P.B. GUSIATNIKOV

ALGEBRA VECTORIAL
EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS

ALGEBRA VECTORIAL en ejemplos y problemas

П. Е. Гусятников, С. В. Резниченко

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
в примерах и задачах

Москва «Высшая школа»

P. B. Gusiátnikov, S. V. Reznichenko

ALGEBRA VECTORIAL

en ejemplos y problemas

Editorial Mir Moscú

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000583-8

ÍNDICE

PREFACIO

El presente manual está escrito sobre la base de la experiencia de enseñar el álgebra vectorial en el Instituto Físico-Técnico de Moscú. Corresponde al programa del curso «Geometría analítica» para las facultades de física y matemática de universidades, institutos de pedagogía y centros docentes de enseñanza técnica superior de capacitación ampliada en matemática. En el manual se exponen detalladamente métodos de solución de los problemas geométricos, se usa el aparato del álgebra vectorial y la geometría analítica. Los principales conocimientos teóricos se exponen en forma abreviada que permite al estudiante aplicarlos directamente para resolver los problemas. A diferencia de la mayoría de los compendios existentes de problemas que hacen énfasis principalmente en el estudio y el entrenamiento de las operaciones formales con vectores, el quid del manual dado es el desarrollo de hábitos técnicos prácticos sobre la base de solución de problemas geométricos enjundiosos.

En el capítulo 1 se aducen conocimientos teóricos necesarios de la geometría elemental. En el capítulo 2 se examinan los vectores y las operaciones lineales con ellos, en el capítulo 3, el producto escalar de vectores. El material de estos capítulos corresponde al programa de las escuelas secundarias y puede utilizarse por los profesores y los alumnos para estudiar la geometría en grados superiores de la escuela. En el capítulo 4 se consideran los productos vectorial y mixto de vectores. Al final de este capítulo se dan principales problemas vectoriales de la recta y el plano, cuya solución exige la asimilación de todo el aparato del álgebra vectorial. En el Complemento se reúnen las principales propiedades de las transformaciones geométricas.

En cada párrafo, como regla, los ejemplos se sitúan conforme al crecimiento de su complejidad. Ejemplos más difíciles se marcan con asterisco. La solución del ejemplo empieza con el signo $\triangle$ y termina con el signo $\blacktriangle$. El comienzo y el fin de la demostración de un importante hecho teórico se marca con los signos $\square$ y $\blacksquare$, respectivamente.

Para el estudio más detallado de la teoría se puede hacer uso del manual: *D. Beklemíshev*. Curso de la geometría analítica y el álgebra lineal. M., 1980. Problemas y ejercicios para la resolución individual se comprenden en los libros: *S. Bajválov, P. Modénov, A. Parjómenko*. Compendio de problemas de la geometría analítica. M., 1964; *P. Modénov, A. Parjómenko*. Compendio de problemas de la geometría analítica. M., 1976. Algunos ejemplos de estos compendios se examinan en el presente manual.

Los autores

Capítulo 1

CONOCIMIENTOS DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

§ 1. Ciertas definiciones y designaciones necesarias

El segmento de la recta se define por dos puntos de valor equitativo: sus extremos. Un segmento con los extremos A y B se designa mediante $[AB]$ o bien $[BA]$. Si A y B son puntos diferentes (su designación es $A \neq B$), el segmento $[AB]$ define la recta (AB) del modo único. En este caso, al hablar del segmento $[AB]$ como de un conjunto de puntos, se considera que este conjunto contiene los puntos A y B y aquellos, y sólo aquellos, puntos C que están situados en la recta (AB) entre los puntos A y B. Si $A = B$, el segmento $[AA]$ se compone de un solo punto A.

Escogida la unidad de medición, a todo segmento $[AB]$ se le puede poner en correspondencia el número real no negativo $|AB|$ que se llama su *longitud*. Acordémonos considerar escogida la unidad de medición de las longitudes y, refiriéndonos a las longitudes de los segmentos, dejemos sin indicar las unidades de su expresión. La longitud del segmento $[AB]$ se denomina también *distancia entre los puntos A y B*.

Citemos las **propiedades de la distancia.**

1ª. $|AB| = |BA|$.

2ª. $|AB| > 0$ *si* $A \neq B$; $|AB| = 0$ *si* $A = B$.

3ª. *Un punto C se encuentra en el segmento $[AB]$* cuando, y sólo cuando, $|AC| + |CB| = |AB|$ (fig. 1.1).

4ª. *Para todo punto D que no se encuentra en el segmento $[AB]$ se cumple la desigualdad* $|AD| + |DB| > |AB|$ *llamada desigualdad del triángulo* (fig. 1.2).

Sea $A \neq B$. Un punto C, diferente de los extremos del segmento $[AB]$, se denomina punto interior de este segmento. Su posición en el segmento $[AB]$ se determina unívocamente por la longitud del segmento $|AC|$ o por la razón $\lambda = |AC| : |CB|$ que se denomina *razón en la cual el punto C divide el segmento $|AB|$ partiendo del punto A*. Si $\lambda = 1$, es decir $|AC| = |CB|$, el punto C se llama *punto medio del segmento $|AB|$*. Llámase punto medio del segmento $[AA]$ al punto A. Si O es punto fijado y a todo punto A se le pone en correspondencia un punto

Fig. 1.1

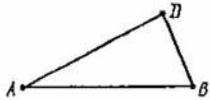


Fig. 1.2

$B = Z_O(A)$ tal que O es punto medio del segmento $|AB|$, Z_O se denomina *aplicación simétrica central respecto al punto O*. El punto O se llama centro de la simetría. Los puntos A y $Z_O(A)$ se denominan simétricos respecto al punto O.

Todo punto A situado en una recta l parte esta recta en dos *rayos* l_+ y l_- con el origen en el punto A. Estos

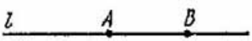


Fig. 1.3

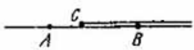


Fig. 1.4

rayos se denominan *complementarios* uno respecto al otro (se denota: $l_+ = \overline{l}_-$, $l_- = \overline{l}_+$). El punto A pertenece a cada uno de los rayos l_+ y l_-. Dos puntos $B \neq A$ y $C \neq A$ de la recta l pertenecen a un mismo rayo con origen en el punto $A \in l$ si, y sólo si, el segmento $|BC|$ no contiene el punto A, y pertenecen a los rayos complementarios si el punto A es punto interior de este segmento. Un rayo con origen en el punto A, en el cual se halla el punto $B \neq A$, se denota $[AB)$ (fig. 1.3).

Dos rayos situados en una recta se denominan *codirigidos* si su intersección es un rayo, y *contrariamente dirigidos*, si no lo es. Por ejemplo, en la fig. 1.4 los rayos $[AB)$ y $[CB)$ son codirigidos, y los rayos $[BA)$ y $[CB)$ son contrariamente dirigidos.

Toda recta l en un plano $\mathcal{P}$ parte este plano en dos *semiplanos* $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$ que, como se dice, *se definen por la recta* l. La recta l pertenece a cada uno de estos semiplanos. Dos puntos $B \notin l$ y $C \notin l$ del plano $\mathcal{P}$ se encuentran en un semiplano definido por la recta $l \subset \mathcal{P}$ si, y sólo si, el segmento $[BC]$ no tiene puntos comunes con la recta l.

Dos rayos $[AB)$ y $[CD)$, situados en rectas paralelas no coincidentes, pertenecen a un plano $\mathcal{P}$. Los rayos $[AB)$ y $[CD)$ se denominan *codirigidos* (se denotan: $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$)

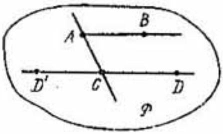


Fig. 1.5

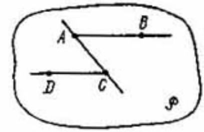


Fig. 1.6

si se hallan en un semiplano definido por la recta $(AC) \subset \subset \mathcal{P}$ (fig. 1.5) y *contrariamente dirigidos* (se denotan: $[AB)\uparrow\downarrow[CD)$) si se hallan en distintos semiplanos (fig. 1.6). Es obvio que si $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$, entonces $[\overline{AB})\uparrow\downarrow[CD)$. Dos rayos $[AB)$ y $[CD)$ son contrariamente dirigidos si, y sólo si, existe un punto O tal que $[CD) = Z_0([AB))$. La transitividad es una propiedad importante para el carácter codirigido de los rayos: *si dos rayos son codirigidos por separado a un tercero, son codirigidos uno respecto al otro.*

Sean $\mathcal{P}$ un plano, O, A, B sus tres puntos diferentes no situados en una recta. El punto B se halla en uno de dos semiplanos en que la recta (OA) parte el plano $\mathcal{P}$. Designemos este semiplano como $\mathcal{P}_+$. De modo análogo el punto A se sitúa en un semiplano $\mathcal{P}_-$ definido por la recta (OB) en el plano $\mathcal{P}$. Llámase *ángulo convexo* $\angle AOB$ *entre los rayos* $[OA)$ *y* $[OB)$ a la intersección de los conjuntos $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$ (fig. 1.7). La magnitud del ángulo convexo $\angle AOB$ se denomina *ángulo entre los rayos* $[OA)$ *y* $[OB)$ (se denota: $\widehat{AOB}$). Esta magnitud puede expresarse tanto en grados como en radianes. Además, en la medida de radianes $0 < \widehat{AOB} < \pi$ y en la de grados, $0° < \widehat{AOB} <$

$< 180°$. Sea que los rayos $l_1 = [OA)$ y $l_2 = [CD)$ no yacen en rectas paralelas. Del punto O sale el único rayo

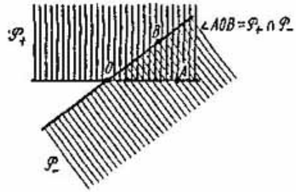


Fig. 1.7

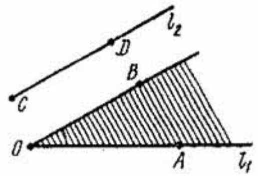


Fig. 1.8

$[OB)$ codirigido al rayo l_2. Se llama *ángulo entre los rayos* l_1 y l_2 el ángulo $\widehat{AOB}$ (fig. 1.8).

Por definición, el ángulo entre los rayos codirigidos es igual a 0°, el ángulo entre los rayos contrariamente dirigidos es igual a 180°.

§ 2. Transformación de semejanza. Desplazamiento

Una transformación p de un espacio (plano) se denomina *transformación de semejanza* si existe un número $k > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos A y B del espacio (plano) se cumple la igualdad $k \mid AB \mid = \mid p(A)\, p(B) \mid$. El número k se llama *coeficiente de la semejanza*.

Las propiedades de la transformación de semejanza se aducen en el Complemento.

Sea O un punto fijado, $k \neq 0$, un número real dado. Llámase *homotecia* H_O^k *con el centro* O *y el coeficiente* k a una transformación de un espacio (plano) para la cual la imagen de todo punto A del espacio (plano) es un punto B que satisface las siguientes exigencias:

a) los puntos A, O, B se hallan en una recta;

b) $\mid OB \mid = \mid k \mid \mid OA \mid$;

c) si $A \neq O$, $B \in [OA)$ para $k > 0$ y $B \in [\overline{OA})$ para $k < 0$.

Las propiedades de la homotecia se dan en el Complemento.

La transformación de semejanza con el coeficiente $k = 1$ se denomina *desplazamiento* (*transformación ortogonal*).

§ 3. Segmento dirigido. Traslación paralela

Se denomina *segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ a un par ordenado de puntos A y B. El punto A se llama *origen* del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, el punto B se llama su *fin*. En las figuras, el segmento dirigido se representa como la flecha que sale desde su origen y va hasta su fin (fig. 1.9). El segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$ se denomina *contrario* al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ (se denota: $-\overrightarrow{AB}$). Si los puntos A y B son diferentes, el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ se denomina *no nulo*; si los puntos A y B coinciden, el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ (más exactamente, $\overrightarrow{AA}$) se denomina *nulo* (se denota: $\overrightarrow{0_A}$). Llámase *longitud* $|\overrightarrow{AB}|$ del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ al valor $|AB|$.

Fig. 1.9

Un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ se denomina *paralelo a una recta* l (*plano* $\mathscr{P}$) si es nulo o la recta (AB) es paralela a l (plano $\mathscr{P}$). Un segmento dirigido no nulo $\overrightarrow{AB}$ se denomina *perpendicular a una recta* l (*plano* $\mathscr{P}$) si la recta (AB) es perpendicular a l (plano $\mathscr{P}$). Segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ se denominan *colineales* si existe una recta l tal que cada uno de estos segmentos es paralelo a ella. Para designar el paralelismo (la colinealidad) se usa el símbolo $\parallel$, la perpendicularidad, el símbolo $\perp$. Segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ se denominan *coplanares* si existe un plano $\mathscr{P}$ tal que cada uno de los segmentos es paralelo a éste. Si los segmentos dirigidos son colineales, son también coplanares. Si los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son perpendiculares a un plano $\mathscr{P}$, son también colineales: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se llaman *codirigidos* (se denotan: $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$) ora si uno de ellos es nulo, ora $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$, es decir, si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales y los rayos $[AB)$ y $[CD)$ son codirigidos. Dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se llaman *contrariamente dirigidos* (se denotan: $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$) ora si uno de ellos es nulo, ora $[AB)\downarrow\uparrow[CD)$.

Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ se denominan *iguales* si los puntos medios de los segmentos $[A_1B]$ y $[AB_1]$ coinciden (se denota: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$). De esta definición se deduce que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}. \tag{1.1}$$

Es obvio que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ si, y sólo si, $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1}$. Empleando la noción de la simetría central, se puede decir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ cuando, y sólo cuando, existe un

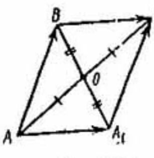


Fig. 1.10

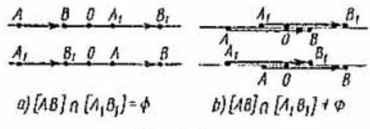


Fig. 1.11

punto O (el punto medio común de los segmentos $[A_1B]$ y $[AB_1]$ tal que $A_1 = Z_O(B)$, $B_1 = Z_O(A)$ (fig. 1.10 y 1.11).

De las propiedades de paralelogramo se desprende que los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ no pertenecientes a una recta son iguales si, y sólo si, el cuadrilátero ABB_1A_1 es paralelogramo (fig. 1.10). Para los segmentos dirigidos iguales $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ situados en una recta es posible una de las cuatro disposiciones dadas en la fig. 1.11 (*a*, *b*).

Así, la igualdad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ tiene lugar si, y sólo si: a) los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ son colineales; b) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A_1B_1}$; c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$.

Según la definición, un segmento dirigido nulo es igual a cualquier otro segmento dirigido nulo, y sólo al nulo. Todo segmento dirigido es igual a sí mismo. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. De la transitividad de las relaciones del paralelismo de las rectas, del carácter codirigido de los rayos, de la igualdad de los números reales se desprende que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. De este modo, la relación de la igualdad de segmentos dirigidos posee la propiedad de transitividad. Esta relación es *relación de equivalencia*, que parte el conjunto de los segmentos dirigidos en clases de equivalencia. Toda clase de equivalencia se caracteriza por lo que a ella le pertenecen todos los segmentos dirigidos iguales dos a dos, y sólo ellos.

Para cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ y cualquier punto C existe un punto D, y sólo uno, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (el punto D es simétrico al punto A con respecto al punto medio del segmento $[BC]$). El hecho de haber hallado un punto D tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se expresa por la siguiente frase: partiendo del punto C *está marcado* el segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$ igual a $\overrightarrow{AB}$. El punto D se denomina imagen del punto C en la *traslación paralela al segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ (se denota: $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$).

Las propiedades de la traslación paralela se dan en el Complemento.

§ 4. Adición de segmentos dirigidos. Composición de traslaciones paralelas

Se llama *suma* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ el segmento dirigido $\overrightarrow{AF}$ donde $F = T_{\overrightarrow{CD}}(B)$ (fig. 1.12). La operación de hallar la suma se denomina *adición* de segmentos dirigidos. Enunciemos las **leyes de adición de segmentos dirigidos** en forma de las siguientes afirmaciones.

I. $\overrightarrow{AB}+\vec{0}_C=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=$

$$=\vec{0}_A=\vec{0}_C.$$

II. *Si* $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

III. **Conmutatividad de adición.** *Para cualesquiera segmentos dirigidos* $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ *se cumple la igualdad* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$.

□ Sean F y H tales puntos que $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AB}$ (fig. 1.13). Esto significa que coinciden los puntos medios

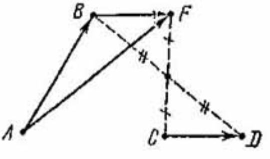


Fig. 1.12

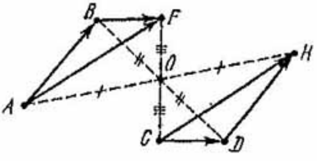


Fig. 1.13

de los segmentos $[BD]$ y $[CF]$, así como los de los segmentos $[BD]$ y $[AH]$. Por consiguiente, coinciden los puntos medios de los segmentos $[CF]$ y $[AH]$, es decir, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CH}$. Empero, por definición, $\overrightarrow{AF}$ es $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CH}$ es la suma $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$. ■

Si los puntos A y C coinciden, coinciden también los puntos F y H (los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{CH}$ son iguales, su origen es común y, por tanto, el fin también es común). Si los puntos $A=C$, B, $F=H$, D no se encuentran en una recta, el cuadrilátero $ABFD$ es paralelogramo. De este modo es válida la regla de paralelogramo (fig. 1.14): la suma de dos segmentos dirigidos no colineales $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ con el origen común A es el segmento dirigido $\overrightarrow{AF}$, donde $[AF]$ es la diagonal del paralelogramo $ABFD$ construido sobre los segmentos $[AB]$ y $[AD]$ tomados como lados.

Observación. Si $A \neq C$, entonces, según la definición de suma, los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ tienen orígenes distintos (A y C,

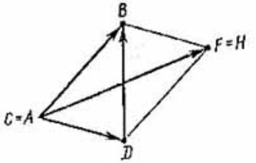


Fig. 1.14

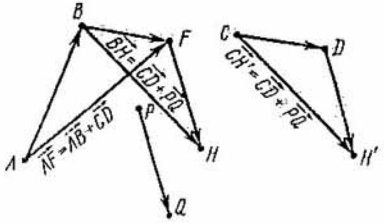


Fig. 1.15

respectivamente). Los segmentos $[AF]$ y $[CH]$ son diferentes, sin embargo, los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{CH}$ son iguales.

IV. *Si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C_1D_1}$, entonces $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$
$= \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

V. **Asociatividad de adición.** *Para cualesquiera segmentos dirigidos* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ *se cumple la igualdad*

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}). \qquad (1.2)$$

□ Sea $F = T_{\overrightarrow{CD}}(B)$, $H = T_{\overrightarrow{PQ}}(F)$ (fig. 1.15). Por la definición de suma, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ}$. Según la afirmación IV, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}$. Entonces, por la definición de suma, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ})$. Teniendo en cuenta la transitividad de la igualdad de segmentos dirigidos, obtenemos de aquí la igualdad (1.2). ■

Observación. Empleando la inducción, obtenemos de la afirmación V que el resultado de la adición de unos cuantos segmentos dirigidos no depende del lugar del paréntesis en la suma considerada. Por eso la suma de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$ se denota así:

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}.$$

En virtud de la afirmación III, no es importante el orden de los sumandos en esta suma.

Sea A_1, A_2, ..., A_n un conjunto finito de puntos. Una línea quebrada con los vértices consecuentes en

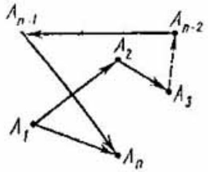


Fig. 1.16

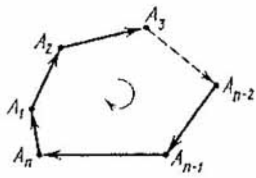


Fig. 1.17

estos puntos se llama *camino* que lleva del punto A_1 al punto A_n. Para todo camino es válida la regla de línea de cierre (fig. 1.16):

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Una línea quebrada cerrada $A_1A_2\ldots A_nA_1$ se denomina *ciclo*. Es cierta la siguiente regla de ciclo:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}_{A_1}. \quad (1.3)$$

Para indicar que la regla de ciclo se aplica para un ciclo $A_1A_2\ldots A_nA_1$, en la figura se representa la flecha dentro del ciclo (fig. 1.17).

Empleando las propiedades 6° y 8° de traslación paralela (véase Complemento), la regla de ciclo puede escribirse en el lenguaje de transformaciones de modo siguiente: la transformación

$T_{\overrightarrow{A_nA_1}}\circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}\circ\ldots\circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}}\circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ es transformación idéntica.

Llámase *diferencia* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ a un segmento dirigido $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. La operación de hallar la diferencia se denomina *sustracción*. La sustracción es operación inversa de la adición en el sentido siguiente. Si los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ son tales que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. En otras palabras, un segmento dirigido puede trasladarse de un miembro de la igualdad al otro con el signo contrario.

□ En efecto, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD}$, obtenemos, sumando el segmento dirigido $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ a los dos miembros de esta igualdad, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{MN} + \vec{0}_C = \overrightarrow{MN}$. ■

Si $ABFD$ es paralelogramo (véase fig. 1.14), el segmento dirigido $\overrightarrow{DB}$ (donde $[DB]$ es una diagonal del paralelogramo) es igual a la diferencia $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Es válida la **regla de abrir un paréntesis:**

$$(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{C_1D_1}) + \ldots + (\overrightarrow{A_nB_n} - \overrightarrow{C_nD_n}) =$$

$$= (\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}) - (\overrightarrow{C_1D_1} + \ldots + \overrightarrow{C_nD_n}).$$

§ 5. Multiplicación de un segmento dirigido por un número

Se llama *producto* $0 \cdot \overrightarrow{AB}$ *de un segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ *por el número* 0 el segmento dirigido nulo $\vec{0}_A$. Si $k \neq 0$, llamamos *producto* $k\overrightarrow{AB}$ *de un segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ *por un número* k al segmento dirigido $\overrightarrow{AC}$, donde $C = H_A^k(B)$ (fig. 1.18, *a*, *b*, *c*). La operación de hallar el producto $k\overrightarrow{AB}$ se denomina *multiplicación del segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ *por el número* k.

De este modo, el segmento dirigido $\overrightarrow{AC}$ es igual a $k\overrightarrow{AB}$ si, y sólo si:

a) los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son colineales;

b) $|\overrightarrow{AC}| = |k|\,|\overrightarrow{AB}|$;

c) $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, si $k \geqslant 0$, y $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, si $k < 0$.

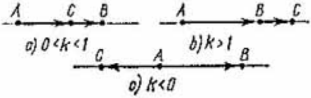


Fig. 1.18

Enunciemos las **leyes de multiplicación** en forma de las siguientes afirmaciones:

I. $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$; $(-1) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

II. *Si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *entonces* $k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

III. *Para cualesquiera números reales* k_1 *y* k_2 *se cumple la igualdad* $k_1(k_2\overrightarrow{AB}) = k_2(k_1\overrightarrow{AB}) = (k_1k_2)\overrightarrow{AB}$.

IV. *Si O es un punto arbitrario,* $k \neq 0$, *entonces* (fig. 1.19, *a*, *b*) $\overrightarrow{H_0^k(A)\,H_0^k(B)} = k\overrightarrow{AB}$.

□ La homotecia H_0^k es la transformación de semejanza con coeficiente $|k|$. Por eso $|\overrightarrow{H_0^k(A)\,H_0^k(B)}| = |k|\,|\overrightarrow{AB}|$. Debido a la 2ª propiedad de la homotecia (véase Complemento) los segmentos dirigidos $\overrightarrow{H_0^k(A)\,H_0^k(B)}$ y $\overrightarrow{AB}$ son colineales, con la particularidad de que son codirigidos si $k > 0$, y contrariamente dirigidos, si $k < 0$. De este modo $\overrightarrow{H_0^k(A)\,H_0^k(B)} = k\overrightarrow{AB}$. ■

V. *Para cualesquiera segmentos dirigidos* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ *y cualquier número real* k *es válida la igualdad* $k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$.

□ Cuando $k=0$, la afirmación es obvia. Sea $k\neq 0$. Consideremos un punto arbitrario O y designemos $A_1=T_{\overrightarrow{AB}}(O)$, $B_1=T_{\overrightarrow{CD}}(A_1)$, $A^*=H_O^k(A_1)$, $B^*=H_O^k(B_1)$ (fig. 1.20). Según la regla de línea de cierre, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB^*}=\overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*}$. De las igualdades $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{CD}$ se deduce que $k\overrightarrow{OA_1}=k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{CD}$ (la afirmación II) y que $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

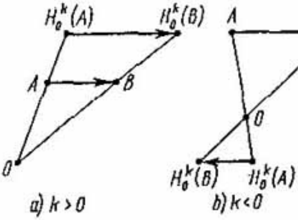


Fig. 1.19

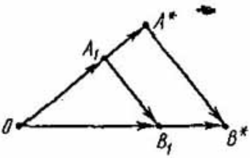


Fig. 1.20

(la afirmación IV del §4). Según la definición de la homotecia, $\overrightarrow{OA^*}=k\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB^*}=k\overrightarrow{OB_1}$. En fin, en virtud de la afirmación IV, $\overrightarrow{A^*B^*}=k\overrightarrow{A_1B_1}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{OB^*}=k\overrightarrow{OB_1}=k(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$, $\overrightarrow{OB^*}=\overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*}=k\overrightarrow{OA_1}+k\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$ y por eso $k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$. ■

VI. *Para cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ y cualesquiera números reales k_1 y k_2 es válida la igualdad* $(k_1+k_2)\overrightarrow{AB}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AB}$.

□ Es fácil comprobar esta afirmación al calcular las longitudes de los segmentos dirigidos que están en los miembros primero y segundo de la igualdad, teniendo en cuenta su orientación. ■

Las leyes de multiplicación enunciadas en las afirmaciones V y VI se denominan **leyes de distributividad**.

Capítulo 2
VECTORES. OPERACIONES LINEALES CON VECTORES

§ 1. Definiciones principales

Se denomina *vector en el espacio (plano)* a un conjunto de todos los segmentos dirigidos, iguales entre sí, cuyos orígenes y fines pertenecen al espacio (plano). Suelen designarse los vectores por las letras minúsculas $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ . . . Si los puntos A y B y el vector $\vec{a}$ son tales que $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, el vector $\vec{a}$ se denota de modo igual que el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, es decir, se escribe $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ o bien $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. En este caso se dice que el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ *representa* el vector $\vec{a}$ y, junto a la flecha que representa el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, se escribe $\vec{a}$ (fig. 2.1).

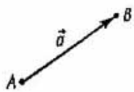


Fig. 2.1

Los segmentos dirigidos iguales (y sólo ellos) representan un mismo vector. Si un segmento dirigido $\overrightarrow{A'B'}$, al igual que $\overrightarrow{AB}$, representa el vector $\vec{a}$, la denotación

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \tag{2.1}$$

correspondiendo a las definiciones dadas, tiene el sentido doble: si los miembros primero y segundo (2.1) se conciben como segmentos dirigidos, esta denotación significa su igualdad (véase § 3 del cap. 1); si los dos miembros se conciben como vectores, la relación (2.1) significa la coincidencia de estos vectores, es decir, su igualdad como conjuntos.

Si el vector $\vec{a}$ se representa por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, entonces el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ se denomina vector *contrario* al vector $\vec{a}$ (se denota: $-\vec{a}$). Llámase vector *nulo* $\vec{0}$ al vector representado por los segmentos dirigidos nulos. Es evidente que $\vec{0} = -\vec{0}$. Se llama *longitud* $|\vec{a}|$ del vector $\vec{a}$ la longitud del segmento dirigido que lo representa. En particular, $|\vec{0}| = 0$. Los vectores $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$, . . ., $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_nB_n}$ se denominan *colineales* (*coplanares*) si son *colineales* (*coplanares*) los segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, . . ., $\overrightarrow{A_nB_n}$ que los representan. La colinealidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota así: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales se escribe $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Según esta definición, el vector nulo $\vec{0}$ es colineal a cualquier vector y es coplanar a cualesquiera dos vectores.

Un vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ se denomina *paralelo a una recta l* (*a un plano $\mathcal{P}$*) si el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ que lo representa es paralelo a l (al plano $\mathcal{P}$). Según la propiedad de transitividad de las rectas paralelas (en el plano y en el espacio) esta definición es correcta, o sea, no depende del modo de elegir el segmento dirigido que representa el vector $\vec{a}$. Un vector no nulo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ se denomina *perpendicular a una recta l* (*a un plano $\mathcal{P}$*) si el segmento dirigido (no nulo) $\overrightarrow{AB}$ que lo representa es perpendicular a l (al plano $\mathcal{P}$). Esta definición es correcta, puesto que si un segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, igual al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, representa el vector $\vec{a}$, entonces $(CD) \parallel (AB)$ y por eso $(CD) \perp l$ (correspondientemente $(CD) \perp \mathcal{P}$), es decir, el segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$ es perpendicular a l (al plano $\mathcal{P}$). Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a un plano $\mathcal{P}$, son colineales. Todo vector no nulo $\vec{a}$, perpendicular a un plano $\mathcal{P}$, se denomina *vector normal del plano $\mathcal{P}$*. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se llaman *codirigidos* (se denota: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) si son codirigidos los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ que los representan y se llaman *contrariamente dirigidos* (se denota $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$) si $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

Criterio de igualdad de vectores. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales (coinciden como conjuntos) si, y sólo si: a) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; b) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

En las fig. 2.2—2.7 se dan ejemplos de vectores iguales, colineales, coplanares que se representan por segmentos dirigidos en los cuerpos geométricos. En el paralelogramo $ABCD$ (fig. 2.2) son iguales los vectores de los lados

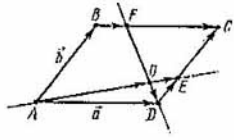


Fig. 2.2

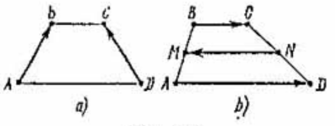


Fig. 2.3

opuestos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. En el trapecio isósceles $ABCD$ (fig. 2.3, *a*) los vectores de los lados laterales $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ no son iguales (no son colineales) aunque tienen longitud igual: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$. Los vectores de las

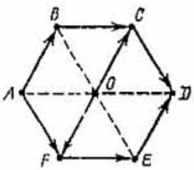


Fig. 2.4

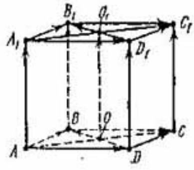


Fig. 2.5

bases $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ del trapecio $ABCD$ (fig. 2.3, *b*) y el vector de la línea media $\overrightarrow{NM}$ son colineales. Según la definición de trapecio estos vectores tampoco son iguales uno a otro (sus longitudes son diferentes). Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son codirigidos y son contrariamente dirigidos con respecto al vector $\overrightarrow{NM}$. En el hexágono regular $ABCDEF$ (fig. 2.4) los vectores de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{ED}$, así como el vector $\overrightarrow{OC}$, donde O es el centro del hexágono, son iguales, y $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{AB}$. De modo análogo, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 2.5) los vectores de las aristas laterales $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ son iguales dos a dos y al vector $\overrightarrow{OO_1}$ donde O y O_1 son los centros de las caras $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$, respectivamente. También son iguales los vectores de las diagonales: $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$. Los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ son coplanares (paralelos al plano $(ABCD)$). En el prisma triangular

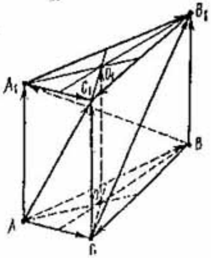


Fig. 2.6

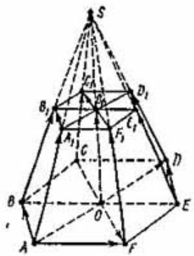


Fig. 2.7

$ABCA_1B_1C_1$ (fig. 2.6) los vectores de las aristas laterales $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ son iguales al vector $\overrightarrow{OO_1}$ donde O y O_1 son los centroides (puntos de intersección de las medianas) de las caras ABC y $A_1B_1C_1$, respectivamente. También son iguales los vectores de los lados correspondientes de las bases superior e inferior: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ son coplanares (paralelos al plano (ABC)). En la pirámide truncada hexagonal regular $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (fig. 2.7), en la cual $|A_1B_1| : |AB| = 1 : 2$, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$ son iguales. Los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{CF}$ son colineales y contrariamente dirigidos. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{D_1E_1}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{C_1F_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{FF_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$ (O y O_1 son los centros de las bases de la pirámide) son coplanares (paralelos al plano (CC_1F_1F)). Los vectores de las aristas laterales $\overrightarrow{BB_1}$ y $\overrightarrow{AA_1}$ no son colineales aunque son de la misma longitud. Los vectores $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ no son coplanares.

Sean $\vec{a}$ un vector, $\overrightarrow{AB}$ un segmento dirigido que representa este vector. Si $\overrightarrow{CD}$ es un segmento dirigido arbitrario que también representa el vector $\vec{a}$, entonces, según la definición del vector $\vec{a}$, tenemos $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, es decir, $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$. Por consiguiente, $\vec{a}$ es el conjunto de todos los segmentos dirigidos $\overrightarrow{CD}$, cuyos orígenes C son preimágenes y los fines D son imágenes de los puntos del espacio (plano) durante la traslación paralela $T_{\overrightarrow{AB}}$. Por eso se dice que el vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ es traslación paralela al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ y, para abreviar, la traslación paralela $T_{\overrightarrow{AB}}$ se denota de manera igual que el vector $\vec{a}$. En este caso, $\vec{a}$ se comprende como una transformación del espacio (plano). Sean $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ un vector, M un punto dado. Si en lugar del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ que representa el vector $\vec{a}$, para esta representación se usa el vector dirigido $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ con el origen en el punto M, entonces se dice que el vector $\vec{a}$ *se traza* del punto M. El punto M se denomina *origen* del vector $\vec{a}$, el punto N, su *fin*.

Todas las operaciones con segmentos dirigidos (en las que éstos pueden sustituirse por cualesquiera segmentos iguales a ellos conservándose el resultado de la operación) y también las propiedades de estas operaciones, se trasladan a los vectores.

§ 2. Suma de vectores. Diferencia de vectores

Si $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ es un vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ es un vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, entonces el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ se denomina *suma* de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (se denota: $\vec{a}+\vec{b}$). De la afirmación IV (§ 4 del cap. 1) se deduce que la definición dada de suma de vectores no depende del modo de elegir segmentos dirigidos que representan estos vectores.

Citemos las leyes de adición de vectores.

I. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(conmutatividad de adición).**

II. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **(asociatividad de adición).**

III. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

IV. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Estas leyes se desprenden de las afirmaciones III, V, I (§ 4 del cap. 1). En virtud de la asociatividad de adición, la suma de tres (y más) vectores puede escribirse omitiendo el paréntesis. Por ejemplo, para el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 2.8) el vector $\overrightarrow{AC_1}$ es suma $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$. Este hecho se llama **regla de paralelepípedo**: el vector $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ de la suma de tres vectores no coplanares $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se representa por una diagonal del paralelepípedo construido sobre los segmentos dirigidos que representan los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y tienen el origen común (para abreviar: construido sobre los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

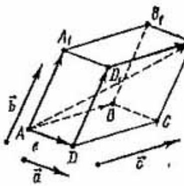


Fig. 2.8

Llámase *diferencia* $\vec{a}-\vec{b}$ de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ el vector $\vec{a}+(-\vec{b})$. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se representan por los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, respectivamente, su diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ se representa por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ (véase § 4 del cap. 1). Si $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, entonces $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$. Esta propiedad se desprende de la diferencia de segmentos dirigidos. Mostremos cómo se puede deducirla de las leyes de adición de vectores. Sumando el vector $-\vec{b}$ a los dos miembros de la igualdad $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, obtenemos $\vec{c}-\vec{b}=\vec{c}+(-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})+(-\vec{b})=$ $=\vec{a}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. De este modo, en las igualdades vectoriales se puede trasladar los sumandos de un miembro de la igualdad a otro cambiando sus signos por los opuestos.

Ejemplo 1. Demostrar la regla de abrir paréntesis:

$$(\vec{a}_1-\vec{b}_1)+(\vec{a}_2-\vec{b}_2)+\ldots+(\vec{a}_n-\vec{b}_n)=(\vec{a}_1+\vec{a}_2+$$
$$+\ldots+\vec{a}_n)-(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n).$$

$\triangle$ Según la definición de diferencia de vectores $(\vec{a}_1-\vec{b}_1)+(\vec{a}_2-\vec{b}_2)+\ldots+(\vec{a}_n-\vec{b}_n)=(\vec{a}_1+(-\vec{b}_1))+(\vec{a}_2+$ $+(-\vec{b}_2))+\ldots+(\vec{a}_n+(-\vec{b}_n))$. Designando la última expresión mediante $\vec{x}$ y omitiendo una parte de paréntesis (en correspondencia con acuerdo basado en la ley asociativa de adición) obtenemos $\vec{x}=\vec{a}_1+(-\vec{b}_1)+\vec{a}_2+$ $+(-\vec{b}_2)\ldots+\vec{a}_n+(-\vec{b}_n)$. Aplicando varias veces la ley conmutativa de adición, tenemos $\vec{x}=(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)+$ $+(-\vec{b}_1)+(-\vec{b}_2)+\ldots+(-\vec{b}_n)$.

Si sumamos $\vec{x}$ y la suma $(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n)$, usamos las propiedades asociativa y conmutativa de adición y n veces tomamos en consideración las leyes IV y III de adición de vectores, obtenemos

$$\vec{x}+(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n)=(\vec{a}_1+\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_n)+$$
$$+(-\vec{b}_1)+(-\vec{b}_2)+\ldots+(-\vec{b}_n)+\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+$$
$$+\vec{b}_n=(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)+(\vec{b}_1+(-\vec{b}_1))+$$
$$+(\vec{b}_2+(-\vec{b}_2))+\ldots+(\vec{b}_n+(-\vec{b}_n))=(\vec{a}_1+\vec{a}_2+$$
$$+\ldots+\vec{a}_n)+\vec{0}+\vec{0}+\ldots+\vec{0}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n.$$

Según la regla de traslación de sumandos de un miembro de la igualdad vectorial a otro, tenemos $\vec{x}=(\vec{a}_1+$ $+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)-(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n)$. $\blacktriangle$

Ejemplo 2. Sea O el centro del hexágono regular $ABCDEF$ (véase fig. 2.4). Hallar la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

$\triangle$ Las diagonales del hexágono regular intersecantes en el punto O se dividen en dos partes iguales por este punto. Los rayos $[OA)$ y $[OD)$ son contrariamente dirigidos. Por eso $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}$. De modo análogo, $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OF}$. De aquí, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$ y, por tanto, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF})=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. $\blacktriangle$

En el hexágono regular $ABCDEF$ se cumple también la iguildad $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. En efecto, ya que $ODEF$ es paralelogramo, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$ y, por consiguiente, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF})=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Ejemplo 3. Demostrar que: en el triángulo ABC las medianas $[AK]$, $[CM]$ y $[BN]$ se intersecan en un punto; si Q es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\vec{0}$.

$\triangle$ Sea Q el punto común de los segmentos $[AK]$ y $[CM]$ (fig. 2.9). Basándose en la propiedad de la línea media del triándulo, tenemos $(MK) \parallel (AC)$. Por lo tanto, los triángulos QMK y QCA son semejantes (por tres ángulos), por eso $|QC|:|MQ|=|QA|:|KQ|=|AC|:|MK|=2$.

De este modo, si en la mediana $[AK]$ tomamos un punto Q que parte el segmento $[AK]$ en la razón $2:1$ partiendo del vértice A, el punto Q se situará en la mediana $[CM]$ con tal que $|CQ|:|QM|=2:1$. Aplicando los razonamientos análogos con respecto a las medianas $[AK]$ y $[BN]$, vemos que el punto Q se encuentra en la mediana

$[BN]$ y la divide en la razón $|BQ| : |QN| = 2 : 1$. De aquí se deduce que las medianas del triángulo ABC se intersecan en un punto Q y para el punto P, simétrico al punto Q respecto al punto N (fig. 2.9), se cumple la igualdad $\overrightarrow{QB} = -\overrightarrow{QP}$. Puesto que $P = Z_N(Q)$, $A = Z_N(C)$, el cuadrilátero $AQCP$ es paralelogramo y por

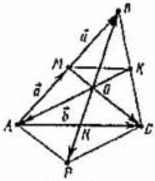


Fig. 2.9

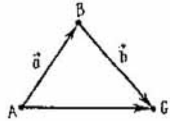


Fig. 2.10

eso $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QP}$. En definitiva, obtenemos $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QP} + (-\overrightarrow{QP}) = \vec{0}$. ▲

Ejemplo 4. Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son válidas las **desigualdades del triángulo**:

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|, \quad |\vec{a}-\vec{b}| \geqslant |\vec{a}| - |\vec{b}|. \quad (2.2)$$

Comprobar que: la igualdad $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ tiene lugar si, y sólo si, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; la igualdad $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ tiene lugar si, y sólo si, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ y $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}|$.

△ Si uno de los vectores $\vec{a}$ o $\vec{b}$ es nulo, estas desigualdades son evidentes. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos y sea que un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ representa el vector $\vec{a}$. Marquemos el vector $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ partiendo del punto B (fig. 2.10). Entonces el segmento dirigido $\overrightarrow{AC}$ representa el vector $\vec{a} + \vec{b}$. Basándonos en las propiedades 3ª y 4ª de la distancia (véase § 1 del cap. 1), obtenemos $|\vec{a}+\vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ con tal que igualdad tiene lugar si, y sólo si, $B \in [AC]$, es decir, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son codirigidos. Sustituyendo en la última desigualdad el vector $\vec{a}$ por el vector $\vec{a} - \vec{b}$, obtenemos $|\vec{a}| = |(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}| \leqslant |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{b}|$. Por consiguiente, $|\vec{a} - \vec{b}| \geqslant |\vec{a}| - |\vec{b}|$. Como se ha demostrado en lo anterior, la igualdad $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ tiene lugar si, y sólo si, los vectores $\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{b}$ son codirigidos, es decir, son codirigidos los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a} = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}$ y $|\vec{a}| = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{b}|$. ▲

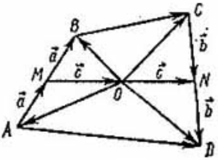


Fig. 2.11

Ejemplo 5. Sean A, B, C, D puntos de un espacio o un plano, M, el punto medio de $[AB]$, N, el punto medio de $[CD]$, O el punto medio de $[MN]$. Demostrar que: 1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$; 3) $|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$.

△ 1) Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ representan un mismo vector el que se designa $\vec{a}$. Análogamente, pongamos $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON} = \vec{c}$ (fig. 2.11). Entonces $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = (-\vec{c}) + (-\vec{a})$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}$. Por eso (véase el ejemplo 1), $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (-\vec{c}) + (-\vec{a}) + \vec{a} - \vec{c} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{b}) + (\vec{c} - \vec{c}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

2) Según la regla de línea de cierre, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$. De aquí $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = \vec{0} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + \vec{0} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$.

3) Sobre la base de la desigualdad de triángulo $|\overrightarrow{BC} +$

$+\overrightarrow{AD}| \leqslant |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}| = |BC| + |AD|$. Ya que $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$, se tiene $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MN}| + |\overrightarrow{MN}| = 2|MN|$ (véase el ejemplo 4). En definitiva, tenemos $2|MN| = |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}| \leqslant |BC| + |AD|$. ▲

Ejemplo 6. Demostrar que para cualquier vector $\vec{a}$ tiene lugar la igualdad $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

△ Sea $\vec{x} = -(-\vec{a})$. Entonces, basándose en las leyes IV y I de adición de vectores, $\vec{x} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Sumando el vector $\vec{a}$ con los dos miembros de esta igualdad, obtenemos $\vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{x} + (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{x} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$. ▲

§ 3. Multiplicación de un vector por un número. Criterio de colinealidad de vectores

Si $\vec{a}$ es un vector representado por un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ y k un número real, se llama *producto $k\vec{a}$ del vector $\vec{a}$ por el número k* al vector representado por el segmento dirigido $k\overrightarrow{AB}$. El producto $k\vec{a}$ se denota también por $\vec{a}k$. Para abreviar, si $k \neq 0$, el producto $\frac{1}{k}\vec{a}$ se escribe en la forma $\vec{a}/k$.

Citemos las leyes de multiplicación de un vector por un número.

I. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

II. $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$.

III. $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, si $k \geqslant 0$; $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, si $k \leqslant 0$.

Si k y m son números reales, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores, entonces:

IV. $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ (asociatividad de la multiplicación por un número).

V. $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$,
VI. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
} (distributividad de la multiplicación por número).

Estas leyes se desprenden directamente de las propiedades de la multiplicación del segmento dirigido por un número (véase § 5 del cap. 1).

Ejemplo 1. Demostrar la igualdad $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$, empleando las otras leyes de la multiplicación de un vector por un número.

△ En efecto, $\vec{0} = 0\cdot\vec{a} = (1 + (-1))\,\vec{a}$. Por eso $-\vec{a} = (-\vec{a}) + \vec{0} = (-\vec{a}) + (1 + (-1))\,\vec{a} = (-\vec{a}) + 1\cdot\vec{a} + (-1)\,\vec{a} = ((-\vec{a}) + \vec{a}) + (-1)\,\vec{a} = \vec{0} + (-1)\,\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$. ▲

Ejemplo 2. Demostrar que si $m\vec{a} + n\vec{b} = k\vec{a} + l\vec{b}$, entonces $(m-k)\,\vec{a} + (n-l)\,\vec{b} = \vec{0}$.

△ Al trasladar los vectores del segundo miembro de la igualdad $m\vec{a} + n\vec{b} = k\vec{a} + l\vec{b}$ al primero, obtenemos $(m\vec{a} - k\vec{a}) + (n\vec{b} - l\vec{b}) = \vec{0}$. Basándose en las leyes I y IV de la multiplicación de un vector por un número, se tiene $-k\vec{a} = (-1)\cdot(k\vec{a}) = (-k)\,\vec{a}$. Según la ley V, tenemos $m\vec{a} - k\vec{a} = m\vec{a} + (-k\vec{a}) = m\vec{a} + (-k)\,\vec{a} = (m-k)\,\vec{a}$. De modo análogo se puede demostrar que $n\vec{b} - l\vec{b} = (n-l)\,\vec{b}$. De este modo, $m\vec{a} + n\vec{b} = k\vec{a} + l\vec{b} \Leftrightarrow (m-k)\,\vec{a} + (n-l)\,\vec{b} = \vec{0}$. ▲

De las leyes II y III se desprende el **criterio de colinealidad de vectores**: un vector $\vec{b}$ es colineal a un vector no nulo $\vec{a}$ si, y sólo si, existe un número k tal que $\vec{b} = k\vec{a}$. El número k se determina unívocamente por los vectores colineales $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b}$: $|k| = |\vec{b}|/|\vec{a}|$ con tal que $k = |\vec{b}|/|\vec{a}|$ si $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ y $k = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$ si $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Ejemplo 3. Demostrar que, para vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la igualdad $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ se cumple cuando, y sólo cuando, $m = n = 0$.

△ Realicemos la demostración por el contrario. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no colineales tales que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ y $m \neq 0$. Entonces, $\vec{0} = (1/m)\,\vec{0} = (1/m)\,(m\vec{a} + n\vec{b}) = (1/m)\,(m\vec{a}) + (1/m)\,(n\vec{b}) = 1\cdot\vec{a} + (n/m)\,\vec{b} = \vec{a} -$

$-(-n/m)\vec{b}$, o sea, $\vec{a}=(-n/m)\vec{b}$ y, en virtud del criterio de colinealidad, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales. De este modo, resulta una contradicción. Análogamente se demuestra que la suposición $n\neq 0$ lleva también a la contradicción. ▲

En este ejemplo y en los posteriores no se indica qué leyes y en qué sucesión se usan.

Ejemplo 4. Demostrar que para vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ la igualdad

$$m_1\vec{a}+n_1\vec{b}=m_2\vec{a}+n_2\vec{b} \tag{2.3}$$

es equivalente al sistema de igualdades

$$m_1=m_2, \quad n_1=n_2. \tag{2.4}$$

△ Como se ha demostrado en el ejemplo 2, la igualdad (2.3) es equivalente a la igualdad $(m_1-m_2)\vec{a}+(n_1-n_2)\vec{b}=\vec{0}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales; por lo tanto, conforme al ejemplo 3, la relación obtenida es equivalente a dos igualdades: $m_1-m_2=0$ y $n_1-n_2=0$. ▲

Ejemplo 5. Vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. ¿Con qué x son colineales los vectores $\vec{c}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}=(2+3x)\vec{a}-2\vec{b}$?

△ El vector $\vec{c}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}$ es no nulo (si se tuviera $\vec{0}=\vec{c}=(x-1)\vec{a}+1\cdot\vec{b}$, entonces, en virtud de la no colinealidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y del resultado del ejemplo 3, tendrían lugar las igualdades $x-1=0$, $1=0$, es decir, habría una contradicción). Debido al criterio de la colinealidad, los vectores $\vec{d}$ y $\vec{c}$ son colineales si, y sólo si, existe un número y tal que $\vec{d}=y\vec{c}$, o sea, $(2+3x)\vec{a}-2\vec{b}=y(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. Por eso, en virtud del resultado del ejemplo 4, la igualdad obtenida es equivalente al sistema de ecuaciones $2+3x=y(x-1)$, $-2=y$, es decir, al sistema $x=0$, $y=-2$. Por consiguiente, los vectores

$\vec{c}$ y $\vec{d}$ son colineales si, y sólo si, $x = 0$, o sea, $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 2(\vec{a} - \vec{b})$. ▲

Sea que en un espacio o un plano se ha fijado un punto O llamado *polo*. Entonces, entre los puntos A del espacio (plano) y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ se pone la correspondencia biunívoca. El vector $\vec{r}_A$ representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{OA}$ se denomina *radio vector del punto A respecto al polo O*. El punto A se busca por el radio vector dado $\vec{r}_A$ como el fin del vector $\vec{r}_A$ trazado del polo O.

Ejemplo 6 (ecuación paramétrica vectorial de la recta). Sea que en un espacio o en un plano se ha fijado el polo O. Además, sea l una recta que pasa por dos puntos distintos dados A y B. Describir el conjunto de radio vectores de todos los puntos de la recta l.

△ Sean $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ radio vectores de los puntos A y B, respectivamente. Mediante $\vec{a}$ designemos el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, es decir, $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ (fig. 2.12). Designemos $\vec{r}$ el radio vector de un punto arbitrario M de la recta l. El punto M se encuentra en la recta l si, y sólo si, los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\vec{a}$ son colineales. Según el criterio de colinealidad, esto tiene lugar si, y sólo si, existe un número t (dependiente de M) tal que se cumple la igualdad $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}$. Puesto que $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_A$, el vector $\vec{r}$ es radio vector del punto $M \in l$ si, y sólo si, este radio puede representarse en la forma $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, donde $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. De este modo, el conjunto de todos los radio vectores de la recta l es conjunto de vectores de tipo

$$\vec{r} = \vec{r}_* + t\vec{a} \qquad (2.5)$$

donde $\vec{r}_* = \vec{r}_A$, $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, t es un número real arbitrario. El vector $\vec{a}$ se denomina *vector director de la recta l*, $\vec{r}_*$ se llama *radio vector del punto inicial de la recta l*, t, *parámetro* y la correlación (2.5), **ecuación paramétrica vectorial de la recta.** ▲

3*

La correlación (2.5) puede escribirse en forma $\vec{r} = (1-t)\vec{r}_A + t\vec{r}_B$ o en forma $\vec{r} = \tau\vec{r}_A + t\vec{r}_B$, donde t y τ son números reales arbitrarios unidos por la correlación $t + \tau = 1$. El sistema de ecuaciones $\vec{r} = \tau\vec{r}_A + t\vec{r}_B$, $t + \tau = 1$ representa paramétricamente la recta que

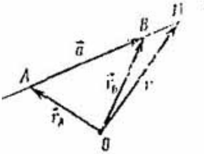


Fig. 2.12

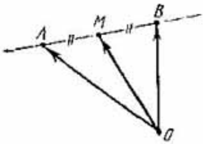


Fig. 2.13

pasa por los puntos A y B. Los números $t = t(M)$ y $\tau = \tau(M)$ se denominan *coordenadas baricéntricas del punto M en la recta (AB) orientada* (a lo largo del vector $\vec{a}$). Establezcamos el sentido geométrico del parámetro t en la correlación (2.5). Ya que $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}$, donde $t = t(M)$, se tiene $|\overrightarrow{AM}| = |t|\,|\vec{a}|$, es decir $|t| = |\overrightarrow{AM}| : |\vec{a}|$. El número t es positivo si el punto $M \neq A$ se sitúa en $[AB]$ o si $B \in [AM]$. El número t es negativo si $M \neq A$ y $A \in [MB]$. $t = 0$ si, y sólo si, M coincide con A.

Ejemplo 7 (problema de división de un segmento en la razón dada). Sean A y B distintos puntos dados por radio vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ con respecto a un polo O, λ un número positivo. Hallar el radio vector $\vec{r}_M$ de un punto M del segmento $[AB]$ que divide este segmento en la razón λ partiendo del punto A.

△ El punto M se sitúa entre los puntos A y B en la recta (AB). Por eso, $\vec{r}_M = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, donde $t = |AM|/|AB| > 0$. Según la condición, $\lambda = |AM|/|MB|$. Por consiguiente $|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + |AM|/\lambda = (\lambda + 1)|AM|/\lambda$. De este modo, $t = \lambda/(\lambda+1)$ y $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{1}{\lambda+1}\vec{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{r}_B$. La correlación

$$\vec{r}_M = (\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B)/(\lambda + 1) \qquad (2.6)$$

se llama **fórmula de la división de un segmento en la razón dada.** ▲

Cuando $\lambda = 1$, el punto M es el punto medio del segmento $[AB]$. El segmento $[OM]$ es mediana del triángulo OAB (fig. 2.13). El vector $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ es igual a $\vec{r}_A/2 + \vec{r}_B/2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})/2$.

Ejemplo 8. Empleando los vectores y operaciones con ellos, demostrar que las medianas del triángulo se intersecan en un punto que parte cada una de medianas en la razón $2:1$, partiendo del vértice.

△ Sea que, en el triángulo ABC, los puntos K y M son puntos medios de los lados $[BC]$ y $[AB]$, respectivamente, Q es el punto de intersección de las medianas $[AK]$ y $[CM]$ (véase fig. 2.9).

Designando $\lambda = |CQ|/|QM|$, $\mu = |AQ|/|QK|$, demostremos que $\lambda = \mu = 2$. Sea $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ (entonces $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$), $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Según la fórmula de la división del segmento $[CM]$ por el punto Q en la razón λ, tenemos $\overrightarrow{AQ} = (\vec{b} + \lambda\vec{a})/(\lambda + 1)$. Por lo tanto, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\mu} = (\mu + 1)/\mu\,((\vec{b} + \lambda\vec{a})/(\lambda + 1))$. El punto K parte el segmento $[CB]$ en la razón $1:1$, por eso $\overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})/2 = (\vec{b} + 2\vec{a})/2$. Comparando las expresiones obtenidas para el vector $\overrightarrow{AK}$, llegamos a la igualdad $\dfrac{\mu+1}{\mu}\,\dfrac{\vec{b}+\lambda\vec{a}}{\lambda+1} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{2}$. En virtud de la no colinealidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de aquí se deduce que $\dfrac{\mu+1}{\mu}\,\dfrac{1}{\lambda+1} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\mu+1}{\mu}\,\dfrac{\lambda}{\lambda+1} = 1$. Dividida una de estas igualdades en otra, obtenemos $\lambda = 2$. Por consiguiente, $(\mu + 1)\,\mu = 3/2$, es decir, $\mu = 2$. Así pues, queda demostrado que el punto Q que se sitúa en la mediana $[CM]$ y la parte en la razón $2:1$ se encuentra también en la mediana $[AK]$ y la parte en la misma razón. Análogamente se puede establecer que el mismo punto Q de la mediana $[CM]$ se sitúa también en la mediana $[BN]$ y la parte en la razón $2:1$, partiendo del vértice B. Por lo tanto, las tres medianas del triángulo ABC se intersecan en un punto que les parte en la razón $2:1$, partiendo del vértice. ▲

Ejemplo 9. Hallar por qué número k hay que multiplicar un vector no nulo $\vec{a}$ para que la longitud del vector $\vec{b} = k\vec{a}$ sea igual a la unidad con tal que: a) el vector $\vec{b}$ sea codirigido respecto al vector $\vec{a}$; b) el vector $\vec{b}$ sea contrariamente dirigido respecto al vector $\vec{a}$.

△ a) Ya que $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \Leftrightarrow k \geqslant 0$ (III), se tiene $k = |k| = |\vec{b}| : |\vec{a}| = 1/|\vec{a}|$ (II).

b) Tenemos $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \Leftrightarrow k \leqslant 0$. Por consiguiente, $-k = |k| = |\vec{b}|/|\vec{a}| = 1/|\vec{a}|$ y $k = -1/|\vec{a}|$.

De este modo, el vector $\vec{b} = \vec{a}/|\vec{a}|$ es codirigido al vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ y tiene longitud unitaria. Cualquier vector de la longitud unitaria se llama vector *unitario* (vector unidad). El vector $-\vec{a}/|\vec{a}|$ es unitario contrariamente dirigido respecto a vector $\vec{a}$. ▲

Ejemplo 10. En un triángulo ABC es trazada la bisectriz $[CD]$ del ángulo interior $\angle C$. Expresar el vector $\overrightarrow{CD}$ mediante los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ y sus longitudes.

△ Marquemos, partiendo del punto C, los vectores unitarios $\overrightarrow{CM} = \vec{e}_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ y $\overrightarrow{CN} = \vec{e}_2 = \vec{b}/|\vec{b}|$ (los puntos M y N se encuentran en los rayos $[CA)$ y $[CB)$ y la distancia entre estos puntos y el punto C es igual a 1). Consideremos el paralelogramo $CNPM$ construido sobre los segmentos dirigidos $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{CN}$ tomados como lados (fig. 2.14). Ya que $|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{CN}| = 1$, este paralelogramo es rombo. O sea, su diagonal $[CP]$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$. Los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ son colineales y, además, $\overrightarrow{CP} \neq \vec{0}$. Por eso existe un número x tal que $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CP} = x\vec{a}/|\vec{a}| + x\vec{b}/|\vec{b}|$. Por otro lado, el punto D parte el segmento $[AB]$ en una razón (todavía desconocida) $\lambda = |AD| : |DB|$. Por consiguiente, según la fórmula (2.6), $\overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \lambda\vec{b})/(\lambda + 1)$.

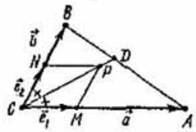


Fig. 2.14

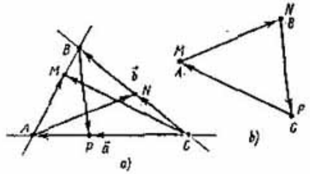


Fig. 2.15

Comparando las expresiones obtenidas para el vector $\overrightarrow{CD}$ y teniendo en cuenta la no colinealidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tenemos $x/|\vec{a}| = 1/(\lambda + 1)$, $x/|\vec{b}| = \lambda/(\lambda + 1)$. De aquí, $\lambda = |\vec{a}|/|\vec{b}|$, $\overrightarrow{CD} = (\vec{a} + (|\vec{a}|\vec{b})/|\vec{b}|)/(|\vec{a}|/|\vec{b}| + 1) = (|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a})/(|\vec{a}| + |\vec{b}|)$. Notemos que la igualdad $\lambda = |\vec{a}|/|\vec{b}|$ significa que la bisectriz del ángulo interior $\angle C$ del triángulo ABC parte el lado opuesto $[AB]$ en la razón $|AD| : |DB| = |CA| : |CB|$, es decir, en las partes proporcionales a los lados adyacentes al ángulo $\angle C$. ▲

Ejemplo 11. Dado un triángulo ABC. En las rectas (AB), (BC), (CA) están correspondientemente escogidos puntos M, N, P de tal modo que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$, donde α, β y γ son números reales. ¿Bajo qué condición necesaria y suficiente forman un triángulo los vectores $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{BP}$, o sea, $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$?

△ Sea $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ (fig. 2.15, *a*, *b*). Entonces, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \alpha(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{CN} = (1 - \beta)\vec{b}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\vec{a}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\vec{a} + (1-\beta)\vec{b}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -\vec{b} + \gamma\vec{a}$, por eso $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma-\alpha)\vec{a} + (\alpha-\beta)\vec{b}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, por eso $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ cuando, y sólo cuando, $\gamma-\alpha=0$, $\alpha-\beta=0$, o sea, cuando $\alpha = \beta = \gamma$. ▲

Ejemplo 12. En un triángulo ABC, puntos M, N y P son las bases de las bisectrices $[CM]$, $[AN]$ y $[BP]$, respectivamente, de los ángulos interiores del triángulo. Se conoce que $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$. Demostrar que ΔABC es regular.

△ Sea $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$. Entonces, según lo demostrado en el ejemplo 10, $\alpha = |AC|/(|AC| + |BC|)$, $\beta = |AB|/(|AB| + |AC|)$, $\gamma = |BC|/(|BC| + |AB|)$. En el ejemplo 11 se ha mostrado que de la igualdad $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ se desprenden las igualdades $\alpha = \beta = \gamma$, o sea, las igualdades: $|BC| : |AC| = 1/\alpha - 1 = |AC|/|AB| = 1/\beta - 1 = |AB|/|BC| = 1/\gamma - 1$. De estas igualdades obtenemos $|AC|^2 = |AB|\,|BC|$, $|AB|^2 = |AC|\,|BC|$. Al dividir la primera correlación entre la segunda término a término tenemos: $|AC|^3 = |AB|^3$, es decir, $|AC| = |AB|$. Por tanto, $|AC|^2 = |AC| \times |BC|$, o sea, $|AC| = |BC|$. ▲

Ejemplo 13. En los lados $[BC]$ y $[CD]$ de un paralelogramo $ABCD$ son tomados puntos E y F de tal modo que $|BF| : |FC| = \mu$, $|DE| : |EC| = \lambda$, donde λ y μ son números positivos dados (véase fig. 2.2). Las rectas (FD) y (AE) se intersecan en el punto O. Hallar la razón $|FO| : |OD|$.

△ Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. De las igualdades $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BF} + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{BF} = \frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BF}$ hallamos que $\overrightarrow{BF} = \mu\vec{a}/(\mu+1)$. De modo análogo tenemos $\overrightarrow{DE} = \lambda\vec{b}/(\lambda+1)$. Por tanto, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \lambda\vec{b}/(\lambda+1)$, $\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\mu\vec{a} : (\mu+1) - \vec{b} + \vec{a} = \vec{a}/(\mu+1) -$

$-\vec{b}$. Consideremos el ciclo $AODA$. Según la regla de ciclo

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}. \tag{2.7}$$

Los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OD}$ se desconocen. Sin embargo, son colineales a los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{FD}$, respectivamente, por eso existen números (desconocidos) x e y tales que $\overrightarrow{AO}=$ $=x\overrightarrow{AE}=x\vec{a}+\lambda x\vec{b}/(\lambda+1)$, $\overrightarrow{OD}=y\overrightarrow{FD}=y\vec{a}/(\mu+1)-$ $-y\vec{b}$. Sustituyendo las expresiones obtenidas en la igualdad (2.7), tenemos

$$\left(x\vec{a}+\frac{\lambda x\vec{b}}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{y\vec{a}}{\mu+1}-y\vec{b}\right)-\vec{a}-\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{\mu+1}-1\right)\vec{a}+\left(\frac{\lambda x}{\lambda+1}-y\right)\vec{b}=\vec{0}.$$

Puesto que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, obtenemos el sistema de ecuaciones $x+y/(\mu+1)=1$, $\lambda x/(\lambda+1)=$ $=y$. Al resolverla, hallamos

$$y=\frac{\lambda(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)},\quad x=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)}.$$

Por consiguiente,

$$|FO|:|OD|=(|FD|-|OD|):|OD|=\frac{|FD|}{|OD|}-1=$$

$$=\frac{1-y}{y}=\frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}.\ \blacktriangle$$

Indiquemos que en este ejemplo se ha obtenido también la expresión para la razón $|AO|:|OE|=x:(1-x)=$ $=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$.

§ 4. Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales

Una tabla $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ se denomina *matriz de segundo orden*. Los *elementos* α_1 y α_2 forman la primera *fila* de la matriz, β_1 y β_2, la segunda fila, α_1 y β_1, la primera *columna*, α_2 y β_2, la segunda columna de esta matriz. Una tabla

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

se denomina *matriz de tercer orden*. *Los elementos* α_1, α_2, α_3 forman su primera *fila*, α_1, β_1, γ_1, su primera *columna*, etc.

Consideraremos sólo las matrices que tienen o bien todas las filas (columnas) compuestas de números o bien una fila (columna) compuesta de vectores y las otras filas (columnas) de números. Para tales matrices se puede introducir el concepto de determinante de la matriz. Llámase *determinante* de una matriz $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ a una expresión $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ que se denota

$$\det A,\ \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$$

y se llama también *determinante de segundo orden*. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=-2;\ \begin{vmatrix}\vec{a} & -2\\ \vec{b} & 1\end{vmatrix}=\vec{a}\cdot1-(-2)\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}.$$

Se llama determinante de la matriz B de tercer orden (véase (2.8)) la expresión

$$\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)-$$
$$-\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1),$$

se denota

$$\det B,\ \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}\ \text{o bien}\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

y se denomina también *determinante de tercer orden*. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & -2\end{vmatrix} +$$

$$+ 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix} = ((-1)(-2) - (-3)\cdot 4) +$$

$$+ (2\cdot(-2) - (-3)\cdot(-3)) + (2\cdot 4 - (-1)\cdot(-3)) =$$

$$= 2 + 12 - 4 - 9 + 8 - 3 = 6;$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}\vec{b} & \vec{c}\\ 1 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{c}\\ -3 & 4\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b}\\ -3 & 1\end{vmatrix} = 2(4\vec{b} - \vec{c}) - (4\vec{a} + 3\vec{c}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) =$$

$$= -5\vec{a} + 5\vec{b} - 5\vec{c}.$$

Si todos los elementos de una fila (columna) de una matriz (determinante) se multiplican por un mismo número λ, se dice que la fila (columna) de la matriz (determinante) se multiplica por el número λ. Se llama *transposición* de una matriz a una operación que consiste en la sustitución de las filas de la matriz por las columnas y las columnas por las filas que tienen los números iguales. La matriz B transpuesta se denota mediante B^{T}. Por ejemplo, si B se define por la fórmula (2.8), entonces

$$B^T = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}.\ \text{Si}\ A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\ \text{y}\ A' = \begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2'\\ \beta_1' & \beta_2'\end{pmatrix}$$

son matrices de segundo orden, una de las cuales es numérica (compuesta completamente de números), se denomina *producto* AA' a la matriz

$$AA' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1' & \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' \end{pmatrix}.$$

Llámase *producto* BB' *de matrices* B *y* B' *de tercer orden*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix},$$

a condición de que una de ellas es numérica, a la matriz

$$BB' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1' + \alpha_3\gamma_1' & \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\gamma_2' & \alpha_1\alpha_3' + \alpha_2\beta_3' + \alpha_3\gamma_3' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \beta_3\gamma_3' \\ \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3' + \gamma_2\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$AA' = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A'A = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se llama *matriz unidad* E una matriz numérica en la cual todos los elementos diagonales son iguales a uno y los no diagonales son iguales a cero. La matriz unidad de segundo orden tiene la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de tercer orden, la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si S y E son matrices de un orden, E, matriz unidad, entonces $SE = ES = S$. Las matrices numéricas de un orden X e Y se llaman *inversas* una de otra y se denotan $Y = X^{-1}$, $X = Y^{-1}$, si $XY = YX = E$.

Citemos las propiedades de los determinantes.

1ª. $\det S = \det S^{\mathrm{T}}$.

$\square$ Si $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$, entonces $S^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$,

$$\det S=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1;$$

$$\det S^{\mathrm{T}}=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2=\det S.$$

$$\text{Si } S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}, \text{ se tiene } S^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}$$

$$\text{y } \det S=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-$$

$$-\alpha_3\beta_2\gamma_1=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}-\beta_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{vmatrix}+$$

$$+\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}=\det S^{\mathrm{T}}. \ \blacksquare$$

2ª. *Si dos filas de un determinante se mudan de lugar, el determinante cambia su signo.*

$\square$ Si $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$, $S'=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}$, entonces $\det S=$ $=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, $\det S'=\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1=-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=$ $=-\det S$.

$$\text{Si } S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix},\ S'=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}, \text{ entonces } \det S'=$$

$=\beta_1(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)-\beta_2(\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1)+\beta_3(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)=$ $=-\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)-\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=$ $-\det S$.

De modo análogo se puede comprobar que

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{vmatrix}. \ \blacksquare$$

3ª. *Si dos filas de un determinante son iguales, el determinante es igual a cero (vector nulo).*

. □ En efecto, si sustituimos una fila por otra igual, el determinante no cambia. Por otro lado, en virtud de la 2ª propiedad, el determinante cambia su signo. Empero, el único número (vector) que no varía al cambiar el signo es cero (vector nulo). ■

4ª. *Si dos columnas de un determinante se mudan de lugar, el determinante cambia de su signo. El determinante que tiene dos columnas iguales equivale a cero (vector nulo).*

□ Esto se desprende de las propiedades 1ª, 2ª y 3ª. ■

5ª. *Para los números arbitrarios λ y μ, es válida la igualdad*

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_2' & \lambda\alpha_3 + \mu\alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

si los tres determinantes tienen sentido, es decir si todos los α_1 y α_1', α_2 y α_2', α_3 y α_3' son simultáneamente ora números ora vectores.

□ El determinante que está en el el primer miembro de la igualdad es igual a

$$(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1') \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\lambda\alpha_2 + \mu\alpha_2') \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (\lambda\alpha_3 + \mu\alpha_3') \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda \left(\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) + \mu \left(\alpha_1' \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2' \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \alpha_3' \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

De modo análogo, para el determinante de segundo orden, tenemos

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

La 5ª propiedad se denomina **propiedad de linealidad del determinante respecto a la primera fila.** Empleando la 2ª propiedad, es fácil comprobar la linealidad del determinante respecto a cualquier fila. Cuando $\mu = 0$, de la 5ª propiedad se desprende que, al multiplicar una fila del determinante por un número, el mismo determinante se multiplica por este número:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda\gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

6º *Para cualquier matriz numérica* $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ *y cualesquiera números* λ *y* μ *se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\beta_1+\mu\gamma_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2+\mu\gamma_2 & \alpha_3+\lambda\beta_3+\mu\gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1+\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1 & \beta_2+\lambda\alpha_2+\mu\gamma_2 & \beta_3+\lambda\alpha_3+\mu\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1+\lambda\alpha_1+\mu\beta_1 & \gamma_2+\lambda\alpha_2+\mu\beta_2 & \gamma_3+\lambda\alpha_3+\mu\beta_3 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

□ Segun la 5ª propiedad, el primero de los determinantes es igual a la suma

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

en la cual el segundo y tercer sumando son iguales a cero conforme a la 3ª propiedad. Por tanto, la primera de las igualdades (2.10) queda demostrada. Las otras igualdades se deducen de la primera en virtud de la 2ª propiedad. Se dice que el primer (tercer, cuarto) determinante en (2.10) está obtenido del det S al sumar la primera (segunda, tercera) fila y la combinación lineal de las demás. La 6ª propiedad significa que, al sumar una fila del determinante de una matriz numérica y la combinación lineal de las demás filas, el determinante no cambia. ■

La igualdad análoga a (2.10) es válida también para los determinantes de matrices numéricas de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 + \lambda\alpha_1 & \beta_2 + \lambda\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

7ª. *El determinante posee la propiedad de linealidad respecto a cualquiera de sus columnas. Al multiplicar una columna del determinante por un número, el mismo determinante se multiplica por este número. Si sumamos una columna del determinante y la combinación lineal de otras columnas, el determinante no cambia.*

□ En virtud de la 4ª propiedad, esta propiedad se desprende de la 5ª y la 6ª. ■

8ª. *Si S y S' son matrices de un mismo orden y una de ellas es numérica, se tiene* $\det(SS') = \det S \det S'$.

□Sean $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ y $S' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ matrices de segundo orden. Entonces $\det(SS') = (\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1')(\beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2') - (\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2')(\beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1') = \alpha_1(\alpha_1'\beta_1\alpha_2' + \alpha_1'\beta_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_1\alpha_1' - \alpha_2'\beta_2\beta_1') - \alpha_2(\beta_2'\beta_1\alpha_1' + \beta_2'\beta_2\beta_1' - \beta_1'\beta_1\alpha_2' - \beta_1'\beta_2\beta_2') = \alpha_1\beta_2(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') - \alpha_2\beta_1(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = \det S \det S'$. Sea ahora

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}$$

y, para precisar, S es matriz numérica. Según la fórmula (2.9) y la 5ª propiedad, $\det(SS') = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$ donde

$$a=\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2'+\beta_2\beta_2'+\beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3'+\beta_2\beta_3'+\beta_3\gamma_3' \\ \gamma_1\alpha_1'+\gamma_2\beta_1'+\gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2'+\gamma_2\beta_2'+\gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3'+\gamma_2\beta_3'+\gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix}.$$

Los determinantes b y c se obtienen como resultado de la sustitución de la primera fila por las filas $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ y $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$, respectivamente, en el determinante a. Sumando en el determinante la segunda (tercera) fila y la primera multiplicada por $-\beta_1$ (correspondientemente por $-\gamma_1$) y empleando la definición del determinante de tercer orden y la 8ª propiedad demostrada para los determinantes de segundo orden, obtenemos

$$a=\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_2\beta_1'+\beta_3\gamma_1' & \beta_2\beta_2'+\beta_3\gamma_2' & \beta_2\beta_3'+\beta_3\gamma_3' \\ \gamma_2\beta_1'+\gamma_3\gamma_1' & \gamma_2\beta_2'+\gamma_3\gamma_2' & \gamma_2\beta_3'+\gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1'\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_2' & \beta_3'\\ \gamma_2' & \gamma_3'\end{vmatrix}-\alpha_2'\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1' & \beta_3'\\ \gamma_1' & \gamma_3'\end{vmatrix}+$$

$$+\alpha_3'\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1' & \beta_2'\\ \gamma_1' & \gamma_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\det S'.$$

De modo análogo se puede comprobar que $b=-\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}\times$ $\times\det S'$, $c=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\det S'$, por eso

$$\det(SS')=\left(\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\right)\det S'=$$
$$=\det S\det S'. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1. Empleando la 6ª propiedad calcular el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 10\end{vmatrix}$$

$\triangle$ De la segunda fila restamos la primera multiplicada por 2: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -3 & -6\\ 3 & 6 & 10\end{vmatrix}$. De la tercera fila restamos la primera multiplicada por 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} -$$

$$-4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 4\cdot 0 + 7\cdot 0 = -3. \ \blacktriangle$$

Señalemos que, utilizando la 1ª propiedad, se puede simplificar los últimos cálculos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-11) - (-6)\cdot(-6) = -3.$$

Ejemplo 2. Demostrar que si todos los elementos de una fila (columna) del determinante son iguales a cero (vector nulo), el determinante también lo es.

□ Si multiplicamos la fila (columna) dada por cero, el determinante, por lo visto, no cambia. Por otro lado, según las propiedades 5ª y 7ª, el determinante se multiplicará por cero, es decir, se igualará a cero (vector nulo). ▲

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ son números reales, tiene lugar **la identidad vinculada con tres determinantes:**

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\right)^2. \qquad (2.11)$$

□ El segundo miembro de la identidad (2.11) es igual a $(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$. Su primer miembro es igual a $\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 - (\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 + 2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_1\beta_1\alpha_3\beta_3 + 2\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3) = \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$, o sea, es igual al segundo miembro. ■

Tiene lugar el **lema de tres determinantes**: las igualdades

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.12)$$

se cumplen si, y sólo si, existen números λ y μ, no iguales a cero simultáneamente, tales que

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0,\quad \lambda\alpha_2+\mu\beta_2=0,\quad \lambda\alpha_3+\mu\beta_3=0. \qquad (2.13)$$

Además, si $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$, se tiene $\mu\neq 0$; si $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2>0$, se tiene $\lambda\neq 0$.

□ Sean cumplidas las relaciones (2.13) y, para mayor precisión, sea $\lambda\neq 0$. Entonces, $\alpha_1=-\nu\beta_1$, $\alpha_2=-\nu\beta_2$, $\alpha_3=-\nu\beta_3$, donde $\nu=\mu/\lambda$ y por eso $\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=-\nu\beta_2\beta_3+$ $+\nu\beta_3\beta_2=0$. De modo análogo se puede comprobar que $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0$.

Y viceversa, si se cumplen las relaciones (2.12), en virtud de la identidad (2.11), $AB-C^2=0$, donde $A=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$, $B=\beta_1^2+$ $+\beta_2^2+\beta_3^2$, $C=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$. Son posibles los siguientes casos:

a) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Entonces las relaciones (2.13) se cumplen cuando $\lambda=1$, $\mu=0$.

b) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$. Consideremos el trinomio cuadrado $p(t)=(t\alpha_1-\beta_1)^2+(t\alpha_2-\beta_2)^2+(t\alpha_3-\beta_3)^2=t^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)-$ $-2t(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)=At^2-2Ct+B=A(t-$ $-C/A)^2+B-C^2/A=A(t-C/A)^2$. Cuando $t=C/A$, el trinomio $p(t)$ se anula y por eso $C\alpha_1/A-\beta_1=C\alpha_2/A-\beta_2=$ $=C\alpha_3/A-\beta_3=0$, es decir, las relaciones (2.13) se cumplen para $\lambda=C/A$, $\mu=-1$. ■

Propiedades de los adjuntos. Si en un determinante escogemos algún elemento y suprimimos la fila y la columna del determinante, que contienen este elemento, el determinante quedado se denomina *menor complementario del elemento escogido*. El menor complementario multiplicado por (—1) en la potencia igual a la suma de los números de la fila y la columna suprimidas se denomina *adjunto algebraico del elemento escogido*. Por ejemplo, en el

determinante $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$ el adjunto del elemento β_3 es $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}$, puesto que el elemento β_3 se encuentra en la segunda fila y en la tercera columna.

Sea

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

una matriz numérica arbitraria; sean A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 adjuntos correspondientes a los elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en el determinante det S. Consideremos una matriz

$$S' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

que se obtiene de S de modo siguiente: en la matriz S todo elemento se sustituye por su adjunto y, después, la matriz obtenida se transpone. Demostremos que

$$SS' = S'S = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \text{ donde } \Delta = \det S.$$

Según la definición de producto de matrices, para hacerlo es necesario y suficiente verificar si se cumplen las siguientes igualdades:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \Delta, \quad \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0, \quad \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = 0; \qquad (2.16)$$

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = 0, \quad \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = \Delta, \quad \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 = 0; \qquad (2.17)$$

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0, \quad \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 = 0, \quad \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 = \Delta; \qquad (2.18)$$

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = \Delta, \quad \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = 0, \quad \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = 0; \qquad (2.19)$$

$$\alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = 0, \quad \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 = \Delta, \quad \alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 = 0; \qquad (2.20)$$

$$\alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 = 0, \quad \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 = 0, \quad \alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3 = \Delta. \qquad (2.21)$$

□ Las igualdades (2.16)—(2.21) se demuestran de modo igual. Por ejemplo, comprobemos las dos primeras entre las igualdades (2.16):

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta;$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \ \blacksquare$$

De la afirmación demostrada se deduce que para toda matriz numérica S de la forma (2.14), cuyo determinante $\Delta = \det S$ no es igual a cero, existe la matriz S^{-1} inversa de ella con tal que

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} A_1/\Delta & B_1/\Delta & C_1/\Delta \\ A_2/\Delta & B_2/\Delta & C_2/\Delta \\ A_3/\Delta & B_3/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix} \text{ y } \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

Si $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ es una matriz de segundo orden con la particularidad de que $\Delta = \det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, entonces la matriz inversa S^{-1} se define por la fórmula

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_2/\Delta & -\alpha_2/\Delta \\ -\beta_1/\Delta & \alpha_1/\Delta \end{pmatrix}, \ \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

Sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = m, \ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = n, \\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = p, \end{gathered} \tag{2.22}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son números dados; m, n y p son ora números dados, ora vectores; x, y, z son variables (numéricas si m, n, p son números y vectoriales si m, n, p son vectores). La matriz $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ se denomina *matriz del sistema* (2.22).

Mediante S' designemos la matriz compuesta de los adjuntos [véase (2.14), (2.15)] de los elementos de la matriz S. Tomemos $\Delta = \det S$.

Sea $(x; y; z)$ solución del sistema (2.22). Sumando la primera de estas ecuaciones multiplicada por A_1, la segunda multiplicada por B_1 y la tercera multiplicada por C_1, obtenemos, en virtud de (2.19),

$$x\Delta = mA_1 + nB_1 + pC_1 = \begin{vmatrix} m & \alpha_2 & \alpha_3 \\ n & \beta_2 & \beta_3 \\ p & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_x \qquad (2.23)$$

(la última de las igualdades (2.23) es definición de Δ_x).

Multiplicando la primera ecuación del sistema (2.22) por A_2, la segunda por B_2, la tercera por C_2 y sumando las ecuaciones obtenidas, obtenemos, en virtud de (2.20),

$$y\Delta = mA_2 + nB_2 + pC_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & m & \alpha_3 \\ \beta_1 & n & \beta_3 \\ \gamma_1 & p & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_y. \qquad (2.24)$$

De modo análogo tenemos

$$z\Delta = mA_3 + nB_3 + pC_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & m \\ \beta_1 & \beta_2 & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & p \end{vmatrix} = \Delta_z. \qquad (2.25)$$

Teorema 1 (regla de Cramer). *Si el determinante Δ de la matriz S del sistema de ecuaciones* (2.22) *no es igual a cero, este sistema tiene solución única $(x; y; z)$ determinada por las siguientes fórmulas:*

$$x = \Delta_x/\Delta, \quad y = \Delta_y/\Delta, \quad z = \Delta_z/\Delta. \qquad (2.26)$$

□ Como se ha mostrado en lo anterior, la unicidad de la solución se desprende de lo que toda solución $(x; y; z)$ del sistema (2.22) satisface las igualdades (2.23), (2.24), (2.25) y por eso tiene la forma (2.26). Queda por comprobar que las fórmulas (2.26) determinan efectivamente la solución del sistema (2.22). Sustituyendo las expresiones (2.26) en el primer miembro de la primera ecuación del sistema (2.22), en virtud de las igualdades (2.16), (2.17) y

(2.18), tenemos

$$\alpha_1(\Delta_x/\Delta)+\alpha_2(\Delta_y/\Delta)+\alpha_3(\Delta_z/\Delta)=(1/\Delta)(\alpha_1 mA_1+$$
$$+\alpha_1 nB_1+\alpha_1 pC_1+\alpha_2 mA_2+\alpha_2 nB_2+\alpha_2 pC_2+\alpha_3 mA_3+$$
$$+\alpha_3 nB_3+\alpha_3 pC_3)=\frac{1}{\Delta}\{(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3)m+$$
$$+(\alpha_1B_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3B_3)n+(\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_3C_3)p\}=m.$$

De este modo, x, y y z definidos por las fórmulas (2.26) satisfacen la primera de las ecuaciones del sistema (2.22). Análogamente, se puede comprobar que x, y y z satisfacen también la segunda y la tercera ecuaciones (hágase esta comprobación en calidad de ejercicio). ■

El teorema demostrado significa que si m, n, p se expresan mediante x, y, z por las fórmulas (2.22) con ayuda de los elementos de la matriz S (2.14), entonces x, y, z se expresan mediante m, n, p por las fórmulas (2.26) con ayuda de los elementos de la matriz S' (2.15) [véase (2.23), (2.24), (2.25)].

El sistema de ecuaciones (2.22) se llama *homogéneo* si $m=n=p=0$. Si $\Delta\neq 0$, el sistema homogéneo (2.22) tiene solución única $x=y=z=0$ que se llama *trivial*. Cualquier solución $(x;\ y;\ z)$ de un sistema homogéneo se denomina *no trivial* cuando $x^2+y^2+z^2>0$.

Teorema 2 (sobre la existencia de la solución no trivial de un sistema homogéneo de ecuaciones). *Un sistema de ecuaciones lineales*

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z=0,\quad \beta_1x+\beta_2y+\beta_3z=0,$$
$$\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z=0 \tag{2.27}$$

tiene solución no trivial cuando, y sólo cuando, $\Delta=0$.

□ Si existe la solución no trivial del sistema (2.27), entonces $\Delta=0$; en caso contrario el sistema (2.27) tendría solución única: la trivial (regla de Cramer).

Inversamente: sea $\Delta=0$. Entonces si A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 son adjuntos de los elementos α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, respectivamente, de la matriz S del sistema (2.27), en virtud de las igualdades (2.16), (2.17) y (2.18), los juegos $(A_1;\ A_2;\ A_3)$, $(B_1;\ B_2;\ B_3)$, $(C_1;\ C_2;\ C_3)$ son soluciones del sistema (2.27). Si por lo menos una de estas soluciones es no trivial, el teorema queda demostrado.

Consideremos el caso cuando $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Si todos los elementos de la matriz S son iguales a cero, el sistema (2.27) tiene solución no trivial (lo satisfacen cualesquiera números x, y, z). Si existen elementos de la matriz S no iguales a cero, entonces, cambiando (si es necesario) de lugares las ecuaciones del sistema (2.27) se puede considerar, sin limitar la comunidad, que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. Ya que

$$B_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

debido al lema de tres determinantes, existe un número $\nu \neq 0$ tal que $\gamma_1 = \nu\alpha_1$, $\gamma_2 = \nu\alpha_2$, $\gamma_3 = \nu\alpha_3$, es decir, la tercera ecuación del sistema se obtiene de la primera al multiplicar sus dos miembros por el número ν y, por consiguiente, se deduce de la primera ecuación. De modo análogo, de las igualdades $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ resulta que la segunda de las ecuaciones del sistema (2.27) se deduce de la primera. O sea, en el caso considerado, el sistema (2.27) es equivalente a su primera ecuación (más exactamente, a aquella de sus ecuaciones en la cual no todos los coeficientes son iguales a cero). Queda por comprobar que la ecuación $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ tiene solución no trivial, lo que es obvio: si $\alpha_1 = 0$, entonces $(1; 0; 0)$ es solución de la ecuación dada; si $\alpha_1 \neq 0$, la solución de la ecuación dada es $(\alpha_2/\alpha_1; -1; 0)$. ■

§ 5. Criterio del carácter coplanar de vectores. Base en el plano y en el espacio. Descomposición de un vector según una base

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no colineales. Tracémoslos partiendo de un punto: $\overrightarrow{OA} = \vec{\ }$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (fig. 2.16). Por medio de $\mathcal{P}$ designemos elpalano determinado por los puntos O, A, B. Por definición, cualquier vector $\vec{c}$, coplanar a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es paralelo al plano $\mathcal{P}$. Si construimos el vector $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, el punto C pertenecerá al plano $\mathcal{P}$. Tracemos por el punto C la recta l paralelamente a la recta (OB). Ya que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, las rectas l y (OA) se intersecarán en un punto D. Los vectores $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OA}$ son colineales y, además, $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$. En virtud del criterio de colinealidad de vectores, existe un número real x tal que $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$. De modo análogo, existe un número y tal que $\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{OB}$. Por eso, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, es decir,

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{2.28}$$

El par ordenado de vectores no colineales $\vec{a} \parallel \mathcal{P}$ y $\vec{b} \parallel \mathcal{P}$ se denomina *base del plano* $\mathcal{P}$ (se denota: $\{\vec{a}, \vec{b}\}$). Todo vector $\vec{c}$, coplanar con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que forman la base, puede representarse en la forma (2.28). Los números x e y se llaman *coordenadas del vector* $\vec{c}$ *en la base* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ y la propia igualdad (2.28) se llama *descomposición del vector* $\vec{c}$ *según la base* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. El hecho de que los números x e y son las coordenadas del vector $\vec{c}$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ se denota del modo siguiente: $\vec{c} = (x; y)$.

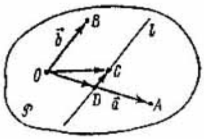


Fig. 2.16

Ejemplo 1. Demostrar que la descomposición de un vector $\vec{c}$ según una base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es única.

☐ Sea $\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ una descomposición, diferente de (2.28), del vector $\vec{c}$ según la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Entonces, debido a la no colinealidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tenemos (véase el ejemplo 4, § 3 de este capítulo) $x = x'$, $y = y'$. Resulta una contradicción. ■

Ejemplo 2 (criterio del carácter coplanar). Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores de un espacio unidos mediante la relación (2.28), donde x, y son números reales. Demostrar que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares.

☐ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales, es decir, paralelos a una recta l, los vectores $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, y también el vector

$\vec{c}$, suma de $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$, son paralelos a esta recta. Por tanto, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos a cualquier plano que contenga la recta l.

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, los marquemos partiendo de cierto punto O (fig. 2.16): $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Designemos el plano (OAB) mediante $\mathcal{P}$. En la recta (OA) tomemos el punto D así que $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$. Tracemos, partiendo del punto D, el segmento $\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{OB}$ que sea paralelo al plano $\mathcal{P}$ siendo paralelo a la recta (OB). Su origen D está en el plano $\mathcal{P}$ y, por consiguiente, el fin C se sitúa también en el plano $\mathcal{P}$. De este modo, el origen y el fin del segmento dirigido $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ se encuentran en el plano $\mathcal{P}$, significando que el vector $x\vec{a} + y\vec{b}$, representado por $\overrightarrow{OC}$, o sea, el vector $\vec{c}$, es paralelo al plano $\mathcal{P}$ y, por lo tanto, es coplanar con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ■

Ejemplo 3. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares. Demostrar que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0. \qquad (2.29)$$

□ Si por lo menos uno de los números en la igualdad $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, por ejemplo z, no es igual a cero, esta igualdad es equivalente a la igualdad $\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$, donde $x' = -x/z$, $y' = -y/z$. Según el criterio del carácter coplanar (véase el ejemplo 2), el vector $\vec{c}$ es coplanar con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, o sea, resulta una contradicción. Por consiguiente, $x = y = z = 0$. Inversamente: si $x = y = z = 0$, la igualdad $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ es obvia. ■

Ejemplo 4. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares. Demostrar que la igualdad

$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} + k_1\vec{c} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b} + k_2\vec{c} \qquad (2.30)$$

es equivalente al sistema de igualdades

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad k_1 = k_2. \qquad (2.31)$$

□ Para demostrarlo basta escribir (2.30) en forma de $(m_1 - m_2)\vec{a} + (n_1 - n_2)\vec{b} + (k_1 - k_2)\vec{c} = \vec{0}$ y utilizar el resultado del ejemplo 3. ■

Ejemplo 5. Demostrar que si los vectores $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b}$ son colineales, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ ($\vec{c}$ es vector arbitrario) son coplanares.

□ Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son colineales, los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos a una misma recta y, más aún, a un plano que contiene esta recta. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ no son colineales, forman base en cierto plano $\mathscr{P}$. Los vectores $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b}$ son colineales, por eso existe un número k tal que $\vec{b} = k\vec{a} = k\vec{a} + 0 \cdot \vec{c}$. Según el criterio del carácter coplanar (véase el ejemplo 2), los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares (paralelos al plano $\mathscr{P}$). ■

Ejemplo 6. Demostrar que si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ no son coplanares, entonces: a) ninguno de ellos es nulo; b) los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales.

△ a) Si, por ejemplo, $\vec{a} = \vec{0}$, tendría lugar la igualdad $1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$, lo que contradice a (2.29).

b) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ fueran colineales y $\vec{a} \neq \vec{0}$, el carácter no coplanar de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ contradiría el resultado del ejemplo 5. Si $\vec{a} = \vec{0}$, tendría lugar una contradicción a la parte demostrada a) de la afirmación de este ejemplo. ▲

Ejemplo 7. En la pirámide hexagonal truncada regular $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (véase fig. 2.7) los puntos O y O_1 son los centros de las bases $ABCDEF$ y $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ respectivamente. Descomponer: a) el vector $\overrightarrow{AD}$ según la base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$; b) el vector $\overrightarrow{OO_1}$ según la base $\{\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{BB_1}\}$.

$$\triangle \text{ a) } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}.$$

b) Los puntos O y O_1 son los puntos medios de los segmentos $[BE]$ y $[B_1E_1]$. Por eso (véase el ejemplo 5 del § 2 de este capítulo), $2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{BB_1}$, es decir, $\overrightarrow{OO_1} = (1/2)\,\overrightarrow{EE_1} + (1/2)\,\overrightarrow{BB_1}$. ▲

Ejemplo 8. En el paralelogramo $ABCD$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, E es el punto medio de $[CD]$. Descomponer el vector $\overrightarrow{BE}$ según la base $\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Representar el vector $\overrightarrow{BE}$ por tres modos en forma de

$$\overrightarrow{BE} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \qquad (2.32)$$

△ Tenemos $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Por eso $\overrightarrow{BE}(\vec{c} - \vec{a}) - (1/2)\,\vec{a} = -\frac{3}{2}\,\vec{a} + \vec{c}$. De este modo, el vector $\overrightarrow{BE}$ ya está representado por dos modos en la forma (2.32): $\overrightarrow{BE} = (-1/2)\,\vec{a} + 1\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$, $\overrightarrow{BE} = (-3/2)\,\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 1\cdot\vec{c}$. Si t es un número real arbitrario, entonces $t(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$. Por tanto, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE} + \vec{0} = (-1/2)\,\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = (t - 1/2)\,\vec{a} + (1 + t)\,\vec{b} - t\vec{c}$. Cuando $t = 0$, obtenemos la primera representación, cuando $t = -1$, la segunda. Haciendo $t = 1$, obtenemos la tercera representación: $\overrightarrow{BE}$ $(1/2)\,\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. ▲

Sean $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ unos vectores, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reales. El vector $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ se denomina *combinación lineal de los vectores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *(con los coeficientes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$*)*. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, la combinación se denomina *trivial*, en caso contrario, *no trivial*. La representación del vector $\vec{a}$ en forma de una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ se denomina *descomposición del vector* $\vec{a}$ *según los vectores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Como se desprende del resultado del ejemplo 8, la descomposición del cuarto vector según tres vectores coplanares no es único en caso común. En el ejemplo 2 se muestra que ninguno de los tres vectores no coplanares puede descomponerse según otros dos. Los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ se denominan *linealmente independientes* si

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0. \tag{2.33}$$

Los resultados del ejemplo 3 del § 3 y del ejemplo 3 de este párrafo permiten deducir que los vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, los vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son también linealmente independientes. Los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ se llaman *linealmente dependientes* si no son linealmente independientes, es decir, existen números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0},$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2>0. \tag{2.34}$$

Ejemplo 9. Demostrar que: a) dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes si, y sólo si, son colineales; b) tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes si, y sólo si, son coplanares.

□ Basta comprobar que los vectores colineales (coplanares) son linealmente dependientes. a) Sea $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Si $\vec{a}=\vec{0}$, entonces $1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{b}=\vec{0}$ y de la colinealidad de $\vec{0}$ y $\vec{b}$ se desprende la dependencia lineal de $\vec{0}$ y $\vec{b}$. Si $\vec{a}\neq\vec{0}$ y $\vec{b}$ son colineales, entonces, según el criterio de la colinealidad, existe un número k tal que $\vec{b}=k\vec{a}$, es decir, $1\cdot\vec{b}+(-k)\,\vec{a}=\vec{0}$, $1^2+(-k)^2>0$ y la dependencia lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es evidente.

b) Sean coplanares los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales, entonces, en virtud de lo demostrado, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ para unos α y β tales que $\alpha^2+\beta^2>0$.

Pero, entonces $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0\cdot\vec{c} = \vec{0}$, con tal que $\alpha^2 + \beta^2 + 0^2 > 0$, es decir, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes. Sea, ahora, que los vectores coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tales que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. Entonces [véase la fórmula (2.28)] para unos x e y se cumple la igualdad $(-1)\vec{c} + x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ con tal que $(-1)^2 + x^2 + y^2 > 0$, o sea, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes. ■

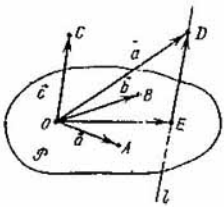


Fig. 2.17

Llámase *base en un espacio* a una terna ordenada de vectores no coplanares. La base formada por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ se denota $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Ejemplo 10 (descomposición según una base en un espacio). Sea $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base, $\vec{d}$, un vector arbitrario de un espacio. Demostrar que el vector $\vec{d}$ puede descomponerse y, además, de un solo modo, según los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

□ Marquemos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, y $\vec{d}$ partiendo de un punto O: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales (véase el ejemplo 6). Mediante $\mathcal{P}$ designemos el plano (OAB). Por el punto D tracemos la recta l paralelamente a (OC) (el vector $\vec{c} = \overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ (véase el ejemplo 6) y por eso $O \neq C$ y la recta l se determina unívocamente). El vector $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ no es paralelo al plano $\mathcal{P}$, por eso la recta l se interseca con el plano $\mathcal{P}$ en un punto E (fig. 2.17). Los vectores $\overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ son colineales. Según el criterio de colinealidad, existe un número real z tal que $\overrightarrow{ED} = z\overrightarrow{OC} = z\vec{c}$. Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son coplanares con tal que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es la base en el plano $\mathcal{P}$ que los contiene. Por consiguiente, el vector $\overrightarrow{OE}$ se descompone según la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$: $\overrightarrow{OE} = x\vec{a} + y\vec{b}$. En definitiva, tenemos $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. En el ejemplo 4 se demuestra la unicidad de la descomposición del vector $\vec{d}$ según la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$; si, además, $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$, del carácter no coplanar de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se deduce que $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. ■

Los coeficientes de la descomposición del vector $\vec{d}$ según la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ se llaman *coordenadas del vector* $\vec{d}$ *en la base* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Lo que los números x, y, z son coordenadas del vector $\vec{d}$ en una base se denota así: $\vec{d} = (x; y; z)$.

Aduzcamos las **propiedades de las coordenadas de un vector**. Sean: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base, $\vec{d} = (x; y; z)$ y $\vec{e} = (x', y', z')$, vectores arbitrarios, λ un número real. Entonces:

1º. $\vec{d} = \vec{e} \Leftrightarrow x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, es decir, *dos vectores son iguales si, y sólo si, son iguales sus coordenadas homónimas.*

2º. $\vec{d} + \vec{e} = (x + x'; y + y', z + z')$, es decir, *las coordenadas de la suma de dos vectores son iguales a las sumas de las respectivas coordenadas de estos vectores.*

3º. $\lambda\vec{d} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$, es decir, *multiplicado un vector por un número, sus coordenadas se multiplican por este número.*

□ La propiedad 1ª está demostrada en el ejemplo 4. Las propiedades 2ª y 3ª son casos particulares de la siguiente **propiedad de la linealidad de coordenadas**: *para cualesquiera números* α *y* β $\alpha\vec{d} + \beta\vec{e} = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y'; \alpha z + \beta z')$.

En efecto, $\alpha\vec{d} + \beta\vec{e} = \alpha(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) + \beta(x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}) = (\alpha x + \beta x')\vec{a} + (\alpha y + \beta y')\vec{b} + (\alpha z + \beta z')\vec{c} = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y'; \alpha z + \beta z')$. ■

Las coordenadas de los vectores en el plano poseen las propiedades análogas. Si $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es base en el plano $\mathcal{P}$,

$\vec{d} = (x; y)$ y $\vec{e} = (x'; y')$ son vectores arbitrarios paralelos al plano $\mathscr{P}$, α y β son números reales, se tiene:

1°. $\vec{d} = \vec{e} \Leftrightarrow x = x'$, $y = y'$;

2°. $\alpha\vec{d} + \beta\vec{e} = (\alpha x + \beta x';\ \alpha y + \beta y')$.

Ejemplo 11. Dada la prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ (véase fig. 2.6). Descomponer el vector $\overrightarrow{AA_1}$ según la base $\{\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

△ Tenemos $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$. Sumando estas igualdades obtenemos $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}$. Ya que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (el ciclo $ABCA$) y $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, se tiene $\overrightarrow{AA_1} = (1/3)\,\overrightarrow{AC_1} + (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} + (1/3)\,\overrightarrow{BA_1}$. ▲

Ejemplo 12. En el tetraedro $ABCD$, los puntos K y L son los puntos medios de las aristas $[AC]$ y $[BD]$, respectivamente, O, el punto de la intersección de las medianas de la cara ACD (fig. 2.18). Descomponer: a) el vector $\overrightarrow{BO}$ según la base $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$; b) el vector $\overrightarrow{KL}$ según cada una de las bases $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$, $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$ y $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

△ a) Sumando las igualdades $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$ obtenemos $3\overrightarrow{BO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$. Utilizando el resultado del ejemplo 3 del § 2 de este capítulo, escribimos $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, es decir, $\overrightarrow{BO} = (1/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{BC} + (1/3)\,\overrightarrow{BD}$.

b) En este caso, $\overrightarrow{AL}$ es el vector de la mediana del triángulo ADB. Por eso $\overrightarrow{AL} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$. Por consiguiente, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - (1/2)\,\overrightarrow{AC} = -(1/2)\,\overrightarrow{AC} + (1/2)\,\overrightarrow{AB} + (1/2)\,\overrightarrow{AD}$. Mencionemos otro procedimiento más de la descomposición de $\overrightarrow{KL}$ según la base $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$. Basándonos en la fórmula de la línea media de un cuadrilátero espacial (véase el ejemplo 5 del § 2 de este capítulo), tenemos $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$, y puesto que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, se tiene $\overrightarrow{KL}$: $-(1/2)\overrightarrow{AC} + (1/2)\overrightarrow{AB} + (1/2)\overrightarrow{AD}$. El vector $\overrightarrow{KL}$ es el vector de la mediana del triángulo KDB.

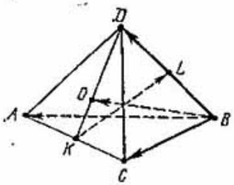


Fig. 2.18

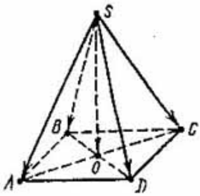


Fig. 2.19

Luego, $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB})$. Según la propiedad del punto de intersección de las medianas $\overrightarrow{KO} = (1/2)\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{KD} = (3/2)\overrightarrow{OD}$. Por lo tanto $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}) =$ $= (1/2)((3/2)\overrightarrow{OD} + (\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB})) = (1/2)(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) =$ $= -(1/2)\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0\cdot\overrightarrow{AC}$. En fin, como lo señalamos anteriormente, $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = -(1/2)\overrightarrow{DA} -$ $- (1/2)\overrightarrow{BC} + 0\cdot\overrightarrow{BO}$. ▲

Ejemplo 13. En una pirámide cuadrangular regular $SABCD$ el punto O es el centro de la base $ABCD$. Descomponer el vector $\overrightarrow{SO}$ según los vectores $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ por varios procedimientos distintos.

△ Tenemos $\overrightarrow{SO} = (1/2)(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC})$, $\overrightarrow{SO} = (1/2) \times$ $\times (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$ (fig. 2.19).
Sumando estas dos descomposiciones distintas, obtenemos la tercera: $\overrightarrow{SO} = (1/4)(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD})$. ▲

Ejemplo 14. Mostrar varias descomposiciones del vector $\overrightarrow{KL}$ (véase el ejemplo 12) según los vectores $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$.

$\triangle$ Puesto que $\overrightarrow{KL}=(1/2)\overrightarrow{AD}+(1/2)\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$, se tiene $\overrightarrow{KL}=(1/2)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB})=0\cdot\overrightarrow{OB}-(1/2)\overrightarrow{DB}+(1/2)\overrightarrow{CB}+(1/2)\overrightarrow{AB}$. Luego tenemos $\overrightarrow{KL}=-(1/2)\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ (véase el ejemplo 12). Como $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DB}$, obtenemos la segunda descomposición: $\overrightarrow{KL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DB}+0\cdot\overrightarrow{CB}+0\cdot\overrightarrow{AB}$. Si ahora utilizamos la igualdad $-\overrightarrow{OB}+(1/3)\overrightarrow{DB}+(1/3)\overrightarrow{CB}+(1/3)\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ obtenida en el ejemplo 12, para cualquier $t\in R$ obtenemos: $\overrightarrow{KL}=(3/2)\overrightarrow{OB}+t(-\overrightarrow{OB}+(1/3)\overrightarrow{DB}+(1/3)\overrightarrow{CB}+(1/3)\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{DB}=(3/2-t)\overrightarrow{OB}+((1/3)t-1)\overrightarrow{DB}+(1/3)t\overrightarrow{CB}+(1/3)t\overrightarrow{AB}$. Cuando $t=(3/2)$ $(t=0)$, obtenemos la primera (segunda) descomposición. ▲

Ejemplo 15*. En el lado $[AB]$ del paralelogramo $ABCD$ se encuentra un punto K, en la continuación del lado $[CD]$ tras el punto D se halla un punto L. Las rectas (KD) y (BL) se intersecan en el punto N, y las rectas (LA) y (CK), en el punto M. Demostrar que el segmento $[MN]$ es paralelo al lado $[AD]$.

$\triangle$ Designemos $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$ (fig. 2.20). Los vectores $\overrightarrow{AK}$ y $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ son colineales, por eso existe un número $\lambda\in[0, 1]$, predeterminado por la posición del punto $K\in[AB]$, tal que $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{b}$. Análogamente, en virtud de colinealidad de los vectores $\overrightarrow{CL}$ y $\overrightarrow{CD}$, existe un número $\mu>1$, predeterminado por la posición del punto $L\in(CD)$, tal que $\overrightarrow{CL}=\mu\overrightarrow{CD}=-\mu\vec{b}$. El punto N se halla en la recta (KD). Por eso (véase el ejemplo 6 del § 3 de este capítulo), existe (por ahora desconocido) un número τ tal que $\overrightarrow{AN}=(1-\tau)\overrightarrow{AK}+\tau\overrightarrow{AD}=(\lambda-\lambda\tau)\vec{b}+\tau\vec{d}$. El punto N se encuentra también en la recta (BL). Por tanto, existe (también desconocido) un número ξ tal que $\overrightarrow{AN}=(1-\xi)\overrightarrow{AB}+\xi\overrightarrow{AL}=$

$= (1 - \xi)\,\vec{b} + \xi\,(\vec{b} + \vec{d} - \mu\vec{b}) = \xi\vec{d} + (1 - \xi\mu)\,\vec{b}$. Se han obtenido dos descomposiciones del vector $\overrightarrow{AN}$ según la base $\{\vec{b}, \vec{d}\}$. De la unicidad de la descomposición de un vector según una base, obtenemos $\lambda - \lambda\tau = 1 - \xi\mu$, o sea, $\tau = \xi$. Por consiguiente, $\tau = \xi = (1 - \lambda)/(\mu - \lambda)$ y $\overrightarrow{AN} = (\lambda\,(\mu - 1)\,\vec{b} + (1 - \lambda)\,\vec{d})/(\mu - \lambda)$. Partiendo de los razonamientos análogos, hallamos el vector

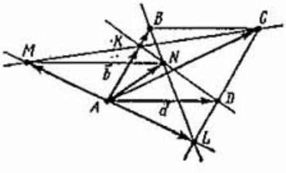


Fig. 2.20

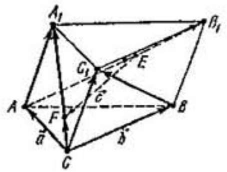


Fig. 2.21

$\overrightarrow{AM}$. Puesto que $M \in (AL)$, existe un punto t tal que $\overrightarrow{AM} = -t\overrightarrow{AL} = -t\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}) = -t\,((1 - \mu)\,\vec{b} + \vec{d})$. Tenemos $M \in (KC)$ y por eso $\overrightarrow{AM} = (1 - \theta)\,\overrightarrow{AK} + \theta\overrightarrow{AC} = (1 - \theta)\,\lambda\vec{b} + \theta\,(\vec{b} + \vec{d}) = (\lambda + \theta - \lambda\theta)\,\vec{b} + \theta\vec{d}$ para un $\theta \in R$. Comparando dos descomposiciones obtenidas del vector $\overrightarrow{AM}$ según la base $\{\vec{b}, \vec{d}\}$, llegamos al sistema de ecuaciones $-t + t\mu = \lambda + \theta - \lambda\theta$, $-t = \theta$, del cual hallamos $t = -\theta = \lambda/(\mu - \lambda)$. De este modo, $\overrightarrow{AM} = -(\lambda\,(1 - \mu)\,\vec{b} + \lambda\vec{d})/(\mu - \lambda)$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{d}/(\mu - \lambda)$, es decir, $\overrightarrow{MN} \parallel \vec{d}$. Por consiguiente, $(MN) \parallel (AD)$. ▲

Ejemplo 16. En las diagonales $[AB_1]$ y $[CA_1]$ de las caras laterales de un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se sitúan, respectivamente, puntos E y F de modo que $(EF) \parallel (BC_1)$. Hallar la razón $|EF| : |BC_1|$.

△ Los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1}$ no son coplanares. Descompongamos todos los vectores según la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Tenemos $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\vec{b} + \vec{c}$. Puesto que los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AB_1}$ son colineales, existe un número (desconocido) μ tal que $\overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. De modo análogo existe un ν tal que $\overrightarrow{CF} = \nu\overrightarrow{CA_1} = \nu(\vec{a} + \vec{c})$. Según la condición $(EF) \parallel (BC_1)$. Luego existe un número λ tal que $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{BC_1} = \lambda(-\vec{b} + \vec{c})$. Consideremos el ciclo $CAEFC$ (fig. 2.21). Según la regla del ciclo, $\vec{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \vec{a} + \mu(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \lambda(-\vec{b} + \vec{c}) - \nu(\vec{a} + \vec{c}) = (1 - \mu - \nu)\vec{a} + (\mu - \lambda)\vec{b} + (\mu + \lambda - \nu)\vec{c}$. Los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son coplanares. Por eso [véase (2.29)], $1 - \mu - \nu = 0$, $\mu - \lambda = 0$, $\mu + \lambda - \nu = 0$. Este sistema tiene solución única: $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 2/3$. Por consiguiente, $|EF| : |BC_1| = |\lambda| = 1/3$. ▲

El análisis de la solución dada muestra que para resolver el problema con el método vectorial, el dibujo es necesario solamente si queremos aclarar todo el conjunto de los datos del problema y también como un instrumento que ayuda a formular el problema en el lenguaje del álgebra vectorial. Además, si tenemos unas condiciones del problema ya traducidas del lenguaje geométrico al analítico *sin utilizar el dibujo, no es necesario que estas condiciones sean representadas de manera geométrica ideal en el dibujo*. Así en la fig. 2.21 las rectas (EF) y (BC_1) no son paralelas. Eso no influye en la solución, puesto que la colinealidad de los vectores $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{BC_1}$ ya está expresada correctamente del modo analítico. Después de hallar la solución del problema es fácil construir un dibujo correcto, ya que en el proceso de resolver el problema obtenemos tanto el valor de la razón $|EF| : |BC_1|$ como la situación de los puntos F y E en los segmentos correspondientes: $|CF| = (2/3)|CA_1|$, $|AE| = (1/3)|AB_1|$.

Ejemplo 17. Puntos M, N, Q se sitúan, respectivamente, en las aristas $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ de un tetraedro $ABCD$. El plano (MNQ) y la recta (AD) se intersecan en el punto P. Se sabe que $|DN| = |CN|$, $|AM| = |BM|$, $|CQ| : |CB| = n$. Hallar la razón $|DP| : |DA|$.

△ Escojamos la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$: $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$ (fig. 2.22). Descompongamos los vectores según la base. Tenemos $\overrightarrow{CN} = (1/2)\vec{d}$, $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ} = (-1/2)\vec{d} + n\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = (1/2)\overrightarrow{AB} + (1 - n)\overrightarrow{BC} = (1/2)(\vec{b} - \vec{a}) - (1 - n) \times$

$\times \vec{b} = -(1/2)\,\vec{a} + (n - 1/2)\,\vec{b}$. Ya que el punto P se encuentra en la recta (AD), existe un λ tal que $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DA} = \lambda\,(\vec{a} - \vec{d})$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP} = (1 - \lambda) \times (\vec{a} - \vec{d})$. El punto P se sitúa también en el plano (MNQ); por consiguiente, los vectores $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{MQ}$ son coplanares. Los vectores $\overrightarrow{NQ}$ y $\overrightarrow{MQ}$ no son colineales y

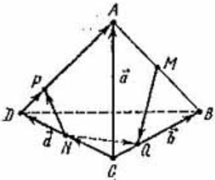


Fig. 2.22

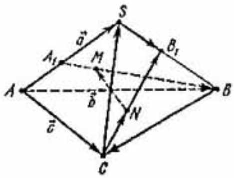


Fig. 2.23

forman base en el plano (MNQ). El vector $\overrightarrow{NP}$ se descompone según esta base teniendo coeficientes desconocidos μ y ν: $\overrightarrow{NP} = \mu\overrightarrow{NQ} + \nu\overrightarrow{MQ} = \mu\,(-(1/2)\,\vec{d} + n\vec{b}) + \nu\,(-(1/2)\,\vec{a} + (n - 1/2)\,\vec{b}) = -(\nu/2)\vec{a} + (n\,(\mu + \nu) - \nu/2)\,\vec{b} - (\mu/2)\,\vec{d}$. Ahora podemos usar la regla del ciclo. Del ciclo $CNPAC$ tenemos $0 = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = (1/2)\,\vec{d} - (\nu/2)\,\vec{a} + (n\,(\mu + \nu) - \nu/2) \times \vec{b} - (\mu/2)\,\vec{d} + (1 - \lambda)\,\vec{a} - (1 - \lambda)\,\vec{d} - \vec{a}$. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ no son coplanares. Por consiguiente, $-\nu/2 + (1 - \lambda) - 1 = 0$, $n\,(\mu + \nu) - \nu/2 = 0$, $1/2 - \mu/2 - (1 - \lambda) = 0$. De este modo, $\nu = -2\lambda$, $\mu = \nu/(2n) - \nu = 2\lambda - \lambda/n$, $1/2 - \lambda + \lambda/(2n) - 1 + \lambda = 0$, es decir, $\lambda = n$. Definitivamente obtenemos $|DP| : |DA| = |\lambda| = n$. ▲

Ejemplo 18. En las aristas $[SA]$ y $[SB]$ de un tetraedro $SABC$ están escogidos, respectivamente, los puntos A_1 y B_1 de modo que $|SA_1| : |SA| = n$, $|SB_1| : |SB| = m$. Los puntos M y N se encuentran en los segmentos $[A_1B]$ y $[CB_1]$, correspondientemente, con tal que $|CN| : |CB_1| = p$ y el propio segmento $[MN]$ es paralelo al plano (ASC). Hallar la razón $|BM| : |BA_1|$.

△ Los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ (fig. 2.23) forman base. En esta base, $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CS} + m\overrightarrow{SB} = m\overrightarrow{CB} + (1 - m)\overrightarrow{CS} = m(\vec{b} - \vec{c}) + (1 - m)(\vec{a} - \vec{c}) = (1 - m)\vec{a} + m\vec{b} - \vec{c}$ [compárase con (2.5)]. Por eso $\overrightarrow{CN} = p\overrightarrow{CB_1} = p(1 - m)\vec{a} + pm\vec{b} - p\vec{c}$. El vector $\overrightarrow{NM}$ es paralelo al plano (ASC) y, por lo tanto, se descompone según la base $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en este plano: $\overrightarrow{NM} = y\vec{a} + z\vec{c}$ (hace falta determinar los números y y z). Luego, $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{b} + (1 - n)\vec{a}$.

Los vectores $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{BA_1}$ están dirigidos contrariamente, por esto existe un número $x < 0$ tal que $\overrightarrow{MB} = x\overrightarrow{BA_1} = -x\vec{b} + x(1 - n)\vec{a}$. En fin, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Empleemos la regla del ciclo $CNMBC$: $\vec{0} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = p(1 - m)\vec{a} + pm\vec{b} - p\vec{c} + y\vec{a} + z\vec{c} - x\vec{b} + x(1 - n)\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$. Reduciendo términos semejantes, obtenemos $(p(1 - m) + y + x(1 - n))\vec{a} + (pm - x - 1)\vec{b} + (-p + z + 1)\vec{c} = \vec{0}$ que es equivalente al sistema de ecuaciones $p(1 - m) + y + x(1 - n) = 0$, $pm - x - 1 = 0$, $-p + z + 1 = 0$. De la segunda igualdad hallamos $x = pm - 1$. Por consiguiente, $|BM| : |BA_1| = |x| = |pm - 1| = 1 - pm$. ▲

Ejemplo 19 (condición de colinealidad de vectores). Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base en un espacio. Hallar bajo qué condición necesaria y suficiente los vectores $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$ y $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$ son colineales.

△ Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales si, y sólo si (véase el ejemplo 9), son linealmente dependientes, o sea, si existen números λ y μ que no son iguales a cero simultáneamente y tales que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$. Según la propiedad de linealidad de coordenadas, esta igualdad es equivalente al sistema de relaciones $\lambda a_x + \mu b_x = 0$, $\lambda a_y + \mu b_y = 0$, $\lambda a_z + \mu b_z = 0$ significando que las coordenadas homónimas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son proporcionales. En virtud del lema de tres determinantes [véase (2.12) y (2.13)], el sistema sugerido de relaciones tiene lugar si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad \blacktriangle \qquad (2.35)$$

Ejemplo 20 (condición del carácter coplanar de vectores). Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base en un espacio. Demostrar que los vectores $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ son coplanares si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.36)$$

△ Los vectores $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_x\vec{e}_1 + c_y\vec{e}_2 + c_z\vec{e}_3$ son coplanares si, y sólo si (véase el ejemplo 9), son linealmente dependientes, es decir, existen los números x, y, z que no son iguales a cero simultáneamente y tales que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, o sea,

$$(a_x x + b_x y + c_x z)\,\vec{e}_1 + (a_y x + b_y y + c_y z)\,\vec{e}_2 + (a_z x + b_z y + c_z z)\,\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Puesto que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base $(x; y; z)$ es solución no trivial del sistema de ecuaciones

$$a_x x + b_x y + c_x z = 0, \quad a_y x + b_y y + c_y z = 0, \quad a_z x + b_z y + c_z z = 0. \qquad (2.37)$$

Según el teorema de la solución no trivial de un sistema homogéneo de ecuaciones (véase el teorema 2 del § 4 de este capítulo) el sistema (2.37) tiene solución no trivial si, y sólo si, se cumple la igualdad (2.36). ▲

§ 6. Sistema de coordenadas. Coordenadas de un punto en un sistema de coordenadas. Fórmulas del paso de un sistema de coordenadas a otro

Si en un espacio están fijados un polo O y una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se dice que en el espacio está dado un *sistema (cartesiano) de coordenadas* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. El punto O se denomina *origen de coordenadas*, las rectas que pasan por el origen de coordenadas y son paralelas a los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, respectivamente, se denominan *ejes de coordenadas* y se denotan Ox (eje de abscisas), Oy (eje de ordenadas), Oz (eje de z — coordenadas). El plano determinado por los ejes de coordenadas Ox y Oy se llama *plano de coordenadas* Oxy. De modo análogo se determinan los planos de coordenadas Oyz y Oxz (fig. 2.24). Si M es un punto arbitrario del espacio se llaman *sus coordenadas* $(x; y; z)$ *en un sistema de coordenadas* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a los coeficientes de la descomposición del radio vector $\overrightarrow{OM}$ del punto M según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Si está claro de qué sistema de coordenadas se trata, se dice simplemente sobre las coordenadas del punto M. El hecho de que el punto M tenga coordenadas $(x; y; z)$ se escribe así: $M\ (x; y; z)$. Puesto que todo vector $\overrightarrow{OM}$ puede descomponerse según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, todo punto M tiene coordenadas en el sistema dado de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. En virtud de la 1ª propiedad de las coordenadas de un vector, el punto M se predetermina completamente por sus coordenadas: los puntos $M\ (x; y; z)$ y $M_1\ (x_1; y_1; z_1)$ coinciden si, y sólo si, se cumplen las igualdades $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Si los puntos $A\ (x_1; y_1; z_1)$ y $B = (x_2; y_2; z_2)$ se dan por sus coordenadas en el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, entonces en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tenemos $\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$. Según la propiedad de linealidad de

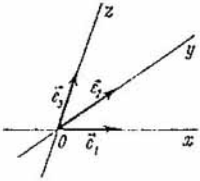


Fig. 2.24

las coordenadas de un vector, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, es decir, *en la base* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, *las coordenadas del vector* $\overrightarrow{AB}$ *se determinan como las diferencias de las coordenadas correspondientes del fin* B *y el origen* A *de este vector en el sistema de coordenadas* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, *donde* O *es un punto arbitrario del espacio.*

Ejemplo 1. En las condiciones del ejemplo 12 del § 5 de este capítulo hallar: a) las coordenadas del punto O en el sistema de coordenadas $\{B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$; b) las coordenadas del punto L en el sistema de coordenadas $\{A, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$.

△ a) Puesto que $\overrightarrow{BO} = (1/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{BC} + (1/3)\,\overrightarrow{BD}$, se tiene $O\,(1/3;\ 1/3;\ 1/3)$.

b) Tenemos: $\overrightarrow{AK} = (1/2)\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KD} = (3/2)\,\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DL} = -(1/2)\,\overrightarrow{BD} = -(1/2)\,(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD})$. Por consiguiente, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = (1/2)\,\overrightarrow{AC} + (3/2)\,\overrightarrow{OD} - (1/2)\,\overrightarrow{BO} - (1/2)\,\overrightarrow{OD} = -(1/2)\,\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + (1/2)\,\overrightarrow{AC}$, o sea, $L\,(-1/2;\ 1;\ 1/2)$. ▲

Ejemplo 2. Dado un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Hallar las coordenadas del punto A_1 en el sistema de coordenadas $\{B_1, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

△ Tenemos $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BA_1}$. En el ejemplo 11 del § 5 de este capítulo está demostrado que $\overrightarrow{AA_1} = (1/3)\,\overrightarrow{AC_1} + (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} + (1/3)\,\overrightarrow{BA_1}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{B_1A_1} = (-1/3)\,\overrightarrow{AC_1} - (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} - (1/3)\,\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_1} = -(1/3)\,\overrightarrow{AC_1} - (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} + (2/3)\,\overrightarrow{BA_1}$ y, luego, $A_1\,(-1/3;\ -1/3;\ 2/3)$. ▲

Ejemplo 3. En un sistema de coordenadas $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ están dadas tres vértices del paralelogramo $ABCD$: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ 0;\ 2)$, $C\,(2;\ 3;\ 0)$. Hallar las coordenadas del punto D.

△ Sea $D\,(x_D;\ y_D;\ z_D)$. Ya que en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\overrightarrow{BC} = (1;\ 3;\ -2)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D;\ y_D - 1;\ z_D + 1)$ y los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ de los lados opuestos del paralelogramo son iguales, se tiene $1 = x_D$, $3 = y_D - 1$, $-2 = z_D + 1$. De aquí $x_D = 1$, $y_D = 4$, $z_D = -3$. ▲

Ejemplo 4. En un sistema de coordenadas $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tenemos $A\ (1; 0; -2)$, $B\ (-3; 4; 2)$, $C\ (0; 1; 3)$, $D = (2; -1; 1)$. Verificar si los puntos A, B, C, D, se encuentran en un plano. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales y contrariamente dirigidos mientras que los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ no son colineales.

$\triangle$ En la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 5)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; 3)$. Los puntos A, B, C, D se hallan en un plano si, y sólo si, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son coplanares. Según la condición del carácter coplanar, es suficiente comprobar que el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ [compárese con (2.36)] es igual a cero. Tenemos

$$\Delta = (-4)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = $$
$$= (-4)\cdot 8 - 4\cdot(-8) + 4\cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, los puntos A, B, C, D se sitúan en un plano. Luego, $\overrightarrow{CD} = (2; -2; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 4)$. Según la propiedad de linealidad de las coordenadas de un vector, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, es decir, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (la tercera ley de la multiplicación de un vector por un número). Por fin $\overrightarrow{BC} = (3; -3; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; 3)$. Ya que $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, en correspondencia con la condición de colinealidad de los vectores (véase el ejemplo 19 del § 5 de este capítulo) los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ no son colineales. $\blacktriangle$

Ejemplo 5. En un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se tiene $A\ (x_A; y_A; z_A)$, $B\ (x_B; y_B; z_B)$, $C\ (x_C; y_C; z_C)$. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo ABC.

$\triangle$Si K es el punto medio del $[BC]$, entonces $\overrightarrow{AK} = (1/2)\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (1/2)\ ((-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (-\overrightarrow{OA} +$

$+ \overrightarrow{OC})) = -\overrightarrow{OA} + (1/2)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Si $N(x_N; y_N; z_N)$ es el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$, se tiene $\overrightarrow{AN} = (2/3)\overrightarrow{AK} = -(2/3)\overrightarrow{OA} + (1/3)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = (1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Sustituyendo en esta igualdad las descomposiciones de los radio vectores $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, obtenemos $x_N\vec{e}_1 + y_N\vec{e}_2 + z_N\vec{e}_3 = (1/3)((x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) + (x_B\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + z_B\vec{e}_3) + (x_C\vec{e}_1 + y_C\vec{e}_2 + z_C\vec{e}_3)) = (1/3)(x_A + x_B + x_C)\vec{e}_1 + (1/3)(y_A + y_B + y_C)\vec{e}_2 + (1/3)(z_A + z_B + z_C)\vec{e}_3$. En virtud de la unicidad de la descomposición según la base, tenemos: $x_N = (1/3)(x_A + x_B + x_C)$, $y_N = (1/3)(y_A + y_B + y_C)$,

$$z_N = (1/3)(z_A + z_B + z_C), \tag{2.38}$$

es decir, *las coordenadas del punto de intersección de las medianas (centro de gravedad) de un triángulo son medias aritméticas de las correspondientes coordenadas de sus vértices.*

Sea que en un espacio está fijado un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ que se denominará «viejo». Sea también que con ayuda de este sistema «viejo» de coordenadas está dado otro sistema de coordenadas $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ que se denominará «nuevo», es decir, tenemos dadas las descomposiciones

$$\vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3' = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \tag{2.39}$$

de los vectores de la base «nueva» según la base «vieja» y dadas las coordenadas $(\alpha; \beta; \gamma)$ del punto O' (origen del sistema «*nuevo*» de coordenadas) en el sistema «viejo» de coordenadas:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3. \tag{2.40}$$

Consideremos un punto arbitrario M que tiene coordenadas $(x; y; z)$ en el sistema «viejo» de coordenadas y las $(x'; y'; z')$ en el sistema «nuevo» de coordenadas:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'. \quad (2.41)$$

Las fórmulas que expresan las coordenadas «viejas» (x; y; z) del punto M por medio de las coordenadas «nuevas» (x'; y'; z') de este punto se llaman *fórmulas del paso de un sistema «viejo» de coordenadas a uno «nuevo»*. Deduzcamos estas fórmulas.

□ De la igualdad evidente $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ y después de sustituir, en ella, las relaciones (2.39), (2.40), (2.41) tenemos

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 + x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 +$$
$$+ a_{13}\vec{e}_3) + y'(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3) + z'(a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) =$$
$$= (a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + \alpha)\vec{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' +$$
$$+ a_{32}z' + \beta)\vec{e}_2 + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + \gamma)\vec{e}_3.$$

De este modo quedan obtenidas dos descomposiciones del vector $\overrightarrow{OM}$ según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. En virtud de la unicidad de la descomposición de un vector según una base en un espacio, los correspondientes coeficientes de estas descomposiciones deben coincidir:

$$\begin{aligned} x &= \boxed{a_{11}}\, x' + \boxed{a_{21}}\, y' + \boxed{a_{31}}\, z' + \boxed{\alpha} \\ y &= \boxed{a_{12}}\, x' + \boxed{a_{22}}\, y' + \boxed{a_{32}}\, z' + \boxed{\beta} \\ z &= \boxed{a_{13}}\, x' + \boxed{a_{23}}\, y' + \boxed{a_{33}}\, z' + \boxed{\gamma} \end{aligned}. \ \blacksquare \quad (2.42)$$

Estas son fórmulas buscadas del paso del sistema «viejo» de coordenadas al «nuevo». Notemos que en las fórmulas (2.42) los coeficientes de las x' son coordenadas del vector $\vec{e}_1'$ en la base «vieja» [compárese con (2.39)], y los coeficientes de las y' (las z') son coordenadas del vector $\vec{e}_2'$ ($\vec{e}_3'$) en la base «vieja». Los últimos sumandos de estas fórmulas (2.42) del paso son coordenadas «viejas» del origen «nuevo» de coordenadas O'.

La matriz

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

compuesta de los coeficientes de las x', y', z' en las fórmulas (2.42) se denomina *matriz del paso de un sistema «viejo» de coordenadas a uno «nuevo» o matriz del paso de una base «vieja» a una «nueva».*

Aduzcamos las propiedades de la matriz del paso S.

1ª. $\det S \neq 0$.

□ Los vectores $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ [véase (2.39)] no son coplanares. Según la condición del carácter coplanar (véase el ejemplo 20 del § 5 de este capítulo), el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Empero este determinante es $\det S^{\mathrm{T}}$. Ya que $\det S^{\mathrm{T}} = \det S$ (1ª propiedad de los determinantes), se tiene $\det S = \Delta \neq 0$. ■

2ª. *Si los vectores homónimos de bases «vieja» y «nueva» coinciden, S es la matriz unidad,* $\det S = 1$. En este caso el paso del sistema «viejo» de coordenadas al «nuevo» se denomina *traslación del origen de coordenadas.* Las fórmulas de este paso son:

$$x = x' + \alpha, \ y = y' + \beta, \ z = z' + \gamma.$$

3ª. *La matriz del paso S' de la base «nueva» a la «vieja» es la matriz inversa de la matriz S:*

$$S' = S^{-1}, \ \det S' = \frac{1}{\det S}.$$

□ Resolviendo según la regla de Cramer el sistema de ecuaciones

$$a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' = x - \alpha, \ \ a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' = \\ = y - \beta, \ a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' = z - \gamma$$

respecto a x', y', z', obtenemos [véanse las fórmulas (2.23), (2.24), (2.25) y el teorema 1 del § 4 de este capítulo]:

$$x' = b_{11}(x - \alpha) + b_{21}(y - \beta) + b_{31}(z - \gamma) = \\ = b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z + \alpha',$$

$$y' = b_{12}(x-\alpha) + b_{22}(y-\beta) + b_{32}(z-\gamma) =$$
$$= b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z + \beta', \qquad (2.43)$$
$$z' = b_{13}(x-\alpha) + b_{23}(y-\beta) + b_{33}(z-\gamma) =$$
$$= b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z + \gamma',$$

donde $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de la matriz S.

Según la propiedad de matriz inversa $\det B = \frac{1}{\det S}$. Puesto que la matriz B se compone (por las columnas) de los coeficientes de x, y, z, respectivamente, en las fórmulas que expresan las coordenadas «nuevas» del punto mediante sus coordenadas «viejas» [véase (2.43)], entonces $B = S'$ es la matriz del paso del sistema «nuevo» de coordenadas al «viejo» o, que es lo mismo, de la base «nueva» a la «vieja». ■

4ª. *Sean fijados tres sistemas de coordenadas:*

$$(\mathrm{I})\ \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\},\ (\mathrm{II})\ \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\},$$
$$(\mathrm{III})\ \{O'', \vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\}$$

y sean, respectivamente,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\quad S_1 = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{21}' & a_{31}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{32}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{pmatrix},$$
$$S_2 = \begin{pmatrix} a_{11}'' & a_{21}'' & a_{31}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' & a_{32}'' \\ a_{13}'' & a_{23}'' & a_{33}'' \end{pmatrix}$$

las matrices del paso del sistema de coordenadas (I) *al sistema de coordenadas* (II), *del sistema de coordenadas* (II) *al sistema de coordenadas* (III), *del sistema de coordenadas* (I) *al sistema de coordenadas* (III). *Entonces* $S_2 = SS_1$, $\det S_2 = \det S \det S_1$.

□ En correspondencia con las fórmulas (2.39), (2.42), tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1'' &= a_{11}'\vec{e}_1' + a_{12}'\vec{e}_2' + a_{13}'\vec{e}_3', & \vec{e}_1' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3,\\
\vec{e}_2'' &= a_{21}'\vec{e}_1' + a_{22}'\vec{e}_2' + a_{23}'\vec{e}_3', & \vec{e}_2' &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3,\\
\vec{e}_3'' &= a_{31}'\vec{e}_1' + a_{32}'\vec{e}_2' + a_{33}'\vec{e}_3', & \vec{e}_3' &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{e}_1'' = a_{11}'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3) + a_{12}'(a_{21}\vec{e}_1 +$

$$+ a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3) + a_{13}'(a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = (a_{11}a_{11}' +$$

$$+ a_{21}a_{12}' + a_{31}a_{13}')\,\vec{e}_1 +$$

$$+ (a_{12}a_{11}' + a_{22}a_{12}' + a_{32}a_{13}')\,\vec{e}_2 + (a_{13}a_{11}' + a_{23}a_{12}' + a_{33}a_{13}')\,\vec{e}_3.$$

De modo análogo obtenemos $\vec{e}_2'' = (a_{11}a_{21}' + a_{21}a_{22}' +$

$$+ a_{31}a_{23}')\,\vec{e}_1 + (a_{12}a_{21}' + a_{22}a_{22}' + a_{32}a_{23}')\,\vec{e}_2 + (a_{13}a_{21}' +$$

$$+ a_{23}a_{22}' + a_{33}a_{23}')\,\vec{e}_3,\quad \vec{e}_3'' = (a_{11}a_{31}' + a_{21}a_{32}' + a_{31}a_{33}')\,\vec{e}_1 +$$

$$+ (a_{12}a_{31}' + a_{22}a_{32}' + a_{32}a_{33}')\,\vec{e}_2 + (a_{13}a_{31}' + a_{23}a_{32}' + a_{33}a_{33}')\,\vec{e}_3.$$

De esta manera,

$$S_2 = \begin{pmatrix}
a_{11}a_{11}' + a_{21}a_{12}' + a_{31}a_{13}' & a_{11}a_{21}' + a_{21}a_{22}' + a_{31}a_{23}' & a_{11}a_{31}' + a_{21}a_{32}' + a_{31}a_{33}'\\
a_{12}a_{11}' + a_{22}a_{12}' + a_{32}a_{13}' & a_{12}a_{21}' + a_{22}a_{22}' + a_{32}a_{23}' & a_{12}a_{31}' + a_{22}a_{32}' + a_{32}a_{33}'\\
a_{13}a_{11}' + a_{23}a_{12}' + a_{33}a_{13}' & a_{13}a_{21}' + a_{23}a_{22}' + a_{33}a_{23}' & a_{13}a_{31}' + a_{23}a_{32}' + a_{33}a_{33}'
\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{21}' & a_{31}'\\ a_{12}' & a_{22}' & a_{32}'\\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}'\end{pmatrix} = SS_1,\quad \det S_2 = \det S \times$$

$\times \det S_1$. ■

Ejemplo 6. En un espacio está dado un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Los puntos $A\,(1; 0; 0)$, $B\,(0; 2; 0)$,

$C\,(-1,\ 2;\ 0)$, $D\,(0;\ 0;\ 2)$ son los vértices del tetraedro $ABCD$, los puntos K y L son, correspondientemente, los puntos medios de las aristas $[AC]$ y $[DB]$. Hallar la matriz del paso S_2 del sistema de coordenadas $\{A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\}$ al sistema de coordenadas $\{B,\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{KL},\ \overrightarrow{DB}\}$. Escribir las fórmulas del paso del primer sistema de coordenadas al segundo.

$\triangle$ En el ejemplo 12 del §5 de este capítulo hallamos que $\overrightarrow{AC}=0\cdot\overrightarrow{AB}+1\cdot\overrightarrow{AC}+0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL}=(1/2)(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=(1/2)\,\overrightarrow{AB}-(1/2)\,\overrightarrow{AC}+(1/2)\,\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}=1\cdot\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AC}-1\cdot\overrightarrow{AD}$, $\quad\overrightarrow{AB}=1\cdot\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AC}+0\cdot\overrightarrow{AD}$. Por consiguiente, $x=0\cdot x'+(1/2)\,y'+z'+1$, $y=x'-(1/2)\,y'+0\cdot z'+0$, $z=0\cdot x'+(1/2)\,y'-z'+0$ son las fórmulas del paso del sistema de coordenadas $\{A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\}$ al sistema de coordenadas $\{B,\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{KL},\ \overrightarrow{DB}\}$, $S_2=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1\\ 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -1\end{pmatrix}$ es la matriz del paso.

Empleando la 4ª propiedad de la matriz del paso, podemos hallar la matriz S_2 de otro modo. A saber: por la definición de coordenadas de un punto $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2$,

$$\overrightarrow{OD}=2\vec{e}_3;\quad \overrightarrow{AB}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2,\quad \overrightarrow{AC}=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2,$$

$\overrightarrow{AD}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_3$, de aquí $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}/2$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{AB}/2-\overrightarrow{AC}/2+\overrightarrow{AD}/2$. Por consiguiente, la matriz del paso de la base $\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\}$ a la base $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$

es igual a

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ya que $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=$ $=\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}$, se tiene $\overrightarrow{AC}=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{KL}=\vec{e}_3$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=2\vec{e}_2-2\vec{e}_3$. De este modo, la matriz del paso S_1 de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a la base $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{CB}\}$ es

$$S_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Según la propiedad 4,

$$S_2=S\cdot S_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-2) \\ (-1)(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 & (-1)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & (-1)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)2+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2 \\ 0\cdot(-2)+0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Llámase *sistema de coordenadas* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *en un plano* $\mathcal{P}$ a un conjunto del polo O (un punto fijo O en el plano $\mathcal{P}$) y la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ en el plano $\mathcal{P}$ (fig. 2.25). Se llaman *coordenadas* $(x; y)$ *de un punto* $M \in \mathcal{P}$ *en el sistema de coordenadas* $\{O, \vec{e}_1, e_2\}$ a los coeficientes de la descomposición del radio vector $\overrightarrow{OM}$ del punto M según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. El hecho de que $(x; y)$ sean coordenadas del punto M se escribe en la forma M $(x; y)$. Si en el plano $\mathcal{P}$ están dadas dos sistemas de coordenadas: «viejo» $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y «nuevo» $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ con tal que el sistema «nuevo» de coordenadas se expresa con ayuda del «viejo» mediante las relaciones

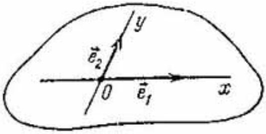


Fig. 2.25

$$\vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, \ \vec{e}_2' = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2, \ \overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2, \quad (2.44)$$

entonces para un punto arbitrario $M \in \mathcal{P}$ la relación entre sus coordenadas $(x; y)$ en el sistema «viejo» de coordenadas y sus coordenadas $(x'; y')$ en el sistema «nuevo» de coordenadas se determina mediante las *fórmulas del paso*

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + \alpha, \quad y = a_{12}x' + a_{22}y' + \beta. \quad (2.45)$$

La matriz $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, compuesta (por las columnas) de los coeficientes de x' e y' en las relaciones (2.45), se denomina *matriz del paso del sistema «viejo» de coordenadas (la base «vieja») en el plano al sistema «nuevo» de coordenadas (la base «nueva»)*. Las columnas de la matriz S se componen de las coordenadas de los vectores $\vec{e}_1'$ y $\vec{e}_2'$ en la base «vieja» $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ [compárese con (2.44)]. Para la matriz S del paso del sistema «viejo» de coordenadas en el plano al «nuevo», se cumplen las propiedades 1ª — 4ª en las cuales las matrices de segundo orden se sitúan en lugar de las matrices de tercer orden.

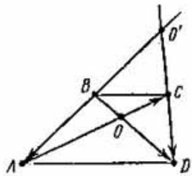


Fig. 2.26

Ejemplo 7. En un trapecio $ABCD$ $((AD) \parallel (BC))$ la razón de las longitudes de las bases $|AD| : |BC|$ es igual a 2, O es el punto de intersección de las diagonales $[AC]$ y $[BD]$, O' es el punto de intersección de las continuaciones de los lados laterales $[AB]$ y $[CD]$. Escribir las fórmulas del paso del sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$ al sistema de coordenadas $\{O', \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$.

$\triangle$ $[BC]$ es la línea media del triángulo $O'AD$ (fig. 2.26), $[AC]$ y $[DB]$ son sus medianas. Por eso, $\overrightarrow{O'A} = 2\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{O'D} = 2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OC} = (1/3)\,\overrightarrow{AC} = (1/3)\,((1/2)\,(\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{AD})) = (1/6)\,(\overrightarrow{AO'} + (\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'D})) = (1/3)\,\overrightarrow{AO'} + (1/6)\,\overrightarrow{O'D} = -(2/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = -(2/3)\,\overrightarrow{BA} + (4/3)\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO'} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CD} = -(2/3)\,\overrightarrow{BA} + (2/3)\,\overrightarrow{CD}$. Por consiguiente, las fórmulas del paso del sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$ al sistema de coordenadas $\{O', \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$ tienen la forma

$$x = -(2/3)\,x' - (2/3)\,y' - 2/3, \qquad y = (1/3)\,x' + (4/3)\,y' - 2/3. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 8. En un plano está dado un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Los puntos $A\,(1;\ 1)$, $B\,(0;\ -3)$, $C\,(2;\ 2)$ son vértices del triángulo ABC. Hallar las coordenadas del N, punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$. Escribir las fórmulas del paso del sistema de coordenadas $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ al sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$.

$\triangle$Determinemos las coordenadas $(x_N; y_N)$ del punto N por la fórmula (2.38): $x_N = (1/3)(1 + 0 + 2) = 1$; $y_N = (1/3)(1 - 3 + 2) = 0$, tomando que el plano del triángulo ABC coincide con el plano de coordenadas Oxy de un sistema espacial de coordenadas, es decir, que $z_A = z_B = z_C = z_N = 0$.

Hallemos las fórmulas del paso del sistema de coordenadas $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ en el plano (ABC) al sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$. Sea que el punto M tiene coordenadas (x^*, y^*) en el sistema de coordenadas $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ y tiene coordenadas $(x'; y')$ en el sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$, es decir, $\overrightarrow{NM} = x^*\overrightarrow{NO} + y^*\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{BC}$. Empleando la relación $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}$ que se utiliza cuando se deducen las fórmulas del paso y descomponiendo todos los vectores según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, obtenemos

$$x^*(-\overrightarrow{ON}) + y^*(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{ON} + x'(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) +$$
$$+ y'(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}), \text{ o bien}$$
$$x^*(-\vec{e}_1) + y^*((2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) + \vec{e}_1 -$$
$$- x'(-3\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) - y'((2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) + 3\vec{e}_2) - \vec{0}.$$

Empleando la independencia lineal de los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, obtenemos el sistema de ecuaciones $-x^* + y^* + 1 + x' - 2y' = 0$, $y^* + 4x' - 5y' = 0$. Al resolverla respecto a x^* e y^* hallamos

$$x^* = -3x' + 3y' + 1,\ y^* = -4x' + 5y'. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 9 (ecuaciones en coordenadas de una recta). Sea que en un espacio se dan un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y dos puntos diferentes $A(x_A; y_A; z_A)$ y $B(x_B; y_B; z_B)$. Escribir el sistema de ecuaciones que determina la recta (AB), es decir, un sistema de ecuaciones que es satisfecho por las coordenadas $(x; y; z)$ de un punto arbitrario M $(x; y; z)$ de la recta (AB), y sólo por ellas.

△ Empleemos la ecuación paramétrica vectorial de la recta $l = (AB)$ [véase el ejemplo 6 del § 3 de este capítulo y la fórmula (2.5)]. El punto M $(x; y; z)$ se sitúa en la recta l si, y sólo si, existe un número t tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{a}$ donde $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Puesto que la igualdad vectorial es equivalente a las tres igualdades en coordenadas, obtenemos que $M \in l$ si, y sólo si,

$$x = x_A + ta_x, \; y = y_A + ta_y,$$
$$z = z_A + ta_z \; (a_x = x_B - x_A, \qquad a_y = y_B - y_A,$$
$$a_z = z_B - z_A) \qquad (2.46)$$

para un $t \in R$. Los puntos A y B son diferentes y, por eso, al menos una de las coordenadas $(a_x; a_y; a_z)$ del vector director $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ de la recta l es distinta de cero. Sea, por ejemplo, $a_x \neq 0$. Entonces, expresando t de la primera ecuación del sistema (2.46) $(t = (x - x_A)/a_x)$ y sustituyendo el valor hallado de t en la segunda y la tercera ecuaciones obtenemos el sistema de dos ecuaciones respecto a x, y, z que define la recta l en el espacio:

$$y - y_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_y, \quad z - z_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_z, \text{ o bien}$$
$$a_x(y - y_A) = a_y(x - x_A), \; a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A). \quad (2.47)$$

Habitualmente el sistema (2.47) se escribe en forma simétrica

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y} = \frac{z - z_A}{a_z} \qquad (2.48)$$

sobrentendiendo con esto que si el denominador de una de las fracciones es igual a cero, el numerador de ésta es también igual a cero [véase (2.47)]. Por ejemplo, si $a_y = 0$ y $a_z \neq 0$, el sistema de ecuaciones (2.48) se comprende así:

$$y = y_A, \; a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A).$$

Si $a_y = y_B - y_A = 0$ y $a_z = z_B - z_A = 0$, el sistema de ecuaciones (2.48) toma la forma $y = y_A$, $z = z_A$, es decir, describe la recta $l = (AB)$ que es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto A $(x_A; y_A; z_A)$. Las ecuaciones paramétricas (2.46) de esta recta tienen la forma $x = x_A + a_x t$, $y = y_A$, $z = z_A$, $t \in R$ $(a_x \neq 0)$.

Puesto que $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$, el sistema de ecuaciones (2.48) que definen la recta $l = (AB)$ que pasa por dos puntos dados A $(x_A; y_A; z_A)$ y B $(x_B; y_B; z_B)$ puede escribirse también en la forma

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \qquad (2.49)$$

Las ecuaciones del sistema (2.48), (2.49) se denominan *ecuaciones canónicas de la recta l en un espacio*. ▲

Ejemplo 10. En un sistema de coordenadas la recta l se da por las ecuaciones $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{0}$. Indicar las coordenadas de cualesquiera dos puntos de esta recta.

△ Escribamos las ecuaciones de la recta l en forma paramétrica [compárese con (2.48) y (2.46)]:

$$x = 1 - 2t,\ y = -3 + t,\ z = 5 + 0 \cdot t.$$

Cuando $t = 0$, obtenemos las coordenadas de un punto de la recta l: A $(1; -3; 5)$, cuando $t = 1$, las del segundo punto: B $(-1; -2; 5)$. Se puede hallar las coordenadas de los puntos A y B también del modo siguiente: restamos las coordenadas del punto A $(x_A; y_A; z_A)$ de las variables x, y, z en las ecuaciones canónicas (2.48), de donde por las ecuaciones dadas de la recta l hallamos $x_A = 1$, $y_A = -3$, $z_A = 5$; las coordenadas del punto B $(x_B; y_B; z_B)$ se obtienen de la condición de igualdad del vector director $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = 0$ de la recta $l = (AB)$ al vector $\overrightarrow{AB}$ [compárese con (2.48) y (2.49)]: $x_B - x_A = -2$, $y_B - y_A = 1$, $z_B - z_A = 0$, es decir, $x_B = x_A - 2 = -1$, $y_B = -2$, $z_B = 5$. ▲

Ejemplo 11. En un sistema de coordenadas las rectas l_1 y l_2 están dadas por las ecuaciones canónicas

$$l_1:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1},\quad l_2:\ \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}.$$

Aclarar si se intersecan estas rectas.

$\triangle$Las rectas l_1 y l_2 se intersecan si, y sólo si, existe un punto M cuyas coordenadas (x^*, y^*, z^*) satisfacen tanto las ecuaciones de la recta l_1 como las de la l_2, es decir, el sistema de cuatro ecuaciones siguientes:

$$x^* - 1 = 2(y^* - 2), \quad z^* - 3 = y^* - 2, \quad x^* = y^* - 3,$$
$$z^* = 2(y^* - 3). \tag{2.50}$$

Si este sistema tiene solución, ésta se determina de las primeras tres ecuaciones y debe automáticamente satisfacer la cuarta. De las tres primeras ecuaciones hallemos: $x^* = -3$, $y^* = 0$, $z^* = 1$. Sustituyendo los valores hallados en la cuarta ecuación, obtenemos $1 = 2\cdot(0-3)$. Hay una contradicción. El sistema de ecuaciones (2.50) no tiene soluciones, es decir, l_1 y l_2 no se intersecan.▲

Ejemplo 12 (problema de división de un segmento en la razón dada). En un espacio sean dados un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y dos puntos distintos A $(x_A; y_A; z_A)$ y B $(x_B; y_B; z_B)$. Un punto M se encuentra en el segmento $[AB]$ y lo divide en la razón $\lambda = |AM| : |MB|$. Determinar las coordenadas del punto M.

$\triangle$Según la fórmula (2.6), tenemos $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda+1} \times$ $\times (\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB})$. Sustituyendo en esta igualdad las descomposiciones de los vectores según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y basándonos en la propiedad de linealidad de las coordenadas y la 1ª propiedad de las coordenadas de vectores obtenemos:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda+1}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda+1}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda+1}. \ ▲ \tag{2.51}$$

Ejemplo 13. En un paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tenemos: A (1; 1; 1), B (2; —1; 0), C (1; 1; 2), D_1 (3; 3; 2), N es el punto medio de $[AD]$, el punto M divide el segmento $[CC_1]$ en la razón $|C_1M| : |MC| = 2$. Escribir las ecuaciones canónicas de la recta $l = (MN)$ en aquel sistema de coordenadas, en el cual están dadas las coordenadas de los puntos A, B, C, D_1.

$\triangle$Sean $(x_D; y_D; z_D)$ las coordenadas del punto D (fig. 2.27). El vector $\overrightarrow{AD}$ tiene las coordenadas $(x_D - 1; y_D - 1; z_D - 1)$. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{BC}$ son:

$(1-2;\ 1-(-1);\ 2-0)=(-1;\ 2;\ 2)$. Los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son iguales y por eso sus coordenadas homónimas son iguales: $x_D-1=-1$, $y_D-1=2$, $z_D-1=2$, es decir, $x_D=0$, $y_D=3$, $z_D=3$. El punto N es el punto medio del segmento $[AD]$ (lo divide en la razón $1:1$). Por consiguiente, $x_N=(x_A+x_D)/2=1/2$, $y_N=(y_A+y_D)/2=2$, $z_N=2$. Sean $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ las coordenadas del punto C_1. De la igualdad de los vectores $\overrightarrow{CC_1}$ y $\overrightarrow{DD_1}$, obtenemos: $\alpha-1=3-0$, $\beta-1=3-3$, $\gamma-2=2-3$, es decir, $\alpha=4$, $\beta=1$, $\gamma=1$. Por las fórmulas (2.51) de la división de un segmento en la razón dada, tenemos: $x_M=(\alpha+2x_C)/3=(4+2\cdot1)/3=2$, $y_M=(\beta+2y_C)/3=(1+2\cdot1)/3=1$, $z_M=(\gamma+2z_C)/3=5/3$. Por consiguiente, las ecuaciones canónicas de la recta (MN) tienen la forma

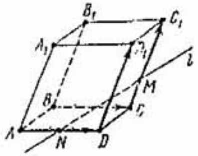


Fig. 2.27

$$\frac{x-1/2}{2-1/2}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-2}{5/3-2},\ \text{o bien}\ \frac{x-1/2}{3/2}=$$
$$=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-1/3}.\ \blacktriangle$$

Si l: $\dfrac{x-\alpha}{a_x}=\dfrac{y-\beta}{a_y}=\dfrac{z-\gamma}{a_z}$ y L: $\dfrac{x-\lambda}{b_x}=\dfrac{y-\mu}{b_y}=\dfrac{z-\nu}{b_z}$ son dos rectas dadas por las ecuaciones canónicas en un sistema de coordenadas en un espacio, entonces $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ y $\vec{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$ son vectores directores de estas rectas. Las rectas l y L son paralelas si, y sólo si, son colineales sus vectores directores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Según la condición de colinealidad, este hecho tiene lugar si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Sean $\mathcal{P}$ un plano, $\{O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ un sistema de coordenadas en el plano $\mathcal{P}$, $A\ (x_A;\ y_A)\in\mathcal{P}$ y $B\ (x_B;\ y_B)\in\mathcal{P}$ dos puntos distintos. Las ecuaciones paramétricas de la recta

$l = (AB)$ tienen la forma

$$x = x_A + ta_x,$$
$$y = y_A + ta_y \; (a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A),$$
$$t \in R. \qquad (2.52)$$

La ecuación canónica de la recta $l = (AB)$ en el plano $\mathcal{P}$ es:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - x_A}{y_B - y_A}, \text{ o bien} \qquad (2.53)$$

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y}. \qquad (2.54)$$

La ecuación (2.54) es equivalente a la ecuación

$$A^*x + B^*y + C^* = 0, \; (A^*)^2 + (B^*)^2 > 0, \qquad (2.55)$$

donde

$$A^* = y_B - y_A, \; B^* = x_A - x_B,$$
$$C^* = y_A x_B - x_A y_B. \qquad (2.56)$$

En virtud de la ecuación (2.55), el vector director $\vec{a} = (a_x; a_y)$ de la recta l en el plano $\mathcal{P}$ se determina según la regla $a_x = -B^*$, $a_y = A^*$.

En el caso plano, las fórmulas de división de un segmento en la razón dada tienen la forma

$$M \in [AB], \; \lambda = |AM| : |MB| \Leftrightarrow x_M = \\ = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1}, \; y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1}. \qquad (2.57)$$

Ejemplo 14. Hallar dos puntos A y B si se sabe que el punto $C(-5; 4)$ divide el segmento $[AB]$ en la razón $3:4$ y el punto $D(6; -5)$ lo divide en la razón $2:3$.

$\triangle$Sean $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Entonces según las fórmulas (2.57) tenemos:

$$-5 = \frac{x_A + (3/4)x_B}{3/4 + 1}, \quad 4 = \frac{y_A + (3/4)y_B}{3/4 + 1},$$
$$6 = \frac{x_A + (2/3)x_B}{2/3 + 1}, \quad -5 = \frac{y_A + (2/3)y_B}{2/3 + 1}.$$

Resolviendo el sistema obtenido de ecuaciones respecto a x_A, x_B, y_A, y_B hallamos: $x_A = 160$, $x_B = -225$, $y_A = -131$, $y_B = 184$; $A(160; -131)$, $B(-225; 184)$.$\blacktriangle$

Ejemplo 15. Escribir la ecuación de la mediana (AM) del triángulo ABC: $A(-5;\ 4)$, $B(3;\ 1)$, $C(2;\ -5)$.

△ El punto medio M del segmento $[BC]$ tiene las coordenadas $x_M = (x_B + x_C)/2 = 5/2$, $y_M = (y_B + y_C)/2 = -2$. Según la fórmula (2.53), la ecuación (AM) tiene la forma

$$\frac{x-(-5)}{5/2-(-5)} = \frac{y-4}{-2-4} \Longleftrightarrow \frac{x+5}{15/2} = \frac{y-4}{-6} \Longleftrightarrow 4x+5y=0. \ ▲$$

Ejemplo 16. Escribir la ecuación de la recta l que pasa por el punto $M(7;\ 4)$ y es paralela a la recta L cuya ecuación es $3x - 2y + 4 = 0$.

△ El vector director $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ de la recta L es $\vec{a} = (2;\ 3)$. Ya que $l \parallel L$, $\vec{a}$ es también vector director de l. Según la fórmula (2.54), la ecuación l es:

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-4}{3} \Longleftrightarrow 3x-2y-13=0. \ ▲$$

Ejemplo 17. Hallar las coordenadas de los vértices $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $D(x_D;\ y_D)$ del paralelogramo $ABCD$ si $C(3;\ -1)$, (AB): $x + y - 3 = 0$, (AD): $y = 2$.

△ El punto A es el punto común de las rectas (AB) y (AD). Por eso sus coordenadas $(x_A;\ y_A)$ satisfacen el sistema de ecuaciones $x_A + y_A - 3 = 0$, $y_A = 2$. Resolviéndolo hallamos $x_A = 1$, $y_A = 2$. El vector director $\vec{a}$ de la recta (AB) es igual a $\vec{a} = (-1;\ 1)$. Es también vector director de (CD). Por consiguiente, la ecuación (CD) tiene la forma

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} \Longleftrightarrow x+y-2=0.$$

De modo análogo se puede hallar que $y = -1$ es la ecuación de la recta (BC).

Las coordenadas de los puntos $B(x_B;\ y_B)$ y $D(x_D;\ y_D)$ satisfacen los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x_B + y_B - 3 = 0, \\ y_B = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_D = 2, \\ x_D + y_D - 2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas hallamos $x_B = 4$, $y_B = -1$, $x_D = 0$, $y_D = 2$. ▲

Ejemplo 18. En el paralelogramo $ABCD$ (fig. 2.28) el punto M es el punto medio del lado $[BC]$, el punto N es el punto medio del segmento $[MD]$, P, es el punto de intersección de las rectas (AN) y (CD). Hallar las coordenadas de los puntos C y D si se tiene A (1; 2), B (4; —1), P (2; 0). Hallar también en qué razón el punto P divide el segmento $[CD]$.

$\triangle$Sea D (α; β). De la igualdad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ se deduce que las coordenadas del punto C (x_C; y_C) son correspondientemente $x_C = \alpha + (x_B - x_A) = \alpha + 3$, $y_C = \beta + (y_B - y_A) = \beta - 3$. El punto M (x_M; y_M) es el punto medio de $[BC]$ y por eso $x_M = (x_B + x_C)/2 = (\alpha + 7)/2$, $y_M = (y_B + y_C)/2 = (\beta - 4)/2$. El punto N (x_N; y_N) es el punto medio de $[MD]$ y por eso $x_N = (x_M + x_D)/2 = (3\alpha + 7)/4$, $y_N = (y_M + y_D)/2 = (3\beta - 4)/4$. La ecuación de la recta (AP) tiene la forma

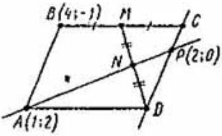


Fig. 2.28

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0.$$

El punto $N \in (AP)$. Por tanto, las coordenadas del punto N satisfacen la ecuación $2\,\frac{3\alpha+7}{4} + \frac{3\beta-4}{4} - 4 = 0$ o bien $2\alpha + \beta - 2 = 0$. Por la condición, el punto P (2; 0) se encuentra en la recta (DC) cuya ecuación es $\frac{x-\alpha}{(\alpha+3)-\alpha} = \frac{y-\beta}{(\beta-3)-\beta}$. Por consiguiente, $\frac{2-\alpha}{3} = \frac{0-\beta}{-3}$ o bien $\alpha + \beta - 2 = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones $2\alpha + \beta - 2 = 0$, $\alpha + \beta - 2 = 0$, hallamos $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Definitivamente tenemos D (0; 2), C (3; —1). La razón $\lambda = |CP| : |PD|$ en que el punto P divide el segmento $[CD]$ se determina de la relación

$$x_P = \frac{x_C + \lambda x_D}{\lambda + 1} \Leftrightarrow 2(\lambda + 1) = 3 + \lambda \cdot 0, \text{ o sea,}$$

$$\lambda = 1/2. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 19 (ecuación paramétrica vectorial del plano). Sea que en un espacio está fijado un polo O y están dados tres puntos M_1, M_2, M_3 no situados en una recta. Describir el conjunto de los radio vectores de todos los puntos del plano $\mathcal{P} = (M_1M_2M_3)$.

$\triangle$Sean $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2$, $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OM}_3$ radio vectores de los puntos M_1, M_2, M_3, respectivamente (fig. 2.29), $\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{c} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$. Los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base en el plano $\mathcal{P}$. Mediante $\vec{r}$ designemos el radio vector de un punto arbitrario $M \in \mathcal{P}$. El punto M se encuentra en el plano $\mathcal{P}$ si, y sólo si, el vector $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ se descompone según los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ [véase la fórmula (2.28) y el criterio del carácter coplanar de los vectores (véase el ejemplo 2 del § 5 de este capítulo)], es decir, existen

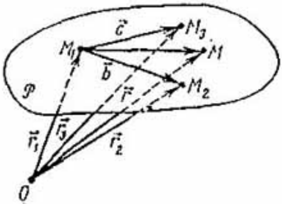


Fig. 2.29

números t y τ (dependientes de M) tales que $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{b} + \tau\vec{c}$ o bien

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \tau(\vec{r}_3 - \vec{r}_1). \qquad (2.58)$$

La relación

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{b} + \tau\vec{c}, \quad t \in R, \ \tau \in R \qquad (2.59)$$

se denomina *ecuación paramétrica vectorial del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto M_1 $(\vec{r}_1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.* Para t y τ reales arbitrarios, el segundo miembro de la relación (2.59) determina el conjunto de los radio vectores de todos los puntos del plano $\mathcal{P}$, y sólo ellos. ▲

La relación (2.59) puede escribirse en la forma

$$\vec{r} = \theta\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 + \tau\vec{r}_3, \quad \theta + t + \tau = 1. \qquad (2.60)$$

Si los puntos M_1 $(x_1; y_1; z_1)$, M_2 $(x_2; y_2; z_2)$, M_3 $(x_3; y_3; z_3)$ están dados por sus coordenadas en un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ cuyo origen es el polo O, la ecuación paramétrica vectorial del plano $\mathcal{P} = (M_1M_2M_3)$ es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + \tau(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + \tau(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + \tau(z_3 - z_1) \end{cases} \tag{2.61}$$

de tres ecuaciones escalares respecto a las coordenadas $(x; y; z)$ del punto $M \in \mathcal{P}$ y de números t y τ que dependen de M. Las ecuaciones del sistema (2.61) son ecuaciones paramétricas del plano $\mathcal{P}$.

Ejemplo 20 (ecuación en coordenadas de un plano). Sea que en un espacio está dado un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Demostrar que la ecuación de cualquier plano $\mathcal{P}$ que pasa por un punto $M_1(x_1; y_1; z_1)$ tiene la forma

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{2.62}$$

$\triangle$ En el plano $\mathcal{P}$ fijemos dos puntos más $M_2(x_2; y_2; z_2)$ y $M_3(x_3; y_3; z_3)$ de modo que M_1, M_2, M_3 no se encuentren en una recta. Pongamos $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $b_x = x_2 - x_1$, $b_y = y_2 - y_1$, $b_z = z_2 - z_1$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$, $c_x = x_3 - x_1$, $c_y = y_3 - y_1$, $c_z = z_3 - z_1$. El punto $M(x; y; z)$ se sitúa en el plano $\mathcal{P}$ si, y sólo si, los vectores $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares. Según la condición del carácter coplanar, este hecho tiene lugar si, y sólo si, las coordenadas del punto M satisfacen la ecuación

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0, \tag{2.63}$$

o bien $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, donde

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

La desigualdad $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ se deduce (véase el ejemplo 19 del § 5 de este capítulo) de la no colinealidad de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. ▲

La ecuación (2.63) se denomina *ecuación en coordenadas de un plano que pasa por el punto $M_1(x_1; y_1; z_1)$ y es para-*

lelo a los vectores $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ y $\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$. Se puede escribirlo también en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.64)$$

La ecuación (2.64) se llama ecuación del plano $\mathcal{P} = (M_1M_2M_3)$ que pasa por tres puntos dados. La ecuación (2.62) puede escribirse también en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0, \quad (2.65)$$

donde $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Ejemplo 21. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1\,(2;\ 3;\ 1)$, $M_2\,(3;\ 1;\ 4)$, $M_3\,(2;\ 1;\ 5)$.

$\triangle$Según (2.64), la ecuación del plano buscado es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \Longleftrightarrow x + 2y + z - 9 = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 22. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1\,(3;\ 7;\ 2)$ y es paralelo a las rectas l: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{2}$ y L: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{1}$.

$\triangle$El plano paralelo a las rectas l y L es también paralelo a los vectores directores $\vec{b} = (4;\ 1;\ 2)$ y $\vec{c} = (5;\ 3;\ 1)$ de estas rectas. Según la fórmula (2.63), la ecuación del plano buscado es

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 5x - 6y - 7z + 41 = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 23. Escribir la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $M_1\,(1;\ 0;\ -1)$ y contiene la recta l: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.

$\triangle$El punto $M_2\,(0;\ -1;\ 2)$ de la recta l se halla en el plano $\mathcal{P}$. Por consiguiente, el plano $\mathcal{P}$ es paralelo al vector $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$ y al vector $\vec{c} = (2;\ 3;\ 1)$, vector director de la recta l. Según la fórmula (2.63), la ecuación $\mathcal{P}$ tiene la forma

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-1) \\ 0-1 & -1-0 & 2-(-1) \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 \Longleftrightarrow 10x - 7y + z - 9 = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 24* (condición de paralelismo de dos planos). Demostrar que planos $\mathcal{P}_1$: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$ y $\mathcal{P}_2$: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$ son paralelos si, y sólo si, los vectores $\vec{N}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1) \neq \vec{0}$ y $\vec{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2) \neq \vec{0}$ son colineales, es decir, existe un número $\lambda \neq 0$ tal que

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \tag{2.66}$$

$\triangle$ Sean los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tales que para los coeficientes de sus ecuaciones se cumple la igualdad (2.66) cuando un $\lambda \neq 0$. Entonces la ecuación $\mathcal{P}_2$ tiene la forma $\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0$ o $A_1x + B_1y + C_1z + D_2/\lambda = 0$. Si $D_1 = D_2/\lambda$, las ecuaciones de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ coinciden, es decir, coinciden los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$; si $D_1 \neq D_2/\lambda$, el sistema de ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_2/\lambda = 0$ para buscar las coordenadas de puntos comunes de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es incompatible, o sea, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Phi$. En ambos casos los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos.

Pues, cambiando la constante D_1 en la ecuación del plano $\mathcal{P}_1$ se puede obtener las ecuaciones de los planos paralelos a $\mathcal{P}_1$. Comprobemos que de este modo se puede obtener las ecuaciones de todos los planos paralelos a $\mathcal{P}_1$. Si el plano $\mathcal{P}^*$ es paralelo a $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}^*$ puede obtenerse de $\mathcal{P}_1$ mediante la traslación paralela a un vector $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$. Por eso, si $\mathcal{P}^* \parallel \mathcal{P}_1$, el punto M^* $(x;\ y;\ z)$ pertenece al plano $\mathcal{P}^*$ si, y sólo si, el punto M_1 $(x - a_x;\ y - a_y;\ z - a_z)$ $(\overrightarrow{M_1M^*} = \vec{a},\ M^* = T_{\overrightarrow{M_1M^*}}(M_1))$ pertenece al plano $\mathcal{P}_1$, es decir, $A_1x + B_1y + C_1z + D^* = 0$, $D^* = D_1 - A_1a_x - B_1a_y - C_1a_z$. Así, una de las ecuaciones del plano $\mathcal{P}^*$ está obtenida de la ecuación del plano $\mathcal{P}_1$ al sustituir la constante D_1 por D^*.

Sea ahora que los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dados en el ejemplo 24 son paralelos. Entonces, en correspondencia a lo dicho en lo anterior, los planos $\mathcal{P}_1^*$: $A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0$ y $\mathcal{P}_2^*$: $A_2x + B_2y + C_2z = 0$ son también paralelos ($\mathcal{P}_1^* \parallel \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \parallel \mathcal{P}_2^*$) y no coinciden (el punto con las coordenadas $(0;\ 0;\ 0)$ se encuentra en el plano $\mathcal{P}_2^*$ y no se encuentra en el plano $\mathcal{P}_1^*$). Por consiguiente, los planos $\mathcal{P}_1^*$ y $\mathcal{P}_2^*$ no tienen puntos comunes y, por tanto, el sistema de ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z = -1$, $A_2x + B_2y + C_2z = 0$ no tiene solución. Con mayor razón no tiene solución cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0. \end{cases}$$

En correspondencia a la regla de Cramer (véase § 4 de este capítulo), el determinante de la matriz de cada uno de estos sistemas (Δ_{I}, Δ_{II}, Δ_{III}) es igual a cero. De este modo,

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En correspondencia a la condición de colinealidad (véase el ejemplo 19 del § 5 de este capítulo), los vectores $\vec{N}_1 \neq \vec{0}$ y $\vec{N}_2 \neq \vec{0}$ son colineales, es decir, $\vec{N}_2 = \lambda\vec{N}_1$ para un $\lambda \neq 0$. Escribiendo esta igualdad en las coordenadas, obtenemos (2.66). ▲

Ejemplo 25*. Sea $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, la ecuación del plano $\mathcal{P}$. Demostrar que existen vectores no colineales $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ y $\vec{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$ tales que

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}. \qquad (2.67)$$

Demostrar también que los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos al plano $\mathcal{P}$.

△ Sea $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ un punto arbitrario del plano $\mathcal{P}$. Entonces, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. El vector $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ es paralelo al plano $\mathcal{P}$ si, y sólo si, el punto $M_2(x_1 + a_x;\ y_1 + a_y;\ z_1 + a_z)$ se sitúa en el plano $\mathcal{P}$, es decir,

$$A(x_1 + a_x) + B(y_1 + a_y) + C(z_1 + a_z) + D = 0,$$

$$\text{o} \quad Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0. \qquad (2.68)$$

La condición (2.68) es condición necesaria y suficiente del paralelismo del vector $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ del plano $\mathcal{P}$: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Fijemos dos vectores no colineales arbitrarios $\vec{b}' = (b'_x;\ b'_y;\ b'_z)$ y $\vec{c}' = (c'_x;\ c'_y;\ c'_z)$ que son paralelos a $\mathcal{P}$. Entonces, debido a (2.63), una de las ecuaciones del plano $\mathcal{P}$ se escribirá en forma de $A'x +$

$+ B'y + C'z + D' = 0$, donde

$$A' = \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}, \quad -B' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix}, \quad C' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix};$$
$$D' = -A'x_1 - B'x_1 - C'z_1.$$

El plano $\mathcal{P}$ es paralelo a sí mismo. Teniendo en cuenta los resultados del ejemplo 24, hallemos un número λ tal que

$$A = \lambda A' = \lambda \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b'_y & \lambda b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},$$
$$C = \begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix}.$$

Esto significa que en calidad de los vectores buscados se puede tomar los $\vec{b} = \lambda \vec{b}'$ y $\vec{c} = \vec{c}'$.

Sea ahora que los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ satisfacen (2.67). Entonces,

$$Ab_x + Bb_y + Cb_z - b_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - b_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} +$$
$$+ b_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$
$$Ac_x + Bc_y + Cc_z = c_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

En correspondencia a la condición (2.68), cada uno de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es paralelo al plano $\mathcal{P}$. ▲

Ejemplo 26. La base de un prisma $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es el trapecio $ABCD$ ($(AB) \parallel (CD)$), $|CD| : |AB| = \lambda < 1$. Un plano que pasa por el punto B corta las aristas $[AA_1]$, $[CC_1]$ y la recta (DD_1) en los puntos M, N y P, respectivamente, con tal que $|AM| : |AA_1| = m$, $|CN| : |CC_1| = n$. Hallar la relación $|DP| : |DD_1|$.

△Pongamos $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{DD_1}$ (fig. 2.30). En el sistema de coordenadas $\{D, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ los vértices del prisma tienen las coordenadas A (1; 0; 0), B (x_B; y_B; 0), C (0; 1; 0), D (0; 0; 0), A_1 (1; 0; 1), B_1 (x_B; y_B; 1), C_1 (0; 1; 1), D_1 (0; 0; 1). Calculemos las coordenadas del punto B (x_B; y_B; 0) (este punto se encuentra en el plano (DAC) y por eso su tercera coordenada es igual a cero).

Según la condición, $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ o $\vec{e}_2 = \lambda ((x_B - 1)\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3)$. De aquí hallemos: $\lambda(x_B - 1) = 0$, $\lambda y_B = 1$, es decir, $x_B = 1$, $y_B = 1/\lambda$. Luego, según la condición $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1;\ y_M;\ z_M) = m\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{AA_1} = (0; 0; 1)$. Por consiguiente, $x_M - 1 = m\cdot 0 = 0$, $y_M = m\cdot 0 = 0$, $z_M = m\cdot 1 = m$, es decir, $M\ (1; 0; m)$. De modo análogo tenemos $N\ (0; 1; n)$. La ecuación del plano (BMN) tiene la forma [compárese con (2.64)]

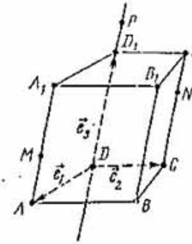


Fig. 2.30

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1/\lambda & z-0 \\ 1-1 & 0-1/\lambda & m-0 \\ 0-1 & 1-1/\lambda & n-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-1) - m\left(y-\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0.$$

El punto $P\ (0; 0; z_P)$ se halla en el eje de z-coordenadas, por eso sus dos primeras coordenadas son ceros. De la condición $P \in (BMN)$ obtenemos

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(0-1) - m\left(0-\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z_P}{\lambda} = 0, \text{ o sea,}$$

$$z_P = n + \lambda m.$$

Definitivamente tenemos

$$|DP| : |DD_1| = |z_P\vec{e}_3| : |\vec{e}_3| = |z_P| = n + \lambda m. \ ▲$$

Ejemplo 27*. Tomado un punto K dentro de un tetraedro $ABCD$. Los puntos A', B', C', D' son correspondientemente puntos de intersección de las rectas (AK), (BK), (CK), (DK) con los planos de las caras BCD, ACD, ABD, ABC.
Demostrar que

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1.$$

△ Escojamos un sistema de coordenadas $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. En este sistema de coordenadas se tiene $A\ (0; 0; 0)$, $B\ (1; 0; 0)$, $C\ (0; 1; 0)$, $D\ (0; 0; 1)$. Sea $K\ (m; n; p)$. Entonces $\overrightarrow{AK} = (m; n; p)$, $\overrightarrow{BK} = (m-1; n; p)$, $\overrightarrow{CK} = (m; n-1; p)$, $\overrightarrow{DK} = (m; n; p-1)$.

Las ecuaciones de las rectas son:

$$(AK):\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};\qquad (BK):\ \frac{x-1}{m-1}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};$$

$$(CK):\ \frac{x}{m}=\frac{y-1}{n-1}=\frac{z}{p};\quad (DK):\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{p-1}.$$

Las ecuaciones de los planos son:

$$(BCD):\ \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0\\ 0-1 & 1-0 & 0-0\\ 0-1 & 0-0 & 1-0\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow x+y+z-1=0.$$

$$(ACD):\ \begin{vmatrix} x & y & z\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow x=0;\quad (ABD):\ y=0;\quad (ABC):\ z=0.$$

Las coordenadas del punto $A' = (AK) \cap (BCD)$ las hallemos del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z-1=0,\\ x=mt,\\ y=nt,\\ z=pt \end{cases} \Longleftrightarrow A'\left(\frac{m}{m+n+p};\ \frac{n}{m+n+p};\ \frac{p}{m+n+p}\right).$$

Las coordenadas del punto B' satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x=0,\\ x=1+(m-1)\,t,\\ y=nt,\\ z=pt \end{cases} \Longleftrightarrow B'\left(0;\ \frac{n}{1-m};\ \frac{p}{1-m}\right).$$

De modo análogo hallemos $C'\left(\frac{m}{1-n};\ 0;\ \frac{p}{1-n}\right)$, $D'\left(\frac{m}{1-p};\ \frac{n}{1-p};\ 0\right)$.

Luego tenemos

$$\overrightarrow{A'A}=\left(\frac{-m}{m+n+p};\ \frac{-n}{m+n+p};\ \frac{-p}{m+n+p}\right).$$

$$\overrightarrow{A'K}=\left(m-\frac{m}{m+n+p};\ n-\frac{n}{m+n+p};\ p-\frac{p}{m+n+p}\right)=$$

$$=\left(\frac{-m\,(1-(m+n+p))}{m+n+p};\ \frac{-n\,(1-(m+n+p))}{m+n+p};\ \frac{-p\,(1-(m+n+p))}{m+n+p}\right).$$

Por consiguiente, $\overrightarrow{A'K}=(1-(m+n+p))\,\overrightarrow{A'A}$. Los vectores $\overrightarrow{A'K}$ y $\overrightarrow{A'A}$ son codirigidos y por eso $1-(m+n+p)>0$ y $\frac{|A'K|}{|AA'|}=$

$= 1-(m+n+p)$. De modo análogo se puede verificar que $|B'K|/|BB'| = m$, $|C'K|/|CC'| = n$, $|D'K|/|DD'| = p$. De esta manera,

$$\frac{|A'K|}{|AA'|}+\frac{|B'K|}{|BB'|}+\frac{|C'K|}{|CC'|}+\frac{|D'K|}{|DD'|}=$$
$$=1-(m+n+p)+m+n+p=1. \ \blacktriangle$$

§ 7. Proyección paralela

En un espacio consideremos un plano $\mathcal{P}$ y una recta l que no es paralela a éste (fig. 2.31). Se llama *proyección* $\Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$ *de un punto* M *sobre el plano* $\mathcal{P}$ *paralelamente a la recta* l a un punto $M^* \in \mathcal{P}$ tal que el vector $\overrightarrow{M^*M}$ es paralelo a la recta l. El punto M^* es el punto (único) de intersección del plano $\mathcal{P}$ con la recta que pasa por el punto M y es paralela a la recta l. Sea O el punto de intersección de la recta l con el plano $\mathcal{P}$. Consideremos el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base en el plano $\mathcal{P}$ y el vector $\vec{e}_3$ es paralelo a la recta l. Sean $(x_M; y_M; z_M)$ y $(x^*_M; y^*_M; z^*_M)$ las coordenadas de los puntos M y M^*, respectivamente, en este sistema de coordenadas.

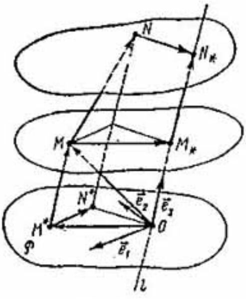


Fig. 2.31

Puesto que los vectores $\overrightarrow{M^*M} = (x_M - x^*_M;\ y_M - y^*_M;\ z_M - z^*_M)$ y $\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 1)$ son colineales, entonces

$$\begin{vmatrix} x_M - x^*_M & y_M - y^*_M \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M - x^*_M & z_M - z^*_M \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_M - y^*_M & z_M - z^*_M \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $x_M = x^*_M$, $y_M = y^*_M$. El punto M^* se encuentra en el plano $\mathcal{P} = Oxy$. Por eso su tercera coordenada z^*_M es igual a cero. De este modo, por las coordenadas

$(x_M; y_M; z_M)$ del punto M en el sistema dado de coordenadas se determinan las coordenadas del punto $M^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(M)$ según las fórmulas $x^*_M = x_M$, $y^*_M = y_M$, $z^*_M = 0$.

Llámase *proyección* $\Pi^l_{\mathscr{P}}(\overrightarrow{MN})$ *de un segmento dirigido* $\overrightarrow{MN}$ *sobre un plano* $\mathscr{P}$ *paralelamente a una recta* l a un segmento dirigido $\overrightarrow{M^*N^*}$, donde $M^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(M)$, $N^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(N)$. Si se tiene $M(x_M; y_M; z_M)$, $N(x_N; y_N; z_N)$, es decir, el vector $\overrightarrow{MN}$ tiene las coordenadas $(x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$ en una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, entonces $\overrightarrow{M^*N^*} = (x_N - x_M; y_N - y_M; 0)$.

Sea $\vec{d}$ *un vector. Su proyección* $\vec{d}^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(\vec{d})$ *sobre un plano* $\mathscr{P}$ *paralelamente a la recta* l se define del modo siguiente: $\vec{d}^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(\overrightarrow{MN})$, donde M y N son puntos arbitrarios del espacio tales que el segmento dirigido $\overrightarrow{MN}$ representa el vector $\vec{d}$. La definición dada es correcta, o sea, no depende de la elección del segmento dirigido $\overrightarrow{MN}$ que representa el vector $\vec{d}$.

□ En efecto, si $\vec{d} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$, entonces $x_L - x_K = x_N - x_M$, $y_L - y_K = y_N - y_M$; $z_L - z_K = z_N - z_M$ y, por eso, $\overrightarrow{K^*L^*} = (x_L - x_K; y_L - y_K; 0) = (x_N - x_M; y_N - y_M; 0) = \overrightarrow{M^*N^*}$. ■

Si en la base escogida anteriormente $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$, es decir, $\overrightarrow{MN} = (d_x; d_y; d_z)$, entonces en esta base $\vec{d}^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(\vec{d}) = (d_x; d_y; 0)$.

La operación de proyección de un vector sobre un plano $\mathscr{P}$ paralelamente a la recta l es lineal: para cualesquiera vectores $\vec{d}$ y $\vec{f}$ y cualesquiera números α y β es válida la igualdad

$$\Pi^l_{\mathscr{P}}(\alpha\vec{d} + \beta\vec{f}) = \alpha\Pi^l_{\mathscr{P}}(\vec{d}) + \beta\Pi^l_{\mathscr{P}}(\vec{f}). \qquad (2.69)$$

□ En efecto, si en la base dada en lo anterior $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$, $\vec{f} = (f_x; f_y; f_z)$, se tiene $\alpha\vec{d} + \beta\vec{f} = (\alpha d_x +$

$+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ \alpha d_z+\beta f_z)$. Por eso

$$\Pi^l_{\mathcal{P}}(\alpha\vec{d}+\beta\vec{f})=(\alpha d_x+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ 0).$$

Además, $\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{d})=(d_x;\ d_y;\ 0)$, $\alpha\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{d})=(\alpha d_x;\ \alpha d_y;\ 0)$, $\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{f})=(f_x;\ f_y;\ 0)$, $\beta\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{f})=(\beta f_x;\ \beta f_y;\ 0)$. También tenemos

$$\alpha\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{d})+\beta\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{f})=(\alpha d_x+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ 0).\ \blacksquare$$

Ejemplo 1 (criterio de paralelismo de la recta y el plano). ¿Bajo qué condición necesaria y suficiente la recta l: $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$ $(a_x^2+a_y^2+a_z^2>0)$ y el plano $\mathcal{P}$: $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ son paralelos?

$\triangle$La recta l es paralela al plano $\mathcal{P}$ si, y sólo si, el vector director $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ de la recta l es paralelo al plano $\mathcal{P}$: $Aa_x+Ba_y+Ca_z=0$ [véase la condición (2.68).] $\blacktriangle$

Ejemplo 2. En un espacio, están dados un plano $\mathcal{P}$: $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ y una recta l: $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$ $(a_x^2+a_y^2+a_z^2>0)$. Escribir las fórmulas que unen las coordenadas de un punto M $(x_M;\ y_M;\ z_M)$ del espacio y las coordenadas de su proyección M^* $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ sobre el plano $\mathcal{P}$ paralelamente a la recta l.

$\triangle$El vector $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ es el vector director de la recta l. Según la definición de proyección, existe un número $t=t_M$, dependiente de M y tal que $\overrightarrow{M^*M}=t\vec{a}$ o bien $x_M-x^*=ta_x$, $y_M-y^*=ta_y$, $z_M-z^*=ta_z$, es decir, $x^*=x_M-ta_x$, $y^*=y_M-ta_y$, $z^*=z_M-ta_z$. Las coordenadas $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ del punto M^* deben satisfacer la ecuación del plano $\mathcal{P}$: $A(x_M-ta_x)+B(y_M-ta_y)+C(z_M-ta_z)+D=0$. Teniendo en cuenta que $Aa_x+Ba_y+Ca_z\neq 0$ (véase el ejemplo 1), hallamos de aquí:

$$t_M=\frac{Ax_M+By_M+Cz_M+D}{Aa_x+Ba_y+Ca_z};$$

$$x^*=\frac{x_M(Ba_y+Ca_z)-a_x(By_M+Cz_M+D)}{Aa_x+Ba_y+Ca_z};$$

$$y^* = \frac{y_M(Aa_x + Ca_z) - a_y(Ax_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z};$$

$$z^* = \frac{z_M(Aa_x + Ba_y) - a_z(Ax_M + By_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}. \quad \blacktriangle \qquad (2.70)$$

Ejemplo 3. Hallar la proyección del vector $\vec{b} = (1; 0; -2)$ sobre el plano $\mathcal{P}$: $x - 2y + z - 4 = 0$ paralelamente a la recta l: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{1}$.

$\triangle$ Empleémos las fórmulas (2.70). El punto N (0; 0; 4) se encuentra en el plano $\mathcal{P}$ y por eso $N^* = \Pi^l_{\mathcal{P}}(N) = N$. Tomemos el punto M (1; 0; 2) de modo que $\overrightarrow{NM} = \vec{b}$. Por las fórmulas (2.70) tenemos para el punto $M^*(x^*; y^*; z^*) = \Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$:

$$x^* = \frac{1\cdot((-2)\cdot 1 + 1\cdot 1) - 2((-2)\cdot 0 + 1\cdot 2 - 4)}{1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1} = 3,$$

$$y^* = \frac{-1\cdot(1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 4)}{1} = 1, \quad z^* = 3.$$

Por consiguiente, $\Pi^l_{\mathcal{P}}(\vec{b}) = \overrightarrow{N^*M^*} = (3-0;\ 1-0;\ 3-4) = (3;\ 1;\ -1)$. $\blacktriangle$

Ejemplo 4*. En un tetraedro $ABCD$ los puntos D_1, A_1, B_1, C_1 son puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, respectivamente. Sean $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$, correspondientemente, los planos (ABC), (BCD), (CDA), (DAB); l_1, l_2, l_3, l_4, correspondientemente, las rectas (DD_1), (AA_1), (BB_1), (CC_1). Para un vector arbitrario $\vec{d}$, calcular el vector

$$\Gamma(\vec{d}) = \Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{d}) + \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\vec{d}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\vec{d}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{d}).$$

$\triangle$ Los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ no son coplanares y forman base en el espacio. El vector $\vec{d}$ se descompone según esta base: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Por eso, empleando la linealidad de la operación de proyección, obtenemos

$$\Gamma(\vec{d}) = \Gamma(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) + \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \{\alpha\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{a}) + \beta\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{b}) + \gamma\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{c})\} + \ldots + \{\alpha\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{a}) + \beta\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{b}) + \gamma\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{c})\} =$$

$$= \alpha\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{a}) + \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\vec{a}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\vec{a}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{a})\} + \beta\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{b}) + \ldots + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{b})\} + \gamma\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{c}) + \ldots + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{c})\} = \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}).$$

De este modo, para hallar $\Gamma(\vec{d})$ de cualquier vector $\vec{d}$ es suficiente saber sólo $\Gamma(\vec{a})$, $\Gamma(\vec{b})$, $\Gamma(\vec{c})$. Puesto que el vector $\vec{a}$ es paralelo a los planos $\mathcal{P}_3$ y $\mathcal{P}_4$ (el vector $\vec{a}$ que representa el segmento dirigido $\overrightarrow{DA}$ se halla en los planos $\mathcal{P}_3$ y $\mathcal{P}_4$), $\Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\vec{a}) = \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\vec{a}) = \vec{a}$. En correspondencia al resultado del ejemplo 12 del § 5 de este capítulo $\overrightarrow{DD_1} = (1/3)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Por eso (fig. 2.32), $\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\vec{a}) = \overrightarrow{D_1A} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DA} = \vec{a} - (1/3)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Según la propiedad de las medianas del triángulo BCD tenemos $\Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\vec{a}) = \overrightarrow{DA_1} = (1/3)(\vec{b} + \vec{c})$. Por consiguiente, $\Gamma(\vec{a}) = \vec{a} - (1/3)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (1/3)(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + \vec{a} = (8/3)\vec{a}$. De modo análogo hallamos $\Gamma(\vec{b}) = (8/3)\vec{b}$, $\Gamma(\vec{c}) = (8/3)\vec{c}$. Obtenemos definitivamente $\Gamma(\vec{d}) = \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}) = \alpha(8/3)\vec{a} + \beta(8/3)\vec{b} + \gamma(8/3)\vec{c} = (8/3)\vec{d}$ para cualquier vector $\vec{d}$. ▲

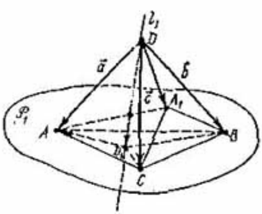


Fig. 2.32

En un espacio consideremos una recta l y un plano $\mathcal{P}$ no paralelo a l (véase fig. 2.31). Llámase *proyección* $\Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$ *de un punto* M *sobre la recta* l *paralelamente al plano* $\mathcal{P}$ a un punto $M_* \in l$ tal que el vector $\overrightarrow{MM_*}$ es paralelo a $\mathcal{P}$. El punto M_* es punto (único) de intersección de la recta l con el plano que pasa por el punto M y es paralelo al plano $\mathcal{P}$. En un sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (véase fig. 2.31) que tiene $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, base en el plano $\mathcal{P}$, $\vec{e}_3 \parallel l$, $O = l \cap \mathcal{P}$, las coordenadas del punto M_* $(x_{*M}; y_{*M}; z_{*M})$ se hallan por las coordenadas del punto M $(x_M; y_M; z_M)$ de las condiciones $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_*} + \overrightarrow{M_*M}$, $\overrightarrow{OM_*} \parallel e_3$, $\overrightarrow{MM_*} \parallel \mathcal{P}$. En el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, el plano $\mathcal{P}$ tiene la ecuación $z = 0$ (el plano $\mathcal{P}$ pasa por tres puntos con las coordenadas $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$ y $(0; 1; 0)$. Por eso, su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow z = 0.)$$

El vector $\overrightarrow{MM_*} = (x_{*M} - x_M;\ y_{*M} - y_M;\ z_{*M} - z_M)$ es paralelo al plano $\mathcal{P}$. En virtud del criterio (2.68), obtenemos $0 \cdot (x_{*M} - x_M) + 0 \cdot (y_{*M} - y_M) + 1\,(z_{*M} - z_M) = 0$, es decir, $z_{*M} = z_M$. Ya que el punto M_* se sitúa en el eje Oz sus dos primeras coordenadas son iguales a cero. De este modo, por las coordenadas dadas $(x_M; y_M; z_M)$ del punto M las coordenadas del punto $M_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$ se hallan de la manera siguiente: $M_*\,(0; 0; z_M)$.

Llámase *proyección* $\Pi_l^{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$ *de un segmento dirigido* $\overrightarrow{MN}$ *sobre una recta* l *paralelamente a un plano* $\mathcal{P}$ a un segmento dirigido $\overrightarrow{M_*N_*}$ donde $M_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$, $N_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(N)$. Si tenemos $M\,(x_M; y_M; z_M)$ y $N\,(x_N; y_N; z_N)$, el vector $\overrightarrow{M_*N_*}$ tiene las coordenadas $(0;\ 0;\ z_N - z_M)$.

Sea $\vec{d}$ un vector. Se denomina *proyección* $\vec{d}_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{d})$ *del vector* $\vec{d}$ *sobre una recta* l *paralelamente al plano* $\mathcal{P}$

a un vector $\vec{d}_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$, donde $\overrightarrow{MN}$ es el segmento arbitrario dirigido que representa el vector $\vec{d}$. Esta definición es correcta (no depende de la elección del segmento dirigido $\overrightarrow{MN}$ que representa el vector $\vec{d}$). Si en el sistema dado de coordenadas $\vec{d} = (d_x;\ d_y;\ d_z)$, se tiene $\Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{d}) = (0;\ 0;\ d_z)$. Ya que $\Pi_{\mathcal{P}}^l(\vec{d}) = (d_x;\ d_y;\ 0)$, para cualquier vector $\vec{d}$ se cumple la identidad

$$\Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{d}) - \Pi_{\mathcal{P}}^l(\vec{d}) = \vec{d}. \tag{2.71}$$

La operación de proyección de un vector sobre una recta l paralelamente al plano $\mathcal{P}$ posee la propiedad de **linealidad:**

$$\Pi_l^{\mathcal{P}}(\alpha\vec{d} + \beta\vec{f}) = \alpha\Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{d}) + \beta\Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{f}) \tag{2.72}$$

para cualesquiera vectores $\vec{d}$ y $\vec{f}$ y cualesquiera números α y β.

Ejemplo 5. En un sistema de coordenadas están dados un plano $\mathcal{P}$: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ y un punto $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$. Escribir la ecuación del plano $\mathcal{P}^*$ que es paralelo al plano $\mathcal{P}$ y pasa por el punto M_0.

$\triangle$La ecuación de cualquier plano $\mathcal{P}^*$, paralelo a $\mathcal{P}$, tiene la forma

$$Ax + By + Cz + D^* = 0.$$

La constante D^* se determina de la condición de que el punto $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ pertenece al plano buscado $\mathcal{P}^*$: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D^* = 0$ o bien $D^* = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. En definitiva, tenemos $\mathcal{P}^*$: $A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) + C\ (z - z_0) = 0$.▲

Ejemplo 6. En un sistema de coordenadas dadas el plano $\mathcal{P}$: $2x + y + z + 2 = 0$ y la recta l: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Hallar las coordenadas de la proyección $M_*\ (x_*;\ y_*;\ z_*)$ del punto $M\ (1;\ 2;\ 3)$ sobre la recta l paralelamente al plano $\mathcal{P}$.

$\triangle$La ecuación del plano que pasa por el punto M y es paralelo al plano $\mathcal{P}$ tiene la forma $2\cdot(x - 1) + 1\cdot(y - 2) + 1\cdot(z - 3) = 0 \iff 2x + y + z - 7 = 0$

(véase el ejemplo 5). El punto $M_*(x_*; y_*; z_*) = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$ es el punto de intersección de este plano con la recta l. Por eso, sus coordenadas se determinan partiendo del sistema de ecuaciones

$$2x_* + y_* + z_* - 7 = 0,$$
$$x_* - 1 = (1/2)\, y_*, \; z_* + 1 = -(1/2)\, y_* \Leftrightarrow x_* = 3,$$
$$y_* = 4, \; z_* = -3. \; \blacktriangle$$

Ejemplo 7*. En un tetraedro $ABCD$ los puntos M, N, Q, K, L, R son, correspondientemente, los puntos medios de las aristas $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$, $[AC]$, $[AB]$, $[BC]$. Sean $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_5$, $\mathcal{P}_6$ los planos (CMB), (ANC), (AQB), (DKB) (DLC), (DRA), respectivamente, y l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, las rectas (AD), (BD), (CD), (AC), (AB), (BC), respectivamente. Para un vector arbitrario $\vec{d}$ calcular el vector

$$\Gamma(\vec{d}) = \Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(\vec{d}) + \Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(\vec{d}) + \Pi_{l_3}^{\mathcal{P}_3}(\vec{d}) +$$
$$+ \Pi_{l_4}^{\mathcal{P}_4}(\vec{d}) + \Pi_{l_5}^{\mathcal{P}_5}(\vec{d}) + \Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(\vec{d}).$$

$\triangle$Los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ forman base en el espacio. El vector $\vec{d}$ se descompone según esta base: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Empleando la linealidad de la operación de proyección, tenemos

$$\Gamma(\vec{d}) = \Gamma(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{6} \left(\alpha\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{a}) + \beta\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{b}) + \gamma\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{c})\right) =$$
$$= \alpha \sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{a}) + \beta \sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{b}) + \gamma \sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\vec{c}) =$$
$$= \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c})$$

(compárese con el ejemplo 4). Hallemos $\Gamma(\vec{a})$. Ya que $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(A) = A$, $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(D) = D$, se tiene $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(\vec{a}) = \vec{a}$ (fig. 2.33).

Ya que $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(A) = N$, $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(D) = D$, se tiene $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(\vec{a}) = \overrightarrow{DN} = (1/2)\,\vec{b}$. De modo análogo tenemos $\Pi_{l_3}^{\mathcal{P}_3}(\vec{a}) = (1/2)\,\vec{c}$, $\Pi_{l_4}^{\mathcal{P}_4}(\vec{a}) = (\vec{a} - \vec{c})/2$, $\Pi_{l_5}^{\mathcal{P}_5}(\vec{a}) = (\vec{a} - \vec{b})/2$. Puesto que $\Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(A) = \Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(D) = R$, se tiene $\Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(\vec{a}) = \overrightarrow{RR} = \vec{0}$.

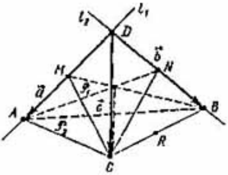


Fig. 2.33

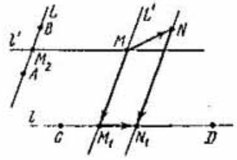


Fig. 2.34

Por consiguiente, $\Gamma(\vec{a}) = \vec{a} + (1/2)\,\vec{b} + (1/2)\,\vec{c} + (1/2)\,(\vec{a} - \vec{c}) + (1/2)\,(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = 2\vec{a}$. De modo análogo, $\Gamma(\vec{b}) = 2\vec{b}$, $\Gamma(\vec{c}) = 2\vec{c}$. Así, pues, para cualquier vector $\vec{d}$

$$\Gamma(\vec{d}) = \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}) = \alpha 2\vec{a} + \beta 2\vec{b} + \gamma 2\vec{c} = 2\vec{d}. \quad \blacktriangle$$

En un plano $\mathcal{P}$ consideremos dos rectas no paralelas l y L (fig. 2.34). Se llama *proyección* $\Pi_l^L(M)$ *de un punto* $M \in \mathcal{P}$ *sobre la recta* l *paralelamente a la recta* L a un punto $M_1 \in l$ tal que el vector $\overrightarrow{MM_1}$ es paralelo a L. El punto M_1 es el punto (único) de intersección de la recta l con la recta que pasa por el punto M y es paralela a la recta L. Sean M y N puntos del plano $\mathcal{P}$. Llámase *proyección* $\Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$ *del vector dirigido* $\overrightarrow{MN}$ *sobre la recta* l *paralelamente a la recta* L a un segmento dirigido $\overrightarrow{M_1N_1}$, donde $M_1 = \Pi_l^L(M)$, $N_1 = \Pi_l^L(N)$. Sea $\vec{d}$ un vector paralelo a plano $\mathcal{P}$. Se denomina *su proyección* $\Pi_l^L(\vec{d})$ *sobre la recta* l *paralelamente a la recta* L al vector $\vec{d}^* = \Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$, donde $\overrightarrow{MN}$ es el segmento dirigido que representa el vector $\vec{d}$ cuyo origen M y fin N se encuentran en el plano $\mathcal{P}$. La definición de proyección de un vector sobre una recta paralelamente a otra recta es correcta (no depende de la elección del segmento dirigido que representa el vector). La operación de proyección del vector sobre la recta l paralelamente a la recta L en el plano $\mathscr{P}$ es lineal:

$$\Pi_l^L(\alpha\vec{d}+\beta\vec{f})=\alpha\Pi_l^L(\vec{d})+\beta\Pi_l^L(\vec{f})$$

para cualesquiera vectores $\vec{d}\parallel\mathscr{P}$ y $\vec{f}\parallel\mathscr{P}$ y cualesquiera números α y β. Es válida la identidad

$$\vec{d}=\Pi_l^L(\vec{d})+\Pi_L^l(\vec{d}).$$

Ejemplo 8. Verificar que las rectas l: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}$ y L: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ se encuentran en un plano y no son paralelos. Hallar la proyección del punto M $(0;\ -4;\ -7)$ sobre la recta l paralelamente a la recta L.

$\triangle$ Dos rectas l y L no son paralelas porque sus vectores directores $\vec{b}=(1;\ -3;\ 1)$ y $\vec{c}=(1;\ -1;\ 3)$ no son colineales:

$$\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0,\quad -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Verifiquemos que estas rectas se intersecan (y, por lo tanto, se encuentran en un plano). Para esto comprobemos que el sistema de ecuaciones $x-2=(y+2)/(-3)$, $z-3=(y+2)/(-3)$, $x=-y+2$, $z=-3(y-2)-1$ tiene solución. De tres primeras ecuaciones hallemos: $x=1$, $y=1$, $z=2$. Sustituyendo las x, y, z halladas en la cuarta ecuación, obtenemos que $2=-3(1-2)-1$, es decir, esta ecuación se satisface también. De tal modo, las rectas l y L se intersecan en el punto N $(1;\ 1;\ 2)$.

Hallemos $\Pi_l^L(M)$. Para esto, por el punto M $(0;\ -4;\ -7)$ tracemos la recta paralela a L. Las ecuaciones de esta recta son $\frac{x-0}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+7}{3}$. El punto $\Pi_l^L(M)$ pertenece a la recta dada y a la recta l, por eso sus coordenadas se determinan del siguiente sistema de ecuaciones: $x=-y-4$, $z+7=-3(y+4)$, $x-2=-(y+2)/3$, $z-3=-(y+2)/3$. De tres primeras ecuaciones hallemos: $x=4$, $y=-8$, $z=5$. Las x, y, z halladas satisfacen también la cuarta ecuación.

Por consiguiente, $\Pi_l^L(M)$ tiene las coordenadas (4; —8; 5). ▲

Ejemplo 9. Dados en un plano cuatro puntos A (1; 2), B (2; 5), C (1; —1), D (3; —7). Sean $L = (AB)$, $l = (CD)$. Hallar un punto M tal que el punto $M_1 = \Pi_l^L(M)$ divida $[CD]$ en la razón 1 : 3 partiendo del punto C, y el punto $M_2 = \Pi_L^l(M)$ sea el punto medio de $[AB]$.

△Conforme a las fórmulas de división de un segmento en la razón dada, el punto M_1 tiene las coordenadas

$$x_1 = \frac{x_C + (1/3)\,x_D}{1+1/3} = \frac{3}{2}, \quad y_1 = \frac{(-1)+(1/3)(-7)}{1+1/3} = -\frac{5}{2},$$

las coordenadas del punto M_2 son $x_2 = 3/2$, $y_2 = 7/2$. Designemos $l' = (MM_2)$, $L' = (MM_1)$ (fig. 2.34). Por la definición de proyección, $l' \parallel l$, $L' \parallel L$. Por consiguiente, $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ es vector director de la recta L' que pasa por el punto M_1 (3/2; —5/2). Por eso, la ecuación L': $\frac{x-3/2}{1} = \frac{y+5/2}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 7 = 0$. El vector director de la recta l' es el vector $\overrightarrow{CD} = (2; -6)$, $M_2 \in l'$. Por consiguiente, la ecuación l': $\frac{x-3/2}{2} = \frac{y-7/2}{-6} \Leftrightarrow 3x + y - 8 = 0$. Al resolver el sistema de ecuaciones $3x - y - 7 = 0$, $3x + y - 8 = 0$, hallamos las coordenadas del punto $M\left(x = \frac{5}{2},\ y = \frac{1}{2}\right)$ que es punto de intersección de las rectas l' y L'. ▲

§ 8. Algunos ejemplos

Ejemplo 1. Dado el triángulo ABC. Señalar un punto M tal que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

△ Puesto que $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$, entonces $(-\overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB}$, o $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC}$, es decir, el punto M se encuentra en la prolongación del lado $[AC]$ tras el punto C con tal que $|AM| = 3\,|AC|$. ▲

Ejemplo 2. Demostrar que para cualquier juego finito de los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (en un espacio o en un plano) existe un punto M (y, además, sólo uno) tal que $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$. Señalar la posición del punto M en los siguientes casos particulares: 1) $A_1A_2A_3$ es triángulo; 2) $A_1A_2A_3A_4$ es cuadrilátero espacial o plano; 3) $A_1A_2 \ldots A_n$ es n-ágono regular (plano).

$\triangle$ Fijemos un polo O. Para cualquier punto M se cumplen las igualdades $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}) + \ldots + (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}) - n\overrightarrow{OM}$. De aquí se deduce que M es el punto buscado si, y sólo si,

$$\overrightarrow{OM} = (1/n)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}), \qquad (2.73)$$

es decir, el punto M es el extremo del vector $\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$ trazado del punto O. Por consiguiente, el punto buscado M existe siempre y es único.

1) El triángulo $A_1A_2A_3$. En este caso $\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$. Como el polo O tomemos el punto A_1. Entonces, $\overrightarrow{A_1M} = (1/3)(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}) = \frac{2}{3}\,\frac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}}{2}$. Por consiguiente, el punto M se encuentra en la mediana del triángulo $A_1A_2A_3$, trazada del vértice A_1, y la divide en la razón $2:1$, partiendo del vértice A_1. Si en calidad del polo O tomemos el punto A_2 (o A_3), obtenemos que M se halla también en la mediana trazada del vértice A_2 (A_3) y la divide en la razón $2:1$. Se puede deducir que las *medianas de cualquier triángulo se intersecan en un punto* («centro de gravedad» del triángulo) *tal que la suma de los vectores que van de este punto a los vértices del triángulo es igual a* $\vec{0}$. Este punto divide cada una de las medianas en la razón $2:1$. Con respecto a cualquier polo O, el radio vector del centro de gravedad M del triángulo $A_1A_2A_3$ se halla por la fórmula

$$\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}).$$

2) El cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. En este caso $\overrightarrow{OM} = (1/4)(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4)$. Sean P y Q los puntos medios de los lados $[A_1A_4]$ y $[A_2A_3]$, respectivamente (fig. 2.35). En calidad del polo fijemos el punto A_1. Tenemos

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \left(\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_3}\right) + \overrightarrow{A_1A_4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}}{2}\right) = \overrightarrow{A_1P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

$\Bigg[$hemos utilizado el hecho de que (véase el ejemplo 5 del § 2 de este capítulo) $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}}{2}\Bigg]$. De este modo, el punto M se sitúa en el segmento que une los puntos medios de los segmentos $[A_2A_3]$ y $[A_1A_4]$ y lo divide por la mitad.

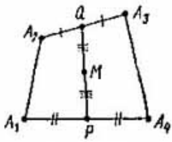


Fig. 2.35

Corolario. *En el tetraedro, los segmentos que unen los puntos medios de las aristas cruzadas tienen un punto común M que es el punto medio de cada uno de estos segmentos. La suma de los vectores que van del punto M a los vértices del tetraedro es igual a $\vec{0}$.*

3) El n-ágono regular $A_1A_2 \ldots A_n$. En este caso $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_n)$. Como el polo O escojamos el punto A_1. Si $n = 2k$ es el número par, los vectores $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_{2k}}$, $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{2k-1}}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_1A_{k+2}}$, $\overrightarrow{A_1A_{k+1}}$ se dirigen por la bisectriz del $\angle A_2A_1A_{2k}$ (fig. 2.36, *a*). Si $n = 2k + 1$ es impar, por la bisectriz del $\angle A_2A_1A_{2k+1}$ se dirigen los vectores $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_{2k+1}}$, $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{2k}}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_{k+1}} + \overrightarrow{A_1A_{k+2}}$ (fig. 2.36, *b*). En ambos casos, el vector $\overrightarrow{A_1M} = (1/n) \times ((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_n}) + (\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{n-1}}) + \ldots)$ tiene

la misma dirección (la de la bisectriz del $\angle A_2A_1A_n$). Por lo tanto, el punto M se sitúa en la bisectriz del $\angle A_2A_1A_n$. Si en calidad del polo fijamos el punto A_2, obtenemos que M se encuentra en la bisectriz del

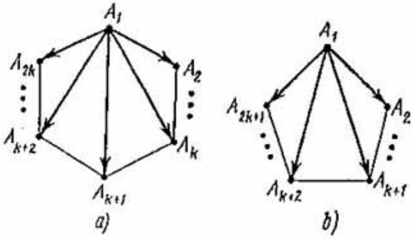


Fig. 2.36

$\angle A_1A_2A_3$. Se puede deducir que M es el centro del polígono $A_1A_2 \ldots A_n$. De este modo, *la suma de los vectores que van del centro de un n-ágono regular a sus vértices es igual a* $\vec{0}$. ▲

Ejemplo 3. Demostrar que, en el tetraedro, los segmentos que unen los vértices con los centros de gravedad de las caras opuestas tienen punto común que los divide en la razón 3 : 1, partiendo del vértice.

△Sean A, B, C, D los vértices de un tetraedro. Sean $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, Q, el centro de gravedad de la cara ACD, M, el punto que se sitúa en el segmento $[QB]$ y lo divide en la razón 3 : 1, partiendo del vértice B (fig. 2.37). Según la fórmula del ejemplo 2, $\overrightarrow{BQ} = (1/3)(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = (1/3)\ ((\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{b}) + (\vec{c} - \vec{b})) = (\vec{a} + \vec{c})/3 - \vec{b}$. Por tanto,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} - \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{4} - \frac{3}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{4} - \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}).$$

es decir, el punto M es un punto (véase el ejemplo 2) para el cual se cumple la condición

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}. \qquad (2.74)$$

De este modo, el punto M — del ejemplo 2 (p. 2) — construido para el tetraedo $ABCD$ se encuentra en el segmento, que une el vértice B con el centro de gravedad Q

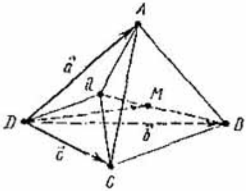


Fig. 2.37

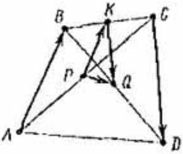


Fig. 2.38

de la cara opuesta, y divide el segmento $[QB]$ en la razón $3:1$, partiendo del vértice.

Realizando los razonamientos análogos para el vértice C (D o A) llegamos a la conclusión de que el mismo punto M determinado de la condición (2.74) se encuentra en el segmento que une C (D o A) con el centro de gravedad de la cara opuesta, y lo divide en la razón $3:1$. ▲

Ejemplo 4. En un espacio están fijados cuatro puntos distintos: A, B, C y D. Los puntos P y Q son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $[AC]$ y $[BD]$. Demostrar que $\overrightarrow{PQ} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

△Sea K el punto medio de $[BC]$ (fig. 2.38). Entonces $[PK]$ es la línea media del $\triangle ABC$ y por eso $\overrightarrow{PK} = (1/2)\overrightarrow{AB}$. De modo análogo, $\overrightarrow{KQ} = (1/2)\overrightarrow{CD}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KQ} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$. ▲

Ejemplo 5. Sean A, B, C, D, E, F, G, H puntos arbitrarios en un espacio o un plano, M, N, P, Q, M', N', P', Q', R, S, R', S' son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DE]$, $[AH]$, $[GF]$, $[HG]$, $[FE]$, $[MN]$, $[PQ]$, $[M'N']$, $[P'Q']$ (fig. 2.39). Demostrar que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$.

△Conforme a la fórmula para la línea media de un cuadrilátero espacial (véase el ejemplo 5 del § 2 de este capítulo), tenemos: $\overrightarrow{RS} = (1/2)(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ})$, $\overrightarrow{NP} = (1/2)\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{MQ} = (1/2)(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE})$. Por eso, $\overrightarrow{RS} = (1/2)((1/2)\overrightarrow{DB} + (1/2)\overrightarrow{BD} + (1/2)\overrightarrow{AE}) = (1/4)\overrightarrow{AE}$. Análogamente,

$$\overrightarrow{R'S'} = (1/2)\left(\overrightarrow{N'P'} + \overrightarrow{M'Q'}\right) = (1/2)\left((1/2)\overrightarrow{FH} + (1/2)(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AE})\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. En un hexágono convexo arbitrario $ABCDEF$ están unidos los puntos medios de los lados,

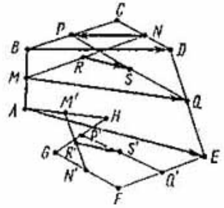


Fig. 2.39

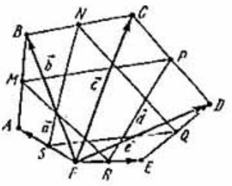


Fig. 2.40

uno sí otro no. Demostrar que los puntos de intersección de las medianas de los dos triángulos formados coinciden.

△Sean S, M, N, P, Q, R los puntos medios de los lados $[FA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, respectivamente. Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{FA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{FB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{FD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{FE}$ (fig. 2.40). Como el polo tomemos el vértice F del hexágono y calculemos respecto al polo F los radio vectores de los puntos K y L que son centros de gravedad de los triángulos MPR y SNQ, respectivamente. Tenemos: $\overrightarrow{FM} = (1/2)(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{FP} = (1/2)(\vec{c} + \vec{d})$, $\overrightarrow{FR} = (1/2)\vec{e}$, $\overrightarrow{FS} = (1/2)\vec{a}$, $\overrightarrow{FN} = (1/2)(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{FQ} = (1/2)(\vec{d} + \vec{e})$.

Según las fórmulas del ejemplo 2, tenemos:

$$\overrightarrow{FK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FR}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\vec{e}\right)=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}),\ \overrightarrow{FL}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FQ}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{e})\right)=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}),$$

es decir, $\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{FK}$. ▲

Ejemplo 7. Dado el triángulo ABC, $[AN]$ es su mediana. Por un punto arbitrario F del segmento $[AN]$ están trazadas las rectas (CF) y (BF) hasta la intersección con los lados $[AB]$ y $[AC]$ en los puntos M y P, respectivamente. Demostrar que $CPMB$ es trapecio si $F\neq A$ y $F\neq N$.

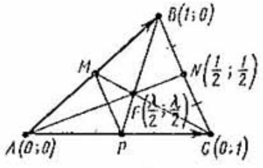


Fig. 2.41

△ Introduzcamos el sistema de coordenadas $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ (fig. 2.41). En este sistema de coordenadas se tiene $A\ (0;0)$, $B\ (1;0)$, $C\ (0;1)$, $N\ (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{AN}=(1/2;1/2)$. El punto F se sitúa en el segmento $[AN]$ con tal que $F\neq A$, $F\neq N$. Por consiguiente, $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AN}$ para un $\lambda\in(0;1)$ y $F\ (\lambda/2;\lambda/2)$. Las ecuaciones de las rectas son:

$$(BF):\ \frac{x-1}{\lambda/2-1}=\frac{y-0}{\lambda/2-0}\iff\lambda x-(\lambda-2)\,y-\lambda=0;$$

$$(CM):\ \frac{x-0}{\lambda/2-0}=\frac{y-1}{\lambda/2-1}\iff(\lambda-2)\,x-\lambda y+\lambda=0;$$

$$(AC):\ x=0;\ (AB):\ y=0.$$

Las coordenadas del punto $P=(BF)\cap(AC)$ se determinan del sistema de ecuaciones $\lambda x-(\lambda-2)\,y-\lambda=0$, $x=0\iff x=0$, $y=\frac{\lambda}{2-\lambda}$, es decir, $P\left(0;\ \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. De modo análogo, $M\left(\frac{\lambda}{2-\lambda};\ 0\right)$ y, por tanto, $\overrightarrow{MP}=$

$= \left(-\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. Ya que $\overrightarrow{BC} = (-1; 1)$, se tiene $\overrightarrow{MP} = \frac{\lambda}{2-\lambda}\overrightarrow{BC}$, es decir, $(MP) \parallel (BC)$, $|MP| \neq |BC|$ y $CPMB$ es trapecio. ▲

Ejemplo 8*. Hallar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales tres rectas l_i: $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $A_i^2 + B_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$ en el plano tengan punto común.

□ Tres rectas l_1, l_2, l_3 tienen un punto común si, y sólo si, existen números x_0, y_0 (las coordenadas de este punto) tales que

$$C_1 = -x_0A_1 - y_0B_1, \quad C_2 = -x_0A_2 - y_0B_2, \quad C_3 = \\ = -x_0A_3 - y_0B_3. \qquad (2.75)$$

Si, al fijar una base en el espacio, introducimos los vectores $\vec{a} = (A_1; A_2; A_3)$, $\vec{b} = (B_1; B_2; B_3)$, $\vec{c} = (C_1; C_2; C_3)$, entonces, para estos tres vectores, la condición (2.75) significa que el vector $\vec{c}$ puede descomponerse en los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por consiguiente, si las rectas l_1, l_2, l_3 tienen un punto común, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.76)$$

La condición (2.76) es la condición necesaria de existencia de un punto común de las rectas l_1, l_2, l_3. Examinemos la suficiencia de esta condición. Si los vectores $\vec{a} = (A_1; A_2; A_3)$ y $\vec{b} = (B_1; B_2; B_3)$ no son colineales, de la condición (2.76) se desprende que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares: el vector $\vec{c}$ es paralelo al plano en el que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman la base. Conforme a la fórmula (2.38), se cumple la condición (2.75) para unos x_0 e y_0. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales, entonces ora $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$: $A_1 = \lambda B_1$, $A_2 = \lambda B_2$, $A_3 = \lambda B_3$ y la condición (2.75) toma la forma $C_1 = -(\lambda x_0 + y_0)B_1$, $C_2 = -(\lambda x_0 + y_0)B_2$, $C_3 = -(\lambda x_0 + y_0)B_3$, es decir, $\vec{c} = -(\lambda x_0 + y_0)\vec{b}$, ora $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} = \mu\vec{a}$: $B_i = \mu A_i$, $i = 1, 2, 3$, y la condición (2.75) se convierte en la condición $\vec{c} = -(x_0 + \mu y_0)\vec{a}$. De este modo, la condición necesaria y suficiente bajo la cual tres rectas l_i: $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $A_i^2 + B_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$, tiene un punto común es la siguiente:

$$\Delta = 0 \text{ y ora } \vec{a} \nparallel \vec{b} \text{ ora } \vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}. \qquad (2.77)$$

Si $\Delta = 0$, $a \nparallel \vec{b}$, entonces l_1, l_2, l_3 tienen un solo punto común [el vector $\vec{c}$ se descompone según la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ del modo único (con los coeficientes $-x_0$, $-y_0$)]. Si $\Delta = 0$ y $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son colineales, la descomposición (2.75) no es única (si $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ y $\vec{c} = \lambda'\vec{b}$, las relaciones (2.75) se cumplen para x_0, y_0 arbitrarios unidos mediante la relación $\lambda x_0 + y_0 = -\lambda'$; si $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} = \mu\vec{a}$ y $\vec{c} = \mu'\vec{a}$, las igualdades (2.75) tienen lugar para cualesquiera x_0, y_0 tales que $x_0 + \mu y_0 = -\mu'$). Resulta, pues, que si $\Delta = 0$ y $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, las rectas l_1, l_2, l_3 tienen un solo punto común. Si $\Delta = 0$ y $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$, las tres rectas coinciden. ■

Ejemplo 9*. En los lados (o las prolongaciones de los lados) de un triángulo ABC están escogidos los puntos $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in CA)$, así que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$. Demostrar que la igualdad

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \alpha\beta\gamma \qquad (2.78)$$

es condición suficiente y necesaria para que las rectas (AN), (BP) y (CM) ora se intersequen un en punto ora sean paralelas de dos en dos.

△Introduzcamos el sistema de coordenadas $\{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$. En este sistema de coordenadas se tiene A 0; 0), B (0; 1), C (1; 0), M (0; α), N (β; $1-\beta$), P ($1-\gamma$; 0). Las ecuaciones de las rectas son:

$$(AN):\ \frac{x-0}{\beta-0} = \frac{y-0}{(1-\beta)-0} \Leftrightarrow (1-\beta)x - \beta y = 0;$$

$$(BP):\ \frac{x-0}{(1-\gamma)-0} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow x + (1-\gamma)y - (1-\gamma) = 0;$$

$$(CM):\ \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{\alpha-0} \Leftrightarrow \alpha x + y - \alpha = 0.$$

La condición necesaria de intersección de estas tres rectas en un punto [compárese con (2.76)] es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\beta & -\beta & 0 \\ 1 & 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 =$$

$$= (1-\beta)\begin{vmatrix} 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - (-\beta)\begin{vmatrix} 1 & -(1-\gamma) \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

[compárese con (2.78)]. Si $(AN) \parallel (BP)$, los vectores directores $\vec{n} = (\beta;\ 1 - \beta)$ y $\vec{p} = (1 - \gamma;\ -1)$ de estas rectas son colineales. Según la condición de colinealidad,

$$(AN) \parallel (BP) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1-\gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta =$$

$$= -(1-\beta)(1-\gamma) \qquad (2.79)$$

[si $\vec{e}$ es un vector arbitrario no paralelo al plano (ABC), entonces en la base $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \vec{e}\}$ se tiene $\vec{n} = (\beta;\ 1-\beta;\ 0)$, $\vec{p} = (1 - \gamma;\ -1;\ 0)$ y la relación (2.79) se obtiene fácilmente del criterio (2.35)]. De modo análogo, si $(BP) \parallel (CM)$, se tiene $\vec{p} \parallel \vec{m}$, $\vec{p} = (1-\gamma;\ -1)$, $\vec{m} = (-1;\ \alpha)$, es decir,

$$(BP) \parallel (CM) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\gamma & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma = -(1-\alpha).$$

$$(2.80)$$

Si las rectas (AN), (BP) y (CM) son paralelas de dos en dos, de las relaciones (2.79) y (2.80) obtenemos $\beta\alpha\gamma = (1 - \beta)(1 - \gamma)(1 - \alpha)$, es decir (2.78) es la condición necesaria del cumplimiento de las relaciones $(AN) \parallel (BP) \parallel (CM)$.

Mostremos la suficiencia de la condición (2.78). Si esta condición se cumple y los vectores tridimensionales $\vec{a} = (1 - \beta;\ 1;\ \alpha)$ y $\vec{b} = (-\beta;\ 1 - \gamma;\ 1)$ no son colineales, entonces, en virtud de los resultados obtenidos en el ejemplo 8, las rectas (AN), (BP), (CM) tienen un punto común que, además, es único.

Sea ahora que se cumple la relación (2.78) y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales:

$$\begin{vmatrix} 1-\beta & 1 \\ -\beta & 1-\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ & -\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \\ 1-\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $1 = \gamma(1 - \beta)$, $1 = \beta(1 - \alpha)$, $1 = \alpha(1 - \gamma)$, o bien

$$\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ \beta = 1/(1 - \alpha),\ \gamma = -(1 - \alpha)/\alpha. \quad (2.81)$$

Al sustituir los valores de β y γ en los coeficientes de las ecuaciones de las rectas, deducimos que las ecuaciones de las rectas (AN), (BP), (CM) son las siguientes: (AN): $\alpha x + y = 0$; (BP): $\alpha x + y = 1$; (CM): $\alpha x + y = \alpha$. Cualesquiera dos de estas ecuaciones son incompatibles, es decir, (AN), (BP) y (CM) son paralelas de dos en dos. ▲

Si las rectas indicadas en el ejemplo 9 se intersecan en un punto, entonces, cualquiera que sea el polo O, el radio vector $\vec{r}$ de este punto respecto al polo O se expresa mediante los radio vectores $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r}_C = \overrightarrow{OC}$ por la fórmula

$$\vec{r} = \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}\vec{r}_A + \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}\vec{r}_B + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}\vec{r}_C. \tag{2.82}$$

Ejemplo 10. Deducir la fórmula (2.82).

△Sea que las rectas (AN), (BP) y (CM) se intersecan en un punto $Q(x; y)$ (y, por consiguiente, se cumple la igualdad (2.78) con tal que [véase (2.81)] $\alpha(1-\gamma) \neq 1$). Entonces, $(x; y)$ es solución del sistema de ecuaciones $x + (1-\gamma)y = 1-\gamma$, $\alpha x + y = \alpha$. Tenemos $x = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}$, $y = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$. Por tanto, $\vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + x(\vec{r}_C - \vec{r}_A) + y(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (1-x-y)\vec{r}_A + y\vec{r}_B + x\vec{r}_C$. Luego,

$$1-x-y = \frac{1-\alpha(1-\gamma)-(1-\gamma)(1-\alpha)-\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)};$$

$$x = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\alpha\gamma+(1-\alpha)} =$$

$$= \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)/\beta+(1-\alpha)} = \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)};$$

$$y = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)+\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma/(1-\beta)+\gamma} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}$$

La fórmula (2.82) queda demostrada. ▲

Ejemplo 11. Empleando el resultado del ejemplo 9, demostrar que en el triángulo se intersecan en un punto: a) las medianas; b) las bisectrices; c) las alturas; d) las rectas que pasan por los vértices del triángulo y dividen su perímetro por la mitad; c) las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos situados en los lados opuestos y que son de tangencia de la circunferencia inscrita en este triángulo.

△ Sean $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ (fig. 2.42).

a) Según la definición de mediana, los puntos M, N, P son las bases de las medianas $[CM]$, $[AN]$, $[BP]$ cuando, y sólo cuando, $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$. En este caso, $(1-\alpha) = (1-\beta) = (1-\gamma) = 1/2$. Por consiguiente, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1/8 = \alpha\beta\gamma$. La condición (2.78) queda cumplida. Las relaciones (2.81) no están cumplidas ($\beta(1-\alpha) = 1/4 \neq 1$). Por lo tanto, las medianas del triángulo se intersecan en un punto. Por la fórmula

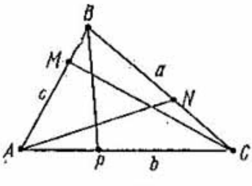


Fig. 2.42

(2.82), el radio vector $\vec{r}_1$ de este punto es

$$\vec{r}_1 = \frac{{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}{1-{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}\vec{r}_A + \frac{{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}{1-{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}\vec{r}_B + \frac{{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}{1-{}^1/_2 \cdot {}^1/_2}\vec{r}_C = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

b) Si $[AN]$, $[BP]$ y $[CM]$ son las bisectrices del triángulo ABC, según la propiedad de la bisectriz (véase el ejemplo 10 del § 3 de este capítulo) $\alpha = b/(a+b)$, $1-\alpha = a/(a+b)$, $\beta = c/(b+c)$, $1-\beta = b/(b+c)$, $\gamma = a/(a+c)$, $1-\gamma = c/(a+c)$. Por eso, $\alpha\beta\gamma = \dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, es decir, la condición (2.78) queda cumplida. Las relaciones (2.81) no se cumplen $\left(\beta(1-\alpha) = \dfrac{ac}{(a+b)(b+c)} < 1\right)$. Por consiguiente, las bisectrices del triángulo se intersecan en un punto. Por la fórmula (2.82), el radio vector $\vec{r}_2$ de este punto

$$\vec{r}_2 = \frac{\frac{a}{a+c}\,\frac{a}{a+b}}{1-\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{a+c}}\vec{r}_A + \frac{\frac{b}{a+b}\,\frac{b}{b+c}}{1-\frac{c}{b+c}\,\frac{a}{a+b}}\vec{r}_B + \frac{\frac{c}{b+c}\,\frac{c}{a+c}}{1-\frac{a}{a+c}\,\frac{b}{b+c}}\vec{r}_C = \frac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a+b+c}.$$

c) Si $[AN]$, $[BP]$ y $[CM]$ son las alturas del triángulo ABC, se tiene: $\alpha = \dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{|AC|\cos\hat{A}}{|AB|} = \dfrac{b}{c}\cos\hat{A} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}\cos\hat{A}$ si

$\angle A$ es agudo o recto; si $\angle A$ es obtuso, se tiene (fig. 2.43):

$$\alpha = -\frac{|AM|}{|AB|} = -\frac{|AC|}{|AB|}\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{b}{c}\cos\hat{A} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}\cos\hat{A},$$

es decir, en todos los casos $\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}\cos\hat{A}$. De modo análogo,

$1-\alpha = \frac{a}{c}\cos\hat{B} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}}\cos\hat{B}$, $\beta = \frac{c}{a}\cos\hat{B} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}\cos\hat{B}$, $1-\beta =$ $= \frac{b}{a}\cos\hat{C} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}\cos\hat{C}$, $\gamma = \frac{a}{b}\cos\hat{C} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}}\cos\hat{C}$, $1-\gamma =$ $= \frac{c}{b}\cos\hat{A} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}}\cos\hat{A}$. Por eso $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) =$ $= \frac{a}{c}\cos\hat{B}\,\frac{b}{a}\cos\hat{C}\,\frac{c}{b}\cos\hat{A} = \cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C} = \alpha\beta\gamma$ y la condición (2.78) queda cumplida. Las relaciones (2.81) no se cumplen

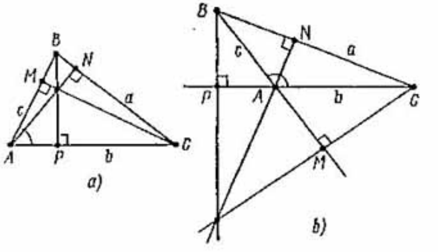


Fig. 2.43

$(\beta(1-\alpha) = \cos^2\hat{B} < 1)$. Por consiguiente, *las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro* del triángulo. El radio vector $\vec{r}_3$ de este punto se halla por la fórmula (2.82):

$$\vec{r}_3 = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}}}{1-\dfrac{b}{c}\cos\hat{A}\,\dfrac{c}{b}\cos\hat{A}}\,\vec{r}_A + \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\hat{B}\cos\hat{A}\cos\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{C}}}{1-\dfrac{c}{a}\cos\hat{B}\,\dfrac{a}{c}\cos\hat{B}}\,\vec{r}_B +$$

$$+\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\hat C\cos\hat B\cos\hat A}{\operatorname{sen}\hat B\operatorname{sen}\hat A}}{1-\dfrac{a}{b}\cos\hat C\,\dfrac{b}{a}\cos\hat C}\vec r_C=$$

$=\operatorname{ctg}\hat B\operatorname{ctg}\hat C\vec r_A+\operatorname{ctg}\hat C\operatorname{ctg}\hat A\vec r_B+\operatorname{ctg}\hat A\operatorname{ctg}\hat B\vec r_C.$

d) Si en el ejemplo 9 los puntos M, N, P son tales que las rectas (AN), (BP), (CM) dividen (cada una a su lugar), el perímetro del triángulo $2p=a+b+c$ por la mitad, entonces $|AC|+|AM|=p$, $\alpha=\dfrac{|AM|}{|AB|}=\dfrac{p-b}{c}>0$ (el punto M está situado en el segmento $[AB]$). De modo análogo, $1-\alpha=(p-a)/c$, $\beta=(p-c)/a$, $1-\beta=(p-b)/a$, $\gamma=(p-a)/b$, $1-\gamma=(p-c)/b$. Por eso,

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\frac{p-a}{c}\,\frac{p-b}{a}\,\frac{p-c}{b}=\alpha\beta\gamma$$

y la condición (2.78) queda cumplida. Las relaciones (2.81) no se cumplen puesto que

$$\beta(1-\alpha)=\frac{p-c}{a}\,\frac{p-a}{c}=\frac{ac-p(a+c-p)}{ac}=1-\frac{p(p-b)}{ac}<1.$$

Por consiguiente, las rectas dadas se intersecan en un punto. Empleando las identidades

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{(p-a)^2}{bc-(p-b)(p-c)}=\frac{(p-a)^2}{p(b+c-p)}=$$
$$=\frac{(p-a)^2}{p(2p-a-p)}=\frac{p-a}{p},$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}=\frac{(p-b)^2}{ac-(p-c)(p-a)}=\frac{p-b}{p},\ \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}=\frac{p-c}{p},$$

hallamos el radio vector r_4 del punto común de las rectas (AN), (BP) y (CM) por la fórmula (2.82):

$$\vec r_4=\frac{p-a}{p}\vec r_A+\frac{p-b}{p}\vec r_B+\frac{p-c}{p}\vec r_C=3\vec r_1-2\vec r_2.$$

e) Si, en el ejemplo 9, M, N, P son los puntos en los cuales la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$ es tangente a sus lados $[AB]$, $[BC]$ y $[CA]$, entonces, según la propiedad de las tangentes trazadas de un punto a la circunferencia, tenemos:

$\alpha c=|AM|=|AP|=(1-\gamma)b$, $\quad(1-\alpha)c=|BM|=|BN|=\beta a$, $(1-\beta)a=|CN|=|CP|=\gamma b$ (fig. 2.44). De estas relaciones hallamos: $\alpha=(p-a)/c$, $1-\alpha=(p-b)/c$, $\beta=(p-b)/a$, $1-\beta=$

$= (p-c)/a$, $\gamma = (p-c)/b$, $1-\gamma = (p-a)/b$. Por eso,

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \frac{p-b}{c}\,\frac{a}{p-c}\,\frac{b}{p-a} = \alpha\beta\gamma$$

y la relación (2.78) queda cumplida. La relación (2.81) no se cumple porque

$$\beta(1-\alpha) = \frac{p-b}{a}\,\frac{p-b}{c} =$$

$$= 1 - \frac{(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+(p-c)(p-b)}{ac} < 1.$$

Por consiguiente, las rectas (AN), (BP), (CM) se intersecan en un punto. Empleando las identidades

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^2} =$$

$$= \frac{(p-b)(p-c)}{(p-a+p-c)(p-a+p-b)-(p-a)^2} =$$

$$= \frac{(p-b)(p-c)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = (p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+(p-c)(p-b);$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)} = \frac{(p-a)(p-c)}{\varepsilon}; \quad \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)} = \frac{(p-a)(p-b)}{\varepsilon},$$

hallamos el radio vector $\vec{r}_5$ del punto común de las rectas dadas:

$$\vec{r}_5 = \frac{(p-b)(p-c)\vec{r}_A + (p-c)(p-a)\vec{r}_B + (p-a)(p-b)\vec{r}_C}{(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)}$$

Ejemplo 12*. Demostrar que si dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ (en un plano o en un espacio) están situados de modo que las rectas —que unen, respectivamente, los vértices A y A_1, B y B_1, C y C_1—se intersecan en un punto O y ningunos dos entre los lados correspondientes son paralelos, entonces tres puntos de intersección de los lados correspondientes se encuentran en una recta.

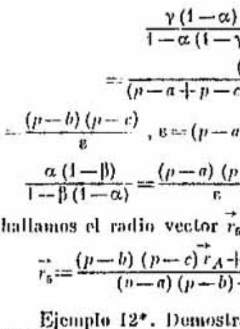


Fig. 2.44

$\triangle$ Sea O el polo. Hagamos $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c}$. Entonces existen los números conocidos (puesto que la posición de los puntos A, B, C está dada) p, q, r tales que $\overrightarrow{OA} = -p\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = -q\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = -r\vec{c}$. Mediante M designemos el punto de intersección de las rectas (A_1C_1) y (AC) (estas rectas se intersecan puesto que se sitúan en un plano (OAC) y no son paralelos), mediante N (Q) designemos el punto de intersección de las rectas (A_1B_1) y (AB) $[(B_1C_1)$ y $(BC)]$, mediante $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ designemos los radio vectores de los puntos M, N, Q, respectivamente. Calculemos el vector $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}$. El punto M se encuentra en la recta (A_1C_1). Por eso existe un número (desconocido) t tal que $\vec{r}_1 = t\vec{a} + (1 - t)\vec{c}$. Ya que $M \in (AC)$ se tiene $\vec{r}_1 = \tau(-p\vec{a}) + (1 - \tau)(-r\vec{c})$ para un $\tau \in R$. De este modo, obtenemos el sistema de ecuaciones: $\vec{r}_1 = t\vec{a} + (1 - t)\vec{c}$, $\vec{r}_1 = -\tau p\vec{a} - (1 - \tau) r\vec{c}$. Al igualar los segundos miembros de estas ecuaciones y emplear la independencia lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$, obtenemos $t = -\tau p$, $1 - t = -(1 - \tau) r$.

De aquí $\tau = (1 + r)/(r - p)$, $t = -(p(1 + r))/(r - p)$ por esto

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM} = \frac{p(1+r)}{p-r}\vec{a} + \frac{r(1+p)}{r-p}\vec{c}.$$

De modo análogo,

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{ON} = \frac{p(1+q)}{p-q}\vec{a} + \frac{q(1+p)}{q-p}\vec{b},$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OQ} = \frac{q(1+r)}{q-r}\vec{b} + \frac{r(1+q)}{r-q}\vec{c}.$$

Para los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MQ}$ obtenemos las expresiones

$$\overrightarrow{MN} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{1+p}{(p-r)(p-q)}\{p(q-r)\vec{a} + q(r-p)\vec{b} + r(p-q)\vec{c}\}.$$

$$\overrightarrow{MQ} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \frac{1+r}{(r-p)(q-r)}\{p(q-r)\vec{a} + q(r-p)\vec{b} + r(p-q)\vec{c}\}.$$

Por consiguiente, los vectores $\overrightarrow{MQ}$ y $\overrightarrow{MN}$ son colineales y, por lo tanto, los puntos M, N, Q están situados en una recta. ▲

Ejemplo 13. Sean $ABCD$ un cuadrilátero arbitrario, K, L, M, N los centros de gravedad de los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB, respectivamente. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en el mismo punto de intersección de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $KLMN$.

△Sea O un polo fijo. Conforme a los resultados del ejemplo 2 para los puntos Q y Q' que son los puntos de intersección de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos en los cuadriláteros $ABCD$ y $KLMN$, respectivamente, se cumplen las igualdades $\overrightarrow{OQ} = (1/4)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OQ'} = (1/4)(\overrightarrow{OK} +$

$+ \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$. En el mismo ejemplo 2 se demuestra que $\overrightarrow{OK} = (1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OL} = (1/3) \times (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$, $\overrightarrow{ON} = (1/3)(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. De este modo, $\overrightarrow{OQ'} = (1/4)(1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (1/4)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OQ}$, es decir, $Q' = Q$. Al mismo tiempo, notemos que $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OQ} = (1/12)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}) = -(1/3)\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{QL} = -(1/3)\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QM} = -(1/3)\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QN} = -(1/3)\overrightarrow{QC}$, o sea, $KLMN$ es imagen de $ABCD$ para la homotecia con el centro Q y el coeficiente $-1/3$. ▲

Ejemplo 14*. La longitud del lado de la base NPQ de la pirámide triangular $MNPQ$ es igual a 2, la longitud de la altura es igual a 3. El vértice A del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se encuentra en el centro O de la base de la pirámide, el vértice C está en la altura $[OM]$ y el segmento $[BC_1]$ se sitúa en el plano (MNP). Hallar la longitud de la arista del cubo.

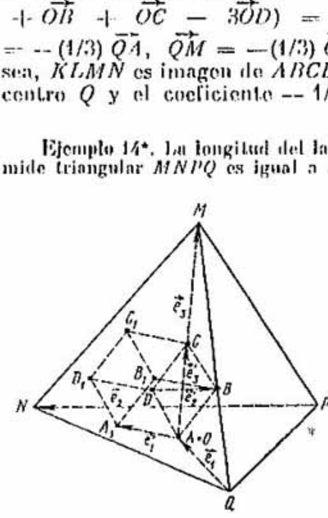


Fig. 2.45

△ Pongamos $|AB| = a$ e introduzcamos dos sistemas de coordenadas: el «viejo» $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el «nuevo» $\{A, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, tomando $\vec{e}_1 = \overrightarrow{QO}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{PN}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OM}$, $\vec{e}\,'_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{e}\,'_2 = \overrightarrow{DB}$, $\vec{e}\,'_3 = \overrightarrow{AC}$ (fig. 2.45). El sistema «viejo» de coordenadas está vinculado con la pirámide, el «nuevo», con el cubo. Según la condición, $C \in [OM]$ y $A = O$, por eso los vectores $\vec{e}_3$ y $\vec{e}\,'_3$ son codirigidos y, en virtud de que $|OM| = 3$, $|AC| = |AB|\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, tenemos (véase el ejemplo 7 del § 3 de este capítulo) $\vec{e}\,'_3 = (1/3) \times a\sqrt{2}\vec{e}_3$. Los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ son coplanares: son paralelos al plano (NPQ). Por consiguiente, $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $\{O, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$ son dos sistemas de coordenadas en el plano (NPQ). Consideremos estos sistemas de coordenadas más detalladamente.

Los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son paralelos a las rectas (QO) y (PN), respectivamente. $(QO) \perp (PN)$ y, por tanto, los ejes Ox y Oy del sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son mutuamente perpendiculares. De modo análogo, puesto que los vectores $\vec{e}_1'$ y $\vec{e}_2'$ son, respectivamente, paralelos a las rectas (AA_1) y (DB), y $(AA_1) \perp (DB)$, los ejes Ox' y Oy' del sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ son también mutuamente perpendiculares. Así, en el plano (NPQ) hay dos sistemas de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ con el origen común O y, además, los ejes de cada uno de ellos son mutuamente perpendiculares. En este caso, se puede obtener el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ del sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ora por medio de

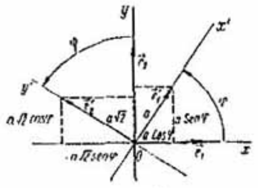


Fig. 2.46

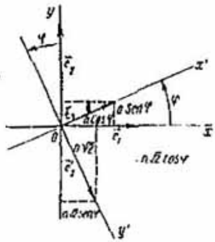


Fig. 2.47

la rotación en un ángulo φ $(0^\circ \leqslant \varphi < 360^\circ)$ en la dirección positiva (es decir, en sentido contrario al de las manecillas del reloj) (fig. 2.46), ora por medio de la rotación en un ángulo φ y la aplicación simétrica posterior respecto al eje Ox' (fig. 2.47). Cuál de estos dos casos se realiza depende del orden de numeración de los vértices de la cara $ABCD$ del cubo. En la fig. 2.45 el orden de numeración corresponde al segundo caso.

Hallemos las fórmulas del paso del sistema "viejo" de coordenadas al "nuevo". Sea que el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ puede obtenerse del sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mediante la rotación en un ángulo φ (véase fig. 2.46). Entonces, puesto que $|\vec{e}_1| = 2/\sqrt{3}$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_1'| = a$, $|\vec{e}_2'| = a\sqrt{2}$, se tiene $\vec{e}_1' = (1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi\,\vec{e}_1 + (1/2)\,a\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = -(1/2)\,a\sqrt{6}\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{e}_1 + (1/2)\,a\sqrt{2}\cos\varphi\,\vec{e}_2$, y como $\vec{e}_3' = (1/3)\,a\sqrt{2}\,\vec{e}_3$ concluimos que en este caso las fórmulas del paso tienen la forma

$$x = (1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi x' - (1/2)\,a\sqrt{6}\,\text{sen}\,\varphi y',$$
$$= (1/2)\,a\,\text{sen}\,\varphi x' + (1/2)\,a\sqrt{2}\cos\varphi y',$$
$$z = (1/3)\,a\sqrt{2}\,z'. \tag{2.83}$$

Si el sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ puede obtenerse del sistema de coordenadas $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mediante la rotación en un ángulo φ y la simetría posterior respecto al eje Ox' (fig. 2.47), se tiene: $\vec{e}_1' = (1/2)\ a\ \sqrt{3}\cos\varphi\vec{e}_1 + (1/2)\ a \operatorname{sen}\varphi\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = (1/2)\ a\ \sqrt{6}\ \times$ $\times \operatorname{sen}\varphi\vec{e}_1 - (1/2)\ a\ \sqrt{2}\cos\varphi\vec{e}_2$ y, como sigue siendo $\vec{e}_3' =$ $= (1/3)\ a\ \sqrt{2}\,\vec{e}_3$, en este caso, las fórmulas del paso tienen la forma

$$\begin{aligned} x &= (1/2)\ a\ \sqrt{3}\cos\varphi x' + (1/2)\ a\ \sqrt{6}\operatorname{sen}\varphi y', \\ y &= (1/2)\ a \operatorname{sen}\varphi x' - (1/2)\ a\ \sqrt{2}\cos\varphi y', \\ z &= (1/3)\ a\ \sqrt{2}\, z'. \end{aligned} \tag{2.84}$$

En el sistema «viejo» de coordenadas se tiene $M(0;\ 0;\ 1)$, $N(1/2;\ 1/2;\ 0)$, $P(1/2;\ -1/2;\ 0)$ y, por eso, de acuerdo con las fórmulas (2.64), en el sistema «viejo» de coordenadas la ecuación del plano (MNP) tiene la forma

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1/2-0 & 1/2-0 & 0-1 \\ 1/2-0 & -1/2-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \iff x\begin{vmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$- y\begin{vmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x + z - 1 = 0.$$

En el sistema «nuevo» de coordenadas: $B(0;\ 1/2;\ 1/2)$, $C_1(1;\ 0;\ 1)$. Si las fórmulas del paso del sistema «viejo» de coordenadas al «nuevo» se determinan por las igualdades (2.83), entonces en el sistema «viejo» de coordenadas tenemos $B\ ((-1/4)\ a\ \sqrt{6}\ \operatorname{sen}\varphi;$ $(1/4)\ a\ \sqrt{2}\cos\varphi;\ (1/6)\ a\ \sqrt{2})$, $C_1\ ((1/2)\ a\ \sqrt{3}\cos\varphi;\ (1/2)\ a \operatorname{sen}\varphi;$ $(1/3)\ a\ \sqrt{2})$. Ya que, según la condición, los puntos B y C_1 pertenecen al plano (MNP), son válidas las igualdades $2\ ((-1/4)\ a\ \times$ $\times\ \sqrt{6}\operatorname{sen}\varphi) + (1/6)\ a\ \sqrt{2} - 1 = 0$, $2\ ((1/2)\ a\ \sqrt{3}\cos\varphi) +$ $+ (1/3)\ a\ \sqrt{2} - 1 = 0$. De aquí hallemos que $\operatorname{sen}\varphi =$ $= (a - 3\sqrt{2})/(3a\ \sqrt{3})$, $\cos\varphi = (3 - a\ \sqrt{2})/(3a\ \sqrt{3})$ y, como $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, obtenemos para a la ecuación

$$\frac{(a-3\sqrt{2})^2}{27a^2} + \frac{(3-a\sqrt{2})^2}{27a^2} = 1 \iff 8a^2 + 4\sqrt{2}\,a - 9 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación y teniendo en cuenta que $a > 0$, hallamos $a = (2\sqrt{5} - \sqrt{2})/4$.

Si las fórmulas del paso del sistema «viejo» de coordenadas al «nuevo» se determinan por las igualdades (2.84), en el sistema «viejo» de coordenadas tenemos $B\ ((1/4)a\sqrt{6}\operatorname{sen}\varphi;$ $-\ (1/4)a\sqrt{2}\cos\varphi;\ (1/6)\ a\ \sqrt{2})$, $C_1\ (1/2)\ a\ \sqrt{3}\cos\varphi;\ (1/2)\ \times$ $\times\ a\operatorname{sen}\varphi;\ (1/3)\ a\ \sqrt{2})$. De las condiciones $B \in (MNP)$, $C_1 \in$

$\measuredangle(MNP)$ hallamos que $\operatorname{sen}\varphi = (3\sqrt{2} - a)/(3a\sqrt{3})$, $\cos\varphi = (3 - a\sqrt{2})/(3a\sqrt{3})$. Por consiguiente, para determinar a, hemos obtenido la misma ecuación. Por tanto, en este caso se tiene también $a = (2\sqrt{5} - \sqrt{2})/4$. ▲

Capítulo 3

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

§ 1. Ángulo entre vectores. Definición del producto escalar. Teorema de los cosenos.

Llámase *ángulo entre vectores no nulos* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ al ángulo entre los rayos $[AB]$ y $[CD]$. De este modo, si de un punto O trazamos los vectores $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$ (fig. 3.1), entonces el valor del ángulo obtuso $\angle MON$ es, por definición, el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que se denota por $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$. Si uno de los vectores $\vec{a}$ o $\vec{b}$ es nulo, entonces el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no es determinado.

El ángulo entre vectores toma valores de 0° a 180°. Si los vectores no nulos son codirigidos, el ángulo entre ellos es igual a 0°. El ángulo entre los vectores no nulos contrariamente dirigidos es igual a 180°. Cuando el ángulo entre los vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a 90°, éstos se denominan *ortogonales* y se escribe $\vec{a} \perp \vec{b}$ (fig. 3.2). Por definición, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se consideran también ortogonales si uno de ellos es nulo.

Ejemplo 1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos no colineales. Demostrar que el vector $\vec{c} = \vec{a}/|\vec{a}| + \vec{b}/|\vec{b}|$ forma ángulos iguales con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

△Los vectores $\vec{a}_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ y $\vec{b}_1 = \vec{b}/|\vec{b}|$ son unitarios: $|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| = 1$. Tracémoslos partiendo de un punto: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}_1$ y construyamos el paralelogramo $OACB$ (fig. 3.3). Puesto que $|OA| = |OB|$, $OACB$ es rombo. Su diagonal (OC) es la bisectriz del $\angle AOB$.

Por eso, el vector de la diagonal $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$ forma ángulos iguales con los vectores $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$ y $\overrightarrow{OB} = \vec{b}_1$ y con sus vectores codirigidos $\vec{a}$ y $\vec{b}$.▲

Llámase *producto escalar de los vectores no nulos* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ a un número igual al producto de las longitudes de estos

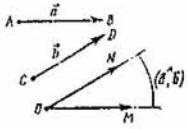


Fig. 3.1

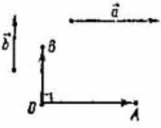


Fig. 3.2

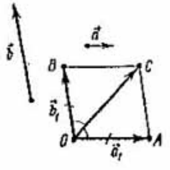


Fig. 3.3

vectores por el coseno del ángulo entre ellos. El producto escalar se denota por $(\vec{a}, \vec{b})$ o $\vec{a}\cdot\vec{b}$. De este modo,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Si uno de los vectores es nulo, entonces el producto escalar es, por definición, igual a cero:

$$(\vec{a}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{b}) = 0.$$

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, el coseno del ángulo entre ellos se determina por la fórmula

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \tag{3.1}$$

El producto escalar $(\vec{a}, \vec{a})$ igual a $|\vec{a}|^2$ se denomina *cuadrado escalar* del vector $\vec{a}$ y se denota por $(\vec{a})^2$ o $\vec{a}^2$. La longitud del vector $\vec{a}$ y su cuadrado escalar están ligados mediante la relación

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}. \tag{3.2}$$

El producto escalar de los vectores es positivo (negativo) si el ángulo entre ellos es agudo (obtuso).

Ejemplo 2. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}=90°$) se tiene $|AC|=b$, $\hat{A}=\alpha$. Hallar $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

$\triangle$ Tenemos $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}=\hat{C}=90°-\alpha$; $|\overrightarrow{CB}|=b \operatorname{sen}\alpha$, $|\overrightarrow{CA}|=b$. Por eso,

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})=|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CA}|\cos\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}=$$
$$=b\operatorname{sen}\alpha b\cos(90°-\alpha)=b^2\operatorname{sen}^2\alpha. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 3. Demostrar que el producto escalar de vectores es igual a cero si, y sólo si, estos vectores son ortogonales.

$\triangle$Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, es decir, $|\vec{a}|\neq 0$ y $|\vec{b}|\neq 0$, entonces

$$(\vec{a}, \vec{b})=0 \Leftrightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}=0 \Leftrightarrow \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}=$$
$$=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Si uno de los vectores $\vec{a}$ o $\vec{b}$ es nulo, entonces, por definición, éstos son ortogonales. También, por definición, $(\vec{a}, \vec{b})=0$. $\blacktriangle$

Ejemplo 4 (teorema de los cosenos). Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son válidas las siguientes igualdades:

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2(\vec{a}, \vec{b}), \tag{3.3}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2(\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.4}$$

$\square$Tracemos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ partiendo de un punto: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Caso 1. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. Consideremos el paralelogramo $OBCA$ (fig. 3.4, 3.5, 3.6). Designemos $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$, $\varphi=\widehat{(a, b)}$, M y N son las bases de las perpendiculares bajadas sobre la recta (OA) de los puntos B y C, respectivamente. Según el teorema

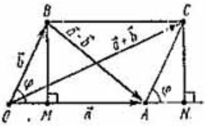


Fig. 3.4

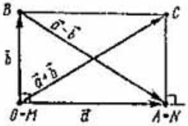


Fig. 3.5

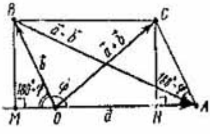


Fig. 3.6

de Pitágoras, para los triángulos rectángulos AMB y ONC tenemos

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |MB|^2, \quad |OC|^2 = |ON|^2 + |NC|^2. \qquad (3.5)$$

Si el ángulo φ es agudo (fig. 3.4), entonces $|AM| = |OA| - |OM| = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b \operatorname{sen}\varphi$, $|ON| = |OA| + |AN| = a + b\cos\varphi$. Si $\varphi = 90°$ (fig. 3.5), entonces $|AM| = |OA| = a = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b = b\operatorname{sen}\varphi$, $|ON| = |OA| = a = a + b\cos\varphi$. Si el ángulo φ es obtuso (fig. 3.6), entonces $|AM| = |OA| + |OM| = a + b\cos(180° - \varphi) = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b\operatorname{sen}(180° - \varphi) = b\operatorname{sen}\varphi$, $|ON| = |OA| - |AN| = a + b\cos\varphi$. De este modo, en todos los casos $|AM| = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b\operatorname{sen}\varphi$, $|ON| = a + b\cos\varphi$. Por eso, según las fórmulas (3.5) tenemos

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |AB|^2 = (a - b\cos\varphi)^2 + (b\operatorname{sen}\varphi)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |OC|^2 = (a + b\cos\varphi)^2 + (b\operatorname{sen}\varphi)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}).$$

Caso 2. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales. Si $\vec{b} = \vec{0}$, las relaciones (3.3) y (3.4) son obvias: $(\vec{a} \pm \vec{0})^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{0}^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{0})$. Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, existe un número k tal que $\vec{a} = k\vec{b}$ Entonces, $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 =$

$= |(k \pm 1)\vec{b}|^2 = (|k \pm 1|\,|\vec{b}|)^2 = (k \pm 1)^2 |\vec{b}|^2 =$
$= (k^2 + 1 \pm 2k)|\vec{b}|^2 = (|k|\,|\vec{b}|)^2 + |\vec{b}|^2 \pm$
$\pm 2k|\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \pm 2k|\vec{b}|^2$. Si $k > 0$ los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son codirigidos y $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 0° = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot 1 = |k\vec{b}|\,|\vec{b}| = |k|\,|\vec{b}|\,|\vec{b}| = k|\vec{b}|^2$. Si $k = 0$, es decir, $\vec{a} = \vec{0}$, entonces $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 = 0\cdot|\vec{b}|^2 = k|\vec{b}|^2$. Si $k < 0$, es decir, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son contrariamente dirigidos, entonces $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 180° = |k\vec{b}|\,|\vec{b}|\cdot(-1) = |k|\,|\vec{b}|\cdot|b|\,(-1) = k|\vec{b}|^2$. De este modo, en todos estos casos $2k|\vec{b}|^2 = 2(\vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b})$. ■

Ejemplo 5. Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de todos sus lados.

△Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ son los vectores de los lados del paralelogramo $OACB$ (fig. 3.4, 3.5, 3.6), entonces $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ y $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB}$ son los vectores de sus diagonales. Sumando las igualdades (3.3) y (3.4) término por término, obtenemos

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + \vec{b})^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2. \qquad (3.6)$$

Ya que $|BC| = |OA| = |\vec{a}|$, $|AC| = |OB| = |\vec{b}|$, según la fórmula (3.6) obtenemos

$$|AB|^2 + |OC|^2 = (|OA|^2 + |BC|^2) + (|OB|^2 + |AC|^2).$$ ▲

Ejemplo 6. Dados: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Hallar $|\vec{a} + \vec{b}|$ y el ángulo $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

△Según la fórmula (3.6),

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2} = \sqrt{2\cdot 121 + 2\cdot 529 - 900} = 20.$$

Conforme al teorema de los cosenos [véase la fórmula (3.3)] $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2) = -125$. Por consiguiente,

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = -\frac{125}{253}, \text{ o sea,}$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180° - \arccos\frac{125}{253}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Hallar las longitudes de las diagonales del rombo $OBCA$ (véase fig. 3.3), cuyos lados tienen longitud igual a uno y $\widehat{AOB} = \text{arc sen}\,\frac{24}{25}$.

$\triangle$ En virtud del teorema de los cosenos, $|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 2 - 2\cos\widehat{AOB}$. Ya que $\angle AOB$ es agudo, $\cos\widehat{AOB} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,\widehat{AOB}} = \sqrt{1-(24/25)^2} = 7/25$. Por eso, $|AB| = \sqrt{2 - 2\cdot 7/25} = 6/5$. De modo análogo, $|OC| = \sqrt{2 + 2\cos\widehat{AOB}} = 8/5$. $\blacktriangle$

Ejemplo 8. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si, y sólo si, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

$\triangle$Conforme a las fórmulas (3.3), (3.4)

$$(1/4)(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = (1/4)((\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))) = (\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.7}$$

Por consiguiente, la igualdad $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ se cumple cuando, y sólo cuando, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, es decir, cuando $\vec{a} \perp \vec{b}$ (véase el ejemplo 3). $\blacktriangle$

Ejemplo 9. Demostrar que $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

$\triangle$Sea $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, es decir, $\vec{a} = (1/2)(\vec{x} + \vec{y})$, $\vec{b} = (1/2)(\vec{x} - \vec{y})$. Entonces, $|\vec{a}| = (1/2) \times |\vec{x} + \vec{y}|$, $|\vec{b}| = (1/2)|\vec{x} - \vec{y}|$ y, según la fórmula (3.7), tenemos

$$\vec{a}^2-\vec{b}^2=(1/4)\,(|\vec{x}+\vec{y}|^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2)=(\vec{x},\ \vec{y})=$$
$$=(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}).\ \blacktriangle$$

Ejemplo 10. En un triángulo ABC se tiene $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$. Hallar la longitud de la mediana $[CM]$.

$\triangle$Designemos $m_c=|CM|$. Ya que $\overrightarrow{CM}=(1/2)\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$, conforme a la fórmula (3.4) hallamos $m_c^2=(1/4)\,(b^2+a^2+2\,(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA}))$. De la igualdad $c^2=|AB|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|^2=a^2+b^2-2\,(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA})$ hallamos

$$(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA})=(1/2)\,(a^2+b^2-c^2). \qquad (3.8)$$

Por lo tanto, $m_c^2=(1/4)\,(b^2+a^2+a^2+b^2-c^2)$, o sea,

$$m_c^2=(1/4)\,(2a^2+2b^2-c^2).\ \blacktriangle \qquad (3.9)$$

Ejemplo 11. En un triángulo ABC están dadas las longitudes de los lados: $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$. Verificar que

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB})=$$
$$=(1/2)\,(a^2+b^2+c^2). \qquad (3.10)$$

$\triangle$Según la fórmula (3.8), $(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB})=(1/2)\,(a^2+b^2-c^2)$. De modo análogo $(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC})=(1/2)\,(a^2+c^2-b^2)$, $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})=(1/2)\,(b^2+c^2-a^2)$. Sumando las tres igualdades término por término, obtenemos (3.10).$\blacktriangle$

Ejemplo 12. En un triángulo ABC m_a, m_b, m_c son longitudes de las medianas trazadas de los vértices A, B, C, respectivamente. Demostrar que $\angle C$ es obtuso cuando, y sólo cuando,

$$m_c^2<\frac{m_a^2+m_b^2}{5}.$$

$\triangle$ El ángulo $\angle C$ es obtuso cuando, y sólo cuando $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) < 0$, o sea, $x = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ [en virtud de (3.8)]. Conforme a la fórmula (3.9), $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. De modo análogo, $4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Sumando estas igualdades término por término tenemos $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Por eso, $3c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4m_c^2$, es decir, $c^2 = (4/9)(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2)$. Análogamente, $a^2 = (4/9)(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$, $b^2 = (4/9)(2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2)$. De aquí, $x = a^2 + b^2 - c^2 = (4/9)(5m_c^2 - m_a^2 - m_b^2)$, es decir, $x < 0 \Leftrightarrow 5m_c^2 < m_a^2 + m_b^2$. ▲

Ejemplo 13 (fórmula de Herón). Expresar el área del triángulo ABC mediante las longitudes de sus lados $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

$\triangle$ Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$; S es área del $\triangle ABC$. Es sabido que $S = (1/2)\, ab \operatorname{sen} \varphi$. Por eso, $S^2 = (1/4)\, a^2b^2 (1 - \cos^2 \varphi) = (1/4)(a^2b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2)$. Por la fórmula (3.8), $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Por consiguiente,

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(ab + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)\left(ab - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b).$$

Al designar $p = (1/2)(a + b + c)$, hallamos: $a + b - c = 2(p - c)$, $c + a - b = 2(p - b)$, $c - a + b = 2(p - a)$ y, por tanto,

$$S^2 = \frac{1}{16} \cdot 2p\, 2(p - c)\, 2(p - b)\, 2(p - a) =$$

$$= p(p - a)(p - b)(p - c), \text{ o sea, } S =$$

$$= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \ \blacktriangle$$

§ 2. Propiedades del producto escalar

Para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y cualquier número λ son válidas las relaciones:

1: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ **(la conmutatividad).**

2: $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.

3: $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ **(la distributividad).**

□ La 1ª propiedad se desprende de la definición del producto escalar y del hecho de que $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{(\vec{b}, \vec{a})}$ para cualesquiera vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Si $\vec{a} = \vec{0}$ o $\vec{b} = \vec{0}$, entonces para cualquier λ la 2ª propiedad se desprende de la definición del producto escalar.

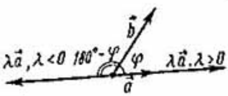


Fig. 3.7

Es también válida para cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando $\lambda = 0$. Queda por considerar el caso cuando $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Denotemos $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$. Entonces, si $\lambda > 0$ se tiene $\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ (fig. 3.7) y, por eso, $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}| \times \cos\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = \lambda\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$. Si $\lambda < 0$, se tiene $\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = 180° - \varphi$ (fig. 3.7) y $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = |\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180° - \varphi) = (-\lambda)\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,(-\cos\varphi) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$. La 2ª propiedad queda demostrada.

Para demostrar la 3ª propiedad empleemos la fórmula

$$0 = (\vec{m}+\vec{n})^2 + (\vec{m}-\vec{n})^2 - 2(\vec{m}^2 + \vec{n}^2) \qquad (3.11)$$

[véase la fórmula (3.6)], en la cual hagamos $\vec{m} = (\vec{a}+\vec{b})/2+\vec{c}$, $\vec{n} = (\vec{a}-\vec{b})/2$. Tenemos $\vec{m}+\vec{n} = \vec{a}+\vec{c}$,

$\vec{m} - \vec{n} = \vec{b} + \vec{c}$. Según el teorema de los cosenos,

$$(\vec{m} + \vec{n})^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}),$$

$$(\vec{m} - \vec{n})^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c}),$$

$$\vec{m}^2 = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \vec{c}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 + \vec{c}^2 + 2\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{c}\right).$$

Conforme a la propiedad 2 del producto escalar, se tiene

$$2\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{c}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}).$$

Luego, $\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 = \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}))$. Análogamente, $\vec{n}^2 = \left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))$ [véase la fórmula (3.3)].

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3.11), tenemos

$$0 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}) + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c}) -$$

$$- 2\left(\left(\frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) + \vec{c}^2 + (\vec{a}+\vec{b}, \vec{c})\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))\right) = 2((\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) -$$

$$-(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c})), \text{ o sea } (\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}). \ ■$$

Ejemplo 1. Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ y $\vec{q}$ y cualesquiera números x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 son válidas las siguientes igualdades:

$$(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q}) + y_1(\vec{b}, \vec{q}) + z_1(\vec{c}, \vec{q}) \qquad (3.12)$$

$$(\vec{p}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = x_2(\vec{p}, \vec{a}) + y_2(\vec{p}, \vec{b}) + z_2(\vec{p}, \vec{c}), \qquad (3.13)$$

$$(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = x_1x_2\vec{a}^2 + y_1y_2\vec{b}^2 +$$

$$+ (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{a}, \vec{b}) + z_1z_2\vec{c}^2 + (x_1z_2 + x_2z_1)(\vec{a}, \vec{c}) +$$

$$+ (y_1z_2 + y_2z_1)(\vec{b}, \vec{c}) \qquad (3.14)$$

Las fórmulas (3.12), (3.13) significan que el producto escalar posee la **propiedad de linealidad respecto a cada uno de los factores**, la fórmula (3.14) es fórmula común para calcular el producto escalar de vectores dados por sus coordenadas en la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

□ En virtud de la 3ª propiedad, $(x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}, \vec{q}) = (x_1\vec{a}+(y_1\vec{b}+z_1\vec{c}), \vec{q}) = (x_1\vec{a}, \vec{q})+(y_1\vec{b}+z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q})+(y_1\vec{b}, \vec{q})+(z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q})+y_1(\vec{b}, \vec{q})+z_1(\vec{c}, \vec{q})$ (aquí se ha utilizado la 2ª propiedad). La igualdad (3.12) queda demostrada.

Sobre la base de la 1ª propiedad y la fórmula (3.12), se tiene: $(\vec{p}, x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}) = (x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}, \vec{p}) = x_2(\vec{a}, \vec{p})+y_2(\vec{b}, \vec{p})+z_2(\vec{c}, \vec{p}) = x_2(\vec{p}, \vec{a})+y_2(\vec{p}, \vec{b})+z_2(\vec{p}, \vec{c})$. La igualdad (3.13) queda demostrada.

Designando $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$, $\vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$ y basándonos en las fórmulas (3.12), (3.13), obtenemos

$$(\vec{p}, \vec{q}) = (x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q})+y_1(\vec{b}, \vec{q})+z_1(\vec{c}, \vec{q}) =$$
$$= x_1(\vec{a}, x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c})+y_1(\vec{b}, x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c})+$$
$$+z_1(\vec{c}, x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}) = x_1(x_2(\vec{a}, \vec{a})+y_2(\vec{a}, \vec{b})+$$
$$+z_2(\vec{a}, \vec{c}))+y_1(x_2(\vec{a}, \vec{b})+y_2(\vec{b}, \vec{b})+z_2(\vec{b}, \vec{c}))+$$
$$+z_1(x_2(\vec{a}, \vec{c})+y_2(\vec{b}, \vec{c})+z_2(\vec{c}, \vec{c})) =$$
$$= x_1x_2\vec{a}^2+y_1y_2\vec{b}^2+(x_1y_2+x_2y_1)(\vec{a}, \vec{b})+$$
$$+z_1z_2\vec{c}^2+(x_1z_2+x_2z_1)(\vec{a}, \vec{c})+(y_1z_2+y_2z_1)(\vec{b}, \vec{c}).$$

La fórmula (3.14) queda demostrada. ■ Cuando $\vec{c}=\vec{0}$ toma la forma

$$(x_1\vec{a}+y_1\vec{b}, x_2\vec{a}+y_2\vec{b}) = x_1x_2\vec{a}^2+$$
$$+y_1y_2\vec{b}^2+(x_1y_2+x_2y_1)(\vec{a}, \vec{b}). \qquad (3.15)$$

Ejemplo 2. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$. Calcular la magnitud $\mu=(\vec{a},\ \vec{b})+(\vec{b},\ \vec{c})+(\vec{c},\ \vec{a})$ si $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=2$.

$\triangle$ Como $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, tenemos: $4=\vec{c}^2=(-\vec{c},-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a},\ \vec{b})+2(\vec{b},\ \vec{c})+2(\vec{c},\ \vec{a})=1+16+4+2\mu$. De este modo, $\mu=-17/2$. ▲

Ejemplo 3. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores unitarios. Calcular $(3\vec{a}-4\vec{b},\ 2\vec{a}+5\vec{b})$ si $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$.

$\triangle$ $3=|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2(\vec{a},\ \vec{b})=1+1+2(\vec{a},\ \vec{b})$. De aquí $(\vec{a},\ \vec{b})=1/2$. Por consiguiente, conforme a la fórmula (3.15), tenemos

$$(3\vec{a}-4\vec{b},\ 2\vec{a}+5\vec{b})=6\vec{a}^2-20\vec{b}^2+7(\vec{a},\ \vec{b})=6-20+7/2=-21/2. \ ▲$$

Ejemplo 4. Dado: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=120°$. Hallar las longitudes de los vectores $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ y $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$, su producto escalar y el ángulo φ formado por ellos.

$\triangle$ $(\vec{a},\ \vec{b})=3\cdot 2\cdot\cos 120°=-3$. Según la fórmula (3.15), $|\vec{p}|^2=(\vec{p},\ \vec{p})=(\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^2+4(\vec{a},\ \vec{b})+4\vec{b}^2=9+(-12)+16=13$, o sea, $|\vec{p}|=\sqrt{13}$; $|\vec{q}|^2=(\vec{q},\ \vec{q})=(2\vec{a}-\vec{b},\ 2\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}^2-4(\vec{a},\ \vec{b})+\vec{b}^2=52$, o sea, $|\vec{q}|=2\sqrt{13}$;

$$(\vec{p},\ \vec{q})=(\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2+3(\vec{a},\ \vec{b})-2\vec{b}^2=$$
$$=18+(-9)-8=1,\quad \cos\varphi=(\vec{p},\ \vec{q})/(|\vec{p}|\ |\vec{q}|)=$$
$$=1/(\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13})=1/26,\quad \varphi=\arccos\ (1/26). \ ▲$$

Ejemplo 5. Las longitudes de los vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales. Hallar el ángulo φ formado por estos vectores si es sabido que los vectores $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ y $\vec{q}=5\vec{a}+3\vec{b}$ son ortogonales.

△ Como $\vec{p}\perp\vec{q}$, se tiene $0=(\vec{p}, \vec{q})=(\vec{a}+3\vec{b}, 5\vec{a}+3\vec{b})=5\vec{a}^2+18(\vec{a}, \vec{b})+9\vec{b}^2=5|\vec{a}|^2+18|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi+9|\vec{b}|^2$. Teniendo en cuenta que $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$, de aquí hallamos $\cos\varphi=-7/9$, es decir, $\varphi=180°-\arccos(7/9)$. ▲

Ejemplo 6. En un triángulo ABC están trazadas las medianas $[AD]$, $[BE]$ y $[CF]$. Calcular la magnitud $\lambda=(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

△ Sea $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$. Entonces, $\overrightarrow{BC}=-\vec{b}$ $\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+(1/2)\vec{b}$, $\overrightarrow{BE}=(1/2)\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CF}=(1/2)(\vec{a}+\vec{b})$. Por consiguiente, conforme a la fórmula (3.15), tenemos

$$\lambda=(-\vec{b}, \ -\vec{a}+(1/2)\vec{b})+(\vec{a}, \ (1/2)\vec{a}-\vec{b})+$$
$$+(\vec{b}-\vec{a}, \ (1/2)\vec{a}+(1/2)\vec{b})=(\vec{a}, \vec{b})-(1/2)\vec{b}^2+(1/2)\vec{a}^2-$$
$$-(\vec{a}, \ \vec{b})-(1/2)\vec{a}^2+(1/2)\vec{b}^2=0. \ ▲$$

Ejemplo 7. Demostrar que para cualquier ubicación de puntos A, B, C, D en el plano o en el espacio, tiene lugar la igualdad $\mu=0$ donde $\mu=(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

△ Sean $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. Entonces, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{c}$. Por consiguiente.

$$\mu=(\vec{c}-\vec{b}, \ -\vec{a})+(\vec{a}-\vec{c}, \ -\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a}, \ -\vec{c})=$$
$$=-(\vec{a}, \vec{c})+(\vec{a}, \vec{b})-(\vec{a}, \vec{b})+(\vec{b}, \vec{c})-(\vec{b}, \vec{c})+(\vec{a}, \vec{c})=0. \ ▲$$

Ejemplo 8. En un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se tiene: $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $\widehat{BAA_1}=\alpha$,

$\widehat{CAA_1}=\beta$ (fig. 3.8). Hallar $\widehat{BCC_1}$.

$$\triangle \ \cos \widehat{BCC_1}=\frac{(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CC_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CC_1}|}=\frac{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|}=$$

$$=\frac{(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AA_1})-(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|}=(|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|\cos\alpha -$$

$$-|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AA_1}|\cos\beta)/(|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|)=(c\cos\alpha-b\cos\beta)/a.$$

En particular, si $\triangle ABC$ es regular, entonces $\cos\alpha-$ $-\cos\beta=\cos\widehat{BCC_1}$. ▲

Ejemplo 9. En un trapecio rectangular $ABCD$ las diagonales son mutuamente perpendiculares y la razón

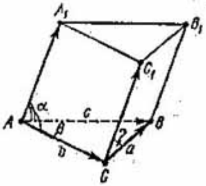


Fig. 3.8

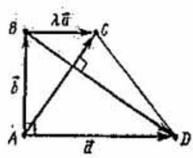


Fig. 3.9

entre las longitudes de las bases es $|BC|:|AD|=\lambda$. Hallar la razón entre las longitudes de las diagonales.

$\triangle$ Denotemos $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ (fig. 3.9). Entonces, $\overrightarrow{BC}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$. Según la condición, $(\vec{a},\ \vec{b})=0$ y $(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD})=0$, es decir, $0=(\vec{b}+\lambda\vec{a},\ \vec{a}-\vec{b})=$ $=\lambda\vec{a}^2+(1-\lambda)(\vec{a},\ \vec{b})-\vec{b}^2=\lambda\vec{a}^2-\vec{b}^2$. De este modo, $\vec{b}^2=\lambda\vec{a}^2$ y la razón buscada es

$$|AC|:|BD|=\sqrt{(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC})/(\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BD})}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\vec{b}+\lambda\vec{a},\ \vec{b}+\lambda\vec{a})}{(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b})}}=\sqrt{\frac{\vec{b}^2+2\lambda(\vec{a},\ \vec{b})+\lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2(\vec{a},\ \vec{b})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\vec{b}^2+\lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}}=\sqrt{\frac{\lambda\vec{a}^2+\lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2+\lambda\vec{a}^2}}=\sqrt{\lambda}.$$

Ejemplo 10. Determinar el ángulo entre las diagonales $[AC]$ y $[BD]$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$ si $|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2$.

$\triangle$ Designemos $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. Entonces, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ y, según la condición, $(\vec{b}-\vec{a})^2+\vec{c}^2=(\vec{c}-\vec{b})^2+\vec{a}^2$, es decir, $(\vec{a}, \vec{b})=(\vec{c}, \vec{b})$. Por eso, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})=(\vec{c}-\vec{a}, -\vec{b})=(\vec{a}, \vec{b})-(\vec{c}, \vec{b})=0$. Por tanto, las diagonales $[AC]$ y $[BD]$ son perpendiculares. ▲

Ejemplo 11. Expresar el vector de la bisectriz $\vec{l}=\overrightarrow{CL}$ de un triángulo ABC mediante los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ de sus lados y sus longitudes $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$.

$\triangle$ Los ángulos $\widehat{ACL}$ y $\widehat{LCB}$ (fig. 3.10) son iguales y debido a esto son iguales sus cosenos: $(\vec{b}, \vec{l})/(|\vec{b}|\,|\vec{l}|)=(\vec{a}, \vec{l})/(|\vec{a}|\,|\vec{l}|)$, o sea, $0=(a\vec{b}-b\vec{a}, \vec{l})$. El punto L divide el segmento $[\overrightarrow{AB}]$ en una razón (desconocida) $\lambda=|AL|:|AB|$. Por eso, $\vec{l}=(\vec{a}+\lambda\vec{b})/(\lambda+1)$ y, por lo tanto, $0=a(\vec{a}, \vec{b})-ba^2+\lambda ab^2-\lambda b(\vec{a}, \vec{b})$. De este modo, $\lambda=a(ab-(\vec{a}, \vec{b}))/(b(ab-(\vec{a}, \vec{b})))=a/b$, ya que $ab-(\vec{a}, \vec{b})=ab(1-\cos\hat{C})>0$ y

$$\vec{l}=\frac{\vec{a}+(a/b)\vec{b}}{1+(a/b)}=\frac{a\vec{b}+b\vec{a}}{a+b}. \quad ▲$$

Ejemplo 12. Expresar la longitud de la bisectriz $[CL]$ de un triángulo ABC mediante las longitudes de sus lados $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$.

$\triangle$ Designemos $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$. Entonces $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$. Por la fórmula del ejemplo 11, $\overrightarrow{CL}=(a\vec{b}+b\vec{a})/(a+b)$. Por eso,

$$|\overrightarrow{CL}|^2=\frac{1}{(a+b)^2}(a\vec{b}+b\vec{a})^2=\frac{1}{(a+b)^2}((a\vec{b})^2+(b\vec{a})^2+2(a\vec{b}, b\vec{a}))=\frac{1}{(a+b)^2}(2a^2b^2+2ab(\vec{a}, \vec{b}))=$$
$$=\frac{2ab}{(a+b)^2}(ab+(\vec{a}, \vec{b})).$$

En virtud de la fórmula (3.8), $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(a^2+b^2-c^2)$, por consiguiente,

$$|\overrightarrow{CL}|^2 = \frac{2ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 13. *Demostrar que si en un triángulo ABC las longitudes de dos bisectrices son iguales, este triángulo es isósceles.*

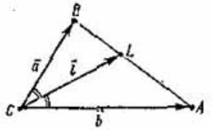


Fig. 3.10

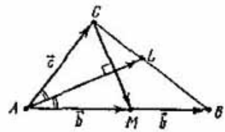


Fig. 3.11

$\triangle$ Si $[CL]$ y $[AM]$ son bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle A$, respectivamente, entonces, por la fórmula del ejemplo 12, tenemos

$$|CL|^2 = ab - abc^2/(a+b)^2,$$
$$|AM|^2 = bc - bca^2/(b+c)^2.$$

De este modo, si $|CL| = |AM|$, entonces $a - ac^2/(a+b)^2 = c - ca^2/(b+c)^2$ o bien

$$a - c = \frac{ac\,(c\,(b+c)^2 - a\,(a+b)^2)}{(a+b)^2\,(b+c)^2} =$$

$$= \frac{ac\,(c^3 - a^3 + 2b\,(c^2-a^2) + b^2\,(c-a))}{(a+b)^2\,(b+c)^2}.$$

De aquí

$$(a-c)\left(1 + \frac{ac\,(c^2+ac+a^2+2b\,(c+a)+b^2)}{(a+b)^2\,(b+c)^2}\right) =$$

$= 0$, o sea, $a = c$. $\blacktriangle$

Ejemplo 14. En un triángulo ABC la mediana $[CM]$ es perpendicular a la bisectriz $[AL]$ con tal que $|CM| : |AL| = n$. Hallar el ángulo $\hat{A}$.

$\triangle$ Designemos $\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$, $\hat{A} = \widehat{(\vec{b}, \vec{c})}$. Entonces, $\overrightarrow{CM} = \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AL} = (2b\vec{c} + c2\vec{b})/(2b +$

$+c)$ (véase el ejemplo 11). Según la condición $(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CM})=0$, o sea, $0=(2b\vec{c}+2c\vec{b}, \ \vec{b}-\vec{c})=2(cb^2-bc^2+(b-c)(\vec{b}, \vec{c}))=2(b-c)bc(1+\cos\hat{A})$. Ya que $0°<\hat{A}<180°$ se tiene $bc(1+\cos\hat{A})\neq 0$ y, por tanto, $b=c$. [Se podía verificarlo geométricamente (fig. 3.11): según la condición del problema, en el $\triangle ACM$, la bisectriz del $\angle A$ es también la altura y, por tanto, el triángulo ACM es isósceles $|AC|=|AM|$.]

De este modo,

$$\overrightarrow{AL}=(2/3)(\vec{b}+\vec{c}), \ |AL|^2=(4/9)(\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{b}, \vec{c}))=$$
$$=(4/9)(2b^2+2b^2\cos\hat{A})=(8/9)b^2(1+\cos\hat{A}),$$
$$|CM|^2=(\vec{b}-\vec{c})^2=\vec{b}^2+\vec{c}^2-2(\vec{b}, \vec{c})=2b^2-2b^2\cos\hat{A}=$$
$$=2b^2(1-\cos\hat{A}).$$

Por consiguiente,

$$n^2=|CM|^2:|AL|^2=\frac{9(1-\cos\hat{A})}{4(1+\cos\hat{A})}.$$

De aquí hallamos $\cos\hat{A}=(9-4n^2)/(9+4n^2)$. ▲

Ejemplo 15. En un triángulo $ABC|AC|=1, |BC|=2$, $\hat{C}=\arccos(3/4)$. Expresar los vectores de las alturas $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AE}$ (fig. 3.12) mediante los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

△ Designemos $\overrightarrow{CD}=\vec{h}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{H}$. Los vectores $\vec{h}-\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ y $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ son colineales. Por eso existe un número t tal que $\vec{h}-\vec{a}=t(\vec{b}-\vec{a})$. Hallemos t de la condición de ortogonalidad de los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$: $0=(\overrightarrow{CD}, \ \overrightarrow{AB})=(\vec{h}, \ \vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}), \vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}, \ \vec{b})-\vec{a}^2+t(\vec{b}-\vec{a})^2$. De aquí

$$t=\frac{\vec{a}^2-(\vec{a}, \ \vec{b})}{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2(\vec{a}, \ \vec{b})}=\frac{a^2-ab\cos\hat{C}}{a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}}=$$
$$=\frac{1^2-1\cdot 2\cdot 3/4}{1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot 3/4}=-\frac{1}{4},$$

puesto que $a = |\vec a| = 1$, $b = |\vec b| = 2$. Por consiguiente, $\vec h = \vec a - (1/4)(\vec b - \vec a) = (5\vec a - \vec b)/4$. Análogamente, el vector $\vec H = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ puede representarse en la forma $\vec H = -\vec a + \lambda \vec b$, donde el número λ se determina de la condición $(\vec H, \vec b) = 0$: $-(\vec a, \vec b) + \lambda \vec b^2 = 0$, es decir, $\lambda = (\vec a, \vec b)/b^2 = (a \cos \hat C)/b = 3/8$. Por tanto, $\vec H = -\vec a + (3/8)\vec b$. ▲

Ejemplo 16. Demostrar que en el triángulo las alturas se intersecan en un punto.

□ En el triángulo ABC (fig. 3.13) tracemos las alturas $[CM]$ y $[BP]$ y mediante O designemos el punto de intersección de las rectas (CM) y (BP). Para demostrar la

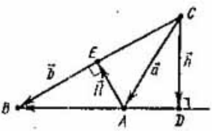


Fig. 3.12

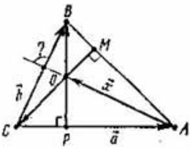


Fig. 3.13

afirmación del ejemplo basta establecer que la recta (AO) es perpendicular a la recta (BC), o sea, $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0$. Denotemos $\vec a = \overrightarrow{CA}$, $\vec b = \overrightarrow{CB}$, $x = \overrightarrow{AO}$. Entonces, $\overrightarrow{AB} = \vec b - \vec a$, $\overrightarrow{OC} = -\vec x - \vec a$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \vec b - \vec x - \vec a$. Según la definición de altura $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = 0$, es decir, $(-\vec x - \vec a, \vec b - \vec a) = 0$. De aquí $(\vec x, \vec a) - (\vec x, \vec b) = (\vec a, \vec b) - \vec a^2$. De modo análogo $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA}) = 0$, es decir, $(\vec b - \vec x - \vec a, \vec a) = 0$. De aquí $(\vec x, \vec a) = (\vec a, \vec b) - \vec a^2$. De este modo $(\vec x, \vec a) = (\vec x, \vec a) - (\vec x, \vec b)$ y, por tanto, $(\vec x, \vec b) = 0$, o sea $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0$. ■

Ejemplo 17. En un tetraedro regular $ABCD$ los puntos E y F son los puntos medios de las aristas $[AD]$ y $[CB]$, respectivamente. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales dos a dos con tal que $|\overrightarrow{FE}| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}}$.

△ Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $a = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Como $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{(\vec{a}, \vec{c})} = \widehat{(\vec{b}, \vec{c})} = 60^\circ$, se tiene $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (1/2)\,a^2$. Por lo tanto, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = (-\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) = 0$, es decir, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}$. Luego $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = (1/2)\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} + (1/2)\,\overrightarrow{DA} = (1/2)(\vec{b} - \vec{c}) - \vec{b} + (1/2)\,\vec{a} = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$. Por eso,

$$|\overrightarrow{FE}| = (1/2)\,|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}| = (1/2)\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c})} =$$

$$= (1/2)\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c})} =$$

$$= (1/2)\sqrt{3a^2 - 2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|AD|.$$

En fin, $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AD}) = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, -\vec{a}) = (1/2)(-\vec{a}^2 + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})) = 0$ y $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CB}) = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}) = (1/2)((\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0$, es decir, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{CB}$. ▲

Ejemplo 18. Los puntos E y F son los puntos medios de las aristas $[AD]$ y $[BC]$ de una pirámide $ABCD$. Demostrar que las igualdades $|BD| = |AC|$ y $|AB| = |CD|$ se cumplen simultáneamente si, y sólo si, el segmento $[EF]$ es perpendicular tanto a $[BC]$ como a $[AD]$.

□ En calidad de los vectores básicos escojamos $\vec{a} = \overrightarrow{ED}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$. Entonces, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Por lo tanto, $|BD| = |AC|$ cuando, y sólo cuando, $(\vec{c} - \vec{b} + \vec{a})^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, o bien (véanse los ejemplos 8 y 9 del párrafo anterior) $(\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}) = 0$. Análogamente, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = -\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$ y la igualdad $|AB| = |CD|$

es equivalente a la relación $(\vec{b},\ \vec{a}-\vec{c})=0$. De este modo,

$$\begin{cases} |BD| = |AC|, \\ |AB| = |CD| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{c}) = 0, \\ (\vec{a},\ \vec{b}) - (\vec{b},\ \vec{c}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a},\ \vec{b}) = 0, \\ (\vec{b},\ \vec{c}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} \perp \vec{a}, \\ \vec{b} \perp \vec{c}. \end{cases} \blacksquare$$

Ejemplo 19. En un tetraedro regular $ABCD$ los puntos M y E son los puntos medios de las aristas $[AC]$ y $[AB]$, respectivamente, N es el punto de intersección de las medianas de la cara BCD. Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{DE}$.

$\triangle$ Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $a = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Entonces,

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = (\vec{a},\ \vec{c}) = (\vec{b},\ \vec{c}) = a^2/2,\ \ \overrightarrow{DE} = (1/2)(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{DM} = (1/2)(\vec{a}+\vec{c}),\ \ \overrightarrow{DN} = (2/3)(1/2)(\vec{b}+\vec{c}) = (1/3)(\vec{b}+\vec{c}).$$

Por eso, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -(1/6)(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$,
$(6\,|\overrightarrow{MN}^2|) = (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c},\ 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = 9\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 12(\vec{a},\ \vec{b}) + 6(\vec{a},\ \vec{c}) - 4(\vec{b},\ \vec{c}) = 14a^2 - 10(\vec{a},\ \vec{b}) = 9a^2$,
$|\overrightarrow{MN}| = a/2$, $|\overrightarrow{DE}| = (1/2)\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a},\ \vec{b})} = (a\sqrt{3})/2$.
Por la fórmula (3.14),

$$(\overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{MN}) = -(1/12)(\vec{a}+\vec{b},\ 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) =$$
$$= -(1/12)(3\vec{a}^2 + (\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{a},\ \vec{c}) - 2\vec{b}^2 + (\vec{b},\ \vec{c})) = -\frac{5a^2}{24}.$$

Por consiguiente, si $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{MN}})$, entonces,

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{MN})}{|\overrightarrow{DE}|\,|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-5a^2/24}{(a\sqrt{3}/2)\,(a/2)} = -\frac{5}{6\sqrt{3}},\ \text{o sea},$$

$$\varphi = 180^\circ - \text{arc cos}\,\frac{5}{6\sqrt{3}}.\ \blacktriangle$$

Ejemplo 20*. Los puntos E y F son, respectivamente, los puntos medios de las aristas $[AD]$ y $[BC]$ de un tetraedro regular $ABCD$. Los puntos M y N se sitúan en los segmentos $[CD]$ y $[EF]$, respectivamente, con tal que $\alpha = \widehat{MNC} = 45°$, $\beta = \widehat{NME} = 60°$. ¿En qué razones se dividen los segmentos $[EF]$ y $[CD]$ por los puntos M y N?

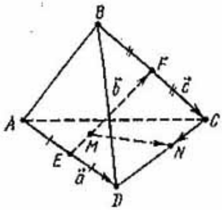


Fig. 3.14

△ En este problema debemos calcular muchas veces productos escalares; para esto es cómodo tomar $\vec{a} = \overrightarrow{ED}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$ (fig. 3.14) en calidad de los vectores básicos. Sea $d = |\vec{a}|$. Conforme al resultado del ejemplo 17, los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son ortogonales dos a dos: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$ y $|\vec{c}| = d$, $|\vec{b}| = d\sqrt{2}$.
Según la condición del problema, existen números λ y μ tales que $\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$, $\overrightarrow{MF} = \mu\overrightarrow{EF} = \mu\vec{b}$. Por consiguiente $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN} = \lambda\vec{a} + (\mu - \lambda)\vec{b} + (1 - \lambda)\vec{c}$, $|\overrightarrow{MN}|^2 = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN}) = \lambda^2\vec{a}^2 + (\mu - \lambda)^2\vec{b}^2 + (1 - \lambda)^2\vec{c}^2 + 2\lambda(\mu - \lambda)(\vec{a}, \vec{b}) + 2\lambda(1 - \lambda) \times (\vec{a}, \vec{c}) + 2(\mu - \lambda)(1 - \lambda)(\vec{b}, \vec{c}) = \lambda^2 d^2 + (\mu - \lambda)^2 2d^2 + (1 - \lambda)^2 d^2 = d^2(\lambda^2 + 2(\mu - \lambda)^2 + (\lambda - 1))^2$,

$$\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \quad |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AD}| = 2|\vec{a}| = 2d.$$

Luego,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}) = (\lambda\vec{a} + (\mu - \lambda)\vec{b} + (1 - \lambda)\vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) =$$
$$= \lambda\vec{a}^2 - (\mu - \lambda)\vec{b}^2 - (1 - \lambda)\vec{c}^3 = (4\lambda - 2\mu - 1)d^2,$$
$$|\overrightarrow{EF}| = |\vec{b}| = d\sqrt{2}, \; (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}) = (\lambda\vec{a} + (\mu - \lambda)\vec{b} + (1 - \lambda)\vec{c}, \vec{b}) =$$
$$= (\mu - \lambda)\vec{b}^2 = 2(\mu - \lambda)d^2.$$

Según la condición del problema, tenemos

$$\cos\alpha = \cos\widehat{MNC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CN}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}}) =$$
$$= \frac{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{MN}|\,|\overrightarrow{CD}|} = \frac{4\lambda - 2\mu - 1}{2\sqrt{\lambda^2 + 2(\mu - \lambda)^2 + (\lambda - 1)^2}},$$

$$\cos\beta = \cos\widehat{NME} = -\cos\widehat{NMF} = -\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}}) =$$

$$= -\frac{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF})}{|\overrightarrow{MN}|\,|\overrightarrow{EF}|} = \frac{2(\lambda-\mu)}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+2(\mu-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}. \quad (3.16)$$

De estas dos relaciones hallamos

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{4\lambda-2\mu-1}{2\sqrt{2}(\lambda-\mu)}, \text{ o bien } \mu = \frac{\lambda(4\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha)-\cos\beta}{2\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha}$$

y, por tanto, $\lambda-\mu = (1-2\lambda)\cos\beta/(2\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha)$. Ahora la desconocida λ se halla de la ecuación (3.16):

$$\cos\beta = \frac{(1-2\lambda)\cos\beta/(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2\lambda^2+(1-2\lambda)^2\cos^2\beta/(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2+2(\lambda-1)^2}}. \quad (3.17)$$

Elevando los dos miembros de (3.17) al cuadrado y dividiendo entre $\cos^2\beta \neq 0$ hallamos $4\lambda^2-4\lambda+2 = (1-2\lambda)^2 \operatorname{sen}^2\beta/(\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2$, o sea,

$$(1-2\lambda)^2 = 4\lambda^2-4\lambda+1 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-1\right) =$$

$$= \frac{(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}.$$

Como se deduce de (3.17), los números $1-2\lambda$ y $\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha$ tienen signos iguales y por eso $1-2\lambda = (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)/\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}$. Las relaciones buscadas son tales:

$$\frac{|CN|}{|ND|} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1-(1-2\lambda)}{1+(1-2\lambda)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}+(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)},$$

$$\frac{|FM|}{|ME|} = \frac{\mu}{1-\mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}+(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}.$$

Cuando $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, tenemos $|CN| : |ND| = 3+2\sqrt{2}$, $|FM| : |ME| = 1$. ▲

Ejemplo 21*. La longitud de la arista de un tetraedro regular $ABCD$ es igual a $2d$. Hallar el radio de la esfera que pasa por los vértices A, D, el punto medio F de la arista $[BC]$ y el centro K de la cara ADC.

△ Empleemos la base introducida en el ejemplo anterior (fig. 3.14). Sean O el centro de la esfera, $\overrightarrow{OF} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (x, y y z son todavía desconocidos), R, radio buscado. Tenemos:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA} = (x-1)\vec{a} + (y-1)\vec{b} + z\vec{c},$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} = (x+1)\vec{a} + (y-1)\vec{b} + z\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CK} = (2/3)\,\overrightarrow{CE} = (2/3)\,(-\vec{b}-\vec{c}),\ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CK} =$$
$$= x\vec{a} + (y-2/3)\,\vec{b} + (z+1/3)\,\vec{c}.$$

Según la condición $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{OK}|^2 = |\overrightarrow{OF}|^2 = R^2$, lo que lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$(x-1)^2 + 2\,(y-1)^2 + z^2 = w^2,\ \ (x+1)^2 + 2\,(y-1)^2 + z^2 =$$
$$= w^2,\ x^2 + 2\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{3}\right)^2 = w^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = w^2,$$

donde $w = R/d$. Restando la segunda ecuación de la primera, hallamos $x = 0$. Restando la cuarta ecuación de la primera, obtenemos $1 - 2x + 2 - 4y = 0$, o sea, $y = 3/4$. Se queda el sistema: $9/8 + z^2 = w^2$, $1/72 + (z+1/3)^2 = w^2$. Restando una ecuación de otra, hallamos $z = 3/2$. Por consiguiente,

$$R = dw = d\sqrt{9/8 + 9/4} = 3\sqrt{6}d/4. \ ▲$$

Ejemplo 22. La base de un prisma triangular recto $ABCA_1B_1C_1$ es el triángulo isósceles ABC: $|AC| = |BC| = a$, $\hat{C} = 90°$. Los vértices M y N de un tetraedro regular $MNPQ$ están situados en la recta (CA_1) y los vértices P y Q en la recta (AB_1). Hallar: a) el volumen del prisma; b) el volumen del tetraedro.

△Designemos $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1}$ (fig. 3.15), $r = |PQ|$, $h = |\vec{c}|$. Según la condición, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$. Sean E y F los puntos medios de los segmentos $[MN]$ y $[PQ]$, respectivamente. En el ejemplo 17 está demostrado que

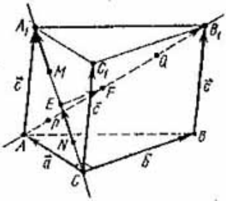


Fig. 3.15

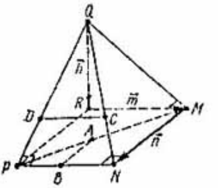


Fig. 3.16

$|MN| = r = |PQ|$, $|FE| = r/\sqrt{2}$ y $0 = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PQ})$ y, por consiguiente,

$$(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CA_1}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_1C}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_1}) = 0. \qquad (3.18)$$

a) De la condición $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CA_1}) = (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}) = 0$ tenemos que $-\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = 0$, es decir, $-a^2 + h^2 = 0$. Por lo tanto, $h = a$. El volumen del prisma V_{pr} es igual a

$$V_{\text{pr}} = hS_{ABC} = h\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

b) Sea que los números (aún desconocidos) λ y μ son tales que $\overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{CA_1} = \lambda(\vec{a} + \vec{c})$ (la colinealidad de $\overrightarrow{CE}$ y $\overrightarrow{CA_1}$), $\overrightarrow{AF} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (la colinealidad de $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{AB_1}$). Entonces $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = (1 - \lambda - \mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu - \lambda)\vec{c}$. De (3.18) tenemos

$$0 = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CA_1}) = ((1 - \lambda - \mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu - \lambda)\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}) =$$
$$= (1 - \lambda - \mu)\vec{a}^2 + (\mu - \lambda)\vec{c}^2 = (1 - 2\lambda)a^2, \; 0 = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_1}) =$$

$$= ((1-\lambda-\mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu-\lambda)\vec{c},\ -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) =$$
$$= (\lambda+\mu-1)\vec{a}^2 + \mu\vec{b}^2 + (\mu-\lambda)\vec{c}^2 = (3\mu-1)a^2,$$

o sea, $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/3$. Por eso $\overrightarrow{EF} = (1/6)(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{6}|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}| = (1/6)\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c},\ \vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})} = (1/6)\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+\vec{c}^2} = a\sqrt{6}/6$. Por consiguiente, $r = \sqrt{2}\,|EF| = a\sqrt{3}/3$ y el volumen del tetraedro V_{tetr} es igual a

$$V_{\text{tetr}} = (1/3)(r\sqrt{2/3})(r^2\sqrt{3}/4) = r^3\sqrt{2}/12 = a^3\sqrt{6}/108. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 23*. En una pirámide $MNPQ$ los ángulos $\angle QMN$, $\angle MNP$ y $\angle NPQ$ son rectos. Los vértices A, B, C, D del tetraedro regular se encuentran, respectivamente, en las aristas $[MP]$, $[NP]$, $[NQ]$, $[PQ]$ de la pirámide $MNPQ$. Las rectas (AB) y (MN) son paralelas. Hallar la razón de los volúmenes del tetraedro regular y de la pirámide.

$\triangle$ Sea R la base de la perpendicular bajada del vértice Q al plano MNP (fig. 3.16). Asignemos $\vec{h} = \overrightarrow{QR}$, $\vec{m} = \overrightarrow{RM}$, $\vec{n} = \overrightarrow{MN}$. Entonces, $(\vec{h}, \vec{m}) = (\vec{h}, \vec{n}) = 0$. Luego $(\vec{m}, \vec{n}) = (\overrightarrow{MQ} + \vec{h}, \vec{n}) = (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}) = 0$ ya que $\widehat{QMN} = 90°$. Por lo tanto, los vectores $\vec{h}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ son ortogonales dos a dos. Según la condición, $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PQ}) = 0$. Como $(\overrightarrow{PN}, \vec{h}) = 0$, tenemos $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PQ} + \vec{h}) = 0$. Igualmente, según la condición, $(\overrightarrow{PN}, \vec{n}) = 0$. Pues, en el cuadrilátero $PRMN$ tres ángulos ($\angle RMN$, $\angle MNP$, $\angle NPR$) son rectos. Por tanto, $PRMN$ es rectángulo: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{RM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MN} = \vec{n}$. Ya que $(AB) \parallel (MN)$, existe un número x tal que $\overrightarrow{PB} = x\overrightarrow{PN} = x\vec{m}$, $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{PM} = x(\vec{m}-\vec{n})$ y, en particular, $\overrightarrow{AB} = x\vec{n}$. Los puntos C y D se sitúan en las aristas $[QN]$ y $[QP]$, respectivamente, y por eso existen números y y z tales que $\overrightarrow{QC} = y\overrightarrow{QN} = y(\vec{h}+\vec{m}+\vec{n})$, $\overrightarrow{QD} = z\overrightarrow{QP} = z(\vec{h}+\vec{n})$. En particular, $\overrightarrow{CD} = (z-y)\vec{h} - y\vec{m} + (z-y)\vec{n}$. Conforme a la propiedad de aristas cruzadas del tetraedro regular (véase el ejemplo 17), $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$, es decir, $(x\vec{n}, (z-y)\vec{h} - y\vec{m} + (z-y)\vec{n}) = x(z-y)|\vec{n}|^2 = 0$. Puesto que $|AB| = x|\vec{n}| \neq 0$ se tiene $y = z$, o sea, $(CD) \parallel (NP)$ (fig. 3.16). Expresemos los vectores de las aristas del tetraedro $ABCD$ mediante los vectores de la base

$(\vec{h}, \vec{m}, \vec{n})$:

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{n}, \quad \overrightarrow{CD} = -y\vec{m},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = (y-1)\,\vec{h} + (y-x)\,\vec{m} + (x+y-1)\,\vec{n},$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} = (z-1)\,\vec{h} - x\vec{m} + (z-1)\,\vec{n} =$$
$$= (y-1)\,\vec{h} - x\vec{m} + (y-1)\,\vec{n},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (y-1)\,\vec{h} - x\vec{m} + (x+y-1)\,\vec{n},$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (y-1)\,\vec{h} + (y-x)\,\vec{m} + (y-1)\,\vec{n}.$$

Como $ABCD$ es un tetraedro regular, las longitudes de todas sus aristas son iguales. Por consiguiente, al asignar $h = |\vec{h}|$, $m = |\vec{m}|$, $n = |\vec{n}|$, $a = |\overrightarrow{AB}|$, llegamos al sistema de ecuaciones

$$a^2 = x^2n^2, \; a^2 = y^2m^2, \; a^2 = (y-1)^2 h^2 + (y-x)^2 m^2 + (x+y-1)^2 n^2, \; a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2m^2 + (y-1)^2 n^2, \; a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2m^2 + (x+y-1)^2 n^2.$$

Restando la quinta ecuación de la tercera, obtenemos $(y-x)^2 = x^2$, es decir, $y(y-2x) = 0$. Como $|\overrightarrow{CD}| = |y\vec{m}| \neq 0$, se tiene $y \neq 0$. Por tanto, $y = 2x$. Restando la cuarta ecuación de la tercera, obtenemos $x(x+2y-2) = 0$. Ya que $x \neq 0$, entonces $0 = x + 2y - 2 = 5x - 2$, es decir, $x = 2/5$, $y = 4/5$. Ahora para a, h, m, n tenemos el sistema de ecuaciones $a^2 = 4n^2/25$, $a^2 = 16m^2/25$, $a^2 = h^2/25 + 4m^2/25 + n^2/25$. De aquí $n = (5/2)\,a$, $m = (5/4)\,a$, $h = (5/\sqrt{2})\,a$. Tenemos

$$V_{ABCD} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}, \qquad V_{MNPQ} = \frac{1}{3}\,h\left(\frac{1}{2}\,mn\right) = \frac{125}{48\sqrt{2}}\,a^3,$$

y por eso la razón buscada de los volúmenes es $V_{ABCD} : V_{MNPQ} = 8 : 125$. ▲

Ejemplo 24. Dados un rectángulo $ABCD$ y un punto M. Mostrar que: a) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$; b) $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$.

△ a) Sea que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{x}$. Entonces, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ y $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}) = (-\vec{x},$

$-\vec{x}+\vec{a}+\vec{b})-(-\vec{x}+\vec{a},\ -\vec{x}+\vec{b})=\vec{x}^2-(\vec{x},\ \vec{a})-(\vec{x},\ \vec{b})-$
$-(\vec{x}^2-(\vec{a},\ \vec{x})-(\vec{x},\ \vec{b})+(\vec{a},\ \vec{b}))=-(\vec{a},\ \vec{b})=0.$

b) Tomando en consideración a), tenemos $|\overrightarrow{MA}|^2+$
$+|\overrightarrow{MC}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2-|\overrightarrow{MD}|^2=(|\overrightarrow{MA}|^2-2(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MC})+$
$+|\overrightarrow{MC}|^2)-(|\overrightarrow{MB}|^2-2(\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MD})+|\overrightarrow{MD}|^2)=\overrightarrow{AC}^2-$
$-\overrightarrow{BD}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{b}-\vec{a})^2=4(\vec{a},\ \vec{b})=0.$ ▲

Ejemplo 25. Los puntos A, B, C, D de un espacio (plano) son tales que para cualquier punto M del espacio (plano) $(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{CM})\neq(\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{DM})$. Demostrar que $ABCD$ es paralelogramo.

△ Designemos $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AM}$. Entonces, $\overrightarrow{CM}=\vec{r}-\vec{c}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{r}-\vec{b}$, $\overrightarrow{DM}=\vec{r}-\vec{d}$. Según la condición, para cualquier vector $\vec{r}$ (del espacio o del plano) se tiene

$$(\vec{r},\ \vec{r}-\vec{c})\neq(\vec{r}-\vec{b},\ \vec{r}-\vec{d}),\ \text{o sea}$$

$$(\vec{r},\ \vec{d}+\vec{b}-\vec{c})\neq(\vec{b},\ \vec{d}). \tag{3.19}$$

Demostremos que el vector $\vec{a}=\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}$ es igual a $\vec{0}$. Supongamos lo contrario: $\vec{a}\neq\vec{0}$. Entonces, el vector $\vec{r}=$ $=\frac{(\vec{b},\ \vec{d})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ satisface la igualdad $(\vec{r},\ \vec{a})=(\vec{b},\ \vec{d})$, lo que contradice a (3.19). Así pues, $\vec{a}=\vec{0}$, es decir, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}=$ $=\vec{c}-\vec{d}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$. Por consiguiente $ABCD$ es paralelogramo. Haciendo en (3.19) $\vec{r}=\vec{0}$, obtenemos $(\vec{b},\ \vec{d})\neq0$, o sea, $ABCD$ no es rectángulo (confróntese con el ejemplo 24). ▲

Ejemplo 26. Sean O centro de un n-ágono regular $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, M un punto arbitrario. Hallar la magnitud

$$f(M)=f(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n;\ M)=|A_1M|^2+$$
$$+|A_2M|^2+\ldots+|A_nM|^2,$$

cuando $|OM|=l$, $|OA_1|=R$.

△ Asignemos $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $|\vec{r}| = l$, $|\vec{r}_i| = R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|\overrightarrow{A_iM}|^2 = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i}|^2 = \vec{r}^2 + \vec{r}_i^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}_i) = l^2 + R^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, $f(M) = n(l^2 + R^2) - 2(\vec{r}, \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_n) = n(l^2 + R^2)$ (la suma $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_n$ de los radio vectores de los vértices de un n-ágono regular con respecto a su centro es igual a $\vec{0}$). ▲

Ejemplo 27. m- y n-ágonos regulares están situados de modo que la distancia entre sus centros es igual a d. Los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los polígonos son, respectivamente, iguales a r y R. Todos los vértices del m-ágono se unen con todos los vértices del n-ágono mediante segmentos. Hallar la suma de los cuadrados de las longitudes de todos estos segmentos.

△ Sean O y O' los centros y A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y B_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, los vértices del n-ágono y el m-ágono, respectivamente. Sobre la base del resultado del ejemplo 26 para cualquier $j = 1, 2, \ldots, m$

$$f(B_j) = |B_jA_1|^2 + |B_jA_2|^2 + \ldots + |B_jA_n|^2 = \\ = n(|OB_j|^2 + R^2).$$

La suma buscada σ es igual a

$$\sigma = f(B_1) + f(B_2) + \ldots + f(B_m) = \\ = mnR^2 + n(|B_1O|^2 + |B_2O|^2 + \ldots + |B_mO|^2) = \\ = mnR^2 + nf(B_1, B_2, \ldots, B_m; O).$$

En virtud del resultado del ejemplo 26, aplicado al m-ágono regular $B_1B_2 \ldots B_{m-1}B_m$, tenemos $f(B_1, B_2, \ldots, B_m; O) = m(|OO'|^2 + r^2)$. Por eso, definitivamente, $\sigma = mn(R^2 + d^2 + r^2)$. ▲

Ejemplo 28*. Demostrar que si $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ son los ángulos del triángulo ABC, se cumplen las desigualdades:

1) $\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} \geqslant -3/2$;

2) $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leqslant 3/2$;

3) $\operatorname{sen}(\hat{A}/2) + \operatorname{sen}(\hat{B}/2) + \operatorname{sen}(\hat{C}/2) \leqslant 3/2$.

□ Sean $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vectores unitarios arbitrarios, $\alpha = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$, $\beta = (\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3})$, $\gamma = (\widehat{\vec{e}_3, \vec{e}_1})$. Transformando la desigualdad evidente $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geqslant 0$, obtenemos $3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \geqslant 0$, o bien

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -3/2. \qquad (3.20)$$

1) Si $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ son los ángulos del triángulo, $\hat{A} > 0°$, $\hat{B} > 0°$, $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} > 0°$.

Sin limitar la comunidad se puede poner $\hat{A} \leqslant \hat{B} \leqslant 90°$. Tomemos vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tales que $\vec{e}_2$ se obtiene

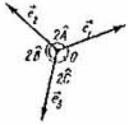


Fig. 3.17

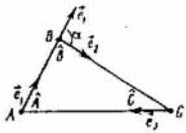


Fig. 3.18

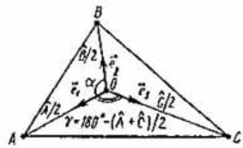


Fig. 3.19

de $\vec{e}_1$ mediante el giro del ángulo $2\hat{A}$, y $\vec{e}_3$ se obtiene de $\vec{e}_2$ mediante el giro del ángulo $2\hat{B}$ en el mismo sentido (fig. 3.17). Entonces, $\alpha = 2\hat{A}$, $\beta = 2\hat{B}$ y $\gamma = 2\hat{C}$, si $2\hat{C} \leqslant 180°$, y $\gamma = 360° - 2\hat{C}$, si $\hat{C} > 90°$. Por eso $\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -3/2$ [véase (3.20)].

2) Sea ABC triángulo dado. Pongamos $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}/|AB|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}/|BC|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{CA}/|CA|$. Entonces, $\alpha = 180° - \hat{B}$, $\beta = 180° - \hat{C}$, $\gamma = 180° - \hat{A}$ (fig. 3.18). Sustituyendo estos valores en la desigualdad (3.20), obtenemos $-\cos\hat{B} - \cos\hat{C} - \cos\hat{A} \geqslant -3/2$, es decir, $\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} \leqslant 3/2$.

3) Mediante O designemos el centro de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$. Hagamos $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}/|OA|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}/|OB|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}/|OC|$. Entonces (fig. 3.19) $\alpha =$

$= 180° - (1/2)\,\hat{A} - (1/2)\,\hat{B} = 90° + (1/2)\,\hat{C}$, $\beta = 90° + (1/2)\,\hat{A}$, $\gamma = 90° + (1/2)\,\hat{B}$, $\cos\alpha = -\operatorname{sen}(\hat{C}/2)$, $\cos\beta = -\operatorname{sen}(\hat{A}/2)$, $\cos\gamma = -\operatorname{sen}(\hat{B}/2)$. Por eso, de (3.20) tenemos $\operatorname{sen}(\hat{C}/2) + \operatorname{sen}(\hat{A}/2) + \operatorname{sen}(\hat{B}/2) \leqslant 3/2$. ■

Ejemplo 29*. Dentro de un tetraedro $ABCD$ está elegido un punto O. Al designar $\alpha_1 = \widehat{AOB}$, $\alpha_2 = \widehat{AOC}$, $\alpha_3 = \widehat{AOD}$, $\alpha_4 = \widehat{BOC}$, $\alpha_5 = \widehat{BOD}$, $\alpha_6 = \widehat{COD}$ demostrar que entre los ángulos α_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, existe por lo menos uno que: a) no es mayor que $\arccos(-1/3)$; b) no es menor que $\arccos(-1/3)$.

△ a) Sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ vectores unitarios codirigidos con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, respectivamente. Entonces, $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)^2 \geqslant 0$, o bien $4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_6) \geqslant 0$. Por eso, si todos los ángulos α_i fueran mayores que $\arccos(-1/3)$, es decir, $\cos\alpha_i < -1/3$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, entonces obtendríamos la contradicción $0 \leqslant 4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_6) < 4 + 2\cdot 6\cdot(-1/3) = 0$; por tanto, entre los ángulos α_i existe uno que no es mayor que $\arccos(-1/3)$.

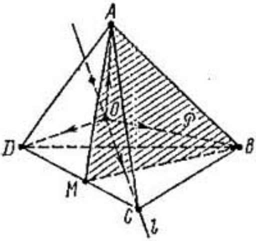


Fig 3.20

b) Los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ son linealmente dependientes. Por eso existen números x, y, z, t tales que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$ y

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + t\vec{e}_4 = \vec{0}. \tag{3.21}$$

Demostremos que todos los números x, y, z, t tienen signos iguales. En efecto, el punto O se encuentra dentro del tetraedro, por eso el plano $\mathscr{P}$ que pasa por los puntos O, A y B corta la arista $[CD]$ en un punto interior M (fig. 3.20). Los extremos de los vectores $\vec{e}_3$ y $\vec{e}_4$ se encuentran por distintos lados del plano $\mathscr{P}$ si ponemos que todos los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ se trazan partiendo del punto O. Designando la recta (OC) por l, obtenemos que el vector $\Pi_l^{\mathscr{P}}\vec{e}_4 = \vec{a}$ se difiere de cero y es contrariamente dirigido al vector $\vec{e}_3$. Por otro lado, de la igualdad (3.21), al tomar en consideración la relación $\Pi_l^{\mathscr{P}}\vec{e}_2 = \Pi_l^{\mathscr{P}}\vec{e}_1 = \vec{0}$ y al proyectar sobre l paralelamente a $\mathscr{P}$, tenemos

$$z\vec{e}_3 + t\vec{a} = \vec{0}. \tag{3.22}$$

Los números z y t no son iguales a cero: si $z = 0$ ($t = 0$), de (3.22) se deduce que $t = 0$ ($z = 0$); por consiguiente [véase (3.21)], $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \vec{0}$, $x^2 + y^2 > 0$, o sea, los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son colineales lo que es imposible. Los vectores $\vec{e}_3$ y $\vec{a}$ son contrariamente dirigidos. Por consiguiente, z y t tienen signos iguales [véase (3.22)]. Análogamente se demuestra que x y t (y y t) tienen signos iguales. De este modo, todos los seis números xy, xz, xt, yz, yt, zt son positivos.

Si suponemos que todos los ángulos $\alpha_i < \arccos(-1/3)$, es decir, $\cos \alpha_i > -1/3$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, entonces $2xy(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2xy \cos \alpha_1 > -(2/3)\,xy$. Análogamente, $2xz(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2xz \cos \alpha_2 > -(2/3)\,xz$, $2xt(\vec{e}_1, \vec{e}_4) > -(2/3)\,xt$, $2yz(\vec{e}_2, \vec{e}_3) > -(2/3)\,yz$, $2yt(\vec{e}_2, \vec{e}_4) > -(2/3)\,yt$, $2zt(\vec{e}_3, \vec{e}_4) > -(2/3)\,zt$. Por eso, de la fórmula (3.21) hallamos

$$0 = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + t\vec{e}_4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 +$$
$$+ 2\,(xy(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + xz(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + xt(\vec{e}_1, \vec{e}_4) + yz(\vec{e}_2, \vec{e}_3) +$$
$$+ yt(\vec{e}_2, \vec{e}_4) + zt(\vec{e}_3, \vec{e}_4)) > x^2 + y^2 + z^2 + t^2 -$$
$$- (2/3)\,(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = (1/3)\,((x - y)^2 +$$
$$+ (x - z)^2 + (x - t)^2 + (y - z)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2) \geqslant 0.$$

Resulta la contradicción. ▲

§ 3. Proyección ortogonal en el espacio. Ecuación vectorial normal del plano

Sea l una recta en un espacio. Llámase *proyección ortogonal* $\Pi o_l M$ *de un punto M del espacio sobre la recta l* al punto $M^* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$, donde $\mathcal{P}$ es un plano perpendicular a la recta l. En otras palabras, $M^* = M$ si $M \in l$ y M^* es la base de la perpendicular bajada desde el punto M a la recta l, si $M \notin l$. Sea $\vec{a}$ un vector. Por definición, se llama *proyección ortogonal del vector $\vec{a}$ sobre la recta l* al vector $\Pi o_l \vec{a} = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\vec{a})$. Hallemos la expresión explícita para $\Pi o_l \vec{a}$. En la recta l elijamos el punto M y, partiendo de él, tracemos el vector $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ (fig. 3.21, a, b). Entonces, $\Pi o_l \vec{a} = \overrightarrow{MN^*}$, donde $N^* = \Pi o_l N$. Al designar $\vec{x} = \overrightarrow{MN^*}$, $\vec{y} = \overrightarrow{N^*N}$, obtenemos

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}. \tag{3.23}$$

Sea $\vec{e}$ vector director de la recta l. Entonces, $\vec{x} = \lambda\vec{e}$. Para hallar λ multipliquemos de modo escalar los dos miembros de la igualdad (3.23) por $\vec{e}$ y tomemos en consideración que, según la definición de proyección ortogonal del

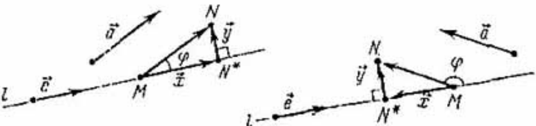


Fig. 3.21

punto N $(\vec{y}, \vec{e}) = 0$. Tenemos $(\vec{a}, \vec{e}) = \lambda(\vec{e}, \vec{e})$, es decir,

$$\text{Пo}_l\vec{a} = \vec{x} = \lambda\vec{e} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{(\vec{e}, \vec{e})}\vec{e}, \qquad (3.24)$$

$$|\text{Пo}_l\vec{a}| = \left|\frac{|\vec{a}|\,|\vec{e}|\cos\varphi}{|\vec{e}|\,|\vec{e}|}\vec{e}\right| = |\vec{a}|\,|\cos\varphi| = \frac{|(\vec{a}, \vec{e})|}{|\vec{e}|}. \qquad (3.25)$$

Sea $\mathscr{P}$ cierto plano en un espacio. Se denomina *proyección ortogonal* $\text{Пo}_{\mathscr{P}}(M)$ *del punto* M *sobre el plano* $\mathscr{P}$ al punto $M^* = \Pi^l_{\mathscr{P}}(M)$, donde l es una recta perpendicular al plano $\mathscr{P}$. De este modo, $M^* = M$ si $M \in \mathscr{P}$; M^* es la base de la perpendicular bajada desde el punto M sobre el plano $\mathscr{P}$ si $M \notin \mathscr{P}$. Si $\vec{n} \neq \vec{0}$ es un vector perpendicular a $\mathscr{P}$ (o sea, vector director de la recta l), en virtud de la igualdad

$$\vec{a} = \Pi^l{}_{\mathscr{P}}(\vec{a}) + \Pi_l{}^{\mathscr{P}}(\vec{a})$$

y la fórmula (3.24) obtenemos

$$\text{Пo}_{\mathscr{P}}\vec{a} = \vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})}\vec{n}, \qquad (3.26)$$

donde $\text{Пo}_{\mathscr{P}}\vec{a}$ es la *proyección ortogonal del vector* $\vec{a}$ *sobre el plano* $\mathscr{P}$, o sea, el vector $\text{Пo}_{\mathscr{P}}\vec{a} = \overrightarrow{\text{Пo}_{\mathscr{P}}M\,\text{Пo}_{\mathscr{P}}N}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

Ejemplo 1. La longitud de la arista de la base ABC de un prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ es igual a a. Los puntos M, N, P y Q son los puntos medios de las aristas $[AB]$, $[AC]$, $[A_1C_1]$ y $[C_1B_1]$, respectivamente. La longitud de la proyección del vector $\overrightarrow{MP}$ sobre la recta (NQ) es igual a $a/4$. Hallar la longitud de la altura del prisma.

$\triangle$ Según la condición $|\Pi o_{(NQ)}\overrightarrow{MP}|^2 = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ})^2/|\overrightarrow{NQ}|^2 = a^2/16$ [véase la fórmula (3.25)]. Como los vectores básicos tomemos $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Entonces, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$, $(\vec{a}, \vec{b}) = a^2/2$, $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$ (el prisma es regular). La longitud buscada $h = |\vec{c}|$. Ya que $\overrightarrow{MP} = (1/2)\,\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{NQ} = (-1/2)\,\vec{a} + \vec{c}$, se tiene $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}) = -(1/4)\,(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{c}^{\,2} = h^2 - a^2/8$, $|\overrightarrow{NQ}|^2 = (1/4)\,\vec{a}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} = h^2 + a^2/4$. Por consiguiente, para la variable $x = h^2$, tenemos la ecuación

$$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ})^2 = (x - a^2/8)^2 =$$
$$= (a^2/16)\,(x + a^2/4) = (a^2/16)\,|\overrightarrow{NQ}|^2,$$

o bien $x^2 - (5/16)\,a^2x = 0$. Puesto que $x \neq 0$, se tiene $h^2 = (5/16)\,a^2$, es decir, $h = a\sqrt{5}/4$. $\blacktriangle$

Ejemplo 2 (ecuación vectorial normal del plano). En un espacio sean fijado un polo O, elegidos un número D y un vector no nulo $\vec{N}$. Demostrar que el conjunto $\mathscr{P}$ de todos los puntos cuyos radio vectores satisfacen la ecuación

$$(\vec{r}, \vec{N}) = D. \tag{3.27}$$

es un plano. Señalar su posición en el espacio.

$\square$ Consideremos el punto A con el radio vector $\vec{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$ (fig. 3.22). Puesto que $(\vec{r}_A, \vec{N}) = D(\vec{N}, \vec{N})/|N|^2 = D$, se tiene que $A \in \mathscr{P}$. Mediante l designemos una recta con el vector director $\vec{N}$ trazado por el punto A. Sea M un punto arbitrario de $\mathscr{P}$ con el radio vector

$\vec{r}_M$. La igualdad $(\vec{r}_M, \vec{N}) = D$, equivalente a la igualdad $(\vec{r}_M - \vec{r}_A, \vec{N}) = 0$, se cumple si, y sólo si, $\vec{r}_M - \vec{r}_A = \overrightarrow{AM} \perp \vec{N}$. De este modo, el punto M pertenece al conjunto $\mathcal{P}$ si, y sólo si, se encuentra en una recta que pasa por el punto A perpendicularmente a la recta l. Empero, el conjunto $\mathcal{P}$ de todas estas rectas llena el plano que pasa por el punto A y es perpendicular a l. ■

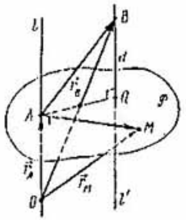


Fig. 3.22

Así pues, (3.27) es la ecuación de un plano $\mathcal{P}$ en el espacio. Esta ecuación se denomina *ecuación normal (vectorial) del plano* $\mathcal{P}$. El vector $\vec{N}$ se denomina *vector normal del plano* $\mathcal{P}$ y se dice que $\vec{N}$ es ortogonal (perpendicular) al plano $\mathcal{P}$ (o bien el plano $\mathcal{P}$ es ortogonal al vector $\vec{N}$). Subrayemos una vez más que al decir que el plano $\mathcal{P}$ se da por la ecuación (3.27), se sobreentiende (aunque no se da indicación expresa) que en el espacio está fijado un polo partiendo del que registran los radio vectores $\vec{r}$ de los puntos del plano $\mathcal{P}$ que satisfacen la igualdad (3.27).

Todo plano $\mathcal{P}$ puede describirse mediante la ecuación vectorial normal. Para esto es necesario fijar un polo O, un punto M_0 $(\vec{r}_0)$ del plano $\mathcal{P}$ y el vector director $\vec{N} \neq \vec{0}$ de una recta l, perpendicular a $\mathcal{P}$. Puesto que un punto M $(\vec{r})$ se encuentra en el plano $\mathcal{P}$ si, y sólo si (en virtud de la perpendicular l al plano $\mathcal{P}$) los vectores $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ y $\vec{N}$ son ortogonales; $M \in \mathcal{P}$ si, y sólo si,

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0. \qquad (3.28)$$

Es evidente que (3.28) traspasa a (3.27) si designamos $D = (\vec{r}_0, \vec{N})$.

La ecuación $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, donde $|\vec{n}| = 1$, se denomina *ecuación normada (vectorial) del plano*.

Ejemplo 3. Hallar la distancia d de un punto B con el radio vector $\vec{r}_B$ a un plano $\mathscr{P}$ dado por la ecuación $(\vec{r}, \vec{N}) = D$.

$\triangle$Sea Q la base de la perpendicular l' bajada desde el punto B al plano $\mathscr{P}$ (fig. 3.22), sea A un punto con el radio vector $\vec{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$. Entonces $\vec{N}$ es el vector director de l' y por la fórmula (3.25) tenemos

$$d = |\Pi o_{l'} \overrightarrow{AB}| = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{N})|}{|\vec{N}|} = \frac{|(\vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{N})|}{|\vec{N}|}.$$

En definitiva,

$$d = \frac{|(\vec{r}_B, \vec{N}) - D|}{|\vec{N}|}. \quad \blacktriangle \tag{3.29}$$

Ejemplo 4. Hallar la proyección ortogonal de un punto $B\ (\vec{r}_B)$ sobre un plano $\mathscr{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$.

$\triangle$ Como se ha observado en el ejemplo 3 los puntos $Q = \Pi o_{\mathscr{P}} B$ y $A\left(\dfrac{D\vec{N}}{|\vec{N}|^2}\right)$ están ligados por la relación

$$\overrightarrow{BQ} = \Pi o_{l'} \overrightarrow{BA} = \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} = \frac{D - (\vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}.$$

Por consiguiente,

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_B + \overrightarrow{BQ} = \vec{r}_B + \frac{D - (\vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5. Hallar la distancia δ desde un punto M con el radio vector $\vec{r}_M$ hasta una recta l cuya ecuación paramétrica es $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

$\triangle$ Sea $M^* = \Pi o_l M$; M_0 es un punto de la recta l y su radio vector es $\vec{r}_0$. Entonces (fig. 3.23), $\overrightarrow{M_0M^*} = \Pi o_l \overrightarrow{M_0M} = (\overrightarrow{M_0M}, \vec{a})\vec{a}/(\vec{a}, \vec{a})$, $\overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M^*} = \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{a}/(\vec{a}, \vec{a})$, donde $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_M - \vec{r}_0$.

De esto modo,

$$\delta = |\overrightarrow{M^*M}| = \left| \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} \vec{a} \right| =$$

$$= \sqrt{\vec{b}^2 - 2\frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{\vec{a}^2} + \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{(\vec{a}^2)^2} \vec{a}^2} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{r}_M - \vec{r}_0|^2 - (\vec{a}, \vec{r}_M - \vec{r}_0)^2}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. Escribir la ecuación vectorial paramétrica de la recta l^* que es proyección (ortogonal) de una recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ sobre un plano $\mathcal{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$.

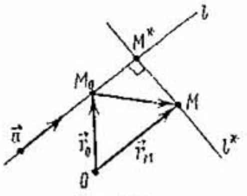


Fig. 3.23

$\triangle$Sean M un punto arbitrario de la recta l, $\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ su radio vector, Q proyección ortogonal del punto M sobre el plano $\mathcal{P}$. Por la fórmula obtenida en el ejemplo 4, se tiene

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_M + \frac{D - (\vec{r}_M, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N} = \left(\vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N} \right) +$$

$$+ \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N} \right) t.$$

Cuando t recorre todos los valores reales, el punto M recorre toda la recta l, y el punto correspondiente Q, toda la recta l^*. Por consiguiente,

$$\vec{r} = \left(\vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N} \right) + \vec{b}t,$$

donde $\vec{b} = \vec{a} - \dfrac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N}$, $t \in R$, ecuación paramétrica de la recta l^*. $\blacktriangle$

Ejemplo 7. Hallar la proyección ortogonal de un punto $M(\vec{r}_M)$ sobre una recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

$\triangle$Conservando las designaciones del ejemplo 5 (fig. 3.23), tenemos

$$\vec{r}_{M^*} = \vec{r}_{M_0} + \overrightarrow{M_0M^*} = \vec{r}_0 + \frac{(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} =$$

$$= \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 8. Escribir la ecuación de la recta l^* que pasa por un punto $M(\vec{r}_M)$ y corta ortogonalmente la recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ que no contiene M.

$\triangle$La ecuación de l^* es $\vec{r} = \vec{r}_M + \vec{b}t$ donde $\vec{b} = \overrightarrow{MM^*}$, $M^* = \Pi o_l M$ (fig. 3.23). Según la fórmula dada en el ejemplo 7, se tiene

$$\vec{b} = \vec{r}_{M^*} - \vec{r}_M = -\vec{r}_M + \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 9. La longitud de la arista de un prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ es igual a a. Las ecuaciones de los planos (AA_1B_1B) y (AA_1C_1C) son: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$ y $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$, donde $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -1/2$. Escribir la ecuación vectorial normal del plano (BB_1C_1C).

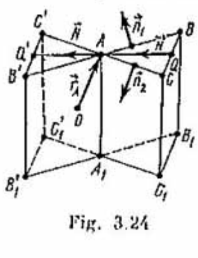


Fig. 3.24

$\triangle$El vector normal $\vec{N}$ del plano (BB_1C_1C) es colineal a la bisectriz $[AQ]$ del ángulo $\angle BAC$ (fig. 3.24). Por eso se puede tomar $\vec{N} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$, $|\vec{N}| = \sqrt{(\vec{n}_1 + \vec{n}_2, \vec{n}_1 + \vec{n}_2)} = \sqrt{1 + 2(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + 1} = 1$. Por consiguiente, la ecuación del plano (BB_1C_1C) tiene la forma $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = D$. Queda por hallar D, La distancia $d = |AQ| = a\sqrt{3}/2$ del punto A al plano (BB_1C_1C) se determina por la fórmula (3.29):

$$d = \frac{|(\vec{r}_A, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) - D|}{|\vec{n}_1 + \vec{n}_2|} = |(\vec{r}_A, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) - D|.$$

De aquí $D = (\vec{r}_A, \vec{n}_1) + (\vec{r}_A, \vec{n}_2) \pm a\sqrt{3}/2$. Como el punto A se encuentra en el plano (AA_1B_1B), se tiene $(\vec{r}_A, \vec{n}_1) = D_1$. Análogamente $(\vec{r}_A, \vec{n}_2) = D_2$. De este modo, el problema tiene dos soluciones: $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = D_1 + D_2 + a\sqrt{3}/2$ y $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = D_1 + D_2 - a\sqrt{3}/2$, que corresponden a dos posiciones posibles de los prismas $ABCA_1B_1C_1$ y $AB'C'A_1B_1'C_1'$ (fig. 3.24). ▲

Ejemplo 10. Escribir la ecuación de la recta que corta ortogonalmente dos rectas no paralelas l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ y L: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{b}\tau$.

△ El problema es equivalente al siguiente: hallar puntos $M_0 \in l$ y $M_1 \in L$ tales que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ es ortogonal tanto al vector $\vec{a}$ como al vector $\vec{b}$. La recta que pasa por el punto M_0 y tiene el vector director $\overrightarrow{M_0M_1}$ es buscada. Queda por hallar números t_0 y τ_1 tales que los vectores $\vec{r}_0 + \vec{a}t_0$ y $\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1$ son radio vectores de los puntos buscados M_0 y M_1, respectivamente. Hallamos estos números de las condiciones de ortogonalidad: $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}) = (\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{b}) = 0$ o bien $(\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1 - \vec{r}_0 - \vec{a}t_0, \vec{a}) = 0$, $(\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1 - \vec{r}_0 - \vec{a}t_0, \vec{b}) = 0$. Escribamos este sistema de ecuaciones en la forma

$$t_0\vec{a}^2 - \tau_1(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha, \quad t_0(\vec{a}, \vec{b}) - \tau_1\vec{b}^2 = \beta, \qquad (3.30)$$

donde $\alpha = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})$, $\beta = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})$. La solución del sistema (3.30) es

$$t_0 = \frac{-\beta(\vec{a}, \vec{b}) + \alpha\vec{b}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha(\vec{a}, \vec{b}) - \beta\vec{a}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}.$$

De este modo, la ecuación de la recta buscada es

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})\vec{b}^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{a} +$$

$$+ \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})(\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})\vec{a}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{b} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})\vec{b}^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{a}\right) t, \quad t \in R. \ \blacktriangle$$

§ 4. Base ortonormalizada. Sistema rectangular de coordenadas. La recta en el plano. La recta y el plano en el espacio

Tres vectores unitarios perpendiculares dos a dos y tomados en un orden determinado se denominan *base ortonormalizada* (o *rectangular*) *en el espacio*. Suele denotar los vectores de la base rectangular mediante $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Todo vector $\vec{a}$ se representa en la forma $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de un solo modo. Los números x, y, z se llaman *coordenadas del vector $\vec{a}$ en la base* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Si $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, se escribe $\vec{a} = (x; y; z)$. Por ejemplo, $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, $\vec{0} = (0; 0; 0)$, etc. Las coordenadas de los vectores en la base ortonormalizada poseen la **propiedad de linealidad**: para cualesquiera vectores $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ y $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ y números α y β, se tiene

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \ \alpha y_1 + \beta y_2; \ \alpha z_1 + \beta z_2).$$

De la unicidad de la descomposición de un vector según una base se desprende que la igualdad vectorial $\vec{a} = \vec{b}$ es equivalente al sistema de tres igualdades escalares $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

El producto escalar de los vectores $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ y $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ es igual a la suma de productos de las coordenadas correspondientes:

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3.31}$$

La longitud del vector $\vec{a}$ es igual a $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

□ En efecto, ya que $(\vec{i},\ \vec{j}) = (\vec{i},\ \vec{k}) = (\vec{j},\ \vec{k}) = 0$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, según la fórmula (3.14) tenemos $(\vec{a},\ \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2 + z_1z_2\vec{k}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{i},\ \vec{j}) + (x_1z_2 + x_2z_1)(\vec{i},\ \vec{k}) + (y_1z_2 + y_2z_1)(\vec{j},\ \vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. De (3.31) se deduce que $(\vec{a},\ \vec{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, o sea, $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})} = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. ■

En todo este párrafo consideremos que las coordenadas de los vectores están dadas en la base ortonormalizada sin indicarlo especialmente.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas y la longitud del vector $3\vec{a} + 2\vec{b}$ si $\vec{a} = (0;\ -2;\ -3)$, $\vec{b} = (3;\ 2;\ 3)$.

△ En virtud de la propiedad de linealidad de coordenadas $3\vec{a} + 2\vec{b} = (3\cdot 0 + 2\cdot 3;\ 3\cdot(-2) + 2\cdot 2;\ 3\cdot(-3) + 2\cdot 3) = (6;\ \ -2;\ \ -3)$. Por eso, $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7$. ▲

Ejemplo 2. Hallar con qué valores de m son ortogonales los vectores $\vec{a} = (m;\ -2;\ 1)$ y $\vec{b} = (m;\ m;\ -3)$.

△ Tenemos $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 0 = (\vec{a},\ \vec{b}) = m\cdot m + (-2)\cdot m + 1\cdot(-3) = m^2 - 2m - 3 \Leftrightarrow (m = -1 \quad \text{o} \quad m = 3)$. ▲

Ejemplo 3. Hallar las coordenadas del vector unitario $\vec{e}$ que es contrariamente dirigido al vector $\vec{a} = (2;\ -2;\ 1)$.

$$\triangle\ \ |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3;\ \ \vec{e} = -\vec{a}/|\vec{a}| = (-2/3;\ 2/3;\ -1/3).\ \ ▲$$

Ejemplo 4. Hallar el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1;\ 2;\ 2)$ y $\vec{b} = (-1;\ 0;\ -1)$.

$$\triangle\ \ \cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\ \sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ (\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 135°.\ \ ▲$$

Si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es base ortonormalizada, el sistema de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se denomina *rectangular*. Si $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ son puntos dados por sus coordenadas en un sistema rectangular, entonces

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1),\ |\overrightarrow{AB}| = |AB| = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ejemplo 5. En el triángulo con los vértices en los puntos $A\ (3;\ 2;\ -3)$, $B\ (4;\ 3;\ -3)$, $C\ (3;\ 1;\ -4)$ hallar el valor del ángulo $\hat{A}$ y la longitud de la mediana $[AN]$.

$\triangle$ Puesto que $\hat{A}$ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB} = (4 - 3;\ 3 - 2;\ -3 - (-3)) = (1;\ 1;\ 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0;\ -1;\ -1)$, $\cos \hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})/(|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|) = (-1)/(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = -1/2$, es decir, $\hat{A} = 120°$. El vector $\overrightarrow{AN} = (1/2)\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (1/2;\ 0;\ -1/2)$, $|AN| = \sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2} = 1/\sqrt{2}$. $\blacktriangle$

Dos vectores unitarios mutuamente perpendiculares paralelos al plano $\mathcal{P}$ y tomados en un orden determinado se denominan *base ortonormalizada (rectangular) en el plano* $\mathcal{P}$. Suele denotar los vectores de la base ortonormalizada mediante $\vec{i}$, $\vec{j}$. Todo vector $\vec{a}$ paralelo al plano $\mathcal{P}$ se representa de un solo modo en la forma $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Los números x, y se denominan *coordenadas del vector* $\vec{a}$ *en la base* $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ y se escribe $\vec{a} = (x;\ y)$. Si $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, entonces para cualesquiera números α y β $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2;\ \alpha y_1 + \beta y_2)$, $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. La igualdad $\vec{a} = \vec{b}$ es equivalente al sistema de igualdades $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Si $O \in \mathcal{P}$ y $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es la base ortonormalizada en el plano $\mathcal{P}$, el sistema de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ en el plano $\mathcal{P}$ se llama *rectangular*. Si $A\ (x_1;\ y_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ son puntos del plano $\mathcal{P}$ dados por sus coordenadas en un sistema rectangular de coordenadas, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ejemplo 6. Son dados el punto $A(-1; 2)$ y el vector $\vec{a} = (3; -4)$. Hallar las coordenadas de los puntos B y C tales que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{a}$ y $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a}|$.

△ Sea $B(x; y)$. Entonces, $\overrightarrow{AB} = (x+1; y-2)$ y cuando $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, se tiene $3 = x+1$, $-4 = y-2$, es decir, $x = 2$, $y = -2$. Así pues, el punto B tiene las coordenadas $(2; -2)$. Sea $C(\tilde{x}; \tilde{y})$. Entonces, $\overrightarrow{AC} = (\tilde{x} + 1; \tilde{y} - 2)$. Puesto que $(\overrightarrow{AC}, \vec{a}) = 3(\tilde{x}+1) - 4 \times (\tilde{y} - 2) = 0$, entonces $\tilde{x} = (4/3)\tilde{y} - 11/3$. Luego $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a}|$, es decir, $(\tilde{x}+1)^2 + (\tilde{y}-2)^2 = 3^2 + (-4)^2$, o bien $((4/3)\tilde{y} - 8/3)^2 + (\tilde{y} - 2)^2 = 25$. Resolviendo esta ecuación respecto a $\tilde{y}$, hallamos $\tilde{y}_1 = -1$, $\tilde{y}_2 = 5$. Por consiguiente, existen dos puntos C que satisfacen la condición del problema: $C_1(-5; -1)$ y $C_2(3; 5)$. ▲

Ejemplo 7 (ecuación normal de la recta en el plano). Demostrar que, en cualquier sistema de coordenadas, la ecuación

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{3.32}$$

describe una recta en un plano. Aclarar el sentido geométrico de los coeficientes A y B si el sistema de coordenadas es rectangular.

□ Si $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$ son dos puntos diferentes dados por sus coordenadas en un sistema de coordenadas (que no es obligatoriamente rectangular), entonces en este sistema de coordenadas, la ecuación de la recta $l = (M_1M_2)$ tiene la forma [véase la fórmula (2.53) del cap. 2] $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, o bien $Ax + By + C = 0$, donde $A = y_2 - y_1$, $B = -(x_2 - x_1)$, $A^2 + B^2 > 0$, $C = -Ax_1 - By_1$. El vector

$$\vec{a} = (-B; A) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1). \tag{3.33}$$

es el vector director de la recta l dada por la ecuación (3.32).

Toda ecuación (3.32) es ecuación de una recta en el plano. Esta recta pasa por los puntos $(0; -C/B)$ y

$(-C/A;\ 0)$ si $A \neq 0$, $B \neq 0$. Si $A = 0$, la ecuación $By + C = 0$, $B \neq 0$, es ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0;\ -C/B)$ y $(1;\ -C/B)$. Esta recta es paralela al eje de abscisas. La ecuación $Ax + C = 0$, $A \neq 0$, es ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas (la recta pasa por los puntos $\left(-\frac{C}{A};\ 0\right)$ y $\left(\frac{C}{A};\ 1\right)\Big)$.

Si $M_1\ (x_1;\ y_1)$ es un punto de la recta l con la ecuación (3.32), entonces $Ax_1 + By_1 + C = 0$, o sea, $C = -Ax_1 - By_1$ y se puede escribir la ecuación (3.32) en la forma

$$A\ (x - x_1) + B\ (y - y_1) = 0. \qquad (3.34)$$

Si el sistema de coordenadas es rectangular, el vector $\vec{N} = (A;\ B)$ satisface la relación $(\vec{N},\ \vec{a}) = A\ (-B) + BA = 0$, es decir, $\vec{N} \perp \vec{a}$ (fig. 3.25). El vector $\vec{N}$ se denomina *vector normal de la recta* l dada por la ecuación (3.32). De este modo, para la recta l dada por la ecuación (3.32) en el sistema rectangular de coordenadas, las coordenadas del vector normal $\vec{N}$ son los coeficientes de las variables x e y en la ecuación (3.32). La ecuación (3.32) puede también escribirse en la forma

$$(\vec{r},\ \vec{N}) = D \qquad (3.35)$$

donde $\vec{r} = (x;\ y)$ es el radio vector de un punto arbitrario $M\ (x;\ y)$ de la recta l, $\vec{N} = (A;\ B)$ es su vector normal, $D = -C$. La ecuación (3.35), equivalente a (3.32), se denomina *ecuación vectorial normal de la recta en el plano* si el sistema de coordenadas es rectangular, y la ecuación correspondiente (3.32) se denomina *ecuación normal (en coordenadas) de* l. ■

Ejemplo 8. Hallar el radio vector $\vec{x}$ del punto común de las rectas l: $(\vec{r},\ \vec{N}) = D$ y L: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b}t$, $t \in R$, $(N,\ \vec{b}) \neq 0$.

△ $(\vec{x},\ \vec{N}) = D$ y $\vec{x} = \vec{r}_0 + \vec{b}t$ para un $t \in R$. Sustituyendo $\vec{x}$ en la primera de las ecuaciones, hallamos

$$(\vec{r}_0,\ \vec{N}) + t\,(\vec{b},\ \vec{N}) = D, \text{ o sea,}$$

$$t = \frac{D - (\vec{r}_0,\ \vec{N})}{(\vec{b},\ \vec{N})} \text{ y } \vec{x} = \vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0,\ \vec{N})}{(\vec{b},\ \vec{N})}\,\vec{b}. \ ▲$$

Llámase *ángulo entre dos rectas intersecadas* a la magnitud del ángulo menor entre los formados por estas rectas. El ángulo entre dos rectas perpendiculares es igual a 90° (los cuatro ángulos formados por estas rectas son congruentes). *Si dos rectas son paralelas, el ángulo entre ellas*

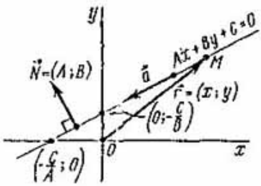


Fig. 3.25

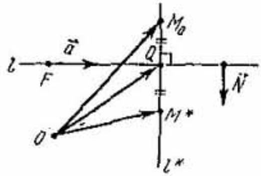


Fig. 3.26

se toma igual a 0°. Llámase *ángulo entre dos rectas cruzadas* al ángulo entre dos rectas intersecadas que son, respectivamente, paralelas a las rectas cruzadas dadas. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores directores de las rectas, el ángulo φ entre estas rectas se determina por la fórmula

$$\cos\varphi = |(\vec{a}, \vec{b})/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)|.$$

Ejemplo 9. Hallar el ángulo φ entre las rectas $-x + 2y + 3 = 0$ y $3x - y - 1 = 0$.

△ Los vectores directores de las rectas son: $\vec{a} = (-2; -1)$, $\vec{b} = (1; 3)$ [véase (3.33)]. Por consiguiente,

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 3}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{es decir,}$$

$\varphi = 45°$. ▲

Ejemplo 10. Hallar el punto M^* $(x^*; y^*)$, simétrico al punto M_0 $(1; 3)$ respecto a la recta l: $x - 2y + 3 = 0$.

△ Según la definición de punto simétrico:

a) el vector $\overrightarrow{M_0M^*} = (x^* - 1; y^* - 3)$ es perpendicular a la recta l, o sea, es ortogonal a su vector director $\vec{a} = (2; 1)$, en otros términos,

$$0 = (\overrightarrow{M_0M^*}, \vec{a}) = 2(x^* - 1) + (y^* - 3) = \\ = 2x^* + y^* - 5; \qquad (3.36)$$

b) el punto medio del segmento $[MM^*]$, es decir, el punto $Q\left(\frac{1+x^*}{2};\ \frac{3+y^*}{2}\right)$ (fig. 3.26), está situado en la recta l y, por lo tanto, las coordenadas $(1+x^*)/2$ y $(3+y^*)/2$ satisfacen a la ecuación de la recta:

$$0=\frac{1+x^*}{2}-2\,\frac{3+y^*}{2}+3=\frac{1}{2}x^*-y^*+\frac{1}{2}. \qquad (3.37)$$

Del sistema de ecuaciones (3.36), (3.37) hallamos $x^*=9/5$, $y^*=7/5$. ▲

Ejemplo 11. Escribir la ecuación de la recta l^* que pasa por el punto M_0 (3; 7) y es perpendicular a la recta l: $x-y+3=0$. Hallar la distancia del punto M_0 a la recta l.

△ El vector normal $\vec{N}=(1;\ -1)$ de la recta l es el vector director de la recta l^*. Como l^* pasa por el punto M_0 (3; 7), su ecuación es

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-7}{-1}\Leftrightarrow x+y-10=0.$$

Las coordenadas $(x_Q;\ y_Q)$ del punto común Q de las rectas l y l^* (es decir, de la perpendicular bajada desde el punto M_0 a la recta l) se determinan del sistema de ecuaciones $x_Q-y_Q+3=0$, $x_Q+y_Q-10=0$, es decir, $x_Q=7/2$, $y_Q=13/2$. La distancia del punto M_0 a l es igual a

$$d=|M_0Q|=\sqrt{(7/2-3)^2+(13/2-7)^2}=1/\sqrt{2}. \ ▲$$

Igual que en el espacio, la operación de proyección ortogonal sobre la recta se introduce en el plano: si M_0 es un punto de un plano $\mathcal{P}$, se denomina su *proyección ortogonal* $\Pi o_l(M_0)$ *sobre la recta* $l\subset\mathcal{P}$ a la base Q de la perpendicular l^* bajada del punto M_0 a la recta l ($Q=M_0$ si $M_0\in l$) (fig. 3.26). Si fijamos una recta $l_0\in\mathcal{P}$, perpendicular a l, entonces, debido a que $l_0\parallel l^*$, tenemos $\Pi o_l(M_0)=\Pi_l^{l_0}(M_0)=\Pi_l^{l^*}(M_0)$. Por definición, $\Pi o_l b=\Pi_l^{l_0}(\vec{b})$ para cualquier vector $\vec{b}$ del plano $\mathcal{P}$. Igual que para la proyección ortogonal sobre una recta

En un espacio se cumplen las igualdades

$$\Pi o_l \vec{b} + \Pi o_{l_0} \vec{b} = \vec{b}, \text{ si } l \perp l_0; \tag{3.38}$$

$$\Pi o_l \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} \vec{a}, \tag{3.39}$$

$$|\Pi o_l \vec{b}| = \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a}|}, \tag{3.40}$$

si $\vec{a}$ es el vector director de la recta l.

La recta $l \in \mathcal{P}$ parte el plano $\mathcal{P}$ en dos semiplanos. Si fijamos una recta $l_0 \perp l$ y el vector normal $\vec{N}$ de la recta l, entonces los puntos $M_1 \notin l$ y $M_2 \notin l$ se encuentran situados en un semiplano si, y sólo si, los vectores $\Pi o_{l_0} \overrightarrow{FM_1}$ y $\Pi o_{l_0} \overrightarrow{FM_2}$ son codirigidos (fig. 3.27), es decir, los números $d_1 = (\overrightarrow{FM_1}, \vec{N})/|\vec{N}|$ y $d_2 = (\overrightarrow{FM_2}, \vec{N})/|\vec{N}|$ [compárese, con (3.39)] tienen un mismo signo. En relación con esto para todo punto $M \in \mathcal{P}$ se introduce el número

$$d = d_l(M) = \frac{(\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|}, \tag{3.41}$$

llamado *distancia orientada del punto M a la recta l*. Los números $d_l(M_1)$ y $d_l(M_2)$ tienen el mismo signo si, y sólo si, los puntos M_1 y M_2 se encuentran situados en un semiplano determinado por la recta l; $d_l(M) > 0$ si, y sólo si, el punto M se sitúa en el mismo semiplano que el fin del vector $\vec{N}$ si el origen de $\vec{N}$ está colocado en la recta l.

Ejemplo 12 (distancia de un punto a una recta en el plano). Demostrar que en la fórmula (3.41) el número $d_l(M)$ no depende de la elección del punto $F \in l$ ni de la longitud del vector $\vec{N}$. Comprobar que $|d_l(M_0)|$ es la distancia habitual del punto M_0 a la recta l. Demostrar que si l: $Ax + By + C = 0$ y $\vec{N} = (A; B)$, entonces para el punto $M_0(x_0; y_0)$ se tiene

$$d_l(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.42}$$

□ Si F' es otro punto de l, entonces $\overrightarrow{F'F} \perp \vec{N}$, es decir, $(\overrightarrow{F'F}, \vec{N}) = 0$ y por eso,

$$\frac{(\overrightarrow{F'M}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\overrightarrow{F'F}, \vec{N}) + (\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|}.$$

Si $\vec{N}' = k\vec{N}$, $k > 0$, entonces $|\vec{N}'| = k\,|\vec{N}|$ y $(\overrightarrow{FM}, \vec{N}')/|\vec{N}'| = (\overrightarrow{FM}, k\vec{N})/(k\,|\vec{N}|) = (\overrightarrow{FM}, \vec{N})/|\vec{N}|$. La distancia δ del punto M_0 a la recta l es (fig. 3.27) $\delta = |\,\text{Пр}_{l_0}\overrightarrow{FM_0}\,| = |(\overrightarrow{FM_0}, \vec{N})|/|\vec{N}| = |d_l(M_0)|$ [véase la fórmula

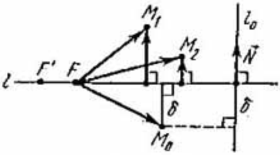


Fig. 3.27

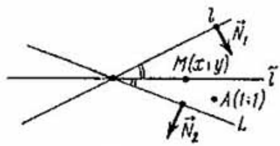


Fig. 3.28

(3.40)]. En fin, si l: $Ax + By + C = 0$, $\vec{N} = (A; B)$ y $M_0(x_0; y_0)$, entonces al designar las coordenadas del punto F por $(x_F; y_F)$ y al emplear el hecho de que $F \in l$, o sea, $C = -(Ax_F + By_F)$, obtenemos

$$d_l(M_0) = \frac{(\overrightarrow{FM_0}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(x_0 - x_F)A + (y_0 - y_F)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 13. Hallar la longitud h de la altura bajada desde el vértice A $(4; 4)$ del triángulo ABC si B $(-6; -1)$, C $(-2; -4)$.

△ La ecuación de la recta $l = (BC)$: $\dfrac{x+6}{-2+6} = \dfrac{y+1}{-4+1} \Leftrightarrow 3x + 4y + 22 = 0$. Por eso,

$$h = |d_l(A)| = \left|\frac{3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 22}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 10. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 14. Escribir la ecuación de la bisectriz $\tilde{l}$ del ángulo formado por las rectas l: $x + 7y = 0$ y L: $x - y - 4 = 0$, dentro del cual se encuentra el punto $A\ (1;\ 1)$.

$\triangle$ Si $M\ (x;\ y) \in \tilde{l}$ y se encuentra dentro del ángulo dado (fig. 3.28), entonces los números $d_l\ (M) = (x + 7y)/\sqrt{50}$ y $d_l\ (A) = (1 + 7\cdot 1)/\sqrt{50} > 0$ tienen el mismo signo, es decir, $d_l\ (M) > 0$. El mismo signo lo tienen también los números $d_L\ (M) = (x - y - 4)/\sqrt{2}$ y $d_L\ (A) = (1 - 1 - 4)/\sqrt{2} < 0$, es decir, $d_L\ (M) < 0$. El punto $M\ (x;\ y)$ satisface la propiedad determinante de la bisectriz del ángulo: sus distancias $|\, d_l\ (M)\, | = d_l\ (M)$ y $|\, d_L\ (M)\, | = -d_L\ (M)$ a las rectas l y L son iguales: $(x + 7y)/(5\sqrt{2}) = -(x - y - 4)/\sqrt{2}$, es decir, $6x + 2y - 20 = 0$. Así pues, todos los puntos de la bisectriz satisfacen la ecuación $3x + y - 10 = 0$ que, por tanto, es la ecuación de la bisectriz.

Ejemplo 15. Dado el triángulo ABC: $A\ (4;\ 4;)$, $B\ (-6;\ -1)$, $C\ (-2;\ -4)$. Escribir la ecuación de la bisectriz del ángulo interior C.

$\triangle$ Tenemos $\overrightarrow{CA} = (6;\ 8)$, $\overrightarrow{CB} = (-4;\ 3)$, $|\,\overrightarrow{CA}\,| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $|\,\overrightarrow{CB}\,| = 5$. Por la fórmula del ejemplo 11 del § 2 el vector director $\overrightarrow{CL}$ de la bisectriz es igual a

$$\frac{|\overrightarrow{CA}|\,\overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CB}|\,\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|} = \frac{10\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{CA}}{15} = \frac{2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{3} = \left(-\frac{2}{3};\ \frac{14}{3}\right).$$

Por consiguiente, su ecuación es $\frac{x+2}{-2/3} = \frac{y+4}{14/3} \Leftrightarrow 7x + y + 18 = 0$. ▲

Ejemplo 16. Escribir la ecuación del lado (BC) si se conocen el vértice $A\ (3;\ -4)$ del triángulo ABC y las ecuaciones de sus dos alturas (BM): $7x - 2y - 1 = 0$ y (CN): $2x - 7y - 6 = 0$.

$\triangle$ El vector normal $(7;\ -2)$ de la recta (BM) es paralelo a la recta (AC). Por eso su ecuación es $\frac{x-3}{7} = \frac{y+4}{-2}$ o bien (AC): $2x + 7y + 22 = 0$. Las coordenadas del punto $C(x_C; y_C) = (AC) \cap (CN)$ las hallemos del sistema de ecuaciones $2x_C + 7y_C + 22 = 0$, $2x_C - 7y_C - 6 = 0 \Leftrightarrow x_C = -4$, $y_C = -2$. Análogamente, $(2; -7)$ es el vector director de (AB) y la ecuación de esta recta es $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7}$ o bien (AB): $7x + 2y - 13 = 0$. Las coordenadas del punto $B(x_B, y_B)$ se determinan del sistema de ecuaciones $7x_B + 2y_B - 13 = 0$, $7x_B - 2y_B - 1 = 0$, es decir, $x_B = 1$, $y_B = 3$. Por consiguiente, la ecuación de (BC) es:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-3}{-2-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 17. Escribir las ecuaciones y hallar la longitud δ de la perpendicular bajada desde el punto $M_0(-3; 13; 7)$ a la recta l: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

$\triangle$ Sea $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$ la base de la perpendicular buscada (véase fig. 3.26). $Q \in l$ y por eso $\frac{x_Q - 1}{3} = \frac{z_Q - 3}{1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_Q = 3z_Q - 8, \ \frac{y_Q - 2}{-4} = \frac{z_Q - 3}{1} \Leftrightarrow y_Q = -4z_Q + 14.$$

El vector $\overrightarrow{M_0Q} = (x_Q + 3; \ y_Q - 13; \ z_Q - 7)$ es ortogonal al vector director $\vec{a} = (3; -4; 1)$ de la recta l: $0 = (\vec{a}, \overrightarrow{M_0Q}) = 3(x_Q + 3) - 4(y_Q - 13) + (z_Q - 7) = 3(3z_Q - 5) - 4(-4z_Q + 1) + (z_Q - 7) = 26z_Q - 26$. De aquí $z_Q = 1$, $x_Q = -5$, $y_Q = 10$,

$$\delta = |M_0Q| = \sqrt{(-5+3)^2 + (10-13)^2 + (1-7)^2} = 7.$$

Las ecuaciones de la recta (M_0Q) son

$$\frac{x+3}{-5+3} = \frac{y-13}{10-13} = \frac{z-7}{1-7} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z-7}{6}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 18. Hallar el punto $M^*(x^*, y^*, z^*)$, simétrico al punto $M_0(1; 2; 3)$ respecto a la recta l: $\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}$.

$\triangle$ Los vectores $\overrightarrow{M_0M^*} = (x^* - 1; \ y^* - 2; \ z^* - 3)$ y $\vec{a} = (1; 3; -1)$ son ortogonales (compárase con el ejemplo

10, fig. 3.26):

$x^*-1+3(y^*-2)-(z^*-3)=0$. El punto medio $Q\times$ $\times\left(\frac{1+x^*}{2};\ \frac{2+y^*}{2};\ \frac{3+z^*}{2}\right)$ del segmento $[M_0M^*]$ se encuentra en la recta l:

$$\frac{(1+x^*)/2-3}{1}=\frac{(2+y^*)/2-4}{3},\quad \frac{(1+x^*)/2-3}{1}=\frac{(3+z^*)/2-4}{-1}.$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones obtenidas, hallamos: $x^*=9$, $y^*=2$, $z^*=11$. ▲

Ejemplo 19. Escribir las ecuaciones de la perpendicular común para dos rectas l: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ y L: $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$.

△ Sean $\vec{a}=(1;\ 2;\ -3)$ y $\vec{b}=(-2;\ 1;\ 1)$ los vectores directores de las rectas dadas, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\in l$ y $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)\in L$ los puntos de intersección de estas rectas con la perpendicular buscada. Seis ecuaciones para hallar x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 se obtienen de las siguientes condiciones:

$$M_1\in l,\ \text{o sea,}\ \frac{x_1-2}{1}=\frac{y_1-2}{2},\ \frac{x_1-2}{1}=\frac{z_1+1}{-3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_1=2x_1-2,\ z_1=-3x_1+5;$$

$$M_2\in L,\ \text{o sea,}\ \frac{x_2}{-2}=\frac{y_2-2}{1},\ \frac{z_2-4}{1}=\frac{y_2-2}{1}\Leftrightarrow x_2=$$
$$=-2y_2+4,\ z_2=y_2+2;$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{a})=0,\ \text{o sea,}\ x_2-x_1+2(y_2-y_1)-$$
$$-3(z_2-z_1)=0\Leftrightarrow 14x_1+3y_2-17=0;$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{b})=0,\ \text{o sea,}\ -2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+$$
$$+(z_2-z_1)=0\Leftrightarrow x_1+2y_2-3=0.$$

De aquí tenemos $x_1=y_2=1$, $y_1=0$, $z_1=x_2=2$, $z_2=3$. Por consiguiente, $M_1(1;\ 0;\ 2)$ y $M_2(2;\ 1;\ 3)$. Las ecuaciones de la perpendicular son $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{3-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$. La distancia $|M_1M_2|$ entre las rectas cruzadas l y L es igual a $|M_1M_2| = \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$. ▲

Ejemplo 20. Demostrar que la recta $\widetilde{l}$, que pasa por el punto $M_0(1;\ 2;\ 3)$ y corta las rectas l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ y L: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-8}{-9}=\frac{z+3}{6}$, forma ángulos iguales con estas rectas.

△ Si $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) = l \cap \widetilde{l}$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2) = L \cap \widetilde{l}$, entonces existen números t y τ tales que $x_1 = 1+2t$, $y_1 = 1-t$, $z_1 = 1+2t$, $x_2 = 2+2\tau$, $y_2 = 8-9\tau$, $z_2 = -3+6\tau$. Los puntos M_0, M_1, M_2 se sitúan en una recta, es decir, los vectores $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1-1;\ y_1-2;\ z_1-3) = (2t;\ -t-1;\ 2t-2)$ y $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2-1;\ y_2-2;\ z_2-3) = (2\tau+1;\ -9\tau+6;\ 6\tau-6)$ son colineales. Según la condición de colinealidad

$$0=\begin{vmatrix}2t & -t-1\\ 2\tau+1 & -9\tau+6\end{vmatrix}=-16t\tau+13t+2\tau+1,$$

$$0=\begin{vmatrix}2t & 2t-2\\ 2\tau+1 & 6\tau-6\end{vmatrix}=8t\tau-14t+4\tau+2,$$

$$0=\begin{vmatrix}-t-1 & 2t-2\\ -9\tau+6 & 6\tau-6\end{vmatrix}=12t\tau-6t-24\tau+18.$$

Excluyendo $t\tau$ de dos primeras ecuaciones, obtenemos $\tau = (3/2)\,t-1/2$. Si excluimos $t\tau$ de dos últimas ecuaciones, obtenemos $\tau=(t+1)/2$. Por consiguiente, $3t-1=t+1$, es decir, $t=1$, $\tau=(1+1)/2=1$. De este modo, $M_1(3;\ 0;\ 3)$, $M_2(4;\ -1;\ 3)$. Las ecuaciones de $\widetilde{l}$ son

$$\frac{x-1}{4-3}=\frac{y-2}{-1-0}=\frac{z-3}{3-3}\Leftrightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{0}.$$

Los vectores directores de las rectas $\widetilde{l}$, l, L son: $\vec{c} = (1;\ -1;\ 0)$, $\vec{a}=(2;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}=(2;\ -9;\ 6)$. El ángulo φ entre las rectas l y $\tilde{l}$ se halla por la fórmula

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}\right| = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\,\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

El ángulo ψ entre las rectas $\tilde{l}$ y L se determina de la relación

$$\cos\psi = \left|\frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|}\right| = \frac{2\cdot 1 + (-9)\cdot(-1) + 6\cdot 0}{\sqrt{2}\,\sqrt{2^2+(-9)^2+6^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

o sea, $\psi = 45^\circ = \varphi$. ▲

Sea fijado un sistema rectangular de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ en un espacio y sea $\mathcal{P}$ un plano dado por la ecuación vectorial normal

$$(\vec{r}, \vec{N}) = -D \tag{3.43}$$

donde $\vec{r} = (x; y; z)$ es el radio vector de un punto arbitrario $M(x; y, z) \in \mathcal{P}$, $\vec{N} = (A; B; C)$, $A^2 + B^2 + C^2 = |\vec{N}|^2 > 0$ es el vector normal del plano $\mathcal{P}$. Al abrir el primer miembro de la fórmula (3.43) por la fórmula (3.31), obtenemos la *ecuación normal en coordenadas del plano* $\mathcal{P}$:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{3.44}$$

El plano $\mathcal{P}$ dado por la ecuación normal en un sistema rectangular de coordenadas es perpendicular al vector $\vec{N} = (A; B; C)$ cuyas coordenadas son coeficientes de las incógnitas x, y, z en la ecuación (3.44) de este plano.

Cuando $A \neq 0$, $\mathcal{P}$ corta el eje de abscisas en el punto $M_1(-D/A; 0; 0)$. Cuando $B \neq 0$, $\mathcal{P}$ corta el eje de ordenadas en el punto $M_2(0; -D/B; 0)$. Cuando $C \neq 0$, $\mathcal{P}$ corta el eje de z-coordenadas en el punto $M_3(0; 0; -D/C)$.

Si $M_1(a; 0, 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$ son tres puntos de intersección del plano $\mathcal{P}$ con los ejes de coordenadas, la ecuación del plano $\mathcal{P}$ es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.45)$$

La ecuación (3.45) se llama *ecuación del plano en segmentos.*

Si en la ecuación (3.44) $A = 0$, es decir $(\vec{i}, \vec{N}) = 0$, entonces el plano $\mathcal{P}$ es paralelo al eje de abscisas. Corta el plano Oyz por la recta cuyas ecuaciones son $x = 0$, $By + Cz + D = 0$. Cuando $B = 0$ $(C = 0)$, el plano $\mathcal{P}$ es paralelo al eje de ordenadas (eje de z-coordenadas).

Como en el caso de la recta en el plano, para el plano $\mathcal{P}$, dado por la ecuación (3.44) en el sistema rectangular de coordenadas en el espacio, se introduce *distancia orientada* $d_{\mathcal{P}}(M_0)$ *de un punto* M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ del espacio al plano $\mathcal{P}$ por la fórmula

$$d_{\mathcal{P}}(M_0)=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.46)$$

Para cualesquiera dos puntos $M_1 \not\subset \mathcal{P}$ y $M_2 \notin \mathcal{P}$ los signos de los números $d_{\mathcal{P}}(M_1)$ y $d_{\mathcal{P}}(M_2)$ son iguales si, y sólo si, M_1 y M_2 están situados a un lado del plano $\mathcal{P}$ (en un semiplano determinado por este plano); $d_{\mathcal{P}}(M) > 0$ si, y sólo si, el punto M se encuentra en el mismo semiespacio que el fin del vector $\vec{N} = (A;\ B;\ C)$ cuando su origen se coloca en el plano $\mathcal{P}$. La distancia d del punto M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ al plano $\mathcal{P}$, dado por la ecuación (3.44) en un sistema rectangular de coordenadas, se determina por la fórmula

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3.47)$$

Ejemplo 21. Demostrar la fórmula (3.47).

□ Al escribir la ecuación (3.44) en la forma (3.43), donde $\vec{N} = (A;\ B;\ C)$, y emplear la notación $\vec{r_0} = (x_0;\ y_0;\ z_0)$ y las fórmulas (3.27) y (3.29), obtenemos

$$d = |(\vec{r}_0,\ \vec{N})+D|/|\vec{N}| =$$
$$= |Ax_0+By_0+Cz_0+D| : \sqrt{A^2+B^2+C^2}. \ ■$$

Ejemplo 22. Escribir la ecuación en coordenadas normal del plano que pasa por los puntos M_1 (1; 0; —1), M_2 (—1; 1; 0), M_3 (0; 2; 1).

△ Sea (3.44) la ecuación buscada. Las coordenadas de los puntos M_1, M_2, M_3 la satisfacen. Por eso $A - C + D = 0$, $-A + B + D = 0$, $2B + C + D = 0$. Sumando estas igualdades término a término, obtenemos $3B + 3D = 0$, es decir, $B = -D$. Entonces $A = 0$, $C = D$ y la ecuación buscada (3.44) tiene la forma $D(0 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z + 1) = 0$. Ya que $2D^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$, se tiene $D \neq 0$. Dividiendo en D, obtenemos definitivamente $-y + z + 1 = 0$. ▲

Si el punto M_0 (x_0; y_0; z_0) se encuentra en el plano $\mathscr{P}$ dado por la ecuación (3.44), entonces $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ y la ecuación (3.44) puede escribirse en la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.48)$$

Ejemplo 23. Hallar la ecuación en coordenadas normal del plano que pasa por el punto M_0 (—1; 2; 1) perpendicularmente al vector $\vec{N} = (2; 0; -2)$.

△ La ecuación buscada tiene la forma [cf. con (3.48)]

$$2(x - (-1)) + 0 \cdot (y - 2) + (-2)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0. \ ▲$$

Ejemplo 24. El triángulo con los vértices en los puntos A (0; 0; 0), B (0; 1; 1), C (1; 1; 0) sirve de base de la pirámide triangular $DABC$ con el vértice D (2; 2; $-\sqrt{3}$). Hallar la longitud h de la altura de la pirámide.

△ Escribimos la ecuación del plano que pasa por tres puntos dados A, B, C. Por la fórmula (2.64) tenemos

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + y - z.$$

La longitud de la altura es la distancia del punto D a este plano. Por la fórmula (3.47)

$$h = \frac{|-2+2-\sqrt{3}|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = 1. \ ▲$$

Sea que los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ están dados por las ecuaciones normales en coordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1&: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \ A_1^2+B_1^2+C_1^2>0, \\ \mathcal{P}_2&: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \ A_2^2+B_2^2+C_2^2>0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

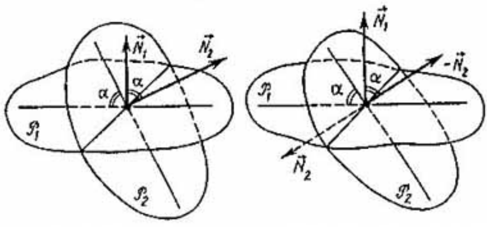
Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos si, y sólo si, sus vectores normales $\vec{N}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ y $\vec{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ son colineales, es decir, cuando existe un número $\lambda \neq 0$ tal que

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2. \tag{3.50}$$

Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son perpendiculares si, y sólo si, sus vectores normales son ortogonales:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{3.51}$$

Los planos no paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ forman, intersecándose, dos pares de ángulos diedros iguales. Llámase



a) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, $\alpha = \varphi$ b) $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$, $\alpha = 180° - \varphi$

Fig. 3.29

ángulo α entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ a la magnitud del menor entre estos ángulos diedros. *El ángulo entre los planos paralelos se toma por definición igual a* 0°. Sean $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ vectores normales de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$. Sea $\varphi = \widehat{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}$; entonces $\alpha = \varphi$ cuando $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$ y $\alpha = 180° - \varphi$ cuando $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ (fig. 3.29, *a*, *b*). En ambos casos

$$\cos\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}. \tag{3.52}$$

Ejemplo 25. Hallar la distancia entre planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dados por las ecuaciones (3.49).

△ La distancia entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es la distancia de un punto arbitrario $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \mathcal{P}_2$ al plano $\mathcal{P}_1$, es decir, el número $d = |A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1| / \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$. Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos. Por consiguiente, existe un número λ tal que son válidas las igualdades (3.50). Por eso, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) + D_1 = D_1 - \lambda D_2$. En definitiva, $d = |D_1 - \lambda D_2| / \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$ donde λ satisface (3.50). Si, por ejemplo,

$$A_2 \neq 0, \text{ entonces } d = \frac{|A_2D_1 - A_1D_2|}{|A_2| \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 26. Hallar el valor de aquel ángulo entre cuatro ángulos diedros, formados por los planos $\mathcal{P}_1$: $8x + 4y + z + 1 = 0$ y $\mathcal{P}_2$: $2x - 2y + z + 1 = 0$, en el cual se encuentra el punto $M_0(1; 1; 1)$.

△ Fijemos los vectores normales $\vec{N}_1 = (8; 4; 1)$ y $\vec{N}_2 = (2; -2; 1)$ de los planos. Si numeramos los ángulos diedros como lo aparece hecho en la fig. 3.30, entonces como

$$d_{\mathcal{P}_1}(M_0) = \frac{8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{64 + 16 + 1}} > 0,$$

$$d_{\mathcal{P}_2}(M_0) = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} > 0,$$

el punto M_0 se sitúa dentro del $\angle 1$ cuyo valor en virtud del teorema sobre los ángulos con los lados respectivamente perpendiculares es igual a $180° - (\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) =$

$$= 180° - \arccos \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \, |\vec{N}_2|} = 180° - \arccos \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 27. Hallar el ángulo α entre los planos $\mathcal{P}_1$: $4x + 2y - 2z + 5 = 0$ y $\mathcal{P}_2$: $-x + y + 2z - 3 = 0$.

△ Tenemos $\vec{N}_1 = (4; 2; -2)$, $\vec{N}_2 = (-1; 1; 2)$, $|\vec{N}_1| = 2\sqrt{6}$, $|\vec{N}_2| = \sqrt{6}$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = -6$. Por la fórmula (3.52), $\cos\alpha = \left|\frac{-6}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}\right| = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$. ▲

Ejemplo 28. Hallar el ángulo entre el plano de la cara $A_1B_1C_1D_1$ y el plano que pasa por los vértices A_1, B y el punto medio M de la arista $[AD]$ de un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$\triangle$ Considerando la longitud de la arista del cubo como la unidad de longitud, examinemos el sistema de coordenadas $\{A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}\}$. En este sistema rectangular de coordenadas $A_1(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$,

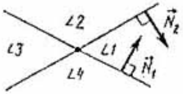


Fig. 3.30

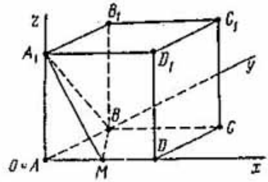


Fig. 3.31

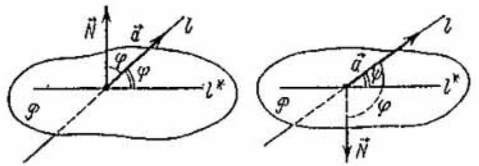
$M(1/2; 0; 0)$ (fig. 3.31). Por la fórmula (3.45), la ecuación del plano (A_1BM) es $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$, o sea, $2x + y + z = 1$. Su vector normal es $\vec{N}_1 = (2; 1; 1)$. El plano $(A_1B_1C_1D_1)$ es paralelo al plano de coordenadas Oxy, su ecuación es $z = 1$, el vector normal es $\vec{N}_2 = (0; 0; 1)$. Por la fórmula (3.52),

$$\cos\alpha = \left|\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ es decir, } \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}. \ \blacktriangle$$

Se llama *ángulo entre una recta l y un plano $\mathcal{P}$* el ángulo ψ entre l y su proyección ortogonal l^* sobre el plano $\mathcal{P}$. Si $\vec{a}$ es el vector director de l, $\vec{N}$ es el vector normal de $\mathcal{P}$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{N}})$, entonces los ángulos ψ y φ están vinculados (fig. 3.32, *a*, *b*) mediante las relaciones $\psi = 90° - \varphi$ cuando $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, y $\psi = \varphi - 90°$ cuando $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$. Por eso, el ángulo ψ se determina por la fórmula

$$\operatorname{sen}\psi = |\cos\varphi| = \frac{|(\vec{a}, \vec{N})|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}|}. \qquad (3.53)$$

Ejemplo 29. ¿Con qué valor m el ángulo ψ entre la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$ y el plano $mx+y+z+4=0$ es igual a 45°?



a) $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$; $\psi=90°-\varphi$ b) $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°$; $\psi=\varphi-90°$

Fig. 3.32

△ Según la fórmula (3.53), $1/\sqrt{2}=\operatorname{sen}\psi=|(\vec{a},\vec{N})|/(|\vec{a}|\,|\vec{N}|)$, donde $\vec{a}=(2;\ -1;\ 1)$, $|\vec{a}|=\sqrt{6}$, $\vec{N}=(m;\ 1;\ 1)$, $|\vec{N}|=\sqrt{m^2+2}$, $(\vec{a},\ \vec{N})=2m$. Por consiguiente, $1/\sqrt{2}=\frac{|2m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+2}}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{6}$. ▲

Ejemplo 30*. En una pirámide regular $SABCD$ (S es el vértice) el valor del ángulo diedro de la base es igual a 30°. Los puntos M, N, P, Q son los puntos medios de los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, respectivamente. El punto E está situado en la arista $[AB]$, $F\in[SC]$. Se conoce que los ángulos formados por la recta (EF) con el plano (SMP), por la recta (EF) con el plano (SBA) y por la recta (DF) con el plano (SNQ) son iguales. Hallar el valor α de estos ángulos.

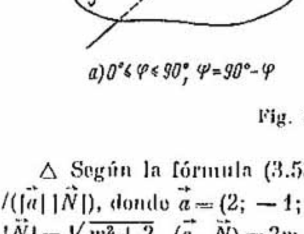


Fig. 3.33

△ Sea O el centro del cuadrado $ABCD$. Como la unidad de longitud tomemos la mitad de la longitud del segmento $[AB]$ y consideremos el sistema rectangular de coordenadas $\{O,\ \overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OS}/|\overrightarrow{OS}|\}$ (fig. 3.33). En este sistema de coordenadas M (1; 0; 0), P (−1; 0; 0), N (0; 1; 0), Q (0; −1; 0), A (1; −1; 0), B (1; 1; 0), C (−1; 1; 0), D (−1; −1; 0), S (0; 0; h), E (1; m; 0), F $(-\lambda;\ \lambda;\ (1-\lambda)h)$, donde $h=|OS|/|OM|$, $\lambda=|FS|/|SC|\in[0,1]$ (h, λ, m están desconocidas). Las ecuaciones de los planos son:

$$\mathcal{P}_1=(ABCD):\ z=0;\ \ \mathcal{P}_2=(SMP);\ \ y=0;\ \mathcal{P}_3=(SNQ):\ x=0;$$

$$\mathcal{P}_4=(SBA):\ 0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix}=$$

$$=-2hx-2(z-h)\iff hx+z-h=0.$$

Los vectores normales de estos planos son: $\vec{N}_1=(0;\ 0;\ 1)$, $\vec{N}_2=(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{N}_3=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{N}_4=(h;\ 0;\ 1)$. Los vectores directores de estas rectas son: (EF): $\vec{a}=\overrightarrow{EF}=(-\lambda-1;\ \lambda-m;\ (1-\lambda)\,h)$, (DF): $\vec{b}=\overrightarrow{DF}=(-\lambda+1;\ \lambda+1;\ (1-\lambda)\,h)$. Según la condición del problema y las fórmulas (3.52) — (3.53),

$$\sqrt{3}/2=\cos 30^\circ=|(\vec{N}_1,\ \vec{N}_4)|/(|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_4|)=1/\sqrt{h^2+1}\iff$$

$$\iff h=1/\sqrt{3};$$

$$\frac{|(\vec{a},\ \vec{N}_2)|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}_2|}=\frac{|(\vec{a},\ \vec{N}_4)|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}_4|}=\frac{|(\vec{b},\ \vec{N}_3)|}{|\vec{b}|\,|\vec{N}_3|}\iff$$

$$\iff\frac{|\lambda-m|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda^2)\,h^2}}=$$

$$=\frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2+1}\,\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda)^2\,h^2}}=$$

$$=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2\,h^2}}\iff$$

$$\iff\left\{\begin{array}{l} |\lambda-m|=\lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2/3}}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+4\,(1-\lambda)^2/3}}. \end{array}\right.$$

Por consiguiente, ora $\lambda-m=\lambda$, es decir, $m=0$, ora $m=2\lambda$, con tal que en ambos casos λ se determina de la ecuación $\lambda^2\,((7/3)\,\lambda^2-(2/3)\,\lambda+7/3)=(1-\lambda)^2\,((7/3\ \lambda^2+(4/3)\,\lambda+4/3)\iff((1-\lambda)^2-\lambda^2)\,((7/3)\,\lambda^2+(4/3)\,\lambda+4/3)=\lambda^2\,(1-2\lambda)\iff(1-2\lambda)\times((\lambda+1)^2+1/3\,(\lambda-1)^2)=0\iff\lambda=1/2$. De este modo, el problema tiene dos soluciones: $m=0$, $\lambda=1/2$, $h=1/\sqrt{3}$ y $m=1$, $\lambda=1/2$, $h=1/\sqrt{3}$. En ambos casos, son $\alpha=(1-\lambda)/\sqrt{(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2\,(h^2+1)}=\sqrt{3/31}$, es decir, $\alpha=\arcsen\sqrt{3/31}$. ▲

Ejemplo 31. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta dada como la línea de intersección de dos planos $4x+y-6z-2=0$ e $y-3z+2=0$.

△ Poniendo $z = 4t$, donde t es parámetro, de la segunda ecuación hallamos $y = 12t - 2$ y después, de la primera ecuación, $x = -(1/4)(y - 6z - 2) = 1 + 3t$. Así, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{12} = \frac{z}{4} = t$ son las ecuaciones buscadas. ▲

Ejemplo 32. Hallar el ángulo φ entre las rectas

$$l: \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad L: \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

△ Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta l tomando $z = t$ en calidad de parámetro. Resolviendo el sistema $3x + y = t - 1$, $3x - y = -t$ hallemos $x = -1/6$, $y = t - 1/2$. De este modo, $x = -1/6 + 0 \cdot t$, $y = -1/2 + 1 \cdot t$, $z = 0 + 1 \cdot t$ son las ecuaciones paramétricas buscadas de la recta l y el vector $\vec{a} = (0; 1; 1)$ (sus coordenadas son coeficientes de t en las ecuaciones paramétricas) es el vector director de la recta l. En la recta L escojamos $y = 5\tau$ en calidad de parámetro. Entonces $x = -1 + 5\tau$, $z = (1/5)(2x + 2y + 1) = -1/5 + 4\tau$. El vector $\vec{b} = (5; 5; 4)$ es el vector director de L. De este modo, $\cos\varphi = |(\vec{a}, \vec{b})| / (|\vec{a}|\,|\vec{b}|) = 9/(\sqrt{2}\sqrt{66}) = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{11})$, $\varphi = \arccos((3/2) \times \sqrt{3/11})$. ▲

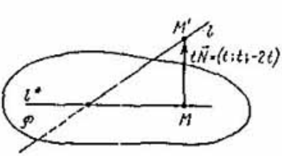


Fig. 3.34

Ejemplo 33. Componer las ecuaciones de la proyección ortogonal l^* de la recta l: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ sobre el plano $\mathcal{P}$: $x + y - 2z + 4 = 0$.

△ El punto $M(x; y; z)$ está situado en la recta l^* si, y sólo si, (fig. 3.34): a) $M \in \mathcal{P}$, es decir, $x + y - 2z + 4 = 0$; b) para un t el punto $M'(x + t; y + t; z - 2t)$ se encuentra situado en la recta l, es decir, $\frac{x+t-1}{1} = \frac{y+t+1}{-1} = \frac{z-2t}{2}$. Resulta ser el sistema de ecuaciones $x + y - 2z + 4 = 0$, $x + y = -2t$, $2y + z + 2 = 0$.

Expresando x, y, z mediante t, obtenemos: $x = 2 - (5/2)\,t$, $y = -2 + (1/2)\,t$, $z = 2 - t$ son las ecuaciones paramétricas buscadas de l^*. Por consiguiente, $\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$ son las ecuaciones de l^*. ▲

Ejemplo 34. Hallar la proyección Q del punto $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ sobre el plano $\mathcal{P}$: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, y el vector $\overrightarrow{M_0Q}$. Escribir las ecuaciones de la recta (M_0Q).

△ El vector $\vec{N} = (A;\ B;\ C)$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ y por eso las ecuaciones de la perpendicular $l = (\overrightarrow{M_0Q})$ bajado desde el punto M_0 al plano $\mathcal{P}$ tienen la forma

$$x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct,\ t \in R. \quad (3.54)$$

El punto $Q\,(x_Q;\ y_Q;\ z_Q)$ se sitúa en esta perpendicular y por eso existe un número t_Q tal que $x_Q = x_0 + At_Q$, $y_Q = y_0 + Bt_Q$, $z_Q = z_0 + Ct_Q$. Para hallar t_Q empleemos el hecho de que $Q \in \mathcal{P}$, es decir, $Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0$. De esta igualdad, al sustituir x_Q, y_Q, z_Q, hallamos $t_Q = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(A^2 + B^2 + C^2)$. Por consiguiente,

$$x_Q = \frac{(B^2+C^2)\,x_0 - ABy_0 - ACz_0 - AD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$y_Q = \frac{-ABx_0 + (A^2+C^2)\,y_0 - BCz_0 - BD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$z_Q = \frac{-ACx_0 - BCy_0 + (A^2+B^2)\,z_0 - CD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$\overrightarrow{M_0Q} = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2+B^2+C^2}\,\vec{N}.$$

En virtud de (3.54), las ecuaciones de (M_0Q) son

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}. \quad ▲$$

Ejemplo 35. Hallar el punto M^* simétrico al $M_0\,(1;\ 2;\ 3)$ respecto al plano $\mathcal{P}$: $2x - 3y + 5z - 68 = 0$.

△ El punto $M^*\,(x^*;\ y^*;\ z^*)$ se encuentra en la perpendicular l bajada del punto M_0 sobre el plano $\mathcal{P}$.

Las ecuaciones de l son $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{5}$. Por consiguiente, $x^*=1+2t$, $y^*=2-3t$, $z^*=3+5t$ para un t. El punto medio $Q\left(\frac{1+x^*}{2};\ \frac{2+y^*}{2};\ \frac{3+z^*}{2}\right)$ del segmento $[M_0M^*]$ se sitúa en el plano $\mathcal{F}$, es decir,

$$0=2\,\frac{1+x^*}{2}-3\,\frac{2+y^*}{2}+5\,\frac{3+z^*}{2}-68=19t-57.$$

De aquí $t=3$, $x^*=7$, $y^*=-7$, $z^*=18$. ▲

Ejemplo 36. En un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ el punto M es el punto medio de la arista $[AD]$. ¿Qué ángulo con el plano de la cara $ABCD$ forma la línea de intersección de los planos (AB_1D_1) y (A_1MC_1)?

△ Tomando la longitud de la arista del cubo en calidad de la unidad de longitud, consideremos el sistema rectangular de coordenadas $\{A_1,\ \overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{A_1D_1},\ \overrightarrow{A_1A}\}$. En este sistema de coordenadas $A_1\,(0;\ 0;\ 0)$, $B_1\,(1;\ 0;\ 0)$, $C_1\,(1;\ 1;\ 0)$, $D_1\,(0;\ 1;\ 0)$, $A\,(0;\ 0;\ 1)$, $M\,(0;\ \frac{1}{2};\ 1)$.

Las ecuaciones de los planos son:

$$(AB_1D_1):\ \frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1;$$

$$(A_1MC_1):\ 0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & \frac{1}{2}-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix}=-x+y-\frac{1}{2}z;$$

$$(ABCD):\ z=1,\ \vec{N}=(0;\ 0;\ 1).$$

Las ecuaciones paramétricas de la línea l de intersección de los planos (AB_1D_1) y (A_1MC_1) las hallemos tomando $t=(1/4)\,z$ en calidad de parámetro. Entonces, $x=1-4t-y$, $x=y-2t$. Por consiguiente, $1-4t-y=y-2t$, es decir, $y=1/2-t$ y $x=1/2-3t$ $(z=4t)$. De este modo, $\vec{a}=(-3;\ -1;\ 4)$ es el vector director de la recta l. El ángulo buscado ψ lo hallamos por la fórmula (3.53): $\operatorname{sen}\psi=|(\vec{a},\ \vec{N})|/(|\vec{a}|\,|\vec{N}|)=4/\sqrt{26}$, $\psi=\arcsin 2\sqrt{2/13}$. ▲

Ejemplo 37. Calcular la longitud $h=|SH|$ de la altura de una pirámide triangular $SABC$ que tiene rectos todos los ángulos del vértice S y las longitudes de las aristas laterales $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ iguales a a, b, c, respectivamente.

△ Consideremos el sistema rectangular de coordenadas $\{S, \overrightarrow{SA}/a, \overrightarrow{SB}/b, \overrightarrow{SC}/c\}$. En este sistema de coordenadas A $(a; 0; 0)$, B $(0; b; 0)$, C $(0; 0; c)$. Según la fórmula (3.45), la ecuación del plano (ABC) es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$. La longitud h de la altura es la distancia del punto S $(0; 0; 0)$ al plano (ABC). Según la fórmula (3.47), $h = |0/a + 0/b + 0/c - 1| : \sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}$. Por consiguiente, $1/h^2 = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$. ▲

Ejemplo 38. Los catetos $[AB]$ y $[AC]$ de un triángulo rectangular ABC se encuentran situados en las caras $\mathcal{P}$ y Q, respectivamente, del ángulo diedro agudo de valor φ. La recta (AB) forma el ángulo α con la arista del ángulo diedro. Hallar el ángulo ψ entre esta arista y la recta (AC).

△ Consideremos el sistema rectangular de coordenadas con el origen O en el punto A. Dirigimos el eje Oy a lo largo de la arista del ángulo diedro (fig. 3.35), el eje Ox lo colocamos en la cara $\mathcal{P}$ del ángulo diedro. El eje Oz lo dirigimos de tal modo que los puntos del semiplano Q tengan z-coordenadas positivas. Entonces, la ecuación del plano que contiene Q es $-x \operatorname{tg} \varphi + z = 0$.

Si B $(x_B; y_B; z_B)$, entonces de la condición $B \in Q$ tenemos $z_B = x_B \operatorname{tg} \varphi$. El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\vec{j}$ es igual a α: $\cos \alpha = |y_B/\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}|$. De aquí $y_B^2 (1 - \cos^2 \alpha) = (x_B^2 + z_B^2) \cos^2 \alpha = x_B^2 \cos^2 \alpha/\cos^2 \varphi$, es decir, $|y_B| = |x_B| \operatorname{ctg} \alpha/\cos \varphi$.

El punto C con las coordenadas $(x_C; y_C; 0)$ satisface la condición $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$, es decir, $x_B x_C + y_B y_C = 0$ y por lo tanto,

$|x_C|/|y_C| = |y_B|/|x_B| = \operatorname{ctg} \alpha/\cos \varphi$. Por eso

$$\cos \psi = \left| \frac{(\overrightarrow{OC}, \vec{j})}{|\overrightarrow{OC}|\,|\vec{j}|} \right| = \frac{|y_C|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} = 1/\sqrt{(x_C/y_C)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha/\cos \varphi)^2 + 1}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi}, \text{ o sea,}$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi}. \quad ▲$$

Ejemplo 39. En una pirámide triangular regular $SABC$ la longitud de la arista de la base ABC es igual a a, y el ángulo α entre la apotema y la cara lateral es igual a $45°$. Hallar la longitud h de la altura de la pirámide.

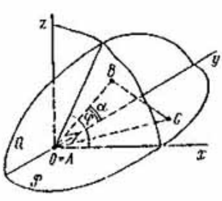


Fig. 3.35

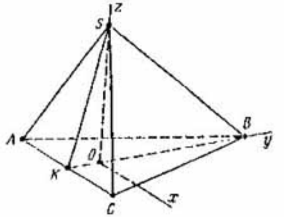


Fig. 3.36

△ Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas tomando el centro de la cara ABC por su origen O y codirijamos sus ejes Ox, Oy, Oz con los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}$, respectivamente (fig. 3.36). Entonces $S\ (0;\ 0;\ h)$, $A\ (-a/2;\ -a/(2\sqrt{3});\ 0)$, $B\ (0;\ a/\sqrt{3};\ 0)$, $C\ (a/2;\ -a/(2\sqrt{3});\ 0)$. La ecuación del plano (BSC) es

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-a/\sqrt{3} & z-0 \\ 0-0 & 0-a/\sqrt{3} & h-0 \\ a/2-0 & -a/(2\sqrt{3})-a/\sqrt{3} & 0-0 \end{vmatrix}=$$

$$=-a\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}x+\frac{h}{2}\left(y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}z\right).$$

En calidad de su vector normal se puede tomar el vector $\vec{N}=(h\sqrt{3}/2;\ h/2;\ a/(2\sqrt{3}))$, $|\vec{N}|=\sqrt{h^2+a^2/12}$. El vector $\overrightarrow{SK}$ de la apotema de la cara ASC es igual a $(1/2)\,(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})=(0;\ -a/(2\sqrt{3});\ -h)$. Es el vector director $\vec{a}$ de la recta (SK), $|\vec{a}|=\sqrt{h^2+a^2/12}$. Según la fórmula (3.53),

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{sen}\alpha=\frac{|(\vec{a},\ \vec{N})|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}|}=\frac{ah\sqrt{3}/4}{h^2+a^2/12}.$$

Resulta la ecuación $h^2 - h\,(a\sqrt{6}/4) + a^2/12 = 0$ que tiene dos soluciones: $h_1 = a/\sqrt{6}$ y $h_2 = a\sqrt{6}/12$. ▲

Ejemplo 40*. La base de una pirámide triangular $SABC$ es el triángulo regular ABC. La cara SAB es perpendicular al plano de la base, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 45°$. Hallar los ángulos del $\triangle SAC$.

△ Sea O el punto medio de $[AB]$, M, la base de la perpendicular bajada desde el punto S al plano (ABC) [$M \in (AB)$ puesto que los planos (ASB) y (ABC) son perpendiculares]. Tomando por la unidad de longitud la del segmento $[OB]$ consideremos el sistema rectangular de coordenadas (fig. 3.37) $\left\{O,\ \frac{\overrightarrow{OC}}{\sqrt{3}},\ \overrightarrow{OB},\ \frac{\overrightarrow{MS}}{|MS|}\right\}$. En este sistema de coordenadas $A\,(0;\ -1;\ 0)$, $B\,(0;\ 1;\ 0)$, $C\,(\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $S\,(0;\ m;\ h)$, donde m y h son incógnitas que entran en las relaciones $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OB}$, $|MS| = h\,|OB|$. Entonces, $\overrightarrow{SA} = (0;\ -1-m;\ -h)$, $\overrightarrow{SB} = (0;\ 1-m;\ -h)$, $\overrightarrow{SC} = (\sqrt{3};\ -m;\ -h)$. Por la condición,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\widehat{ASB} = \frac{(\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB})}{|\overrightarrow{SA}|\,|\overrightarrow{SB}|} =$$

$$= \frac{m^2 - 1 + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2}\ \sqrt{(m-1)^2 + h^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\widehat{ASC} = \frac{(\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SC})}{|\overrightarrow{SA}|\,|\overrightarrow{SC}|} =$$

$$= \frac{m^2 + m + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2}\ \sqrt{3 + m^2 + h^2}}.$$

Introduciendo la incógnita $w = m^2 + h^2$, llegamos al sistema de ecuaciones

$$2\,(w-1)^2 = (w + 2m + 1)\,(w - 2m + 1),\quad w > 1,$$

$$2\,(w+m)^2 = (w + 2m + 1)\,(w + 3),\quad w + m > 0.$$

Simplificando las ecuaciones, obtenemos $w^2 - 6w + 1 + 4m^2 = 0$, $w^2 - 4w + 2mw + 2m^2 - 6m - 3 = 0$. Restando término a término y reduciendo términos semejantes, tenemos $m^2 - m\,(w-3) + (2-w) = 0$, $m = (1/2)\,(w - 3 \pm \sqrt{w^2 - 6w + 9 - 8 + 4w}) = (w - 3 \pm (w-1))/2$, es decir, son posibles dos casos: a) $m = -1$ y b) $m = w - 2$. Si $m = -1$, entonces $w^2 - 6w + 5 = 0$, $w = 5$ ($w = 1$ no conviene ya que $w > 1$). Así pues, en el caso a) $m = -1$, $w = 5$, $h = \sqrt{w - m^2} = 2$. En el caso b) $5w^2 - 22w + 17 = 0$, es decir, $w = 17/5$, $m = 7/5$, $h = \sqrt{w - m^2} = 6/5$. Hallamos los ángulos del triángulo SAC.

a) $\overrightarrow{AS} = (0;\ m+1;\ h) - (0;\ 0;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3};\ 1;\ 0)$, $(\overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AC}) = 0$, o sea, $\widehat{SAC} = 90°$. Como $\widehat{ASC} = 45°$, se tiene $\widehat{SCA} = 45°$.

b) $\overrightarrow{AS} = (0;\ 12/5;\ 6/5) = \frac{6}{5}(0;\ 2;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3};\ 1;\ 0)$,

$$\cos \widehat{SAC} = \frac{(\overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AS}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(6/5)(0\cdot\sqrt{3}+2\cdot 1+1\cdot 0)}{(6/5)\sqrt{0^2+2^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+0^2}} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$, o sea, $\widehat{SAC} = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arc\,tg} 2$.

Por tanto, $\widehat{SCA} = 180° - 45° - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 3$. ▲

Ejemplo 41*. La base de un paralelepípedo oblicuo es el rectángulo $ABCD$; $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ son aristas laterales de este paralelepípedo. La longitud del lado $[AB]$ es igual a la de la

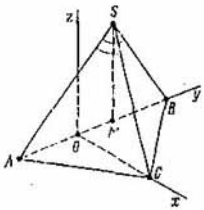


Fig. 3.37

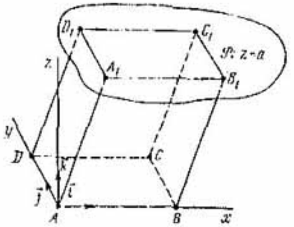


Fig. 3.38

altura del paralelepípedo. La esfera con centro en el punto O pasa por el vértice B y es tangente a las aristas (A_1B_1) y (DD_1) en los puntos A_1 y D_1, respectivamente. Hallar la razón entre el volumen del paralelepípedo y el volumen de la esfera si $\widehat{A_1OB} = \widehat{D_1OB} = 120°$.

△ Designemos $a = |AB|$, $b = |AD|$. Escojamos el sistema rectangular de coordenadas tomando el punto A en calidad de polo y haciendo $\vec{i} = \overrightarrow{AB}/|AB|$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}/|AD|$ (fig. 3.38). Dirijamos el vector $\vec{k}$ de tal manera que los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 se encuentren al mismo lado del plano $(ABCD)$ que el extremo del vector $\vec{k}$ si su origen se sitúa en el punto A. Puesto que la longitud de la altura del paralelepípedo es igual a a, todos los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 pertenecen al plano $z = a$. Sean $(m;\ n;\ a)$ las coordenadas del punto A_1, $(0;\ b;\ 0)$, las coordenadas del punto D. Entonces

$D_1\,(m;\ n+b;\ a)$, $B\,(a;\ 0;\ 0)$. Sean $(x;\ y;\ z)$ las coordenadas del punto O, R, un radio desconocido de la esfera. Escribamos los datos del problema:

$$|OB|^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{3.55}$$

$$|OA_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-a)^2 = R^2, \tag{3.56}$$

$$|OD_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n-b)^2 + (z-a)^2 = R^2. \tag{3.57}$$

La esfera es tangente a las aristas (A_1B_1) y (DD_1) en los puntos A_1 y D_1 y por eso

$$0 = (\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{AB}) = (m-x)\,a, \tag{3.58}$$

$$0 = (\overrightarrow{OD_1},\ \overrightarrow{DD_1}) = (\overrightarrow{OD_1},\ \overrightarrow{AA_1}) = (m-x)\,m + (n+b-y)\,n + (a-z)\,a. \tag{3.59}$$

En fin,

$$-\frac{1}{2} = \cos 120^\circ = \frac{(\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA_1}|\ |\overrightarrow{OB}|} = \frac{(\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{OB})}{R^2} = \frac{1}{R^2}\,((m-x)(a-x) + (y-n)\,y + (z-a)\,z), \tag{3.60}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{(\overrightarrow{OD_1},\ \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OD_1}|\ |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{R^2}\,((m-x)(a-x) + (y-n-b)\,y + (z-a)\,z). \tag{3.61}$$

De (3.58) tenemos $m = x$. Restando la ecuación (3.61) de la ecuación (3.60), hallemos $y = 0$. Restando la ecuación (3.57) de la (3.56), obtenemos $n = -b/2$. Como resultado, el sistema se simplifica: $(x-a)^2 + z^2 = R^2$, $b^2/4 + (z-a)^2 = R^2$, $-b^2/4 + a\,(a-z) = 0$, $z\,(z-a) = -(1/2)\,R^2$. Sumando tres últimos ecuaciones, hallamos $2\,(z-a)^2 = (1/2)\,R^2$, es decir, $z - a = \pm(1/2)\,R$. Entonces $b^2/4 = (3/4)\,R^2$, $b = R\sqrt{3}$ y $b^2/4 = a\,(a-z) = \mp(1/2)\,aR$. En esta igualdad el signo menos es imposible. Por consiguiente, $a = b^2/(2R) = 3R/2$. De este modo,

$$\frac{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}{V_{esf}} = \frac{a^2b}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi}.\ \blacktriangle$$

Ejemplo 42. La longitud de la arista de un tetraedro regular $ABCD$ es igual a a. El punto E es el punto medio de $[CD]$, el punto F es el punto medio de la altura $[BL]$ de la cara ABD. El segmento $[MN]$, cuyos extremos pertenecen a las rectas (AD) y (BC), corta la recta (EF)

y es perpendicular a ella. Hallar la longitud de este segmento.

$\triangle$ Introduzcamos la base ortogonal $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{LP} = \vec{c}$ (P es el punto medio del segmento $[BC]$) (fig. 3.30). Entonces $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$, $|\vec{c}| = a/\sqrt{2}$. Empleando la fórmula de la línea media del cuadrilátero espacial, obtenemos $\vec{FE} = (1/2)(\vec{BC} + \vec{LD}) = \vec{a}/4 + \vec{b}/2$. Los puntos M y N se encuentran en las rectas (AD) y (BC); por eso existen números x e y tales que $\vec{PN} = x\vec{b}$, $\vec{LM} = y\vec{a}$ y, por tanto, $\vec{MN} = -\vec{LM} + \vec{LP} + \vec{PN} = -y\vec{a} + x\vec{b} + \vec{c}$. De la condición de perpendicularidad de las rectas (FE) y (MN) obtenemos $0 = (\vec{FE}, \vec{MN}) = -(1/4)\, y\vec{a}^2 + (1/2)\, x\vec{b}^2 = (a^2/4)(2x - y)$, es decir, $y = 2x$. Las rectas (FE) y (MN) se intersecan. Por consiguiente, los vectores $\vec{FE} = (1/4)\,\vec{a} + (1/2)\,\vec{b}$, $\vec{MN} = -2x\vec{a} + x\vec{b} + \vec{c}$ y $\vec{ME} = \vec{MD} + \vec{DC}/2 = (1/2 - y)\,\vec{a} + (1/2)(-\vec{a}/2 + \vec{c} + \vec{b}/2) = (1/4 - 2x)\,\vec{a} + (1/4)\,\vec{b} + (1/2)\,\vec{c}$ son coplanares. Según el criterio del carácter coplanar,

$$0 = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -2x & x & 1 \\ 1/4 - 2x & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1/4)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} - (1/2)\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 1/4 - 2x & 1/2 \end{vmatrix} = (1 - 6x)/16.$$

De aquí $x = 1/6$, $\vec{MN} = (1/6)(-2\vec{a} + \vec{b} + 6\vec{c})$, $|\vec{MN}| = (1/6)\sqrt{4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 36\vec{c}^2} = a\sqrt{23}/6$. $\blacktriangle$

Ejemplo 43. Deducir todas las propiedades del producto escalar empleando el teorema de los cosenos y el hecho de que en la base ortonormalizada $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ la longitud $|\vec{a}|$ del vector $\vec{a} = (x; y; z)$ es igual a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (los dos hechos se deducen en la geometría clásica sin usar el concepto de producto escalar y sus propiedades).

□ Sean $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Entonces, $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$. Según el teorema de los cosenos, $(\vec{a},\ \vec{b})=(1/2)\,(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)=(1/2)\times$ $\times\,((x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+$ $+\,y_2^2+z_2^2))=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. De esta expresión se deduce que $(\vec{a},\ \vec{b})=(\vec{b},\ \vec{a})$. Ya que $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$, entonces $(\lambda\vec{a},\ \vec{b})=(\lambda x_1)\,x_2+(\lambda y_1)\,y_2+(\lambda z_1)\,z_2=\lambda\,(\vec{a},\ \vec{b})$.

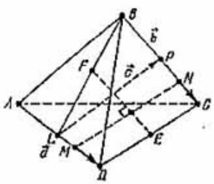


Fig. 3.39

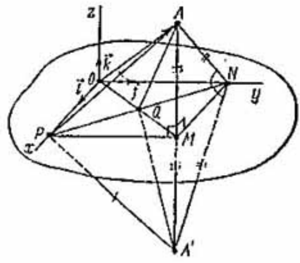


Fig. 3.40

En fin, si $\vec{c}=(x_1';\ y_1';\ z_1')$, entonces $\vec{a}+\vec{c}=(x_1+x_1';\ y_1+$ $+\,y_1';\ z_1+z_1')$ y $(\vec{a}+\vec{c},\ \vec{b})=(x_1+x_1')\,x_2+(y_1+y_1')\,y_2+$ $+\,(z_1+z_1')\,z_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+x_1'x_2+y_1'y_2+z_1'z_2=$ $=(\vec{a},\ \vec{b})+(\vec{c},\ \vec{b})$. ■

Ejemplo 44. Demostrar que para un vector $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ dado por sus coordenadas en una base ortonormalizada será $|\vec{a}|=$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

□ Consideremos un sistema rectangular de coordenadas $\{O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ y el punto A tal que $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, es decir $A\ (x;\ y;\ z)$. Sean M el punto común de la recta (que es paralela al eje Oz y pasa por el punto A) y el plano Oxy; N el punto común de la recta trazada por el punto M paralelamente al eje Ox y el eje de ordenadas (fig. 3.40); P el punto de intersección de la recta trazada por el punto M paralelamente al eje Oy con el eje de abscisas. Entonces, por la definición de coordenadas, tenemos $M\ (x;\ y;\ 0)$, $N\ (0;\ y;\ 0)$, $P\ (x;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{MA}=z\vec{k}$, $|MA|=|z|$, $\overrightarrow{ON}=y\vec{j}$, $|\overrightarrow{ON}|=$ $=|PM|=|y|$, $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$, $|OP|=|MN|=|x|$. Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales. Por eso, ora $M=N$ ora $\widehat{ONM}=90°$.

En ambos casos, tomando en consideración el teorema de Pitágoras tenemos $|OM| = \sqrt{|ON|^2 + |MN|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. De este modo, cuando $A = M$, o sea, $z = 0$, la afirmación queda demostrada. Análogamente se demuestra la afirmación del ejemplo si A se sitúa en el plano de coordenadas Oyz o en el plano Oxz. Consideremos el caso cuando A no pertenece a ninguno de los planos de coordenadas. Entonces $PONM$ es el rectángulo. Sea Q el punto de intersección de sus diagonales. Prolonguemos el segmento $[AM]$ tras el punto M y tracemos el vector $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AM}$. En el $\triangle A'NA$, $[NM]$ es la mediana. Ya que los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{NM}$ son colineales con $\vec{k}$ e $\vec{i}$, respectivamente, y $\vec{k}$ e $\vec{i}$ son, además, ortogonales, entonces, $[NM]$ es la altura del $\triangle A'NA$.

Por consiguiente, $\triangle A'NA$ es isósceles: $|AN| = |A'N|$. De manera análoga se demuestra que $|AP| = |A'P|$. En los $\triangle PAN$ y $\triangle PA'N$, los lados son iguales de dos en dos: $|PA| = |PA'|$, $|AN| = |A'N|$, $|PN| = |PN|$. Por consiguiente, $\triangle PAN$ y $\triangle PA'N$ son congruentes y, en particular, $\widehat{ANQ} = \widehat{A'NQ}$. Consideremos ahora $\triangle ANQ$ y $\triangle A'NQ$. Tenemos $|AN| = |A'N|$, $|NQ| = |NQ|$, $\widehat{ANQ} = \widehat{A'NQ}$. Por tanto, $\triangle ANQ$ y $\triangle A'NQ$ son congruentes y, en particular, $|AQ| = |A'Q|$. De este modo, $\triangle AQA'$ es isósceles y $[QM]$ es la mediana trazada a la base. Por consiguiente, es también la altura, es decir, $\widehat{QMA} = 90°$. Por eso, podemos aplicar el teorema de Pitágoras al $\triangle OMA$: $|OA| = |\vec{a}| = \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. La afirmación queda demostrada. ■

El momento principal fue la demostración del hecho de que si la recta (AM) es perpendicular a las rectas (MN) y (MP) que se encuentran situadas en el plano Oxy y no son paralelas una a otra, entonces (AM) es perpendicular a la tercera recta (OM) que está situada en el plano Oxy, es decir, el criterio de perpendicularidad de la recta y el plano se demuestra sin utilizar las propiedades del producto escalar.

Capítulo 4

PRODUCTOS VECTORIAL Y MIXTO

§ 1. Orientación en el plano y en el espacio

Sean $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ dos bases en un espacio y sea S (S') la matriz del paso de la primera base a la segunda (de la segunda a la primera, véase el § 6, cap. 2). Se dice que la base $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ tiene *la misma orienta-*

ción que la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, si $\det S > 0$. Con esto se escribe $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. De las propiedades de la matriz del paso (véase § 6, cap. 2) se deduce que: 1°) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y 2°) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, si $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Por eso se trata de bases *equiorientadas* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \sim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Si dos bases $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ no son equiorientadas, se dice que son *contrariamente orientadas* y se escribe $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \eqsim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. De las propiedades de la matriz del paso de una base a otra se desprende también que: 3°) si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ y $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \sim \{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$, entonces $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \sim \{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$. De este modo, la relación $\sim$ es *relación de equivalencia* [véase las propiedades 1°), 2°), 3°)] en el conjunto de todas las bases en el espacio. Puesto que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$, y si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \eqsim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, y $\{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\} \eqsim \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, entonces el conjunto de las bases en el espacio se parte en *dos* conjuntos no intersecados (*clases de equivalencia*) por la relación $\sim$ de tal modo que toda base pertenece a una, y sólo una, clase. Dos bases pertenecientes a una clase son equiorientadas, cualesquiera dos bases pertenecientes a las clases distintas son contrariamente orientadas. Una de las clases se denomina clase de las bases *derechas* (las bases que la integran se llaman bases *derechas*, las que no le pertenecen, bases *izquierdas*). Habitualmente la clase de bases derechas se escoge de tal manera que *toda base derecha* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *satisfaga la siguiente exigencia: si los vectores básicos se marcan partiendo de un punto y se toma* $\vec{e}^{\,*}_1 = \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}\,\vec{e}_2$, *entonces, en el plano de los vectores* $\vec{e}_1$ *y* $\vec{e}_2$, *la rotación más breve del vector* $\vec{e}_1$ *alrededor de este punto hasta que los vectores* $\vec{e}_1$ *y* $\vec{e}^{\,*}_1$ *coincidan se realiza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj si miramos desde el extremo del vector* $\vec{e}_3$ (figs. 4.1, 4.2).

Ejemplo 1. Sea $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base. Demostrar que: 1) $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\} \approx \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$; 2) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \sim \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\} \sim \sim \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\} \approx \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ y $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\} \sim \{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\} \sim \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$.

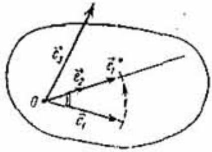


Fig. 4.1

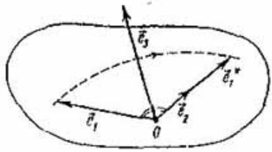


Fig. 4.2

$\triangle$ 1) La matriz S del paso de la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ a la base $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\}$ es igual a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det S = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\} \approx \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$

2) Las matrices S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 del paso de la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ a las bases $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$ son iguales a:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \det S_1 = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \sim \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\};$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det S_2 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \sim \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\};$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det S_3 = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \approx \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\};$$

$$S_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \det S_4=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$\{\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}\}\sim\{\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}\};$$

$$S_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \det S_5=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$\{\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}\}\sim\{\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}\}.\quad\blacktriangle$$

Se dice que en un plano dos bases $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ y $\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2\}$ tienen la *orientación equivalente* y se escribe $\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2\}\sim\sim\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$, si $\det S>0$ o bien, que es lo mismo, $\det S'>>0$, donde S y S' son matrices del paso de la base $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ a la $\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2\}$ y de la base $\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2\}$ a la $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$, respectivamente. Igual que en el caso del espacio, la relación $\sim$ es la *relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de un plano*. La relación dada parte este conjunto en dos clases: clase de las bases *derechas* y las *izquierdas. En la base derecha la rotación más breve de* $\vec{e}_1$ *a* $\vec{e}_2$ *se realiza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, en la base izquierda, en sentido de movimiento de las agujas del reloj.*

En todo lo posterior acordémonos designar la base derecha ortonormalizada en el espacio (plano) mediante $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ $(\{\vec{i},\ \vec{j}\})$.

En el plano (espacio) la clase de las bases ortonormalizadas derechas determinada unívocamente por cualquier representante suyo se denomina *orientación positiva en el plano* (*espacio*). Si está dada una base derecha $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ $(\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\})$ se dice que en el plano (espacio) está dada, con ayuda de la base $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ $(\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\})$, la orientación positiva. Con esto, el plano (espacio) se denomina *orientado*. La orientación dada por la base ortonormalizada izquierda se llama *negativa*.

§ 2. Definición y propiedades del producto vectorial. Condición de colinealidad de vectores. Área del triángulo y del cuadrilátero

Fijemos una base ortonormalizada derecha $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sean $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ y $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ vectores arbitrarios. Llámase *producto vectorial* $[\vec{a}, \vec{b}]$ *de los vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *(en el orden dado)* al vector

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \qquad (4.1)$$

De las propiedades de los determinantes se desprenden las siguientes propiedades del producto vectorial:

1ª. $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$ (anticonmutatividad). $\qquad (4.2)$

$$\square\ [\vec{b}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & b_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -[\vec{a}, \vec{b}].\ \blacksquare$$

2ª. *Para cualesquiera vectores* $\vec{a}' = (a'_x;\ a'_y;\ a'_z)$, $\vec{a}'' = (a''_x;\ a''_y;\ a''_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ *y para cualesquiera números* α *y* β *son válidas las igualdades*

$$[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'', \vec{b}] = \alpha[\vec{a}', \vec{b}] + \beta[\vec{a}'', \vec{b}], \qquad (4.3)$$
$$[\vec{b}, \alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}''] = \alpha[\vec{b}, \vec{a}'] + \beta[\vec{b}, \vec{a}''].$$

$\square$ Según la propiedad de determinantes

$$[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'', \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha a'_x + \beta a''_x & \alpha a'_y + \beta a''_y & \alpha a'_z + \beta a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a''_x & a''_y & a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha[\vec{a}', \vec{b}] + \beta[\vec{a}'', \vec{b}],$$

$$[\vec{b}, \alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}''] = -[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'', \vec{b}] = -(\alpha[\vec{a}', \vec{b}] +$$

$$+ \beta[\vec{a}'', \vec{b}]) = -(-\alpha[\vec{b}, \vec{a}'] - \beta[\vec{b}, \vec{a}'']) =$$

$$= \alpha[\vec{b}, \vec{a}'] + \beta[\vec{b}, \vec{a}''].$$

Aquí se usa varias veces la 1ª propiedad. ■

Ejemplo 1. Demostrar que $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

△ Conforme a la propiedad 1, $[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}]$. Por eso, $2[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$, $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$. ▲

Aduzcamos las **propiedades geométricas** del producto vectorial de dos vectores.

I. *El vector $[\vec{a}, \vec{b}]$ es ortogonal tanto al vector $\vec{a}$ como al vector $\vec{b}$.*

□ Por las fórmulas (3.31), (4.1) y según la propiedad 3 de determinantes, tenemos

$$(\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) = a_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

De aquí se deduce que $(\vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]) = -(\vec{b}, [\vec{b}, \vec{a}]) = -0 = 0$. ■

II. *La longitud del vector $[\vec{a}, \vec{b}]$ es numéricamente igual al área S del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir,*

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

□ Sea $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Entonces

$$S^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2.$$

En virtud de la identidad vinculada con tres determinantes

$$S^2=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2=$$
$$=|[\vec{a},\ \vec{b}]|^2. \ \blacksquare$$

III. De la definición de producto vectorial y del criterio de colinealidad de vectores se deduce que los *vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales si, y sólo si, $[\vec{a},\ \vec{b}]=\vec{0}$.*

IV. *Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, entonces $\{\vec{a},\ \vec{b},\ [\vec{a},\ \vec{b}]\}$ es la base derecha.*

$\square$ Es suficiente demostrar que el determinante de la matriz del paso de la base $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ a la base $\{\vec{a},\ \vec{b},\ [\vec{a},\ \vec{b}]\}$ es positivo. Sean

$$c_x=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\quad c_y=-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\quad c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

las coordenadas del vector $[\vec{a},\ \vec{b}]$. Entonces

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & a_z \end{vmatrix}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-$$
$$-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=c_x^2+c_y^2+c_z^2=|[\vec{a},\ \vec{b}]|^2>0,$$

puesto que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales. $\blacksquare$

Para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados, el vector $[\vec{a},\ \vec{b}]$ se determina unívocamente por las propiedades I—IV: si $\vec{a}\parallel\vec{b}$, en virtud de la propiedad III $[\vec{a},\ \vec{b}]=\vec{0}$. Si $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, entonces, sobre la base de la propiedad I, el vector $[\vec{a},\ \vec{b}]$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ en el cual los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman base (así, con exactitud de hasta el paralelismo se determina unívocamente la recta a la cual es paralelo el vector $[\vec{a},\ \vec{b}]$). Según la propiedad II, la longitud del vector $[\vec{a},\ \vec{b}]$ es igual numéricamente al área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el sentido del vector $[\vec{a}, \vec{b}]$ se determina con ayuda de la propiedad IV de la condición que $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ es la base derecha. De este modo, se podría tomar las propiedades I—IV como la definición de producto vectorial. Esta definición la satisfaría el vector $[\vec{a}, \vec{b}]$ definido por la fórmula (4.1), y sólo él. A menudo se hace así: el producto vectorial se define con ayuda de las propiedades I—IV, y la fórmula (4.1) se deduce de esta definición usándose después en los cálculos.

Ejemplo 2. Hallar $[\vec{a}, \vec{b}]$ si en la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = (-1; 0; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$.

△ Por la fórmula (4.1),

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1; 5; -1). \ ▲$$

Ejemplo 3. Sea $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ una base ortonormalizada derecha arbitraria. Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a} = (a'_x; a'_y; a'_z)$ y $\vec{b} = (b'_x; b'_y; b'_z)$ dados por las coordenadas en esta base,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix},$$

en otras palabras, la *forma del miembro derecho de la fórmula (4.1) no depende de la elección de la base ortonormalizada derecha*.

□ El vector $[\vec{i}', \vec{j}']$ tiene longitud igual a 1 (la propiedad II), es ortogonal tanto a $\vec{i}'$ como a $\vec{j}'$ (la propiedad I), con tal que $\{\vec{i}', \vec{j}', [\vec{i}', \vec{j}']\}$ es la base derecha (la propiedad IV). Por eso el vector $[\vec{i}', \vec{j}']$ no es más que $\vec{k}'$, es decir, $[\vec{i}', \vec{j}'] = \vec{k}'$. Análogamente se establece que $[\vec{j}', \vec{k}'] = \vec{i}'$,

$[\vec{k}', \vec{i}'] = \vec{j}'$. Puesto que $\vec{a} = a'_x\vec{i}' + \vec{a}''$ (donde $\vec{a}'' = a'_y\vec{j}' +$ $+ a'_z\vec{k}'$) y en virtud de la propiedad 2, tenemos $[\vec{a}, \vec{b}] = a'_x[\vec{i}', \vec{b}] + [\vec{a}'', \vec{b}] = a'_x[\vec{i}', \vec{b}] + a'_y[\vec{j}', \vec{b}] + a'_z[\vec{k}', \vec{b}]$.

Luego, poniendo $\vec{b}'' = b'_y\vec{j}' + b'_z\vec{k}'$, según la propiedad 2 obtenemos $[\vec{i}', \vec{b}] = [\vec{i}', b'_x\vec{i}'] + [\vec{i}, \vec{b}''] = b'_x[\vec{i}', \vec{i}'] + b'_y \times$ $\times [\vec{i}', \vec{j}'] + b'_z[\vec{i}', \vec{k}'] = b'_y[\vec{i}', \vec{j}'] - b'_z[\vec{k}', \vec{i}'] = b'_y\vec{k}' - b'_z\vec{j}'$. Análogamente, $[\vec{j}', \vec{b}] = -b'_x\vec{k}' + b'_z\vec{i}'$, $[\vec{k}', \vec{b}] = b'_x\vec{j}' - b'_y\vec{i}'$. Por consiguiente,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = a'_x(b'_y\vec{k}' - b'_z\vec{j}') + a'_y(-b'_x\vec{k}' + b'_z\vec{i}') +$$
$$+ a'_z(b'_x\vec{j}' - b'_y\vec{i}') = \vec{i}'(a'_yb'_z - a'_zb'_y) - \vec{j}'(a'_xb'_z - a'_zb'_x) +$$
$$+ \vec{k}'(a'_xb'_y - a'_yb'_x) = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Sean $\mathscr{P}$ un plano fijado en el espacio, $\{\vec{i}', \vec{j}'\}$ una base ortonormalizada (no tiene que ser obligatoriamente derecha) en el plano $\mathscr{P}$, $\vec{a} = a_x\vec{i}' + a_y\vec{j}'$ y $\vec{b} = b_x\vec{i}' + b_y\vec{j}'$, vectores arbitrarios paralelos al plano $\mathscr{P}$. Hagamos $\vec{k}' = [\vec{i}', \vec{j}']$. Entonces $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ es la base ortonormalizada derecha en el espacio (la propiedad IV) y en esta base

$$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ 0),\ \vec{b} = (b_x;\ b_y;\ 0),\ [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (0;\ 0;\ a_xb_y - b_xa_y).$$

Por eso, el área S del paralelogramo situado en el plano $\mathscr{P}$ y construido sobre los vectores $\vec{a} = a_x\vec{i}' + a_y\vec{j}'$ y $\vec{b} =$ $= b_x\vec{i}' + b_y\vec{j}'$ es igual a

$$S = |a_xb_y - a_yb_x|. \qquad (4.4)$$

A continuación en este párrafo, si no se indica lo contrario, consideremos que las coordenadas de los vectores están dadas en una base ortonormalizada derecha $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (en el plano, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$) y las coordenadas de los puntos, en el sistema rectangular correspondiente de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (en el plano, $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$).

Ejemplo 4. Verificar que los vectores $\vec{a} = (1; 0; -1)$, $\vec{b} = (-1; 1; 0)$, $\vec{c} = (2; 0; -3)$ no son coplanares. Hallar el vector unitario $\vec{d}$ que es ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y es tal que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\} \sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

△ Tenemos

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 < 0.$$

Por consiguiente, los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son coplanares y $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es la base izquierda. El vector buscado $\vec{d}$ es ortogonal tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$ y por eso $\vec{d} \parallel [\vec{a}, \vec{b}]$. Ya que $|\vec{d}| = 1$, son posibles sólo dos casos: $\vec{d}_1 = [\vec{a}, \vec{b}]/|[\vec{a}, \vec{b}]|$ o bien $\vec{d}_2 = -\vec{d}_1 = -[\vec{a}, \vec{b}]/|[\vec{a}, \vec{b}]|$. Según la propiedad IV, la base $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ y, por lo tanto, la base equiorientada a ella $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_1\}$ son derechas. Puesto que $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{d}_1\} \not\sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_1\}$, entonces $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_2\}$ es la base izquierda, es decir, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_2\} \sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Por tanto, el vector buscado $\vec{d}$ es igual a $\vec{d}_2$. Tenemos

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1; 1; 1), \ |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{3}.$$

Por consiguiente $\vec{d} = (-1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3})$. ▲

Ejemplo 5. Hallar el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{a} = (-1;\ 3)$ y $\vec{b} = (1;\ 2)$.

△ Por la fórmula (4.4), $S = |(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1| = 5$. ▲

Ejemplo 6. Calcular el área del triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos $A\ (-1;\ 0;\ -1)$, $B\ (0;\ 2;\ -3)$, $C\ (4;\ 4;\ 1)$.

△ El área del $\triangle ABC$ es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\,[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]\,| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2}, \quad (4.5)$$

donde $a_x = 1$, $a_y = 2$, $a_z = -2$ y $b_x = 5$, $b_y = 4$, $b_z = 2$ son las coordenadas de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, correspondientemente. De este modo, $S_{ABC} = (1/2) \times \times \sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 9$. ▲

Ejemplo 7. Están dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Expresar los vectores 1) $[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}]$ y 2) $[(\vec{a}+\vec{b})/2,\ \vec{b}-\vec{a}/2]$ mediante el vector $\vec{c} = [\vec{a},\ \vec{b}]$.

△ Conforme a la propiedad de linealidad del producto vectorial, tenemos

1) $[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}] = [\vec{a},\ \vec{a}-\vec{b}] + [\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}] = [\vec{a},\ \vec{a}] - [\vec{a},\ \vec{b}] + [\vec{b},\ \vec{a}] - [\vec{b},\ \vec{b}] = \vec{0} - [\vec{a},\ \vec{b}] - [\vec{a},\ \vec{b}] - \vec{0} = -2\vec{c}$. Aquí se tienen en cuenta la propiedad (4.2) y el resultado del ejemplo 1.

2) Análogamente, $[(\vec{a}+\vec{b})/2,\ \vec{b}-\vec{a}/2] = (1/2)[\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a}/2] + (1/2)[\vec{b},\ \vec{b}-\vec{a}/2] = (1/2)[\vec{a},\ \vec{b}] - (1/4)[\vec{a},\ \vec{a}] + (1/2)[\vec{b},\ \vec{b}] - (1/4)[\vec{b},\ \vec{a}] = (1/2)\,\vec{c} - (1/4)(-\vec{c}) = (3/4)\,\vec{c}$. ▲

Ejemplo 8. Tres vectores no nulos $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ se vinculan por las relaciones $\vec{a} = [\vec{b},\ \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c},\ \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a},\ \vec{b}]$. Hallar las longitudes de estos vectores y los ángulos entre ellos.

△ Ya que $\vec{a}=[\vec{b}, \vec{c}]$, entonces $\vec{a}\perp\vec{b}$ y $\vec{a}\perp\vec{c}$. Además, $\vec{b}=[\vec{c}, \vec{a}]$ y por eso $\vec{b}\perp\vec{c}$. Por tanto, los tres vectores son ortogonales de dos en dos. Luego, $|\vec{a}|=$ $=|\vec{b}|\,|\vec{c}|\operatorname{sen}(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})=|\vec{b}|\,|\vec{c}|$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|\,|\vec{a}|$, $|\vec{c}|=$ $=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$. Multiplicando estas relaciones, obtenemos $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|=1$. Tomando en consideración que $|\vec{b}|\times$ $\times|\vec{c}|=|\vec{a}|$, tenemos que $|\vec{a}|^2=1$, es decir, $|\vec{a}|=1$. Análogamente, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$. Puesto que $\vec{c}=[\vec{a}, \vec{b}]$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es la base ortonormalizada derecha. ▲

Ejemplo 9. Demostrar que si tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son colineales de dos en dos, las condiciones $[\vec{a}, \vec{b}]=$ $=[\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{c}, \vec{a}]$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ son equivalentes.

□ Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, entonces, al multiplicar vectorialmente esta igualdad por $\vec{a}$, obtenemos $[\vec{a}, \vec{a}]+$ $+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{c}, \vec{a}]=\vec{0}$. De aquí $[\vec{a}, \vec{b}]=[\vec{c}, \vec{a}]$. Si multiplicamos no por $\vec{a}$, sino por $\vec{b}$, obtenemos $[\vec{a}, \vec{b}]=[\vec{b}, \vec{c}]$.

Viceversa: si $[\vec{a}, \vec{b}]=[\vec{b}, \vec{c}]$, es decir, $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}]=\vec{0}$, entonces, según la propiedad III del producto vectorial, $\vec{a}+\vec{c}\parallel\vec{b}$, es decir, existe un número λ tal que $\vec{a}+\vec{c}+$ $+\lambda\vec{b}=\vec{0}$. Expresando de aquí $\vec{a}=-\vec{c}-\lambda\vec{b}$ y sustituyéndolo en la igualdad $[\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{c}, \vec{a}]$, obtenemos $[\vec{b}, \vec{c}]=\lambda[\vec{b}, \vec{c}]$, es decir, $(1-\lambda)[\vec{b}, \vec{c}]=\vec{0}$. Los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son colineales, es decir $[\vec{b}, \vec{c}]\neq\vec{0}$. Por consiguiente, $\lambda=1$ y $\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}=\vec{0}$. ■

Ejemplo 10. Sean dadas las descomposiciones de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ según la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\vec{a}=a_x\vec{e}_1+a_y\vec{e}_2+$ $+a_z\vec{e}_3$, $\vec{b}=b_x\vec{e}_1+b_y\vec{e}_2+b_z\vec{e}_3$. Descomponer el vector $[\vec{a}, \vec{b}]$ en los vectores $\vec{f}_1=[\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $\vec{f}_2=[\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $\vec{f}_3=[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$.

△ Según la propiedad de linealidad del producto vectorial, $[\vec{a}, \vec{b}]=[a_x\vec{e}_1+a_y\vec{e}_2+a_z\vec{e}_3, \vec{b}]=a_x[\vec{e}_1, \vec{b}]+$ $+a_y[\vec{e}_2, \vec{b}]+a_z[\vec{e}_3, \vec{b}]$. De modo análogo, $[\vec{e}_1, \vec{b}]=[\vec{e}_1, b_x\vec{e}_1+$

$+ b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3] = b_x[\vec{e}_1, \vec{e}_1] + b_y[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + b_z[\vec{e}_1, \vec{e}_3] = b_y\vec{f}_3 - b_z\vec{f}_2$ (aquí se ha tomado en consideración la igualdad $[\vec{e}_1, \vec{e}_1] = \vec{0}$). Del mismo modo se verifica que $[\vec{e}_2, \vec{b}] = b_z\vec{f}_1 - b_x\vec{f}_3$, $[\vec{e}_3, \vec{b}] = b_x\vec{f}_2 - b_y\vec{f}_1$. Por consiguiente,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = a_x(b_y\vec{f}_3 - b_z\vec{f}_2) + a_y(b_z\vec{f}_1 - b_x\vec{f}_3) + $$
$$+ a_z(b_x\vec{f}_2 - b_y\vec{f}_1) =$$
$$= \vec{f}_1\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{f}_2\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{f}_3\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \blacktriangle \tag{4.6}$$

Ejemplo 11. Demostrar que el área S del triángulo que tiene los vectores de sus lados iguales a los vectores

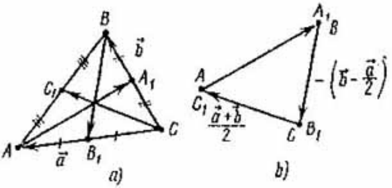


Fig. 4.3

de las medianas del triángulo ABC (fig. 4.3, a, b) compone 3/4 del área σ del triángulo ABC.

$\triangle$ Sean $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Entonces, $\overrightarrow{CC_1} = (\vec{a} + \vec{b})/2$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \vec{a}/2$, $[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}] = [(\vec{a} + \vec{b})/2, \vec{b} - \vec{a}/2] = (3/4)[\vec{a}, \vec{b}]$ (véase el ejemplo 7). Por eso $S = (1/2)\,|[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}]| = (3/4)(1/2)\,|[\vec{a}, \vec{b}]| = (3/4)\,\sigma$. $\blacktriangle$

Ejemplo 12. Sea dado un triángulo ABC. En las rectas (AB), (BC), (CA) están respectivamente elegidos los puntos M, N, P de modo que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA}$. Con qué valor de α el área $S(\alpha)$ del triángulo (los vectores de cuyos lados son $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{BP}$) es mínima?

△ Sean $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Sobre la base del resultado del ejemplo 11 (§ 3 del cap. 2), los vectores $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ forman efectivamente el triángulo con tal que $\overrightarrow{CM} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b}$. Por eso,

$$S(\alpha) = (1/2)\,|[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AN}]| = (1/2)\,|[(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

$$-\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b}]| = (1/2)\,|-\alpha[\vec{b}, \vec{a}] + (1-\alpha)^2[\vec{a}, \vec{b}]| =$$

$$= (1/2)(1-\alpha+\alpha^2)\,|[\vec{a}, \vec{b}]| = (1-\alpha+\alpha^2)\,S_{ABC}.$$

El mínimo de esta expresión se logra cuando $\alpha = 1/2$, es decir, si $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ son las medianas del $\triangle ABC$ (ejemplo 11). Este mínimo es igual a $(3/4)\,S_{ABC}$. ▲

Ejemplo 13. Los triángulos ABC y ACD se encuentran en un plano de modo que los puntos B y D se sitúan a distintos lados de la recta (AC) (fig. 4.4, *a*, *b*). Demostrar que el área S del cuadrilátero $ABCD$ es igual a

$$S = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|. \tag{4.7}$$

△ Según la condición del problema $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\} \sim \{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$. Por eso, los vectores $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]$ y $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]$ son codirigidos y, por lo tanto, la longitud de la suma de estos vectores es igual a la suma de sus longitudes:

$$|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]| + |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]| = |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]| =$$

$$= |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] - [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = |[\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| =$$

$$= |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}]|.$$ Ya que

$$|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]| = 2S_{ADC}, \quad |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]| = 2S_{ABC},$$

$$S = S_{ADC} + S_{ABC},$$

se tiene $S = (1/2)\,|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}]| = (1/2)\,|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|$. ▲

Ejemplo 14*. Dado un triángulo ABC con el área S. En las rectas (AB), (BC), (CA) están elegidos los puntos M, N, P, respectivamente, de modo que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$, $\alpha\beta\gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ y las rectas (CM), (BP) y (AN) se intersecan de dos en dos: $D = (CM) \cap (BP)$, $E = (CM) \cap (AN)$, $F = (BP) \cap (AN)$. Hallar el área σ del triángulo DEF.

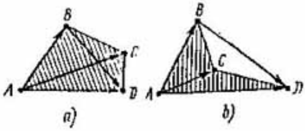


Fig. 4.4

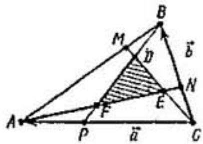


Fig. 4.5

$\triangle$ Puesto que $\alpha\beta\gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, los puntos D, E, F son diferentes dos a dos (fig. 4.5) (véase el ejemplo 9 del § 8, cap. 2). Si en calidad de los vectores básicos tomamos $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, entonces $\overrightarrow{CM} = \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + (1-\beta)\vec{b}$, $\overrightarrow{BP} = \gamma\vec{a} - \vec{b}$. Sean $\overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CD} = y\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BD} = z\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BF} = u\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AF} = v\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AE} = w\overrightarrow{AN}$ (buscaremos los números x, y, z, u, v, w por la regla del ciclo empleando la unicidad de la descomposición de vectores según la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$). Del ciclo $AECA$ obtenemos

$$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \iff w(-\vec{a} + (1-\beta)\vec{b}) - x(\alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{a}) + \vec{a} = 0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} \iff \begin{cases} -w - x(1-\alpha) + 1 = 0, \\ w(1-\beta) - x\alpha = 0 \end{cases} \iff w = \frac{\alpha}{1-\beta+\alpha\beta}, \quad x = \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}$$

[aquí se utiliza el hecho de que $1 - \beta + \alpha\beta \neq 0$. En efecto, los números x y w existen (las rectas (AN) y (CM) se intersecan) y satisfacen las relaciones $w(1 - \beta + \alpha\beta) = \alpha$, $x(1 - \beta + \alpha\beta) = 1 - \beta$. Si fuera que $1 - \beta + \alpha\beta = 0$, tendríamos $\alpha = 0$, $1 - \beta = 0$ y, por consiguiente, $\alpha\beta\gamma = 0 = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, que contradice la condición del problema]. Análogamente hallamos: $y = \gamma/(1 - \alpha + \alpha\gamma)$, $z = (1-\alpha)/(1 - \alpha + \alpha\gamma)$, $u = \beta/(1 - \gamma + \beta\gamma)$, $v = (1-\gamma)/(1 - \gamma + \beta\gamma)$. El área es

$$\sigma = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(y-x)\overrightarrow{CM}, (v-w)\overrightarrow{AN}]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|y-x|\,|v-w|\,\left|[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AN}]\right| = \frac{1}{2}|y-x|\,|v-w|\,|[\alpha\vec{b} +$$

$$(1-\alpha)\vec{a},\ -\vec{a}+(1-\beta)\vec{b}]\,| = \frac{1}{2}\,|y-x|\,|v-w|\,|\alpha\,[\vec{a},\ \vec{b}]+$$

$$+(1-\alpha)(1-\beta)[\vec{a},\ \vec{b}]\,| = |y-x|\,|v-w|\,|1-\beta+\alpha\beta|\,S.$$

Puesto que

$$y-x=\frac{\gamma(1-\beta+\alpha\beta)-(1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)},$$

$$v-w=-\frac{\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)},$$

en definitiva tenemos

$$\sigma=\frac{(\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma))^2}{[(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)(1-\alpha+\alpha\gamma)]}\,S. \ \blacktriangle$$

Notemos que si $\alpha=\beta=\gamma=k\neq 1/2$, entonces

$$0<\sigma=S_{DEF}=\frac{(2k-1)^2}{k^2-k+1}\,S=\frac{4\,(k-1/2)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+3/4}\,S<4S_{ABC}.$$

Ejemplo 15. En los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ y $[DA]$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$ del área S (fig. 4.6) se sitúan los puntos M, N, P, Q, respectivamente, de modo que $|AM|:|AB|=|BN|:|BC|=|CP|:|CD|=|DQ|:|DA|=\alpha$. Hallar el área $\sigma(\alpha)$ del cuadrilátero $MNPQ$. ¿Con qué valor de α es mínima esta área?

$\triangle$ Por la fórmula (4.7), $\sigma(\alpha)=(1/2)\,|[\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{NQ}]|$, donde $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\overrightarrow{CD}=-\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}+(1-\alpha)\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{BD}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NQ}=(1-\alpha)\overrightarrow{BD}-\alpha\overrightarrow{AC}$, $[\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}]=[\alpha\overrightarrow{BD}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC},\ (1-\alpha)\overrightarrow{BD}-\alpha\overrightarrow{AC}]=(2\alpha^2-2\alpha+1)[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}]$. De este modo,

$$\sigma(\alpha)=(1/2)(2\alpha^2-2\alpha+1)\,|[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}]|=$$

$$=(2\alpha^2-2\alpha+1)\,S.$$

El mínimo de $\sigma(\alpha)$ se logra (y es igual a $(1/2)\,S$) cuando $\alpha=1/2$. $\blacktriangle$

Ejemplo 16*. El área de un triángulo ABC es igual a S. Los puntos E y F son los puntos medios de los lados $[AB]$ y $[AC]$, respectivamente. Los puntos $M \neq C$ y N se encuentran situados en el lado $[BC]$ con tal que $|MN| = |NC|$ (fig. 4.7). Las rectas (EM)

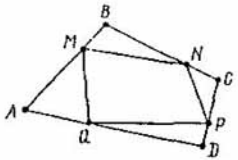


Fig. 4.6

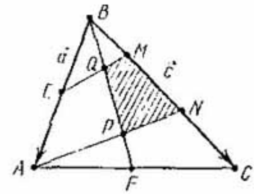


Fig. 4.7

y (AN) cortan la mediana $[BF]$ en los puntos Q y P, respectivamente. Demostrar que el área σ del cuadrilátero $MNPQ$ satisface las igualdades $(1/6)\,S \leqslant \sigma \leqslant (1/5)\,S$. ¿En qué casos: a) $\sigma = (1/5)\,S$; b) $\sigma = (1/6)\,S$?

$\triangle$ Hagamos $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{NC} = (1/2)\,x\vec{c}$ (según la condición del problema, $0 < x \leqslant 1$). Los vectores $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{BF} = (1/2)\,(\vec{a} + \vec{c})$ son codirigidos. Por eso existe un número λ tal que $\overrightarrow{BP} = \lambda\,(\vec{a} + \vec{c})$. Análogamente existe un número α tal que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AN} = \alpha\,(-\vec{a} + (1 - x/2)\,\vec{c})$. Del ciclo $ABPA$ obtenemos $-\vec{a} + \lambda\,(\vec{a} + \vec{c}) - \alpha\,(-\vec{a} + (1 - x/2)\,\vec{c}) = \vec{0}$, es decir, $\alpha + \lambda = 1$, $\lambda = \alpha\,(1 - x/2)$. De aquí $\lambda = (2 - x)/(4 - x)$. Por consiguiente, el área del triángulo BPN es $S_{BPN} = (1/2)\,|[\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BN}]| = (1/2)\,|[\lambda\,(\vec{a} + \vec{c}),\ (1 - x/2)\,\vec{c}]| = (1/2)\,\lambda\,(1 - x/2)\,|[\vec{a}, \vec{c}]| = [(2 - x)^2\,S]/[2\,(4 - x)]$. De modo análogo consideramos el ciclo $EBQE$ y hallamos

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1 - x}{3 - 2x}\,(\vec{a} + \vec{c}),\quad S_{BQM} = \frac{(1 - x)^2}{3 - 2x}\,S.$$

De este modo,

$$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{S_{BPN} - S_{BQM}}{S} = \frac{(2 - x)^2}{2\,(4 - x)} - \frac{(1 - x)^2}{3 - 2x} = f(x).$$

La función $f(x)$ es continuamente diferenciable en el segmento $[0, 1]$ con tal que $f'(x) = 5\,(2 - x)\,(2 - 3x)/[2\,(4 - x)^2\,(3 - 2x)^2]$. Por lo tanto, $f'(x) > 0$ en el intervalo $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, o sea, $f(x)$ crece monótonamente en este intervalo y $f'(x) < 0$ en el intervalo $(2/3, 1]$. Por eso, $f(x)$ llega al máximo en el punto $x = 2/3$, $f(2/3) = 1/5$. Puesto que $f(0) = f(1) = 1/6$, en el intervalo $(0, 1]$ $f(x)$

llega al mínimo cuando $x = 1$. De este modo, $\sigma = (1/5)\ S$, si $|BM| = |MN| = |NC|$ (en este caso $(EM) \parallel (AN)$); $\sigma = (1/6)\ S$ si $M = B$. ▲

Ejemplo 17. Demostrar que el área del trapecio $ABCD$ $((AD) \parallel (BC))$ es igual a $\frac{1+k}{2}\ |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$, donde $k = |BC| : |AD|$.

△ Sea $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Entonces, $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + k\vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ y

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\ |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2}\ |[\vec{b} + k\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}]| =$$

$$= \frac{1}{2}\ |[\vec{b}, \vec{a}] - k[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{k+1}{2}\ |[\vec{a}, \vec{b}]|. \ ▲$$

Ejemplo 18*. El área de un trapecio $ABCD$ es igual a S, la razón de las longitudes de las bases es $|AD| : |BC| = \frac{1}{k} = 3$. En la recta que en el punto K corta la prolongación de la base $[AD]$ tras el punto D, el segmento $[EF]$ está situado de modo que

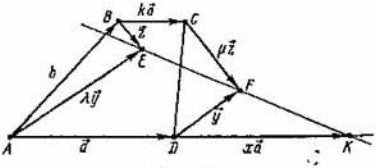


Fig. 4.8

$(AE) \parallel (DF)$, $(BE) \parallel (CF)$, $|AE| : |DF| = m = 2$, $|CF| : |BE| = n = 2$ (fig. 4.8). Hallar el área σ del triángulo EFD.

△ Designemos $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DK} = x\vec{a}$, $x > 0$, $\overrightarrow{DF} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{z}$. Entonces, $\overrightarrow{AE} = \lambda\vec{y}$, $|\lambda| = m$, $\overrightarrow{CF} = \mu\vec{z}$, $|\mu| = n$, $\overrightarrow{BC} = k\vec{a}$. Del ciclo $ABEA$ $\vec{b} + \vec{z} - \lambda\vec{y} = \vec{0}$. Del ciclo $ABCFDA$ $\vec{b} + (k-1)\vec{a} + \mu\vec{z} - \vec{y} = \vec{0}$. De este sistema hallamos $\vec{y} = [(1-\mu)\vec{b} + (k-1)\vec{a}]/(1-\lambda\mu)$. Por eso,

$$\sigma = \frac{1}{2}\ |[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]| = \frac{1}{2}\ |[\lambda\vec{y} - \vec{a}, \vec{y}]| = \frac{1}{2}\ |[a \quad]| =$$

$$= \frac{1}{2\,|1-\lambda\mu|}\ |[\vec{a}, (1-\mu)\vec{b} + (k-1)a]| =$$

$$= \frac{|1-\mu|}{2\,|1-\lambda\mu|}\ |[a, \vec{b}]| = \frac{|1-\mu|}{|1-\lambda\mu|}\ \frac{S}{k+1} \text{ (véase el ejemplo 17)}$$

Queda por utilizar la condición $x > 0$. Los vectores $\overrightarrow{KF} = \vec{y} - x\vec{a}$ y $\overrightarrow{KE} = \lambda\vec{y} - (1+x)\vec{a}$ son colineales, es decir, $\overrightarrow{KE} = t\overrightarrow{KF}$ para un t: $\lambda\vec{y} - (1+x)\vec{a} = t\vec{y} - tx\vec{a}$. Los vectores $\vec{a}$ e $\vec{y}$ no son colineales. Por eso $\lambda = t$, $1+x = tx$, o sea, $\lambda = (1+x)/x > 0$. Por consiguiente, $\lambda = m$. De este modo, son posibles dos casos: 1) $\mu = n$, entonces

$$\sigma = \frac{|1-n|}{|1-mn|}\cdot\frac{S}{k+1} = \frac{1}{4}S;$$

2) $\mu = -n$, entonces

$$\sigma = \frac{1+n}{1+mn}\cdot\frac{S}{k+1} = \frac{9}{20}S. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 19*. Demostrar que todas las caras del tetraedro $ABCD$ son de áreas iguales si, y sólo si, son triángulos congruentes.

☐ Hagamos uso de la fig. 3.14 y las designaciones del ejemplo 18 (§ 2 del cap. 3). Entonces $\overrightarrow{BC} = 2\vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Por consiguiente,

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = |[\vec{c}, \vec{c}-\vec{b}+\vec{a}]| = |[\vec{c}, \vec{a}-\vec{b}]|,$$

$$S_{BAD} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}]| = |[\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}]| = |[\vec{a}, \vec{b}-\vec{c}]|,$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}]| = |[\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}]| = |[\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}]|,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]| = |[\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]| = |[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]|.$$

Sobre la base de la identidad $|[\vec{m}, \vec{n}]|^2 = \vec{m}^2\vec{n}^2 - (\vec{m}, \vec{n})^2$ la igualdad de áreas de todas las caras del tetraedro $ABCD$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered}
\vec{c}^2(\vec{a}^2+\vec{b}^2-2(\vec{a},\vec{b})) - ((\vec{a},\vec{c})-(\vec{b},\vec{c}))^2 = \\
= \vec{c}^2(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2(\vec{a},\vec{b})) - ((\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}))^2, \\
\vec{a}^2(\vec{b}^2+\vec{c}^2-2(\vec{b},\vec{c})) - ((\vec{a},\vec{b})-(\vec{a},\vec{c}))^2 = \\
= \vec{a}^2(\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{b},\vec{c})) - ((\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}))^2, \\
\vec{c}^2(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2(\vec{a},\vec{b})) - ((\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}))^2 = \vec{a}^2(\vec{b}^2+ \\
+\vec{c}^2+2(\vec{b},\vec{c})) - ((\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}))^2.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos

$$\vec{c}^2(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{c}),\quad \vec{a}^2(\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c})(\vec{a},\vec{b}).$$

Multiplicando estas relaciones, obtenemos $(\vec{a}^2\vec{c}^2-(\vec{a}, \vec{c})^2)(\vec{a}, \vec{b})\times$ $\times(\vec{b}, \vec{c})=0$. Como $\vec{a}$ y $\vec{c}$ no son colineales, $|\vec{a}|\,|\vec{c}|>|(\vec{a}, \vec{c})|$. Por consiguiente, $(\vec{a}, \vec{b})(\vec{b}, \vec{c})=0$. Por eso, $\vec{a}^2(\vec{b}, \vec{c})^2=(\vec{a}, \vec{c})(\vec{a}, \vec{b})\times$ $\times(\vec{b}, \vec{c})=0$, es decir, $(\vec{b}, \vec{c})=0$. Entonces, $\vec{c}^2(\vec{a}, \vec{b})=(\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c})=0$, o sea, $(\vec{a}, \vec{b})=0$. Sustituyendo los productos escalares hallados en la ecuación (4.8), obtenemos $\vec{b}^2(\vec{a}^2-\vec{c}^2)=0$, es decir $|\vec{a}|=|\vec{c}|$. Por consiguiente, $|AD|=|BC|$. El vector $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$ es ortogonal tanto a $\overrightarrow{AD}=2\vec{a}$ como a $\overrightarrow{BC}=2\vec{c}$. Sobre la base del resultado del ejemplo 18 (§ 2 del cap. 3), tenemos también $|AB|=|CD|$ y $|BD|=|AC|$. Así, las longitudes de las aristas cruzadas del tetraedro $ABCD$ son iguales de dos en dos. Por tanto, sus caras son triángulos congruentes. ■

§ 3. Producto vectorial doble. Ecuación vectorial de la recta en el espacio. Vector normal del plano

Ejemplo 1 (fórmula del producto vectorial doble (PVD)). Demostrar que en el espacio para cualesquiera tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se tiene

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}, \vec{c})-\vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \tag{4.9}$$

□ Escojamos una base ortonormalizada derecha $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tomando la base ortonormalizada $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ en el plano paralelo a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de tal modo que el vector $\vec{i}$ sea colineal al vector $\vec{b}$ y haciendo $\vec{k}=[\vec{i}, \vec{j}]$. Entonces, en esta base

$$\vec{b}=b\vec{i}=(b;\ 0;\ 0),\quad \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}=(c_x;\ c_y;\ 0),$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$[\vec{b}, \vec{c}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b & 0 & 0\\ c_x & c_y & 0\end{vmatrix}=bc_y\vec{k}=(0;\ 0;\ bc_y),$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ 0 & 0 & bc_y\end{vmatrix}=a_ybc_y\vec{i}-a_xbc_y\vec{j}.$$

En el segundo miembro de la última igualdad sumemos y restemos el vector $a_x b c_x \vec{i}$. Obtenemos $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = b\vec{i}(a_x c_x + a_y c_y + a_z \cdot 0) - (c_x \vec{i} + c_y \vec{j})(a_x b + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. ■

Ejemplo 2. ¿Bajo qué condición necesaria y suficiente es válida la igualdad

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]? \tag{4.10}$$

△ Por la fórmula (4.9) $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$, $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. Por consiguiente, la igualdad (4.10) se cumple cuando, y sólo cuando, $\vec{0} = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. Pero según la fórmula (4.9), se tiene $\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]]$. De este modo, la igualdad (4.10) es válida cuando, y sólo cuando, $[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]] = \vec{0}$, o sea, si los vectores $\vec{b}$ y $[\vec{a}, \vec{c}]$ son colineales. Esto es posible si $\vec{a} \parallel \vec{c}$ o $\vec{a} \nparallel \vec{c}$ y el vector $\vec{b}$ es ortogonal a cada uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. ▲

Ejemplo 3 (ecuación vectorial de la recta en el espacio). Sea que en un espacio están fijados un polo O y escogidos los vectores $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{M}$ con tal que $(\vec{M}, \vec{a}) = 0$. Demostrar que el conjunto l de todos los puntos del espacio, cuyos radio vectores $\vec{r}$ satisfacen la ecuación

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}, \tag{4.11}$$

es la recta. Indicar su posición en el espacio.

□ **Solución primera.** Escojamos un sistema de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de tal modo que $\vec{k} = \vec{a}/a$, $a = |\vec{a}| \neq 0$, o sea, $\vec{a} = (0; 0; a)$. Como $(\vec{M}, \vec{a}) = 0$, el sistema de coordenadas indicado puede ser elegido de modo que el vector $\vec{M}$ sea colineal al vector $\vec{j}$, es decir, $\vec{M} = m\vec{j} = (0; m; 0)$. Ahora, si $A(x; y; z)$ es un punto arbitrario de l, entonces, en virtud de la ecuación (4.11),

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = ay\vec{i} - ax\vec{j} = \vec{M} = m\vec{j}.$$

Por consiguiente, el punto $A\ (x;\ y;\ z) \in l$ si, y sólo si, sus coordenadas $(x;\ y;\ z)$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$y = 0, \quad x = -m/a. \tag{4.12}$$

La primera de estas ecuaciones es la del plano Oxz, la segunda es la del plano paralelo al plano Oyz. Por tanto, l es conjunto de los puntos comunes para los dos planos, o sea, es la recta paralela al eje Oz (al vector $\vec{a}$). Esta recta pasa por el punto con el radio vector $\vec{r}_0 = (-m/a;\ 0;\ 0)$. Expresemos $\vec{r}_0$ mediante $\vec{a}$ y $\vec{M}$:

$$\vec{r}_0 = -\frac{m}{a}\vec{i} = -\frac{m}{a}[\vec{j},\ \vec{k}] = \left[\vec{k},\ \frac{m}{a}\vec{j}\right] =$$

$$= \left[\vec{k},\ \frac{\vec{M}}{a}\right] = \left[\frac{\vec{a}}{a},\ \frac{\vec{M}}{a}\right] = \frac{[\vec{a},\ \vec{M}]}{a^2}.$$

La ecuación paramétrica de la recta l tiene la forma

$$\vec{r} = \frac{[\vec{a},\ \vec{M}]}{|\vec{a}|^2} + \vec{a}t, \quad t \in R. \tag{4.13}$$

Solución segunda (geométrica). Si $\vec{M} = \vec{0}$, l es el conjunto de todos los puntos del espacio cuyos radio vectores $\vec{r}$ son colineales al vector $\vec{a}$ (puesto que $[\vec{r},\ \vec{a}] = \vec{0}$), o sea, l es la recta que pasa por el polo O y tiene el vector director $\vec{a}$.

Sea $\vec{M} \neq \vec{0}$. Consideremos el plano $\mathcal{P}$ que pasa por el polo O y es perpendicular a $\vec{M}$. Partiendo del punto O, tracemos el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Ya que $(\vec{a},\ \vec{M}) = 0$, entonces $A \in \mathcal{P}$. Por consiguiente, $(OA) \in \mathcal{P}$. Sea $B\ (\vec{r})$ un punto arbitrario de l. De la fórmula (4.11), según la propiedad I del producto vectorial, tenemos $(\vec{r},\ \vec{M}) = 0$, es decir, $B \in \mathcal{P}$. De este modo, l es un subconjunto del plano $\mathcal{P}$. Luego, $|[\vec{r},\ \vec{a}]| = |\vec{M}|$, o sea, el área del paralelogramo $BOAC$ construido sobre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{a}$ es igual a $|\vec{M}|$ (la propiedad II del producto vectorial) y la altura del paralelogramo $BOAC$ bajada desde el punto B a la recta (OA) tiene longitud $h = |\vec{M}|/|\vec{a}|$ que es común para todos los puntos $B \in l$. De este modo, todos los puntos del subconjunto l están situados en el plano $\mathcal{P}$ y son equidistantes (a distancia h) de la recta (OA). El conjunto de los puntos de $\mathcal{P}$ que están a distancia h de (OA) se compone de dos rectas l_1 y l_2 paralelas a (OA) (fig. 4.9). Para una de estas rectas (en la fig. 4.9 es la recta l_1) los radio vectores $\vec{r}$ de los puntos pertenecientes a ella, junto con $\vec{a}$ y $\vec{M}$; forman, en un orden mencionado, la base derecha y para otra recta, l_2, la base izquierda. Conforme a la propiedad IV del producto vectorial, l_2 no contiene puntos del conjunto l definidos por la ecuación (4.11), y todo punto de l_1 pertenece a l (para cada uno de estos puntos se establecen las propiedades I, II, IV que determinan la igualdad vectorial (4.11)). De este modo, l es la recta que tiene un vector director $\vec{a}$ y pasa por el punto D (base de la perpendicular bajada desde el punto O a la recta l_1). Se puede hallar fácilmente el vector $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OD}$ de punto D del modo siguiente. Puesto que $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} \perp \vec{M}$ y la base $\{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}, \vec{M}\}$ es derecha, entonces, $\overrightarrow{OD} \uparrow\uparrow [\vec{a}, \vec{M}]$, o sea, $\vec{r}_0 = \lambda [\vec{a}, \vec{M}]$, donde $\lambda > 0$. Para hallar λ notemos que $|\vec{r}_0| = |\overrightarrow{OD}| = h = |\vec{M}|/|\vec{a}|$, es decir, $|\vec{M}|/|\vec{a}| = |\lambda [\vec{a}, \vec{M}]| = \lambda |[\vec{a}, \vec{M}]| = \lambda |\vec{a}| |\vec{M}|$ ($\vec{a}$ y $\vec{M}$ son ortogonales). Por consiguiente, $\lambda = 1/|\vec{a}|^2$, o sea, $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$.

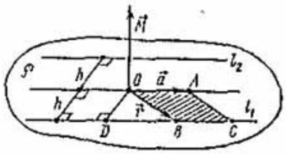


Fig. 4.9

Solución tercera. Tomemos $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$. Por la fórmula del PVD,

$$[\vec{r}_0, \vec{a}] = -\frac{1}{|\vec{a}|^2}[\vec{a}, [\vec{a}, \vec{M}]] = -\frac{1}{|\vec{a}|^2}(\vec{a}(\vec{a}, \vec{M}) -$$

$$-\vec{M}(\vec{a}, \vec{a})) = \vec{M} \text{ (ya que } (\vec{a}, \vec{M}) = 0).$$

Por tanto $\vec{r}_0$ es el radio vector de un punto $D \in l$ y, en virtud de la igualdad $\vec{M} = [\vec{r}_0, \vec{a}]$ la ecuación (4.11) es equivalente a la ecuación

$$[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}] = \vec{0}. \qquad (4.14)$$

Conforme a la propiedad III del producto vectorial, la igualdad (4.14) es válida si, y sólo si, $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{a}$, o sea, si existe un $t \in R$ tal que $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t$, es decir,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad t \in R. \qquad (4.15)$$

De este modo, la ecuación (4.11) es equivalente a la ecuación paramétrica vectorial (4.15) y, por lo tanto, l es una recta con la ecuación paramétrica (4.15). ■

Ejemplo 4. Escribir la ecuación vectorial (de tipo (4.11)) de la recta l: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$.

△ La recta l pasa por el punto con el radio vector $\vec{r}_0 = (-1; 3; 0)$ y tiene el vector director $\vec{a} = (-3, 4; 3)$. Como $\vec{M} = [\vec{r}_0, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, la ecuación vectorial de l es

$$[\vec{r}, -3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}] = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}. \ ▲$$

Ejemplo 5. Hallar el radio vector $\vec{x}$ del punto común de la recta l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $|\vec{a}| \neq 0$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$ y del plano $\mathscr{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, $(\vec{N}, \vec{a}) \neq 0$.

△ Escribamos la ecuación de l en la forma paramétrica (4.13). Entonces, el problema se reduce a la búsqueda de un número t tal que el vector $\vec{x} = \frac{[\vec{a}, \vec{M}]}{|\vec{a}|^2} + \vec{a}t$ satisfaga también la igualdad $(\vec{x}, \vec{N}) = D$, o sea, $t(\vec{a}, \vec{N}) + ([\vec{a}, \vec{M}], \vec{N})/|\vec{a}|^2 = D$. De aquí,

$$t = \frac{D|\vec{a}|^2 - ([\vec{a}, \vec{M}], \vec{N})}{|\vec{a}|^2 (\vec{a}, \vec{N})},$$

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left([\vec{a}, \vec{M}] + \frac{D|\vec{a}|^2 - ([\vec{a}, \vec{M}], \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})} \vec{a} \right). \ ▲$$

Ejemplo 6. Escribir la ecuación normal del plano $\mathscr{P}$ dado mediante la ecuación paramétrica $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v$, $u, v \in R$.

$\triangle$ Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes y paralelos al plano $\mathscr{P}$. Por consiguiente, en calidad del vector normal $\vec{N}$ se puede tomar el vector

$$\vec{N} = [\vec{a}, \vec{b}]. \qquad (4.16)$$

El vector $\vec{r}_0$ es el radio vector de un punto del plano $\mathscr{P}$. Por la fórmula (3.28), la ecuación normal de $\mathscr{P}$ es $(\vec{r} - \vec{r}_0, [\vec{a}, \vec{b}]) = 0$. $\blacktriangle$

Ejemplo 7. En un tetraedro $ABCD$, el plano bisector del ángulo diedro de la arista $[CD]$ corta la arista $[AB]$ en el punto F (fig. 4.10). Demostrar que $|AF| : |FB| = S_{ACD} : S_{BCD}$.

$\triangle$ Hagamos $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b}' = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{a}' = [\vec{c}, \vec{b}]$, $\varphi = \widehat{(\vec{a}', \vec{b}')}$, $|AF| = \mu |AB|$. Entonces, $S_{ACD} = (1/2)|\vec{b}'|$, $S_{BCD} = (1/2)|\vec{a}'|$. Por la fórmula (4.16), los vectores $\vec{N}_1 = \vec{a}'$, $\vec{N}_2 = [\vec{c}, \overrightarrow{DF}] = [\vec{c}, \overrightarrow{DA} + \mu\overrightarrow{AB}] = [\vec{c}, \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a})] = \mu\vec{a}' + (1 - \mu)\vec{b}'$, $\vec{N}_3 = \vec{b}'$ son los vectores normales de los planos (BCD), (FCD), (ACD), respectivamente. Como el plado (FCD) es bisector, se tiene $\widehat{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)} = \widehat{(\vec{N}_2, \vec{N}_3)}$. Por lo tanto,

$$\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|} = \frac{(\vec{N}_2, \vec{N}_3)}{|\vec{N}_2|\,|\vec{N}_3|}, \text{ o sea, } \frac{\mu\vec{a}'^2 + (1 - \mu)(\vec{a}', \vec{b}')}{|\vec{a}'|} =$$

$$= \frac{(1 - \mu)\vec{b}'^2 + \mu(\vec{a}', \vec{b}')}{|\vec{b}'|},$$

o $(1 - \cos\varphi)((1 - \mu)|\vec{b}'| - \mu|\vec{a}'|) = 0$. Como $0° < \varphi < 180°$,

$$S_{ACD} : S_{BCD} = |\vec{b}'| : |\vec{a}'| = \frac{\mu}{1 - \mu} = |AF| : |FB|. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ son aristas laterales de una pirámide truncada cuadrangular

$ABCDA_1B_1C_1D_1$. Su base inferior es el rombo $ABCD$. La arista $[CC_1]$ es perpendicular al plano $(ABCD)$, $|CC_1| = |A_1B_1| = 2$, $|AB| = 4$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. En la arista $[BC]$ está tomado un punto M de modo que $|BM| = 3$. Por los puntos B_1, M y el centro O del rombo $ABCD$

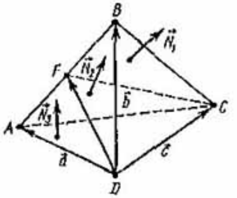


Fig. 4.10

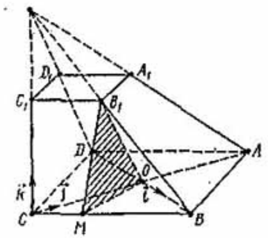


Fig. 4.11

está trazado un plano. Hallar el ángulo entre este plano y el plano de la cara AA_1C_1C.

△ Introduzcamos la base ortonormalizada derecha $\vec{i} = \overrightarrow{OB}/|\overrightarrow{OB}|$, $\vec{j} = \overrightarrow{OA}/|\overrightarrow{OA}|$, $\vec{k} = \overrightarrow{CC_1}/|\overrightarrow{CC_1}|$ (fig. 4.11). En esta base $\overrightarrow{OB} = (2;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{CO} = (0;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0;\ 0;\ 2)$, $\overrightarrow{CB} = (2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{CM} = (1/4)\overrightarrow{CB} = (1/2;\ \sqrt{3}/2;\ 0)$, $\overrightarrow{C_1B_1} = (1/2)\overrightarrow{CB} = (1;\ \sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CM} = (-1/2;\ 3\sqrt{3}/2;\ 0)$, $\overrightarrow{MB_1} = -\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = (1/2;\ \sqrt{3}/2;\ 2)$. Por la fórmula (4.16), el vector normal $\vec{N}_1$ del plano (B_1MO) es igual a

$$\vec{N}_1 = [\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MB_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & 3\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 2 \end{vmatrix} = (3\sqrt{3};\ 1;\ -\sqrt{3}).$$

El vector normal $\vec{N}_2$ del plano (AA_1C_1C) paralelo a $\vec{j}$ y $\vec{k}$ es obviamente igual a $\vec{i}$. Por eso, para el ángulo φ entre los planos (B_1MO) y (AA_1C_1C) obtenemos la expresión

$$\cos\varphi = |(\vec{N}_1, \vec{N}_2)| / (|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|) =$$
$$= 3\sqrt{3} / \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3} / \sqrt{31},$$
$$\varphi = \arccos 3\sqrt{3/31} = \operatorname{arctg}(2/(3\sqrt{3})). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 9. Hallar el vector director de la recta l que es la línea de intersección de dos planos $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$ y $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

$\triangle$ Siendo paralelo al plano $\mathcal{P}_1$, el vector $\vec{a}$ (vector director de la recta l) es ortogonal a su vector normal $\vec{N}_1$. Análogamente, $\vec{a} \perp \vec{N}_2$. Por consiguiente, en calidad de $\vec{a}$ se puede tomar el vector $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. $\blacktriangle$

Ejemplo 10. Hallar el ángulo entre la recta l:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z - 1 = 0, \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

y el plano $\mathcal{P}$: $x + z + 2 = 0$.

$\triangle$ El vector director $\vec{a}$ de la recta l se halla por la fórmula

$$\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] \tag{4.17}$$

donde $\vec{N}_1 = (3;\ 5;\ 4)$, $\vec{N}_2 = (1;\ 1;\ 0)$ (véase el ejemplo 9). Por la fórmula (3.53), el ángulo φ entre l y $\mathcal{P}$ es igual a $\varphi = \operatorname{arcsen} \dfrac{|(\vec{N}, \vec{a})|}{|\vec{N}|\,|\vec{a}|}$, donde

$$\vec{N} = (1;\ 0;\ 1),\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4;\ 4;\ -2), \text{ o sea,}$$

$$\varphi = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 11. Hallar el ángulo φ entre las rectas

$$l: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad l_1: \begin{cases} x - y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

△ Por la fórmula (4.17), los vectores directores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de las rectas l y L son iguales, respectivamente, a

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2;\ 2;\ -1),$$

$\vec{b} = (5;\ 5;\ 0)$. Por consiguiente, $\cos\varphi = |(\vec{a}, \vec{b})| / (|\vec{a}|\,|\vec{b}|) = 0$, $\varphi = 90°$. ▲

§ 4. Producto mixto de vectores. Condición del carácter coplanar de vectores. Volumen del tetraedro

El número $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ se denomina *producto mixto* (*la terna ordenada*) *de vectores* $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (se denota: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$).

Aduzcamos las propiedades del producto mixto de vectores.

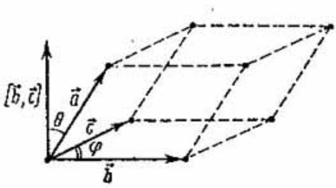


Fig. 4.12

1°. *El producto mixto es igual a cero si, y sólo si, los factores son coplanares.*

□ Si φ es el ángulo entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$, θ, el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $[\vec{b}, \vec{c}]$ (fig. 4.12), entonces

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \begin{cases} 0, \text{ cuando } \vec{a} = \vec{0} \text{ o } [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}; \\ |\vec{a}|\,|[\vec{b}, \vec{c}]|\cos\theta = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \\ \text{si } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ y } [\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0}. \end{cases} \qquad (4.18)$$

De este modo, la igualdad $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ es posible solamente en los siguientes casos:

a) $\vec{a} = \vec{0}$. En este caso, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son, por lo visto, coplanares;

b) $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$. En este caso, los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son colineales y por eso los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares;

c) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $[\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0}$ (es decir, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ sen $\varphi \neq$ $\neq 0$), $\cos\theta = 0$ [véase la fórmula (4.18)]. En este caso, $\vec{a}$ es ortogonal a $[\vec{b}, \vec{c}]$, o sea, $\vec{a}$ es paralelo al plano en el cual $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base.

Luego, si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, entonces, por la fórmula (4.18), $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores no nulos, sen $\varphi \neq 0$, es decir, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son colineales, $\cos\theta \neq 0$ y, por consiguiente, los vectores $\vec{a}$ y $[\vec{b}, \vec{c}]$ no son ortogonales y, por tanto, $\vec{a}$ no es paralelo al plano en el cual $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base. En otras palabras, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares. ■

2ª. *Si en una base ortonormalizada derecha* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, $\vec{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$, *entonces*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.19}$$

□ Por la fórmula (4.1), el vector $[\vec{b}, \vec{c}]$ es igual a

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right).$$

Por eso

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}. \ ■$$

Notemos que de la fórmula (4.19) y del criterio del carácter coplanar de vectores (véase el ejemplo 20 del § 5, cap. 2) se desprende trivialmente la 1ª propiedad. El corolario evidente de (4.19) es la propiedad siguiente.

3ª. *Una base* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *es derecha si, y sólo si,* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

□ Por la fórmula (4.19), $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det S^{T} = \det S$ donde S es la matriz del paso de la base derecha $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. ■

4ª. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) =$

$$= -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \qquad (4.20)$$

En particular, *si en el producto mixto dos factores son iguales, entonces este producto es igual a cero.*

□ Las igualdades (4.20) se desprenden de la fórmula (4.19) y la propiedad 2 de determinantes (véase el § 4 del cap. 2). La igualdad $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$ (y otras que tienen dos factores iguales en el producto mixto) se deduce de las igualdades (4.20): cuando $\vec{b} = \vec{a}$ tenemos

$$(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}), \text{ o sea } (\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0. \ ■$$

5ª. *Si* $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$ $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_x\vec{e}_1 + c_y\vec{e}_2 + c_z\vec{e}_3$, *entonces*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3). \qquad (4.21)$$

□ Conforme a la fórmula (4.6)

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_y \end{vmatrix} \vec{f}_1 - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{f}_2 + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{f}_3,$$

donde $\vec{f}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $\vec{f}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $\vec{f}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$. Como $(\vec{e}_1, \vec{f}_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_2, \vec{f}_1) = (\vec{e}_3, \vec{f}_1) = 0$ (el vector $\vec{f}_1$ es ortogonal tanto a $\vec{e}_2$ como a $\vec{e}_3$), $(\vec{a}, \vec{f}_1) = (a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3, \vec{f}_1) = a_x(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. De modo análogo,

$(\vec{a}, \vec{f}_2) = a_y (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{a}, \vec{f}_3) = a_z (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Por consiguiente,

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \left(a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \ \blacksquare$$

6ª. *El volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al módulo del producto mixto de estos vectores.*

□ Por la fórmula (4.18), $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \times \times |\vec{c}| \operatorname{sen} \varphi \,|\cos \theta|$. Al mismo tiempo, el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al producto del área $S = |\vec{b}|\,|\vec{c}| \operatorname{sen} \varphi$ por la altura $h = |\vec{a}|\,|\cos \theta|$. De este modo, si el paralelepípedo está construido sobre los vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (fig. 4.12), su volumen es igual a $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. ■

7ª. *El producto mixto es lineal respecto a cada uno de los factores:*

$$\begin{aligned} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) &= \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}), \\ (\vec{a}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{d}, \vec{c}) &= \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}), \\ (\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c} + \mu\vec{d}) &= \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ y números λ y μ.

□ Las igualdades (4.22) se desprenden de las propiedades de linealidad de los productos escalar y vectorial. ■

Ejemplo 1. Calcular el volumen V del paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ si se conoce su vértice A (1; 2; 3) y los extremos de las aristas que salen de A: B (9; 6; 4), D (3; 0; 4), A' (5; 2; 6).

△ Tenemos $V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'})| = \left| \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = 48.$ ▲

Ejemplo 2. En las condiciones del ejemplo anterior hallar la longitud h de la altura del paralelepípedo, bajada desde el vértice A' a la base $ABCD$.

$\triangle$ El área de base $ABCD$ es igual a $S = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6;\ -6;\ -24)$$ y por eso $S =$ $= 6\sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$. Por consiguiente, $h = V/S = 4\sqrt{2}/3$. $\blacktriangle$

Ejemplo 3. Demostrar que el volumen del tetraedro es igual a 1/6 del módulo del producto mixto de cualesquiera tres vectores no coplanares que forman aristas del tetraedro.

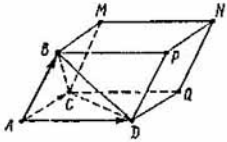


Fig. 4.13

$\square$ Al construir el paralelepípedo $ACQDBMNP$ del tetraedro $ABCD$ (fig. 4.13), obtenemos $V_{ABCD} = (1/3)\, h \cdot S_{ACD}$, donde h es la longitud de la altura bajada desde el vértice B al plano (ACD), $S_{ACD} = (1/2) \cdot S_{ACQD}$ es el área del triángulo ACD. De este modo, $V_{ABCD} =$ $= (1/6)\, h\, S_{ACQD} = (1/6)\, V_{ACQDBMNP} = (1/6)\, |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$. Además, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) =$ $= (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. En efecto, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) =$ $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ (los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son coplanares y su producto mixto es igual a cero). Análogamente, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. $\blacksquare$

Ejemplo 4. Están dados los vértices del tetraedro A (0; 0; 2), B (3; 0; 5), C (1; 1; 0), D (4; 1; 2). Hallar su volumen y la longitud de la altura bajada desde el vértice D.

$\triangle$ Tenemos $V_{ABCD} = (1/6)\, |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$, $h =$ $= |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| / |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$. Como $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 3)$,

$\overrightarrow{AC} = (1;\ 1;\ -2)$,

se tiene $[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3;\ 9;\ 3)$

y $|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]| = 3\sqrt{11}$. Luego $\overrightarrow{AD} = (4;\ 1;\ 0)$, $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD},\ [\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]) = 4\cdot(-3) + 1\cdot 9 + 0\cdot 3 = -3$. Por tanto, $V_{ABCD} = 1/2$, $h = 1/\sqrt{11}$. ▲

Ejemplo 5. Se da un tetraedro determinado por dos segmentos que pertenecen a rectas cruzadas. Demostrar que el volumen del tetraedro no cambia si desplazamos

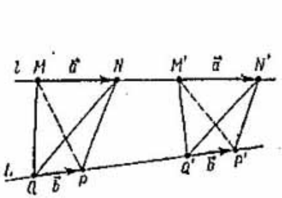


Fig. 4.14

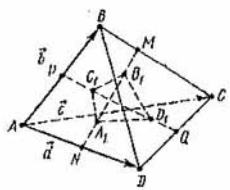


Fig. 4.15

estos segmentos, sin variar sus longitudes, a lo largo de las rectas correspondientes.

△ Sean l y L rectas cruzadas, M, N, M', N', puntos de la recta l, y P, Q, P', Q', puntos de la recta L tales que (fig. 4.14) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q'P'} = \vec{b}$. Entonces (véase el ejemplo 3), $V_{MNPQ} = (1/6)\,|(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{QN})|$, $V_{M'N'P'Q'} = (1/6)\,|(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{Q'N'})|$. Puesto que $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'N'} + \overrightarrow{N'N} = \lambda\vec{b} + \overrightarrow{Q'N'} + \mu\vec{a}$ (los vectores $\overrightarrow{QQ'}$ y $\overrightarrow{QP} = \vec{b}$ son colineales y por eso existe un número λ tal que $\overrightarrow{QQ'} = \lambda\vec{b}$; de modo análogo, $\overrightarrow{N'N} = \mu\vec{a}$ con un coeficiente μ), se tiene

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{QN}) = \lambda(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{b}) + (\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{Q'N'}) + \mu(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}).$$

En el segundo miembro de esta igualdad el primer y el tercer sumandos son iguales a cero debido a la propiedad 4.

Por consiguiente, $(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{QN}) = (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{Q'N'})$ y, por lo tanto, $V_{MNPQ} = V_{M'N'P'Q'}$. ▲

Ejemplo 6. En un tetraedro $ABCD$ los puntos M, N, P, Q se sitúan en las aristas $[BC]$, $[AD]$, $[AB]$, $[CD]$, respectivamente, con tal que $|AP| = |PB|$, $|AN| = |ND|$, $|CQ| = |QD|$, $|MC| = 2|BM|$. Los pares de puntos A_1, B_1 y C_1, D_1 están elegidos, respectivamente, en los segmentos $[NM]$ y $[PQ]$ de tal modo que $|NA_1| = |A_1B_1| = |B_1M|$, $|PC_1| = |C_1D_1| = |D_1Q|$. Hallar la razón de los volúmenes de los tetraedros $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$.

△ Introduzcamos la base $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ (fig. 4.15). En esta base, $\overrightarrow{C_1D_1} = (1/3)\,\overrightarrow{PQ} = (1/3)\,(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}) = (1/3)\,(-1/2)\,\vec{b} + (1/2)\,(\vec{c} + \vec{d})) = (1/6)\,(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (1/3)\,\overrightarrow{NM} = (1/3)\,(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + (1/3)\,\overrightarrow{BC}) = (1/3) \times \times (-(1/2)\,\vec{d} + \vec{b} + (1/3)\,(\vec{c} - \vec{b})) = (2/9)\,\vec{b} + (1/9)\,\vec{c} - (1/6)\,\vec{d}$. Además, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{C_1D_1} = (1/3)\,\vec{b} + (1/6)\,\vec{c} + (1/6)\,\vec{d}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{A_1B_1} = (2/9)\,\vec{b} + (1/9)\,\vec{c} + (1/3)\,\vec{d}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{C_1A_1} = -(1/9)\,\vec{b} - (1/18)\,\vec{c} + (1/6)\,\vec{d}$. El volumen del tetraedro $A_1B_1C_1D_1$ es igual a

$$\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/9 & -1/18 & 1/6 \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\times\,(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})| = \frac{1}{216}\cdot\frac{1}{6}\,|(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})| = \frac{V_{ABCD}}{216}. \ ▲$$

Ejemplo 7. Demostrar que si $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son coplanares.

△ Multiplicando escalarmente esta igualdad por $\vec{a}$ obtenemos $0 = (\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) + (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) + (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{a}])$. Como $(\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{a}]) = 0$, se tiene $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Conforme a la propiedad 1 del producto mixto, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares. ▲

Ejemplo 8. Demostrar que si los vectores $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ son coplanares, son también colineales.

△ Sea que los vectores $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ son coplanares. Entonces son linealmente dependientes, es decir, existen números x, y, z que no son iguales a cero simultáneamente $(x^2 + y^2 + z^2 > 0)$ tales que

$$x[\vec{a}, \vec{b}] + y[\vec{b}, \vec{c}] + z[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}.$$

Al multiplicar de modo escalar esta igualdad por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, sucesivamente, obtenemos: $y(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, $z(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, $x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. De aquí $(x^2 + y^2 + z^2)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = 0$. Por consiguiente, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares (paralelos a un plano $\mathscr{P}$). Cada uno de los vectores $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ (conforme a las propiedades I y III del producto vectorial) es ora nulo ora paralelo a la recta perpendicular al plano $\mathscr{P}$. Por lo tanto, estos tres vectores son colineales.

Ejemplo 9. Demostrar la identidad

$$[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \qquad (4.23)$$

△ Teniendo en cuenta la fórmula del PVD (4.9) y la propiedad 4 del producto mixto, tenemos $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}([\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}) - \vec{d}([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \vec{c}(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) - \vec{d}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. ▲

Ejemplo 10. Demostrar que

$$([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2. \qquad (4.24)$$

□ Por la fórmula (4.23), $[[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{c}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = \vec{c}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,\vec{c}$. Por consiguien-

lo, $([\vec a, \vec b], [\vec b, \vec c], [\vec c, \vec a]) = ([\vec a, \vec b], (\vec a, \vec b, \vec c)\vec c) =$
$= (\vec a, \vec b, \vec c)([\vec a, \vec b], \vec c) = (\vec a, \vec b, \vec c)(\vec c, \vec a, \vec b) = (\vec a, \vec b, \vec c)^2$. ■

Las fórmulas (4.24) y (4.23) permiten obtener la segunda solución del ejemplo 8. A saber: si los vectores $[\vec a, \vec b], [\vec b, \vec c], [\vec c, \vec a]$ son coplanares, su producto mixto es igual a cero. Por consiguiente, en virtud de (4.24) $(\vec a, \vec b, \vec c) = 0$. Entonces, por la fórmula (4.23) tenemos $[[\vec a, \vec b], [\vec c, \vec a]] = \vec c(\vec a, \vec b, \vec a) - \vec a(\vec a, \vec b, \vec c) = -\vec a(\vec a, \vec b, \vec c) = -\vec a \cdot 0 = \vec 0$, o sea, los vectores $[\vec a, \vec b]$ y $[\vec c, \vec a]$ son colineales. Análogamente se verifica que $[[\vec a, \vec b], [\vec b, \vec c]] = [[\vec b, \vec c], [\vec c, \vec a]] = \vec 0$.

Ejemplo 11. Demostrar la identidad

$$(\vec a, \vec b, \vec c)\vec d = (\vec d, \vec b, \vec c)\vec a + (\vec a, \vec d, \vec c)\vec b + (\vec a, \vec b, \vec d)\vec c.$$

△ Consideremos el vector $\vec m = [[\vec a, \vec b], [\vec c, \vec d]]$. Por la fórmula (4.23) $\vec m = \vec c(\vec a, \vec b, \vec d) - \vec d(\vec a, \vec b, \vec c)$. Se puede también escribir el vector $\vec m$ en la forma $\vec m = -[[\vec c, \vec d], [\vec a, \vec b]] = [[\vec c, \vec d], [\vec b, \vec a]] = \vec b(\vec c, \vec d, \vec a) - \vec a(\vec c, \vec d, \vec b)$ (una vez más se ha tomado en consideración (4.23)). De este modo, $\vec c(\vec a, \vec b, \vec d) - \vec d(\vec a, \vec b, \vec c) = \vec m = -\vec b(\vec a, \vec d, \vec c) - \vec a(\vec d, \vec b, \vec c)$, de donde se deduce la identidad demostrada. ▲

Ejemplo 12. Sean $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ los radio vectores de cuatro puntos A, B, C, D de un espacio respecto a cierto polo O. Demostrar que estos cuatro puntos se encuentran situados en un plano si, y sólo si,

$$(\vec a, \vec b, \vec c) + (\vec a, \vec c, \vec d) = (\vec b, \vec c, \vec d) + (\vec b, \vec d, \vec a).$$

△ Los puntos A, B, C, D se encuentran en un plano si, y sólo si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$, es decir $(\vec b - \vec a,$

$\vec{c}-\vec{a}, \vec{d}-\vec{a})=0$. Conforme a la propiedad de linealidad del producto mixto y tomando en consideración la propiedad 4, tenemos, $0=(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}, \vec{d}-\vec{a})=(\vec{b}, \vec{c}-\vec{a}, \vec{d}-\vec{a})-(\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}, \vec{d}-\vec{a})=(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}-\vec{a})-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}-\vec{a})-$ $-(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}-\vec{a})+(\vec{a}, \vec{a}, \vec{d}-\vec{a})=(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})-(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})-$ $-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d})+(\vec{b}, \vec{a}, \vec{a})-(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})+(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})+(\vec{a}, \vec{a}, \vec{d})-$ $-(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})=(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})+(\vec{b}, \vec{d}, \vec{a})-((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})+(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}))$. ▲

Ejemplo 13. Están dados los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=$ $=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ de tres aristas de un tetraedro $ABCD$ que salen del vértice D. Hallar el vector $\overrightarrow{DH}$ de la altura del tetraedro bajada desde el vértice D al plano (ABC).

△ El vector $\overrightarrow{BH}$ es coplanar a los vectores no colineales $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ y $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. Por lo tanto, existen números λ y μ tales que $\overrightarrow{BH}=\lambda(\vec{a}-\vec{b})+\mu(\vec{c}-\vec{b})$. El vector $\overrightarrow{DH}$ es perpendicular al plano (ABC), o sea, es colineal al vector $\vec{d}=[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]=[\vec{c}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}]=$ $=[\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]$. Por consiguiente, existe un número ν tal que $\overrightarrow{DH}=\nu\vec{d}$. Del ciclo $DHBD$ tenemos $\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$, es decir, $\nu([\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+$ $+[\vec{b}, \vec{c}])=\lambda\vec{a}+(1-\lambda-\mu)\vec{b}+\mu\vec{c}$. Multiplicando de modo escalar los dos miembros de esta igualdad por el vector $\vec{d}$, obtenemos $\nu|\vec{d}|^2=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, es decir, $\nu=$ $=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})/|\vec{d}|^2$. De este modo,

$$\overrightarrow{DH}=\frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{|[\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]|^2}([\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]). \quad ▲.$$

Ejemplo 14. Demostrar que un segmento $[AB]$, cuyos extremos A y B se encuentran en distintas caras de un ángulo diedro dado, forma ángulos iguales con estas caras si, y sólo si, las distancias entre cada uno de los extremos y la arista del ángulo diedro son iguales.

△ Sean $\mathcal{P}$ y Q las caras del ángulo diedro (fig. 4.16), $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ sus vectores normales, $A \in \mathcal{P}$, $B \in Q$, C y D dos puntos distintos en la arista del ángulo diedro, A' y B' las bases de las perpendiculares bajadas de los puntos A y B, respectivamente, a la recta (CD). Los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{A'A}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B'B}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ forman base con tal que $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. En calidad de los vectores normales $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$

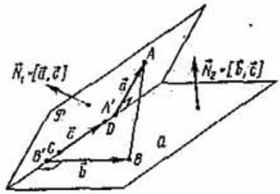


Fig. 4.16

se puede tomar los vectores $\vec{N}_1 = [\vec{a}, \vec{c}]$, $|\vec{N}_1| = |\vec{a}|\,|\vec{c}|$ y $\vec{N}_2 = [\vec{b}, \vec{c}]$, $|\vec{N}_2| = |\vec{b}|\,|\vec{c}|$. Según la fórmula (3.53) los ángulos formados por el segmento $[AB]$ y las caras $\mathcal{P}$ y Q son iguales si, y sólo si,

$$\frac{|(\vec{N}_1, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_1|\,|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|(\vec{N}_2, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_2|\,|\overrightarrow{AB}|}, \text{ o } \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{c})|}{|\vec{a}|} = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{b}|}.$$

Descomponiendo el vector $\overrightarrow{AB}$ según la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$: $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ (λ es desconocido), obtenemos, conforme a las propiedades 7 y 4 del producto mixto, $(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) + \lambda(\vec{c}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$; $(\overrightarrow{AB}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$. Por lo tanto, los ángulos formados por $[AB]$ con $\mathcal{P}$ y Q son iguales cuando, y sólo cuando, $1/|\vec{a}| = 1/|\vec{b}|$, es decir, $|AA'| = |BB'|$. ▲

Ejemplo 15. Los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ son no coplanares. Demostrar que los vectores $\vec{f}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $\vec{f}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $\vec{f}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ tomados en este orden forman base derecha.

△ Por la fórmula (4.24), $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2$. Puesto que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2 > 0$. Por consiguiente, según la propiedad 3 del producto mixto, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ es la base derecha. ▲

Construida por la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, la base $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$, donde

$$\vec{e}_1' = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \vec{e}_2' = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}^3)}, \quad \vec{e}_3' = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \qquad (4.25)$$

se denomina base *recíproca* de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. De las propiedades del producto mixto se desprende que para todos los i, $j = 1, 2, 3$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j') = \begin{cases} 0, & \text{cuando } i \neq j; \\ 1, & \text{cuando } i = j. \end{cases} \qquad (4.26)$$

Por la fórmula (4.24),

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = \frac{1}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}. \qquad (4.27)$$

Ejemplo 16. Hallar el radio vector $\vec{x}$ del punto común M de tres planos: $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$, $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$, $\mathcal{P}_3$: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = D_3$, donde $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) \neq 0$.

$\triangle$ El vector buscado $\vec{x}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$(\vec{x}, \vec{N}_1) = D_1, \ (\vec{x}, \vec{N}_2) = D_2, \ (\vec{x}, \vec{N}_3) = D_3. \qquad (4.28)$$

Busquemos $\vec{x}$ en la forma de descomposición según la base $\{\vec{N}_1', \vec{N}_2', \vec{N}_3'\}$ recíproca de la base $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3\}$: $\vec{x} = y\vec{N}_1' + z\vec{N}_2' + t\vec{N}_3'$. Entonces $(\vec{x}, \vec{N}_1) = y(\vec{N}_1, \vec{N}_1') + z(\vec{N}_1, \vec{N}_2') + t(\vec{N}_1, \vec{N}_3') = y$ [véase las igualdades (4.26)]. Análogamente, $(\vec{x}, \vec{N}_2) = z$, $(\vec{x}, \vec{N}_3) = t$, es decir, el sistema toma la forma $y = D_1$, $z = D_2$, $t = D_3$ y su solución es obvia. De este modo,

$$\vec{x} = D_1\vec{N}_1' + D_2\vec{N}_2' + D_3\vec{N}_3' =$$
$$= \frac{D_1[\vec{N}_2, \vec{N}_3] + D_2[\vec{N}_3, \vec{N}_1] + D_3[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)}. \ \blacktriangle \qquad (4.29)$$

Ejemplo 17. Hallar el vector $\vec{x}$ que forma ángulos iguales con vectores no coplanares dados $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

△ La búsqueda de $\vec{x}$ es equivalente a la solución del sistema de ecuaciones

$$(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha, \quad (\vec{x}, \vec{b}) = \beta, \quad (\vec{x}, \vec{c}) = \gamma,$$

donde $\alpha = |\vec{x}|\,|\vec{a}|\cos\varphi$, $\beta = |\vec{x}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, $\gamma = |\vec{x}|\,|\vec{c}|\cos\varphi$; φ es el ángulo (igual) desconocido entre $\vec{x}$ y $\vec{a}$, $\vec{x}$ y $\vec{b}$, $\vec{x}$ y $\vec{c}$. Por la fórmula (4.29) tenemos, para el sistema (4.28),

$$\vec{x} = \frac{\alpha[\vec{b}, \vec{c}] + \beta[\vec{c}, \vec{a}] + \gamma[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} =$$

$$= |\vec{x}|\cos\varphi\,\frac{|\vec{a}|[\vec{b}, \vec{c}] + |\vec{b}|[\vec{c}, \vec{a}] + |\vec{c}|[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Puesto que, según la condición del problema, la longitud del vector $\vec{x}$ no es sustancial, en calidad del buscado se puede tomar el vector

$$\vec{x} = \frac{|\vec{a}|[\vec{b}, \vec{c}] + |\vec{b}|[\vec{c}, \vec{a}] + |\vec{c}|[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\,t,$$

donde t es un número real cualquiera diferente de cero. ▲

Ejemplo 18*. Demostrar que para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ es válida la igualdad

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{a}) & (\vec{x}, \vec{b}) & (\vec{x}, \vec{c}) \\ (\vec{y}, \vec{a}) & (\vec{y}, \vec{b}) & (\vec{y}, \vec{c}) \\ (\vec{z}, \vec{a}) & (\vec{z}, \vec{b}) & (\vec{z}, \vec{c}) \end{vmatrix}. \qquad (4.30)$$

□ Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, o sea, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares, entonces uno de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (por ejemplo, $\vec{a}$) se descompone en dos otros: $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$.

Entonces,

$$(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha (\vec{x}, \vec{b}) + \beta (\vec{x}, \vec{c}),$$

$$(\vec{y}, \vec{a}) = \alpha (\vec{y}, \vec{b}) + \beta (\vec{y}, \vec{c}),$$

$$(\vec{z}, \vec{a}) = \alpha (\vec{z}, \vec{b}) + \beta (\vec{z}, \vec{c}).$$

Por lo tanto, en el determinante que está en el segundo miembro de (4.30) la primera columna es la combinación lineal de la segunda y la tercera. Por eso, el determinante dado es igual a cero. De este modo, si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, entonces la igualdad (4.30) queda cumplida: sus dos miembros son iguales a cero.

Ahora, sea $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, o sea, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es la base. Descompongamos los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ según la base $\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$ recíproca de la $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}' + \alpha_2 \vec{b}' + \alpha_3 \vec{c}',$$

$$\vec{y} = \beta_1 \vec{a}' + \beta_2 \vec{b}' + \beta_3 \vec{c}',$$

$$\vec{z} = \gamma_1 \vec{a}' + \gamma_2 \vec{b}' + \gamma_3 \vec{c}'.$$

Por la fórmula (4.21), $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \Delta \cdot (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$, donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Tomando en consideración la relación (4.27), resulta que el primer miembro de (4.30) es igual a $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') \cdot \Delta = \Delta$. Por otro lado, en virtud de (4.26), $(\vec{x}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{a}, \alpha_1 \vec{a}' + \alpha_2 \vec{b}' + \alpha_3 \vec{c}') = \alpha_1$, $(\vec{x}, \vec{b}) = \alpha_2$, $(\vec{x}, \vec{c}) = \alpha_3$, $(\vec{y}, \vec{a}) = \beta_1$, $(\vec{y}, \vec{b}) = \beta_2$, $(\vec{y}, \vec{c}) = \beta_3$, $(\vec{z}, \vec{a}) = \gamma_1$, $(\vec{z}, \vec{b}) = \gamma_2$, $(\vec{z}, \vec{c}) = \gamma_3$, o sea, el miembro derecho (4.30) es también igual al determinante Δ. ■

Ejemplo 19*. En un paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$, las longitudes de todas las aristas son iguales a 1, $\widehat{DAB} = \widehat{DAA'} = \widehat{BAA'}$. Hallar el valor de cada uno de estos ángulos si el volumen del paralelepípedo es igual a $1/\sqrt{2}$.

△ Empleemos la fórmula (4.30), en virtud de la cual

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}. \qquad (4.31)$$

Tomando $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$, resulta que el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores

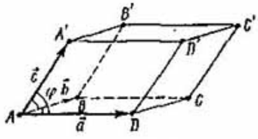


Fig. 4.17

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AA'}$ puede hallarse por la fórmula

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = \sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'}) \end{vmatrix}} \qquad (4.32)$$

Según la condición, $|AD| = |AB| = |AA'| = 1$, o sea, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'}) = 1$, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = \cos\varphi$, donde $\varphi = \widehat{DAB} = \widehat{DAA'} = \widehat{BAA'}$ (fig. 4.17). Según la fórmula (4.32), obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & w & w \\ w & 1 & w \\ w & w & 1 \end{vmatrix}} = \sqrt{2w^3 - 3w^2 + 1},$$

donde $w = \cos\varphi$. Resolviendo la ecuación $0 = 2w^3 - 3w^2 + 1/2 = 2w^3 - w^2 - (2w^2 - 1/2) = 2w^2(w - 1/2) - 2(w + 1/2)(w - 1/2) = 2(w - 1/2) \times (w - (\sqrt{3} + 1)/2)(w + (\sqrt{3} - 1)/2)$ y teniendo en cuenta la desigualdad $|w| = |\cos\varphi| \leqslant 1$, hallamos

$$\varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = 60°,\quad \varphi_2 = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 180° - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}.\ \blacktriangle$$

Ejemplo 20*. Expresar el volumen del tetraedro $ABCD$ mediante las longitudes $a = |AD|$, $b = |BD|$, $c = |CD|$ de sus tres aristas que salen de un vértice D y las magnitudes $\alpha = \widehat{ADB}$, $\beta = \widehat{BDC}$, $\gamma = \widehat{CDA}$ de los ángulos planos de este vértice.

$\triangle$ Empleando el resultado del ejemplo 3 y la fórmula (4.32), obtenemos

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA}) & (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC}) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\alpha & ac\cos\gamma \\ ab\cos\alpha & b^2 & bc\cos\beta \\ ac\cos\gamma & bc\cos\beta & c^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.\ \blacktriangle$$

Ejemplo 21. Demostrar que se puede calcular el volumen del tetraedro $ABCD$ por la fórmula $V = (1/6) \times |AD|\,|BC|\,d\,\operatorname{sen}\varphi$, donde φ es el ángulo entre las rectas (AD) y (BC) y d, la distancia entre estas rectas.

$\triangle$ El volumen V del tetraedro $ABCD$ es igual a $V = (1/6)\,|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})|$ (véase el ejemplo 3). Sean $M \in (AD)$ y $N \in (BC)$ los puntos de intersección de la perpendicular común a las rectas (AD) y (BC) con estas rectas. Entonces, $d = |\overrightarrow{MN}|$ y el vector $\overrightarrow{MN}$, siendo ortogonal a $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$, es colineal al producto vectorial

$[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$. Sean λ y μ números tales que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \mu\overrightarrow{BC}$. Entonces $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MN} - \mu\overrightarrow{BC}$ y $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \lambda(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) - \mu(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{MN}, [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}])$. Por tanto, $V = (1/6)\,|(\overrightarrow{MN}, [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}])| = (1/6)\,d\cdot|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]|$ (los vectores $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$ y $\overrightarrow{MN}$ son colineales). Como $|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]| = |AD|\,|BC|$ sen φ, se tiene $V = (1/6)\,|AD|\,|BC|\,d$ sen φ. ▲

Ejemplo 22*. Sea dado un tetraedro $ABCD$. En las aristas $[AB]$, $[CD]$ y la prolongación de la arista $[AC]$ tras el punto C están elegidos los puntos M, N, P, respectivamente, de tal modo que $|AM| : |AB| = \lambda$, $|CN| : |CD| = \mu$, $|PC| : |CA| = \nu$. Determinar el volumen de la parte —cortada del tetraedro por el plano (MNP)— que contiene el punto A. El volumen del tetraedro $ABCD$ es igual a V.

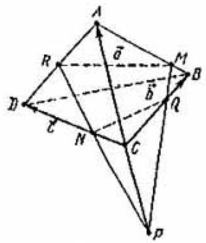


Fig. 4.18

△ Sean Q y R los puntos de intersección del plano (MNP) con las rectas (BC) y (DA) (fig. 4.18). El volumen del poliedro $RAMQCN$ es igual a $V_1 - V_2$, donde $V_1 = (1/6)\,|(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})|$ y $V_2 = (1/6)\,|(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN})|$ son los volúmenes de los tetraedros $PRAM$ y $PNCQ$, respectivamente. Calculemos los vectores que integran las expresiones de los volúmenes. Designemos $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Entonces, $V = (1/6)\,|(a, \vec{b}, \vec{c})|$. Tenemos $\overrightarrow{PM} = (\nu + 1)\,\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$. Sean $\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{CQ} = y\vec{b}$. Hallamos x e y empleando el ciclo $PCQP$: $\vec{0} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{PQ} = \nu\vec{a} + y\vec{b} - x((\nu + 1 - \lambda)\,\vec{a} + \lambda\vec{b})$. En virtud de la unicidad de descomposición según la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ $y = x\lambda$, $\nu = x(\nu + 1 - \lambda)$. Por consiguiente, $x = \nu/(1 + \nu - \lambda)$. Sean $\overrightarrow{PR} = z\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{RA} = w\overrightarrow{DA}$. Empleando el ciclo $PRAP$, hallamos números desconocidos z y w: $\vec{0} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RA} - \overrightarrow{PA} = z(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN}) + w(\vec{a} - \vec{c}) - \overrightarrow{PA} = (z\nu + w - \nu - 1)\vec{a} + (z\mu - w)\vec{c}$. De aquí $z\nu + w - \nu - 1 = 0$, $z\mu - w = 0$. Al sumar las dos igualdades, obtenemos $z = (\nu + 1)/(\mu + \nu)$. De este modo, definitivamente tenemos

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \nu+1 & 0 & 0 \\ \nu+1-\lambda & \lambda & 0 \\ z\nu & 0 & z\mu \end{vmatrix}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right| = (\nu+1)\lambda z\mu V = \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V;$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{PA},\ x\overrightarrow{PM},\ \frac{1}{z}\overrightarrow{PR}\right)\right| = \frac{\nu x}{z(\nu+1)}V_1;$$

$$V_1 - V_2 = \left(1 - \frac{\nu x}{z(\nu+1)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V = \left(1 - \frac{\nu^2(\mu+\nu)}{(\nu+1)^2(1+\nu-\lambda)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V.$$

Notemos un magnífico caso particular de la fórmula obtenida: $\lambda = \mu = 1/2$ (el plano (MNP) pasa por los puntos medios de las aristas cruzadas del tetraedro). En este caso (independientemente de la magnitud ν), $V_1 - V_2 = (1/2)\,V$, es decir, *el plano que pasa por los puntos medios de las aristas cruzadas del tetraedro divide este tetraedro en dos partes de volúmenes iguales.* ▲

Ejemplo 23* (teorema de los cosenos para un ángulo triedro). Los ángulos planos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ (fig. 4.19) del ángulo triedro $OABC$ son iguales a α, β, γ, respectivamente. Demostrar que la magnitud $\hat{B}$ del ángulo diedro de la arista (OB) satisface la relación

$$\cos\hat{B} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}. \qquad (4.33)$$

□ Consideremos los vectores unitarios $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}/|\overrightarrow{OA}|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}/|\overrightarrow{OB}|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}/|\overrightarrow{OC}|$. Entonces, $\vec{N}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$ $(|\vec{N}_1| = |\vec{e}_2|\,|\vec{e}_3|\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta)$, $\vec{N}_2 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ $(|\vec{N}_2| = \operatorname{sen}\alpha)$ son los vectores normales de los planos (COB) y (AOB), respectivamente (en la fig. 4.20 se representa la proyección del ángulo diedro buscado de la arista $[OB)$ sobre el plano ortogonal a (OB)). Conforme a las propiedades de los ángulos con los

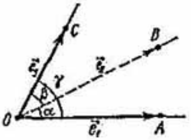


Fig. 4.19

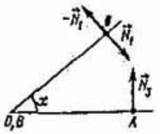


Fig. 4.20

lados respectivamente perpendiculares,

$$\cos \hat{B} = \cos (180° - \widehat{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}) = -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|} =$$

$$= -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}.$$

Para calcular el producto $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ empleemos el hecho de que, según la fórmula del producto vectorial doble, tenemos $[\vec{e}_2, \vec{N}_1] = [\vec{e}_2, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]] = \vec{e}_2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) - \vec{e}_3 \times (\vec{e}_2, \vec{e}_2)$ y, por lo tanto $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = (\vec{N}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N}_1) = (\vec{e}_1, [\vec{e}_2, \vec{N}_1]) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)(\vec{e}_2, \vec{e}_3) - (\vec{e}_1, \vec{e}_3)\,|\vec{e}_2|^2 = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma$. De este modo, $\cos\hat{B} = (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)/(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$. ■

Ejemplo 24*. Demostrar que: a) todo ángulo plano de un ángulo triedro es menor que la suma de otros dos; b) la suma de los ángulos planos de un ángulo triedro es menor de 360°.

△ a) Utilicemos las designaciones del ejemplo 23. Ya que $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \hat{B} < 180°$, de la fórmula (4.33) se desprende que $\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) + (1+\cos\hat{B}) \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta > \cos(\alpha+\beta)$. Puesto que en el segmento $[0°, 180°]$ el coseno decrece monótonamente y $0° < \gamma < 180°$, de la desigualdad $\cos\gamma > \cos(\alpha+\beta)$

se desprende que $\gamma < \alpha + \beta$ si $0° < \alpha + \beta \leqslant 180°$. Si $\alpha + \beta > 180°$, la desigualdad $\alpha + \beta > \gamma$ es obvia puesto que $180° > \gamma$. b) Transformando la desigualdad obtenida $0 < \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ y empleando el hecho de que, según lo demostrado, $0° < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < 180°$, es decir, $\operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} > 0$, obtenemos $\operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 0$. Como $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 270°$, de aquí se deduce que $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 180°$, o sea, $\alpha+\beta+\gamma < 360°$. ▲

§ 5. Problemas vectoriales de la recta y el plano

Ejemplo 1. Escribir la ecuación vectorial paramétrica de la recta l dada como la línea de intersección de dos planos no paralelos $\mathscr{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$ y $\mathscr{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

△ **Primera solución.** El vector $\vec{r}$ es el radio vector de un punto de la recta l si, y sólo si,

$$(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1, \quad (\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2, \quad \vec{N}_1 (\vec{r}, \vec{N}_2) - \vec{N}_2 (\vec{r}, \vec{N}_1) = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$$

(en este sistema de ecuaciones la tercera ecuación es el corolario obvio de las dos primeras). Empleando la fórmula del producto vectorial doble, escribamos esta ecuación en la forma

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}, \tag{4.34}$$

donde $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, $\vec{M} = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$. La ecuación (4.34) es la ecuación vectorial de una recta l^* (véase el ejemplo 3 del § 3 de este capítulo) que se determina completamente por esta recta. A la ecuación (4.34) le satisfacen todos los radio vectores de los puntos de la recta l. Por consiguiente, $l \subset l^*$, es decir, $l = l^*$ y (4.34) es la ecuación vectorial de l. Conforme a la fórmula (4.13), escribamos esta ecuación en forma paramétrica:

$$\vec{r} = \frac{[[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2],\ D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]|^2} + [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]\,t,\quad t \in R. \qquad (4.35)$$

Segunda solución. Encontrándose en los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, la recta l es perpendicular tanto al vector $\vec{N}_1$ como al vector $\vec{N}_2$. Por consiguiente (véase el ejemplo 9 del § 3 de este capítulo), el vector $\vec{a} = [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]$ es el vector director de l. El vector $\vec{r}_0$ (radio vector del punto inicial de la recta l) se halla como el radio vector de la base de la perpendicular bajada desde el polo a la recta l, o sea, como la solución del sistema de ecuaciones $(\vec{r}_0,\ \vec{N}_1) = D_1$, $(\vec{r}_0,\ \vec{N}_2) = D_2$, $(\vec{r}_0,\ \vec{a}) = 0$ $(\vec{a} = [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2])$. Es el sistema de ecuaciones de tipo (4.28). Por la fórmula (4.29), su solución es

$$\vec{r}_0 = \frac{D_1[\vec{N}_2,\ \vec{a}] + D_2[\vec{a},\ \vec{N}_1] + 0\cdot[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]}{(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2,\ \vec{a})} =$$

$$= \frac{[\vec{a}, D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{(\vec{a},\ [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2])} = \frac{[[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2],\ D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]|^2}.$$

La ecuación paramétrica de $l: \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$ coincide con (4.35). ▲

Ejemplo 2. Escribir las ecuaciones de la recta l: $x + y - z + 1 = 0$, $x + 2y + z - 4 = 0$ en forma paramétrica.

△ En las designaciones del ejemplo anterior:

$$\vec{N}_1 = (1;\ 1;\ -1),\ D_1 = -1,\ \vec{N}_2 = (1;\ 2;\ 1),$$

$$D_2 = 4,\ D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2 = (5;\ 6;\ -3),\ \vec{a} = [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3;\ -2;\ 1),\ \vec{r}_0 = \frac{1}{9+4+1}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}(0;\ 14;\ 28) = (0;\ 1;\ 2).$$

Por consiguiente, las ecuaciones de l son $x=0+3t$, $y=1-2t$, $z=2+t$ o $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$. ▲

Ejemplo 3. Hallar la proyección ortogonal $M_*(\vec{r}_*)$ de un punto $M_0(\vec{r}_0)$ sobre la recta l que es la línea de intersección de los planos $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1)=D_1$ y $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2)=D_2$.

△ El vector $\vec{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ es el vector director de l. Por la condición, $M_*\in l$, $\overrightarrow{M_0M_*}\perp\vec{a}$ (es decir, $(\vec{r}_*-\vec{r}_0, \vec{a})=0$). Logramos el siguiente sistema de ecuaciones para determinar el radio vector $\vec{r}_*$ del punto M_*:

$$(\vec{r}_*, \vec{N}_1)=D_1,\ (\vec{r}_*, \vec{N}_2)=D_2,\ (\vec{r}_*, \vec{a})=D_3.$$

Aquí $\vec{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, $D_3=(\vec{r}_0, \vec{a})=(\vec{r}_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$. Por la fórmula (4.29), hallamos

$$\vec{r}_*=\frac{D_1[\vec{N}_2, \vec{a}]+D_2[\vec{a}, \vec{N}_1]+D_3\vec{a}}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{a})}=$$

$$=\frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1-D_1\vec{N}_2]+(\vec{r}_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}.\ ▲$$

Ejemplo 4 (haz de planos pasados por una recta dada). Escribir las ecuaciones de todos los planos pasados por la recta l que es la línea de intersección de los planos: $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1)+D_1=0$ y $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2)+D_2=0$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]\neq\vec{0}$.

□ El vector director $\vec{a}$ de la recta l es igual a $\vec{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. Sea $\mathcal{P}^*$ un plano arbitrario que pasa por la recta l. Entonces el vector normal $\vec{N}^*\neq\vec{0}$ de este plano es ortogonal al vector $\vec{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, es decir, es paralelo al plano en el cual $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ forman base. Por eso existen (dependientes de $\vec{N}^*$, o sea, del plano $\mathcal{P}^*$) números α y β tales que $\vec{N}^* = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Por consiguiente, la ecuación de $\mathcal{P}^*$ es $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = D^*$. El número D^* se determina también por el plano $\mathcal{P}^*$: se expresa mediante α y β. Para hallar la relación entre D^*, α y β, consideremos un punto arbitrario $M_0 \in l$ con el radio vector $\vec{r}_0$. Como $M_0 \in \mathcal{P}_1$, se tiene $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$; ya que $M_0 \in \mathcal{P}_2$, se tiene $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$. En fin, $D^* = (\vec{r}_0, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2$, puesto que $M_0 \in \mathcal{P}^*$. De este modo, la ecuación de todo plano $\mathcal{P}^*$ que comprende l tiene la forma

$$(\vec{r}_1, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0, \qquad (4.36)$$

donde α y β son los números que no son simultáneamente iguales a cero y se determinan por el plano $\mathcal{P}^*$. Recíprocamente: si β y α son números arbitrarios que no son simultáneamente iguales a cero, la ecuación (4.36) es la ecuación de un plano que, además, contiene l (si $\vec{r}_0$ es el radio vector de un punto arbitrario $M_0 \in l$, entonces $M_0 \in \mathcal{P}_1$: $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1 = 0$, $M_0 \in \mathcal{P}_2$: $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2 = 0$ y, por lo tanto, $\alpha\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, es decir, M_0 se sitúa en el plano dado por la ecuación (4.36)).

La ecuación (4.36) se denomina *ecuación del haz de planos que pasan por la línea de intersección de los planos* $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Si las ecuaciones de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se dan en forma de coordenadas

$$\mathcal{P}_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\mathcal{P}_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

entonces, al introducir los vectores $\vec{N}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$, obtenemos $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$,

$\mathscr{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Por consiguiente, la ecuación del haz de planos que pasan por la recta $l = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ toma la forma [cf. con (4.36)]

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + \\ + C_2z + D_2) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \ \blacksquare \tag{4.37}$$

Ejemplo 5. Por la línea de intersección de dos planos $\mathscr{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = -D_1$ y $\mathscr{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = -D_2$ trazar el plano perpendicular al plano $\mathscr{P}_3$: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \neq 0$.

$\triangle$ Según la fórmula (4.36), la ecuación del plano buscado tiene la forma $\alpha \{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta \{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$ o bien $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -(\alpha D_1 + \beta D_2)$. El vector normal de este plano es el vector $\vec{N} = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2$. Según la condición, este vector es ortogonal a $\vec{N}_3$, o sea, $\alpha (\vec{N}_1, \vec{N}_3) + \beta (\vec{N}_2, \vec{N}_3) = 0$. Como $(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \neq 0$, se tiene $\alpha = -\beta (\vec{N}_2, \vec{N}_3)/(\vec{N}_1, \vec{N}_3)$, $\beta \neq 0$. Sustituyendo α y β en (4.36) y dividiendo en $\beta/(\vec{N}_1, \vec{N}_3)$, obtenemos

$$(\vec{r}, -\vec{N}_1 (\vec{N}_3, \vec{N}_2) + \vec{N}_2 (\vec{N}_3, \vec{N}_1)) = D_1 (\vec{N}_2, \vec{N}_3) - \\ - D_2 (\vec{N}_1, \vec{N}_3) \Leftrightarrow (\vec{r}, \ \vec{N}_3), [\vec{N}_1, \vec{N}_2]) = \\ = (D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2, \ \vec{N}_3). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. Componer la ecuación del plano que pasa por el punto $M(-3; 1; 0)$ y la línea de intersección de los planos $\mathscr{P}_1$: $x + 2y - z + 4 = 0$ y $\mathscr{P}_2$: $3x - y + 2z - 1 = 0$.

$\triangle$ La ecuación del plano buscado tiene la forma [véase (4.37)]

$$\mathscr{P}: \alpha (x + 2y - z + 4) + \beta (3x - y + 2z - 1) = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

La relación entre α y β se determina de la condición $M \in \mathscr{P}$, es decir, $\alpha (-3 + 2\cdot 1 - 0 + 4) + \beta (3(-3) - 1 + 2\cdot 0 - 1) = 0$ o bien $3\alpha - 11\beta = 0$.

Después de la sustitución $\alpha = \frac{11}{3}\beta$ y la división por $\frac{1}{3}\beta \neq 0$ la ecuación de $\mathcal{P}$ toma la forma $20x + 19y - 5z + 41 = 0$. ▲

Ejemplo 7. Componer la ecuación del plano que es paralelo a la recta L: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}$ y pasa por la línea de intersección de los planos $\mathcal{P}_1$: $x - y + 2 = 0$, $\mathcal{P}_2$: $y + z - 4 = 0$. ●

△ La ecuación del plano buscado tiene la forma

$$\alpha(x - y + 2) + \beta(y + z - 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha x + (\beta - \alpha) y + \beta z + (2\alpha - 4\beta) = 0.$$

Su vector normal $\vec{N} = (\alpha; \beta - \alpha; \beta)$ es ortogonal al vector director $\vec{a} = (-1; 3; -2)$ de la recta L: $\alpha\cdot(-1) + (\beta - \alpha)\cdot 3 + \beta\cdot(-2) = 0$. De aquí $\beta = 4\alpha$ y la ecuación del plano buscado es $x + 3y + 4z - 14 = 0$. ▲

Ejemplo 8. Escribir la ecuación de un plano arbitrario que pasa por el punto común de los planos $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = -D_1$, $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = -D_2$, $\mathcal{P}_3$: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = -D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) \neq 0$.

△ Sea $\vec{r}_0$ el radio vector de M_0, punto común de los planos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. Entonces, $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$, $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$, $(\vec{r}_0, \vec{N}_3) = -D_3$. Si $\mathcal{P}^*$ es un plano arbitrario, entonces su vector normal $\vec{N} \neq \vec{0}$ se descompone según los vectores no coplanares $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$: $\vec{N} = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3$ (los números α, β, γ, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ se determinan por el vector $\vec{N}$, es decir, por el plano $\mathcal{P}^*$). De este modo, la ecuación de $\mathcal{P}^*$ es $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3) + D^* = 0$. El punto M_0 pertenece a $\mathcal{P}^*$ si, y sólo si, $\vec{r}_0$ satisface la ecuación de $\mathcal{P}^*$, es decir, cuando $D^* = -(\vec{r}_0, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3) = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3$. De este modo, la ecuación de $\mathcal{P}^*$

$$\alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} + \gamma\{(\vec{r}, \vec{N}_3) + D_3\} = 0, \tag{4.38}$$

llamada *ecuación de un atado de planos pasados por el punto común de los planos* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ describe (para las variables α, β, γ, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$) el conjunto de todos los planos pasados por el punto M_0. ▲

Ejemplo 9. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(\vec{r}_1)$ y la recta l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$.

△ Escribamos la ecuación de l en forma paramétrica: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$, $\vec{r}^0 = \dfrac{[\vec{a}, \vec{M}]}{|\vec{a}|^2}$. El punto M con el radio vector $\vec{r}$ se encuentra en el plano buscado $\mathcal{P}$ si, y sólo si, los vectores $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_0-\vec{r}_1$, $\vec{a}$ son coplanares, o sea, $(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_0-\vec{r}_1, \vec{a}) = 0$. Al notar que $[\vec{r}_0-\vec{r}_1, \vec{a}] = \vec{M}-[\vec{r}_1, \vec{a}]$, obtenemos la ecuación de $\mathcal{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \vec{M}-[\vec{r}_1, \vec{a}]$, $D = (\vec{r}_1, \vec{N}) = (\vec{r}_1, \vec{M})$. ▲

Ejemplo 10. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(\vec{r}_0)$ y la línea de intersección de los planos $\mathcal{P}_1$: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2$: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$, $M_0 \in \mathcal{P}_1$.

△ La ecuación del plano buscado $\mathcal{P}$ [véase (4.36)] es $\alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$, $\alpha^2+\beta^2 > 0$. Los números α y β satisfacen la condición $\alpha\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$, $\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} \neq 0$. Expresando α de aquí y sustituyéndolo en la ecuación del plano $\mathcal{P}$, obtenemos, después de dividir por el número $-\beta/\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} \neq 0$: $\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} \times \{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} - \{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\}\cdot\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$. ▲

Ejemplo 11. Están dados la recta l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$ y el plano $\mathcal{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$. ¿Bajo qué condición: a) l y $\mathcal{P}$ tienen un solo punto común; b) $l \cap \mathcal{P} = \varnothing$; c) $l \subset \mathcal{P}$?

△ a) Escribamos la ecuación de l en forma paramétrica: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$, donde $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$. La recta l y el plano $\mathcal{P}$ tienen un solo punto común si, y sólo si, la ecuación

$$(\vec{r}_0 + \vec{a}t, \vec{N}) = D \Leftrightarrow t(\vec{a}, \vec{N}) = D - (\vec{r}_0, \vec{N}) \quad (4.39)$$

tiene la solución única t. Esto tiene lugar si, y sólo si, $(\vec{a}, \vec{N}) \neq 0$. En este caso, $t = \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})} = \dfrac{D\vec{a}^2 - (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})}{\vec{a}^2(\vec{a}, \vec{N})}$ y el radio vector $\vec{r}$ del punto común de la recta l y el plano $\mathcal{P}$ se determina por la fórmula

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,\frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})} = \frac{D\vec{a} + \vec{r}_0(\vec{N}, \vec{a}) - \vec{a}(\vec{N}, \vec{r}_0)}{(\vec{a}, \vec{N})} =$$

$$= \frac{D\vec{a} + [\vec{N}, [\vec{r}_0, \vec{a}]]}{(\vec{a}, \vec{N})} = \frac{D\vec{a} + [\vec{N}, \vec{M}]}{(\vec{a}, \vec{N})}. \quad (4.40)$$

b) Si $(\vec{a}, \vec{N}) = 0$, $D \neq (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})/|\vec{a}|^2$, entonces la ecuación (4.39) tiene la forma $t \cdot 0 = D - (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})/|\vec{a}|^2$ y no tiene solución, o sea, l y $\mathcal{P}$ no tienen puntos comunes.

c) Si $(\vec{a}, \vec{N}) = 0$, $D|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})$, entonces la ecuación (4.39) toma la forma $t \cdot 0 = 0$. Su solución es cualquier número t. De este modo, cualquier punto de la recta l se sitúa en el plano $\mathcal{P}$: $l \subset \mathcal{P}$. ▲

Ejemplo 12. Hallar la proyección ortogonal $M_*(\vec{r}_*)$ de un punto $M_1(\vec{r}_1)$ sobre la recta l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$.

△ Según la condición, $M_* \in l$, es decir, $[\vec{r}_*, \vec{a}] = \vec{M}$, y $\overrightarrow{M_*M_1} \perp \vec{a}$, o bien $(\vec{r}_*, \vec{a}) = (\vec{r}_1, \vec{a})$. De esta manera, el problema se reduce a hallar el radio vector $\vec{r}_*$ del punto común de la recta l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$ y del plano $\mathcal{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \vec{a}$, $D = (\vec{r}_1, \vec{a})$. Por la fórmula

(4.40) se tiene

$$\vec{r}_2 = \frac{(\vec{r}_1,\ \vec{a})\,\vec{a} + [\vec{a},\ \vec{M}]}{(\vec{a},\ \vec{a})}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 13. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $\vec{M}_1\,(\vec{r}_1)$ y corta ortogonalmente la recta l: $(\vec{r},\ \vec{N}_i) = D_i$, $i = 1,\ 2$, $[\vec{N}_1\vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

$\triangle$ Sea $M_0\,(\vec{r}_0)$ la base de la perpendicular bajada desde el punto M_1 a la recta l. Entonces, de las condiciones $M_0 \in l$ y $(\overrightarrow{M_1M_0}) \perp l$, o sea, $(\vec{r}_0 - \vec{r}_1,\ \vec{a}) = 0$ donde $\vec{a} = [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]$ es el vector director de l, tenemos

$$(\vec{r}_0,\ \vec{N}_1) = D_1,\ (\vec{r}_0,\ \vec{N}_2) = D_2,\ (\vec{r}_0,\ \vec{a}) = D_3,$$

$$D_3 = (\vec{r}_1,\ \vec{N}_1,\ \vec{N}_2).$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones tipo (4.28). Su solución es [véase (4.29)]:

$$\vec{r}_0 = \frac{[[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2],\ D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2] + (\vec{r}_1,\ \vec{N}_1,\ \vec{N}_2)\,[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]|^2}.$$

La ecuación de la perpendicular $\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\,t$, $t \in R$. $\blacktriangle$

Ejemplo 14. Componer la ecuación del plano $\mathscr{P}$ que pasa por el punto $M_1\,(\vec{r}_1)$ y es perpendicular a la línea l de intersección de los planos $\mathscr{P}_1$: $(\vec{r},\ \vec{N}_1) = D_1$ y $\mathscr{P}_2$: $(\vec{r},\ \vec{N}_2) = D_2$, $[\vec{N}_1,\ \vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

$\triangle$ El vector $\vec{a} = [\vec{N}_1,\ \vec{N}_2]$, vector director de la recta l, es el vector normal del plano buscado, cuya ecuación es, por lo tanto $(\vec{r},\ \vec{a}) = D$. El número D se halla de la condición $M_1 \in \mathscr{P}$: $(\vec{r}_1,\ \vec{a}) = D$. En definitiva, la ecuación de $\mathscr{P}$ es $(\vec{r} - \vec{r}_1,\ \vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = 0$. $\blacktriangle$

Ejemplo 15. Componer la ecuación de la recta que se encuentra en el plano $\mathscr{P}$: $(\vec{r},\ \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ y corta la recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ formando el ángulo recto. Además $(\vec{a}, \vec{N}) \neq 0$, $[\vec{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

△ El radio vector $\vec{r}_*$ de M_*, punto común del plano $\mathscr{P}$ y la recta l, se halla de las relaciones $\vec{r}_* = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $(\vec{r}_0 + \vec{a}t, \vec{N}) = D$, es decir, $\vec{r}_* = \vec{r}_0 + \vec{a}\dfrac{D-(\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})}$. La recta buscada pasa necesariamente por ese punto. Puesto que la recta buscada L se encuentra en el plano $\mathscr{P}$ el vector director $\vec{b}$ de la recta L es ortogonal a $\vec{N}$. Según la condición, tenemos también $\vec{b} \perp \vec{a}$. Por consiguiente, en calidad del vector director de la recta L se puede tomar el vector $\vec{b} = [\vec{a}, \vec{N}]$. De este modo, la ecuación para L es

$$\vec{r} = \left(\vec{r}_0 + \frac{D-(\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})}\vec{a}\right) + [\vec{a}, \vec{N}]\tau, \ \tau \in R. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 16. Por la recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ trazar el plano perpendicular al plano $\mathscr{P}$: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $[\vec{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

△ El punto M_0 $(\vec{r}_0)$ y uno de los vectores directores (vector $\vec{a}$) del plano buscado son conocidos. En calidad del segundo vector director se puede tomar, por ejemplo, $\vec{N}$ puesto que, según la condición, el plano buscado es perpendicular al plano $\mathscr{P}$ y, por tanto, paralelo a su vector normal $\vec{N}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{N}$ no son colineales. El plano buscado es paralelo a ellos. Por eso, en calidad del vector normal del plano buscado se puede tomar $\vec{N}^* = [\vec{a}, \vec{N}]$ y la ecuación de este plano es $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{N}) = 0$. ▲

Ejemplo 17. Hallar la distancia de un punto M_1 $(\vec{r}_1)$ a la recta l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

△ La distancia buscada h es la longitud de la altura del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$

y $\vec{a}$ (fig. 4.21). Por consiguiente,

$$h = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0,\ \vec{a}]|}{|\vec{a}|}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 18. Hallar la distancia entre las rectas cruzadas l: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ y L: $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \tau$.

△ La distancia buscada h es la longitud de la perpendicular común a las rectas l y L, es decir, la distancia

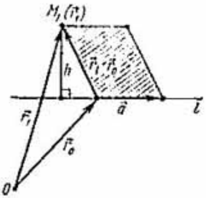


Fig. 4.21

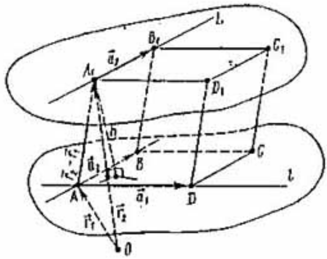


Fig. 4.22

entre los planos paralelos uno de los cuales contiene l y el otro, L, o sea, la longitud de la altura del paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 4.22) construido sobre los vectores $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, es decir, el número

$$h = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1,\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]|}. \quad \blacktriangle$$

Propiedades de la transformación de semejanza p.

1°. La transformación de semejanza p con el coeficiente k es biunívoca. Cuando se realiza la transformación p, la imagen de un espacio (plano) es todo el espacio (plano). La transformación inversa de p existe y es también transformación de semejanza (con el coeficiente $1/k$).

2°. Si A, B, C son puntos situados en una recta con tal que $C \in [A, B]$, entonces sus imágenes $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ se encuentran también en una recta con tal que $p(C) \in [p(A)\, p(B)]$.

3°. Cuando se realiza la transformación de semejanza p, la imagen de una recta (AB) es la recta $(p(A)\, p(B))$, la imagen de un segmento $[AB]$ es el segmento $[p(A)\, p(B)]$, la imagen de un rayo $[AB)$ es el rayo $[p(A)\, p(B))$, la imagen de un plano (ABC) es el plano $(p(A)\, p(B)\, p(C))$.

4°. Cuando se realiza la transformación de semejanza las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas, las imágenes de rayos codirigidos (contrariamente dirigidos) son rayos codirigidos (contrariamente dirigidos), las imágenes de planos paralelos son planos paralelos.

5°. Si O, A, B son tres puntos no situados en una recta, el ángulo $\widehat{AOB}$ es igual al ángulo $p(A)\, \widehat{p(O)}\, p(B)$.

Si los triángulos OAB y $O^*A^*B^*$ son tales que $\widehat{AOB} = \widehat{A^*O^*B^*}$, $\widehat{ABO} = \widehat{A^*B^*O^*}$, existe una transformación de semejanza p tal que $A^* = p(A)$, $B^* = p(B)$, $O^* = p(O)$.

6°. La composición de dos transformaciones de semejanza con los coeficientes k_1 y k_2 es la transformación de semejanza con el coeficiente k_1k_2.

Propiedades de homotecia H_O^k. 1°. La homotecia H_O^k es una transformación de semejanza con el coeficiente $|k|$.

2°. Cuando se realiza la homotecia H_O^k, la imagen de un plano es un plano paralelo al primero, la imagen de una recta (AB) es la recta $(H_O^k(A)\ H_O^k(B))$ paralela a ella, los rayos $[AB)$ y $H_O^k([AB)) = [H_O^k(A)\ H_O^k(B))$ son codirigidos cuando $k > 0$ y son contrariamente dirigidos cuando $k < 0$.

3°. La composición de homotecias $H_O^{k_1}$ y $H_O^{k_2}$ es la homotecia $H_O^{k_1k_2}$.

4°. Cuando $O_1 \neq O_2$, $k_1k_2 \neq 1$, la composición de homotecias $H_{O_1}^{k_1}$ y $H_{O_2}^{k_2}$ es la homotecia $H_O^{k_1k_2}$, cuyo centro se encuentra en la recta (O_1O_2). Los centros de las homotecias $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$ y $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ coinciden cuando, y sólo cuando, $(k_1 - 1)(k_2 - 1) = 0$.

5°. La composición $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$, donde $k_2 = \frac{1}{k_1}$, es la traslación paralela $T_{(1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}}$.

6°. La transformación inversa de una homotecia H_O^k es la homotecia $H_O^{1/k}$.

Propiedades de la simetría central Z_O. 1°. La simetría central Z_O es la homotecia: $Z_O = H_O^{(-1)}$. La transformación inversa de ella coincide con ella misma.

2°. La simetría central es desplazamiento.

3°. La composición $Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ de dos simetrías centrales es la traslación paralela $T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$.

4°. La composición $Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ de tres simetrías centrales $Z_{O_1}, Z_{O_2}, Z_{O_3}$ es la simetría central Z_O, cuyo centro es la imagen del punto O_2 cuando se realiza la simetría central respecto al punto medio del segmento $[O_1O_3]$. Si los puntos O_1, O_2, O_3 no se encuentran en una recta, entonces $O_1O_2O_3O$ es paralelogramo.

Propiedades de la traslación paralela $T_{\overrightarrow{AB}}$.

1º. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, entonces $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}$, o sea, para todo punto $C | T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$. Recíprocamente: si la igualdad $T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$ se cumple, aunque sea para un solo punto C, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

2º. La traslación paralela es desplazamiento.

3º. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, y sólo si, $[AB] = T_{\overrightarrow{CA}}([CD])$.

4º. $[AB) \uparrow\uparrow [A_1B_1)$ si, y sólo si, $[AB) = T_{\overrightarrow{A_1A}} \times ([A_1B_1))$.

5º. La traslación paralela $T_{\overrightarrow{AB}}$ tiene la transformación inversa que es la traslación paralela al segmento dirigido $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

6º. La traslación paralela a un segmento dirigido nulo es una transformación idéntica.

7º. Cuando se realiza la traslación paralela, la imagen de un plano es un plano paralelo a éste, la imagen de una recta es una recta paralela a ella, la imagen de un rayo es un rayo codirigido a éste.

8º. Para cualesquiera segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se cumplen las igualdades $T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}}$,

9º. Para cualesquiera puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es válida la regla del ciclo: $T_{\overrightarrow{A_nA_1}} \circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}} \circ \ldots \circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}} \circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}} = T_{\overrightarrow{A_1A_1}}$.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.

YA. BUGROV, S. NIKOLSKI

Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variables complejas (2ª edición)

Este libro es el último de la serie «Matemáticas superiores». Contiene las siguientes partes: ecuaciones diferenciales ordinarias; integrales múltiples; análisis vectorial; series e integral de Fourier; ecuaciones de la física matemática; teoría de las funciones de variable compleja; cálculo operacional. En cada capítulo, la exposición de los temas se efectúa de tal modo, que se formulan de inmediato los conceptos fundamentales. En lo que respecta a las demostraciones formales de los teoremas, como regla, se realizan al final de los respectivos capítulos o parágrafos. Este libro está dedicado a los estudiantes de los institutos técnicos de enseñanza superior, siendo también de utilidad a los docentes y estudianes de postgrado.

YA. BUGROV, S. NIKOLSKI

Cálculo diferencial e integral

(2ª edición)

Es el segundo libro de la serie «Matemáticas superiores». En el presente volumen se exponen las siguientes partes: introducción al análisis matemático cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables; series. Se estudian el concepto de límite de una sucesión, de función de su límite, de integral definida e indefinida, la aplicación de las mismas. En el primer capítulo se dedican algunos parágrafos a los números reales, pese a que esta cuestión ha sido tratada en los últimos cursos de la escuela de enseñanza media.

En la presente obra se desarrollan todos los temas que integran los respectivos programas de los institutos técnicos de enseñanza superior.

Mir edita:

YA. BUGROV, S. NIKOLSKI

Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica (2ª edición)

Es el primer libro de la serie «Matemáticas superiores», compuesta de tres volúmenes: «Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», «Cálculo diferencial e integral» y «Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja». En el presente volumen se desarrollan las cuestiones fundamentales de la teoría de los determinantes, de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales, del áglebra vectorial. También se examinan las partes más importantes del álgebra lineal: operadores lineales; transformaciones ortogonales; operadores autoconjungados; la forma cuadrática y su reducción a la forma canónica.

Los razonamientos van acompañados de demostraciones exhaustivas. Las formas canónicas de curvas y superficies de segundo orden se desarrollan en forma muy breve, debido a que se supone que las mismas se estudiarán complementariamente en forma de ejercicios como métodos del análisis matemático. La forma cuadrática se estudia como métodos del análisis matemático o del análisis funcional.

En este volumen se exponen todos los temas que conforman el programa respectivo para los institutos de enseñanda técnica superior.