Algunos Teoremas y sus Demostraciones

Juan Carlos Salazar

Introducción

En este trabajo se incluyen cuatro interesantes teoremas con sus demostraciones: Teorema de Fuss, Teorema de Gergonne-Anne, Teorema Japonés y también un teorema sobre las áreas de triángulos tangenciales, con el enunciado del Teorema de Euler para áreas [1].

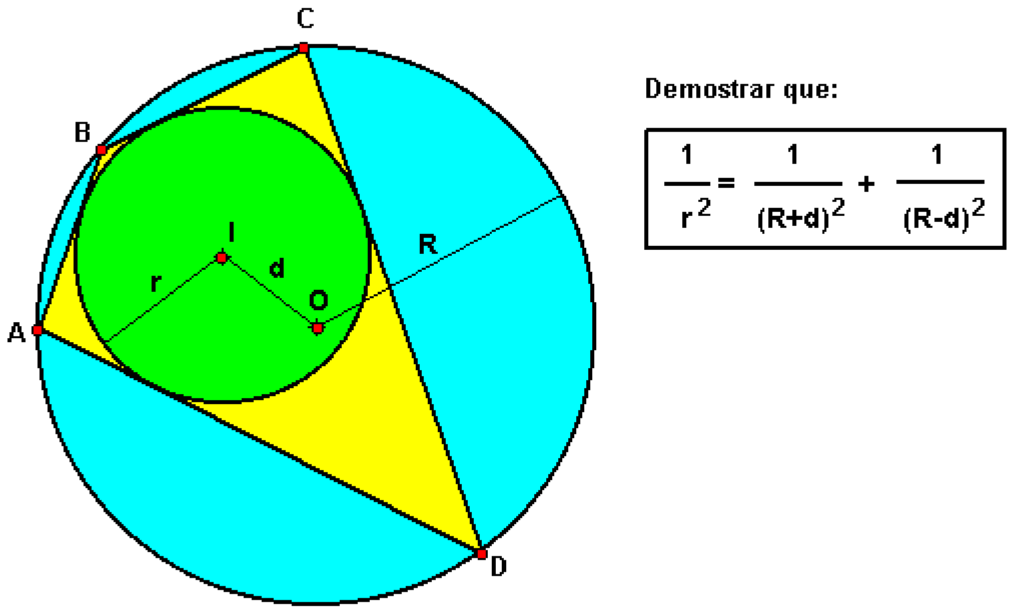
Espero que gracias a esta oportunidad que me brinda el Prof. Francisco Bellot, de presentarles este pequeño trabajo, el mismo sirva de aliciente para que nuestros estudiantes tomen interés en cultivar esta maravillosa rama de las matemáticas: la geometría.

Teorema de Fuss:

Sea ABCD un cuadrilátero bicéntrico de inradio r, circunradio R y distancia d entre incentro (I) y cicuncentro (O).

Demostrar que: $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$ (Ver Fig.1)

Fig. 1

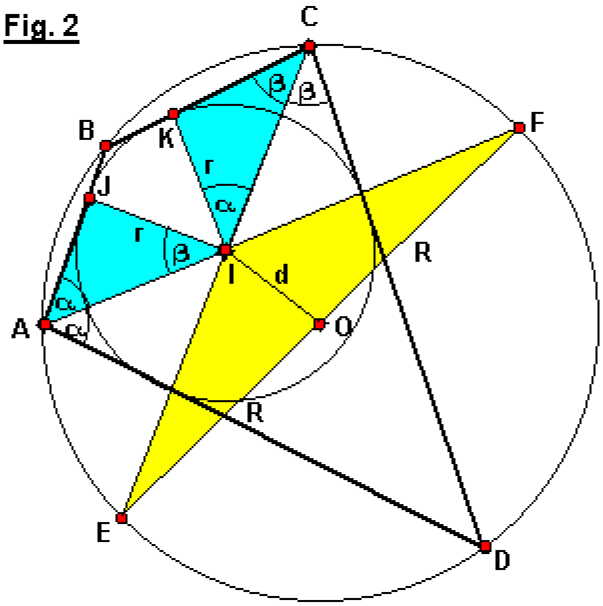


---

[1] Las demostraciones de los teoremas que aquí les presentamos, posiblemente sean inéditas para ustedes, aunque fueron desarrolladas durante el período 1974-77 en el cual impartía clases en la Academia Pre-Universitaria César Vallejo de Lima, Perú.

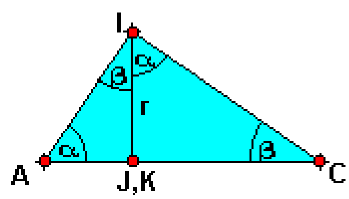
Demostración: Ver Fig. 2.

Fig. 2



Sabemos que $\hat{A}+\hat{C}=180°$ luego $\alpha+\beta=90°$. Si J y K son puntos de tangencia del incírculo con los lados AB y BC respectivamente. Luego los triángulos rectángulos AJI y KIC son semejantes con cateto común r (IJ = IK), uniendo los dos triángulos, formamos la siguiente figura:

Fig. 3



En el nuevo triángulo rectángulo AIC por propiedad geométrica:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{CI^2} \quad .... (1)$$

Prolongando AI y CI que cortan en F y E al circuncírculo respectivamente, entonces EF es diámetro debido a que, en sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos:
arco FE = arco FD + arco DE = $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$.
.
En el triángulo EIF aplicamos el teorema de Apolonio (teorema de la Mediana):

$$IE^2+IF^2=2.OI^2+\frac{EF^2}{2}=2(R^2+d^2) \text{..........(2)}$$

La potencia del punto I respecto al círculo de centro O: $AI.IF = CI.IE = R^2 - IO^2 = R^2 - d^2$

Luego: $$\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{CI^2}=\frac{(IE^2+IF^2)}{(R^2-d^2)^2} \quad .... (3)$$

Finalmente, combinando (1), (2) y (3): $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{(R+d)^2}+\dfrac{1}{(R-d)^2}$ QED.

Comentario:

Son conocidos otros métodos de demostración para este teorema, tales como por ejemplo, el que utiliza el concepto de lugar geométrico [1], otro que usa el concepto del porisma de Poncelet [2] y también el que usa el método de inversión [3], además de otros métodos analíticos [4]. Esta demostración que les he mostrado, me tomó casi tres meses obtenerla, con las herramientas propias de la época: un buen compás, una regla y un transportador, en nada parecido a cualquiera de los programas (software dinámico) que se usan hoy en día para el estudio de la geometría: Cabri II, Sketchpad, Wingeom, Cinderella, Euclidraw, etc., por mencionar algunos. Aquí tenemos: un método simple, elegante, métrico y "nuevo", que solo utiliza las herramientas de la geometría clásica euclidiana, así me lo han señalado recientemente varias personas versadas sobre este tema [5, 6, 7, 8], a quienes agradezco sus comentarios.

Teorema de Gergonne-Anne:

Sean ABC y $A_1B_1C_1$ dos triángulos con lados paralelos, uno dentro del otro, donde DEF es un triangulo inscrito y circunscrito a cada uno de ellos.
Demostrar que: $[DEF]^2 = [ABC]. [A_1B_1C_1]$, donde: [XYZ] = Area de XYZ.
Nota: También es equivalente enunciar que [DEF] es la media geométrica entre [ABC] y $[A_1B_1C_1]$.

Demostración: Ver Fig. 4

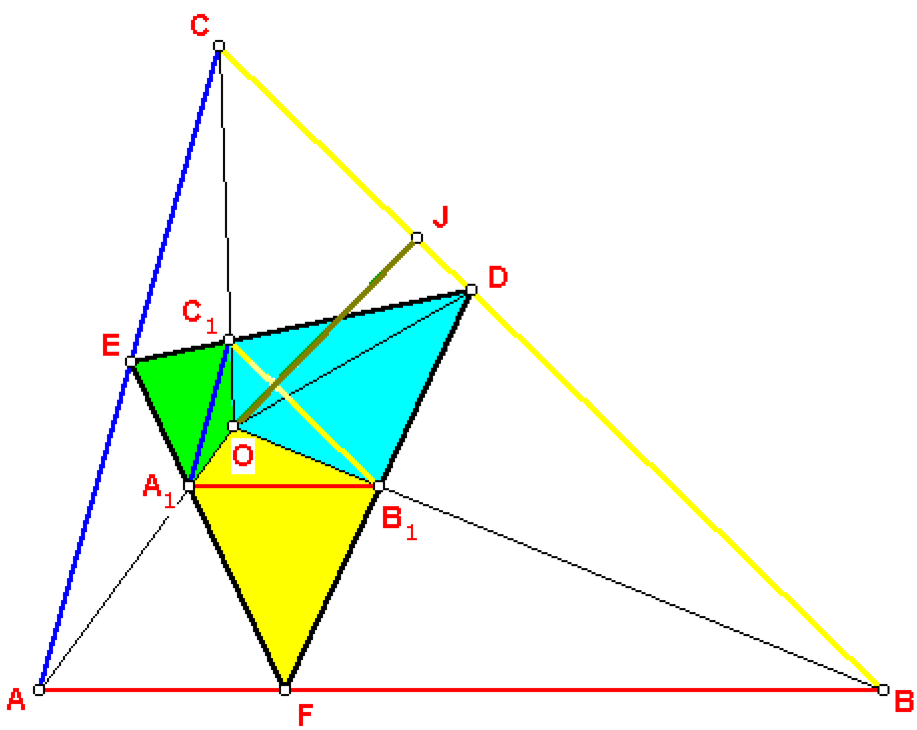


Fig. 4

Si los lados del triángulo ABC y A_1B_1 B_1 son paralelos, entonces AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto O, debido a que los triángulos son homotéticos.

Por la homotecia de centro O para ABC y A_1B_1 B_1:

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=k$$

Trazamos OJ ortogonal a BC, entonces:

$$\left[OB_1DC_1\right]=\frac{1}{2}B_1C_1.OJ$$

Luego:

$$\frac{\left[OBC\right]}{\left[OB_1DC_1\right]}=\frac{\frac{1}{2}BC.OJ}{\frac{1}{2}B_1C_1.OJ}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{1}{k}$$

También:

$$\frac{\left[OAB\right]}{\left[OA_1FB_1\right]}=\frac{\left[OBC\right]}{\left[OB_1DC_1\right]}=\frac{\left[OAC\right]}{\left[OC_1EA_1\right]}=\frac{1}{k}$$

Por la propiedad de proporciones:

$$\frac{\left[OAB\right]+\left[OBC\right]+\left[OAC\right]}{\left[OA_1FB_1\right]+\left[OB_1DC_1\right]+\left[OC_1EA_1\right]}=\frac{\left[ABC\right]}{\left[DEF\right]}=\frac{1}{k}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\left[ABC\right]^2}{\left[DEF\right]^2}=\frac{1}{k^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (I)$$

Por la homotecia:

$$\frac{\left[A_1B_1C_1\right]}{\left[ABC\right]}=k^2\ \ldots\ldots\ldots\ (II)$$

De (I) y (II):

$$\left[DEF\right]^2=\left[ABC\right].\left[A_1B_1C_1\right]\qquad \text{QED.}$$

Corolario 1:

El área de un triángulo es la media geométrica entre las áreas de su triángulo tangencial interno y su triángulo excentral. (Teorema de Weill).

Corolario 2:

El área de un cuadrilátero bicéntrico es la media geométrica entre las áreas de su cuadrilátero tangencial interno y su cuadrilátero excentral.

Comentario:

Son conocidas otras maneras de demostrar este teorema [3], pp765-766, además es interesante señalar que con el método aquí descrito, nosotros podemos fácilmente encontrar una generalización de este teorema para el polígono de "n" lados.

Teorema Japonés:

Sea el cuadrilátero ABCD inscrito en un círculo de centro O, con r_a, r_b, r_c y r_d como radios de los círculos inscritos en los triángulos ABD, ABC, BCD y ADC respectivamente.
Demostrar que: $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Demostración: Ver Fig. 5

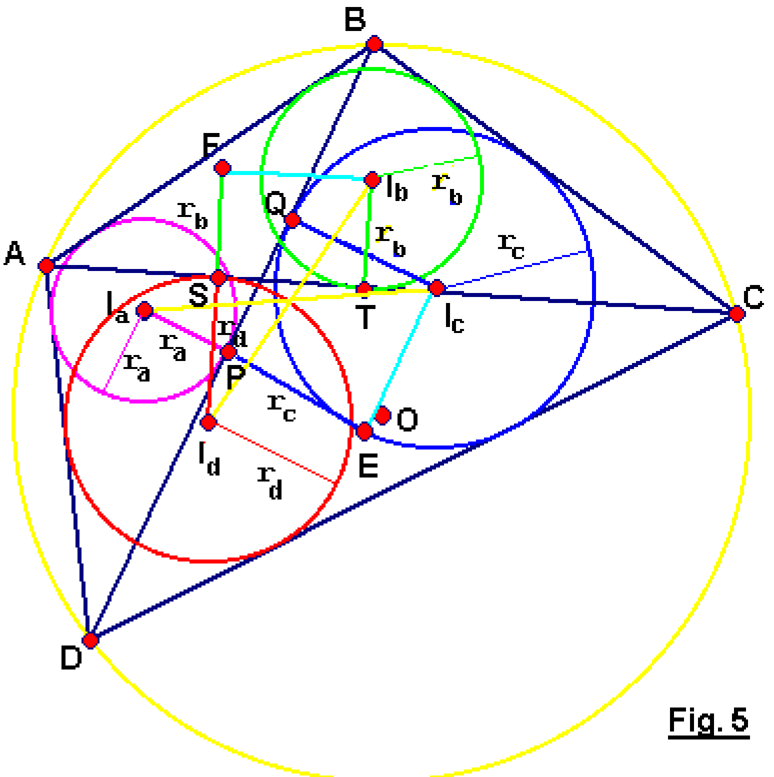


Fig. 5

Utilizaremos dos propiedades geométricas que se cumplen para todo cuadrilátero inscrito y que se mencionan a continuación:
Si denominamos a I_a, I_b, I_c e I_d incentros de los triángulos ABD, ABC, BCD y ADC respectivamente y además los puntos de tangencia S y T de los incirculos con centros I_b e I_d en la diagonal AC respectivamente y de manera similar los puntos de tangencia P y Q de los círculos con centros I_a e I_c en la diagonal BD, se cumple:
a) $I_aI_bI_cI_d$ es un rectángulo, b) los segmentos PQ y ST son congruentes.
Tenemos un rectángulo $I_aI_bI_cI_d$ cuyas diagonales son congruentes y también los segmentos formados por los puntos de tangencia PQ = ST.
Construimos los triángulos rectángulos I_aEI_c e I_bFI_d con: $I_cE = PQ = ST = I_bF$.
Ambos triángulos rectángulos tienen hipotenusas congruentes:
$I_aI_c = I_bI_d$ (diagonales del rectángulo $I_aI_bI_cI_d$),
También tienen como catetos: $I_cE = I_bF$, $I_aE = r_a + r_c$ e $I_dF = r_b + r_d$.
Como dichos triángulos rectángulos tienen una hipotenusa y un cateto congruentes, entonces ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto: $I_aE = I_dF$, luego: $r_a + r_c = r_b + r_d$ QED.

Comentario:

También se conocen otras formas de demostración, por ejemplo podemos indicar una reciente en la que se recurre al teorema de Thebault [9], otra en la que se utiliza el teorema de Carnot [10]. Obviando los métodos que usan trigonometría y los métodos analíticos.

Teorema: Sobre las Areas de Triángulos Tangenciales de un Triángulo.

Si tenemos un triángulo ABC, con incírculo I, y excírculos I_1, I_2, I_3, y denominamos al triangulo tangencial interno que tiene como vértices a los puntos de tangencia del incírculo con sus lados cuya área es S_0, cada triángulo tangencial externo tiene como vértices a los puntos de tangencia del excírculo respectivo con un lado y las prolongaciones de los lados adyacentes, cuyas áreas son S_1, S_2 y S_3, correspondientes a los excírculos I_1, I_2 e I_3 respectivamente.

Demostrar que: $\dfrac{1}{S_0} = \dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3}$ Ver Fig. 6.

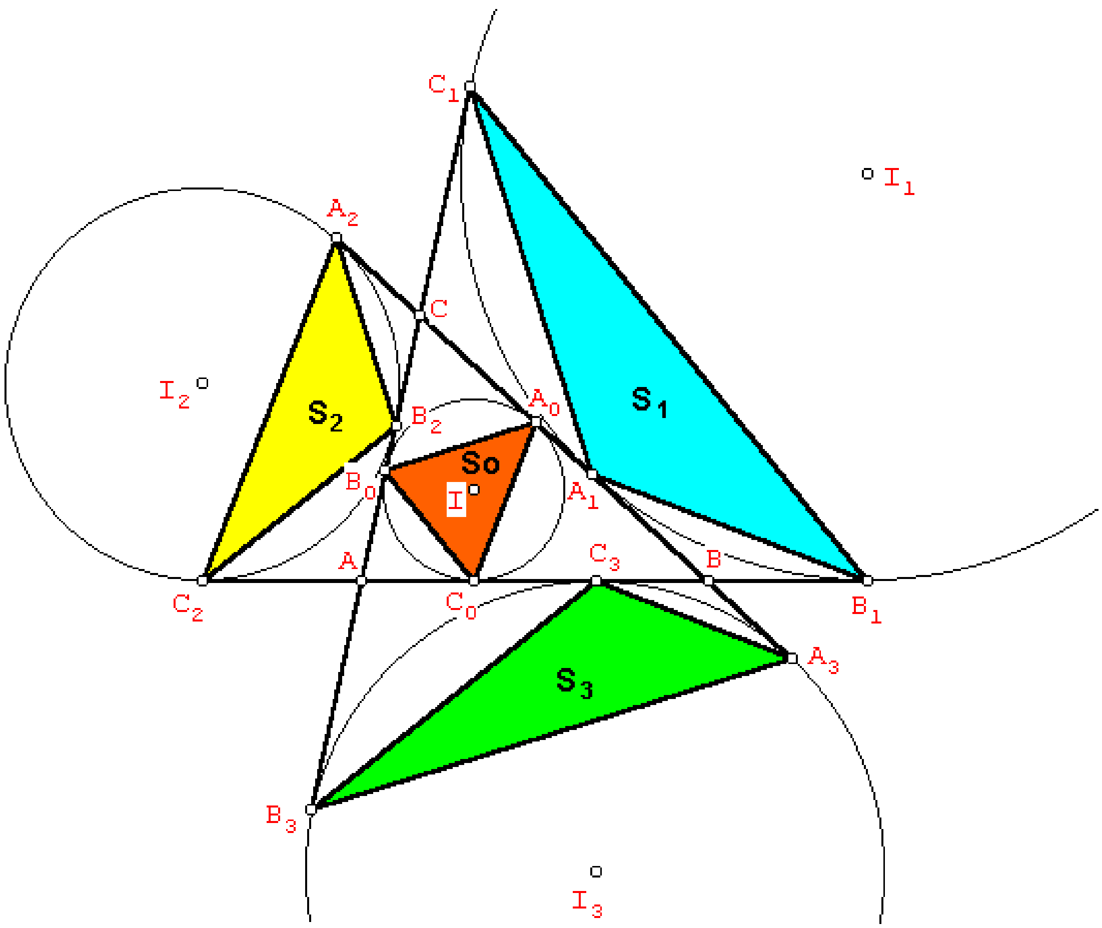


Fig. 6

Demostración: Ver Fig. 6

Considerando que las áreas de dos triángulos con ángulos suplementarios son proporcionales a los productos de los lados que conforman dichos ángulos, como $< A_0IB_0 + < C = 180º$, tenemos:

$$\frac{[IA_0B_0]}{[ABC]} = \frac{IA_0.IB_0}{BC.AC} = \frac{r^2}{a.b}$$

De forma similar:

$$\frac{[IB_0C_0]}{[ABC]} = \frac{IB_0.IC_0}{AC.AB} = \frac{r^2}{b.c}$$

$$\frac{[IA_0C_0]}{[ABC]} = \frac{IA_0.IC_0}{BC.AB} = \frac{r^2}{a.c}$$

Entonces:

$$\frac{[IA_0B_0]+[IB_0C_0]+[IA_0C_0]}{[ABC]} = \frac{r^2}{a.b} + \frac{r^2}{b.c} + \frac{r^2}{a.c} = \frac{r^2}{abc}(a+b+c)$$

Tomando en cuenta que: $S = [ABC] = \frac{abc}{4R} = \frac{r(a+b+c)}{2}$ donde R = circunradio, r = inradio y

$S_0 = [A_0B_0C_0] = [IA_0B_0] + [IB_0C_0] + [IA_0C_0]$

Entonces:

$$\frac{S_0}{S} = \frac{r}{2R} \quad ....(1)$$

Tomando el excírculo I_1, $< A_1I_1C_1 + < B = 180º$, tenemos:

$$\frac{[I_1A_1C_1]}{[ABC]} = \frac{I_1A_1.I_1C_1}{BC.AC} = \frac{r_1^2}{a.b}$$

Similarmente:

$$\frac{[I_1A_1B_1]}{[ABC]} = \frac{I_1A_1.I_1B_1}{BC.AB} = \frac{r_1^2}{a.c}$$

$$\frac{[I_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{I_1B_1.I_1C_1}{AC.AB} = \frac{r_1^2}{b.c}$$

También:

$$\frac{[I_1A_1C_1]+[I_1A_1B_1]-[I_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{r_1^2}{a.b} + \frac{r_1^2}{a.c} - \frac{r_1^2}{b.c} = \frac{r_1^2}{abc}(a+b-c)$$

Tomando en cuenta que: $S = [ABC] = \frac{abc}{4R} = \frac{r_1(a+b-c)}{2}$ donde: r_1 = radio del excírculo I_1 y

$S_1 = [A_1B_1C_1] = [I_1A_1C_1] + [I_1A_1B_1] - [I_1B_1C_1]$

Entonces:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{r_1}{2R} \quad ....(2)$$

De forma similar, para los triángulos tangenciales de los otros excírculos:

$$\frac{S_2}{S}=\frac{r_2}{2R} \quad .... (3)$$

$$\frac{S_3}{S}=\frac{r_3}{2R} \quad .... (4)$$

A partir de (1), (2), (3) y (4):

$$\frac{S}{S_1}+\frac{S}{S_2}+\frac{S}{S_3}=\frac{2R}{r_1}+\frac{2R}{r_2}+\frac{2R}{r_3}=2R\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{2R}{r}=\frac{S}{S_0}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{S_0}=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3} \qquad \text{QED.}$$

<u>Comentario:</u>

Este teorema también se puede demostrar con otros métodos [11], he conocido una demostración con el uso del teorema de Gergonne-Anne [8]. También se cumple: $S_0 = [A_0B_0C_0] = [A_1B_2C_3]$. Las relaciones obtenidas mediante este método se pueden obtener también aplicando el teorema de Euler [12] que establece una relación entre las áreas de un triángulo pedal correspondiente a un punto en un triángulo, que a continuación enunciamos, su demostración la dejamos como ejercicio para el estudiante.

<u>Teorema de Euler:</u>

Sea el triángulo ABC, con P un punto interior desde el cual trazamos las perpendiculares PA_1, PB_1, PC_1 sobre los lados BC, CA, AB.

Demostrar que: $[A_1B_1C_1]=\dfrac{(R^2-OP^2)}{4R^2}[ABC]$

Donde: O es circuncentro de ABC y R = circunradio de ABC.

Nota: Si el punto P es exterior el factor $(R^2 - OP^2)$ cambia a $(OP^2 - R^2)$.

<u>Referencias:</u>

[1] *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, §39 , pp. 188-193, H. Dörrie, Dover, 1965.
[2] *Vielecke, die einen Umkreis un einen Inkreis besitzen*, pp. 69-74, Arnulf Reuschel, Praxis der Mathematik 21, 1979.
[3] *Exercises de Géométrie*, F.G.-M., pp.837-839, 6th Edition 1920, J. Gabay reprint, Paris, 1991.
[4] *http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html*
[5] Ricardo Barroso C., Universidad de Sevilla, España, mensaje personal.
[6] Francisco Bellot Rosado, entrenador IMO España, mensaje personal.
[7] Nikolaos Dergiades, miembro de Hyacinthos, mensaje personal.
[8] Darij Grinberg, miembro de Hyacinthos, mensaje personal.
[9] An Application of Thebault's theorem, FG2002, Wilfred Reyes, *http://forumgeom.fau.com*
[10]Geometry Step by Step, Website de Antonio Gutierrez, *http://www.agutie.homestead.com*
[11]On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles, FG2004, J.C. Salazar, *http://forumgeom.fau.com*
[12]Problemas de Geometría-Planimetría, I. Shariguin, pp.112, Editorial MIR, 1989.

Juan Carlos Salazar
caisersal@yahoo.com

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI