángulo reconocemos que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc\ \text{sen}\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

Sustituyendo esta expresión en la relación dada «θ», esta queda así:

$$\theta = arc\ \text{sen}\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) + arc \cos\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

**55.-** Dado que: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} < 1$, aplicaremos la identidad aditiva especial:

Así tendremos que: $\quad arc \tan a + arc \tan b = arc \tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$, $ab < 1$

$$arc \tan \frac{1}{2} + arc \tan \frac{1}{3} = arc \tan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad arc \tan \frac{1}{2} + arc \tan \frac{1}{3} = arc \tan(1)$$

Reemplazando en la expresión original tendremos:

$$x = arc \tan 1 + arc \tan 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\underbrace{arc \tan 1}_{\pi/4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Luego: $\quad \text{sen}\ x = \text{sen}\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\text{sen}\ x = 1}$

**56.-** Esta serie la resolveremos a partir del análisis de su término general, el cual nos permitirá poner en evidencia la relación que guardan entre si cada uno de los términos de la serie. Veamos:

$$arc \tan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = arc \tan\left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right) = arc \tan (n+1) - arc \tan n$$

Ahora evaluamos está expresión del siguiente modo:

Si: $n = 1 \quad \Rightarrow \quad arc \tan \frac{1}{3} = \cancel{arc \tan 2} - arc \tan 1$

Si: $n = 2 \quad \Rightarrow \quad arc \tan \frac{1}{7} = \cancel{arc \tan 3} - \cancel{arc \tan 2}$

Si: $n = 3 \quad \Rightarrow \quad arc\tan\dfrac{1}{13} = \cancel{arc\tan 4} - \cancel{arc\tan 3}$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$arc\tan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = arc\tan(n+1) - \underline{arc\tan n}$$

Al sumar miembro a miembro todos estos términos, se obtiene:

$$\mathrm{M} = arc\tan(n+1) - arc\tan 1$$

Aplicando la propiedad aditiva especial, nos queda:

$$\mathrm{M} = arc\tan\left(\frac{n+1-1}{1+(n+1).1}\right) \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{M} = arc\tan\left(\frac{n}{n+2}\right)}$$

**57.-** Agrupando convenientemente los términos de la variable angular de la cot en cada término de la fracción, podemos factorizar así:

$$\mathrm{W} = \frac{\cot(2(arc\operatorname{sen}x + arc\cos x) + arc\cos x)}{\cot(4(arc\operatorname{sen}x + arc\cos x) - arc\cos x)}$$

Recordando que: $\quad arc\operatorname{sen}x + arc\cos x = \dfrac{\pi}{2} \quad$, si $x \in [-1\,;1]$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{W} = \frac{\cot\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right) + arc\cos x\right)}{\cot\left(4\left(\frac{\pi}{2}\right) - arc\cos x\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{W} = \frac{\cot(\pi + arc\cos x)}{\cot(2\pi - arc\cos x)}$$

Haciendo un cambio de variable: $\theta = arc\cos x$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{W} = \frac{\cot(\overbrace{\pi+\theta}^{\in \mathrm{IIIC}})}{\cot(\underbrace{2\pi-\theta}_{\in \mathrm{IVC}})} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{W} = \frac{\cot\theta}{-\cot\theta} \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathbf{W = -1}}$$

**58.-** Resulta conveniente expresar la variable de la sec en términos del *arc* tan, para lo cual es necesario recordar que:

$$arc\cot(x) = arc\tan\left(\frac{1}{x}\right),\ \text{si } x \in \langle 0\,;+\infty\rangle \quad \Rightarrow \quad arc\tan(-x) = -arc\tan(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Aplicando estas propiedades en la expresión original, se tendrá:

$$W = \sec^2\left(arc\tan\frac{2}{3} - arc\tan\frac{1}{3}\right) \Rightarrow W = \sec^2\left(\underset{\uparrow M}{arc\tan\frac{2}{3}} + \underset{\uparrow N}{arc\tan\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)$$

En esta suma de *arc* tan observamos que: $MN = -\frac{2}{9} < 1 \Rightarrow k = 0$

Luego aplicando la identidad aditiva especial, se tendrá:

$$W = \sec^2\left(arc\tan\left(\frac{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)\right) \Rightarrow W = \sec^2\left(arc\tan\left(\frac{3}{11}\right)\right)$$

Aquí, es conveniente transformar esta expresión en términos de la tangente, para lo cual es necesario recordar la identidad: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$\Rightarrow W = 1 + \tan^2\left(arc\tan\frac{3}{11}\right) \Rightarrow W = 1 + \left[\cancel{\tan}\left(\cancel{arc}\tan\frac{3}{11}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow W = 1 + \frac{9}{121} \quad \therefore \boxed{M = \frac{130}{121}}$$

**59.-** Nuestra estrategia para la reducción de términos lo logramos haciendo un cambio de variable, el cual consistirá en sustituir «$x$» por una F.T. En este caso conviene hacer:

$$x = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow -1 \le x \le 1 \ldots (1)$$

$$W = arc\cos(1 - 8\,\text{sen}^2\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha)) \Rightarrow W = arc\cos(1 - 8\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha)$$

$$W = arc\cos(1 - 2(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2) \Rightarrow W = arc\cos(1 - 2\,.\,\text{sen}^2 2\alpha)$$

$$W = \cancel{arc\cos}\,(\cancel{\cos}\;4\alpha) \quad \therefore \quad W = 4\alpha$$

Pero: $0 \le 4\alpha \le \pi \quad \wedge \quad \text{sen}\,\alpha = x$

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad \alpha = arc\,\text{sen}\,x$$

Como $\alpha \in$ IC, el sen $\theta$ es creciente, entonces: $\text{sen}(0) \le \text{sen}\,\alpha \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots (2)$

De (1) y (2) al intersectar los resultados obtenidos para «$x$», se obtiene: $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \boxed{W = 4\,arc\,\text{sen}\,x\,,\ \text{si}\ x \in \left[0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$$

60.- Nuestro proceso de transformación consistirá en aplicar lo que hicimos en el ejercicio anterior. Empecemos haciendo:

$$\theta = arc\cos x \Rightarrow \cos\theta = x \Rightarrow W = 2\theta \Rightarrow \cos W = \cos 2\theta$$

Recordando la identidad del arco doble: $\cos W = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos W = 2x^2 - 1$

Despejando: $W = arc\cos(2x^2 - 1)$

Pero por definición de cos 2θ se debe cumplir que: $0 \le 2\theta \le \pi \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Como $\theta \in$ IC, la función coseno es decreciente, por lo cual se verifica que:

$$\cos(0) \ge \cos(\theta) \ge \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 \ge \cos\theta \ge 0$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le 1 \quad \therefore \quad \boxed{W = arc\cos(2x^2 - 1)} \text{ , si } x \in [0; 1]$$

61.- Como se hizo en los ejercicios anteriores, haremos un cambio de variable para luego emplear los recuerdos de las identidades trigonométricas del ángulo triple. Expresemos así:

$$\theta = arc\tan x \Rightarrow \tan\theta = x \Rightarrow W = 3\theta \Rightarrow \tan W = \tan 3\theta$$

Recordando la identidad del arco triple:

$$\tan W = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} \Rightarrow \tan W = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

De donde se tiene que: $W = arc\tan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

Pero por definición de tan 3θ se debe cumplir que:

$$-\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \tan\theta < \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{W = arc\tan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right) \text{ , si } |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

62.- Aplicando la identidad correspondiente a la cot del ángulo doble se tendrá que:

$$\cot 2 - \tan 2 = 2\cot 4 \Rightarrow \frac{\cot 2 - \tan 2}{2} = \frac{\cancel{2}\cot 4}{\cancel{2}}$$

Ahora, hacemos la sustitución de este resultado en la expresión original, obteniéndose que:

$$\alpha = arc\ \cot(\cot 4)$$

Como $4 \in$ IIIC, se tendrá que:

$$\alpha = arc\ \cot[\cot(\pi + (4 - \pi))] \Rightarrow \alpha = arc\ \cot[\cot(4 - \pi)] \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 4 - \pi}$$

63.- Nuestro problema consistirá en aplicar adecuadamente las siguientes propiedades:

$$arc\ \csc(\csc x) = x, \quad \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$arc\ \sec(\sec x) = x, \quad \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

Asimismo reconocemos que $8 \in$ IIC, por lo cual, al reducir al primer cuadrante, se tendrá:

$$\csc 8 = \csc[3\pi - (3\pi - 8)] \Rightarrow \csc 8 = \csc(3\pi - 8)$$

$$\theta = arc\ \csc[\csc(3\pi - 8)] - arc\ \sec(\sec 2) \Rightarrow \theta = 3\pi - 8 - 2 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 3\pi - 10}$$

64.- Procediendo como se hizo en problema anterior, se tendrá:

$$arc\ \cot(\cot x) = x, \quad \text{si } x \in \langle 0; \pi\rangle$$

$$arc\ \sec(\sec x) = x, \quad \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

Desde que: $4 \in$ IIIC, tendremos que:

$$\cot 4 = \cot[\pi + (4 - \pi)] \Rightarrow \cot 4 = \cot(4 - \pi) \quad \ldots (1)$$

Al analizar el otro término, debemos reconocer que: $6 \in$ IV C, por lo cual:

$$\sec 6 = \sec[2\pi - (2\pi - 6)] \Rightarrow \sec 6 = \sec(2\pi - 6) \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión original se tendrá:

$$\beta = arc\ \cot[\cot(4 - \pi)] + arc\ \sec[\sec(2\pi - 6)] \Rightarrow \beta = 4 - \pi + 2\pi - 6 \quad \therefore \quad \boxed{\beta = \pi - 2}$$

65.- Nuestra estrategia consistirá en aplicar adecuadamente las siguientes propiedades:

$$arc\ \cot(-x) = \pi - arc\ \cot(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$arc\ \sec(-x) = \pi - arc\ \sec(x), \quad x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

$$arc\csc(-x) = \pi - arc\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \; x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Luego, en la expresión original se tendrá:

$$W = \pi - arc\cot(1) + \frac{1}{2}[\pi - arc\sec(\sqrt{2})] + 3.\, arc\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Recordando que: $arc\cot(1) = \pi/4$ ; $arc\sec(\sqrt{2}) = \pi/4 \wedge arc\,\text{sen}(1/2) = \pi/6$, se tendrá:

$$W = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{\pi}{4}\right] + 3.\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{3}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{3}{2}\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{W = \frac{13\pi}{8}}$$

**66.-** Para este ejercicio resulta conveniente recordar las siguientes propiedades:

$arc\tan(-x) = -\,arc\tan(x)$ , $x \in \mathbb{R}$

$arc\,\text{sen}(-x) = -\,arc\,\text{sen}(x)$, $x \in [-1 ; 1]$

$arc\sec(-x) = \pi - arc\sec(x)$, $x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty\rangle$

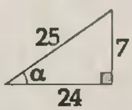
Aplicando estas propiedades tendremos:

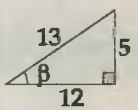
$$\omega = 5\cos\left(-arc\tan\frac{7}{24}\right) + \cot\left(-\,arc\,\text{sen}\,\frac{5}{13}\right) + \sqrt{6}\,.\,\text{sen}(\pi - arc\sec 5)$$

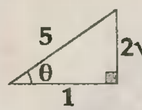
Para continuar nuestro proceso de reducción vemos que es necesario expresar los arcos negativos en positivos, luego aplicando las propiedades correspondientes nos queda:

$$\omega = 5\cos\underbrace{\left(arc\tan\frac{7}{24}\right)}_{\alpha} - \cot\underbrace{\left(arc\,\text{sen}\,\frac{5}{13}\right)}_{\beta} + \sqrt{6}\,.\,\text{sen}(\underbrace{arc\sec 5}_{\theta})$$

Cada uno de los arcos indicados nos permiten establecer los siguientes esquemas:

$\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ 

$\text{sen}\,\beta = \dfrac{5}{13}$ 

$\sec\theta = 5$ 


Haciendo los cambios de variable, nos queda: $\omega = 5\cos\alpha - \cot\beta + \sqrt{6}\,\text{sen}\,\theta$

Sustituyendo los valores correspondientes, según los triángulos mostrados, nos queda:

$$\omega = \left(\frac{24}{25}\right) - \frac{12}{5} + \sqrt{6}\,.\,\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{24}{5} - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \qquad \therefore \quad \boxed{\omega = \frac{24}{5}}$$

67.- Nos proponemos hacer los siguientes cambios de variables:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = arc\tan 5 \;\Rightarrow\; \tan\alpha = 5 \\ \\ \beta = arc\cot 5 \;\Rightarrow\; \cot\beta = 5\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3\alpha = \frac{3\pi}{2} - 3\beta$$

De lo cual podemos establecemos que:

$$\tan 3\alpha = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - 3\beta\right) \Rightarrow \tan 3\alpha = \cot 3\beta \ldots (1)$$

Al reemplazar en $\theta$ los cambios de variable propuesto se tiene:

$$\theta = \tan 3\alpha - \cot 3\beta \qquad \ldots (2)$$

Reemplazar (1) en (2): $\boldsymbol{\theta = \cot 3\beta - \cot 3\beta = 0} \quad \therefore \quad \boxed{\boldsymbol{\theta = 0}}$

68.- Nuestra estrategia consistirá en evaluar la secante y sus potencias, por separado, obteniéndose:

$$\sec\frac{\pi}{12} = \sec 15° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\sec^2\frac{\pi}{12} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$\sec^4\frac{\pi}{12} = \left(\sec^2\frac{\pi}{12}\right)^2 = (8 - 4\sqrt{3})^2 = 112 - 64\sqrt{3}$$

Reemplazando en la expresión dada, tendremos:

$$\alpha = arc\sec\left(\sqrt{112 - 64\sqrt{3} - 16(8 - 4\sqrt{3}) + 20}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = arc\sec\left(\sqrt{112 - \cancel{64\sqrt{3}} - 128 + \cancel{64\sqrt{3}} + 20}\right)$$

$$\therefore \qquad \boxed{\boldsymbol{\alpha = arc\sec(2) = \frac{\pi}{3}}}$$

<u>**Nota:**</u> $\frac{\pi}{3} \in$ rango del arco secante $= \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2} ; \pi\right\rangle$

69.- Agrupamos los dos primeros términos de la expresión dada para aplicar en ellos la identidad aditiva especial de *arc* tan:

$$W = \underbrace{arc\cot\left(\frac{1}{3}\right) + arc\tan\left(\frac{1}{7}\right)}_{(*)} + arc\tan\left(\frac{1}{13}\right)$$

En donde reconocemos que:

$$M = \frac{1}{3}\ ,\ N = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad MN = \frac{1}{21} < 1 \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

Sustituyendo en la relación: $\quad arc\tan M + arc\tan N = \left(\frac{M+N}{1-MN}\right) + k\pi$

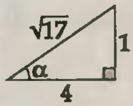
$$W = arc\tan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{7}}\right) + arc\tan\left(\frac{1}{13}\right) \quad \Rightarrow \quad W = arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) + arc\tan\left(\frac{1}{13}\right)$$

En esta expresión volvemos a aplicar la misma identidad, porque: $MN < 1$, luego se tendrá:

$$W = arc\tan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{13}}\right) \quad \therefore \quad \boxed{W = arc\tan\left(\frac{3}{5}\right)}$$

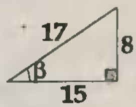
70.- Nos proponemos un cambio de variable para luego construir un triángulo y extraer de él los datos que nos permitan hacer transformaciones pertinentes. Veamos:

a) $\alpha = arc\sec\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \therefore$




$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

b) $\beta = arc\tan\left(\frac{8}{15}\right) \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{8}{15} \quad \therefore$




$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{15}{17} \quad \ldots (*)$

Reemplazando estos cambios de variable en la expresión original se tendrá: $\quad M = \frac{\alpha}{\beta}$

Pero: $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = 2\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 - 1 = \frac{15}{17}$

Y de (*) se establece que: $\quad \cos 2\alpha = \cos\beta \quad \therefore \quad 2\alpha = \beta \quad \ldots (**)$

Finalmente reemplazamos (**) en la expresión M: $\quad M = \frac{\alpha}{2\alpha} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{1}{2}}$

## *SITUACIONES GRÁFICAS*

**71.-** Recordemos: $0 \leq arc \cos x \leq \pi \iff -1 \leq x \leq 1$

Por definición de arcos, sabemos que esta tiene su dominio en [-1 ; 1]; y su rango [0 ; π]; luego en nuestro problema se deberá verificar que:

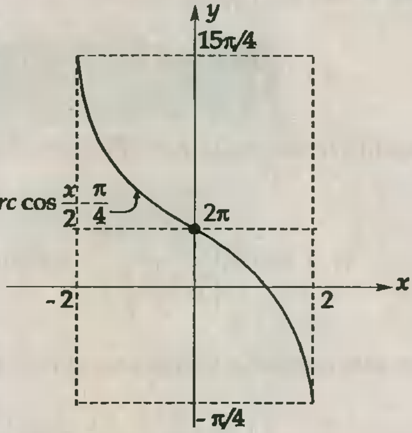
a) $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow$ multiplicando por 2: $-2 \leq x \leq 2$

b) $0 \leq arc \cos \dfrac{x}{2} \leq \pi$

Multiplicando por 4: $0 \leq 4\, arc \cos \dfrac{x}{2} \leq 4\pi$

Restando $\dfrac{\pi}{4}$: $-\dfrac{\pi}{4} \leq 4\, arc \cos \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{15\pi}{4}$

Graficando:




**72.-** a) Sabemos que el gráfico de: $y = arc \tan x$ es como la *Fig*. (1).

b) El gráfico de: $y = arc \tan x + \dfrac{\pi}{4}$ es como la *Fig*. (2).

c) El gráfico de: $y = \left| arc \tan x + \dfrac{\pi}{4} \right|$ es como la *Fig*. (3).

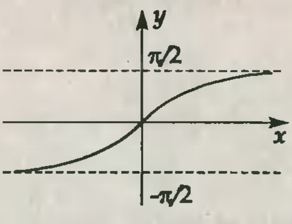



*Fig*. (1)

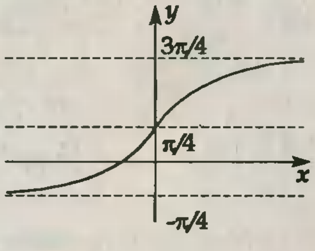



*Fig*. (2)

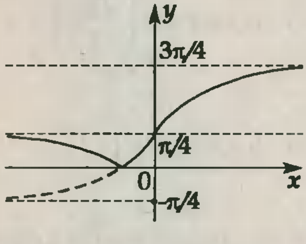



*Fig*. (3)

**73.-** Empezaremos nuestra resolución analizando el dominio de la variable del *arc* sen. Veamos:

$$f(x) = -3\, arc \text{ sen} \left(\frac{x+1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{3} \in [-1\,;1] \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$$

Multiplicado por 3: $-3 \leq x + 1 \leq 3$

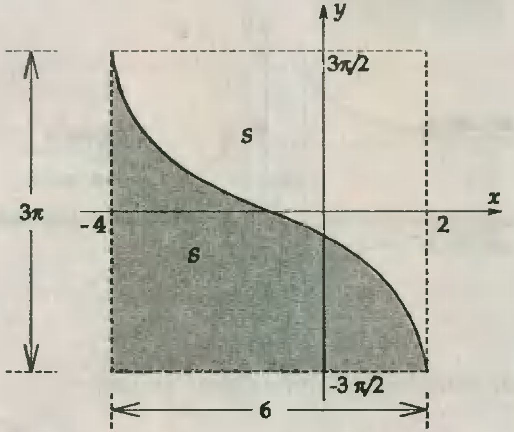
Restando 1: $-4 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom} f = [-4\,;2]$

Asimismo, el rango de la función *arc* sen está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Luego: $$-\frac{\pi}{2} \leq arc\,\text{sen}\left(\frac{x+1}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

Multiplicando por (-3): $$-\frac{3\pi}{2} \leq -3\,arc\,\text{sen}\left(\frac{x+1}{3}\right) \leq \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Ran}\,f = \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$$

En el gráfico dado, se puede reconocer que éste se ubica entre los límites del dominio y del rango. Asimismo, se visualiza una función simétrica respecto del eje «$x$» y del eje «$y$», luego:

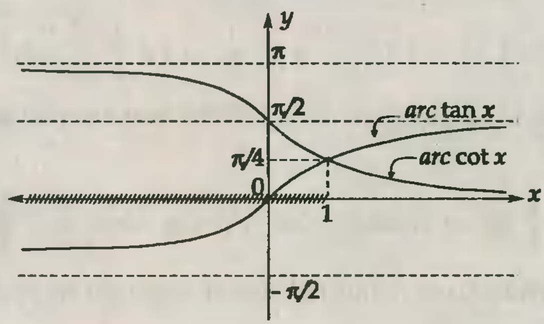



$$2S = 6(3\pi) \qquad \therefore \qquad \boxed{S = 9\pi\, u^2}$$

74.- Lo conveniente es despejar la inecuación dada, obteniéndose:

$$arc\,\tan(x) < arc\,\cot(x) \ldots (*)$$

Resolviendo el problema con las gráficas de dichas funciones inversas tenemos:



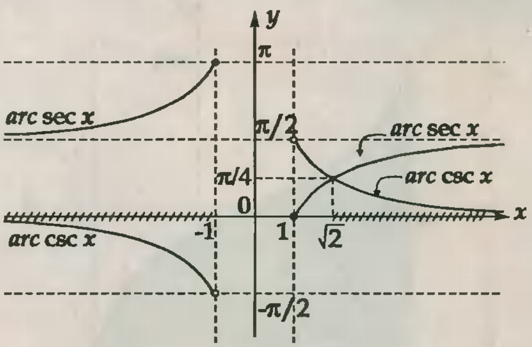
Observamos que la desigualdad dada se verifica desde el punto de intersección de las gráficas hacia la izquierda. Luego calculamos el punto de intersección entre dichas gráficas:

$$arc\tan x = arc\cot x = \theta \quad \Rightarrow \quad x = \tan\theta = \cot\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Por lo tanto para que se cumpla la condición (*), del gráfico se observa que: $x \in \langle -\infty ; 1\rangle$

**75.-** Despejando se tiene: $arc\sec(x) \geq arc\csc(x) \ldots (*)$

Resolviendo el problema con las gráficas de dichas funciones inversas tenemos:




Calculando el punto de intersección entre dichas gráficas:

$$arc\sec x = arc\csc x = \theta \quad \Rightarrow \quad x = \sec\theta = \csc\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto para que se cumpla la condición (*), del gráfico se observa que:

$$x \in \langle -\infty ; -1] \cup [\sqrt{2} ; +\infty\rangle$$

**76.-** Se debe tener en cuenta que: $2x \in$ Dominio arco secante

$$\Rightarrow \quad 2x \leq -1 \cup 2x \geq 1 \quad \therefore \quad x \leq -\frac{1}{2} \cup x \leq \frac{1}{2} \quad \ldots (1)$$

A su vez el rango de la función arco secante debe encontrarse, según los datos en el intervalo $[\pi/4 ; \pi/2]$:

$$\frac{\pi}{4} \leq arc\sec(2x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ es creciente } \Rightarrow \sqrt{2} \leq 2x < +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < +\infty \ldots (2)$$

Asimismo se debe verificar, por definición, que el rango del $arc\sec$ es:

$$\frac{\pi}{2} < arc\,\sec(2x) \leq \pi \quad \Rightarrow \text{ es creciente } \Rightarrow \; -\infty < 2x \leq -1 \Rightarrow \quad -\infty < x \leq -\frac{1}{2} \quad \ldots (3)$$

De (2) y (3) concluimos que: $\quad x \leq -\frac{1}{2} \;\; \cup \;\; x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots (4)$

Finalmente de al intersectar (1) y (4) se tiene que:

$$\boxed{x \in \left\langle -\infty \,; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \,; +\infty \right\rangle}$$

**77.-** Por definición, el *arc* sen tiene dominio tal que:

$$-1 \leq Bx + C \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1-C}{B} \leq x \leq \frac{1-C}{B}$$

De acuerdo con el gráfico se puede establecer que:

a) $\dfrac{-1-C}{B} = -\dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 3B - 4C = 4 \ldots (1)$

b) $\dfrac{1-C}{B} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B + 2C = 2 \;\ldots (2)$

De (1) $\wedge$ (2): $\quad B = \dfrac{8}{5} \;\; \wedge \;\; C = \dfrac{1}{5}$

Asimismo, el rango del *arc* sen está comprendido en el siguiente intervalo:

$$-\frac{\pi}{2} \leq arc\,\text{sen}\,(Bx + C) \leq \frac{\pi}{2}$$

Al multiplicar por «A» y sumar por «D», se tendrá que:

$$\Rightarrow \quad -\frac{A\pi}{2} + D \leq A \,.\, arc\,\text{sen}(Bx + C) + D \leq \frac{A\pi}{2} + D$$

Comparando los valores extremos de esta desigualdad con los límites del gráfico en el eje «$y$», se establece que:

c) Límite inferior: $\quad -\dfrac{A\pi}{2} + D = -\dfrac{3\pi}{4} \quad \ldots (3)$

d) Límite superior: $\quad -\dfrac{A\pi}{2} + D = \dfrac{\pi}{8} \quad \ldots (4)$

De (3) y (4): $\quad A = \dfrac{7}{8} \;\; \wedge \; D = -\dfrac{5\pi}{16} \qquad \therefore \quad \boxed{y = \dfrac{7}{8} \,.\, arc\,\text{sen}\left(\dfrac{8}{5}x + \dfrac{1}{5}\right) - \dfrac{5\pi}{16}}$

**78.-** Analizando el dominio de la función, según la definición del *arc* cos, se puede establecer que:

$$-1 \leq Bx + C \leq 1 \quad \frac{-1-C}{B} \leq x \leq \frac{1-C}{B}$$

Y evaluando los límites de la función en la gráfica, con los extremos de ésta desigualdad, se puede concluir que:

$$\frac{1-C}{B} = 3 \quad \Rightarrow \quad 1 - C = 3B \ \ldots (1)$$

$$\frac{-1-C}{B} = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 - C = -B \ \ldots (2)$$

De (1) y (2): $\quad B = \frac{1}{2}\ ,\ C = -\frac{1}{2}$

Asimismo, por definición, el rango de la función *arc* cos está en el intervalo:

$$0 \leq arc\cos(Bx + C) \leq \pi \quad \Rightarrow \quad D \leq A\, arc\cos(Bx + C) \leq A\pi + D$$

Y de acuerdo con el gráfico, estos extremos deben verificar las siguientes relaciones:

$$D = -\frac{5\pi}{4} \ \ldots (3)$$

$$A\pi + D = \frac{\pi}{4} \ \ldots (4)$$

De (3) en (4): $A = \frac{3}{2}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{y = \frac{3}{2} \cdot arc\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{5\pi}{4}}$

**79.-** Si la gráfica de $f$ intersecta al eje $x$, entonces: $\quad y = f(x) = 0$

Es decir: $2\, arc\,\mathrm{sen}(2x - 1) + \frac{\pi}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad arc\,\mathrm{sen}(2x - 1) = -\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \quad 2x - 1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ El punto será: $\boxed{\left(\frac{1}{4} ; 0\right)}$

**80.-** Nuestra estrategia consistirá en reconstruir la variable del *arc* tan, para lo cual partiremos del siguiente supuesto válido para el cuadrado de todo real. Veamos:

Como: $(x-1)^2 \geq 0 \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ x^2+1-2x \geq 0 \ \Rightarrow\ x^2+1 \geq 2x$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Como la función $y = arc \tan x$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos establecer que:

$$\Rightarrow arc \tan\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \leq arc \tan 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad \boxed{f_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}}$$

**81.-** Nuestra resolución la iniciamos planteando las siguientes restricciones:

1) $\tan x\ \exists$ sí $x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ , $m \in \mathbb{Z}$

2) $\cot x\ \exists$ sí $x \neq n\pi$ , $n \in \mathbb{Z}$

Puesto que ambas funciones forman parte de una misma expresión es conveniente elaborar un dominio común de ambas, con la cual se obtiene:

$$x \neq \frac{k\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Asimismo conviene recordar que: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, sí $a \in \mathbb{R}^+$

Pues bien de la expresión dada podemos reconocer que:

$$\tan^2 x + \cot^2 x - 1 = \underbrace{\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x}}_{\geq 2} - 1$$

$$\tan x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x > 0 \quad \therefore \quad \tan^2 x + \cot^2 x - 1 \geq 1$$

Para esta condición podemos afirmar que la función arco cotangente es decreciente y por lo tanto:

$$\underbrace{arc \cot(\tan^2 x + \cot^2 x - 1)}_{f(x)} \leq arc \cot(1)$$

$$f(x) \leq \frac{\pi}{4}$$

Y como el arco cotangente está definido en $\langle 0\ ;\ \pi \rangle$, entonces la función dada queda definida en:

$$0 < f(x) \leq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{[f(x)]_{máx} = \frac{\pi}{4}}$$

**82.-** Esta ecuación la resolvemos transformando la expresión con la condición de obtener otra con F.T.I. complementarias para luego pasar a la F.T. y aplicar las identidades correspondientes. Veamos:

$$arc\cos(\sqrt{3}\,x) = \frac{\pi}{2} - arc\cos x \quad \Rightarrow \quad arc\cos(\sqrt{3}\,x) = arc\,\text{sen}\,x = \theta$$

$$\text{sen}\,\theta = x \quad \ldots(1)$$

$$\cos\theta = \sqrt{3}\,x \quad \ldots(2)$$

Haciendo $(1)^2 + (2)^2$: $\quad \underbrace{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{1} = x^2 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4}$

De esta ecuación obtenemos: $\quad x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$ (No cumple la igualdad dada)

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

**83.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada en base a la definición de la F.T.I.

Si: $\quad arc\tan\underbrace{\left\{\cot\left[arc\,\text{sen}\sqrt{2x}\right]\right\}} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \cot[arc\,\text{sen}\,\sqrt{2x}\,] = \tan\frac{\pi}{6}$

Recordando que: $\quad \cot\alpha = \tan\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad arc\,\text{sen}\,\sqrt{2x} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \; arc\,\text{sen}\sqrt{2x} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros: $\quad 2x = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{3}{8}}$

**84.-** Para aplicar propiedad para la suma de arcos tangentes, agrupamos los dos primeros términos, en los que se verifica que: M.N. = 1/6 < 1, luego: $k = 0$. Por ello se plantea que:

$$arc\tan\frac{1}{2}+arc\tan\frac{1}{3}=arc\tan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}\right)\Rightarrow arc\tan\frac{1}{2}+arc\tan\frac{1}{3}=arc\tan(1)$$

M N

$$\Rightarrow arc\tan\frac{1}{2}+arc\tan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

Reemplazando en la expresión original, ésta se ve reducida:

$$arc\tan x+\frac{\pi}{4}=arc\,\text{sen}\,x+arc\cos x$$

En donde el segundo miembro equivale a $\pi/2$ siempre que $x\in[-1\,;1]$. Luego la expresión dada queda así:

$$arc\tan x=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad x=\tan\frac{\pi}{4}\quad\therefore\quad\boxed{x=1}$$

**85.-** Resolver la ecuación nos plantea las siguientes restricciones:

1) Del radicando del primer miembro:

$$\frac{x-2}{x+1}\geq 0\quad\Rightarrow$$ $-\infty$ $-1$ $2$ $+\infty$ (+) (-) (+) $$\Rightarrow\quad x\in\langle-\infty\,;-1\rangle\cup[2\,;+\infty\rangle$$

2) Del radicando del segundo miembro: $\dfrac{x}{2}\geq 0\quad\Rightarrow\quad x\in[0\,;+\infty\rangle$ $0$ $+\infty$

Puesto que $(x)$ es un variable común a ambas expresiones, procedemos a intersectar ambos intervalos obteniéndose: $x\in[2\,;+\infty\rangle$

$$\alpha=arc\tan\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right)\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\quad\ldots(1)$$

$$\alpha=arc\sec\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\quad\Rightarrow\quad\sec\alpha=\sqrt{\frac{x}{2}}\quad\ldots(2)$$

Sabiendo que: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\quad\ldots(3)$

Sustituimos las relaciones (1) y (2) en (3):

$$\Rightarrow\quad 1+\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2\quad\Rightarrow\quad\frac{x+1+x-2}{x+1}=\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 2 = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)(x - 1) = 0$$

De lo cual se obtiene: $x = 1$ (absurdo, según restricción) $\quad \therefore \quad$ $x = 2$

**86.-** Este tipo de problema, en el que participan dos variables en una misma ecuación, se resuelven a partir del análisis del recorrido de uno de ellos y desde ésta, se reconstruye la otra. Veamos:

Recordamos que si: $\quad f(x) = arc \cos (x)$

$\Rightarrow$ Dominio $\rightarrow$ $x \in [-1; 1]$ $\qquad \Rightarrow$ Rango $\rightarrow$ $y = arc \cos (x) \in [0; \pi]$

$$0 \leq arc \cos(x) \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \pi \,.\, \csc (y) \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \csc (y) \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{0 \leq \csc y < 1}_{(*)} \cup \csc y = 1$$

Reconocemos que (*) es absurdo, dado que: $\quad \csc y \leq -1 \cup \csc y \geq 1 \quad \therefore \quad \csc y = 1$

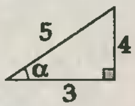
$$\Rightarrow \quad y = (4k + 1)\frac{\pi}{2} \ ; k \in \mathbb{Z}$$

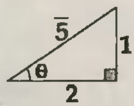
Asimismo: $arc \cos(x) = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \cos \pi \quad \therefore$ $x = -1$

**87.-** Nuestra estrategia consistirá en reducir el valor numérico del primer miembro de la ecuación de este modo:

$$\underbrace{arc \cos \frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{2\, arc \cot 2}_{\theta} = arc \csc x \qquad \ldots (1)$$

A partir de esta propuesta construimos los siguientes triángulos:

$\cos \alpha = \dfrac{3}{5} \quad \rightarrow$ 


$\cos \theta = 2 \quad \rightarrow$ 

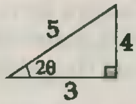

Asimismo, recordamos que: $\qquad arc \csc x = arc \text{ sen } \dfrac{1}{x} \qquad \ldots (2)$

Luego reemplazamos (2) en (1): $\quad \alpha + 2\theta = arc \text{ sen} \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } (\alpha + 2\theta\,) = \dfrac{1}{x}$

Aplicando la identidad del seno de una suma de arcos, se tendrá:

$$\frac{1}{x} = \text{sen } \alpha \cos 2\theta + \cos \alpha \,.\, \text{sen } 2\theta \qquad \ldots (3)$$

Ahora, calculamos: $\quad \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$




Asimismo se tendrá: $\quad \cos 2\theta = \dfrac{3}{5}$

Reemplazando en (3): $\quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{25}{24} \quad \therefore \quad \boxed{x = \dfrac{25}{24}}$

**88.-** De la propiedad referida a la F.T.I. y su variable tendremos:

$$\cot x \,.\, \cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) . \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cot 3x$$

Por definición *arc* cot, su dominio es tal que: $\quad \operatorname{arc}\cot[\cot 3x] = 3x$ , si:

$$3x \in \langle 0\,;\pi\rangle \qquad \therefore \qquad \boxed{x \in \left\langle 0\,;\frac{\pi}{3}\right\rangle}$$

**89.-** Por la propiedad de las F.T.I. y su variable verifica que:

$$\underbrace{\cos(\operatorname{arc}\tan[\cot(\operatorname{arc}\sec(\csc x))])}_{\pi/3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cos(\operatorname{arc}\tan[\cot(\operatorname{arc}\sec(\csc x))])}_{\pi/3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arc}\tan\,[\cot(\operatorname{arc}\sec(\csc x))] = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cot(\operatorname{arc}\sec(\csc x))}_{\pi/6} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{arc}\sec\,(\csc x) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \csc x = \sec\frac{\pi}{6} \qquad \therefore \qquad x = \frac{\pi}{3}$$

Sustituyendo este valor en la expresión dada para «W», tendremos:

$$\mathrm{W} = \frac{\operatorname{arc}\operatorname{sen}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{arc}\tan\left[\cot\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18}\right)\right]} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{W} = \frac{\operatorname{arc}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\underbrace{\operatorname{arc}\tan\left(\cot\frac{13\pi}{3}\right)}_{\beta}}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{W} = \frac{\operatorname{arc}\operatorname{sen}(0)}{\beta} = \frac{0}{\beta} \qquad \therefore \qquad \boxed{\mathrm{W} = 0}$$

**90.-** Nuestra estrategia consistirá en analizar cada miembro de la desigualdad y a continuación elaborar los gráficos correspondientes de modo que sea posible identificar el intervalo de valores de «$x$» en el que la desigualdad se verifica. Veamos:

a) Sea: $f(x) = arc\ \csc\ |x|$

i) Si: $x > 0 \Rightarrow f(x) = arc\ \csc\ (x)$

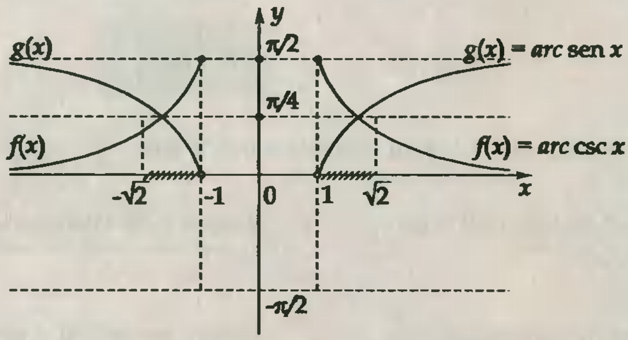
ii) Si: $x < 0 \Rightarrow f(x) = arc\ \csc(-x) = -arc\ \csc(x)$

b) Sea: $g(x) = arc\ \sec|x|$

i) Si: $x > 0 \Rightarrow g(x) = arc\ \sec(x)$

ii) Si: $x < 0 \Rightarrow g(x) = arc\ \sec(-x) = \pi - arc\ \sec(x)$

Analicemos el problema con las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.




Aprovechando que las gráficas son simétricas respecto del eje «Y».

$$f(x) > g(x) \quad \ldots (1)$$

Calculamos el punto de intersección entre dichas gráficas. Veamos:

$$arc\ \sec x = arc\ \csc x = \theta \quad \Rightarrow \quad x = \sec\theta = \csc\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto para que se cumpla la condición de desigualdad dada, del gráfico se observa que:

$$\boxed{x \in \langle -\sqrt{2}\ ; -1] \cup [1\ ; \sqrt{2} \rangle}$$

**91.-** De acuerdo con la teoría se sabe que: $y = arc \tan x$ es creciente en [-1 ; 1]

$$\Rightarrow \quad \underbrace{arc\tan(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} \leq arc \tan x \leq \underbrace{arc\tan 1}_{\frac{\pi}{4}}$$

Multiplicando cada miembro por 3: $-\dfrac{3\pi}{4} \leq 3\, arc \tan x \leq \dfrac{3\pi}{4}$

Restando $\dfrac{\pi}{4}$ a cada miembro: $-\pi \leq \underbrace{3\, arc \tan x - \dfrac{\pi}{4}}_{y} \leq \dfrac{\pi}{2}$

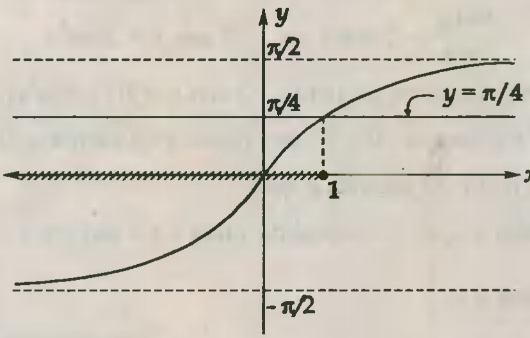
$$\therefore \quad \boxed{y_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}}$$

**92.-** Recordemos la identidad aditiva: $arc \cot x = \dfrac{\pi}{2} - arc \tan x, \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

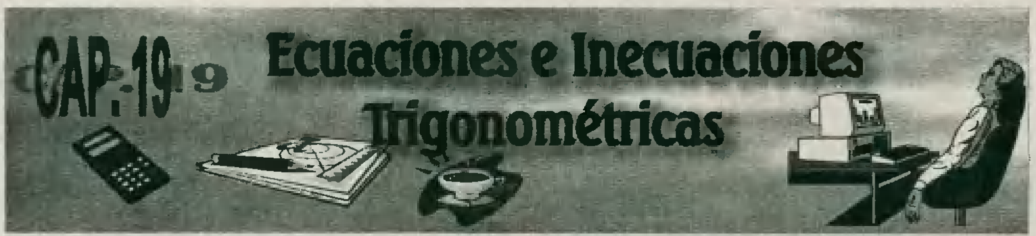
Reemplazando en la inecuación dada, se tendrá:

$$2\, arc \tan x + \left(\frac{\pi}{2} - arc \tan x\right) \leq \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad arc \tan x \leq \frac{\pi}{4}$$

A continuación elaboramos la gráfica de esta relación y obtenemos:




De ésta se observa, que: $arc \tan x \leq \dfrac{\pi}{4} \quad \therefore \quad \boxed{x \in \langle -\infty ; 1]}$




## *ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS*

**01.-** En este problema la única restricción lo tiene la tangente, pues como se sabe:

$$\tan x \ \exists, \text{ si } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada en términos del seno para a partir de ella obtener una ecuación de segundo grado. Para ello debemos recordar que la siguiente identidad del arco doble:

$$2\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación original, se tendrá:

$$2\underbrace{\left(2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\text{degradando}} + 3\tan x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2(1 - \cos x) + 3\tan x = 2$$

$$\frac{3\text{sen}x}{\cos x} = 2\cos x \ \Rightarrow \qquad 3\text{ sen } x = 2\cos^2 x$$

Expresando en términos de senos, se tiene: $3\text{ sen } x = 2(1 - \text{sen}^2 x)$

$$2\text{ sen}^2 x + 3\text{ sen } x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ (2\text{ sen } x - 1)(\text{sen } x + 2) = 0$$

Igualando a cero cada factor se establece que:

a) $\text{sen } x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ \text{sen } x = -2$ , absurdo pues: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

b) $2\text{ sen } x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \text{sen } x = \frac{1}{2}$

EL valor principal $\theta_p = arc\text{ sen } \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \theta_p = \frac{\pi}{6} \qquad \therefore \ \boxed{x = k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}}$ , $k \in \mathbb{Z}$

**02.-** En esta ecuación tenemos una restricción por parte de la tangente:

$$\tan x \ \Rightarrow \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada en términos de la tangente, para así formar una ecuación de segundo grado. Esto se obtendrá apelando a la siguiente identidad:

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

Reemplazando en la ecuación trigonométrica: $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ -(1 - tan $x$) = 0 ,

Por diferencia de cuadrados: $\dfrac{\cancel{(1-\tan x)}(1+\tan x)}{(1+\tan^2 x)} = \cancel{(1-\tan x)}$ . . . (*)

Al simplificar se debe considerar que: $1 - \tan x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1$

$$\Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

En (*), nos queda: $1+ \tan x = 1 + \tan^2 x \;\Rightarrow\; \tan^2 x - \tan x = 0$

Factorizando, obtenemos la ecuación: $\tan x\,(\tan x - 1) = 0$

i) $\tan x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan x = 1$ (ya fue considerado en el paso anterior)

$$\therefore \quad \boxed{x = \left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup k\pi}$$

**03.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada de modo que sea posible utilizar la condición dada para la tangente. Esto lo lograremos dividiendo en ambos lados por $\cos^2 x$ , para $x \neq (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ , es decir: $\cos x \neq 0$ . Asi tendremos:

$$\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{sen} x.\cos x}{\cos x.\cos x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad 3 - 2\tan x - \tan^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x + 3)(\tan x - 1) = 0$$

Al igualar a cero cada factor, tenemos que:

a) $\tan x = -3$ , que se descarta pues por condición del problema: $\tan x > 0$

b) $\tan x = +1 \qquad \therefore \qquad x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} \;;\; k \in \mathbb{Z}$

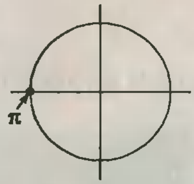
**04.-** Transformamos la expresión dada para obtener una ecuación en términos del coseno, utilizando la identidad pitágorica del seno y coseno:

$$1 - \cos x = \frac{1}{3}\,(1 - \cos^2 x)$$

Efectuando y transponiendo términos: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

Factorizamos y nos queda : $\qquad (\cos x + 2)(\cos x + 1) = 0$

Analizando cada factor, tendremos:




i) $\cos x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -2$ (No puede ser)

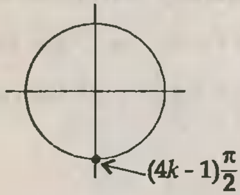
ii) $\cos x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1$

$\therefore \qquad \boxed{x = \pi}$

05.- En este problema nuestra estrategia consistirá en factorizar los términos del 1er miembro para dar lugar a la aplicación de identidades trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad de modo que todo sea transformable a una sola función seno. Veamos:

$$-\operatorname{sen} x . \cos x\,(\underbrace{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos 2x}) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -2\,.\,\underbrace{2\operatorname{sen} x \cos x}_{\operatorname{sen} 2x}\,.(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad -\underbrace{2\,\operatorname{sen}\,2x \cdot \cos\,2x}_{\operatorname{sen} 2(2x)} = 1$$




$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 4x = -1 \quad \Rightarrow \quad 4x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = (4k-1)\frac{\pi}{8}} \ , \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

06.- Nuestra estrategia consistirá en obtener una ecuación en términos del seno. En vista que este problema incluye funciones en los denominadores, empezaremos analizando las restricciones del caso:

i) $\operatorname{sen} x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq n\pi\,,\, n \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ m \in \mathbb{Z}$

Transformando a senos y cosenos: $\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 2x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$

$$\Rightarrow \quad 2\cos 3x - \underbrace{2\cos 2x . \cos x}_{\substack{\textit{transformamos a} \\ \textit{suma de cosenos}}} = 2\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad 2\cos 3x - [\cos 3x + \cos x] = 2\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\cos 3x - \cos x}_{\substack{\textit{transformamos a} \\ \textit{producto}}} = 2\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad -\cancel{2}\operatorname{sen} x\,.\,\operatorname{sen} 2x = \cancel{2}\operatorname{sen} x \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 2x + 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, se tiene:

1) $\operatorname{sen} x = 0 \qquad \Rightarrow$ se descarta por la restricción (i)

2) $\text{sen } 2x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } 2x = -1$

Pero: $\text{sen } (4k-1)\frac{\pi}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = (4k-1)\frac{\pi}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z} \quad \therefore \quad \boxed{x = (4k-1)\frac{\pi}{4}}$

Haciendo: $k = 0$, se obtiene la mayor solución negativa: $x = -\frac{\pi}{4}$

**07.-** La estrategia que aplicaremos consistirá en transformar la expresión dada en términos del seno. Para ello apelaremos a las identidades del ángulo doble y triple. Veamos:

Despejando tenemos: $\text{sen } 5x + \text{sen } 3x + \text{sen } x = 3 - 4\,\text{sen}^2 x$

Multiplicando a ambos miembros por 2 sen $x$:

$$\underbrace{2\ \text{sen}\ 5x\cdot\text{sen}\ x + 2\ \text{sen}\ 3x\cdot\text{sen}\ x}_{\substack{\text{transformando a una} \\ \text{diferencia de cosenos}}} + \underbrace{2\ \text{sen}^2 x}_{\text{(arco doble)}} = 2(\underbrace{3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x}_{\text{(arco triple)}})$$

$$\cancel{\cos 4x} - \cos 6x + \cancel{\cos 2x} - \cancel{\cos 4x} + 1 - \cancel{\cos 2x} = 2\,.\,\text{sen } 3x \Rightarrow \underbrace{1 - \cos 6x} = 2\ \text{sen } 3x$$

Haciendo $\alpha = 3x$, aplicamos: $2\,\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$\Rightarrow \quad 2\,\text{sen}^2 3x = 2\ \text{sen } 3x \Rightarrow \text{sen } 3x(\text{sen } 3x - 1) = 0$$

Al igualar a cero cada factor se tendrá que resolver dos ecuaciones por separado y luego unir las soluciones halladas:

1) $\text{sen } 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{3}\,,\ n \in \mathbb{Z}$

2) $\text{sen } 3x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } 3x = 1 \quad \Rightarrow 3x = (4m+1)\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad x = (4m+1)\frac{\pi}{6}\,;\ m \in \mathbb{Z} \qquad \therefore \quad \boxed{S_{\text{final}} = S_1 \cup S_2}$$

**08.-** Transformaremos la expresión dada hasta obtener una ecuación en términos del seno, para lo cual empezaremos aplicando a una diferencia de cosenos:

$$2\ \text{sen } 3x\,.\,\text{sen } x - 2\ \text{sen } 4x\,.\,\text{sen } 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x - \cos 4x - (\cos 2x - \cos 6x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\cos 6x - \cos 4x}_{\text{transformando a producto}} = 0 \Rightarrow \quad -2\,.\,\text{sen } x\ \text{sen } 5x = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i)}\ \ \text{sen } x = 0 & \Rightarrow & x = m\pi\,, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \text{ii)}\ \text{sen } 5x = 0 & \Rightarrow & 5x = n\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{5}\,, k \in \mathbb{Z}$$

De los dos conjuntos solución se observa que en el conjunto solución: $S_1 \cup S_2$ el conjunto $S_1$ está incluida en el conjunto solución $S_2$.

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}}$$

**09.-** Empezaremos identificando las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{array}\right\} x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ (ángulo cuadrantal)}$$

Recordemos la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = 2\cos 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 2x - 1$

Reemplazando en la ecuación: $4\cos 2x = 4\cos 4x \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \cos 4x$

Pero: $\cos A = \cos B \Leftrightarrow A \pm B = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Entonces:

i) $4x + 2x = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

ii) $4x - 2x = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$ (No puede ser un ángulo cuadrantal)

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**10.-** Identificamos primero las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq k\pi \\ \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x \neq \frac{k\pi}{2} \\ \therefore\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Recordemos las identidades: $\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} = 2\cos 4x + 1 \quad \wedge \quad \dfrac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2\cos 4x - 1$

Reemplazando en la ecuación: $2\cos 4x + 1 = \csc 2x + 2\cos 4x - 1$

$$\Rightarrow \quad \csc 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{6}$$

Usando el conjunto de solución del seno: $2x = k\pi + (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12}}, \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

11.- En este problema resulta beneficioso aplicar la identidad del coseno del arco doble para transformar la expresión dada en otra en términos del seno. Veamos:

Aplicando: $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$ , con: $\alpha = 2x$

$$\Rightarrow \quad \cos 4x = 1 - 2\,\text{sen}^2 2x \quad \Rightarrow \quad 1 - \text{sen}^2 2x + 2\,\text{sen}\,2x + 3 = 0$$

Ordenando la ecuación cuadrática tendremos: $\text{sen}^2 2x - \text{sen}\,2x - 2 = 0$

Factorizando nos queda: $(\text{sen}\,2x - 2)(\text{sen}\,2x + 1) = 0$

Igualando a cero cada factor:

1) $\text{sen}\,2x - 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,2x = 2$ ; esto es absurdo pues: $-1 \leq \text{sen}\,2x \leq 1$

2) $\text{sen}\,2x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,2x = -1$

Este resultado lo analizaremos de este modo:

i) Hallando el valor principal:

$$\text{sen}\,\theta_p = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta_p = arc\,\text{sen}\,(-1) = -\,arc\,\text{sen}\,(1) \quad \Rightarrow \quad \theta_p = -\frac{\pi}{2}$$

ii) Planteando la solución general ($Sg$) para todos los arcos que tiene igual seno, tenemos:

$$Sg = k\pi + (-1)^k . \theta_p$$

iii) Además se debe cumplir que: $2x = k\pi + (-1)^k . (-\frac{\pi}{2})$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}(-1)^k} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

12.- Ordenando la ecuación: $5(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) + 6\,\text{sen}^6 x \,.\, \cos^2 x = 4 \;\ldots(*)$

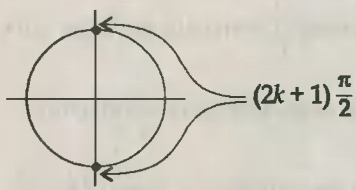
Aplicando la identidad: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x$

En (*): $5(1 - 2\,\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x) + 6\,\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x = 4 \quad \Rightarrow \quad 4\,\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \quad (2\,\text{sen}\,x \,.\, \cos x)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \text{sen}^2 2x = 1 \Rightarrow \text{sen}\,2x = \pm 1$

$\Rightarrow \quad 2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$




$$\therefore \quad \boxed{x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

13.- Aplicamos la identidad del coseno del ángulo doble: $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) - \left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 1$$

Transformando a producto, la diferencia de cosenos nos queda así:

$$-2\,\text{sen}\,(-2x).\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{sen}\,2x\ .\ \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para resolver esta ecuación trigonométrica efectuamos los siguientes pasos:

i) Se calcula el valor principal ($\theta_p$)

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = arc\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{4}$$

ii) Se plantea la solución general para todos los arcos que tienen igual seno.

$$Sg = k\pi + (-1)^k.\,\theta_p \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

iii) Igualamos la variable angular con la solución general ($Sg$) y despejamos "$x$":

$$\Rightarrow \quad 2x = k\pi + (-1)^k\ .\ \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \qquad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k.\ \frac{\pi}{8}}$$

14.- Observamos que el 1er miembro del ecuación se puede transformar así:

Factorizamos: $\quad \text{sen}\,2x + \sqrt{3}\,\cos 2x = 2\left[\frac{1}{2}\text{sen}\,2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right]$

Sustituimos por senos y cosenos: $\text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left[\cos\frac{\pi}{3}\text{sen}\ 2x + \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\ 2x\right]$

Aplicamos la identidad del seno de una suma: $\quad \text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\ .\ \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Además por arcos complementarios se tiene que: $\text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2.\ \cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$

Reemplazando en la ecuación dada, tendremos: $\left[2\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 - 5 = \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Haciendo u cambio de variable: $a = \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, tal que: $\quad -1 \le a \le 1 \quad \ldots(1)$

$$\Rightarrow\ 4a^2 - a - 5 = 0 \Rightarrow (4a-5)(a+1) = 0 \Rightarrow \underbrace{a = \frac{5}{4}}_{\text{absurdo}} \text{ ó } a = -1 \Rightarrow \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

Teniendo en cuenta que: $\text{sen}\,(4k+3)\frac{\pi}{2} = -1$

La solución inmediata será: $2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{x = \dfrac{\pi}{12}(12k+7),\ k \in \mathbb{Z}}$

**15.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión hasta obtener otra en términos de $x$. Veamos:

Como: $|\text{sen}\ 2x| = |2\ \text{sen}\ x \,.\, \cos x| = 2|\text{sen}\ x|\,|\cos x|$

Reemplazamos en la ecuación dada: $2|\text{sen}\ x|\,|\cos x| + 2 = 2|\text{sen}\ x| + 2|\cos x|$

$$2|\text{sen}\ x|(|\cos x| - 1) - 2(|\cos x| - 1) = 0 \Rightarrow (|\cos x| - 1)(|\text{sen}\ x| - 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor tendremos:

i) $|\cos x| - 1 = 0 \Rightarrow |\cos x| = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1 \Rightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

ii) $|\text{sen}\ x| - 1 = 0 \Rightarrow |\text{sen}\ x| = 1 \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm 1 \Rightarrow x = (2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z}$

De (i) y (ii) se tiene: $x = n\pi \cap (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{x = \dfrac{k\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

**16.-** Transformaremos la ecuación para expresarla en términos del coseno. Veamos:

Dividiendo entre 2 tenemos: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{sen}\ x + \dfrac{1}{2}\,.\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Expresando en términos de seno y coseno: $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\text{sen}\ x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Reconocemos que se trata del coseno de la diferencia de 2 ángulos.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{4}$$

Usando el conjunto solución del coseno:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad\therefore\quad \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3},\ \forall k \in \mathbb{Z}}$$

**17.-** Obtenemos el cos $2x$ a partir de la expresión dada:

$$\cos 2x = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \cos 2x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \quad \ldots (*)$$

El 2do. miembro está relacionado con el cos 45°/2, veamos cómo:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$$

Asi deducimos que en (*): $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{8}$

i) Valor principal ($\theta_p$) : $\theta_p = arc\cos(\cos\dfrac{\pi}{8}) \Rightarrow \theta_p = \dfrac{\pi}{8}$

ii) La solución general ($Sg$) es: $Sg = 2k\pi \pm \theta_p,\ k \in \mathbb{Z}$

iii) Se debe cumplir que: $2x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{8} \quad \therefore \quad \boxed{x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{16}},\ k \in \mathbb{Z}$

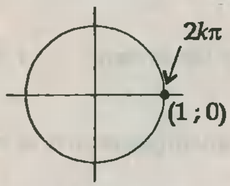
**18.-** Procederemos de modo que la ecuación se transforme en términos del coseno. Así:

Despejando se tiene: $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = 1 \ldots (*)$

Recordemos: $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \cos 2x$

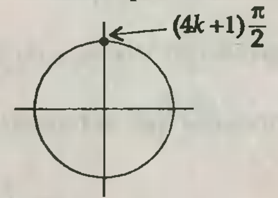
En (*): $\cos 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2k\pi$

$\therefore \quad \boxed{x = k\pi}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$




**19.-** Transformamos la expresión en términos del seno, para lo cual empleamos la identidad pitágorica en la ecuación dada:

$$1 - \text{sen}\, x = \frac{1}{2}\cdot(1 - \text{sen}^2 x)$$




Despejando: $\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad (\text{sen}\, x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 1$$

$\therefore \quad \boxed{x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$

**20.-** La única restricción es que: $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ para que la sec $x$ y la tan $x$ existan. Para poder emplear la condición implícita en la ecuación, empezaremos por recordar que:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x) = 1$$

Del dato: $(\sec x - \tan x)\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sec x - \tan x = \dfrac{1}{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \sec x - \tan x = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3.\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \sec x - \tan x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \ldots (1)$$

De la condición implícita: $\sec x + \tan x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \ldots (2)$

De (1) - (2) tenemos: $2 \tan x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Cuyo valor principal es: $\theta_p = arc \tan\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \therefore \quad \boxed{x = k\pi + arc \tan\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)}$ , $k \in \mathbb{Z}$

**21.-** La resolución requiere de las siguientes restricciones:

i) La $\tan x \ \exists$ si: $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ , $k \in \mathbb{Z}$

ii) La $\cot x \ \exists$ si: $x \neq n\pi$ , $n \in \mathbb{Z}$

iii) También $1 - \tan x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq (4m+1)\dfrac{\pi}{4}$ , $m \in \mathbb{Z}$

Resolviendo: $1 + \cot x = (-1)(1 - \tan x) \quad \Rightarrow \quad 1 + \cot x = -1 + \tan x$

$$\underbrace{\cot x} - \underbrace{\tan x} = -2$$

Aplicando la identidad especial de arco doble, tendremos:

$2 \cot 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cot 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad \cot 2x = -1$

El valor principal $\theta_p = arc \cot(-1) = \dfrac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 2x = k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}} \ , k \in \mathbb{Z}$$

**22.-** Transformamos la ecuación para expresarla en términos del coseno:

Transponiendo términos: $\sqrt{3} . \cos x - \operatorname{sen} x = 1$

Dividiendo entre 2: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} . \cos x - \dfrac{1}{2} . \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

Expresando en términos de seno y coseno: $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) . \cos x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) . \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

Reconocemos que se trata de un coseno suma: $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{3}$

Usando el conjunto de solución del coseno:

$$x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$$

Si: $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = -\frac{\pi}{2} \quad \notin \quad [0\ ;\ 2\pi\rangle$

Si: $k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}\ ,\ x = \frac{13\pi}{6} \quad \in \quad [0\ ;\ 2\pi\rangle$

Luego las únicas soluciones en $[0;\ 2\pi\rangle$ son: $x = \frac{\pi}{6}\ , x = \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore$ **suma =** $\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}}$

**23.-** Reemplazando: $\cos 2x = (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)$

en la ecuación, se tendrá: $(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\cos x + \operatorname{sen} x) = 0$

Factorizando: $(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x - 1) = 0$

i) $\cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \theta_p = -\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4} \begin{cases} \text{Si}: k = -1 \Rightarrow \theta_p = -\frac{5\pi}{4} \\ \text{Si}: k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ \text{Si}: k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

ii) $\cos x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{4}$

Esto significa que la solución general es: $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \begin{cases} \text{Si}: k = -1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{2},\ x = 2\pi \\ \text{Si}: k = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ,\ x = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Si}: k = 1 \Rightarrow x = 2\pi \quad ,\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

De este esquema se reconoce que el mayor negativo es: $x = -\frac{\pi}{4}$

Asimismo el menor positivo es: $x = \dfrac{3\pi}{4}$ $\therefore$ $\boxed{\textbf{Suma} = \dfrac{\pi}{2}}$

**24.**- Nuestra estrategia consistirá en transformar la ecuación dada en una multiplicación de términos que dependan de $x$. Para ello recurrimos a las identidades trigonométricas:

Despejando en la ecuación dada: $\text{sen } 2x + 2 \cos 2x \, . \, \text{sen } x = 0$

Aplicando la identidad del sen $2x$ en(*): $2 \text{ sen } x \, . \cos x + 2 \text{ sen } x \, . \cos 2x = 0$

Factorizando: $2 \text{ sen } x \underbrace{(\cos x + \cos 2x)}_{2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \text{ sen } x \, . \cos \dfrac{3x}{2} \, . \cos \dfrac{x}{2} = 0$

Analizando cada factor:

i) $\text{sen } x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

ii) $\cos \dfrac{3x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

iii) $\cos \dfrac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pi$

$\therefore$ La menor solución positiva es : $\boxed{x = \dfrac{\pi}{3}}$

**25.**- Transformamos a una suma y una diferencia de cosenos los sumandos del 1er miembro de la igualdad, obteniéndose:

$$\cos 7x + \cos x + \cos 3x - \cos 7x = \cos 4x + \cos 2x$$

$$\underbrace{\cos 3x - \cos 2x} = \underbrace{\cos 4x - \cos x}$$

Transformando a producto cada miembro, se tiene:

$$-2 \text{ sen } \frac{x}{2} \text{ sen } \frac{5x}{2} = -2 \text{ sen } \frac{3x}{2} \text{ sen } \frac{5x}{2}$$

Factorizando: $\text{sen } \dfrac{5x}{2} \underbrace{\left[\text{sen}\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{x}{2}\right]}_{\textit{transformamos a producto}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \dfrac{5x}{2} \, . \, 2 \text{ sen } \dfrac{x}{2} \cos x = 0$

Igualando a cero cada factor se obtiene:

i) $\text{sen}\dfrac{5x}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{5x}{2}=0; \pi, 2\pi \Rightarrow x=0, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}\ldots$

ii) $\text{sen}\dfrac{x}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=0; \pi; 2\pi \Rightarrow x=0, 2\pi, 4\pi\ldots$

iii) $\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2};\ldots$

Las dos menores soluciones positivas son: $\dfrac{2\pi}{5}$ y $\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ La suma es: $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9\pi}{10}}$

**26.-** En este problema la única restricción es para:

$$\text{sen}\, x \neq 0 \Rightarrow x \neq n\pi \,;\, n \in \mathbb{Z}$$

Convertimos los ángulos en *radianes* a grados sexagesimales:

$$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}+1=\tan 20°.\tan 40°.\tan 60°.\tan 80° \quad \ldots (1)$$

Recordamos la identidad especial: $\tan 3\alpha = \tan\alpha \,.\, (60° - \alpha).\tan(60° + \alpha)$

Para: $\alpha = 20°$, se tiene que: $\tan 60° = \tan 20° \,.\, \tan 40°.\tan 80° \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1): $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}+1=\tan 60° \,.\, \tan 60° \Rightarrow \dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x}=(\tan 60°)^2-1$

Aplicando la identidad del sen $3x$: $2\cos 2x+1=\left(\sqrt{3}\right)^2-1 \Rightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2}$

Se debe cumplir que: $2x = 60°; 300°; 420°; 660°; 720°$

$$\Rightarrow \quad x=\underbrace{30°;150°;210°;330°};390° \quad \cdot\ldots\ 390° \notin [0°;360°]$$

$\therefore$ La suma de soluciones es: $\boxed{720° = 4\pi\, rad}$

**27.-** En este problema transformamos la expresión en otra que se exprese como el producto indicado de factores, para lo cual recurrimos a las identidades de transformación de suma de cosenos a producto. Veamos:

$$\cos x + \cos 9x - \sqrt{2}\,.\cos 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos 5x \,.\cos 4x - \sqrt{2}\cos 5x = 0$$

Factorizando nos queda: $\cos 5x(2\cos 4x - \sqrt{2}) = 0$

Analizando cada factor:

i) $\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{10}$

Si: $\quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{10} \quad \ldots (1)$

ii) $2\cos 4x - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 4x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \dfrac{\pi}{4}$

Usando la formula general para el coseno: $\quad 4x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{k\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{16}\,, k \in \mathbb{Z}$

Si: $\quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{16} \quad \ldots (2)$

De (1) y (2), las dos menores soluciones positivas son:

$$x = \frac{\pi}{10}\ ;\ x = \frac{\pi}{16} \qquad \therefore \quad \boxed{\textbf{Suma} = \frac{13\pi}{80}}$$

**28.**- La restricción de la ecuación es debido a que interviene la tangente, luego:

$$\tan\frac{x}{2}\ \exists \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq (2k+1)\pi$$

Usando identidades en la ecuación: $\quad 2\left(2\,\text{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\text{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} \quad \ldots (*)$

Eliminando sen $\dfrac{x}{2}$ e igualando a cero para no perder soluciones deducimos que:

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 & \ldots (1) \\ k = 1 \Rightarrow x = 2\pi \notin [0;\pi] \end{cases}$$

En (*) nos queda: $\quad 4\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2\dfrac{x}{2} = 1$

Degradando: $\quad 2(1 + \cos x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2\pi}{3} \quad \ldots (2)$

De (1) y (2) concluimos que las únicas soluciones en $[0;\pi]$ son: $\quad x = 0,\ x = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{\textbf{Suma} = \frac{2\pi}{3}}$$

**29.**- La única restricción en la ecuación es por parte de la cotangente:

$$\cot x\ \exists \text{ si: } x \neq n\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq 0;\ \pi$$

Expresando en términos de senos y cosenos:

$$6\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow 6\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

$$\Rightarrow 3\underbrace{(2\cos^2 x)}_{\text{doble}} - (\underbrace{2\operatorname{sen} x\ \cos x}_{\text{arco doble}})^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(2\operatorname{sen}^2 x)}_{\text{doble}} \Rightarrow 3(1+\cos 2x) - \operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Expresando en términos de "cos $2x$"

$$3 + 3\cos 2x - (1-\cos^2 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 2x + 7\cos 2x + 3 = 0$$

Y factorizando nos queda: $\quad (2\cos 2x + 1)(\cos 2x + 3) = 0$

Igualando a cero cada factor:

i) $\cos 2x + 3 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -3$, esto es absurdo pues: $-1 \leq \cos 2x \leq +1$

ii) $2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ La suma de soluciones es: $\boxed{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi}$

**30.-** Nuestra estrategia consistirá en expresar todo en términos de tan $x$; veamos:

$$3\tan x + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}.\tan x} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\tan x + \frac{1-\tan x}{1+1.\tan x} - 2 = 0 \quad \ldots (*)$$

Determinemos las restricciones de la ecuación en el intervalo $\langle 0;\pi\rangle$:

i) $\tan x\ \exists$, si: $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}$

ii) $1 + \tan x \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$

Efectuando las operaciones indicadas en (*), tendremos:

$$3\cancel{\tan x} + 3\tan^2 x + 1 - \cancel{\tan x} - 2 - 2\cancel{\tan x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\tan^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Si: $\tan x = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Si: $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ El producto de soluciones es: $\frac{\pi}{6}.\frac{5\pi}{6} = \boxed{\frac{5\pi^2}{36}}$

**31.-** Determinemos primero las restricciones de la ecuación en el intervalo dado $\langle 0;\pi\rangle$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i) Si } \tan x\ \exists \Rightarrow x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ii) Si } \tan 3x\ \exists \Rightarrow 3x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow x \neq \dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}$$

Ahora, recordando que: $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ (del arco compuesto)

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}(3x+x)}{\cos 3x.\cos x} = 4\ \text{sen}\ x \Rightarrow \underbrace{\text{sen}\ 4x}_{\substack{\text{arco}\\ \text{doble}}} = 2(2\ \text{sen}\ x\ .\ \cos x)\ .\ \cos 3x$$

$$\Rightarrow 2\ \text{sen}\ 2x\ .\ \cos 2x = 2\ .\ \text{sen}\ 2x\ .\ \cos 3x \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ 2x\underbrace{[\cos 3x - \cos 2x]}_{\substack{\textit{transformamos a}\\ \textit{producto}}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\ 2x\left[-2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cdot\text{sen}\frac{5x}{2}\right] = 0$$

Igualando a cero cada factor:

1) $\text{sen}\ 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0, \pi, 2\pi \quad \Rightarrow x = 0;\ \dfrac{\pi}{2};\ \pi$ . . . (no son soluciones)

2) $\text{sen}\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 0, \pi \quad \Rightarrow x = 0;\ 2\pi$ . . . (no son soluciones)

3) $\text{sen}\dfrac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{5x}{2} = 0, \pi, 2\pi \quad \Rightarrow x = 0,\ \dfrac{2\pi}{5};\dfrac{4\pi}{5}$ . . . (si son soluciones)

La diferencia de soluciones: $\dfrac{4\pi}{5} - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$

**32.-** La ecuación dada se puede transformar si aplicamos la identidad del $\cos 2x$ :

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\ 5x + \cancel{\cos 2x} = \text{sen}\ x + \cancel{\cos 2x} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ 5x = \text{sen}\ x$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\ 5x - \text{sen}\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right).\ \text{sen}\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ 3x\ .\ \text{sen}\ 2x = 0$$

Igualando a cero cada factor, determinamos los valores de $x$ en $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

i) Si: $\text{sen}\ 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = n\pi \pm \cancel{(-1)^n.\text{arc sen}\ (0)} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{n\pi}{3}$

Haciendo: $\quad n = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \wedge \quad n = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pi/3$

ii) Si: $\text{sen } 2x = 0 \Rightarrow 2x = m\pi \cancel{\pm (-1)^m . \text{arc sen } (0)} \Rightarrow x = \dfrac{m\pi}{2}$

Haciendo: $m = 0 \rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad m = 1 \rightarrow x = \pi/2$

$\therefore$ **Número de soluciones = 3**

**33.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la ecuación dada en otra expresada en términos de cosenos. Para ello recurriremos a la siguiente identidad especial:

$$\cos^2\alpha - \text{sen}^2\beta = \cos(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta)$$

Aplicándolo en la ecuación dada: $\cos 6x . \cos 4x = \cos 4x \Rightarrow \cos 6x . \cos 4x - \cos 4x = 0$

Factorizando nos queda: $\cos 4x . (\cos 6x - 1) = 0$

Igualando a cero cada factor, determinamos los valores de $x$ en $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$:

i) $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \notin \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{cases}$$

ii) $\cos 6x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 6x = 1$

$$\Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{cases}$$

Luego, las soluciones en $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ son:

$$x = \frac{\pi}{8};\ x = \frac{3\pi}{8};\ x = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ Número de soluciones = **3**

**34.-** Como en la ecuación intervienen $\tan x \wedge \cot x$, entonces la restricción será:

$$x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ (ángulo cuadrantal)}$$

De la ecuación: $3 \tan x = \dfrac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta_p = \pm\dfrac{\pi}{6}$

Usando la formula general de la tangente: $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Dando valores a $k$, determinamos los valores de $x$ en $[0; 4\pi]$:

$$k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 2 \Rightarrow x_4 = \frac{11\pi}{6}, x_5 = \frac{13\pi}{6} \quad \wedge \quad k = 3 \Rightarrow x_6 = \frac{17\pi}{6}, \quad x_7 = \frac{19\pi}{6}$$

$$k = 4 \Rightarrow x_8 = \frac{23\pi}{6}, x = \frac{25\pi}{6} \notin [0; 4\pi]$$

$\therefore$ Número de soluciones = **8**

**35.-** Transformamos la expresión aplicando la identidad: $\cos 3\alpha = \cos \alpha[2 \cos 2\alpha - 1]$

De este modo, si hacemos: $\alpha = 4x \Rightarrow \cos 12x = \cos 4x\,[2 \cos 8x - 1]$

Reemplazando en la ecuación, tendremos: $1 + \cos 4x[2 \cos 8x - 1] = 2 \cos 8x$

Transponiendo y agrupando términos: $\cos 4x[2 \cos 8x - 1] - [2 \cos 8x - 1] = 0$

Factorizando nos queda: $(2 \cos 8x - 1)[\cos 4x - 1] = 0$

Igualando a cero cada factor, determinamos los valores de $x$ en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

1) $\cos 4x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 0; 2\pi \Rightarrow x = 0; \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 2 soluciones

2) $2 \cos 8x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 8x = \frac{1}{2} \Rightarrow 8x = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}; \frac{11\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}$$

Puesto que la solución: $\frac{13\pi}{24} \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, concluimos que:

**Existen 6 soluciones**

**36.-** Para transformar la ecuación dada, aplicaremos la siguiente identidad auxiliar:

$$\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

Reemplazando en la ecuación nos queda: $2 \operatorname{sen}^2 x + \underbrace{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}_{\text{transformamos a producto}} = 0$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x.(\operatorname{sen} x - \cos 2x) = 0$$

Entonces:

i) $\text{sen } x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\,,\ x = \pi$ (no son soluciones)

ii) $\text{sen } x = \cos 2x \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

Factorizando nos queda: $(2\,\text{sen } x - 1)(\text{sen } x + 1) = 0$

Igualando a cero cada factor, determinamos los valores de $x$ en $\langle 0;\pi\rangle$:

iii) $\text{sen } x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/6\,;\ 5\pi/6 \in \langle 0;\pi\rangle$

iv) $\text{sen } x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3\pi/2 \notin \langle 0;\pi\rangle$

$\therefore$ **El número de soluciones es 2**

**37.-** Sabemos que para fines de «degradación», tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 4\,\text{sen}^3 x &= 3\,\text{sen } x - \text{sen } 3x \\ 4\cos^3 x &= 3\cos x + \cos 3x \end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos por 4 para aplicar estas identidades, así la ecuación se transforma en:

$$\text{sen } 3x(\,4\,\text{sen}^3 x) + \cos 3x(4\cos^3 x) = 4\cos 2x$$

$$\text{sen } 3x(3\,\text{sen } x - \text{sen } 3x) + \cos 3x\,(3\cos x + \cos 3x) = 4\cos 2x$$

Efectuando los productos indicados y ordenando, tendremos:

$$3(\underbrace{\cos 3x\cdot\cos x + \text{sen } 3x\cdot\text{sen } x}_{\text{arco compuesto}}) + \underbrace{\cos^2 3x - \text{sen}^2 3x}_{\text{arco doble}} = 4\cos 2x$$

$$3\cos 2x + \cos 6x = 4\cos 2x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cos 6x - \cos 2x}_{\substack{\text{transformando} \\ \text{a producto}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\,\text{sen } 2x\,.\,\text{sen } 4x = 0$$

Igualando a cero cada factor, determinamos los valores de $x$ en $[0;\pi]$:

i) Si $\text{sen } 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{n\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{Z}$

ii) Si $\text{sen } 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = m\pi \Rightarrow \quad x = \dfrac{m\pi}{4}\,,\ m \in \mathbb{Z}$

Pero: $\quad S_1 \subset S_2 \Rightarrow \quad x = \dfrac{m\pi}{4}$

Si hacemos: $m = 0; 1; 2; 3; 4$, deducimos que: $x = 0;\ \dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{4};\ \pi$

$\therefore$ **Existen 5 soluciones**

**38.-** La ecuación la planteamos estableciendo las siguientes restricciones:

i) La $\tan x$ y la $\sec$ $\exists$, si $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , $k \in \mathbb{Z}$

ii) La $\tan 2x$ $\exists$, si $2x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{4}$ , $n \in \mathbb{Z}$

Para resolver la ecuación aplicaremos la siguiente identidad:

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{\cos 2x.\cos x} = \frac{\operatorname{sen}3x}{\cos x}$$

Sustituyendo en la ecuación dada: $\frac{\cancel{\operatorname{sen}3x}}{\cancel{\cos x}} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}3x}}{\cos 2x.\cancel{\cos x}} \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 1$

i) $\operatorname{sen} 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$

i) $\cos 2x = 1$ , solo se cumple para: $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$\therefore$ **Son 5 raíces**

**39.-** Transformaremos la ecuación aplicando la fórmula para degradar el exponente cuadrático: $2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x = 1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 1 - \operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = 1 - \cos 2x \quad \Rightarrow \quad \cancel{2}\,\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x = \cancel{2}\operatorname{sen}^{\cancel{2}} x$$

De donde deducimos que:

i) $\operatorname{sen} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0; \pi; 2\pi$

ii) $\cos x = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ **son 5 raíces**

**40.-** Se plantea la siguiente restricción:

i) $ex - \sec(x) = \sec(x) - 1 \Rightarrow$ para que la $\sec x$ $\exists$ $\Rightarrow$ $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , $k \in \mathbb{Z}$

Ahora procedemos a resolver la ecuación dada:

$$1 - \cos x + \sec x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\cos x} + 2\cos x - 2\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -1 + 2\cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \quad \tan 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \underbrace{\frac{9\pi}{8}}_{\notin\langle 0;\pi\rangle} \quad \therefore \quad \boxed{\textbf{2 raíces}}$$

**41.-** De la identidad del arco triple tenemos:

$$3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x = 8\,\text{sen}^3 x \quad \Rightarrow \quad 3\,\text{sen}\,x = 12\,\text{sen}^3 x \quad \ldots (*)$$

i) Al simplificar se plantea que: $\text{sen}\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x = \pi}_{\text{1 solución}}$

ii) Luego de simplificar en (*) nos queda: $\quad 1 = 4\,\text{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 2\,\text{sen}^2 x$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 1 - \cos 2x \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}}_{\text{4 soluciones}}; \frac{11\pi}{6} \qquad \therefore \quad \boxed{\textbf{Son 5 soluciones}}$$

**42.-** Se plantean las siguientes restricciones:

i) La $\tan x$ y la $\cot x$ $\exists$ si: $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ii) La $\tan 3x$ y la $\cot 3x$ $\exists$ si: $3x \neq \frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{n\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Para transformar la expresión dada utilizaremos las siguientes identidades:

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \qquad \wedge \qquad \cot\alpha - \cot\beta = \frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}$$

Aplicando ambas relaciones en la ecuación dada, ésta queda así:

$$\tan 3x - \tan x = \cot 3x - \cot x \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen}(3x-x)}{\cos 3x.\cos x} = \frac{\text{sen}(x-3x)}{\text{sen}3x.\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{\text{sen}2x}}{\cos 3x.\cos x} = \frac{-\cancel{\text{sen}2x}}{\text{sen}3x.\text{sen}x} \quad \ldots (*)$$

Analizamos esta expresión en el intervalo dado :

i) Al simplificar se plantea: $\text{sen}\,2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2}$ ... No por ( i)

ii) Luego de simplificar en (*) nos queda: $\cos 3x \cos x = -\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow \quad \cos 3x \cos x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(3x - x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{5\pi}{2} ; \frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}$$

$\therefore$ **Son 2 soluciones**

**43.-** Se plantean las siguientes restricciones:

i) $\tan 2x \ \exists$ si: $2x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{4}$ , $k \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \exists$ si: $\dfrac{\pi}{4} - x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq n\pi - \dfrac{\pi}{4}$ , $n \in \mathbb{Z}$

Aplicando las identidades de la tangente de una diferencia de arcos y del arco doble, tendremos:

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4} . \tan x} + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 - \tan x)^2 + 2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\tan x + \tan^2 x + 2\tan x = 2 - 2\tan^2 x \quad \Rightarrow \quad 3\tan^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Analizando las posibles soluciones, se tiene:

a) Si: $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6}$

b) Si: $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore$ **4 soluciones**

**44.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar la expresión dada en términos de seno y coseno, lo cual se logrará aplicando las definiciones de las identidades auxiliares:

$$\operatorname{vers} \alpha = 1 - \cos \alpha \quad \wedge \quad \operatorname{cov} \alpha = 1 - \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Rightarrow \quad (1 + \cos x).(1 - \operatorname{sen} x) = (1 + \operatorname{sen} x).(1 - \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x - \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos x = 2\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \cos x \quad \Rightarrow \quad x + x = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4}}$

**45.-** Transponiendo términos, la ecuación toma la siguiente forma:

$$\sqrt{3} - \sqrt{3}\ \text{sen}^2 x = 2\ \text{sen}\ x - 2\ \text{sen}^3 x$$

Factorizando: $$\sqrt{3}\,(1 - \text{sen}^2 x) = 2\ \text{sen}\ x(1 - \text{sen}^2 x)\ldots (*)$$

Eliminamos: "$1 - \text{sen}^2 x$" y para no perder soluciones lo igualamos a cero, tal que:

$$\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \in \langle 0; \pi\rangle \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin \langle 0; \pi\rangle$$

Nos queda de (*): $\sqrt{3} = 2\ \text{sen}\ x \Rightarrow \text{sen}\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \in \langle 0; \pi\rangle \wedge x = \dfrac{2\pi}{3} \in \langle 0; \pi\rangle$

$\therefore$ **Las soluciones en $\langle 0; \pi\rangle$ son:** $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right\}}$

**46.-** En primer lugar identificamos las restricciones por para de la tangente:

i) $5x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{10},\ m \in \mathbb{Z}$

ii) $3x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

A continuación expresamos todo en términos de senos y cosenos

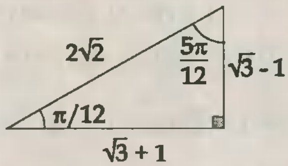
$$\frac{\text{sen}5x.\text{sen}3x}{\cos 5x.\cos 3x} = 1 \Rightarrow \underbrace{2\cos 5x\ .\ \cos 3x}_{\substack{\textit{transf. a una}\\ \textit{suma de cosenos}}} = \underbrace{2\ \text{sen}\ 5x\ .\ \text{sen}\ 3x}_{\substack{\textit{transf. a una}\\ \textit{diferencia de cosenos}}}$$

$$\cos 8x + \cos 2x = \cos 2x - \cos 8x \Rightarrow 2\cos 8x = 0 \Rightarrow \cos 8x = 0$$

$\Rightarrow 8x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{16}$ $\therefore$ **La menor solución positiva es:** $\boxed{\dfrac{\pi}{16}}$

**47.-** La transformación de la ecuación propuesta se logrará utilizando las medidas de los lados del siguiente triángulo notable: 15° - 75°.

Dividiendo entre $2\sqrt{2}$ a la ecuación dada:




$$\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\ \text{sen}\ x + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\ .\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_P = \frac{\pi}{6}$$

Usando el conjunto de solución para el seno:

$$\Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{12} = k\pi + (-1)^k . \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + (-1)^k . \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

Haciendo: $k = 0$: $\quad x = \dfrac{\pi}{12} \quad \wedge \quad k = 1$: $\quad x = \dfrac{3\pi}{4} \quad \wedge \quad k = 2$: $\quad x = \dfrac{25\pi}{12} \notin \langle 0; 2\pi \rangle$

$\therefore$ **Las soluciones son:** $\boxed{\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{4}}$

**48.-** Recordamos la identidad: $\text{sen } 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen } x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x\right)$

Al aplicarla en la ecuación dada, tendremos:

$$\sqrt{2} \ \text{sen}(2x + \frac{\pi}{4}) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esta ecuación se verifica si:

i) $\quad 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

ii) $\quad 2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ **La menor solución positiva es:** $\boxed{x = \dfrac{\pi}{2}}$

**49.-** Efectuando el producto indicado tenemos:

$$2 \ \text{sen}^2 x \ . \cos x + \text{sen}^3 x = \text{sen}^3 x - \cos^3 x$$

Factorizando "cos $x$": $\quad \cos x(2 \ \text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 0$

Igualando a cero cada factor, analizamos los valores de «$x$» en el intervalo $[0;\pi]$:

i) $\quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}$

ii) $\quad 2\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \ \text{sen}^2 x + 1 - \text{sen}^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2 x = -1$ (absurdo)

De este análisis concluimos que: $\quad \dfrac{\text{solución mayor}}{\text{solución menor}} = \dfrac{3\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \boxed{3}$

**50.-** Nuestra estrategia consistirá en relacionar los arcos dados en términos de razones trigonométricas. Lo conveniente en este caso es que las RT elegidas, concuerden con las que figuran en las ecuaciones propuestas. Veamos:

Como: $x + y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } y = \cos x \quad \ldots (3)$

De (3) en (2) se establece que: $\text{sen } x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{4}$

Luego el conjunto solución es: $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en (1): $y = \frac{\pi}{2} - x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - k\pi - \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{\pi}{4} - k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**51.-** Procediendo con la misma estrategia del problema anterior, se plantea que:

Si: $x + y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x = \cos y \quad \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $2 \cos y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \frac{\pi}{3}$

Luego el conjunto solución será: $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Reemplazando en (1): $x = \frac{\pi}{2} - y \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

**52.-** Nuestra estrategia consistirá en construir dos ecuaciones en términos de seno y coseno. Para ello haremos las siguientes transformaciones:

Aplicando propiedad de proporciones en (2) se obtiene:

$$\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{(2+\sqrt{3})+1}{(2+\sqrt{3})-1} \ldots (3)$$

De la identidad: $\tan x \pm \tan y = \frac{\text{sen}(x \pm y)}{\cos x . \cos y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{\frac{\text{sen}(x+y)}{\cancel{\cos x . \cos y}}}{\frac{\text{sen}(x-y)}{\cancel{\cos x . \cos y}}}$

De lo cual concluimos que: $\dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \dfrac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}(x-y)}$

Y del resultado obtenido en (3), se establece que: $\dfrac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}(x-y)} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ . . . (4)

Reemplazando (1) en (4), se deduce que: $\text{sen}\,(x+y) = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right).\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

Y como: $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,(x+y) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{3}\,\dfrac{\cancel{(\sqrt{3}+1)}}{\cancel{\sqrt{3}+1}} \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De donde se obtiene que: $x + y = k\pi + (-1)^k.\ \dfrac{\pi}{3}$ . . . (5)

Si ahora hacemos (1) + (5): $2x = k\pi + (-1)^k.\ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k.\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}}\ , \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

**53.-** Nuestra estrategia consistirá en transformar las ecuaciones dadas hasta obtener otra en términos de seno. Veamos:

De (1) despejamos: $x = \dfrac{3\pi}{2} + y \quad \Rightarrow \quad \tan x = \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} + y\right)$

Reduciendo al primer cuadrante: $\tan x = -\cot y$ . . . (3)

Reemplazando (3) en (2) se establece que: $-\cot y\ .\ \cos y = \dfrac{3}{2}$

Recordando la identidad: $\cot y = \dfrac{\cos y}{\text{sen} y} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\cos^2 y}{\text{sen} y} = \dfrac{3}{2}$

Sustituimos $\cos^2 y$ por la identidad pitagórica, y efectuando nos queda:

$-2(1 - \text{sen}^2 y) = 3\ \text{sen}\ y \quad \Rightarrow \quad 2\ \text{sen}^2 y - 3\ \text{sen}\ y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2\ \text{sen}\ y + 1)(\text{sen}\ y - 2) = 0$

i) $\text{sen}\ y = 2$ (imposible)

ii) $\text{sen}\ y = -\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{y = k\pi + (-1)^k.\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}\ , \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

**54.-** Transformamos el sistema de modo que se obtenga una ecuación en términos de «y»:

De (1) despejamos convenientemente: $x = \frac{\pi}{2} + y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$

Por reducción al IC: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \cos y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \cos y \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $2 \operatorname{sen} y \, . \cos y = 1$

Por arcos dobles: $\operatorname{sen} 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad 2y = (4k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \quad \boxed{y = (4k+1)\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad x = (4k+3)\frac{\pi}{4}} \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

**55.-** Tal como se hizo en el ejercicio anterior, transformamos el sistema así:

De (1) despejamos convenientemente: $x = \frac{\pi}{2} + y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$

Por reducción al I C se establece que : $\operatorname{sen} x = \cos y \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = 5 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta_p = arc \tan \frac{1}{5}$

$$\therefore \quad \boxed{y = k\pi + arc \tan\left(\frac{1}{5}\right) \quad \wedge \quad x = k\pi + arc \tan\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{2}} \; ; \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

**56.-** Transformamos el sistema de modo que se obtenga una ecuación en términos de la tangente. Veamos:

De (1) despejamos así: $y - x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + x \quad \Rightarrow \quad \tan y = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Por reducción al IC se obtiene: $\tan y = -\cot x \quad \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $\tan x - \cot x = 2 \quad \ldots (*)$

Recordando la identidad: $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$

Reemplazando en (*) $\quad -2 \cot 2x = 2\cot 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad \tan 2x = -1$

Esta ecuación tiene como conjunto solución: $2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}; \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en (1): $\boxed{y = \frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}} \; ; \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$

**57.-** Utilizando las identidades de la suma y diferencia de arcos, transformamos el sistema dado para establecer una relación entre los arcos dados. Veamos:

De (1) podemos establecer que: $\operatorname{sen}(2x - 3y) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

Desarrollando el 1er miembro: $\operatorname{sen} 2x \,.\, \cos 3y - \cos 2x \,.\, \operatorname{sen} 3y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ...(3)

Reemplazando (2) en (3) se obtiene:

$$\operatorname{sen} 2x \,.\, \cos 3y - \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x \,.\, \cos 3y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{... (4)}$$

Haciendo (2) + (4): $\operatorname{sen} 2x \,.\, \cos 3y + \operatorname{sen} 3y \,.\, \cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Reconocemos que el 1er miembro es el desarrollo del seno de una suma de arcos:

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(2x + 3y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = k\pi + (-1)^k . \frac{\pi}{3} \quad \text{... (5)}$$

Haciendo (1) + (5): $4x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} + (-1)^k . \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} + (-1)^k . \frac{\pi}{12}} \quad ; \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

**58.-** A partir de las ecuaciones dadas obtendremos una en términos del seno. Veamos:

Transformamos a producto la ecuación (2): $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) . \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$ ... (3)

Reemplazando (1) en (3) se establece que: $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) . \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

Teniendo en cuenta que: $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

De esta ecuación se deduce que: $\dfrac{x-y}{2} = 2k\pi \,; \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x - y = 4k\pi$ ... (4)

Haciendo (1) + (4) se obtiene: $2x = 4k\pi + \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ ; \forall\ k \in \mathbb{Z}}$$

**59.-** Transformaremos el sistema hasta obtener una ecuación en términos de la cotangente. Veamos cómo se logra:

Aplicamos propiedad de proporciones en (2) se obtiene: $\dfrac{\cos x + \cos y}{\cos y - \cos x} = \dfrac{1+2}{2-1}$

Transformando a producto los términos de la fracción del 1er miembro:

$$\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = 3 \Rightarrow \cot\left(\frac{x+y}{2}\right) . \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) = 3 \ldots (3)$$

Reemplazando (1) en (3): $\cot\left(\dfrac{x+y}{2}\right) . \cot\dfrac{\pi}{6} = 3 \qquad \ldots (\cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,)$

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x + y = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \ldots (4)$$

Haciendo (4) - (1): $\quad 2y = 2k\pi \quad \therefore \boxed{y = k\pi \ ; \ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$

**60.-** Este sistema se puede resolver si transformamos la ecuación (2) a un producto de cosenos, de modo que sea posible obtener una relación adicional para los arcos dados:

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) . \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 \ldots (3)$$

Reemplazando (1) en (3): $\quad 2\cos\dfrac{\pi}{3} . \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) . \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$$

De esta ecuación se deduce que: $\quad \dfrac{x-y}{2} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x - y = 4k\pi \ldots (4)$

Haciendo (1) + (4), obtenemos «$x$»: $\quad 2x = 4k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}} \ ; \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Efectuando (1) - (4), obtenemos «$y$» : $2y = \dfrac{2\pi}{3} - 4k\pi \quad \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{\pi}{3} - 2k\pi} \ ; \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

**61.-** Tal como se planteó el problema anterior, transformamos a producto la ecuación (2) con el específico propósito de obtener una nueva relación entre los arcos dados:

$$\Rightarrow 2\cos(x+y) . \cos(x-y) = 0 \ldots (3)$$

Reemplazando (1) en (3): $2\cos\frac{2\pi}{3}\,.\cos(x-y)=0$

$$\Rightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right).\cos(x-y)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x-y)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \ldots (4)$$

Haciendo (1) + (4) se obtiene «$x$»: $2x=(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{x=(2k+1)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \forall\ k\in\mathbb{Z}$$

62.- En este problema transformamos el sistema de modo que sea posible obtener una nueva relación en términos del seno. Veamos:

De (1) se puede establecer que: $\operatorname{sen} y=-\operatorname{sen} x$

Elevando al cuadrado ambos miembros: $\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 x\ \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2) se obtiene: $2\operatorname{sen}^2 x=0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x=0 \quad \therefore \quad \boxed{x=k\pi \ ; \ \forall\ k\in\mathbb{Z}}$$

63.- Este tipo de sistema se resolverá transformando a producto cada ecuación. A partir de esto se obtendrá una nueva relación entre los arcos dados en términos de la tangente. Veamos:

a) Transformamos a producto la ecuación (1): $2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ldots (3)$

b) Transformando a producto la ecuación (2): $2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ldots (4)$

Dividiendo miembro a miembro (3) ÷ (4): $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{3} \Rightarrow \theta_p=\frac{\pi}{3}$

Luego el conjunto de solución será: $\frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}; \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

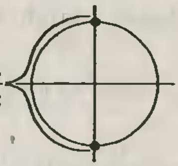
$$\therefore \quad \boxed{x+y=2k\pi+\frac{2\pi}{3}} \ ; \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$

64.- Nuestra estrategia consistirá en transformar el sistema dado de forma que se obtenga una relación en términos de «$x$» . Veamos:

Usando diferencia de cuadrados en (1): $(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y)(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 y)=1\ \ldots (*)$

Reemplazando (2) en (*) se obtiene: $1 . (\text{sen}^2 x - \cos^2 y) = 1 \ldots (3)$

Haciendo (2) + (3) : $2 \text{ sen}^2 x = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2 x = 1$



$(2k+1)\dfrac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \quad \text{sen } x = \pm 1 \qquad \therefore \quad \boxed{x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}} \quad ; \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$

**65.-** Este sistema requiere ser transformado a una nueva ecuación en términos del coseno. Para ello debemos apelar a un grupo de identidades especiales. Veamos:

Transformando a producto la ecuación (1): $\quad 2 \text{ sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) . \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1 \ldots (3)$

Transformando a una suma la ecuación (2): $\quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2} \ \ldots (*)$

Aplicando en (*) la identidad: $\cos(x-y) = 2\cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - 1$

$\Rightarrow \ \cos(x+y) + \ 2\cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - 1 = \dfrac{3}{2} \ \Rightarrow \ 2\cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{5}{2} - \cos(x+y) \ldots (4)$

De la ecuación (3) despejamos: $\quad \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{2\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} \ldots (5)$

Reemplazando (5) en (4) obtenemos: $\quad \dfrac{1}{2\text{sen}^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} = \dfrac{5}{2} - \cos(x+y) \ldots (**)$

Y recordando que: $2 \text{ sen}^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = 1 - \cos(x+y)$

Al aplicarlo en (**), se obtiene: $\dfrac{1}{1-\cos(x+y)} = \dfrac{5}{2} - \cos(x+y) \qquad \ldots (6)$

Resolviendo (6), se obtiene: $\cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{x + y = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}} \quad ; \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$

**66.-** La estrategia consistirá e transformar el sistema dado de modo que se obtenga una nueva relación en la que solo figuren las tangentes de «$x$» e «$y$», lo que permitiría identificar el tipo de relación que existe entre dichos arcos.

Aplicando la identidad de la tangente de una suma de arcos en (2), tendremos:

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{4}{3} \quad ...(3)$$

Reemplazando (1) en (3): $\dfrac{1}{1-\tan x.\tan y}=\dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan x\,.\,\tan y=\dfrac{1}{4}\ ...(4)$

Resolviendo (1) y (3) encontramos que: $\tan x=\tan y=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y=arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Luego el conjunto solución será: $\boxed{y=k\pi+arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)}\ ;\forall\ k\in\mathbb{Z}$

**67.-** En base a la aplicación de identidades recíprocas, debemos obtener los valores de la tan $x$ y tan $y$, para luego y a partir de éstos, identificar las soluciones generales. Esto lo empezaremos expresando (2) en términos de tangentes:

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan x}\,.\tan y=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \tan y=\sqrt{3}\,.\tan x\ ...(3)$$

Reemplazando (3) en (1) se obtiene: $\tan x+\sqrt{3}\tan x=1+\sqrt{3}$

Transponiendo términos: $\cancel{(1+\sqrt{3})}\tan x=\cancel{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \quad \tan x=1 \Rightarrow \quad \theta_p=\dfrac{\pi}{4}$

Luego el conjunto solución para $x$: $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4};\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

Reemplazando $\tan x=1$, en (1): $1+\tan y=1+\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \tan y=\sqrt{3}\ ,\ \theta_p=\dfrac{\pi}{3}$

Luego el conjunto solución para $y$: $\boxed{y=n\pi+\frac{\pi}{3}}\ ,\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$

**68.-** Este sistema lo resolveremos transformando el sistema en una ecuación de 2do. grado y en términos de la tan $x$. Veamos:

Aplicando la identidad recíproca $\cot y=\dfrac{1}{\tan y}$ en (1):

$$\tan x+\frac{1}{\tan y}=2 \quad ...(3)$$

De (2) despejamos convenientemente: $\tan y=2-\dfrac{1}{\tan x}\ ...(4)$

Reemplazando (4) en (3): $\tan x+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\tan x}}=2 \quad \Rightarrow \quad \tan x+\dfrac{\tan x}{2\,.\,\tan x-1}=2$

Efectuando y factorizando nos queda: $(\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \theta_p = \dfrac{\pi}{4}$

El conjunto de solución sera: $\boxed{x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} \ ; \forall\ k \in \mathbb{Z}}$

***SOLUCIONES PARTICULARES***

**69.-** Como: $x + 2y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } 2y = \cos x \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $\text{sen } 2y = \dfrac{\sqrt{7}}{2} . \text{sen } y$

Sustituyendo el 1er miembro por la identidad del sen del arco doble:

$$2\,\cancel{\text{sen } y} . \cos y = \frac{\sqrt{7}}{2} . \cancel{\text{sen } y} \quad \Rightarrow \quad \cos y = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \wedge \quad \text{sen } y \neq 0$$

De estas relaciones se concluye que: $y = arc \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

Reemplazando en (1): $x + y + y = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x + y + arc \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{x + y = \frac{\pi}{2} - arc \cos \frac{\pi}{2}}$$

**70.-** Nuestra resolución la iniciaremos aplicando la identidad de la tangente de una diferencia en la ecuación (2), para de allí obtener la tangente de la suma de arcos:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}.\tan x} = \tan y \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan y \quad \Rightarrow \quad 1 - \tan x = \tan y + \tan x \ . \tan y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(x + y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{4} \ \ldots (3)$$

Haciendo (1) + (3), se tiene: $2x = \dfrac{5\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{5\pi}{24}}$

Haciendo (5) - (1), se tiene: $2y = \dfrac{\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{5}{24}}$

**71.-** Nuestra estrategia consistirá en degradar la ecuación cuadrática para luego obtener una ecuación en términos del coseno de una diferencia de arcos. De allí se establecerá una nueva relación entre los arcos participantes. Veamos:

Hacemos $2\times(2)$: $2\,\text{sen}^2x + 2\,\text{sen}^2y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos(x+y)\,.\,\cos(x-y) = \frac{1}{2} \quad \ldots.(3)$$

Reemplazando (1) en (3): $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right).\cos(x-y) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).\cos(x-y) = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \theta_p = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x - y = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \quad \ldots.(4)$$

Haciendo (1) + (4): $2x = 2k\pi \pm \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{\pi}{24}$; $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Para obtener la menor solución positiva hacemos: $k = 0 \quad \therefore \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{4}}$

**72.-** Procediendo tal como lo hicimos en el ejercicio anterior, tendremos:

Hacemos $2\times(2)$: $2\,\text{sen}^2x + 2\,\text{sen}^2y = 2 \Rightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = 2$

$$\Rightarrow \cos 2x + \cos 2y = 0 \Rightarrow 2\cos(x+y)\,.\,\cos(x-y) = 0 \quad \ldots(*)$$

De (1) reemplazamos en (*): $2\cos\theta\,.\,\cos(x-y) = 0$

Por condición: $\cos\theta \neq 0$, entonces: $\cos(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = \dfrac{\pi}{2} \ldots(3)$

Haciendo (1) + (3) encontramos: $2x = \theta + \dfrac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{x = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}}$

**73.-** Lo que haremos es transformar a producto la ecuación (1) para obtener el coseno de la diferencia de arcos y a partir de allí obtener una nueva relación entre los arcos:

$$2\,\text{sen}(x+y)\,.\,\cos(x-y) = \sqrt{2} \ldots(3)$$

Reemplazando (2) en (3): $2.\,1\,.\cos(x-y) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ldots(4)$

$$\Rightarrow \qquad x - y = \frac{\pi}{4} \quad \ldots (5)$$

Como: $x, y \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \ \wedge \ \text{sen}(x + y) = 1 \ \Rightarrow \qquad x + y = \frac{\pi}{2} \quad \ldots (6)$

Resolviendo (5) y (6), obtenemos: $\boxed{x = \frac{3\pi}{8} \ \wedge \ y = \frac{\pi}{8}}$

**74.-** Transformaremos el sistema a fin de obtener ecuaciones en términos de la suma y diferencia de los arcos dados. Veamos:

Hacemos (1) + (2): sen $x$. cos $y$ + cos $x$ . sen $y$ = 1

$$\Rightarrow \qquad \text{sen}(x + y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + y = \frac{\pi}{2} \qquad \ldots (3)$$

Efectuamos (1) - (2): sen $x$. cos $y$ - cos $x$ . sen $y = -\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}(x - y) = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \qquad x - y = arc\ \text{sen}\left(-\frac{1}{5}\right) \ldots (4)$$

Resolviendo (3) y (4): $\boxed{y = \frac{\pi}{4} + arc\ \text{sen}\left(\frac{1}{5}\right)}$

**75.-** Tal como se hizo en el ejercicio anterior, transformamos el sistema a fin de obtener ecuaciones en términos de la suma y diferencia de arcos. Veamos.

Haciendo (2) + (1): cos $x$ . cos $y$ + sen $x$. sen $y$ = 0

$$\Rightarrow \qquad \cos(x - y) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x - y = \frac{\pi}{2} \ \ldots (3)$$

Efectuamos (2) - (1): cos $x$ . cos $y$ - sen $x$ . sen $y$ = 1

$$\Rightarrow \qquad \cos(x + y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + y = 0 \ldots (4)$$

Resolviendo (3) y (4) obtenemos: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} \ \wedge \ y = -\frac{\pi}{4}}$

**76.-** Transformamos el sistema de modo que se obtenga una ecuación en términos del coseno. Veamos:

Haciendo (1) - (2), se obtiene: $\text{sen}^2 y - 2 \cos y = -\frac{1}{4}$

Aplicando en (*) la identidad pitagórica: $\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$, se obtiene:

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos^2 y + 2 \cos y = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \qquad 4 \cos^2 y + 8 \cos y - 5 = 0$$

Factorizando, se establece: $(2\cos y + 5)(2\cos y - 1) = 0$

Igualando a cero cada factor:

$$\cos y = -\frac{5}{2} \quad \text{(No puede ser)} \quad \vee \quad \cos y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 60°$$

Reemplazando en (2): $2\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{x = 30°}$

**77.**-Transformamos el sistema de modo que sea posible obtener un sistema equivalente en términos de cosenos. Para ello aplicamos las identidades básicas en (1):

$$\frac{\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y}{\cos x . \cos y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x . \cos y = \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y \ldots (3)$$

Reemplazando (2) en (3): $\cos x . \cos y = \frac{1}{4} \ldots (4)$

Haciendo (4) + (2): $\cos x . \cos y + \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \cos(x - y) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x - y = \frac{\pi}{3} \ldots (5)$$

Efectuando (4) - (2): $\cos x . \cos y - \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos(x + y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} \ldots (6)$$

Resolviendo (5) y (6): $\boxed{y = \frac{\pi}{12}}$

**78.**- El sistema tiene una dependencia de «*a*» que contribuye en definir signos para el seno y coseno. Por tal razón procederemos a transformar de manera que se obtenga el seno y coseno de la suma y diferencia de los dos arcos. Veamos:

Sabemos que: $\operatorname{sen} \alpha . \cos \beta \leq 1, \quad \forall \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x . \cos 2y \leq 1 \ldots (3)$

Reemplazando (1) en (3): $a^2 + 1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 < 0 & \text{(No puede ser)} \\ \vee & \\ a^2 = 0 & \text{(Si)}\surd \end{cases}$

De este análisis concluimos que: $\operatorname{sen} x . \cos 2y = 1 \ldots (I)$

Asimismo en (2), nos queda: $\cos x . \operatorname{sen} 2y = 0 \ldots (II)$

Haciendo (I) + (II): $\quad \operatorname{sen} x . \cos 2y + \cos x . \operatorname{sen} 2y = 1$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{sen}(x + 2y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + 2y = \frac{\pi}{2} \; \ldots (4)$$

Efectuando (I) - (II): $\quad \operatorname{sen} x . \cos 2y - \cos x . \operatorname{sen} 2y = 1$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{sen}(x - 2y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x - 2y = \frac{\pi}{2} \; \ldots (5)$$

Resolviendo (4) y (5) se obtiene: $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} \;\wedge\; y = 0}$

79.- Transformaremos el sistema para obtener una ecuación en términos del seno y de ella obtener los valores correspondientes para «$y$».

Transformamos (1): $\quad \operatorname{sen} x . \dfrac{1}{\cos y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \cos y \ldots (3)$

Reemplazando (3) en (2): $\quad \operatorname{sen} y . \cos y = \dfrac{1}{4}$

Multiplicando por "2" ambos miembros: $\; 2 \operatorname{sen} y . \cos y = \dfrac{1}{2}$

Por arco doble: $\quad \operatorname{sen} 2y = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y = \dfrac{\pi}{6} \;\vee\; 2y = \dfrac{5\pi}{6}$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{\pi}{12} \;\vee\; y = \frac{5\pi}{12}}$$

80.- Transformamos el sistema para expresarlo en términos de cosenos de la suma y diferencia de arcos. Veamos:

Haciendo (2) + (1): $\; \cos x . \cos y + \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\Rightarrow \qquad \cos(x - y) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x - y = \frac{\pi}{12} \; \ldots (3)$$

Efectuando (2) - (1): $\cos x . \cos y - \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \cos(x + y) = -\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow \qquad x + y = \frac{7\pi}{12} \; \ldots (4)$$

Resolviendo (3) y (4): $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \wedge\; y = \frac{\pi}{4} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle}$

**81.-** Multiplicando por (3) la ecuación (2): $18 \text{ sen } x - 3 \tan y = 6\sqrt{3}$ . . . (3)

Haciendo (1) + (3): $20 \text{ sen } x = 10\sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

Reemplazando en (1): $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \tan y = 4\sqrt{3} \Rightarrow \tan y = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{y = \dfrac{\pi}{3}}$

**82.-** Aplicando la propiedad de proporcionalidad en (1):

$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \sqrt{3} \text{ . . (3)}$$

Pero: $\tan x \pm \tan y = \dfrac{\text{sen}(x \pm y)}{\cos x . \cos y} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}(x-y)} = \sqrt{3}$ . . . (4)

(2) en (4): $\text{sen }(x + y) = \sqrt{3} . \text{ sen } \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{y} \ \ (x+y) \in \langle \dfrac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{2\pi}{3} \quad \text{. . . (5)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Haciendo (2) + (5):} & 2x = \dfrac{5\pi}{6} \\ & \\ \text{Efectuando (5) - (2):} & 2y = \dfrac{3\pi}{6} \end{array}\right\} \div \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{5}{3}}$$

**83.-** Este sistema se resolverá por eliminación y sustitución de algunas RT. Veamos:

Dividimos (1) ÷ (2): $\dfrac{\text{sen}x.\text{sen}y}{\text{sen}y.\text{sen}z} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } z = 2 \text{ sen } x$ . . . (4)

Reemplazamos (4) en (3): $(\text{sen } x)(2 \text{ sen } x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$$

Reemplazando en (3): $\dfrac{1}{2} . \text{ sen } z = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } z = 1 \Rightarrow z = 90°$

Reemplazando en (1): $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sen $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ sen $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 45°$

Finalmente: $\boxed{x + y + z = 165°}$

***INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS***

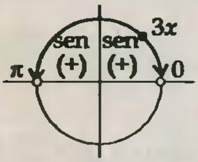
**84.-** Recurrimos a la identidad del arco doble, para transformar la inecuación y elaborar otra que sea factorizable. Veamos:

$$2 \text{ sen } 3x \,.\, \cos 3x < 5 \text{ sen } 3x \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 3x\,(2\cos 3x - 5) < 0 \quad \ldots (*)$$

Recordamos que: $-1 \leq \cos 3x \leq 1,\ \forall\ k \in \mathbb{R}$

Multiplicando por 2: $-2 \leq \cos 3x \leq 2$

Restando 5: $-7 \leq \underbrace{2\cos 3x - 5}_{<0} \leq -3$




Por lo tanto en (*): sen $3x > 0$

De la circunferencia trigonométrica (C.T), se observa que: $0 < 3x < \pi$

Pero por ángulos coterminales se tiene: $0 + 2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi\ ;\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Despejando: $\boxed{x \in \left\langle \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \right\rangle}$

**85.-** Transformamos a producto la suma de senos, y tendremos:

$$2 \text{ sen}\left(\frac{7x + 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x - 3x}{2}\right) < 2 \text{ sen } 5x \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 5x \,.\, \cos 2x < \text{sen } 5x$$

Transponiendo términos y factorizando: sen $5x(\cos 2x - 1) < 0$ ... (*)

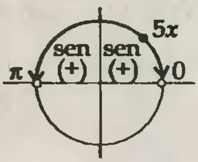
Recordamos que: $-1 \leq \cos 2x \leq 1,\ \forall\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \leq \underbrace{\cos 2x - 1}_{<0} \leq 0$

Por lo tanto en (*) se debe cumplir que: sen $5x > 0$

De la circunferencia trigonométrica (C.T), se observa que: $0 < 5x < \pi$

Pero también por ángulos coterminales se tiene:

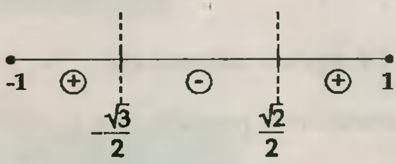
$$2k\pi < 5x < \pi + 2k\pi, \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$




$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \dfrac{2k\pi}{5} ; \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5} \right\rangle}$

86.- Transponiendo términos y factorizando tendremos:

$$(2\,\text{sen}x + \sqrt{3})(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}) > 0$$



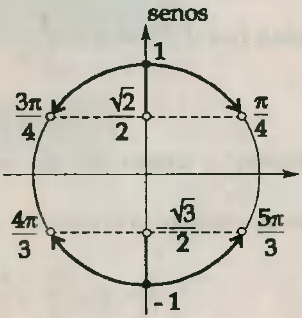

Analizando por el método de los puntos críticos:

i) $\quad 2\,\text{sen}\,x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

ii) $\quad 2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \quad -1 \leq \text{sen}\,x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cup \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\,x \leq 1$

Analizando en la C.T se concluye que:



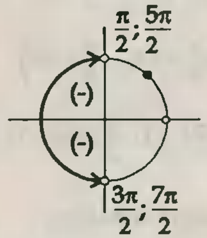

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle}$$

87.- Transformamos la expresión en términos de coseno. Veamos:

$$1 - \cos^2 6x + 1 - \cos 6x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad -\cos^2 6x - \cos 6x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 6x(\cos 6x + 1) \leq 0,$$

Analizando por separado tenemos: $\cos 6x \,.\, (\cos 6x + 1) < 0 \;\cup\; \cos 6x(\cos 6x + 1) = 0$

a) De la primera relación:




$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < 6x < 3\pi$$

$$\Rightarrow \; -1 \leq \cos 6x \leq 1 \; \Rightarrow \; 0 \leq \underbrace{\cos\,6x + 1}_{>0} \leq 2$$

$$\therefore \quad \cos 6x < 0$$

$$\Rightarrow \; 6x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow x \in \left\langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right\rangle \ldots (\text{I})$$

Por condición: $x \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow x \in \left\langle \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4} \right\rangle \qquad \ldots (\text{I})$

b) De la segunda relación: $\qquad \cos 6x = 0 \qquad \cup \qquad \cos 6x = -1$

$$\Rightarrow \qquad 6x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \qquad \cup \qquad 6x = \pi, 3\pi$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12} \qquad \cup \qquad x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

$$(\text{II}) \qquad\qquad\qquad (\text{III})$$

De (I), (II) y (III): $\quad \therefore \quad \boxed{x \in [\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\rangle}$

**88.-** De álgebra sabemos que: $\quad |a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$

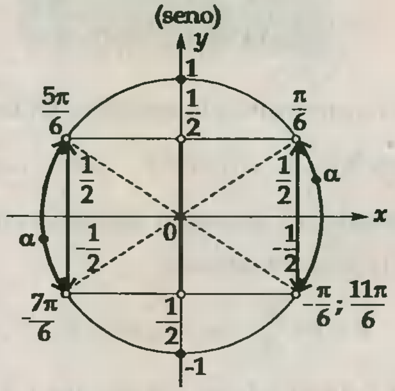
Aplicando esta propiedad en el problema: $\quad -1 < \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x < 1$

Dividiendo por 2 a todos los términos: $\quad -\frac{1}{2} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{3})} . \operatorname{sen} x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})} \cos x < \frac{1}{2}$

Identificamos el desarrollo del $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$: $\quad -\frac{1}{2} < \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2} \; \ldots \; (*)$

Para que se cumpla la condición (3), de la C.T. se observa que:

$$-\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$$



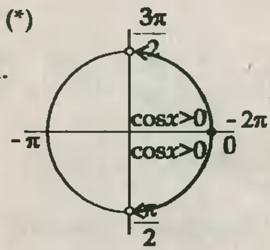

Asimismo los otros intervalos de solución se obtiene sumando $k\pi$ vueltas a los valores extremos:

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + k\pi < x + \frac{\pi}{3} < k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; \; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$$

$$\therefore \quad x \in \left\langle (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}; \; (6k-1)\cdot\frac{\pi}{6} \right\rangle; \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

**89.-** Factorizando tenemos: $\quad \underbrace{\cos x}\,(\underbrace{\cos x - 2}) < 0 \; \ldots \; (*)$




Analizamos cada factor para que verifiquen la desigualdad.

De la condición tenemos:

$$-2\pi \leq x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

Sumando -2: $\quad -3 \leq \underbrace{\cos x - 2}_{<0} \leq -1$

Reconociendo que este término es negativo, en (*) concluimos que:

$$\cos x > 0$$

Finalmente en la C.T. se observa que: $\quad \boxed{x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[-2\pi; -3\frac{\pi}{2}\right\rangle}$

90.- Transformamos la expresión en otra que presente un producto indicado de factores.

Transponiendo términos: $\underbrace{\cos 7x - \cos 3x}_{\text{a producto}} < 0$

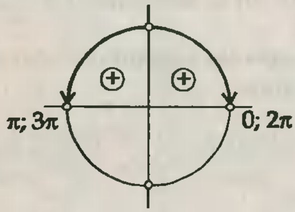
Transformando a producto: $-2 \operatorname{sen} 2x \,.\, \operatorname{sen} 5x < 0$

Dividiendo por -2: $\operatorname{sen} 2x \,.\, \operatorname{sen} 5x > 0 \ldots (*)$

Analizaremos cada factor, empezando por la condición del problema:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < 2x < \pi$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \underbrace{\operatorname{sen} 2x}_{>0} \leq 1$$




Si este factor es positivo, en (*) concluimos que:

$$\operatorname{sen} 5x > 0$$

De la C.T. se observa: $5x \in \langle 0; \pi \rangle \cup \langle 2\pi ; 3\pi \rangle$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle \cup \underbrace{\left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle}$$

Pero dado que: $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

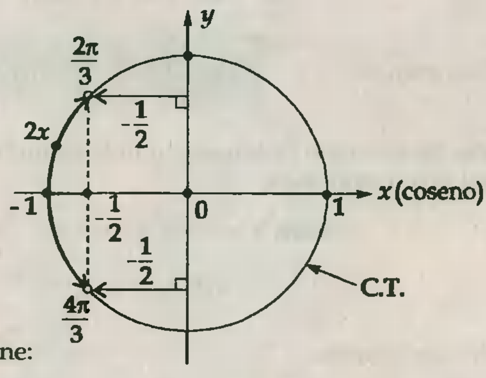
$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right\rangle}$$

91.- Despejando: $\cos 2x \leq \cos \dfrac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos 2x \leq -\dfrac{1}{2} \ldots (*)$

Debemos tener en cuenta que: $-1 \leq \text{coseno} \leq 1$

Recordemos que :

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$




Para que se cumpla la condición (*), usamos la circunferencia trigonométrica (C.T) en la cual se verifica que:

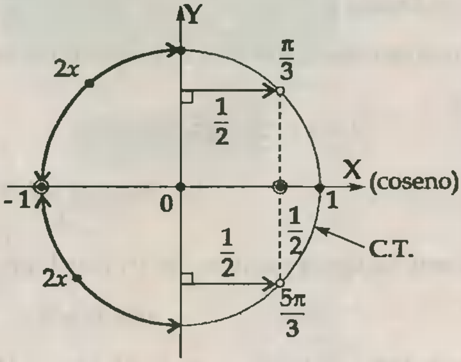
$$\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3}$$

Pero también por ángulos coterminales se tiene:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le 2x \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \qquad \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{2\pi}{3}+k\pi\right]}$$

**92.-** Empezaremos planteando las siguientes restricciones:




i) sen $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$

ii) cos $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

De (i) $\cup$ (ii) se tiene que: $x \neq \frac{k\pi}{2}$; $\forall \; k \in \mathbb{Z}$

Aplicando las identidades del arco triple, tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen} x(2\cos 2x+1)}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x(2\cos 2x-1)}{\cos x} < 2$$

Simplificando: $2 \cos 2x + 1 + 2 \cos 2x - 1 < 2 \quad \Rightarrow \quad 4 \cos 2x < 2 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x < \frac{1}{2} \quad \ldots (*)$

De la restricción: $\quad x \neq \frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x \neq k\pi \quad \Rightarrow \quad \cos 2x \neq \cos(k\pi) \quad \therefore \quad \cos 2x \neq \pm 1$

Para que se cumpla la condición (*), usamos la circunferencia trigonométricas (C.T.):

$$\frac{\pi}{3} < 2x < \pi \quad \cup \quad \pi < 2x < \frac{5\pi}{3}$$

Pero también por ángulos coterminales se tiene:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi \quad \cup \quad \pi + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Despejando: $\quad \boxed{x \in \left\langle\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{5\pi}{6}+k\pi\right\rangle, \; \forall \, k \in \mathbb{Z}}$

**93.-** En este caso es imprescindible recordar la identidad del arco triple (degradación) y del arco compuesto.

$$4 \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x \quad \wedge \quad 4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$$

$$\cos(3x + x) = \cos 3x \, . \cos x - \operatorname{sen} 3x \, . \operatorname{sen} x$$

Reemplazando: $\quad \operatorname{sen} 3x\left(\frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}\right) - \cos 3x\left(\frac{3\cos x - \cos 3x}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$

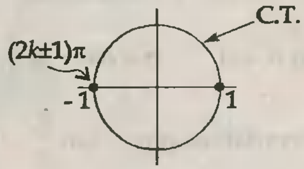
Efectuando y ordenando: $-3\underbrace{(\cos 3x \cdot \cos x - \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x)}_{\cos(3x+x)=\cos 4x} - \underbrace{(\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x)}_{=1} \geq 2$

Sustituyendo por las identidades: $-3 \cos 4x \geq 3$

Multiplicando por (-1): $3 \cos 4x \leq -3 \quad \Rightarrow \quad \cos 4x \leq -1$

De lo cual se deduce que: $\underbrace{\cos 4x < -1}_{\substack{\text{absurdo pues} \\ -1 \leq \cos 4x \leq 1}} \cup \cos 4x = -1$

$\therefore \quad \cos 4x = -1$




Resolviendo esta ecuación trigonométrica:

$$4x = (2k \pm 1)\pi \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4};\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$$

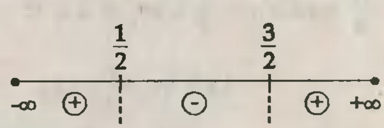
**94.-** Empezamos por las restricciones:

i) Tanto para la $\tan x$ y $\sec x$; $\exists$ , si $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

Aplicando la identidad pitagórica de la $\sec^2 x$ : $4(1 + \tan^2 x) - 8 \tan x < 1$

Efectuando y factorizando: $(2 \tan x - 3)(2 \tan x - 1) < 0$

Resolviendo por el método de los puntos críticos:




i) $2 \tan x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{3}{2}$

ii) $2 \tan x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{1}{2}$

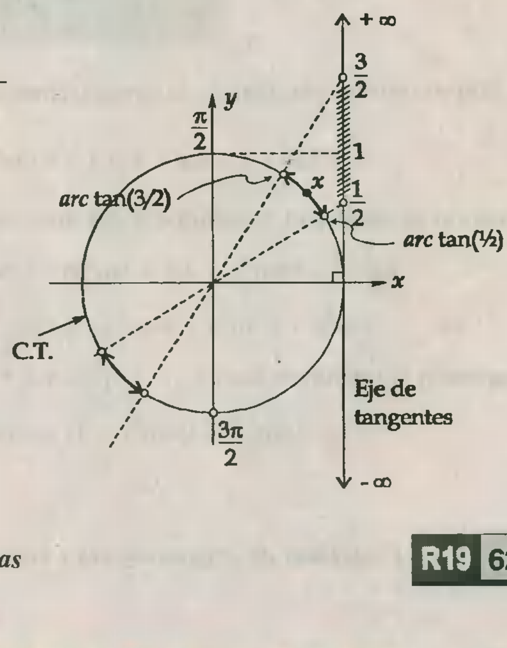
Elegimos los intervalos donde el producto es negativo:

$$\therefore \quad \frac{1}{2} < \tan x < \frac{3}{2} \quad \ldots (1)$$

Para que se verifique (*), recurrimos a la C.T. de donde se observa que:

$$arc \tan \frac{1}{2} < x < arc \tan \frac{3}{2}$$

Así mismo los otros intervalos de solución se obtiene sumando $k\pi$ vueltas.



$$arc\ \tan\frac{1}{2} + k\pi < x < arc\ \tan\frac{3}{2} + k\pi;\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore\quad \boxed{x \in \left\langle arc\ \tan\frac{1}{2}+k\pi;\ arc\ \tan\frac{3}{2}+k\pi \right\rangle}$$

**95.-** Sea: $\alpha = 3x + \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha > 1 \ldots (*)$

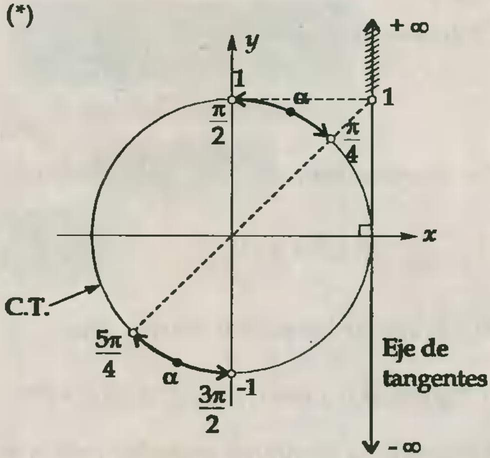
Planteando la restricción:

$\tan\alpha\ \exists$ si: $\quad \alpha \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

Recordamos que: $\quad \tan\dfrac{\pi}{4} = \tan\dfrac{5\pi}{4} = 1$

Para que se cumpla la condición (*), de la C.T. se observa que:

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$




Así mismo los otros intervalos de solución se obtienen sumando $k\pi$ vueltas:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k\pi < 3x < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k\pi < 3x < \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\therefore\quad \boxed{x \in \left\langle \frac{k\pi}{3};\ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\rangle;\ \forall\ k \in \mathbb{Z}}$$

**96.-** Empezaremos planteando las restricciones:

$$\tan x\ \exists \text{ y } \sec x\ \exists \text{ si } x \neq \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$$

Aplicando la identidad pitagórica y del arco doble, tendremos:

$$\tan^4 x + 8\tan^3 x + 2(1 + \tan^2 x) - 8\tan x - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan^4 x + 8\tan^3 x + 2\tan^2 x - 8\tan x + 2 - 1 < 0$$

Agrupando convenientemente: $\quad \tan^4 x - 1 + 8\tan^3 x - 8\tan x + 2\tan^2 x + 2 < 0$

$$(\tan^2 x - 1)(\tan^2 x + 1) + 8\tan x(\tan^2 x - 1) + 2(\tan^2 x + 1) < 0$$

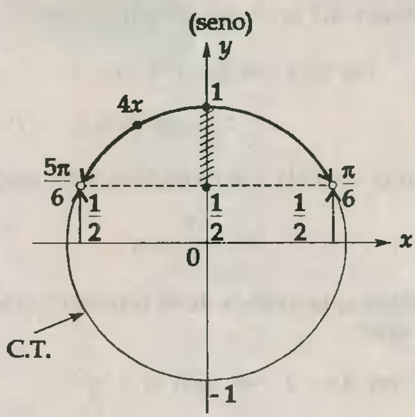
Factorizando: $(1 + \tan^2 x)[\tan^2 x - 1 + \dfrac{8\tan x(\tan^2 x - 1)}{1+\tan^2 x} + 2] < 0$

Pero: $1 + \tan^2 x \neq 0$, simplificamos : $\tan^2 x - 1 + \dfrac{8\tan x(\tan^2 x - 1)}{1+\tan^2 x} + 2 < 0$

Despejando: $1 + \tan^2 x < \dfrac{8\tan x(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < 2 \,.\, \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \,.\, \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$$\frac{1}{2} < 2 \,.\, \text{sen } 2x \,.\, \cos 2x$$

$$\therefore \qquad \text{sen } 4x > \frac{1}{2} \; \ldots (*)$$




Usando la circunferencia trigonométricas (C.T), se observa que: $\dfrac{\pi}{6} < 4x < \dfrac{5\pi}{6}$

Pero también por ángulos coterminales se tiene:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 4x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \; \forall\; k \in \mathbb{Z}$$

Despejando: $x \in \left\langle \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} ; \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \right\rangle$

97.- Empezamos planteando las restricciones, tanto la cot $x$ y csc $x$ , $\exists$ , si:

$$x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0; \pi; 2\pi$$

Notamos que el denominador es diferente de cero, pues: $\csc x \leq -1 \;\vee\; \csc x \geq 1$

Expresando en términos de senos y cosenos

$$\frac{\cos x + \dfrac{\cos x}{\text{sen} x}}{\dfrac{1}{\text{sen} x}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x(\text{sen } x + 1) < 0 \; \ldots (*)$$

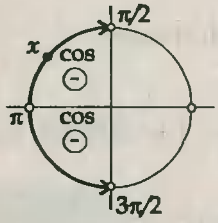
Para el análisis de cada factor, empezaremos por la restricción establecida:

Si $x \neq n\pi \Rightarrow \text{sen } x \neq \text{sen}(n\pi) \Rightarrow \text{sen } x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \text{sen } x < 0 \;\cup\; 0 < \text{sen } x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \text{sen } x + 1 < 1 \;\cup\; \text{sen } x + 1 \leq 2$$

Como en ambos casos el factor es positivo, en (*) tendremos que: $\cos x < 0 \quad \ldots (**)$

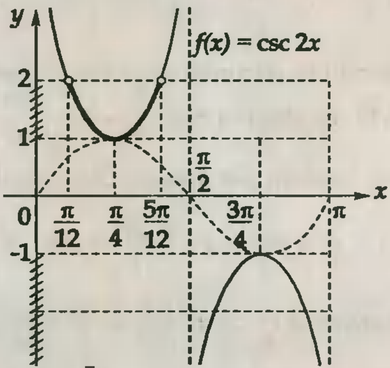
Considerando el intervalo dado para «$x$», la relación (**) se determinará usando la circunferencia trigonométrica (C.T), donde se observa que:




$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

Pero de la restricción $x \neq \pi$: $\therefore$ $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{\pi\}$

**98.-** Observamos que tanto la tan y la cot, en el intervalo dado, no presentan restricción alguna ya que $x \neq 0$; $\pi/2$. A continuación transformamos la inecuación aplicando la identidad del arco mitad: tan $x$ = csc $2x$ - cot $2x$. Veamos:




$$\cot 2x + \csc 2x - \cot 2x < 2$$

$$\csc 2x < 2 \ldots (*)$$

Sea: $f(x) = \csc 2x$ , determinamos su período:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Al elaborar la gráfica de la función $f$ y encontramos que:

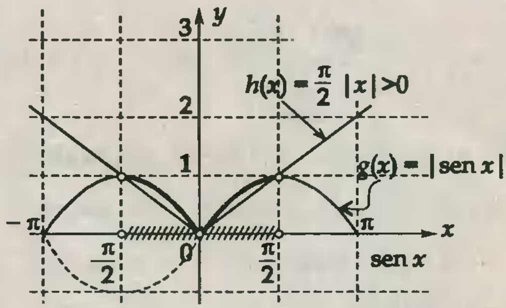
$$\csc 2x = 2 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

De lo cual se deduce que: $2x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}$

Para que se cumpla la condición (*), del gráfico se observa que:

$$\therefore\; x \in \left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\rangle$$

**99.-** Si la función $f$ se encuentra definida, entonces se debe cumplir que el radicando debe ser positivo, es decir:




$$|\operatorname{sen} x| - \frac{2}{\pi}|x| > 0 \Rightarrow |\operatorname{sen} x| > \frac{2}{\pi}|x|$$

Sean: $g(x) = |\operatorname{sen} x|$ y $h(x) = \frac{2}{\pi}|x|$ funciones cuyas gráficas son las que se muestran al lado. De este gráfico se observa que:

$$g(x) > h(x)$$

Solo se verifica en: $\boxed{x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle}$

100.- Por condición el problema: $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{sen } 3x + \text{sen } x}_{\text{transformando a producto}} - \text{sen } 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ sen } 2x \cos x - \text{sen } 2x > 0$$

Factorizando la expresión común: $\quad \text{sen } 2x(2 \cos x - 1) > 0$

Teniendo en cuenta la regla: $ab > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

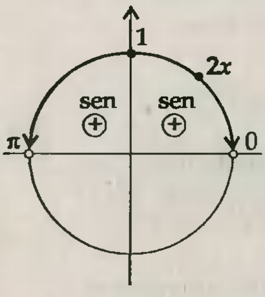
Analizamos en el intervalo dado:

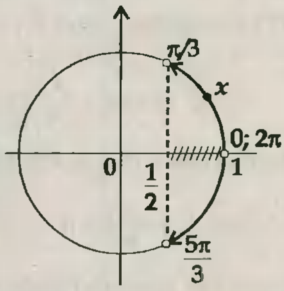
i) Si: $\text{sen } 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \in \langle 0; \pi \rangle$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

y: $2 \cos x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$$



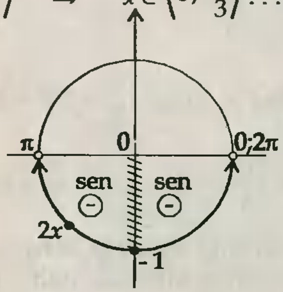

De estos resultados: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \ldots (1)$

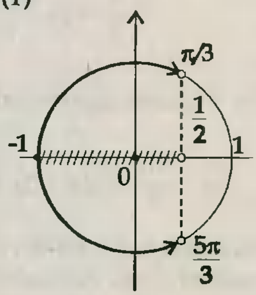
ii) Si: $\text{sen } 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$$

y $\quad 2 \cos x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$$



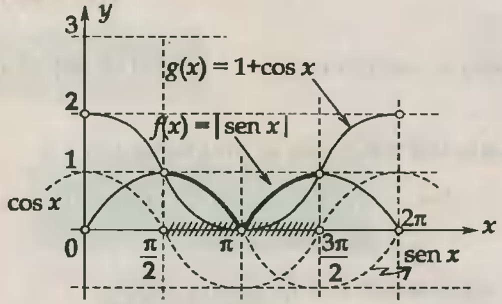




De estos resultados podemos deducir que:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \cap \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) concluimos que: $\quad \therefore \quad \boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle}$

101.- Procederemos como lo hicimos en el Prob. 10, esto es, graficamos las funciones $f$ y $g$ en el intervalo $\langle 0; 2\pi\rangle$, tal como se muestra en la figura adjunta.




De este gráfico se observa que:

$$f(x) > g(x)$$

solo se verifica para el intervalo:

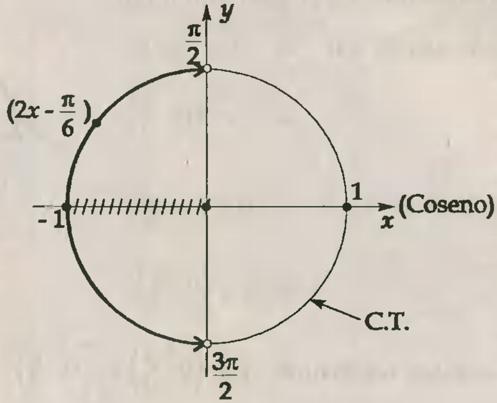
$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle - \{\pi\}}$$

102.- Dividimos entre 2 y se tiene:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x < 0$$

Reconocemos que el 1er miembro es:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0 \quad \ldots (1)$$




Usando la circunferencia trigonométricas (C.T.) reconocemos que para que se cumpla la condición (*), se debe cumplir que:

$$\frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$$

Por ángulos coterminales, se tiene: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi \; \ldots \text{Solución General}$$

Para obtener los intervalos de solución, daremos valores enteros apropiados para "$k$" haciendo una evaluación en el intervalo dado: $[0; \pi]$.

Si: $k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$

Si: $k = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6} \neq [0; \pi]$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle}$$

**103.-** En primer lugar veremos la forma de transformar la inecuación para ponerla en términos del seno de una suma de arcos. Para ello recordamos la identidad del arco doble (degradación):

$$2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1 - \cos 2\left[\frac{\pi}{4}-x\right] \Rightarrow \quad 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1 - \cos\left[\frac{\pi}{2}-2x\right]$$

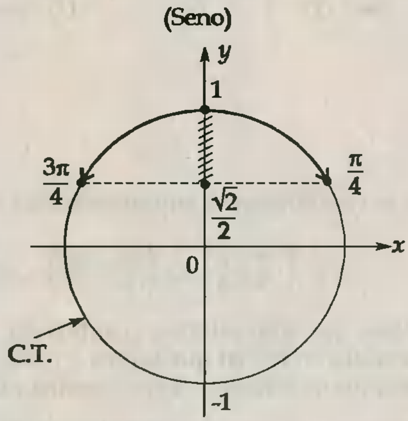
$$\Rightarrow \; 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1 - \text{sen}\, 2x$$

Reemplazando, tenemos: $\cos 2x - [1 - \text{sen}\, 2x] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\, 2x + \cos 2x \geq 1$

Multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\, 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Reconocemos que el 1er miembro es el desarrollo del arco compuesto:

$$\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots (*)$$




De la circunferencia trigonométricas, vemos que la condición (*) se verifica si:

$$\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

Por ángulos coterminales se tiene:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,; \; \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \; 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right] \ldots \text{Solución General}$$

Para obtener los intervalos de solución, daremos valores enteros apropiados para "$k$" haciendo una evaluación en el intervalo dado: $[0; 2\pi]$.

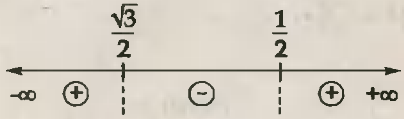
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si: } k=0 \Rightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ \quad k=1 \Rightarrow x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \\ \quad k=2 \Rightarrow x \in \left[2\pi; \frac{9\pi}{4}\right] \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \boxed{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{2\pi\}}$$

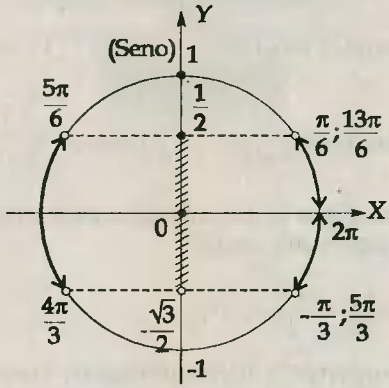
**104.-** Factorizando: $(2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3})(2 \operatorname{sen} x - 1) < 0$

Por el método de los puntos críticos: $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Elegimos los intervalos donde el producto sea negativo: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}$ . . . (*)




De la circunferencia trigonométricas (C.T.) la condición (*) se verificará si:

$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}; \frac{13\pi}{6} \right\rangle$$

Nótese que sólo estamos planteando tres intervalos para resolver el problema en base a la condición inicial que indica $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$. En cualquier otro caso se recomienda plantear el conjunto solución. Para nuestro caso la respuesta final es:

$$\therefore \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$$

**105.-** Aplicando la identidad del arco doble tendremos:

$$2 \operatorname{sen} x \,.\, \cos x + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \cos x < 1$$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\cos x - \operatorname{sen} x) < 0 \quad \Rightarrow (\cos x - \operatorname{sen} x)(2 \operatorname{sen} x - 1) < 0$ . . . (1)

En la circunferencia trigonométrica (A), analizamos para: $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4}$

En este intervalo se cumple que: $\cos x < \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x < 0$ . . . (2)

De (2) en (1): por lo tanto se cumple que: $2 \operatorname{sen} x - 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2}$ . . . (3)

Fig. A

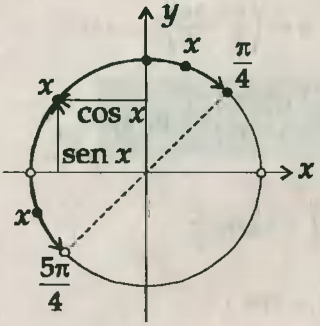
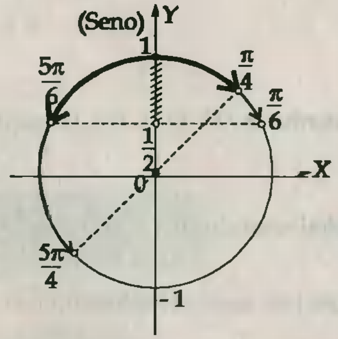



Fig. B




De la circunferencia trigonométrica (B), analizamos la condición (3), la cual se cumple cuando:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle, \quad \text{pero de la condición del problema: } x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle.$$

Por lo tanto al intersectar los dos intervalos se tiene que: $\boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle}$

**106.-** Transformamos la inecuación aplicando la identidad del arco doble:

Multiplicamos por 2: $\underbrace{2\ \text{sen}^2 x} + \underbrace{2\cos^2 x} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos 2x + 1 + \cos 4x \leq 2$

Reducimos términos: $\cos 4x - \cos 2x \leq 0$

Transformamos a producto: $-2\ \text{sen}\ x\ \text{sen}\ 3x \leq 0$

Multiplicado por 1/2 : $\text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ 3x \leq 0$

Esta relación la analizamos así: $\text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ 3x = 0 \quad \cup \quad \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ 3x < 0 \ \ldots (*)$

i) De la 1ra. se plantea: $\text{sen}\ x = 0 \quad \vee \quad \text{sen}\ 3x = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0; \pi \ldots (1) \qquad 3x = 0; \pi; 2\pi; 3\pi$

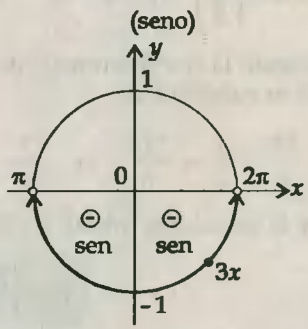
$\Rightarrow \quad x = 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi \ldots (2)$

En (*) , como: $0 \leq x \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \text{sen}\ x \leq 1$

iii) Solo falta analizar: $\text{sen}\ 3x < 0 \ \ldots (3)$

Usando la circunferencia trigonométricas (C.T.)

Para que se cumpla la condición (4), de la C.T. se observa que:



$$\pi < 3x < 2\pi \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \ldots (4)$$

Finalmente de (1), (2) y (4), la respuesta es: $\boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \{0; \pi\}}$

**107.-** Reduciendo al I cuadrante: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

Además por arco complementario: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Reemplazando tenemos: $-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x > 0$

Transformando por arco doble: $-\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right) > 0$

Ordenando convenientemente: $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 > 0$

Factorizando: $\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 1\right)\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 1\right) > 0 \ldots (1)$

Analizamos estos factores, según condición:

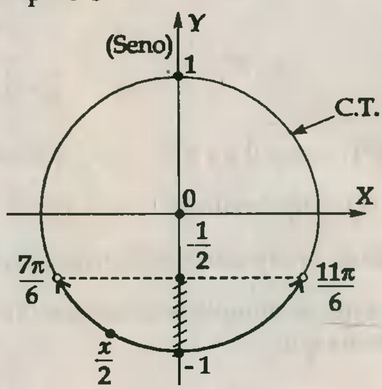
$$x \in \langle 2\pi; 4\pi \rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} \in \langle \pi; 2\pi \rangle$$

a) En este intervalo, se verifica que: $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{x}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq \operatorname{sen}\frac{x}{2} - 1 < -1$

Esto significa que este factor es negativo

b) Según el análisis anterior deducimos que (1) se cumplirá si:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2} \ldots (2)$$




Usando la circunferencia de la C.T. la condición (2) se cumplirá si:

$$\frac{7\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{11\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{3}$$

De la condición inicial: $x \in \langle 2\pi; 4\pi \rangle$

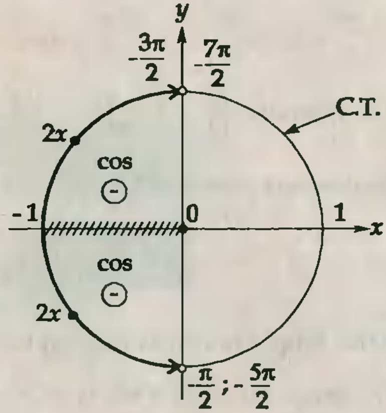
$$\therefore \boxed{x \in \left\langle \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right\rangle}$$

**108.-** Despejamos y aplicamos una factorización por diferencias de cuadrados:

$$\cos^4 x - \text{sen}^4 x < 0$$

$$\underbrace{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}_{\cos 2x}\ \underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{1} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cos 2x < 0 \ldots\ldots (*)$$




En la circunferencia trigonométrica, hemos ubicado los siguientes valores:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

Para que se verifique (*) se observa que:

$$-\frac{3\pi}{2} < 2x < -\frac{\pi}{2} \quad \cup \quad -\frac{7\pi}{2} < 2x < -\frac{5\pi}{2}$$

Solo estamos proponiendo dos intervalos con arcos negativos para resolver el problema en base a la condición inicial que indicas: $x \in [-2\pi; \pi]$. En caso contrario se recomienda plantear el conjunto solución. Despejando tenemos:

$$\underbrace{-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}}_{\text{se descarta por condición inicial}} \quad \cup \quad -\frac{7\pi}{4} < x < -\frac{5\pi}{4} \qquad \therefore \qquad x \in \left\langle -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4} \right\rangle$$

**109.-** Transformando la expresión por medio de la identidad del arco triple y del arco compuesto:

$$\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right) \cdot \cos 3x - \left(\frac{3\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x}{4}\right) \cdot \text{sen}3x < \frac{5}{8}$$

$$\underbrace{3(\cos 3x \cdot \cos x - \text{sen}\ 3x \cdot \text{sen}\,x)}_{\cos(3x+x)\ =\ \cos 4x} + \underbrace{(\cos^2 3x + \text{sen}^2 3x)}_{=1} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 3\cos 4x < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos 4x < \frac{1}{2} \ldots\ldots (*)$$

En la circunferencia trigonométrica (C.T.) hemos ubicado arcos relacionados con el valor del coseno de (*):

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

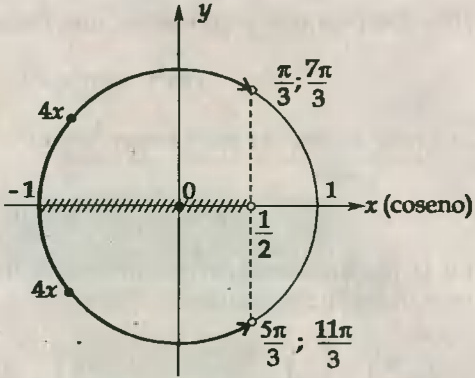
Para que se cumpla la condición (*) de la C.T. reconocemos que:

$$\frac{\pi}{3} < 4x < \frac{5\pi}{3} \quad \cup \quad \frac{7\pi}{3} < 4x < \frac{11\pi}{3}$$

Despejando: $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \cup \underbrace{\frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}}$

se descarta pues $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\rangle}$$




110.- Empezamos planteando las restricciones del 1er miembro de la inecuación:

i) $\operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow x \neq mk, m \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow x \neq 0; \pi$

ii) $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$

En forma analítica y recordando la identidad del arco triple y arco doble, tendremos:

$$\frac{3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{(4\cos^3 x - 3\cos x)}{\cos^3 x} \geq 16 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} - 4 - \left(4 - \frac{3}{\cos^2 x}\right) \geq 16$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(\frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}^{=1}}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\right) \geq 24 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq 8 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

Ordenando: $\quad 2(2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \,.\, \operatorname{sen}^2 2x \leq 1$

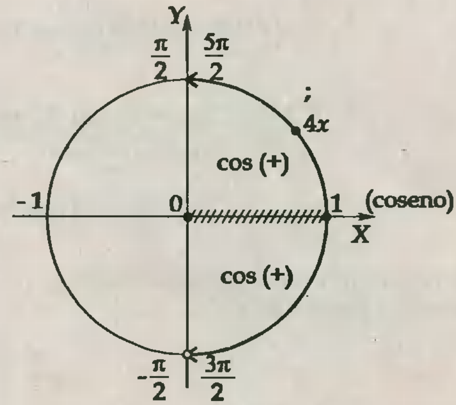
$$1 - \cos 4x \leq 1$$

$$\therefore \quad \cos 4x \geq 0 \; \ldots (1)$$

En la circunferencia trigonométricas C.T. observamos que la condición (1) se cumplirá si:

$$-\frac{\pi}{2} \leq 4x \leq \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} \leq 4x \leq \frac{5\pi}{2}$$

Notar que sólo estamos planteando dos intervalos para resolver el problema en base a la condición inicial que indica $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



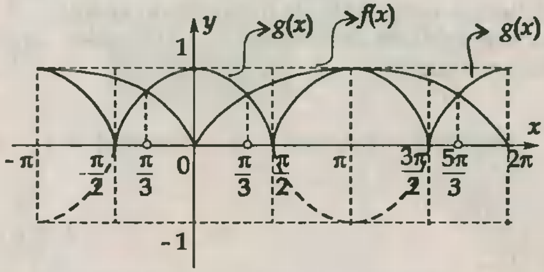
En caso contrario se recomienda plantear el conjunto solución. Despejando tenemos:

$$-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \quad \cup \quad \frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$$

Finalmente por la condición $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, la respuesta es: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

**111.-** Sean $f(x) = \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right|$ y $g(x) = |\cos x|$, funciones cuyas gráficas se muestran para $x$ en $\langle -\pi; 2\pi \rangle$. Por lo tanto para que se cumpla:

$$f(x) < g(x) \ldots .(1)$$




debemos hallar primero los puntos de intersección entre dichas gráficas resolviendo la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| = |\cos x| \quad \Rightarrow \quad \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right|^2 = |\cos x|^2 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \quad 2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos x = 1 + \cos 2x \quad \Rightarrow \quad \cos 2x + \cos x = 0$$

Transformando a producto, nos queda: $\quad 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

Igualamos a cero cada factor, para evaluar «$x$» en el intervalo dado:

i) $\cos\frac{3x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{2} = -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$

ii) $\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -3\pi; -\pi; \pi; 3\pi$

Los puntos de intersección que nos interesan son: $\quad x = -\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}$

De las gráficas se observa que la condición (*) se verifica si:

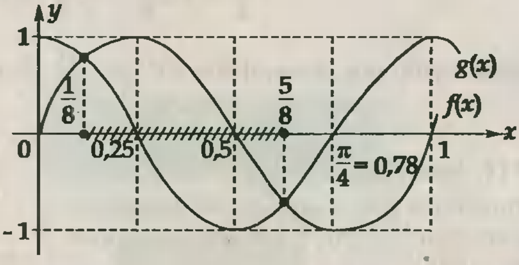
$$\therefore \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$$

**112.-** Despejando se obtiene: $\operatorname{sen}(2\pi x) > \cos(2\pi x)$

Sean: $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ y $g(x) = \cos(2\pi x)$, funciones cuyas gráficas se muestran para:

$x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$, es decir $x \in \langle 0; 0{,}78 \rangle$

Notar que el período: $T_f = T_g = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$




Hallemos los puntos de intersección entre dichas gráficas resolviendo la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(2\pi x) = \cos(2\pi x) \;\Rightarrow\; \tan(2\pi x) = 1 \;\Rightarrow\; 2\pi x = \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{1}{8};\ \frac{5}{8}$$

De las gráficas se observa que: $\operatorname{sen}(2\pi x) > \cos(2\pi x)$, es decir: $f(x) > g(x)$, si:

$$\boxed{x \in \left\langle \frac{1}{8}; \frac{5}{8} \right\rangle}$$

**113.-** Nuestra estrategia será recurrir a la siguiente relación:

$$-\sqrt{A^2+B^2} \leq A \operatorname{sen} x + B \cos x \leq \sqrt{A^2+B^2}\ ,\quad A \text{ y } B \in \mathbb{R}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Evaluando para A = 1, B= 1, tendremos:

$$-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} x + \cos x \leq \sqrt{2} \;\Rightarrow -\sqrt{2} - \sqrt{3} \leq \operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{3} \leq \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Asi reconocemos que este factor es negativo, y recordando la regla:

$$ab < 0 \;\Leftrightarrow\; a < 0 \text{ y } b > 0 \quad \text{ó} \quad a > 0 \text{ y } b < 0$$

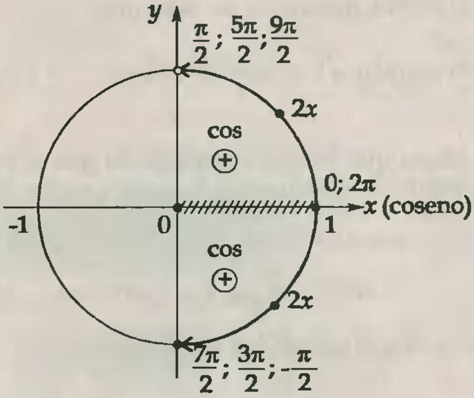
Planteamos que en la ecuación dada se debe cumplir que:

$$\Rightarrow\; \cos^2 x - \frac{1}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\text{arco doble}} > 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x > 0 \;\ldots(*)$$

Usando la circunferencia trigonométrica C.T.) observamos que para condición (*) se cumplirá si:

$$-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} < 2x < \frac{5\pi}{2} \cup \frac{7\pi}{2} < 2x < \frac{9\pi}{2}$$

Notar que sólo estamos planteando tres intervalos para resolver el problema en base a la condición inicial que indica $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$. En caso contrario se recomienda plantear el conjunto solución. Despejando se tiene:




$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \;\cup\; \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \;\cup\; \frac{7\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4}$$

* Finalmente por la condición $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ la respuesta es:

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right\rangle}$$

**114.-** Resolveremos como se hizo en el problema anterior. Esto es:

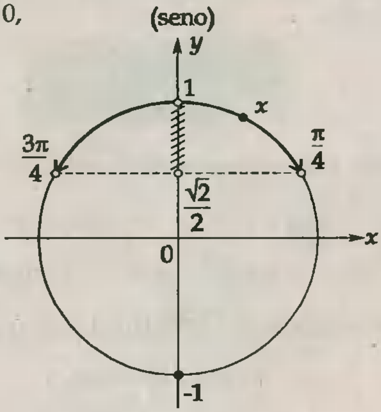
$$-\sqrt{A^2+B^2} \leq A \operatorname{sen} x + B \cos x \leq \sqrt{A^2+B^2}, \quad A \text{ y } B \in \mathbb{R} \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Evaluando para: $A = 1$ , $B = -1$, se tendrá:

$$-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen}(3x) - \cos(3x) \leq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2} + 2 \leq \underbrace{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x + 2}_{>0} \leq \sqrt{2} + 2$$

Con esto hemos demostrado que el numerador de la ecuación es positivo. Luego recordando cuando $b \neq 0$, existe la regla:

$$\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0)$$




Ahora analizamos el denominador:

$$\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4} \;;\; \frac{3\pi}{4}$$

Además según la regla, se debe cumplir que:

$$\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots (1)$$

De la circunferencia trigonométricas (C.T.), observamos que la condición (*) se cumplirá si:

$$\boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle}$$

**115.-** Por definición se sabe que: $\qquad -1 \le \operatorname{sen}(3x) \le 1\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

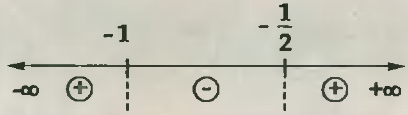
Restando $\sqrt{5}$ a cada miembro: $\qquad -1-\sqrt{5} \le \underbrace{\operatorname{sen}\, 3x-\sqrt{5}}_{<0} \le\ \le 1-\sqrt{5}$

Ahora que hemos comprobado que el numerador del 1er miembro de la inecuación es negativo, aplicaremos la misma regla del problema anterior, es decir:

$$\cos 2x + 3\cos x + 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 < 0$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad (2\cos x + 1)(\cos x + 1) < 0$$

Por el método de los puntos críticos:



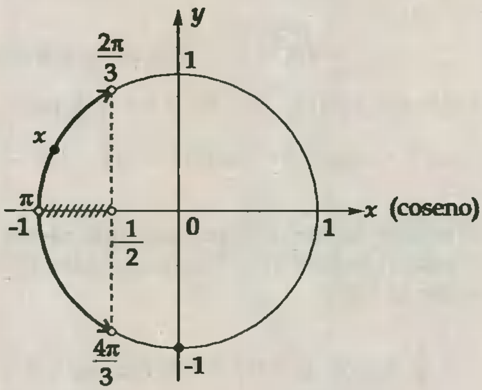

$$2\cos x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1$$

Elegimos los intervalos donde el cociente se verifique como positivo:

$$-1 < \cos x < -\frac{1}{2} \quad \ldots (*)$$

De la circunferencia trigonométricas (C.T.), observamos que la condición (*) se cumplirá si:




$$\boxed{x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\rangle - \{\pi\}}$$

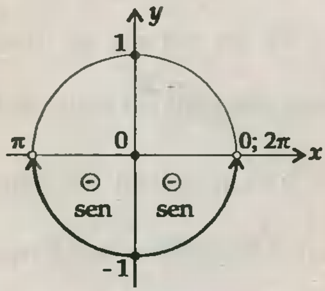
**116.-** Empezaremos planteando la restricción en el intervalo dado:

i) $1 - \cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x \neq 1 \quad \Rightarrow 2x \neq 2k\pi$

$\Rightarrow \quad x \neq k\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq 0; \pi; 2\pi$

Recordando la identidad del arco doble:

$$1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$$




Reemplazando en la ecuación dada: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen}^2 x} < 0$

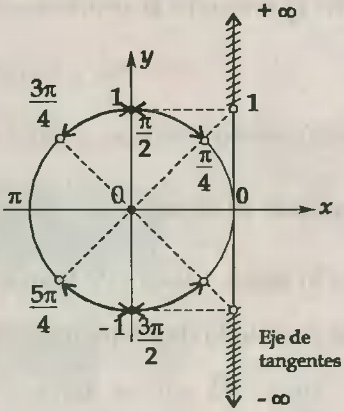
De donde: $\operatorname{sen}^2 x > 0 \ \wedge \ \operatorname{sen} x < 0$

Y analizando en la circunferencia trigonométrica (C.T), se observa que:

$$\pi < x < 2\pi \qquad \therefore \qquad \boxed{x \in \langle \pi ; 2\pi \rangle}$$

117.- Empezaremos planteando la restricción:

$$\tan x \, \exists, \text{ si } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \;, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$$




Recordando la regla: $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ ó $a < -b$

$\Rightarrow \tan x > 1 \cup \tan x < -1 \qquad \ldots (*)$

Usando la circunferencia trigonométrica (C.T.)

Es necesario recordar:

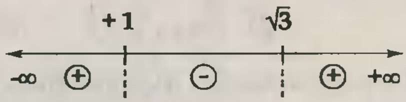
$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1 \wedge \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4} = -1$$

Para que se cumpla la condición (*) de la C.T.. se observa que:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

118.- Como en el problema anterior, empezaremos planteando la restricción:

$$\tan x \, \exists, \text{ si } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \;, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$




Factorizando el 1er miembro se tiene:

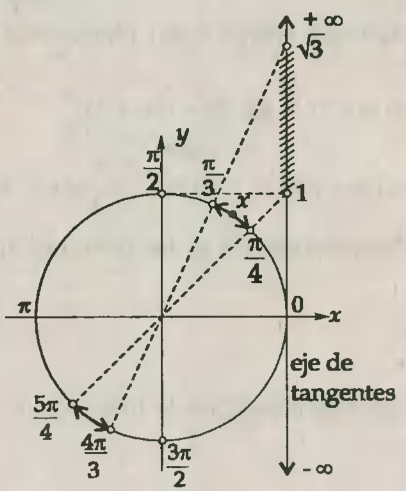
$$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x - 1) < 0$$

Aplicando el método de los puntos críticos, igualamos a cero cada factor para determinar dichos puntos. Luego graficamos en la recta numérica y elegimos los intervalos donde el producto es negativo, entonces:

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3}$$

$$\tan x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1$$

Se observa que: $\quad 1 < \tan x < \sqrt{3} \ldots (*)$




De la circunferencia trigonométricas (C.T.), observamos que la condición (*) se cumplirá si:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

**119.-** Planteando la restricción:

$$\tan x \, \exists, \text{ si } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\ , n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$$

Factorizando tenemos: $(\tan x - 1)^2 . (\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) < 0$

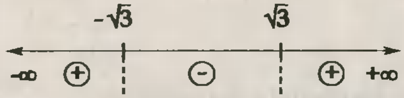
Teniendo en cuenta que: $(\tan x - 1)^2 > 0 \ \Rightarrow \ \tan x \neq 1 \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

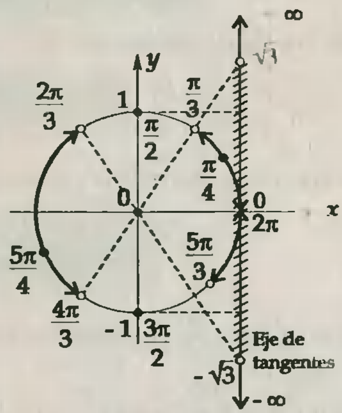
Por lo tanto: $(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) < 0 \ldots (1)$

Por el método de los puntos críticos, se tendrá que:

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

$$\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3}$$




Elegimos los intervalos donde el producto sea negativo:

$$-\sqrt{3} < \tan x < \sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

De la circunferencia trigonométricas (C.T.), observamos que la condición (2) se cumplirá si:

$$\boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\rangle - \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}}$$

**120.-** En primer lugar planteamos la restricción:

i) $\tan 3x \ \exists$, si. $3x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x \neq (2m+1)\frac{\pi}{6}\ , m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$

ii) $\tan x \ \exists$, si: $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\ , n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{2}$

Transformamos el 1er miembro aplicando la siguiente identidad del arco triple:

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1}$$

Reemplazando en la inecuación: $\dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4\cos 2x}{2\cos 2x - 1} < 0$

La restricción es: $\quad 2\cos 2x - 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x \neq \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x \neq \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{5\pi}{3} \;\Rightarrow\; x \neq \dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}$

Aplicando el método de los puntos críticos

$$\cos 2x = 0$$

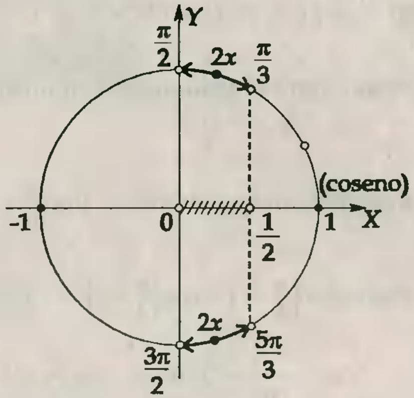
$$2\cos 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x = \frac{1}{2}$$


Elegimos los intervalos donde el cociente es negativo:

$$\Rightarrow \qquad 0 < \cos 2x < \frac{1}{2} \;\ldots(*)$$

Usando la circunferencia trigonométrica observamos que la condición (*) se cumplirá si:

$$\frac{\pi}{3} < 2x < \frac{\pi}{2} \;\cup\; \frac{3\pi}{2} < 2x < \frac{5\pi}{3}$$




Notar que sólo estamos planteando dos intervalos para resolver el problema en base a la condición inicial que indica $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

En caso contrario se recomienda plantear el conjunto solución.

Despejando tenemos: $\quad \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4} \;\cup\; \underbrace{\dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{6}}_{\text{se descarta por condición inicial}} \qquad \therefore\; x \in \left\langle \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4} \right\rangle$

121.- Empezamos estableciendo las restricciones:

i) $\tan \dfrac{x}{2}\ \exists$, si. $\dfrac{x}{2} \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \neq (2m+1)\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

ii) $\cot x\ \exists$, si: $x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow\; x \neq 0;\ \pi$

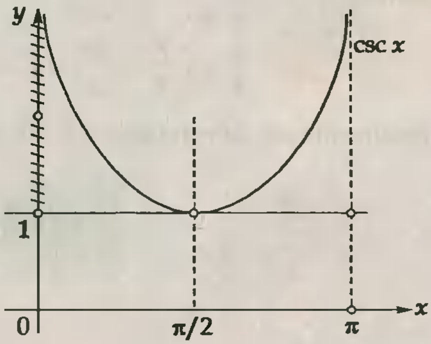
Recordando la identidad del arco mitad:

$$\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$$

$$\Rightarrow\; \csc x - \cot x > 1 - \cot x$$

$$\Rightarrow\; \csc x > 1 \qquad \ldots(*)$$

Graficando la función $\csc x$ en $\langle 0; \pi\rangle$, tenemos:



Para que se cumpla la condición (1) del gráfico se observa que:

$$x \in \langle 0; \pi \rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

**122.-** Establecemos las restricciones del problema:

i) $\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ $\exists$, si. $\frac{\pi}{4} - x \neq m\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4},\ m \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad x \neq \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$

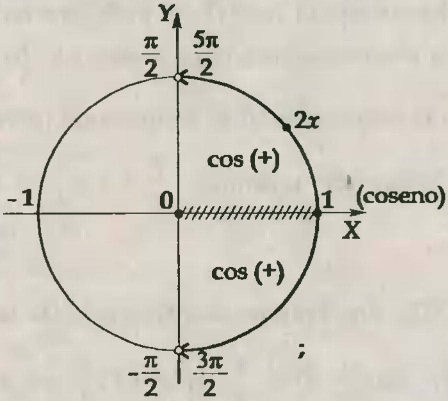
ii) $\tan 2x$ $\exists$, si: $2x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad x \neq \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

Recordando el teorema del complemento : $\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Reemplazando tenemos: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan(2x) > 0 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4} + x - 2x\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos(2x)} > 0$

Pero: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ . . . arco complementario

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} > 0 \Rightarrow \cos 2x > 0 \ \ldots \ (*)$$




Usando la circunferencia trigonométrica observamos que la condición (*) se cumplirá si:

$$-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} < 2x < \frac{5\pi}{2}$$

Notar que sólo estamos planteando dos intervalos para resolver el problema en base a la condición inicial que indica $x \in \langle 0,\pi \rangle$. Despejando tenemos:

$$-\frac{\pi}{4} < x \ \frac{\pi}{4} \cup \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

Finalmente por la condición $x \in \langle 0; \pi \rangle$, la respuesta es:

$$x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$$

**123.-** Determinamos las restricciones del problema:

i) $\tan x\ \exists$, si: $x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad x \neq \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}$

ii) $\cot x\ \exists$, si: $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad x \neq 0;\ \pi;\ 2\pi$

En forma analítica y recordando la identidad del arco simple y del arco doble:

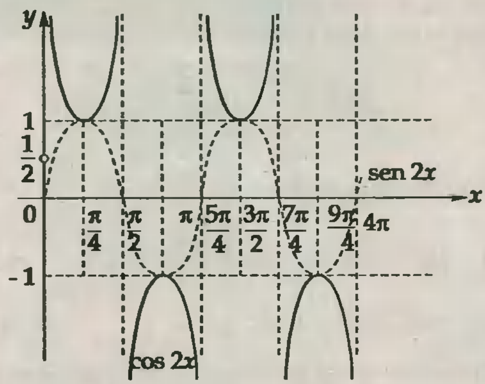
$$\tan x + \cot x = \sec x \,.\, \csc x = 2\csc 2x,$$

$$\Rightarrow \quad 2\csc 2x < 1$$

$$\csc 2x < \frac{1}{2} \ldots (*)$$

Sea: $f(x) = \csc 2x$, determinemos su período:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (por regla práctica)}$$




Graficamos la función $f$, y de ella

Para que cumpla la condición (*) del gráfico se observa que:

$$\boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{2};\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2};2\pi \right\rangle}$$

**124.-** Determinamos la restricción del problema:

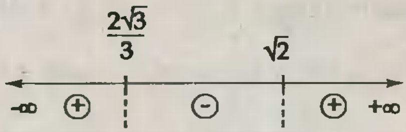
i) $\sec x\ \exists$, si: $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad x \neq \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}$

Factorizando tenemos: $(\sqrt{3}\sec x - 2)(\sec x - \sqrt{2}) < 0$

Por el método de los puntos críticos:

$$\sqrt{3}\sec x - 2 = 0 \Rightarrow \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sec x = \sqrt{2}$$




Elegimos los intervalos donde el producto sea negativo.

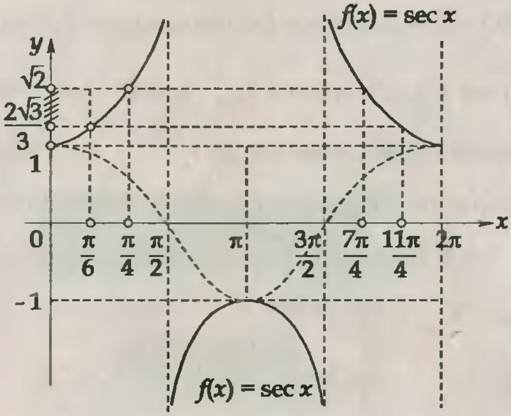
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} < \sec x < \sqrt{2} \ldots (1)$$

Sea $f(x) = \sec x$, y graficamos la función.

Debemos recordar los siguientes valores:

$$\sec\frac{\pi}{4} = \sec\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\sec\frac{\pi}{6} = \sec\frac{11\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$




Para que se cumpla la condición (1) del gráfico se debe cumplir que:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{6} \right\rangle$$

**125.-** Planteamos las restricciones:

i) $\sec x\ \exists$, si: $x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad x \neq \frac{\pi}{2}$

ii) $\csc x\ \exists$, si: $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad x \neq 0; \pi$

Transformando mediante las identidades del arco simple y arco doble, tendremos:

$$\sec^2 x - \csc^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x}$$

$$\sec^2 x - \csc^2 x = \frac{-4.\cos 2x}{(2\operatorname{sen} x.\cos x)^2} = \frac{-4\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{-8\cos 2x}{2\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{-8\cos 2x}{1-\cos 4x} = \frac{-8\cos 2x}{vers 4x}$$

Reemplazando en la ecuación : $\dfrac{-8\cos 2x}{vers 4x} \geq \dfrac{4}{vers 4x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{8\cos 2x}{vers 4x} \leq \dfrac{-4}{vers 4x}$

$$\frac{2\cos 2x + 1}{vers 4x} \leq 0 \quad \ldots (1)$$

De las restricciones: $x \neq \dfrac{k\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad 4x \leq 2k\pi$

$$\Rightarrow \cos 4x \neq \cos(2k\pi) \Rightarrow \cos 4x \neq 1 \quad\Rightarrow\quad -1 \leq \cos 4x < 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq -\cos 4x > -1 \quad\Rightarrow\quad 2 \geq \underbrace{1-\cos 4x} > 0 \quad\Rightarrow\quad 0 < vers\,4x \leq 2 \qquad \ldots (2)$$

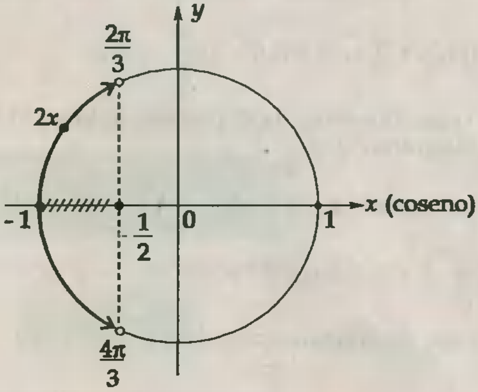
Esto significa que el denominador de (1) es positivo, luego: $\quad 2\cos 2x + 1 \leq 0$

$$\Rightarrow \cos 2x \leq -\frac{1}{2}$$

Elaboramos la circunferencia trigonométrica.

Es importante recordar los siguientes valores:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$




En la C.T. se observa que:

$$\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Pero de la restricción: $x \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}}$$

**126.-** Planteando la restricción:

$$\tan x\ \exists,\ \text{si: } x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z} \qquad \therefore \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$$

Sustituyendo la, tendremos: $\quad \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x \leq 2 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} \leq 2,$

Teniendo en cuenta que: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y además la condición de que:

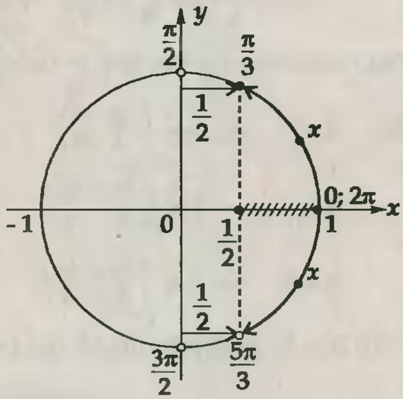
$$x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]] \Rightarrow \cos x > 0$$

Despejando: $\quad \cos x \geq \frac{1}{2} \ \ldots$ (*)

Elaboramos la circunferencia trigonométrica (C.T.).

Es importante recordar los siguientes valores:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$




Para que la condición (*) se verifique, según la C.T, se debe cumplir que:

$$\boxed{x \in \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]}$$

**127.-** Establecemos la restricción del problema:

i) $\tan x\ \exists$, si: $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \therefore \quad x \neq \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}$

Transformamos la expresión aplicando la identidad del arco simple y del arco doble (degradación).

$$\Rightarrow \quad \sec^2 x < 4\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} < 4\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad 1 < (2\cos^2 x)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < (1+\cos 2x)^2$$

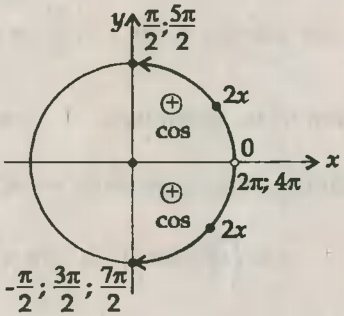
$$\Rightarrow \quad 1 < 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x \qquad \Rightarrow \qquad \cos 2x(\cos 2x + 2) > 0 \quad \ldots(*)$$

Pero de la restricción: $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x \neq (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \cos 2x \neq \cos[(2n+1)\pi]$

$$\Rightarrow \qquad \cos 2x \neq 1$$

Además se sabe que: $\quad -1 < \cos 2x \leq 1 \ \Rightarrow \ 1 < \underbrace{\cos 2x + 2}_{>0} \leq 3$

En (1) tenemos: $\cos 2x > 0$




Usando la circunferencia trigonométrica (C.T) se observa que:

$$-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$$

Pero también por ángulos coterminales:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle; \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Del conjunto solución que se ha determinado, damos valores apropiados para $k$.

Si: $\quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4} \right\rangle$

$\qquad k = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4} \right\rangle$

$\qquad k = 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle \dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4} \right\rangle$

Pero por la condición inicial del problema: $\ x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\therefore \qquad \boxed{x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right\rangle}$$

**128.-** Nuestra estrategia será recurrir a la siguiente relación:

$$-\sqrt{A^2+B^2} \leq A \operatorname{sen} x + B\cos x \leq \sqrt{A^2+B^2} \quad , \ A \text{ y } B \in \mathbb{R} ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Evaluando para A = 1, B= 2, tendremos:

$$-\sqrt{5} \leq -\operatorname{sen} x + 2\cos x \leq \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{6} - \sqrt{5} \leq \underbrace{\sqrt{6} - \operatorname{sen} x + 2\cos x}_{>0} \leq \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

De la regla: $\dfrac{a}{b} < 0 \leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b > 0)$, con: $b \neq 0$

Pues bien, habiendo probado que el denominador de la fracción es positivo, nos queda analizar el numerador, el cual deberá ser así:

$$\tan^2 x - \frac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\tan^2 x} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad |\tan x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

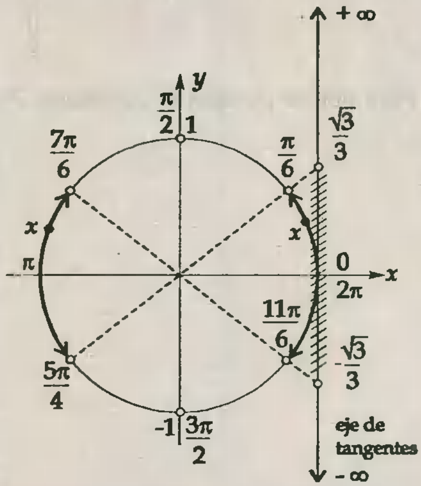
De la regla: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

Aplicándola en (1), tendremos:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \ldots (2)$$

Restricciones: $x \neq \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}$ para que $\tan x \ \exists$.

Elaboramos la circunferencia trigonométrica (C.T.), para lo cual es importante recordar los siguientes valores:




$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para que se cumpla la condición (2), de la C.T. se observa que:

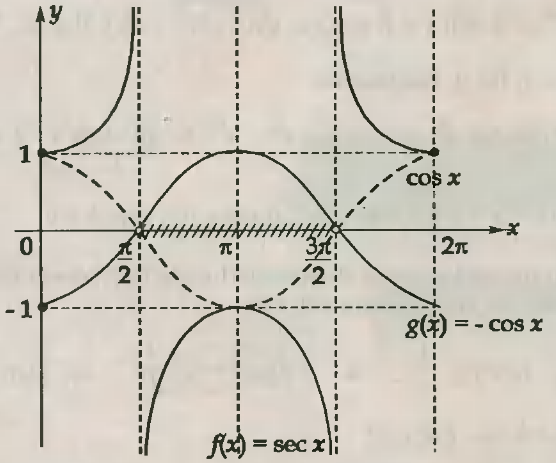
$$\boxed{x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]}$$

**129.-** Planteando la restricción:

$$\sec x \ \exists, \text{ si: } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \qquad \therefore \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$$

Despejamos: $\quad \sec x < -\cos x \quad \ldots (*)$

Sean: $f(x) = \sec x$ y $g(x) = -\cos x$, funciones cuyas gráficas se muestran en $[0; 2\pi]$




Para que se cumpla la condición (*), del gráfico se observa que:

$$\boxed{x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle}$$


***LEY DE SENOS***

**01.-** Tenemos: $$M = \frac{a}{b} - \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}$$

Sabemos por la ley de senos: $$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$$

De donde: $$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} \qquad \therefore \quad \boxed{M = 0}$$

**02.-** Usando la ley de senos tenemos:

$$\frac{2}{\text{sen}\,x} = \frac{3}{\text{sen}\,3x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} = \frac{3}{2} \;\ldots (*)$$

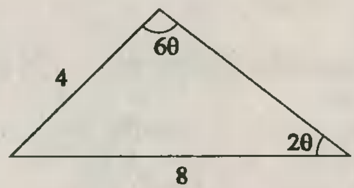
Pero: $$\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} = 2\cos 2x + 1 \;\ldots (1)$$

(1) en (*): $$2\cos 2x + 1 = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \cos 2x = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; 2x = arc\cos\frac{1}{4}$$

Finalmente: $$\boxed{x = \frac{1}{2}\,.\,arc\cos\frac{1}{4}}$$

**03.-** Por la ley de senos: $$\frac{8}{\text{sen}\,6\theta} = \frac{4}{\text{sen}\,2\theta} \;\Rightarrow\; \frac{\text{sen}\,6\theta}{\text{sen}\,2\theta} = 2 \;\ldots (*)$$

Pero: $$\frac{\text{sen}\,6\theta}{\text{sen}\,2\theta} = 2\cos 4\theta + 1$$

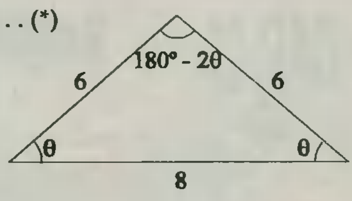



luego: $$\cos 4\theta = \frac{1}{2}$$

Como: $$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

De donde: $$4\theta = 60° \qquad \therefore \quad \boxed{\theta = 15°}$$

04.- Usando la ley se senos: $\dfrac{6}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{8}{\operatorname{sen}(180° - 2\theta)}$ . . . (*)



Pero: $\operatorname{sen}(180° - 2\theta) = \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$

En (*): $\dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{4}{2\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}$

Eliminando: $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ tenemos: $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

Luego como: $\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Finalmente racionalizando obtenemos: $\boxed{\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

05.- Recordemos: $\cot A + \cot B = \dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}$ . . . (1)

Por la ley de senos:

$a = 2R \operatorname{sen} A$ , $b = 2R \operatorname{sen} B$ , $c = 2R \operatorname{sen} C \Rightarrow abc = 8R^3 \operatorname{sen} A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C$ . . . (2)

(1) y (2) en M: $M = 8R^3 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2C \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B} = 8R^3\operatorname{sen}^2C \cdot \operatorname{sen}(A+B)$

Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} C \Rightarrow M = 8R^3\operatorname{sen}^3C = (2R\operatorname{sen} C)^3$

Por la ley de senos: $\boxed{M = c^3}$

06.- Tenemos: $M = \dfrac{b\operatorname{sen} B - c\operatorname{sen} C}{2a.\operatorname{sen}(B-C)}$

Usando la ley de senos: $M = \dfrac{(2R\operatorname{sen}B)\operatorname{sen}B - (2R\operatorname{sen}C)\operatorname{sen}C}{2(2R\operatorname{sen}A).\operatorname{sen}(B-C)}$

Efectuando, tendremos: $M = \dfrac{2R(\operatorname{sen}^2B - \operatorname{sen}^2C)}{4R\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}(B-C)}$

Pero: $\operatorname{sen}^2B - \operatorname{sen}^2C = \operatorname{sen}(B+C) \cdot \operatorname{sen}(B-C)$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{sen}(B-C)}{2\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}(B-C)} = \frac{\operatorname{sen}(B+C)}{2\operatorname{sen}A} \quad \ldots (*)$$

Como: A + B + C = 180° $\Rightarrow$ sen (B + C) = sen A

En (*): $\boxed{M = \frac{1}{2}}$

07.- Por uno de los datos: $b + c = a\sqrt{2}$ ... (*)

Usando la ley de senos en (*): 2Rsen B + 2R sen C = (2R . sen A). $\sqrt{2}$

Luego: sen B + sen C = (sen A) . $\sqrt{2}$

Transformando a producto: $2\ \text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right).\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = (\text{sen A})\sqrt{2}$ ...(**)

Pero: B - C = 90° $\Rightarrow$ $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ... a(1)

$A + B + C = 180° \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90° \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ ... (2)

(1) y (2) en (**): $2 . \cos\frac{A}{2} . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\text{sen}\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}$

Simplificando: $\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 30°$

Finalmente: $\boxed{A = 60°}$

08.- Por la ley de senos, sabemos: $a$ = 2Rsen A , $b$ = 2R sen B , $c$ = 2R sen C

Reemplazando en M: $M = \frac{R.2\text{senB}.\cos B + R.2\text{senC}.\cos C}{\cos(B-C)}$

Pero: 2 sen $x$ . cos $x$ = sen 2$x$ , luego: $M = \frac{R(\text{sen}2B + \text{sen}2C)}{\cos(B-C)}$

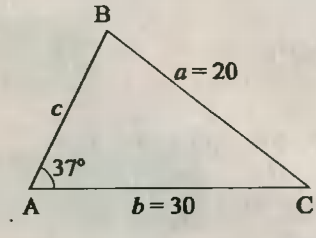
Transportando a producto: $M = \frac{2R\text{sen}(B+C).\cos(B-C)}{\cos(B-C)}$

Como: $A + B + C = \pi \Rightarrow$ sen (B + C) = sen A

$\Rightarrow$ M = 2R sen A

Por ley de senos, tendremos: $\boxed{M = a}$

09.- Sabemos por la ley de senos: $\dfrac{a}{\text{sen A}} = \dfrac{b}{\text{sen B}}$




Usando los datos: $$\frac{20}{\text{sen}\,37^\circ} = \frac{30}{\text{sen}B^\circ}$$

Despejando: $$\text{sen B} = \frac{3}{2}\,.\,\text{sen}\,37^\circ$$

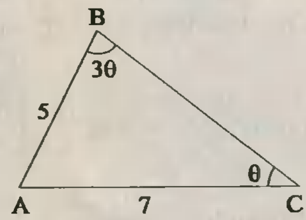
Pero: $\text{sen}\,37^\circ = \dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\text{sen B} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{10}$ . . . (1)

También sabemos: $\cos 2B = 1 - 2\,\text{sen}^2 B$ . . . (2)

(1) en (2): $\cos 2B = 1 - 2\left(\dfrac{81}{100}\right)$ $\therefore$ $\boxed{\cos 2B = -\dfrac{81}{50}}$

10.- Nos piden: $\cos 2\theta$

Usando la ley de senos:




$$\frac{5}{\text{sen}\,\theta} = \frac{7}{\text{sen}\,3\theta} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,3\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{7}{5}\ \ldots (*)$$

Pero: $$\frac{7}{5} = 2\cos 2\theta + 1$$

En (*): $2\cos 2\theta + 1 = \dfrac{7}{5}$ $\Rightarrow$ $2\cos 2\theta = \dfrac{2}{5}$

Finalmente: $\boxed{\cos 2\theta = \dfrac{1}{5}}$

11.- Tenemos: $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C}$ . . . (*)

Por la ley de senos sabemos:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2R\,\text{sen A} \\ b &= 2R\,\text{sen B} \\ c &= 2R\,\text{sen C} \end{aligned}\right\}\ (1)$$

(1) en (*): $\dfrac{2R\text{sen}A}{\cos A} = \dfrac{2R\text{sen}B}{\cos B} = \dfrac{2R\text{sen}C}{\cos C}$

Simplificando tenemos: $\tan A = \tan B = \tan C$ de donde: $A = B = C = 60^\circ$

Finalmente: **El triángulo es equilátero**

**12.-** Por dato: $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{c}{a.b}\ldots(*)$

Usando la ley de senos en (*): $\dfrac{\cos A}{2R\operatorname{sen}A}+\dfrac{\cos B}{2R\operatorname{sen}B}+\dfrac{\cos C}{2R\operatorname{sen}C}=\dfrac{2R\operatorname{sen}C}{(2R\operatorname{sen}A)(2R\operatorname{sen}B)}$

Simplificando y usando: $\cot x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

Nos queda: $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}\ldots(1)$

Pero: $A+B+C=180° \Rightarrow \operatorname{sen}C=\operatorname{sen}(A+B)$ y $\dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=\cot A+\cot B\ldots(2)$

(2) en (1): $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A+\cot B$

Simplificando: $\cot C=0$ de donde: $\boxed{C=90°}$

**13.-** Tenemos: $M=\dfrac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\dfrac{c-a}{b+c}\ldots(*)$

Por la ley de senos tenemos: $a=2R\operatorname{sen}A$ , $b=2R\operatorname{sen}B$ , $c=2R\operatorname{sen}C$

Reemplazando en (*): $M=\dfrac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\dfrac{2R\operatorname{sen}C-2R\operatorname{sen}A}{2R\operatorname{sen}B+2R\operatorname{sen}C}$

Ordenando y simplificando obtenemos: $M=\dfrac{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}$ $\therefore$ $\boxed{M=1}$

**14.-** $M=a\sec A+b.\sec B+c.\sec C$

Usando la ley de senos: $M=2R\operatorname{sen}A.\dfrac{1}{\cos A}+2R\operatorname{sen}B.\dfrac{1}{\cos B}+2R\operatorname{sen}C.\dfrac{1}{\cos C}$

Pero: $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\tan x \Rightarrow M=2R(\tan A+\tan B+\tan C)\ldots(*)$

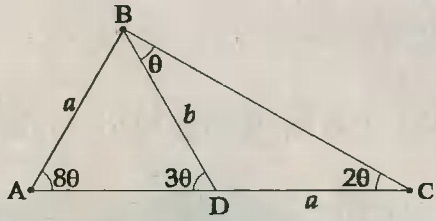
Como: $A+B+C=180° \Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

En (*): $M=2R.\tan A.\tan B.\tan C$

Pero por dato: $R.\tan A.\tan B.\tan C=2$

Finalmente: $\boxed{M=4}$

**15.-** Ley de senos:




$\Delta ABD$: $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{sen}\,3\theta}{\text{sen}\,8\theta}$ . . . (1)

$\Delta BDC$: $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,2\theta}$ . . . (2)

Igualando las expresiones (1) y (2): $\dfrac{\text{sen}\,3\theta}{\text{sen}\,8\theta} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,2\theta}$

Pero: $\quad \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\,.\,\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\,3\theta}{\text{sen}\,8\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{2\,\text{sen}\,\theta.\cos\theta} \Rightarrow 2\,\text{sen}\,3\theta\,.\,\cos\theta = \text{sen}\,8\theta$$

Transformando a una suma: $\text{sen}\,4\theta + \text{sen}\,2\theta = \text{sen}\,8\theta \Rightarrow \quad \text{sen}\,2\theta = \text{sen}\,8\theta - \text{sen}\,4\theta$

Transformando a producto: $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,2\theta\,.\,\cos 6\theta$

Al simplificar obtenemos: $\cos 6\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 6\theta = 60°$

Finalmente: $\boxed{\theta = 10°}$

**16.-** Recordemos: $\quad (*) \quad \begin{cases} a.\text{sen}\,C = c.\text{sen}\,A \\ b\,\text{sen}\,A = a.\text{sen}\,B \\ c.\text{sen}\,B = b.\text{sen}\,C \end{cases}$

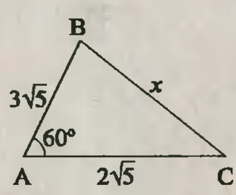
$M = a\,.\,\text{sen}\,C - b\,.\,\text{sen}\,C + b\,.\,\text{sen}\,A - c\,.\,\text{sen}\,A + \text{sen}\,B - a\,.\,\text{sen}\,B$

Agrupando: $\quad M = (a\,.\,\text{sen}\,C - c\,.\,\text{sen}\,A) + (b.\,\text{sen}\,A - a\,.\,\text{sen}\,B) + (c\,.\,\text{sen}\,B - b\,.\,\text{sen}\,C)$

Por (*): $\boxed{M = 0}$

### *LEY DE COSENOS*

**17.-** Usando la ley de cosenos:

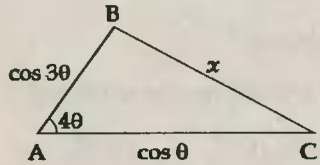



$$x^2 = (3\sqrt{5}\,)^2 + (2\sqrt{5}\,)^2 - 2(2\sqrt{5}\,)(3\sqrt{5}\,)\cos 60°$$

Al efectuar obtenemos: $\quad x^2 = 35$

Finalmente: $\boxed{x = \sqrt{35}}$

18.- Sea: BC = $x$,




Por la ley de cosenos, tenemos:

$x^2 = \cos^2 3\theta + \cos^2\theta - 2\cos\theta \,.\, \cos 3\theta \,.\, \cos 4\theta$

$x^2 = \cos^2 3\theta - \cos\theta \,.\, \cos 3\theta \,.\, \cos 4\theta + \cos^2\theta - \cos\theta \,.\, \cos 3\theta \,.\, \cos 4\theta$

Factorizando apropiadamente, tenemos:

$x^2 = \cos 2\theta(\cos 3\theta - \cos\theta \,.\, \cos 4\theta) + \cos\theta\,(\cos\theta - \cos 3\theta \,.\, \cos 4\theta) \ldots (*)$

Pero: $\cos 3\theta = \cos(4\theta - \theta) = \cos 4\theta.\cos\theta + \text{sen}\, 4\theta.\text{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \quad \cos 3\theta - \cos\theta \,.\, \cos 4\theta = \text{sen}\, 4\theta.\text{sen}\,\theta \ldots (1)$

$\cos\theta = \cos(4\theta - 3\theta) = \cos 4\theta.\cos 3\theta + \text{sen}\, 4\theta.\text{sen}\, 3\theta$

$\Rightarrow \quad \cos\theta - \cos 3\theta.\cos 4\theta = \text{sen}\, 4\theta.\text{sen}\, 3\theta \ldots (2)$

(1) y (2) en (*): $\quad x^2 = \cos 3\theta(\text{sen}\, 4\theta \,.\, \text{sen}\,\theta) + \cos\theta(\text{sen}\, 4\theta.\text{sen}\, 3\theta)$

Factorizando convenientemente, tendremos:

$$x^2 = \text{sen}\, 4\theta \; \underbrace{(\cos 3\theta.\text{sen}\,\theta + \cos\theta.\text{sen}\, 3\theta)}_{\text{sen}(3\theta+\theta)} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \text{sen}^2 4\theta$$

Finalmente: $\boxed{x = \text{sen}\, 4\theta}$

19.- Como: $3a = 7c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{7}{3} \quad \ldots (1)$

$3b = 3c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{8}{3} \quad \ldots (2)$

De (1) y (2): $\quad a = 7k\,,\; b = 8k$ y $c = 3k$

Por la ley de cosenos sabemos: $\quad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$

Reemplazando los valores de $a$, $b$ y $c$: $\quad \cos A = \dfrac{64k^2 + 9k^2 - 49k^2}{2(24k^2)} = \dfrac{24k^2}{2(24k^2)}$

Finalmente: $\cos A = \dfrac{1}{2}$ de donde: $\boxed{A = 60°}$

**20.-** Tenemos: $a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2}{3}bc \ldots (*)$

Por la ley de cosenos sabemos: $a^2 - b^2 - c^2 = 2bc \,.\, \cos A \ldots (1)$

(1) en (*): $-2bc \,.\, \cos A = \frac{2}{3}bc$

Simplificando obtenemos: $\cos A = -\frac{1}{3}$

Luego como: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

De donde: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}$ , finalmente: $\boxed{\tan\frac{A}{2} = \sqrt{2}}$

**21.-** Tenemos: $3(a^2 - b^2 - c^2) = 2bc \ldots (*)$

Por la ley de cosenos sabemos: $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc.\cos A \quad \ldots (1)$

(1) en (*): $-6bc \,.\, \cos A = 2bc \quad \Rightarrow \quad \cos A = -\frac{1}{3} \ldots (2)$

Luego: $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$

Por la expresión (2): $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2}$

Finalmente: $\boxed{\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{3}}$

**22.-** Como: $(a+b+c)(a+b-c) = \frac{7ab}{3}$

Por diferencia de cuadrados: $(a+b)^2 - c^2 = \frac{7ab}{3} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = \frac{7}{3}.ab - 2ab$

Al efectuar obtenemos: $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{1}{3}.ab \quad \ldots (1)$

Por la ley de cosenos, sabemos: $a^2 + b^2 - c^2 = 2a.b.\cos C \quad \ldots (2)$

De (1) y (2), deducimos: $2ab.\cos C = \frac{1}{3}.ab$

Finalmente: $\boxed{\cos C = \frac{1}{6}}$

**23.-** Tenemos: $M = ab \, . \cos C - ac \, . \cos B$

Por la ley de cosenos tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos C \Rightarrow \; 2ab \, . \cos C = a^2 + b^2 - c^2 \; \ldots \; (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos B \Rightarrow \; 2ac \, . \cos B = a^2 + c^2 - b^2 \; \ldots \; (2)$$

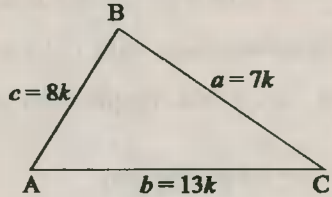
Al restar la expresiones (1) y (2), obtenemos:

$$2(ab \cos C - ac \, . \cos B) = 2b^2 - 2c^2$$

Finalmente: $\boxed{M = b^2 - c^2}$

**24.-** De la figura: $m \angle B$ es el mayor

Por la ley de cosenos:




$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a.c}$$

$$\cos B = \frac{49k^2 + 64k^2 - 169k^2}{2(7k)(8k)} = -\frac{1}{2}$$

Finalmente: $\boxed{B = 120°}$

**25.-** Utilizando la ley de cosenos tenemos:

$$(2x + 3)^2 = (2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 - 2(2x - 1).(1x - 1) \, . \cos 120° \ldots (*)$$

Pero:
$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \; \ldots \; (1)$$
$$(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 2(4x^2 + 1) \; \ldots \; (2)$$
$$(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1 \; \ldots \; (3)$$

(1), (2) y (3) en (*): $\quad 4x^2 + 12x + 9 = 8x^2 + 2 - 2(4x^2 - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

Al efectuar, obtenemos: $\quad 8x^2 - 12x - 8 = 0$

Finalmente: $\quad 4(x - 2)(2x + 1) = 0$

Entonces: $\quad 2x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$

$$\Rightarrow \; \underset{\text{(imposible)}}{x = -\frac{1}{2}} \quad \vee \quad x = 2 \qquad \therefore \quad \boxed{x = 2}$$

**26.-** Como: $a + b = \sqrt{2}\,.\,c$

Elevando al cuadrado: $(a+b)^2 = (\sqrt{2}\,c)^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + 2ab = 2c^2 \;\ldots (1)$

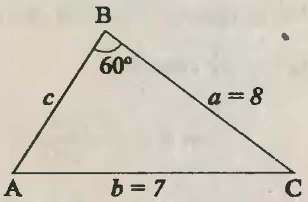
Por la ley de cosenos: $\qquad a^2 + b^2 - 2ab\,.\,\cos C = c^2 \ldots\; (2)$

Al restar las expresiones (1) y (2), obtenemos:

$$2ab + 2ab\,.\,\cos C = c^2 \;\Rightarrow\; 2ab(1 + \cos C) = c^2$$

Finalmente: $\boxed{1 + \cos C = \dfrac{c^2}{2ab}}$

**27.-** Usando la ley de cosenos, tenemos:




$$49 = 64 + c^2 - 2(8)c.\,\cos 60° \;\Rightarrow\; c^2 - 8c + 15 = 0$$

Factorizando: $(c-3)(c-5) = 0$

$\Rightarrow \quad c = 3$ (No cumple con los datos)

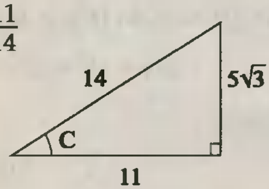
$\vee$

$c = 5$ (si cumple)

Luego por la ley de cosenos: $\quad \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} = \dfrac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2(8)(7)}$

Efectuando las operaciones indicadas, obtenemos: $\cos C = \dfrac{11}{14}$

Construyendo un triángulo rectángulo para el ángulo C.




Luego: $\qquad \cot C = \dfrac{11}{5\sqrt{3}}$

Finalmente: $\boxed{\sqrt{3}\cot C = \dfrac{11}{5}}$

**28.-** Como: $\qquad (a^2 - b^2 - c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \ldots (*)$

Por dato: $\qquad a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 \qquad \ldots (1)$

(1) en (*): $\qquad (a^2 - b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2$

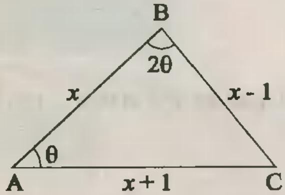
$\Rightarrow \;(a^2 - b^2 - c^2)^2 = 2b^2c^2 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 - c^2 = \sqrt{2}\,bc \qquad \ldots (2)$

Pero por la ley de cosenos: $\quad a^2 - b^2 - c^2 = -\,2bc\,.\,\cos A \qquad \ldots (3)$

(3) en (2): $-2bc \cdot \cos A = \sqrt{2}\, bc$, luego: $\cos A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Finalmente: $\boxed{A = 135°}$

**29.-** Sean: $x - 1$, $x$ , $x + 1$ los lados de un triángulo




Por la ley de senos: $\dfrac{x+1}{\text{sen}\,2\theta} = \dfrac{x-1}{\text{sen}\,\theta}$

Pero: $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\,\text{sen}\,\theta.\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\theta = \frac{x+1}{x-1} \quad \ldots (1)$$

Por la ley de cosenos: $(x - 1)^2 = (x + 1)^2 + x^2 - 2x(x + 1)\cos\theta \quad \ldots (2)$

Reemplazando la expresión (1) en la expresión (2), obtenemos:

$$(x - 1)^2 = (x + 1)^2 + x^2 - \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

Resolviendo: $x = 5$

Luego: perímetro $= 3x = 15$

Finalmente: $\boxed{\textbf{perímetro} = 15}$

**30.-** Sabemos que: $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

Luego en el problema: $a\underbrace{\left(2\cos^2\dfrac{B}{2}\right)}_{1+\cos B} + b\underbrace{\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}\right)}_{1+\cos A} = 2\sqrt{3}$

$$a + a\cos B + b + b\cos A = 2\sqrt{3}$$

Ordenando, como sigue: $a + b \quad \underbrace{a\cos B + b\cos A}_{c} = 2\sqrt{3}$

(Por ley de proyecciones)

Finalmente: $2p = a + b + c$

$$\therefore \quad \boxed{2p = 2\sqrt{3}}$$

### *LEY DE TANGENTES*

**31.-** Por la ley de tangentes sabemos: $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}\quad\ldots\text{(I)}$$

Como: $$\tan\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}$$

Reemplazando los datos: $$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}\Rightarrow\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}$$

Reemplazando los datos: $$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}$$

Luego en (I): $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}}$$

Finalmente: $$\boxed{\mathbf{M=\frac{9}{25}}}$$

**32.-** Por la ley de tangentes sabemos: $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Usando proporciones tendremos: $$\frac{a-b+a+b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)+\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Reemplazando los datos: $$\frac{8b}{5b}=\frac{8}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}\Rightarrow\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=5$$

Como: $$A+B+C=180^\circ\Rightarrow\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$$

Por co-razones: $$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$$

Finalmente: $$\boxed{\mathbf{\cot\frac{C}{2}=5}}$$

**33.-** Por la ley de tangentes sabemos: $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Usando proporciones: $$\frac{(b-c)-(b+c)}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)-\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}\quad\ldots(*)$$

Como: $A+B+C=180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ$

Por co-razones trigonométricas: $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$

En (*): $$\frac{-2c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)-\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}}\Rightarrow M=\frac{-2c}{b+c}$$

Reemplazando en M, obtenemos: $b=5c \Rightarrow M=\frac{-2c}{5c+c}=\frac{-2c}{6c}$

Finalmente: $\boxed{M=\frac{-1}{3}}$

**34.-** Por la ley de tangentes sabemos:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}\Rightarrow \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=\left(\frac{b+c}{b-c}\right).\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\ldots(*)$$

Como: $b\cot B=(2c-b)\cot A \Rightarrow b(\cot B+\cot A)=2c\,.\cot A \quad\ldots(\mathrm{I})$

Pero: $\cot B+\cot A=\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=\frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}\quad\ldots(1)$

(1) en (I): $\frac{b.\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=\frac{2(2R\operatorname{sen}C)\cos A}{\operatorname{sen}A}$

Simplificando: $\cos A=\frac{1}{2} \Rightarrow A=60^\circ \Rightarrow B+C=120^\circ$

Luego en (*): $M=\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)\quad\therefore\quad \boxed{\tan 60^\circ=\sqrt{3}}$

35.- Por la ley de tangentes: $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}$ ...(*)

Por dato: $A + B + C = 180° \wedge C = 60° \Rightarrow A + B = 120°$ . . . (1)

También: $a = 3b$ . . . (2)

(1) y (2) en (*): $\dfrac{3b-b}{3b+b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan 60°}$

Pero: $\tan 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ . . . (3)

Luego por arcos dobles: $\tan(A - B) = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

Por (3): $\tan(A - B) = \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \tan(A - B) = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{1}{4}}$

Finalmente: $\boxed{\tan(A - B) = 4\sqrt{3}}$

***LEY DE PROYECCIONES***

36.- $M = \left(\dfrac{a-c.\cos B}{b}\right). \sec C$ . . . (*)

Por la ley se proyecciones sabemos:

$$a = b\cos C + c \,.\, \cos B \Rightarrow a - c.\cos B = b \,.\, \cos C \text{. . . (1)}$$

(1) en (*): $M = \left(\dfrac{b.\cos C}{b}\right). \sec C$

Al simplificar, obtenemos: $\boxed{M = 1}$

37.- Por la ley de proyecciones sabemos: $a = b.\cos C + c\,.\cos B \Rightarrow a - c\,.\cos B = b\cos C$

$$c = a.\cos B + b\,.\cos A \Rightarrow c - a\,.\cos B = b\cos A$$

Reemplazando en M: $M = \dfrac{b.\cos C.\sec C}{b.\cos A}$

Luego de simplificar obtenemos: $M = \dfrac{1}{\cos A}$ $\quad\therefore\quad$ **$M = \sec A$**

**38.-** Como: $A + B + C = 180°$

$\cos(A + B) = -\cos C$

$\cos(A + C) = -\cos B$

Reemplazando en la expresión M: $M = \dfrac{-c.\cos B - b.\cos C}{a}$

Por la ley de proyecciones: $a = b\cos C + c\,.\cos B$

Finalmente: $M = \dfrac{-(c.\cos B + b.\cos C)}{b.\cos C + c.\cos B}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{M = -1}$

**39.-** $M = bc\,.\cos A + ac\,.\cos B + ab\,.\cos C$

Agrupando convenientemente:

$M = c(b\cos A + a\cos B) + ab\cos C \ldots (1)$ ó $M = bc.\cos A + a(c.\cos B + b\cos C) \ldots (2)$

(1) + (2): $2M = a(c\,.\cos B + b\,.\cos C) + c(b\cos A + a\cos B) + b(c\cos A + a\cos C)$

Pero por la ley de proyecciones: $a = b\cos C + c\,.\cos B$

$b = a\cos C + c.\cos A$

$c = a\cos B + b\,.\cos A$

Luego: $2M = a(a) + c(c) + b(b) \Rightarrow M = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \dfrac{10}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{M = 5}$

**40.-** A, B y C ángulos agudos:

Recordemos: $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

Luego en la expresión "M": $M = bc.\sqrt{1+\cos 2A} + ac\,.\sqrt{1+\cos 2B} + ab.\sqrt{1+\cos 2C}$

Como: A, B y C son agudos entonces: $M = \sqrt{2}\,(bc.\cos A + ac.\cos B + ab.\cos C)$

Por el problema anterior usando la ley de proyecciones:

$$bc.\cos A + ac.\cos B + ab.\cos C = a^2 + b^2 + c^2$$

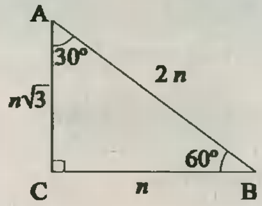
Finalmente: $\boxed{M = \sqrt{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)}$

**41.-** Del dato: $\dfrac{A}{1} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{3} = t$

Pero: $A + B + C = \pi \quad \Rightarrow \quad t + 2t + 3t = 180°$, luego:

$$A = 30° \, , B = 60° \, , C = 90°$$

Se tiene un ⊿ACB (recto en C)




Del dato: $2n - n = 2k° \Rightarrow n = 2k$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(CA)(CB)}{2} = \frac{n\sqrt{3}.n}{2} = \frac{n^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(2k)^2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,.k^2$$

Finalmente : $\boxed{S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}\,.k^2}$

**42.-** Del dato: $\dfrac{\text{sen}A}{5} = \dfrac{\text{sen}B}{7} = \dfrac{\text{sen}C}{8} = t$

De la ley de senos: $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} = \dfrac{c}{\text{sen}C}$

$$\frac{a}{5t} = \frac{b}{7t} = \frac{c}{8t} = k$$

Luego: $a = 5k \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 2\rho \Rightarrow \quad \rho - a = 5k$

$b = 7k \qquad 20k = 2\rho \qquad \rho - b = 3k$

$c = 8k \qquad \rho = 10k \qquad \rho - c = 2k$

Se sabe que: $S = \sqrt{\rho.(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} \quad \Rightarrow \quad 90\sqrt{3} = \sqrt{10k.5k.3k.2k} \Rightarrow \quad 90\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\,.\,k^2$

$k^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 15\ cm \Rightarrow \quad b = 21\ cm \Rightarrow \quad c = 24\ cm$

Se sabe que: $S = \dfrac{1}{2}ac.\ \text{sen}\ B$

$\text{sen}\ B = \dfrac{2S}{ac} = \dfrac{2(90\sqrt{3})}{15.24} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 60°$ ó $\boxed{B = 120°}$

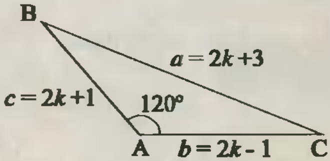
**43.-** Recordar: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.... ley de cosenos

"*a* mayor ángulo se opone el mayor lado"

$S = \frac{1}{2}\, bc \,.\, \text{sen } A$ . . . área del $\Delta ABC$

sen 120° = sen 60° . . . arco suplementario.

sean $2k - 1$, $2k + 1$, $2k + 3$ , las longitudes de los lados del $\Delta ABC$.




Por ley de cosenos en $\Delta ABC$, tenemos:

$$(2k + 3)^2 = (2k + 1)^2 + (2k - 1)^2 - 2(2k + 1)(2k - 1) \cos 120°$$

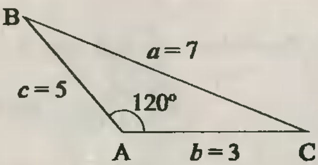
$$4k^2 + 12k + 9 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 - 4k + 1 - 2(4k^2 - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$12k + 9 = 4k^2 + 2 + 4k^2 - 1$$

Luego: $2k^2 - 3k - 2 = 0 \Rightarrow (2k + 1)(k - 2) = 0 \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = 2 \end{cases}$

Finalmente: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(3)(5).\ \text{sen } 120°$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{15\sqrt{3}}{4} u^2}$$




**44.-** Recordar: $\left.\begin{array}{l} \text{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(\rho - a)(\rho - b)}{ab}} \\ \cos\frac{C}{2} = \frac{\rho.(\rho - c)}{ab} \end{array}\right\}$ fórmula de los semiángulos

$S = \frac{1}{2} ab.\ \text{sen } C$ . . . área del $\Delta$ ABC

En el dato, al reemplazar tenemos:

$$4.\frac{1}{2} ab \,.\, \text{sen } C = ab \,.\, \text{sen}^2 \frac{C}{2} + ab.\cos^2 \frac{C}{2}$$

$$2ab \text{ sen } C = ab\underbrace{\left(\text{sen}^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)}_{=1}$$

Finalmente: $\text{sen } C = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\boxed{C = 30° \text{ ó } C = 150°}$

**45.-** Recordar: $S = \frac{1}{2}\, ab \,.\, \text{sen } C$ . . . área del $\Delta ABC$

$\text{sen } C = 2 \text{ sen}\frac{C}{2} \,.\, \cos\frac{C}{2}$ . . . arco doble

$2 \text{ sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ . . . arco doble

En el dato al reemplazar tenemos: $4.\ \frac{1}{2}\, ab.\ \text{sen } C.\ \tan\frac{C}{2} = ab$

$$2.\ 2 \text{ sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \,.\, \frac{\text{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 1 \quad\Rightarrow\quad 2 \text{ sen}^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

Al efectuar, obtenemos: $1 - \cos C = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos C = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad C = 60°$

Finalmente: $\tan\frac{C}{4} = \tan 15° = \boxed{2 - \sqrt{3}}$

**46.-** Recordar: $a = 2 \text{ R sen A} \quad\Rightarrow\quad \text{sen A} = \frac{a}{2R}$ . . . ley de senos

$S = \frac{abc}{4R}$ . . . área de un $\Delta ABC$ $\Rightarrow$ $64R^3.S^3 = a^3b^3c^3$

$$W = a^2b^2c^2 \,.\, \frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R} \quad\Rightarrow\quad W = \frac{a^3b^3c^3}{8R^3} = \frac{64R^3.S^3}{8R^3}$$

Finalmente: $\boxed{W = 8S^3}$

**47.-** $a + b + c = 2\rho$ . . . perímetro $\Delta ABC$

Recordar: $S = \frac{abc}{4R} = 4R$ . . . área de un $\Delta ABC$.

Luego: $W = \left(\frac{c+b+a}{abc}\right)^{-1} = \frac{abc}{2\rho} = \frac{4SR}{2\rho} \quad\Rightarrow\quad W = \frac{2(\rho r)R}{\rho}$

Finalmente: $\boxed{W = 2R.r}$

48.- Del dato: media geométrica $= \sqrt[3]{abc} = 2\sqrt[3]{91}$

elevando al cubo: $\qquad abc = 728$

Se sabe que: $\qquad S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$

Finalmente: $\qquad S_{\Delta ABC} = \dfrac{728}{4\left(\dfrac{13\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{546}{13\sqrt{3}} = \dfrac{42}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \qquad \boxed{S_{\Delta ABC} = 14\sqrt{3}\ cm^2}$

49.- sen 2A + sen 2B + sen 2C = **4** sen A sen B sen C . . . en todo $\Delta$ABC

Recordar: $\left.\begin{aligned} a &= 2R \operatorname{sen} A \\ b &= 2R \operatorname{sen} B \\ c &= 2R \operatorname{sen} C \end{aligned}\right\}$ ley de senos

$S = 2R^2 \operatorname{sen}A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \dfrac{abc}{4R}$ . . área de un $\Delta$ABC

$$W = 4R^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2 A . \cos A}{\operatorname{sen}A} + \frac{\operatorname{sen}^2 B . \cos B}{\operatorname{sen}B} + \frac{\operatorname{sen}^2 C . \cos C}{\operatorname{sen}C}\right]$$

$$W = 2R^2[2\operatorname{sen} A \cos A + 2 \operatorname{sen} B \cos B + 2 \operatorname{sen} C \cos C]$$

$$W = 2R^2[2 \operatorname{sen}A \cos A + 2\operatorname{sen}B \cos B + 2\operatorname{sen} C \cos C]$$

$$W = 2R^2[\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C]$$

$$W = 2R^2[\ 4\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C]$$

$$W = 2R^2[4\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C]$$

$$W = 4\ [\ 2R^2\operatorname{sen}A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C] = 4S = 4\left(\frac{abc}{4R}\right) \quad \text{(dato: R = 1)}$$

Finalmente: $\boxed{W = abc}$

50.- $\qquad \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} A \qquad$ . . . en todo $\Delta$ABC

Recordar: $b = 2R \operatorname{sen} B$, $\quad c = 2R \operatorname{sen} C$

$\operatorname{sen}(B + C). \operatorname{sen}(B - C) = \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C \qquad$ . . . arco compuesto

$S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \qquad$ . . . área de un $\Delta$ABC

$$W = \frac{4R^2(\text{sen}^2B - \text{sen}^2C).\text{senBsenC}}{2\,\text{sen}(B-C)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2R^2.\text{sen}(B-C).\text{sen}(B+C).\text{senBsenC}}{\text{sen}(B-C)}$$

$W = 2R^2.$ sen A sen B sen C $\qquad \therefore \qquad \boxed{W = S}$

**51.-** sen(B + C) = sen A . . . en todo ΔABC

Recordar: $\cot B + \cot C = \dfrac{\text{sen}(B+C)}{\text{senB.senC}}$ . . . arco compuesto

$S = 2R^2$sen A sen B sen C . . . área de un ΔABC

$a = 2R$ sen A . . . ley de senos.

$$W = 2(2R^2 \text{ sen A sen B sen C}) . \frac{\text{sen}(B+C)}{\text{senBsenC}}$$

$W = 4R^2$ . sen A. sen A = $(2R \text{ sen A})^2 \quad \therefore \quad \boxed{W = a^2}$

**52.-** Recordar: $a = 2R$ sen A . . . ley de senos

$S = 2R^2$ . sen A sen B sen C . . . área de ΔABC

sen 2A + sen 2B + sen 2C . . . 4 sen A sen B sen C . . . en todo ΔABC

S = R(2 sen A cos A + 2senB cos B + sen C cos C)

S = R . (sen 2A + sen 2B + sen 2C)

S = R. 4 sen A sen B sen C $\Rightarrow$ $S = 4R . \left(\dfrac{S}{2R^2}\right)$

$2R^2 = 4R \quad \Rightarrow \quad R(R-2)^2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R = 0 \text{ ó } R = 2}$

**53.-** sen 2A + sen 2B + sen 2C = 4 sen A . sen B sen C . . . en todo ΔABC

Recordar: $a = 2R$ sen A . . . ley de senos

$S = 2R^2$ . sen A sen B sen C . . . área de ΔABC

Factorizando el circunradio en el lado izquierdo de la igualdad.

$$R(2 \text{ sen A cos A} + 2 \text{ sen B cos B} + 2 \text{ sen C cos C}) = \frac{2}{R}$$

$R^2$(sen 2A + sen 2B + sen 2C) = 2 $\Rightarrow$ $R^2$. 4 sen A sen B sen C = 2

$$2(\underbrace{2R^2 \text{ sen A sen B sen C}}_{S}) = 2 \qquad \therefore \qquad \boxed{S = 1\,\mu^2}$$

**54.-** En todo $\Delta ABC$: $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

Luego, se cumple que:

$$\tan\frac{A}{2} \,.\, \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2} \,.\, \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2} \,.\, \tan\frac{C}{2} = 1 \text{ . . . . propiedad suma de tres arcos}$$

Se convierte en: $W = \cot\frac{A}{2} \,.\, \cot\frac{B}{2} \,.\, \cot\frac{C}{2}$, del dato $2\rho = 4r \Rightarrow \rho = 2r$

Pero: $S = r^2 .\cot\frac{A}{2} \,.\, \cot\frac{B}{2} . \cot\frac{C}{2} = \rho r$ despejando: $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{\rho r}{r^2}$

Al reemplazar en W, tendremos: $W = \frac{\rho r}{r^2} = \frac{\rho}{r} = \frac{2r}{r} = 2$

Finalmente: $\boxed{W = 2}$

**55.-** Se sabe que: $S = \rho .(\rho - a) . \tan\frac{A}{2}$ . . . área del $\Delta ABC$

Para que se cumpla el dato: $\tan\frac{A}{2} = 1$

Luego: $\frac{A}{2} = 45°$ $\therefore$ $\boxed{A = 90°}$

**56.-** Recordar: $a = 2\text{ R sen A}$ . . . $c = 2\text{R sen C}$

$$S = 2R^2 \text{ sen A. sen B sen C} \quad \text{. . área de un } \Delta ABC$$

$$(2\text{R sen A}). \text{ sen B} + (2\text{R sen B}) \,.\, \text{sen A} = c$$

$$4\text{R sen A sen B} = c$$

Multiplicando en ambos lados por: Rsen C

$$2(2R^2 \text{ sen A sen B sen C}) = c.\ \text{R sen C}$$

$$2S = c.\frac{c}{2} \Rightarrow c^2 = 4S \quad \therefore \quad \boxed{c = 2\sqrt{S}}$$

**57.-** Recordar: $a \cos B + b \cos A = C$ . . . ley de proyecciones

$c = 2\text{R sen C}$ . . . ley de senos

S = 2R2sen A sen B sen C . . . área de un DABC.

Expresando W en términos de senos y cosenos; se tiene:

$$W=\frac{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}}{\frac{1}{\operatorname{sen}2A}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}2B}}=\frac{\frac{a\cos B+b\cos A}{\cos A\cos B}}{\frac{1}{2\operatorname{sen}A\cos A.2\operatorname{sen}B\cos B}}$$

$$W=c\ .\ 4\ \operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B=2R\operatorname{sen}C\ .\ 4\ \operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B$$

$$W=c\ .\ 4\operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B=2\ R\operatorname{sen}C.\ 4\ \operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B$$

$$W=4\left(\frac{2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{R}\right)\qquad\therefore\qquad\boxed{W=4\frac{S}{R}}$$

**58.-** Recordar: $S=2R^2\ .\ \operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B\ \operatorname{sen}C\ldots$ área de $\Delta ABC$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$S=2(4)^2\ .\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\ .\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\ .\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}$$

Pero: $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\ldots$ arco suplementario

$$S=32\ .\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}_{\text{serie trigonométrica con } n\,=\,3}\quad\Rightarrow\quad S=32\ .\ \frac{\sqrt{2(3)+1}}{2^3}\qquad\therefore\qquad\boxed{S=4\sqrt{7}\ m^2}$$

**59.-** Recordar: $a=2R\operatorname{sen}A\ldots$ ley de senos

$S=2R^2\ .\ \operatorname{sen}A\ \operatorname{sen}B\ \operatorname{sen}C\ldots$ área de $\Delta ABC$

$\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C\ldots 4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\ldots$ en todo $\Delta ABC$

Reemplazando y factorizando, tenemos:

$$4R^2\left[\operatorname{sen}^2A.\frac{\cos A}{\operatorname{sen}A}+\operatorname{sen}2B.\frac{\cos B}{\operatorname{sen}B}+\operatorname{sen}^2C.\frac{\cos}{\operatorname{sen}C}\right]=4$$

$$2R^2[2\operatorname{sen}A\ .\ \cos A+2\operatorname{sen}B\cos B+2\operatorname{sen}C\cos C]=4$$

$$2R^2[\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C]=4\quad\Rightarrow\quad 2R^2[4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C]=4$$

$$2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C=1\qquad\therefore\qquad\boxed{S=1}$$

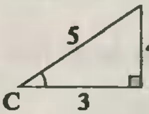
**60.-** Recordar: $\cot A+\cot B=\dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}\ldots$ arco compuesto

$$S = 2R^2 \,.\, \text{sen A} \,.\, \text{sen B} \,.\, \text{sen C} \ldots \text{ área del } \Delta ABC$$

Del dato: $\dfrac{\text{sen}(A+B)}{\text{senA.senB}} = 1$

Pero: $\text{sen}(A + B) = \text{sen C} \ldots$ en todo $\Delta ABC$

$$\text{sen C} = \text{sen A sen B}$$

Si: $\cos C = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \ \text{sen C} = \dfrac{4}{5}$

$$S = 2R^2 . \underbrace{\text{sen A sen B}}_{\text{sen C}} . \text{sen C} = 2R^2 \text{ sen}^2 C$$

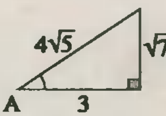
Reemplazando los datos: $S = 2(10)^2 . \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 200 \,.\, \dfrac{16}{25}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{S = 128\ m^2}$

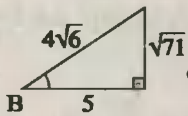
61.- Del dato: $\dfrac{\cot A}{3} = \dfrac{\cot B}{5} = \dfrac{\cot C}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} \cot A = 3k \\ \cot B = 5k \\ \cot C = 7k \end{cases}$

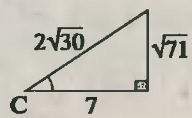
Si: $A + B + C = \pi$

Se cumple: $\cot A \cot B + \cot B . \cot C + \cot A . \cot C = 1 \ldots$ propiedad suma de 3 arcos

$(3k)(5k) + (5k)(7k) + (3k)(7k) = 1 \Rightarrow 71k^2 = 1 \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{\sqrt{71}}$

$\cot A = \dfrac{3}{\sqrt{71}}$ 

$\cot B = \dfrac{5}{\sqrt{71}}$ 

$\cot C = \dfrac{7}{\sqrt{71}}$ 


$$\text{sen A} = \frac{\sqrt{71}}{4\sqrt{5}} \quad \text{sen B} = \frac{\sqrt{71}}{4\sqrt{6}} \quad \text{sen C} = \frac{\sqrt{71}}{2\sqrt{30}}$$

Además área círculo $= \pi R^2 = 90\pi \Rightarrow R = 3\sqrt{10}\ cm.$

$$S = 2R^2 \text{sen A sen B sen C} = 2(90) . \frac{\sqrt{71}}{4\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{71}}{4\sqrt{6}} . \frac{\sqrt{71}}{2\sqrt{30}}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \frac{213}{16}\sqrt{71}\ cm^2}$$

62.- Recordar: $S = \rho^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$ . . . área del $\Delta$ ABC

$$W = \frac{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}.\rho^2}{\rho^2} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{S}{\rho^2} = S.\,\rho^{-2}}$$

63.- Recordar: $a + b + c = 2\rho$ . . . perímetro $\Delta$ABC

$$S = r^2 \cdot \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} \quad \text{. . . área de un } \Delta ABC$$

$$W = \frac{2\rho}{\frac{S}{r^2}} = \frac{2\rho r^2}{\rho r} \quad \therefore \quad \boxed{W = 2r}$$

64.- En todo $\Delta$ABC: $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = 0$

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} \quad \text{. . . . propiedad suma de tres arcos}$$

$$S = r^2 \cdot \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\ \cot\frac{C}{2} \quad \text{. . . áreas del } \Delta ABC$$

Del dato: $\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} = k \Rightarrow S = (\sqrt{3})^2 \cdot k \quad \therefore \quad \boxed{S = 3k\ \mu^2}$

65.- Recordar: $S = \rho(\rho - a)\tan\frac{A}{2}$ . . . área del $\Delta$ABC

Se sabe que: $\underbrace{a + b + c}_{2a} = 2\rho$. . . perímetro del $\Delta$ABC

$$3a = 2\rho \Rightarrow \rho = \frac{3a}{2}$$

Reemplazando en la fórmula del área $\Delta$ABC

$$S = \frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right) \cdot \tan\frac{A}{2} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{3a^2}{4} \cdot \tan\frac{A}{2}}$$

66.- Sabemos que: $r_a = p\tan\frac{A}{2}$

Reemplazando en el dato, tenemos:

$$\underbrace{p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+p^2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+p^2\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}}=\frac{4k^2}{r^2}$$

$$\underbrace{p^2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)}_{1\ \text{propiedad}}=\frac{4k^2}{r^2}$$

Luego: $p^2r^2=4k^2 \Rightarrow \underbrace{pr}_{S}=2k \quad \therefore \quad \boxed{S=2k}$

**67.-** Recordar: $\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ . . . fórmula de los semiángulos

$S=pr$ . . . área de un $\Delta ABC$

$$W=\frac{1}{bc}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{ac}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}}$$

$$W=\frac{1}{bc}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\right)^2}+\frac{1}{ac}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\right)^2}+\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\right)^2}$$

$$W=\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-a)(p-c)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}$$

$$W=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{3p-(a+b+c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$W=\frac{p}{\frac{S^2}{p}}=\frac{p^2}{(pr)^2}=\boxed{\frac{1}{r^2}}$$

**68.-** $S=\sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$ . . . área de un $\Delta ABC$

Recordar:

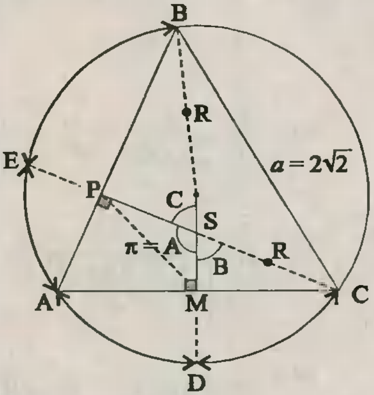
$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\end{aligned}\right\}\text{fórmula de los semiángulos}$$

$$W = \frac{\left[\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}+\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}+\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(\rho-c)}\right].S^2}{(bc)^2.\dfrac{(p-b)^2(p-c)^2}{(bc)^2}+(ac)^2.\dfrac{(p-a)^2(p-c)^2}{(ac)^2}+(bc)^2.\dfrac{(p-a)^2(p-b)^2}{(ab)^2}}$$

$$W = \frac{\left[\dfrac{(p-b)^2(p-c)^2+(p-a)^2(p-c)^2+(p-a)^2(p-b)^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right].S^2}{(p-b)^2(p-c)^2+(p-a)^2(p-c)^2+(p-a)^2(p-b)^2}$$

$\therefore$ $\boxed{W = 1}$

**69.-** Recordar que el punto de intersección de las mediatrices es el circuncentro S que viene a ser el centro de la circunferencia que circunscribe al $\Delta$ABC.




Del gráfico: $\widehat{AD} = \widehat{DC} = 2B$

$m\angle MSC = B$

$\widehat{BE} = \widehat{EA} = 2C$

$m\angle BS = C$

$\overline{SB} = \overline{SC} = R$ circunradio

área $S_{\Delta PSM} = \frac{1}{2}(PS)(MS).\ sen(\pi - A)\ldots(1)$

En el $\triangle$BPS: $PS = R\cos C$

En el $\triangle$SMC: $MS = R\cos B$

por la ley de senos: $a = 2R\ sen\ A \Rightarrow R = \dfrac{2\sqrt{2}}{2senA} = \dfrac{\sqrt{2}}{senA}$

En (1): $S_{\Delta PSM} = \frac{1}{2}(R\cos C)(R\cos B)\ .\ sen\ A = \frac{1}{2}R^2.\cos C\cos B\ sen\ A$

$S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{senA}\right)^2.\ \cos C\cos B\ sen\ A$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{S = \dfrac{\cos B.\cos C}{senA}}$

**70.-** Recordar que: $S = \rho r = r_a(\rho - a) = r_b(\rho - a) = r_b(\rho - c)$ ... área del $\Delta$ABC

$$W = \frac{\dfrac{S}{\rho}.\dfrac{S}{\rho-a}+\dfrac{S}{\rho-b}.\dfrac{S}{\rho-c}}{2bc} \Rightarrow W = \frac{S^2\left(\dfrac{(\rho-b)(\rho-c)+\rho(\rho-a)}{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}\right)}{2bc}$$

También: $S = \sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}$ . . . fórmula de Herón

$$W = \frac{\rho^2 - \rho b - \rho c + bc + \rho^2 - \rho a}{2bc} = \frac{2\rho^2 - \rho(a+b+c)+bc}{2bc}$$

$$W = \frac{2\rho^2 - \rho(2\rho)+bc}{2bc} = \frac{bc}{2bc} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{2}}$$

**71.-** Se sabe que: $S = r_a(\rho - a) = r_b \, . \, (\rho - b) = r_c \, . \, (\rho - c)$. . . área del $\Delta ABC$

Reemplazando tenemos: $\left(\frac{S}{\rho-b} - \frac{S}{\rho-a}\right)\left(\frac{S}{\rho-c} - \frac{S}{\rho-a}\right) = 2 \, . \, \frac{S}{\rho-b} \cdot \frac{S}{\rho-c}$

$$S. \left[\frac{(\rho-a)-(\rho-b)}{(\rho-b)-(\rho-a)}\right].S.\left[\frac{(\rho-a)-(\rho-c)}{(\rho-c)-(\rho-a)}\right] = \frac{2S^2}{(\rho-b)(\rho-c)}$$

$(b - a) \, . \, (c - a) = 2(\rho - a)^2 \;\Rightarrow\; (b - a) \, . \, (c - a) = 2\left[\frac{a+b+c}{2} - a\right]^2 \;\Rightarrow\; (b - a) \, . \, (c - a) = \frac{(b+c-a)^2}{2}$

$2bc - 2ac - 2ab + 2a^2 = b^2 + c^2 + a^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2$ . . . teorema de Pitágoras

Es un triángulo rectángulo, recto en A (A = 90°)

**72.-** Recordar:

$$\left.\begin{array}{l} S = \rho r = r_a(\rho - a) = r_b(\rho - b) = r_c(\rho - c) \\ S = \sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{área del} \\ \Delta ABC \end{array}$$

Reemplazando tenemos: $W = \dfrac{\frac{S}{\rho-a} - \frac{S}{\rho}}{a} + \dfrac{\frac{S}{\rho-b} - \frac{S}{\rho}}{b}$

$$W = \frac{S}{a} \cdot \left[\frac{\rho-(\rho-a)}{\rho.(\rho-a)}\right] + \frac{S}{b}\left[\frac{\rho-(\rho-b)}{\rho.(\rho-b)}\right]$$

$$W = \frac{S}{\rho}\left[\frac{1}{\rho-a} + \frac{1}{\rho-b}\right] = \frac{S}{\rho} \cdot \frac{2\rho-(a+b)}{(\rho-a)(\rho-b)} \;\Rightarrow\; W = \frac{S.C}{\rho(\rho-a)(\rho-b)} \cdot \frac{\rho-c}{\rho-c} = \frac{S.c.(\rho-c)}{S^2}$$

$$W = \frac{c.(\rho-c)}{S} = \frac{c}{r_c} = \frac{4}{2} \quad \therefore \quad \boxed{W = 2}$$

73.- Recordar: $S = \rho r = \rho(\rho - b) = \tan\frac{B}{2} = \rho_b(\rho - b)$ . . . área del $\Delta ABC$

$$r = (\rho - b)\tan\frac{B}{2} \text{ y } r_b = \rho - \tan\frac{B}{2}$$

Reemplazando tenemos: $W = \dfrac{(\rho - b)\tan\frac{B}{2} - \rho\tan\frac{B}{2}}{2R} + 1$

$$W = \frac{-b.\tan\frac{B}{2}}{2R} + 1 = \frac{-(2R\operatorname{sen}B).\tan\left(\frac{B}{2}\right)}{2R} + 1 \quad \text{. . . ley de senos}$$

$$W = -\left(2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right).\frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + 1 \qquad \text{. . . arco doble}$$

$$W = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right) \text{ . . . arco doble} \quad \therefore \quad \boxed{W = \cos B}$$

***LÍNEAS NOTABLES***

74.- Por medianas: $4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ . . . (1)

Por ley de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ . . . (2)

(1) + (2): $4(m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$ . . . (3)

Asi mismo tenemos: $4(m_b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2$ . . . (4)

$4(m_c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$ . . . (5)

(3) + (4) + (5) tenemos: $4[(m_a)^2 + (m_b)^2 + (m_c)^2] = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$$W = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

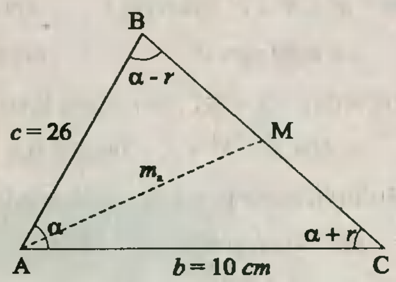
Finalmente: $\boxed{W = \frac{3}{4}}$

75.- Recordar: "a mayor ángulo se le opone el mayor lado"
Sean los ángulos: $\alpha - r, \alpha, \alpha + r$, las medidas de los ángulos interiores del $\Delta ABC$ y $r$ la razón de la progresión aritmética.

En todo $\Delta ABC$: $A + B + C = \pi$

$$\alpha + (\alpha - r) + (\alpha + r) = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$




Por medianas: $4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

$$4(m_a)^2 = 26^2 + 10^2 + 2(26)(10) \,.\, \cos\frac{\pi}{3}$$

$$(m_a)^2 = \frac{1036}{4} = 259 \quad \Rightarrow \quad m_a = \sqrt{259}$$

Finalmente: $\boxed{m_a = 16{,}09\ cm}$

76.- Del dato: $2\,\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\frac{A}{2} = \frac{c-b}{2\sqrt{bc}}$

Por medianas: $4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2b\cos A \ldots (1)$

Pero: $\cos A = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) \ldots$ arco doble (2)

Reemplazando (2) en (1): $4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc\left[1 - 2\left(\frac{c-b}{2\sqrt{bc}}\right)^2\right]$

$$4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc \,.\, \frac{(c^2 - 2bc + b^2)}{4ab}$$

$$4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc - c^2 + 2bc - b^2 = 4bc$$

Finalmente: $\boxed{m_a = \sqrt{bc}}$

77.- Del dato: $\frac{m_a}{b} = \frac{c}{m_a} \quad \Rightarrow \quad (m_a)^2 = bc$

Por medianas: $4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A \ \ldots \ (1)$

Pero: $\cos A = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) \qquad \ldots$ arco doble

En (1) tenemos al reemplazar: $4bc = b^2 + c^2 + 2bc\left[1 - 2\,\text{sen}^2\frac{A}{2}\right]$

$$4bc.\text{sen}^2\frac{A}{2} = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{4bc}$$

Finalmente: $\boxed{W = \frac{(b-c)^2}{4bc}}$

78.- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ... ley de cosenos

$a = 2R \text{ sen } A$ ... ley de senos

Recordar: $S = 2R^2. \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$ ... área del $\Delta ABC$

$4(m_a)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ ... medianas

Multiplicando por 4 en ambos lados y agrupando tenemos:

$4R^2. \text{ sen}A.\text{sen } A + 8S.\cos A = 4 \text{ sen } A$

$a^2. \text{ sen } A + 8(2R^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C) . \cos A = 4 \text{ sen } A$

$$a^2 + 16R^2 . \frac{b}{2R} . \frac{c}{2R} . \cos A = 4 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 4bc \cos A = 4$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A + 4bc \cos A = 4 \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 + 2bc \cos A = 4$$

$$4(m_a)^2 = 4, \quad \therefore \quad \boxed{m_a = 1}$$

79.- Se sabe que: $V_A = k = \dfrac{2bc}{b+c} . \cos \dfrac{A}{2}$ bisectriz interior

$V_A^1 = q = \dfrac{2bc}{b-c} . \text{sen } \dfrac{A}{2}$ bisectriz exterior

En el dato, al reemplazar tenemos: $\dfrac{b+c}{2bc} + \dfrac{b-c}{2bc} = \dfrac{1}{3}$

Al efectuar obtenemos: $\dfrac{2b}{2bc} = \dfrac{1}{3}$

Finalmente: $\boxed{c = 3}$

80.- Se sabe que:

$$\left.\begin{aligned} V_A = k &= \frac{2bc}{b+c} . \cos \frac{A}{2} \\ V_B = q &= \frac{2ac}{a+c} . \cos \frac{B}{2} \\ V_C = t &= \frac{2ab}{a+b} . \cos \frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \text{bisectrices interiores del } \Delta ABC$$

Reemplazando tenemos:

$$W = \frac{b+c}{2bc} + \frac{a+c}{2ac} + \frac{a+b}{2ab} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\left[\frac{ab+ac+ab+bc+ac+bc}{abc}\right]$$

$$W = \frac{1}{2} . \frac{2(ab+bc+ac)}{abc} \quad \therefore \quad \boxed{W = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

**81.-** Bisectriz interior: $V_C = \dfrac{2ab}{a+b}\ .\cos\dfrac{C}{2}\ldots(1)$

bisectriz exterior: $V'_C = \dfrac{2ab}{a-b}\ .\text{sen}\ \dfrac{C}{2}\ldots(2)$

(1) ÷ (2), tenemos: $\dfrac{V_C}{V'_C} = \dfrac{a-b}{a+b}\ .\cot\dfrac{C}{2}$

Por ley de tangentes: $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}$

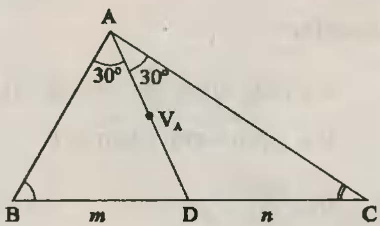
Pero: $A+B+C=\pi \Rightarrow \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right) = \cot\dfrac{C}{2}$

$$\frac{V_C}{V'_C} = \frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}\ .\cot\frac{C}{2} \Rightarrow V_C = (\sqrt{2}+1)\ .\tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$

Pero: $\tan\left(\dfrac{45^\circ}{2}\right) = \csc 45^\circ - \cot 45^\circ = \sqrt{2} - 1$

$$V_C = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \qquad \therefore \qquad \boxed{V_C = 1\ cm}$$

**82.-** $A = 60^\circ \Rightarrow B + C = 120^\circ$




$\cos(B+C) = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

Del dato: $\dfrac{V_A}{m} = \dfrac{n}{V_A} \Rightarrow (V_A)^2 = mn$

En ΔABDC (ley de senos): $\dfrac{V_A}{\text{senB}} = \dfrac{m}{\text{sen}30^\circ} \Rightarrow V_A = 2\,m\ .\ \text{sen B}\ \ldots(1)$

En ΔADC (ley de senos): $\dfrac{V_A}{\text{senC}} = \dfrac{n}{\text{sen}30^\circ} \Rightarrow V_A = 2n\ .\ \text{sen C}\ \ldots(2)$

(1) . (2): $(V_A)^2 = 4mn\ \text{sen B sen C}$

$\dfrac{1}{2} = 2\ \text{sen B sen C} \Rightarrow$ transformando a una diferencia de cosenos

$\dfrac{1}{2} = \cos(B-C) - \cos(B+C)$

$$\cos(B-C)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow B-C=90° \;...(3)$$

Pero: $B+C=120° \;...(4)$

De 3 y 4: $B=105°$ y $C=15°$, finalmente: $\boxed{\mathbf{B = 105° \text{ y } C = 15°}}$

**83.-** $S=\rho r$ ... área del $\Delta ABC$

Recordar: $\cot\frac{A}{2}=\csc A+\cot A$ ... arco mitad

$a=2R \operatorname{sen} A$ ... ley de senos

$r=(\rho-a)\tan\frac{A}{2}$ ... inradio

Al reemplazar las expresiones anteriores en W, obtenemos:

$$W = 2Rr \operatorname{sen} A + r^2(\csc A+\cot A) \quad\Rightarrow\quad W=r(2R\operatorname{sen} A)+r^2 . \cot\frac{A}{2}$$

$$W=r\left[a+r.\cot\frac{A}{2}\right] \quad\Rightarrow\quad W=r\left[a+(\rho-a)\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2}\right]$$

$$W=r[a+\rho-a]=\rho r \qquad \therefore \quad \boxed{\mathbf{W=S}}$$

**84.-** Recordar:

$$\left.\begin{aligned} S&=\rho(\rho-a)\tan\frac{A}{2}=r_a.(\rho-a)\\ S&=\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}\\ S&=\frac{abc}{4R}=\rho r\end{aligned}\right\}\text{área del }\Delta ABC$$

$$W=\frac{abc.r_a}{r_a.(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}=\frac{4RS}{\frac{S^2}{\rho}} \Rightarrow W=\frac{4R\rho}{S}=\frac{4R\rho}{\rho r}=\frac{4R}{r}=4\left(\frac{5}{2}\right) \quad\therefore\quad \boxed{\mathbf{W=10}}$$

**85.-** Recordar:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen} C \text{ ... en todo } \Delta ABC\\ &S=2R^2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\text{ ... área del }\Delta ABC\\ &S=\rho r=(\rho-a).\,r_a\text{ ... área del }\Delta ABC\\ &c=2R\operatorname{sen} C\text{ ... ley de senos.}\end{aligned}\right.$$

$$W = (\rho r).\cot A + \rho r_a.\cot B - a r_a.\cot B$$

$$W = (\rho r).\cot A + r_a(\rho - a).\cot B \quad \Rightarrow \quad W = S[\cot A + \cot B]$$

$$W = S.\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B} = 2R^2.\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C.\frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}$$

$$W = 2R^2.\operatorname{sen}^2C = \frac{1}{2}.4R^2\operatorname{sen}^2C$$

Al utilizar la ley de senos, obtenemos: $\boxed{\mathbf{W = \frac{c^2}{2}}}$

**86.-** Se sabe que: $r_a = \rho.\tan\frac{A}{2}$ . . . radio exinscrito

Reemplazando en el dato tenemos: $\rho - \tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2} = 2a \Rightarrow \rho = 2a$ . . . (1)

También recordar que: $r = (\rho - a).\tan\frac{A}{2}$ . . . (2)

(1) en (2): $r = (2a - a)\tan\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{r}{a} = \tan\frac{A}{2}$ . . . arco mitad

$$\frac{r}{a} = \csc A - \cot A \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{\csc A - \frac{r}{a} = \cot A}}$$

**87.-** Recordar que: $r = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ . . . inradio

$r_b = 4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$ . . . radio exinscrito

Reemplazando tenemos: $4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 3\left(4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)$

$1 = 3\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}$ . . . fórmula de los semiángulos

$$1 = 3.\sqrt{\frac{(\rho-b)(\rho-c)}{\rho(\rho-a)}}.\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)}{\rho(\rho-c)}} \Rightarrow 1 = 3.\left(\frac{\rho-b}{\rho}\right) \Rightarrow \rho = 3\rho - 3b$$

$$3b = 2\rho \Rightarrow 3b = a + b + c \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{2b = a + c = 2b}}$$

**88.-** Recordar que: $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}$ . . .arco compuesto

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2} \quad \Rightarrow \quad r_b = 4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\,.\,\cos\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{C}{2}$$

Reemplazando tenemos: $W = 4R\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\,.\,\cos\dfrac{A}{2}\,\cos\dfrac{C}{2}\,.\,\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}$

$$W = 2R\left(2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\,\cos\frac{B}{2}\right) = 2R\operatorname{sen} B\ \ldots \text{ley se senos}$$

$\therefore \quad \boxed{W = b}$

89.- Recordar: $r_a = r\,.\,\tan\dfrac{A}{2}\ ;\ r_b = r\,.\,\tan\dfrac{B}{2}\ ,\ r_c = r\,.\,\tan\dfrac{B}{2}$

Reemplazando tenemos: $W = \dfrac{\rho.\tan\frac{A}{2}.\rho\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right).\csc A}{\rho.\tan\frac{B}{2}.\rho\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}$

$$W = \frac{\csc A.\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}\,.\,\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}} \quad \Rightarrow \quad W = \csc A.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\,.\,\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\,.\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\,.\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)}$$

$$W = \frac{1}{\operatorname{sen}A}\,.\,\frac{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}A}\,.\,\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B} \quad \therefore \quad \boxed{W = \csc B}$$

### *CUADRILÁTEROS*

90.- Recordemos que en todo cuadrilátero se cumple:

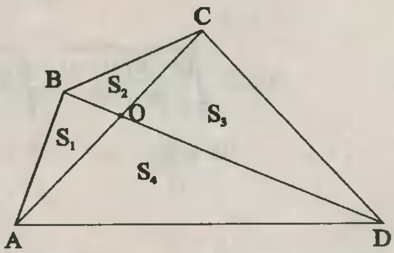
$S1\,.\,S_3 = S_2\,.\,S_4\ \ldots\ (1)$

Por dato: $S_1 = 1\ m^2\ ,\ S_2 = 2m^2\ ,\ S_3 = 4\ m^2$

Nos piden "$S_4$"

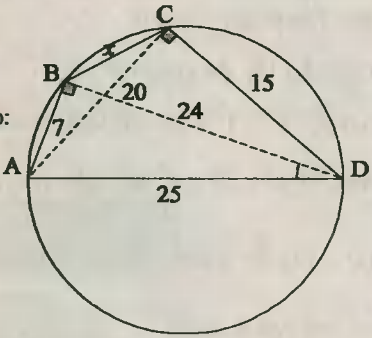
En (1): $4 = 2S_4$

Finalmente: $\boxed{S_4 = 2m^2}$



**91.-** Los $\measuredangle$ABD y $\measuredangle$ACD son notables

$\Rightarrow \quad BD = 24$ y $AC = 20$



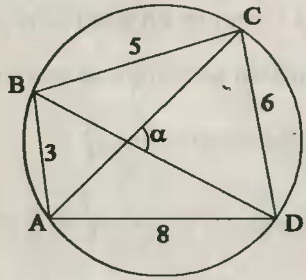

Como es inscriptible se cumple el teorema de Ptolomeo:

$(20)(24) = (7)(15) + (25)x$

$480 = 105 + 25x \quad \Rightarrow \quad 25x = 375$

Finalmente: $\boxed{x = 15}$

**92.-** En un cuadrilátero inscriptible:




Sabemos que: $S = \sqrt{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)(\rho-d)}$ . . . (1)

Donde: $2\rho = 3 + 5 + 6 + 8 = 22 \Rightarrow \quad \rho = 11$

En (1): $S = S\sqrt{8.6.5.3} = 12\sqrt{5}$ . . . (*)

Se cumple el teorema de Ptolomeo:

$AC.BD = 3 . 6 + 45. 8 \quad \Rightarrow \quad AC . BD = 58$

También: $S = \dfrac{AC.BD}{2}. \text{sen}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad S = 29 \text{ sen}\,\alpha$ ... (**)

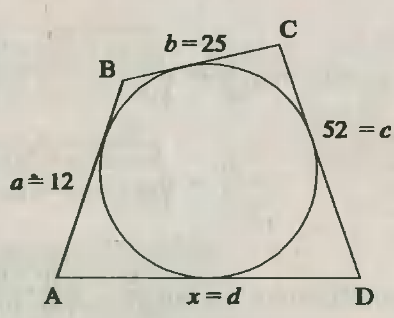
(*) = (**): $\boxed{29 \text{ sen}\,\alpha = 13\sqrt{5}}$

**93.-** Por ser cuadrilátero circunscriptible se cumple teorema de Pithot:

$12 + 52 = x + 25 \quad \therefore \quad x = 39$

También se cumple: $S = \sqrt{abcd}\,.\text{sen}\left(\dfrac{A+C}{2}\right)$

Pero por dato: $S = 650\ u^2$



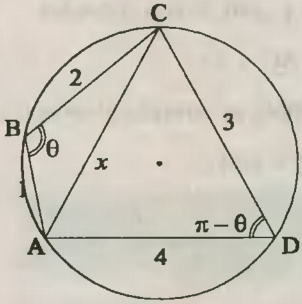

$\Rightarrow \quad \sqrt{12.25.52.39}\,.\text{sen}\left(\dfrac{A+C}{2}\right) = 650$

Efectuando: $\text{sen}\left(\dfrac{A+C}{2}\right) = \dfrac{5}{6}$

Pero: $\cos(A + C) = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{A+C}{2}\right) = 1 - 2\left(\dfrac{25}{36}\right)$

Finalmente: $\boxed{\cos(A + C) = -\dfrac{7}{18}}$

**94.-** No pide: " $\cos\theta$"




Usando ley de cosenos es:

$\Delta ABC: x^2 = 1^2 + 2^2 + 2(1)(2)\cos\theta \ldots (1)$

$\Delta ACD: x^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4).\ \underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{-\cos\theta} \ldots (2)$

$(1) = (2): 5 - 4\cos\theta = 25 + 24\cos\theta$

$\Rightarrow\ 28\cos\theta = -20 \quad \therefore \quad \boxed{\cos\theta = -\frac{5}{7}}$

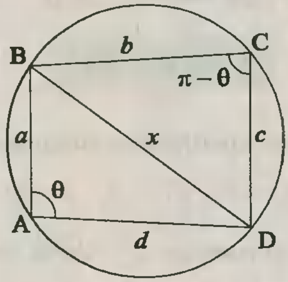
**95.-** Como es un cuadrilátero bicéntrico: $S = \sqrt{\operatorname{sen}\theta.\tan\theta.\cos\theta.\cot\theta} = \sqrt{\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}u^2$

También se cumple el teorema Pithot: $\operatorname{sen}\theta + \tan\theta = \cos\theta + \cot\theta$

Rápidamente: $\theta = \frac{\pi}{4}$

Luego: $S = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u^2}$

**96.-** Usando la ley de cosenos:




$\Delta BCD: \quad x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\,.\cos\theta \quad \ldots (1)$

$\Delta BCD: \quad x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos(\pi-\theta) \ \ldots (2)$

$(1) = (2): a^2 + d^2 = 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta$

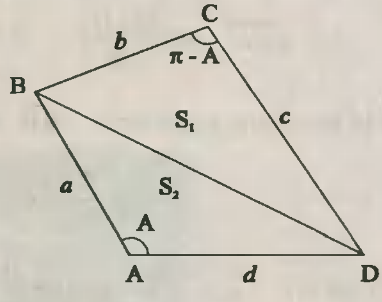
despejando: $\cos\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \ \ldots (4)$

(3) en (4): $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{(a+d)^2-(b+c)^2}}$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{(a+d+b-c)(a+d+c+b)}} \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(2\rho-2d)(2\rho-2a)}{(2\rho-2c)(2\rho-2b)}}$$

Simplificando: $\boxed{\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\rho - a)(\rho - d)}{(\rho - b)(2\rho - c)}}}$

**97.-** Como el cuadrilátero ABCD es inscriptible se cumple: $C = \pi - A \Rightarrow \text{sen } C = \text{sen } A$




$S = S_1 + S_2$

$$S = \frac{bc}{2}.\text{sen } A + \frac{ad}{2}.\text{sen } A$$

$$S = \frac{(ad+bc)}{2}\ \text{sen } A$$

$2S = (ad + bc)\ \text{sen } A$

Como se cumple por dato: $a + c = b + d$

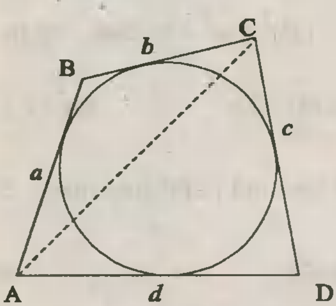
Entonces el cuadrilátero es circunscriptible, luego el cuadrilátero es bicentrico

$$S = \sqrt{abcd}$$

Finalmente: $\quad M = \dfrac{S}{2S} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

**98.-** Por ser circunscriptible se cumple: teorema de Pithot:

$$a + c = b + d \Rightarrow a - b = d - c$$




Elevando al cuadrado:

$$a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd \ldots (1)$$

Usando la ley de cosenos:

$\Delta$ ABC: $\quad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B \ \ldots\ (\alpha)$

$\Delta$ ADC: $\quad AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos D \ldots (\beta)$

$(\alpha) = (\beta)$: $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos D \ldots (2)$

(2) - (1): $2ab(1 - \cos B) = 2cd\ (1 - \cos D) \ldots (*)$

Pero: $\quad 1 - \cos x = 2\ \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

En (*): $\quad 4ab.\text{sen}^2 \dfrac{B}{2} = 4cd.\text{sen}^2 \dfrac{D}{2}$

Extraendo la raíz cuadrada: $\quad \sqrt{ab}\ .\ \text{sen} \dfrac{B}{2} = \boxed{\sqrt{cd}\ .\ \text{sen}\ \dfrac{D}{2}}$

Con lo que queda probada la demostración.

**99.-** Sabemos que el área de un caudrilátero circunscriptible es:

$$S = \sqrt{abcd}\ .\ \text{sen}\left(\frac{B+D}{2}\right)\ \ldots (1)$$

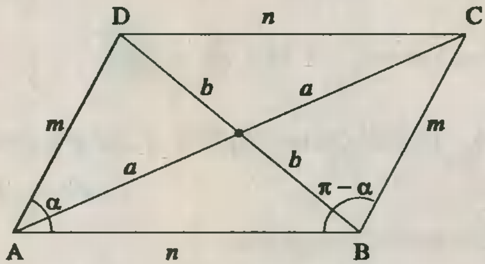
Del problema anterior: $\sqrt{ab}\ .\ \text{sen}\ \frac{B}{2} = \sqrt{cd}\ .\ \text{sen}\frac{D}{2}$

$$ab\ \text{sen}\ \frac{B}{2}\ .\ \csc\ \frac{D}{2} = \sqrt{abcd}\ \ldots (2)$$

(2) en (1): $\boxed{\mathbf{S = ab\ sen\ \frac{B}{2} . csc \frac{D}{2} . sen \left(\frac{B+D}{2}\right)}}$

Con lo que queda probada la demostración.

**100.-** Sean AD = BC = $m$, AB = DC = $n$




En ΔDAB por la ley de cosenos:

$$(2b)^2 = m^2 + n^2 - 2m.\ n \cos\alpha \qquad \ldots (1)$$

En ΔABC por ley de cosenos:

$$(2a)^2 = m^2 + n - 2mn\ .\ \cos(\pi - \alpha) \ldots (2)$$

De (2) - (1): $4(a^2 - b^2) = 4\ mn \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad mn = \frac{a^2 - b^2}{\cos\alpha} \ldots (3)$

El área del paralelogramo: $S = 2(S_{\Delta DAB}) \quad \Rightarrow \quad S = 2\frac{1}{2}mn\ \text{sen}\ \alpha = mn\ \text{sen}\ \alpha$

De (3): $S = \frac{a^2 - b^2}{\cos\alpha}.\text{sen}\ \alpha \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{S = (a^2 - b^2)\ .\ tan\ \alpha}}$


***FORMA POLAR Y EXPONENCIAL***

01.- Sabemos: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad Z=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{40}$

Por la fórmula de Moivre, tendremos:

$$Z=\cos 40\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen} 40.\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad Z=\cos 10\pi+i\operatorname{sen} 10\pi$$

Pero: $\cos 10\pi=1$ y $\operatorname{sen} 10\pi=0 \quad \therefore \quad \boxed{Z=1}$

02.- Tenemos que: $Z=1+i\sqrt{3}$

Multiplicando y dividiendo por 2 el segundo miembro obtenemos:

$$Z=2\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pero: $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ , $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad Z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Elevando a la sexta y usando la fórmula de Moivre:

$$Z^6=2^6\left(\cos\left(6.\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(6.\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad Z^6=2^6(\cos 2\pi+i\operatorname{sen} 2\pi)$$

Pero: $\cos 2\pi=1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2\pi=0 \quad \therefore \quad \boxed{Z^6=64}$

03.- Recordemos: $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ , $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\Rightarrow \quad Z=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

Por la fórmula de Moivre: $Z^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=64\,i$

$$Z^4 = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad Z^4 = 8\,(1 + i\sqrt{3}\,)$$

Reemplazando en M: $M = \dfrac{1}{64}\,[\,-\sqrt{3}\,.64i + 8\,(8)\,(1 + i\,\sqrt{3}\,)\,]$

Efectuando: $\boxed{M = 1}$

**04.-**Como: $Z = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta \quad \Rightarrow \quad \overline{Z} = \cos 2\theta - i\,\text{sen}\,2\theta$

Luego: $Z\,.\,\overline{Z} = 1 \quad \wedge \quad Z + \overline{Z} = 2\cos 2\theta$

Reemplazando en (1): $\dfrac{\sqrt{3}(1)}{2\cos 2\theta} = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{5\pi}{12}}$$

**05.-** Tenemos: $Z = \dfrac{\sqrt{3}i^2 + i}{1-\sqrt{3}i}$ ; pero: $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}$

Dividiendo entre 2 el numerador y denominador: $Z = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

Pero: $\cos 5\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} - i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{e^{\frac{i5\pi}{6}}}{e^{\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{i7\pi}{6}} \quad \therefore \quad arg\,(Z) = \frac{7\pi}{6}$$

**06.-** Tenemos: $Z_1 = 2 + i$ ; $Z_2 = 3 + i$

$$Z_1\,.\,Z_2 = 6 + 5i + i^2 \quad , \quad \text{pero: } i^2 = -1$$

$$Z_1\,.\,Z_2 = 5 + 5i = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Pero: $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad Z_1.Z_2 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore \quad \boxed{Z_1.Z_2 = 5\sqrt{2}\,.\text{cis}\,\frac{\pi}{4}}$$

07.- Sea: $Z = \dfrac{a+bi}{a-bi}$, multiplicando por $(a + bi)$ el numerador y denominador.

$$Z = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}\,i \quad \ldots (1)$$

Pero también: $Z = e^{ia} = \cos\ a + i \operatorname{sen} \alpha \quad \ldots (2)$

(1) = (2): $\cos \alpha = \dfrac{ab}{a^2+b^2} \quad \ldots (3)$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \quad \ldots (4)$

(4) , (3): $\boxed{\tan \alpha = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}}$

***FORMA EXPONENCIAL***

08.- Como: $Z = eiq = \cos q + i \operatorname{sen} q$

$$\Rightarrow \quad Z^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta \quad \Rightarrow \quad Re(Z^3) = \cos 3\theta$$

$$Z^2 = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 3\theta \quad \Rightarrow \quad Re(Z^2) = \cos 2\theta$$

$$Z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad Re(Z) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \quad Re(Z^3 + Z^2 + Z) = Re(Z^3) + Re(Z^2) + Re(Z)$$

Reemplazando en "M": $M = \dfrac{\cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos\theta + 1}{2\cos\theta}$

Transformando a producto el numerador:

$$M = \frac{(\cos 3\theta + \cos\theta) + (1 + \cos 2\theta)}{2\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2\cos 2\theta.\cos\theta + 2\cos^2\theta}{2\cos\theta}$$

Simplificando: $M = \cos 2\theta + \cos \theta$

Pero: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \Rightarrow \quad M = 2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta$

$$\Rightarrow \quad M = 2\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

"M" toma su máximo valor cuando: $\cos \theta = 1$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{25}{8} - \frac{9}{8} = \frac{16}{2} \quad \therefore \quad \boxed{M = 2}$$

**09.-** Tenemos: $Z = \cos 5° - i\ \text{sen}\ 5° = e^{-i5°} \quad \Rightarrow \quad Z^{27} = e^{-i.135°} \wedge Z^{-27} = e^{i.135°}$

Luego: $$M = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i.135°} + e^{i.135°}) \ldots (*)$$

Pero: $$e^{i.135°} + e^{-i.135°} = 2\cos 135° = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \ \ldots (1)$$

(1) en (*): $$M = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) \quad \therefore \quad \boxed{M = -1}$$

**10.-** Tenemos: $$Z = \frac{e^{\frac{i.\pi}{8}}\left(\text{sen}\frac{3\pi}{8} + i\cos\frac{3\pi}{8}\right)}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \ldots (*)$$

Por la propiedad de co-razones sabemos:

$$\text{sen}\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} \quad \wedge \quad \cos\frac{3\pi}{8} = \text{sen}\frac{\pi}{8} \quad \ldots (1)$$

También: $$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \ldots (2)$$

(1) $\wedge$ (2) en (*): $$Z = \frac{e^{\frac{i.\pi}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)}$$

Usando la fórmula de Euler tenemos:

$$Z = \frac{e^{\frac{i.\pi}{8}}.e^{\frac{i.\pi}{8}}}{2e^{\frac{i.\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{i.\pi}{4}}}{2e^{\frac{i.\pi}{4}}} \quad \therefore \quad \boxed{Z = \frac{1}{2}}$$

**11.-** Tenemos: $$Z = 2\ \text{sen}\ \theta + 2\sqrt{3}\ \cos\theta - 4\ i\ \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

Factorizando: $$Z = 4\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sen}\frac{\pi}{6}}.\text{sen}\ \theta + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}.\cos\theta - i\ \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Pero: $$\cos\theta.\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\ \theta.\text{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = 4\left( \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Por la fórmula de Euler: $Z = 4\,.\,e^{i(\theta - \pi/6)}$ $\quad \therefore \quad \boxed{|Z| = 4}$

**12.-** Tenemos: $Z = e^{-2i\theta}(1 - e^{8i\theta})$

Multiplicando termino a termino: $Z = e^{-2i\theta} - e^{i6\theta}$

Factorizando: $Z = -e^{i2\theta}(e^{i4\theta} - e^{-i4\theta})$

Pero: $e^{i4\theta} - e^{i4\theta} = 2\,i\,\text{sen}\,4\theta \quad \Rightarrow \quad Z = -\,e^{i2\theta}\,.(2\,i\,\text{sen}\,4\theta)$

Por la fórmula de Euler: $Z = -\,(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)\,.\,2i\,\text{sen}\,4\theta$

Evaluando: $Z = \underbrace{(2\,\text{sen}\,2\theta\,.\,\text{sen}\,4\theta)}_{\text{Re(Z)}} + \underbrace{(-\,2\cos 2\theta.\text{sen}\,4\theta)}_{\text{Im(Z)}}$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\text{sen}\,2\theta}{-\cos 2\theta} \quad \therefore \quad \boxed{M = -\tan 2\theta}$$

**13.-** Tenemos: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$

Reemplazando en "W": $W = \dfrac{(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta - 1)i}{\theta} \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{i\cos\theta - i^2.\text{sen}\,\theta - i}{\theta}$

Pero: $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{1}{\theta}\cdot[\text{sen}\,\theta - i\,(1 - \cos\theta)]$

Pero: $\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}\,.\cos\dfrac{\theta}{2} \quad , \quad 1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{\theta}\left(2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - i\,.\,2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Factorizando: $2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}$ tenemos:

$$W = \frac{1}{\theta}.2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\theta}.\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.e^{-i\theta/2}$$

Como: $-\pi < \theta < 0 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < 0 \Rightarrow \text{sen}\,\dfrac{\theta}{2} < 0 \wedge \dfrac{\theta}{2}.\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{\theta}{2}.\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2} > 0$

$$\therefore \quad \boxed{|W| = \frac{2}{\theta}.\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}$$

14.- Tenemos: $\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\theta\right)^2 = M\cos^2\frac{\theta}{2}.\text{cis}\,\theta \ldots (*)$

Como: $\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$

En (*): $\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = M\cos^2\frac{\theta}{2}.\text{cis}\,\theta$

Factorizando el primer miembro:

$$\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2.\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)^2 = M\cos^2\frac{\theta}{2}.\text{cis}\,\theta$$

$\Rightarrow \quad 4\cos^2\frac{\theta}{2}.(e^{i\theta/2})^2 = M.\cos^2\frac{\theta}{2}.e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad 4.e^{i\theta} = M.e^{i\theta} \quad \therefore \quad \boxed{M = 4}$

15.- Tenemos: $Z + \frac{1}{Z} = 2\,\text{sen}\,\theta \ldots (*)$

Sea: $Z = |Z|.e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|}.e^{-i\theta}$

En (*): $|Z|e^{i\theta} + \frac{1}{|Z|}.e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

Pero: $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow \quad |Z|.e^{i\theta} + \frac{1}{|Z|}.e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad |Z| = 1$$

$$Z = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad M = e^{-i4\theta} - \frac{1}{e^{i4\theta}}$$

Pero: $e^{i4\theta} - e^{i4\theta} = 2i\,\text{sen}\,4\theta$

$\Rightarrow \quad M = (2i\,\text{sen}\,4\theta)i = 2i^2.\text{sen}\,4\theta \quad \therefore \quad \boxed{M = -2\,\text{sen}\,4\theta}$

16.- Sean: $Z = |Z|.e^{i\theta}$ el número complejo buscado

$$Z_1 = (-1 + \sqrt{3}\,i)^4 = 2^4.\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4$$

Pero: $\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \text{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = 16\left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 16.e^{1.2\pi/3}$$

Por dato del problema: $Z.Z_1 = 4 \,.\, e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad |Z| \,.\, e^{i\theta} \,.\, 16 \,.\, e^{i2\pi/3} = 4e^{i\pi}$

$$\Rightarrow \quad |Z|.e^{i\theta} = \frac{1}{4}\,.\,e^{i\pi/3} \quad \therefore \quad \boxed{Z = \frac{1}{4}\,.\,e^{i\pi/3}}$$

17.- Ordenando "Z" obtenemos: $\quad Z = \left[\dfrac{(\text{sen}\,3x - \text{sen}\,x) + i(\cos x + \cos 3x)}{\cos x + \cos 3x}\right]^n$

Usando las fórmulas de transformaciones trigonométricas:

$$Z = \left(\frac{(2\cos 2x.\text{sen}\,x) + i(2\cos 2x + \cos x)}{2\cos 2x.\cos x}\right)^n$$

Eliminando "2 cos 2$x$": $\quad Z = \left(\dfrac{\text{sen}\,x + i\cos x}{\cos x}\right)^n$

Pero: $\quad \text{sen}\,x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \wedge \cos x = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\cos^n x}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^n$$

Usando la fórmula de Euler: $\quad Z = \sec^n x \,.\, e^{i(\frac{\pi}{2} - x)^n}$

Como: $x \in \langle 0; \pi/2\rangle \quad \Rightarrow \quad \sec x > 0 \quad \therefore \quad \boxed{|Z| = \sec^n x}$

18.- Tenemos: $\quad Z = \text{sen}\,82° + i\cos 82° \ldots (*)$

Por co -razones trigonométricas tenemos:

$$\text{sen}\,82° = \cos 8° \wedge \cos 82° = \text{sen}\,8°$$

Reemplazando en (*): $\quad Z = \cos 8° + i\,\text{sen}\,8° = e^{i8°}$

$$\Rightarrow \quad Z^{15°} = (e^{i.8°})^{15°} = e^{i.120°} \wedge \frac{1}{Z^{15}} = e^{-i.120°}$$

Luego: $\quad W = e^{i.120°} + e^{-i.120°} + 1$

Pero: $\quad e^{i.120°} + e^{-i.120°} = 2\cos 120° = 2\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -1$

$$\therefore \quad \boxed{W = 0}$$

**19.-** Usando la formula de Euler en "M" tenemos: $M = \dfrac{(\sqrt[3]{3}e^{i.31°})^3.(\sqrt[5]{5}e^{i12°})^5}{(\sqrt[3]{15}.e^{i11°})^3}$

Usando teoría de exponentes: $M = \dfrac{(3e^{i.93°}).(5e^{i60°})}{(15.e^{i33°})} = e^{i.120°}$

$$\Rightarrow \quad M = \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{i \operatorname{sen} 120°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{M = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

**20.-** Tenemos: $M = \dfrac{e^{8ix} + e^{4ix} - 2}{1 - e^{8ix}} + 1$

Efectuando: $M = \dfrac{e^{4ix} - 1}{-(e^{8ix} - 1)}$

Pero, recordemos: $e^{ix} - 1 = 2\, i \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} . e^{ix/2}$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{2i.\operatorname{sen} 2x.e^{i2x}}{-2i.\operatorname{sen} 4x.e^{4x}} \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 4x}.e^{-i2x}$$

Pero: $\operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \wedge e^{-i2x} = \cos 2x - i \operatorname{sen} 2x$

$$\Rightarrow \quad M = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} 2x.\cos 2x}.(\cos 2x - i \operatorname{sen} 2x)$$

$$\Rightarrow \quad M = -\frac{1}{2} + i \tan 2x \qquad \therefore \qquad \boxed{\operatorname{Re}(M) = -\frac{1}{2}}$$

**21.-** Tenemos: $|e^{i\theta} - 1| = 2 \ldots (*)$

Pero: $e^{i\theta} - 1 = 2\, i \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} . e^{i\theta/2}$

En (*): $\left|2i . \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} . e^{i\theta/2}\right| = 2 \ldots (**)$

Sea: $Z = 2 \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} . e^{i\theta/2}$

Como: $0 \leq \theta < 2\pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{\theta}{2} < \pi$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad |Z| = 2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

Pero: $|Z| = |iZ| \Rightarrow |iZ| = |2i.\text{sen}\frac{\theta}{2}.e^{1\theta/2}| \Rightarrow |iZ| = 2\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}$

En (**): $2\ \text{sen}\frac{\theta}{2} = 2 \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \pi}$

**22.-** Como: $\text{sen}\ x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \wedge \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Rightarrow \quad Z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{-i(\pi/2 - x)} \Rightarrow Z = e^{-i(\pi/2 - x)}$$

Pero: $e^{ix} + 1 = 2\cos\frac{x}{2}\ .\ e^{ix/2} \Rightarrow Z + 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\ .\ e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$

Como: $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

Multiplicando por (-1): $-\frac{\pi}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\pi}{4}$

Sumando $\frac{\pi}{4}$ : $-\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < 0$ ; $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in$ IV C $\Rightarrow Z + 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).\ e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$

Como: $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \text{IV} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) > 0 \quad \therefore \quad \boxed{\arg(Z + 1) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}$

**23.-** Por el desarrollo de un binonuio al cuadrado tenemos:

$$e^{i4\theta} + 2e^{i2\theta} + 1 = (e^{i2\theta} + 1)^2 \Rightarrow e^{i2\theta} + 2e^{i\theta} + 1 = (e^{i\theta} - 1)^2$$

Luego: $Z = \left(\frac{e^{i2\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1}\right)^2 \ldots (*)$

Pero recordemos: $e^{ix} + 1 = 2\cos\frac{x}{2}.\ e^{ix/2} \Rightarrow e^{ix} - 1 = 2i\ \text{sen}\frac{x}{2}.\ e^{ix/2}$

Reemplazando en (*): $Z = \left(\frac{2\cos\theta.e^{i\theta}}{2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}.e^{i\theta/2}}\right)^2$

Simplificando: $Z = \frac{\cos^2\theta.e^{i\theta}}{i^2.\text{sen}^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$

$$\Rightarrow \quad \text{I}m(Z) = -\frac{\cos^2\theta.\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos^2\theta.\left(2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad Im(Z) = -2\cos^2\theta \cdot \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{Im(Z) = -2\cos^2\theta.\cot\frac{\theta}{2}}$$

**24.-** Sea: $\qquad Z = \dfrac{(1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$

Pero: $\qquad \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta} \Rightarrow Z = \dfrac{(1+e^{i\theta})^2}{e^{i\theta}}$

Pero: $\qquad 1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\theta/2} \Rightarrow Z = \dfrac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\theta/2}\right)^2}{e^{i\theta}} = \dfrac{4\cos^2\frac{\theta}{2}.e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$

Por la fórmula de degradación: $\qquad Z = 2(1+\cos\theta) = 2 + 2\cos\theta$

$$\Rightarrow 2 + 2\cos\theta = a - b\cos\theta \Rightarrow a = 2 \wedge b = -2 \qquad \therefore \qquad \boxed{2a + b = 2}$$

**25.-** Sea: $\qquad Z = 2 + \sqrt{3} + i \quad \Rightarrow \quad Z = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}i\right)$

Pero: $\qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Z = 2(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$

Por la fórmula de Euler: $Z = 2(1 + e^{i\pi/6})$

Pero: $\qquad e^{i\pi/6} + 1 = 2\cos\frac{\pi}{12} \cdot e^{i\pi/12} \quad \Rightarrow \quad Z = \left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)e^{i\pi/12} = 4\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot e^{i\pi/12}$

$$\Rightarrow \quad Z = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\underbrace{e^{i\pi/12}}_{\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \cdot \operatorname{cis}\theta$$

Luego: $A = 6, B = 2, \theta = \frac{\pi}{12} \qquad \therefore \qquad \dfrac{B}{A\theta} = \dfrac{2}{6.\frac{\theta}{12}} = \boxed{\dfrac{4}{\pi}}$

**26.-** Como: $\qquad Z = \cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$

Por la formula de Euler: $\quad Z = e^{i2\theta} \quad \Rightarrow \quad M = \left(\dfrac{1+e^{i2\theta}}{1-e^{i2\theta}}\right)^2 + \cot^2\theta$

Pero sabemos: $\qquad \dfrac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = \dfrac{1}{i} \cdot \cot\dfrac{x}{2}$

Luego: $M = \left( -\frac{1}{i} \cdot \cot\theta \right)^2 + \cot^2\theta \Rightarrow M = \frac{1}{i^2} \cdot \cot^2\theta + \cot^2\theta$

Pero: $i^2 = -1 \Rightarrow M = -\cot^2\theta + \cot^2\theta \quad \therefore \quad \boxed{M = 0}$

27.- Tenemos: $Z = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta}$

Multiplicando por "$i$" el numerador y denominador tenemos:

$$Z = \frac{i^2\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{-i^2\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}$$

Pero: $i^2 = -1 \Rightarrow Z = \dfrac{-(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$

Luego multiplicando por "-1" ambos miembros y usando la formula de Euler tenemos:

$$-Z = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i2\theta} \quad \therefore \quad \boxed{arg(-Z) = -2\theta}$$

28.- Por co-razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \Rightarrow \cos 2\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

Por la formula de Euler: $Z = e^{i(\pi/2 - 2\theta)}$

Luego: $Z + 1 = e^{i(\pi/2 - 2\theta)}$

Pero: $e^{ix} = 1 = 2\cos\frac{x}{2} \cdot e^{ix/2} \Rightarrow Z + 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot e^{i(\pi/4 - \theta)}$

Como: $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\theta < 0$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) > 0 \quad \therefore \quad \boxed{|Z + 1| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

29.- Tenemos: $e^{a+ib} = \sqrt{3} + i \ldots (*)$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Pero: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \quad \wedge \quad e^{\text{Ln}2} = 2$$

Por la fórmula de Euler: $\sqrt{3} + i = 2\,e^{i\pi/6} = e\text{L}^{n2}\,.\,e^{i\pi/6} = e^{\text{Ln}2 + i\pi/6} \ldots$ (**)

(*) = (**): $e^{a+ib} = e^{\text{Ln}2 + i\pi/6} \quad \therefore \quad \boxed{a = \text{L}n2}$

**30.-** Tenemos: $Z = \dfrac{1+\cos 2\theta - i\,\text{sen}\,2\theta}{1-(\cos 2\theta - i\text{sen}\,2\theta)}$

Pero por la formula Euler: $\cos 2\theta - i\ \text{sen}\ 2\theta = e^{-i2\theta}$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{1+e^{-i2\theta}}{1-e^{-i2\theta}} = \frac{(e^{-i2\theta}+1)}{(e^{-i2\theta}-1)} \ldots (*)$$

Recordemos: $\dfrac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = \dfrac{1}{i}\,.\,\cot\dfrac{x}{2}$

En (*): $Z = -\dfrac{1}{i}\,.\,\cot\left(-\dfrac{2\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{i}\,.\,\cot\theta \quad \Rightarrow \quad Zi = \cot\theta$

Pero: $|Z| = |Zi|$

Como: $\theta \in$ III C, $\cot\theta > 0 \quad \therefore \quad \boxed{|Z| = |Zi| = \cot\theta}$

**31.-** Tenemos: $W = e^{iZ^2} \ldots (*)$

Como: $Z = r\,.\,e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = r^2.\,e^{i2\theta}$

Reemplazando en (*): $W = e^{ir^2 e^{i2\theta}}$

Pero: $e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i\ \text{sen}\ 2\theta \quad \Rightarrow \quad W = e^{ir^2.\,(\cos 2\theta + i\text{sen}\,2\theta)}$

$\Rightarrow \quad W = e^{ir^2.\cos 2\theta + i^2.r^2.\text{sen}\,2\theta}$

Pero: $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad W = e^{-r^2\,\text{sen}\,2\theta}\,.\,e^{i.r^2.\cos 2\theta}$

Luego: $\boxed{|W| = e^{-r^2\text{sen}\,2\theta}}$

**32.-** Tenemos: $W = e^{(iZ)^2} \quad \Rightarrow \quad W = e^{i^2Z^2} = e^{-Z^2} \quad \ldots (*)$

Como: $Z = \sqrt{5}\,.\,e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 5e^{i2\theta}$

Reemplazando en (*): $W = e^{-5.e^{i2\theta}}$

Pero: $e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i\ \text{sen}\ 2\theta \quad \Rightarrow \quad W = e^{-5.\cos 2\theta}\,.\,e^{-i.\,5\,\text{sen}\,2\theta} \quad \ldots (1)$

Pero: $\theta = arc\ \tan\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{1}{2}$

Recordemos: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{5}$

Luego en (1): $W = e^{-5\left(\frac{3}{5}\right)} . e^{-i.\,\text{sen}\,2\theta}$ $\therefore$ $\boxed{|W| = e^{-3}}$

**33.-** Tenemos: $Z = \dfrac{1+\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{1-\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)}$ ... (1)

Por la formula de Euler, en (1): $Z = \dfrac{(e^{i\frac{\theta}{2}}+1)}{-(e^{-i\frac{\theta}{2}}-1)}$ ... (2)

Pero: $e^{i\theta/2} + 1 = 2\cos\dfrac{\theta}{4} . e^{i.\theta/4}$

$$e^{-i\theta/2} - 1 = 2i\,\text{sen}\left(-\frac{\theta}{4}\right) . e^{-i\theta/4} = -2i\,.\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{4}\right) . e^{-i\theta/4}$$

En (2): $Z = \dfrac{2\cos\frac{\theta}{4}.e^{i\frac{\theta}{4}}}{2i\,\text{sen}\frac{\theta}{4}.e^{-i\frac{\theta}{4}}} = \dfrac{1}{i}\cot\dfrac{\theta}{4} . e^{i\theta/2}$ $\Rightarrow$ $iZ = \left(\cot\dfrac{\theta}{4}\right) . e^{i\theta/2}$

Como: $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3\pi}{8} < \dfrac{\theta}{4} < \dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ scot $\dfrac{\theta}{4} > 0$

$$\therefore \quad \boxed{|Z| = |iZ| = \cot\frac{\theta}{4}}$$

**34.-** Tenemos: $M = \sqrt{1-\left(\dfrac{1+e^{-i2\theta}}{1-e^{-i2\theta}}\right)^2}$ ... (*)

Recordemos: $\dfrac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = \dfrac{1}{i} . \cot\dfrac{x}{2}$

En (*): $M = \sqrt{1-\left(\frac{1}{i}\cot\theta\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{i^2}\cot^2\theta}$

Pero: $i^2 = -1$ $\Rightarrow$ $M = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{\csc^2\theta}$

$$\therefore \quad \boxed{M = \csc\theta} \quad \theta \in \langle 0; \pi/2\rangle$$

**35.-** Tenemos: $Z = \dfrac{\operatorname{sen}4\theta - i\cos 4\theta}{\operatorname{sen}4\theta + i\cos 4\theta} \ldots (*)$

Por el criterio de reducción al primer cuadrante:

$\operatorname{sen} 4\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \wedge \cos 3\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)$

Reemplazando en (*): $$Z = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right) - i.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right) + i.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}$$

Por la formula de Euler, tenemos: $$Z = \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}} = e^{-i(\pi - 8\theta)}$$

$\Rightarrow \quad Z = e^{i(8\theta - \pi)} \quad \Rightarrow \quad arg(Z) = 8\theta - \pi$

Pero: $arg(Z) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 8\theta - \pi = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{3\pi}{16}}$

**36.-** En la expresión propuesta usamos la formula de Euler:

$$\frac{e^{-i(4\alpha+\beta)}}{e^{-i2\alpha}} + \frac{e^{i(4\alpha+\beta)}}{e^{i2\alpha}} = A . \cos(B\alpha + \beta)$$

Usando teoría de Exponentes: $e^{-i(2\alpha + \beta)} + e^{i(2\alpha + \beta)} = A. \cos(B\,\alpha + \beta) \ldots (*)$

Recordemos: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

En (*): $2\cos(2\alpha + \beta) = A. \cos(B\,\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \quad A = 2 \wedge B = 2 \quad \therefore \quad \boxed{A + B = 4}$

**37.-** Sea: $$Z = \frac{(1 + e^{i2\theta})^4}{e^{i4\theta}} \ldots (*)$$

Recordemos: $e^{ix} + 1 = 2\cos\frac{x}{2} . e^{ix/2}$

En (*): $Z = \dfrac{(2\cos\theta . e^{i\theta})^4}{e^{i4\theta}} = \dfrac{16.\cos^4\theta . e^{i4\theta}}{e^{i4\theta}} \quad \Rightarrow \quad Z = 16\cos^4\theta = 2(8\cos^4\theta)$

$$Z = 2(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \quad \Rightarrow \quad Z = 6 + 8\cos 2\theta + 2\cos 4\theta$$

Luego: $6 + 8\cos 2\theta + 2\cos 4\theta = A + B\cos 2\theta + C \,.\, \cos 4\theta$

$\Rightarrow \quad A = 6, B = 8, C = 2 \quad \Rightarrow \quad M = \dfrac{8-2}{6} \quad \therefore \quad \boxed{M = 1}$

**38.-** Tenemos: $$Z = \frac{1+e^{i2\theta}+e^{i4\theta}+e^{i6\theta}}{e^{i2\theta}+1}$$

Factorizando el numerador: $Z = \dfrac{1+e^{i2\theta}+e^{i4\theta}+e^{i6\theta}}{e^{i2\theta}+1} \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{(1+e^{i2\theta})(1+e^{i4\theta})}{(e^{i2\theta}+1)}$

Simplificando nos queda: $Z = e^{i4\theta} + 1$

Pero: $e^{ix} + 1 = 2\cos\dfrac{x}{2} \,.\, e^{ix/2} \quad \Rightarrow \quad Z = 2\cos 2\theta \,.\, e^{i2\theta}$

Pero: $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\theta \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta > 0 \quad \therefore \quad \boxed{|Z| = 2\cos 2\theta}$

**39.-** Tenemos: $$Z = \frac{e^{i(-3x)}+1}{e^{i(-6x)}-1} \;\ldots (*)$$

Recordemos: $e^{ix} + 1 = 2\cos\dfrac{x}{2} \,.\, e^{ix/2} \quad \Rightarrow \quad e^{ix} - 1 = 2i \,.\, \text{sen}\dfrac{x}{2} \,.\, e^{ix/2}$

En (*): $$Z = \frac{2\cos\left(-\frac{3x}{2}\right).e^{i\left(-\frac{3x}{2}\right)}}{2i.\text{sen}(-3x).e^{i(-3x)}} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{3x}{2}\right).e^{\left(\frac{3x}{2}\right)i}}{-i.\text{sen}(3x)}$$

Pero: $\text{sen}\, 3x = 2 \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{3x}{2}\right) \,.\, \cos\dfrac{3x}{2} \quad \wedge \quad e^{i(3x/2)} = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{3x}{2}\right).\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-i.2\,\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right).\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}$$

Simplificar: $$Z = -\frac{1}{2} + i \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \cot\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$\therefore \quad \boxed{\text{Re}(Z) = -\dfrac{1}{2}}$

**40.-** Sea: $Z = x + iy = re^{i\theta}$

Como: $Z \cdot \overline{Z} \leq 1 \Rightarrow (x + iy)(x - iy) \leq 1$

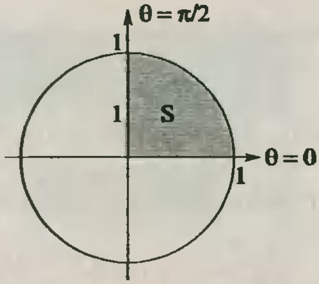
Por diferencia de cuadrados: $x^2 - i^2y^2 \leq 1$

Pero: $i^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \ldots (*)$

Como: $Z = re^{i\theta} \Rightarrow arg(Z) = \theta$

Pero: $0 \leq arg(Z) \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \ldots (**)$

De (*) ∧ (**) obtenemos:




De la figura: $S = \dfrac{\pi}{4}(1)^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \dfrac{\pi}{4}\, u^2}$

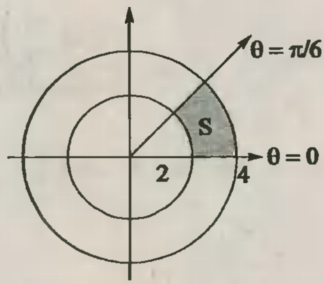
**41.-** Sea: $Z = x + iy = |Z|\, e^{i\theta} \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge arg(Z) = \theta$

Como: $|Z| \in [2; 4] \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 \Rightarrow 2^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2 \ldots (*)$

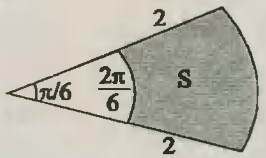
Como: $arg(Z) = \theta \Rightarrow arg(Z^3) = 3\theta$

Pero: $arg(Z^3) \in [0; \dfrac{\pi}{2}] \Rightarrow 0 \leq 3\theta \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \ldots (**)$

Interceptando (*) ∧ (**) obtenemos:




Por la formula del trapecio circular:




$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right) \cdot 2u^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \pi u^2}$$

**42.-** Sea: $Z = x + iy = |Z| \cdot e^{i\theta}$

$\Rightarrow \quad \overline{Z} = x - iy \quad \Rightarrow \quad |\overline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

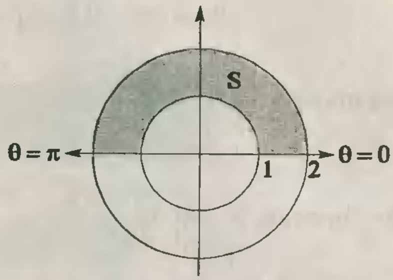
Pero: $1 \leq |\overline{Z}| \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2 \ldots (*)$

Como: $Z = |Z| \cdot e^{i\theta} \Rightarrow Z^3 = |Z^3| \cdot e^{i3\theta}$

$\Rightarrow \quad arg(Z^3) = 3\theta \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 3\theta \leq 3\pi$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \pi \ldots (**)$

De (*) $\wedge$ (**):




De la figura: $S = \frac{\pi}{2}(2^2 - 1^2) \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{3\pi}{2} u^2}$

**43.-** La ecuación de la circunferencia: $(x + 2)^2 + (y^2) = 2^2$

En el plano complejo: $|x + 2 + iy| \leq 2$, pero: $z = x + iy$

$$|z + 2| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{R = \left\{ Z \in C / \ |Z + 2| \leq 2, \ \frac{\pi}{2} \leq arg\,(Z) \leq 3\frac{\pi}{2} \right\}}$$

**44.-** Sea: $Z = x + iy = r^{ei\theta}$

Tenemos: $(Z + 1)(\overline{Z} + 1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (x + iy + 1)(x - iy + 1) \leq 1$

Por diferencia de cuadrados: $(x + 1)^2 - i^2 y^2 \leq 1$

Pero: $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)^2 + y^2 \leq 1 \quad \ldots (*)$

Como: $Z = r^{ei\theta} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = r^2 e^{i2\theta} \quad \Rightarrow \quad iZ^2 = ir^2 e^{i2\theta}$

Pero: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad iZ^2 = r^2 \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{i.2\theta}$

$\Rightarrow \quad iZ^2 = r^2 \cdot e^{i\pi/2 + 2\theta} \quad \Rightarrow \quad arg(iZ^2) = \frac{\pi}{2} + 2\theta$

Pero: $2\pi \leq arg(iZ^2) \leq 3\pi \quad \Rightarrow \quad 2\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\theta \leq 3\pi$

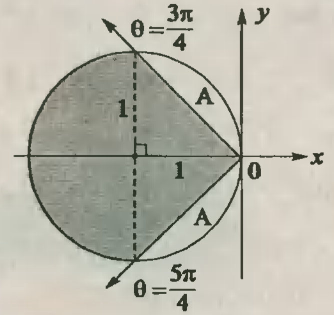
$\Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \quad \ldots (**)$

De (*) ∧ (**):

De la figura: $R = S_{\odot} - 2A$

$$R = \pi(1)^2 - 2\left[\frac{\pi}{4}\,(1)^2 - (1)\frac{(1)}{2}\right]$$

Efectuando: $\boxed{R = \left(\frac{\pi+2}{2}\right)u^2}$




**45.-** Tenemos: $Z = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

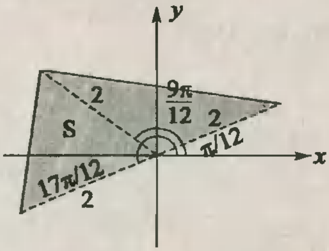
Pero: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Z = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$

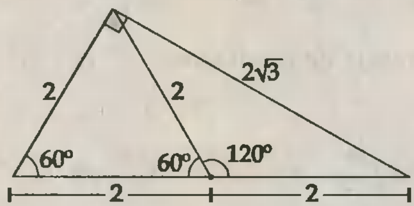
Usando la formula de Moivre: $Z^{1/3} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\right)\right)$

Si: $k = 0$: $\sqrt[3]{Z} = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})$

$k = 1$: $\sqrt[3]{Z} = \left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{12}\right)$

$k = 2$: $\sqrt[3]{Z} = 2(\cos\frac{17\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12})$




∴ De la figura: $S = \frac{2(2\sqrt{3})}{2}$ ∴ $\boxed{S = 2\sqrt{3}\,u^2}$

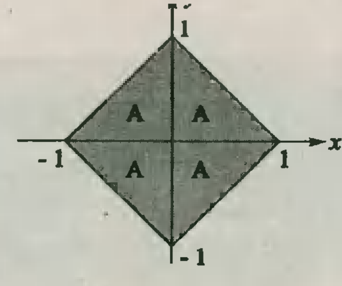
**46.-** Tenemos: $|Re(Z)| + |Im(Z)| \leq 1$

Sea: $Z = x + iy$, donde: $x = Re(Z)$ , $y = Im(Z)$

Se presentan 4 casos: $|x| + |y| \leq 1$

i) $x + y \leq 1$ ii) $x - y \leq 1$

iii) $-x + y \leq 1$ iv) $-x - y \leq 1$




De (i) , (ii), (iii) y (iv):

$$\text{Área} = 4A = \frac{4(1)(1)}{2} = 2u^2$$

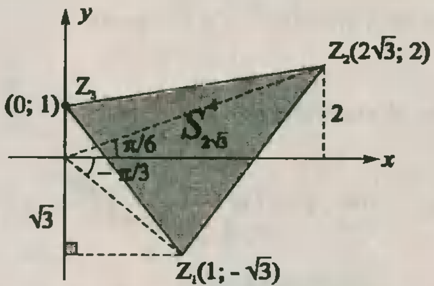
**47.-**

Si: $Z_1 = 2e^{-i\pi/3} \Rightarrow |Z_1| = 2 \wedge arg(Z_1) = -\pi/3$

$Z_2 = 2e^{i\pi/6} \Rightarrow |Z_2| = 4 \wedge arg(Z_2) = \pi/6$

$Z_3 = 2e^{i\pi/2} \Rightarrow |Z_3| = 1 \wedge arg(Z_3) = \pi/2$

Graficamos y usando los ángulos notables para determinar $Z_1$ , $Z_2$ y $Z_3$.




Usando el método de determinantes:

$$\begin{array}{r|cc|l} & 0 & 1 & \\ 1 \leftarrow & 1 & -\sqrt{3} & \rightarrow 0 \\ -6 \leftarrow & 2\sqrt{3} & 2 & \rightarrow 2 \\ 0 \leftarrow & 0 & 1 & \rightarrow 2\sqrt{3} \\ \hline -5 & & & 2+2\sqrt{3} \end{array}$$

Luego: $S = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{3} - (-5))u^2 \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{1}{2}(7 + 2\sqrt{3})u^2}$


***LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS***

**01.-** Si: $W = \dfrac{\text{sen}(2\cos\theta)}{\cos\theta}$, en el límite cuando evaluamos con $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, tendremos: $\dfrac{0}{0}$

En este caso conviene transformar así: $W = \dfrac{2.\text{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta}$

Ahora hacemos el cambio de variable: $x = 2\cos\theta$

Además reconocemos que al evaluar: $\theta \to \dfrac{\pi}{2} \;<>\; x \to 0$

Luego tomamos el límite: $\underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{lím}\; W = \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{lím} \dfrac{2.\text{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta} = 2.\underset{x\to 0}{lím} \dfrac{\text{sen}x}{x}$

$$\therefore \quad \boxed{\underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{lím}\; W = 2}$$

**02.-** Si: $W = \dfrac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}x}{h}$

Evaluamos el límite cuando $h = 0$: $W = \dfrac{\text{sen}x - \text{sen}x}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformando a producto la diferencia de senos, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{2\text{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\Rightarrow \underset{h\to 0}{lím}\; W = \underset{h\to 0}{lím} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} . \underset{h\to 0}{lím} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \Rightarrow \underset{h\to 0}{lím}\, W = (1) . \cos x = \boxed{\cos x}$$

**03.-** Si: $W = \dfrac{\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

Evaluando en el límite cuando $x = a$: $W = \dfrac{\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a}{a^2 - a^2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

En base a la identidad del arco compuesto y descomponiendo la diferencia de cuadrados en el denominador, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\text{sen}(x-a).\text{sen}(x-a)}{(x+a)(x-a)}$$

Es pertinente reconocer que cuando: $x \to a \iff (x - a) \to 0$

$$\lim_{x \to a} W = \lim_{x \to a} \left[\frac{\text{sen}(x+a)}{x+a}\right]\left[\frac{\text{sen}(x-a)}{x-a}\right]$$

Aplicando límite para el producto de dos funciones, tendremos:

$$\lim_{x \to a} W = \lim_{x \to a} \left[\frac{\text{sen}(x+a)}{x+a}\right] . \lim_{x-a \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x-a)}{x-a}\right] \Rightarrow \lim_{x \to a} W = \frac{\text{sen}(a+a)}{a+a} . 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to a} W = \frac{\text{sen}\, 2a}{2a}}$$

**04.-** Si: $W = \dfrac{x^3 + 1}{\text{sen}(1 - x^2)}$

Evaluando en el límite cuando $x = -1$: $W = \dfrac{(-1)^3 + 1}{\text{sen}[1 - (-1)^2]} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterm.

Descomponiendo en el numerador la suma de cubos y en el denominador factorizando el signo ( - ) para el argumento del seno, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{-\text{sen}(x^2 - 1)}$$

Multiplicando numerador y denominador por: $x - 1$

$$W = \frac{x^2 - 1}{\text{sen}(x^2 - 1)} . \frac{x - x^2 - 1}{(x-1)}$$

Es preciso reconocer que cuando: $x \to -1 \iff x^2 \to 1 \iff x^2 - 1 \to 0$

$$\lim_{x \to -1} W = \lim_{x \to -1} \left[\frac{x - x^2 - 1}{(x-1)}\right] . \left[\frac{x^2 - 1}{\text{sen}(x^2 - 1)}\right]$$

Aplicando límite para el producto de dos funciones:

$$\lim_{x\to -1} W = \lim_{x\to -1}\left[\frac{x-x^2-1}{(x-1)}\right] \cdot \lim_{x^2-1\to 0}\left[\frac{x^2-1}{\text{sen}(x^2-1)}\right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -1} W = \frac{(-1)-1-1}{(-1)-1} \cdot (1)$$

$$\lim_{x\to -1} W = \frac{-3}{-2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to -1} W = \frac{3}{2}}$$

**05.-** Sea: $$W = \frac{\text{sen}\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$$

Evaluando en el límite cuando $x = 0$ tenemos: $W = \dfrac{\text{sen}(2-2)}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterm.

Multiplicando el numerador y denominador por: $\sqrt{x^2+4}$ - 2, y luego por: $\sqrt{x^2+4}$ + 2 ; la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)}{(\sqrt{x^2+4}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$\Rightarrow \quad W = \left[\frac{\text{sen}\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}\right] \cdot \left[\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{x^2+4}+2}\right] \quad \Rightarrow \quad W = \left[\frac{\text{sen}\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}\right]\left[\frac{1}{(\sqrt{x^2+4}+2)}\right]$$

Cuando: $x \to 0 \quad <> \quad \underbrace{\sqrt{x^2+4}-2}_{y} \to 0 \quad <> \quad y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\text{sen} y}{y}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{(\sqrt{x^2+4}+2)}\right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = (1) \cdot \frac{1}{(2+2)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{4}}$$

**06.-** Sea: $$W = \frac{\sqrt{1+\text{sen}\,x} - \sqrt{1-\text{sen}\,x}}{x}$$

En el límite cuando $x = 0$ tenemos: $W = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \quad \Rightarrow$ forma indeterminada.

Racionalizando el numerador, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(1+\text{sen}\,x)-(1-\text{sen}\,x)}{x.[\sqrt{1+\text{sen}\,x}+\sqrt{1-\text{sen}\,x}]}$$

$$\lim_{x\to 0} W = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right).\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\text{sen}\,x}+\sqrt{1-\text{sen}\,x}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} W = 2\,.\,(1)\,.\,\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to 0} W = 1}$$

**07.-** Sea: $\quad W = \dfrac{1-\text{sen}\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$

En el límite cuando $x = \pi$, tenemos: $\quad W = \dfrac{1-\text{sen}\dfrac{\pi}{2}}{\pi-\pi} = \dfrac{0}{0} \quad\Rightarrow$ forma indeterminada.

Ordenando convenientemente tendremos: $\quad W = \dfrac{\text{sen}\dfrac{x}{2}-1}{x-\pi} \quad \ldots (1)$

Cuando: $\quad x \to \pi \quad <> \quad x - \pi \to 0$, y si hacemos: $x - \pi = y \quad\Rightarrow\quad x \to \pi\ <>\ y \to 0$

Asimismo, si: $\ y = x - \pi \ \Rightarrow\ x = \pi + y\ \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1), tenemos: $\quad W = \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{y}{2}\right)-1}{y} = \dfrac{+\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)-1}{y}$

Aplicando reducción al I cuadrante: $\quad W = -\dfrac{\left(1-\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)\right)}{y}$

$$\lim_{x\to\pi} W = \lim_{y\to 0} -\frac{1-\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)}{y} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\pi} W = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{\frac{y}{2}\to 0}\cdot\frac{1-\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\left(\dfrac{y}{2}\right)}$$

Aplicando la regla de H'ospithal: $\quad \lim_{x\to\pi} W = -\dfrac{1}{2}\lim_{\frac{y}{2}\to 0}\cdot\dfrac{+\cancel{\dfrac{1}{2}}\,\text{sen}\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\cancel{\dfrac{1}{2}}} = -\dfrac{1}{2}\,.(0)$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to\pi} W = 0}$$

**08.-** Si: $W = \dfrac{\text{sen}(x-2)}{x^3-8}$

En el límite cuando $x = 2$, tenemos: $W = \dfrac{\text{sen}(2-2)}{2^3-8} = \dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada

Descomponiendo en el denominador la diferencia de cubos, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Luego de ordenar convenientemente evaluamos:

$$\lim_{x\to 2} W = \lim_{x\to 2}\left[\frac{\text{sen}(x-2)}{x-2}\right]\cdot\left(\frac{1}{x^2+2x+4}\right)$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 2 \;\Leftrightarrow\; x-2 \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} W = \lim_{x-2\to 0}\left[\frac{\text{sen}(x-2)}{x-2}\right]\cdot \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 2} W = (1)\cdot\frac{1}{2^2+2(2)+4}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{12}}$$

**09.-** Sea: $W = \dfrac{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}{(x-x^3)^2}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada

Factorizando en el denominador, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}{[x(1-x^2)]^2} = \frac{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}{x^2(1-x^2)^2}$$

Multiplicando el numerador y denominador por : 15

$$W = \frac{\text{sen}3x}{3x}\cdot\frac{\text{sen}5x}{5x}\cdot\frac{15}{(1-x^2)^2}$$

Luego de ordenar convenientemente evaluamos:

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}3x}{3x}\right)\cdot\left(\frac{\text{sen}5x}{5x}\right)\cdot\frac{15}{(1-x^2)^2}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;<>\; 3x \to 0 \;\wedge\; 5x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{3x\to 0}\left(\frac{\text{sen}3x}{3x}\right) . \lim_{5x\to 0}\left(\frac{\text{sen}5x}{5x}\right) . \lim_{x\to 0}\frac{15}{(1-x^2)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} W = (1) . (1) . \frac{15}{(1)^2} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 15}$$

**10.-** Sea: $$W = \frac{\text{sen}3x}{5x^2 - 2x}$$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

En base a la identidad del arco triple y factorizando "$x$" en el denominador, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(\text{sen}x)(2\cos 2x + 1)}{x(5x-2)} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right).\left(\frac{2\cos 2x + 1}{5x-2}\right)$$

Aplicando límite al producto de dos funciones, tendremos:

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right). \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos 2x + 1}{5x-2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} W = (1) . \left(\frac{2+1}{0-2}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = -\frac{3}{2}}$$

**11.-** Sea: $$W = \frac{-\text{sen}3x}{\text{sen}x - \text{sen}2x}$$

En el límite cuando $x = 0$; tenemos: $W = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

En base a la identidad del arco doble y transformando a producto la diferencia de senos, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{-\cancel{2}\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}}{\cancel{2}\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;<>\; \dfrac{3x}{2} \to 0 \;\wedge\; \dfrac{x}{2} \to 0$

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = -\frac{\lim\limits_{\frac{3x}{2}\to 0}\dfrac{sen\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}.3}{\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = -\frac{(1)(3)}{(1)}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = -3}$$

**12.-** Sea: $W = \dfrac{x - \text{sen}2x}{x + \text{sen}3x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Dividiendo el numerador y denominador entre $x$; la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\dfrac{x - \text{sen}2x}{x}}{\dfrac{x + \text{sen}3x}{x}} \Rightarrow W = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}2x}{2x}.2}{1 + \dfrac{\text{sen}3x}{3x}.3}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;\; <> \;\; 2x \to 0 \wedge 3x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\left(\dfrac{\text{sen}2x}{2x}\right)}{1 + 3\left(\dfrac{\text{sen}3x}{3x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1 - 2\left(\dfrac{\text{sen}\,2x}{2x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + 3\left(\dfrac{\text{sen}\,3x}{3x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1 - \lim\limits_{2x\to 0} 2.\left(\dfrac{\text{sen}\,2x}{2x}\right)}{1 + \lim\limits_{3x\to 0} 3.\left(\dfrac{\text{sen}\,3x}{3x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1 - 2(1)}{1 + 3(1)}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = -\frac{1}{4}}$$

**13.-** Sea: $W = \dfrac{(\theta + 4).\text{sen}(\pi\theta)}{\theta^2 - 16}$

En el límite cuando $\theta = 4$ tenemos: $W = \dfrac{8.\text{sen}(4\pi)}{16 - 16} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

Descomponiendo la diferencia de cuadrados en el denominador, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(\theta+4).\text{sen}(\pi\theta)}{(\theta+4).(\theta-4)} \; ... (1)$$

Debemos reconocer que cuando: $\theta \to 4 \;\; <> \;\; \theta - 4 \to 0 \;\; <> \;\; \alpha \to 0$

Además hacemos: $\alpha = \theta - 4 \;\; \Rightarrow \;\; \theta = \alpha + 4 \; ... (2)$

Reemplazando (2) en (1), tenemos: $W = \dfrac{\text{sen}[\pi(\alpha+4)]}{\alpha} = \dfrac{\text{sen}(4\pi+\pi\alpha)}{\alpha}$

Pero por ángulos coterminales: $\text{sen}(4\pi + \pi\alpha) = \text{sen}\,(\pi\alpha)$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to 4} W = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\alpha} \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{\theta\to 4} W = \lim_{\pi\alpha\to 0} \left[\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right].\pi \;\; \therefore \;\; \boxed{\lim_{\theta\to 4} W = (1).\pi = \pi}$$

**14.-** Si: $W = \dfrac{3\text{sen}(\pi x) - \text{sen}(3\pi x)}{x}$

En el límite cuando $x = 0$ tenemos: $W = \dfrac{3(0)-0}{0} = \dfrac{0}{0} \;\; \Rightarrow$ forma indeterminada

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{3\text{sen}(\pi x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(3\pi x)}{x} \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}.3\pi - \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi x}.3\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = (1).\,3\pi - (1).3\pi \qquad \therefore \;\; \boxed{\lim_{x\to 0} W = 0}$$

**15.-** Sea: $W = \dfrac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \;\; \Rightarrow$ forma indeterminada

En base a la identidad de transformación trigonométrica, la diferencia de cosenos la pasamos a producto y la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{-2\text{sen}\left(\frac{mx-nx}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{mx+nx}{2}\right)}{x^2} \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{x\to 0} W = -2 \,.\, \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\left[(m-n)\frac{x}{2}\right]}{\frac{x}{2}} . \frac{\text{sen}\left[(m+n)\frac{x}{2}\right]}{\frac{x}{2}} . \frac{1}{4}$$

Sea: $y = (m - n).\dfrac{x}{2} \;\; \wedge \;\; z = (m+n).\dfrac{x}{2}$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;\; <> \;\; (m - n).\dfrac{x}{2} \to 0 \;\; \wedge \;\; (m+n).\dfrac{x}{2} \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = -\frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y}{y} \cdot (m-n) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\text{sen}z}{z} \cdot (m+n)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (m-n) \cdot 1 \cdot (m+n) \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{n^2-m^2}{2}}$$

**16.-** Sea: $W = \dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

En base a la identidad del arco doble (degradación) la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{2\text{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{2\text{sen}^2(2x)}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3x}{2} \to 0 \ \wedge \ 2x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{\text{sen}^2(2x)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\frac{3x}{2}}{\text{sen}2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \left(\frac{\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\frac{3x}{2}}{\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}2x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \lim\limits_{\frac{3x}{2}\to 0} \dfrac{\text{sen}\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}x}}{2 \cdot \lim\limits_{2x\to 0} \dfrac{\text{sen}2x}{2x}}\right)^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

**<u>Otro Método:</u>**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\right) \cdot 9}{\left(\frac{1-\cos 4x}{16x^2}\right) \cdot 16} \quad \wedge \quad \text{cuando: } x \to 0 <> 3x \to 0 \quad \wedge \quad 4x \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lim\limits_{3x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2} \cdot 9}{\lim\limits_{4x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{(4x)^2} \cdot 16} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9}{\frac{1}{2} \cdot 16} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{9}{16}}$$

**17.-** Sea: $W = \dfrac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

En el límite cuando $x = 0$ tenemos: $W = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Multiplicando el numerador y denominador por: $1 + \sqrt{\cos x}$, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{x^2}{(1-\sqrt{\cos x})} \cdot \frac{(1+\sqrt{\cos x})}{(1+\sqrt{\cos x})} = \frac{(1+\sqrt{\cos x})}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{\cos x})}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{\cos x})}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 4}$$

**18.-** Sea: $W = \dfrac{2-\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos $W = \dfrac{2-1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

También W se convierte en: $\quad W = \dfrac{1-\cos x}{x^2} + \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

Evaluando el límite se tiene:

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{3}{4}}$$

**19.-** Sea: $W = \dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

En el limite cuando $x = 1$, tenemos: $W = \dfrac{1+\cos\pi}{(1-1)^2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Debemos reconocer que cuando: $x \to 1 \quad <> \quad x-1 \to 0 \quad <> \quad y = x-1 \to 0$

Sí: $y = x - 1 \iff x = y + 1$

Reemplazando en la expresión original, se tendrá:

$$W = \frac{1+\cos[\pi(y+1)]}{y^2} \Rightarrow W = \frac{1+\cos(\pi+\pi y)}{y^2} \Rightarrow W = \frac{1-\cos(\pi y)}{y^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} W = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi y)}{\pi^2 . y^2} . \pi^2$$

Debemos reconocer que cuando: $y \to 0 \iff \pi y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} W = \pi^2 . \lim_{\pi y\to 0} \frac{1-\cos(\pi y)}{(\pi y)^2} = \pi^2 . \frac{1}{2} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 1} W = \frac{\pi^2}{2}}$$

**20.-** Sea: $W = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

En el límite cuando $x = 1$, tenemos: $W = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Multiplicando el numerador y denominador por: $1 + \sqrt{x}$, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}} . \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow W = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x} \Rightarrow W = \frac{(1+\sqrt{x}).\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} \quad \ldots (1)$$

Si hacemos el cambio de variable: $y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$ ... (2)

Debemos reconocer que cuando: $x \to 1 \iff 1 - x \to 0 \iff y = 1 - x \to 0$

Reemplazando (2) en (1) tendremos: $W = \dfrac{(1+\sqrt{1-y}).\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}y\right)}{y}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} W = \lim_{y\to 0} \frac{\left(1+\sqrt{1-y}\right).\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y} \Rightarrow \lim_{x\to 1} W = \lim_{y\to 0} (1+\sqrt{1-y}\,) . \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}.y} . \frac{\pi}{2}$$

Debemos reconocer que cuando: $y \to 0 \iff \dfrac{\pi}{2} y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} W = 2 . \lim_{\frac{\pi}{2}y\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}.y} . \frac{\pi}{2} = 2 . (1) . \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to 1} W = \pi}$$

**21.-** Sea: $$W = \frac{x^2}{1-\cos 6x}$$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformamos la expresión de manera que: $W = \dfrac{1}{36} . \dfrac{(6x)^2}{1-\cos 6x}$ ... (1)

Si hacemos el siguiente cambio de variable: $y = 6x$ ... (2)

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;<>\; 6x \to 0 \;<>\; y \to 0$

Reemplazando (2) en (1), tenemos: $W = \dfrac{1}{36} . \dfrac{y^2}{1-\cos y}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{y\to 0} \frac{1}{36} . \frac{y^2}{1-\cos y} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{36} \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos y}$$

$$\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{36} . \frac{1}{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{18}}$$

**22.-** Sea: $$W = \frac{\pi - 3x}{1-2\cos x}$$

En el límite cuando $x = \dfrac{\pi}{3}$, tenemos: $W = \dfrac{\pi - 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Ordenando convenientemente tendremos: $W = \dfrac{-(\pi - 3x)}{2\cos x - 1}$

En base a la identidad del arco triple, la expresión W se convierte en:

$$W = -\frac{(\pi - 3x)}{\dfrac{\cos 3\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{(\pi - 3x).\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)}$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable: $y = \dfrac{\pi - 3x}{2}$

Debemos reconocer que cuando: $x \to \dfrac{\pi}{3} \;<>\; \dfrac{\pi - 3x}{2} \to 0 \;<>\; y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-\cos\frac{x}{2}.(\pi - 3x)}{2.\text{sen}\left[\frac{\pi - 3x}{2}\right]} \quad \ldots (2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -2\cos\frac{\pi}{6}.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi-3x}{2}}{\text{sen}\left(\frac{\pi-3x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\lim_{y\to 0}\frac{y}{\text{sen}y}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -\sqrt{3}\,(1) \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -\sqrt{3}}$$

**23.-** Sea: $W = \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

En el numerador la diferencia de cosenos pasamos a producto y en el denominador por la identidad del arco doble (degradación), la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{-2\,\text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;<>\; \dfrac{3x}{2} \to 0 \;\wedge\; \dfrac{x}{2} \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\lim\limits_{\frac{3x}{2}\to 0}\dfrac{\text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}.\dfrac{3}{2}}{\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\dfrac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}.\dfrac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\frac{3}{2}(1)}{\frac{1}{2}(1)} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 3}$$

24.- Sea: $W = \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformaremos la expresión multiplicando el numerador y denominador por: $(1 - \cos x)^2$, convirtiéndose en:

$$W = \frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \cdot \frac{(1-\cos x)^2}{x^4}$$

Si hacemos el cambio de variable: $y = 1 - \cos x$

Reconocemos que cuando: $x \to 0 \;\; <> \;\; 1- \cos x \to 0 \wedge y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{8}}$$

25.- Sea: $W = \dfrac{\theta.\mathrm{sen}\theta}{1-\cos^2\theta}$

En el límite cuando $\theta = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

En base a la identidad del arco simple, la expresión W se convierte en:

$$\Rightarrow W = \frac{\theta.\mathrm{sen}\theta}{\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{\theta}{\mathrm{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\theta\to 0} W = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\mathrm{sen}\theta} \quad \therefore \boxed{\lim_{\theta\to 0} W = 1}$$

26.- Sea: $W = \dfrac{1+\mathrm{sen}x}{1+\cos x}$

En el límite cuando evaluamos para $x = \dfrac{3\pi}{2}$, tenemos:

$$W = \frac{1+\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}}{1+\cos 3\pi} = \frac{1+(-1)}{1+(-1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{forma indeterminada}$$

Multiplicando el numerador y denominador por: 1 - sen $x$ y en base a la identidad del arco simple y arco doble (degradación), la expresión W se convierte en:

$$\Rightarrow\ W=\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\ \Rightarrow\ W=\frac{1-\operatorname{sen}^2x}{2\cos^2x.(1-\operatorname{sen}x)}\ \Rightarrow\ W=\frac{\cos^2x}{2\cos^2x.(1-\operatorname{sen}x)}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}W=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{2(1-\operatorname{sen}x)}\Rightarrow\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}W=\frac{1}{2\left(1-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)}\quad\therefore\quad\boxed{\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}W=\frac{1}{4}}$$

**27.-** Sea: $\quad W=\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x.\operatorname{sen}x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $\quad W=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}\quad\Rightarrow$ forma indeterminada

Aplicando la identidad algebraica de la diferencia de cubos:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\quad\Rightarrow\quad 1-(\sqrt[3]{\cos x})^3=(1-\sqrt[3]{\cos x})(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^{\,2})$$

La expresión W se convierte en: $\quad W=\dfrac{1-\cos x}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2x}}\cdot\dfrac{1}{x\cdot\operatorname{sen}x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$

Asimismo al multiplicar y dividir por: 1 + cos $x$, W se convierte en:

$$W=\frac{\operatorname{sen}^2x}{(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2x}).x\operatorname{sen}x.(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to0}W=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\ .\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2x})(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to0}W=1\ .\ \frac{1}{(1+1+1)(1+1)}$$

$$\therefore\quad\boxed{\lim_{x\to0}W=\frac{1}{6}}$$

**28.-** Sea: $\quad W=\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{sen}8x}$

En el límite cuando $x = 0$ , tenemos: $\quad W=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}\quad\Rightarrow$ forma indeterminada

En base a la identidad del arco doble (degradación) la expresión W se convierte en:

$$\Rightarrow\ W=\frac{2\text{sen}^2 4x}{2\text{sen}4x.\cos 4x}\qquad\Rightarrow\qquad W=\frac{\text{sen}4x}{\cos 4x}\qquad\Rightarrow\qquad W=\tan 4x$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\tan 4x\qquad\therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 0} W=0}$$

**29.-** Si: $\quad W=\dfrac{1+\text{sen}x-\cos x}{1-\text{sen}x-\cos x}$

En el límite cuando $x=0$, tenemos: $\quad W=\dfrac{1+0-1}{1-0-1}=\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformaremos la expresión W ordenando y aplicando la identidad del arco doble:

$$W=\frac{\text{sen}x+1-\cos x}{-\text{sen}x+1-\cos x}\ \Rightarrow\ W=\frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{-2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\text{sen}^2\frac{x}{2}}\ \Rightarrow\ W=\frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{x}{2}\right)}{2\text{sen}\frac{x}{2}\left(-\cos\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{x}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to 0} W=\frac{1+0}{0-1}\qquad\therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 0} W=-1}$$

**30.-** Sea: $\quad W=\dfrac{\text{sen}2x}{\cos x+\cos 3x}$

En el límite cuando $x=\dfrac{\pi}{2}$, tenemos: $W=\dfrac{\text{sen}\pi}{\cos 3\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}}=\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow$ forma indeterminada

En el numerador aplicamos la identidad del arco doble y en el denominador la suma de cosenos la transformamos a producto. La expresión W se convierte en:

$$W=\frac{2\text{sen}x\cos x}{2\cos 2x\cos x}\qquad\Rightarrow\qquad W=\frac{\text{sen}x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}x}{\cos 2x}\qquad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W=\frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\pi}=\frac{1}{-1}$$

$$\therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 0} W=-1}$$

**31.-** Sea: $\quad W=\dfrac{(1-\text{sen}x)^3}{(1+\cos 2x)^3}$

En el límite cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$ tenemos: $W = \dfrac{\left(1-\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)^3}{(1+\cos\pi)^3} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

En base a la identidad del arco simple y el arco doble (degradación), la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{(1-\text{sen}\,x)^3}{(2\cos^2 x)^3} = \frac{(1-\text{sen}x)^3}{8(1-\text{sen}x)^3(1+\text{sen}x)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8(1+\text{sen}x)^3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \frac{1}{8(1+1)^3} \quad \therefore \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \frac{1}{64}}$$

**32.-** Sea: $W = \dfrac{\text{sen}2x + 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen}x}{\cos x - \cos^2 x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

En base a la identidad del arco doble la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{2\text{sen}x\cos x + 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen}x}{\cos x(1-\cos x)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2\text{sen}x(\cos x + \text{sen}x - 1)}{\cos x(1-\cos x)}$$

$$W = \frac{2.2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(\cos x + \text{sen}x - 1)}{\cos x.2\text{sen}^2\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{-2\cos\frac{x}{2}(1-\cos x - \text{sen}x)}{\cos x.\text{sen}\frac{x}{2}}$$

$$W = \frac{-2\cos\frac{x}{2}.\left[2\text{sen}^2\frac{x}{2} - 2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]}{\cos x.\text{sen}\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{4\cos\frac{x}{2}}{\cos x} \cdot \left[\text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} -4 \cdot \frac{4\cos\frac{x}{2}}{\cos x}.\left(\text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = -\frac{4(1)}{4}(0-1)$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = 4}$$

**33.-** Sea: $W = \dfrac{x.\text{sen}(\text{sen}2x)}{1-\cos(\text{sen}4x)}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Multiplicando el numerador y denominador por: $\operatorname{sen}^2 4x$ y en base a la identidad del arco doble y propiedades de límites trigonométricos, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 4x}{\operatorname{sen}4x.\operatorname{sen}4x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}^2(4x)}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)} \cdot \frac{x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{2\operatorname{sen}2x\cos 2x.\operatorname{sen}4x} \cdot \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\operatorname{sen}^2(4x)}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}2x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen}4x} \cdot \frac{1}{8\cos 2x}$$

Reconocemos que cuando: $x \to 0 \;\; <> \;\; 4x \to 0 \;\wedge\; 2x \to 0$

$$\Rightarrow \; \lim_{x\to 0} W = \lim_{\operatorname{sen}4x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 4x}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)} \cdot \lim_{\operatorname{sen}2x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}2x} \cdot \lim_{4x\to 0} \frac{4x}{\operatorname{sen}4x} \cdot \lim_{4x\to 0} \frac{1}{8\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \; \lim_{x\to 0} W = (2)(1)(1)\left(\frac{1}{8}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{4}}$$

**34.-** Sea: $\quad W = \dfrac{\operatorname{sen}(A+B).\cos B - \operatorname{sen}(A+C).\cos C}{\operatorname{sen}(B-C)}$

En el límite cuando $B = C$, tenemos:

$$W = \frac{\operatorname{sen}(A+C).\cos C - \operatorname{sen}(A+C).\cos C}{\operatorname{sen}(C-C)} = \frac{0}{0} \;\Rightarrow\; \text{forma indeterminada}$$

Entonces transformamos los productos a sumas en el numerador de la expresión:

$$W = \frac{2\operatorname{sen}(A+B)\cos B - 2\operatorname{sen}(A+C)\cos C}{2\operatorname{sen}(B-C)}$$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\operatorname{sen}(A+2B) + \operatorname{sen}A - [\operatorname{sen}(A+2C) + \operatorname{sen}A]}{2\operatorname{sen}(B-C)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\operatorname{sen}(A+2B) - \operatorname{sen}(A+2C)}{2\operatorname{sen}(B-C)}$$

Transformamos la diferencia a un producto: $\quad W = \dfrac{\cancel{2\operatorname{sen}(B-C)}\cos(A+B+C)}{\cancel{2\operatorname{sen}(B-C)}}$

$$\Rightarrow \; \lim_{B\to C} W = \lim_{B\to C} \cos(A+B+C) \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{B\to C} W = \cos(A+2C)}$$

**35.-** Sea: $\quad W = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 3x}$

En el límite cuando $x = 0$ tenemos: $\quad W = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0} = \dfrac{0}{0} \;\Rightarrow\;$ forma indeterminada

También W se puede expresar como:

$$W = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\text{sen}^2 3x} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1-\cos x}{\frac{(\text{sen}^2 3x)}{9x^2} + (\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x})} \cdot \frac{1}{9x^2}$$

Debemos reconocer que cuando: $x \to 0 \;<>\; 3x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{9} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}} \cdot \left(\frac{3x}{sen 3x}\right)^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{9} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}} \cdot \left( \lim_{3x\to 0} \frac{3x}{\text{sen} 3x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 1 \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{\sqrt{3}}{108}}$$

**36.-** Sea: $W = \dfrac{\text{sen}x - \cos x}{1 - \tan x}$

En el límite cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$, tenemos: $W = \dfrac{\text{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Expresamos W en términos de senos y cosenos:

$$W = \frac{\text{sen}x - \cos x}{1 - \frac{\text{sen}x}{\cos x}} = \frac{\cos x.(\text{sen}x - \cos x)}{\cos x - \text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = -\cos x \frac{(\cos x - \text{sen}x)}{\cos x - \text{sen}x} = -\cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (-\cos x) = -\cos\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

**37.-** Sea: $W = \dfrac{\tan x - \text{sen}x}{x^3}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{\tan(0) - \text{sen}(0)}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

Expresamos W en términos de seno y coseno, luego agrupamos convenientemente para aplicar las propiedades de límites trigonométricos:

$$W = \frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x} - \text{sen}x}{x^3} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\text{sen}x(1-\cos x)}{\cos x . x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\text{sen}x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = (1)\left(\frac{1}{2}\right)(1) \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{2}}$$

**38.-** Sea: $\quad W = \dfrac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $\quad W = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

Aplicando la identidad algebraica de la diferencia de cubos, y expresando en términos de senos y cosenos, W se convierte en:

$$\Rightarrow W = \frac{(1-\cos x).(1+\cos x+\cos^2 x).\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow W = \frac{\cancel{(1-\cos x)}.(1+\cos x+\cos^2 x).\cos^2 x}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x+\cos^2 x)(\cos^2 x)}{(1+\cos x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{(1+1+1)(1)^2}{(1+1)}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{3}{2}}$$

**39.-** Sea: $\quad W = \dfrac{\pi\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $\quad W = \dfrac{0}{0} \quad \Rightarrow$ forma indeterminada

También W se puede expresar como: $\quad W = \dfrac{\pi\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\pi\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

Es necesario reconocer que: $x \to 0 \;\; <> \;\; \dfrac{\pi x}{2} \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\pi^2}{2}\cdot\lim_{\frac{\pi x}{2}\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}} = \frac{\pi^2}{2}\cdot 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{\pi^2}{2}}$$

**40.-** Sea: $W = \sec x - \tan x$

Cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$, se tiene: $W = \sec\dfrac{\pi}{2} - \tan\dfrac{\pi}{2} = \infty - \infty \Rightarrow$ forma indeterminada

Pasando a senos y cosenos, multiplicamos y dividimos por $1 + \text{sen}\, x$, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{1-\text{sen}x}{\cos x} \cdot \frac{1+\text{sen}x}{1+\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\text{sen}x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+\text{sen}\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \frac{0}{1+1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = 0}$$

**41.-** Sea: $W = \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

En el límite cuando hacemos $x = \dfrac{\pi}{4}$ tenemos:

$$W = \frac{\sec^2\frac{\pi}{4} - 2\tan\frac{\pi}{4}}{1+\cos\pi} = \frac{(\sqrt{(2)})^2 - 2}{1+(-1)} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \text{forma indeterminada}$$

Transformamos la expresión en base a la identidad del arco simple y del arco doble (degradación), convirtiéndose en:

$$\Rightarrow W = \frac{1+\tan^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(\tan x - 1)^2}{1+\cos 4x}$$

Expresando en términos de senos y cosenos tendremos:

$$W = \frac{\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x} - 1\right)^2}{1+\cos 4x} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(\text{sen}x - \cos x)^2}{\cos^2 x.(1+\cos 4x)} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(\cos x - \text{sen}x)^2}{\cos^2 x.2\cos^2 2x}$$

$$\Rightarrow W = \frac{(\cos x - \text{sen}x)^2}{2\cos^2 x.(\cos x - \text{sen}x)^2(\cos x + \text{sen}x)^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x.(\text{sen}x + \cos x)^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)(2)} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{1}{2}}$$

**42.-** Sea: $W = \dfrac{3\mathrm{sen}^2 x}{x.\tan 4x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

También W se puede expresar como: $W = \dfrac{\dfrac{3\mathrm{sen}^2 x}{x^2}}{\dfrac{x.\tan 4x}{x^2}} \Rightarrow W = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{sen}x}{x}\right)^2}{\dfrac{\tan 4x}{4x}}$

Reconocemos que cuando: $x \to 0 \Leftrightarrow 4x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{3}{4}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{sen}x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{4x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{4x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{3}{4}\frac{(1)}{(1)} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{3}{4}}$$

**43.-** Sea: $W = \dfrac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x)-1}$

En el límite cuando evaluamos en $x = \pi$, tenemos:

$$W = \frac{\tan(1+\cos\pi)}{\cos(\tan\pi)-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{forma indeterminada}$$

Multiplicando el numerador y denominador por $1 + \cos x$ y $\tan^2 x$:

$$W = -\frac{\tan(1+\cos x)}{1-\cos(\tan x)}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\cdot\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x}$$

Agrupando en convenientemente para luego aplicar las identidades trigonométricas y las propiedades de límites trigonométricos, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\tan(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\cdot\frac{\tan^2 x}{1-\cos(\tan x)}\cdot\frac{(1+\cos x).\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable: $y = 1 + \cos x \quad \wedge \quad z = \tan x$

Reconocemos que cuando: $x \to \pi \Leftrightarrow 1 + \cos x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

Asimismo cuando: $x \to \pi \Leftrightarrow \tan x \to 0 \Leftrightarrow z \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = -\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}\cdot \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}\cdot \lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = -(1).(2).\frac{\cos^2\pi}{1-\cos\pi} \Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = \frac{-2.(-1)^2}{1-(-1)} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to\pi} W = -1}$$

**44.-** Sea: $W = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{\cos x + \cos 2x}$

En el límite cuando $x = \dfrac{\pi}{3}$, tenemos:

$$W = \frac{\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{forma indeterminada}$$

En base a la identidad del arco compuesto y de transformación trigonométrica a producto, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(2x+x)}{\cos 2x.\cos x}}{2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow W = \frac{\operatorname{sen}3x}{2\cos 2x.\cos x.\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$$

Y empleando la identidad del arco triple tenemos:

$$\Rightarrow W = \frac{2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}.\cos\frac{3x}{2}}{2\cos 2x.\cos x.\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}.\cos x.\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}} = -\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -\frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

**45.-** Sea: $W = \dfrac{(\tan x + \cot x - \csc x)^2}{\sec x - 1}$

Reconocemos que en el límite, cuando $x = 0$, se tiene: $\tan x = 0$; $\sec x = 1$

Y: $\cot x - \csc x = \dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ se presenta la forma indeterminada

En base a la identidad del arco triple, la expresión se transforma en:

$$W=\frac{(\sec x.\csc x-\csc x)^2}{\sec x-1}\quad\Rightarrow\quad W=\frac{\csc^2 x.(\sec x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sec x-1}}$$

$$\Rightarrow\ W=\csc^2 x\ .\ (\sec x-1)\quad\Rightarrow\quad W=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ .\ \frac{1-\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\ W=\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x).\cos x}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x).\cos x}=\frac{1}{(1+1)(1)}\qquad\therefore\qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W=\frac{1}{2}}$$

**46.-** Si: $\quad W=\dfrac{\tan(ax)}{(1-\cos(ax)+x)(\sec(ax))}$

En el límite cuando $x=0$, tenemos: $\quad W=\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformamos la expresión en términos de seno y coseno:

$$W=\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\cos(ax).\sec(ax)}\cdot\frac{1}{(1-\cos(ax)+x)}\quad\Rightarrow\quad W=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\dfrac{1-\cos(ax)}{ax}+\dfrac{x}{ax}}$$

Reconocemos que cuando: $x\to 0\ \ <>\ \ (ax)\to 0$

Luego aplicando las propiedades de límites tenemos:

$$\lim_{x\to 0} W=\frac{\displaystyle\lim_{ax\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\displaystyle\lim_{ax\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{ax}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{ax}}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} W=\frac{1}{0+\dfrac{1}{a}}\qquad\therefore\qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W=a}$$

**47.-** Sea: $\quad W=\dfrac{x.\tan x.\sec x}{(1+x^2).\sec^3 x-1}$

En el límite cuando $x=0$ tenemos: $\quad W=\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow$ forma indeterminada

Transformamos W en términos de seno y coseno:

$$W=\frac{x.\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1+x^2}{\cos^3 x}-1}\quad\Rightarrow\quad W=\frac{x.\operatorname{sen} x.\cos x}{1+x^2-\cos^3 x}$$

$$W = \frac{x\,\text{sen}\,x\cos x}{1-\cos^3 x + x^2} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\dfrac{x\,\text{sen}\,x.\cos x}{x^2}}{\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)+x^2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} W = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right).\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right).(1+\cos x+\cos^2 x)+2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)(1+1+1)+1} \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{2}{5}}$$

**48.-** Sea: $\quad W = \dfrac{x}{2arc\cos x - \pi}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos:

$$W = \frac{0}{2arc\cos(0)-\pi} = \frac{0}{2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\pi} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \text{ forma indeterminada.}$$

En base a las propiedades de las funciones trigonométricas inversas y propiedades de los límites de las funciones mencionadas, la expresión W se convierte en:

$$W = \frac{x}{2\left[\dfrac{\pi}{2} - arc\,\text{sen}\,x\right]-\pi} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{x}{-2arc\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{arc\text{sen}x} = -\frac{1}{2}(1) \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = -\frac{1}{2}}$$

**49.-** Sea: $\quad W = \dfrac{2\tan x - arc\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}$

En el límite cuando $x = 0$, tenemos: $\quad W = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada.

También W se puede expresar así: $W = \dfrac{2\tan x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{arc\text{sen}x}{\text{sen}x} \quad \Rightarrow \quad W = \dfrac{\dfrac{2\cancel{\text{sen}x}}{\cos x}}{\cancel{\text{sen}x}} - \dfrac{\dfrac{arc\,\text{sen}\,x}{x}}{\dfrac{\text{sen}\,x}{x}}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\left(2\sec x - \frac{\dfrac{arc\text{sen}x}{x}}{\dfrac{\text{sen}x}{x}}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = 2\,.\lim_{x\to 0}\sec x - \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\text{sen}x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}x}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = 2 - \frac{1}{1} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 1}$$

50.- Sea: $\quad W = (1 - x).\left[\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right]$

Al evaluar para $x = 1$, tenemos: $W = 0 \,.\, [\infty] \Rightarrow$ forma indeterminada.

Pero W también se puede expresar como:

$$W = (1 - x).\ \text{ctg}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1 - x}{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} = \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

Haciendo: $\quad y = \dfrac{\pi}{2}(1 - x)$

Reconocemos que cuando: $\quad x \to 1 \ <> \ \dfrac{\pi}{2}(1 - x) \to 0 \ <> \ y \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} W = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \,.\, \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \Rightarrow \lim_{x\to 1} W = \frac{2}{\pi} \,.\, \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = \frac{2}{\pi} \,.\, (1)$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 1} W = \frac{2}{\pi}}$$

***DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS***

51.- Tenemos: $\quad y = \text{sen}\,(3x^2 + 2x + 1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos\,(3x^2 + 2x + 1) \,.\, \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = (\cos\,(3x^2 + 2x + 1)) \,.\, (6x + 2)}$$

52.- Tenemos: $\quad y = \text{sen}\,(e^x - \text{sen}\,x) + \cos\dfrac{\pi}{9}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos\,(e^x - \text{sen}\,x).\frac{d}{dx}(e^x - \text{sen}\,x) + \frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos(e^x - \text{sen}\,x) \,.\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(\text{sen}x)\right] + 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \cos(e^x - \operatorname{sen} x) \cdot (e^x - \cos x)}$$

**53.-** Tenemos: $\quad y = 3\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x + 5) + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x + 5)\right) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen} x + 5) \cdot \cos(\operatorname{sen} x + 5)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + 5) + 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = 12\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen} x + 5) \cdot \cos(\operatorname{sen} x + 5)(\cos x)}$$

**54.-** Tenemos: $\quad y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \frac{dy}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x}$$

**55.-** Tenemos: $\quad y = \operatorname{sen}^2(3x + 1) - 3$

$$\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{sen}(3x + 1) \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(3x + 1)) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{sen}(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1) \cdot \frac{d}{dx}(3x + 1) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2\operatorname{sen}(3x+1) \cdot \cos(3x+1)} \cdot 3$$

Por arco doble: $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3\operatorname{sen} 2(3x + 1) \qquad \therefore \quad \boxed{\dfrac{dy}{dx} = 3\operatorname{sen}(6x + 2)}$

**56.-** Tenemos: $\quad y = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2 x\right) - \frac{\pi}{8}$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2 x\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2 x\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}^2 x\right).\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x)\right]-0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}^2 x\right).\left[0+2\operatorname{sen}x\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}^2 x\right).\ (\underbrace{\operatorname{sen}x\ .\ \cos}) \qquad \therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}^2 x\right).\ \operatorname{sen} 2x}$$

57.- Tenemos: $y = 4\cos^3(2x+5) - 7$

$$\frac{dy}{dx} = 4\ .\ 3\cos^2(2x+5)\ .\ \frac{d}{dx}(\cos(2x+5) - \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 12\cos^2(2x+5)\ .\ (-\operatorname{sen}(2x+5))\ .\ \frac{d}{dx}(2x+5) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = (12\cos^2(2x+5))\ .\ (-\operatorname{sen}(2x+5))\ .\ 2$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -24\cos^2(2x+5)\ .\ \operatorname{sen}(2x+5)}$$

58.- Sea: $y = \tan(\operatorname{sen} x) + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\operatorname{sen} x)\ .\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \frac{d}{dx}(0)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \sec^2(\operatorname{sen} x)\ .\ \cos x}$$

59.- Tenemos: $y = \tan(\ln(x^2)) + \csc^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\ln(x^2))\ .\ \frac{d}{dx}(\ln(x^2)) + \frac{d}{dx}(\csc^2\frac{\pi}{10})$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\ln(x^2))\ .\ \frac{1}{x^2}\ .\ \frac{d}{dx}(x^2) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\ln(x^2))\ .\ \frac{1}{x^2}\ .\ 2x$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\ .\ \sec^2(\ln(x^2))}$$

60.- Aplicando: $\dfrac{dy}{dx} = 3\dfrac{d}{dx}(\tan(x^2 + \text{sen } x)) - \dfrac{d}{dx}(1)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\sec^2(x^2 + \text{sen } x) \, . \, \frac{d}{dx}(x^2 + \text{sen } x)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = (3\sec^2 x(x^2 + \text{sen } x))(2x + \cos x)}$$

61.- Tenemos: $y = (3x^4 - 7) \, . \, \cot(x^2 + 1) - 5$

Usando la derivada de un producto tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = (\cot(x^2 + 1)) \, . \, \frac{d}{dx}(3x^4 - 7) + (3x^4 - 7) \, . \, \frac{d}{dx}(\cot(x^2 + 1)) - \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cot(x^2 + 1)). \, (12x^3) + (3x^4 - 7) \, . \, (\csc^2(x^2 + 1)) \, . \, \frac{d}{dx}(x^2 + 1) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cot(x^2 + 1)) \, . \, (12x^3) + (3x^4 - 7) \, . \, (-\csc^2(x^2 + 1)) \, . \, (2x)$$

Ordenando:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 12x^3 \, . \, \cot(x^2 + 1) - 2x\,(3x^4 - 7) \, . \, \csc^2(x^2 + 1)}$$

62.- Tenemos: $y = \sec(2x + \tan x) - \dfrac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec(2x + \tan x) \, . \, \tan(2x + \tan x) \, . \, \frac{d}{dx}(2x + \tan x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec(2x + \tan x) \, . \, \tan(2x + \tan x) \, . \, \left(\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(\tan x)\right) - 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \sec(2x + \tan x) \, . \, \tan(2x + \tan x) \, . \, (2 + \sec^2 x)}$$

63.- Tenemos: $y = \csc(\text{sen } x - x^2) + 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\csc(\text{sen } x - x^2)) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc(\text{sen } x - x^2). \, \cot(\text{sen } x - x^2) \, . \, \frac{d}{dx}(\text{sen } x - x^2) + 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\csc(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, \cot(\operatorname{sen} x - x^2) \,.\, (\cos x - 2x)}$$

**64.-** Tenemos que: $f(x) = a\cos x + b \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b$

Pero: $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \quad \wedge \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a \,.\, \frac{1}{2} + b = 2 \ldots (1)$

Ahora: $\quad f'_{(x)} = \frac{d}{dx}(a\cos x) + \frac{d}{dx}(b) \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = a \operatorname{sen} x$

Pero: $\quad f'_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = -a\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad a = -3 \ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1):

$$-3\left(\frac{1}{2}\right) + b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{ab = -\frac{21}{2}}$$

**65.-** Tenemos: $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$

Derivando respecto a "$x$" e igualando a cero:

$$f'_{(x)} = 2\operatorname{sen} x \,.\, \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

Pero: $\quad 2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x = \operatorname{sen} 2x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad 2x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\} \in \langle 0; \pi \rangle}$$

**66.-** Tenemos: $y = \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - arc\text{sen}x}{\sqrt{1-x^2}}$

Pero: $\dfrac{\pi}{2}$ - *arc* sen $x$ = *arc* cos $x$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$

Usando la derivada de un cociente:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{d}{dx}(arc\cos x) - (arc\cos x)\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\dfrac{-1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\right) - (arc\cos x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-(arc\cos x)\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x)}{1-x^2}$$

Simplificando:

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x\cdot arc\cos x}{(1-x^2)^{3/2}}}$$

**67.-** Tenemos: $y = arc \text{ sen } (ln\ x) + arc \text{ sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(ln x)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(ln x) + \frac{d}{dx}\left(arc\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(ln x)^2}}\cdot\frac{1}{x} + 0 \qquad \therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.\sqrt{1-ln^2x}}}$$

**68.-** Tenemos: $y = \cos(arc \text{ sen } \sqrt{x}) - 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{sen}(arc\text{ sen }\sqrt{x})\cdot\frac{d}{dx}(arc\text{ sen}\sqrt{x}) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(arc\operatorname{sen}\sqrt{x}).\ \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{sen}\sqrt{x}).\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cancel{\operatorname{sen}}(\cancel{arc}\operatorname{sen}\sqrt{x}).\ \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 1$$

Evaluando y usando propiedades de funciones trigonométricas inversas:

$$\frac{dy}{dx} = -\cancel{\sqrt{x}}.\ \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-x}}$$

**69.-** Tenemos: $\quad y = arc\cos(\sqrt{1-x^2}) + \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-(\sqrt{1-x^2})^2}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-(\sqrt{1-x^2})}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d}{dx}(1-x^2) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x.\sqrt{1-x^2}}}$$

**70.-** Tenemos: $\quad y = arc\cos\sqrt{x} - arc\tan(3)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\cos\sqrt{x}) - \frac{d}{dx}(arc\tan 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}}$$

**71.-** Tenemos: $y = arc\cos(e^x) + arc\cos\sqrt{1-e^{2x}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(e^x) + \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^x})^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{1-e^{2x}})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot e^x+\frac{-1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot\frac{d}{dx}(1-e^{2x})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{e^{2x}}.\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot(-\cancel{2}e^{2x})=\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{1}{\cancel{e^x}\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot(\cancel{e^{2x}})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\qquad\therefore\qquad\boxed{\frac{dy}{dx}=0}$$

**72.-** Tenemos: $y=2^{\text{arc sen }3x}+arc\ \text{sec}\left(\frac{8}{5}\right)$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2^{\text{arc sen }3x})+\frac{d}{dx}\left(arc\,\text{sec}\left(\frac{8}{5}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2^{\text{arc sen }3x})+0\qquad\ldots(*)$$

Sea: $u=2^{\text{arc sen }3x}\ \Rightarrow\ ln\ u=ln\ (2^{\text{arc sen }3x})=(arc\ \text{sen}\ 3x)\ ln\ 2$

Derivando ambos miembros respecto a "$x$"

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=ln\,2\,.\,\frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=ln\,2\,.\,\frac{u}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Pero: $u=2^{\text{arc sen }3x}\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(2^{\text{arc sen }3x})=\frac{(ln\,2).2^{arcsen3x}}{\sqrt{1-9x^2}}\qquad\ldots(**)$

Reemplazando (**) en (*): $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{(ln\,2).2^{\text{arcsen}3x}}{\sqrt{1-9x^2}}}$

**73.-** Tenemos: $y=arc\ \tan(2x-5)-arc\ \csc(4)$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(arc\ \tan(2x-5))-\frac{d}{dx}(arc\ \csc 4)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(2x-5)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x-5)-0\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x^2-20x+26}\,.\,(2)$$

Simplificando: $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^2-10x+13}}$

74.- Tenemos: $y = arc\tan(\sqrt{4x^2-1})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\sqrt{4x^2-1})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{4x^2-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(4x^2-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(4x^2-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{4}x^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4x^2-1}} \cdot (\cancel{8}\cancel{x}) \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.\sqrt{4x^2-1}}}$$

75.- Tenemos: $y = arc\tan(3\,\text{sen}\,x) - \cos\frac{\pi}{7}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3\text{sen}x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(3\,\text{sen}\,x) - \frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+9\text{sen}^2x} \,.\, 3\cos x - 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos x}{1+9\text{sen}^2x}}$$

76.- Tenemos: $y = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - arc\cos x\right) + \tan\frac{3\pi}{5}$

Por propiedad de funciones trigonométricas inversas:

$$y = -\tan(arc\,\text{sen}\,x) + \tan\frac{3\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sec^2(arc\,\text{sen}\,x) \,.\, \frac{d}{dx}(arc\,\text{sen}\,x) + \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sec^2(arc\,\text{sen}\,x) \,.\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 0$$

Por identidad trigonométrica: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\cos^2(arc\text{sen}x)} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-\text{sen}^2(arc\text{sen}x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1-[\cancel{\text{sen}}(arc\cancel{\text{sen}}x)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1-x^2).\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}}$$

**77.-** Tenemos: $y = arc\cot(\sqrt{2x^2-1}) - \dfrac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+(\sqrt{2x^2-1})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{2x^2-1}) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cancel{1}+(2x^2-\cancel{1})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2-1) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cancel{2}x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-1}} \cdot (\cancel{4}x) \qquad \therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.\sqrt{2x^2-1}}}$$

**78.-** Tenemos: $f(x) = x \,.\, arc\,\text{sen}\, x$

Derivando $f(x)$ respecto a "$x$" usando la derivada de un producto obtenemos:

$$\Rightarrow \quad f'_{(x)} = x \,.\, \frac{d}{dx}(arc\,\text{sen}\, x) + (arc\,\text{sen}\, x) \,.\, \frac{d}{dx}(x)$$

$$f'_{(x)} = x \,.\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (arc\,\text{sen}\, x) \,.\, 1$$

$$f'_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} + arc\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{f'_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}}$$

***DERIVACIÓN IMPLICITA***

**79.-** Procedemos a derivar la expresión dada, y obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, y) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}: \text{ derivada implícita}$$

$$(\cos y)\,\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

Factorizando $\dfrac{dy}{dx}$: $\quad (1 + \cos y) \,.\, \dfrac{dy}{dx} = 0$

Como: $\quad y \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad 1 + \cos y \neq 0$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

80.- Derivando implícitamente tenemos: $2\,\text{sen}\,y \,.\, \frac{d}{dx}(\text{sen}\,y) - 2x = 0$

$$2\,\text{sen}\,y \,.\, \cos y \,.\, (y') - 2x = 0 \quad , \; y'\text{: derivada implícita}$$

Recordando que: $2\,\text{sen}\,y \,.\, \cos y = \text{sen}\,2y$

$$\therefore \quad \boxed{y' = \frac{2x}{\text{sen}2y}}$$

81.- Tenemos: $y \,.\, \text{sen}\,x - x\cos y + 1 = 0$

Derivando implícitamente y usando la derivada de un producto, tendremos:

$$\Rightarrow \; (\text{sen}\,x)\,.\,\frac{dy}{dx} + y\,.\,\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x) - x\,.\,\frac{d}{dx}(\cos y) - (\cos y)\,.\,\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$(\text{sen}\,x)\,.\,\frac{dy}{dx} + y\,.\,\cos x - x(-\,\text{sen}\,y)\,.\,\frac{dy}{dx} - (\cos y)\,.\,(1) + 0 = 0$$

Factorizando: $\frac{dy}{dx}(\text{sen}\,x + x\,\text{sen}\,y) + y\cos x - \cos y = 0$

Despejando tenemos: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - y\cos x}{\text{sen}x + x\text{sen}y}}$

82.- Derivando implícitamente:

$$\Rightarrow \; y\,.\,\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x) + (\text{sen}\,x).\,\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\cos y) = 0$$

$$y\,.\,\cos x + (\text{sen}\,x)\,.\,\frac{dy}{dx} + (-\,\text{sen}\,y)\,.\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Factorizando: $\frac{dy}{dx}.(\text{sen}\,x - \text{sen}\,y) + y\,.\,\cos x = 0$

Despejando tenemos: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y.\cos x}{\text{sen}x - \text{sen}y}}$

83.- Tenemos: $y = \cos(xy) + y^2$

Derivando implícitamente y usando la derivada de un producto:

$$\Rightarrow \; \frac{dy}{dx} = -\,\text{sen}\,(xy).\,\frac{d}{dx}(xy) + 2y\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(xy).\left(x.\frac{dy}{dx} + y.\frac{d}{dx}(x)\right) + 2y.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x.\operatorname{sen}(xy).\frac{dy}{dx} - y.\operatorname{sen}(xy) + 2y.\frac{dy}{dx}$$

Factorizando $\frac{dy}{dx}$: $\quad \frac{dy}{dx}.(1 + x\operatorname{sen}(xy) - 2y) = -y\operatorname{sen}(xy)$

Despejando: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y.\operatorname{sen}(xy)}{1 + x\operatorname{sen}(xy) - 2y}}$

**84.-** Derivando implícitamente: $\frac{d}{dx}(\cos(x^2)) - \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad -\operatorname{sen}(x^2).\frac{d}{dx}(x^2) - (\cos y).\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\operatorname{sen}(x^2).(2x) - (\cos y).\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

Efectuando y factorizando: $\quad -2x.\operatorname{sen}(x^2) + (1 - \cos y).\frac{dy}{dx} = 0$

Despejando: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{1 + \cos y}}$

**85.-** Derivando implícitamente:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\tan(x+y)) + \frac{d}{dx}(\cos y) - \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\sec^2(x+y).\frac{d}{dx}(x+y) - (\operatorname{sen} y).\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$\sec^2(x+y).\left[1 + \frac{dy}{dx}\right] - (\operatorname{sen} y).\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sec^2(x+y) + \sec^2(x+y).\frac{dy}{dx} - (\operatorname{sen} y).\frac{dy}{dx} = 0$$

Factorizando: $\sec^2(x+y) + [\sec^2(x+y) - \operatorname{sen} y].\frac{dy}{dx} = 0$

Despejando: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y) - \operatorname{sen} y}}$

**86.-** Derivando implícitamente:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec(x+y)) - \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\sec(x+y) \cdot \tan(x+y) \cdot \frac{d}{dx}(x+y) - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sec(x+y) \cdot \tan(x+y) \cdot \left[1 + \frac{dy}{dx}\right] - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Factorizando: $(\sec(x+y) \cdot \tan(x+y) + 2y)\dfrac{dy}{dx} = -\sec(x+y) \cdot \tan(x+y)$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-\sec(x+y).\tan(x+y)}{\sec(x+y).\tan(x+y) - 2y}}$$

**87.-** Derivando implícitamente:

$$\frac{d}{dx}(\tan xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec^2(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sec^2(xy) \cdot (x \cdot \frac{dy}{dx} + y) - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \sec^2(xy) \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \sec^2(xy) - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Factorizando: $(x \cdot \sec^2(xy) - 3y^2) \cdot \dfrac{dy}{dx} + y \cdot \sec^2(xy) = 0$

Despejando: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y.\sec^2(xy)}{x.\sec^2(xy) - 3y^2}}$

**88.-** Derivando implícitamente:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) - \frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando obtenemos: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y}{\sqrt{1-x^2}}}$

89.- Derivando implícitamente:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(arc\cos y) - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{dy}{dx} - 1 + 0 = 0$$

Despejando obtenemos: $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}}$

90.- Derivando implícitamente:

$$\frac{d}{dx}(arc\,\text{sen}\,(xy)) + \frac{d}{dx}(yx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2y^2}} \cdot \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(yx) = 0$$

Factorizando: $\frac{d}{dx}(yx) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 1\right) = 0$ , $\quad \ldots \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 1\right) \neq 0$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(yx) = 0}$$

***REGLA DE L'HOSPITAL***

91.- Sea: $W = \frac{x - \text{sen}(\pi x)}{x + \text{sen}(\pi x)}$

Al evaluar para $x = 0$, tenemos: $\lim\limits_{x \to 0} W = \frac{0}{0} \Rightarrow$ forma indeterminada

Por lo tanto el límite se determinará aplicando la regla de *L'*Hospital, que consiste en derivar el numerador y denominador hasta levantar la indeterminación, es decir, hasta que al evaluar en el límite la expresión posea una valor determinado. Veamos:

La primera derivada del numerador: $\frac{d}{dx}(x - \text{sen}\,(\pi x)) = 1 - \pi \cdot \cos\,(\pi x)$

La primera derivada del denominador: $\frac{d}{dx}(x + \text{sen}\,(\pi x)) = 1 + \pi \cdot \cos\,(\pi x)$

Evaluando el límite: $\lim\limits_{x \to 0} W = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \pi\cos(\pi x)}{1 + \pi\cos(\pi x)} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} W = \frac{1 - \pi\cos(0)}{1 + \pi\cos(0)}$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 0} W = \frac{1-\pi}{1+\pi}}$$

**92.-** Al evaluar para $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta $\frac{0}{0}$ forma indeterminada aplicamos *L'*Hospital.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d[\operatorname{sen}(2\cos\theta)]}{dx}}{\frac{d[2\cos\theta]}{dx}} \Rightarrow \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\cos\theta).\cancel{[-2\operatorname{sen}\theta]}}{\cancel{[-2\operatorname{sen}\theta]}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta} = \cos\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore \boxed{\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta} = 1}$$

**93.-** Sea: $\quad W = \dfrac{5x^2 - 2x}{\operatorname{sen}3x}$

Al evaluar para $x = 0$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} W = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital}$$

La primera derivada del numerador: $\quad \dfrac{d}{dx}(5x^2 - 2x) = 10x - 2$

La primera derivada del denominador: $\quad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) = 3 \,.\, \cos 3x$

El límite será: $\quad \lim_{x \to 0} W = \lim_{x \to 0} \dfrac{10x - 2}{3\cos 3x} = \dfrac{-2}{3\cos(0)} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x \to 0} W = -\frac{2}{3}}$

**94.-** Sea: $\quad W = \dfrac{1 - \operatorname{sen}x - \cos x}{1 + \operatorname{sen}x - \cos x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta: $\frac{0}{0}$ ; forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} W = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \operatorname{sen}x - \cos x)}{\frac{d}{dx}(1 + \operatorname{sen}x - \cos x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x \to 0} W = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x + \operatorname{sen}x}{\cos x + \operatorname{sen}x} = \frac{-1}{1}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 0} W = -1}$$

**95.-** Sea: $\quad W = \dfrac{\operatorname{sen}(1 - x^2)}{x^3 + 1}$

Al evaluar para $x = -1$, tenemos:

$$W = \frac{\text{sen}(0)}{-1+1} = \frac{0}{0}$$ ; forma indeterminada entonces aplicamos las reglas de L'Hospital.

Determinamos la primera derivada del numerador:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}(1-x^2)) = \cos(1-x^2).[2x]$$

La primera derivada del denominador: $\frac{d}{dx}(x^3+1) = 3x^2$

El límite será: $$\lim_{x\to 0} W = \frac{-2x.\cos(1-x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to -1}\frac{-2\cos(1-x^2)}{3x^2} = \frac{-2\cos(0)}{3(-1)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{2}{3}}$$

**96.-** Sea: $W = \dfrac{3x-2\text{sen}4x}{6x-7\text{sen}5x}$

Al evaluar para $x = 0$ , resulta $\frac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L' Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(3x-2\text{sen}4x)}{\frac{d}{dx}(6x-7\text{sen}5x)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W \doteq \lim_{x\to 0}\frac{3-8\cos 4x}{6-35\cos 5x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{3-8}{6-35} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{5}{29}}$$

**97.-** Sea: $W = \dfrac{\theta^2-16}{(\theta+4).\text{sen}(\pi\theta)}$

Al evaluar para $\theta = 4$ tenemos:

$$W = \frac{0}{0}$$ ; forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

La primera derivada del numerador: $\frac{d}{d\theta}(\theta^2-16) = 2\theta$

La primera derivada del denominador (para un producto).

$$\frac{d}{d\theta}[(\theta+4).\text{sen}(\pi\theta)] = \left[\frac{d}{d\theta}(\theta+4)\right].\text{sen}(\pi\theta) + (\theta+4).\frac{d}{d\theta}\text{sen}(\pi\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta}[(\theta+4)\,.\,\text{sen}\,(\pi\theta)] = \text{sen}(\pi\theta) + (\theta+4)\,.\,\pi\cos(\pi\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\theta\to 4} W = \lim_{\theta\to 4} \frac{2\theta}{\text{sen}(\pi\theta)+\pi(\theta+4).\cos(\pi\theta)} = \frac{8}{\text{sen}4\pi + 8\pi.\cos 4\pi} = \frac{8}{8\pi}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{\theta\to 4} W = \frac{1}{\pi}}$$

**98.-** Sea: $W = \dfrac{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}{\text{sen}\,x}$

Al evaluar para $x = \pi$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos *L*'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} W = \lim_{x\to\pi} \frac{\dfrac{d}{dx}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)}{\dfrac{d}{dx}(\text{sen}x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pi} W = \frac{-\dfrac{1}{\pi^2}.2x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pi} W = \frac{-\dfrac{1}{\pi^2}.2\pi}{\cos\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\pi} W = \frac{-\dfrac{2}{\pi}}{-1} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\pi} = \frac{2}{\pi}}$$

**99.-** Sea: $W = \dfrac{\text{sen}x - \text{sen}2x}{\text{sen}3x}$

Al evaluar para $x = 0$, tenemos:

$$W = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital}$$

La primera derivada del numerador: $\dfrac{d}{dx}$ (sen $x$ - sen $2x$) = cos $x$ - 2 cos $2x$

La primera derivada del denominador: $\dfrac{d}{dx}$ (sen $3x$) = 3 cos $3x$

El límite dará: $\displaystyle \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{1-2}{3}$ $\qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} = -\dfrac{1}{3}}$

**100.-** Sea: $W = \dfrac{x^2}{\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)}$

Al evaluar para $x = 0$, tenemos:

$$W = \frac{0}{\text{sen}(2-2)} = \frac{0}{0}$$ ; forma indeterminada entonces aplicamos las reglas de *L'*Hospital.

Hallemos la primera derivada del numerador: $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

La primera derivada del denominador: $\frac{d}{dx}[\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)] = \frac{\cos(\sqrt{x^2+4}-2)}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)] = \frac{x.\cos(\sqrt{x^2+4}-2)}{\sqrt{x^2+4}}$$

El límite será: $\lim\limits_{x\to 0} W = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{x.\cos(\sqrt{x^2+4}-2)}{\sqrt{x^2+4}}} = 2.\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}}{\cos(\sqrt{x^2+4}-2)}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{x.\cos(\sqrt{x^2+4}-2)}{\sqrt{x^2+4}}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = 2 \cdot \frac{2}{\cos(0)}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = 4}$$

101.- Sea: $W = \frac{\sqrt{1+\text{sen}x} - \sqrt{1-\text{sen}x}}{x}$

Al evaluar para $x = 0$ tenemos:

$$W = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ ; forma indeterminada entonces aplicamos las reglas de L'Hospital.

Determinamos la primera derivada del numerador:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{1+\text{sen}x} - \sqrt{1-\text{sen}x}) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\text{sen}x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\text{sen}x}}$$

La primera derivada del denominador: $\frac{d}{dx}(x) = 1$

El límite será: $\lim\limits_{x\to 0} W = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\text{sen}x}} + \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}x}}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right) \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = 1}$$

**102.-** Sea: $W = \dfrac{\pi - 3x}{1-2\cos x}$

Al evaluar para $x = \dfrac{\pi}{3}$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{d}{dx}(\pi-3x)}{\frac{d}{dx}(1-2\cos x)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-3}{-2.(-\operatorname{sen} x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \frac{-3}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \frac{-3}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = -\sqrt{3}}$$

**103.-** Sea: $W = \dfrac{x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

Al evaluar para $x = 1$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L*'Hospital

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}{\frac{d}{dx}(1-\sqrt{x})} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{1}{-2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \pi}$$

**104.-** Sea: $W = \dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{sen} 8x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L*'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\cos 8x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 8x)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{8\operatorname{sen} 8x}{\cos 8x} = \frac{8(0)}{1}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = 0}$$

105.- Sea: $W = \dfrac{x}{\pi.\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}(x)}{\dfrac{d}{dx}\left(\pi.\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\pi.\sec^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).\dfrac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{\pi.\dfrac{\pi}{2}} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{2}{\pi^2}}$$

106.- Sea: $W = \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

Al evaluar para $x = \dfrac{\pi}{4}$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L' Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} W = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{d}{dx}(1-\tan x)}{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - \cos x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} W = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} W = \frac{-\sec^2 \dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} W = \frac{-(\sqrt{2})^2}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-2}{\dfrac{2}{\sqrt{2}}} \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} W = -\sqrt{2}}$$

107.- Sea: $W = \dfrac{\cos 2x + \cos x}{\tan 2x + \tan x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\dfrac{d}{dx}(\cos 2x + \cos x)}{\dfrac{d}{dx}(\tan 2x + \tan x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} W = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{-2\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}{2.\sec^2 2x + \sec^2 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} W = \frac{-2\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}}{2\sec^2 2\dfrac{\pi}{3} + \sec\dfrac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} W = \frac{-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2(-2)^2 + (2)^2} = \frac{-3\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{12}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} W = \frac{-\sqrt{3}}{8}}$$

108.- Sea: $W = \dfrac{\tan(ax)}{[1+x-\cos(ax)][\sec(ax)]}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan(ax))}{\frac{d}{dx}[1+x-\cos(ax)][\sec(ax)]}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{a.\sec^2(ax))}{(1+a.sen(ax))(\sec(ax))+[1+x-\cos(ax)].a.\sec(ax).\tan(ax)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{a}{(1+0)(1)+0} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = a}$$

109.- Sea: $W = \dfrac{arc\,sen 5x}{\text{arc}\tan x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(arcsen 5x)}{\frac{d}{dx}(arc\tan x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}.5}{\frac{1}{1+x^2}} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 5}$$

110.- Sea: $W = \dfrac{2\tan x - arc\,sen x}{sen x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2\tan x - arcsen x)}{\frac{d}{dx}(sen x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{2-1}{1} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 1}$$

**111.-** Sea: $W = \dfrac{\pi - 2arc\cos x}{x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\pi - 2arc\cos x)}{\frac{d}{dx}(x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{0-2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 2}$$

**112.-** Sea: $W = \dfrac{\text{sen}^2 x - \text{sen}(x^2)}{x^2}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[\text{sen}^2 x - \text{sen}(x^2)]}{\frac{d}{dx}(x^2)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen}x.\cos x - 2x.\cos(x^2)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[2\text{sen}x.\cos x - 2x.\cos(x^2)]}{\frac{d}{dx}[2x]} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2[\cos(x^2) - 2x^2\text{sen}(x^2)]}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{2-2}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 0}$$

**113.-** Sea: $W = \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

Al resolver para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\sqrt{\cos x})}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}.(-\text{sen}x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{4x\sqrt{\cos x}} \ \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\operatorname{sen}x)}{4.\frac{d}{dx}(x.\sqrt{\cos x})} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4\left(\sqrt{\cos x} - \frac{x}{2\sqrt{\cos x}}.(\operatorname{sen}x)\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x.\sqrt{\cos x}}{4(2\cos x + x\operatorname{sen}x)} = \frac{2}{8} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{4}}$$

**114.-** Sea: $W = \dfrac{x^2-2x+1}{1+\cos(\pi x)}$

Al evaluar para $x = 1$, resulta $\frac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L*'Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)}{\frac{d}{dx}(1+\cos(\pi x))} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{-\pi.\operatorname{sen}(\pi x)} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L*'Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(2x-2)}{\frac{d}{dx}[-\pi.\operatorname{sen}(\pi x)]} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 1} \frac{2}{-\pi^2.\cos(\pi x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{2}{-\pi^2.\cos\pi} \qquad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 1} W = \frac{2}{\pi^2}}$$

**115.-** Sea: $W = \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos *L*'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[\cos(mx)-\cos(nx)]}{\frac{d}{dx}(x^2)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-m\operatorname{sen}(mx)+n.\operatorname{sen}(nx)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L*'Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[-m\operatorname{sen}(mx)-n\operatorname{sen}(nx)]}{\frac{d}{dx}(2x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-m^2\cos(mx)+n^2.\operatorname{sen}(nx)}{2}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{n^2 - m^2}{2}}$$

**116.-** Sea: $W = \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 3x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\cos 4x)}{\frac{d}{dx}(1-\cos 3x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{4\text{sen}4x}{3\text{sen}3x} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(4\text{sen}4x)}{\frac{d}{dx}(3\text{sen}3x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{16\cos 4x}{9\cos 3x} \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} = \frac{16}{9}}$$

**117.-** Sea: $W = \dfrac{\cos x - \cos^2 x}{\text{sen}2x + 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen}\,x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - \cos^2 x)}{\frac{d}{dx}(\text{sen}2x + 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen}\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}x + 2\cos x.\text{sen}x}{2\cos 2x + 4\text{sen}x.\cos x - 2\cos x} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 2[-\text{sen}x.\text{sen}x + \cos x.\cos x]}{-4\text{sen}2x + 4[\cos x.\cos x - \text{sen}x.\text{sen}x]}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \frac{-1+2[1]}{4[1]} \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{4}}$$

**118.-** Sea: $\qquad W = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2+\cos x}}{\text{sen}^2 3x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x})}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 3x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(-\operatorname{sen}x)}{2\sqrt{2+\cos x}}}{(2\operatorname{sen}3x)(3\cos 3x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{6\operatorname{sen}6x.\sqrt{2+\cos x}} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6\left[6.\cos 6x.\sqrt{2+\cos x}+\operatorname{sen}6x.\frac{(-\operatorname{sen}x)}{2\sqrt{2+\cos x}}\right]} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{1}{36\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{\sqrt{3}}{108}}$$

**119.-** Sea: $W = \dfrac{x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)}{1-\cos(\operatorname{sen}4x)}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos L'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x))}{\frac{d}{dx}(1-\cos(\operatorname{sen}4x))} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)+x.\cos(\operatorname{sen}2x).2\cos 2x}{+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}4x).4\cos 4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{forma indeterminada}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}2x)+2\cos 2x+2[\cos 2x.\cos(\operatorname{sen}2x)+x\{-2\operatorname{sen}2x.\cos(\operatorname{sen}2x)-2\cos 2x.\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)\}}{4[\cos(\operatorname{sen}4x).4\cos 4x.\cos 4x-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}4x).4\operatorname{sen}4x]}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{2+2[1]}{4[4]} = \frac{4}{16} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{4}}$$

**120.-** Sea: $W = \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x.\operatorname{sen}x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos $L$'Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\sqrt[3]{\cos x})}{\frac{d}{dx}(x.\operatorname{sen}x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}(\cos x)^{-2/3}.(-\operatorname{sen}x)}{(1)\operatorname{sen}x + x.\cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{indeterminada}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos $L$'Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}\left[+\frac{2}{3}(\cos x)^{-5/3}.(\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x) + (\cos x)^{-2/3}.(\cos x)\right]}{\cos x + \cos(\operatorname{sen}x) - x\operatorname{sen}x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{\frac{1}{3}}{2} \qquad \therefore \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{6}}$$

**121.-** Sea: $W = \dfrac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos $L$'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-\cos^3 x)}{\frac{d}{dx}(\tan^2 x)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{(-3\cos^2 x)(-\operatorname{sen}x)}{(2\tan x)(\sec^2 x)} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos $L$'Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{3[2\cos x(\operatorname{sen}x).(\operatorname{sen}x) + \cos^2 x.\cos x]}{2[\sec^2 x.\sec^2 x + \tan x.2\sec x.\sec x.\tan x} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{3[0+1]}{2[1+0]}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} = \frac{3}{2}}$$

**122.-** Sea: $W = \dfrac{3\operatorname{sen}^2 x}{x.\tan 4x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ forma indeterminada entonces aplicamos $L$'Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(3\operatorname{sen}^2 x)}{\frac{d}{dx}(x.\tan 4x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{6.\operatorname{sen}x.\cos x}{\tan 4x + x.4\sec^2 4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{3\text{sen}2x}{\tan 4x + 4x.\sec^2 4x} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{3.(2\cos 2x)}{4.\sec^2 4x + 4[\sec^2 4x + x.2\sec 4x.\sec 4x.\tan 4x.4]} = \frac{3(2)}{4+4(1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{6}{8} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} = \frac{3}{4}}$$

**123.-** Sea: $W = \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{d}{dx}(\sec^2 x - 2\tan x)}{\frac{d}{dx}(1+\cos 4x)} = \frac{2[2\sec x.\sec x.\tan x.(\tan x - 1) + \sec^2 x.\sec^2 x]}{-16.\cos 4x} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{2[0+(\sqrt{2})^4]}{-16(-1)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{8}{16} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} W = \frac{1}{2}}$$

**124.-** Sea: $W = \dfrac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x) - 1}$

Al evaluar para $x = \pi$ , resulta $\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital por primera vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{d}{dx}(\tan(1+\cos x))}{\frac{d}{dx}(\cos(\tan x)-1)} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = \lim_{x\to\pi} \frac{\sec^2(1+\cos x).(-\text{sen}x)}{[-\text{sen}(\tan x)].\sec^2 x} = \frac{0}{0}$$

Como el resultado es indeterminado, aplicamos *L'*Hospital por segunda vez:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = \lim_{x\to\pi} \frac{-2\sec(1+\cos x).\sec(1+\cos x).\tan(1+\cos x).\text{sen}^2 x + \sec^2(1+\cos x).\cos x}{\cos(\tan x).\sec^2 x.\sec 2x + sen(\tan x).2\sec x.\sec x.\tan x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} W = \frac{-1}{1} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to\pi} W = -1}$$

**125.-** Sea: $W = \dfrac{(x-x^3)^2}{(\text{sen}3x)(\text{sen}5x)}$

Al evaluar para $x = 0$, tenemos: $W = \dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos las reglas de L'Hospital

Hallemos la primera derivada del numerador .

$$\frac{d}{dx}(x - x^3)^2 = 2(x - x^3) \,.\, (1 - 3x^2)$$

La primera derivada del denominador (para un producto).

$$\frac{d}{dx}[(\text{sen } 3x) \,.\, (\text{sen } 5x)] = \left[\frac{d}{dx}(\text{sen}3x)\right] .\ \text{sen } 5x + \text{sen } 3x \,.\, \left[\frac{d}{dx}(\text{sen}5x)\right]$$

$$= 3 \cos 3x \,.\, \text{sen } 5x + \text{sen } 3x \,.\, 5 \cos x$$

El límite será: $\lim\limits_{x\to0} W = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2(x-x^3)(1-3x^2)}{3\cos3x.\text{sen}5x+5\text{sen}x.\cos5x} = \dfrac{0}{0}$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

Derivamos el numerador (para un producto).

$$\frac{d}{dx}2(x - x^3)(1 - 3x^2) = 2\left(\left[\frac{d}{dx}(x-x^3)\right](1-3x^2)+(x+x^3).\frac{d}{dx}(1-3x^2)\right)$$

$$= (1 - 3x^2) \,.\, (1 - 3x^2) + (x - x^3)(- 6x) = 2(1 - 3x^2)^2 - 12x(x - x^3)$$

Derivamos el denominador (para un producto):

$$\frac{d}{dx}[3 \cos 3x - \text{sen } 5x + 5 \text{ sen } 3x \,.\, \cos 3x]$$

$$= 3\left[\frac{d}{dx}(\cos3x)\right]\text{sen } 5x + 3\cos 3x \,.\, \frac{d}{dx}(\text{sen } 5x) + 5\left[\frac{d}{dx}(\text{sen}3x)\right]\cos 5x + 5 \text{ sen } 3x \,.\, \frac{d}{dx}(\cos 5x)$$

$$= - 9 \text{ sen } 3x \,.\, \text{sen } 5x + 15 \cos 3x \,.\, \cos 5x + 15 \cos 3x \cos 5x - 25 \text{ sen } 3x \text{ sen } 5x$$

$$= 30 \cos 3x \,.\, \cos 5x - 3 \text{ sen } 3x \text{ sen } 5x$$

El límite será:

$$\lim_{x\to0} W = \lim_{x\to0} \frac{2(1-3x^2)^2-12x.(x-x^3)}{30\cos3x.\cos5x - 34\text{sen}3x\text{sen}5x} = \frac{2(1)^2}{30(1)(1)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to0} W = \frac{1}{15}}$$

126.- Sea: $W=\dfrac{2\cos x-2+x^2}{3x^4}$

Al evaluar para $x=0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(2\cos x-2+x^2)}{\frac{d}{dx}(3x^4)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}x+2x}{12x^3}=\frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+2}{36x^2}=\frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 3ra vez L' Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x}{72x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\frac{2}{72}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\frac{1}{36}(1) \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0}=\frac{1}{36}}$$

127.- Sea: $W=\dfrac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen}x}$

Al evaluar para $x=0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x-\tan x)}{\frac{d}{dx}(x-\operatorname{sen}x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\sec^2 x)}{\frac{d}{dx}(1-\cos x)} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec x-\sec x.\tan x}{+\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 3ra vez L' Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(-2\sec^2 x.\tan x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2[2\sec x.\sec x.\tan x.\tan x+\sec^2 x.\sec^2 x]}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{-2[2\sec^2 x.\tan^2 x + \sec^4 x]}{\cos x} = \frac{-2[0+1]}{1} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = -2}$$

**128.-** Sea: $W = \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan x - \operatorname{sen} x)}{\frac{d}{dx}(x^3)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec x.\sec x.\tan x + \sec x}{6x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x.\tan x + \sec x}{6x} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 3ra vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2[2\sec x.\sec x.\tan x.\tan x + \sec^2 x.\sec^2 x]}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \frac{2[0+1]+1}{6}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} = \frac{1}{2}}$$

**129.-** Sea: $W = \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\dfrac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[1 - \cos(1 - \cos x)]}{\frac{d}{dx}(x^4)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(1 - \cos x)(\operatorname{sen} x)}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(1 - \cos x)(\operatorname{sen} x)]}{\frac{d}{dx}(4x^3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(1-\cos x)[+\operatorname{sen} x](+\operatorname{sen} x)+\operatorname{sen}(1-\cos x).[\cos x]}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 2da vez L' Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{+\operatorname{sen}^2 x.\cos(1-\cos x)+\cos x.\operatorname{sen}(1-\cos x)}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 3ra vez L' Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{+2\operatorname{sen} x\cos x.\cos(1-\cos x)+\operatorname{sen} 2x.\{-\operatorname{sen}(1-\cos x)[\operatorname{sen} x]\}+(-\operatorname{sen} x).\operatorname{sen}(1-\cos x)+\cos x.\cos(1-\cos x)[\operatorname{sen} x]}{24x}$$

Aplicando la identidad del arco doble y reduciendo términos, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{+\operatorname{sen} 2x.\cos(1-\cos x)+\operatorname{sen} 3x.\operatorname{sen}(1-\cos x)-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(1-\cos x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.\cos(1-\cos x)}{24x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x.\cos(1-\cos x)+\operatorname{sen}^3 x.\operatorname{sen}(1-\cos x)-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(1-\cos x)}{24x} = \frac{0}{0}$$

Por que aparece nuevamente la forma indeterminada , aplicamos por 4ta vez L' Hospital.

$$\frac{3\cos 2x.\cos(1-\cos x)\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen}(1-\cos x).[\operatorname{sen} x]+3\operatorname{sen}^2 x.\cos x.\operatorname{sen}(1-\cos x)+\operatorname{sen}^3 x.\cos(1-\cos x)[\operatorname{sen} x]-\cos x.\operatorname{sen}(1-\cos x)-\operatorname{sen} x.\cos(1-\cos x)[\operatorname{sen} x]}{24}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 2x}{24} \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} W = \frac{1}{8}}$$

**130.-** Sea: W = (1 + cos π)(1 + cot π)

Al evaluar para $x = \pi$, resulta:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = [1+(-1)](1+\infty) = 0\,.\,\infty \quad \Rightarrow \text{ es una forma indeterminada}$$

Nota: Para poder aplicar *L'Hospital* nos debe quedar una expresión de $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Nuestra estartegia consistirá en transformar la expresión dada en otra sobre la cual se pueda aplicar L'Hospital, para ello recurrimos a las identidades trigonométricas.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to\pi} (1+\cos x).\left(1+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)(\operatorname{sen} x+\cos x)}{\operatorname{sen} x}$$

Al evaluar para $x = \pi$, resulta $\frac{0}{0}$; forma indeterminada sobre la que sí podemos aplicar *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{d}{dx}(1+\cos x)(\operatorname{sen} x+\cos x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to\pi} \frac{(-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x+\cos x)+(1+\cos x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}{\cos x} = \frac{0}{-1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\pi} W = 0}$$

**131.-** Sea $W = \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}3x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^{2x}-e^{3x})}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}3x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{2.e^{2x}-3.e^{3x}}{2\cos 2x-3\cos 3x} = \frac{2-3}{2-3}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = 1}$$

**132.-** Sea $W = \dfrac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\frac{0}{0}$; forma indeterminada entonces aplicamos *L'*Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan x)}{\frac{d}{dx}(1-\sqrt{1+\tan x})}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} -2.\sqrt{1+\tan x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} W = -2}$$

**133.-** Sea W = cot $2x$ . cot$(\frac{\pi}{2} - x)$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $\infty$. 0, forma indeterminada. Como hicimos en el ejercicio anterior debemos modificar la expresión para que al evaluar resulte $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y recién podamos aplicar L'Hospital.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{0}{0}$$

De acuerdo con este resultado, podemos aplicar *L*'Hospital:

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan x)}{\frac{d}{dx}(\tan 2x)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{2.\sec^2 2x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} = \frac{1}{2}}$$

**134.-** Sea W = $(1 + \cos x)^{3\sec x}$

Al evaluar para $x = \frac{\pi}{2}$, resulta $1^{\infty}$, forma indeterminada. Lo que corresponde hacer es transformar la expresión dada en base a las siguientes reglas exponenciales:

$$x = ln(b)^x \quad \wedge \quad (b)^x = e^{\ln b^x} = e^{x.\ln b}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} W = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(3\sec x).ln(1+\cos x)} \quad \ldots (1)$$

Evaluamso el límite del exponente: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\sec x.ln(1+\cos x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3ln(1+\cos x)}{\cos x} = \dfrac{0}{0}$

Es una forma indeterminada que se puede levantar con *L'*Hospital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx}[3ln(1+\cos x)]}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3.\frac{-\text{sen}x}{1+\cos x}}{-\text{sen}x} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} = 3 \ldots (2)$$

Al reemplazar (2) en (1), tenemos que el límite es: $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} W = e^3}$

**135.-** Sea $W = (1+\tan^2 x)^{\cot^2 x}$

Al evaluar para $x = 0$, resulta $1^\infty$, forma indeterminada. Luego procediendo como se hizo en el ejercicio anterior tendremos:

$$\lim_{x\to 0} W = \lim_{x\to 0} (1+\tan^2 x)^{\cot^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x.ln(1+3\tan^2 x)} \ldots (1)$$

Evaluamos el límite del exponente: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+3\tan^2 x)}{\tan^2 x} = \dfrac{0}{0}$

Es una forma indeterminada que se puede levantar con *L'*Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[ln(1+3\tan^2 x)]}{\frac{d}{dx}[\tan^2 x]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+3\tan^2 x}.6\tan x-\sec^2 x}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[ln(1+3\tan^2 x)]}{\frac{d}{dx}[\tan^2 x]} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{1+3\tan^2 x} = 3 \ldots (2)$$

Al reemplazar (2) en (1), tenemos que el límite es: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} W = e^3}$

**136.-** Tenemos: $f_{(x)} = \text{sen}^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 1,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Nuestra estrategia consistirá en evaluar la función a partir del criterio de la 1ra y 2da derivada. Los ubicará en un máximo o mínimo y la segunda identificará al máximo.

Derivando respecto a "$x$" e igualando a cero:

$$f'_{(x)} = 2\ \text{sen}\ x \cdot \frac{d}{dx}(\text{sen}\ x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{dx}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ \text{sen}\ x . \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Por la identidad del ángulo doble: $\text{sen}\ 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Derivando por 2da vez: $f''_{(x)} = 2\cos 2x > 0,\ \forall\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Por el criterio de la segunda derivada, concluimos que: **$f$ es mínimo en $x = \frac{\pi}{6}$**

**137.-** Nuestra estrategia consistirá en aplicar la ecuación de la recta tangente, así:

$$y - y_0 = f'_{(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Como: $y = f_{(x)} = \text{sen}\ x + 2 \wedge (x_0; y_0) = (0; 2) \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'_{(0)} = \cos 0 = 1$

Luego la ecuación de la recta tangente será:

$$y - 2 = 1(x - 0) \qquad \therefore \quad \boxed{y = x + 2}$$

**138.-** Empleado la misma estrategia del problema anterior, tendremos:

$$y = f_{(x)} = arc\tan x - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad f'_{(1)} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad (x_0; y_0) = (1; 0)$$

Luego como en el problema anterior, la ecuación de la recta tangente será:

$$y - y_0 = f'_{(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \qquad \therefore \quad \boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

**139.-** Para resolver este problema debemos recordar que la ecuación de la recta normal a una curva en el punto $(x_0; y_0)$ está dada por:

$$y - y_0 = \frac{1}{f'_{(x_0)}} \cdot (x - x_0) \quad \ldots (*)$$

Tenemos: $y = f_{(x)} = 2\ \text{sen}\ x - 3 \quad \wedge \quad (x_0; y_0) = (0; -3)$

$$f'_{(1)} = 2\cos x \quad \Rightarrow \quad f'_{(0)} = 2$$

Luego por (*) la ecuación de la recta tangente será:

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x-0) \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2}x - 3$$

**140.-** Procediendo como en el problema anterior, tendremos:

$$y = f_{(x)} = arc\tan(x+1) - \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad (x_0; y_0) = (0; 0)$$

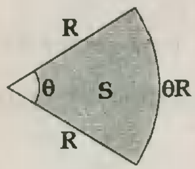
$$f'_{(x)} = \frac{1}{(x+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'_{(0)} = \frac{1}{2}$$

Luego como en el problema anterior la ecuación de la recta normal será:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-0) \quad \therefore \quad y = -2x$$

**141.-** Nuestra estrategia consistirá en construir una expresión del área del sector circular en función del radio. A partir de ello aplicaremos el criterio de la 1ra derivada. Veamos:

Por dato se sabe que: perímetro = 8




$$\Rightarrow 2R + \theta R = 8 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{8-2R}{R} \ \ldots (1)$$

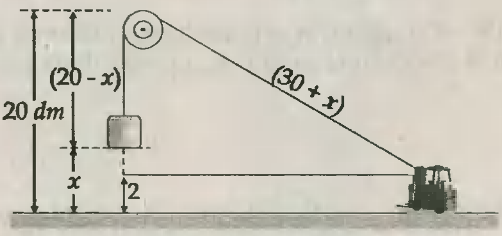
Además se sabe que: $S = \dfrac{\theta R^2}{2} \ \ldots (2)$

Reemplazando (1) en (2): $S = \left(\dfrac{8-2R}{2}\right) . \dfrac{R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S = 4R - R^2 \ \ldots$ (función)

Derivando respecto a R: $S' = 4 - 2R$

Igualando a cero: $4 - 2R = 0 \quad \therefore \quad R = 2\ u$

**142.-** Dato: $\dfrac{dy}{dt} = 9$




Nos piden : $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 6$

En el triángulo rectángulo se cumple:

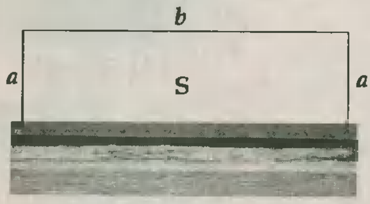
$$y^2 = (30 + x)^2 - 18^2$$

Derivando implícitamente respecto a "$t$":

$$2y.\ \frac{dy}{dt} = 2(30 + x).\ \frac{dx}{dt}\ \text{, cuando:}\quad x = 6 \quad \Rightarrow\ y = 18\sqrt{3}$$

Reemplazando los datos: $\quad 18\sqrt{3}\ .\ (9) = (30 + 6)\dfrac{dx}{dt} \qquad \therefore \qquad \boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\ m/s}$

**143.-** Sea S el área de la región rectangular:




Por dato: $S = 4\ 000\ m^2$

$$\Rightarrow \qquad ab = 4\ 000 \qquad \Rightarrow\ a = \frac{4000}{L}\ \ldots (1)$$

Donde "L"es la longitud del material de la cerca:

$$L = 2a + b\ \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $\quad L = \dfrac{8000}{b} + b \quad \Rightarrow \quad L = (8\ 000)b^{-1} + b$

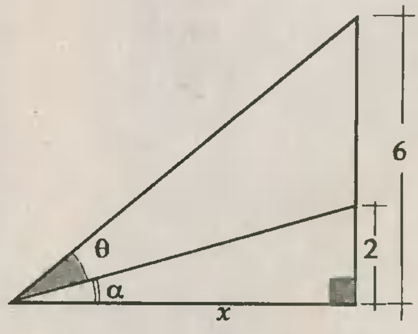
Derivando respecto a "$b$" e igualando a cero:

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{db} = -\ 8\ 000\ b^2 + 1 \quad \Rightarrow\ -\ \frac{8000}{b^2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 8\ 000 \quad \Rightarrow\ b = 40\sqrt{5}$$

Reemplazando en (1): $\quad a = \dfrac{4000}{40\sqrt{5}} \qquad \therefore \qquad \boxed{a = 20\sqrt{5}}$

**144.-** Sea $x$ la distancia del observador a la estatua, nos piden "$x$" para que $\theta$ sea máxima. Del diagrama elaborado se puede apreciar que

$$\tan(\alpha + \theta) = \frac{6}{x}$$




$$\Rightarrow \qquad \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha.\tan\theta} = \frac{6}{x}\ \ldots (1)$$

Asimismo se verifica que:

$$\tan\alpha = \frac{2}{x}\ \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $\quad \dfrac{\dfrac{2}{x} + \tan\theta}{1 - \dfrac{2}{x}.\tan\theta} = \dfrac{6}{x}$

Despejando tan θ: $\tan\theta = \dfrac{4x}{x^2+12} \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\tan\left(\dfrac{4x}{x^2+12}\right)$

Esta relación expresa al ángulo θ que buscamos en función de $x$. Luego derivando respecto a "$x$" e igualando a cero tendremos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{x^2+12}\right)}{1+\left(\frac{4x}{x^2+12}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{(x^2+12).(4x)-4x(x^2+12)}{(x^2+12)^2}}{\frac{(x^2+12)^2+16x^2}{(x^2+12)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{4(x^2+12)-4x(2x)}{(x^2+12)^2+16x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+12 = 2x^2$$

$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$, pero: $x > 0$ $\quad\therefore\quad$ **θ es máxima si: $x = 2\sqrt{3}\ u$**

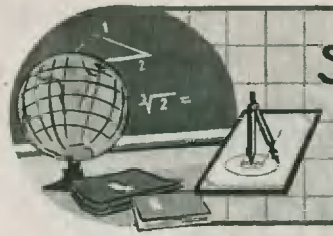
# PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA Y COMO RESOLVERLOS

## PARTE 3

## PROBLEMAS PROPUESTOS

NUEVA

COLECCION RACSO



# Sistemas de Medida Angular

**CAP. 1**

## ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

**01.-** Del gráfico mostrado, indicar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\alpha$ y $\beta$ son ángulos negativos

II. $\alpha + \beta$ es igual al ángulo de una vuelta

III. $\beta$ es mayor que $\alpha$

IV. $\theta$ es negativo

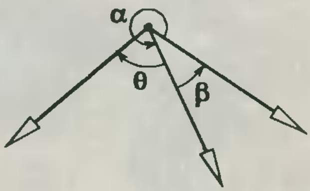
A) FFVV

B) FFFV

C) FVFV

D) VFVF

E) VVVV




**02.-** De la figura calcular el valor de $x$.

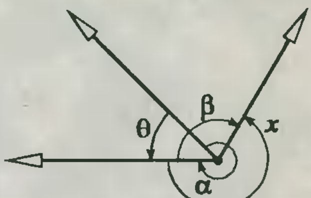
A) $\beta - \theta - \alpha$

B) $\beta + \theta + \alpha$

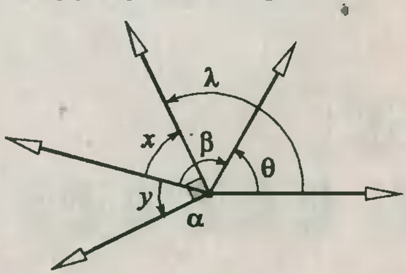
C) $\beta + \theta - \alpha$

D) $\theta - \alpha - \beta$

E) $\theta + \alpha - \beta$




**03.-** Determinar: $M = 3y - 2x - 270°$ en función de: $\theta$, $\lambda$ y $\beta$, a partir de la figura adjunta.




A) $\lambda - \theta + \beta$ B) $\theta - \lambda - \beta$ C) $-\theta - \lambda - \beta$

D) $\lambda + \theta + \beta$ E) $\theta - \lambda + \beta$

**04.-** De la figura calcular: $M = \sqrt[3]{20x + 12y}$

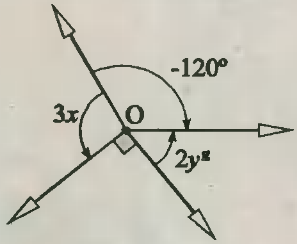
A) 9

B) 10

C) 11

D) 12

E) 13




**05.-** En el siguiente gráfico: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOB$; $\overrightarrow{ON}$ es bisectriz del $\angle COD$. Además: $6y - 10x = 150$; calcular: $P = \dfrac{40x}{y}$

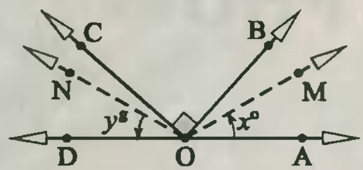
A) 8

B) 9

C) 7

D) 10

E) 5




## CONVERSIONES

**06.-** Reducir: $E = \dfrac{2°20'}{14'} + \dfrac{3^g10^m}{5^m}$

A) 71 B) 72 C) 73 D) 74 E) 75

**07.-** El valor de la siguiente expresión es:

$$E = \frac{11\,rad + 33\,rad + 55\,rad + \ldots + 121\,rad}{3° + 9° + 15° + \ldots + 33°}$$

A) 200 B) 205 C) 210 D) 215 E) 220

**08.-** Sabiendo que $(3x - y)^{o}$ equivale a $(x+2y)^{g}$, calcular:

$$K = \frac{x-y}{x+y}$$

A) 1/4 B) 7/4 C) 1/7 D) 4/7 E) 7

**09.-** Si: $\pi/32\ rad <> x^{o}\,y'\,z'' <> A^{g}B^{m}C^{s}$,

calcular: $$M = \frac{y+z-x}{A+B+C}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

**10.-** Si: $M = a^{o}b'c''$, además $a$, $b$ y $c$ están en progresión aritmética y $a^{o}$ en el sistema radial es $\pi/10\ rad$, $c^{o}$ en el sistema centesimal es $60g$, calcular «M».

A) $18^{o}23'28''$ B) $18^{o}28'38''$ C) $18^{o}33'48''$

D) $18^{o}36'54''$ E) $18^{o}38'58''$

**11.-** Si se cumple: $\left(\frac{(x+3)^{o}}{5^{g}}\right)^{o} = \left(\frac{(4x-18)^{o}}{15^{g}}\right)^{g}$, calcular «$x$»

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 45

**12.-** Se tiene un sistema de medida angular «β», un grado «β» ($1^{\beta}$), equivale a 1/480 del ángulo de una vuelta. ¿A cuántos grados beta equivale 44/21 *rad*?. Considere: $\pi = 22/7$

A) $150^{\beta}$ B) $160^{\beta}$ C) $170^{\beta}$ D) $180^{\beta}$ E) $190^{\beta}$

**13.-** Calcular el menor número entero en grados centesimales que tiene el ángulo θ si:

$$\theta = 1^{g}2^{m} + 3^{g}4^{m} + 5^{g}6^{m} + \ldots$$

A) $291^{g}$ B) $321^{g}$ C) $491^{g}$ D) $522^{g}$ E) $582^{g}$

**14.-** De la figura, calcular: $E = \sqrt{\frac{a}{10b}}$

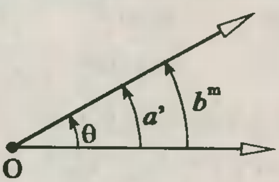
A) 1/100

B) 2/100

C) 3/100

D) 4/100

E) 1/70




**15.-** De la igualdad $2x^{g} = y'$, calcular el valor de: $2\left(\frac{x+y}{y}\right)$.

A) 59 B) 1/2 C) 59/29 D) 1/29 E) 59/58

**16.-** Sabiendo que: $94{,}4^{g} <> \overline{PE}^{o}\ \overline{RU}'\ \overline{VI}''$,

calcular el valor de: $17\left(\frac{P+R+V}{E+U+I}\right)$

A) 15 B) 17/15 C) 17 D) 16 E) 14/17

**17.-** Si se cumple que:

$$\left(\frac{1^{o}20'}{40'}\right)^{g}\left(\frac{2^{g}20^{m}}{22^{m}}\right)^{m}\left(\frac{14\frac{\pi}{5}rad}{36^{o}}\right)^{s} = x^{g}y^{m}z^{s}$$

calcular el valor de: $$F = \frac{z-y+x}{2x+2y}$$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,25 D) 0,35 E) 0,45

**18.-** Si un ángulo se expresa como $(x^{x})^{o}$ y $(x^{x}+1)^{g}$, calcular $(x^{x})^{o}$ en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{40}rad$ B) $\frac{\pi}{20}rad$ C) $\frac{\pi}{10}rad$

D) $\frac{\pi}{5}rad$ E) $\frac{3\pi}{20}rad$

**19.-** Reducir: $$M = \frac{\frac{11^{o}15'}{2} + \frac{\pi}{32}rad + \frac{200^{g}}{16}}{\frac{\pi}{4}rad}$$

A) 1 B) 2 C) 1/8 D) 1/2 E) 1/32

**20.-** La suma de dos ángulos es $\frac{2\pi}{3}rad$, el mayor excede al menor en $36^{o}$. Calcular el suplemento del mayor en *radianes*.

A) $\frac{\pi\ rad}{30}$ B) $\frac{\pi}{15}rad$ C) $\frac{13\pi\ rad}{30}$

D) $\frac{17\pi rad}{30}$ E) $30\pi\ rad$

## MEDIDAS ANGULARES RELACIONADAS

**21.-** Reducir:

$$E=\frac{2\pi S+3\pi C-40R}{92R}+\sqrt{\frac{2C+S}{C-S}+35}\ ;$$

si se sabe que S, C y R son los números convencionales para un mismo ángulo.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 23

**22.-** Calcular:

$$E=\sqrt{\frac{C+5S}{C-S}+\sqrt{\frac{C+S}{C-S}+\sqrt{\frac{C+2S}{C-S}+\sqrt{\frac{C+6S}{C-S}}}}}$$

Siendo S y C los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $2\sqrt{15}$

**23.-** Calcular la medida de un ángulo en el sistema radial, si se cumple que:

$$\left(\frac{12}{S}\right)^7+\left(\frac{40}{3C}\right)^7+\left(\frac{\pi}{15R}\right)^7=\frac{\pi C-197R}{\pi S-52R}$$

Donde S, C y R son los números de grados sexagesimales centesimales y *radianes* de dicho ángulo.

A) $\pi/7$ B) $2\pi/7$ C) $\pi/15$ D) $2\pi/15$ E) $\pi/5$

**24.-** Calcular la medida de un ángulo en el sistema internacional si se cumple:

$$\left(\frac{18}{S}\right)^3+\left(\frac{20}{C}\right)^3+\left(\frac{\pi}{10R}\right)^3=\frac{1}{9}$$

siendo S, C y R lo convencional

A) $3\pi/10$ *rad* B) $3\pi/20$ *rad* C) $7\pi/15$ *rad*

D) $\pi/5$ *rad* E) $3\pi/5$ *rad*

**25.-** Calcular la medida de un ángulo en el sistema radial sabiendo que:

$$S+C+R/\pi=9{,}4248$$

A) $\pi^2/123$ B) $\pi^2/125$ C) $\pi^2/127$

D) $\pi^2/129$ E) $\pi^2/131$

**26.-** Si S y C son los números de grados sexagesimales y centesimales para un mismo ángulo, calcular la medida de dicho ángulo en el sistema radial, si:

$$S=\sqrt{C-\sqrt{C-\sqrt{C-\sqrt{C-\ldots}}}}$$

A) $\pi/1\,620$ B) $\pi/810$ C) $\pi/324$

D) $\pi/162$ E) $\pi/81$

**27.-** Determinar la medida del ángulo en grados sexagesimales, si se verifica:

$$\frac{S+C}{C-S}=\frac{2R+\pi}{2R-\pi}\ ,$$

siendo S, C y R las conocidas

A) $100°$ B) $120°$ C) $10°$

D) $(1/100)°$ E) $(5/9)°$

**28.-** Siendo S, C y R lo convencional para un ángulo trigonométrico y que cumple:

$$\frac{\left(\frac{9S}{10}+\frac{C}{20}+\frac{R}{\pi}\right)(C+S)^2}{173(C+S)}=95\ ;(C+S)\neq 0$$

calcule el número de *radianes* de dicho ángulo

A) $\pi$ *rad* B) $\pi$ *rad*/173 C) $(\pi/2)$ *rad*

D) $(3\pi/2)$ *rad* E) $(\pi/190)$ *rad*

**29.-** Siendo S, C y R los números convencionales para un mismo ángulo tal que verifica:

$$3S-2C+\frac{R}{\pi}=1\,410$$

calcule la medida de dicho ángulo en el sistema centesimal.

A) $2\,000^g$ B) $200^g$ C) $100^g$

D) $400^g$ E) $1\,000^g$

**30.-** Sea dos ángulo $\alpha$ y $\beta$, si:

$$S_\alpha+C_\beta=95 \text{ y } C_\alpha-S_\beta=5,\ \text{calcule: } S_\alpha$$

donde $S_\alpha$ medida sexagesimal del ángulo $\alpha$.

A) 50 B) 30 C) 45 D) 40 E) 55

**31.-** Calcular, en radianes, la medida del mayor de dos ángulos si la suma de la cuarta parte del número de grados sexagesimales de uno de ellos y los tres quintos del número de grados centesimales de otro ángulo es 70. Se sabe también que estos son suplementarios.

A) $\pi/6$ B) $5\pi/6$ C) $2\pi/3$ D) $4\pi/3$ E) $3\pi/2$

**32.-** La suma del número de minutos sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo en 6160. Calcular el número de *radianes* del ángulo.

A) $\pi/4$ B) $\pi/5$ C) $\pi/6$ D) $2\pi/3$ E) $\pi/8$

**33.-** Dado un ángulo tal que el número de grados sexagesimal y centesimal de un mismo ángulo difieren en 5, calcula el complemento de dicho ángulo en *radianes*.

A) $\pi/2$ *rad* B) $\pi$ *rad* C) $\pi/4$ *rad*

D) $\pi/3$ *rad* E) $\pi/6$ *rad*

**34.-** Un ángulo es tal que el número de grados que representa su suma en los sistemas sexagesimal y centesimal es igual a 29 más su número en grados sexagesimales, dividido entre 2. Calcular dicho ángulo en el sistema radial.

A) $\pi$ *rad* B) $\pi/5$ *rad* C) $\pi/10$ *rad*

D) $\pi/20$ *rad* E) $3\pi/10$ *rad*

**35.-** El triple del número de grados sexagesimales menos el doble del número de grados centesimales del mismo ángulo es 70. Calcular la medida de dicho ángulo.

A) $\pi/4$ *rad* B) $20^g$ C) $75^\circ$

D) $\pi/2$ *rad* E) $7^\circ$

**36.-** Determinar las medidas sexagesimales de dos ángulos, si la diferencia de sus medidas centesimales es 100 y la suma de sus medidas radiales es $3\pi$.

A) $315^\circ ; 200^\circ$ B) $115^\circ ; 225^\circ$ C) $100^\circ ; 200^\circ$

D) $315^\circ ; 225^\circ$ E) $300^\circ ; 135^\circ$

**37.-** Si:

$x$ ... número de segundos sexagesimales de un ángulo.

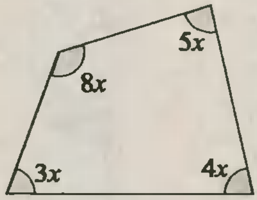
$y$ ... número de minutos centesimales del mismo ángulo;

calcular: $N = \dfrac{x+162y}{x-162y}$

A) -2/3 B) -4/3 C) -3/5 D) -7/3 E) -3/2

## ÁNGULOS EN FIGURAS GEOMÉTRICAS

**38.-** Del gráfico adjunto, calcular la diferencia del ángulo mayor y el menor en grados centesimales.




A) $200^g$

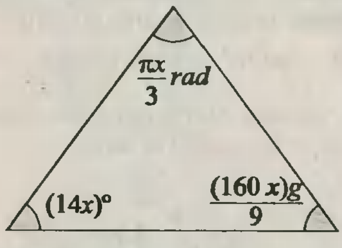
B) $144^g$

C) $54^g$

D) $100^g$

E) $150^g$

**39.-** Del gráfico mostrado, calcular la medida del menor ángulo.




A) $14^\circ$

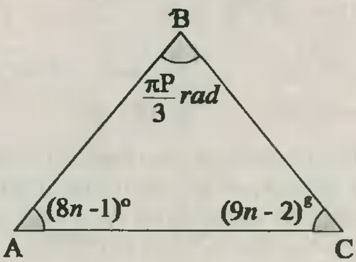
B) $24^\circ$

C) $32^\circ$

D) $26^\circ$

E) $28^\circ$

**40.-** En el siguiente gráfico, si: $m\angle A$, es igual a la $m\angle C$, calcula «P».




A) 10

B) 9

C) 9/10

D) 1/10

E) 3/10

# Longitud de Arco

**CAP. 2**

## LONGITUD DE ARCO

**01.-** En la figura AOB y CBO son sectores circulares con centro en «O» y «B» respectivamente. Calcular $L_1/L_2$.

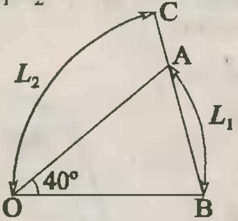
A) 4/7

B) 7/4

C) 3/7

D) 7/3

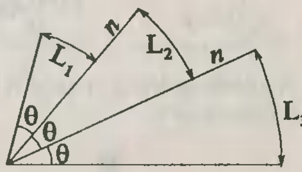
E) 5/7




**02.-** Se tiene un sector circular de ángulo central «θ» y radio «R». Si la medida del ángulo central se reduce a la cuarta parte del anterior, ¿en cuánto se debe aumentar el radio para que la nueva longitud de arco no varíe?

A) R  B) 2R  C) 3R  D) R/2  E) 3R/2

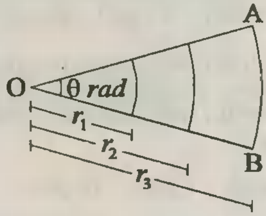
**03.-** Calcular «θ» (en *radianes*), si en la figura: $L_1 = 4n$ ; $L_3 = 8n$. O es centro.




A) $2\pi$ *rad*  B) 2 *rad*  C) $\pi/4$ *rad*

D) $\pi/5$ *rad*  E) $\pi/12$ *rad*

**04.-** Los sectores circulares mostrados tienen sus perímetros en progresión aritmética. Calcular «θ» en términos de $r_1$, $r_2$ y $r_3$. O es el centro de los sectores circulares.




A) $\dfrac{r_1 + r_3 - r_2}{r_1 + r_3 - r_2}$

B) $\dfrac{r_3 + r_1 - 2r_2}{r_1 + r_2 + r_3}$

C) $\dfrac{2(r_3 + r_1 - 2r_2)}{2r_2 - r_1 - r_3}$

D) $\dfrac{r_3 + r_1 - 2r_2}{2r_2 - r_3 - r_1}$

E) $\dfrac{r_3 + r_1 - r_2}{2r_2 - r_3 - r_1}$

**05.-** Calcular el perímetro de la región sombreada, sí: $R = 3$, $r = 1$. Además: A, B, C y D son puntos de tangencia.

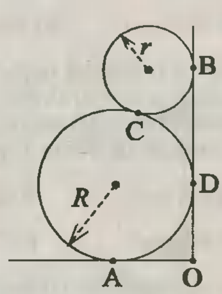
A) $2\sqrt{5} + \dfrac{3\pi}{2}$

B) $4\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{2} + 3$

C) $\dfrac{19\pi}{6} + \sqrt{3} + 6$

D) $\dfrac{\pi}{3} + 9 + 3\sqrt{2}$

E) $4\sqrt{3} - \dfrac{49\pi}{12} + 9$




**06.-** De la figura, se tiene el cuadrante AOB, siendo O, A y B centros de los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{OQ}$ y $\overset{\frown}{OP}$ respectivamente; AO = OB = 6 *m*.

Calcular el perímetro de la región sombreada.

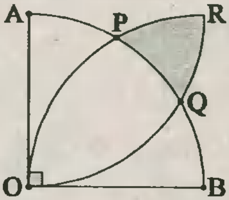
A) $\pi m$

B) $2\pi m$

C) $3\pi m$

D) $4\pi m$

E) $5\pi m$




**07.-** Del gráfico adjunto calcular el valor de $\theta$ en el sistema sexagesimal en función de $l_1$, $l_2$ y $r$.

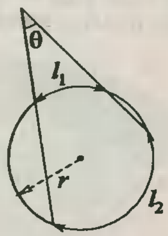
A) $(l_1 + l_2)/r$

B) $\dfrac{l_2 - l_1}{2r}$

C) $\dfrac{l_2 + l_1}{2r}$

D) $\dfrac{90}{\pi r}(l_2 - l_1)$

E) $\dfrac{180}{\pi r}(l_2 - l_1)$




## ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

**08.-** Se desea calcular el ángulo central de un sector circular, sabiendo que su longitud de arco es a su radio como $3\pi$ es a 7.

A) $\dfrac{\pi}{7}$ *rad* B) $\dfrac{3\pi}{7}$ *rad* C) $\dfrac{4\pi}{7}$ *rad*

D) $\dfrac{5\pi}{7}$ *rad* E) $\dfrac{2\pi}{7}$ *rad*

**09.-** Si en la figura: $r^2 = 8/\pi$, calcular el área de la región sombreada.

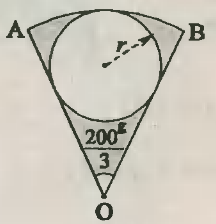
A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

E) 10




**10.-** De la figura calcular «$\theta$», si se sabe que las regiones $S_1$ y $S_2$ tienen igual área, además $AO = OB = BC$.

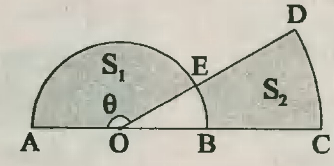
A) $2\pi/3$

B) $5\pi/6$

C) $3\pi/4$

D) $11\pi/12$

E) $7\pi/8$




**11.-** Del gráfico mostrado, calcular el área de la región sombreada, siendo «O» centro. Además: $AD = FD = EC = BC$.

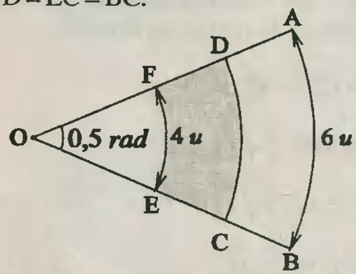
A) $7\,u^2$

B) $8\,u^2$

C) $9\,u^2$

D) $10\,u^2$

E) $11\,u^2$



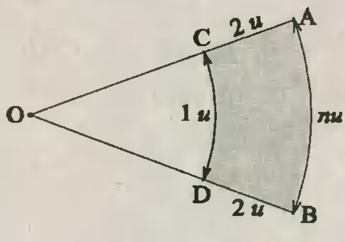

**12.-** El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 72° es de $45\pi\ cm^2$. Se sabe que si duplicamos el radio de dicho sector y disminuimos $\alpha$ *rad* a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuirá en un tercio. ¿Cuál es el valor de $\alpha$?

A) $\pi/4$ B) $\pi/3$ C) $\pi/6$ D) $\pi/5$ E) $2\pi/5$

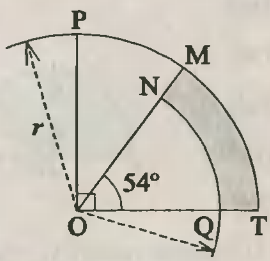
**13 .-** En la figura, se sabe que el área de la región sombreada es $12/n\ u^2$. Calcular el área del sector circular COD, siendo O el centro de los sectores circulares AOB y COD.

A) $1\,u^2$ B) $1{,}5\,u^2$ C) $0{,}25\,u^2$

D) $0{,}5\,u^2$ E) $2\,u^2$



**14.-** Determine el área de la región sombreada si las áreas de los sectores circulares POM y NOQ son iguales. Además: $r = 1$.




A) $\pi/20$

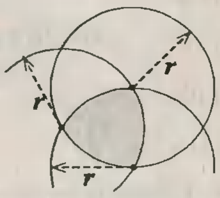
B) $\pi/21$

C) $\pi/22$

D) $\pi/23$

E) $\pi/24$

**15.-** De la figura adjunta, si: $r = 2$, calcular el área de la región sombreada.




A) $(2\pi - \sqrt{3})$

B) $(2\pi - 2\sqrt{3})$

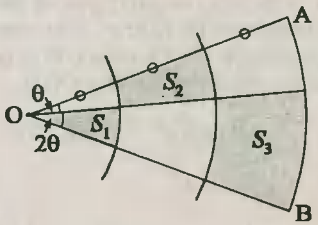
C) $(2\pi - 3\sqrt{3})$

D) $(2\pi - 4\sqrt{3})$

E) $(2\pi - 5\sqrt{3})$

**16.-** Calcular: $M = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1}$

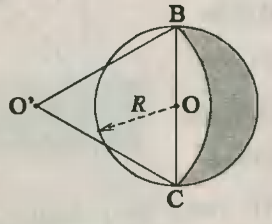
Donde $S_1$, $S_2$ y $S_3$ son las áreas de las regiones sombreadas.




A) 12/7 B) 13/2 C) 1/12

D) $5\pi + 2$ E) $5\pi - 2$

**17.-** Calcular el área de la región sombreada, si BO'C es un sector circular de radio 2R.




A) $R^2(\sqrt{3} + \pi/6)$

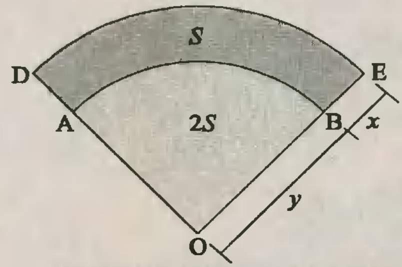
B) $R^2(\sqrt{3} - \pi/6)$

C) $R^2(\sqrt{3} - \pi/2)$

D) $R^2(\sqrt{3} + \pi/2)$

E) $R^2(\sqrt{3} + \pi)$

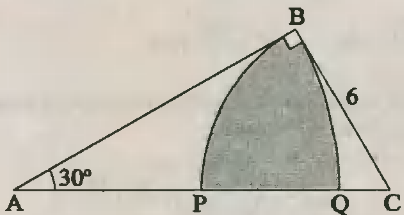
**18.-** En la figura «O» es el centro de los sectores circulares AOB y DOE. Si «$S$» y «$2S$» son las áreas de las regiones sombreadas, calcule $x/y$.




A) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ B) $(2 - \sqrt{6})/2$ C) 1/2

D) $\sqrt{6}/2$ E) $(\sqrt{6} - 2)/2$

**19.-** De la figura, si A y C son centros. Calcular el perímetro de la región sombreada.




A) $\pi(\sqrt{3} + 1) + 6\sqrt{3}$

B) $\pi(\sqrt{3} + 2) + 6(\sqrt{3} - 1)$

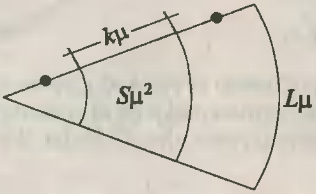
C) $\pi(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}+1)$

D) $\pi(\sqrt{3}+6)+\sqrt{3}$

E) $(\sqrt{3}+1)+\pi(\sqrt{3}+3$

**20.-** En la figura se verifica que: $\dfrac{k}{4}=\dfrac{S}{5}$

Calcular el valor de «$l$».




A) 1,5

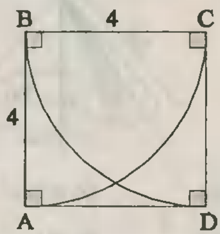
B) 6,5

C) 3,5

D) 4,5

E) 2,5

**21.-** Calcular el perímetro de la región sombreada, si A, B y C son centros.




A) $(1+\pi/3)$

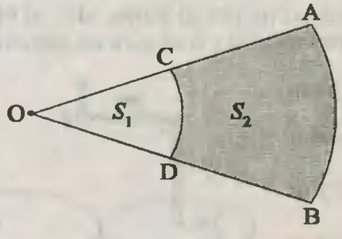
B) $2(1+\pi/6)$

C) $4(1+\pi/4)$

D) $4(1+\pi/6)$

E) $2(1+\pi/3)$

**22.-** Del gráfico calcular $S_2/S_1$, si OA = 3 OC.




A) 1

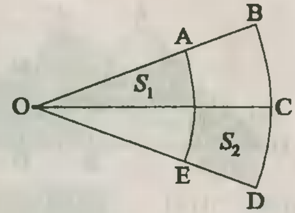
B) 3

C) 6

D) 7

E) 8

**23.-** En el gráfico se cumple que 2OA = AB, siendo $\overline{OC}$ bisectriz. Calcular $\dfrac{S_2}{S_1}$.




A) 1

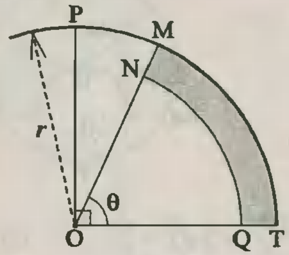
B) 2

C) 4

D) 16

E) 8

**24.-** Determine el área de la región sombreada si las áreas de los sectores circulares POM y NOQ son iguales. Además: $r = 1$.




A) $\dfrac{4\theta-\pi}{4}$

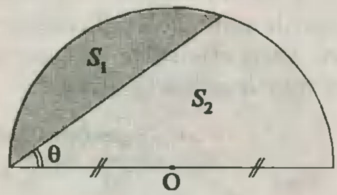
B) $\dfrac{2\theta-\pi}{4}$

C) $\dfrac{4\theta+\pi}{4}$

D) $\dfrac{2\theta+\pi}{4}$

E) $\dfrac{\theta-\pi}{4}$

**25.-** Del gráfico adjunto: $S_1$ y $S_2$ representan áreas donde $S_2 = 2S_1$. Si además $\theta$ es un ángulo expresado en *radianes*, calcular el valor de: $\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$.




A) $\pi/4$

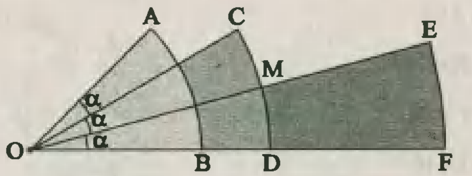
B) $\pi/6$

C) $\pi/8$

D) $\pi/12$

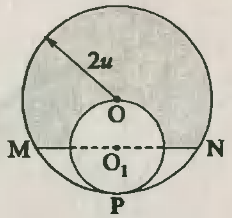
E) $\pi/3$

**26.-** En la figura, O es centro de los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{EF}$; siendo M y B puntos medios de los segmentos $\overline{OE}$ y $\overline{OD}$ respectivamente. Si OA = $l$ y el área de la región sombreada equivale a $S$, calcular: $k=\dfrac{2S}{\alpha l^2}$.




A) 20 B) 21 C) 22 D) 18 E) 12

**27.-** Del gráfico mostrado, calcular el perímetro de la región sombreada, si $\overline{MN}$ es perpendicular a $\overline{OP}$. Además O y $O_1$ son centros.

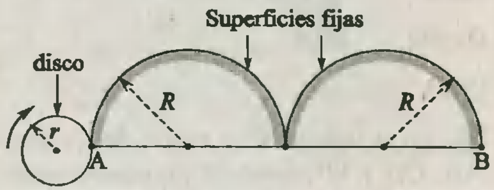



A) $\dfrac{11\pi}{3}+2\sqrt{3}-2$ D) $\dfrac{\pi}{3}-2\sqrt{3}+2$

B) $\dfrac{11\pi}{3}-2\sqrt{3}+2$ E) $\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-2$

C) $\dfrac{11\pi}{3}+2\sqrt{3}+2$

**28.-** Determine el número de vueltas que da el disco de radio $(2\sqrt{2}-2)$, cuando rueda desde «A» hasta «B» sobre las superficies circulares fijas de radios iguales a 2.




A) $\sqrt{2}/2$ B) $3\sqrt{2}/2$ C) $5\sqrt{2}/4$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

**29.-** En la figura mostrada la rueda de radio igual a «$r$», recorre desde la posición A hasta la posición B, sin resbalar, dando así 3 vueltas. Calcule el radio de la rueda, si además se sabe que: $l = 19\pi\ m$ ; $R = 8\ m$.

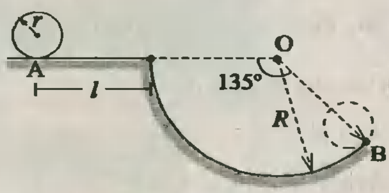
A) $2\ m$

B) $3\ m$

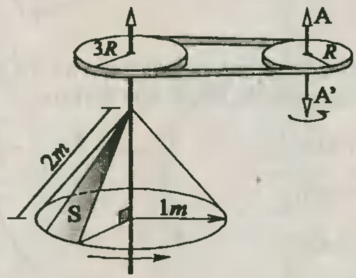
C) $4\ m$

D) $5\ m$

E) $6\ m$




**30.-** Cuando el eje AA' gira un ángulo de 270° en el sentido dado, en el cono de revolución se genera un área «S». Calcular el valor de «S».




A) $\pi\ m^2$ B) $\pi/2\ m^2$ C) $\pi/3\ m^2$

D) $2\pi\ m^2$ E) $\pi/4\ m^2$

**31.-** En el sistema mostrado. Calcular la longitud descrita por el punto «P», si el engranaje de radio igual a 6 $m$, gira un ángulo de 60°.

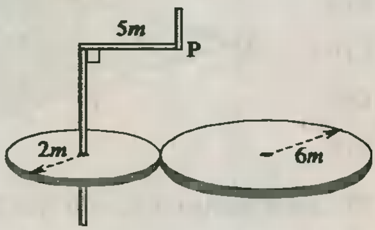
A) $3\pi\ m$

B) $4\pi\ m$

C) $5\pi\ m$

D) $6\pi\ m$

E) $10\pi\ m$




**32.-** En el engranaje mostrado la polea de radio 2 gira 120°, ¿qué ángulo girará la polea de radio 4?

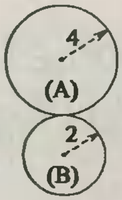
A) $\pi/6$ *rad*

B) $\pi/3$ *rad*

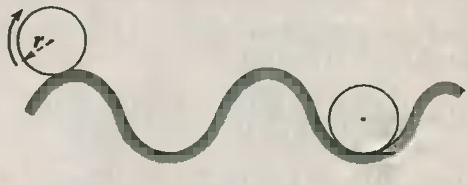
C) $\pi/8$ *rad*

D) $\pi/4$ *rad*

E) $\pi/10$ *rad*

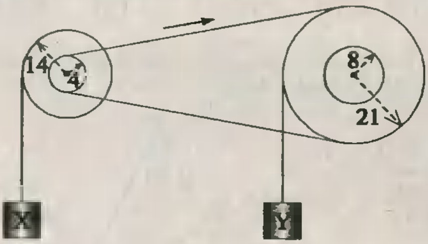



**33.-** Si el número de vueltas que gira la rueda de radio «$R$» es numéricamente igual a 7L, calcular «R» sabiendo que su centro recorre una distancia igual a «44$L$». Asumir: $\pi = 22/7$.




A) 2 B) 3 C) 1/2 D) 1 E) 1/3

**34.-** En el sistema mostrado, si hacemos girar la polea de radio 14, los bloques X e Y suben $h$ y $H$ respectivamente. Evaluar: «$h/H$»




A) 147/16 B) 141/8 C) 113/2

D) 17/8 E) 7/6

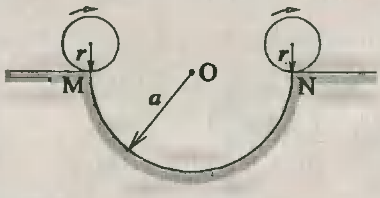
**35.-** Dos engranajes A y B tienen radios $r$ y $R$ ($R > r$). Cuando «A» recorre el perímetro de «B» ha barrido 900º, ¿qué ángulo barrerá B para recorrer el perímetro de A?. Ambos engranajes están en contacto.

A) 600º B) 372º C) 144º D) 360º E) 288º

**36.-** Calcular el número de vueltas que da una rueda que se mueve recorriendo todo el perímetro de otra de radio doble de la anterior.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**37.-** En la figura, se tiene una rueda de radio $r$, inicia su movimiento en el punto M y luego de caer rueda por la superficie cilíndrica de radio «$a$», llegando al punto N y en la forma que se muestra en la figura. Si la rueda en este trayecto ha dado dos vueltas, calcular $r/a$. $\overline{MN}$ : diámetro.




A) 4 B) 1/4 C) 1/2 D) 2 E) 1

**38.-** Los radios mayor y menor de la rueda de un avión son entre si como 3 es a 1. Calcular el número de vueltas que da la rueda menor cuando la rueda mayor barre un ángulo de 1 840 $\pi$ *radianes*.

A) 3 680 B) 2 760 C) 1 840

D) 1 380 E) 4 600

**39.-** Un tronco de cono gira 180º sobre un plano horizontal de forma que su eje barre un ángulo $\alpha$ *rad* . Si los radios de sus bases son $r$ y $R$ ($r < R$), con generatriz «$g$», calcular el valor de: $M = \dfrac{\alpha g}{R - r}$ .

A) $\pi/2$ B) $\pi$ C) $2\pi$ D) $3\pi/2$ E) 1

# Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos

**CAP. 3**

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

**01.-** En un triángulo rectángulo ABC (C = 90º).

Calcular: $E = \dfrac{\text{sen } A}{\sec B} + \dfrac{\cos A}{\csc B}$

A) 1  B) 2  C) 1/2  D) 0  E) 1/3

**02.-** En un triángulo rectángulo (C = 90º) se cumple:

$$\text{sen } A.\tan B - \sec B.\tan A = -2.$$

Calcular: $T = 2\tan B.\csc A - 3.$

A) -5  B) 1  C) 1/2  D) -2  E) -3

**03.-** En un triángulo rectángulo ABC (C = 90º), se cumple:

$$(\csc A - \tan C)\cot A/2 = \cot(\theta - 8^\circ)$$

siendo: θ es ángulo agudo, calcular:

$$E = \sqrt{\text{sen}^2\,\theta - \cos(\theta + 21^\circ)}$$

A) 2/5  B) 3/5  C) 4/5  D) 1  E) 1/2

**04.-** En un triángulo rectángulo (B = 90º) se cumple: cot C sen A = 3, calcular:

$$M = \sqrt[4]{\csc^2 C - 3\sec A}$$

A) 0  B) $\sqrt[4]{2}$  C) 1  D) $\sqrt[4]{4}$  E) 2

**05.-** En un triángulo rectángulo ABC (C = 90º) se cumple:

$$\frac{(\sec B - \cot A)(1 + \sec A)}{\text{sen } B - \cos A} = \frac{2}{3}$$

Calcular: $H = \sec B - \text{sen } A$

A) 1/2  B) 3/4  C) 1/3  D) 2/3  E) 3/5

**06.-** En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), desde el baricentro «G» se traza la perpendicular DG al lado AB (D en sAB). Si sen A = 2/3, calcular BD/AB.

A) 2/3  B) 4/9  C) 8/27  D) 3/8  E) 9/15

**07.-** En un triángulo rectángulo ABC, recto en A, reducir la expresión:

$$K = \frac{a^2\sec B - b^2\csc C}{a\csc C - b\sec B} - \frac{a\tan B - b\cot C}{\tan B}$$

A) $a$  B) $b$  C) $2a$  D) $2b$  E) $a/b$

**08.-** Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 51 $m$ y la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo es 8/15, calcular (en $m$) el perímetro del triángulo.

A) 80  B) 90  C) 100  D) 110  E) 120

**09.-** Del gráfico mostrado calcular «cot θ», si: AB = BC ∧ BM = MC

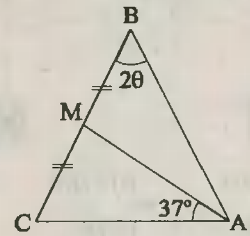
A) 1,5

B) 1,75

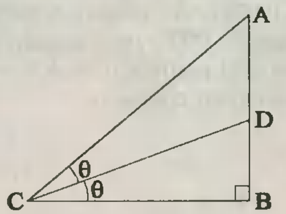
C) 2,25

D) 2,4

E) 2,75




**10.-** Si: AD = $m$ y BD = $n$, calcular «tan θ»



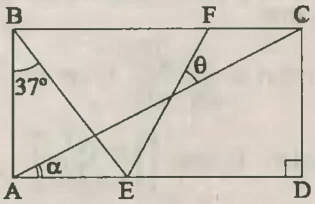
A) $\dfrac{m-n}{m+n}$  B) $\dfrac{m+n}{m-n}$  C) $\sqrt{\dfrac{m-n}{m+n}}$

D) $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}$  E) $\dfrac{m-n}{mn}$

**11.-** Sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se construye un triángulo equilátero ABD, siendo $m\angle CDB = \theta$. Además se sabe que: $m\angle CAB = 30°$; calcular: $\tan^2\theta$.

A) 0,08  B) 0,12  C) 0,16  D) 0,18  E) 0,24

**12.-** Si ABCD es un rectángulo; BE = EF, calcular: $\cot(\alpha+\theta)$




A) 3/4

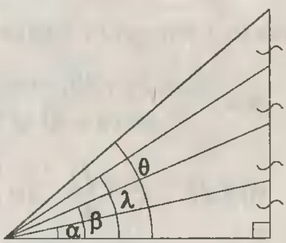
B) 4/3

C) 3/5

D) 5/3

E) 1

**13.-** Si: $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\lambda + \tan\theta = 20$, calcular: $\tan\lambda - \tan\alpha$




A) 1

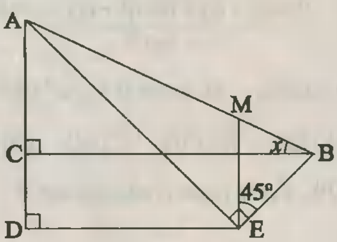
B) 1/2

C) 1/3

D) 3

E) 2

**14.-** De la figura M es un punto medio además: 2 AC = 5 ED, calcular: $\sec x$.




A) $\sqrt{111}/5$

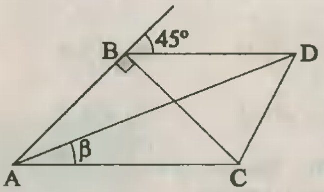
B) $\sqrt{102}/3$

C) $\sqrt{104}/5$

D) $\sqrt{106}/9$

E) $\sqrt{112}/9$

**15.-** Del gráfico mostrado AC = 2CD ; CD = BC, calcular $\cot\beta$.




A) $1+\sqrt{3}$

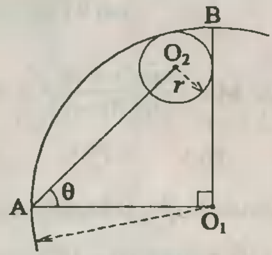
B) $2+\sqrt{3}$

C) $3+\sqrt{3}$

D) $4+\sqrt{3}$

E) $5+\sqrt{3}$

**16.-** De la figura: $AO_2 = \sqrt{7}\, r_1$, calcule $\tan\theta$.




A) $\sqrt{3}$

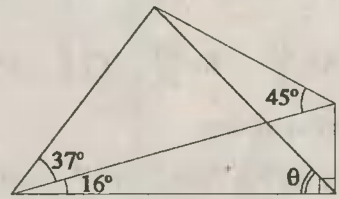
B) 1/2

C) $\sqrt{7}$

D) 1/3

E) $\sqrt{3}/2$

**17.-** Del gráfico, calcule $\tan\theta$.




A) 25/21

B) 125/121

C) 123/121

D) 103/93

E) 100/93

## R.T RECÍPROCAS

**18.-** Siendo $x$ ángulo agudo se cumple que:

$$\operatorname{sen}(x+21°)\tan(x+22°) = \cos(69° - x)$$

Calcular: $\cot\left(\dfrac{x+7°}{2}\right)$

A) $2+\sqrt{3}$  B) $2-\sqrt{3}$  C) $1-\sqrt{3}$

D) $4+\sqrt{3}$  E) $5+\sqrt{3}$

**19.-** Si se cumple que:

$$\cos x \csc y + \cot 26°\,30' = \cot 18°\,30'$$

siendo «$x$» e «$y$» agudos, calcular el valor de:

$$W = \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{3}\right)\tan x \tan y$$

A) $\sqrt{6}/4$ B) $\sqrt{3}/4$ C) $\sqrt{2}/4$

D) $\sqrt{6}/2$ E) $\sqrt{2}/2$

**20.-** Siendo «$x$» , «$y$» , «$z$» ángulos agudos que cumplen:

$$\begin{cases} \text{sen } 2x.\csc(x+y) = 1 \\ \tan 2x.\tan z = 1 \end{cases}$$

Calcular: $M = \dfrac{3\cos(x+20^\circ)}{\text{sen}(70^\circ - y)} + 2\tan(y+z)\tan x$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

**21.-** Siendo $\alpha$, $\beta$ y $\theta$ ángulos agudos:

$$\tan(30^\circ + \theta)\csc(\alpha + 18^\circ) = \sec(\beta + 27^\circ)$$

y además: $\alpha + \beta = 45^\circ$, calcular $\text{sen}(\theta + 22^\circ)$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{24}{25}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{4}{5}$ E) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

**22.-** Calcular:

$$E = \cot 1^\circ.\cot 2^\circ.\cot 3^\circ \ldots \cot 88^\circ.\cot 89^\circ$$

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) -1/2

**23.-** Si: $x$ , $y$, $z$ son ángulos relacionados así:

$$\text{sen}(x+y) - \cos(85^\circ - y - z) = 0$$

$$\tan 2x \,.\, \tan 3z = 1$$

Calcular: $M = \tan(2x + 11^\circ) - \tan(x + 2^\circ)$

A) 8/5 B) 7/12 C) 6/11 D) 5/9 E) 1/2

**24.-** Siendo $x$ un ángulo agudo, se cumple que:

$$\text{sen}\left[\cot\left(\frac{\pi}{8}\sec x\right)\right].\csc\left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\sec x\right)\right] = 1$$

calcular $\cot x$.

A) $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$ B) $\dfrac{\sqrt{23}}{11}$ C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{11}$

D) $\dfrac{\sqrt{26}}{11}$ E) $\dfrac{\sqrt{29}}{11}$

**25.-** Si: $\text{sen}(20^\circ + x)\sec(30^\circ + y) = 1$

$$\tan(30^\circ + x)\tan(40^\circ - y) = 1$$

Además «$x$» e «$y$» son agudos, calcular:

$$E = 4\,\text{sen}\, x \,.\cos(50^\circ + y)$$

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 1/2 E) $\sqrt{3}$

**26.-** Si $\alpha$ y $\beta$ son ángulos complementarios tales que:

$$\csc\alpha = \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \quad ; \quad \sec\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{x+\sqrt{3}}$$

Calcular: $E = \sec\left[\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\pi\right]$

A) 5/4 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 25/7 E) $2\sqrt{3}/3$

**27.-** Siendo $\alpha$ y $\beta$ ángulos agudos tales que:

$$\cos(\alpha + 3\beta).\csc(2\alpha + 3\beta) = 1$$

Calcular: $N = \dfrac{2\cos(2\alpha + 4\beta) + \text{sen}(\alpha + 2\beta)}{\sec(\alpha + 2\beta + 15^\circ)}$

A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ D) 1 E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**28.-** Si: $\alpha$, $\beta$, $\theta$ son ángulos agudos, tales que:

$$\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\theta) + \tan(\beta+\alpha) - \cos\beta}{\tan\theta} = 3$$

Calcular: $M = \text{sen}\,\theta + \csc^4(\theta/2 + 30^\circ)$

A) 5/2 B) 17/2 C) 9/2 D) 21/2 E) 13/2

**29.-** En la figura calcular $\tan\theta$.

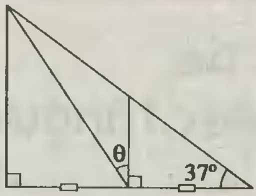
A) 1/2

B) 2/3

C) 3/4

D) 4/5

E) 1/4




**30.-** Calcular $\tan\alpha$ , si CD = 3 AB

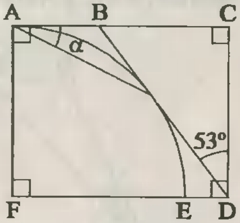
A) 1/3

B) 2/3

C) 3/4

D) 1/2

E) 2




**31.-** En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), se cumple que: $8ab = c^2$. Según esto determinar tan (B - A)

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $\sqrt{15}/4$ D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{2}$

**32.-** Siendo $x, y, z$ ángulos agudos que cumplen:

$$\text{sen } 40° = \cos x \quad ; \quad \tan 70° = \cot y \quad ;$$
$$\sec 10° = \csc z$$

Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{2\text{sen}(x+y+z) + 6\text{sen}(x-y)}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) $\sqrt{2}$

**33.-** Calcular $x$ , si es agudo, de la siguiente igualdad:

$$\text{sen}(x + \text{sen } x)\csc(x + \cos \pi/12) = 1$$

A) $\pi/12$ B) $5\pi/12$ C) $\pi/6$ D) $\pi/3$ E) $\pi/9$

**34.-** Siendo $y$ agudo, tal que:

$$\tan(60° - x) = \cot(x + 30°)\tan(y + 20°)$$

$$F = \frac{\text{sen}(x+y+50°)\cos(20°+y)}{\cos(y-x-10°)}$$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{6}/3$ D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{2}$

**35.-** Simplificar:

$$J = \frac{a^2 - b^2\cos 50° + ab(\text{sen } 40° - 1)}{a^2 + b^2\text{ sen } 40° + ab(\cos 50° + 1)}$$

A) $\dfrac{a-b}{a+ab}$ B) $\dfrac{2a-b}{a-b}$ C) $\dfrac{a-b}{a+b}$

D) $\dfrac{a+b}{a-b}$ E) $ab - 1$

**36.-** Del gráfico, calcular: $M = \cot\alpha - 2\cot\theta$

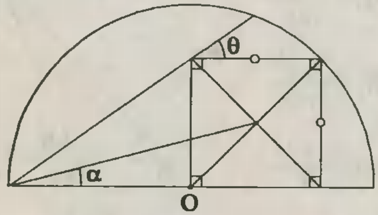
A) $\sqrt{2} - 1$

B) 1

C) $\sqrt{2} + 1$

D) $\sqrt{2}/2$

E) $\sqrt{2-\sqrt{2}} + 1$




**37.-** Del gráfico calcular $\sqrt{\tan x}$

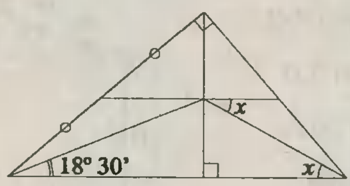
A) sen $\pi/3$

B) sen $\pi/6$

C) sen $\pi/4$

D) sen $\pi/8$

E) sen $\pi/12$




**38.-** De la figura, calcular $\tan\theta$

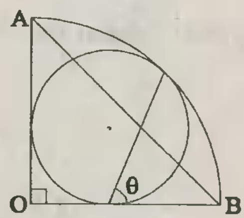
A) $\sqrt{2}$

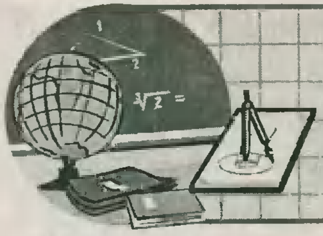
B) $\sqrt{2} + 2$

C) $\sqrt{2} - 1$

D) $\sqrt{2} + 1$

E) $\sqrt{2} - 2$





# Resolución de Triángulos Rectángulos

**CAP. 4**

**01.-** En la figura mostrada: BD = AD , AC = $b$ y BC = $a$. Calcular cot θ.

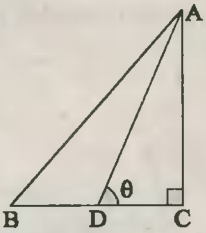
A) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

B) $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

C) $\dfrac{a^2+b^2}{b}$

D) $2ab$

E) $\dfrac{a+b}{2ab}$




**02.-** En la figura: PB = AQ = L. Se pide expresar PQ en función de «L», si además se sabe que ABCD es un cuadrado.

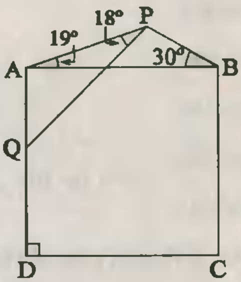
A) 15L/3

B) 7L/3

C) 5L/2

D) 3L

E) L/3




**03.-** Del gráfico, calcular $T = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}$

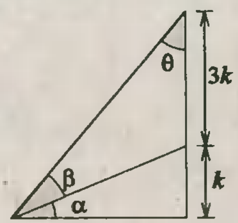
A) 3

B) 1/3

C) 2

D) 1/2

E) 1




**04.-** En la figura ABCD es un trapecio rectángulo. Asimismo BM = MC y AD = 2BC; calcular tan α.

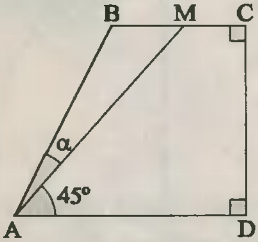
A) 1/2

B) 1/3

C) 1/4

D) 1/5

E) 1/6




**05.-** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $L$ y un ángulo agudo mide «θ». Calcular la longitud de la bisectriz relativa a la hipotenusa.

A) $\dfrac{L\operatorname{sen}\theta}{1+\tan\theta}$

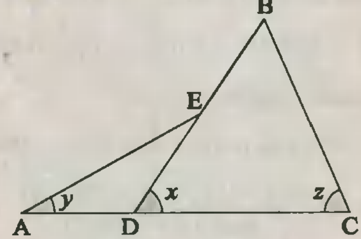
B) $\dfrac{L\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta}{1+\tan\theta}$

C) $\dfrac{L\sqrt{2}\tan\theta}{1+\tan\theta}$

D) $\dfrac{L\sqrt{2}\cot\theta}{1+\cot\theta}$

E) $\dfrac{L\sqrt{2}\cos\theta}{1+\tan\theta}$

**06.-** De la figura BC = 2 y E es punto medio de $\overline{BD}$ . Calcular AD en función de $x$, $y$, $z$.



A) sen $z(\cot x + \cot y)$

B) sen $z(\cot x - \cot y)$

C) sen $z(\cot y - \cot x)$

D) sen $z(\tan y - \tan x)$

E) sen $z(\tan x - \tan y)$

**07.-** En la figura AC = 7, BC = 5 y BM = $x$. Calcular: $H = x^2 + \cot^2 \theta$.

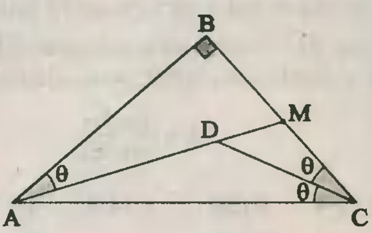
A) 10

B) 9

C) 5

D) 3

E) 7




**08.-** En la figura, las regiones triangulares ABP, PBQ y QBR son equivalentes. Si sen $\alpha = 1/6$, calcule PQ en función de «$h$».

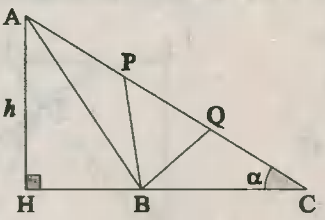
A) $h/2$

B) $2h$

C) $3h$

D) $4h$

E) $h/3$




**09.-** En la figura mostrada M es punto medio de AB y ABCD es un cuadrado. Si además se sabe que $\overset{\frown}{ABC}$ es un cuadrante, calcular cot θ.

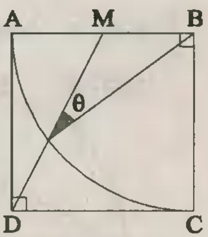
A) 1

B) 2

C) 3

D) 1/2

E) 1/3




**10.-** En la figura se tiene el cuadrante AOB en donde M y C son puntos de tangencia. Se pide determinar el valor de: E = tan θ - 1.

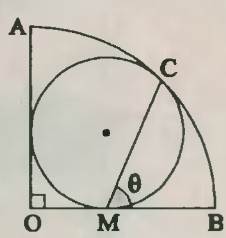
A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}/2$

E) $\sqrt{3}/2$




**11.-** En el gráfico mostrado, se sabe que FD = DC; calcular tan θ.

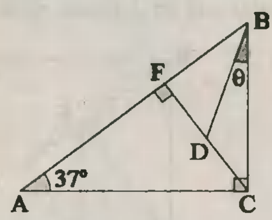
A) 3/17

B) 17/3

C) 17/6

D) 6/17

E) 11/17




**12.-** Si CE = $a$ y ET = $b$, calcular $k$, si:

$$k = \frac{\text{sen}(\theta + \alpha)}{\text{sen}(\theta - \alpha)}$$

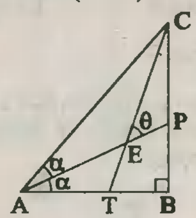
A) 1/2

B) 2

C) 3

D) 1/3

E) 1




**13.-** En el gráfico mostrado se sabe que: AB = CD. Calcular el valor de: tan θ + tan ϕ.

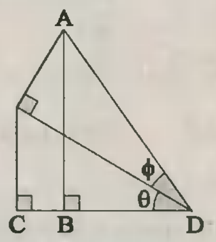
A) 3

B) 3/2

C) 1/2

D) 1

E) 2



**14.-** En la figura, CM es mediana. Calcular $k$,

si: $k = \dfrac{2\tan\alpha + \cot\alpha}{\cot\beta}$

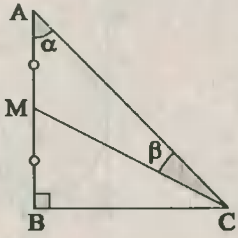
A) 1/3

B) 1

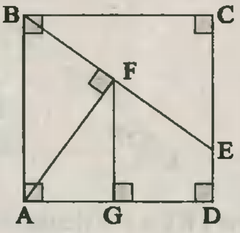
C) 1/4

D) 2

E) 1/2




**15.-** En el gráfico mostrado ABCD es un rectángulo. Además se sabe que: CE = 2ED = 2. Calcular AG en términos de θ.




A) 2 sen θ tan θ

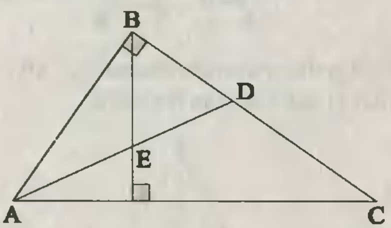
B) 2 sen θ cos θ

C) 3 sen θ cos θ

D) 4 csc θ sec θ

E) sen θ cos θ

**16.-** Calcular $x$ en función de $n$ y θ siendo BE = $x$; CD = $n$ y $m\angle$BAC = θ. Además se sabe que AD es bisectriz.




A) $n$ sen θ

B) $n$ cos θ

C) $n$ tan θ

D) $n$ sen θ cos θ

E) $n$ sec θ

**17.-** En la figura T es punto de tangencia. Se pide determinar el valor de tan θ.

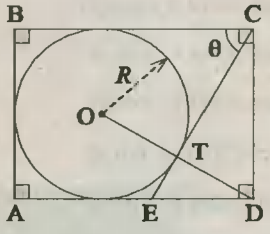
A) 1/2

B) $\sqrt{3}$

C) 1

D) $\sqrt{3}/3$

E) 7/24




**18.-** Interiormente a un triángulo rectángulo ABC (B = 90º), se traza otro triángulo rectángulo AMD (M = 90º), donde M está en $\overline{BC}$ y D en $\overline{AC}$. Si además se sabe que: AD = 3DC y $m\angle$MAD = $m\angle$DMC = α; calcular:

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

A) 2/3 B) 1/2 C) 4/3 D) 1/3 E) 2

**19.-** A partir de la figura mostrada calcular:

$$A = \tan\theta \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$$

ABCD es un cuadrado, ADC es un sector circular y T es un punto de tangencia.

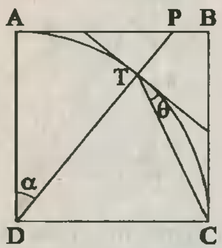
A) 0

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 2




**20.-** En el gráfico se sabe que: CD = DO. Se pide calcular el valor de:

$$E = \cot^2\alpha - 2\cos\alpha$$

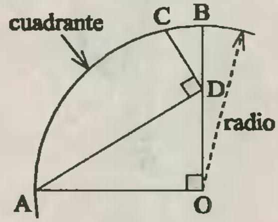
A) 1/2

B) 1

C) 2

D) 1/3

E) 3



**21.-** En la figura mostrada se verifica que:

$$\tan\theta + \tan\beta = 5/3$$

Calcular: $\quad E = 3\tan\theta + 1$

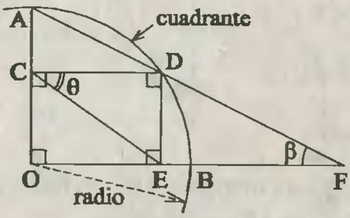
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5




**22.-** Se tiene un trapecio cuyos lados no paralelos forman con la base ángulos $\theta$ y $2\theta$. Calcular la longitud del lado no paralelo que forma al menor ángulo, sabiendo que el otro lado no paralelo mide $m$.

A) $2m\,\text{sen}\,\theta$ B) $2m\cos\theta$ C) $m\tan\theta$

D) $m\sec\theta$ E) $m(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)$

**23.-** En la figura mostrada MNPQ es un cuadrado, determine el valor de: $E = \tan\theta - \cot\phi$. Además se sabe que O y B son centros de dos arcos de circunferencia del mismo radio.

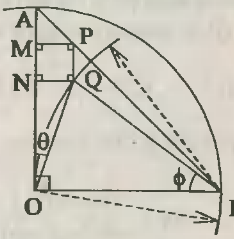
A) 1

B) 2/3

C) 1/3

D) -2

E) -1




**24.-** En un triángulo acutángulo ABC, calcular la altura relativa al lado $\overline{AC}$ si el área de la región triangular es de $56\,m^2$. Además se verifica que:

$$\cot A + \cot C = 7$$

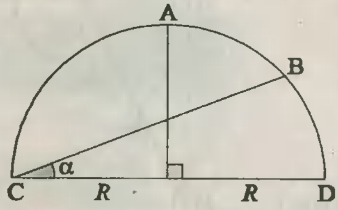
A) $4m$ B) $3m$ C) $2m$ D) $6m$ E) $8m$

**25.-** En el interior de un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica un punto M tal que las áreas de las regiones ABM y AMC son iguales. Si además: $m\angle BAM = m\angle BCA = \theta$; calcular:

$$F = \cos 2\theta . \csc^2\theta$$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 1/4 E) 1/5

**26.-** En la figura mostrada, se pide calcular la longitud de $\overline{AB}$ en términos de $\alpha$ y $R$, si además se sabe que $\overline{CD}$ es diámetro.

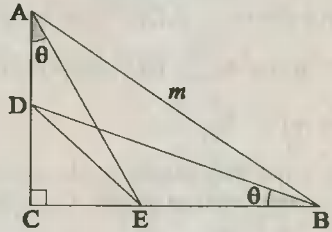



A) $R\sqrt{1-\cos 2\alpha}$ D) $\sqrt{2}\,R\sqrt{1-\text{sen}\,2\alpha}$

B) $R\sqrt{1-\text{sen}\,2\alpha}$ E) $R\sqrt{\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha}$

C) $\sqrt{2}\,R\sqrt{1-\cos 2\alpha}$

**27.-** Del gráfico, expresar DE en términos de $\theta$ y $m$.




A) $m\,\text{sen}\,\theta$ D) $m\cot\theta$

B) $m\cos\theta$ E) $m\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

C) $m\tan\theta$

**28.-** A partir de la figura mostrada, se pide calcular: $\tan\theta$.

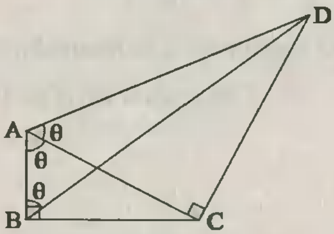
A) 1,5

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

D) 2

E) $\sqrt{5}$



**29.-** Siendo ABCD un cuadrado, calcular «$a$» para que se verifique la relación:

$$\tan x = \frac{a^3+1}{a+1}$$

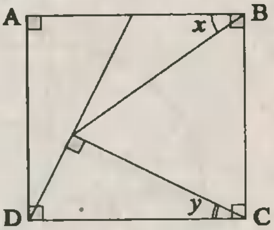
A) sen $y$

B) cos $y$

C) tan $y$

D) cot $y$

E) sen $y$ cos $y$




**30.-** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide «$h$» y uno de sus ángulos agudos «$\phi$». Se ubica en su interior un rectángulo cuyos lados adyacentes se superponen sobre los catetos del triángulo. Calcular el área de la región rectangular, si la diagonal del rectángulo es perpendicular a la hipotenusa del triángulo.

A) $h^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$ D) $h^2(\operatorname{sen}\phi + \cos\phi)$

B) $h^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi$ E) $h^2(\operatorname{sen}2\phi + \cos 2\phi)$

C) $h^2 \operatorname{sen}^3\phi \cos^3\phi$

**31.-** Dos polígonos regulares de «$m$» y «$n$» lados tienen perímetros iguales. Calcular la relación de sus áreas.

A) $\frac{m}{n}\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{n}$ D) $\frac{m}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\csc\frac{\pi}{n}$

B) $\frac{n}{m}\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\csc\frac{\pi}{n}$ E) $\frac{n}{m}\cos\frac{\pi}{m}\sec\frac{\pi}{n}$

C) $\frac{m}{n}\sec\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}$

**32.-** A partir del cubo mostrado, calcular:

$$M = \operatorname{sen}\theta \sec\alpha \sec\beta$$

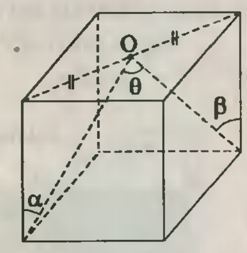
A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{2}$

E) $\sqrt{5}$




**33.-** En un triángulo ABC, la bisectriz interior CD (D en AB), verifica que:

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$$

Calcular la medida del ángulo C. Sugerencia, utilizar: sen $2\alpha = 2$ sen $\alpha$ cos $\alpha$.

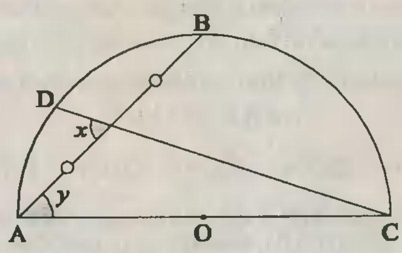
A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

**34.-** En un triángulo rectángulo ABC, recto en «C», se toma un punto P de $\overline{AC}$, del cual se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (Q en $\overline{AB}$). Si el área de la región cuadrangular BCPQ es ocho veces el área de la región triangular AQP, calcular AP, si además se sabe que: AB = 24.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

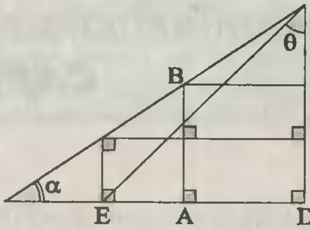
**35.-** A partir del gráfico adjunto, calcular:

$$M = \frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\operatorname{sen} x(x-y)}$$




A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 2/5

**36.-** Del gráfico adjunto, calcular «AE» en términos de «α» y «θ», siendo ABCD un cuadrado de lado igual a la unidad.




A) $\tan\alpha \tan\theta$  B) $\tan\alpha \tan\theta - 1$

C) $\tan\alpha \tan\theta + 1$  D) $(1 + \tan\alpha)\tan\theta - 1$

E) $(1 + \tan\alpha)\tan\theta + 1$

**37.-** Del gráfico, el equivalente de $4S\tan^2 x$ en términos de «$m$» es:

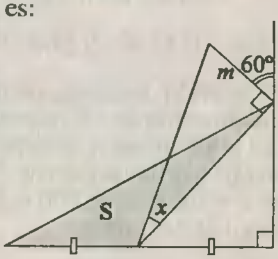
A) $\sqrt{3}\,m^2$

B) $m^2$

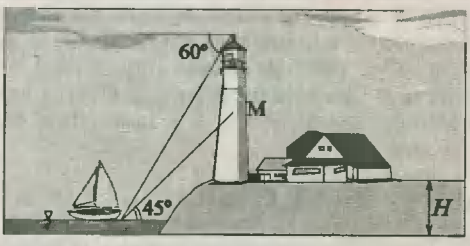
C) $\sqrt{3}\,m^2/2$

D) $m^2/2$

E) $2m^2$




**38.-** De la figura mostrada, calcular la altura del faro en términos de «H», siendo «M» punto medio de aquel.

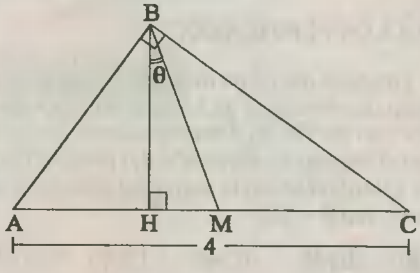



A) $(\sqrt{3} + 1)H$  D) $2(\sqrt{3} - 1)H$

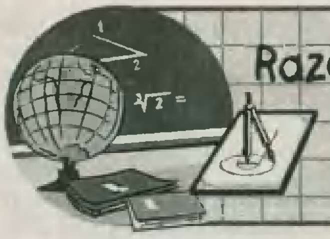
B) $2(\sqrt{3} + 1)H$  E) $(2\sqrt{3} + 1)H$

C) $(\sqrt{3} - 1)H$

**39.-** En la figura mostrada, calcular «$\cos\theta$», si BM es mediana y además se sabe que el área de la región triangular ABC es $1u^2$.




A) 1/2  B) 1/3  C) 1/4  D) 1/5  E) 1/6



# Razones Trigonométricas en Situaciones Contextualizadas

## CAP. 5

**ÁNGULOS VERTICALES**

**01.-** Desde el pie de un muro de 4 *m* de altura el ángulo de elevación de la parte superior de un edifico es de 53°. Si desde la parte superior del muro el ángulo de elevación del punto anterior es $\beta$, calcular (en *m*) la altura del edificio. Considere: $\tan\beta = 1{,}2$.

A) 30 B) 38 C) 42 D) 40 E) 20

**02.-** Desde un punto sobre el suelo se ve lo alto de una casa con un ángulo de elevación $\theta$. Si nos acercamos una distancia igual al triple de su altura, el ángulo de elevación de la parte alta de la casa es el complemento de $\theta$. Entonces el valor de: $\cot\theta - \tan\theta$ será:

A) 1 *m* B) 2 *m* C) 3 *m* D) 4 *m* E) 5 *m*

**03.-** Un turista contempla un monumento sobre un pedestal con un ángulo de observación de 8°. Si la parte más alta del pedestal lo observa con un ángulo de elevación de 45°, determinar la altura del monumento, si se sabe que la altura del pedestal es de 18 *m*.

A) 1 *m* B) 8 *m* C) 2 *m* D) 3 *m* E) 6 *m*

**04.-** Una persona sube por una loma inclinada un ángulo de 30° respecto de la horizontal. Desde el pie de la loma observa la parte superior de una antena, ubicada en la cima, con un ángulo de elevación de 45°. Luego de subir $4\sqrt{3}$ *m* hacia la antena, el nuevo ángulo de elevación es de 60°. Calcular (en *m*) la altura de la antena.

A) 2 B) 4 C) 5 D) 1 E) 7

**05.-** Una piedra se encuentra a una distancia de 9 *m* de un edificio de 4 pisos. Desde la parte superior e inferior del segundo piso, se observa dicha piedra con ángulos de depresión $\beta$ y $\theta$ respectivamente. Asimismo, un observador ubicado en la azotea localiza a la piedra con un ángulo de depresión «$\alpha$»; calcular (en *m*) la altura del edificio, si se verifica que:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\theta = 21/4$$

A) 11 *m* B) 12 *m* C) 13 *m* D) 14 *m* E) 15 *m*

**06.-** Un avión desciende rectilíneamente, con una inclinación de 53° respecto de la horizontal. El piloto observa delante de él la pista de aterrizaje bajo un ángulo de 23°. Si en ese instante el avión está a 1 000 *m* de altura, calcular la longitud de la pista.

A) 880 *m* B) 980 *m* C) 750 *m*

D) 650 *m* E) 800 *m*

**07.-** El asta de una bandera está colocada al borde de un precipicio de 40 *m* de altura que se encuentra a la orilla de un río de 30 *m* de ancho. Una persona al lado opuesto del río observa el asta bajo un ángulo de 8°30'. Considerando: tan 61° 30' = 1,8; la longitud del asta será:

A) 41 *m* B) 14 *m* C) 10 *m* D) 7 *m* E) 15 *m*

**08.-** Desde dos aviones que vuelan a la misma altura, con la misma velocidad y separados una distancia determinada, se puede observar un punto «P» en el suelo, con ángulos de depresión «$\theta$» y «$\alpha$» ($\theta > \alpha$) respectivamente. Cuando el avión que estuvo más lejos de «P», se ubica en la misma vertical de aquel, desde «P» se observa al otro avión con un ángulo de elevación «$\phi$». Calcular:

$$M = \tan\phi\,(\cot\alpha - \cot\theta)$$

A) 2/3 B) 1/2 C) 1 D) 5/2 E) 3/5

**09.-** Un basquetbolista observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 37°. Si el deportista dista 8 *m* del árbol, calcular el valor del ángulo de observación del árbol sabiendo que su estatura es la cuarta parte de la del árbol.

A) 42° B) 48° C) 51° D) 58° E) 64°

**10.-** Las caras de la pirámide de Kefren en el valle del Nilo, están inclinadas aproximadamente 53° con la horizontal. A una distancia de 84 *m* directamente a partir de la base, el ángulo de elevación a la cúspide de la pirámide es de 37°. ¿Cuánto vale (en *m*) la extensión de la cara, desde la base hasta el vértice de la pirámide?

A) 140 B) 150 C) 160 D) 170 E) 180

**11.-** Desde la base de una colina inclinada un ángulo «$\alpha$» respecto a la horizontal, una persona observa la parte superior de una torre de altura «$h$» con ángulo de elevación «$2\alpha$». ¿Qué distancia debe ascender la persona sobre la colina para que el nuevo ángulo de elevación sea «$3\alpha$»?

A) $h$ sen $\alpha$ B) $0{,}5\,h\cos\alpha$ C) $2h\tan\alpha$

D) $2h\cot\alpha$ E) $0{,}5\,h\csc\alpha$

**12.-** La elevación angular de una torre $\overline{CD}$ desde un lugar A al sur de ella es 30° y desde un lugar B hacia el oeste, la elevación es 18°. Si AB = $a$, se pide calcular la altura de la torre.

A) $\dfrac{a\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{a}$ B) $\dfrac{a\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$ C) $\dfrac{a\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$

D) $\dfrac{a\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$ E) $\dfrac{a\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$

**13.-** Desde la base de un faro parten 3 personas A, B y C siguiendo las direcciones sur, oeste y el tercero siempre equidistando de los otros dos pero alineado con ellos. Si en un instante dado A y B observan al faro con ángulos $\theta$ y $\phi$ respectivamente, ¿cuál es la cotangente del ángulo de elevación con el que observa «C» al faro?

A) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\phi}$

B) $\dfrac{1}{4}\sqrt{\cot^2\theta-\cot^2\phi}$

C) $\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\phi}$

D) $\dfrac{1}{8}\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\phi}$

E) $\sqrt{\cot^2\theta-\cot^2\phi}$

**14.-** Un asta de bandera se levanta en el centro de un terreno que tiene forma de paralelogramo y que es vista con ángulos de elevación «$\alpha$» y «$\theta$» desde dos de sus vértices consecutivos. Calcular la relación entre las diagonales del paralelogramo.

A) $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ B) $\dfrac{\csc\alpha}{\csc\theta}$ C) $\dfrac{\sec\alpha}{\sec\theta}$

D) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ E) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\theta}$

**15.-** La elevación angular de una torre desde un lugar «A» al sur de ella es 30° y desde un lugar «B» hacia el oeste de «A» la elevación es 18°. Si AB = $40\sqrt{2\sqrt{5}+2}$ *m*, calcular (en *m*) la altura de la torre.

Considerar: sen 18° = $\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}$

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 10

**16.-** Un caminante observa un mástil con un ángulo de elevación $\alpha$. Cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. ¿Cuánto mide $\alpha$?

A) 60°  B) 30°  C) 45°  D) 37°  E) 53°

**17.-** Desde un punto situado a 50 *m* del pie de un edificio se observa con un ángulo de 9° el asta de una bandera ubicada en la parte superior de aquel. Asimismo, la parte inferior del asta se observa con un ángulo de elevación de 36°. Calcular (en *m*) la longitud del asta (considerar cot 54° = 0,72).

A) 18  B) 15  C) 13  D) 14  E) 12

**18.-** Una persona colocada en la misma horizontal del pie de una torre, observa la parte superior de ésta con un ángulo de elevación de 37°. ¿Cuántos *metros* debe caminar hacia la torre para estar a 180 *m* de ella y divisar su cúspide con un ángulo de elevación igual al complemento del anterior?

A) 120  B) 140  C) 160  D) 180  E) 200

**19.-** Desde lo alto de un edificio se observa un automóvil con un ángulo de depresión de 37°. Si dicho automóvil se desplaza rectilíneamente con una rapidez constante acercándose 28 *m* al edificio es observado, desde la azotea, con un ángulo de depresión de 53°. Si de esta posición tarda en llegar al edificio 6 *s*, calcular (en *m/s*) la rapidez del automóvil.

A) 8  B) 12  C) 3  D) 4  E) 6

**20.-** Desde la parte superior de un acantilado se divisa un barco en el mar, con un ángulo de depresión «$\alpha$». Un aeroplano que viaja horizontalmente al mismo nivel del acantilado, observa al barco y a la base de aquel con ángulos de depresión «$2\theta$» y «$\theta$» respectivamente ($2\theta < 90°$). Calcular: sen $2\theta$ cot $\alpha$.

A) 1  B) 2  C) 1/2  D) 3  E) 3/2

**21.-** Desde un punto al sur de un árbol se observa la parte superior del mismo con un ángulo de elevación «$\alpha$» encontrándose dicho punto a una distancia «*a*» respecto de la base. Si desde la parte superior se observa, con un ángulo de depresión «$\beta$», otro punto ubicado al norte del árbol, ¿a qué distancia se encuentra dicho punto de la base?

A) tan $\alpha$ tan $\beta$  B) cot $\alpha$ cot $\beta$  C) tan $\alpha$ cot $\beta$

D) cot $\alpha$ tan $\beta$  E) tan $\alpha$ sen $\beta$

**22.-** Desde lo alto de un acantilado se observa, en dirección sur, una boya con un ángulo de depresión de 45° y en dirección este un bote con un ángulo de depresión de 30°. Si la distancia que separa a la boya y al bote es de 80 *m*, calcular la altura del acantilado.

A) 20 *m*  B) 24 *m*  C) 30 *m*  D) 40 *m*  E) 48 *m*

**23.-** Un poste se encuentra equidistante de otros dos iguales pero de menor altura. Un observador, que ubicado en la misma línea y a un extremo de los tres, visualiza con ángulos de elevación $\alpha$, $\theta$, $\beta$ respectivamente ($\beta < \alpha < \theta$) sus extremos superiores. Calcular la altura del poste mayor si los más pequeños miden *h*.

A) $h/2$ (cot $\alpha$ + cot $\beta$)tan $\theta$

B) $h$ (cot $\alpha$ + cot $\beta$)tan $\theta$

C) $h/2$ (cot $\alpha$ - cot $\beta$)tan $\theta$

D) $h/2$ (cot $\theta$ + cot $\beta$)cot $\alpha$

E) $h/2$ (cot $\alpha$ - cot $\beta$)cot $\theta$

**24.-** Un avión y un barco viajan en la misma dirección. En la primera observación efectuada desde el barco se ubica al avión adelante y con un ángulo de elevación de 53°, marcando dicho punto con una boya. En la segunda observación lo visualizan con un ángulo de elevación de 37°. Si la velocidad del avión es 4,5 veces que la del barco, calcular la cotangente del ángulo de depresión con la cual se ve a la boya desde la segunda posición del avión.

A) 1  B) 2  C) 3  D) 2,5  E) 1,5

**ÁNGULOS HORIZONTALES**

**25.-** A las 2 de la tarde, desde un barco se observa hacia el norte dos faros alineados. Luego de navegar hacia el NE, a las 4 de la tarde se observa a los faros en las direcciones O$\alpha$S y N$\alpha$O. Nuevamente a las 10 *pm* desde el barco se observa a los faros en las direcciones: O$\beta$S y N$\beta$O. Si la distancia entre los faros es de 20 *km* y el barco navega a velocidad constante, calcular el valor de la rapidez (en *km/h*)

A) $\frac{25\sqrt{2}}{17}$ B) $\frac{5\sqrt{34}}{34}$ C) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$

D) $\frac{50}{17}$ E) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

**26.-** Un barco se desplaza 40 *km* siguiendo la dirección S60°O con respecto a un puerto. Luego se desplaza 20 *km* según el rumbo N60°O. Calcular (en *km*) la distancia del puerto a su posición final.

A) $20\sqrt{7}$ B) $10\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{7}$

D) $15\sqrt{7}$ E) $25\sqrt{7}$

**27.-** Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda en las siguientes proposiciones:

I. N $\frac{1}{4}$NE es la notación de 11°15' al norte del nor-este.

II. E15°N es la notación de 15° al norte del este.

III Si el rumbo de «A» respecto de «B» es N37°E, entonces el rumbo de «B» respecto de «A» es S37°O.

IV Si la posición de «P» respecto de «Q» es NE$\frac{1}{4}$S, entonces la posición de «Q» respecto de «P» es SO$\frac{1}{4}$S .

A) FFVF B) VFVF C) VVFF

D) VFFF E) FVVV

**28.-** En un instante determinado el vector posición de una araña es (3; 4; 40), desde donde observa tres moscas, en el suelo exactamente en los puntos (0; 0; 0), (3; 0; 0) y (0; 4; 0), bajo ángulos de depresión $\alpha$, $\beta$, $\theta$ respectivamente. Calcular: $M = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta$

A) 84/5 B) 73/3 C) 94/3 D) 91/3 E) 88/3

**29.-** Un niño se encuentra entre dos árboles, observando un ave en cada copa de los árboles. Si el ángulo que forman las visuales es 135°, determinar la distancia en *metros* entre las aves, si además se sabe que el niño se encuentra, de éstas, a una distancia de $7\sqrt{2}$ y 17 *metros* respectivamente.

A) 25 B) 24 C) $24\sqrt{2}$ D) $25\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{3}$

**30.-** Desde un punto exterior a la luna, se la observa con un ángulo «2θ». Encontrar la menor distancia a la que se encuentra dicho punto de la superficie lunar, si el radio de la luna es igual a «*r*».

A) $r\sec\theta$ B) $r(\sec\theta+1)$ C) $r(\csc\theta-1)$

D) $r\tan\theta$ E) $2r\cot 2\theta$

**31.-** Dos móviles parten de un punto, el primero con dirección NβE y el segundo con rumbo S2βE. Cuando el primero recorre 4 *km*, el segundo recorre 4,2 *km*. Si la distancia que los separa es de 5,8 *km*, calcular $\tan^2\beta$.

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/5

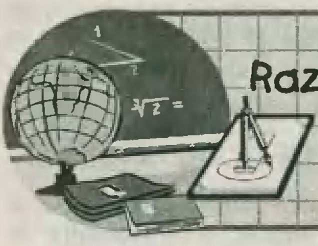
**32.-** Una persona parte de una ciudad A y llega a una ciudad B describiendo una semicircunferencia de longitud «*l*». Si la ciudad B se ubica en la dirección EθN respecto de la ciudad A, calcular la menor distancia de la persona a la ciudad A, cuando ésta parte rectilíneamente de B hacia el Sur.

A) $l/\pi\,\text{sen}\,\theta$ B) $l/2\pi\,\text{sen}\,\theta$ C) $2l/\pi\cos\theta$

D) $l/2\pi\cos\theta$ E) $l/\pi\cos\theta$

**33.-** Un bote navega rectilíneamente hacia el este a $2\sqrt{15}$ *millas/h*. A las 13:15 *horas* observa la cúspide de un acantilado en el rumbo NE$\frac{1}{4}$E con un ángulo de elevación de 30°. A las 13:45 *horas* observa otra vez la misma cúspide que ahora se visualiza en el rumbo NO$\frac{1}{4}$N y con un ángulo de elevación de 60°. Calcular (en *m*) la altura del acantilado.

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) 5 C) 3 D) $3\sqrt{3}$ E) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$



# Razones Trigonométricas de Ángulos en el Plano Cartesiano

**CAP. 6**

## R.T. DE UN ÁNGULO EN P. NORMAL

**01.-** Si: $0 < \theta < \alpha < 2\pi$

y además: $\operatorname{sen}\theta + \sec\alpha = 0$

Calcular: $M = \csc\dfrac{\alpha}{6} + \cot\dfrac{\theta}{2} - \cos\dfrac{2(\alpha+\theta)}{9}$

A) 1 B) 5/2 C) 2 D) 1/2 E) 3/2

**02.-** Si: $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, hallar "$\tan x$" sabiendo que: $M = (3\cot x + 2\tan x)/2$

toma su máximo valor.

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}/2$ C) $-\sqrt{6}/2$

D) $-\sqrt{3}/4$ E) $-\sqrt{6}/4$

**03.-** Siendo $\theta$ un arco positivo $(0 < \theta < 2\pi)$, donde se cumple:

$$\sqrt{\operatorname{exsec}2\theta} + \sqrt{\operatorname{vers}\alpha - 1} \le \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

Calcular: $k = \tan\theta.\operatorname{exsec}\dfrac{\alpha}{2}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**04.-** Si: $\sqrt{\cos^2\theta} + \cos\theta = 0$

y: $\sqrt{4 - \tan\theta} + \sqrt{\tan\theta - 4} = \tan\alpha + 2$

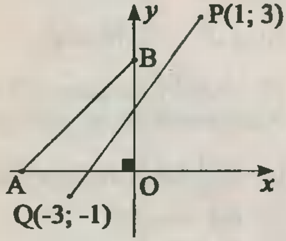
Siendo: $\alpha \in$ IIC; determinar: $E = (\operatorname{sen}\theta\cos\alpha)^2$

A) 8/5 B) 16/85 C) 19/15

D) 19/85 E) 17/19

## SITUACIONES GRÁFICAS

**05.-** A partir de la figura, determinar el área de la región triangular AOB, si el punto medio del segmento PQ es el baricentro del triángulo AOB.




A) 3/4

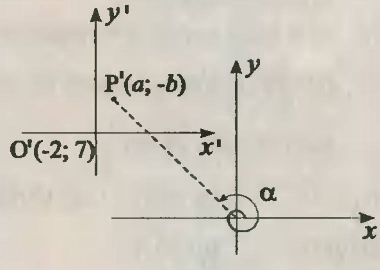
B) 1/2

C) 2/3

D) 1/4

E) 9/2

**06.-** En el siguiente gráfico, evaluar "$\tan\alpha$"




A) $\dfrac{7-b}{a-1}$

B) $\dfrac{7-b}{a}$

C) $\dfrac{5+b}{a-b}$

D) $\dfrac{7b}{a}$

E) $\dfrac{7-b}{a-2}$

**07.-** Sea $\alpha$ un ángulo positivo menor que una vuelta cuyo lado final no cae en el IC, y otro ángulo: $\theta \in \langle -180°; 0\rangle$, con el cual se verifica que:

$$1 + \sqrt{-\cos^2\theta} = \tan\alpha$$

Calcular: $M = \dfrac{\tan\alpha + \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**08.-** A partir de la figura mostrada, calcular: E = tan $\alpha$ + cot $\alpha$, si se sabe que "G" es el baricentro del triángulo ABC.

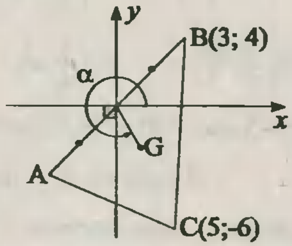
A) - 61/30

B) - 67/30

C) - 71/30

D) - 73/30

E) -74/30




**09.-** Del gráfico mostrado, calcular el valor de: cot $2\theta$; si se sabe que: PO = 41

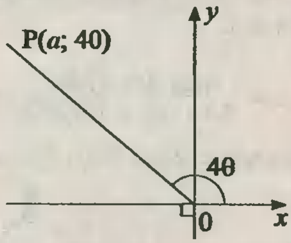
A) -4/5

B) 4/5

C) 3/5

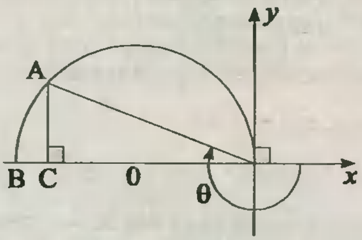
D) -3/5

E) 3/4




**10.-** En el gráfico mostrado, "O" es el centro de la semicircunferencia. Si BC = 0,2AC, evaluar la expresión:

$$M = 5\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) . \csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$




A) 26 B) 23 C) 25 D) 4 E) 10

**11.-** En la figura mostrada las coordenadas del punto "R" son ($6\sqrt{3}$ ;8). Determinar la distancia del baricentro de la región "MON" al punto "R".

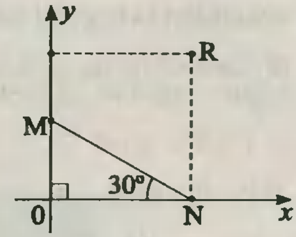
A) $\sqrt{21}$

B) $4\sqrt{21}$

C) $2\sqrt{21}$

D) 21

E) $2\sqrt{42}$




**12.-** Del gráfico, determinar: N = 4 cot $\theta$ + 3

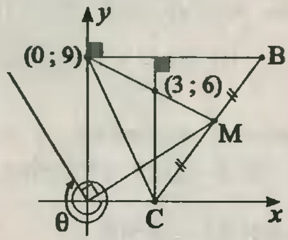
A) 0

B) -1

C) -2

D) -3

E) -4




**13.-** Del gráfico siguiente. Determine el valor de: cot $2\theta$ - cot $\phi$.

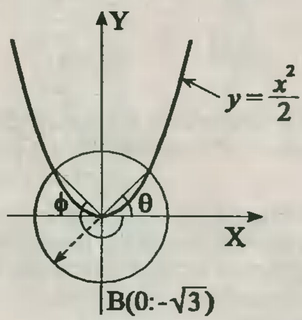
A) $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{6\sqrt{2}}{3}$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$




**14.-** En la figura: AB = 4BC. Se pide encontrar:

P = 16 tan $\theta$ + 13 cot $\theta$

donde "G" es el baricentro de la región triangular sombreada.

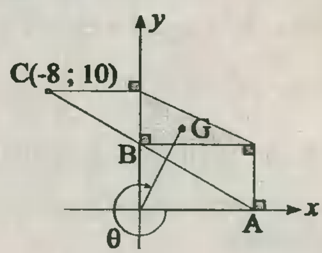
A) 27

B) 28

C) 29

D) 30

E) 32



## PROBLEMAS CONDICIONALES

**15.-** Se tiene un ángulo $\theta$ en posición canónica que verifica las siguientes condiciones:

i) $|\cos\theta| = -\cos\theta$

ii) $|\tan\theta| = \tan\theta$

iii) $|\text{sen}\,\theta| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Evaluar: $M = \sqrt{5}\csc\theta + 9\cos\theta$

A) -11 B) -10 C) -9 D) -8 E) -6

**16.-** Sabiendo que: $\tan\theta = -\dfrac{2}{3}$ ; calcular el valor de "sec θ - csc θ", verificándose además:

$\cot\theta \,.\, \text{sen}\,\theta \leq -\left|\dfrac{1}{2}\text{sen}\,\theta\right|$

A) $\dfrac{-5\sqrt{13}}{13}$ B) $\dfrac{-5\sqrt{13}}{6}$ C) $-13\sqrt{5}$

D) $\dfrac{-5\sqrt{13}}{3}$ E) $-13\sqrt{7}$

**17.-** Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta:

$$L: 2x - 3y + 12 = 0$$

comprendida en el segundo cuadrante por los ejes coordenados y la tangente del ángulo en posición normal cuyo lado final pasa por el centro de la circunferencia.

A) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$; -2/3

B) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$; 3/2

C) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{13}$ ; -2/3

D) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$; -3/2

E) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{13}$ ; -1

**18.-** Si: $\left|\text{sen}\,\theta - \dfrac{3}{5}\right| = \dfrac{2}{5}$ donde $\theta$ es un ángulo agudo, determinar la intersección entre los intervalos:

$$[\pi\,\text{sen}\,\theta\,;\,\pi\csc\theta] \text{ y } [0\,;\,\pi].$$

A) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{5}\right]$ B) $\left[\dfrac{\pi}{5},\pi\right]$ C) $\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right\rangle$

D) $\left[\dfrac{\pi}{5},\dfrac{2\pi}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle\dfrac{\pi}{4},\pi\right\rangle$

**19.-** Siendo "α" y "θ" ángulos agudos tal que:

$$|3 + \text{sen}\,\alpha| - |2 - \cos\theta| = P\,;$$

calcular el valor entero de "P".

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**20.-** Del gráfico mostrado, calcular el mínimo valor de E, si:

$$E = \frac{\text{Area del } \Delta ABC}{\text{Area del } \square\ MNPQ}\ ; MQ = 2MN$$

Sugerencia: $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta$

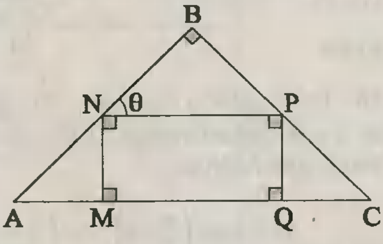
A) 2

B) 3

C) $\sqrt{2}$

D) 1

E) 1/2




**21.-** La abscisa, ordenada y radio vector de un punto P que pertenece al lado final de un ángulo "α" en posición normal están en progresión aritmética, en el mismo orden.

Calcular: csc α - cot α.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 2 E) 3/2

**22.-** Si se cumple: $\text{sen}\,x\cos 2\theta = 1$; siendo "$x$" y "θ" ángulos no negativos y menores que una vuelta, determinar el mayor valor de "$x + \theta$".

A) $\pi$ *rad* B) $\dfrac{3\pi}{4}$ *rad* C) $\dfrac{3\pi}{2}$ *rad*

D) $2\pi$ *rad* E) $3\pi$ *rad*

**23.-** Dado: $|\sec\alpha + \cos\alpha| = 2{,}9$

donde: "$\alpha$" pertenece al tercer cuadrante, determinar el valor de:

$$E = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \tan\alpha$$

A) -2  B) -2,1  C) -2,4  D) -2,5  E) -2,7

**SIGNOS DE LAS R.T.**

**24.-** Si: se verifica: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$; evaluar el signo de:

$$A = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha}{\cos(3\beta+\alpha)\sec 3\frac{\alpha}{2}}$$

$$B = \frac{\left[\sec\left(2\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\tan\left(\frac{3\alpha}{2}+2\beta\right)}}{\cos(3\alpha+\beta)\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$C = \frac{\operatorname{sen}\alpha.\tan 2\beta}{\csc 3\beta.\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

A) (-) ; (-) ; (-)  D) (+) ; (+) ; (+)

B) (+) ; (-) ; (+)  E) (-) ; (-) ; (+)

C) (-) ; (+) ; (+)

**25.-** Sabiendo que "$\alpha$" es la medida de un ángulo trigonométrico, tal que su valor está comprendido entre 210° y 300°; determinar el signo de las siguientes expresiones:

I. $\tan\frac{\alpha}{2} \,.\, \csc\alpha$

II. $\cot(\alpha - 30°) \,.\, \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}$

III. $\tan(\alpha + 60°) \,.\, |\operatorname{sen}\alpha|$

A) + , + , +  B) + , + , -  C) + , - , -

D) - , - , +  E) + , - , +

**26.-** Si "$\theta$" $\in$ IIIC, determinar el signo de:

$$P = \cos(\operatorname{sen}\theta).\tan(\operatorname{sen}\theta)$$

A) (+)  B) (-)  C) (±)  D) (+) ó (-)  E) Nulo

**27.-** Se sabe que: "$\alpha$" y "$\theta$" son ángulos en posición normal, positivos, menores de una vuelta y ubicados en diferentes cuadrantes, tal que: $\alpha < \theta$. Si además:

i) $|\tan\alpha| = -\tan\alpha$

ii) $\cos\theta > 0$.

Indicar el signo de: $P = \dfrac{\sec\alpha + \tan\theta}{\csc\frac{\theta}{2}}$

A) (+)  B) (-)  C) (+) ó (-)

D) (+) y (-)  E) nulo

**28.-** Siendo: $\tan\alpha + \operatorname{sen}\alpha < 0$

$\tan\theta \,.\, \csc\alpha < 0$

Identificar el cuadrante de "$\theta$" sabiendo que "$\theta$" y "$\alpha$" pertenecen al mismo.

A) IC  B) IIC  C) IIIC

D) IVC  E) IIC y IIIC

**R.T. DE ÁNGULOS CUADRANTALES**

**29.-** Dado: $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}6x}{\cos 2x + \cos 4x + \tan x - 4\sec 4x}$

calcular : "$f(\pi/4)$ "

A) 1  B) 1/2  C) -1  D) -1/2  E) 2

**30.-** Calcular:

$$\frac{3\operatorname{sen}90° - 2\cos 180° + \operatorname{sen}270°}{4\cos 360° - 5\cos 180° - 2\operatorname{sen}90°}$$

A) 1/7  B) 1/2  C) 4/7  D) 3  E) -1

**31.-** Calcular:

$$\frac{\operatorname{sen}\pi + \sec 0 - \cot 270° - \sec\pi}{\csc 90° - \cos\pi + \tan 180° - \cos\pi/2}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

**32.-** Si la suma de $\alpha$, $\beta$ y $\theta$ está comprendida entre 2760° y 3180°, siendo $\alpha$ y $\theta$ suplementarios, calcular "$\beta$" si se sabe que es un ángulo cuadrantal que toma su mayor valor.

A) 2 070° B) 2 670° C) 3 240°

D) 2 970° E) 3 060°

**33.-** Reducir la siguiente expresión:

$$E=\frac{\left[\cos(4k-1)\frac{\pi}{2}\right]^{2n}+[\tan(2k+1)\pi]^{4n}+\left[\operatorname{sen}(4k+1)\frac{\pi}{2}\right]^{2n}}{[\sec\pi]^{n}+\left[\csc\frac{3\pi}{2}\right]^{2n}-\left[\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right]^{3n}}$$

donde: $n \in \mathbb{Z}$

A) $1+(-1)^{n}$ B) $(-1)^{-n}$ C) 1 D) 0 E) -1

**34.-** Si: $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \cos 2\pi$ es una expresión nula; calcular la suma de valores que toma "$\cos x$" siendo "$x$" un arco positivo y menor que una vuelta.

A) 1 B) -1 C) 1/2 D) 0 E) $\sqrt{3}/2$

## ÁNGULOS COTERMINALES

**35.-** Sabiendo que: "$\alpha$" y "$\theta$" son suplementarios y coterminales, calcular el valor de:

$$M = \cot\alpha - \cos\theta$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**36.-** Determinar dos ángulos coterminales sabiendo que el mayor es a la suma de ambos como 13 es a 17 y que la suma de estos es mayor que 2 300° pero mayor que 1 900°.

A) 365° y 1 725° B) 819° y 1 021°

C) 460° y 1 570° D) 455° y 595°

E) 480° y 1 560°

**37.-** De la figura mostrada, evaluar: $\tan\theta - \cot\theta$, sabiendo que: $\cot\beta = 1{,}4.0$

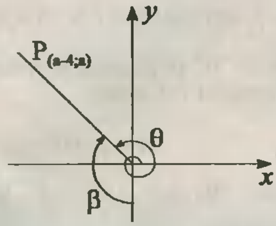
A) -74/35

B) -15/24

C) -7/24

D) -21/10

E) 21/10




**38.-** En el gráfico: $\tan\alpha = 0{,}75$; calcular $\tan\theta$.

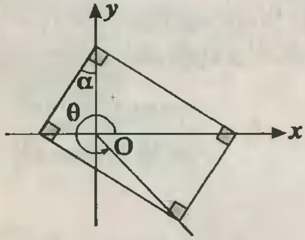
A) -3/4

B) -4/3

C) -7/12

D) -12/7

E) -14/13




**39.-** La suma de las medidas de dos ángulos coterminales es 240° y la medida del ángulo mayor está comprendida entre 470° y 500°, calcular:

$$N = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta} + \tan(\alpha - \beta)$$

siendo "$\alpha$" y "$\beta$" las medidas del ángulo mayor y menor respectivamente.

A) 0 B) $-\sqrt{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{4}{3}$

**40.-** Se sabe que: "$\alpha$" es coterminal con: "$-2\alpha$" y "$\beta$" es coterminal con "$-3\beta$". Si además $\alpha$ y $\beta$ son coterminales; calcular "$\alpha+\beta$", siendo "$\alpha$" y "$\beta$" positivos, diferentes y los menores posibles.

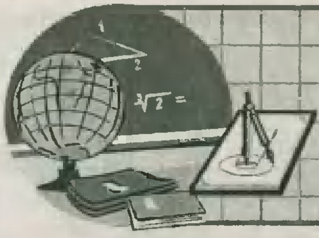
A) 1 080° B) 1 140° C) 820°

D) 835° E) 840°

**41.-** Sean "$\alpha$" y "$\beta$" dos ángulos trigonométricos que se encuentran en la relación de 5 a 2 respectivamente. Si además se sabe que: "$2\alpha$" y "$\beta$" son coterminales, determinar "$\alpha + \beta$" siendo "$\beta$" el mayor ángulo negativo posible.

A) -240° B) -90° C) -135°

D) -315° E) -270°



# Circunferencia Trigonométrica
## (Razones Trigonométricas de Números Reales)
**CAP. 7**

### LÍNEA TRIGONOMÉTRICA SENO

**01.-** ¿Qué valores puede tomar "$x$" para que se cumpla: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x+1}{2}$ ,

siendo: $\theta$ un arco del tercer cuadrante?

A) $\left\langle \frac{1}{5};\frac{3}{5} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{5};\frac{2}{5} \right\rangle$ C) $\left\langle -1;\frac{1}{5} \right\rangle$

D) $\left\langle 0;\frac{2}{5} \right\rangle$ E) $\left\langle 0;\frac{3}{5} \right\rangle$

**02.-** Ordenar en forma creciente: sen 4, sen 5, sen 6, sen(-1).

A) sen 5; sen(-1); sen 4; sen 6

B) sen(-1); sen 5; sen 4; sen 6

C) sen 5; sen 4; sen(-1); sen 6

D) sen(-1); sen 4; sen 5; sen 6

E) sen 4; sen(-1); sen 5; sen 6

**03.-** Hallar el conjunto de valores que toma la expresión:

$$E = \frac{\operatorname{sen}^2 x + |\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen}^2 x - |\operatorname{sen} x|}$$

A) $\langle -\infty; -1]$ B) $\langle -\infty; -1\rangle$ C) $\langle -\infty; 0\rangle$

D) $\langle -\infty; 0]$ E) $\langle -\infty; 1\rangle$

**04.-** Si: $\dfrac{\pi}{6} < |x| < \dfrac{\pi}{3}$ ;

determinar el intervalo de: $M = 4\operatorname{sen} x - 1$

A) $\left\langle -2\sqrt{3}-1; 2\sqrt{3}-1 \right\rangle$

B) $\left\langle -2\sqrt{3}; -1 \right\rangle \cup \left\langle 1; 2\sqrt{3} \right\rangle$

C) $\left\langle -2\sqrt{3}; -1; -3 \right\rangle \cup \left\langle 1; 2\sqrt{3}-1 \right\rangle$

D) $\left\langle -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3} \right\rangle$

E) $\langle -3; 1\rangle$

**05.-** Si: $x_1 \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle$ y $\theta \in \left\langle x_1;\frac{5\pi}{6} \right]$;

determinar el intervalo de: $P = 2\operatorname{sen}\theta - \dfrac{1}{7}$

sabiendo que: $\operatorname{sen} x_1 = \dfrac{1}{7}$.

A) $\left\langle \frac{1}{7};\frac{6}{7} \right]$ B) $\left[ \frac{15}{7};\frac{13}{7} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{7};\frac{13}{7} \right]$

D) $\left\langle \frac{7}{6};2 \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{-1}{7};\frac{13}{7} \right]$

**06.-** Hallar la extensión de "$\alpha$" que cumple con: $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi <$ partir de $1 < \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha + 1}{2} \le \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

A) $\left[ \frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6} \right]$ B) $\left\langle \frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6} \right]$ C) $\left\langle \frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6} \right\rangle$

D) $\left[ \frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6} \right\rangle$

**07.-** Si: $\dfrac{\pi}{2} < 3\alpha < \pi$, calcular la variación de:

$$P = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha)}$$

A) $\langle \cos 3 ; 0 \rangle$ B) $[0; \cos 1\rangle$

C) $\langle \cos 3 ; \cos\sqrt{3} \rangle$ D) $\langle -\cos\sqrt{3} ; \cos 3 \rangle$

E) $[0 ; -\cos 3\rangle$

## LÍNEA TRIGONOMÉTRICA COSENO

**08.-** Si $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6} \right]$; determinar el intervalo de:

$$M = 2\cos\theta + 1$$

A) $\left[-2;\sqrt{3}\right]$ B) $\left\langle -1;\sqrt{3}\right]$

C) $\left[0;\sqrt{3}\right\rangle$ D) $\left[1;\sqrt{3}+2\right]$

E) $\left[-1;\sqrt{3}+1\right]$

**09.-** Si: $x \in \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right\rangle$, evaluar el intervalo de:

$$f(x) = 2\cos|2x|$$

A) $\langle -1 ; 0\rangle$ B) $[-1 ; 2]$ C) $\left[-\frac{1}{2};0\right\rangle$

D) $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle \frac{-\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right]$

**10.-** Hallar AT en términos de "θ".

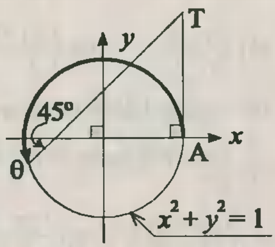
A) $1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

B) $1 - \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

C) $1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

D) $1 - \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

E) $2 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$




**11.-** Calcular de el intervalo:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x - 4\cos x + 5}, \forall x \in \left\langle \frac{2\pi}{3};\pi\right\rangle$$

A) $\left[\frac{1}{10};\frac{4}{29}\right]$ B) $\left[\frac{1}{10};\frac{4}{29}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{1}{10};\frac{4}{29}\right]$

D) $\left\langle\frac{1}{10};\frac{4}{29}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{29}{4};10\right\rangle$

**12.-** En la C.T. mostrada, calcular la ordenada de "P".

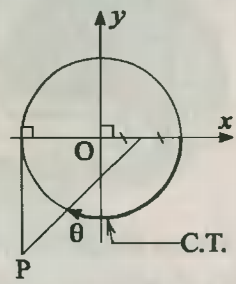
A) $3\cos\theta/(1 + 2\operatorname{sen}\theta)$

B) $3\cos\theta/(1 - 2\operatorname{sen}\theta)$

C) $3\operatorname{sen}\theta/(1 - 2\cos\theta)$

D) $3\operatorname{sen}\theta/(2\cos\theta - 1)$

E) $3\operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta - 1)$




**13.-** Determinar los valores de "$m$" que hacen posible la siguiente igualdad:

$$\cos^2\theta + 2m\cos\theta + m^2 = 1$$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $[-1; 1\rangle$ C) $\langle -2; 2\rangle$

D) $[-2; 2]$ E) $[-2; 2\rangle$

**14.-** Si: $\theta \in$ IVC, $P > 0$ y $\cos\theta = \frac{P}{x-n}$; entonces podemos afirmar que:

A) $x > P - n$ B) $x < P - n$ C) $x > p + n$

D) $x + 2m > p$ E) $x - 2n < p$

**15.-** De las siguientes proposiciones:

I. $|\cos x| \leq 1$

II. $-1 \leq \operatorname{sen}^9 x \leq 1$

III. $\frac{1}{4} \leq \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x \leq 1$

son correctas:

A) I B) I y II C) III

D) I y III E) Todas son correctas

**16.-** Hallar la variación de $\cos(\theta - x_1)$, sabiendo que: $x_1 \leq \theta \leq x_2$ y $(x_2 - x_1) \in \left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$.

A) $\langle\cos(x_2 - x_1); 1\rangle$ B) $[\cos(x_2 - x_1); 1\rangle$

C) $\langle\cos(x_2 - x_1); 1]$ D) $[\cos(x_2 - x_1); 1]$

E) $\langle\cos(x_2 - x_1); 0\rangle$

## *LIN.TRIG.: TAN - COT - SEC - CSC*

**17.-** Si se cumple que: $\sec x \cdot \csc y = 1$

$$\tan^2 x + \cot^2 y = 0$$

y además: $x \in \langle 3; 5\rangle \wedge y \in \langle 4; 6\rangle$; obtener el valor de: $3x - 2y$.

A) $0$ B) $\pi$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $2\pi$

**18.-** Si se verifica que: $\operatorname{sen}\beta > \operatorname{sen}\alpha$, además: $\alpha, \beta \in \left\langle -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right\rangle$; analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\cos\alpha > -|\cos\beta|$

II. $-|\tan\alpha| < -|\tan\beta|$

III. $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$

A) VFF B) FFV C) VFV

D) VVF E) VVV

**19.-** Si: $\alpha \in \left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right\rangle$; $\beta \in \left[\frac{-3\pi}{2}; \frac{-7}{6}\right\rangle$;

calcular la extensión de "$\sqrt{3}\tan\alpha + \cot\beta$"

A) $\langle -\sqrt{3}; 3\rangle$ B) $\langle -3; 3\rangle$ C) $\langle -3; 3]$

D) $[-\sqrt{3}; 3]$ E) $[0; 3]$

**20.-** Del gráfico mostrado, calcular la suma de coordenadas del punto "P".

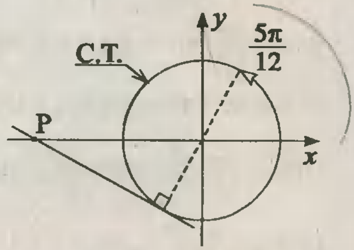
A) $-2$

B) $-\sqrt{2} - 1$

C) $-\sqrt{2} - \sqrt{6}$

D) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

E) $\sqrt{6} - 2$




**21.-** Determinar los límites de "$\alpha$" entre los cuales se cumple que:

$$\sec\alpha > \tan\alpha \qquad (0 < \alpha < 2\pi)$$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ D) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

**22.-** Sabiendo que: $\theta \in \langle -1; 1\rangle$, identificar la proposición correcta:

A) $\operatorname{sen}\theta > 0$ B) $\tan\theta > 0$ C) $\cos\theta < 0$

D) $\cot\theta < 0$ E) $\sec\theta > 0$

**23.-** Del gráfico, evaluar el área de la región sombreada si $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$

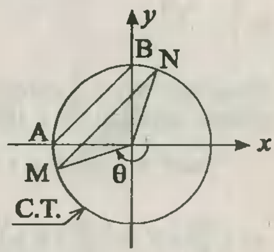
A) $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

B) $\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

C) $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

D) $\dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{2}$

E) $\operatorname{sen}^2\theta - \tan^2\theta$




**24.-** De la figura, hallar la ordenada de "P".

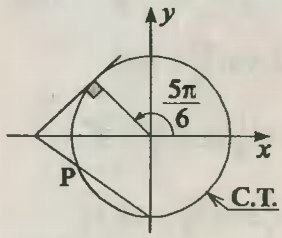
A) $-1/6$

B) $-1/5$

C) $-1/7$

D) $-\sqrt{7}/7$

E) $-\sqrt{5}/5$




**25.-** Si: $1 + \operatorname{exsec}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = n \wedge x \in \langle -\pi/6; \pi/6\rangle$

hallar la extensión de "$n$"

A) $\langle 2; 3\rangle$ B) $\langle 1; 2\rangle$ C) $\langle -2; 2\rangle$

D) $\langle -1; 2\rangle$ E) $\langle 0; 3\rangle$

**26.-** Si:

$\sec\alpha - \text{sen}\theta = 1$ y $\theta \in \mathbb{R} \wedge \alpha \in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$

determinar el intervalo de "$\alpha$".

A) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$  B) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$  C) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

D) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  E) $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$

**27.-** Si: $\tan\theta \in \left\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ además: $\text{sen}\alpha = \cos\theta$

determinar la extensión: de "$\sec\alpha$"

A) $\mathbb{R} - \left\langle \frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\rangle$  B) $\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

C) $\left\langle \frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\rangle$  D) $[\sqrt{3}, 2]$

E) $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\rangle$

**28.-** Determinar la extensión de "B" en la siguiente igualdad: ($B \in$ IIIC).

$$2\,\text{sen}^2 A = \tan B + 1 - \sqrt{2}\ ;\ (K \in \mathbb{Z})$$

A) $\left\langle \frac{9\pi}{8} + K\pi; \frac{11\pi}{8} + K\pi \right\rangle$

B) $\left[\frac{9\pi}{8} + 2K\pi; \frac{11\pi}{8} + 2K\pi\right]$

C) $\left[K\pi; \frac{9\pi}{8} + K\pi\right]$

D) $\left\langle \frac{11\pi}{8} K\pi; \frac{3\pi}{2} + K\pi \right\rangle$

E) $\left\langle 2K\pi; \frac{9\pi}{8} + 2K\pi \right\rangle$

**29.-** Decir cuál es verdadero (V) o falso (F):

I. El máximo valor de $\sec x$ es $-1$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

II. $\text{sen}x + \cos x > 0$, para todo: $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

III. $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$, es negativo si: $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

A) VVF  B) VFV  C) FFF

D) VVV  E) FVV

**30.-** Ordenar en forma decreciente; $\tan\frac{3\pi}{4}$; $\tan\frac{5\pi}{3}$; $\tan 2$; $\tan 4$.

A) $\tan 4$ ; $\tan 2$ ; $\tan\frac{5\pi}{3}$ ; $\tan\frac{3\pi}{4}$

B) $\tan 4$ ; $\tan\frac{5\pi}{3}$ ; $\tan 2$ ; $\tan\frac{3\pi}{4}$

C) $\tan 4$ ; $\tan\frac{3\pi}{4}$ ; $\tan 2$ ; $\tan\frac{5\pi}{3}$

D) $\tan 4$ ; $\tan 2$ ; $\tan\frac{3\pi}{4}$ ; $\tan\frac{5\pi}{3}$

E) $\tan 4$ ; $\tan\frac{3\pi}{4}$ ; $\tan\frac{5\pi}{3}$ ; $\tan 2$

**31.-** Si: $\pi/2 < x_2 < x_1 < \pi$; analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

I. $\text{sen}\, x_1 < \text{sen}\, x_2$

II. $\cos(-x_1) > \cos(-x_2)$

III. $\tan x_1 < \tan x_2$

IV. $\cot(-x_1) < \cot(-x_2)$

A) VVFV  B) VFVF  C) VVVF

D) VFFV  E) VFFF

**32.-** Identifica la proposición correcta.

A) $\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \cos\alpha \in [0; 1]$

B) $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \to \cot\alpha \in \langle -\infty; 0]$

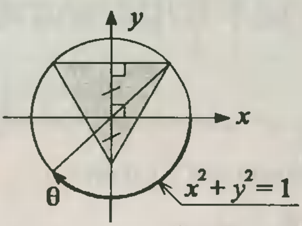
C) $\alpha \in \langle \pi; 2\pi \rangle \to \text{sen}\,\alpha \in [-1; 0\rangle$

D) $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right\rangle \to \tan\alpha \in \langle 1; 0]$

E) $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle \to \cos\alpha \in [-1; 0\rangle$

## ÁREAS EN LA C. T.

**33.-** Calcular el área de la región sombreada:




A) 2 sen θ cos θ

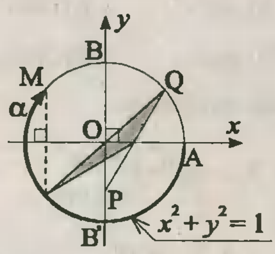
B) 4 sen θ cos θ

C) 4 sen 2θ

D) $2\cos^2\theta$

E) $2\tan^2\theta$

**34.-** Calcular el área de la región sombreada en términos de "α", siendo: OP = PB'.




A) $\dfrac{-\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha+1}$

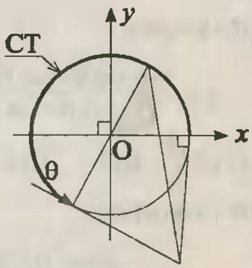
B) $\dfrac{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

C) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha+1}$

D) $\dfrac{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha+1}$

E) $\dfrac{1-2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

**35.-** Del gráfico mostrado, calcular el área de la región sombreada.




A) $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}$

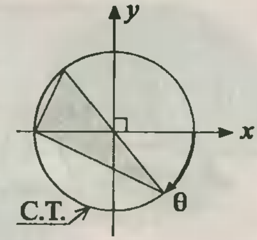
B) $\dfrac{-\tan\theta}{1+\cos\theta}$

C) $\dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}$

D) $\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

E) $\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta-1}$

**36.-** Evaluar la variación del área de la región sombreada.




A) $\langle 0; 1\rangle$

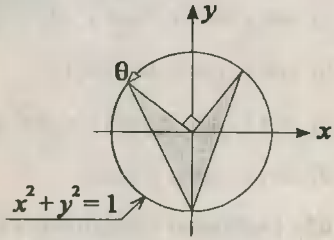
B) $\langle 0; 1]$

C) $[0; 1]$

D) $\langle 0; 2\rangle$

E) $[0; 2\rangle$

**37.-** Si; $\theta \in \left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$, del gráfico hallar la variación del área de la región sombreada.




A) $\left\langle \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

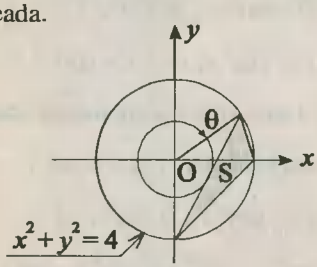
B) $\left\langle 0; \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle 0; \dfrac{1}{2} \right\rangle$

D) $\left[ \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

**38.-** Evaluar: $S + \sqrt{3}$ ; si S es el área de la región sombreada.




A) 3

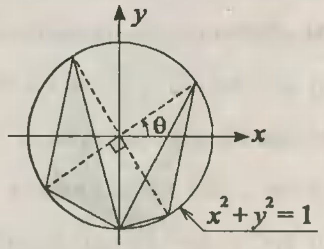
B) 2

C) 1

D) 5/2

E) 7/2

**39.-** Del gráfico, calcular el área de la región sombreada.



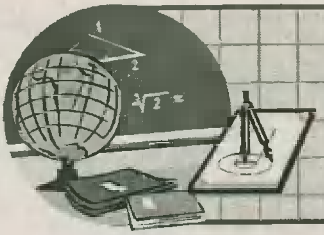

A) sen θ

B) cos θ

C) $\operatorname{sen}^2\theta$

D) $\cos^2\theta$

E) cos θ sec θ



# Identidades Trigonométricas

## CAP. 8

**DEMOSTRACIONES**

**01.-** Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen} x \cdot \cot x = \cos x$

b) $\cos x \cdot \csc x \cdot \tan x = 1$

c) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \tan x = \operatorname{sen}^2 x$

d) $\cos x \cdot \tan x = \operatorname{sen} x$

**02.-** Demostrar las siguientes identidades:

a) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \operatorname{sen}^2 x$

b) $(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$

c) $(1 - \cos^2 x) \cdot \csc^2 x = 1$

d) $(1 - \cos^2 x) \sec^2 x = \tan^2 x$

**03.-** Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen} x + \cot x \cdot \cos x = \csc x$

b) $1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

d) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

**04.-** Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x = \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x$

b) $\operatorname{sen} x(\csc x - \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$

c) $\sec x - \tan x \cdot \operatorname{sen} x = \cos x$

d) $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$

**SIMPLIFICACIONES**

**05.-** Reducir:

$$M = \frac{1}{\sec x - \tan x} + \frac{1}{\csc x - \cot x} - \frac{\sec x(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$$

A) $\operatorname{sen} x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$

D) $\sec x$ E) $\csc x$

**06.-** Simplificar:

$$R = \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{\sqrt{2} - 2\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{\sqrt{3} - 3\operatorname{sen} x \cos x}$$

A) $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6}$ D) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

B) $\dfrac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{6}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$

C) 1/6

**07.-** Reducir:

$$k = \frac{(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta + \csc\theta)}{(1 + \tan\theta + \cot\theta + \sec\theta + \csc\theta)}$$

A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

**08.-** Simplificar:

$$F = \frac{2\operatorname{sen}^3\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha + \csc\alpha}{2\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + \sec\alpha}$$

A) $\tan^3\alpha$ B) $-\cot^3\alpha$ C) $-\tan^3\alpha$

D) $\tan\alpha$ E) $\cot\alpha$

## PROBLEMIZACIÓN CONDICIONAL

**09.-** Si:

$$\sec x \csc^n x + \sec^n x \csc x = \sec^n x \csc^n x \ ;$$

calcular el valor de «$n$» para que la igualdad sea una identidad.

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**10.-** Calcular $a$, $b$ y $c$ para que la siguiente expresión sea una identidad:

$$4 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x + 5 \sec^2 x + 7 \tan^2 x = a \operatorname{sen}^2 x + b \tan^2 x + c$$

A) $a = b = c = 2$  D) $a = 1 \ ; b = 2 \ ; c = 4$

B) $a = b = c = 1$  E) $a = 1 \ ; b = 12 \ ; c = 4$

C) $a = 1 \ ; b = 12 \ ; c = 8$

**11.-** Calcular:

$$P = \csc(x) + \cot(x), \text{ si: } \sec(x) + \tan(x) = n$$

A) $\dfrac{n+1}{n-1}$  B) $\dfrac{n^2+1}{n-1}$  C) $\dfrac{n-1}{n^2+1}$

D) $\dfrac{n+2}{5}$  E) $\dfrac{n^2+3}{n-1}$

**12.-** Calcular el valor de «P» para que la siguiente igualdad sea una identidad:

$$(\sec^2 x - 2)^2 - (\csc^2 x - 2)^2 = (\tan x + \cot x).\ (\tan x - \cot x)^P$$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**13.-** Calcular «A» en términos de $\theta$, si:

$$A(1 + \tan\theta) = \frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + \tan\theta} - \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

A) $-2 \sec\theta$  B) $2 \sec\theta$  C) $-3 \sec\theta$

D) $3 \sec\theta$  E) $4 \sec\theta$

**14.-** Sabiendo que $b < a$, ¿entre qué valores debe variar «$c$» para que se cumpla la igualdad: $(b < a)$

$$a \cot^2 x + b = c \csc^2 x$$

A) $\langle b \ ; a \rangle$  B) $\mathbb{R} - \{a\}$  C) $\langle b \ ; +\infty \rangle$

D) $\mathbb{R} - \langle b \ ; a \rangle$  E) $\langle -\infty \ ; b \rangle$

**15.-** ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar:

$N = (1 - c)\ (b - c)$ en la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x \cos x + b \cos^2 x = c$$

A) 13  B) 14  C) 15  D) 16  E) 17

**16.-** Si: $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x - 2} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{3 - \operatorname{sen} x}$

para qué valores de $x$ esta desigualdad se transforma en igualdad. $(k \in \mathbb{Z})$

A) $(2k + 1)\pi/2$  B) $(4k + 1)\pi/2$  C) $k\pi$

D) $\pi(2k + 1)$  E) $(4k - 1)\pi/2$

**17.-** Si: $\cot^2\theta = 3 \operatorname{sen}\alpha$, donde: $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{3}\right]$, calcular la extensión de:

$$f(\theta) = 1 - 2\sqrt{3}\,|\cos\theta|$$

A) $[-2 \ ; 1]$  B) $\langle -2 \ ; 1 \rangle$  C) $\langle -2 \ ; 2]$

D) $\langle -2 \ ; 2 \rangle$  E) $[-3 \ ; 2 \rangle$

**18.-** Si: $k \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$, calcular «E» en términos de «$k$», si:

$$E = [(1 - k^2) \tan\theta + (1 + k^2) \operatorname{sen}\theta]^{1/2}$$

A) $2\sqrt{k}$  B) $3\sqrt{k}$  C) $4\sqrt{k}$

D) $5\sqrt{k}$  E) $6\sqrt{k}$

**19.-** Si: $k \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$, donde: $\theta \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$,

calcular:

$$E = [(1 - k^2) \cos\theta \sec^2\theta + (1 + k^2) \operatorname{sen}\theta]^{1/2}$$

A) $k - 2$  B) $k + 2$  C) $k - 1$  D) $k + 1$  E) $k^2$

**20.-** Sabiendo que:

$$\sec x - \cos x = \sqrt{a}\ ; \csc x - \operatorname{sen} x = \sqrt{b}$$

calcular: $M = \sqrt{a}\cos x + \sqrt{b}\operatorname{sen} x$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**21.-** Si: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta-1)}{\sec\theta+\tan\theta(\cos\theta-1)-1}$

es equivalente a : $a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta + c$,

calcular: $a + b + c$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**22.-** Si $\tan x = 1 - \operatorname{sen} x$, calcular: $\operatorname{sen} x \cos x$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

**23.-** Sabiendo que: $a\sec x + b\cos x = b$,

calcular: $M = 1 + \cos x - \cos^2 x$

A) $\dfrac{a+b}{b}$ B) $a - b$ C) $\dfrac{a+b}{2}$

D) $\dfrac{a-b}{2}$ E) $2a - b$

**24.-** Si $\sec x = 1 - \operatorname{sen} x$,

calcular: $M = \dfrac{\cos^3 x}{1+\operatorname{sen} x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**25.-** Sabiendo que: $\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x = k$

calcular: $m = k\cot^3 x - \cot^2 x - \cot x$

A) -2 B) 2 C) 1 D) -1 E) 0

**26.-** Si: $\sqrt{\operatorname{sen}\alpha - 1} = \tan^2\theta + \cos^2\beta$

calcular: $M = \operatorname{sen}^2\beta + \sec^2\theta + \cos^2\alpha$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**27.-** Si aumenta en 3 la secante de un ángulo se obtiene la tangente de su suplemento aumentado en 5. ¿Cuánto vale la cosecante de dicho ángulo?

A) 13/5 B) 5/3 C) -5/3

D) -13/5 E) -5/4

**28.-** Si: $\sqrt{2} + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

calcular: $N = \cos^4 x + \cos^2 x + \sqrt{2}\operatorname{sen} x$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

**29.-** Si: $\tan\alpha + \cot\alpha = 4$; calcular:

$$N = \tan^3\alpha - \cot^3\alpha\ ;\ \text{siendo: } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

A) $-15\sqrt{3}$ B) $-30\sqrt{3}$ C) $-25\sqrt{3}$

D) $-24\sqrt{3}$ E) $-12\sqrt{3}$

**30.-** Si: $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \dfrac{3}{2} = 0$

calcular: $D = \cos^2 x - \dfrac{3}{4}\tan^2 x$

A) 1/4 B) 0 C) 3 D) 2 E) -5/4

**31.-** Si: $\cos\theta - \cot\theta = 1$

calcular: $M = \cos\theta + \tan\theta$

A) $\sqrt{2}$ B) $-1+\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $2+\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{2}$

**32.-** Calcular: $\tan x + \tan^2\theta$; si:

$$\tan^2\theta = \frac{\sec^2\theta.\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x\cos x}$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) -2

**33.-** Siendo: $P = \dfrac{1+2\sec^2\theta\tan^2\theta-\tan^4\theta}{1+2\csc^2\theta\cot^2\theta-\cot^4\theta}$

y además: $\sec^4\theta - p = A + B\tan^2\theta$

calcular: A + B

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) -2

**34.-** Si : $x \in \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2} \right\rangle$, y

$$\sqrt{\frac{\cos^3 x(1+\cos x)-\text{sen}^3 x(1+\text{sen}\, x)}{\cos x-\text{sen}\, x}} =$$

$$= a + b\ \text{sen}\ x + c \cos x$$

calcular: $\frac{abc}{a+b+c}$

A) 1/6  B) 3/4  C) 5/4  D) 7/4  E) 9/4

**35.-** Si: $a\ \text{sen}^6 x + b \cos^4 x + a \cos^6 x + b\ \text{sen}^4 x$ es independiente de "$x$", hallar $\cos\theta$, si:

$$\cot\theta = \frac{a^2}{4b^2-2a^2}$$

A) $\pm\frac{\sqrt{2}}{5}$  B) $\pm\frac{\sqrt{2}}{10}$  C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{11}$

D) $\pm\frac{\sqrt{2}}{13}$  E) $\pm\frac{\sqrt{2}}{16}$

**36.-** Si: $3\frac{\pi}{4} < x < \pi$ y $A = \sqrt{\frac{\sec^2 x+\csc^2 x-4}{1-4\text{sen}^2 x\cos^2 x}}$

determinar el valor de: $\frac{A}{\csc x \sec x}$

A) -1  B) 1  C) -2  D) 2  E) 3

**37.-** Si: $\tan\alpha = \frac{p}{q-1}$

evaluar: $E = \text{sen}^2\alpha + p\ \text{sen}\,\alpha\cos\alpha + q\cos^2\alpha$

A) $1/q$  B) $2/q$  C) $q$  D) $2q$  E) $-q$

**38.-** Si $\sec x \,.\, \csc x = 2\sqrt{2}$ ; calcular:

$$V = \text{sen}^8 x + \cos^8 x$$

A) 17/32  B) 32/17  C) 15/71

D) 23/17  E) 71/32

**39.-** Si: $\frac{\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta}{\text{sen}^6\theta+\cos^6\theta} = m$

evaluar: $E = \sec^2\theta \,.\, \csc^2\theta$

A) $\frac{2-3m}{1+m}$  B) $\frac{2-3m}{1-m}$  C) $2-3m$

D) $1+m$  E) $1-m$

## ELIMINACIÒN DE ARCOS

**40.-** Si: $\tan\theta + (p+1)\cot\theta = p$ . . . . . . . . (I)

$$\frac{(\sec^2\theta+\csc^2\theta)}{(1-\cot\theta)^2} = q \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{(II)}$$

al eliminar "$\theta$" se obtiene:

A) $p^2 - q = 0$  B) $p - q = 0$  C) $p + q^2 = 1$

D) $2p^2 - q = 0$  E) $p^2 + q^2 = 2$

**41.-** Si: $\csc\theta \text{ vers }\theta = m$ ,

$$\sec\theta \,.\, \text{cov}\,\theta = n$$

identificar,¿ cuál de las siguientes es una expresión independiente de $\theta$?

A) $m + n = 1 + mn$  B) $m - n = 1 - mn$

C) $m + n = 1 - mn$  D) $m^2 - n^2 = 1$

E) $m^2 + n^2 = 1$

**42.-** En base a las siguientes igualdades, se pide determinar ¿cuál de las siguientes corresponde a una expresión obtenida de estas e independiente de "$\alpha$ y $\theta$":

$$\sec^2\theta - \sec^2\alpha = p^2$$

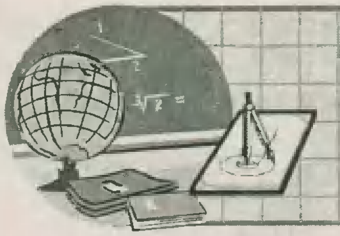
$$\cos^2\theta + \cos^2\alpha = n$$

$$\text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\alpha = m$$

A) $16m = (n^2 - m^2)p^2$  B) $16mn = p^2(m^2 - n^2)^2$

C) $4mn = p^2(m - n)$  D) $4mn = p^2(m^2 - mn^2)$

E) $4mnp = m^2 - n^2$



# Identidades Trigonométricas de Arcos Compuestos

## CAP. 9

**SENO, COSENO DE ARCOS COMPUESTOS**

**01.-** Si: $\tan a = 4\sqrt{3}$ y $\tan b = \dfrac{5\sqrt{3}}{11}$, siendo $a$ y $b$ ángulos agudos, calcular:

$$P = \text{sen}(a+b)\cos(a+b)$$

A) $-\sqrt{3}$ B) $-1/2$ C) $-\sqrt{3}/4$

D) $\sqrt{3}/3$ E) $-\sqrt{2}/4$

**02.-** Si: $\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}(\theta + A) - \cos\theta$

$$\cos\theta = 2\cos(\theta + B) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta; \quad A, B \in IC$$

Calcular: $\text{sen}(B - A)$

A) $-1/2$ B) $1/2$ C) $1$ D) $-1$ E) $0$

**03.-** Si: $x - y = \dfrac{3\pi}{2}$

Hallar: $M = \left(\dfrac{\text{sen}\,x + \cos y + \csc y}{\text{vers}\,x - \text{cov}\,y + \tan x - \cot y}\right)\cos y$

A) $1/2$ B) $1$ C) $-1$ D) $2/3$ E) $-1/2$

**04.-** Dada la expresión:

$$(3 + \text{sen}\,84°)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + \cos 6° = 1$$

Hallar: $E = \dfrac{1 + \tan^2 3°}{\left(\csc\theta - \tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$

A) $2\tan 2\theta$ B) $1 - \cos 2\theta$ C) $1 + \cos 2\theta$

D) $-2\tan 2\theta$ E) $2\,\text{sen}\,2\theta$

**05.-** Si: $9\,\text{sen}\,\theta - 40\cos\theta = 41$,

Evaluar: $\cos(\theta - 127°)$

A) $\dfrac{156}{205}$ B) $\dfrac{158}{205}$ C) $\dfrac{161}{205}$

D) $\dfrac{163}{205}$ E) $\dfrac{164}{205}$

**06.-** Calcular aproximadamente: $\dfrac{A}{B}$

$A = \cos 111°$ $\quad B = \tan 2°$

A) $-\dfrac{231}{25}$ B) $-\dfrac{233}{25}$ C) $-\dfrac{237}{25}$

D) $-\dfrac{241}{25}$ E) $-\dfrac{243}{25}$

**07.-** Sabiendo que $M \in \mathbb{R}$. Además:

$$M > \frac{\text{sen}145°.\cos 65 + \text{sen}175°\cos 85}{\cos 70°\text{sen}40° + \text{sen}170°\cos 80°}$$

Hallar el mínimo valor entero que toma "M".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**08.-** Calcular aproximadamente el valor de la siguiente expresión:

$$E = \left[\frac{\text{sen}2°\tan 3° + \cos 5°\csc 87°}{\cos 2°\cot 4° - \cos 6°\csc 4°}\right]^{\cos\pi}$$

A) $\dfrac{1}{101}$ B) $\dfrac{1}{102}$ C) $\dfrac{1}{103}$ D) $\dfrac{1}{104}$ E) $\dfrac{1}{105}$

**09.-** Si $\alpha + \beta + \theta = 3\pi$; además

$$\frac{\sec^2\theta - \tan\alpha.\tan\beta.\sec^2\theta}{\text{sen}\alpha.\sec\beta.\sec\theta} > A$$

Hallar el mayor valor entero que toma "A".

A) -3  B) -2  C) -1  D) 0  E) 1

**10.-** Si: $M = \dfrac{\sqrt{3}\,\text{sen}(x+y) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos(x+y)}{\text{sen }x}$

además: $\cos y = \dfrac{3}{5}$ ; $y \in \left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

Hallar: $N = 5\sqrt{3}\ M$

A) 5  B) 10  C) 15  D) 25  E) 30

**11.-** Si: $\text{sen }77° + \text{sen }7° = n$

Hallar en función de $n$.

$$P = \cos 24° + \cos 46° + \cos 50° - \cos 60°$$

A) $\dfrac{8n}{5}$  B) $\dfrac{n}{5}$  C) $\dfrac{3n}{5}$  D) $\dfrac{4n}{5}$  E) $\dfrac{6n}{5}$

## TAN, COT DE ARCOS COMPUESTOS

**12.-** Si: $\sqrt{1+\text{sen}2\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\theta \in IC$

Hallar: $\cot^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\theta}{2}\right) - 1$

A) $-\dfrac{2}{3}$  B) 2  C) 1  D) $-\dfrac{1}{2}$  E) 0

**13.-** Si: $\cos^2 x \tan(y+z) = \text{sen}^2 x \cot(y-z)$.

Hallar: $\tan^2 z$

A) $\tan(y-x)\tan(y+x)$

B) $\cot(y-x)\cot(y+z)$

C) $\tan(y+x)\cot(y-x)$

D) $\cot(y+x)\tan(y-x)$

E) $\tan(y-x)\cot(y-x)$

**14.-** Reducir:

$$P = \frac{\tan\frac{3\pi}{16}\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{3\pi}{16}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\tan\frac{\pi}{12}}$$

A) 2  B) -2  C) 3  D) -1  E) 1

**15.-** Si: $\tan\alpha + \tan\beta = a$ .............. (1)

y; $\cot\alpha + \cot\beta = b$ .............. (2)

Reducir :

$$M = b(\tan^2\alpha + \tan^2\beta) - ab(\tan\alpha + \tan\beta) + 2a$$

A) $2a$  B) $b$  C) 0  D) -1  E) -2

**16.-** Si: $\tan\alpha + \tan\beta = \tan(\alpha+\beta) - \dfrac{1}{2}\tan\alpha\tan\beta$

y $\tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha-\beta) + \dfrac{1}{3}\tan\alpha\tan\beta$

Calcular: $P = \tan 2\alpha - \tan 2\beta$

A) 1  B) $\dfrac{6}{7}$  C) $-\dfrac{6}{7}$  D) $\dfrac{7}{8}$  E) $-\dfrac{7}{8}$

**17.-** Si: $\text{sen}(\alpha+3\beta)\,\text{sen}(\alpha+\beta) = \tan^2(\alpha+2\beta)$

Hallar: $E = \dfrac{\text{sen}^2\beta\csc^2(\alpha+2\beta)}{1+\sec(\alpha+2\beta)} + \sec(\alpha+2\beta)$

A) -1  B) 1  C) 2  D) 3  E) 4

## IDENTIDADES ESPECIALES

**18.-** Si se cumple: $3 - 2\,\text{sen }x = \sqrt{5}\cos x$

además: $x \in \left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. Calcular: $L = \csc x - \text{sen }x$

A) 2/5  B) 3/4  C) 3/5  D) 1/6  E) 5/6

**19.-** Si: $f(x) = \text{sen }x + 4\cos x$.

Hallar la variación de $f(x)$, si además: $x \in \left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

A) $\left\langle 1;\sqrt{7}\right\rangle$  B) $[2;4]$  C) $[3;5]$

D) $\left\langle 1;\sqrt{17}\right]$  E) $[2;5]$

**20.-** Si: $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\theta = a \wedge \cos\alpha + \cos\theta = b$

Hallar: $\tan(\alpha+\theta)$

A) $\dfrac{a^2+b^2+2}{2}$ B) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ C) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

D) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$

**21.-** En un triángulo ABC, reducir:

$K=(\cot A+\cot B)(\cot A+\cot C)(\cot B+\cot c)$

A) sen A sen B sen C

B) cos A cos B cos C

C) tan A tan B tan C

D) cot A cot B cot C

E) csc A csc B csc C

**22.-** Sabiendo que:

$$\pi<\beta<2\pi \ ; \ \frac{\pi}{2}<\phi<\pi \ ; \ \alpha-\theta=\pi$$

Además: $\tan\theta+\tan\beta=\tan\alpha+\tan\phi$

Hallar: $M=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\theta+\phi)$.

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) 1/2

**23.-** Calcular el valor de "θ" si $\theta\in[270°; 360°]$ para que la expresión:

$E=\sqrt{6}(\text{sen}\,\theta-\cos\theta)-3\cos 45°(\text{sen}\,\theta+\cos\theta)$

tome su mínimo valor.

A) 280° B) 240° C) 300°

D) 320° E) 345°

**24.-** Hallar la extensión de:

$$E=\tan 4x-\tan 8x+\tan^2 4x\tan 8x$$

si $x\in\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $[0; 1]$ C) $[0; 1\rangle$

D) $\langle 1; 2\rangle$ E) $\mathbb{R}-\{0\}$

**25.-** Siendo: $\left(\dfrac{\cot a}{\cos x}-\dfrac{\cot b}{\cot x}\right)^2=\cot^2 a-\cot^2 b$

Hallar: sen $x$

A) $\tan a\tan b$ B) $\tan b\cot a$

C) $\tan a+\tan b$ D) $\tan a\cot b$

E) $\tan a-\tan b$

**26.-** Dado: $\sec\alpha\cos(\gamma+\theta)=1+\tan\gamma\tan\theta$

$\sec\beta\cos(\gamma-\theta)=1-\tan\gamma\tan\theta$

Halar: $\cos(\gamma+\theta)$

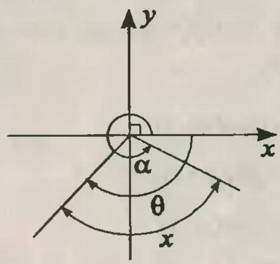
A) $\dfrac{2\cos\beta\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\cos\beta}}$ B) $\dfrac{2\text{sen}\beta\sqrt{\text{sen}\alpha}}{\sqrt{\text{sen}\alpha}+\sqrt{\text{sen}\beta}}$

C) $\dfrac{2\text{sen}\alpha\sqrt{\text{sen}\beta}}{\sqrt{\text{sen}\alpha}+\sqrt{\text{sen}\beta}}$ D) $\dfrac{2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}{\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\cos\beta}}$

E) $\dfrac{2\cos\alpha\sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\cos\beta}}$

## SITUACIONES GRÁFICAS

**27.-** De la figura que se muestra se tiene que: $\tan\alpha=a$; $\tan\theta=b$, luego $\tan x$ vale:




A) $\dfrac{b-a}{1+ab}$ B) $\dfrac{a+b}{1+ab}$ C) $\dfrac{a-b}{1+ab}$

D) $\dfrac{1+ab}{a-b}$ E) $\dfrac{1-ab}{a+b}$

**28.-** Del gráfico mostrado, hallar: $\tan\alpha\cot\beta$

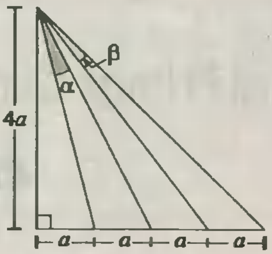
A) 14/9

B) 14/11

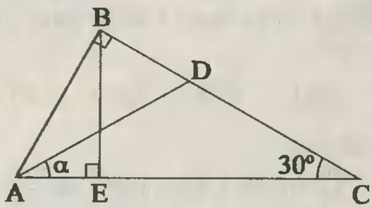
C) 17/9

D) 17/11

E) 19/11




**29.-** Determina $\cot \alpha$ en la siguiente figura, si $BD = 1$ y $BC = 6$.




A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$  B) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$  C) $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$  E) $\dfrac{17\sqrt{3}}{3}$

**30.-** Si: ABCD es un cuadrado. Hallar el máximo valor de $\tan \theta$.

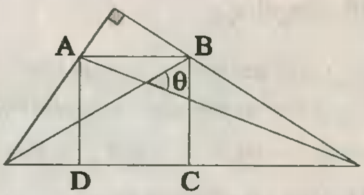
A) $\sqrt{3}/3$

B) $\sqrt{3}$

C) 1

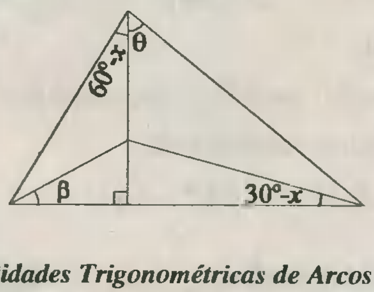
D) 3/4

E) 4/3




**31.-** De la figura, hallar el equivalente de:

$P = \dfrac{\tan\beta + \tan\theta}{\tan\beta - \tan\theta}$ en términos de "$x$".




A) $2\cos 2x$  B) $\dfrac{\sec^2 x}{4}$  C) $\dfrac{\csc^2 x}{2}$

D) $4\text{sen}^2 x$  E) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\csc 2x$

## IDENT. TRIG. DE SUMA DE 3 ARCOS

**32.-** Sabiendo que:

$$a \text{ sen } x + b \text{ sen } y + c \text{ sen } z = 0$$

$$a \cos x + b \cos y + c \cos z = 0$$

Hallar: $M = \text{sen}(x - z)\csc(y - z)$

A) $a/b$  B) $b/a$  C) $-a/b$  D) $-b/a$  E) $a/c$

**33.-** Reducir: $P = \dfrac{\tan a - \cot a - 2\cot 2b}{(\tan a + \tan b)(\cot a + \cot b)}$

A) $\tan(a+b)$  B) $-\cot(a+b)$  C) $\cot(a+b)$

D) $-\tan(a+b)$  E) $-\cot(a-b)$

**34.-** Si:

$2\tan x + \tan 2x + \tan 3x \tan x(\tan 2x + \tan 4x)$

$+ \tan 4y$ es idéntico a: $\dfrac{\text{senA}(x+y)}{\cos Bx \cos By}$

Hallar: A + B

A) 8 ó 0  B) ±8  C) 8  D) 0  E) 4

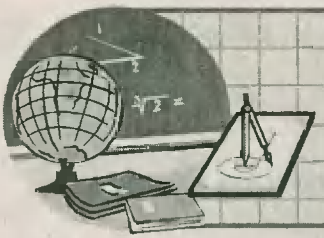
**35.-** Sabiendo que: $\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$ y $\tan\theta_3$ son las raíces de la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Calcular: $P = \tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

A) $\dfrac{d-b}{a-c}$  B) $\dfrac{d+b}{a-c}$  C) $\dfrac{d-b}{a+c}$

D) $\dfrac{db}{ac}$  E) $\dfrac{a+b+c+d}{abcd}$



# Reducción al Primer Cuadrante

## CAP. 10

### CASOS DE REDUCCIÓN

**01.-** Simplifica:

$$T=\tan(\pi+x)\cos\left(3\frac{\pi}{2}+x\right)\tan(270°+x)\csc(360°-x)$$

A) $-\text{sen } x$  B) $\text{sen } x$  C) $-\tan x$

D) $\tan x$  E) 1

**02.-** Simplificar:

$$N=\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sec(2\pi-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\cos(4\pi+x)$$

A) -2  B) -1  C) 0  D) 1  E) 2

**03.-** Reduzca:

$$P=\frac{\cot(360°-x)-\tan(450°-x)}{\tan(270°-x)-\cot(180°-x)}$$

A) -2  B) -1  C) 0  D) 1  E) 2

**04.-** Calcular W si $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

$$W=\frac{\text{sen}(180°+\theta)\cos(\theta-90°)\tan(1260°+\theta)}{\cos(270°-\theta)\text{sen}(540°+\theta)\tan(450°+\theta)}$$

A) $-4\sqrt{3}$  B) -4  C) $-3\sqrt{3}$  D) 3  E) -1

**05.-** Si: $\tan\alpha=\sqrt{2}$ ; calcular:

$$M=\frac{\text{sen}(-\alpha)\cot(270°+\alpha)\sec(180°+\alpha)}{\cos(360°-\alpha)\tan(\alpha-270°)\csc(\alpha-180°)}$$

A) 1  B) 3  C) 4  D) -3  E) -4

**06.-** Reducir:

$$J=\tan 181°+\tan 183°+\tan 185°+\ldots+\tan 357° +\tan 359°+\tan 361°$$

A) 1  B) $\tan 1°$  C) $-\tan 1°$  D) -1  E) 0

**07.-** Si $x+y=4\pi$, calcule:

$$K=\tan(x+10°)+\text{sen}(y+40°)+\tan(y-10°)+\text{sen}(x-40°)$$

A) 0  B) 1  C) 2  D) -1  E) -2

**08.-** Calcular:

$$A=2\text{ sen }330°+4\cos 120°-\csc 1050°$$

A) -5  B) -4  C) -3  D) -2  E) -1

**09.-** Hallar el valor de:

$$E=\cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^3\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos^3\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos^3\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

A) 1  B) 2  C) 4  D) -3  E) 0

**10.-** Simplificar:

$$E=\frac{(x-y)^2\sec 1620°+(x+y)^2\text{sen}1890°-2xy\cos 1260°}{(x+y)^2\sec 810°+(x^2+y^2)\cos 900°+3xy\csc 1350°}$$

A) -2  B) -3  C) -4  D) -5  E) -6

**11.-** Si $a+b=2\pi$, calcular:

$$R=\tan a+\text{sen } a+\tan b+\text{sen } b$$

A) 0  B) $2\tan a$  C) $-2\text{ sen } a$

D) $2\text{ sen } a$  E) $-2\tan a$

**12.-** Si:

$$\tan 361°\tan 363°\ldots\text{(10 términos)}=K$$

Calcular en términos de K.

$$N=\cot^2 181°\cot^2\cot 2°\cot^2 183°\ldots\cot^2 190°$$

A) $K^2$ B) $\dfrac{1}{K^2}$ C) $2K^2$ D) $\dfrac{1}{2K^2}$ E) $\dfrac{2}{K^2}$

**13.-** Simplificar:

$$M=\frac{\cos(\theta+20°)\text{sen}(\alpha+\beta)\text{ctg}(2\alpha+2\beta+3\theta)}{\text{sen}(70°-\theta)\text{sen}\theta\tan(3420°-\theta)}$$

si: $\alpha+\beta+\theta=180°$

A) 1 B) -1 C) $\text{sen}^2\theta$

D) $-\cos^2\theta$ E) $-\cot^2\theta$

**14.-** Hallar "$\alpha$" si se cumple

$$e^{\left[\text{sen}\left(\alpha+\frac{13\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-1\,947\frac{\pi}{2}\right)\right]}=2^{\cos(330\pi+x)+\text{sen}\left(x-229\frac{\pi}{2}\right)}$$

$(K\in\mathbb{Z})$

A) $K\pi$ B) $K\pi/2$ C) $(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$

D) $K\pi/4$ E) $(4K+1)\dfrac{\pi}{3}$

**15.-** Reducir:

$$K=\frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)}{\cos(6\pi-1)}+\frac{\cos(1998\pi+2)}{\text{sen}\left(2-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{\tan(\pi\sec 60°+3)}{\cot(\pi\text{ver}60°+3)}$$

A) tan 1 B) tan 2 C) -cot 3 D) 1 E) -1

**16.-** Si: $\dfrac{\text{sen}(148\pi+\theta)\cos\left(\frac{17\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta+\frac{281\pi}{2}\right)}{\tan^2\left(19\frac{\pi}{3}\right)+\text{sen}199\pi}$

$=K\,\text{sen}^3(2B\theta)$

Es una identidad, hallar: "K + B".

A) 1/4 B) ±1/6 C) 1/6 D) -1/6 E) ±1/4

**17.-** Reducir la siguiente expresión:

$$E=\frac{\tan(y-x-\pi)\tan(z-y+\pi)\tan(x-z+2\pi)}{\tan(x-z+\pi)-\tan(x-y+\pi)-\cot\left(z-y+\frac{\pi}{2}\right)}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

**18.-** Calcular el valor numérico de la siguiente expresión:

$$E=\frac{\cos\frac{5\pi}{3}\tan\frac{16\pi}{3}+\cot\frac{41\pi}{6}}{\sec\frac{89\pi}{6}-\tan\left(\frac{-38\pi}{3}\right)\text{sen}^2\frac{105\pi}{4}}$$

A) 1 B) 2 C) 7/3 D) 3/7 E) 2/5

**19.-** Reducir:

$$P=\frac{\text{sen}\frac{\pi}{11}+\text{sen}\frac{32\pi}{11}-\cos\frac{31\pi}{22}}{\sqrt{3}\tan\frac{4\pi}{3}\cos\frac{9\pi}{22}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) -2

**20.-** Reducir:

$$K=\frac{2\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(7\pi+\theta)\csc(5\pi-\theta)\text{ctg}(17\pi+\theta)}$$

A) -2 B) 2 C) 1 D) -1 E) 0

**21.-** Indicar verdadero (V) o falso (F), las siguientes proposiciones ($n\in\mathbb{Z}$).

I. $\text{sen}(n\pi+\theta)=(-1)^n\,\text{sen}\,\theta$

II. $\tan(n\pi-\theta)=-\tan\theta$

III. $\sec(n\pi-\theta)=(-1)^{n+1}\sec\theta$

A) VVV B) FFF C) VFV

D) VVF E) FVV

**22.-** Si: $\cot\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\ \wedge\ \theta\in\left\langle\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right\rangle$

Calcular: $E=\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\text{sen}\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)}$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ C) -1

D) $-\sqrt{2}$ E) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

## CASOS PARTICULARES DE REDUCCIÓN

**23.-** Si: $\sec(\alpha - \beta) = \text{sen } 810°$

Hallar: $\dfrac{\cos[(\csc 30°)k\pi+\alpha]}{\cos[(\csc^2 315°)k\pi+\beta]}$

A) sen 180° B) sen 270° C) sen 450°

D) sen 0° E) sen 190°

**24.-** Si: $\alpha \in$ IIC

Simplificar:

$$P = \cos\alpha\left(\frac{|\text{sen}(900°-\alpha)|+|\csc(270°-\alpha)|}{|\text{sen}(1260°+\alpha)+|\cos(630°+\alpha)|}\right)$$

A) cos α B) -csc α C) sen α

D) -cos α E) csc α

**25.-** Si α es complementario y coterminal con $x$ e $y$ respectivamente. Calcular el mayor y el menor valor de:

$$E = \frac{2\text{sen}\alpha+(-1)^p \text{ sen } x}{\text{sen}\alpha\text{sen}^p\left(\alpha - y+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

A) 3; 1 B) 3; 0 C) 3; - 1 D) 3; -3 E) 0; -1

**26.-** Calcular:

$$M = \sum_{k=1}^{8} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{4}+2k\pi+\alpha\right)$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**27.-** Si A y B son complementarios, simplificar:

$$E = \frac{3\text{sen}(2A+3B)\tan(4A+3B)}{\tan(2A+3B)\cos(3A+2B)}$$

A) -2 B) -1 C) 2 D) -3 E) 3

**28.-** Reducir:

$$E = \sum_{n=1}^{6} (-1)^n \text{ sen}\left(\frac{2^n\pi}{7}\right)$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

**29.-** Si θ ∈ IIC, hallar el signo y la expresión simplificada de:

$$E = \frac{\csc(7\pi-\theta)\tan\left(\theta-\frac{17\pi}{2}\right).\sec(\theta-72\pi)}{\cot(\theta-19\pi)\sec^2\left(\frac{39\pi}{2}-\theta\right).\cos\pi}$$

A) + ; tan θ B) - ; tan θ C) + ; cos θ

D) - ; cos θ E) + ; cot θ

**30.-** Si: $\dfrac{\text{sen}(138°+\theta)\tan(298°-\theta)}{2\text{sen}(42°-\theta)\cot(\theta-28°)} = \text{sen}\alpha$

Además "α" pertenece al segundo cuadrante. Calcular el valor de: $E = \tan\alpha + \sec\alpha$

A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) -3

D) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**31.-** Calcular:

$$E = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{7}}{\text{sen}\frac{3\pi}{4}\text{sen}\frac{4\pi}{5}\text{sen}\frac{6\pi}{7}} + \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{7\pi}{3}}$$

A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 3 E) 3/2

**32.-** Reducir:

$$S = \frac{2\tan(4k+1)\pi+3\cot(4k-1)\frac{\pi}{2}}{3\text{sen}\frac{k\pi}{8}+2\cos k\pi}$$

Si: ($k \in \mathbb{Z}$)

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) 2

**33.-** Si: $x - y = \dfrac{21\pi}{2}$, calcular el valor de:

$$E = \csc(\tan x) - \csc(\cot(-y))$$

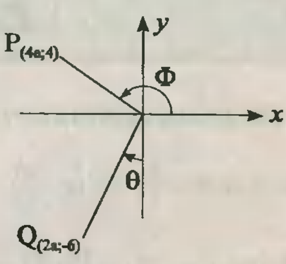
A) $\tan x$ B) $2\csc(\tan y)$ C) $2\csc(\cot x)$

D) $\cot(-y)$ E) 0

## SITUACIONES GRÁFICAS

**34.-** Del gráfico, hallar: $\dfrac{\text{sen}(\pi+\phi)}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)}$

si: $PQ = 2\sqrt{26}$




A) $\sqrt{5}$

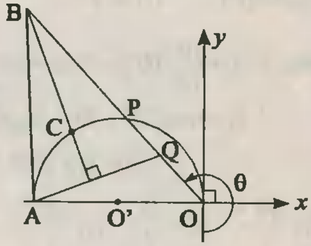
B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{10}$

D) $\sqrt{13}$

E) 1

**35.-** Del gráfico, calcular "$\tan\theta$" si $PQ = QO$ y $m\angle CBQ = m\angle AOQ$. Además O': centro de la semicircunferencia.




A) $\sqrt{2}$

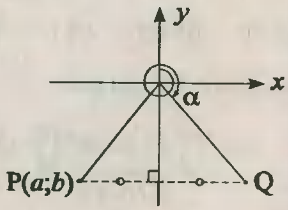
B) -1

C) $\sqrt{3}$

D) 2

E) $\sqrt{5}$

**36.-** Del gráfico mostrado hallar: $\cot\alpha + \tan\alpha$




A) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

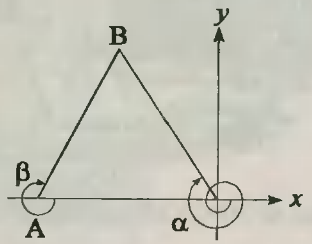
B) $\dfrac{a+b}{a}$

C) $\dfrac{a-b}{b}$

D) $\dfrac{a^2-b}{ab}$

E) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

**37.-** Del gráfico que se muestra el triángulo ABO es isósceles. (BO = AO = 8) y la altura relativa a un lado igual es 6. Calcular: $M = \cot\alpha - \cot\beta$.




A) $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

B) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$

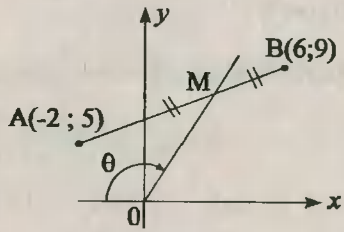
C) $-\dfrac{4}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

E) $\dfrac{3}{4}$

**38.-** Del gráfico siguiente, calcular:

$$L = 8\tan\theta - 21\cot\theta$$




A) -1

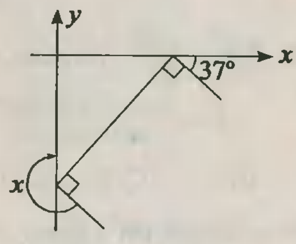
B) 2

C) 11

D) -11

E) 0

**39.-** Dada la figura, hallar: $\tan\left(\dfrac{x}{2}+45^\circ\right)$




A) -3

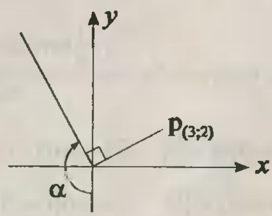
B) 3

C) $-\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{1}{3}$

E) 2

**40.-** Del gráfico, hallar $M = \tan\alpha + \cot\alpha$.



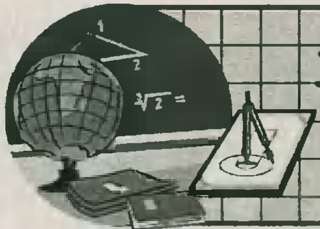

A) 13/6

B) 17/6

C) 19/6

D) 23/6

E) 35/6



# Identidades Trigonométricas del Arco Doble

**CAP. 11**

## RELACIONES FUNDAMENTALES

**01.-** Simplificar: $E=\dfrac{\text{sen}\,2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}$

A) $\tan\alpha$ B) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ C) $\cot\alpha$

D) $\cot\dfrac{\alpha}{2}$ E) 1

**02.-** Determina el máximo valor de:

$$E=\frac{1-\cos 2x}{2+\sqrt{2(1+\cos 2x)}}$$

A) 2 B) 1 C) 1/2 D) 1/3 E) 0

**03.-** Si: $\tan^2 x=2\tan^2 y+1$
calcule: $E=\cos 2x+\text{sen}^2 y$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 1/2 E) -1/2

**04.-** Si: $\dfrac{\sec\theta}{2}=\dfrac{\csc\theta}{3}$, calcular:

$$E=\frac{3\csc 2\theta+2\sec 2\theta}{\sec 2\theta.\csc 2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**05.-** Si se cumple: $\tan^2 x+\tan x=\cos 2x$
Calcular: $\text{sen}\,2x-\cos 2x-\tan^3 x$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) 0

**06.-** Reducir: $N=\dfrac{1-\frac{1}{4}\text{sen}^2 2\alpha-\text{sen}^2\beta-\cos^4\alpha}{\text{sen}(\alpha-\beta)}$

A) $\text{sen}(\alpha+\beta)$ B) $\cos(\alpha-\beta)$ C) $\cos(\alpha+\beta)$

D) $\tan(\alpha+\beta)$ E) $\text{sen}(\alpha-\beta)$

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**07.-** Si $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$; $\theta\in\left\langle\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right\rangle$

Calcular: $E=125\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\text{sen}2\theta$

A) $36\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{10}$ C) $12\sqrt{10}$

D) $20\sqrt{10}$ E) $40\sqrt{3}$

**08.-** Si: $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-10^\circ\right)=2$ ; calcular el valor de:

$$E=\tan(25^\circ+\theta)+\tan(\theta-65^\circ)\ ;$$

$$90<\theta<180^\circ$$

A) $\dfrac{48}{7}$ B) $-\dfrac{48}{7}$ C) $\dfrac{50}{7}$ D) $-\dfrac{50}{7}$ E) 7

**09.-** Si: $2\text{sen}\alpha=\text{sen}\beta+\cos\beta$, calcular:

$$K=\frac{\cos^2(45^\circ+\beta)}{\cos 2\alpha}$$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 2 E) 1/4

**10.-** Si $\theta\in$ IIC, tal que:

$$\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{3-\cos 4x}=\text{sen}\,\theta$$

Hallar: $\text{sen}\,2\theta$

A) 1/4 B) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ C) $-\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

D) $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ E) $-\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

**11.-** Si se verifica que:

$$\frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}+\frac{1-\cos4\theta}{\operatorname{sen}4\theta}=2$$

Hallar $\cos 4\theta$

A) 1/2 B) -1/2 C) 1 D) -1/5 E) 1/3

**12.-** Si: $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 2x+\operatorname{sen}^3 x$ es equivalente a: $a\operatorname{sen}x+b\operatorname{sen}cx-d\cos 4x+d$

Calcular: $a+b+c+d$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**13.-** Reducir:

$$A=(3-4\operatorname{sen}^2\theta)(4\cos^2\theta-3)-2\cos4\theta$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**14.-** Si: $\tan 2x\cot x+\tan 4x\cot 2x=a$

$\tan 2x\tan x+\tan 4x\tan 2x=b$

calcular una relación independiente de $x$ entre $a$ y $b$.

A) $a=b$ B) $a-b=1$ C) $a-b=4$

D) $a^2=b^2-1$ E) $a+b=1$

**15.-** Si la expresión:

$$(\tan 2x+\tan 8x)(\csc 8x-\cot 8x)$$

es equivalente a: $\sec ax+\sec bx+c$, además: $b<a<0$. Calcular: $a+b+c$.

A) -16 B) -15 C) -14 D) -13 E) -12

**16.-** Si: $\operatorname{sen}^4x+\cos^4x=m$

$\operatorname{sen}^6x+\cos^6x=n$ $\quad x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

Calcular $\operatorname{sen}2x$ en términos de $m$ y $n$.

A) $-2\sqrt{\frac{2-m-n}{5}}$ B) $-2\sqrt{\frac{2+m-n}{2}}$

C) $-2\sqrt{\frac{m+n}{2}}$ D) $-3\sqrt{\frac{2+m-n}{2}}$

E) $-5\sqrt{\frac{3-m-n}{3}}$

**17.-** Si: $\dfrac{\operatorname{cov}(nx)}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{nx}{2}\right)-\cos^4\left(\frac{nx}{2}\right)}=a$ ; calcular:

$$\frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+\cos(nx)}$$

A) $1/a$ B) $\frac{1+a}{1-a}$ C) $\frac{1-a}{1+a}$

D) $\frac{2}{1-a}$ E) $\frac{2(1+a)}{1-a}$

**18.-** Si: $\tan x=\dfrac{11\operatorname{sen}2x\cos2x}{1-11\operatorname{sen}^2x}$, calcular:

$$\frac{2\cos2x-1}{1+\tan^2x}$$

A) $-\frac{11}{7}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{1}{10}$ D) $-\frac{10}{11}$ E) $-\frac{1}{9}$

**19.-** Reducir la expresión.

$$E=\frac{\operatorname{sen}x\cos^3x-\cos x\operatorname{sen}^3x}{\sec4x}$$

A) $\operatorname{sen}4x$ B) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x$ C) $\frac{1}{8}\operatorname{sen}8x$

D) $\operatorname{sen}8x$ E) $\frac{1}{2}.\cos 8x$

**20.-** Si se verifica:

$$\frac{\cos^3\theta}{\csc3\theta}+\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\sec3\theta}=\frac{1}{4}$$

Hallar el valor de "$\cos 8\theta$".

A) 1/7 B) 3/4 C) 1/9 D) 8/9 E) 7/9

**21.-** Si:

$$\cos^6\left(\frac{3\pi}{8}+\theta\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{8}-\theta\right)=m+n\operatorname{sen}(p\theta)$$

considerando: $p>0$, entonces el valor de: $m+n+p$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22.- Si: $\dfrac{4\tan x+1}{4-\tan x}=\tan(x+\phi)$

Calcular: $\tan 2\phi$, ($\phi$: agudo)

A) 8/15 B) 4/15 C) 15/16

D) 4/7 E) 1/2

23.- Si se verifica: $m\csc x = n\csc y$

Además: $x - y = \dfrac{3\pi}{2}$.

Expresar: $E=\csc(2x+2y)+\cot(2x+2y)$

en términos de "$m$" y "$n$".

A) $\dfrac{mn}{m^2n^2}$ B) $\dfrac{mn}{m+n}$ C) $\dfrac{2mn}{m-n}$

D) $\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ E) $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}$

## VARIACIÓN DE EXPRESIONES

24.- Calcular el máximo valor de:

$$\cos^3\alpha\,.\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha\,.\,\cos\alpha$$

A) 3/4 B) 2/5 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/2

25.- Calcular el máximo valor de la siguiente expresión:

$$E=\text{sen}3x+\cos 2x+2\text{sen}x(1-\cos 2x)$$

A) 17/8 B) 17/2 C) 17/4

D) 15/8 E) 15/2

26.- Hallar la suma de los valores máximos y mínimos de la siguiente expresión:

$E=M\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+N\cos x$. M, N son constantes reales.

A) N B) M C) N/2 D) M/2 E) 0

## IDENTIDADES AUXILIARES

27.- Simplificar: $W=\dfrac{\sec^2\theta(\csc 4\theta+\cot 4\theta)}{1-\tan^2\theta}$

A) $\csc 2\theta$ B) $\text{sen}\,2\theta$ C) $\tan 2\theta$

D) $\cot 2\theta$ E) $\sec 2\theta$

28.- Reducir:

$$R=3\tan^2 2\theta\,.\,\tan 6\theta+3\tan 2\theta-\tan^3 2\theta$$

para $\theta=\dfrac{\pi}{24}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

29.- Reducir:

$$E=\left(\frac{\text{sen}6x+\text{sen}3x}{\cos^2\frac{3x}{2}}\right).\csc\frac{9x}{2}$$

A) $\cos\dfrac{3x}{2}$ B) $\text{sen}\,\dfrac{3x}{2}$ C) $\tan\dfrac{3x}{2}$

D) $\sec\dfrac{3x}{2}$ E) $\csc\dfrac{x}{2}$

30.- Reducir la expresión:

$$E=\left(\csc\alpha\cdot\tan\frac{\alpha}{2}-2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

A) $\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha$ B) $\dfrac{1}{2}\text{sen}^2\alpha$ C) $\cos^2\alpha$

D) $\text{sen}^2\alpha$ E) $\dfrac{1}{2}\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$

31.- Calcular "$\tan 2x$" de modo que:

$$\text{sen}^2x-\text{sen}\,x\cos x-2\cos^2x=-0{,}5$$

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

32.- La expresión: $\dfrac{\text{sen}^4x+\cos^4x}{\text{sen}^6+\cos^6x}$ se puede expresar de la forma $(a+b\cos 4x)/(m-n\cos 4x)$ y se cumple que: $\sec\phi = \sqrt{\frac{a+b}{m+n}}$. ¿Qué valor tiene $\phi$), si $\phi \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$.

A) $\frac{7\pi}{4}$ B) $\frac{11\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{3}$ D) $\frac{16\pi}{9}$ E) $\frac{17\pi}{9}$

**33.-** Hallar el valor de: $E = \frac{\sec 2z \cdot \sec 2y}{\sec 2w \cdot \sec 2x}$

si se verifica:

$\operatorname{sen}(y+z) . \csc(w+x) = \operatorname{sen}(w-x) . \csc(z-y)$

$\cos(w+x) . \operatorname{sen}(z-y) = \cos(z+y) . \sec(w-x)$

A) -1 B) 1 C) cero D) 2 E) -2

**34.-** Sabiendo que:

$$\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x = n$$

obtener "$\tan 3x \cot x$".

A) $\frac{n}{2}+3$ B) $n+3$ C) $4n+12$

D) $2n+8$ E) $\frac{n}{4}+3$

**35.-** Siendo "$x$" e "$y$" ángulo agudos, tal que:

$$2[\tan x - \tan(x-y)] = \sec x . \sec y$$

Calcular: $\operatorname{sen}(x+y)$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**36.-** Hallar la suma de los "$n$" primeros términos de la serie:

$S = \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\tan 8\theta + \ldots$

A) $\cot\theta - 2^{n-1}\cot 2^{n-1}\theta$

B) $\tan\theta - 2^{n}\cot 2^{n}\theta$

C) $\cot\theta - 2^{n}\cot^{n}\theta$

D) $\cot\theta + 2^{n-1}\cot 2^{n}\theta$

E) $\cot\theta + 2^{n}\cot^{n}\theta$

**37.-** Reducir la siguiente expresión:

$$E = \frac{3\csc 36^\circ - 2\cot 36^\circ}{5\tan 18^\circ + \cot 18^\circ}$$

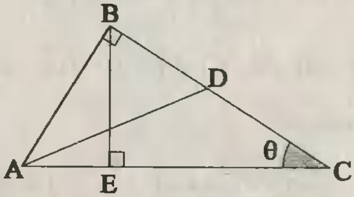
A) 1 B) -2 C) 1/2 D) -1/2 E) 2

## SITUACIONES GRÁFICAS

**38.-** La parte alta de una estatua es vista desde un punto en tierra con una ángula de elevación $\alpha$. Cuando el observador se ubica en el punto medio de la línea que une el pie de la estatua con el primer punto de observación esta vez es $(90^\circ - 2\alpha)$ el ángulo de elevación del mismo punto de vista de la estatua. Calcular "$\cot\alpha$".

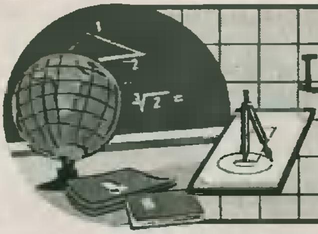
A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{4}$ E) $\sqrt{5}$

**39.-** En la figura mostrada, calcular la variación de $\frac{AB}{AC}$ sabiendo que AD = DC y $0 < \theta < 30^\circ$.




A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{1}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

D) $\langle 0; \sqrt{3}\rangle$ E) $\langle 0; \sqrt{2}\rangle$



# Identidades Trigonométricas del Arco Mitad

**CAP. 12**

## RELACIONES FUNDAMENTALES

**01.-** ¿Cuántos valores admite $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$?; a partir de: $5 \text{ sen } \theta = \text{sen } \frac{\theta}{2}$

A) 1 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

**02.-** Si: $\cos 2\theta = -\frac{119}{169}$ ; $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , calcule el valor de $k$, siendo:

$$k = 7 \text{ sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{13}$

**03.-** Reducir:

$$R = \frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{\sqrt{1 - \text{sen } x}} \quad ; \; x \in \left\langle \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

A) $2 \text{ sen} \frac{x}{2}$ B) $2 \cos \frac{x}{2}$ C) $-2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

D) $-2 \cos \frac{x}{2}$ E) $\tan \frac{x}{2}$

**04.-** Reducir:

$$W = \sqrt{1 + \text{sen} x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}\right)$$

$$\forall \, x \in \left\langle \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right\rangle$$

A) $2 \text{ sen } \frac{x}{2}$ B) $2 \cos \frac{x}{2}$ C) $-2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

D) $-2 \cos \frac{x}{2}$ E) $\tan \frac{x}{2}$

**05.-** Hallar el valor de cos 247º 30'.

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ D) $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

B) $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2} + 1$

C) $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

**06.-** Si : $0 < x < \pi/2$ , además:

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Obtener : $\sec \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}$

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/6 D) 1/8 E) 1

**07.-** Sabiendo que: $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

Hallar : $K = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}} -$

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}} + \text{sen } \frac{\theta}{4} + \cos \frac{\theta}{4}$$

A) $\text{sen}\dfrac{\theta}{4}$ B) $\text{sen}\dfrac{\theta}{2}$ C) $2\,\text{sen}\dfrac{\theta}{4}$

D) $2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}$ E) $\text{sen}\,\theta$

**08.-** Si: $180° < \theta < 270°$ y $\cos^2\theta = 16/25$,

calcular: $\csc\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sec\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)$

A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $-\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$ C) $\dfrac{7}{2}$

D) $-\dfrac{18}{5}$ E) $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

**09.-** Si: $\cos x = \dfrac{a}{b+c}$ ; $\cos y = \dfrac{b}{a+c}$ ;

$\cos z = \dfrac{c}{a+b}$ , entonces:

$\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \tan^2\left(\dfrac{y}{2}\right) + \tan^2\left(\dfrac{z}{2}\right)$ es igual a:

A) $(a+b+c) - 1$

B) $a+b+c$

C) $(2a+b+c)(a+b+c) - 1$

D) $(a+2b-c)(a+b+c) - 1$

E) 1

**10.-** Si: $\pi < \theta < 3\pi/2$ y $\cos^2\theta = 16/25$

Calcular: $\csc\dfrac{\theta}{2} + \sec\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)$

A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $-\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$ C) $\dfrac{7}{2}$

D) $-\dfrac{18}{5}$ E) $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

**11.-** Reducir:

$$R = \frac{\tan x \sec 2x - \csc 2x + \cot 2x}{\tan 2x - \tan x}$$

A) $2\,\text{sen}^2 x$ B) $2\,\text{sen}\,x$ C) $2\cos^2 x$

D) $\tan^2 x$ E) $\tan x\,\text{sen}\,x$

## FÓRMULAS RACIONALIZADAS

**12.-** Si $x \in \langle 0 ; \pi/4\rangle$, reducir:

$$R = \frac{\sqrt{1+\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)} + \sqrt{1-\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}}{\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{x}{2}\right)}$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) 1

D) 3 E) 2

**13.-** Determina el intervalo de «E», si:

$$E = \cos x \cot\frac{x}{2} - 2\cos x \cos^2\frac{x}{2} \cdot \cot x$$

A) $[-1 ; 1/2]$ B) $[-1/2 ; 0]$ C) $\langle -1/2 ; 1\rangle$

D) $\langle 0 ; 1\rangle$ E) $[-1/2 ; 1/2] - \{0\}$

**14.-** Calcule el máximo valor de:

$$E = \text{sen}\left(\frac{\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}}\right) + \cos(\cos x)$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $2\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 1/2

**15.-** Calcular el máximo valor de:

$$E = \cot\phi - \cot\phi/2 \ ; \ \phi \in \langle 0 ; \pi\rangle$$

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

**16.-** Si: $(1-a)\tan^2\dfrac{x}{2}=(1+a)\tan^2\dfrac{y}{2}$ ;

calcule: $N=(1+a\cos x)(1-a\cos y)+a^2$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**17.-** Reducir: $R=\dfrac{\sqrt{1+\text{sen}40^\circ}+\sqrt{1-\text{sen}40^\circ}}{\sqrt{1+\cos 50^\circ}-\sqrt{1-\cos 50^\circ}}$

A) tan 10° B) tan 20° C) cot 10°

D) cot 120° E) 1

**18.-** Si: $\sec\alpha=\cot\beta\cot\theta$,

calcular el máximo valor de:

$$E=\cos(\beta+\theta)\sec(\beta-\theta)$$

si además $\alpha\in\left\langle\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

A) $\sqrt{2}+2$ B) $3+2\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$

D) $2+2\sqrt{2}$ E) $3+\sqrt{2}$

**19.-** Si: $f(\theta)=\csc^2\theta+\csc^2 2\theta$ evaluar: $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

**20.-** Calcular el valor de:

$$E=\sec^2\frac{19\pi}{9}\ \sec^2\frac{20\pi}{9}\ \sec^2\frac{22\pi}{9}$$

A) 160 B) 62 C) 64 D) 65 E) 68

**21.-** Si : $\cot^2\dfrac{x}{2}=\cot^2\dfrac{y}{2}\ \cot^2\dfrac{z}{2}$

Reducir la siguiente expresión:

$$E=\frac{\cos y+\cos z-\cos x}{\cos x.\cos y.\cos z}$$

A) -1 B) 1 C) cero D) 2 E) -2

**22.-** Si : $(1+n\cos\alpha)(1-n\cos\beta)=1-n^2$ ;
Determinar A en :

$$\frac{\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\tan^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^A$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) 0

**23.-** Reducir:

$$E=3\cot\theta-\csc 2\theta-5\cot 2\theta$$

A) tan θ B) 2 tan θ C) 3 tan θ

D) cot θ E) 2 cot θ

**24.-** Si se cumple que:

$$\frac{1-a\cos x}{1-a}=\frac{1+a}{1-a\cos y}$$

Obtener: $\tan^2\dfrac{x}{2}.\tan^2\dfrac{y}{2}$

A) $3a$ B) $1+a$ C) $1-a$

D) $\dfrac{1-a}{1+a}$ E) $\dfrac{1+a}{1-a}$

**25.-** Un valor de $\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos a$ para que $\tan\dfrac{b}{2}$ sea $\tan^3\dfrac{a}{2}$ es:

A) 2 B) 1,3 C) 0,5

D) 0,3 E) 0,2

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**26.-** Obtener " sen 4θ" en términos de "$n$" si se cumple:

$$\csc 4\theta=1+n\cos^2\theta+\cos 2\theta-\cot\theta+\cot 4\theta$$

A) $\dfrac{4}{n^2}$ B) $\dfrac{n^2}{4}$ C) $\dfrac{n^2+2n}{4}$

D) $\dfrac{4}{n^2+2n}$ E) $\dfrac{4}{n-2}$

**27.-** Si:

$$\cos\theta\cot\frac{\theta}{2} - 2\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\cot\theta = \frac{1}{4}$$

Hallar el valor de : $E = 2\,\text{sen}\,2\theta - 1$

A) -1 B) 1 C) 2 D) cero E) -2

**28.-**Si se verifica:

$$\sec x = \frac{1-\sec y \sec z}{\sec(\pi+z)-\sec(\pi-y)},$$

además $x$, $y \wedge z$ pertenece al intervalo $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Hallar "$\cot\left(\frac{x}{2}\right)$" en términos de "$z$" e "$y$".

A) $-\cot\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}$ B) $\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}$

C) $\tan y \tan z$ D) $-\tan y\tan z$

E) $-\tan\frac{y}{2}\tan z$

**29.-** Si : $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\beta+\text{sen}\,\theta}{1+\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\theta}$

Hallar: $E = \cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$,

en términos de "$\alpha$" :

A) $-\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ B) $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

C) $\pm\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ D) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

E) $\pm\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

**30.-** Siendo: $\csc x - \cot x = 3$

Calcular : $\tan\left(\frac{45^\circ}{2}-\frac{x}{4}\right)$, indica un valor.

A) $\sqrt{7}-2$ B) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $\sqrt{5}+2$ E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

**31.-**En la ecuación:

$a\,\text{sen}\,x + b\cos x = c$ ; $\tan x/2$

admite un sólo valor:

Hallar: $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{ab}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**32.-** Si: $\alpha$; $\phi$ y $\theta$ son ángulos, que cumplen:
$\cos^2\alpha - \cos^2\theta = \cos^2\phi$, además:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2}$ ; $\text{sen}\,\phi = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ ; $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$

Calcular: $\tan\frac{\alpha}{2} + 2\tan\frac{\phi}{2} + 3\tan\frac{\theta}{2}$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

**33.-** Si: $\tan\left(\frac{x+a}{2}\right)\tan\left(\frac{x-a}{2}\right) = \tan^2\frac{b}{2}$

entonces $\dfrac{\cos x}{\cos a}$ es igual a:

A) $\cos b$ B) $\text{sen}\,b$ C) $\text{sen}\,a$

D) $\cos 2b$ E) $\cos a$

**34.-** Si: $x + y = z$;

Hallar E en función de $z$:

$$E = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 y +$$

$$2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\cos x\cos y$$

A) $\cos^2 z$ B) $\tan^2 z$ C) $\sec^2 z$

D) $\cot^2 z$ E) $\operatorname{sen}^2 z$

**35.-** Si $\alpha$ es tal que $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\operatorname{sen}^2\alpha = 16/25$; hallar el valor de:

$(\operatorname{sen} 2\alpha)(\operatorname{sen} \alpha/2)$

A) $\dfrac{48}{125}\sqrt{5}$ B) $\dfrac{24}{125}$ C) $-\dfrac{24}{25}\sqrt{5}$

D) $\dfrac{16}{125}\sqrt{5}$ E) $-\dfrac{48}{125}\sqrt{5}$

**36.-** En un triángulo rectángulo ABC, donde C es el ángulo recto, calcular: $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}$ en función de los lados del triángulo

A) $\sqrt{\dfrac{c+b}{2c}}$ B) $\sqrt{\dfrac{c-b}{2c}}$ C) $\sqrt{\dfrac{c-b}{2c}}$

D) $\sqrt{\dfrac{c+b}{2a}}$ E) $\sqrt{\dfrac{c+b}{c}}$

**37.-** Calcular: "A' y "B" en la siguiente identidad:

$$A\cot 2\theta = \cot\theta + B\tan\theta$$

A) 2 y 1 B) -2 y 1 C) 2 y -1

D) -2 y -1 E) 2 y -2

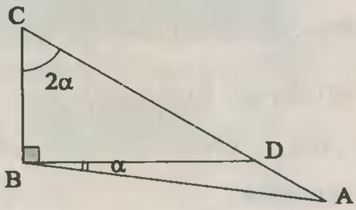
**SITUACIONES GRÁFICAS**

**38.-** Dado un triángulo rectángulo ABC recto en "B", se ubican dos puntos "M" y "N" en los catetos; "M" es punto medio de AB, tal que MA = MB = CN = 2 y $m\angle BAC = 37°$ y $m\angle NMC = x$, calcular:

$$P = 7\sqrt{65} + 130\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

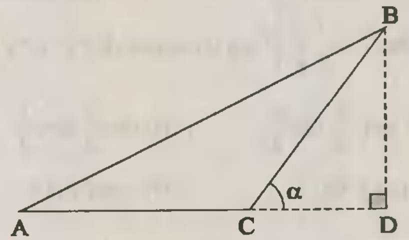
A) 61 B) 62 C) 63 D) 64 E) 65

**39.-** De la figura . Hallar sen $\alpha$, sabiendo que los segmentos AD y CD están en la relación de 2 a 5.




A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

**40.-** En gráfico, el $\Delta$ABC es isósceles. Si la longitud de AD es $m$ y la longitud BD es $h$, calcular tan $\alpha$.




A) $\dfrac{m}{2h}$ B) $\dfrac{3h}{m}$ C) $\dfrac{mh}{m^2-h^2}$

D) $\dfrac{2h}{m^2-h^2}$ E) $\dfrac{2mh}{m^2-h^2}$

**41.-** Del gráfico hallar: $\tan^2\theta/2\cot\alpha$.

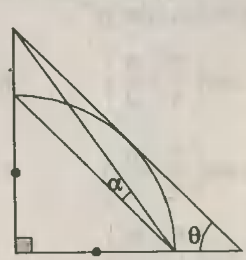
A) 1

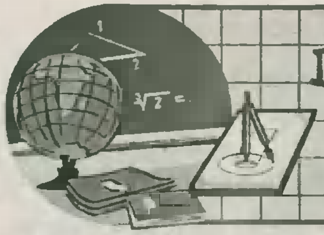
B) 2

C) 3

D) 4

E) 5





# Identidades Trigonométricas del Arco Triple

**CAP. 13**

## RELACIONES FUNDAMENTALES

**01.-** Si: $\tan\alpha = 1/3$, calcular:

$$F = \frac{3\tan 3\alpha - \tan\alpha}{3\tan\alpha - \tan 3\alpha}$$

A) -10  B) -9  C) +4  D) -8  E) -2

**02.-** Si: $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, calcular $\cos 3\alpha$

A) $\frac{23}{27}$  B) $-\frac{23}{27}$  C) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$  E) $-\frac{1}{3}$

**03.-** ¿A qué equivale: $\tan x\,(2\cos x + \cos 3x)$?

A) sen $4x$  B) sen $2x$  C) sen $5x$

D) sen $x$  E) sen $3x$

**04.-** Calcular $\tan 3a$, sabiendo que:

$$\tan(a + 15^\circ) = -\frac{1}{2}$$

A) 9/13  B) 3/10  C) 7/9

D) 5/2  E) 1/6

**05.-** Hallar $n$ para que la siguiente expresión sea una identidad:

$$\cos 3x . \tan x + 2\,\text{sen}\,x = \text{sen}(n - 1)x$$

A) 7  B) 2  C) 1  D) 4  E) 5

**06.-** Reducir:

$$V = \text{sen}^3(60^\circ + a)\sec a + \text{sen}^3(60 - a)\sec a$$

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  B) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$  C) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  E) $\frac{6\sqrt{3}}{3}$

**07.-** Hallar $n$ para que la siguiente expresión sea una identidad:

$$\text{sen}\,3x\cot x - 2\cos x = \cos nx$$

A) 3  B) 5  C) 8  D) 7  E) 4

**08.-** Simplificar: $\frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\text{sen}^3 x + \text{sen}\,3x}$

A) $\tan 3x/2$  B) $\tan x$  C) $\tan x/5$

D) $\tan x/2$  E) $\tan x/4$

**09.-** Si: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$, calcular el mínimo valor de:

$$E = \text{sen}\,\alpha\cos^3\beta + \cos\alpha\,\text{sen}^3\beta$$

A) 1  B) 1/2  C) 1/4  D) 1/8  E) 1/16

## RELACIONES AUXILIARES

**10.-** ¿A qué se es igual?

$$y = \frac{8\cot 3\alpha}{\cot(\alpha + 60^\circ) + \cot(\alpha - 60^\circ)}$$

A) $3 - \cot^2\alpha$  B) $4 - \cot^2\alpha$  C) $3 - \cot^2\alpha$

D) $7 - \cot^2\alpha$  E) $2 - \cot^2\alpha$

**11.-** Simplificar:

$$V=\frac{\cos 3\theta \operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen} 2\theta}{1+2\cos 2\theta}$$

A) 2/4 sen 3θ B) 5/6 sen 5θ C) 8/7 sen 4θ

D) 3/4 sen 4θ E) 1/2 sen 2θ

**12.-** Calcular: $V=\dfrac{4\sec 18°}{\tan 72°+\cot 72°}$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{5}-1$

D) $\sqrt{7}+3$ E) $\sqrt{6}-5$

**13.-** Calcular: $V=\dfrac{\cos^3 10°+\sqrt{3}\operatorname{sen}^3 10°}{\cos 10°+\sqrt{3}\operatorname{sen} 10°}$

A) 2/3 B) 5/3 C) 6/7 D) 8/3 E) 3/4

**14.-** Sabiendo: sen $(45° - a) = 1/3$,

calcular: sen $(45° + 3a)$

A) 20/25 B) 15/10 C) 23/27

D) 13/11 E) 9/8

**15.-** Calcular: $V=\dfrac{2\cos^3 20°+2\cos^3 40°}{\cos 20°+\cos 40°}$

A) 4/6 B) 2/5 C) 7/2 D) 3/2 E) 6/5

**16.-** Simplificar: $R=\dfrac{4\operatorname{sen}^2 3\phi-\operatorname{sen}^2 6\phi}{4}$

A) $\operatorname{sen}^4 2\phi$ B) $\operatorname{sen}^4 3\phi$ C) $\operatorname{sen}^3 4\phi$

D) $\operatorname{sen}^4 \phi$ E) $\operatorname{sen}^4 7\phi$

**17.-** Sabiendo que:

$\operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen} 3\theta+\cos^3\theta\cos 3\theta=1/27$,

determinar: cos 6θ

A) 23/24 B) -23/24 C) 25/17

D) -25/17 E) -23/27

**18.-** Si: $\operatorname{sen}^2 A = 1/2\,(\cos 6A - \cos 4A)$,

calcular: $E=\operatorname{sen}^3 A+\operatorname{sen}^3 3A$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 7 E) 5

**19.-** Hallar (A+ B), en la expresión identidad:

$\operatorname{sen} 3x(3\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} 9x)+\operatorname{sen}^2 6x=A\operatorname{sen}^2 Bx$

A) 5 B) 8 C) -3 D) 4 E) 7

**20.-** Simplificar:

$$y=\frac{1}{\tan 3\alpha+\tan\alpha}-\frac{1}{\cot 3\alpha+\cot\alpha}$$

A) cot 2α B) cot 7α C) cot 5α

D) cot 4α E) cot 3α

**21.-** Si: sen α - cos α - 1 = 0,

Hallar: cos (3α - 135º)

Si: $(\alpha - 45°) \in$ IC

A) $-\sqrt{2}/2$ B) $-\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{3}/3$

D) $-\sqrt{5}/4$ E) $\sqrt{6}/4$

**22.-** Si: sen α + sen β = 3(cos β - cos α),

hallar: P = cos 3α + cos 3β

A) 1 B) 4 C) 3 D) 0 E) 5

**23.-** Calcular:

$$E=\operatorname{sen}^3 20°+\operatorname{sen}^3 140°+\operatorname{sen}^3 280°$$

A) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ B) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ C) $-\dfrac{3}{4}$

D) $-\dfrac{3}{8}$ E) $-\dfrac{1}{8}$

**24.-** Calcular el valor de:

$$E=\frac{4\cos^3 24°+6\operatorname{sen}^2 12°-3}{4\cos^3 8°+6\operatorname{sen}^2 4°-3}$$

Si: $\cos 48° = a$

A) $2a$ B) $2a+1$ C) $2a-1$

D) $1-2a$ E) $2-a$

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**25.-** Si: $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2$, calcular:

$$\frac{\operatorname{sen}3x\cot x-2\cos x}{2\operatorname{sen}x+\cos 3x\tan x}$$

A) 11/2 B) 10/3 C) 9/8 D) 7/2 E) 8/11

**26.-** Calcular "$\tan^2\theta$" si se cumple:

$$\cos^3\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}\theta=\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha$$

A) 0,5 B) 0,4 C) 0,2 D) 0,3 E) 0,1

**27.-** Si: $\operatorname{sen}6\theta=\tan^2\theta\cot^2(30°-\theta)\tan(240°-\theta)$

Calcular «$\tan 3\theta$» si se sabe que es diferente a cero.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2/3 E) 3/2

**28.-** Si se verifica:

$$\sqrt[3]{\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}3\theta+\cos^3\theta\cos 3\theta}=\frac{1}{3}$$

Además $\theta\in$ II C, calcular "$6\cos\theta$"

A) $-\sqrt{6}$ B) $-2\sqrt{6}$ C) $-1$

D) $-2$ E) $-3\sqrt{6}$

**29.-** Cumpliendo que: $x+y+z=\pi$

factorizar:

$\operatorname{sen}3x\cos^3(y-z)+\operatorname{sen}3y\cos^3(z-x)+\operatorname{sen}3z\cos^3(x-y)$

A) $\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}3y\operatorname{sen}3z$

B) $\cos 3x\cos 3y\cos 3z$

C) $\operatorname{sen}3x\cos 3y\cos 3z$

D) $\cos 3x\operatorname{sen}3y\operatorname{sen}3z$

E) $\tan 3x\tan 3y\tan 3z$

**30.-** Si se verifica que: $\operatorname{sen}3\theta\cos 2\theta=\operatorname{sen}\theta$, hallar el valor de la expresión:

$$E=\operatorname{sen}5\theta-\operatorname{sen}\theta$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) cero

**31.-** Simplificar:

$$\csc\alpha+\csc\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\csc\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$$

A) $2\csc 2\alpha$ B) $\csc 3\alpha$ C) $3\csc 3\alpha$

D) $4\csc 2\alpha$ E) $5\csc\alpha$

**32.-** Si: $\cos 2\alpha=x\ldots(1)$

$\cos 3\alpha=y\ldots(2)$

Eliminar $\alpha$:

A) $3y^2=3x^3-4x+2$ B) $2y^2=4x^3-3x+1$

C) $4y^2=2x^3-3x+3$ D) $5y^2=6x^3-2x+5$

E) $7y^2=4x^3-2x+4$

**33.-** Resolver: $x^3-3x+\sqrt{3}=0$, luego, una de las soluciones es:

A) $-2\operatorname{sen}10°$ B) $-2\operatorname{sen}40°$

C) $-2\operatorname{sen}40°$ D) $-2\operatorname{sen}50°$

E) $-2\operatorname{sen}80°$

**34.-** Eliminar "$\theta$" de:

$$x\cos 2\theta+y\cos\theta=2(x-y)\cos^2\theta$$

$$y\operatorname{sen}3\theta-x\operatorname{sen}\theta=2(x-y)\operatorname{sen}^2\theta$$

A) $3(x^2+y^2)=10xy$ B) $3(x^2-y^2)=10xy$

C) $x^2+y^2=4xy$ D) $x^2-y^2=4xy$

E) $3(x^2+y^2)=4xy$

**35.-** Evaluar: $f\left(\dfrac{\pi}{15}\right)=$, si:

$f(x)=(\cos x-\operatorname{sen} x)(2\operatorname{sen}2x+1)-(\cos x+\operatorname{sen} x)(2\operatorname{sen}2x-1)$

A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\sqrt{5}+1$

**36.-** Si: $\dfrac{\operatorname{sen}5\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=x^2+x-1$, hallar el equivalente de : $3x-x^3$

A) $2\cos 3\alpha$ B) $-2\cos 3\alpha$ C) $2\cos 6\alpha$

D) $-2\cos 6\alpha$ E) $2\cos 12\alpha$

**37.-** Si: $\dfrac{\cot 3\theta}{\cot\theta}=a$, el equivalente de $\dfrac{\operatorname{sen}6\theta}{\operatorname{sen}2\theta}$, es:

A) $\dfrac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$ B) $\dfrac{2(1+a^2)}{(1+a)^2}$ C) $\dfrac{2(1-a^2)}{(1-a)^2}$

D) $\dfrac{4a}{(1-a)^2}$ E) $\dfrac{4a}{(1+a)^2}$

**38.-** Simplificar la expresión:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\tan x}-2\cos x}{\dfrac{\cos 3x}{\cot x}+2\operatorname{sen}x}$$

A) $\tan x$ B) $\tan 2x$ C) $\tan 3x$

D) $\cot 2x$ E) $\cot 3x$

**39.-** Hallar el equivalente de "$m$" en la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+2\cos x\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{9x}{4}-\cos\dfrac{3x}{4}\cos 3x}=m\sec\frac{3x}{2}$$

A) $\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{3x}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}\csc\dfrac{3x}{4}$ C) $\dfrac{1}{4}\sec\dfrac{3x}{4}$

D) $\dfrac{1}{4}\csc\dfrac{3x}{4}$ E) $\sec\dfrac{3x}{4}$

## SITUACIONES GRÁFICAS

**40.-** De la figura mostrada, obtener el valor de "$x$".

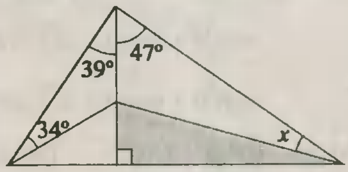
A) 13°

B) 23°

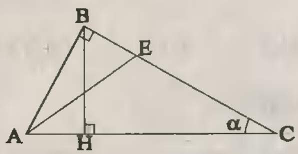
C) 27°

D) 30°

E) 37°




**41.-** En la figura, si $AE=EC=a$ y $HC=b$, el valor de BC en términos de $a$ y $b$ es:




A) $\sqrt[3]{2ab^2}$ B) $\sqrt[3]{2a^2b}$ C) $\sqrt[3]{ab^2}$

D) $\sqrt[3]{a^2b}$ E) $\sqrt[3]{a^2b^2}$

**42.-** Hallar "$x$".

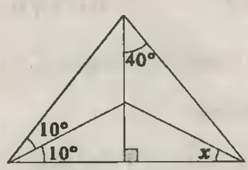
A) 10°

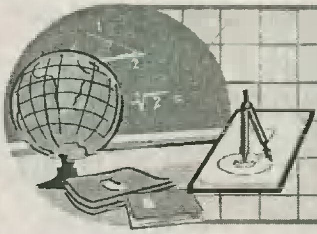
B) 15°

C) 20°

D) 25°

E) 30°





# Transformaciones de Sumas o Diferencias a Productos

CAP. 14

## TRANSFORMACIONES A PRODUCTO

**01.-** Simplificar:

$$E=\frac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}k\theta+\operatorname{sen}(2k-1)\theta}{\cos\theta+\cos k\theta+\cos(2k-1)\theta}$$

A) $\tan k\theta$ B) $\tan\theta$ C) $\cot k\theta$

D) $\cot\theta$ E) 1

**02.-** Transformar a producto:

$$E = \operatorname{sen} 24^\circ + \operatorname{sen} 16^\circ - \operatorname{sen} 8^\circ$$

A) $4\cos 4^\circ.\operatorname{sen} 8^\circ.\cos 12^\circ$

B) $4\operatorname{sen} 4^\circ.\operatorname{sen} 8^\circ.\operatorname{sen} 12^\circ$

C) $4\cos 4^\circ.\cos 8^\circ.\operatorname{sen} 12^\circ$

D) $4\operatorname{sen} 4^\circ.\cos 8^\circ.\operatorname{sen} 12^\circ$

E) $4\cos 4^\circ.\cos 8^\circ.\cos 12^\circ$

**03.-** Transformar a producto:

$$E = \cos 2x + \cos^2 x + 2\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 3x$$

A) $4\operatorname{sen}^2 3x \operatorname{sen} 2x$ D) $8\operatorname{sen}^2 3x \operatorname{sen}^2 2x$

B) $8\cos^2 4x \cos^2 2x$ E) $4\cos^2 4x\cos^2 x$

C) $4\cos^2 2x\cos^2 x$

**04.-** Si: $a = 5^\circ$, hallar:

$$E=\frac{\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}4a}{\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a}$$

A) $2+\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$

D) $1+\sqrt{3}$ E) $2-\sqrt{3}$

**05.-** Simplificar la expresión:

$$E=\frac{\cos 4x+\cos 8x+2-4\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}7x}$$

A) $\cos^2 3x . \csc 4x . \sec x$

B) $\operatorname{sen}^2 3x . \cos 4x . \sec 2x$

C) $\operatorname{sen} 2x . \csc 3x$

D) $\csc 3x . \sec 2x . \cos 2x$

E) $\operatorname{sen} 3x . \csc 2x$

**06.-** Reducir a monomio:

$$\frac{\operatorname{sen}2a}{\operatorname{sen}3a}+\frac{\operatorname{sen}4a}{\operatorname{sen}3a}-\frac{\operatorname{sen}4a}{\operatorname{sen}5a}$$

A) $\operatorname{sen} 6a. \csc 5a$ D) $\tan a . \cot 5a$

B) $\operatorname{sen} 3a . \cos 4a$ E) $\cot a . \tan 5a$

C) $\operatorname{sen} 2a. \csc 3a$

**07.-** Simplificar:

$$E=\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{1+\cos\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha}$$

A) $\csc\alpha$ B) $\sec\alpha$ C) $\tan\alpha$

D) $2\cos\alpha$ E) $2\operatorname{sen}\alpha$

**08.-** Si: $A + B = \pi/4$, hallar el valor de:

$$\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\cos A+\cos B}$$

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{2}-1$ E) $2-\sqrt{3}$

**09.-** Transformar a producto:

$$S = \text{exsec}\, x - \text{vers}\, x$$

A) $2\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\sec x$ D) $4\cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right).\text{sen}\, x$

B) $4\,\text{sen}^4\left(\dfrac{x}{2}\right).\sec x$ E) $2\cos^2 x.\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

C) $2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right).\csc x$

**10.-** Calcular:

$$y = \frac{\text{sen}^3 70° + \text{sen}^3 50° + \text{sen}^3 20° + \cos^3 10°}{\cos 40° + \text{sen} 80°}$$

A) $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ B) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ C) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

D) $\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ E) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

**11.-** Si: $x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{18};\dfrac{\pi}{18}\right\rangle$, hallar la extensión de:

$$A = \frac{\text{sen}x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)}{\cos 4x}$$

A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $\langle -1 ; 1\rangle$ C) $\langle 0 ;1\rangle$

D) $\left\langle -\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle -\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

**12.-** De qué naturaleza es el triángulo ABC si se cumple:

$$\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C = 2$$

A) Isósceles D) Obtusángulo

B) Equilátero E) Acutángulo

C) Rectángulo

**13.-** De qué naturaleza es el triángulo ABC, en el que se cumple:

$$\text{sen}\, 2A + \text{sen}\, 2B + \text{sen}\, 2C = 4\cos A.\cos B.\text{sen}\, C$$

A) Obtusángulo D) Isósceles

B) Rectángulo E) Equilátero

C) Acutángulo

**14.-** Factorizar:

$$y = \text{sen}\, a + \text{sen}\, 3a + \text{sen}\, 4a$$

A) $4\cos\dfrac{a}{2}.\csc\dfrac{3a}{2}\ \text{sen}\, 2a$

B) $2\,\text{sen}\dfrac{a}{2}.\sec\dfrac{a}{2}.\tan a$

C) $4\cos a.\sec\dfrac{a}{2}.\csc\dfrac{a}{2}$

D) $2\tan\dfrac{a}{2}.\sec\dfrac{a}{2}.\csc\dfrac{a}{2}$

E) $2\cos\dfrac{a}{2}.\csc\dfrac{3a}{2}.\text{sen}\, 2a$

**15.-** Calcular:

$$E = \text{sen}^4 10° + \text{sen}^4 50° + \text{sen}^4 70°$$

A) 9/8 B) 9/4 C) 1/8 D) 11/8 E) 1

**16.-** Calcular: A + B + C

$$\text{sen}^4\left(\frac{\pi}{6}+x\right) + \text{sen}^4\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \equiv$$

$$A\cos 4x + B\cos 2x + C$$

A) 2 B) 4 C) 1/8 D) 8 E) 10

**17.-** Si: $\sec x + \sec y = a \ldots (1)$

$\tan x + \tan y = b \ldots (2)$

¿A qué es igual: $A = \cos\dfrac{(x-y)}{2}.\csc\dfrac{(x+y)}{2}$

A) $a^2b^2$ B) $ab$ C) $a^3b^3$ D) $a/b$ E) $b/a$

## PROBLEMAS CONDICIONALES

**18.-** Sabiendo: $x + y + z = 360^\circ$

Simplificar:

$$L = \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}}{1+\cos x+\cos y+\cos z} + \frac{\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}+\cos\frac{z}{2}-1}{\operatorname{sen}\frac{x}{4}\operatorname{sen}\frac{y}{4}\operatorname{sen}\frac{z}{4}}$$

A) 17/4 B) 3/4 C) 5/3 D) 5/4 E) 9/4

**19.-** Calcular "$x$" a partir de la siguiente igualando sabiendo que: $A + B + C = 180^\circ$

$$\frac{x(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C}$$

A) 1/8 B) 1/16 C) 1/4 D) 16 E) 4

**20.-** De qué naturaleza es el $\Delta$ ABC si se cumple:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$$

A) Obtusángulo D) Equilátero

B) Acutángulo E) Isósceles

C) Rectángulo

**21.-** Simplificar:

$$V = \frac{a\operatorname{sen}x - 2b.\operatorname{sen}3x + a\operatorname{sen}5x}{a\cos x - 2b.\cos 3x + a\cos 5x}$$

A) $\tan x$ B) $\tan 2x$ C) $\tan 3x$

D) $\tan 4x$ E) $\tan 5x$

**22.-** De la siguiente identidad:

$$2\operatorname{sen}6\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}9\theta + \operatorname{sen}3\theta,$$

la medida de $\theta$, es:

A) 15° B) 30° C) 45° D) 53° E) 75°

**23.-** Factorizar:

$$E = \operatorname{sen}\frac{A}{2} + \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}\frac{3A}{2} + \operatorname{sen}2A + \operatorname{sen}\frac{5A}{2}$$

A) $\operatorname{sen}\frac{3A}{2} . \operatorname{sen}A . \csc\frac{A}{4}$

B) $\operatorname{sen}\frac{5A}{4} . \operatorname{sen}\frac{3A}{2} . \csc\frac{A}{4}$

C) $\tan\frac{3A}{2} . \tan\frac{5A}{4} . \csc A$

D) $\cos\frac{3A}{2} . \cos A . \sec\frac{A}{4}$

E) $\operatorname{sen}\frac{7A}{4} . \operatorname{sen}\frac{5A}{2} . \csc\frac{3A}{4}$

**24.-** Calcular el máximo valor de:

$$E = \operatorname{sen}(50^\circ + x) - \operatorname{sen}(10^\circ - x)$$

A) 1/2 B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) 2

**25.-** Si: $A + B + C = \pi$

¿Cuál es el valor de $x$ que verifica la igualdad?

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B - \operatorname{sen}C = x\operatorname{sen}\frac{A}{2} . \operatorname{sen}\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**26.-** Transformar a producto:

$$E = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y + \operatorname{sen}z - \operatorname{sen}(x + y + z)$$

A) $4\cos(x + y).\cos(y + z).\cos(x + z)$

B) $4\operatorname{sen}(x + y).\operatorname{sen}(y + z).\operatorname{sen}(x + z)$

C) $4\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{y+z}{2}\right).\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$

D) $4\,\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\,\text{sen}\left(\dfrac{y+z}{2}\right).\text{sen}\left(\dfrac{x+z}{2}\right)$

E) $4\,\text{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right).\,\text{sen}\left(\dfrac{y-z}{2}\right).\,\text{sen}\left(\dfrac{x-z}{2}\right)$

**27.-** Calcular:

$$E=\cos^2 6°+\cos^2 42°+\cos^2 66°+\cos^2 78°$$

A) 7/2 B) 7/4 C) 7/8 D) 7/16 E) 9/4

**28.-** Si: $\text{sen}\,x+\text{sen}\,y=a\ \ldots(1)$

$\cos x+\cos y=b\ \ldots(2)$

¿A qué es igual sen $(x+y)$?

A) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ C) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ E) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

**29.-** Calcular el menor entero par que adopta "$k$" en la igualdad:

$$\text{sen}(k-1)\frac{\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}.\tan\frac{6\pi}{7}+2\,\text{sen}\frac{\pi}{7}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**30.-** Calcular una relación entre $x$, $y$, $z$ independiente de "θ"

$$\frac{\text{sen}\theta}{x}=\frac{\text{sen}3\theta}{y}=\frac{\text{sen}5\theta}{z}$$

A) $x(z-x)=y(y+x)$ D) $y(z-x)=z(y-x)$

B) $x(z+x)=y(y+x)$ E) $y(x+y)=z(z+x)$

C) $x(z+x)=y(y-x)$

**31.-** Calcular una relación entera $a$, $b$, $c$ y $d$ independiente de $x$ e $y$:

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+y)}{b}=\frac{\cos(x+2y)}{c}=\frac{\cos(x+3y)}{d}$$

A) $c(a+d)=b(b+c)$

B) $c(a+c)=b(b+d)$

C) $b(a+d)=c(b+c)$

D) $c(a-d)=b(b-c)$

E) $c(a-c)=b(b-d)$

**32.-** Calcular: $E=\text{sen}\dfrac{2\pi}{7}+\text{sen}\dfrac{4\pi}{7}+\text{sen}\dfrac{8\pi}{7}$

A) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ B) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{7}$

**33.-** Calcular "$n$" si:

$$12\cos x+\cos 11x=n\cos\theta\,.\,\cos\phi$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

**34.-** Simplificar:

$$E=\frac{\cos 5x+3\cos 3x+4\cos x}{\text{sen}5x-3\text{sen}3x+4\text{sen}x}$$

A) $-\cot^3 x$ B) $\tan^3 x$ C) $-\tan^3 x$

D) $\cot^3 x$ E) 1

## EXPRESIONES EQUIVALENTES

**35.-** Calcular el valor de:

$$K=\frac{\text{sen}1090°+\text{sen}790°+\text{sen}460°}{2\cos 5°\cos 35°\cos 50°}$$

A) -1 B) -2 C) 1/4 D) 0.5 E) 2

**36.-** ¿En qué tipo de triángulo ABC, se cumple?

$$\text{sen}\,A=\frac{\text{sen}B+\text{sen}C}{\cos B+\cos C}$$

A) Equilátero B) Isósceles C) Rectángulo

D) Obtusángulo E) Acutángulo

**37.-** Si: $\text{sen}(y + z + x)$; $\text{sen}(x + z - y)$; $\text{sen}\,(x+y - z)$ forman en ese orden una progresión aritmética, ¿a qué es igual $\tan y$?

A) $\tan x + \tan z$ B) $\tan x - \tan z$

C) $1/2\,(\tan x + \tan z)$ D) $1/2(\tan x + \tan z)$

E) $1/2(\tan x - \tan z)$

**38.-** De la siguiente relación:

$$\frac{\cos(x - y)}{a} = \frac{\cos(x + y)}{b} = \frac{\text{sen}2y}{c}$$

¿A qué es igual $\dfrac{\cos x}{\text{sen } y}$ ?

A) $\dfrac{a - b}{c}$ B) $\dfrac{a+b}{c}$ C) $\dfrac{a+c}{b}$

D) $\dfrac{a-c}{b}$ E) $\dfrac{b+c}{a}$

## SITUACIONES GRÁFICAS

**39.-** Si: AB = DC, calcular

$$E = \tan\theta - 2\cos 4\theta + \tan 3\theta$$

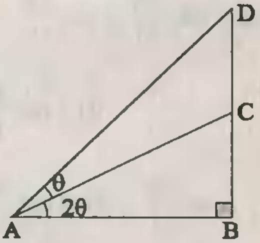
A) -2

B) -1

C) 0

D) 1

E) 2




**40.-** En la figura, calcula el equivalente en forma de producto de la siguiente expresión:

$$k = AE + BE + CE + DE$$

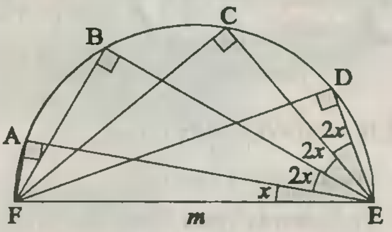
A) $4m$ sen $x$ sen $2x$ sen $4x$

B) $4m$ sen $x$ sen $2x$ sen $3x$

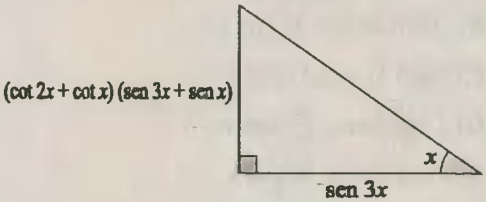
C) $4m$ sen $x$ sen $3x$ sen $5x$

D) $4m$ cos $x$ cos $2x$ sen $4x$

E) $4m$ cos $x$ cos $3x$ cos $5x$




**41.-** En la figura, calcule sec $x$.




A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{6}/2$

**42.-** De la figura, encontrar la medida de $\theta$:

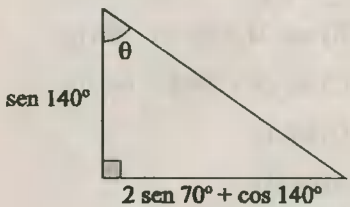
A) 10°

B) 30°

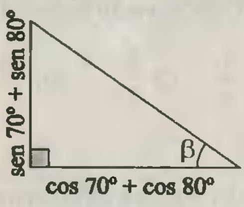
C) 60°

D) 50°

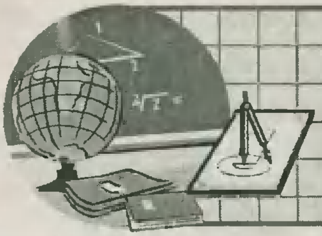
E) 35°




**43.-** De la figura determina el valor de "$\beta$".




A) 30° B) 45° C) 53° D) 60° E) 75°



# Transformaciones de Producto a Sumas o Diferencias

**CAP. 15**

**APLICACIONES DIRECTAS**

**01.-** Transformar a producto

E = sen $5x$ sen $4x$ + sen $4x$ sen $3x$- sen $2x$ sen $x$

A) 2 sen $5x$ cos $3x$ sen $x$

B) 2 cos $5x$ sen $3x$ cos $x$

C) 2 sen $5x$ sen $3x$ cos $x$

D) 2 cos $5x$ cos $3x$ sen $x$

E) 2 cos $5x$ cos $3x$ cos $x$

**02.-** Expresar en forma de sumas o diferencias:

$$E = 4 \text{ sen } x \text{ sen } 2x \text{ sen } 3x$$

A) sen $2x$ + sen $4x$ - sen $6x$

B) cos $2x$ + cos $4x$ - cos $6x$

C) sec $2x$ + sec $4x$ - sec $6x$

D) tan 4x

E) sec $6x$

**03.-** Calcular :

$$E = \text{sen}^2 36^\circ - \text{sen } 36^\circ \cos 6^\circ + \cos^2 6^\circ$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

**04.-** Reducir :

$$E = \sqrt[3]{\cos 6x . \cos 3x + \text{sen} 5x . \text{sen} 4x + \cos x}$$

A) 2sen $x$ B) $\sqrt[3]{2}$ sen $x$ C) 2 cos $x$

D) $\sqrt[3]{2}$ cos $x$ E) cos $x$

**05.-** Transformar a producto:

$$E = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{11} + \tan \frac{2\pi}{11}$$

A) $8 \text{ sen} \frac{\pi}{11} . \text{ sen } \frac{2\pi}{11} . \text{ sen } \frac{5\pi}{11}$

B) $6 \text{ sen} \frac{\pi}{11} . \text{ sen } \frac{2\pi}{11} . \text{ sen } \frac{5\pi}{11}$

C) $4 \text{ sen} \frac{\pi}{11} . \text{ sen } \frac{2\pi}{11} . \text{ sen } \frac{5\pi}{11}$

D) $2 \text{ sen} \frac{\pi}{11} . \text{ sen } \frac{2\pi}{11} . \text{ sen } \frac{5\pi}{11}$

E) $\frac{1}{4} \text{ sen} \frac{\pi}{11} . \text{ sen } \frac{2\pi}{11} . \text{ sen } \frac{5\pi}{11}$

**06.-** Reducir: $\csc \frac{2\pi}{11} + \csc \frac{5\pi}{11} - \csc \frac{8\pi}{11}$

A) $2 \cos \frac{4\pi}{11} . \csc \frac{2\pi}{11}$ B) $2 \text{ sen} \frac{4\pi}{11} . \sec \frac{2\pi}{11}$

C) $2 \text{ sen} \frac{4\pi}{11} . \csc \frac{2\pi}{11}$ D) $4 \cos \frac{4\pi}{11} . \csc \frac{2\pi}{11}$

E) $4 \text{ sen} \frac{4\pi}{11} + \sec \frac{2\pi}{11}$

**07.-** Expresar como diferencia de senos:

$$P = 4 \text{ sen } \alpha . \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) . \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

A) sen 3α - sen 2α  B) sen 4α - sen 2α

C) sen 5α - sen 3α  D) sen 3α - sen α

E) sen 4α - sen α

**08.-** Reducir la expresión:

$$V = \frac{\text{sen}x}{\text{sen}2x} - \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}4x}$$

A) sen $x$. csc $4x$  B) cos $x$. sec $4x$

C) -sen $x$. csc $4x$  D) - cos $x$ . sec $4x$

E) sen $2x$ csc $4x$

**09.-** Transformar a producto:

4 sen $2x$ . cos $4x$. cos $6x$ - 2 sen $x$ . cos $3x$

A) 2 cos $2x$ cos $15x$ cos $5x$

B) 2 sen $2x$ sen $15x$ csc $5x$

C) cos $2x$ cos $15x$ cos $5x$

D) sen $2x$ sen $15x$ csc $5x$

E) cos $2x$ cos $15x$ csc $5x$

**PROBLEMAS CONDICIONALES**

**10.-** Si: $x \in \left[\frac{7\pi}{30};\frac{\pi}{4}\right]$, calcular la suma del máximo y mínimo valor de:

$$M = 2\cos^2 2x\cos x - \cos x - 0{,}5\cos 3x$$

A) $-\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}\right)$  B) $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}\right)$

C) $-\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\right)$  D) $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\right)$

E) $-\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$

**11.-** Si: $k = (\cos 3x\ \text{sen}\ 2x - \cos 4x\ \text{sen}\ x)\sec 2x$, calcular la extensión de "$k$"

A) $\langle -1\ ;\ 1\rangle$  B) $\langle 0';\ 1\rangle$  C) $[0;\ 1\rangle$

D) $[-1;\ 1\rangle - \{-\sqrt{2}/2\}$

E) $[-1;\ 1] - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

**12.-** Calcular la medida del ángulo "$x$". Si: $x \in \langle 0°, 90°\rangle$. Además se cumple :

$$\frac{4\cos 40°}{\sqrt{3}\cos 20° + 2\cos 80°\left(\cos 10° + \sqrt{3}\right)} = \tan x$$

A) 30°  B) 40°  C) 45°  D) 50°  E) 20°

**13.-** Calcular el máximo de :

$$E = \text{sen}\,(x+20°).\text{sen}\,(x+80°)$$

A) $\frac{1}{4}$  B) $\frac{2}{3}$  C) $\frac{3}{4}$  D) $\frac{4}{5}$  E) $-\frac{1}{4}$

**14.-** Si : tan $a$ . tan ( $a$ + $b$ ) = $k$, ¿a qué es igual?

$$E = \cos\,(2a+b)\sec b$$

A) $\frac{1-k}{1+k}$  B) $\frac{1+k}{1-k}$  C) $\frac{k-1}{k+1}$

D) $\frac{k+1}{k-1}$  E) $k$

**15.-** Transformar al producto:

$$E = \text{sen}\ 18°.\csc 12° + \cos 36°.\sec 6°$$

A) 4 sen 36° - cos 12°  B) 4 cos 36° - sen 12°

C) 4 cos 18° - sen 6°  D) 2 sen 36°- cos 12°

E) 2 cos 36° - sen 12°

**16.-** Si:  sen $x$ + sen $y$ = sen $x$.sen $y$

Calcular: $E = \cos\frac{(x-y)}{2} - \text{sen}\ \frac{(x+y)}{2}$

A) 1/2  B) -1/2  C) ± 1  D) ±1/4  E) ±1/2

**17.-** En un triángulo ABC se cumple que:

$$2 \text{ sen B sen C} = \text{sen A} \cdot \cot \frac{A}{2}$$

¿Qué tipo de triángulo es?

A) Rectángulo B) Isósceles

C) Equilátero D) Escaleno

E) No se puede afirmar nada

**18.-** ¿A qué es igual?

$$E = \sqrt{3} \cot 20° - 4 \cos 20°$$

A) $\sqrt{3}$ B) sen 20° C) cot 20°

D) cos 20° E) 1

**19.-** Calcular el máximo valor de:

$$E = \text{sen}(x + \frac{2\pi}{3}) . \cos(x + \frac{\pi}{3})$$

Cuando: $0 < x < \pi$

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

**20.-** Si: $\tan(a + b) = 3 \tan a$

Calcular: $E = \frac{\text{sen}2(a+b) + \text{sen}2a}{\text{sen}2b}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**21.-** Si: $\frac{\text{sen}^3 3x - \text{sen}4x.\text{sen}2x}{\cos^2 4x + \text{sen}5x.\text{sen}3x} = k$

Calcular: $\cos 2x$

A) $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ B) $\frac{1-k}{1+k}$ C) $\frac{2}{1+k^2}$

D) $2k\sqrt{1-k^2}$ E) $k$

**22.-** Si: $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y + \text{sen}^2 z = 1$

$$x + y + z = 0$$

Calcular: $\cos x . \cos y . \cos z$

A) 3/2 B) 2/3 C) 1/2 D) 2 E) 1

**23.-** Si: $\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{1+\cos^2 x}{1+\text{sen}^2 x}$

Calcular: $\text{sen}(3x + y). \csc(x - y)$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

**24.-** ¿A qué es igual? "θ"

$$\cot\theta = \frac{1}{2} \sec 80° - 2 \text{ sen } 70°$$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 54° E) 60°

**25.-** Simplificar: sec46° - sec 14° + sec 74°

A) sec 42° B) 3 sec 42° C) - 3 sec 42

D) 3 sec 14° E) - 3 sec 14°

**26.-** Si: $\sqrt{3} \cos 17° - \cos 13° = m$

¿A qué es igual?

$$E = \sqrt{3} \cos 17° - \text{sen } 17°$$

A) $m$ B) $2m$ C) $m/2$ D) $m/4$ E) $\sqrt{3}\, m$

**27.-** Simplificar: $\frac{\tan\frac{5\pi}{11} - 4\text{sen}\frac{4\pi}{11}}{\tan\frac{3\pi}{11} + 4\text{sen}\frac{2\pi}{11}}$

A) $\sqrt{11}$ B) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ E) 2

**28.-** Si: $1 - \cos x$; $1 - \cos y$; $1 - \cos z$

Están en progresión armónica

Calcular: $E = \dfrac{2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z}$ - sen $y$

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) 2 E) 4

**29.-** Si:

$\cos 7x \sec x = A\cos 6x + B\cos 4x + C\cos 2x + D$

Calcular: $A + B + C + D$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**30.-** Si: $\cos\dfrac{7x}{2} . \cos\dfrac{3x}{2} = \cos\dfrac{9x}{2} . \cos\dfrac{5x}{2}$,

hallar: $E = \tan 6x . \operatorname{sen} x$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 1/2 E) -1/2

**VALOR NUMÉRICO**

**31.-** Calcular:

$L = \sqrt{7}\cot\dfrac{\pi}{7}\cot\dfrac{2\pi}{7}\cot\dfrac{3\pi}{7} - \sec\dfrac{\pi}{7}\sec\dfrac{2\pi}{7}\sec\dfrac{3\pi}{7}$

A) -7 B) 7 C) 1/7 D) -1/7 E) 9

**32.-** Calcular: $E = \tan\dfrac{2\pi}{14} + \tan\dfrac{4\pi}{14} - \tan\dfrac{6\pi}{14}$

A) -1 B) $-\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{3}$

D) $-\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{7}$

**33.-** ¿A qué es igual "θ"?

$$\tan\theta = \frac{1 + 4\cos 20°}{\sqrt{3}}$$

A) 10° B) 20° C) 80° D) 70° E) 30°

**34.-** Calcular: $E = \dfrac{\tan 5° + \cot 5° - 8\cos 20°}{4}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) - 2 E) 1

**35.-** Calcular: $E = \sec\dfrac{2\pi}{7} + \sec\dfrac{4\pi}{7} + \sec\dfrac{6\pi}{7}$

A) -1 B) - 2 C) - 1 D) 2 E) -4

**36.-** Calcular:

$$\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

A) $\dfrac{7}{4}$ B) $\dfrac{7}{16}$ C) $\dfrac{7}{2}$ D) $\dfrac{7}{8}$ E) $\dfrac{7}{3}$

**37.-** ¿A qué es igual?

cos 12° . cos 60° . sec 72° - cos 24°

A) cos 12° B) cos 60° C) cos 36°

D) cos 48° E) cos 24°

**38.-** Calcular: $\tan\dfrac{\pi}{14} . \tan\dfrac{3\pi}{14} . \tan\dfrac{5\pi}{14}$

A) $-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ B) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ C) $-\sqrt{7}$

D) $\sqrt{7}$ E) $-2\sqrt{7}$

**39.-** Calcular: $\operatorname{sen}^5\dfrac{3\pi}{7} + \operatorname{sen}^5\dfrac{5\pi}{7} - \operatorname{sen}^5\dfrac{\pi}{7}$

A) $\dfrac{\sqrt{7}}{16}$ B) $\dfrac{3\sqrt{7}}{16}$ C) $\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

D) $\dfrac{7\sqrt{7}}{16}$ E) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

**40.-** Calcular: $E = \csc^2\dfrac{\pi}{7} + \csc^2\dfrac{2\pi}{7} + \csc^2\dfrac{3\pi}{7}$

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

# Sucesiones y Series Trigonométricas

**CAP. 16**

## SUMATORIAS

**01.-** La suma de los senos de 5 ángulos en progresión aritmética es cero. Calcular la razón de la progresión, sabiendo que es positivo y menor de 90°.

A) 72°  B) 75°  C) 60°  D) 45°  E) 30°

**02.-** Calcular el valor de:

$$E = (\cos 10° + \cos 20° + \cos 30° + \ldots + \cos 240°)\,\frac{\text{sen}5°}{\cos 55°}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  C) $\sqrt{3}$  D) $-\sqrt{3}$  E) 1/2

**03.-** Calcular:

$$R = \text{sen}\frac{\pi}{180} + \text{sen}\frac{\pi}{90} + \text{sen}\frac{\pi}{60} + \ldots + \text{sen}\,\pi$$

A) $\tan\frac{\pi}{90}$  B) $\tan\frac{\pi}{180}$  C) $\tan\frac{\pi}{360}$

D) $\cot\frac{\pi}{360}$  E) $\cot\frac{\pi}{180}$

**04.-** Evaluar la siguiente expresión:

$$E = \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{4\pi}{7}$$

A) $\sqrt{7}$  B) $\sqrt{2}$  C) $\sqrt{3}$  D) $\sqrt{5}$  E) $-\sqrt{7}$

**05.-** Calcular el valor de S, si:

$$S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$

A) 1  B) 0  C) 1/2  D) 3/2  E) $\sqrt{7}$

**06.-** Encontrar el valor que le corresponde a S en la siguiente expresión trigonométrica:

$$S = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7}$$

A) 1/4  B) 1/2  C) 3/4  D) 5/4  E) 1

**07.-** Calcular:

$$S = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$$

A) - 1/2  B) 1  C) 1/2  D) -3/2  E) 3/2

**08.-** Evaluar:

$$S = \cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \ldots + \cos^2 170°$$

A) 7  B) 8  C) 6  D) 9  E) 17

**09.-** Hallar el equivalente de:

$$S = \text{sen}\,x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,5x + \ldots + \text{sen}\,15x$$

A) $\text{sen}^2 8x \,.\, \csc x$  B) $\text{sen}^2 8x \sec x$

C) $\cos^2 8x \,.\, \sec x$  D) $\cos 8x \csc x$

E) $\cos 8x \,.\, \csc 2x$

**10.-** Si la expresión:

$$\text{sen}^2\left(\frac{1°}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{3°}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{5°}{2}\right) + \ldots + \text{sen}^2\left(\frac{89°}{2}\right)$$

es idéntica a: A + B csc 1°; se pide calcular:

$$V = 2A - 4B$$

A) 46  B) 44  C) 42  D) 40  E) 80

**11.-** Calcular el valor de la suma de la serie:

$$E=\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\pi$$

A) $n$ B) $2n$ C) $2n+1$ D) -1/2 E) 1/2

**12.-** Calcular:

$$E=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

A) $n$ B) $2n$ C) $2n+1$ D) -1/2 E) 1/2

**13.-** Evaluar P en la siguiente expresión:

$$P=\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{9}+\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9}+\cos^2\frac{3\pi}{9}+\cos^2\frac{4\pi}{9}$$

A) 1/4 B) 2/4 C) 3/4 D) 5/4 E) 9/4

**14.-** Calcular:

$$R=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

A) -1/2 B) 1/2 C) 1/4 D) -1/4 E) 1/8

**15.-** Al reducir la siguiente expresión, se obtiene:

$$R=\operatorname{sen}^2(x-120^\circ)+\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2(x+120^\circ)$$

A) 1/2 B) 1 C) 3/2 D) 3/4 E) 5/4

**16.-** Calcular: $R=\tan^2\frac{\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 17 E) 21

**17.-** Se pide evaluar P, si se sabe que:

$$P=\cos^4\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^4\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^4\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

A) 19/16 B) 17/8 C) 13/4 D) 1/8 E) 1/16

**18.-** Sabiendo que: $10\theta=\pi$, y además:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^2 2\theta+\operatorname{sen}^2 3\theta+\ldots\operatorname{sen}^2 9\theta+\operatorname{sen}^2 11\theta=A+B\cos(C\theta)\ ;$$

calcular: $A+B+C$

A) 5 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

**19.-** Determinar:

$$M=\underbrace{\cos^{2n+1}\frac{\pi}{7}+\cos^{2n+1}\frac{2\pi}{7}+\cos^{2n+1}\frac{3\pi}{7}+\ldots}_{6\text{términos}}$$

Sabiendo que: $n\in\mathbb{Z}$

A) 0 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

**20.-** Hallar los valores de "$a$", para los cuales existan soluciones de la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a$$

A) $0\le a\le\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{2}$

B) $0\le a\le\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{2}$

C) $0\le a\le\frac{1}{2}$

**21.-** Calcular la suma de los $n$ primeros términos de la serie:

$$S=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3}+\ldots$$

A) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x$ B) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}+\cot x$

C) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}-\tan x$ D) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}+\tan x$

E) $\frac{1}{2^{n+1}}\cot\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}-\cot x$

**22.-** Calcular:

$$S=\cos\frac{2\pi}{11}+2\cos\frac{4\pi}{11}+3\cos\frac{6\pi}{11}+...+10\cos\frac{20\pi}{11}$$

A) 0 B) 45 C) 11/2 D) -11/2 E) -9/2

**23.-** Calcular la suma de los "*n*" primeros términos de la serie:

$$S = \operatorname{sen} 1.\sec 3 + \operatorname{sen} 3.\sec 9 + \operatorname{sen} 9.\sec 27 + ...$$

A) $1/2\,(\cot 1 - \cot 3^n)$ B) $1/2\,(\cot 3^n - \cot 1)$

C) $1/2\,(\tan 1 - \tan 3^n)$ D) $1/2\,(\tan 3^n - \tan 1)$

E) $1/2\,(\tan 3^{n-1} - \tan 1)$

**24.-** Determinar la suma de los "*n*" primeros términos de la serie:

$$S = \sec 2 . \tan 1 + \sec 4 . \tan 2 + \sec 8 . \tan 4 + ...$$

A) $\tan 2^n - \tan 1$ B) $\tan 2^{n+1} - \tan 1$

C) $\cot 2^n - \cot 1$ D) $\cot 1 - \cot 2^n$

E) $\cot 1 - \cot 2^{n+1}$

**25.-**Si se sabe que:

$$\frac{\tan 2x}{\tan x}+\frac{\tan 2^2 x}{\tan 2x}+\frac{\tan 2^3 x}{\tan 2^2 x}+ \ldots + \frac{\tan 2^n x}{\tan 2^{n-1} x} = m;$$

¿a qué es igual:

$$E=\frac{\tan 2x}{\cot x}+\frac{\tan 2^2 x}{\cot 2x}+\frac{\tan 2^3 x}{\cot 2^2 x}+...+\frac{\tan 2^n x}{\cot 2^{n-1} x}$$

A) $m - 2^n$ B) $m + 2^n$ C) $2^n - m$

D) $m - 2n$ E) $2n - m$

**26.-** Calcular la suma de la serie de 10 términos, cuando $x = \frac{\pi}{44}$,

$$S = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x + ..$$

A) $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{22}$ B) $20\operatorname{sen}\frac{\pi}{11}$ C) $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{11}$

D) $20\operatorname{sen}\frac{\pi}{22}$ E) $5\cos\frac{\pi}{22}$

**27.-** Si: $\cot^2 1 + \cot^2 2 + \cot^2 3 + \ldots + \cot^2 n = m$

¿a qué es igual:

$$S = \frac{\cot 1}{\tan 2} + \frac{\cot 2}{\tan 4} + \frac{\cot 3}{\tan 6} + \ldots + \frac{\cot n}{\tan 2n}\,?$$

A) $1/2(m - n)$ B) $1/2(m + n)$ C) $1/2(2m - n)$

D) $1/2(2n - m)$ E) $1/2(mn - 1)$

**28.-** Simplificar la expresión:

$$E=\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 5x+...+\operatorname{sen}(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2n-1)x}$$

A) $\tan (nx)$ B) $\cot (nx)$ C) 1

D) $\tan x$ E) $n \tan (nx)$

**29.-** Calcular la suma:

$$S = \cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + ..+ \cos^2 90°$$

A) 0 B) 45 C) 90 D) 90,5 E) 44,5

**30.-** Evaluar la suma para $n = 12$

$$S = \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + ... + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}$$

A) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}-2-\sqrt{3}$

C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-2-\sqrt{3}$

E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-2+\sqrt{3}$

## PRODUCTORIAS

**31.-** La expresión:

$\cos 20° \cos 40° \cos 80° \cos 160° \cos 320° \operatorname{sen} 10°$

es equivalente a:

A) 1/2 B) 1/4 C) - 1/8 D) 1/16 E) - 1/64

**32.-** Calcular:

$$P=\tan\frac{\pi}{25}.\tan\frac{2\pi}{25}.\tan\frac{3\pi}{25}.\tan\frac{4\pi}{25}\ldots\tan\frac{12\pi}{25}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{5}$ E) 5

**33.-** Calcular: $M=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$

A) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ E) 1

**34.-** Calcular:

$$P=\tan x\tan 2x\tan 3x\tan 4x\ldots\tan 16x$$

sabiendo que:

$$\operatorname{sen}32x=\operatorname{sen}x,\ \text{para:}\ 0<x<\frac{2\pi}{33}$$

A) $\frac{\sqrt{33}}{33}$ B) $-\sqrt{33}$ C) $-\frac{\sqrt{33}}{33}$

D) $\sqrt{31}$ E) $\sqrt{33}$

**35.-** Calcular el producto de los $n$ primeros números factores:

$$P=\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(2\cos\frac{x}{4}-1\right)\left(2\cos\frac{x}{8}-1\right)\ldots$$

A) $\dfrac{2\cos\frac{x}{2}+1}{2\cos 2x^{n}x+1}$ B) $\dfrac{2\cos 2^{n}x+1}{2\cos\frac{x}{2}+1}$

C) $\dfrac{2\cos x+1}{2\cos\frac{x}{2^{n}}+1}$ D) $\dfrac{2\cos\frac{x}{2^{n}}+1}{2\cos x+1}$

E) $\dfrac{2\cos x-1}{2\cos\frac{x}{2^{n}}-1}$

**36.-** Si: $(2n+1)x=\pi$, calcular:

$$P=\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}^{2}2x.\operatorname{sen}^{3}3x\ldots\operatorname{sen}^{2n}2nx$$

A) $\sqrt{\dfrac{(2n+1)^{2n+1}}{2^{n(2n+1)}}}$ B) $\dfrac{\sqrt{(2n+1)^{2n+1}}}{2^{n(2n+1)}}$

C) $\sqrt{\dfrac{(2n+1)^{n}}{2^{n(n+1)}}}$ D) $\dfrac{\sqrt{(2n+1)^{n}}}{2^{n(n+1)}}$

E) 0

**37.-** Calcular:

$$E=\operatorname{sen}1^\circ.\operatorname{sen}2^\circ.\operatorname{sen}3^\circ\ldots\operatorname{sen}88^\circ.\operatorname{sen}89^\circ.\operatorname{sen}80^\circ$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{\sqrt{90}}{2^{90}}$ D) $\frac{\sqrt{89}}{2^{89}}$ E) $\frac{1}{2^{90}}$

**38.-** Calcular el producto de los "$n$" primeros factores:

$$P=(1-\tan^{2}1)(1-\tan^{2}2)(1-\tan^{2}4)\ldots$$

A) $\dfrac{2^{n}\tan 1}{\tan 2^{n}}$ B) $\dfrac{2^{n}\tan 2^{n}}{\tan 1}$ C) $\dfrac{2^{n}\tan 1}{\tan 2^{n+1}}$

D) $\dfrac{2^{n}}{\tan 1}$ E) $\dfrac{2^{n+1}}{\tan 1}$

**39.-** Calcular el producto de los "$n$" primeros factores:

$$P=\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x\ldots$$

A) $\dfrac{\operatorname{sen}2^{n}x}{2^{n}\operatorname{sen}x}$ B) $\dfrac{\operatorname{sen}2^{n+1}x}{2^{n+1}\operatorname{sen}x}$ C) $\dfrac{\operatorname{sen}4^{n}x}{4^{n}\operatorname{sen}x}$

D) $\dfrac{2^{n}}{\operatorname{sen}2^{n}x}$ E) $\dfrac{\operatorname{sen}2^{n-1}}{2^{n-1}\operatorname{sen}x}$

# Funciones Trigonométricas

CAP. 17

## DOMINIO DE LAS F.T.

**01.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{|ex-\sec x||ex-\sec x+2|}{|\sec x+1|}$$

A) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2p+1)\frac{\pi}{2}\cup x=(2m+1)p\,,p\in\mathbb{Z};\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2p+1)\frac{\pi}{6}\cup x=(2m+1)p\,,p\in\mathbb{Z};\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2p+1)\frac{\pi}{7}\cup x=(2m+1)p\,,p\in\mathbb{Z};\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2p+1)\frac{\pi}{3}\cup x=(2m+1)p\,,p\in\mathbb{Z};\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2p+1)\frac{\pi}{4}\cup x=(2m+1)p\,,p\in\mathbb{Z};\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

**02.-** Encontrar el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\sqrt{versx-covx}\ ,\ \text{si } x\in[0\,;2\pi]$$

A) $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ B) $x\in\left[\frac{\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right]$

C) $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{3}\right]$ D) $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$

E) $x\in\left[\frac{\pi}{5};\frac{5\pi}{5}\right]$

**03.-** Determine el dominio de la función $f$ definida por:

$$f(x)=\frac{\tan x}{versx}$$

A) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2k+1)\frac{\pi}{3}\cup x=2\,m\pi,\ k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\cup x=2\,m\pi,\ k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2k+1)\frac{\pi}{9}\cup x=2\,m\pi,\ k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2k+1)\frac{\pi}{7}\cup x=2\,m\pi,\ k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{x/x=(2k+1)\frac{\pi}{3}\cup x=2\,m\pi,\ k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\right\}$

**04.-** Si el rango de la función:

$$F(x)=\csc\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ \text{es}\ \langle -2;-\sqrt{2}\,\rangle\cup\langle\,\sqrt{2}\,;2\rangle$$

determinar el dominio en el recorrido:

$$\left\langle -\frac{3\pi}{2};-\pi \right\rangle \cup \left\langle \pi;\frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{6};-\frac{7\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{3\pi}{4};-\frac{51\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4};\frac{19\pi}{24} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{11\pi}{24};-\frac{5\pi}{12} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4};\frac{19\pi}{24} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{17\pi}{12};-\frac{11\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4};\frac{31\pi}{4} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{5\pi}{4};-\frac{29\pi}{24} \right\rangle \cup \left\langle \frac{25\pi}{24};\frac{13\pi}{12} \right\rangle$

**05.-** Sea la función "$f$" definida por la siguiente regla de correspondencia:

$f(x) = \dfrac{\text{sen}2x + \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ; ($n \in \mathbb{Z}$), hallar el dominio de $f$:

A) $\mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}$

D) $\mathbb{R} - (2n+1)\pi$ E) $\mathbb{R} - 2n\pi$

**06.-** Hallar el dominio de la función definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\cot x - \tan x} \; ; (n \in \mathbb{Z})$$

A) $\mathbb{R} - n\pi$ B) $\mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$ C) $\mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}$

D) $\mathbb{R} - \frac{n\pi}{4}$ E) $\mathbb{R} - (4n+1)\frac{\pi}{2}$

**07.-** Dada la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{1-\tan x} + \sqrt{1+\tan x}\,,$$

hallar el dominio de la función si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} \right\rangle$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4} \right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left[ -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4} \right]$ E) $\left[ -\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3} \right]$

**08.-** Para que valores de $x$, la función $f$ definida por: $f(x) = \sqrt{\dfrac{\tan x + \cot x - 4}{\tan x + \cot x}}$ , $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, tiene valores reales?

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12} \right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4} \right\rangle$

C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4} \right\rangle$ D) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4} \right\rangle$

E) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12} \right\rangle$

## RANGO DE LAS F.T.

**09.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 2\text{sen}(\pi.\tan x)\text{ , si } x \in \left[ \frac{37\pi}{180};\frac{53\pi}{180} \right]$$

A) $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,]$ B) $[-\sqrt{5}\,;\sqrt{8}\,]$

C) $[-\sqrt{7}\,;\sqrt{4}\,]$ D) $[-\sqrt{3}\,;\sqrt{2}\,]$

E) $[-\sqrt{9}\,;\sqrt{3}\,]$

**10.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{\text{sen}x.\cot x + \cos x}{\cot x}$$

A) $\langle -2; 0\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$ B) $\langle -2; 7\rangle \cup \langle 0; 7\rangle$

C) $\langle -5; 0\rangle \cup \langle 0; 5\rangle$ D) $\langle -4; 0\rangle \cup \langle 0; 0\rangle$

E) $\langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$

**11.-** Delimitar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 2\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\text{ , si } x \in \text{IC}$$

A) $\langle 2; 3\rangle$ B) $\langle 9; 4\rangle$ C) $\langle 5; 6\rangle$

D) $\langle 7; 7\rangle$ E) $\langle 4; 6\rangle$

**12.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sec^2 x + 6\,|\sec x| + 11$$

A) $[14; +\infty\rangle$ B) $[18; +\infty\rangle$ C) $[16; +\infty\rangle$

D) $[9; +\infty\rangle$ E) $[5; +\infty\rangle$

**13.-** Evaluar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = x^2 . \sec x\text{ , si } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

A) $\left[0; \frac{2\pi^2}{11}\right]$ B) $\left[0; \frac{2\pi^2}{4}\right]$ C) $\left[0; \frac{2\pi^2}{7}\right]$

D) $\left[0; \frac{2\pi^2}{9}\right]$ E) $\left[0; \frac{2\pi^2}{2}\right]$

**14.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = 1 + 2\csc\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)\text{, si } x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right\rangle$$

A) $[3; 5\rangle$ B) $[3; 2\rangle$ C) $[4; 2\rangle$

D) $[7; 9\rangle$ E) $[4; 5\rangle$

**15.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x\text{ ,}$$

determine el rango de la función:

A) $[6\,; \infty\rangle$ B) $[5\,; \infty\rangle$ C) $[4\,; \infty\rangle$

D) $[3\,; \infty\rangle$ E) $[2\,; \infty\rangle$

**16.-** Determine el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x}$$

A) $[6\,; +\infty\rangle$ B) $[4\,; +\infty\rangle$ C) $[2\,; +\infty\rangle$

D) $[3\,; +\infty\rangle$ E) $[7\,; +\infty\rangle$

**17.-** Delimitar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \csc^2 x + 2\sec^2 x$$

A) $[5\sqrt{2} + 3; +\infty\rangle$ B) $[2\sqrt{5} + 3; +\infty\rangle$

C) $[7\sqrt{4} + 3; +\infty\rangle$ D) $[3\sqrt{2} + 3; +\infty\rangle$

E) $[2\sqrt{2} + 3; +\infty\rangle$

**18.-** Encontrar el rango de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{|\sec x| - 1}{\tan^2 x}$$

A) $\langle 0\,; 1/3\rangle$ B) $\langle 0\,; 1/2\rangle$ C) $\langle 0\,; 1/5\rangle$

D) $\langle 0\,; 1/4\rangle$ E) $\langle 0\,; 1/6\rangle$

**19.-** Sea $f$ una función definida por:

$$f(x) = \sec^2 x + 4\tan x\text{ ,}$$

evaluar el rango de la función.

A) $[-3; +\infty\rangle$ B) $[-7; +\infty\rangle$ C) $[-2; +\infty\rangle$

D) $[-5; +\infty\rangle$ E) $[-9; +\infty\rangle$

**20.-** Hallar el dominio y rango de:

$$\text{F}(x) = (\cos 3x + \text{sen } 3x \tan x)\tan 2x\text{ ; } k \in \mathbb{Z}$$

A) $Df$: $\mathbb{R} - \{2k+1\}\dfrac{\pi}{4} \cup (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$Rf$: $\mathbb{R} - \{-2\,;\,\sqrt{2}\,\}$

B) $Df$: $\mathbb{R} - (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$

$Rf$: $\mathbb{R} - \langle -2\,;2\rangle - \{-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\,\}$

C) $Df$: $\mathbb{R} - \{2k+1\}\dfrac{\pi}{2}$

$Rf$: $\mathbb{R} - \{2\}$

D) $Df$: $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{4} \cup (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$Rf$: $\mathbb{R} - \{-2\,;\,\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\,,2\}$

E) $Df$: $\mathbb{R} - \left\{(2k+1\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$Rf$: $\mathbb{R} - \{-2\,;2\sqrt{2}\,\}$

**21.-** Hallar los puntos de discontinuidad de:

$$F(x) = \frac{\cos(\tan x + \cot x)}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\pi\cos\frac{x}{2}\right)\right)}\ ;k \in \mathbb{Z}$$

A) $(2k+1)\dfrac{\pi}{3}$ B) $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ C) $k\dfrac{\pi}{3}$

D) $\dfrac{k\pi}{2}$ E) $(2k+1)\dfrac{\pi}{4}$

**22.-** Dada la función:

$$F(x) = \operatorname{sen} x + \cos 3x;\, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$$

hallar la suma de valores de "$x$" para el cual la función es nula.

A) $\dfrac{3\pi}{4}$ B) $\dfrac{5\pi}{2}$ C) $4\pi$ D) $\dfrac{5\pi}{4}$ E) $\dfrac{5\pi}{8}$

**23.- Hallar** el rango de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x\ ,\ \text{si}\ \frac{-5\pi}{6} < x < \frac{-2\pi}{3}$$

A) $\left\langle\dfrac{3}{4};\dfrac{13}{16}\right\rangle$ B) $\left\langle\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{16}\right]$ C) $\left[\dfrac{-3}{4};\dfrac{1}{2}\right\rangle$

D) $\left[\dfrac{3}{4};\dfrac{13}{16}\right]$ E) $\left[\dfrac{3}{4};\dfrac{7}{8}\right\rangle$

**24.-** Si: $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ y su rango pertenece a $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, calcular su dominio en el intervalo de: $\langle 0;\, 2\pi\rangle$.

A) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{4\pi}{3}\right]$ B) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$

C) $\left[\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{4\pi}{3}\right]$ D) $\left\langle\dfrac{\pi}{5};\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left\langle\dfrac{5\pi}{8};\dfrac{4\pi}{3}\right\rangle$

E) $\left\langle\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{4\pi}{3}\right]$

**25.-** Hallar el dominio y rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2\cot\frac{x}{2}}{\csc x - \cot x}\ ,\ (n \in \mathbb{Z})$$

A) $n\pi\,;\mathbb{R}$ B) $n\pi\,;\mathbb{R}^+$ C) $\dfrac{n\pi}{2}\,;\mathbb{R}_0$

D) $\dfrac{n\pi}{3}\,;\mathbb{R}^-$ E) $\dfrac{n\pi}{2}\,;\mathbb{R}^+$

**26.-** El dominio y rango de la función:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\tan x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cot x}\ ,(k \in \mathbb{Z})\ ;\text{son:}$$

A) $Df: \mathbb{R} - k\pi$  B) $Df: \mathbb{R} - \frac{k\pi}{2}$

$Rf: \mathbb{R} - \{0\}$  $Rf = R$

C) $Df: \mathbb{R} - \frac{k\pi}{2}$  D) $Df = \mathbb{R} - k\pi$

$Rf = \mathbb{R} - \{0\}$  $Rf = \mathbb{R}$

E) $Df = \mathbb{R} - \frac{k\pi}{4}$  $Rf = \mathbb{R}$

**27.-** Hallar dominio y rango de $f$ para:

$x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ ,si: $f(x) = \frac{\tan 2x}{\tan 4x}$

A) $Df = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle - \{0\}^{n}$  $Rf = (0; +\infty)$

B) $Df = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle - \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right\}$ $Rf = \langle \infty ; 0 \rangle$

C) $Df = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle - \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right\}$

$Rf = \left\langle \infty; \frac{1}{2} \right\rangle - \{0\}$

D) $Df = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle - \left\{ -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right\}$

$Rf = \left\langle \infty; -\frac{1}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle - \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right\}$

$Rf = \langle -\infty\ 1 \rangle - \{0\}$

**28.-** El $Df \cap Rf$ para:

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{\tan x + \cot x}{\sec x}$ , con $k \in \mathbb{Z}$ es:

A) $\mathbb{R} - k\pi$  B) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{2}$  C) $\mathbb{R} - 2k\pi$

D) $\mathbb{R} - \frac{k\pi}{4}$  E) $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}$

**29.-** El rango de la función definida por:

$f(x) = (\sec x - \cos x)(\csc x - \operatorname{sen} x)$ es:

A) $[-1 ; 1] - \{0\}$  B) $\langle -1 ; 1 \rangle$  C) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

D) $\left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] - \{0\}$  E) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

**30.-** Hallar el rango de $f(x) = \frac{|\cos x| - 1}{\cos^2 x - 1}$

A) $\langle -1 ; 1 \rangle$  B) $\langle 0 ; 1 \rangle$  C) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right]$

D) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$  E) $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$

## VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LAS F.T.

**31.-** Calcule el valor mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \sec^4 x + \csc^4 x$$

A) 8  B) 7  C) 6  D) 5  E) 4

**32.-** Si el máximo valor de la expresión:

$M = 2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^7 2\beta + \frac{2}{3} \cos^5 7\theta$, es "P" y el mínimo valor de la expresión:

$N = (2 \sec \beta + 1)(2 \sec \beta - 1)$, es "Q";

calcule: $W = \sqrt[P]{Q + 4P}$

A) $\sqrt[3]{19}$ B) $\sqrt[3]{15}$ C) $\sqrt[3]{13}$

D) $\sqrt[3]{11}$ E) $\sqrt[3]{17}$

**33.-** Determine el mínimo valor de la expresión:

$W = 6\csc^2\omega + 5\sec^2\phi + 4\cot^2\theta + 3\tan^2\delta - 2\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha$

si todos los arcos son diferentes.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**34.-** Hallar los valores de $x$ para el cual la función $g$ alcanza su máximo valor:

$$g(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos x + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - 1;\ k \in \mathbb{Z}$$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ B) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ C) $(8k+3)\frac{\pi}{2}$

D) $k\frac{\pi}{4}$ E) $(8k+3)\frac{\pi}{4}$

**PERÍODO DE F.T.**

**35.-** Sean: $f(x) = \operatorname{sen}^4 3x$, $g(x) = \cos^3 2x$ y $h(x) = f(x) - g(x)$ cuyos períodos son: $T_1$, $T_2$ y $T_3$ respectivamente. Calcular $\sqrt[3]{3T_1T_2T_3}$.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\pi$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $2\pi$

**36.-** Determinar el período de:

$M(x) = \cos(\tan x - \cot x) + 2$

$N(x) = \cos(\tan 3x) + \cos(\cot 3x) + 1$, respectivamente.

A) $\pi;\ \frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{12}$

**37.-** Indicar verdadero (V) o falso (F) en :

I. El dominio máximo de la función:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x - \frac{1}{4}} \text{ es } (2n+1)\frac{\pi}{4}, \in \mathbb{Z}$$

II. El valor mínimo que toma la función

$f(x) = 2\cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x$ , donde:

$$arc \operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\right) \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ es } 3$$

III. El periodo de $f(x) = \sec(\pi \sec x)$ mas el periodo de $g(x) = \csc^4 x$ es $2\pi$

A) VVF B) FFV C) VFV

D) FVF E) VVV

**38.-** Al graficar las funciones $f(x) = |4 \operatorname{sen} x|$, $g(x) = \sec x$, calcular la suma de todas las abscisas de los puntos donde: $f(x) = g(x)$ - $\pi \le x \le \pi$.

A) $4\pi$ B) cero C) $8\pi$

D) $20\pi$ E) $32\pi$

**39.-** Analizar la verdad (V) o falsedad (F), respecto a la función:

$f(x) = 2\cos(\operatorname{sen} x - \cos x)$

I. Dominio: $[2\cos\sqrt{2}\ ; 2]$

II. Rango: $\mathbb{R}$

III. Máximo valor: 2

IV. Período: $\pi$

A) FFVV B) VVVV C) VVFF

D) VFVV E) FFVF

**40.-** De la función definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{9} - x\right)$$

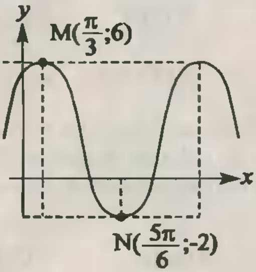
Hallar su amplitud y período respectivamente:

A) $2\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{9}$ ; $\pi$ B) $2\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{9}$ ; $2\pi$

C) $2\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{18}$ ; $\pi$ D) $2\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{18}$ ; $2\pi$

E) $2\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{18}$ ; $2\pi$

**41.-** Hallar la regla de correspondencia de la siguiente sinusoide:




A) $y=4\,\text{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$

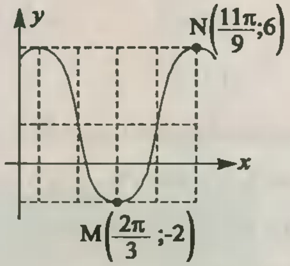
B) $y=4\,\text{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

C) $y=4\,\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

D) $y=4\,\text{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

E) $y=4\,\text{sen}\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

**42.-** Hallar la regla de correspondencia de la siguiente cosinusoide;




A) $y=4\cos\left(\dfrac{9x}{5}-\dfrac{\pi}{6}\right)+2$

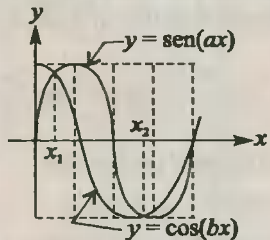
B) $y=4\cos\left(\dfrac{9x}{5}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

C) $y=4\cos\left(\dfrac{9x}{5}-\dfrac{\pi}{5}\right)+2$

D) $y=4\cos\left(\dfrac{9x}{5}-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

E) $y=4\cos\left(\dfrac{9x}{5}-\dfrac{\pi}{8}\right)+2$

**43.-** Del gráfico mostrado, calcular: $\dfrac{x_1}{x_2}$




A) 5

B) 7/5

C) 1/5

D) 5/7

E) 10

**44.-** Para la función: $F(x)=\dfrac{\text{sen}^2 3x}{\cos^2 2x-\cos^2 x}$,

hallar el rango y el período de $F(x)$

A) $Rf: \langle -3; 1] - \{0\}$ B) $Rf: \mathbb{R} - \{0; -3\}$

$T=\pi$ $T=\pi$

C) $Rf: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3};3\right\}$ D) $Rf: \left\langle -\frac{1}{3};3\right]$

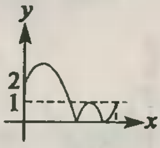
$T=\pi$ $T=\pi$

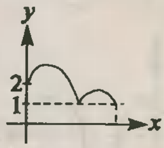
E ) $Rf: \mathbb{R} - [-1;3\rangle$ $T=\pi$

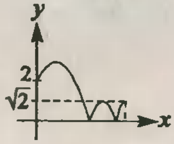
**GRÁFICAS DE LAS F.T.**

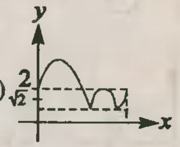
**45.-** Siendo: $F(x) = \operatorname{sen} 2x + 2\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

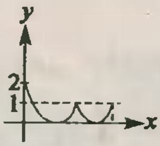
Obtener la gráfica de: $\sqrt{F(x)+1}$

A) 


B) 

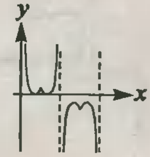

C) 

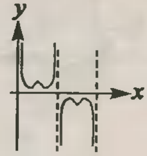

D) 

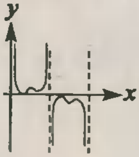

E) 

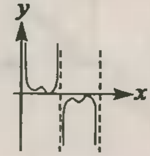

**46.-** Graficar la siguiente función:

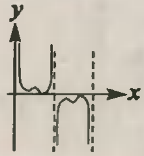
$$F(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

A) 


B) 

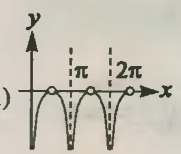

C) 

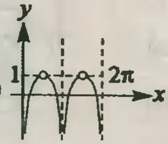

D) 

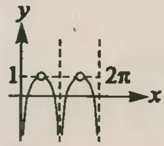

E) 

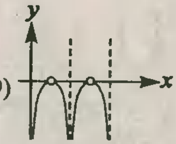

**47.-** Graficar la función definida por:

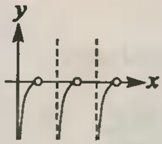
$$H(x) = \frac{\cos x \log_2(\operatorname{sen} x)}{cov\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}$$

A) 


B) 

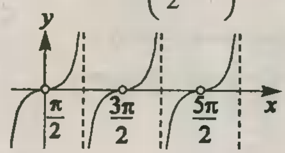

C) 

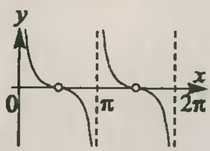

D) 

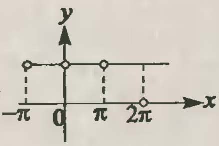

E) 

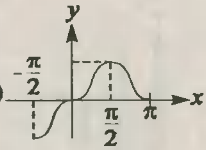

**48.-** Graficar la función definida por la siguiente regla de correspondencia:

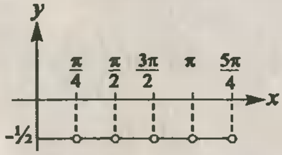
$$f(x) = \frac{\cos x}{ex\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + vers\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

A) 


B) 

C) 

D) 

E) 


**49.-** Si el área de la región sombreada es $\frac{3}{2}\mu^2$, hallar la ordenada del punto "P".

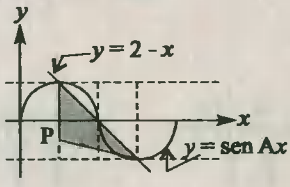
A) -1/3

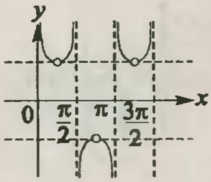
B) -1/2

C) -1/4

D) -1/7

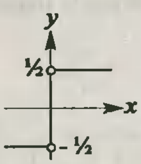
E) - 1/5

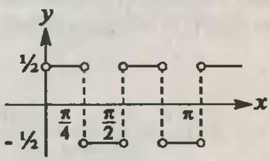


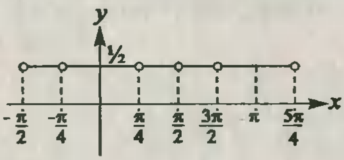

E) 

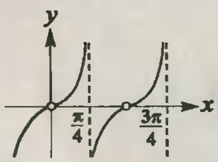

**50.-** Graficar la función definida por:

$$f(x) = \frac{\cos x \cos 2x}{\cos 3x + \cos x}$$

A) 

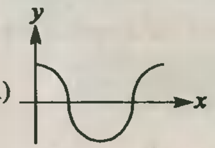
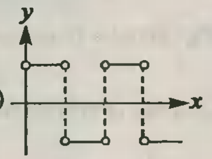
B) 

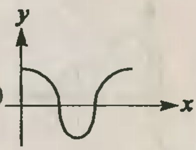
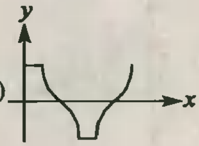

C) 

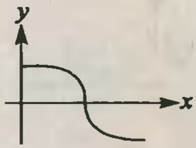

D) 


**51.-** Graficar la función:

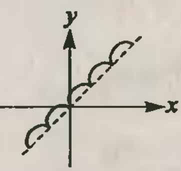
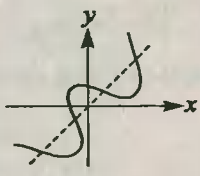
$f(x) = \operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x| + \cos x|\cos x|$, para $x \in [0\,;2\pi]$

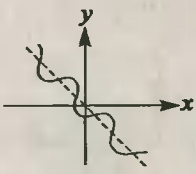
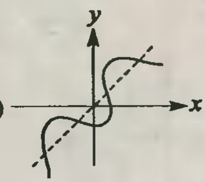
A) 
B) 

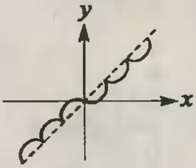
C) 
D) 

E) 

**52.-** Esbozar la gráfica de: $P(x) = x - \cos x$

A) 
B) 

C) 
D) 

E) 

## MISCELÁNEA

**53.-** Si la función $f$ está definida por :

$$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos x$$

¿para qué los valores de $x$ del intervalo $[0;\pi]$ la función es negativa?.

A) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{8}\right\rangle$

**54.-** Hallar los puntos donde la función H $(x)$ no está definida:

$$H(x)=\frac{\cot x+\operatorname{sen} x}{\cot x(|\operatorname{sen} x|-|\cos x|)}\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

A) $\frac{n\pi}{2}$ B) $n\pi$ C) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{n\pi}{4}$ E) $2n\pi$

**55.-** ¿Cuántas de las siguientes funciones son pares?

I. $f(x)=\tan x\sec|x|$

II. $f(x)=\operatorname{sen}(x^2)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

III. $f(x)=|\sec x|\csc 3x$

IV. $f(x)=\csc\left(\frac{x}{\pi}\right)+|x|$

V. $f(x)=x^3\csc\left(\frac{x}{2}\right)$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 1 E) 2

**56.-** ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas?.

I. $f(x)=\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\ ;x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

II. $g(x)=\cot 2x\,(1+\sec 2x)+\tan x;\ x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

III. $h(x)=\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos^2 x;\ x\in\langle\pi;2\pi\rangle$

A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo II

D) Sólo I y III E) I, II y III

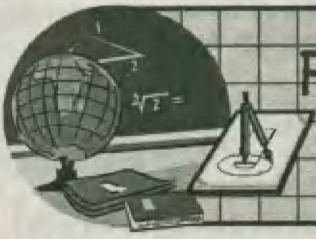
**57.-** Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=\frac{\cos x+\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen} x-\cos 2x}\ ;\ g(x)=1\wedge h(x)=-1$$

para $x\in\langle 0\,;2\pi\rangle$

A) $\frac{\pi}{2}u^2$ B) $\pi u^2$ C) $\frac{3\pi}{2}u^2$

D) $2\pi u^2$ E) $\frac{5\pi}{2}u^2$



# Funciones Trigonométricas Inversas

**CAP. 18**

### *DOMINIO DE LAS F.T. INVERSAS*

**01.-** ¿Cuáles de las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas?

I. $F(x) = 2 \operatorname{sen} 4x;\ x \in \left\langle \dfrac{\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8} \right\rangle$

II. $G(x) = \dfrac{1}{4}\ \{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x\};\ x \in \left\langle \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{2\pi}{3} \right\rangle$

III. $H(x) = \csc \dfrac{4x}{3} + \cot \dfrac{4x}{3};\ x \in \left\langle -\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4} \right]$

A) $I \wedge II$ B) Sólo I C) $II \wedge III$

D) Sólo III E) $I \wedge III$

**02.-** Si se verifica que:

$$h(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} - arc\operatorname{sen}x} + \sqrt{\pi - 2arc\cos x}\ ,$$

calcular su dominio, para: $x \in \left\langle -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4} \right\rangle$

A) $\left\langle 0; \dfrac{1}{4} \right\rangle$ B) $\left[ 0; \dfrac{1}{4} \right\rangle$ C) $\left[ 0; \dfrac{1}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle 0; \dfrac{1}{4} \right]$ E) $\left\langle -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4} \right\rangle$

**03.-** Dada la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{x}{6}\right) - \dfrac{\pi}{3} - 2}}{\sqrt{\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{3}}}}$$

Calcular su dominio

A) $\left[ -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4} \right] - \{0\}$

B) $\left\langle -\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{4} \right\rangle$

C) $\left[ -3; \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \right] - \left\{ \dfrac{3}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right\}$

D) $\left\langle -3; \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \right] - \{0\}$ E) $\left[ \dfrac{1}{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

E) $\left[ -\dfrac{1}{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

### *RANGO DE LAS F. T. INVERSAS*

**04.-** Sea la función:

$$f(x) = \frac{2 \text{ arc } \cos x - \dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{3\pi}{4} - \text{arc sen } x}\ ,$$

hallar el rango de dicha función:

A) $\left[1;\dfrac{7}{5}\right]$ B) $\left[-1;\dfrac{7}{5}\right\rangle$ C) $\left\langle-1;\dfrac{7}{5}\right]$

D) $\left\langle-1;\dfrac{7}{5}\right\rangle$ E) $\left[-1;\dfrac{7}{5}\right]$

**05.-** Determinar el rango de la función:

$$f(x)=\frac{1}{|\,arc\tan x\,|-2\,|\,arc\cot x\,|}\;;x<0$$

A) $\left\langle-\dfrac{1}{\pi};-\dfrac{2}{3\pi}\right\rangle$ D) $\left[-\dfrac{1}{\pi};\dfrac{3}{2\pi}\right\rangle$

B) $\left\langle-\dfrac{1}{\pi};-\dfrac{3}{4\pi}\right\rangle$ E) $\left\langle-\dfrac{1}{\pi};-\dfrac{3}{2\pi}\right]$

C) $\left\langle-\dfrac{2}{\pi};\dfrac{1}{2\pi}\right\rangle$

**06.-**Dado:

$$F(x)=arc\cos\,(\text{sen}^6+\cos^6x)$$

su rango está dado por:

A) $\left\langle0;arc\cos\dfrac{1}{3}\right]$ B) $\left[\dfrac{1}{2}arc\cos\dfrac{1}{4};1\right]$

C) $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ D) $\left[0;arc\cos\dfrac{1}{4}\right]$

E) $\left[arc\cos\dfrac{1}{3};1\right]$

**07.- Sea** la función:

$$f(x)=\frac{arc\text{sen}x-\dfrac{\pi}{4}}{arc\cos x+\dfrac{\pi}{4}}\;,$$

hallar el rango de dicha función:

A) $\left[\dfrac{-3}{4};1\right]$ B) $\left[\dfrac{-3}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ C) $\left[\dfrac{-3}{5};1\right]$

D) $\left[\dfrac{-3}{4};\dfrac{1}{2}\right]$ E) $\left[\dfrac{-3}{5};2\right]$

### *DOMINIO Y RANGO DE LAS F.T. INVERSAS*

**08.-** Hallar el dominio y rango de la función:

$$f(x)=\frac{1}{2}\;arc\,\text{sen}\left(\frac{2x-1}{3}\right)-\frac{\pi}{3}$$

A) $Df=[-1;1]$ $Rf=\left[-\pi;\dfrac{7\pi}{12}\right]$

B) $Df=\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$ $Rf=\left[\dfrac{-7\pi}{12};\dfrac{-\pi}{12}\right]$

C) $Df=\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ $Rf=\left[\dfrac{-3\pi}{4};\dfrac{-\pi}{4}\right]$

D) $Df=\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ $Rf=\left[\dfrac{-2\pi}{3};\dfrac{-\pi}{12}\right]$

E) $Df=[-1;2]$ $Rf=\left[\dfrac{-7\pi}{12};\dfrac{-\pi}{12}\right]$

**09.-** A partir de la siguiente función:

$$g(x)=2\;arc\cos\left(\text{sen}\frac{x}{2}\right),$$

hallar el período y rango respectivamente:

A) $T=\dfrac{\pi}{2}$, $[-\pi;\pi]$ B) $T=\pi$, $[-2;2]$

C) $T=2\pi$, $[0;2\pi]$ D) $T=4\pi$, $[0;2\pi]$

E) $T=4\pi$, $\langle0;2\pi]$

### *PROPIEDADES DE LAS F.T. INVERSAS*

**10.-** Calcular el valor de:

$$k=\frac{arc\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{arc\tan\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)}$$

A) 1 B) -1/4 C) -1/2 D) 1/2 E) 1/4

**11.-** Reducir:

$$K=\frac{arc\text{sen}(\text{sen}5)-arc\cos(\cos 6)}{arc\cos(\cos 3)-arc\tan(\tan 4)+1}$$

Tomar: $\pi=22/7$

A) 2/7 B) 7/2 C) 5/3 D) $\pi+1$ E) -1/2

**12.-** De las siguientes proposiciones:

I. Si: $arc\cos x=b\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

II. Si: $Q=arc\cos(\text{sen }2x+\cos 2x)\Rightarrow x$ puede tomar cualquier valor para que exista Q.

III. Si: $\alpha=arc\text{ sen}(\text{sen }\theta)\Rightarrow \cos\theta=\frac{\pi}{2}\vee\theta=\frac{3\pi}{2}$ existe $\alpha$, son correctas:

A) FVF B) FFV C) VFV

D) FFV E) FFF

**13.-** Calcular:

$$M=\frac{arc\cos\left(\frac{3}{8}\right)}{arc\cot\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)}+arc\text{ sen}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\,arc\cot(2+\sqrt{3})$$

A) $\pi/2$ B) 2 C) $-\pi/6$ D) - 2 E) 0

**14.-** Calcular el valor de:

$$W=\frac{arc\text{sen}\left(-\frac{1}{2}\right)+arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\text{arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+arc\cot(-\sqrt{3})}$$

A) 5/2 B) 7/8 C) 8/9 D) 3/4 E) 1/2

**15.-** Evaluar la expresión:

$$F=arc\text{ sen}(\cos 2)+arc\cos(\text{sen }3)$$

A) 1 B) 25 C) 3 D) $\pi$-5 E) 5-$\pi$

**16.-** Calcular el valor de:

$$A=\sqrt{13}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arc\cos\frac{12}{13}\right)$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**17.-** Determinar la verdad ó falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $arc\text{ sen }x=arc\cos\sqrt{1-x^2}$ ; $\forall x\in[.1;1]$

II. $\cos(\text{arc sen }x)=\sqrt{1-x^2}$ ; $\forall x\in[.1;1]$

III. $\tan(arc\cos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ; $\forall x\in[.1;1]-\{0\}$

A) VVV B) FFF C) FVV D) FFV E) FVF

**18.-** Simplificar:

$$\theta=arc\tan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)+arc\cos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right),$$

para todo $x\in[0;1\rangle$

A) 2 $arc\tan x$ B) - 2 $arc\tan x$

C) $\pi$ - 2 $arc\tan x$ D) $\pi$ - 4 $arc\tan x$

E) $\pi/2$ - $arc\tan x$

**19.-** Calcular:

$$E=\cos\left(arc\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\text{sen}\left(arc\cos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

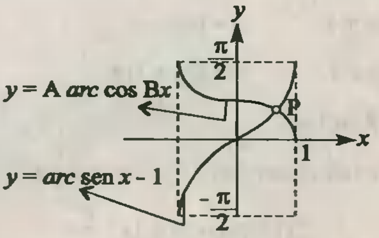
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

**20.-** Calcular: $\theta=arc\cos\left(\frac{1}{7}\right)+arc\cos\left(\frac{11}{14}\right)$

A) $\pi/6$ B) $\pi/3$ C) $2\pi/3$ D) $5\pi/6$ E) $\pi/4$

### *SITUACIONES GRÁFICAS*

**21.-** Del gráfico, calcular las coordenadas de "P":

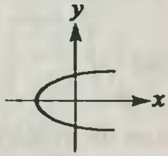
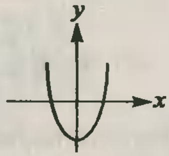
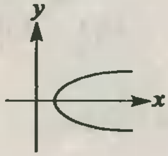
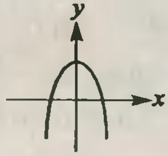
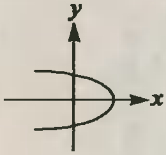



A) $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{6}\right)$ C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{3}\right)$

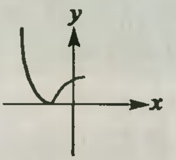
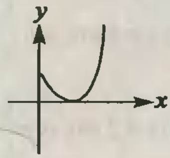
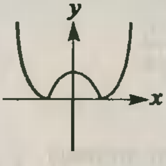
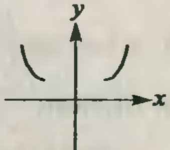
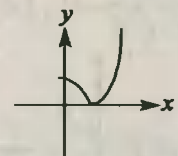
D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{6}\right)$ E) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)$

**22.-** Graficar:

$f(x)=\text{sen}\,(arc\cos x)\cos\,(arc\,\text{sen}\,x)$

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

**23.-** Graficar: $F(x)=|\csc\,(arc\csc x^2)-3)|$

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

**24.-** Hallar la regla de correspondencia de la gráfica mostrada, e indicar el valor de: $\frac{A.B.C}{D}$

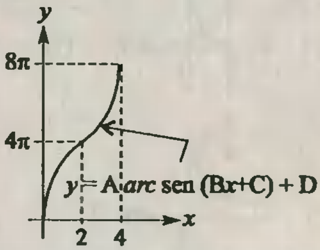
A) 2

B) $1/2\pi$

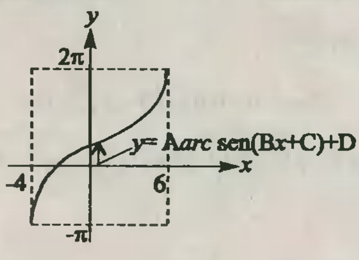
C) $-1/\pi$

D) 4

E) 1/2




**25.-** Hallar la regla de correspondencia de la siguiente gráfica:



A) $y = 3\,arc\text{ sen}\left(\dfrac{x-1}{5}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

B) $y = 2\,arc\text{ sen}\left(\dfrac{x+1}{5}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

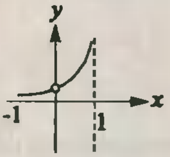
C) $y = 3\,arc\text{ sen}\left(\dfrac{2x-1}{5}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

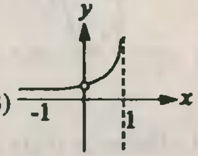
D) $y = 3\,arc\text{ sen}\left(\dfrac{2x+1}{5}\right) + \dfrac{\pi}{4}$

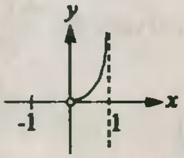
E) $y = 3\,arc\text{ sen}\left(\dfrac{x+1}{5}\right) + \dfrac{\pi}{4}$

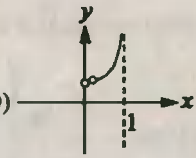
**26.- Graficar:**

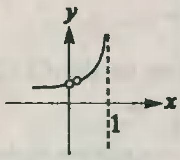
$$M = \frac{\cos(arc\cos x) + \text{sen}(arc\text{sen}x)}{\tan(arc\cot(x - x^2))}\ ; x < 1$$

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


***MISCELÁNEA***

**27.-** Calcular:

$$\theta = 2\,arc\tan\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) +$$
$$arc\csc\left(-\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)3\,arc\cot - \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)$$

A) $\pi/4$ B) $5\pi/12$ C) $7\pi/12$

D) $\pi/6$ E) $\pi/12$

**28.-** Hallar los valores de "$x$" e "$y$"; que satisfacen la igualdad:

$$2\,arc\text{ sen }x = \pi\csc y\ (n \in \mathbb{Z})$$

A) $x = \pm 1$ $\quad y = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

B) $x = 1$ $\quad y = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

C) $x = -1$ $\quad y = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

D) $x = \pm 1$ $\quad y = n\pi$

E) $x = \pm 1$ $\quad y = (2n+1)\pi$

**29.-** Resolver:

$$(arc\tan x)(arc\cos 2x) - (arc\cot x)(arc\text{ sen } 2x) = \pi\,arc\cos 2x - \frac{\pi^2}{4}$$

A) $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ B) $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ C) $\pm\dfrac{1}{2}$

D) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\pm\sqrt{2}$

**30.-** Resolver:

$$arc\sec\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = arc\tan\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right)$$

y dar como respuesta la suma de soluciones.

A) 4 B) 3 C) 5 D) 2 E) 6

**31.-** Resolver:

$$2\,arc\tan(\cos x) = arc\tan(2\csc x)$$

A) $\pi/3$ B) $\pi/6$ C) $\pi/4$

D) $5\pi/12$ E) $\pi/12$

**32.-** Dado:

$$F(x) = arc\cos(\text{sen}^6 + \cos^6 x)$$

su rango está dado por:

A) $\left\langle 0; arc\cos\frac{1}{3}\right]$ B) $\left[\frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{4};1\right]$

C) $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ D) $\left[0; arc\cos\frac{1}{4}\right]$

E) $\left[arc\cos\frac{1}{3};1\right]$

**33.-** Resolver:

$$arc\,\text{sen}\,x - arc\,\text{sen}(x-1) = arc\cos x$$

y dar como respuesta la suma de soluciones

A) 1/3 B) 0 C) 1/2 D) 1 E) 5/8

**34.-** Calcular "$x$" de:

$$\cos^2\left(arc\text{sen}\frac{x}{4}\right) = 0{,}5 + \text{sen}^2\left(arc\cos\frac{3x}{4}\right)$$

A) 2/3 B) $\pm\sqrt{3}/3$ C) - 4/9

D) $\pm 1$ E) $\pm 4/3$

**35.-** Calcular: $\tan^2\theta + \cot^2\theta$, si:

$arc\sec(\cot\theta) - arc\csc(4\tan\theta) = \tan k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

dar como respuesta un valor:

A) $\dfrac{10-\sqrt{3}}{4}$ B) $4+2\sqrt{2}$ C) $1\pm 3\sqrt{3}$

D) $\dfrac{34-15\sqrt{3}}{4}$ E) $6-2\sqrt{3}$

**36.-** Resolver:

$$arc\cos x\sqrt{3} + arc\cos = \frac{\pi}{2}$$

A) 1/3 B) 1/2 C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\pm 1/2$

**37.-** Resolver la ecuación:

$$arc\cos\frac{2x}{3} - arc\cos\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3}$$

A) -1/2 B) -3/2 C) -2/3 D) 3/4 E) 1

**38.-** Resolver para «$x$» en:

$$arc\tan\frac{x}{3} - arc\cot(x+2) = \frac{\pi}{12}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2/\sqrt{3}$ E) 4

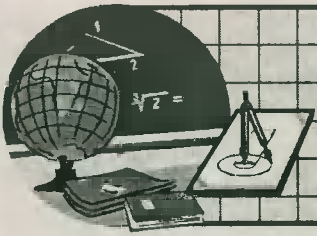
**39.-** Determinar el valor de «$x$» que satisface a la ecuación:

$$2\cos(2\,arc\,\text{sen}\,x) = \sqrt{3}$$

e indicar la suma de los valores absolutos de las soluciones:

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$



# Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

**CAP. 19**

## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

**01.-** Determinar la suma de soluciones de:

$$2\,\text{sen}\,x + \csc x = 3,\ \text{en: } 0 < x < \pi$$

A) $\pi/6$ B) $\pi$ C) $3\pi/2$ D) $5\pi/6$ E) $2\pi$

**02.-** Indicar el número de soluciones positivas menores de 1 *vuelta* en:

$$\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**03.-** Identificar una solución de:

$$2\tan^2 x - \sec x = 1$$

A) $arc\cos\frac{2}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$

D) $2\pi$ E) $arc\cos\frac{1}{3}$

**04.-** Al resolver la ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}\,7x\ \text{sen}\,5x = \cos 3x \cos x,$$

dar como respuesta la menor solución positiva:

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{16}$

**05.-** Sea la ecuación:

$$\cos 2x - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0,$$

indicar el número de soluciones comprendidas en; $0 \le x \le \pi$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**06.-** Resolver: $\dfrac{\cos x}{\cos 2x} + \dfrac{\text{sen}x}{\text{sen}2x} = 0;\ (k \in \mathbb{Z})$

A) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi k}{3}$ C) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$

D) $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi k}{4}$

**07.-** Al resolver:

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \cot(\pi\,\text{sen}\,x) = 0$; se obtiene:

A) $arc\cos\frac{\sqrt{5}}{2} + k\pi$

B) $2\,arc\cos\frac{\sqrt{5}}{5} + 2k\pi$

C) $arc\cos\frac{\sqrt{5}}{3} + 2k\pi$

D) $arc\cos\frac{\sqrt{5}}{5} + (2k+1)\pi$

E) $2k\pi - arc\cos\frac{\sqrt{5}}{2}$

**08.-** Resolver:

$$\cos^n x - \text{sen}^n x = 1\ ;$$

en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$, siendo: $n$ un número entero natural.

A) $0; \frac{\pi}{2}; \pi$ B) $-\frac{\pi}{2}; 0; \pi$ C) $-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi$

D) $\frac{\pi}{2}; \pi$ E) $0; \pi$

**09.-** Para qué valores de "$a$" la ecuación:

$$(\text{sen}\, x + \cos x)\, \text{sen}\, 2x = a\,(\text{sen}^3 x + \cos^3 x)$$

tiene soluciones entre: $\pi/2$ y $\pi$.

A) $\left\langle -\frac{1}{3}; 0 \right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{2}{3}; 0 \right\rangle$ C) $\left[ -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{1}{3}; 0 \right\rangle$ E) $\left[ -\frac{2}{3}; 0 \right\rangle$

**10.-** Determinar el número de soluciones de la ecuación:

$$\sqrt{1+\text{sen}\, 2x} - \sqrt{2}\, \cos 3x = 0,$$

comprendidas entre $\langle \pi; 2\pi \rangle$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**11.-** Encontrar las soluciones de:

$$\text{sen}^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\, \text{sen}\, 2x + 1,$$

comprendidas en el intervalo $\left\langle -\pi; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$ y dar como respuesta la suma.

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $2\pi$ D) $\frac{5\pi}{2}$ E) $3\pi$

**12.-** Hallar la suma de soluciones de:

$$\text{sen}\, 2x + \cos 2x = \frac{5}{7} \text{ en: } x \in \langle 0°; 360° \rangle$$

A) 180° B) 540° C) 750° D) 450° E) 720°

**13.-** Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}\, \frac{x}{2} + \cos x = 1$$

A) $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ B) $0; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$ C) $0; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$

D) $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ E) $0; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

**14.** Resolver la ecuación:

$$3\, \text{sen}\, 2x = \tan x - \text{sen}\, 4x \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A) $\frac{k\pi}{6}$ B) $\frac{k\pi}{5}$ C) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{k\pi}{3}$ E) $\frac{k\pi}{4}$

**15.-** Calcular la suma de soluciones de la ecuación:

$$\text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x = \cos x + \cos 3x$$

en: $0 \leq x < 2\pi$

A) $\frac{11\pi}{2}$ B) $\frac{7\pi}{2}$ C) $\frac{9\pi}{2}$ D) $\frac{5\pi}{2}$ E) $\frac{11\pi}{8}$

**16.-** Resolver:

$$4\, \text{sen}\, 3x\, \text{sen}\, x = \text{sen}\, 4x \csc 2x \ ; \ (k \in \mathbb{Z})$$

A) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$ B) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ C) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

D) $\frac{k\pi}{2}$ E) $\frac{k\pi}{4}$

**17.-** Determinar la suma de soluciones positivas y menores de $2\pi$, de la ecuación:

$$\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, x = 1 + \cos 2x - \cos x$$

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{2}$ C) $\frac{7\pi}{2}$

D) $\frac{9\pi}{2}$ E) $\frac{11\pi}{2}$

## SISTEMAS DE ECUACIONES

**18.-** Encontrar el número de soluciones comprendidas en el intervalo $\langle -\pi;\pi\rangle$ de la ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen}2x\cos 3x}{\operatorname{sen}4x-\operatorname{sen}2x}=\frac{1}{4}\sec x$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**19.-** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan y\\[2mm] x-y=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

A) $x=\dfrac{5\pi}{24}-\dfrac{k\pi}{2}$ ; $y=\dfrac{\pi}{24}-\dfrac{k\pi}{2}$

B) $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ ; $y=\dfrac{\pi}{24}-\dfrac{k\pi}{2}$

C) $x=\dfrac{5\pi}{24}+k\pi$ ; $y=\dfrac{\pi}{24}+k\pi$

D) $x=\dfrac{\pi}{24}+k\pi$ ; $y=\dfrac{5\pi}{24}-\dfrac{k\pi}{2}$

E) $x=\dfrac{\pi}{12}-k\pi$ ; $y=\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}$

**20.-** Hallar las soluciones que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\tan x=3\tan y\\ \operatorname{sen}x\cos y=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\cos(x-y)\end{cases}$$

siendo: $x+y\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

A) $x=k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$
$y=k\pi-\pi/6$

B) $x=k\pi+\pi/3$
$y=k\pi-\dfrac{\pi}{3}$

C) $x=k\pi+\pi/2$
$y=k\pi-\pi/2$

D) $x=k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$
$y=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$

E) $x=k\pi+\pi/4$
$y=k\pi-\pi/4$

**21.-** Siendo: $x$, $y$ los menores valores positivos que verifican el sistema:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}^3 x=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}y\\[2mm] \cos^3 x=\dfrac{1}{2}\cos y\end{cases}$$

calcular el valor de $\tan\left(\dfrac{3y}{2}-2x\right)$

A) $\sqrt{5}-3$ B) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $1-\sqrt{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

**22.-** Si: $x$, $y$, $z$ son ángulos positivos que pertenecen al intervalo $[0;\pi/2]$, evaluar: $(x+y+z)$, si además:

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{2}}{4};\ \operatorname{sen}y\operatorname{sen}z=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}z=\frac{1}{2}$$

A) $\pi/12$ B) $5\pi/2$ C) $7\pi/12$

D) $11\pi/12$ E) $13\pi/12$

**23.-** Resolver el sistema:

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\ ;-\dfrac{\pi}{2}<y<0\\ \tan x-\tan y=0,\end{cases}$$

dar como respuesta: $x - y$

A) 0 B) $\pi$ C) $3\pi/4$ D) $\pi/2$ E) $3\pi/2$

## INECUACIONES

**24.-** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ \cos 2x + \cos 2y = 0 \end{cases}$$

Donde: $n \in \mathbb{Z}$

A) $x = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{7\pi}{3}$ ; $y = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{n\pi}{2}$

B) $x = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}$ ; $y = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{n\pi}{2}$

C) $x = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{7\pi}{12}$ ; $y = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{n\pi}{2}$

D) $x = 2n\pi + \dfrac{7\pi}{4}$ ; $y = \dfrac{\pi}{12} - 2n\pi$

E) $x = \dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$ ; $y = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{n\pi}{4}$

**25.-** Hallar los valores de "$x$" comprendidos en $\langle 0; \pi \rangle$ para que:

$$F(x) = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x,$$

tome solo valores positivos:

A) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle 2\dfrac{\pi}{3}; \pi \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{4\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ D) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{2\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle 0; \dfrac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3} \right\rangle$

**26.-** Resolver:

$$2 \operatorname{sen} 4x < 3 \tan 2x,$$

para "$x$" en el recorrido de: $\left\langle \dfrac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

A) $\left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6} \right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle$

D) $\left\langle \dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{11\pi}{12}; \pi \right\rangle$ E) $\left\langle \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{6} \right\rangle$

**27.-** Resolver:

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} > 0 \,;\ k \in \mathbb{Z}$$

A) $\dfrac{k\pi}{2} < x < 2k\pi$ B) $2\pi k < x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

C) $\dfrac{k\pi}{3} < x < 2k\pi$ D) $k\pi < x < (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

E) $\dfrac{k\pi}{6} < x < 2k\pi$

**28.-** Resolver la inecuación:

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \operatorname{sen} x$$

para: $x \in \left\langle \dfrac{\pi}{7}; \dfrac{17\pi}{9} \right\rangle$.

A) $\left\langle \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3} \right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{\pi}{6}; \pi \right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle \dfrac{\pi}{3}; \pi \right\rangle$ E) $\left[ \dfrac{2\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$

**29.-** Resolver: $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \sqrt{3}}{\cos 2x + 3\cos x + 2} > 0,$

si: $x \in \langle 0; \pi \rangle$

A) $\left[ \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3} \right]$ B) $\left\langle \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3} \right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle$

D) $\left\langle \pi; \dfrac{4\pi}{3} \right\rangle$ E) $\left\langle \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3} \right\rangle$

**30.-** Resolver la inecuación:

$$\frac{1}{2} - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x \le 0$$

para: $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

A) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{12}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right]$

C) $\left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{3}\right]$ D) $\left[0; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

E) $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$

**31.-** Resolver:

sen $4x > 4$ sen$x$ sen $2x$ sen $3x$ ; $k \in \mathbb{Z}$,

dar como respuesta un intervalo solución:

A) $\left\langle k\pi + \frac{5\pi}{4}; k\pi + \frac{7\pi}{4}\right\rangle$

B) $\left\langle 2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right\rangle$

C) $\left\langle k\pi; k\pi + \frac{\pi}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle k\pi + \frac{3\pi}{8}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right\rangle$

E) $\left\langle k\pi + \frac{5\pi}{3}; k\pi + \frac{17\pi}{6}\right\rangle$

**32.-** Resolver:

$$5 + 2\cos 2x < 3|2\,\text{sen}\,x - 1|;$$

para: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; arc\tan\frac{1}{3}\right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{7\pi}{12}; arc\tan\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi - arc\tan\frac{1}{3}\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{\pi}{2}; arc\tan\frac{1}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \pi - arc\tan\frac{1}{3}\right\rangle$

**33.-** Resolver las siguientes desigualdades:

$$2\,arc\tan(x - 2) \le \frac{\pi}{4}$$

A) $\langle -\infty; 1 - \sqrt{2}\,]$ B) $\langle -\infty; \sqrt{2} - 1\,]$

C) $\langle -\infty; \sqrt{2} + 1]$ D) $\langle \infty; 1]$

E) $\langle -\infty; 1\rangle$

**34.-** Resolver:

$$arc\cos\frac{1}{3} \le arc\cos(\text{sen}\,x) \le \pi - arc\cos\frac{1}{3},$$

para: $x \in \langle 0; \pi\rangle$

A) $\left\langle 0; arc\,\text{sen}\frac{1}{3}\right] \cup \left[\pi - arc\text{sen}\frac{1}{3}; \pi\right\rangle$

B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right\rangle$

C) $\left\langle 0; arc\text{sen}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right] \cup \left[\pi - arc\text{sen}\frac{2\sqrt{2}}{3}; \pi\right\rangle$

D) $\left[arc\text{sen}\frac{1}{3}; \pi - arc\text{sen}\frac{1}{3}\right]$

E) $\left[arc\text{sen}\dfrac{2\sqrt{2}}{3};\pi-arc\text{sen}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

**35.-** Resolver la inecuación:

$$\text{sen}\, x \geq 1 - \cos 2x,$$

para: $0 < x < \pi$

A) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$ D) $\left\langle\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\rangle$

B) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right\rangle$ E) $\left\langle\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

C) $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$

**36.-** Si: $x \in \langle 0;\pi\rangle$, resolver la inecuación:

$$\tan x < \text{sen}\, 2x$$

A) $\left\langle 0;\dfrac{5\pi}{6}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\dfrac{2\pi}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ E) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

**37.-** Resolver:

$$\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} < 0,$$

considere: $0 < x < \pi$

A) $\left\langle\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

**38.-** Resolver: $arc\ \text{sen}\ 2x \leq arc\ \cos x$

A) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right]$ B) $\left\langle-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$ C) $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$ E) $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

**39.-** Resolver: $\forall\ \theta \in \langle 0;\pi\rangle$ la inecuación:

$$1 < 3 - \frac{1}{2}\sec^2\theta < 2$$

A) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

B) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{3\pi}{4}\right\rangle$

C) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{5\pi}{6};\pi\right\rangle$

D) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right\rangle - \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

E) $\left\langle\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right\rangle - \left\{\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

**40.-** Resolver:

$$\sqrt{2}\ \text{sen}\, 4x \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \leq 0$$

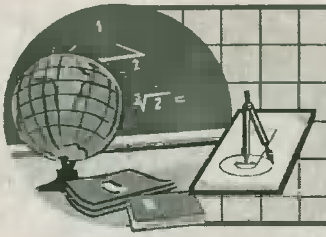
A) $\langle 0;\pi/16\rangle \cup [\pi/8;5\pi/16]$

B) $\langle 0;\pi/8\rangle \cup \langle\pi/4:\pi/3\rangle$

C) $\langle 0;\pi/12\rangle \cup \langle\pi/6;\pi/4\rangle$

D) $\langle 0;\pi/12\rangle \cup \langle\pi/4;\pi/3\rangle$

E) $\langle\pi/8;5\pi/16\rangle \cup \langle\pi/6;\pi/4\rangle$



# Resolución de Triángulos Oblicuángulos

**CAP. 20**

## LEY DE SENOS

**01.-** Si AM es la mediana relativa al lado BC de un triángulo ABC y $m\angle ABC = 30^\circ$, $m\angle ACB = 15^\circ$, calcular $m\angle MAC$.

A) 15°  B) 20°  C) 30°  D) 45°  E) 60°

**02.-** En un $\Delta$ ABC, de lados *a, b, c* y circunradio (R); la expresión equivalente de:

$$W = 4\cos\frac{C}{2}.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \text{ es:}$$

A) $\dfrac{a^2+b^2}{2R}$  B) $(a+b).R$  C) $\dfrac{a+b}{R}$

D) $\dfrac{a^2-b^2}{R}$  E) $\dfrac{a-b}{2R}$

**03.-** En la figura mostrada, $m\angle BAD = 3\alpha$, $m\angle DBC = m\angle DCB = 2\alpha$, AD = BC, calcule:

$$W = (\cot 3\alpha + \cot 4\alpha).\sec 2\alpha.\text{sen } 4\alpha$$

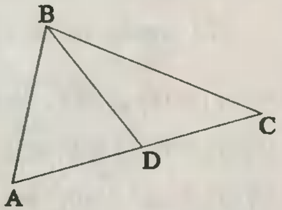
A) 1/2

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 2




**04.-** En un $\Delta$ABC de lados *a, b,* y *c*, $m\angle A = \dfrac{\pi}{7}$, $m\angle B\ \dfrac{2\pi}{7}$, $m\angle C = \dfrac{4\pi}{7}$.

Determine el equivalente de: $W = b^{-1} + c^{-1}$

A) $\dfrac{2}{a}$  B) $\dfrac{1}{2a}$  C) $\dfrac{a}{b+c}$  D) $\dfrac{1}{a}$  E) $\dfrac{a}{b-c}$

**05-** En un $\Delta$ABC, de lados *a, b* y *c* simplificar la expresión $W = \dfrac{b\cos B + c.\cos C - a}{b\text{sen}B - c.\text{sen}C}$

A) $2\tan(B - C)$  B) $-2\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

C) $-\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$  D) $\cot\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$

E) $-\cot\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

**06.-** En un triángulo ABC de lados *a, b* y *c*; $\dfrac{\cos^2 A}{a} + \dfrac{\cos^2 B}{b} + \dfrac{\cos^2 C}{c} = H$, calcular:

$$\frac{R}{\cos A.\cot A + \cos B.\cot B + \cos C.\cot C}$$, R es circunradio

A) $\dfrac{1}{H}$  B) $\dfrac{1}{2H}$  C) $\dfrac{2}{H}$  D) $-\dfrac{1}{H}$  E) $\dfrac{3}{H}$

**07.-** Si en un triángulo ABC de lados *a, b* y *c*; $b(b + c) = 9$ y $m\angle A = 2m\angle B$. Calcular *a*.

A) 9  B) 4  C) 3  D) 5  E) 1

**08.-** Las medidas de los lados de un triángulo ABC están en progresión aritmética, calcular H = sen C - 2 sen B + sen A, siendo $a > b > c$.

A) 0  B) 1/2  C) 4  D) 1  E) 2

**09.-** En el $\Delta$ ABC mostrado en la figura:

AD = BC, hallar $m\angle\beta$.

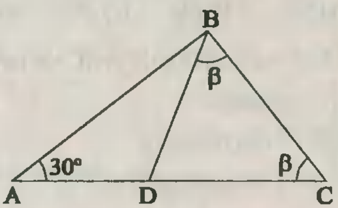
A) 30°

B) 50°

C) 20°

D) 10°

E) 40°




**10.-** En un $\Delta$ABC de lados $a$, $b$, y $c$: $a$ sen(A + B) = $b$.sen (A + C), simplifique:

$$W = \frac{a.\cos B - b.\cos C}{b.\text{sen}C - a.\text{sen}B}$$

A) tan(B + C) B) cot(B + C) C) tan(B - C)

**11.-** En un $\Delta$ABC de lados $a$, $b$ y $c$; BM es mediana (M en AC) si $m\angle BAC = 2m\angle BCA$ y $m\angle AMB = 45°$. Hallar $m\angle ACB$.

A) 5° B) 10° C) 15° D) 25° E) 35°

**12.-** En un triángulo ABC de lados $a$, $b$ y $c$ circunradio R se cumple que:

$$\frac{b.\cos C + c.\cos B}{\cos A} + \frac{a.\cos C + c.\cos A}{\cos B} + \frac{a.\cos B + b.\cos A}{\cos C} = 2R$$

Hallar: tan A tan B tan C + tan A + tan B + tan C

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**LEY DE COSENOS**

**13.-** En un $\Delta$ ABC de lados $a$, $b$ y $c$, si $m\angle A = 2m\angle C$, cos C = 3/4, $c$ = 4, con ($b > c$), hallar la medida de lado $a$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**14.-** En un triángulo ABC de lados $a$, $b$ y $c$ si $m\angle B = 4m\angle A$, entonces cos A + cos 3A es:

A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{b}{2a}$ C) $\frac{b}{3a}$ D) $\frac{b}{4a}$ E) $\frac{b}{5a}$

**LEY DE PROYECCIONES**

**15.** En un $\Delta$ABC de lados $a$, $b$, $c$ y circunradio R; al simplificar:

$$H = \frac{(a+c)\cos B + (a+b)\cos C + (b+c)\cos A}{2R(\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C)} + 1$$

se obtiene:

A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

**16.-** En un $\Delta$ ABC, de lados $a$, $b$ y $c$:

$$a.\cos^2\frac{C}{2} - \frac{3b}{2} = c.\text{sen}^2\frac{A}{2} - c$$

calcule: $\frac{2b}{a+c}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**17.-** En un $\Delta$ ABC de lados $a$, $b$ y $c$:

$24S = a(b^2 + c^2)\cos A + b(a^2 + c^2)\cos B + c(a^2 + b^2)\cos C$

S $\rightarrow$ área de la región triangular ABC.

Determine la medida del circunradio del $\Delta$ABC

A) 6 B) 3 C) 2 D) 1 E) 4

**18.-** En un $\Delta$ABC de lados $a$, $b$ y $c$; de semiperímetro $p$, reducir:

$$W = \frac{bc.\cos^2\frac{A}{2} + ac.\cos^2\frac{B}{2} + ab.\cos^2\frac{C}{2}}{p^2}$$

A) $1/p$ B) $p^2$ C) $p$ D) 1 E) 2

**ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR**

**19.-** En un triángulo ABC, de lados $a$, $b$, $c$, se cumple: $a + b + c = 9$, $abc = 24$, S es el área de la región triangular ABC, halle en términos de

S, la expresión equivalente de:

$$W = \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

A) $\frac{7S}{16}$ B) $\frac{5S}{16}$ C) $\frac{3S}{16}$ D) $\frac{3S}{8}$ E) $\frac{S}{8}$

**20.-** En un $\Delta$ ABC de lados *a, b,* y *c*, donde «S» área de la región triangular ABC.

la expresión: $E = \dfrac{2(b^2 - a^2)}{\cot A - \cot B}$, es igual a:

A) S B) 2S C) 3S D) 4S E) 5S

**21.-** En un $\Delta$ABC de lados *a, b* y *c*; reducir:

$$W = c + \rho.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2},$$

siendo $\rho$ el semiperímetro de dicho triángulo.

A) $\rho - b$ B) $\rho$ C) $c + a$ D) $\rho/2$ E) $2\rho$

**22.-** En un triángulo ABC de lados *a, b* y *c*; se verifica la siguiente relación:

$$4R^2 \text{sen}^3 B + 8S\cos B = 16 \text{ sen } B,$$

calcule la longitud de la mediana (en u) relativa al lado *b*, (R: circunradio), S: área de la región triangular ABC.

A) 2 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

**23.-** El área de la región triangular ABC es S, el lado BC tiene como longitud *a* y los ángulos MNB y CNP tienen la misma medida. Siendo M, N y P los puntos medios de los lados del triángulo ABC: (N en BC y P en AC). Halle la tangente del ángulo ABC en términos de *a* y S (en $u^2$)

A) $\frac{4S}{a^2}$ B) $\frac{4S}{7a^2}$ C) $\frac{4S}{3a^2}$ D) $\frac{4S}{5a^2}$ E) $\frac{S}{a^2}$

**24.-** Al simplificar la expresión siguiente donde S es el valor del área de la región triangular ABC.

$E = \dfrac{b^2 - c^2}{2}.\dfrac{\text{senB.senC}}{\text{sen}(B - C)}$, se obtiene:

A) 5S B) 4S C) 3S D) 2S E) S

**25.-** En un triángulo ABC de lados *a, b* y *c* si:

$\begin{cases} r \longrightarrow \text{inradio} \\ R \longrightarrow \text{circunradio} \\ p \longrightarrow \text{semiperimetro} \end{cases}$, hallar: $E = abc$

A) $2prR$ B) $2p/rR$ C) $prR$

D) $4prR$ E) $4p/rR$

**26.-** En un triángulo ABC, de lados *a, b, c* y semiperímetro *p* se cumple:

$$4S = (p - b)(p - c) + p(p - a),$$

S: área $\Delta$ABC. Hallar la medida del ángulo A:

A) 45° B) 60° C) 30° D) 75° E) 15°

**27.-** En un triángulo ABC de lados a, b, c y área S la expresión:

$E = 2\sqrt{abcp.\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}$, es igual a:

A) S B) 2S C) 3S D) 4S E) 5S

**28.-** En un triángulo ABC de lados *a, b* y *c*, $m\angle A = 30°$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $(m\angle B) > (m\angle C)$ y S es el área de la región triangular ABC. Halle $m\angle B$.

A) 30° B) 60° C) 120° D) 150° E) 160°

## LÍNEAS NOTABLES

**29.-** En un $\Delta$ABC de lados *a, b, c* circunradio R, $m\angle A = 45°$. La expresión $E = b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C$, es igual a:

A) $R^2$ B) $2R^2$ C) $3R^2$ D) $4R^2$ E) $5R^2$

**30.-** En la figura mostrada, halle la medida del ángulo $\alpha$ si EC = 2AB

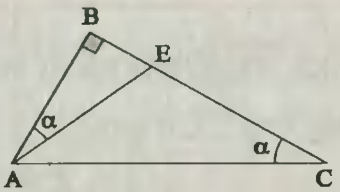
A) 11°15'

B) 22°30'

C) 33°30'

D) 25°30'

E) 22°20'




**31.-** La longitud de los lados de un triángulo ABC son BC = $a = 8\ m$, AC = $b = 8\ m$ y AB = $c = 13\ m$. Halle la longitud (en m) de la bisectriz interior relativa al lado $b$.

A) $26\sqrt{21}$ B) $\frac{21}{26}\sqrt{58}$ C) $\frac{7}{5}\sqrt{39}$

D) $\frac{26}{21}\sqrt{58}$ E) $\frac{58}{21}\sqrt{26}$

**32.-** En un ΔABC, la bisectriz exterior relativa al lado b mide 576 $m$. Calcule la medida de la bisectriz interior relativa al mismo lado (en $m$), además se tiene $m\angle C - m\angle A = 32°$

A) 187 B) 144 C) 198

D) 188 E) 168

**33.-** En un Δ ABC de lados $a$, $b$ y $c$ donde ha es la altura relativa al lado A, si $a = h_a$, entonces:

$$E = \frac{\text{sen}(B+C)}{\text{senBsenC}}\text{, es:}$$

A) 2 B) 3/2 C) 1 D) 1/2 E) 1/4

**CUADRILÁTEROS**

**34.-** Se tiene un cuadrilátero circunscriptible ABCD de lados AB = $a$, BC = $b$, CD = $d$ y AD = $d$, se cumple:

$$\text{sen}\frac{B}{2}\ .\ \text{sen}\left(\frac{B+D}{2}\right) = \text{sen}\frac{D}{2}\text{, determine "}$$

$ab$" si el área de la región cuadrangular es 5 $cm^2$.

A) 10 B) 5 C) 15 D) 2,5 E) 20

**35.-** En un cuadrilátero circunscriptible ABCD, AB = $a$, BC = $b$, CD = $d$ y AD = $d$, además el ángulo que forman las diagonales mide 150°, determine el área de la región cuadrangular ABCD.

A) $ac$ B) $bd$ C) $ac + bd$

D) $\left(\frac{ac+db}{2}\right)$ E) $\left(\frac{ac+bd}{4}\right)$

**36.-** En un cuadrilátero circunscriptible ABCD, AB = $a$, BC = $c$, CD = $d$ y AD = $d$, se cumple: $a - c = b - d$, determine: $M = \frac{ad}{bc}$

A) $\tan\frac{A}{2}$ B) $2\tan\frac{A}{2}$ C) $\tan^2\frac{A}{2}$

D) $\cot\frac{A}{2}$ E) $\cot^2\frac{A}{2}$

**37.-** En un cuadrilátero inscriptible ABCD, AB = $a$, BC = $b$, CD = $c$. Si: $a - c = b - d$,

determine: $M = \dfrac{\cot^2\left(\frac{C}{2}\right)}{bc}$.

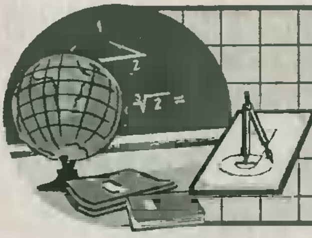
A) $ad$ B) $\frac{ad}{(bc)^2}$ C) $\frac{ad}{bc}$

D) $\frac{ad}{(bc)^3}$ E) $\frac{(bc)^2}{ad}$

**38.-** En un cuadrilátero inscriptible ABCD, AB = $a$, BC = $b$, CD = $c$, AD = $d$, *se cumple:* $a - c = b + d$, además: 4sen A + 3 cos A = 5,

$A \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, determine: $M = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$

A) 0,5 B) 1 C) 4 D) 0,25 E) 2



# Estudio de la Trigonometría con Números Complejos

## CAP. 21

### FORMA POLAR

**01.-** Luego de expresar en su forma trigonométrica, indique el argumento del siguiente número complejo,

$$Z=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{i}{\tan\theta+\cot\theta}\ ;0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

A) $\theta$ B) $\theta-\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{2}-\theta$

D) $\frac{\pi}{2}+\theta$ E) $\pi-\theta$

**02.-** Dado: $Z=(1-\text{sen}\,\theta+i\cos\theta)^4$; hallar la variación de "$\theta$" de tal manera que el argumento principal de Z este comprendida en el intervalo $[0\,;2\pi\rangle$.

A) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ B) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

C) $\theta\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ D) $\theta\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

E) $\theta\in[-\pi\,;\pi]$

**03.-** Indique un equivalente de la siguiente expresión:

$$M=\left(\frac{\cot\alpha+i}{\cot\alpha-i}\right)^n+\left(\frac{\cot\alpha-i}{\cot\alpha+i}\right)^n$$

A) sen $2\alpha$ B) cos $2\alpha$ C) 2 sen $2\alpha$

D) 3 sen $2n\alpha$ E) 2 cos $2n\alpha$

**04.-** Siendo "$k$" un número par, reducir las siguiente expresión:

$$\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{2\pi}{5}\right)^k-\left(\text{sen}\frac{3\pi}{5}-i\,\text{sen}\frac{\pi}{10}\right)^k$$

A) $(-1)^{\frac{k-2}{2}}\,2\text{sen}\frac{k\pi}{10}$ D) $(-1)^{\frac{k-2}{2}}\,2i\cos\frac{k\pi}{10}$

B) $(-1)^{2k}\,2i\,\text{sen}\frac{k\pi}{10}$ E) $(-1)^{\frac{k-2}{2}}\,2\cos\frac{k\pi}{10}$

C) $(-1)^{\frac{k-2}{2}}\,2i\,\text{sen}\frac{k\pi}{10}$

**05.-** Utilizando propiedades y definiciones de números complejos, determine tan $4x$ como una función racional de tan $x$.

A) $\frac{4\tan x-4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

B) $\frac{\tan x-\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

C) $\frac{4\tan x+4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

D) $\frac{4\tan^3 x-4\tan x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

E) $\frac{2\tan x-2\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

**06.-** Halle la parte imaginaria del número complejo:

$$W = \frac{1+\cos 3x + i\text{sen}x}{1+\cos x + i\text{sen}x}$$

A) sen $2x$ - cos $2x$ B) sen $2x$ - cos $x$

C) cos $2x$ - cos $x + 1$ D) sen $x$ - sen $2x$

E) sen $2x$ - sen $x$

**07.-** Si: $z = \text{cis}\,\theta$ - $\frac{5\pi}{2} < \theta < -2\pi$,

calcule: $\left|\frac{1-(\bar{z})^2}{1+z^2}\right|$

A) $\tan\theta$ B) $-\tan\theta$ C) $\cot\theta$

D) $-\cot\theta$ E) $-\tan(\theta/2)$

**08.-** Utilizando complejos degradar: $\cos^5\theta$.

A) $\frac{5}{8}\cos\theta - \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{1}{16}\cos 5\theta$

B) $\frac{5}{8}\cos\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{1}{16}\cos 5\theta$

C) $\frac{5}{8}\cos\theta + \frac{1}{16}\cos 3\theta - \frac{5}{16}\cos 5\theta$

D) $\frac{5}{8}\cos\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{1}{16}\cos 5\theta$

E) $-\frac{5}{8}\cos\theta - \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{1}{16}\cos 5\theta$

## FORMA EXPONENCIAL

**09.-** Resolver:

$$\text{Ln}(1+\cos\theta + -i\,\text{sen}\,\theta) = 1 + \text{L}n\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

A) 2 B) $i$ C) 1 D) $2i$ E) $-i$

**10.-** El complejo: $W = \frac{i+\text{sen}x + i\cos x}{i + \text{sen}x - i\cos x}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$, se puede expresar de la forma: $re^{i\theta}$, entonces el valor de: $r - \tan\theta$ es. . . . . .

A) sen $x$ B) csc $x$ C) cos $x/2$

D) sec $x/2$ E) 0

**11.-** Sea el complejo $z/z = re^{i\pi/36}$ obtener el valor de:

$$M = \sec^2(arg\ z) + \left(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}\right)^2$$

A) 0 B) -1 C) 1 D) $i$ E) $-i$

**12.-** Calcular el valor de: sen ($i$L$ni$)

A) $1/e$ B) $-1/e$ C) $1/\pi$ D) $-1/\pi$ E) -1

**13.-** Representar el número complejo:

$Z = \text{sen}\,2\alpha - i\cos 2\alpha$, en la forma exponencial.

A) $-e^{i(2\alpha-\pi)}$ B) $e^{i(2\alpha+\pi)}$ C) $e^{i\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

D) $e^{i\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$ E) $e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

**14.-** Siendo $z$ un número complejo, calcular: cos $2z$, sabiendo que: $\cos z = 2$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**15.-** Si: $Z = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$, $W = 1 + iZ$, hallar el argumento principal de $W^6$.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $3\frac{\pi}{4}$ C) $9\frac{\pi}{4}$ D) $11\frac{\pi}{4}$ E) $13\frac{\pi}{4}$

**16.-** Sabiendo que $\forall\ n \in$ N se cumple:

$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}[(x-x_k)(x-\bar{x}_k)]$, donde:

$x_k = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$ y $\bar{x}_k$ : conjugada de $x_k$ ¿qué sucede cuando $x$ toma el valor de 1?

A) $\prod_{k=0}^{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

B) $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

C) $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^{n-1}}$

D) $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

E) $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

**17.-** Expresar el número complejo:

$$Z=(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right),$$

en forma exponencial.

A) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ B) $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ C) $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ E) $5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

**18.-** Encontrar las raíces cuadradas de: $-8i-15$, indicar uno de ellos.

A) $4i-1$; $1-4i$ B) $3i-1$; $1-3i$

C) $2i-2$; $2-2i$ D) $5i-1$; $1-4i$

E) $4i-2$; $2-4i$

**19.-** Hallar el módulo del número complejo $(1+i)i,\ k\in Z$.

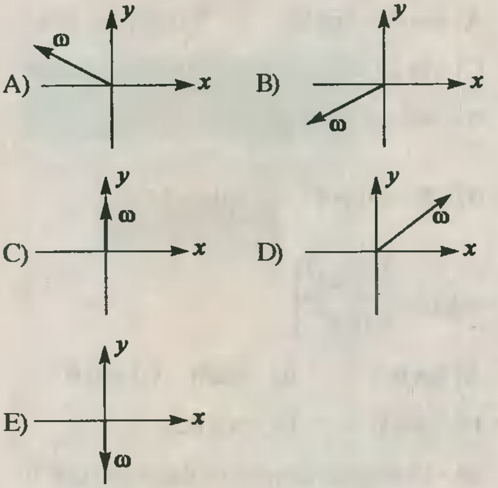
A) $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ B) $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ C) $e^{k\pi-\frac{\pi}{4}}$

D) $e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ E) $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

**20.-** Dado el número complejo:

$$Z=Je^{i\theta}\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\ ;$$

indicar el gráfico que mejor representa al número: $W=Ze^{i\alpha}$ con $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ ; $J>0$.




**21.-** Al simplificar:

$$\frac{(1+i\tan\alpha)^n}{(1-i\tan\alpha)^n}-e^{-2n\alpha i},(n\in\mathbb{Z},i=\sqrt{-1})$$

A) $2i\operatorname{sen}(2n\alpha)$ B) $2\tan(n\alpha)$ C) $-2i$

D) $\tan(n\alpha)$ E) 0

**22.-** Calcular: $\cot\left(\dfrac{\ln i}{2i}\right)$

A) -1 B) $-\sqrt{3}$ C) 1 D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

**23.-** Calcular la parte imaginaria del complejo "z", si: $z=\dfrac{\cos ix+i\operatorname{sen} ix}{2i}$

A) $e$ B) $-e$ C) $1/2e$ D) $-1/2e$ E) $2e$

**24.-** Resolver: $\sec(ix)+i\csc(ix)=4i\csc(2ix)$

A) $-Ln2$ B) $Ln4$ C) $Ln(-2)$ D) $2Ln2$ E) $Ln2$

**25.-** Dado el número complejo $z=\dfrac{\cot\theta+i}{1-i\cot\theta}$, halle $\mathrm{Re}(z^6)$

A) cos 120θ  B) sen 12θ  C) cot 6θ

D) tan 6θ  E) -1

**26.-** Dado el número complejo: $z=x+iy$, determinar el área de la región:

$$R=\{z\in C/|z|\leq 1\wedge \mathrm{Im}z\leq \cos(\mathrm{Re}z)\}$$

A) π/8  B) π/5  C) π/3  D) π/2  E) π

**27.-** Simplificar la expresión:

$$K=\frac{1-2e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}}{(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\theta)^2}+2$$

A) 2 cos2θ  B) cos 2θ  C) -2 cos 2θ

D) - cos 2θ  E) sen 2θ

**28.-** Si: $\dfrac{a+bi}{a-bi}=e^{i\alpha}$; $a, b, \alpha\in\mathbb{R}$, determine el valor de tan α.

A) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$  B) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$  C) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$

D) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$  E) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

**29.-** Hallar la parte ral de: $z=\dfrac{e^{i3x}+1}{e^{i2x}+1}$

A) $\dfrac{\cos\frac{3x}{2}}{\cos x}\cos 2x$  B) $\dfrac{\cos\frac{3x}{2}}{\cos x}.\cos\dfrac{x}{2}$

C) $\dfrac{\mathrm{sen}\frac{3x}{2}}{\mathrm{sen}x}.\cos\dfrac{x}{2}$  D) $\dfrac{\mathrm{sen}3x}{\mathrm{sen}x}.\cos\dfrac{x}{2}$

E) $\dfrac{\cos\frac{3x}{2}}{\cos x}.\mathrm{sen}\dfrac{x}{2}$

**30.-** Determine la parte real del complejo:

$$Z=4\left(\frac{1+i\cot\theta}{1-i\cot\theta}\right)^{12};\ \mathrm{si}\ \theta=\frac{\pi}{15}$$

A) $\sqrt{5}+1$  B) $\sqrt{5}-1$  C) $\sqrt{2}+1$

D) $\sqrt{2}-1$  E) $\sqrt{3}+2$

**31.-** Para la siguiente expresión $W=\dfrac{e^{i3\theta}-1}{e^{i6\theta}-1}$, se pide hallar Re(W)

A) -1/2  B) -1/4  C) 1

D) 1/4  E) 1/2

**32.-** Hallar el complejo equivalente a:

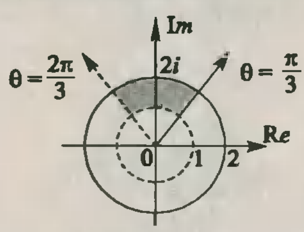
$$\frac{1-z^{-2}}{1+z^{-2}}\ ;\ \mathrm{si}: z=e^{i\theta}$$

A) $i\tan\theta$  B) $2i\cot\theta$  C) $i\cot\theta$

D) $i\,\mathrm{sen}\,\theta$  E) $i\cos\theta$

## REGIONES SOMBREADAS

**33.-** La región sombreada:




Se puede expresar como:

A) $1\leq|z|\leq 2\wedge\dfrac{\pi}{3}\ arg\,z\leq\dfrac{2\pi}{3}$

B) $1<|z|<2\wedge\dfrac{\pi}{3}<arg\,z\leq\dfrac{2\pi}{3}$

C) $1<|z|\leq 2\wedge\dfrac{\pi}{3}\leq arg\,z<\dfrac{2\pi}{3}$

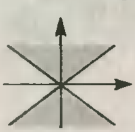
D) $1<|z|<2 \wedge \dfrac{\pi}{3} \le arg\, z < \dfrac{2\pi}{3}$

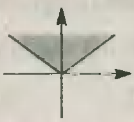
E ) $1<|z|\le 2 \wedge < arg\, z < \dfrac{2\pi}{3}$

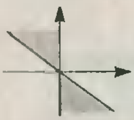
**34.-** Siendo $Z_k$ un número complejo de la forma:

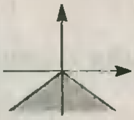
$$Z_k = \cos(k\theta) + i\cos 2(k\theta).$$

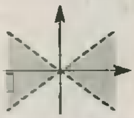
Hallar la región correspondiente para $Z_1$, de modo tal que $|Z_1| \le 1$.

A) 

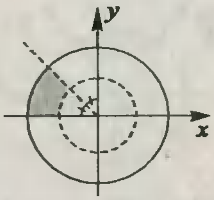
B) 

C) 

D) 

E) 

**35.-** Hallar el conjunto de los números complejos que describen la región mostrada, sabiendo además que el área de dicha región sombreada (S) es $6\pi\mu^2$.




A) $S = \left\{ z \in C/2 \le |z| \le 4 \wedge 3\dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi \right\}$

B) $S = \left\{ z \in C/2 < |z| \le 4 \wedge 3\dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi \right\}$

C) $S = \left\{ z \in C/4 \le |z| \le 8 \wedge 3\dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi \right\}$

D) $S = \left\{ z \in C/4 < |z| \le 8 \wedge 3\dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi \right\}$

E) $S = \left\{ z \in C/2 < |z| \le 8 \wedge 3\dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi \right\}$

**36.-** Calcular el área de la región sombreada por:

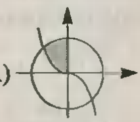
$$R = \left\{ Z \in C/I_{m(Z)} \le \text{sen}\,[Re_{(Z)}] \wedge |Z| \le \frac{3\pi}{2} \right\}$$

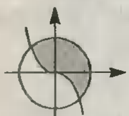
A) $\dfrac{9}{4}\pi^2\mu^2$ B) $\dfrac{9}{4}\pi^3\mu^3$ C) $\dfrac{9}{8}\pi^2\mu^2$

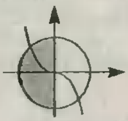
D) $\dfrac{9}{8}\pi^3\mu^3$ E) $\dfrac{9}{16}\pi^2\mu^2$

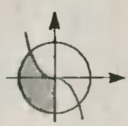
**37.** ¿Cuál de las gráficas corresponde al siguiente conjunto de números complejos:

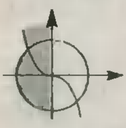
$R = \{Z \in C/I_{m(Z)} + Re^3_{(Z)} \ge 0 \vee |Z| \le 1;\ Re_{(Z)} \le 0\}$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

**38.-** Sea la región R definida por:

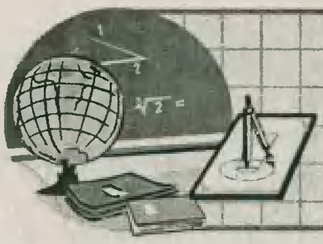
$R = \{z = re^{i\theta} \in C/arg(z^3) \in [\pi/4; 5\pi/4]$ y $0 < R_1 \le r \le R_2\}$

halle el área de la región R.

A) $(\pi/6)(R_2^2 - R_1^2)$ B) $(\pi/4)(2R_2^2 - R_1^2)$

C) $(\pi/3)(R_2^2 - R_1^2)$ D) $(2\pi/3)(R_2^2 - R_1^2)$

E) $(\pi/7)(R_2^2 + R_1^2)$



# Límites y Derivadas Trigonométricos

**CAP. 22**

## LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

**01.-** Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right)\text{;cuando } x \text{ se aproxima a: } \frac{3\pi}{2}$$

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  B) $-\sqrt{2}$  C) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $-2\sqrt{2}$  E) $\sqrt{2}$

**02.-** Calcular: $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\alpha-\beta}\right)$

A) -sen β  B) sen β  C) -2 sen β

D) 2 sen β  E) cos β

**03.-** Evaluar: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan 2x.\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

A) 1/4  B) 1/3  C) 1/5  D) 1/2  E) 4

**04.-** Determinar: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right)$

A) 1  B) $\sqrt{3}$  C) $-\sqrt{3}$  D) 2  E) -1

**05.-** Encontrar: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)$

A) -12  B) -6  C) -18  D) $24\sqrt{3}$  E) -24

**06.-** Cuando "$x$" se aproxima a cero, la expresión:

$$\frac{\cos 7x-\cos 5x}{x^2}\ ;\ \text{es igual a :}$$

A) -1  B) -1/2  C) -12  D) -6  E) - 18

**07.-** El siguiente límite:

$$\lim_{x\to y}\left(\frac{\cos 2x-\cos 2y}{x-y}\right)$$

es equivalente a:

A) -2 sen $2y$  B) -3 sen $2y$  C) -sen $2y$

D) -2 sen $y$  E) -sen $y$

**08.-** Dada la siguiente expresión, calcular :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{14}}\frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)}{x-\frac{\pi}{14}}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{arc\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos x}{1-x}\right)$$

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**09.-** Determinar $(\alpha+\beta)$, si :

$$\alpha=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\wedge\ \beta=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x.\operatorname{sen}5x}{(x-x^3)^2}$$

A) 16  B) 15  C) 14  D) 13  E) 0

**10.-** Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\tan(2\pi x)+\cos(0{,}5\pi x)+\tan(0{,}3\pi x)}{x^2+4x-12}$$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{3\pi}{12}$ C) $\frac{5\pi}{12}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{9\pi}{12}$

**11.-** Si: $f(x)=\frac{\cos x}{x}$, ¿cuál de las alternativas es correcta?

A) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

B) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

C) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

D) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

E) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=1$

**12.-** Determinar el verdadero valor de "M" cuando "θ" se aproxima a $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, si:

$$M=\frac{2\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(2\theta-\frac{4\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

A) -2 B) cero C) 2 D) 1 E) -1

**13.-** ¿A qué valor se aproxima "M", cuando "$x$" se aproxima a cero, si:

$$M=\frac{\sqrt{1+x\operatorname{sen}x}-\cos x}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\ ?$$

A) 4 B) 2 C) 1 D) - 1 E) - 3

**14.-** Calcular el valor de "E" cuando "$x$" se aproxima a cero.

$$E=\frac{2-\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2}$$

A) 3/2 B) 1/2 C) 1/4 D) 3/4 E) 2/3

## DERIVADAS

**15.-** Si : $f(x)=\operatorname{sen}x$, hallar $f^{57}(x)$, (57 ésima derivada)

A) sen $x$ B) cos $x$ C) - sen $x$

D) - cos $x$ E) 0

**16.-** Dada la función: $f(x)=arc\cos(x^2)$ ; calcular : $f'(0)$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 0,5 E) -0,5

**17.** Si: $f(x)=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x$.

Calcula: $f'(x)$

A) $\tan x$ B) $\tan^2x$ C) $\tan^3x$

D) $\tan^4x$ E) $2\tan^2x$

**18.-** Calcular el valor de: $f'\left(\frac{\pi}{16}\right)$, sabiendo que: $f(x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{\tan x}$

A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C) $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D) $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**19.-** Calcular la derivada enésima de: $y=\cos^3x$

A) $\frac{3}{8}\left[3^{n-1}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

B) $\frac{3}{2}\left[3^{n-1}\operatorname{sen}\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

C) $\frac{3}{4}\left[3^{n-1}\operatorname{sen}\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

D) $\frac{3}{2}\left[3^{n-1}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

E) $\frac{3}{4}\left[3^{n-1}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

## REGLA DE L'HOSPITAL

**20.-** Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x+\cos x-1)}{\operatorname{sen}(\cos x)}\right)$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 1/2 E) -2

**21.-** Calcular el valor de:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen}3x+\cos\frac{x}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x-1}\right)$$

A) -6 B) -9 C) -1/9 D) - 8 E) -1/6

**22.-** Calcular el valor de:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x(1-\cos x)}$$

A) 2/3 B) 3/2 C) 1/3 D) 1/2 E) 4/3

**23.-** Evaluar: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\operatorname{sen}((n+1)x)}{3x}$

A) $\dfrac{n+1}{3}$ B) $\dfrac{n}{3}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{4}{3}$

**24.-** Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{arc\operatorname{sen}3x}\right)$

A) 1/4 B) 1/5 C) 2/5 D) 1/3 E) 2/3

**25.-** Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**26.-** Evaluar:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\operatorname{sen}(\cos x)+\operatorname{sen}(2\cos x)}{\cos x}\right]$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

**27.-** ¿Para cuáles de los siguientes intervalos la función $f(x)$ es decreciente, si:

$$f(x)=\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}2x}{2}\ ?$$

A) $\left\langle\frac{\pi}{4};\pi\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{5\pi}{3};2\pi\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\rangle$

**28.-** Calcular el máximo valor que toma la función:

$$y=2\cos\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{3}$$

A) 1 B) 5 C) 4 D) 2 E) 3

**29.-** Al graficar la función: $y=2\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}4x$; ¿para cuál de los siguientes valores de "$x$" la función toma su máximo valor?

A) π/3 B) 7π/6 C) 4π/3 D) 11π/6 E) π/6

**30.-** Determine sobre la curva: $y=arc\tan x$, un punto que esté más próximo al punto $\left(0;2+\frac{\pi}{4}\right)$

A) $\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right)$ B) $\left(-1;-\frac{\pi}{4}\right)$ C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\pi}{6}\right)$

D) $\left(\frac{4}{3};\frac{53\pi}{180}\right)$ E) $\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$

**31.-** Las diagonales de un cuadrilátero son:

$$\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\quad y\quad \cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha,$$

los cuales forman el ángulo $(\pi-\alpha)$. Calcular el valor de mínimo de dicha región cuadrangular.

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$ C) $\dfrac{3\sqrt{6}}{7}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{9}$

**32.-** Calcular el máximo valor de la función $f_1(x)$ definida por la regla de correspondencia:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x$$

A) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{3}{16}$

**33.-** Hallar el ángulo, bajo el cual se cortan las curvas dadas por: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$

A) $-\mathit{arc}\tan(\sqrt{2}+2)$ D) $-\mathit{arc}\tan\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

B) $-\mathit{arc}\tan(2\sqrt{2})$ E) $-\mathit{arc}\tan\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $-\mathit{arc}\tan(3\sqrt{2})$

**34.-** Encontrar el mínimo valor de la función:

$$f(x) = \mathit{arc}\tan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \; ; \; x \in [0;1]$$

A) $-\pi/4$ B) $-\pi/2$ C) $-\pi/8$

D) 0 E) $\pi/4$

**35.-** Dos móviles parten simultáneamente desde un mismo punto y en direcciones opuestas, sobre una pista circular de radio 140 $m$ con rapidez constante de $3\pi$ $m/s$ y $4\pi$ $m/s$ ¿Con qué rapidez se están alejando el uno del otro al cabo de 10 $s$ de haber partido?

A) $\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$ $m/s$ B) $3\pi$ $m/s$ C) $4\pi$ $m/s$

D) $\dfrac{7\pi\sqrt{2}}{2}$ $m/s$ E) $5\pi$ $m/s$

**36.-** La función: $f(x) = \cos x - 1/2 \cos . 2x$ en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{3};0\right]$, se caracteriza por ser:

A) No creciente

B) No decreciente

C) Cóncavo hacia arriba

D) Cóncavo hacia abajo

E) Estrictamente decreciente

**37.-** Un estudiante quiere conseguir la tabla (AB) más corta posible a fin de llegar al edificio tal como se muestra en la figura (la tabla está apoyada en un muro de altura $h$). Calcular la longitud de dicha tabla.

A) $(h^2+d^2)^{1/2}$ D) $(h^{3/2}+d^{3/2})^{2/3}$

B) $(h^3+d^3)^{1/3}$ E) $(h^{2/3}+d^{2/3})^{1/2}$

C) $(h^{2/3}+d^{2/3})^{3/2}$

**38.-** Un ingeniero diseña un estanque cuyo corte de sección tiene la forma mostrada en la figura, donde: AB = BC = CD = L. ¿Qué valor le debe asignar a "θ" para que en el estanque se pueda depositar el mayor volumen posible de agua?

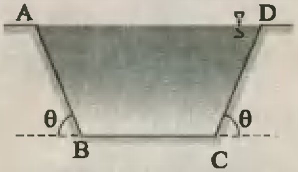
A) 37°

B) 45°

C) 53°

D) 60°

E) 75°




**39.-** Los lados de un triángulo son:

$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \;\; \text{y} \;\; \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

los cuales forman el ángulo "θ". Calcular el mínimo valor de dicha región triangular.

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}}{36}$

# CLAVES DE RESPUESTAS

## CAPÍTULO 1: SISTEMAS DE MEDIDA ANGULAR

01.- C 02.- C 03.- A 04.- B 05.- B 06.- B 07.- C 08.- C 09.- B 10.- D 11.- C 12.- B 13.- E 14.- C 15.- C
16.- D 17.- C 18.- B 19.- B 20.- D 21.- D 22.- D 23.- D 24.- A 25.- C 26.- A 27.- A 28.- C 29.- A 30.- C
31.- C 32.- B 33.- C 34.- C 35.- D 36.- D 37.- E 38.- D 39.- E 40.- C

## CAPÍTULO 2: LONGITUD DE ARCO

01.- A 02.- C 03.- B 04.- C 05.- C 06.- C 07.- D 08.- B 09.- C 10.- C 11.- C 12.- B 13.- D 14.- A 15.- B
16.- B 17.- B 18.- E 19.- B 20.- E 21.- A 22.- E 23.- E 24.- C 25.- E 26.- B 27.- A 28.- C 29.- C 30.- B
31.- C 32.- B 33.- D 34.- A 35.- C 36.- C 37.- B 38.- B 39.- B

## CAPÍTULO 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

01.- A 02.- D 03.- B 04.- C 05.- B 06.- C 07.- D 08.- E 09.- C 10.- C 11.- B 12.- A 13.- E 14.- D 15.- D
16.- E 17.- E 18.- A 19.- A 20.- C 21.- C 22.- C 23.- B 24.- D 25.- B 26.- B 27.- C 28.- C 29.- B 30.- A
31.- D 32.- C 33.- B 34.- D 35.- C 36.- B 37.- A 38.- D

## CAPÍTULO 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

01.- A 02.- C 03.- B 04.- D 05.- B 06.- C 07.- A 08.- B 09.- B 10.- A 11.- D 12.- B 13.- D 14.- B 15.- C
16.- B 17.- B 18.- C 19.- B 20.- C 21.- E 22.- B 23.- E 24.- A 25.- C 26.- D 27.- C 28.- B 29.- C 30.- C
31.- A 32.- D 33.- C 34.- C 35.- C 36.- D 37.- C 38.- B 39.- C

## CAPÍTULO 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN SITUACIONES CONTEXTUALIZADAS

01.- D 02.- C 03.- E 04.- B 05.- B 06.- B 07.- B 08.- C 09.- C 10.- E 11.- E 12.- C 13.- A 14.- A 15.- B
16.- B 17.- D 18.- B 19.- E 20.- A 21.- C 22.- D 23.- A 24.- E 25.- B 26.- A 27.- E 28.- C 29.- A 30.- C
31.- C 32.- C 33.- C

## CAPÍTULO 6: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN EL PLANO CARTESIANO

01.- B 02.- C 03.- A 04.- B 05.- E 06.- E 07.- A 08.- A 09.- B 10.- A 11.- B 12.- C 13.- C 14.- E 15.- C
16.- A 17.- A 18.- B 19.- D 20.- A 21.- A 22.- E 23.- B 24.- A 25.- B 26.- B 27.- B 28.- B 29.- B 30.- C
31.- A 32.- D 33.- B 34.- D 35.- A 36.- A 37.- E 38.- D 39.- B 40.- A 41.- D

## CAPÍTULO 7: CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA (RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES)

01.- C 02.- A 03.- E 04.- C 05.- C 06.- D 07.- D 08.- E 09.- B 10.- A 11.- C 12.- D 13.- D 14.- C 15.- E
16.- D 17.- A 18.- D 19.- A 20.- C 21.- E 22.- E 23.- D 24.- C 25.- B 26.- C 27.- E 28.- A 29.- B 30.- E
31.- E 32.- C 33.- A 34.- D 35.- C 36.- A 37.- A 38.- D 39.- E

## CAPÍTULO 8: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

05.- E 06.- A 07.- C 08.- B 09.- C 10.- C 11.- A 12.- C 13.- A 14.- A 15.- A 16.- A 17.- A 18.- A 19.- D
20.- A 21.- C 22.- B 23.- A 24.- A 25.- C 26.- B 27.- C 28.- D 29.- B 30.- D 31.- A 32.- C 33.- C 34.- A
35.- B 36.- A 37.- C 38.- A 39.- B 40.- A 41.- C 42.- B

## CAPÍTULO 9: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCOS COMPUESTOS

01.- C 02.- B 03.- E 04.- B 05.- A 06.- A 07.- B 08.- C 09.- B 10.- D 11.- A 12.- C 13.- A 14.- E 15.- C
16.- B 17.- B 18.- E 19.- D 20.- E 21.- E 22.- A 23.- E 24.- E 25.- D 26.- E 27.- C 28.- A 29.- A 30.- E
31.- A 32.- D 33.- B 34.- A 35.- A

## CAPÍTULO 10: REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

01.- E 02.- D 03.- B 04.- D 05.- E 06.- B 07.- A 08.- E 09.- E 10.- E 11.- D 12.- B 13.- E 14.- B 15.- E
16.- B 17.- A 18.- D 19.- B 20.- B 21.- D 22.- A 23.- C 24.- B 25.- D 26.- B 27.- D 28.- C 29.- B 30.- B
31.- D 32.- C 33.- E 34.- A 35.- A 36.- E 37.- C 38.- B 39.- A 40.- A

## CAPÍTULO 11: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO DOBLE

01.- B 02.- A 03.- A 04.- C 05.- E 06.- A 07.- C 08.- B 09.- C 10.- D 11.- B 12.- D 13.- A 14.- C 15.- C
16.- A 17.- B 18.- D 19.- C 20.- E 21.- D 22.- A 23.- D 24.- D 25.- A 26.- B 27.- A 28.- B 29.- D 30.- A
31.- C 32.- C 33.- B 34.- B 35.- B 36.- C 37.- A 38.- C 39.- B

## CAPÍTULO 12: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD

01.- E 02.- E 03.- A 04.- D 05.- B 06.- A 07.- C 08.- E 09.- E 10.- E 11.- A 12.- E 13.- E 14.- A 15.- A
16.- B 17.- B 18.- B 19.- C 20.- C 21.- B 22.- A 23.- B 24.- D 25.- C 26.- E 27.- D 28.- A 29.- E 30.- D
31.- B 32.- B 33.- A 34.- E 35.- E 36.- B 37.- C 38.- E 39.- B 40.- E 41.- A

## CAPÍTULO 13: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO TRIPLE

01.- B 02.- B 03.- E 04.- A 05.- D 06.- D 07.- A 08.- B 09.- D 10.- A 11.- E 12.- C 13.- E 14.- C 15.- D
16.- B 17.- E 18.- B 19.- E 20.- D 21.- A 22.- D 23.- B 24.- C 25.- A 26.- A 27.- A 28.- B 29.- A 30.- E
31.- C 32.- B 33.- E 34.- A 35.- D 36.- D 37.- D 38.- E 39.- B 40.- D 41.- A 42.- E

## CAPÍTULO 14: TRANSFORMACIONES DE SUMAS O DIFERENCIAS A PRODUCTOS

01.- A 02.- A 03.- C 04.- A 05.- A 06.- A 07.- D 08.- D 09.- B 10.- A 11.- D 12.- C 13.- B 14.- A 15.- A
16.- C 17.- D 18.- D 19.- B 20.- C 21.- C 22.- B 23.- B 24.- C 25.- D 26.- D 27.- B 28.- C 29.- B 30.- C
31.- B 32.- C 33.- E 34.- A 35.- E 36.- C 37.- D 38.- B 39.- E 40.- D 41.- C 42.- C 43.- E

## CAPÍTULO 15: TRANSFORMACIONES DE PRODUCTO A SUMAS O DIFERENCIAS

01.- C 02.- A 03.- A 04.- D 05.- A 06.- A 07.- D 08.- C 09.- D 10.- A 11.- E 12.- D 13.- C 14.- A 15.- A
16.- C 17.- B 18.- E 19.- E 20.- B 21.- C 22.- C 23.- D 24.- C 25.- C 26.- B 27.- E 28.- A 29.- D 30.- C
31.- A 32.- E 33.- D 34.- E 35.- E 36.- D 37.- D 38.- B 39.- B 40.- B

## CAPÍTULO 16: SUCESIONES Y SERIES TRIGONOMÉTRICAS

01.- A 02.- B 03.- D 04.- E 05.- B 06.- D 07.- C 08.- B 09.- A 10.- A 11.- E 12.- D 13.- E 14.- A 15.- C
16.- E 17.- A 18.- D 19.- A 20.- D 21.- A 22.- D 23.- D 24.- A 25.- D 26.- E 27.- A 28.- A 29.- E 30.- A
31.- E 32.- E 33.- A 34.- E 35.- D 36.- A 37.- C 38.- A 39.- A

## CAPÍTULO 17: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

01.- A 02.- D 03.- B 04.- E 05.- D 06.- D 07.- D 08.- A 09.- D 10.- A 11.- E 12.- B 13.- D 14.- A 15.- C
16.- C 17.- E 18.- B 19.- A 20.- D 21.- D 22.- C 23.- D 24.- A 25.- B 26.- B 27.- C 28.- B 29.- D 30.- A
31.- A 32.- B 33.- C 34.- E 35.- C 36.- B 37.- C 38.- B 39.- A 40.- E 41.- C 42.- C 43.- C 44.- A
45.- A 46.- B 47.- A 48.- A 49.- B 50.- C 51.- A 52.- D 53.- A 54.- D 55.- E 56.- D 57.- D

## CAPÍTULO 18: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

01.- C 02.- C 03.- C 04.- E 05.- A 06.- D 07.- C 08.- E 09.- D 10.- B 11.- E 12.- D 13.- D 14.- B 15.- A
16.- C 17.- C 18.- D 19.- D 20.- C 21.- B 22.- D 23.- C 24.- C 25.- A 26.- A 27.- E 28.- A 29.- B 30.- D
31.- C 32.- D 33.- C 34.- D 35.- D 36.- E 37.- B 38.- B 39.- C

## CAPÍTULO 19: ECUACIONES E INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

01.- C 02.- C 03.- A 04.- E 05.- C 06.- B 07.- B 08.- B 09.- E 10.- B 11.- D 12.- D 13.- B 14.- D 15.- A
16.- C 17.- C 18.- C 19.- A 20.- A 21.- D 22.- D 23.- B 24.- D 25.- C 26.- D 27.- B 28.- A 29.- E 30.- E
31.- D 32.- B 33.- C 34.- A 35.- B 36.- E 37.- D 38.- D 39.- B 40.- A

## CAPÍTULO 20: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

01.- C 02.- C 03.- E 04.- D 05.- C 06.- B 07.- C 08.- A 09.- C 10.- E 11.- C 12.- B 13.- D 14.- B 15.- A
16.- A 17.- C 18.- D 19.- C 20.- D 21.- B 22.- A 23.- A 24.- E 25.- D 26.- C 27.- B 28.- C 29.- A 30.- B
31.- D 32.- E 33.- C 34.- B 35.- E 36.- C 37.- B 38.- E

## CAPÍTULO 21: ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA CON NÚMEROS COMPLEJOS

01.- C 02.- B 03.- E 04.- B 05.- A 06.- A 07.- B 08.- D 09.- D 10.- B 11.- C 12.- E 13.- D 14.- D 15.- A
16.- B 17.- D 18.- A 19.- A 20.- D 21.- E 22.- C 23.- D 24.- E 25.- E 26.- E 27.- D 28.- D 29.- B 30.- B
31.- E 32.- A 33.- C 34.- A 35.- D 36.- C 37.- E 38.- A 38.- E 39.- C

## CAPÍTULO 22: LÍMITES Y DERIVADAS TRIGONOMÉTRICOS

01.- B 02.- A 03.- D 04.- B 05.- E 06.- C 07.- A 08.- E 09.- C 10.- C 11.- D 12.- B 13.- A 14.- D 15.- B
16.- A 17.- D 18.- D 19.- E 20.- B 21.- B 22.- A 23.- A 24.- E 25.- B 26.- E 27.- D 28.- B 29.- E 30.- E
31.- B 32.- A 33.- B 34.- D 35.- D 36.- A 37.- C 38.- D 39.- C

## BIBLIOGRAFÍA


**01.- Trigonometría**
James Gehrmann y Thomas Lester
Carbajal S.A. - 1988

**02.- Análisis Matemático**
L.S. Pontriaguin
Paraninfo S.A. Madrid - 1983

**03.- Funciones Numéricas**
Edgar de Alencar Filho
Luraria Novel S.A. - 1985

**04.- Análisis Matemático**
Segunda Edición
T.M. Apostol
Editorial Reverté S.A. - 1993

**05.- Trigonometría Contemporánea**
H. E. Taylor T.L. Wade
Editorial Limusa - 1976

**06.- Trigonometría Plana**
heineman, Richard E.
Libros Mc Graw - Hill de México - 1973

**07.- Trigonometría Moderna TOMO I**
C.W. Lucas y R.T. James
Editorial Hispano - Americana - 1973

**08.- Trigonometría con Aplicaciones**
Patrick J. Boyle
Editorial Mexicana - 1983

**09.- The Circular Fuctions**
Clayton W. Sodge.
Prentice - Hall, Inc - 1996

**10.- Plane and Advanced Trigonometry**
E. W. Hobson.

**DIRECCIONES WEB**

**1)** maestro.ucsc.cl/educacion/especiales/documentos/Unidad%202Geometr%EDa.doc - ...medición angular

**2)** http//www.pntic.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometri-cas_operaciones_identidades/angcual3.htm#Circunferencia

**3)** http://www.hp49gcompetition.com/uk/calculus/

**4)** dcc.puc.cl/gente/usuarios/beto/yud9.pdf - Longitud de Arco.

**5)** www.juntadeandalucia.es/.../iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/trigonometria/trigonometria.htm - 32k - ... Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

**6)** thales.cica.es/cadiz/edomac/trigonometria.pdf - ... Cálculo de las razones trigonométricas

**7)** personal5.iddeo.es/ztt/For/F7_Triangulos.htm - 14k - ... Resolución de triángulos

**8)** descartes.cnice.mecd.es/Geometria/Triangulos/ - 86k- Resolución de Triángulos Rectángulos.

**9)** usuarios.lycos.es/arquillos/tema01BC.htm - 25k - Relación entre las razones trigonométricas de ángulos de diferente cuadrante...

**10)** www.ucm.es/info/Geofis/practicas/trigonometria.htm - 24k - Circunferencia Trigonométrica

**11)** usuarios.lycos.es/calculo21/id352.htm - 32k - ... Funciones Trigonométricas de los números reales...

**12)** www.cnice.mecd.es/Descartes/ach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/identid.htm - 8k - Identidades trigonométricas

**13)** usuarios.lycos.es/calculo21/id355.htm - 14k - Números complejos. Ecuaciones trigonométricas. Misceláneas

**14)** www.sectormatematica.cl/proyectos/reduccion.htm - 18k - Reducción de las Funciones Trigonometricas. Al Primer Cuadrante.

**15)** usuarios.lycos.es/arquillos/tema02BC.htm - 18k Transformaciones de sumas y diferencias en productos.

**16)** www.monografias.com/trabajos11/traaprox/traaprox.shtml - 64k - Series trigonometricas

**17)** ma1.eii.us.es/miembros/rogodi/calculo/tema2_04-05.pdf - ... Sucesiones de funciones.

Impreso en los talleres gráficos de
MAQUETI E.I.R.L.
Jr. Carlos Arrieta 1319, Santa Beatriz, Lima 1

# NUEVA COLECCIÓN RACSO


***Más de una década aportando cultura***

RACSO EDITORES

*Calle Pira 650 - Los Olivos Telf.: 522-1634 E-mail: racsoeditores@peru.com*