M. POTÁPOV
V. ALEXÁNDROV, P. PASICHENKO

ÁLGEBRA

y análisis de funciones elementales

Algebra y análisis de funciones lineales

М. ПОТАПОВ,
В. АЛЕКСАНДРОВ,
П. ПАСИЧЕНКО

АЛГЕБРА
И АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

M. POTÁPOV

V. ALEXÁNDROV, P. PASICHENKO

ÁLGEBRA

y análisis de funciones elementales

EDITORIAL MIR

MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. P. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ÍNDICE

CAPÍTULO

I

NÚMEROS REALES

§ 1. Números naturales

Serie de números naturales. El concepto de números naturales surgió debido a la necesidad de contar. Los números naturales pueden compararse entre sí y en este caso está claro cuál de los dos números es mayor. Todos los números naturales dispuestos en el orden de crecimiento forman una serie de números naturales: el primer número es el uno; el segundo, el dos; el tercero, el tres, etc. A todo número natural le corresponde su lugar en dicha serie. En lo sucesivo la serie de números naturales se designará con la letra N.

Para señalar que el número m *es mayor* que n se utiliza la notación $m > n$. Para designar que el número m *es menor* que el número n, se usa la notación $m < n$. Dichas notaciones se llaman *desigualdades* de los números naturales. Para mostrar que el número m y el n representan *un mismo número* se emplea la notación $m = n$, llamada *igualdad* de los números naturales.

La adición de los números naturales se puede definir con ayuda de la serie de números naturales de la manera siguiente.

Adicionar dos números naturales m y n significa hallar en la serie de números naturales un número p $(p > m)$ dispuesto en el n-ésimo lugar a partir del número m, empezando la cuenta con el número $m + 1$. El número mencionado p se denomina *suma* de los números m y n; se denota con $m + n$, mientras que los números m y n se llaman *sumandos*. Por ejemplo, $m + 3$ es un número que ocupa, tras el número m, el tercer lugar. Para sumar varios números naturales, es necesario adicionar al principio los dos primeros, luego añadir a la suma obtenida el siguiente número natural, etc.

Multiplicar un número natural m por otro número natural n significa encontrar un número natural q igual: a) a n, si $m = 1$; b) a la suma de m números, cada uno de los cuales es n, siempre que $m > 1$. El número citado q se denomina *producto* de los números m y n; se denota con mn, y los números m y n se llaman *factores*. Por ejemplo, multiplicar el número natural 2 por el número n significa hallar un número natural q igual a la suma de dos números, cada uno de los cuales es el número n. Este número se designa $2n$, es decir, $q = 2n$. Para multiplicar varios números naturales, se debe multiplicar al principio los dos primeros números, luego multiplicar el número natural obtenido por el siguiente número natural, etc.

Demos a conocer las *leyes* principales de adición y multiplicación de los números naturales:

a) $m + n = n + m$ (conmutatividad de la adición);

b) $(l + m) + n = l + (m + n)$ (asociatividad de la adición);

c) $mn = nm$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(lm) n = l (mn)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $(l + m) n = ln + mn$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Si el número m figura en calidad de factor k veces (k es un número natural superior a la unidad), entonces el producto

$$\underbrace{mm \ldots m}_{k \text{ veces}}$$

se denomina *k-ésima potencia del número* m y se designa m^k, es decir, por definición,

$$m^k = \underbrace{mm \ldots m}_{k \text{ veces}}.$$

Además, de acuerdo con la definición,

$$m^1 = m.$$

Son válidas las siguientes propiedades de las potencias:

a) $m^k m^n = m^{k+n}$;

b) $(m^k)^n = m^{kn}$;

c) $m^k l^k = (ml)^k$.

Dichas propiedades se demuestran con ayuda de las leyes principales de adición y multiplicación de los números naturales.

Definamos ahora las operaciones inversas a la adición y multiplicación de los números naturales, a saber, las operaciones de sustracción y división para los números naturales.

Sustraer de un número natural n otro número natural m significa encontrar un número natural p tal, que sea justo

$$m + p = n. \tag{1}$$

No siempre existe tal número natural p que se cumpla la igualdad (1) para cualesquiera números naturales n y m. Si $n > m$, tal número existe y es único. Este se denomina *diferencia* o *resto* entre los números n y m, y se designa $n - m$; el número n se llama *minuendo*, y m, *sustraendo*.

Dividir un número natural n por otro número natural m significa hallar un número natural q tal que se verifique la igualdad

$$mq = n. \tag{2}$$

No siempre existe tal número natural q que se verifique la igualdad (2) para cualesquiera números naturales n y m. Si dicho número existe, entonces m y q se denominan *divisores* del número n y se designan

$$q = n : m; \quad m = n : q.$$

Apoyándose en las leyes principales de adición y multiplicación de los números naturales y en las definiciones de las operaciones de sustracción y división, se pueden demostrar las siguientes afirmaciones o, dicho de otro modo, los teoremas.

Teorema 1. *Si el número m es un divisor de los números n_1 y n_2, entonces m será el divisor de la suma $n_1 + n_2$.*

Demostración. Por cuanto m es el divisor del número n_1, entonces $n_1 = mq_1$. Por analogía, $n_2 = mq_2$. Aplicando la ley de distributividad de la adición respecto a la multiplicación de los números naturales, tenemos que $n_1 + n_2 = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$. Por consiguiente, el número $n_1 + n_2$ se divide por el número m.

Teorema 2. *Si m es un divisor de los números n_1 y n_2, siendo $n_1 > n_2$, entonces el número m será el divisor de la diferencia $n_1 - n_2$.*

La validez de esta afirmación se demuestra de manera análoga.

Indiquemos, además, algunas otras propiedades evidentes de las igualdades de números naturales:

a) si $m = n$, entonces $m + k = n + k$ para cualquier número natural k;

b) si $m = n$, entonces $m - l = n - l$ para cualquier número natural l tal, que sea $m > l$;

c) si $m = n$, entonces $mp = np$ para cualquier número natural p;

d) si $m = n$, entonces $m : q = n : q$ para cualquier número natural q que es el divisor del número m.

Serie ampliada de números naturales. Veamos un número nuevo, a saber, el número cero. Para designarlo se emplea el símbolo 0. El *cero* no es un número natural y se considera un número precedente a todos los números naturales. La serie de números naturales junto con el número cero lleva el nombre de *serie natural ampliada*. La serie natural ampliada se designará con la letra Z_0.

En la serie ampliada de números naturales se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación; con este objeto es suficiente añadir a las definiciones de la adición y multiplicación de los números naturales las definiciones correspondientes de la adición y multiplicación, en las cuales interviene el número cero:

a) $0 + n = n + 0 = n$;

b) $0 + 0 = 0$;

c) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$;

d) $0 \cdot 0 = 0$.

Por definición, la potencia nula de todo número natural m es la unidad, es decir, $m^0 = 1$.

La división por cero y la elevación del cero a potencia nula son operaciones prohibidas.

Para poder operar con los números que forman parte de una serie natural ampliada es necesario saber escribirlos. La escritura de un mismo número natural depende del sistema de numeración.

Todo sistema de numeración se basa en el siguiente principio: cierta cantidad de unidades constituye una nueva unidad del orden superior siguiente. Dicho número recibe el nombre de *base del sistema de numeración*. Si por base del sistema se toma el número dos, el sistema de numeración se denomina *binario*; si como base se ha elegido el número doce, el sistema de numeración será *de base* 12, etc.

En adelante se tratará sólo el sistema *decimal* de numeración. En este sistema se introducen diez signos llamados cifras; para designar los primeros nueve números naturales se introducen los signos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y para el número cero, el signo 0. En este sistema de numeración el número diez se denota por el símbolo 10, y cada número natural p se representa en la forma

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{3}$$

donde n es un número perteneciente a la serie natural ampliada; a_n es uno de los números 1, 2, 3, . . ., 9; cualquiera de los signos a_0, a_1, a_2, . . ., a_{n-1} representa uno de los números 0, 1, 2, 3, . . ., 9. Notemos que si el número n es mayor que el número nueve, entonces él mismo debe ser escrito en la forma (3).

Para escribir el número p se emplea corrientemente otra forma de notación que se basa en el principio del *valor de posición de las cifras*. La esencia de dicho principio consiste en que cada cifra recibe, además de su valor en función de su escritura, el así llamado valor de posición. Por ejemplo, la cifra 5 puede tener los siguientes valores: cinco unidades, si en la representación del número p ocupa el primer lugar a la derecha; cinco decenas, si en la representación para el número p ocupa el segundo lugar a la derecha, etc. En este principio se basa precisamente la escritura habitual de los números naturales. La escritura 2705 significa que el número consta de dos miles, siete centenas, cero decenas y cinco unidades, es decir,

$$2705 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5.$$

Si tomamos el número p representado en la forma (3), su escritura basada en el principio de posición será:

$$p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

(la raya por encima se traza para distinguir este número del producto $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$). En adelante se emplearán dos formas de escritura del número natural p:

a) $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$,

b) $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$,

es decir, se hará uso de la igualdad

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \tag{4}$$

Criterios de divisibilidad. Ya se ha indicado más arriba que no siempre un número natural se divide por otro. Por esta razón representa interés destacar los casos en que la división resulta posible. Los así llamados criterios de divisibilidad ayudan a distinguir los casos aducidos. He aquí algunos de ellos. Observemos previamente que de lo expuesto anteriormente se deduce:

a) que el cero se divide por cualquier número natural,

b) que todo número natural se divide por la unidad.

Teorema 3. *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por dos, es necesario y suficiente que la ultima cifra* a_0 *del número citado se divida entre* 2.

Demostración. Demostremos que si el número a_0 se divide por 2, entonces el número p también se divide por 2. Escribamos el número p en la forma

$$p = \alpha + \beta, \tag{5}$$

donde

$$\alpha = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10,$$

$$\beta = a_0.$$

Cualquier sumando en el segundo miembro de la igualdad (5) se divide entre 2, por consiguiente, toda la suma se divide por 2, es decir, p se divide por 2.

Demostremos la afirmación inversa. Si el número p se divide por 2, entonces el número a_0 también se divide por 2.

De la igualdad (5) se desprende, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$a_0 = p - (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10.$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 2, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 2, es decir, el número a_0 se divide por 2. El teorema queda demostrado.

Los números naturales que se dividen por dos y el número cero llevan el nombre de *números pares*. Todos los demás números naturales son *impares*. El teorema 3 puede enunciarse de otra manera así: para que un número natural $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ sea par, es necesario y suficiente que la última cifra a_0 de este número sea un número par.

Analicemos los rasgos característicos de la demostración del teorema 3. En el propio teorema fueron enunciadas y, a continuación, demostradas dos afirmaciones: a) de la divisibilidad del número a_0 por 2 proviene la divisibilidad por 2 del número p (*la condición suficiente* de divisibilidad del número p por 2); b) de la divisibilidad del número p por 2 se deduce la divisibilidad por 2 del número a_0 (*la condición necesaria* de divisibilidad del número p por 2). Si designamos con la letra A la propiedad de divisibilidad del número a_0 por 2, y con la letra B, la misma propiedad del número p, entonces la primera afirmación puede enunciarse brevemente así: de A se deduce B ($A \Rightarrow B$), y la segunda afirmación enseña que de B se deduce

A ($A \Leftarrow B$). Con ayuda de los símbolos introducidos el teorema puede ser escrito así: $A \Leftrightarrow B$.

La notación $A \Leftrightarrow B$ quiere decir también que la propiedad A, (más sencilla y fácilmente verificable) es la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la propiedad más compleja B.

Como la propiedad A es la condición suficiente para que se cumpla la propiedad B ($A \Rightarrow B$), en la práctica, habiéndose convencido de que la última cifra es par, se puede estar seguro de que todo el número también se divide por 2. Como la propiedad A es la condición necesaria para la propiedad B ($A \Leftarrow B$), entonces, al establecer que el número a_0 no se divide por 2, podemos afirmar que el número p tampoco se divide por 2, es decir, el teorema 3 puede ser formulado así: si la última cifra del número p se divide por 2, entonces el número p se divide entre 2; si no se divide por 2, el número p tampoco se divide por 2.

Observemos que si cierta propiedad C es la condición suficiente para la propiedad D, esto no significa ni mucho menos que no hay números que posean la propiedad D. pero no posean la propiedad C. Por ejemplo, la condición suficiente de divisibilidad del número p por 4 es la condición $a_1 = a_0 = 0$. La validez de la última afirmación se deduce de la representación del número p en la forma

$$p = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2$$

y, además, de la divisibilidad del número 100 por 4. Al mismo tiempo, por ejemplo, el número 252 se divide por 4, aunque sus dos últimas cifras no son ceros.

Si queda demostrado que cierta propiedad E es la condición necesaria para que se cumpla la propiedad D, esto no significa aún que no hay números que posean la propiedad E sin poseer la propiedad D. Por ejemplo, la condición necesaria de divisibilidad del número p por 4 es la paridad del número p. La validez de la última afirmación es evidente, puesto que si el número p se divide por 4, con mayor razón se divide por 2. Al mismo tiempo, por ejemplo, el número 1222 no se divide por 4, aunque es par.

Si, en cambio, queda demostrado que la propiedad S es la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la propiedad Q y si la propiedad S se comprueba con facilidad para cualquier número p, entonces, al hallar todos los números que poseen la propiedad S, se puede decir que están determinados todos los números que poseen la propiedad *más compleja* Q.

En lo sucesivo, para abreviar, los símbolos $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ se utilizarán con frecuencia en el siguiente sentido: la notación $M \Rightarrow L$ significará que de la afirmación M que se encuentra a la izquierda del símbolo $\Rightarrow$ se desprende la afirmación L que se encuentra a la derecha. La notación $Q \Leftarrow S$ significará que de la afirmación S que está a la derecha del símbolo $\Leftarrow$ sigue la afirmación Q que está a la izquierda. La notación $E \Leftrightarrow F$ significará que las afirmaciones que se encuentran a la izquierda y a la derecha del símbolo $\Leftrightarrow$ son equivalentes, es decir, de la afirmación F que está a la derecha del símbolo $\Leftrightarrow$, se deduce la afirmación E que está a la izquierda y de la afirmación E que está a la izquierda del símbolo $\Leftrightarrow$ se deduce la afirmación F que se dispone a la derecha.

Enunciemos y demostremos, además, los criterios de divisibilidad de los números naturales por 4 y por 9.

Teorema 4. *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por* 4, *es necesario y suficiente que el número* $\overline{a_1 a_0}$ *se divida por* 4.

Demostración. Suficiencia. Supongamos que el número $\overline{a_1 a_0}$ se divide por 4. Escribamos el número p en la forma

$$p = \varphi + \psi, \tag{6}$$

donde

$$\varphi = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2,$$

$$\psi = \overline{a_1 a_0}.$$

Cada sumando en el segundo miembro de la igualdad (6) se divide por 4, por consiguiente, toda la suma se divide por 4, es decir, el número p se divide por 4.

Necesidad. Sea p un número divisible por 4. De la igualdad (6) se desprende, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$\overline{a_1 a_0} = p - (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots - a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2.$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 4, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 4, es decir, el número $\overline{a_1 a_0}$ se divide por 4. El teorema está demostrado.

Por ejemplo, el número 1232 se divide por 4, puesto que el número 32 es múltiplo de 4, mientras que el número 15126 no se divide por 4, puesto que el número 26 no es múltiplo de 4.

Teorema 5. *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por* 9, *es necesario y suficiente que la suma de todas las cifras del número dado se divida por* 9.

Demostración. Suficiencia. Supongamos que la suma de las cifras del número dado se divide por 9. Escribamos el número p en la forma

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Es fácil ver que es válida la igualdad

$$10^k = \underbrace{\overline{99 \ldots 999}}_{k \text{ veces}} + 1.$$

Haciendo uso de esta igualdad, escribamos p en la forma

$$p = \gamma + \lambda, \tag{7}$$

donde

$$\gamma=(a_n\cdot\underbrace{99\ \dots\ 9}_{n\text{ veces}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{99\ \dots\ 9}_{(n-1)\text{ veces}}+\dots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9).$$

$$\lambda=a_n+a_{n-1}+\dots+a_0.$$

Cada sumando en el segundo miembro de la igualdad (7) se divide por 9, por consiguiente, toda la suma también se divide por 9, es decir, el número 9 es divisor de p.

Necesidad. Supongamos que el número p se divide por 9. De la igualdad (7) se deduce, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$(a_0+a_1+\dots+a_n)=$$
$$=p-(a_n\cdot\underbrace{99\ \dots\ 9}_{n\text{ veces}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{99\ \dots\ 9}_{(n-1)\text{ veces}}+\dots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9).$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 9, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 9, es decir, el número $(a_0+a_1+\dots+a_n)$ se divide por 9. El teorema está demostrado.

Por ejemplo, el número 1215 se divide por 9, puesto que $1+2+$ $+1+5=9$, mientras que el número 4232 no se divide por 9, dado que $4+2+3+2=11$, y no se divide por 9.

Números primos y compuestos. El conjunto de números naturales se compone de la unidad y de números primos y compuestos. Un número natural superior a la unidad se denomina *primo*, si es divisible solamente por sí mismo y por la unidad. Un número natural superior a la unidad se llama *compuesto*, si tiene por lo menos un divisor distinto de la unidad y de sí mismo.

Aprovechando esta definición, se puede mostrar que cualquier número compuesto tiene por lo menos un divisor, el cual es un número primo.

Teorema 6. *Existe una infinidad de números primos.*

Demostración. Supongamos que existe solamente un número finito de números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$. En este caso cualquier número natural superior a la unidad y que no coincide con ninguno de estos números será compuesto. El número $p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\ \dots$ $\dots\ p_n+1$ no coincide ni con cualquiera de los números p_1, p_2, $p_3, \dots, p_n$, puesto que es mayor que cada uno de ellos. De acuerdo con nuestra suposición, además de $p_1, p_2, \dots, p_n$ no existen otros números primos. Por consiguiente, el número p es compuesto y por esta razón es divisible al menos por uno de los números $p_1, p_2, \dots$ $\dots, p_n$.

Por otro lado, el número p no se divide por ninguno de los números $p_1, p_2, \dots, p_n$, puesto que el producto $p_1\cdot p_2\ \dots\cdot p_n$ se divide por cada uno de estos números, mientras que el número 1 no se divide por ninguno de ellos.

Así pues, al suponer que existe sólo un número finito de números primos, llegamos a una contradicción. Por consiguiente, el conjunto de números primos es infinito.

El teorema 6 está demostrado por reducción al absurdo. Este método consiste en lo siguiente: se construye una negación de la afirmación enunciada en el teorema. Luego, a base de la negación construida, llegamos a una deducción que es o bien errónea o bien contradice la negación construida. De este modo, de las dos situaciones lógicamente posibles (o bien es cierta la afirmación dada o bien se confirma la negación de ésta) queda sólo una, a saber, es cierta la afirmación dada.

Todo número compuesto p puede ser escrito en forma de un producto de números primos: así por ejemplo, $221 = 13 \cdot 17$. En este caso suele decirse que el número p está descompuesto en factores primos.

Cuando un número se descompone en factores primos, algunos de estos últimos pueden encontrarse en la descomposición varias veces. Tal factor primo se escribe, por costumbre, elevado a una potencia que muestra cuántas veces el interviene como factor, por ejemplo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Cualquier número natural puede ser escrito en la forma

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{8}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son diferentes divisores primos del número p, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ señalan cuántas veces dichos divisores se repiten en la descomposición del número p. La descomposición (8) de un número natural p en factores primos es única, es decir, no existen otros números primos que sean divisores del número p, y las potencias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ no pueden sustituirse por otras potencias. Así pues, resulta válido el siguiente teorema que se acepta aquí sin demostración.

Teorema 7 (teorema fundamental de la Aritmética). *Para todo número natural $p > 1$ existe la única descomposición de éste en factores primos.*

Si los números naturales p_1 y p_2 son divisibles por un mismo número natural p, este último se denomina *divisor común* de los números p_1 y p_2. El número natural máximo por el que se dividen p_1 y p_2 lleva el nombre de *máximo común divisor* de dichos números (MCD). Por ejemplo, el máximo común divisor de los números $p_1 = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ y $p_2 = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ es igual a $2 \cdot 3 = 6$.

Si el MCD de dos números es igual a la unidad, se llaman *recíprocamente primos*. Son recíprocamente primos, por ejemplo, los números $33 = 3 \cdot 11$ y $35 = 5 \cdot 7$.

Teorema 8. *Si los números naturales p_1 y p_2 son recíprocamente primos y el número natural p es divisible tanto por p_1 como por p_2, entonces p se divide por el producto p_1p_2.*

Omitiremos aquí la demostración de este teorema.

Observemos que si los números p_1 y p_2 no son recíprocamente primos, la afirmación del teorema no es siempre cierta. Por ejemplo, el número natural 180 se divide por 4 y por 6, no obstante, no es divisor de su producto 24.

Se llama *mínimo común múltiplo* (MCM) de dos números naturales p_1 y p_2 un número natural mínimo que es divisible por p_1 y por p_2. Por ejemplo, el MCM de los números 132 y 90 es el número $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \times \times 11 = 1980$.

División entera (inexacta). Si, como resultado de la división de un número natural p por otro número natural m, se obtiene el número natural q' tal que $p = mq$, se dice que p se divide por m. Como se deduce de lo expuesto más arriba, el resultado de la división no siempre da tal número q. Sin embargo, es siempre realizable la división entera (inexacta).

Dividir enteramente un número natural p por otro número natural m significa encontrar tales dos números q y r, pertenecientes a la serie natural ampliada, que se verifique la igualdad $p = mq + r$, con la particularidad de que r satisfaga la condición $0 \leqslant r < m$. El número q se denomina *cociente* y el número r, *resto* de la división. Si $r = 0$, se dice que el número natural p se divide por el número natural m exactamente.

Teorema 9. *Sean p y m dos números naturales cualesquiera. En este caso existe el único par de números q y r, pertenecientes a la serie natural ampliada, que satisface las condiciones: $p = mq + r$, y $0 \leqslant \leqslant r < m$.*

Demostración. Si $p < m$, entonces el par de números $q = 0$, $r = p$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p = m$, entonces el par de números $q = 1$, $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p > m$ y p se divide por m, entonces existe un número natural q_1 tal que $p = mq_1$, en este caso el par de números $q = q_1$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p > m$ y p no es divisible por m, entonces el par de números $q_1 = 1$ y $r_1 = p - m$ satisfará las condiciones

$$p = m \cdot 1 + r_1, \quad r_1 > 0.$$

Por cuanto p no se divide por m, entonces $r_1 \neq m$. Por lo tanto, bien $r_1 < m$, bien $r_1 > m$. Si $r_1 < m$, el par de números $q = 1$ y $r = r_1$ satisface las condiciones del teorema.

Si $r_1 > m$, el número $r_2 = r_1 - m$ es tal que $r_1 = m + r_2$ y $0 < r_2 < r_1$, razón por la cual resulta válida la igualdad

$$p = m \cdot 2 + r_2.$$

Por cuanto p no se divide por m, entonces $r_2 \neq m$. Quiere decir, o bien $r_2 < m$, o bien $r_2 > m$. Si $r_2 < m$, el par de números $q = 2$ y $r = r_2$ satisface las condiciones del teorema.

Si, en cambio, $r_2 > m$, repetimos este procedimiento hasta que resulte en algún k-ésimo paso que

$$p = mk + r_k, \quad 0 < r_k < m.$$

Esto precisamente significa que el par de números $q = k$ y $r = r_k$ satisface las condiciones del teorema. La existencia del k-ésimo paso mencionado se desprende del siguiente axioma para los números naturales: *para cualesquiera números naturales p y m tales que $p > m$, se encontrará un número natural l tal, que $p < ml$.*

Así, pues, hemos demostrado la existencia de un par de números q y r que satisfacen las condiciones del teorema.

Ahora demostremos la unicidad de tal par de números. Supongamos que existen dos pares de números, q, r y q_0, r_0, que satisfacen las condiciones del teorema, es decir, tales que

$$p = mq + r \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r < m.$$

$$p = mq_0 + r_0 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r_0 < m.$$

Por consiguiente, $mq + r = mq_0 + r_0$.

Admitamos, para concretar, que $r_0 > r$, entonces $0 < r_0 - r < m$, y $q - q_0 > 0$, mientras que $m(q - q_0) = r_0 - r$. Entonces, en el segundo miembro de la última igualdad figura un número natural inferior a m, mientras que en el primer miembro, un número superior a m o igual a éste y, por consiguiente, la igualdad $m(q - q_0) = r_0 - r$ no es cierta. Análogamente, analizando el caso en que $r_0 < r$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $r = r_0$. Entonces, de la igualdad $m(q - q_0) = r_0 - r = 0$ se desprende que $q = q_0$, es decir, el par de números q y r, que satisface las condiciones del teorema, es único. El teorema queda demostrado.

He aquí un ejemplo de aplicación del teorema 9.

Demostremos que si p es un número primo mayor que tres, uno de los números, sea $(p - 1)$ ó $(p + 1)$, se divide por tres. Efectivamente, el número p no se divide por tres exactamente (sin resto), pues es primo y mayor que tres. Por consiguiente, el resto, al dividir por 3, puede ser 1 ó 2. Si el resto es igual a la unidad, es decir, si $p = 3q_1 + 1$, está claro que el número $p - 1$ se divide por 3. Si el resto es igual a dos, es decir, si $p = 3q_2 + 2$, está claro que el número $p + 1$ se divide por 3.

El teorema demostrado presta la posibilidad de hallar el máximo común divisor (MCD) de dos números. Tomemos dos números, p y m, pertenecientes a una serie natural ampliada y supongamos, para concretar, que $p > m$. Si $m = 0$, entonces el MCD $(p; 0) = p$. Si $m \neq 0$, entonces $p = mq + r$, con la particularidad de que o bien p se divide por m exactamente (es decir, $r = 0$), o bien p se divide por m enteramente con resto r, donde $0 < r < m$. En el primer caso el MCD $(p; m) = m$, pero el MCD $(m; 0) = m$, es decir es válida la igualdad MCD $(p; m) =$ MCD $(m; r)$. Resulta que la igualdad análoga

$$\text{MCD}\ (p;\ m) = \text{MCD}\ (m;\ r) \tag{9}$$

tiene lugar también en el caso en que $0 < r < m$.

En efecto, sea l el divisor común de los números p y m, es decir, supongamos que $p = lk$ y $m = ln$, donde k, l y n son números naturales. Por cuanto $p = mq + r$ y $r > 0$, entonces $lk - lnq > 0$, es decir, $l(k - nq) > 0$. Pero, en este caso, $k - nq > 0$ y $r = ls$, donde $s = k - nq$ es un número natural, es decir, l será divisor del número r.

Quiere decir, cualquier divisor común de los números p y m lo es también para los números m y r. Razonando análogamente, obtendremos la afirmación inversa: cualquier divisor común de los números m y r lo es para los números p y m. De aquí se deduce que coinciden también los máximos comunes divisores de los pares citados, es decir, que es válida la igualdad (9). Puesto que $m < p$ y $r < m$, el problema de hallar el MCD $(m; r)$ es más simple que el de hallar el MCD $(p; m)$.

Veamos el siguiente ejemplo. Hállese el MCD (1428; 420).

Como $1428 = 420 \cdot 3 + 168$, entonces MCD (1428; 420) = MCD (420; 168).

Como $420 = 168 \cdot 2 + 84$, entonces MCD (420; 168) = MCD (168; 84).

Como $168 = 84 \cdot 2$, entonces MCD (168; 84) = MCD (84; 0) = 84, es decir, MCD (1428; 420) = 84.

De este modo, el método de determinación del MCD $(p; m)$ consiste en la aplicación de la igualdad (9).

Una vez determinado el MCD $(p; m)$, resulta posible hallar también el mínimo común múltiplo de estos números: MCM $(p; m)$. Con este fin se debe aprovechar el teorema 10, cuya demostración se omite en esta obra.

Teorema 10. MCD $(p; m) \cdot$ MCM $(p; m) = p \cdot m$.

Por ejemplo, determinemos el MCM (1428; 420). Del ejemplo anterior se deduce que el MCD (1428; 420) = 84. Por consiguiente,

$$\text{el MCM}\,(1428;\ 420) = \frac{1428 \cdot 420}{84} = 7140.$$

§ 2. Fracciones

Más arriba se ha señalado que la división no es siempre realizable dentro del conjunto de números naturales. Por ejemplo, en el conjunto de números naturales no se puede dividir 5 por 4. Para que la división sea siempre realizable, hay que considerar números nuevos, a saber, las partes de los números naturales o fracciones.

Fracciones ordinarias. Un número igual a la k-ésima parte del número uno (k es un número natural mayor que la unidad) se designa $\frac{1}{k}$. Si la parte aducida se toma m veces (m es un número natural), entonces la designación del nuevo número obtenido será $\frac{m}{k}$. Un número que se determina según esta regla con ayuda de dos números naturales p y q ($q > 1$) y que se anota en forma de $\frac{p}{q}$, se llama *fracción* o *cociente* de los números naturales p y q, y en este caso p se denomina *numerador* de esta fracción y el número q, *denominador*.

Todo número natural puede ser considerado como una *fracción cuyo denominador es la unidad*, es decir, cualquier número natural n puede escribirse en forma de una fracción $\frac{n}{1}$. Por eso, en lo sucesivo se suprime la restricción $q > 1$, que se impone sobre el denominador de una fracción, y se dice que el cociente de dos números naturales cualesquiera p y q es una fracción $\frac{p}{q}$, y en este caso el conjunto de todas las fracciones contiene en sí el conjunto de todos los números naturales.

Dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{k}$ se consideran *iguales*, si el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda es igual al producto del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera, es decir, $\frac{p}{q} = \frac{m}{k}$, si $pk = qm$.

Por analogía, $\frac{p}{q} > \frac{m}{k}$, si $pk > mq$; $\frac{p}{q} < \frac{m}{k}$, si $pk < mq$.

Se denomina *suma* de dos fracciones una fracción cuyo numerador es igual a la suma de los productos del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera, mientras que el denominador es igual al producto de los denominadores de dichas fracciones, es decir,

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{k} = \frac{pk + qm}{qk}.$$

Se llama *producto* de dos fracciones una fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores de estas fracciones y el denominador, al producto de los denominadores, es decir,

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{k} = \frac{pm}{qk}.$$

Son válidas las siguientes *leyes* de adición y multiplicación de las fracciones:

a) $\frac{p}{q} + \frac{m}{k} = \frac{m}{k} + \frac{p}{q}$ (conmutatividad de la adición);

b) $\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{k}\right) + \frac{l}{n} = \frac{p}{q} + \left(\frac{m}{k} + \frac{l}{n}\right)$ (asociatividad de la adición);

c) $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{k} = \frac{m}{k} \cdot \frac{p}{q}$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{k}\right) \cdot \frac{l}{n} = \frac{p}{q}\left(\frac{m}{k} \cdot \frac{l}{n}\right)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{l}{n}+\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Dividir una fracción $\frac{p}{q}$ por otra fracción $\frac{m}{n}$ significa hallar tal fracción $\frac{l}{k}$ que se verifique

$$\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

A diferencia de los números naturales, la división para las fracciones es siempre realizable. Aplicando la definición de igualdad de dos fracciones, es fácil mostrar que

$$\frac{l}{k}=\frac{pn}{qm}.$$

Sustraer de una fracción $\frac{p}{q}$ otra fracción $\frac{m}{n}$ significa hallar tal fracción $\frac{r}{s}$ que se cumpla la igualdad

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{p}{q}.$$

Al igual que en el caso de los números naturales, la sustracción de las fracciones no es siempre realizable. Si $\frac{p}{q}<\frac{m}{n}$, o bien $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$, no existe fracción que, siendo adicionada a la fracción $\frac{m}{n}$, de la fracción $\frac{p}{q}$. Si, en cambio, $\frac{p}{q}>\frac{m}{n}$, entonces la sustracción es realizable y se ve con facilidad que en este caso

$$\frac{r}{s}=\frac{pn-mq}{nq}.$$

De la definición de igualdad de dos fracciones se deduce la *propiedad fundamental de las fracciones: si el numerador y el denominador de una fracción dada se multiplican o se dividen por un mismo número natural k, se obtendrá una fracción igual a la dada*:

$$\frac{p}{q}=\frac{pk}{qk}.$$

La fracción $\frac{p}{q}$ se denomina *irreducible*, si los números p y q son recíprocamente primos.

Teorema 1. *Si $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible, la fracción $\frac{m}{n}$ será igual a ella cuando, y sólo cuando, $m=pk$ y $n=qk$, donde k es un número natural.*

Demostración. Suficiencia. Sea $m=pk$ y $n=qk$. Entonces, las fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ son iguales en virtud de la propiedad fundamental de las fracciones.

Necesidad. Supongamos que $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. De acuerdo con la definición de igualdad de fracciones, $pn = mq$. El primer miembro de esta igualdad se divide por el número p, y, por tanto, de acuerdo con el teorema fundamental de la Aritmética (véase el § 1, teorema 7), se divide por p también el segundo miembro. Por cuanto los números p y q son recíprocamente primos y el producto mq se divide por p, entonces m también se divide por p (es decir, existe un número natural k tal, que $m = pk$). Al sustituir el valor de m en la igualdad $pn = mq$, obtenemos: $np = pkq$, de donde $n = qk$. El teorema está demostrado.

Fracciones decimales finitas. Examinemos aquellas fracciones $\frac{p}{q}$, cuyo denominador $q = 10^k$, donde k es un número natural. Para cada fracción de este tipo se ha adoptado una forma especial de anotación, a saber: se escribe el numerador de la fracción y, al contar, por el lado derecho, k cifras, se separan éstas con una coma; si en el numerador hay menos cifras que k, por ejemplo, n cifras ($n < k$), entonces se escribe el numerador y delante de la primera cifra de éste se ponen $k - n$ ceros, luego se pone la coma y delante de ésta se pone un cero más; en cambio, si en el numerador hay k cifras, entonces se escribe el numerador, delante de la primera cifra de éste se marca una coma y se pone un cero delante de la coma.

Así, por ejemplo, las fracciones $\frac{3721}{100}$, $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{131}{1000}$ pueden ser escritas así: 37,21; 0,0021; 0,131.

Una fracción escrita de esta forma se llama *fracción decimal finita.*

Quiere decir, las fracciones 37,21; 0,0021; 0,131 pueden servir de ejemplo de fracciones decimales finitas. En general, cada fracción decimal finita se designará, en adelante, del modo siguiente:

$$a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_k, \tag{1}$$

donde k es un número natural, a_0 es un número perteneciente a la serie natural ampliada, cualquiera de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La fracción decimal finita se denomina con frecuencia simplemente fracción decimal, omitiendo la palabra «finita».

Toda fracción decimal finita se transforma fácilmente en una ordinaria. Con este fin se debe escribir en el numerador un número entero que se obtiene, si se elimina la coma de la fracción decimal, y se escribe en el denominador el número 10 a una potencia que sea igual a la cantidad de cifras que se tienen en la fracción decimal tras la coma, después de lo cual la fracción puede ser simplificada por un factor común, si existe, por ejemplo, $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

Escribir una fracción ordinaria en forma de fracción decimal finita significa hallar una fracción decimal finita que sea igual a la dada. Surge naturalmente la pregunta: ¿se puede escribir en forma de fracción decimal finita cualquier fracción ordinaria? Resulta que este caso es mucho más complicado en comparación con la transformación de una fracción decimal finita en otra ordinaria.

Teorema 2. *Toda fracción* $\frac{p}{q}$, *en la que el número natural* q *no tiene divisores primos distintos de* 2 *y* 5, *puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita.*

Demostración. Sea dada la fracción $\frac{p}{q}$, donde $q = 2^m \cdot 5^n$. De acuerdo con la propiedad fundamental de una fracción, cualquier fracción ordinaria no cambia, si su numerador y denominador se multiplican por un mismo número. Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción $\frac{p}{q}$ por $2^n 5^m$, obtendremos

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^n \cdot 5^m} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^{n+m} \cdot 5^{n+m}} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{10^{n+m}}.$$

Ya que el producto $2^n \cdot 5^m p$ es un número natural, entonces, designándolo con l, escribamos la fracción en la forma $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^{n+m}}$ de donde se ve que la fracción $\frac{p}{q}$ puede ser escrita como una fracción decima finita. El teorema queda demostrado.

Teorema 3. *Si la fracción irreducible dada* $\frac{q}{p}$ *puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita, su denominador no contiene factores primos distintos de* 2 *y* 5.

Demostración. Si $q = 1$, el teorema es evidente. Examinemos el caso en que $q \neq 1$. La fracción $\frac{p}{q}$ está representada, por condición, en forma de una fracción decimal finita, por lo cual es válida la igualdad $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^k}$, donde l y k son números naturales. Puesto que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible, del teorema 1 se deduce que $l = pm$ y $10^k = qm$. El número 10^k contiene solamente los factores primos 2 y 5. Por consiguiente, el número qm tampoco tiene otros factores primos, salvo 2 y 5, lo que se desprende de la unicidad de la descomposición de un número en factores primos. Por consiguiente, el número q no contiene otros factores primos, a excepción de 2 y 5. El teorema queda demostrado.

Teorema 4. *Para que una fracción irreducible* $\frac{p}{q}$ *pueda escribirse en forma de una fracción decimal finita, es necesario y suficiente que su denominador no contenga factores primos, a excepción de* 2 *y* 5.

La validez del teorema 4 se desprende de los teoremas 2 y 3.

Veamos ahora una fracción $\frac{p}{q}$ en la que p y q son números recíprocamente primos y q contiene factores primos distintos de 2 y 5. Según se deduce del teorema 4, esta fracción no puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita. No obstante, las fracciones de este tipo pueden ser escritas con ayuda de las así llamadas fracciones decimales periódicas infinitas.

Fracciones decimales periódicas infinitas. Más arriba hemos atribuido el nombre de fracción decimal finita a una fracción escrita en la forma (1), donde a la coma le sigue un número finito de cifras. Será natural llamar *fracción decimal periódica infinita* aquella en la cual después de la coma viene una infinidad de cifras, con la particularidad de que una cifra o un conjunto ordenado de cifras se repiten a partir de cierto lugar tras la coma. Esto puede expresarse con mayor exactitud así: se denomina fracción decimal periódica infinita una fracción que puede ser escrita en la forma

$$a_0,\ a_1a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{2}$$

donde

1. a_0 es un número perteneciente a la serie natural ampliada;
2. en la anotación (2), para cualquier número natural m, en el m-ésimo lugar tras la coma figura uno de los números 0, 1, 2, . . ., 9, con la particularidad de que o bien a_0 es distinto de cero, o bien, si a_0 es igual a cero, existe al menos un número natural q tal, que en el q-ésimo lugar tras la coma figure uno de los números 1, 2, . . ., 9;
3. existen tales números naturales l y p que para cualquier número natural $n \geqslant l$ es válida la igualdad $a_{n+p} = a_n$, y en este caso el conjunto ordenado de cifras $(a_la_{l+1} \ldots a_{l+p-1})$ se llama *período de la fracción decimal periódica infinita* (2).

Por regla general, al escribir una fracción decimal periódica infinita, los puntos suspensivos se ponen después del período que se repitió varias veces, es decir, cuando se hace claro cuál número es el período de esta fracción.

Por ejemplo, es obvio que la fracción

$$4{,}27131313 \ldots \tag{3}$$

es una fracción decimal periódica infinita de período (13).

En lugar de escribir el período varias veces y poner luego puntos suspensivos, se ha aceptado escribir el período una sola vez encerrándolo entre paréntesis:

$$4{,}27131313 \ldots = 4{,}27\,(13).$$
$$0{,}454545 \ldots = 0{,}(45).$$

Es vigente el siguiente teorema cuya demostración aquí se omite.

Teorema 5. *Toda fracción* $\frac{p}{q}$, *donde p y q son recíprocamente primos y q contiene al menos un solo factor primo distinto de 2 y 5, puede ser escrita del modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita.*

Reuniendo los teoremas 4 y 5, obtenemos que cualquier fracción ordinaria puede ser escrita en forma de fracción decimal finita o de fracción decimal periódica infinita. Expongamos sin demostración la regla que se usa para convertir una fracción decimal periódica infinita en una fracción ordinaria (la regla se demostrará en el capítulo IX).

Con el fin de convertir una fracción decimal periódica infinita en una fracción ordinaria, se debe sustraer del número que precede al segundo período otro número, que precede al primer período, y representar dicha diferencia como el numerador, poniendo en el denominador la cifra 9 tantas veces, cuantas cifras hay en el período, y escribir después de los nueves tantos ceros, cuantas cifras se encuentran entre la coma y el primer período. Por ejemplo:

$$0{,}1172\,(0)=\frac{11\,720-1172}{90\,000}=\frac{10\,548}{90\,000}=\frac{1172\cdot 9}{9\cdot 10\,000}=\frac{293\cdot 4}{4\cdot 2500}=\frac{293}{2500}\,;$$

$$0{,}(45)=\frac{45-0}{99}=\frac{5\cdot 9}{9\cdot 11}=\frac{5}{11}\,;$$

$$4{,}27\,(13)=\frac{42\,713-427}{9900}=\frac{42\,286}{9900}=\frac{2\cdot 21\,143}{2\cdot 4950}=\frac{21\,143}{4950}$$

Haciendo uso de esta regla, podemos demostrar que cualquier fracción decimal finita se representa en forma de una fracción decimal periódica infinita y, además, por dos procedimientos.

Por ejemplo,

$$0{,}172=0{,}172\,(0)=\frac{1720-172}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172;$$

$$0{,}172=0{,}171\,(9)=\frac{1719-171}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172.$$

Para que no haya dos representaciones diferentes de una misma fracción decimal finita, se ha convenido en no tener en el período el número 9. Entonces, cada fracción decimal finita puede ser escrita de modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita de período 0, y, viceversa, cada fracción de esta índole es una fracción decimal finita. Así pues, tiene lugar el

Teorema 6. *Cualquier fracción ordinaria* $\frac{p}{q}$ *puede ser representada de modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita y, viceversa, toda fracción decimal periódica infinita puede ser representada de modo único en forma de una fracción ordinaria* $\frac{p}{q}$.

De este modo, se puede constatar que cualquier fracción decimal periódica infinita es otra forma de anotación de cierta fracción ordinaria bien determinada.

§ 3. Números enteros

Ya se ha señalado anteriormente que la sustracción no es siempre realizable dentro del conjunto de números naturales. Por ejemplo, en el conjunto de números naturales no se puede restar 5 del número 3. Por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales.

Introduzcamos en el análisis nuevos números, a saber, números naturales de signo menos, es decir, los números del tipo $(-m)$, donde m es un número natural, y los llamaremos números enteros *negativos*. A veces se llama número entero negativo $(-m)$ el número *opuesto* del número natural m.

Diremos que dos números enteros negativos $(-m)$ y $(-n)$ son iguales, si son iguales los números m y n. Examinemos ahora un conjunto de números, que incluye todos los números naturales, el cero y todos los números negativos. Convengamos en considerar que dos números de dicho conjunto son iguales, si ambos son números naturales iguales, si ambos son números enteros negativos iguales, o si cada uno de ellos es cero. Definamos ahora las operaciones de adición y multiplicación para los números de este conjunto. Si embos números que han de ser adicionados o multiplicados pertenecen a una serie natural ampliada, entonces, las operaciones de adición y multiplicación para dichos dos números se determinan igual que en el § 1. Si, en cambio, uno de los números o ambos números, que deben sumarse o multiplicarse, son enteros negativos, las operaciones de adición y multiplicación para estos dos números se realizan del modo siguiente:

a) $(-m)+(-n)=-(m+n)$;

b) $(-m)+0=0+(-m)=-m$;

c) $(-m)+n=\begin{cases}-(m-n), \text{ siempre que } m>n;\\ n-m, \text{ cuando } m<n;\\ 0, \text{ si } m=n;\end{cases}$

d) $(-m)\,n=m\,(-n)=-(mn)$;

e) $(-m)\,(-n)=mn$;

f) $(-m)\cdot 0=0\cdot(-m)=0$.

Un conjunto de números que incluye todos los números naturales, el cero y todos los números enteros negativos con las definiciones de igualdad y de operaciones de adición y multiplicación, que acabamos de introducir, se denomina *conjunto de números enteros* y se denota con la letra Z, mientras que los números mencionados llevan el nombre de *números enteros*. Los números naturales se denominan a veces números positivos enteros.

Las leyes principales de adición y multiplicación de los números enteros son análogas a aquellas que se usan para adicionar y multiplicar los números naturales y por esta razón no se aducen aquí.

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros se introducen operaciones inversas, las de sustracción y división (a excepción de la división por cero). La operación de sustracción es en este caso es siempre realizable, y la operación de división, no siempre. Sin embargo, al igual que para los números naturales, los números enteros siempre admiten la división entera (inexacta). Más abajo se estudia detalladamente sólo la división inexacta de un número entero por un número natural.

División entera (inexacta). *Dividir un número entero a por un número natural m con resto* significa hallar dos números enteros q y r tales, que sea válida la igualdad $a = mq + r$, con la particularidad de que r satisface la condición $0 \leqslant r < m$.

Si $r = 0$, suele decirse que el número entero a se divide exactamente por el número natural m.

Teorema 1. *Sea a un número entero cualquiera y sea m, cualquier número natural. Entonces, existe el único par de números enteros q y r que satisface las condiciones: $a = mq + r$ y $0 \leqslant r < m$.*
analizado en el § 1.

Demostración. El caso cuando a es un número natural se ha analizado en el § 1.

Si $a = 0$, el par de números $q = 0$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Supongamos que $a = -n$ es un número entero negativo. Entonces n es un número natural y, de acuerdo con lo demostrado, llegamos a la conclusión de que existe un par de números q_1 y r_1 tal que $n = mq_1 + r_1$ y $0 \leqslant r_1 < m$. Para el caso en que $r_1 = 0$, de la igualdad $n = mq_1 + r_1$ proviene otra igualdad $a = mq$, donde $q = (-q_1)$, es decir, el par de números $q = -q_1$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema. Cuando $0 < r_1 < m$, de la igualdad $n = mq_1 + r_1$ se desprende otra igualdad $a = (-q_1 - 1)\,m + (m - r_1)$, y, entonces, el par de números $q = -q_1 - 1$ y $r = m - r_1$ satisface las condiciones del teorema.

Así pues, para cualquier número entero a y para todo número natural m existe un par de números enteros q y r tales que $a = mq + r$ y $0 \leqslant r < m$.

La unicidad del par de números enteros q y r se demuestra igual que en el teorema 9 del § 1. Lo mismo que en el § 1, un número entero divisible por 2 exactamente se llamará **número par**, y divisible por 2 con resto $r = 1$, **número impar**.

He aquí algunos **corolarios** del teorema 1.

a) *Todo número par a puede escribirse en la forma $a = 2q$, donde q es cierto número entero.*

b) *Todo número impar a puede escribirse en la forma $a = 2q_1 + 1$, donde q_1 es cierto número entero.*

c) *Cualquier número entero a que es divisible por tres exactamente puede escribirse en la forma $a = 3q$, donde q es un número entero.*

d) *Cualquier número entero a, que no se divide por tres exactamente, puede ser escrito en una de las siguientes formas: $a = 3l + 1$, o bien $a = 3n + 2$, donde l y n son ciertos números enteros.*

e) *Cualquier número entero a, que se divide exactamente por cierto número natural k, puede ser escrito en la forma $a = kq$, donde q es un número entero.*

f) *Cualquier número entero a, que no se divide exactamente por cierto número natural k, puede escribirse en la forma $a = kq + r$, donde r es uno de los números $1, 2, \ldots, (k - 1)$, y q, un número entero.*

En función de la divisibilidad de los números enteros por un número natural dado k el conjunto de números enteros puede ser partido en k clases. Por ejemplo, si $k = 2$, el conjunto de todos los números enteros se parte en dos clases: números pares e impares.

El conjunto de todos los números enteros puede ser partido asimismo en tres clases:

a) números múltiplos del número tres, es decir, los del tipo $3q$, donde q es un número entero cualquiera;

b) números que, siendo divididos por tres, tienen como resto la unidad, es decir, los números del tipo $3l + 1$, donde l es un número entero cualquiera;

c) números que, siendo divididos por tres, tienen como resto un dos, es decir, los números del tipo $3n + 2$, donde n es un número entero cualquiera.

Los ejemplos aducidos muestran cómo se parte el conjunto de números enteros en 4 clases, 5 clases, etc.

Expongamos algunos ejemplos que muestran cómo ayuda la partición de los números enteros en clases a resolver una serie de problemas.

1. Demuéstrese que para cualquier b entero el número $b\,(2b + 1) \times \times (7b + 1)$ se divide por tres.

Demostración. Partiremos el conjunto de todos los números enteros en tres clases: a) $3q$; b) $3q + 1$; c) $3q + 2$, donde q es un número entero cualquiera.

Sea b un número cualquiera de la clase a). Entonces, $b\,(2b + 1) \times \times (7b + 1) = 3q\,(6q + 1)\,(21q + 1)$, de donde se ve que, para todo q entero, este número es divisible por 3.

Sea b un número cualquiera de la clase b). Entonces, $b\,(2b + 1) \times \times (7b + 1) = (3q + 1)\cdot 3\cdot(2q + 1)\,(21q + 8)$, de donde se ve que para todo q entero este número se divide por 3.

Sea b un número cualquiera de la clase c). Entonces, $b\,(2b + 1) \times \times (7b + 1) = (3q + 2)\,(6q + 5)\cdot 3\cdot(7q + 5)$, de donde se ve que para todo b entero este número se divide por 3.

2. Demuéstrese que entre cualesquiera k números enteros consecutivos hay un número que se divide por k exactamente.

Demostración. Todos los números enteros pueden ser partidos en las siguientes k clases:

$$\begin{aligned}&kq,\\&kq + 1,\\&kq + 2,\\&\quad\cdot\\&\quad\cdot\\&\quad\cdot\\&kq + (k - 1),\end{aligned}$$

donde q es un número entero cualquiera.

Sean dados k números enteros consecutivos y supongamos que cierto número b es el primero de ellos, es decir, k números, b, $(b + 1)$, $(b + 2)$, . . ., $[b + (k - 1)]$; supongamos también que el número b

está contenido en la clase $kq + i$ para cierto i $[i = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)]$, es decir, sea $b = kq + i$, donde q es un número entero. Por cuanto entre k números consecutivos hay un número

$$[b + (k - i)] = [kq + i + (k - i)] = k(q + 1),$$

el cual se divide por k exactamente, la afirmación 2 queda demostrada.

§ 4. Números racionales e irracionales

Números racionales. De acuerdo con lo observado anteriormente, en el conjunto de números naturales no son siempre realizables las operaciones de sustracción y división. En el § 2 el conjunto de números naturales ha sido ampliado hasta obtener un conjunto de fracciones ordinarias y en este último conjunto la operación de división ya es siempre realizable; no obstante la de sustracción se realiza no en todos los casos. Es por eso que surge la necesidad de introducir números nuevos.

Introduzcamos en el análisis números nuevos: *fracciones con signo menos*, es decir, números del tipo $\left(-\frac{m}{n}\right)$, donde m y n son números naturales. La fracción $\left(-\frac{m}{n}\right)$ se denomina a veces número *opuesto* de la fracción $\frac{m}{n}$.

Examinemos ahora un conjunto de números que incluye todas las fracciones, el número cero y todas las fracciones con signo menos. Podemos considerar que cada número de este conjunto es la razón entre un número entero y un número natural. Consideraremos por eso que el conjunto dado se compone de los números del tipo $\frac{p}{q}$, donde q es un número natural y p, un número entero.

Convengamos en considerar que dos números de dicho conjunto $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ son iguales, si se cumple la igualdad $pn = qm$. Además, la adición y la multiplicación de los números de este conjunto se consideran realizables según las siguientes reglas:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}.$$

Un conjunto de números compuesto por todos los números del tipo $\frac{p}{q}$, donde q es un número natural y p, un número entero, con las definiciones de igualdad y de operaciones de adición y multiplicación, que acabamos de introducir, recibe el nombre de *conjunto de números racionales* y se designa con la letra Q; los propios números se denominan *racionales*.

Si p es un número natural, entonces $\frac{p}{q}$ se llama *número racional positivo* o *fracción positiva*.

Si, en cambio, p es un número negativo, el número $\frac{p}{q}$ se denominará *número racional negativo* o *fracción negativa*. Está claro que el conjunto de números enteros es una parte del conjunto de números racionales.

Para las operaciones de adición y multiplicación de números racionales se introducen operaciones inversas, a saber, las de sustracción y división, y en este caso, ambas operaciones, a excepción de la división ilegítima por cero, son siempre realizables.

Las leyes principales de adición y multiplicación de números racionales son análogas a las leyes correspondientes de adición y multiplicación de números enteros y por esta razón no se dan aquí.

Si un número racional r figura como factor k veces ($k > 1$), entonces el producto $\underbrace{rr\ \ldots\ r}_{k \text{ veces}}$ se llama k-ésima potencia del número r y se denota r^k. Además, por definición, $r^1 = r$.

Al igual que en el caso de números naturales, son válidas las siguientes propiedades de las potencias de los números racionales.

a) $r^m r^k = r^{m+k}$;

b) $r_1^m r_2^m = (r_1 r_2)^m$;

c) $(r^k)^m = r^{km}$;

d) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k = \frac{r_1^k}{r_2^k}$, si $r_2 \neq 0$;

e) $\frac{r^k}{r^m} = r^{k-m}$, si $k > m$, $r \neq 0$.

Por definición, $r^0 = 1$ para cualquier número racional r, salvo el número cero.

En relación con el concepto de potencia de un número racional surge a menudo un problema en el que se pide hallar, para un número natural dado k y para un número racional positivo dado r_1, otro número racional positivo r_2 tal, que tenga lugar $r_2^k = r_1$.

Este problema no siempre tiene solución.

Teorema 1. *No existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a* 2.

Demostración. Supongamos que existe un número racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Sin restringir la generalidad de razonamientos consideraremos que p y q son recíprocamente primos (si el numerador y el denominador del número racional dado tienen factores comunes, entonces el número $\frac{p}{q}$ obtenido como resultado de la simplificación es igual al número dado). Haciendo uso de la propiedad d) de las potencias de los números racionales, escribamos nuestra suposición en la forma $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{1}$.

De la definición de igualdad entre los números racionales se deduce que $p^2 = 2q^2$. Por cuanto el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 2, el primer miembro también debe dividirse por 2. Pero, el número p^2 se divide por 2 sólo cuando el número p se divide por 2 (si p no se divide por 2, entonces p^2 tampoco se divide por 2). Puesto que p se divide por 2, existe, pues, un número entero k tal, que $p = 2k$. Al sustituir este valor de p en la igualdad $p^2 = 2q^2$, obtenemos $q^2 = 2k^2$. Por cuanto el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 2, se dividirá por 2 también el primer miembro; quiere decir, el número q se divide por 2, es decir, $q = 2m$.

Así pues, hemos llegado a que los números p y q poseen un factor común, que es el dos, mientras que, por hipótesis, los números p y q en la igualdad $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ son recíprocamente primos. Esta contradicción significa precisamente que la suposición admitida no es lícita y es cierta la afirmación del teorema.

De este modo, surge la necesidad de introducir números nuevos, distintos de los racionales, como, por ejemplo, un número cuyo cuadrado sea igual a 2.

Números irracionales. En el § 2 se han examinado fracciones decimales periódicas infinitas. Hagamos más amplia esta noción introduciendo en el análisis números nuevos que se llamarán fracciones decimales infinitas.

Llamemos *fracción decimal infinita* un número que puede ser escrito o bien en la forma

$$a_0,\ a_1a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{1}$$

o bien en la forma

$$-a_0,\ a_1a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{2}$$

donde a_0 es un número perteneciente a una serie natural ampliada; $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ son números del conjunto de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Los puntos suspensivos significan que en el m-ésimo lugar tras la coma se dispone el número a_m, cualquiera que sea el número natural m.

Si entre los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k \ldots$ al menos uno de ellos es distinto de cero, entonces el número escrito en la forma (1) se denominará *fracción decimal infinita positiva*, y el número escrito en la forma (2), *fracción decimal infinita negativa*. Si entre los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ no hay números distintos de cero, entonces al número escrito en la forma (1) se considerará igual al número escrito en la forma (2) y se llamará fracción decimal periódica infinita nula, y se designará con el símbolo 0, (0). Es obvio que el conjunto de todas las fracciones decimales infinitas incluye:

1) el conjunto de todas las fracciones decimales periódicas infinitas positivas;

2) el conjunto de todas las fracciones decimales periódicas infinitas negativas;

3) la fracción decimal periódica infinita nula.

Mostremos ahora que con las fracciones decimales periódicas infinitas (que acabamos de mencionar) no se agota el conjunto de todas las fracciones decimales infinitas.

Teorema 2. *Una fracción decimal infinita*

$$0{,}1010010001000010000010000001\ \ldots,$$

formada según la regla: tras cada unidad sigue un grupo de ceros que contiene un cero más que el grupo anterior, no es fracción decimal periódica.

Demostración. Supongamos que ésta es una fracción periódica y su período consta de n cifras, con la particularidad de que el primer período ocupa el k-ésimo lugar. Está claro que en la fracción que se analiza cada unidad irá precedida, a partir de cierto m-ésimo lugar, de $(2n + 1)$ o más ceros seguidos. Examinemos cada uno de estos grupos de ceros, que empieza con cualquier p-ésimo lugar, donde $p > k$ y $p > m$. Tomemos ahora el cero que está en el centro de tal grupo. Se dispone o bien al principio o bien al final, o bien en el interior de cierto período de longitud n, pero en todos los casos citados dicho período se halla enteramente dentro del segmento tomado que está constituido por $(2n + 1)$ o más ceros. Quiere decir, el período consta solamente de ceros y, por consiguiente, en la escritura de la fracción a partir del k-ésimo lugar deben haber solamente ceros, lo que no es cierto. El teorema está demostrado.

De lo expuesto anteriormente se deduce que cada número racional puede ser escrito en forma de una fracción decimal periódica infinita. Resulta natural, por esta razón, llamar *número irracional* aquel que puede ser escrito en forma de una fracción decimal aperiódica infinita.

En adelante consideraremos que cualquier fracción decimal periódica infinita es un número racional bien determinado, y cualquier fracción decimal aperiódica infinita, un número irracional bien determinado. Ha de notarse que en virtud de las definiciones citadas una fracción periódica infinita nula es el número cero.

§ 5. Números reales

El conjunto de todas las fracciones decimales infinitas (con las definiciones, que se introducen más abajo, de la igualdad, de la suma y del producto de estos números) se denomina *conjunto de números naturales* y se designa con la letra R, mientras que toda fracción decimal infinita lleva el nombre de *número real*. La fracción decimal infinita positiva se llamará *número real positivo* y la fracción decimal infinita negativa, *número real negativo*; la fracción decimal periódica infinita nula (de período cero), *número cero*. Por cuanto las fracciones decimales infinitas pueden ser tanto periódicas como aperiódicas, todo número real es o bien racional o bien irracional.

Dos números reales positivos

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots,$$
$$b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

son iguales, si $b_k = a_k$ para todos los números k pertenecientes a una serie natural ampliada.

De dos números reales positivos

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots,$$
$$b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

el primero es *mayor* que el segundo, siempre que o bien $a_0 > b_0$, o bien, si $a_0 = b_0$, pero $a_1 > b_1$, o bien, si $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ (para cierto número natural n), pero $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Dos números reales

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots \quad \text{y} \quad -b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

se llaman *opuestos*, si $b_k = a_k$ para todos los números k pertenecientes a una serie natural ampliada. *Dos números reales negativos son iguales*, si son iguales los números opuestos de ellos. *De dos números negativos el mayor es aquel* cuyo número opuesto (positivo) es menor. Un número positivo es mayor que al cero y que cualquier número negativo. El número cero es mayor que cualquier número negativo.

Examinemos los *valores aproximados de las fracciones infinitas.* Rompemos en algún lugar la fracción decimal positiva infinita que expresa el número real positivo dado. Obtendremos una fracción decimal finita (la cual puede escribirse en forma de una fracción infinita de período cero). La fracción obtenida será menor que el número dado (o igual a él). Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real positivo por defecto.*

Si una fracción decimal infinita positiva se rompe en algún k-ésimo lugar y a la fracción obtenida se le adiciona la fracción $\frac{1}{10^k}$, se obtendrá una fracción decimal finita que será mayor que el número real dado. Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real positivo dado por exceso.*

Si rompemos en algún lugar una fracción infinita negativa, obtendremos una fracción decimal finita, la cual será mayor que el número real dado (o igual a él). Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real negativo dado por exceso.*

Si una fracción infinita negativa se rompe en cierto k-ésimo lugar y a la fracción obtenida se adiciona la fracción $\left(-\frac{1}{10^k}\right)$, tendremos una fracción decimal finita, la cual es mayor que el número real dado. Tal fracción se llama *valor aproximado del número negativo dado por defecto.*

Ejemplos. 1. El valor aproximado del número 0,4(31) por defecto se representará por las siguientes fracciones finitas: 0,4; 0,43; 0,431;

0,4313; 0,43131; . . . El valor aproximado del mismo número por exceso lo expresarán las fracciones 0,5; 0,44; 0,432; 0,4314; 0,43132; . . .

2. El valor aproximado del número —3,2 (17) por defecto lo expresan las siguientes fracciones finitas: —3,3; —3,22; —3,218; —3,2172; —3,21718; . . . El valor aproximado de este mismo número por exceso se representa por las fracciones —3,2; —3,21; —3,217; —3,2171; —3,21717; . . .

Determinemos ahora las operaciones de adición y multiplicación para los números reales.

Se denomina *suma* de dos números reales un número que es mayor (o igual) que la suma de sus dos valores aproximados cualesquiera por defecto, pero menor (o igual) a la suma de sus dos valores aproximados cualesquiera por exceso.

Admitamos sin demostración que tal número siempre existe y es, además, el único.

Indiquemos un caso particular: la suma de un número real a con el número opuesto (que se designará con $(-a)$) es el número cero.

Se denomina *producto* de dos números reales positivos $a_0, a_1a_2 \ldots \ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$ un número mayor (o igual) que el producto de sus dos valores aproximados cualesquiera por defecto, pero menor (o igual) que el producto de sus dos valores aproximados por exceso.

Admitamos sin demostración que tal número siempre existe y es, además, el único.

El producto de dos números reales negativos $(-a_0, a_1a_2 \ldots \ldots a_k \ldots)$ y $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ es igual al producto de los números positivos, opuestos de los primeros, $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$. El producto de dos números reales de signos diferentes, $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ ó $(-a_0, a_1a_2 \ldots \ldots a_k \ldots)$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$, es igual al número negativo opuesto del producto de los números $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$.

El producto de dos números, uno de los cuales es cero, es igual a cero.

Son vigentes las siguientes leyes principales de adición y multiplicación de los números reales:

a) $a + b = b + a$ (conmutatividad de la adición);

b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociatividad de la adición);

c) $ab = ba$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(ab)\,c = a\,(bc)$ (asociatividad de la adición);

e) $(a + b)\,c = ac + bc$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números reales se introducen operaciones inversas: las de sustracción y división.

Sustraer de un número real a otro número real b significa hallar un número real c tal que $b + c = a$.

Dividir un número real a por otro número real b, distinto de cero, significa hallar un número real d tal, que $bd = a$.

En el conjunto de números reales las operaciones de sustracción y división son siempre realizables, a excepción de la división ilegítima por cero.

Si un número real a figura en calidad de factor n veces (n es un número natural, $n > 1$), entonces el producto $\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ veces}}$ recibe el nombre de *n-ésima potencia* del número a y se designa a^n. Además, por definición $a^1 = a$. Las propiedades de la potencia de los números reales son análogas a las de la potencia de los números racionales y por esta razón no se exponen aquí. En relación con el concepto de potencia de los números reales surge a menudo un problema en el que se pide hallar, para el número natural dado n y para el número real dado no negativo a, otro número real no negativo b tal, que tenga lugar la igualdad $b^n = a$.

Un número no negativo b tal, que la n-ésima potencia suya es el número dado a, es decir, $b^n = a$, se denomina *raíz aritmética* de n-ésimo grado del número no negativo a y se designa $b = \sqrt[n]{a}$.

Teorema. *Para cualquier número natural n y para todo número no negativo a existe una raíz aritmética de n-ésimo grado del número a y esta raíz es la única en el conjunto de números no negativos.*

La demostración del teorema se omite.

Cuando $n = 2$, en la designación de la raíz no se pone la cifra 2; cuando $n = 1$, la raíz del primer grado del número a es el propio número a. Las raíces aritméticas pueden ser números racionales e irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ es el número racional $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$ es un número irracional (esto se desprende del teorema 1, § 4).

Señalemos que, por definición, la raíz aritmética del número 0 es cero.

Se llama *valor absoluto* (*módulo*) de un número natural a: este mismo número, si a es positivo; cero, si a es cero; el número opuesto de a, si a es negativo. El valor absoluto de un número real a se designa $|a|$. La definición recién enunciada puede escribirse en forma breve del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0; \\ 0, & \text{si } a = 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Las propiedades fundamentales de los valores absolutos de los números reales se darán en el capítulo II.

Observemos que en virtud de la definición de raíz aritmética de un número no negativo es válida, para cualquier número real, la igualdad $\sqrt{a^2} = |a|$.

Planteemos un problema más general: hallar, para cualquier número real a y para cualquier número natural n, los números reales b tales, que se revifique $b^n = a$. Si los números mencionados existen, se denominan *raíces algebraicas reales de n-ésimo grado* del número real a. Si a es un número no negativo, entonces, según lo expuesto más arriba, existe un número no negativo b tal, que $b^n = a$, es decir, para cualquier número no negativo a siempre existe al menos una raíz algebraica b, para cuya designación se emplea un símbolo especial $\sqrt[n]{a}$ (raíz aritmética). Si existen otras raíces algebraicas, además de la raíz aritmética, para su designación no se emplean ningunos símbolos especiales.

Examinemos la cuestión referente a la existencia de la raíz algebraica de un número real. Señalemos que en este párrafo las afirmaciones sobre la cantidad de raíces reales para el número real dado se aceptan sin demostración alguna. La validez de ellas se desprende del teorema general sobre la cantidad de raíces de un número complejo (capítulo XI).

Sea $a = 0$, entonces para todo número natural n existe una, y sólo una raíz algebraica de n-ésimo grado, que es el número b, igual a cero.

Supongamos que a es un número positivo y n, un número natural impar ($n = 2k + 1$). En este caso existe una, y sólo una, raíz aritmética, $b_1 = \sqrt[2k+1]{a}$, de este número y no hay otras raíces algebraicas reales de él. De este modo, existe una sola raíz algebraica de grado impar de un número positivo, a saber, la raíz aritmética.

Supongamos que a es un número positivo y n, un número natural par ($n = 2k$). En este caso existe y, además, una sola raíz aritmética, $b_1 = \sqrt[2k]{a}$, y una raíz algebraica real, $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$, del número citado. De este modo, existen dos raíces algebraicas reales de grado par del número positivo a: $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ y $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$.

Sean, ahora, a un número negativo y n, un número natural par ($n = 2k$). Por cuanto cualquier número real distinto de cero a la potencia par es un número positivo, y el número 0 a toda potencia natural es cero, no existe ningún número real b tal, que b^{2k} sea un número negativo. Esto quiere decir que no existe raíz algebraica real de grado par de un número negativo.

Supongamos ahora que a es un número negativo y n, un número natural impar ($n = 2k + 1$). Mostremos que existe un número real negativo b tal, que $b^n = a$. Denotemos $c = -a$. Entonces, $c > 0$, razón por la cual existe la única raíz aritmética d de grado $(2k + 1)$ del número c: $d^{2k+1} = c$, o bien $d = \sqrt[2k+1]{c} = \sqrt[2k+1]{-a} = \sqrt[2k+1]{|a|}$. Hagamos ahora $b = -d$. En este caso $b^{2k+1} = (-1)^{2k+1}d^{2k+1} = (-1)\,c = (-1)\,(-a) = a$. Quiere decir, $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$ es un número negativo tal, que $b^{2k+1} = a$, es decir, $(-\sqrt[2k+1]{|a|})$ es la raíz algebraica real del número negativo a.

Ejemplos. 1. Sea $a = -7$, $n = 5$, entonces la raíz algebraica real de quinto grado del número (-7) es el número $b = -\sqrt[5]{|-7|} = -\sqrt[5]{7}$.

2. Sea $a = -8$, $n = 3$, entonces la raíz algebraica real de tercer grado del número (-8) es el número $b = -\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Observación. A veces la raíz de grado impar de un número negativo a se escribe en la forma $b = \sqrt[2k+1]{a}$, sobreentendiéndose que $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$. Por ejemplo, en lugar de $b = -\sqrt{7}$ se escribe $b = \sqrt[5]{-7}$. Pero, esta forma de escritura no se usará en adelante.

Pasemos ahora a la *interpretación geométrica* de los números reales. Sea dada una recta horizontal (fig. 1). Esta tiene dos direcciones mutuamente opuestas. Llamemos positiva una de estas direcciones

Fig. 1

y negativa, la otra. Para concretar, por dirección positiva elegimos la dirección a la derecha (véase la figura). Fijemos en la recta cierto punto O y llamémoslo *punto de referencia*. El punto O divide la recta en dos partes denominadas *rayos*. El rayo dirigido a la derecha se llamará *positivo* y el rayo dirigido a la izquierda, *negativo*. Sea dado un segmento, tomado por unidad de longitud; en estos casos se dice que se ha introducido una escala.

Se llama *recta numérica* aquella en la que se han elegido el punto de referencia, la dirección positiva y se ha introducido la escala.

A todo punto de la recta numérica se le puede poner en correspondencia un número real, rigiéndose por la regla siguiente:

— al punto elegido O le pondremos en correspondencia el número cero;

— a todo punto N en el rayo positivo le pondremos en correspondencia el número positivo a, donde a es la longitud del segmento ON;

— a todo punto M en el rayo negativo le pondremos en correspondencia el número negativo b, donde $|b|$ es la longitud del segmento OM.

De este modo, a cualquier punto de la recta numérica (con la escala elegida) se le ha puesto en correspondencia un único número real.

Mostremos que este proceso abarca todos los números reales. Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que cierto número real c no se ha puesto en correspondencia con cierto punto en la recta numérica. Si el número c es positivo, se encontrará un segmento cuya longitud sea igual a c. Al marcar este segmento a la derecha del punto O en la recta numérica, obtendremos un punto, al cual debe corresponder el número c, es decir, llegaremos a una contradicción. En cambio, si c es un número negativo, se encontrará un segmento, cuya longitud sea igual a $|c|$; al marcar este último a la izquierda del punto O en la recta numérica, obtendremos un punto, al cual ha de corresponder el número c, es decir, otra vez llegaremos a una contradicción.

Así pues:

1. A todo punto en la recta numérica se le ha puesto en correspondencia un número real y este número es único;
2. A distintos puntos de la recta numérica se les han puesto en correspondencia números diferentes;
3. No existe un número real que no corresponda a cierto punto de la recta numérica.

En estos casos suele decirse que entre el conjunto de todos los puntos de la recta numérica y el de todos los números reales se ha establecido una *correspondencia biunívoca.*

Ha de señalarse que los puntos de la recta numérica se identifican a menudo con los números que se les han puesto en correspondencia. Aprovechando esta circunstancia resulta fácil formular cuál de dos números reales es mayor: *el mayor es aquel que en la recta numérica se ubica más a la derecha que el otro.*

Sistema de coordenadas en una recta. Si en una recta se han elegido el punto de referencia, la dirección positiva y la escala, se dice también que en la recta está dado *un sistema de coordenadas.* La propia recta se denomina *eje de coordenadas* y el punto O, *origen de coordenadas.* A todo punto M de esta recta se le pone en correspondencia un número llamado *coordenada* del punto M en el sistema de coordenadas dado. Dicho número se determina según la regla: si el punto M se dispone en el rayo positivo, este número es igual al número positivo expresado por la longitud del segmento OM; si el punto M se dispone en el rayo negativo, este número es igual al número negativo expresado por la longitud del segmento OM que se toma con el signo menos; si el punto M coincide con el origen de coordenadas, el número es igual a cero.

Supongamos que el eje de coordenadas dado se dispone horizontalmente de modo tal, que el rayo positivo esté orientado a la derecha. Entonces, cualquier punto dispuesto a la derecha respecto del origen de coordenadas O tendrá coordenadas positiva y cualquier punto dispuesto a la izquierda del origen de coordenadas O, coordenada negativa. La coordenada del punto O, es decir, del origen de coordenadas, es igual a cero. Es fácil ver que la coordenada de cualquier punto M del eje de coordenadas es igual al número real puesto en correspondencia al punto en la recta numérica.

Al examinar varios puntos distintos fijos del eje t, se designan frecuentemente con cierta letra mayúscula que tienen diferentes subíndices, por ejemplo, M_1, M_2, M_3, . . ., M_n, . . .; las coordenadas de estos puntos se denotan por la letra del eje con los correspondientes subíndices, es decir, t_1, t_2, t_3, . . ., t_n, . . . Con el fin de indicar que el punto dado tiene una coordenada dada, ésta se escribe entre paréntesis al lado de la designación del propio punto, por ejemplo $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3)$, . . ., $M_n(t_n)$, ... Cuando se dice que está dado un punto, se entiende que está prefijada su coordenada; al decir que se debe encontrar un punto, se busca la coordenada de este punto.

Teorema 1. *Cualquiera que sea la disposición de dos puntos distintos $M_1(t_1)$ y $M_2(t_2)$ en el eje de coordenadas la distancia d entre estos puntos es igual al módulo de la diferencia de sus coordenadas, es decir,*

$$d = | t_1 - t_2 |.$$

Demostración. Si los puntos M_1 y M_2 coinciden, la afirmación del teorema es evidente. Supongamos ahora que los puntos M_1 y M_2 no coinciden y que, para concretar, el punto $M_2(t_2)$ se dispone más

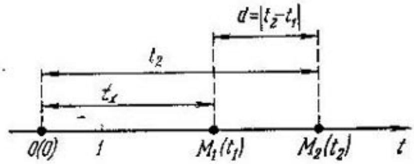


Fig. 2

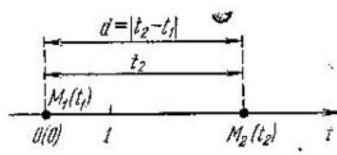


Fig. 3

a la derecha del punto $M_1(t_1)$ (si el punto $M_1(t_1)$ se ubica más a la derecha que el punto $M_2(t_2)$, entonces la demostración se repite sustituyendo t_2 por t_1, y t_1 por t_2).

Sean $M_1(t_1)$ y $M_2(t_2)$ unos puntos cualesquiera no coincidentes situados a la derecha del origen de coordenadas O (fig. 2). Entonces

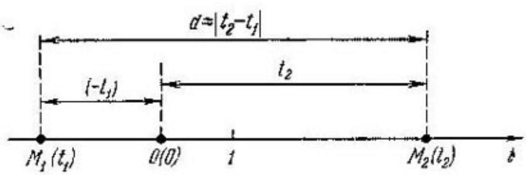


Fig. 4

la longitud del segmento M_1M_2 es igual a la del segmento OM_2, que es igual a t_2, menos la longitud del segmento OM_1, que es igual a t_1, es decir,

$$d = t_2 - t_1 = | t_2 - t_1 |.$$

Supongamos que $M_1(t_1)$ coincide con el origen de coordenadas $O(0)$, es decir, que $t_1 = 0$, mientras que $M_2(t_2)$ es cualquier punto dispuesto a la derecha del origen de coordenadas O (fig. 3). En este caso la longitud d del segmento M_1M_2 será igual a la del segmento OM_2, que, a su vez, es igual a t_2, es decir,

$$d = t_2 = | t_2 - 0 | = | t_2 - t_1 |.$$

Sea M_1 (t_1) un punto cualquiera dispuesto a la izquierda del origen de coordenadas y sea M_2 (t_2), un punto cualquiera dispuesto a la derecha del origen de coordenadas (fig. 4). Entonces, la longitud d del segmento M_1M_2 es igual a la del segmento OM_2, igual a t_2, más la longitud del segmento OM_1, que es igual a $(-t_1)$, es decir,

$$d = t_2 + (-t_1) = t_2 - t_1 = | t_2 - t_1 |.$$

Sea ahora M_1 (t_1) un punto cualquiera situado a la izquierda respecto del origen de coordenadas y supongamos que el punto M_2 (t_2)

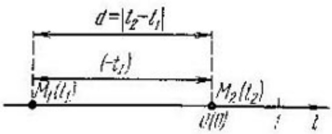


Fig. 5

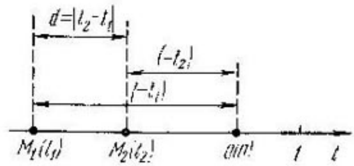


Fig. 6

coincide con el origen de coordenadas O (0), es decir, $t_2 = 0$ (fig. 5). Entonces la longitud d del segmento M_1M_2 coincide con la del segmento M_1O, que es igual a $(-t_1)$, es decir,

$$d = -t_1 = | 0 - t_1 | = | t_2 - t_1 |.$$

Ahora, supongamos que M_1 (t_1) y M_2 (t_2) son cualesquiera puntos no coincidentes, dispuestos a la izquierda del origen de coordenadas O (fig. 6). En este caso la longitud d del segmento M_1M_2 es igual a la del segmento OM_1, que es igual a $(-t_1)$, menos la longitud del segmento OM_2, que es igual a $(-t_2)$, es decir,

$$d = (-t_1) - (-t_2) = t_2 - t_1 = | t_2 - t_1 |.$$

Así pues, en todo caso $d = | t_2 - t_1 |$. El teorema queda demostrado.

Ejemplos. 1. Hállese la distancia entre los puntos M (3) y P (-2)

$$d = | 3 - (-2) | = | 3 + 2 | = 5, \text{ o bien } d = | -2 - 3 | = | -5 | = 5.$$

2. Hállese la distancia entre los puntos M (-4) y P (-10).

$$d = | -4 - (-10) | = | 6 | = 6, \text{ o bien } d = | (-10) - (-4) | = | -6 | = 6.$$

De este modo podemos decir que el módulo de cualquier número real a, es decir, $| a |$ es la distancia del punto M (a) al origen de coordenadas.

§ 6. Igualdades y desigualdades numéricas

En el § 5 hemos tocado la cuestión sobre la comparación de los números y hemos dado ciertas definiciones, de acuerdo con las cuales se puede aclarar, si son iguales dos números reales dados, o bien uno de ellos es mayor que el otro. Todas las definiciones mencionadas se pueden escribir de otra forma, haciendo uso de la comparación de los números reales con el número cero, a saber: dos números reales, a y b, son iguales, si, y sólo si, la diferencia entre ellos es nula, es decir, $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$; el número a es mayor que el número b, si, y sólo si, la diferencia $(a - b)$ es positiva, es decir, $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; el número a es inferior al número b, si, y sólo si, la diferencia $(b - a)$ es positiva, o si la diferencia $(a - b)$ es negativa, es decir, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$.

Si dos números están unidos entre sí mediante el signo de igualdad se dice que se ha dado una igualdad numérica. Sin embargo, dicha igualdad puede ser cierta y puede ser incierta. Por ejemplo, $2 = 5 - 3$, $\frac{4}{7} = \frac{\sqrt{16}}{7}$ son igualdades ciertas, mientras que las igualdades $3 = 5 - 1$, $6 = \frac{7}{3}$ son inciertas.

Análogamente, si dos números están unidos mediante cualquier signo de desigualdad, suele decirse que viene dada una desigualdad numérica, la cual puede ser cierta o incierta. Por ejemplo, $110{,}1 < 11^2$, $\sqrt{10} > 3$ son desigualdades ciertas, y $-5 > \sqrt{2}$, $\frac{7}{5} > 3$, inciertas.

La cuestión de si es cierta o incierta tal o cual igualdad numérica (desigualdad numérica) no es siempre obvia. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$(100)^{50} < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$$

no es evidente. En tales casos las igualdades y desigualdades numéricas han de ser demostradas. Desempeñan un papel de gran importancia las propiedades principales de las igualdades y desigualdades, que se exponen más abajo.

1. *Si los números a, b y c son tales, que $a = b$ y $b = c$, entonces* $a = c$ (propiedad de transitividad de las igualdades).

2. *Si los números a, b, c, d son tales, que $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.*

3. *Si los números a, b, c, d son tales, que $a = b$, $c = d$, entonces $ac = bd$.*

4. *Para cualesquiera números reales a, b y c las igualdades $a = b$ y $a + c = b + c$ son equivalentes, es decir, la validez de la igualdad $a = b$ predetermina la validez de la igualdad $a + c = b + c$, y, viceversa, de la validez de la igualdad $a + c = b + c$ sigue la validez de la igualdad $a = b$, es decir, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.*

5. *Para cualesquiera números reales a y b para todo número real* c,

distinto de cero, las igualdades $a = b$ y $ac = bc$ son equivalentes, es decir, si $c \neq 0$, entonces $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.

Expongamos las propiedades análogas para las desigualdades numéricas.

1. *Si los números a, b y c son tales, que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$* (propiedad de transitividad de las desigualdades).

Demostración. $a-c=(a-c)+(b-b)=(a-b)+(b-c)$. Por cuanto $a > b$, tenemos $a - b > 0$; por cuanto $b > c$, tenemos $b - c > 0$, pero la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $a - c > 0$, es decir $a > c$.

2. *Si los números a, b, c, d son tales, que $a > b$, $c > d$, entonces $a + c > b + d$.*

Demostración. $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$. Por cuanto $a > b$, el número $(a - b)$ es positivo; por cuanto $c > d$, entonces $(c - d)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $(a + c) - (b + d) > 0$, es decir, $a + c > b + d$

2a. *Si los números a, b, c, d son tales, que $a > b$* y *$c < d$, entonces $a - c > b - d$.*

Demostración. $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c)$. Por cuanto $a > b$, el número $(a - b)$ es positivo; por cuanto $c < d$, entonces $(d - c)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $(a - c) - (b - d) > 0$, es decir, $a - c > b - d$.

3. *Si a, b, c, d son números positivos y, además, $a > b$ y $c > d$, entonces $ac > bd$.*

Demostración. $ac - bd = (ac - bd) + (bc - bc) = (ac - bc) + (bc - bd) = c(a - b) + b(c - d)$. Puesto que $a > b$, entonces $(a - b)$ es un número positivo; por cuanto c es un número positivo y como el producto de números positivos es positivo, entonces $c(a - b)$ es un número positivo; de modo análogo se demuestra que $b(c - d)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $ac - bd > 0$, es decir, $ac > bd$.

4. *Para cualesquiera números reales a, b y c, las desigualdades $a > b$ y $a + c > b + c$ son equivalentes, es decir, la validez de la desigualdad $a > b$ predetermina que es válida la desigualdad $a + c > b + c$, y, viceversa, de la validez de la desigualdad $a + c > b + c$ se desprende la validez de la desigualdad $a > b$, es decir, $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.*

Demostración. Sea $a > b$. Entonces $(a + c) - (b + c) = (a - b) + (c - c) = (a - b) > 0$, es decir, $a + c > b + c$. Sea $(a + c) > (b + c)$. Entonces $a - b = (a - b) + (c - c) = (a + c) - (b + c) > 0$, es decir, $a > b$.

5. *Para cualesquiera números reales a y b y para todo número positivo c, las desigualdades $a > b$ y $ac > bc$ son equivalentes, es decir, si $c > 0$, entonces $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.*

Demostración. Sea $a > b$, entonces $ac - bc = (a - b)c$. Por cuanto c y $(a - b)$ son números positivos, el producto de ellos es un número positivo, es decir, $ac - bc > 0$, o bien $ac > bc$. Sea $ac > bc$, entonces $(a - b)c = ac - bc > 0$.

Si el producto de dos números es positivo y uno de ellos es también positivo, entonces será positivo el otro número, es decir, por cuanto $c > 0$, tenemos $a - b > 0$, o sea, $a > b$.

5a. *Para cualesquiera números reales a y b y para todo número negativo c, las desigualdades $a > b$ y $ac < bc$ son equivalentes, es decir, si $c < 0$, entonces $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.*

La demostración de esta afirmación es análoga a la de la propiedad 5.

De este modo, tienen lugar las siguientes propiedades principales de las igualdades y desigualdades:

1) $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$;	1) $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$;
2) $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d$;	2) $a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$;
	2a) $a > b,\ c < d \Rightarrow a - c > b - d$;
3) $a = b,\ c = d \Rightarrow ac = bd$;	3) $a > b > 0,\ c > d > 0 \Leftrightarrow ac > bd$;
4) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$;	4) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;
5) $a = b \Leftrightarrow ac = bc$ para $c \neq 0$;	5) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ para $c > 0$;
	5) $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ para $c < 0$.

Más arriba se han usado los signos de igualdad (=) y de desigualdad rigurosa ($<$ o bien $>$). A veces estos signos son insuficientes. Hay problemas, donde se necesitan desigualdades no rigurosas.

Ejemplo. Hoy día en Moscú la temperatura es de 0°, y en Leningrado, no es superior a la de Moscú.

Si la temperatura en Leningrado se designa con la letra T, entonces o bien $T = 0°$, o bien $T < 0°$. En estos casos suele escribirse $T \leqslant 0°$.

Demos a conocer las definiciones de desigualdades no rigurosas $a \geqslant b$ y $a \leqslant b$. Una desigualdad numérica $a \leqslant b$ se considera cierta para $a < b$ y para $a = b$, y es incierta sólo en el caso en que $a > b$. Por ejemplo, las desigualdades $6 \leqslant 9$ y $3 \leqslant 2 + 1$ son ambas ciertas, y la desigualdad $7 \leqslant 6$ es incierta. (La escritura $a \leqslant b$ se lee o bien como «a no es mayor que b», o bien como «a es menor o igual a b»).

Una desigualdad numérica $a \geqslant b$ se considera cierta tanto para $a > b$ como para $a = b$; se considera incierta sólo en el caso cuando $a < b$. (La anotación $a \geqslant b$ se lee o bien como «a no es menor que b» o bien como «a es mayor o igual a b»).

Para las desigualdades no rigurosas son válidas las propiedades 1—5a, si sustituimos en ellas el signo de desigualdad rigurosa por el signo de desigualdad no rigurosa.

Diremos que

se verifica la desigualdad doble $a < b < c$, siempre que sean válidas a la vez dos desigualdades $a < b$ y $b < c$;

se verifica la desigualdad doble $a \leqslant b < c$, si son válidas a la vez dos desigualdades: $a \leqslant b$ y $b < c$;

se verifica la desigualdad doble $a < b \leqslant c$, cuando son válidas a la vez dos desigualdades: $a < b$ y $b \leqslant c$;

se verifica la desigualdad $a \leqslant b \leqslant c$, siempre que sean válidas a la vez dos desigualdades: $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$.

§ 7. Conjuntos de números

Los conceptos de conjunto y de elemento de un conjunto se consideran fundamentales, es decir, ellos no se definen.

En este párrafo se analizan los conjuntos de números cuyos elementos son números reales.

Si un número a pertenece al conjunto M, se escribe $a \in M$; si a no pertenece al conjunto M, se escribe $a \notin M$.

Por ejemplo: $2 \in N$, $0 \notin N$.

Más arriba fueron introducidos los siguientes conjuntos de números:

N, el conjunto de todos los números naturales (serie de números naturales);

Z, el conjunto de todos los números enteros;

Z_0, el conjunto de todos los números enteros no negativos (serie ampliada de números naturales);

Q, el conjunto de todos los números racionales;

R, el conjunto de todos los números reales.

Expongamos ahora ejemplos de otros conjuntos de números y convengamos cómo se denotarán éstos en lo que sigue.

Un conjunto que no contiene elementos se denomina vacío y se designa con el símbolo $\varnothing$.

Si un conjunto se compone de una cantidad finita de elementos, tal conjunto se escribe del modo siguiente: entre llaves se ponen todos los elementos del conjunto (en cualquier orden) separándolos uno de otro con punto y coma. Por ejemplo, un conjunto M compuesto por los primeros seis números de la serie natural puede escribirse así: $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, y el conjunto L, que se compone de un número $\frac{\sqrt{2}-3}{4}$, se escribirá así: $L = \left\{\frac{\sqrt{2}-3}{4}\right\}$.

Si un conjunto se compone de una infinidad de elementos o de elementos que son, a su vez, conjuntos, entonces las llaves introducidas se conservan y entre ellas se da una breve descripción del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares de números a y b, de los cuales a es un número entero cualquiera y b, un número real cualquiera, se escribe así:

$$M = \{(a;\ b) \mid a \in Z,\ b \in R\}.$$

Si cada elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, el conjunto A se denomina *subconjunto* del conjunto B. En este caso suele escribirse $A \subset B$ o bien $B \supset A$.

Por ejemplo: $N \subset Z$; $\{(a;\ b) \mid a \in N;\ b \in Z\} \subset \{(a;\ b) \mid a \in Z;\ b \in R\}$.

El conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-1 < t < 2$, se denota $(-1;\ 2)$ y se llama *intervalo* $(-1;\ 2)$. Debido a la correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de la recta numérica, suele decirse,

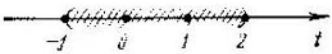


Fig. 7

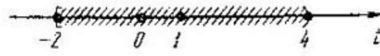


Fig. 8

refiriéndose al intervalo $(-1;\ 2)$, que es éste un conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos (-1) y (2), siendo excluidos estos últimos (fig. 7).

El conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-2 \leqslant t < 4$, se denota

Fig. 9

Fig. 10

$[-2;\ 4)$ y se denomina *semiintervalo* $[-2;\ 4)$. Suele decirse también que el semiintervalo $[-2;\ 4)$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos (-2) y (4), incluido el punto (-2) (fig. 8).

El conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $0 < t \leqslant 3$, se denota $(0;\ 3]$ y se llama *semiintervalo* $(0;\ 3]$. Suele decirse en este caso que el semiintervalo $(0;\ 3]$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos (0) y (3), incluido el punto (3) (fig. 9).

El conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-2 \leqslant t \leqslant 1$, se denota $[-2;\ 1]$ y se denomina *segmento* $[-2;\ 1]$. Se dice que el segmento $[-2;\ 1]$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica, dispuestos entre los puntos (-2) y (1), siendo incluidos estos dos puntos (fig. 10).

En el caso general, si $a < b$,

se denomina *segmento* $[a;\ b]$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se cumple la desigualdad doble $a \leqslant t \leqslant b$;

se denomina *semiintervalo* $[a;\ b)$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a \leqslant t < b$;

se denomina semiintervalo $(a;\ b]$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a < t \leqslant b$;

se llama *intervalo* $(a; b)$ al conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a < t < b$;

se denomina *rayo* $[a; +\infty)$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales es válida la desigualdad $t \geqslant a$;

se denomina *rayo* $(a; +\infty)$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t > a$;

se denomina *rayo* $(-\infty; a]$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t \leqslant a$;

se denomina *rayo* $(-\infty; a)$ el conjunto de todos los números reales t, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t < a$.

Señalemos que, a veces, cuando se dice «*intervalo*», se entiende un rayo, un segmento, el propio intervalo o un semiintervalo. En fin, algunas veces el conjunto R de todos los números reales se denota así: $(-\infty; +\infty)$.

Unión e intersección de los conjuntos.

Se llama *unión* de los conjuntos A y B al conjunto C compuesto de todos los elementos tales, que cada uno de ellos está contenido siquiera en uno de los conjuntos dados A y B. Para la unión de los conjuntos se emplea el símbolo $\cup$: $C = A \cup B$.

Ejemplos. 1. Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{2; 3; 4; 5\}$, entonces $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2. $N \cup Z_0 \cup \{0\} = Z_0$; 3. $(-1; 2) \cup (0; 3] = (-1; 3]$;

4. $(-1; 2)] \cup [-2; 1) = [-2; 2)$; 5. $[-2; 1] \cup (0; 3] = [-2; 3]$;

6. $(-1; 2] \cup (2; 4) = (-1; 4)$; 7. $(0; 1) \cup (-1; +\infty) = (-1; +\infty)$.

Se llama *intersección* de los conjuntos A y B al conjunto L, cuyos elementos serán aquellos, y sólo aquellos, que pertenecen a la vez tanto al conjunto A como al conjunto B, es decir, la intersección de dos conjuntos es la *parte común* de estos conjuntos. Para la intersección de los conjuntos se emplea el signo $\cap$: $L = A \cap B$.

Ejemplos. 1. Si $A = \{0; 1; 2; 3\}$ y $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$, entonces $A \cap B = \{2; 3\}$;

2. $N \cap Z_0 = N$; 3. $N \cap Z = N$;

4. $\{1; 2; 3; 4\} \cap \{2; 3; 4; 5\} = \{2; 3; 4\}$;

5. $(-1; 2) \cap (0; 3] = (0; 2)$;

6. $(-\infty; 1] \cap (0; 3) = (0; 1]$;

7. $(-1, 3) \cap (3; +\infty) = \varnothing$.

Conjuntos ordenados. Permutaciones y variaciones. Al estudiar un conjunto de números, se puede disponer los números pertenecientes a dicho conjunto en cierto orden. En este caso tiene sentido hablar de un conjunto ordenado. Uno de los ejemplos del conjunto ordenado es la serie de números naturales. Si dos conjuntos ordenados contienen los mismos elementos, pero dispuestos en diferente orden, diremos que estos conjuntos ordenados se distinguen por el orden de disposición de los elementos. Por ejemplo, operando con tres números 4, 7, 1, se puede componer seis diferentes conjuntos ordenados: $\{1; 4; 7\}$, $\{1; 7; 4\}$, $\{4; 7; 1\}$, $\{4; 1; 7\}$, $\{7; 1; 4\}$, $\{7; 4; 1\}$.

Esta cuestión la analizaremos más detalladamente para los conjuntos finitos, es decir, para aquellos que se componen de un número finito de elementos, por ejemplo, de números.

Definición. *El orden establecido en un conjunto finito recibe el nombre de permutación de los elementos del conjunto citado.* El número de permutaciones es precisamente el número de diferentes conjuntos ordenados compuestos de los mismos elementos. El número de permutaciones de n elementos se denota con P_n. Para dar la respuesta a la pregunta, ¿a qué es igual el número de permutaciones de n elementos?, examinemos el problema general. Sea dado un conjunto compuesto de n elementos. Escojamos m elementos ($m \leqslant n$) en este conjunto y dispongámoslos en cierto orden. Llamemos *variación* al conjunto ordenado finito obtenido. El problema general puede enunciarse así: «¿Cuántas son las variaciones de n elementos tomados en grupos de m?». Respondamos primeramente a la pregunta ¿cuántas son las variaciones de n elementos tomados a dos? En el primer lugar de tal variación puede estar cualquier elemento de n elementos, en el segundo lugar puede estar cualquiera de $(n-1)$ elementos restantes. Supongamos que el primer lugar lo ocupa el elemento a_1, entonces en el segundo lugar puede estar cualquiera de los elementos $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Obtenemos $(n-1)$ variaciones. Si el primer lugar está ocupado por el elemento a_2, en el segundo lugar puede estar cualquiera de los elementos $a_1, a_3, a_4, \ldots, a_n$, es decir, tendremos $(n-1)$ variaciones más. Al agotar todos los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, obtendremos n grupos, en cada uno de los cuales se contienen $(n-1)$ variaciones. Por consiguiente, el número de todas las variaciones de n elementos tomados a dos será $n(n-1)$.

Si se requiere determinar el número de variaciones de n elementos tomados a tres, se debe añadir, por turno, a toda variación de n elementos tomados a dos un elemento de $(n-2)$ restantes. Entonces obtendremos $n(n-1)$ grupos, en cada uno de los cuales se contendrán $(n-2)$ variaciones. Por consiguiente, el número de variaciones de n elementos tomados a tres será en total $n(n-1)(n-2)$. Si el número de variaciones de n elementos tomados a m lo designamos con A_n^m, podemos escribir las fórmulas siguientes:

$$A_n^2 = n(n-1), \quad A_n^3 = n(n-1)(n-2). \tag{1}$$

Escribamos las fórmulas (1) en otra forma:

$$A_n^2 = n[n-(2-1)], \quad A_n^3 = n(n-1)[n-(3-1)]. \tag{2}$$

En las fórmulas (2) se observa cierta regularidad, a saber, el número de variaciones es igual al producto de números naturales sucesivos, empezando con n y acabando con $[n-(k-1)]$, donde $k = 2, 3$. Razonando análogamente a lo anterior, obtendremos

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)], \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{3}$$

Ejemplo. En el 1er grado de una escuela hay 6 asignaturas 1er y 4 lecciones diarias. ¿Cuántos métodos pueden aplicarse para hacer el horario de un día de estudios (no se admite que a una asignatura se le asigne más de una lección por día)?

Para resolver este problema se debe determinar el número de variaciones de 6 elementos tomados a 4: $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Así pues, son posibles 360 métodos para hacer el horario de un día. Evidentemente, la permutación es una variación de n elementos tomados a n. De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1. \tag{4}$$

Si aprovechamos el símbolo $n!$ (se lee: «factorial de n»), el cual significa el producto de n primeros números de la serie natural ($n = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot n$), entonces la fórmula (4) puede escribirse del modo siguiente:

$$P_n = n!. \tag{5}$$

La fórmula (3) también puede reducirse a otra forma, aprovechando este mismo símbolo:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]\cdot[(n-m)\ldots 2\cdot 1]}{[(n-m)\ldots 2\cdot 1]} = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{6}$$

Para que la fórmula 6 coincida con la (5) cuando $m = n$, suele considerarse que $0! = 1$.

Combinaciones y sus propiedades. Tropezamos frecuentemente con los problemas en que se pide formar, a partir de un conjunto finito de n elementos, otro conjunto de m elementos ($m \leqslant n$), con la particularidad de que en el conjunto nuevo tiene importancia sólo la presencia de los elementos y no el orden que ellos siguen.

Por ejemplo, se pregunta cuántos son los métodos a emplear para la elección de tres alumnos, entre los diez, que realicen la limpieza de la clase. En este caso la ordenación del grupo compuesto por tres alumnos no es obligatoria. Tales conjuntos compuestos de n elementos tomados a m, que se diferencian uno del otro sólo por los elementos y no por el orden de disposición, se denominan *combinaciones*; el número de combinaciones se denota con C_n^m. Es evidente que el número de combinaciones de n elementos tomados a n es igual a la unidad: $C_n^n = 1$. Examinemos el caso general en que $1 \leqslant m \leqslant n$.

Sean formadas todas las combinaciones C_n^m de n elementos tomados a m. Elijamos cualquiera de estas combinaciones y reordenemos en ella los elementos empleando con tal fin todos los medios posibles. Entonces, el número de toda clase de conjuntos ordenados obtenidos de n elementos tomados a m es igual a $C_n^m P_m$. Demostremos que este número coincide con el número de todas las variaciones de n elementos tomados a m. Efectivamente, tomemos todas las variaciones posibles y escribámoslas reunidas en grupos. En cada grupo incluyamos variaciones compuestas de elementos iguales, que se diferencian por el orden de su disposición. De este modo, en cada grupo entrarán tantas variaciones cuántas permutaciones puedan formarse de m elementos dados, es decir, m variaciones. Todas las variaciones que se disponen en un grupo y que se consideran como combinaciones, son iguales, puesto que contienen elementos iguales. Por consiguiente, el número de grupos no es otra cosa que el número de diferentes combinaciones de n elementos tomados a m, es decir,

$$A_n^m = C_n^m m! \tag{7}$$

A partir de la igualdad (7) obtendremos la fórmula para calcular el número de combinaciones

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!},$$

o bien, haciendo uso de la fórmula (6):

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \tag{8}$$

Observemos que en virtud del acuerdo aceptado $0! = 1$, la fórmula (8) es válida también para $m = 0$, a saber, $C_n^0 = 1$.

Resolvamos ahora el problema enunciado más arriba sobre la elección de tres alumnos. El número de métodos posibles para escoger los alumnos será igual a

$$C_{10}^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)\,(1\cdot2\cdot3)} = 120.$$

Si calculamos C_{10}^7, obtendremos el mismo resultado:

$$C_{10}^7 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3)\,(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)} = 120.$$

Mostremos en el caso general que $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. En efecto,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m. \tag{9}$$

La fórmula (9) permite calcular con facilidad el número de combinaciones de n elementos tomados a m, cuando m es próximo a n. Por ejemplo,

$$C_9^8 = C_9^1 = \frac{9!}{8!} = 9.$$

He aquí una propiedad más que es propia para el número de combinaciones:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}. \tag{10}$$

Efectivamente, haciendo uso de la fórmula (8), tenemos

$$C_n^{m+1}+C_n^m=\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}+\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!}{m!\,(m+1)\,(n-m-1)!}+\frac{n!}{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)}=$$

$$=\frac{n!}{m!\,(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n-m}\right)=$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,(m+1)\,(n-m)}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,[(n+1)-(m+1)]!}.$$

Empleando una vez más la fórmula (8), obtenemos que la fórmula (10) es cierta.

Ejercicios

Calcúlense (1 . . . 10):

1. $3\frac{5}{14}-\left[1\frac{11}{49}:\left(76\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}\right)\right]\cdot\frac{12}{55}.$

2. $\left\{5\frac{68}{126}\cdot\left[5\frac{5}{9}-8\frac{3}{4}:\left(\frac{8}{11}\cdot 9\frac{3}{16}-1\frac{2}{5}\right)\right]+5\frac{2}{19}\right\}:12\frac{3}{5}+\frac{5}{4}.$

3. $\left\{\left[\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{9}{14}\right)\cdot 0{,}58\right]:0{,}75\right\}:6\frac{2}{3}$

4. $$\left[\frac{3\frac{1}{3}+4\frac{1}{9}-6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8}-2\frac{1}{4}-0{,}5}:\left(13\frac{8}{11}-8\frac{50}{99}\right)\right]\cdot\left(2\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}\right)+$$
$$+\frac{\left(3\frac{6}{7}-1\frac{5}{3}-\frac{4}{21}\right):47}{9\frac{5}{51}-3\frac{2}{9}+5\frac{7}{18}-10\frac{9}{34}}.$$

5. $$\left\{\frac{4\frac{1}{3}+5{,}4+0{,}2\,(6)}{\frac{13}{15}+0{,}0\,(3)+0{,}1}:\left[\left(4-0{,}8\,(3)-2\frac{7}{8}\right):\left(8\frac{7}{24}-7{,}91\,(6)\right)\right]\right\}:$$
$$:\left(\frac{3}{14}+\frac{9}{42}\right).$$

6. $$\left[\left(\frac{3{,}25}{5{,}5}:\frac{3{,}125}{341}\right):\frac{0{,}341}{6{,}875}\right]:\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+0{,}125}\cdot\frac{8}{13}\right)+$$
$$+\frac{1{,}01-\frac{1}{5}}{3\frac{1}{2}-0{,}8}\cdot\frac{2-0{,}04}{1-0{,}11}.$$

7. $\dfrac{\left[\left(17\dfrac{3}{100}-11{,}27\right)\cdot 2\right]:3\dfrac{1}{3}}{12:[2{,}28:(28{,}57-5{,}03)]}+4\dfrac{1}{2}\left\{\left[3:\left(0{,}2-\dfrac{1}{10}\right)\right]:\left[2\dfrac{1}{2}\times\right.\right.$
$\left.\left.\times\left(0{,}8+\dfrac{6}{5}\right)\right]\right\}.$

8. $\left\{\left[\dfrac{(4{,}6+5:6{,}25)\cdot 14}{4\cdot 0{,}125+2{,}3}\right]:\dfrac{7}{6}\right\}:\dfrac{2}{12{,}4+4\dfrac{2}{5}}+$
$+\left(4\dfrac{5}{8}-\dfrac{13}{6}:8\dfrac{2}{3}\right):\left(3{,}25-2\dfrac{1}{4}\right).$

9. $\dfrac{2{,}(3)-\left(2\dfrac{3}{16}-\dfrac{2}{3}\right):\dfrac{3}{8}}{\left[10-0{,}21:\left(4{,}2-3\dfrac{4}{5}\right)\right]:\left(1{,}3\cdot 1\dfrac{19}{24}\right)}+$
$+\dfrac{\left[\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot 3\dfrac{1}{2}\right]:0{,}05}{\left(1\dfrac{22}{25}+2{,}12\right)\left(0{,}1+\dfrac{1}{40}\right)}.$

10. $\dfrac{4\dfrac{8}{37}\cdot\left(2{,}8(4):2\dfrac{2}{5}\right)+\left[18\dfrac{13}{17}+\left(15\dfrac{13}{137}-\dfrac{2068}{137}\right):8{,}01\right]\cdot 5\dfrac{2}{3}}{\left[\left(1{,}08-\dfrac{2}{25}\right):0{,}(571\,428)\right]:\left[\left(6{,}(5)-3\dfrac{1}{4}\right)\cdot 2\dfrac{2}{17}\right]}.$

Demuéstrense las afirmaciones siguientes (11 . . . 33):

11. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ sea divisible por 5, es necesario y suficiente que $a_0 = 0$, o que $a_0 = 5$.

12. Para que un número natural sea divisible por 6, es necesario que se divida por 3.

13. Para que un número natural sea divisible por 3, es suficiente que se divida por 6.

14. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \geqslant 1$, sea divisible por 4, es necesario y suficiente que el número $\overline{a_1 a_0}$ se divida por 4.

15. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \geqslant 2$, sea divisible por 8, es necesario y suficiente que se divida por 8 el número $\overline{a_2 a_1 a_0}$.

16. Un número natural es divisible por 11, si, y sólo si, la diferencia entre la suma de sus cifras, que ocupan los lugares impares, y la suma de sus cifras, que se disponen en los lugares pares, es divisible por 11.

17. Para cualquier número natural n el número $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ es natural.

18. El producto de dos números naturales sucesivos dividido por tres da en el resto cero o dos.

19. El número que es el cuadrado de un número natural, o bien se divide por tres, o bien, siendo dividido por tres, da en el resto la unidad.

20. El número que es el cubo de un número natural, al dividirlo por 9, da en el resto 0, 1, o bien 8.

21. Para cualquier n natural, el número $n(n^2+5)$ es divisible por 6.

22. La suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 3.

23. El producto de tres números naturales sucesivos, entre los cuales el del medio es el cuadrado de un número natural, es divisible por 60.

24. Para cualesquiera n y m enteros el número $[nm(n-m)]$ es par.

25. El producto de dos números pares sucesivos es divisible por ocho.

26. La diferencia entre el cubo de un número impar y el propio número es divisible por 24.

27. El cuadrado de todo número impar, disminuido en la unidad, es divisible por 8.

28. La suma de dos números impares sucesivos es divisible por 4.

29. Dos números impares sucesivos son recíprocamente primos.

30. Para cualquier número natural n los números n, $n+1$ y $2n+1$ son recíprocamente primos de dos en dos.

31. La suma de cuatro números naturales sucesivos no puede ser un número primo.

32. Cada una de dos fracciones, $\frac{14n+3}{21n+4}$ y $\frac{2n+3}{5n+7}$, es irreducible cualquiera que sea n natural.

33. Si una fracción dada es irreducible, será irreducible también la fracción cuyo numerador es igual a la suma del numerador y denominador de la fracción dada y cuyo denominador es igual al producto del numerador por el denominador de la fracción dada.

34. ¿Cuántas veces el número 2 figura como factor en la descomposición del número 100! en factores primos?

35. ¿Cuántas veces el número 5 entra como factor en la descomposición del número 1980! en factores primos?

36. Hállese el resto que queda al dividir el número:
a) 2^{1980} por 5; b) 7^{7100} por 3.

37. ¿Cuál es la última cifra del número que se obtiene como resultado de la siguiente elevación a potencia: a) 2^{1980}; b) 7^{1980}?

38. ¿Se podrá representar el número 101 010 en forma de la diferencia entre los cuadrados de dos números enteros?

39. ¿Será divisible por 81 el número $\underbrace{11\ldots 11}_{81 \text{ veces}}$?

40. Hállese el MCD (247, 221), MCD (323; 187; 209).

41. Hállense los números a y b, si: el MCD $(a; b) = 13$, el MCM $(a; b) = 1989$.

42. ¿Para que cifras x e y el número $\overline{34x5y}$ se divide por 36?

43. La diferencia de dos números es igual a 5, y la suma de los cuadrados es igual a 157. Hállense dichos números.

44. Hállense todos los números de tres cifras, cada uno de los cuales sea 12 veces mayor que la suma de sus cifras.

45. Hállese una fracción propia, superior a $\frac{1}{3}$, si se sabe que al aumentar su numerador en cierto número entero y al multiplicar su denominador por el mismo número, la magnitud de la fracción no varía.

46. La fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible. Aclárese si es reducible o no la suma de dos fracciones $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a+b}$.

47. Hállense todos los números naturales n tales que para cada uno de ellos el número $\frac{3n+4}{5}$ sea natural.

48. ¿Es cierta la afirmación de que la suma de dos números naturales, cada uno de los cuales no se divide por 7, tampoco es divisible por 7?

49. Hállese el número natural mínimo, el cual, siendo dividido por 7, da en el resto 6, y, dividido por 9, da en el resto 8.

50. Hállese el número máximo de tres cifras, el cual, siendo dividido por 6, da en el resto 5, y al dividirlo por 4, da el resto igual a 3.

51. Hállense todos los números naturales, superiores a 200 e inferiores a 1500, cada uno de los cuales, siendo dividido tanto por 7, como por 21, da en el resto 2.

52. Hállense todos los números naturales, inferiores a 150, cada uno de los cuales, siendo dividido tanto por 6, como por 8, da en el resto 5.

53. Sea p ($p \geqslant 5$) un número primo. Demuéstrese que el número $(p^2 - 1)$ es divisible por 24.

54. Sea p ($p \geqslant 7$) un número primo. Demuéstrese que el número $(p^2 - 13)$ no se divide por 24.

55. Hállense los números primos p y q tales, que $p^2 - 2q^2 = 1$.

56. ¿Será primo el numero $(4p + 1)$, si se sabe que los números p y $(2p+1)$ son primos y $p > 3$?

57. Hállese el número p, si se sabe que p, $(p + 2)$ y $(p + 4)$ son números primos.

58. Demuéstrese que la suma (la diferencia, el producto, el cociente) de dos números irracionales puede ser un número racional.

59. Demuéstrese la irracionalidad de los números $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{49}$; $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$.

60. Demuéstrese que una fracción decimal infinita 0,12345678910ll . . ., donde tras la coma vienen seguidamente todos los números naturales, es aperiódica.

61. Sea $a \geqslant b > 0$; $c > d > 0$. Demuéstrese que $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

62. Demuéstrese que $|a| = |-a|$; $|a| \geqslant a$; $|a| \geqslant -a$.

Hállese el conjunto de todos los números, para cada uno de los cuales es válida la igualdad (63 . . . 73):

63. $|-a| = a$. **64.** $|-a| = -a$. **65.** $a + |a| = 0$. **66.** $a - |a| = 0$. **67.** $a + |a| = 2a$. **68.** $a\,|a| = -a^2$. **69.** $\frac{a}{|a|} = 1$.

70. $\frac{a}{|a|} = -1$. **71.** $\sqrt{a^2} = -a$. **72.** $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$. **73.** $\sqrt{3a^2} = -a\sqrt{3}$.

74. ¿Cuáles de las siguientes desigualdades son válidas: $5 \geqslant 2$; $3 \geqslant 3$; $\sqrt{4} \leqslant 2$; $6 \leqslant \sqrt{49}$ y $38 \leqslant \sqrt{912}$?

Si dos números reales a y b son tales que $a > b$, ¿será válida la desigualdad (75, 76): **75.** $a^2 > b^2$; **76.** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$?

Hállese el conjunto de todos los números, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad (77 . . . 88):

77. $|-a| \leqslant a$. **78.** $|a| \leqslant -a$. **79.** $|a| \leqslant |-a|$. **80.** $a\,|a| \geqslant a^2$.

81. $\frac{a}{|a|} \leqslant -1$. **82.** $\frac{a}{|a|} \geqslant 1$. **83.** $\sqrt{a^2} \leqslant -a$. **84.** $a\sqrt{5} \leqslant \sqrt{5a^2}$.

85. $\sqrt{7a^2} \leqslant -a\sqrt{7}$. **86.** $|a| - a \leqslant 0$. **87.** $|a| + a \leqslant 2a$. **88.** $|a| + a \leqslant 0$.

Hállese la intersección de los siguientes dos conjuntos (89 . . . 96):

89. $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$ y $[-6;\ 2]$. **90.** $\left[\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ y $\left[1\frac{2}{5};\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$.

91. $[-\sqrt{3};\ 2]$ y $\left(1\frac{18}{25};\ 4\right)$. **92.** $(-\sqrt{5};\ 4]$ y $[4;\ \sqrt{17}]$.

93. $\left(1;\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4};\ 2\right)$. **94.** $(-\infty;\ 2)$ y $(-\sqrt{3};\ 10]$.

95. $\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ y $\left(\frac{-\sqrt{2}-0{,}6}{2};\ +\infty\right)$.

96. $(-\sqrt{17};\ \sqrt{5})$ y $\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2};\ 6\right]$.

Hállese la unión de los siguientes dos conjuntos (97 . . . 105):

97. $[-1{,}5;\ 4]$ y $[-2;\ 1]$. 98. $[1;\ 5]$ y $[0;\ 6)$. 99. $[2;\ 4]$ y $[4;\ 7]$.
100. $(-1;\ 4)$ y $(0;\ 3]$.

101. $(-\infty;\ 2]$ y $[-3;\ 5)$. 102. $(0;\ 1)$ y $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$

103. $(-\infty;\ 2]$ y $\left[\frac{\sqrt{7}}{2};\ \sqrt{17}\right)$. 104. $(-4;\ 3)$ y $(2;\ 4]$.

105. $[-1;\ 1)$ y $(0{,}2;\ 2]$.

Indíquese en el eje numérico el conjunto de todos los números que satisfacen la condición (106 . . . 113):

106. $|x| = 1$. 107. $|x| < 3$. 108. $|x| \geqslant 2$. 109. $1 < x \leqslant 4$. 110. $-3 \leqslant x < 0$. 111. $(x-1)(x-2) = 0$. 112. $(x-1)^2(x+3) \leqslant 0$. 113. $(x-2)^2 \times (x^2+4) \leqslant 0$.

114. ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar empleando las cifras 1, 2, 3, 4, 5, si en la anotación de cada tal número ninguna de las cifras se repite?

115. ¿Cuántos números diferentes del teléfono, compuestos de siete cifras, pueden marcarse con ayuda del disco dotado de diez orificios que tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0?

116. ¿Cuántos son los métodos con cuya ayuda se pueden elegir en un grupo de 25 hombres un responsable sindical, un responsable del deporte y un funcionario de la sección de cultura?

117. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para seleccionar unos cuantos libros (no menos de un libro) entre 5 manuales iguales de Algebra y 4 manuales iguales de Geometría?

118. Una compañía se compone de 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para formar la guardia de servicio que sea compuesta por un oficial, 2 sargentos y 20 soldados?

119. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para poner 20 libros en un armario de 3 anaqueles, si en cada anaquel caben todos los 20 libros?

120. Un hombre tiene 7 libros y otro, 9. ¿Cuántos son los métodos con ayuda de los cuales ellos pueden cambiar de a dos libros uno con el otro?

CAPÍTULO

II

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

§ 1. Definiciones y propiedades principales

Expresiones matemáticas y algebraicas. En el capítulo anterior se han examinado números reales y algunas operaciones con éstos. Con ayuda de los números, los signos de operaciones y del paréntesis se componían diferentes *expresiones numéricas*. Aduzcamos ejemplos de ciertas expresiones numéricas:

$$(27:9);\quad \sqrt{8+1}.$$

$$\frac{\left(\frac{3}{11}-\frac{7}{2}\right)\frac{11}{71}-\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{35}{47}}{\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{2}\right)\frac{19}{17}};$$

$$2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+10-5.$$

Si en una expresión numérica se pueden realizar todas las operaciones indicadas en ella, el número real, obtenido como resultado de las operaciones cumplidas, se denomina *valor numérico de la expresión numérica dada* y, refiriéndose a la propia expresión, se dice que *tiene sentido*. En los ejemplos citados cada una de las primeras tres expresiones numéricas tiene un valor numérico igual a 3, y la cuarta, a 2705.

Si una expresión numérica consta de un solo número real, su valor numérico será el propio número.

A veces la expresión numérica no tiene valor numérico, puesto que no son realizables todas las operaciones indicadas en ella; refiriéndose a tal expresión numérica, se dice que *ella no tiene sentido (está privada de sentido)*. Por ejemplo, las expresiones numéricas $\frac{7}{3\cdot 2-6}$; $\sqrt{10-8}$ y $(2-2)^0$ están privadas de sentido.

De este modo, cualquier expresión numérica o bien tiene valor numérico o bien está privada de sentido.

La expresión numérica se usa frecuentemente para describir tal o cual propiedad de un número que representa el valor numérico de dicha expresión. Así, por ejemplo, la propiedad del número (—17) de dar, al dividirlo por 2, un resto igual a la unidad se escribe mediante una expresión numérica $2(-9)+1$. Para describir la propiedad de todo número impar encerrado dentro del segmento $[-2; 14]$ de dar, al dividirlo por 2, un resto igual a 1, se debe escribir la expresión numérica correspondiente para cada uno de los números -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13, es decir, las siguientes ocho expresiones:

$$2\cdot(-1)+1; \quad 2\cdot 0+1; \quad 2\cdot 1+1; \quad 2\cdot 2+1;$$
$$2\cdot 3+1; \quad 2\cdot 4+1; \quad 2\cdot 5+1; \quad 2\cdot 6+1.$$

La misma propiedad se puede escribir, aplicando el simbolismo literal, de la manera siguiente: $2l+1$, donde $l\in\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

El ejemplo aducido muestra que en lugar de las expresiones numéricas resulta, a menudo, más cómodo analizar las expresiones, en las cuales en algunos lugares figuran letras en vez de números. Toda expresión de esta índole se llama *expresión matemática*. Los ejemplos de expresiones matemáticas son:

$$\frac{7}{a}; \quad 2^{b+3}\operatorname{sen}\frac{b-a}{c}; \quad \sqrt{3+\lambda}; \ \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}; \quad \log_c\frac{3+\sqrt{m}}{n}.$$

Observemos que el concepto «expresión matemática» es el más simple, por lo cual no se define, sino sólo se describe, lo que se ha hecho más arriba. La expresión matemática en la cual con los números y las letras (que figuran en dicha expresión) se realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia natural y extracción de una raíz aritmética, recibe el nombre de *expresión algebraica.*

Más abajo vienen los ejemplos de expresiones algebraicas:

$$a+b; \quad \frac{a-c}{a-b}; \quad 2-\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\beta} \quad \sqrt{2\alpha\beta}-1; \quad \frac{\sqrt{3}\,(a^2-b^2)}{(m-n)+\sqrt{xy}}+abc$$

Una expresión algebraica se llama *racional*, si participan en ella (respecto de las letras que figuran en la expresión) sólo las operaciones de adición, multiplicación, sustracción, división y elevación a potencia natural (la expresión algebraica racional puede contener cualesquiera números, incluídos los irracionales). Los ejemplos de expresiones algebraicas racionales son:

$$\frac{\alpha}{2m}+\sqrt{3}\,a^7; \quad \frac{a-b}{c-a} \quad \frac{3b+m}{\sqrt{5}\,(m-n)}+xy; \quad 2x-\pi ab.$$

Una expresión racional se llama *entera respecto de la letra dada*, si no contiene la operación de división por la letra dada o por una expresión en que figura esta letra.

La expresión racional fraccionaria respecto de una letra dada es una expresión racional que contiene la operación de división por cierta expresión en la que figura esta letra, o por la propia letra.

Por ejemplo, la expresión racional $\frac{a+b+c}{3a+4b}$ es entera respecto de la letra c, y fraccionaria respecto de las letras a y b; la expresión racional $\frac{3a}{7}+\frac{\sqrt{2}}{b}$ es entera respecto de a, pero fraccionaria respecto de b.

Una expresión algebraica se denomina *irracional*, si en ella se prevé la operación de extracción de una raíz aritmética respecto de las letras que la integran.

Los ejemplos de expresiones algebraicas irracionales son:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2ab; \quad \sqrt{c+1}; \quad 2\sqrt{3}\,l+\sqrt[3]{3l-1}.$$

Operaciones con expresiones algebraicas. Sean dadas dos expresiones algebraicas que se denotan con las letras A y B. Definamos para ellas las operaciones aritméticas.

Adicionar dos expresiones algebraicas A y B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A + B$, denominada *suma* de las expresiones A y B.

Por ejemplo, la suma de las expresiones algebraicas $\frac{a-b}{c-a}$ y $\frac{\alpha}{2p}$ será la expresión algebraica $\frac{a-b}{c-a}+\frac{\alpha}{2p}$.

Multiplicar dos expresiones algebraicas A y B significa escribir formalmente la expresión algebraica AB denominada *producto* de las expresiones A y B.

Por ejemplo, el producto de las expresiones algebraicas $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}$ y $(a^2 - b^2)$ lo representará la expresión algebraica $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}\cdot(a^2 - b^2)$.

Si hay necesidad de adicionar varias expresiones algebraicas, se suman primeramente las dos primeras expresiones y luego a la suma obtenida se le adiciona la tercera expresión, etc. Por ejemplo, la suma de cinco expresiones algebraicas es como sigue: $\{[(A + B) + C] + D\} + E$. De modo análogo se define también el producto de varias expresiones algebraicas.

Si en un producto una misma expresión algebraica A interviene como factor n veces ($n > 1$, $n \in N$), se escribe A^n en lugar del producto $\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ veces}}$.

Por ejemplo, en lugar del producto $(a + b)(a + b)(a + b)$ se escribe $(a + b)^3$. En vez de A^1 se escribe, de ordinario, A.

Sustraer de una expresión algebraica A otra expresión algebraica B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A - B$, llamada *diferencia* de las expresiones A y B.

Por ejemplo, la diferencia entre las expresiones algebraicas abc^3 y $\frac{a^{2mn}}{pq}$ tendrá por expresión algebraica: $abc^3 - \frac{a^{2mn}}{pq}$.

Dividir una expresión algebraica A por otra expresión algebraica B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A : B$, denominada *cociente* de la división de la expresión A por la expresión B.

Por ejemplo, el cociente de la división de la expresión algebraica $(a - b^2)$ por la expresión algebraica $\frac{p}{5l}$ será la expresión algebraica $(a - b^2) : \frac{p}{5l}$. Indiquemos que el cociente de la división de la expresión algebraica A por la B se denota frecuentemente en la forma $\frac{A}{B}$.

Campo de valores admisibles de una expresión algebraica. Está claro que por campo de valores admisibles de una expresión algebraica se debe entender el dominio en que dicha expresión algebraica tiene sentido. Sin embargo, este concepto requiere una precisión.

Sea dada una expresión algebraica. El conjunto de todas las letras que integran dicha expresión se denomina *colección literal* de la expresión algebraica dada.

Si en una expresión algebraica entran n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la colección literal de dicha expresión algebraica se escribe en la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Cualquier letra, independientemente de la frecuencia con la que se encuentra en la expresión algebraica, se escribe en la colección literal sólo una vez. Al componer la colección literal de la expresión algebraica dada, el orden en que siguen las letras puede mantenerse cualquiera, pero fijo de una vez y para siempre.

Por ejemplo, para la expresión algebraica $\frac{2a-7b}{\sqrt{19ac}}$, de colección literal puede servir la (a, b, c); para la expresión algebraica $\sqrt[3]{\frac{a}{2}+a^3b^k-\alpha}$, la colección (k, α, a, b).

Si en la colección literal (α, β, γ) tomamos en lugar de la letra α un número, por ejemplo, $\left(-\frac{7}{16}\right)$, en lugar de β, el número $\sqrt{2}$, y en lugar de γ, el número 0,3, entonces la colección de números $\left(-\frac{7}{16}\right)$, $\sqrt{2}$ y 0,3 se denominará colección numérica correspondiente a la colección literal dada (α, β, γ) y se escribirá en la forma $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$. En este caso se dice que la colección numérica $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$ corresponde a la colección literal (α, β, γ) para $\alpha = -\frac{7}{16}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = 0{,}3$.

De modo análogo se determina la colección numérica correspondiente a la colección literal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y para cualquier colección de n letras (n es un número natural cualquiera).

A una misma colección literal se le puede poner en correspondencia una infinidad de diferentes colecciones numéricas.

Dos colecciones numéricas se consideran diferentes, si al menos en un lugar y, además, en el mismo en cada colección, por ejemplo en el i-ésimo lugar de dichas colecciones numéricas se disponen números no iguales (es decir, en vez de una misma letra dispuesta en el i-ésimo lugar de la colección literal, en estas dos colecciones numéricas figuran números distintos). Por ejemplo, las colecciones numéricas $\left(1, -3, -5, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$ y $\left(1, -3, -4, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$, correspondientes a la colección literal (a, b, c, d, e), son diferentes, puesto que en un mismo (tercer) lugar de ellas se disponen números desiguales (-5) y (-4) (es decir, en la primera colección $c = -5$, y en la segunda, $c = -4$). Las colecciones numéricas $\left(-3, -\frac{9}{7}\right)$ y $\left(-\frac{9}{7}, -3\right)$, correspondientes a la colección literal (x, y), son diferentes, puesto que los primeros lugares de ellas están ocupados por números desiguales (es decir, en la primera colección $x = -3$, y en la segunda, $x = -\frac{9}{7}$; además, son diferentes, porque en el segundo lugar de ellas figuran números desiguales (es decir, en la primera colección $y = -\frac{9}{7}$, y en la segunda, $y = -3$).

Sean dadas una expresión algebraica y su colección literal. Examinemos cierta colección numérica correspondiente a la colección literal citada. Esta colección numérica se denomina *colección numérica* para las letras de la expresión algebraica dada. Si en dicha expresión algebraica sustituimos en lugar de cada letra, cualquiera que sea el lugar que ocupe, el número, que le corresponde, de la colección literal dada, obtendremos una expresión numérica, la cual o bien tiene sentido o bién está privada de sentido. Por ejemplo, examinemos la expresión algebraica $\frac{b-3a}{\sqrt{5+a}}$. Escribamos su colección literal en la forma (a, b). Para la colección numérica $(4, 5)$, correspondiente a la colección literal (a, b), (es decir, para $a = 4$, $b = 5$), esta expresión algebraica se escribe en forma de la expresión algebraica $\frac{5-3\cdot 4}{\sqrt{5+4}}$ y tiene el valor numérico $\left(-\frac{7}{3}\right)$. Para la colección numérica $(-6, 5)$ (es decir para $a = -6$ y $b = 5$) esta expresión algebraica se escribirá en forma de la expresión algebraica $\frac{5-3(-6)}{\sqrt{5-6}}$, la cual no tiene sentido.

La colección numérica correspondiente a la colección literal de la expresión algebraica dada se llama *admisible* para dicha expresión, siempre que tiene sentido la expresión numérica que se obtiene a partir de la expresión algebraica dada, si en lugar de cada letra, independientemente del lugar que ocupa en ella, sustituimos el número, que le corresponde, perteneciente a la colección numérica dada.

La totalidad de todas las colecciones numéricas admisibles, correspondientes a la colección literal de la expresión algebraica dada, se llama *campo de valores admisibles* (CVA) de la expresión algebraica dada.

Observemos que existen expresiones algebraicas cuyo CVA es vacío. Por ejemplo, es vacío el CVA de la expresión algebraica $\frac{1}{2a-(a+a)}$, pues para cualquier valor numérico de la letra a, la correspondiente expresión numérica no tiene sentido. Las expresiones de esta índole se llaman expresiones privadas de sentido y no se tratarán en lo que sigue. El CVA de una expresión algebraica se escribe, por regla general, en forma de la colección de conjuntos, con la particularidad de que se indica a qué letra corresponde cada conjunto. Así por ejemplo, el CVA de la expresión $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ se escribe en la forma $\{(a, b) \mid a \in (-5; +\infty); b \in (-\infty; +\infty)\}$.

Se llama *valor numérico* o *magnitud numérica* de una expresión algebraica para la colección numérica dada del CVA al valor numérico de aquella expresión numérica que se obtiene, si se sustituye en lugar de cada letra de la expresión algebraica dada, independientemente del lugar que ocupa, el número, perteneciente a la colección numérica dada, que le corresponde.

Por ejemplo, el valor numérico de la expresión algebraica $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ para $a=4$ y $b=5$, será el número $\frac{2}{3}$, y para $a=0, b=4$, el número $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

A menudo las expresiones algebraicas se analizan no en todo su campo de valores admisibles, sino sólo en una parte de él, a saber, en cierta región M.

Por ejemplo, examinemos la expresión algebraica vt. El CVA de esta expresión es $\{(v, t) \mid v \in R; t \in R\}$. Supongamos que dicha expresión algebraica vt representa el camino recorrido durante el tiempo t a la velocidad v. Entonces, de acuerdo con el sentido físico del problema, se deben imponer a v y t las restricciones: $v \geqslant 0$ y $t \geqslant 0$. Con otras palabras, se debe examinar la expresión algebraica vt en la siguiente región M que forma parte del CVA de esta expresión: $M = \{(v, t) \mid v \in [0; +\infty); t \in [0; +\infty)\}$. La expresión algebraica se da habitualmente junto con la región M, en la que se analiza. Si la región M no está definida, la expresión algebraica ha de analizarse en todo el CVA que debemos previamente determinar.

Sean dadas dos expresiones algebraicas A y B. El conjunto de todas las letras de estas dos expresiones se llamará *colección literal de dos expresiones A y B*. La colección numérica, correspondiente a la colección numérica literal de dos expresiones algebraicas, se denomina *admisible*, si tienen sentido simultáneamente ambas expresiones numéricas que se obtienen a partir de las expresiones algebraicas dadas, si en lugar de cada letra, no importa en qué lugar se disponga, sustituimos en éstas el número perteneciente a la colección numérica mencionada, que le corresponde a dicha letra.

La totalidad de todas las colecciones numéricas admisibles, correspondientes a la colección literal de dos expresiones algebraicas, recibe el nombre de *campo de valores admisibles* (CVA) de estas expresiones algebraicas.

Ejemplo. $A=\frac{b+7}{\sqrt{b+3}\,(a-2)}$; $B=\frac{(a+b)\sqrt{a+1}}{b+8}$. El CVA de estas dos expresiones algebraicas se escribe en la forma $\{(a,\ b)\mid a\in$ $\in[-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty);\ b\in(-3;\ +\infty)\}$.

De modo análogo se determina el CVA de n expresiones algebraicas. Dos expresiones algebraicas pueden analizarse no en todo el CVA, sino sólo en cierta parte de él, es decir, en cierta región M. En vista de ello, por región M, perteneciente al CVA de las expresiones algebraicas, se entenderá en adelante o bien todo el CVA o bien una parte de él que se indica de modo explícito.

§ 2. Igualdades y desigualdades de las expresiones algebraicas

Igualdades de las expresiones algebraicas. Dos expresiones algebraicas se llaman *idénticamente iguales en la región* M, si para cualquier colección numérica de la región M son iguales los valores numéricos correspondientes de estas expresiones.

Por ejemplo, dos expresiones algebraicas $(a+1)^2$ y (a^2+2a+1) son idénticamente iguales tanto en todo el CVA de estas expresiones, es decir, en el campo $\{(a)\mid a\in(-\infty;\ +\infty)\}$, como en cualquiera de sus partes. Dos expresiones algebraicas $m+d+\frac{a-b}{3+c}$ y $\frac{d(3+c)+(a-b)}{3+c}$ son idénticamente iguales no en todo el CVA de estas dos expresiones que se representa por el campo $\{(a,\ b,\ m,\ c,\ d)\mid a\in R,\ b\in R;\ m\in R;\ c\in(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ +\infty);$ $d\in R\}$, sino sólo en una parte de él, es decir, en la región M, donde $M=\{(a,\ b,\ m,\ c,\ d)\mid a\in R;\ b\in R;\ m\in\{0\};\ c\in(-\infty;\ -3)\cup$ $\cup(-3;\ +\infty);\ d\in R\}$. Para escribir una igualdad idéntica de dos expresiones algebraicas en la región M se emplea, a veces, el signo de igualdad, por encima del cual se pone la letra M, es decir, si ciertas expresiones algebraicas vienen denotadas con las letras A y B, la escritura $A\overset{M}{=}B$ significa que las expresiones algebraicas A y B son idénticamente iguales en la región M, y la propia región M es una parte del CVA de dos expresiones A y B.

Por ejemplo, la escritura

$$\frac{a-b}{3+c}\overset{\text{CVA}}{=}\frac{a}{3+c}-\frac{b}{3+c}$$

significa que las expresiones algebraicas $\left(\frac{a-b}{3+c}\right)$ y $\left(\frac{a}{3+c}-\frac{b}{3+c}\right)$ son idénticamente iguales en el CVA de estas expresiones, es decir, en el campo $\{(a,\ b,\ c) \mid a \in R;\ b \in R,\ c \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)\}$ y la notación $\sqrt{a^2} \overset{M}{=} a$, en la que $M = \{(a) \mid a \in [0;\ +\infty)\}$ significa que la igualdad idéntica de las expresiones algebraicas $\sqrt{a^2}$ y a se confirma sólo en la región M.

La sustitución de una expresión algebraica A por otra expresión algebraica B, idénticamente igual a A en la región M, perteneciente al CVA de las expresiones A y B, se denomina *transformación idéntica en la región* M de la expresión algebraica A. Si no se indica la región M, en la que se realiza la transformación idéntica, suele considerarse que dicha transformación tiene lugar en el CVA de dos expresiones: la dada y la transformada.

Por ejemplo, la sustitución de la expresión algebraica $(a+1)^2$ por la expresión algebraica a^2+2a+1 será idéntica en el CVA de estas expresiones, es decir, en la región M, donde $M = \{(a) \mid a \in \in R\}$.

Será legítima la pregunta de si es posible la notación $A \overset{M}{=} B$ sin la letra M por encima de igualdad y qué significa esta notación.

Por supuesto, se puede escribir formalmente $A = B$, pero si junto a esta igualdad no hay palabras que expliquen cómo debe entenderse tal escritura, entonces la última está privada de sentido lógico alguno. Por consiguiente, la escritura de este tipo ha de utilizarse sólo acompañada de explicaciones determinadas que puedan explicar cómo ella se debe entender.

Indiquemos ahora los casos, que se encuentran con mayor frecuencia, en los que la escritura $A = B$ se acompaña de explicaciones correspondientes referentes a cómo se debe entender tal escritura.

a) Supongamos que se sabe que en cierta región M, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas A y B, estas dos expresiones son idénticamente iguales. Entonces esta afirmación se escribe así: «*Se sabe* (*o por hipótesis*) *que* $A = B$ *en la región* M». En este caso se dice también que en la región M *viene dada la igualdad idéntica* $A = B$.

b) Supóngase que se necesita demostrar la validez de la afirmación: las expresiones algebraicas A y B son idénticamente iguales en la región M perteneciente al CVA de estas expresiones. En este caso se escribe: «*Demuéstrese que* $A = B$ *en la región* M». Suele decirse también que se necesita *demostrar que en la región* M *es válida la igualdad idéntica* $A = B$.

c) Supóngase que se necesita hallar una región M, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas A y B, tal que para cualquier colección numérica de la región M el correspondiente valor numérico de la expresión A sea igual al valor numérico correspondiente de la expresión B, y para cualquier colección numérica que no forma parte de la región M, pero sí pertenece al CVA de dichas expresiones, los valores numéricos correspondientes de las expresiones dadas sean distintos. En semejantes casos dicen: «*Resolver la ecuación* $A = B$».

Observemos, ante todo, que la adición y la multiplicación de las expresiones algebraicas se realizan haciendo uso de las siguientes **afirmaciones**:

1. *En el CVA de las expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $A + B = B + A$.

2. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. *En el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $AB = BA$.

4. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $(AB)\,C = A\,(BC)$.

5. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $A\,(B + C) = AB + AC$.

Por cuanto la validez de estas afirmaciones se demuestra mediante un mismo método, daremos a conocer aquí solamente la **demostración** de la afirmación 1.

Elijamos una colección numérica dentro del CVA de dos expresiones A y B y denotemos con A_0 y B_0 respectivamente, los correspondientes valores numéricos de estas expresiones. Entonces, conforme a la propiedad de conmutatividad de la adición de números, para los números A_0 y B_0 es válida la igualdad numérica $A_0 + B_0 = B_0 + A_0$. Quiere decir, se ha mostrado que para la colección numérica dada dentro del CVA de dos expresiones A y B los valores numéricos correspondientes de las expresiones $A_0 + B_0$ y $B_0 + A_0$ son iguales. Por cuanto este razonamiento puede aplicarse para cualquier colección numérica del CVA de dos expresiones A y B, queda demostrada la igualdad idéntica $A + B = B + A$ en el CVA de estas expresiones.

De modo análogo se demuestran también las **afirmaciones** siguientes:

6. *En el CVA de la expresión A se verifican las igualdades idénticas* $A + 0 = A$, $0 + A = A$.

7. *En el CVA de la expresión A se verifican las igualdades idénticas* $A \cdot 1 = A$, $1 \cdot A = A$.

8. *En el CVA de la expresión A se verifica la igualdad idéntica* $A + (-A) = 0$.

9. *En la región M (una parte del CVA de la expresión A), donde no existe una colección numérica, para la cual el valor numérico correspondiente de la expresión A fuera igual a cero, se verifica la igualdad idéntica* $A \cdot \frac{1}{A} = 1$.

Haciendo uso de las afirmaciones 1 . . . 9, podemos mostrar que las operaciones de sustracción y división de las expresiones algebraicas son respectivamente inversas a las operaciones de adición y multiplicación de expresiones algebraicas. A saber, son lícitas las siguientes *afirmaciones*.

10. *En el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $B + (A - B) = A$.

11. *En la región M (una parte del CVA de dos expresiones A y B), donde no existe una colección numérica para la cual el valor numérico correspondiente de la expresión B fuera igual a cero, se verifica la igualdad idéntica* $B\left(\frac{A}{B}\right) = A$.

Aduzcamos ahora las **afirmaciones**, empleadas frecuentemente al demostrar las igualdades de las expresiones algebraicas.

12. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A = B$ y $B = C$, entonces, en la región M se verifica también la igualdad idéntica $A = C$ (transitividad de las igualdades).*

13. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A = B$ y $C = D$, entonces en la región M se verifica también la igualdad idéntica $A + C = B + D$.*

14. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A = B$ y $C = D$, entonces en la región M se verifica también la igualdad idéntica $AC = BD$.*

El método por el que se demuestran las afirmaciones 10 . . . 14 es el mismo que se emplea para demostrar las afirmaciones 1 . . . 9. **Demostremos**, por ejemplo, la afirmación 12.

Tomemos cierta colección numérica de la región M. Denotemos los valores numéricos correspondientes de las expresiones A, B y C con A_0, B_0 y C_0, respectivamente. Del hecho de que en la región M se verifican las igualdades idénticas $A = B$ y $B = C$ se desprende la validez de las igualdades idénticas $A_0 = B_0$ y $B_0 = C_0$. En tal caso, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las igualdades idénticas, se verifica también la igualdad numérica $A_0 = C_0$. De este modo se ha mostrado que para la colección numérica dada de la región M los valores numéricos correspondientes de las expresiones A y C son iguales. Por cuanto tal razonamiento puede realizarse para cualquier colección numérica de la región M, la validez de la igualdad idéntica $A = C$ en la región M queda demostrada.

Se ha aceptado el siguiente convenio: si no se indica explícitamente la región M, en la cual se estudia la igualdad idéntica $A = B$, ésta se analiza en el CVA de dos expresiones A y B. Por esta razón las palabras «se sabe que $A = B$» significan que en el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica $A = B$. Las palabras «demostrar que $A = B$» significan que primeramente es necesario hallar el CVA de dos expresiones A y B, y luego demostrar la igualdad idéntica $A = B$ en el CVA dado.

En particular, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, las **afirmaciones** 1 . . . 5, llamadas comúnmente leyes de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas, se pueden escribir también del modo siguiente:

Son válidas las siguientes leyes de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas:

1. $A + B = B + A$ (conmutatividad de la adición);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociatividad de la adición);
3. $AB = BA$ (conmutatividad de la multiplicación);
4. $(AB)\,C = A\,(BC)$ (asociatividad de la multiplicación);
5. $(A + B)\,C = AC + BC$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Antes de estudiar la aplicación de estas afirmaciones para demostrar las igualdades, demos la definición de paso equivalente de una igualdad a otra.

Si en cierta región M la validez de una igualdad idéntica predetermina la validez de la segunda, y de la validez de la segunda igualdad se deduce la de la primera, entonces se dice que estas dos igualdades idénticas son *equivalentes en la región M*, y la sustitución de una de ellas por la otra se denomina *paso equivalente en la región M* de la primera igualdad a la segunda.

En adelante omitiremos, para brevedad, la palabra «idéntica», siempre que ello no lleve a una equivocación.

El paso equivalente en la región M de una igualdad a otra se denota con una flecha doble, por encima de la cual se escribe la letra M, es decir, la notación $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} C = D$ significa que en la región M las igualdades $A = B$ y $C = D$ son equivalentes.

Entonces, de la validez de las afirmaciones 13, 14 se desprende la validez de los siguientes pasos equivalentes.

15. *Sea M el CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, entonces* $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C$.

16. *Supongamos que la región M pertenece al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, y posee la propiedad siguiente: cualquiera que sea la colección numérica perteneciente a la región M, el valor numérico correspondiente de la expresión C no es igual a cero. Entonces,* $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC = BC$.

Demostremos, por ejemplo, la afirmación 15. Por cuanto $C = C$, de la afirmación 13 se deduce que resulta legítimo el paso de la igualdad $A = B$ a otra igualdad $A + C = B + C$. Viceversa, disponiendo de las igualdades $A + C = B + C$ y $(-C) = (-C)$ y recurriendo a las afirmaciones 13 y 8, llegamos a que resulta legítimo el paso de la igualdad $(A + C) = (B + C)$ a la igualdad $A = B$. Por consiguiente, es válido el paso equivalente

$$A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C.$$

Las afirmaciones aducidas 1 ... 16 permiten demostrar las igualdades entre expresiones algebraicas. Demostremos, por ejemplo, que en el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad

$$A - B = A + (-B).$$

En virtud de la afirmación 15, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$A - B + B = A + (-B) + B.$$

De acuerdo con las afirmaciones 1, 2 y 10 se verifican las siguientes igualdades:

$$A - B + B = B + (A - B) \quad \text{y} \quad B + (A - B) = A.$$

Por consiguiente, $A - B + B = A$.

Análogamente, haciendo uso de las afirmaciones 2, 8, tenemos $A + (-B) + B = A$.

De este modo, queda demostrado que la igualdad $A - B + B = A + (-B) + B$ se verifica en el CVA de las expresiones algebraicas A y B. Por consiguiente, en este CVA se verifica también la igualdad $A - B = A + (-B)$.

Desigualdades de las expresiones algebraicas. Pasemos ahora al empleo del signo de desigualdad para las expresiones algebraicas. El signo de desigualdad $>$ ($\geqslant$, $<$ o $\leqslant$), al igual que el signo de igualdad, se usa para las expresiones algebraicas sólo con ciertas explicaciones respecto a cómo se debe entender una notación de esta índole. Demos a conocer algunos de los casos en que dichos signos se emplean con mayor frecuencia.

a) Supongamos que se sabe que en cierta región M, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas A y B, para cualquier colección numérica de M el correspondiente valor numérico de la expresión A es mayor que el valor numérico correspondiente de la expresión B. Entonces, esta afirmación se escribe del modo siguiente: «*Se sabe* (o *por hipótesis*) *que $A > B$ en la región M*». En este caso se dice también que en la región M *se verifica la desigualdad idéntica* $A > B$.

b) Supongamos que se necesita demostrar la validez de la afirmación: «para cualquier elección numérica de la región M, perteneciente al CVA de dos expresiones A y B el valor numérico correspondiente de la expresión A es superior al valor numérico correspondiente de la expresión B». Entonces se escribe: «*Demuéstrese que en la región M $A > B$*». En este caso se dice también que *se necesita demostrar la validez de la desigualdad idéntica $A > B$ en la región M*.

c) Supongamos que se necesita hallar una región M, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas A y B, tal que para cualquier colección numérica de la región M el valor numérico correspondiente de la expresión A es mayor que el valor numérico correspondiente de la expresión B, y para cualquier colección numérica del CVA, que no forma parte de la región M, el valor numérico correspondiente de la expresión A es menor o igual que el valor numérico correspondiente de la expresión B. En estos casos se dice: «*Resuélvase la desigualdad $A > B$*».

Al demostrar igualdades idénticas hay que emplear frecuentemente las **afirmaciones** siguientes:

17. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas $A > B$ y $B > C$, entonces en la región M se verifica también la desigualdad idéntica $A > C$* (propiedad de transitividad de una desigualdad).

18. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas $A > B$ y $C > D$, entonces en la región M se verifica también la desigualdad idéntica $A + C > B + D$.*

19. *Si para cualquier colección numérica de cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, los valores numéricos correspondientes de estas expresiones A, B, C y D son positivos y si en esta región se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas $A > B$ y $C > D$, entonces será válida también la desigualdad idéntica $AC > BD$.*

Demos ahora la definición de paso equivalente de una desigualdad a otra.

Si en cierta región M de la validez de la primera desigualdad idéntica se desprende la validez de la segunda, y de la validez de la segunda desigualdad se deduce la validez de la primera, suele decirse que estas dos desigualdades idénticas *son equivalentes en la región M*, y la sustitución de una de ellas por la otra se denomina *paso equivalente* de una desigualdad a la otra. En este caso se emplea el signo de paso equivalente $\Leftrightarrow$.

La validez de las afirmaciones 17 . . . 19 predetermina la validez de los siguientes pasos equivalentes.

20. *Sea M el CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, entonces, $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C > B + C$.*

21. *Supongamos que cierta región M pertenece al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C y posee la siguiente propiedad: para cualquier colección numérica perteneciente a la región M el valor numérico correspondiente de la expresión C es positivo. Entonces, $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC > BC$.*

Existe el convenio siguiente: si no se indica explícitamente la región M, en la que se analiza la desigualdad idéntica $A > B$, ésta se estudia en el CVA de dos expresiones algebraicas A y B. Por eso, las palabras «*sea $A > B$*» significan que en el CVA de dos expresiones A y B se verifica la desigualdad idéntica $A > B$; las palabras «*demuéstrese que $A > B$*» significan la necesidad de demostrar que en el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica $A > B$ (en este caso se sobreentiende que dicho CVA debe ser determinado obligatoriamente). Si se da la desigualdad $A > B$, entonces el CVA de dos expresiones A y B se denomina, a menudo, CVA de la desigualdad $A > B$.

Cabe señalar que las afirmaciones 17 . . . 21 quedan en vigor también en el caso de desigualdades no rigurosas. Por ejemplo, la propiedad de transitividad de las igualdades puede enunciarse así.

17a. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A \geqslant B$ y $B > C$, entonces en la región M se verifica también la desigualdad $A > C$.*

17b. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas $A > B$ y $B \geqslant C$, entonces en la región M se verifica también la desigualdad $A > C$.*

Si ambas desigualdades son no rigurosas, la desigualdad que proviene de ellas tampoco será rigurosa. Por ejemplo, en este caso la afirmación concerniente a la transitividad de las desigualdades se enunciará así.

17c. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A \geqslant B$ y $B \geqslant C$, entonces en la región M se verifica también la desigualdad $A \geqslant C$.*

En adelante, la palabra «idéntica» se omitirá, como se hizo en el caso de igualdades.

Examinemos ahora algunos métodos que se usan para demostrar las igualdades y desigualdades.

1. Análisis de todos los casos posibles. Demostremos, empleando dicho método, las propiedades de los valores absolutos de los números reales del tipo de igualdades y desigualdades:

$$1.\ |a+b| \leqslant |A| + |b|;$$
$$2.\ |a| - |b| \leqslant |a-b|;$$
$$3.\ |ab| = |a|\,|b|; \qquad (1)$$
$$4.\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ \text{si}\ b \neq 0.$$

Comencemos, por ejemplo, con la propiedad 3. Examinemos todos los casos posibles:

$$\alpha)\ \{(a,\ b) \mid a \in [0;\ +\infty);\quad b \in [0;\ +\infty)\},$$
$$\beta)\ \{(a,\ b) \mid a \in [0;\ +\infty);\quad b \in (-\infty;\ 0]\},$$
$$\gamma)\ \{(a,\ b) \mid a \in (-\infty;\ 0];\quad b \in [0;\ +\infty)\},$$
$$\delta)\ \{(a,\ b) \mid a \in (-\infty;\ 0];\quad b \in (-\infty;\ 0]\}$$

y realicemos la demostración en cada caso por separado.

En el caso α), por definición del valor absoluto, tenemos $|a| = a$ y $|b| = b$, por lo cual $|ab| = ab$. Quiere decir, en el caso α)

la igualdad $|ab| = |a|\,|b|$ puede escribirse en la forma $ab = ab$, después de lo cual se hace obvia.

En el caso β) $ab \leqslant 0$, por lo cual según la definición de valor absoluto, $|a| = a$, $|b| = -b$, $|ab| = -ab$. Por lo tanto, en este caso la propiedad 3 puede escribirse en la forma $-ab = a(-b)$, o bien $-ab = -ab$, después de lo cual ella se hace evidente.

En los casos γ) o δ) la propiedad 3 se demuestra análogamente. Del hecho de que la propiedad 3 es válida en todo caso posible se infiere su validez en la enunciación en que está escrito.

Demostremos ahora la propiedad 1. Veamos los siguientes 6 casos:

$$
\begin{array}{llll}
\alpha) & a \geqslant 0; & b \geqslant 0; & \\
\beta) & a \geqslant 0; & b \leqslant 0; & a + b \geqslant 0; \\
\gamma) & a \geqslant 0; & b \leqslant 0; & a + b \leqslant 0; \\
\delta) & a \leqslant 0; & b \geqslant 0; & a + b \geqslant 0; \\
\lambda) & a \leqslant 0; & b \geqslant 0; & a + b \leqslant 0; \\
\nu) & a \leqslant 0; & b \leqslant 0. &
\end{array}
$$

En el caso α) tenemos $|a + b| = a + b = |a| + |b|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|a + b| = |a| + |b|$, después de lo cual se hace evidente.

En el caso β) tenemos $|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|a| - |b| \leqslant |a| + |b|$, después de lo cual la propiedad se hace evidente.

En el caso γ) tenemos $|a + b| = -(a + b) = (-b) - a = |b| - |a|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|b| - |a| \leqslant |a| + |b|$, después de lo cual la propiedad se hace evidente.

En los casos δ), λ) y ν) las demostraciones de la propiedad 1 son análogas a las anteriores. De la validez de la propiedad 1 se deduce en todos los casos posibles su validez en la enunciación en que está escrita. Las propiedades 2 y 4 de los valores absolutos (1) se demuestran análogamente.

2. Utilización de las leyes que rigen las operaciones sobre las expresiones algebraicas y de las propiedades (1—21) que se desprenden de ellas. Demostremos, empleando este método, una igualdad siguiente

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3. \tag{2}$$

Observemos que la igualdad (2) se demuestra en el CVA de tres expresiones $(a + b)$, $(a^2 + b^2)$ y $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$, es decir, en el conjunto $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R\}$. En razón de la ley de distributividad de las operaciones con expresiones algebraicas podemos afirmar que se verifica la igualdad

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2). \tag{3}$$

En virtud de la ley de conmutatividad de la multiplicación se verifican las igualdades

$$a\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a, \tag{4}$$

$$b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,b. \tag{5}$$

En virtud de la ley de distributividad se verifican las igualdades

$$(a^2 + b^2)\,a = a^2a + b^2a, \tag{6}$$

$$(a^2 + b^2)\,b = a^2b + b^2b. \tag{7}$$

En virtud de las leyes de conmutatividad y asociatividad de la multiplicación tenemos

$$a^2a = a^3, \tag{8}$$

$$b^2a = ab^2, \tag{9}$$

$$a^2b = a^2b, \tag{10}$$

$$b^2b = b^3. \tag{11}$$

Por cuanto las igualdades pueden sumarse (véase la propiedad 13 de las igualdades), al adicionar las igualdades (8) y (9) y, luego, las (10) y (11), constatamos que se verifican las igualdades

$$a^2a + b^2a = a^3 + ab^2,$$

$$a^2b + b^2b = a^2b + b^3.$$

Al adicionar estas igualdades y, luego, las (6) y (7), nos convencemos de que se verifican las desigualdades

$$a^2a + b^2a + a^2b + b^2b = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3, \tag{12}$$

$$(a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b = a^2a + b^2a + a^2b + b^2b. \tag{13}$$

Sumando las igualdades (4) y (5), obtenemos la validez de las igual) dades

$$a\,(a^2 + b^2) + b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b. \tag{14}$$

Aplicando las propiedades de transitividad de las igualdades, de la validez de las igualdades (3), (14), (13) y (12) se deduce la validez de las igualdades (2).

Ha de notarse que todos los razonamientos precedentes se escriben en forma de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}(a + b)\,(a^2 + b^2) &= \\ &= a\,(a^2 + b^2) + b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b = \\ &= a^2a + b^2a + a^2b + b^2b = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

De la validez de esta cadena de igualdades se deduce la validez de la igualdad (2). En lo que sigue, empleando para la demostración con este u otros métodos, escribiremos sólo la cadena de igualdades evidentes.

3. Demostración directa. A menudo, al buscar la demostración, pasando de la desigualdad dada a la siguiente, se llega al final a una desigualdad evidente. Si, en este caso, se realizan sólo pasos equivalentes, es decir al realizarse un paso, se obtiene cada vez una desigualdad equivalente a la anterior, de este modo se obtiene, pues, la demostración de la desigualdad de partida. Demostremos, empleando dicho método, la desigualdad siguiente: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ en la región $M = \{(a, b) \mid a \in (0, +\infty); b \in (0;, +\infty)\}$. Escribamos la cadena de pasos equivalentes en la región M:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \overset{M}{\Longleftrightarrow} a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \overset{M}{\Longleftrightarrow} (\sqrt{a})^2 -$$

$$-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \overset{M}{\Longleftrightarrow} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Por cuanto la validez de la última desigualdad es evidente, la equivalencia entre la primera y última desigualdades predetermina la validez de la primera desigualdad.

La desigualdad demostrada se enuncia con frecuencia del modo siguiente: *la media aritmética de dos números positivos no es menor que su media proporcional.*

4. Método por reducción al absurdo. Este método ya se ha usado en el capítulo I al demostrar el teorema sobre la infinidad de números primos. Puede aplicarse también en la demostración de las igualdades y de las desigualdades.

Demostremos, por ejemplo, empleando dicho método, que para cualquier número positivo a se verifica la desigualdad $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe al menos un número positivo a tal que para él se verifica la desigualdad $a + \frac{1}{a} < 2$. Por cuanto a es un número positivo, dicha desigualdad será equivalente, en virtud de la afirmación 21, a la desigualdad $\left(a + \frac{1}{a}\right)a < 2a$, es decir, a la desigualdad $a^2 + 1 < 2a$, la cual conforme a la afirmación 20, es equivalente a la desigualdad $(a^2 + 1) - 2a < 2a - 2a$, es decir, a la desigualdad $a^2 - 2a + 1 < 0$. Reescribamos la última desigualdad en la forma $(a - 1)^2 < 0$. Llegamos a una contradicción con el hecho obvio de que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. La contradicción obtenida habla de que la suposición admitida no es cierta. Por consiguiente, la desigualdad $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ se cumple para cualquier a positivo.

5. Utilización de la propiedad de transitividad de las desigualdades. Supongamos que se pide demostrar en la región M la desigualdad $A < C$. Si se conoce o se ha demostrado que en la región M se verifican las desigualdades $A < B$, $B < C$, o las desigualdades

$A \leqslant B$, $B < C$, o bien las desigualdades $A < B$, $B \leqslant C$, entonces, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, será válida también la desigualdad de partida.

Demostremos, empleando este método, la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

en el conjunto $M = \{(n) \mid n \in N\}$.

Para $n=1$ la desigualdad es evidente. Examinemos ahora cualquier número natural $n \geqslant 2$. Todo sumando de la suma, comenzando por el segundo, lo sustituimos por otro mayor: $\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}<$ $<\frac{1}{k(k-1)}$, donde $2 \leqslant k \leqslant n$. De este modo tenemos la desigualdad válida $A_n < B_n$, donde $A_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ y $B_n=$ $=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}$. Cabe notar que la desigualdad $A_n < B_n$ es rigurosa, cualquiera que sea $n \geqslant 2$.

La expresión algebraica B_n se puede simplificar si cada sumando, a partir del segundo, se sustituye por la suma algebraica $\frac{1}{k(k-1)}=$ $=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Obtendremos

$$B_n=\frac{1}{1^2}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

Es fácil observar que la desigualdad $B_n < 2$ se verifica para cualquier n natural. Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, tenemos $A_n < 2$, lo que se trataba de demostrar.

Demostremos en conclusión las propiedades de elevación a potencia natural de las expresiones algebraicas; estas propiedades son de amplio uso al resolver ecuaciones y desigualdades (véase el cap. III).

Teorema 1. *Supongamos que una región M pertenece al CVA de dos expresiones algebraicas A y B, y posee la siguiente propiedad: para cualquier colección numérica de la región M los valores numéricos correspondientes de las expresiones A y B son positivos. Entonces, en la región M para cualquier número natural n $(n \geqslant 2)$:*

a) *las igualdades $A = B$ y $A^n = B^n$ son equivalentes;*

b) *las desigualdades $A > B$ y $A^n > B^n$ son equivalentes.*

Demostración. Denotemos con C la expresión algebraica $A^{n-1}+$ $+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}$. En el § 6 se demostrará la validez de la siguiente igualdad de las expresiones algebraicas:

$$A^n - B^n = (A - B)\,C. \tag{15}$$

Es obvio que para cualquier colección numérica de la región M el valor numérico correspondiente de la expresión C es positivo.

Demostremos la afirmación a). Supongamos que $A = B$ en la región M. Entonces, en virtud de la afirmación 15, en la región M se verifica la igualdad $A - B = 0$, y de aquí, según la afirmación 16, tendremos que en M se verifica la igualdad $(A - B) C = 0$. De acuerdo con la propiedad de transitividad de las igualdades, de la última igualdad y de la (15) se deduce que $A^n - B^n = 0$, de donde se desprende, conforme a la afirmación 15, que en la región M es válida la igualdad $A^n = B^n$.

Hemos demostrado pues, que en la región M la validez de la igualdad $A = B$ predetermina la validez de la igualdad $A^n = B^n$.

Sea dado ahora que $A^n = B^n$ en la región M. Entonces, en la región M se verifica, según la afirmación 15, la igualdad $A^n - B^n = 0$. De aquí y de la igualdad (15) en la región M tenemos, en virtud de la propiedad de transitividad de las igualdades, $(A - B) C = 0$, de lo cual se deduce, según la afirmación 16, que $A - B = 0$, y, por fin, según la afirmación 15, resulta que $A = B$. Quiere decir, en la región M la validez de la igualdad $A^n = B^n$ predetermina la validez de la igualdad $A = B$. La afirmación a) queda así demostrada.

Demostremos ahora la afirmación b). Sea dado que en la región M tenemos $A > B$. Entonces, en virtud de la afirmación 20, en M se verifica también la desigualdad $A - B > 0$, y de aquí, según la afirmación 21, obtenemos la validez de la desigualdad $(A - B) C > 0$. Tomando en consideración que la igualdad (15) se verifica, llegamos a que $A^n - B^n > 0$. Por fin, de acuerdo con la afirmación 20, resulta que en M se verifica la desigualdad $A^n > B^n$.

Así pues, se ha demostrado que en la región M de la validez de la desigualdad $A > B$, se desprende la validez de la desigualdad $A^n > B^n$.

Sea dado, ahora, que $A^n > B^n$ en la región M. Entonces, de acuerdo con la afirmación 20, en la región M se verifica la desigualdad $A^n - B^n > 0$. De aquí y de la igualdad (15) resulta que $(A - B) C > 0$ en la región M. Al aplicar, ahora, la afirmación 21, encontramos que $A - B > 0$ en M. Por fin, conforme a la afirmación 20 tenemos en M que $A > B$. Así pues, en la región M se predetermina la validez de la desigualdad $A > B$, puesto que es válida la desigualdad $A^n > B^n$. La afirmación b) está demostrada y queda completamente demostrado el teorema.

§ 3. Polinomios

Una expresión racional en la que se prevén solamente dos operaciones respecto de las letras que lo integran, a saber, multiplicación y elevación a potencia natural, se llama *monomio*.

Los ejemplos de monomios son: $3a$, $2abc \frac{23ab}{7} abc$, $\frac{2ab}{3}$.

Una expresión racional se denominará *polinomio*, si es entera respecto de toda letra que figura en dicha expresión.

Por ejemplo, la expresión racional $\sqrt{35}\,abc - \frac{16ad}{7} + 0{,}3dc$ es un polinomio, puesto que es entera respecto a las letras a, b, c y d.

En particular, una expresión racional que contiene una sola letra y que es entera respecto de esta letra, se llama polinomio entero respecto de una letra.

De la definición de polinomio y de las reglas que rigen las operaciones sobre expresiones algebraicas se desprende que la suma, la diferencia y el producto de dos polinomios serán polinomios.

Si en un polinomio entran n letras, éste tiene sentido para cualquier colección numérica de n números. Es por eso que, al analizar un polinomio, no se habla, corrientemente, de su CVA. Por regla general, los monomios se transforman idénticamente conforme a las leyes de operaciones aducidas en el § 2, reuniendo juntos todos los números que integran el monomio y escribiéndolos ante las letras del monomio, y también, reuniendo juntas las letras iguales que integran el monomio y escribiéndolas en forma de una potencia natural de dicha letra. Realizada tal transformación, un monomio se considera escrito en la *forma estándar*, mientras que el factor numérico que precede a las letras del monomio se denomina *coeficiente* del monomio dado.

Por ejemplo, el monomio $3abc2cb\frac{3}{7}ac$ se reduce a la forma estándar $\frac{18}{7}a^2b^2c^3$, y el número $\frac{18}{7}$ es su coeficiente.

Según las reglas de operaciones sobre las expresiones algebraicas, todo polinomio siempre puede transformarse en una forma en la que el polinomio se componga de varios monomios escritos en la forma estándar y unidos entre sí mediante los signos de adición y de sustracción; por esta razón se dice habitualmente que un *polinomio es la suma algebraica de monomios*.

Los términos semejantes de un polinomio son sus monomios escritos en forma estándar y que se diferencian en nada más que los coeficientes. *Reducir los términos semejantes* de un polinomio significa sustituir la suma algebraica de los términos semejantes por un solo término idénticamente igual a dicha suma.

En virtud de las reglas de operaciones con las expresiones algebraicas, podemos concretar las leyes que rigen las operaciones sobre los polinomios del modo siguiente.

Para *adicionar* dos polinomios, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio y, luego, todos los términos del segundo polinomio, conservando para cada monomio el signo que está delante de su coeficiente, después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(2cd + 5a) + (x + 7a - 4cd) = 2cd + 5a + x + 7a - 4cd = 12a + x - 2cd$.

Para *sustraer* de un polinomio otro polinomio, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio, conservando inalterable el signo de cada monomio que está delante de su coeficiente, a continuación se escriben todos los términos del segundo polinomio, cambiando por opuestos todos los signos que están delante de los coeficientes de los monomios del segundo polinomio, después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(x^2 - y^2) - (-7x^2 + 8y^2 - 5a) = x^2 - y^2 + 7x^2 - 8y^2 + 5a = 8x^2 - 9y^2 + 5a$.

Para *multiplicar un monomio por un polinomio*, se debe multiplicar dicho monomio por cada término del polinomio, escribir los términos seguidos del producto con aquellos signos que tenían los términos del polinomio, si delante del coeficiente del monomio está el signo más, y con los signos opuestos, si el coeficiente del monomio tiene el signo menos, a continuación se debe escribir en la forma estándar cada monomio del producto y reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(-4ab)(3ab - 2 + 3a^2b^2) = -(4ab)(3ab) + (4ab)\cdot 2 - (4ab)(3a^2b^2) = -12a^2b^2 + 8ab - 12a^3b^3$; $5c(2ab + 1 - 3b) = (5c)(2ab) + (5c)\cdot 1 - (5c)(3b) = 10abc + 5c - 15bc$.

Para *multiplicar un polinomio por otro polinomio* se debe multiplicar cada monomio (junto con el signo que está delante de su coeficiente) del primer polinomio por el segundo polinomio, escribir todos los productos seguidos, escribir en la forma estándar cada monomio obtenido y, luego, reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(ab - cd)\cdot(ab + cd) = (ab)(ab) + (ab)(cd) - (cd)(ab) - (cd)(cd) = a^2b^2 + abcd - abcd - c^2d^2 = a^2b^2 - c^2d^2$.

Haciendo uso de las reglas de adición y multiplicación de polinomios y de las propiedades que poseen las igualdades de expresiones algebraicas, obtendremos igualdades idénticas, las cuales se denominan a menudo *fórmulas de multiplicación reducida*.

Empecemos con la multiplicación de polinomios iguales del tipo $(a + b)$. Usando las leyes de las operaciones sobre expresiones algebraicas, podemos escribir la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a)(a) + (a)(b) + (b)(a) + (b)(b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1}$$

La fórmula (1) se enuncia del modo siguiente: *el cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el producto duplicado del primer número por el segundo, más el cuadrado del segundo número.*

Ahora, haciendo uso de la fórmula citada, se puede escribir la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= (a)(a^2) + (a)(2ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) + (b)(2ab) + \\ &\quad + (b)(b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned} \tag{2}$$

La fórmula (2) se enuncia del modo siguiente: *el cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número, más el producto triplicado del cuadrado del primer número por el segundo, más el producto triplicado del primer número por el cuadrado del segundo y más el cubo del segundo número.*

Escribamos una cadena más de igualdades idénticas:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) =$$
$$= (a)(a^3) + (a)(3a^2b) + (a)(3ab^2) + (a)(b^3) + (b)(a^3) +$$
$$+ (b)(3a^2b) + (b)(3ab^2) + (b)(b^3) = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 +$$
$$+ ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b +$$
$$+ 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Las fórmulas aducidas permiten observar cierta regularidad con ayuda de la cual podemos escribir la fórmula para $(a+b)^n$, donde n es un número natural cualquiera. A saber, es fácil ver que habrá en total $(n+1)$ términos: el primer término es el primer número a la potencia n; en cada término subsiguiente la potencia del primer número será en una unidad menor que su potencia en el término antecedente, y en el último término la potencia del primer número es nula; el segundo número tiene en el primer término la potencia nula, en el segundo término, la primera potencia, en cada término subsiguiente la potencia del segundo número será en una unidad mayor que su potencia en el término antecedente, y en el último término el segundo número figura a la potencia n.

El coeficiente de cada término puede hallarse con ayuda del «triángulo de Pascal»:

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
	. . . .

Es simple la regla conforme a la cual se forman las líneas del «triángulo de Pascal». Cada línea puede obtenerse de la línea superior anterior del modo siguiente. En el intervalo entre cualesquiera números vecinos de la línea superior (pero más abajo) se escribe la suma de éstos, y en los extremos se ponen las unidades. El número de la línea enseña a qué potencia se eleva el binomio $(a + b)$, mientras que los números de dicha línea son los coeficientes de los términos correspondientes escritos en el orden estudiado más arriba.

Por supuesto, si se necesita escribir la fórmula para $(a + b)^n$, donde n es un número grande (100, por ejemplo), está claro que el cálculo de los coeficientes del segundo miembro con ayuda del triángulo de Pascal será engorroso, razón por la cual resulta deseable conocer otra fórmula para calcular $(a + b)^n$. Tal fórmula existe y lleva el nombre de *binomio de Newton*, teniendo por expresión

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n b^n, \quad (3)$$

donde $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ para cualquier $k \in \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

La demostración de la igualdad (3) se realizará en el § 6.

Apliquemos la fórmula del binomio de Newton para calcular, por ejemplo, $(a + b)^5$:

$$(a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5.$$

Calculemos los coeficientes C_5^m, donde $m \in \{0, 1, 2\}$. Para el cálculo de los coeficientes restantes hagamos uso de la igualdad

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \text{ para } 0 \leqslant m \leqslant n,$$

demostrada en el cap. I.

De este modo,

$$C_5^0 = C_5^5 = 1, \quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5, \quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Por consiguiente

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

De la fórmula para el binomio de Newton se deduce fácilmente la fórmula para $(a - b)^n$. Denotemos $d = -b$ y apliquemos la fórmula del binomio de Newton:

$$(a - b)^n = (a + d)^n = C_1^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} d + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k} d^k + \ldots + C_n^n d^n.$$

Sustituyendo $(-b)$ en lugar de d, obtenemos

$$(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Los casos particulares de esta fórmula para $n = 2$ y $n = 3$ son:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

La fórmula para el binomio de Newton $(a + b)^n$ y la que se deduce de ella, $(a - b)^n$, son *fórmulas de multiplicación reducida*, en las cuales el producto de polinomios iguales (binomios) se toma n veces.

Demostremos ahora algunas fórmulas en las cuales se toma el producto de diferentes polinomios. Es evidente la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(a - b)(a + b) = (a)(a) + (a)(b) - (b)(a) - (b)(b) =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Esta fórmula se recuerda, habitualmente, en una escritura, donde se cambian de lugar los miembros segundo y primero: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. He aquí su enunciación verbal: *la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto de la diferencia de estos números por la suma de los mismos.*

Deduzcamos la fórmula para la diferencia entre los cubos de dos números $(a^3 - b^3)$. Por cuanto

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a)(a^2) + (a)(ab) + (a)(b^2) -$$
$$- (b)(a^2) - (b)(ab) - (b)(b^2) = a^3 + a^2b + ab^2$$
$$- a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3,$$

entonces

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Aduzcamos la enunciación verbal de esta fórmula: *la diferencia entre los cubos de dos números es igual al producto de la diferencia de estos números por el cuadrado incompleto de la suma de estos números.*

Las fórmulas mencionadas permiten ver una regularidad con ayuda de la cual resulta fácil escribir la fórmula $a^n - b^n$ para cualquier número natural n. Esta fórmula tiene por expresión

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

La demostración de esta fórmula se dará en el § 6 por el método de inducción matemática.

Por fin, deduzcamos la siguiente fórmula:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

En efecto,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= (a)(a^2) - (a)(ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) - (b)(ab) + (b)(b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

La enunciación verbal de esta fórmula es la siguiente: *la suma de los cubos de dos números es igual al producto de la suma de los mismos por el cuadrado imperfecto de la diferencia entre ellos.*

Demos a conocer algunas fórmulas que han de recordarse:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Las fórmulas, demostradas en este párrafo, son válidas para cualesquiera valores numéricos de la letras a y b. A veces dichas fórmulas se emplean en los casos en que con las letras a y b se han designado ciertas expresiones algebraicas, mas en estos casos las fórmulas serán válidas ya en el CVA de dos expresiones algebraicas a y b.

En una serie de problemas, al operar con polinomios, resulta más cómodo examinarlos no en la forma estándar, sino en forma de un producto.

La transformación idéntica de un polinomio en la forma de un producto de polinomios se llama *descomposición del polinomio en factores*. Hablando en general, todas las fórmulas de multiplicación reducida son precisamente fórmulas que rigen la descomposición del polinomio en factores.

Además de la aplicación de las fórmulas de multiplicacón reducida existen también otros procedimientos para descomponer los polinomios en factores, por ejemplo, la *agrupación* o procedimiento consistente *en sacar el factor común del paréntesis.* Para descomponer un polinomio en factores son útiles todos los procedimientos.

Analicemos un ejemplo de descomposición de un polinomio en factores. Agrupando, sacando el factor común del paréntesis y empleando la fórmula de multiplicación reducida, obtenemos una cadena de igualdades idénticas:

$$a^2c + 2abc + b^2c + (a + b)^2 d = c(a^2 + 2ab + b^2) + d(a + b)^2 =$$

$$= c(a + b)^2 + d(a + b)^2 = (a + b)^2 (c + d).$$

§ 4. Fracciones algebraicas

Se llama *fracción algebraica* una expresión racional fraccional que es el cociente de la división de un polinomio por otro.

La fracción algebraica que representa el cociente de la división del polinomio A por otro polinomio B se escribe, corrientemente, en la forma $\frac{A}{B}$, con la particularidad de que el polinomio A se denomina *numerador* de la fracción algebraica, y el polinomio B, *denominador* de la misma.

Los ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{3a+b}{a^3+1}; \quad \frac{ab-b}{d+a}; \quad \frac{a^2+b^2}{a-b}; \quad \frac{xy+6y}{7x+8y}.$$

El CVA de una fracción algebraica $\frac{A}{B}$, en la que figuran n letras, es un conjunto de todas las colecciones numéricas correspondientes a la colección literal de la fracción $\frac{A}{B}$, a excepción de aquellas, para cada una de los cuales el valor numérico correspondiente del polinomio B es igual a cero.

Por ejemplo, el CVA de la fracción algebraica $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ es el conjunto $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R;\ a \neq b\}$.

Demostremos algunas **afirmaciones** sobre la igualdad de las fracciones algebraicas.

1. *Si se designa la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *con una sola letra* C, *en el CVA de dicha fracción son equivalentes las igualdades idénticas* $C = \frac{A}{B}$ *y* $A = CB$.

La validez de esta propiedad se desprende de la de la afirmación 14 del § 2.

2. *Las igualdades* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *y* $AD = BC$ *son equivalentes en el CVA de la primera de ellas.*

Esta propiedad se enuncia a menudo del modo siguiente: *dos fracciones* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{C}{D}$ *son idénticamente iguales en el CVA, si, y sólo si, en dicho CVA se verifica la igualdad* $AD = BC$.

Demostración. Sea la región M el CVA de dos fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$. Examinemos el caso en que $A=0$ en M. Entonces, $\frac{A}{B}=0$, y de la igualdad $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se deduce que también $\frac{C}{D}=0$ en M. Por eso, $C = 0$ en M, y esto significa que $AD = BC$ en M.

Al contrario, sea $AD = BC$ y $A = 0$ en M. Por cuanto $D \neq 0$ y $B \neq 0$ en M, entonces $C = 0$ en M. Por consiguiente, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Examinemos ahora el caso en que no existe ninguna colección de la región M, para la cual el polinomio A no se reduce a cero, es decir, el caso en que $A \neq 0$ en M. Sea $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, entonces de aquí se desprende que $C \neq 0$ en M. Designemos con α la fracción $\frac{A}{B}$, y con β, $\frac{C}{D}$. Según la propiedad 1 de las fracciones algebraicas, $A = \alpha B$ y $C = \beta D$. De acuerdo con la afirmación 14 del § 2, tenemos

$$A\beta D = C\alpha B. \tag{1}$$

Por cuanto $\alpha = \beta \neq 0$ en M, resulta que, conforme a la afirmación 14 del § 2, de (1) se deriva que $AD = CB$.

Al contrario, sea $AD = BC$, entonces, por cuanto $A \neq 0$, $D \neq 0$ y $B \neq 0$ en M, tendremos $C \neq 0$ en M. Por lo tanto, $\alpha = \frac{A}{B}$ y $\beta = \frac{C}{D}$ no son iguales a cero en M. Multipliquemos la igualdad dada $AD = BC$ por $\alpha\beta$. Obtendremos una igualdad equivalente

$$\alpha\beta AD = \alpha\beta BC. \tag{2}$$

Pero $\alpha B = A$, $\beta D = C$, y la igualdad (2) adquiere la forma

$$\alpha AC = \beta AC. \tag{3}$$

Haciendo uso de la afirmación 14 del § 2, llegamos a que $\alpha = \beta$, lo que se trataba de demostrar.

De este modo queda demostrada la propiedad 2 de las fracciones algebraicas.

3. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *se verifican las igualdades idénticas* $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

Cada una de estas igualdades se hace evidente, si hacemos uso de la propiedad 2 que acabamos de demostrar.

4. *Para cualquier polinomio* K, *que no se reduce a cero en el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$, *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B} = \frac{AK}{BK}$.

Por cuanto en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$ esta igualdad es equivalente, conforme a la propiedad 2, a la igualdad $A(BK) = B(AK)$, la cual es obvia, entonces será evidente también la validez de la propiedad 4.

5. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$.

En efecto, de acuerdo con la afirmación 9 del § 2 tenemos

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\left(B \cdot \frac{1}{B}\right)$$

Tomando en consideración la asociatividad de la multiplicación de expresiones algebraicas, tenemos

$$\frac{A}{B}\left(B \cdot \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{A}{B} \cdot B\right) \cdot \frac{1}{B}.$$

Aplicando la afirmación 11 del § 2, llegamos a que

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}.$$

6. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{1}{AB}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{1}{AB}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}$.

En efecto, en el CVA de la fracción $\frac{1}{AB}$ es evidente la validez de la cadena de igualdades idénticas

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)=\left(\frac{1}{AB}\cdot AB\right)\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}.$$

7. *En el CVA de dos fracciones algebraicas* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{B}{1}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B}=\frac{1}{\frac{B}{A}}$.

Efectivamente, al aplicar primeramente la propiedad 5 de las fracciones y, luego, las propiedades de las operaciones sobre expresiones algebraicas y, por fin, las propiedades 6 y 5 de las fracciones, tenemos una cadena de igualdades idénticas

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}\cdot\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\frac{1}{B\cdot\frac{1}{A}}=\frac{1}{\frac{B}{A}}.$$

Recordemos el siguiente convenio: si no se indica explícitamente la región M, en la que se estudia cierta igualdad idéntica, entonces ésta se examina en el CVA de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad. Por ello, en adelante no se indicará explícitamente la región en la cual se verificará una igualdad idéntica, tomando en consideración que ésta es válida en el CVA de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad.

Haciendo uso de las propiedades de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas y de las propiedades de fracciones algebraicas, resulta fácil mostrar que se verifican las siguientes igualdades idénticas:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD};\quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

Efectivamente, aprovechando la propiedad de las fracciones algebraicas, obtenemos

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{CB}{DB}=AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}.$$

Al aplicar ahora las propiedades de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas y, luego, otra vez, las de las fracciones algebraicas, tenemos:

$$AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}=(AD+CB)\frac{1}{BD}=\frac{AD+CB}{BD},$$

lo que se trataba de demostrar.

De modo análogo se demuestra la segunda igualdad:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\left(A\cdot\frac{1}{B}\right)\left(C\cdot\frac{1}{D}\right)=AC\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D}=AC\cdot\frac{1}{BD}=\frac{AC}{BD}.$$

De la misma manera se demuestran también las igualdades:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}.$$

A menudo se requiere reducir a un *denominador común* las fracciones algebraicas, es decir, escribirlas de un modo tal, que todas estas fracciones tengan un mismo denominador. Para esto existe el procedimiento siguiente: es menester descomponer cada denominador en factores y, a continuación, multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el producto de aquellos factores de los denominadores de las fracciones restantes que no figuran en el denominador dado, lo que no los hará variar, según la propiedad de las fracciones.

Ejemplo. Redúzcanse a un denominador común las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{a}{a^3-b^3}; \quad \frac{c}{a^2-b^2}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Descomponiendo los denominadores en factores, escribamos las fracciones en la forma:

$$\frac{a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}; \quad \frac{c}{(a-b)(a+b)}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Ahora, al multiplicar el numerador y el denominador de la primera fracción por $(a+b)$, el de la segunda por (a^2+ab+b^2) y el de la tercera, por $(a-b)(a+b)$, obtenemos

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}; \quad \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};$$

$$\frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}.$$

Dichas fracciones tienen denominadores iguales, es decir, las fracciones originales se han reducido a un denominador común.

En una serie de casos se necesita representar una fracción en forma de una suma de fracciones con denominadores más simples. Esto puede realizarse sólo en el caso cuando el polinomio en el denominador de la fracción se descompone en un producto de polinomios de grado menor. Mostremos con un ejemplo cómo se hace esto.

Supongamos que es necesario descomponer la fracción algebraica $\frac{1}{x^2-1}$ en fracciones simples. Por cuanto el polinomio x^2-1 se descompone en el producto de polinomios $(x-1)$ y $(x+1)$, la tarea es realizable. Con este fin se deben encontrar las fracciones algebraicas $\frac{A}{x-1}$ y $\frac{B}{x+1}$ tales, que se verifique la igualdad idéntica $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. Examinemos la suma $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. De acuerdo con las reglas recién enunciadas, tenemos

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Por cuanto esta fracción debe ser idénticamente igual a la fracción $\frac{1}{x^2-1}$ (indiquemos que estos razonamientos se realizan para x cualquiera, salvo $x=1$ y $x=-1$), entonces, según la propiedad 2, las dos fracciones citadas son iguales sólo en el caso en que $[(A+B)x-(A-B)](x-1)(x+1)=(x-1)(x+1)$. Como esta igualdad ha de verificarse para cualquiera x, a excepción de $x=1$ y $x=-1$, entonces, suponiendo, por ejemplo, $x=0$, y, luego, $x=2$, llegamos a que esto se satisface sólo cuando $A-B=1$ y $3A+B=1$ simultáneamente. Mientras tanto las últimas dos igualdades se verifican simultáneamente sólo en el caso en que $A=\frac{1}{2}$ y $B=-\frac{1}{2}$. Quiere decir, la fracción dada se ha descompuesto en fracciones simples, a saber, es válida la siguiente igualdad idéntica:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Este método de descomposición de una fracción en la suma de fracciones más simples lleva el nombre de *método de coeficientes indeterminados.* Efectivamente, suponiendo desconocidos al principio los números A y B, obtenemos en el CVA la igualdad de dos polinomios, uno de los cuales tiene coeficientes conocidos, y el otro, desconocidos, expresados a través de A y B. Esto nos presta la oportunidad de escribir igualdades algebraicas respecto de los coeficientes desconocidos (en el caso dado, $A-B=1$, $3A+B=1$). Hallando los valores numéricos de los coeficientes desconocidos que reducen las igualdades algebraicas dadas en ciertas igualdades numéricas, resolvemos, de este modo, el problema planteado sobre la representación de una fracción en forma de la suma de fracciones más simples.

Desigualdades de las fracciones algebraicas. Demostremos dos afirmaciones que son de amplio uso al analizar fracciones algebraicas.

8. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *son equivalentes las siguientes desigualdades:* $\frac{A}{B}>0$, *y* $AB>0$.

Demostremos que de la validez de la primera desigualdad se desprende la validez de la segunda.

Demostración. Designemos con la letra C la fracción algebraica $\frac{A}{B}$, es decir, $C = \frac{A}{B}$. En el CVA de la fracción algebraica dada la expresión algebraica C es positiva, pues cualquier valor numérico de la expresión algebraica C es un número positivo. De acuerdo con la propiedad 1 de las igualdades entre expresiones algebraicas, tenemos: en el CVA de la fracción dada $A = CB$. Por consiguiente, la expresión algebraica AB es igual a $CB^2 : AB = CB^2$. Por definición, en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$ la expresión algebraica B no se reduce a cero, es decir, la expresión algebraica B^2 es positiva en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$. El producto de las expresiones algebraicas positivas C y B^2 será también positivo. De modo análogo se demuestra que en el CVA de la fracción algebraica $\frac{A}{B}$ de la validez de la desigualdad $AB > 0$ sigue la validez de la desigualdad $\frac{A}{B} > 0$.

9. *En el CVA de las fracciones algebraicas* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{C}{D}$ *son equivalentes las desigualdades:* $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ *y* $AD^2B > CB^2D$.

Demostración. Valiéndonos de la afirmación 20, obtendremos las desigualdades equivalentes: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ y $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} > 0$.

Anteriormente ha sido demostrada la igualdad

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD},$$

la cual permite realizar un paso equivalente más:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{AD - BC}{BD} > 0.$$

De acuerdo con la afirmación 8, la última desigualdad es equivalente en el CVA de las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ a la desigualdad $(AD - BC)\,BD > 0$, que es equivalente a la desigualdad $AD^2B > CB^2D$. La afirmación 9 queda completamente demostrada.

Las afirmaciones 8 y 9 se emplean también para demostrar otras desigualdades.

Por ejemplo, demostremos que las desigualdades $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$ y $a > b$ son equivalentes para cualesquiera números positivos a y b que no son iguales uno al otro.

En efecto, de acuerdo con la afirmación 9, son equivalentes las siguientes desigualdades:

$$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \text{ y } (a^2-b^2)\,[(a+b)^2-(a-b)^2] > 0.$$

Por cuanto $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$, la última desigualdad es equivalente a la desigualdad $(a-b)(a+b)\,4ab > 0$, la cual, es equivalente, en virtud de que son positivos a y b, a la desigualdad $a > b$. Por consiguiente, $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow a > b$ para cualesquiera a y b positivos no iguales.

§ 5. Polinomios enteros respecto de una letra

Un polinomio, entero respecto de una letra x, tiene monomios de diferentes grados, pues en el caso contrario se pueden reducir los términos semejantes. Los monomios de diferentes grados pueden ordenarse con relación al crecimiento o decrecimiento de las potencias de la letra x. Por regla general, un polinomio entero respecto de una letra se escribe en el orden de decrecimiento de las potencias.

Un polinomio escrito en la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x + a_n$ se denomina *polinomio ordenado*. Si $a_0 \neq 0$, suele decirse que dicho polinomio es de grado n.

Al desconocer, si es nulo o no el coeficiente de a_0, se dice que el polinomio es de grado no superior a n.

De esta definición se desprende, en particular, que los polinomios de grado nulo son números distintos de cero. El número cero también se considera un polinomio, con la particularidad de que es el único polinomio cuyo grado no está determinado. Para la designación abreviada de los polinomios se usan, de ordinario, las siguientes notaciones:

$$P(x), \quad Q(x), \quad T(x), \quad R(x), \quad p(x), \quad q(x), \quad r(x),$$

y, si hace falta subrayar que $P(x)$ es un polinomio de grado n, se escribe $P_n(x)$.

Para encontrar la *suma* de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se deben escribir todos los términos seguidos de estos dos polinomios y luego realizar la reducción de los términos semejantes.

Para encontrar el *producto* de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ es necesario multiplicar cada monomio del polinomio $P_n(x)$ por cada monomio del polinomio $Q_m(x)$, sumar los productos obtenidos y reducir los términos semejantes.

Teorema 1. *Dos polinomios, enteros respecto de x, son idénticamente iguales, si, y sólo si, son iguales sus grados y los coeficientes que tienen las potencias iguales de x.*

En esta obra se omite la demostración de este teorema.

En el parágrafo presente, para denotar la igualdad idéntica entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se empleará la notación $P(x) = Q(x)$, es decir, el signo «=» que liga dos polinomios se entenderá en el sentido de igualdad idéntica de estos polinomios. En particular, la notación $P(x) = 0$ significará que el polinomio $P(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, es el número cero.

El teorema 1 puede ser aplicado para descomponer un polinomio en factores. Hagamos uso del método de coeficientes indeterminados. La esencia de la aplicación de este método consiste en lo siguiente.

Sea dado un polinomio $P_n(x)$ de grado n y se necesita representarlo en forma de un producto de polinomios de grados k y $(n - k)$, donde $k < n$. Entonces se escriben dos polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$, el primero de grado k y el segundo, de grado $(n - k)$, con los coeficientes designados con ciertas letras, digamos, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ para el primer polinomio, y $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$, en el segundo. Al multiplicar los polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$, obtenemos el polinomio $T_n(x)$ de grado n cuyos coeficientes dependen de α_i ($i = 0, 1, \ldots, k$) y β_j ($j = 0, 1, \ldots, n - k$). Partiendo de la condición de que los polinomios $P_n(x)$ y $T_n(x)$ son idénticamente iguales, obtenemos $n + 1$ igualdades, en las cuales participan $n + 2$ coeficientes α_i y β_i que han de ser determinados. Suponiendo, por ejemplo, que $\alpha_0 = 1$, llegamos a $n + 1$ igualdades, de las cuales se deben hallar $n + 1$ coeficientes α_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) y β_j ($j = 0, 1, \ldots, n - k$). Al determinarlos, hallaremos también los polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$.

Ejemplo. Descompóngase el polinomio $x^3 + 3x + 4$ en factores, entre los cuales uno sea un polinomio de primer grado y el segundo, un polinomio de segundo grado. Buscaremos los polinomios $(x + \alpha_1)$ y $(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2)$ tales que se verifique la igualdad idéntica $(x + \alpha_1)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2) = x^3 + 3x + 4$. Al aplicar el teorema 1, obtenemos 4 igualdades: $\beta_0 = 1$, $\beta_0\alpha_1 + \beta_1 = 0$, $\beta_1\alpha_1 + \beta_2 = 3$, $\alpha_1\beta_2 = 4$. A estas igualdades les satisfacen $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 4$. Quiere decir, el polinomio $x^3 + 3x + 4$ se descompone en los factores $(x + 1)$ y $(x^2 - x + 4)$, es decir,

$$x^3 + 3x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 4).$$

Observemos que no todo polinomio puede descomponerse en factores. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + x + 1$ no puede ser descompuesto en un producto de dos polinomios de primer grado.

Teorema 2. *Si el producto de dos polinomios es idénticamente igual a cero, por lo menos uno de dichos polinomios será idénticamente igual a cero.*

Se omite la demostración de esta afirmación.

Sustraer de un polinomio $P(x)$ otro polinomio $T(x)$ significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = T(x) + Q(x)$.

No es difícil comprobar que para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$ semejante polinomio $Q(x)$ existe y es único. Se llama *diferencia de los polinomios* $P(x)$ y $T(x)$ y se designa $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Dividir exactamente el polinomio $P(x)$ por el polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal que se verifique $P(x) = T(x)\,Q(x)$.

Si tal polinomio $Q(x)$ existe, se dice que el polinomio $T(x)$ es el divisor del polinomio $P(x)$, y el polinomio $Q(x)$ se llama cociente de la división del polinomio $P(x)$ por el $T(x)$. El polinomio $P(x)$ no siempre se divide exactamente por el polinomio $T(x)$. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$ no es divisible por el polinomio $x + 1$ exactamente. Quiere decir, en el conjunto de polinomios la división exacta no siempre es realizable. Sin embargo, como se demostrará a continuación, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la división entera (inexacta).

División entera (inexacta). *Dividir enteramente* (con resto) un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que se verifique

$$P(x) = T(x)\,q(x) + r(x), \tag{1}$$

con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente menor que el grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es cero.

Cuando se verifica la igualdad (1), se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con resto $r(x)$ y cociente $q(x)$; si $r(x) = 0$, es decir, si el resto es el número cero, se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con resto nulo, o el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el polinomio $T(x)$.

Ejemplo. Sea $(P\,x) = x^7 - x^6 + 2x^5 + x^2$, $T(x) = x^2 - x + 2$. En este caso se ve con facilidad que $P(x) = T(x)(x^5 + 1) + x - 2$, es decir, el polinomio $P(x)$ se divide por el $T(x)$ con resto $r(x) = x - 2$ y cociente $x^5 + 1$. Indiquemos que de la igualdad $P(x) = T(x)\,x^5 + x^2$ no se deduce que el polinomio $P(x)$ se divide por $T(x)$ con resto x^2, pues está perturbada la condición de que la potencia del resto $r(x)$ ha de ser estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$.

Teorema 3. *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par de polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x)\,q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es el número cero.*

Demostración. Supongamos que $P(x) = 0$ y $T(x)$ es un polinomio cualquiera distinto de cero; entonces los polinomios $q(x) = 0$ y $r(x) = 0$ satisfacen las condiciones del teorema.

Sea $P(x) \neq 0$ y supongamos que el polinomio $T(x)$ es de grado superior al del polinomio $P(x)$, entonces los polinomios $q(x) = 0$ y $r(x) = P(x)$ satisfacen las condiciones del teorema.

Por fin, sea $P(x) \neq 0$ y supongamos que el polinomio $T(x)$ es de grado inferior o igual al del polinomio $P(x)$. Si $T(x) = c$, donde c es una constante distinta de cero, entonces los polinomios $q(x) = P(x)/c$ y $r(x) = 0$ satisfacen las condiciones del teorema.

Queda analizar el caso en que el polinomio $P(x)$ es de grado n, siendo $n \geqslant 1$, y el polinomio $T(x)$ es de grado m, siendo $0 < m \leqslant n$. Sea $P(x) = P_n(x)$, $T(x) = T_m(x)$, donde $0 < m \leqslant n$, $n \geqslant 1$, es decir,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \quad \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$T_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} \quad \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Construyamos una sucesión de polinomios $Q_{n_k}(x)$ del modo siguiente. Hagamos

$$Q_{n_1}(x) = P_n(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} T_m(x).$$

Entonces, o bien $Q_{n_k}(x) = 0$, o bien $Q_{n_k}(x)$ puede escribirse en la forma

$$Q_{n_1}(x) = a_0^{(1)} x^{n_1} + a_1^{(1)} x^{n_1 - 1} + \ldots + a_{n_1 - 1}^{(1)} x + a_{n_1}^{(1)},$$

con la particularidad de que $a_0^{(1)} \neq 0$ y el grado del polinomio $Q_{n_k}(x)$ es menor que n, es decir, $n_1 < n$; si resulta que $n_1 < m$, o $Q_{n_k}(x) = 0$, entonces los polinomios $q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ y $r(x) = Q_{n_k}(x)$ satisfacen las condiciones del teorema; en cambio, si $n_1 \geqslant m$, realizamos el paso siguiente: hagamos

$$Q_{n_2}(x) = Q_{n_1}(x) - \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1 - m} T_m(x).$$

Está claro que o bien $Q_{n_2}(x) = 0$, o bien $n_2 < n_1 < n$, y $Q_{n_2}(x)$ puede escribirse en la forma

$$Q_{n_2}(x) = a_0^{(2)} x^{n_2} + a_1^{(2)} x^{n_2 - 1} + \ldots + a_{n_2 - 1}^{(2)} x + a_{n_2}^{(2)},$$

con la particularidad de que $a_0^{(2)} \neq 0$. Si resulta que $n_2 < m$, o $Q_{n_2}(x) = 0$, entonces los polinomios $q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1 - m}$ y $r(x) = Q_{n_2}(x)$ satisfacen las condiciones del teorema; si, en cambio, $n_2 \geqslant m$, realizamos el paso siguiente y continuamos este proceso. Por cuanto en cada paso la potencia va disminuyendo: $n > n_1 > n_2 \ldots$, entonces en cierto k-ésimo paso el número natural n_k se hará inferior al número natural m, o $Q_{n_k}(x) = 0$, y el proceso se dará por terminado. Obtendremos como resultado:

$$P_n(x) = \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1 - m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^{n_{k-1} - m} \right) \times \\ \times T_m(x) + Q_{n_k}(x).$$

Entonces, los polinomios $r(x) = Q_{n_k}(x)$ y $q(x) = \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} \times \right.$ $\left. \times x^{n_1 - m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^{n_{k-1} - m} \right)$ satisfacen las condiciones del teorema.

Así pues, la afirmación del teorema acerca de la existencia de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ queda demostrada.

Teorema 4. *Un par de polinomios $q(x)$, $r(x)$ que satisface las condiciones del teorema 3 es único.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existen dos pares de polinomios $q(x)$, $r(x)$ y $q_1(x)$, $r_1(x)$ tales, que $P(x) = T(x)\,q(x) + r(x)$ y $P(x) = T(x)\,q_1(x) + r_1(x)$. Haciendo uso de la definición de igualdad de los polinomios, tenemos

$$T(x)\,[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{2}$$

Son posibles dos casos: ó $r_1(x) - r(x) = 0$, ó $r_1(x) - r(x) \neq 0$. En el primer caso, ya que $T(x) \neq 0$, entonces $q(x) - q_1(x) = 0$, y la unicidad tiene lugar.

En el segundo caso, por cuanto la potencia de $r_1(x) - r(x)$ no es mayor que la de $r_1(x)$ y de $r(x)$, entonces la potencia de $r_1(x) - r(x)$ es inferior al grado del polinomio $T(x)$. Al mismo tiempo el grado del polinomio $T(x)\,[q(x) - q_1(x)]$ o bien es superior o bien igual al del polinomio $T(x)$. Quiere decir, en la igualdad (2) los polinomios que figuran en los miembros primero y segundo tienen grados diferentes lo que contradice el teorema 1. La contradicción obtenida significa que $r_1(x) - r(x) = 0$, y la unicidad en este caso ya está demostrada. Al unir los teoremas 3 y 4, obtenemos el siguiente teorema válido.

Teorema 5. *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par de polinomios (y este par es único) $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x)\,q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es el número cero.*

Para determinar los coeficientes de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ existen varios métodos. El de mayor uso es el método de coeficientes indeterminados, ya estudiado anteriormente.

Sean dados los polinomios $P_n(x)$ y $T_m(x)$, donde $n > m$. Hagamos

$$q(x) = c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m},$$

$$r(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1},$$

donde los coeficientes c_i y d_j no están por ahora determinados (observemos que en total hay $n + 1$ coeficientes y $c_0 \neq 0$). Exijamos que se verifique la igualdad

$$P_n(x) = T_m(x)\,q(x) + r(x).$$

Al abrir los paréntesis y al igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los miembros primero y segundo, obtendremos $n + 1$ igualdades, en las cuales intervienen $n + 1$ coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}; d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$; al determinarlos, hallaremos, de este modo, los polinomios $q(x)$ y $r(x)$.

Ejemplo. Sea $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2$, $T(x) = 2x^2 - 3x$. Suponiendo $q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$ $(c_0 \neq 0)$, $r(x) = d_0x + d_1$, escribamos la igualdad

$$2x^4 - 5x^3 + 2 =$$
$$= (2x^2 - 3x)(c_0x^2 + c_1x + c_2) + (d_0x + d_1),$$

que puede escribirse también en la forma

$$2x^4 - 5x^3 + 2 = 2c_0x^4 + (2c_1 - 3c_0)x^3 +$$
$$+ (2c_2 - 3c_1)x^2 + (d_0 - 3c_2)x + d_1.$$

De acuerdo con el teorema 1, son válidas las igualdades

$$\begin{cases} 2c_0 = 2, \\ 2c_1 - 3c_0 = -5, \\ 2c_2 - 3c_1 = 0, \\ d_0 - 3c_2 = 0, \\ d_2 = 2. \end{cases}$$

De estas igualdades encontramos $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, $d_0 = -\frac{9}{2}$, $d_1 = 2$, y en este caso resulta que $q(x) = x^3 - x - \frac{3}{2}$, $r(x) = -\frac{9}{2}x + 2$.

Esquema de Horner. Analicemos la división de un polinomio por el binomio $(x - \alpha)$

Sea dado el polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \quad \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

donde $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$, y sea dado el binomio $(x - \alpha)$. De acuerdo con el teorema 5, existen un polinomio $q(x)$ y un número r tales, que $P_n(x) = (x - \alpha)q(x) + r$. El grado del polinomio $q(x)$ es igual a $(n - 1)$. Por eso, $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \quad \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, donde $b_0 \neq 0$. Determinemos los números $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ y r, empleando el método de coeficientes indeterminados. Sustituyamos $q(x)$ en la igualdad $P(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, y obtendremos

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + (r - \alpha b_{n-1}).$$

Según la regla de igualdad de los polinomios, obtenemos de aquí que

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0, \\ a_2 = b_2 - \alpha b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \\ a_n = r - \alpha b_{n-1}, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_0 + \alpha b_0, \\ b_2 = a_2 + \alpha b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Así pues, los coeficientes del cociente $q(x)$ y el resto r se expresan en términos de los coeficientes del polinomio $P(x)$ y del número α con ayuda de las operaciones de adición y multiplicación según las fórmulas (3), de donde se deduce:

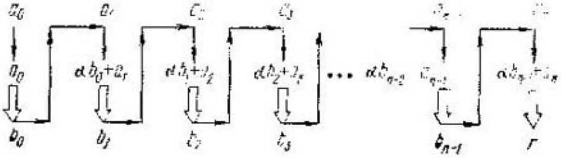
a) si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y α son números racionales, entonces $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y r son también números racionales;

b) si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y α son números enteros, entonces $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y r son también números enteros.

De las fórmulas (3) proviene la siguiente regla para calcular los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y el resto r.

Escribir en una línea todos los coeficientes seguidos del polinomio $P_n(x)$, partiendo de a_0. En la segunda línea escribir, debajo de a_0, el coeficiente b_0 que es igual al coeficiente a_0. Multiplicar α por b_0 y, adicionando el producto αb_0 a a_1, obtener el coeficiente b_1, escribiéndolo en la segunda línea debajo de a_1. Multiplicar α por b_1 y, adicionando el producto αb_1 a a_2, obtener el coeficiente b_2, escribiéndolo en la segunda línea debajo de a_2. Obtener, continuando este proceso, el coeficiente b_{n-1} y escribirlo en la segunda línea debajo de a_{n-1}. Multiplicar, por fin, α por b_{n-1} y, sumando el producto αb_{n-1} con a_n, obtener el resto r, escribiéndolo en la segunda línea debajo de a_n.

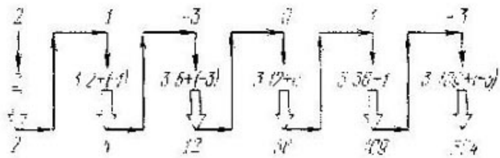
Esta regla se escribe en forma de la siguiente tabla que se denomina *esquema de Horner*:



El esquema de Horner permite dividir con facilidad el polinomio $P(x)$ por el binomio $x - \alpha$, es decir, hallar los coeficientes del cociente $q(x)$ y el resto r.

Ejemplo. Hallemos, aplicando el esquema de Horner, el cociente $q(x)$ y el resto r, al dividir el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ por el polinomio $T(x) = x - 3$.

El esquema de Horner tiene la siguiente forma



De este modo, $2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109) + 324$.

Teorema 6 (de Bezout). *El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio $(x - \alpha)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$ para $x = \alpha$, es decir, $r = P(\alpha)$.*

Demostración. Al sustituir en la igualdad $P(x) = (x - \alpha) \times q(x) + r$ el valor de α, en lugar de x, obtendremos $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) q(\alpha) + r$, de donde se desprende precisamente que $r = P(\alpha)$.

Teorema 7. *El polinomio $P(x)$ se divide por el binomio $(x - \alpha)$ exactamente, si, y sólo si, el valor del polinomio para $x = \alpha$ es igual a cero, es decir, si $P(\alpha) = 0$.*

Demostración. Necesidad. Supongamos que el polinomio $P(x)$ se divide por el binomio $(x - \alpha)$ exactamente. Esto significa que el resto r es igual a cero. De acuerdo con el teorema de Bezout, el resto $r = P(\alpha)$. Por consiguiente, $P(\alpha) = 0$.

Suficiencia. Sea $P(\alpha) = 0$. Por otra parte, según el teorema de Bezout, $r = P(\alpha)$. Quiere decir, $r = 0$, es decir, $P(x)$ se divide exactamente por $x - \alpha$.

Demos a conocer algunos corolarios de este teorema.

1. *El polinomio $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x - \alpha)$ con n natural cualquiera.*

En efecto, $P_n(\alpha) = \alpha^n - \alpha^n = 0$.

2. *El polinomio $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x + \alpha)$ con n par cualquiera (es decir, con $n = 2m$).*

En efecto, $P_{2m}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m} - \alpha^{2m} = 0$.

3. *El polinomio $P_n(x) = x^n + \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x + \alpha)$ con n impar cualquiera (es decir, con $n = 2m + 1$).*

En efecto, $P_{2m+1}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m+1} + \alpha^{2m+1} = 0$. Veamos ahora cómo se aplican estos corolarios.

Se necesita demostrar que para cualquier n par natural el número $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ se divide por 19. Por cuanto $n = 2m$, donde $m \in N$, entonces aprovechemos las fórmulas de multiplicación reducida:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^{2m} - 1) + (16^{2m} - 3^{2m}) =$$

$$= (20^m - 1)(20^m + 1) + (16^m + 3^m)(16^m - 3^m). \qquad (4)$$

En el primer sumando el primer factor se divide exactamente, para cualquier $m \in N$, por el número $(20 - 1)$, es decir, por 19. En el segundo sumando el primer factor se divide exactamente, para $m = 2k + 1$, $k \in N$, por el número $(16 + 3)$, es decir, por 19. Cuando $m = 2k$, el segundo factor puede ser representado en forma de un producto de factores $(16^k + 3^k)(16^k - 3^k)$. Si k es impar, la descomposición del segundo sumando en factores se da por terminado. En cambio, si k es par, la descomposición continúa. Realizados un número finito de pasos, que no exceda de $(n - 1)$, la descomposición se acabará y uno de los factores de esta descomposición tendrá por expresión $16^s + 3^s$, donde s es un número impar. Entonces, dicho factor es divisible por 19. De este modo, los sumandos en la igualdad (4), tanto el primero como el segundo, se dividen por 19, cualquiera que sea $m \in N$, y, por lo tanto, también se divide por 19 el número $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$, siendo n un número natural par cualquiera.

Raíces de un polinomio. Un número α se denomina *raíz* del polinomio $P(x)$, siempre que $P(\alpha) = 0$. Asignaremos al teorema 7 otra enunciación, haciendo uso de la definición de raíz de un polinomio.

Teorema 8. *Un número α es la raíz del polinomio $P(x)$, si, y sólo si, el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el binomio $x - \alpha$.*

Demostremos el teorema sobre la búsqueda de las raíces enteras de un polinomio.

Teorema 9. *Si todos los coeficientes de un polinomio de grado n, donde $n \geqslant 1$, son números enteros y la raíz α de dicho polinomio es también un número entero, entonces el número α es el divisor del término independiente del polinomio.*

Demostración. Sea dado un polinomio de grado n, $(n \geqslant 1)$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

y supongamos que α es la raíz de este polinomio. Realicemos la división entera del polinomio $P_n(x)$ por el binomio $(x - \alpha)$, entonces el cociente será el polinomio $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, y el resto, el número r. Según se ha mostrado más arriba, si todos los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ y α son números enteros, entonces serán también enteros los números $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ y r. Conforme al esquema de Horner, $r = a_n + \alpha b_{n-1}$, y, según el teorema 8, si α es raíz del polinomio, entonces $r = 0$. Por eso, tenemos la igualdad $a_n + \alpha b_{n-1} = 0$, de donde $a_n = \alpha(-b_{n-1})$. Por cuanto a_n, α,

$(-b_{n-1})$ son todos números enteros, de aquí proviene que α es el divisor del número a_n, quedando demostrado el teorema.

Corolario. *Pueden ser raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros sólo los divisores del término independiente del polinomio.*

Este corolario permite determinar todas las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros, aplicando para ello el esquema de Horner.

Ejemplo. Aclárese si tiene raíces enteras el polinomio

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5. \qquad (5)$$

Los divisores del término independiente son: 1, -1, 5, -5. Determinemos los valores del polinomio en estos puntos:

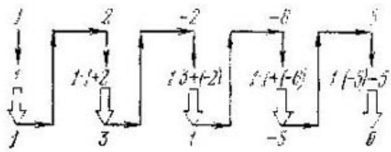
$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$

$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0,$$

$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0,$$

$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Así pues, el polinomio (5) tiene una raíz entera $x_1 = 1$, mientras que los números 5, -5 y -1 no son sus raíces. Aplicando el esquema de Horner, descompongamos el polinomio (5) en factores. El esquema de Horner tendrá la siguiente forma:

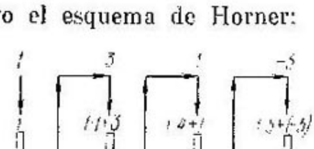


Por consiguiente, $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$.

Buscaremos ahora las raíces del polinomio $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Los divisores de su término independiente son: 1, -1, 5, -5. No hay necesidad de buscar el valor del polinomio $P_3(x)$ en los puntos -1, 5, -5, puesto que estos números no son a ciencia cierta las raíces del polinomio $P_4(x)$ y, por lo tanto, del polinomio $P_3(x)$ debido a que el polinomio $P_4(x)$ no se anula en estos puntos. Comprobemos, por eso, solamente el número 1.

$$P_3(1) = 1 + 3 + 1 - 5 = 0.$$

Aplicando de nuevo el esquema de Horner:



obtendremos $P_3(x) = (x-1)(x^2+4x+5)$, por lo cual el polinomio $P_4(x)$ puede ser escrito en la forma: $P_4(x) = (x-1)^2 \times \times (x^2+4x+5)$.

Como el trinomio de segundo grado x^2+4x+5 no tiene raíces enteras, entonces, por consiguiente, el polinomio $P_4(x)$ tiene dos raíces enteras: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. En estos casos resulta conveniente introducir la noción de multiplicidad de la raíz. Si un polinomio $P_n(x)$ se divide exactamente por $(x-\alpha)^k$, donde k es un número natural fijo, pero no se divide exactamente por $(x-\alpha)^{k+1}$, entonces α se denomina raíz de multiplicidad k del polinomio $P_n(x)$. Las raíces de multiplicidad unidad se llaman raíces simples del polinomio. De este modo, el polinomio $P_4(x)$ en el ejemplo (5), aducido más arriba, tiene una raíz $x = 1$ de multiplicidad dos.

Observación. Si queda determinada una raíz $x_1 = \alpha$ del polinomio $P(x)$, dicho polinomio puede ser escrito en la forma $P(x) = (x-\alpha)\, q(x)$, donde los coeficientes del polinomio $q(x)$ se calculan con facilidad por el esquema de Horner. Para hallar otras raíces del polinomio $P(x)$, hay que encontrar las raíces del polinomio $q(x)$. Es importante subrayar que el polinomio $q(x)$ puede tener como raíz el mismo número α, el cual se determina también por el esquema de Horner.

Si no se buscan las raíces del polinomio $q(x)$ y se buscan, en lugar de ellas, las raíces del polinomio $P(x)$, entonces la raíz, ya determinada, no se revelará por segunda vez mediante el mismo método. Por esta razón, después de determinar una raíz, se deben buscar las raíces del cociente, es decir, las raíces del polinomio $q(x)$.

Teorema 10. *Si un polinomio*

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

cuyos coeficientes son enteros y el mayor de ellos equivale a la unidad, tiene raíz racional, esta raíz será un número entero.

Demostración. La demostración de este teorema se realizará por reducción al absurdo. Supongamos que el polinomio $P_n(x)$ tiene una raíz $\alpha = p/q$, donde p y q son números enteros recíprocamente primos. Por cuanto el número p/q es una raíz del polinomio $P_n'(x)$, entonces se verifica la siguiente igualdad numérica

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$

la cual puede escribirse en la forma equivalente

$$\frac{p^n}{q^n} = -\left(a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n\right).$$

Multiplicando esta igualdad por q^{n-1}, obtendremos la igualdad equivalente

$$\frac{p^n}{q} = -a_1p^{n-1} - a_2p^{n-2}q - \ldots - a_{n-1}pq^{n-2} - a_nq^{n-1}.$$

Puesto que los números p y q son recíprocamente primos, el número $\frac{p^n}{q}$ no es entero, mientras que en el segundo miembro de la última igualdad figura un número entero. Tal igualdad no es posible, por lo cual la suposición no es cierta y el teorema queda lícito.

Corolario. *Si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros y el mayor coeficiente es igual a la unidad, entonces todas las raíces racionales de dicho polinomio son números enteros.*

Examinemos el polinomio $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots \ldots + a_{n-1}x + a_n$ de coeficientes enteros, y el polinomio

$Q_n(x) = a_0^{n-1}P_n(x) = (a_0x)^n + a_1(a_0x)^{n-1} + \ldots + a_na_0^{n-1}$.

Está claro que los polinomios $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ tienen raíces iguales. Denotemos $y = a_0x$, entonces

$$Q_n(x) = T_n(y) = y^n + a_1y^{n-1} + a_2a_0y^{n-2} + \\ + a_3a_0^2y^{n-3} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

En virtud del teorema 10, el polinomio $T_n(y)$ tiene solamente raíces enteras que pueden ser determinadas. Supongamos que dichas raíces sean los números $y_1, y_2, \ldots, y_m$; entonces los números $x_k = y_k/a_0$, donde $k \in \{1, 2; \ldots; m\}$, y sólo ellos, serán raíces racionales del polinomio $P_n(x)$. Así pues, para todo polinomio con coeficientes enteros pueden determinarse todas sus raíces racionales.

Si los coeficientes del polinomio son números racionales, entonces, después de reducirlos a un denominador común, se pueden buscar sólo las raíces del numerador, que es un polinomio con coeficientes enteros.

Ejemplo. Hállense las raíces del polinomio $P_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Examinemos el polinomio $Q_3(x) = 8P_3(x) = (2x)^3 + (2x)^2 - 2x - 1$, ó $T_3(t) = t^3 + t^2 - t - 1$, donde $t = 2x$. Los divisores del término independiente del polinomio $T_3(t)$ son $+1$, -1. Determinemos los valores del polinomio $T_3(t)$ en estos puntos:

$$T_3(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0,$$
$$T_3(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0.$$

Al aplicar el esquema de Horner, obtendremos $T_3(t) = (t - 1) \times \times (t^2 + 2t + 1)$. El polinomio $(t^2 + 2t + 1)$ es el cuadrado perfecto del binomio $(t + 1)$. Por consiguiente, el polinomio $T_3(t)$ tiene tres raíces: $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = -1$, mientras que el polinomio $P_3(x)$, las tres raíces respectivas: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2}$, o bien dos raíces diferentes: una simple $x_1 = \frac{1}{2}$ y otra, de segundo orden de multiplicidad $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Detendrémonos, en conclusión, en las raíces del binomio $P_n(x) = x^n - a$. Según se deduce del § 5 del capítulo anterior, para n par el binomio $P_n(x)$ tiene: dos raíces $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$, siempre que $a > 0$, y una raíz 0, cuando $a = 0$; si $a < 0$, el polinomio no tiene raíces. Si n es un número impar, el polinomio $P_n(x)$ tiene: una raíz $\sqrt[n]{a}$, si $a \geqslant 0$, y también una raíz $(-\sqrt[n]{|a|})$, si $a < 0$. Por ejemplo, el binomio $x^3 + 11$ tiene una sola raíz $(-\sqrt[3]{11})$.

§ 6. Método de inducción matemática

Existe una inmensidad de afirmaciones que dependen de un número natural n. ¿Cómo se deben entender tales afirmaciones?

Por cuanto hay una infinidad de números naturales, cada afirmación contiene, de hecho, un número infinito de afirmaciones. Por ejemplo, la afirmación: la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, contiene en sí las afirmaciones siguientes:

para $n = 1$: el primer número natural, es decir, la unidad, es igual a $\frac{1(1+1)}{2}$;

para $n = 2$: la suma de los primeros dos números naturales, es decir, la suma de los números uno y dos es igual a $\frac{2(2+1)}{2}$;

para $n = 3$: la suma de los primeros tres números naturales, es decir, la suma de los números, uno, dos y tres, es igual a $\frac{3(3+1)}{2}$;

. . . .

para $n = 10\,000$: la suma de los primeros diez mil números naturales es igual a $\frac{10\,000(10\,000+1)}{2}$, etc., es decir, la afirmación que se considera realmente contiene una infinidad de afirmaciones.

Análogamente, cualquier otra afirmación, dependiente de un número natural n, es, de hecho, la forma simplificada de escritura de un número infinito de afirmaciones.

Surge la pregunta: «¿cómo podemos convencernos de la validez de una afirmación dependiente de un número natural?»

Con el fin de demostrar las afirmaciones dependientes de un número natural n se emplea, a menudo, el método general de demostración, *el método de inducción matemática completa*. Este método está basado en los axiomas de los números naturales. Mas, por cuanto dichos axiomas no se han mencionado anteriormente, el método de inducción matemática completa se acepta aquí sin demostración.

Para demostrar tal o cual afirmación dependiente de un número natural n, se hace lo siguiente:

1. Se comprueba la validez de esta afirmación para $n = 1$.
2. Se supone la validez de esta afirmación para $n = k$.
3. Se demuestra la validez de esta afirmación para $n = k + 1$, tomando en consideración su validez supuesta para $n = k$, después de lo cual se saca la conclusión de que la afirmación es válida para cualquier número natural n.

Haciendo uso de este método, demostremos que para todo número natural n se verifica la igualdad

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Comprobamos la validez de la igualdad (1) para $n = 1$. Para $n = 1$ la igualdad se escribirá en la forma: $1=\frac{1(1+1)}{2}$, y, es obvio que la igualdad se verifica. Supongamos que la igualdad (1) se verifica para $n = k$, es decir que es válida la igualdad

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \qquad (2)$$

Con ayuda de la igualdad (2) demostremos que la igualdad (1) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la validez de la igualdad

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \qquad (3)$$

En efecto, estudiemos la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1)$. Al emplear primeramente la propiedad de asociatividad de la adición y, luego, la igualdad (2), obtenemos realizando las transformaciones más simples:

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

es decir, confirmamos la validez de la igualdad (3). A base del método de inducción matemática completa llegamos a la conclusión de que la igualdad (1) es válida para cualquier número natural n.

Veamos un **ejemplo** más. Demostremos que para cualquier número natural n se verifica la desigualdad

$$n \leqslant 2^{n-1}. \qquad (4)$$

Demostración. Cuando $n = 1$, la desigualdad (4) se convierte en una lícita desigualdad numérica $1 \leqslant 2^{1-1}$. Supongamos que la desigualdad (4) se verifica para $n = k$, es decir, que es válida la desigualdad

$$k \leqslant 2^{k-1}. \qquad (5)$$

Recurriendo a la desigualdad (5), demostremos la validez de la desigualdad (4) para $n = k + 1$, es decir, demostremos que se verifica la desigualdad

$$(k + 1) \leqslant 2^{(k+1)-1}. \qquad (6)$$

Efectivamente, es obvio que $k + 1 \leqslant 2k$. De aquí, aprovechando la desigualdad (5) y la propiedad de transitividad de las desigualdades, resulta que $k + 1 \leqslant 2 \cdot 2^{(k-1)}$. El segundo miembro de la última desigualdad puede ser escrito en la forma $2^{(k+1)-1}$, de donde precisamente se desprende la validez de la igualdad (6). A base del método de inducción matemática completa llegamos a la conclusión de que la desigualdad (4) es válida para todo número natural n.

Método generalizado de inducción matemática completa. El método de inducción matemática completa se emplea frecuentemente en la demostración de las afirmaciones que son válidas no para todos los números naturales n, sino sólo para n superiores o iguales a cierto número natural p. Entonces, la esencia del método de inducción matemática completa es casi la misma, pero se cambia el punto 1 por el punto 1a): «Se comprueba la validez de esta afirmación para $n = p$». En este caso, con el fin de demostrar la validez de una afirmación para cualquier n natural $(n \geqslant p)$ se hace lo siguiente:

1. Se comprueba la validez de la afirmación para $n = p$.
2. Se presupone la validez de esta afirmación para $n = k$ (donde $k \geqslant p$).
3. Se demuestra la validez de esta afirmación para $n = k + 1$, tomando en consideración la validez de la misma para $n = k$. Después se saca la conclusión de que la afirmación es válida para todo n natural $(n \geqslant p)$.

Demos un ejemplo de demostración de una desigualdad con ayuda del método generalizado de inducción matemática: demostremos que si α es un número fijo tal, que $\alpha > -1$ y $\alpha \neq 0$, entonces para cualquier n natural $(n \geqslant 2)$ se verifica la *desigualdad de Bernoulli*

$$(1 + \alpha)^n > 1 + \alpha n. \qquad (7)$$

En efecto, cuando $n = 2$, la desigualdad (7) tiene por expresión

$$(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha. \qquad (8)$$

La desigualdad (8) es equivalente a la desigualdad

$$\alpha^2 > 0. \qquad (9)$$

La desigualdad (9) es obvia para $\alpha \neq 0$. Por consiguiente, la desigualdad (8) se verifica para los números α en consideración. Supongamos que para los α en consideración con $n = k$ $(k \geqslant 2)$ la desigualdad (7) es válida, es decir,

$$(1 + \alpha)^k > 1 + \alpha k. \qquad (10)$$

Demostremos, haciendo uso de la desigualdad (10), que la desigualdad (7) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la desigualdad

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + \alpha (k + 1). \tag{11}$$

Para la demostración multipliquemos ambos miembros de la desigualdad (10) por un número positivo $(1 + \alpha)$ (por cuanto $\alpha > -1$, entonces, $1 + \alpha > 0$). Obtendremos la igualdad

$$(1 + \alpha)^{k+1} > (1 + \alpha k)(1 + \alpha), \tag{12}$$

que es equivalente a la desigualdad (10), es decir, obtendremos que la desigualdad (12) se verifica.

Demostremos ahora la validez de la desigualdad

$$(1 + \alpha k)(1 + \alpha) > 1 + \alpha (k + 1). \tag{13}$$

Trasladando todos los términos de la desigualdad (13) a una parte, abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos una desigualdad equivalente $\alpha^2 k > 0$, la cual se verifica, puesto que $\alpha \neq 0$ y $k \geqslant 2$. Por consiguiente, la desigualdad (13) es válida, pero entonces, aprovechando la validez de las desigualdades (12), (13) y la propiedad de transitividad de las igualdades concluimos que es válida también la igualdad (11). De este modo, la desigualdad de Bernoulli queda demostrada para cualquier n natural, $n \geqslant 2$.

Tiene sentido que sea retenida en la memoria esta igualdad, puesto que con su ayuda se puede demostrar la validez de muchas otras desigualdades, por ejemplo, la validez, para cualquier n natural, de la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{14}$$

En efecto, realizando ciertas transformaciones elementales, obtenemos una cadena de desigualdades equivalentes:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}\, n^n}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)^n} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > 1. \tag{15}$$

Con el fin de demostrar la desigualdad (15), para $n \geqslant 2$, apliquemos la desigualdad de Bernoulli (7) a la expresión $\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$, considerando $\alpha = -\frac{1}{(n+1)^2}$. Obtendremos

$$\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por un número positivo $\frac{n+2}{n+1}$, obtendremos

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Por cuanto

$$\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

entonces, empleando la propiedad de transitividad de las igualdades, tenemos:

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)>1.$$

De este modo la desigualdad (5) queda demostrada.

Como la desigualdad (15) es equivalente a la (14), ésta última también se verifica para $n \geq 2$. Por cuanto es obvia para $n = 1$, la validez de la desigualdad (14) queda demostrada para cualquier n natural.

Resolución de los problemas de divisibilidad. El método de inducción matemática se emplea también para resolver problemas de divisibilidad.

Demostremos, por ejemplo, que para cualquier n natural el número $N(n) = n^3 + 5n$ es divisible por 6.

Demostración. Cuando $n = 1$, el número $N(1) = 6$, y, por eso, $N(1)$ se divide por 6, es decir, la afirmación es válida, si $n = 1$. Supongamos que la afirmación es legítima para $n = k$, es decir, que $N(k) = (k^3 + 5k)$ se divide por 6. Aprovechando el hecho de que el número $N(k)$ se divide por 6, demostraremos la validez de la afirmación para $n = k + 1$, es decir, demostraremos que el número $N(k + 1) = [(k + 1)^3 + 5(k + 1)]$ se divide por 6.

Efectivamente, haciendo uso de la propiedad de asociatividad y de conmutatividad de las operaciones sobre los números y las expresiones algebraicas, tenemos:

$$N(k+1) = [(k+1)^3 + 5(k+1)] = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 +$$
$$+ 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 6 + 3k^2 + 3k =$$
$$= N(k) + 6 + 3k(k+1).$$

Por cuanto k y $k + 1$ son dos números naturales seguidos, uno de ellos es par, por lo cual el número $3k(k + 1)$ se divide por 6. Teniendo en cuenta que el número $N(k)$ se divide por 6 y el número 6 se divide por 6, obtenemos que será divisible por 6 también el número $N(k + 1)$. A base del método de inducción matemática completa se saca la conclusión de que el número $N(n) = n^3 + 5n$ se divide por 6 para cualquier número natural n.

Analicemos la resolución de un problema de divisibilidad más complejo, cuando el método de inducción matemática completa ha de emplearse varias veces.

Se pide demostrar que para cualquier n natural el número $(3^{2^n} - 1)$ no es divisible exactamente por el número 2^{n+3}.

Cuando $n = 1$, la afirmación es evidente, puesto que 8 no se divide por 16. Supongamos ahora que la afirmación resulta válida para $n = k$, es decir, que el número $(3^{2^k} - 1)$ no se divide exactamente por el número 2^{k+3}. Demostremos entonces que el número $(3^{2^{k+1}} - 1)$ no se divide exactamente por el número 2^{k+4}, es decir, la afirmación es válida para $n = k + 1$. Representemos la expresión $(3^{2^{k+1}} - 1)$ en forma de un producto:

$$3^{2^{k+1}} - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1).$$

Por hipótesis, el primer factor del producto no se divide exactamente por el número 2^{k+3}, es decir, en la representación del número compuesto $(3^{2^k} - 1)$ en forma de un producto de números primos el número dos se repite no más de $(k + 2)$ veces. De este modo, para demostrar que el número $(3^{2^{k+1}} - 1)$ no se divide exactamente por el número 2^{k+4}, se debe demostrar que el número $(3^{2^k} + 1)$ no es divisible por 4.

Con el fin de demostrar dicha afirmación demostremos una afirmación auxiliar: para cualquier n natural el número $(3^{2n} + 1)$ no se divide por 4. Cuando $n = 1$, esta afirmación es evidente, puesto que 10 no se divide por 4 sin resto. Suponiendo que $(3^{2k} + 1)$ no es divisible por 4, demostremos que tampoco $(3^{2(k+1)} + 1)$ se divide por 4. Representemos la última expresión en forma de una suma $3^{2(k+1)} + 1 = (3^{2k} + 1) + 8 \cdot 3^{2k}$. El segundo sumando de la suma se divide por 4 exactamente, mientras que el primer sumando no se divide. Por consiguiente, toda la suma no es divisible por 4 sin resto. La afirmación auxiliar queda así demostrada.

Ahora está claro que $(3^{2^k} + 1)$ no se divide por 4, puesto que el número 2^k es un número par. Obtenemos en definitiva, en virtud del método de deducción matemática completa, que el número $(3^{2^n} - 1)$ no se divide exactamente por el número 2^{n+3}, cualquiera que sea n natural.

En conclusión demostremos por el método de inducción matemática dos afirmaciones aducidas anteriormente (§§ 2, 3, cap. II). En el § 3 se expuso la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (16)$$

Aquí, C_n^m son los coeficientes binomiales que se calculan según la fórmula $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Demostremos la igualdad (16).

Cuando $n = 1$, la fórmula (16) se escribirá en la forma $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$. Tomando en consideración la regla para el cálculo de los coeficientes binomiales, escribamos esta fórmula en la forma $(a + b)^1 = a^1 + b^1$, es decir, nos convencemos de que la fórmula (16) es válida para $n = 1$. Supongamos que ella es válida para $n = k$, es decir, que se verifica la fórmula

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} + \\ + C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k. \quad (17)$$

Demostremos, haciendo uso de la validez de la fórmula (17), que la fórmula (16) es cierta para $n = k + 1$, es decir, demostremos que se verifica la fórmula

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1} b + \ldots + C_{k+1}^l a^{(k+1)-l} b^l + \\ + C_{k+1}^{l+1} a^{(k+1)-(l+1)} b^{l+1} + \ldots + C_{k+1}^{(k+1)-1} a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}. \quad (18)$$

En efecto, utilizando sucesivamente, al principio, las propiedades de la potencia con exponente natural, luego, la fórmula (17) y, por fin, la regla para multiplicar polinomios, obtendremos

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+2} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l+1} b^l + C_k^{l+1} a^{k-l} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+1} b^l + C_k^l a^{k-l} b^{l+1} + C_k^{l+1} a^{k-l-1} b^{l+2} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1}. \quad (19)$$

Reduciendo los términos semejantes en esta suma, llegamos a que

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 + \ldots \\ \ldots + (C_k^l + C_k^{l-1}) a^{k-l+1} b^l + (C_k^{l+1} + C_k^l) a^{k-l} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^{k-2}) a^2 b^{k-1} + (C_k^k + C_k^{k-1}) a b^k + C_k^k b^{k+1}. \quad (20)$$

Por cuanto el coeficiente C_n^k es el número de combinaciones de n elementos tomados a k (véase § 7, cap. I), entonces

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Haciendo uso de esta igualdad y también de las igualdades evidentes $C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0$ y $C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$, obtenemos la validez de la fórmula (18) que se predetermina por la de la fórmula (20). A base del método de inducción matemática completa se saca la conclusión de que la fórmula del binomio de Newton (16) es lícita para cualquier número natural n.

En el § 2 se ha aducido la igualdad de las expresiones algebraicas

$$(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = A^n - B^n. \tag{21}$$

Con el fin de demostrar esta igualdad para $n \geqslant 2$, recurriremos al método generalizado de inducción matemática completa.

Para $n = 2$ tenemos la siguiente cadena de igualdades: $(A - B) \times \times (A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$, es decir, la igualdad (21) es justa.

Supongamos que para $n = k$ ($k \geqslant 2$) la igualdad (21) se verifica, es decir, es lícita la igualdad

$$(A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \ldots$$
$$\ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}) = A^k - B^k. \tag{22}$$

Aprovechando la igualdad (22), demostremos la validez de la igualdad (21) para $n = k + 1$, es decir, demostremos la igualdad

$$(A - B)(A^k + A^{k-1}B + A^{k-2}B^2 + \ldots$$
$$\ldots + AB^{k-1} + B^k) = A^{k+1} - B^{k+1}. \tag{23}$$

Efectivamente, haciendo uso de las propiedades de las operaciones con las expresiones algebraicas y de la igualdad (22), obtenemos una cadena de igualdades idénticas

$$(A-B)(A^k + A^{k-1}B + A^{k-2}B^2 + \ldots + AB^{k-1} + B^k) =$$
$$= (A-B)(A^k + A^{k-1}B + A^{k-2}B^2 + \ldots + AB^{k-1}) + (A-B)B^k =$$
$$= (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \ldots + B^{k-1})A + (A-B)B^k =$$
$$= (A^k - B^k)A + (A-B)B^k = A^{k+1} - B^kA + AB^k - B^{k+1} = A^{k+1} - B^{k+1}.$$

De este modo queda demostrada la igualdad (23) y, por lo tanto también la igualdad (21) para cualquier $n \geqslant 2$ natural.

Ejercicios

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a = -0{,}1$ (1 . . . 5):

1. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3} \cdot \left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \dfrac{3}{a^2-a}\right]$.

2. $\left(\dfrac{2}{2a-1} + \dfrac{6}{1-4a^2} - \dfrac{4}{2a+1}\right) : \left(1 - \dfrac{4a^2+1}{4a^2-1}\right)$.

3. $\left(\dfrac{a-2}{a^3+1} - \dfrac{1}{a^3-a^2+a}\right) \cdot \dfrac{a^3-a}{a^2+1} + \dfrac{2}{a^3+a^2+a+1}$.

4. $\left\{\left[\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2 - \left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right] : \dfrac{8a^3+8a}{a^3+a^2-a-1} + \dfrac{1}{a+1}\right\} \cdot (1-a^2)$.

5. $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1} \cdot \dfrac{2a^2-a}{a^3+8} - \dfrac{a+2}{2a^2+a}\right) : \dfrac{4}{a^2+2a} - \dfrac{a+4}{3-6a}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a = 1$ y $b = -2$ (6 . . . 10):

6. $\dfrac{a^2(a+b^2)(a^3-b^3)(a^2-b)}{(a^2+b^2)(2a-3b^2)}$. 7. $\dfrac{a^3+b(b^2+3a)-1}{a(a-b+1)+b(b+1)}$.

8. $\dfrac{a^4+64}{b(a+2)^2-4(a-b)-a^2-8}$.

9. $\dfrac{3}{2}\left\{4b-b\left[a-b:\left(\dfrac{b-2a}{b+4a}-a\right)\right]\right\}+10$.

10. $\dfrac{b}{2}\left\{ab^2-2\left[\dfrac{4{,}75(2a^2+4b)-b^2}{a^2b^4+0{,}3(b^4-6a)}-3a(4-b)\right]\right\}-10b$

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $m = 10$, $n = 4$ y $p = 5$ (11 . . . 15):

11. $\left\{[3(n+5)]^m-p(m-1)^8\cdot\left(\dfrac{p+10}{5}\right)^{m+2}+4(3n-3)^{m-2}\cdot3^{2p-1}\right\}:41\times$ $\times\left(\dfrac{n+5}{3}\right)^{24}$.

12. $\left(m^{12}+p^{m+1}\cdot2^{m-1}-p^{3n+1}\cdot2^{\frac{m+n+10}{3}}\right):[(20-4n)\cdot5^{n+1}(2n+2)^{m-n}]$.

13. $\dfrac{[2(p-4)]^{2m-1}\cdot(3p+12)^{\frac{10-n}{2}}+15\cdot n^{3(p-2)}\cdot(m-1)^{n+p-5}}{6^{m+5}\cdot[2(n-5)]^{p+5}+(32-4p)^{20-m}}$.

14. $\dfrac{5\cdot4^{3p}\cdot(2m-11)^{n+5}-4(p-4)\cdot3^{2m}\cdot(2n)^9}{5\cdot2^{2p-1}\cdot6^{2m-1}-7(m-8)^{2m+9}\cdot27^{10-n}}$.

15. $\dfrac{(m+26)\cdot(3m-12)^{20-4n}-8\cdot2^n\cdot(p+n)^4-3^{n+1}\cdot(m-4)^p}{(2n+4m-22)^{p-2}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a=-\sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 3$, $x = -\dfrac{3}{2}$ (16 . . . 20):

16. $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\dfrac{(x-b)^2}{b(a-b)}+\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{a-b}{ab}$.

17. $\dfrac{1}{2(x-a)}-\dfrac{1}{2(x+a)}+\dfrac{4}{a^2-x^2}+\left(\dfrac{x^2}{a^2b^2}:\dfrac{c^3x}{ab^3}\right)\cdot\dfrac{a^4}{xb}\cdot\dfrac{c^3}{a^3}$.

18. $\dfrac{a^2-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^3-x}{a^3+2a^2}+\dfrac{3ab^2}{5b^3c}\cdot\dfrac{15b^2c^2}{9a^2b}-\dfrac{3b}{(b+1)^2}+\dfrac{2}{b+1}$.

19. $\left[\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}\right]:\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{3x^2+x}$.

20. $\left\{\left[\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+3\right]:\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+c\right]\right\}:\dfrac{a^2+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}+\dfrac{x-3}{x+c}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas (21 . . . 25):

21. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

22. $\left(\dfrac{2}{2a-b}+\dfrac{6b}{b^2-4a^2}-\dfrac{4}{(2a+b)}\right):\dfrac{a^2}{4a^2-b^2}$.

23. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}:\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2-a}\right]$.

24. $\left[\left(\dfrac{a}{m(b-c)}+\dfrac{b}{n(a-c)}\right):\dfrac{9a^2-b^2}{ab(m-c)}\right]:\dfrac{m-4}{(m-2)(a+1)}$.

25. $\left[\frac{a+t}{(a-t)^2}-\frac{2a}{a^2-t^2}+\frac{a-t}{(t+a)^2}\right]:\frac{ab^3t^2}{a^4-t^4}-\frac{bt^2}{t^2-a^2}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas (26 . . . 30)

26. $\frac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}:\frac{a^2+6a+3}{a^2+a-6}$ y $\frac{2a+3}{a+3}$.

27. $\frac{2a}{a^2-b^2}:\frac{1}{ab(b+2)}$ y $\frac{a^2-2a}{a^2(a+1)^2-1}$.

28. $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$ y $\frac{1}{a^2-c^2}+\frac{b}{b-2bc}$.

29. $\frac{c-b}{bc}:\frac{b^2-c^2}{a^2-1}$ y $\frac{b+1}{(m-a)(b+1)}+\frac{1}{bcm}$.

30. $\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+4\right]:\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+4\right]:\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$ y $\frac{x+a}{2x+a}:\frac{ax+a^2}{4x^2-a^2}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas y simplifíquese estas expresiones en su CVA (31 . . . 40):

31. $(3a^2x+a^2x-18a^2x):\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+x-\frac{2x}{3}\right)$.

32. $(2x^2yx^5y^7\cdot 6x^3y^2):(-3x^4y\cdot 4x^5y^0xy)$.

33. $[3a^4b^7x^3\cdot 5a^3bx\cdot(-6a^3x^2)]:(15ax\cdot 2yxa\cdot 7ayx)$.

34. $\frac{2x^2y}{3yz}\cdot\frac{5z^2x}{7xy^3}:\frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$.

35. $\left(\frac{8a^2b}{12b^2c}:\frac{abc}{a^3b^2c}\right):\frac{15a^2b^2c}{3abc}$.

36. $\left[\left(\frac{y^2b^3}{a^3x}:\frac{ya}{b}\right):\frac{ab^4}{x^3y}\right]:\frac{b^2}{a^2}$.

37. $\left(\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\frac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\right)\cdot\frac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$.

38. $\frac{b^2-100}{a^2-b^2}:\frac{b+10}{a-b}+\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{b^2+ab}{b^2-ab}$.

39. $\left[\frac{c^3-8}{c+a}:\left(\frac{c-2}{4c}\cdot\frac{8c^3}{c^2+ac}\right)\right]:\frac{c^2+2c+4}{2b(a-c)}$.

40. $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-4ab-21b^2}\cdot\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-b^3}\right):\frac{1}{a-7b}+$
$+\frac{a^2-l^2}{5a^3c^3}:\left(\frac{a+l}{10a^4}\cdot\frac{2a-2l}{ac^4}\right)$.

Simplifíquese las siguientes expresiones algebraicas (41 . . . 65):

41. $3(x-2)-2(x-1)$.

42. $18-5(x+2)-3(x+1)$.

43. $6(x-2)-13(x-3)-2x+4$.

44. $3(x-4)-4(x-3)-5(x-2)-9(8-x)+20$.

45. $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$.

46. $1-x+2\{3-2[x+2(x-2)]-x\}$.

47. $2+3[x-4(1-x)]-x-\{(x-1)-3[x+2(x-1)]-2x\}$.

48. $\frac{x}{3}+1\frac{1}{2}-\frac{2x}{9}+\frac{x}{6}-4x$.

49. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$.

50. $3+\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-11\right)$.

51. $\frac{0,75-x}{3}-\frac{2x+4}{1,5}-x-4\frac{1}{3}$.

52. $0,5x-3+\frac{0,25-3x}{4\frac{1}{4}}-1\frac{1}{2}x$.

53. $\frac{3x+5}{3}+4\frac{1}{6}-0,1\left(\frac{7x}{2}+8\right)$.

54. $\frac{7x+2}{2}-1,5-\frac{4x-1}{3}-\frac{0,75x}{6}$.

55. $5\frac{1}{2}+0,5x-\frac{3x}{4}+2(x+0,(3)-1)$.

56. $\frac{8}{3}\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}\right)-0,5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x}{9}\right)+2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)\right]$.

57. $a-\{2a-[3b-2(4c-2a)]-3(b-c)\}$.

58. $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-6y)]$

59. $3y-\{16y-2[3x-2(x-12y)-5x]+x\}$.

60. $-2[a-2(b-a)]-3[b-4(2a-3b)]+2a$.

61. $6\{2a-3[b-2(c+a)]-3b\}-4\{b-2[a-4(c-a)-2c]+3a\}$.

62. $0,5a-\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{3}-0,5a\right)-\left\{a-\left[1\frac{1}{2}a-\left(\frac{b}{3}-0,25a\right)\right]-\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{4}\right)\right\}$.

63. $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0,5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0,75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$.

64. $\frac{1}{8}\left(\frac{2a}{5}-\frac{4b}{15}\right)-2\left[0,4\left(\frac{5a}{4}-\frac{a}{6}-\frac{b}{10}\right)-0,2\left(b-\frac{a}{3}\right)-\frac{b-2a}{4}\right]$.

65. $0,2(3)+a-0,5\left[2\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{9}\right)-1\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}+0,(6)-\frac{b}{4}\right)\right]-\frac{a+b-1}{15}$.

Descompóngase los polinomios que siguen en el producto de por lo menos dos polinomios (66 . . . 85):

66. $5mx+3ny-5my-3nx$. 67. $5x+xy+5y+y^2$.

68. $ax-bx+by+cy-cx-ay$. 69. $3a^5-6a^4b+3a^3b^2$.

70. $36x^2y^2-100$. 71. $25-49a^2b^6c^4$. 72. $4p^2q^4-81z^2$

73. $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$. 74. $(m+2n)^2-4(3m-n)^2$.

75. $9(a-3b)^2-16(b-2a)^2$. 76. $a^4-c^2+9y^2-6a^2y$.

77. $c^6-6c^3-c^2-2cx-x^2+9$. 78. $a^3b^3-27m^3$.

79. $1+1000y^6$. 80. $m^3b^6c^9-8k^6$. 81. $125a^3-343b^3$.

82. $8a^3+(b-2a)^3$. 83. $64(m-n)^3+1$.

84. $(2a-b)^3-(3b-a)^3$. 85. $8(x-y)^3+27(y-2x)^3$.

Descompóngase los polinomios que siguen en el producto de cuatro polinomios por lo menos (86 . . . 100):

86. $25b^2\cdot 81y^2z^2-121a^2\cdot 81y^2z^2-25b^2\cdot 169a^2+121a^2\cdot 169a^2$

87. $144a^2b^8\cdot 25a^{10}-49c^4\cdot 25a^{10}-144a^2b^8+49c^4$.

88. $125x^3\cdot(a+b)^2-125x^3\cdot(3a-2b)^2-8(a+b)^2+8(3a-2b)^2$.

89. $25(a-3b)^2-\frac{1}{4}(3a+7b)^2-125z^3y^6(a-3b)^2+\frac{125}{4}z^3y^6(3a+7b)^2$.

90. $16x^2\cdot 64a^6b^6-225(3m-n)^2\cdot 64a^6b^6+16x^2-225(3m-n)^2$.

91. $9(x+y)^2\cdot 27a^6b^3-16(x+2y)^2\cdot 64a^6b^3+9(x+y)^2\cdot 125m^3-16(x+2y)^2 125m^3$.

92. $2a^2y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$.

93. $13x^2y^2 \cdot 3a - 39y^4 \cdot 3a - 13x^2y^2 \cdot 9a^2 + 39y^4 \cdot 9a^2$.

94. $36a^3 \cdot 49x^2 - 9ab^2 \cdot 49x^2 + 36a^3 \cdot 7xy - 9ab^2 \cdot 7xy + 36a^3 \cdot 14x - 9ab^2 \cdot 14x$.

95. $15b \cdot 4a^2 + 45mb^2 \cdot 4a^2 + 15b \cdot 16ab + 15mb^2 \cdot 16ab$.

96. $(1 - x^2)(y^2 - m^2) + (6x - 9)(y^2 - m^2) - (1 - x^2)(2mn + n^2) - (6x - 9)(2mn + n^2)$.

97. $(25x^2 + b^2)(a^2 + 6ab) + 9(25x^2 + b^2)(b^2 - c^2) - 9(y^2 + 10xb) \times (b^2 - a^2) - (y^2 + 10xb)(a^2 + 6ab)$.

98. $(x + y)^4 (a^3 + b^3) - a^3b^3 + (x + y)^4 (a + b) - (a + b)$.

99. $(y^3 - y^2 + y)(121 - 25x^2 - 10x) - (121 - 25x^2 - 10x) - (y^3 - y^2 + y) + 1$.

100. $16(a^3 - b^3 - b)(9x^3y - 4xy^3) + 16a(9x^3y - 4xy^3)$.

Redúzcanse a un denominador común las siguientes tres fracciones algebraicas (101 . . . 110).

101. $\dfrac{1}{xy + x^2}, \ \dfrac{1}{x^2 - y^2}, \ \dfrac{1}{2x^2 - 2xy}$.

102. $\dfrac{1}{(a + b)^2}, \ \dfrac{1}{a^3 - a^2b}, \ \dfrac{1}{a^2 - b^2}$.

103. $\dfrac{1}{a^2 - 4}, \ \dfrac{1}{a^2 + 3a + 2}, \ \dfrac{1}{a^2 + 2a}$.

104. $\dfrac{1}{a^2 + a - 2}, \ \dfrac{1}{a^2 - 4a + 3}, \ \dfrac{1}{a^2 - 1}$.

105. $\dfrac{1}{20a - 4}, \ \dfrac{1}{50a^2 + 2}, \ \dfrac{1}{75a^2c - 3c}$.

106. $\dfrac{1}{9bx + 4by}, \ \dfrac{1}{18cx + 12cy}, \ \dfrac{1}{81x^2 - 16y^2}$.

107. $\dfrac{1}{a^2 + ab}, \ \dfrac{1}{b^2 + ab}, \ \dfrac{1}{a^3b - b^3a}$.

108. $\dfrac{1}{x^2 - x - 20}, \ \dfrac{1}{x^2 - 9x + 20}, \ \dfrac{1}{8x - 32}$.

109. $\dfrac{1}{(2a^2 - 3ab)^2}, \ \dfrac{1}{(4a - 6b)^3}, \ \dfrac{1}{4a^2 - 9b^2}$.

110. $\dfrac{1}{x^3 - y^3}, \ \dfrac{1}{2x^2 + 2xy + 2y^2}, \ \dfrac{1}{ax^2 - ay^2}$.

Hállese el CVA de las expresiones algebraicas y simplifíquese éstas en su CVA (111 . . . 130):

111. $\dfrac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3}$.

112. $\dfrac{4b^4 + 11b^2 + 25}{4b^4 - 9b^2 + 30b - 25}$.

113. $\dfrac{3a^2 + 6a}{a^2 + 4a + 4} \cdot \dfrac{a^3 - 2a}{a^4 - 4a^2 + 4}$.

114. $\dfrac{b^2 - 5b}{b^2 - 4b - 5} : \dfrac{5a^3b + 10a^2b^2}{3a^2b^3 + 6ab^3}$.

115. $\left(\dfrac{x^2 + y^2 + xy}{x^3 - y^3} : \dfrac{a^3b - 2a^2b + 4ab}{a^3 + 8} \right) : \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 7x - 10}$.

116. $\dfrac{b^2 - 17b + 72}{b^2 - 25} \cdot \dfrac{b^2 - 1}{b^2 - 8b - 9} : \dfrac{b^2 - 9b + 8}{b^2 + 4b - 5}$.

117. $\frac{c^2-c-20}{c^2+5c+4}\cdot\frac{c^2-c}{c^2+c-2}:\left(\frac{c^2}{c^2+3c+2}\cdot\frac{c^2-3c-15}{c+3}\right).$

118. $\frac{6xy-14y}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x+4x^2-14}\cdot\frac{4x-7}{4x^2}:\frac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}.$

119. $\left(\frac{a^2-4a-45}{a^2-14a-15}:\frac{a^2-12a-45}{a^2-6a-27}\right):\left(\frac{b^2-4}{b^2-121}\cdot\frac{b+11}{b+2}\right).$

120. $\left(\frac{12a^3+24a^2}{14a^2-7a}:\frac{a^2+2a}{2a-1}\right):\left(\frac{16a^2-49}{4a^2+a-14}:\frac{2a^2-a-1}{2a^2+5a+2}\right).$

121. $\frac{a}{a+2}-\frac{a^2+3a}{4-a^2}-\frac{a+1}{3a-6}.$

122. $\frac{6a^3+48a^2}{a^3+64}+\frac{a^2-4}{a+4}-\frac{3a^2}{a^2-4a+16}.$

123. $\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{3}{(x+1)(x^2+5x+6)}.$

124. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$

125. $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}.$

126. $\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}.$

127. $\frac{a^6-b^6}{a^2-b^2}-\frac{a^6+b^6}{a^2+b^2}-\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a-b)}.$

128. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]$

129. $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right).$

130. $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right)\cdot\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}+\frac{x^3-y^3}{xy}.$

Hállese el CVA de las siguientes dos expresiones algebraicas A y B, y demuéstrese que en este campo se verifica la igualdad idéntica $A=B$ (131 ... 160):

131. $A=\frac{a^2-2}{6ab}\cdot\frac{18b^3}{5a^4-10a^2},\ B=\frac{3b^2}{5a^3}.$

132. $A=\frac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+ab},\ B=\frac{a^2+ab+b^2}{a}.$

133. $A=\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}:\frac{2a+8}{3a-9},\ B=\frac{3(a-3)}{2(a-4)}.$

134. $A=\frac{a^3+9a^2+20a}{a^2+5a+4}:\frac{a^2+7a+10}{a^2+3a+2},\ B=a.$

135. $A=\frac{2a-3}{2a^2+13a-24}\cdot\frac{4a^2-3a-7}{4a-7}\cdot\frac{a^2+5a-24}{a^2-2a-3},\ B=1.$

136. $A=\frac{2a^2+3ab-2b^2}{a^2+2ab+4b^2}\cdot\frac{a^3-8b^3}{a^2+3ab+2b^2}:\frac{2a^2-5ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2},\ B=a+b.$

137. $A=\frac{a^2-9}{5a^3b^3}:\left(\frac{a+3}{10a^4}\cdot\frac{2a-6}{ab^4}\right),\ B=a^2b.$

138. $A=\left(\frac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3}:\frac{(m+2n)^3}{27m^3+n^3}\right)\cdot\frac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2},\ B=\frac{m}{n}.$

139. $A=\frac{c^2-4m^2}{c^2-2cm}-\frac{c^2+2cm-8m^2}{c^2-4m^2},\ B=\frac{4m^2}{c(c+2m)}.$

140. $A=\frac{1+a^2+a}{1-a^3}+\frac{a-a^3}{(1-a)^3}$, $B=\frac{1}{(1-a)^2}$.

141. $A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}$, $B=1$.

142. $A=\frac{3a-5}{3a^2-2a-5}-\frac{3a+5}{3a^2+7a+2}-\frac{1}{6a^2-a-1}$, $B=2$.

143. $A=\frac{5(2b-3)}{11(6b^2+b-1)}+\frac{7b}{6b^2+7b-3}-\frac{12(3b+1)}{11(4b^2+8b+3)}$, $B=\frac{1}{2b+1}$.

144. $A=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$, $B=0$.

145. $A=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{1-x}-\frac{1}{3-x}$, $B=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

146. $A=\frac{a}{(a-x)^2}+\frac{3a}{x^2+ax-2a^2}+\frac{1}{2a+x}$, $B=\frac{x}{(a-x)^2}$.

147. $A=\frac{1+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{1+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$, $B=0$

148. $A=\frac{m^2nr}{(m-n)(m-r)}+\frac{n^2mr}{(n-r)(n-m)}+\frac{r^2mn}{(r-m)(r-n)}$, $B=0$.

149. $A=\frac{(ac+bm)^3-(am+bc)^3}{(a-b)(c-m)}-\frac{(ac+bm)^3+(am+bc)^3}{(a+b)(c+m)}$,

$B=2(ac+bm)(am+bc)$.

150. $A=\frac{31}{2c-3}-\frac{2c+15}{4c^2+9}-\frac{2}{2c+3}+\frac{18(2c+15)}{81-16c^4}$, $B=0$.

151. $A=\frac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}-\frac{x^4+x^3+3x+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$, $B=2$.

152. $A=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\frac{x^4-y^4}{2xy\,(x-y)}$, $B=\frac{1}{x+y}$.

153. $A=\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}-\frac{(x-y)^2-z^2}{(y+z)^2-x^2}$, $B=1$.

154. $A=\frac{(x-y)^4-xy\,(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$, $B=\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$.

155. $A=\frac{z^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(x-\frac{za^2}{a^2+b^2}\right)^2$, $B=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z-x}{b}\right)^2$.

156. $A=\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$, $B=a-1$.

157. $A=\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}$, $B=-(b+4)$.

158. $A=\left(\frac{1+6ac}{8c^3-a^3}-\frac{1}{2c-a}\right):\left(\frac{1}{a^3-8c^3}-\frac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right)$,

$B=1-2c+a$.

159. $A=\frac{b-4}{b-2}:\left(\frac{80b}{b^3-8}+\frac{2b}{b^2+2b+4}-\frac{b-16}{2-b}\right)-\frac{6b+4}{(4-b)^2}$, $B=\frac{b}{b-4}$

160. $A=\frac{9m}{(3-m)^2}-1:\left(\frac{m}{m-3}+\frac{12m^2-9m}{27-m^3}+\frac{9}{m^2+3m+9}\right)$, $B=-1$

Demuéstrese, para cualesquiera números positivos a y b, que se verifican las desigualdades (161 . . . 165):

161. $(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$. 162. $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

163. $(a+b)^4 \leqslant 8a^4+8b^4$. 164. $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

165. $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Demuéstrese, haciendo uso de la desigualdad sobre la media aritmética y la media proporcional, que cualesquiera números positivos a, b y c se verifican las igualdades siguientes (166 ... 168):

166. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$.

167. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

168. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

169. Demuéstrese que para cualquier número real a se verifica la desigualdad

$$a^2+1 \geqslant \frac{2a}{a^2+1}.$$

170. Demuéstrese que si $a \geqslant b \geqslant c > 0$, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

171. Demuéstrese que si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$ y $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1$, entonces

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Demuéstrese que para cualquier n natural se verifican las siguientes desigualdades (172 ... 173):

172. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$.

173. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2$.

Demuéstrese que para cualquier m y p natural se verifican las siguientes desigualdades (174 ... 176):

174. $\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+3)(m+4)}+\ldots$
$\ldots+\frac{1}{(m+p)(m+p+1)} < \frac{1}{m+1}$.

175. $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{m+p} > \frac{p}{m+p}$.

176. $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(m+p)^2} < \frac{1}{p}$.

Demuéstrese que para $n \geqslant 2$ (n es cualquier número natural) se verifican las siguientes desigualdades (177 ... 184):

177. $(n!)^2 \geqslant n^n$. 178. $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$. 179. $\frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

180. $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 181. $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

182. $n! < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$. 183. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

184. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$

Descompónganse, según la fórmula del binomio de Newton (185 . . . 187):

185. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^6$. 186. $(a-\sqrt{2})^7$. 187 $(a-\sqrt{3})^8+(a+\sqrt{3})^8$.

Hállese el séptimo término en la descomposición del binomio de Newton (188 . . . 191):

188. $(2+b)^9$. 189. $(3a-2)^{10}$. 190 $(a^2-2a)^{11}$. 191. $\left(\frac{a^2}{3}+3a\right)^{12}$.

Hállense todos los k, para cada uno de los cuales el coeficiente de a^k en el desarrollo del binomio de Newton es un número racional (192 . . . 194):

192. $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\cdot a)^{24}$. 193. $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\cdot a)^{76}$. 194. $(\sqrt[3]{3}\cdot a+\sqrt[12]{2})^{102}$.

Hállese el coeficiente de x^5 de los siguientes polinomios (195 . . . 200):

195. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{14}$. 196. $(2x-1)^{17}$. 197. $(1+x-x^2)^4$.

198. $(1-2x+x^2)^5$. 199. $(1-x)^2\cdot(2+x)^6$. 200. $(1+2x)^4\cdot(x-1)^7$.

Escójanse los números A, B, C de tal manera que se verifiquen las siguientes igualdades idénticas (201 . . . 205):

201. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+Ax^2+Bx+C)$.

202. $3x^5-x^4-3x+1=(x^2+1)(3x^3+Ax^2+Bx+C)$.

203. $\frac{x^2+4x-1}{x^3+9x^2+23x+15}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}$.

204. $\frac{x^2-1}{x^3+5x^2+3x-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$.

205. $\frac{-2x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

Hállense, aplicando el esquema de Horner, el cociente y el resto al dividir por $(x+1)$ los siguientes polinomios (206 . . . 211):

206. $x^6+9x^3+32x+16$.

207. $14x-4+27x^4-9x^7$. 208. x^5-7x-6. 209. x^4+19x^2-30.

210. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

211. $(x^2+4x+18)^2+3x(x^2-4x+8)+3$.

Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que tanto el número (-2) como el número 1 son raíces de los siguientes polinomios (212 . . . 214):

212. $(x^2+x)^2+4(x^2+1)-12$. 213. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

214. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.

215. Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que el polinomio

$$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$$

se divide por el polinomio $(x+2)(x+6)$ y hállese el cociente.

216. Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que el polinomio

$$x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$$

se divide por el polinomio $(x-2)^3$.

217. ¿Se dividirá el polinomio $(x^4-10x^2+16)+(x^4-11x^2+24)$ por el polinomio (x^2-8)?

218. Demuéstrese que la suma de potencias iguales x^m+c^m no es divisible por la diferencia entre sus bases $x-c$.

219. Demuéstrese que la diferencia entre potencias iguales impares $x^{2k+1}-c^{2k+1}$ no es divisible por la suma de sus bases $x+c$.

220. Demuéstrese que la suma de potencias iguales pares $x^{2k}+c^{2k}$ no es divisible por la suma de sus bases $x+c$.

221. Hállense las raíces enteras del polinomio $x^4-x^3-2x^2+4x-24$.

Demuéstrese, empleando el método de inducción matemática, que para cualquier n natural se verifican las siguientes igualdades (222 . . . 241):

222. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

223. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

224. $2^2+4^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

225. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

226. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

227. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

228. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

229. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

230. $3+3^2+3^3+\ldots+3^n=\dfrac{3(3^n-1)}{2}$.

231. $2\cdot2^0+3\cdot2^1\cdot+4\cdot2^2+\ldots+(n+1)\cdot2^{n-1}=n\cdot2^n$.

232. $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$.

233. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

234. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n-3}{2^n}$.

235. $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

236. $\dfrac{1}{1\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot19}+\dfrac{1}{19\cdot28}+\ldots+\dfrac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\dfrac{n}{9n+1}$.

237. $\dfrac{1}{5\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot17}+\dfrac{1}{17\cdot23}+\ldots+\dfrac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\dfrac{n}{5(6n+5)}$.

238. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

239. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\dfrac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

240. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

241. $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{2}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{3}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

Demuéstrese (por el método de inducción matemática) que para cualquier n natural se verifican las siguientes desigualdades (242 . . . 244):

242. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}$.

243. $2\sqrt{n+1}>\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

244. $(n!)>\left(\frac{n}{3}\right)^n$.

245. Demuéstrese que para todo $n \geqslant 5$ (n es un número natural) se verifica la desigualdad $2^n > n^2$.

246. Demuéstrese que para todo n natural ($n \geqslant 3$) se verifica la desigualdad $n! > 2^{n-1}$.

Demuéstrese que para cualquier n natural:

247. El número $n^3 + 5n$ es divisible por 6.

248. El número $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.

249. El número $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9.

250. El número $3^{2n} - 1$ se divide por 2^{n+2} y no se divide por 2^{n+3}.

251. El número $n^5 - n$ se divide por 30.

252. El número $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ se divide por 84.

253. El número $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ se divide por 17.

254. El número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ se divide por 13.

255. El número $n^2(n^4 - 1)$ se divide por 60.

256. El número $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ se divide por 30.

257. El número $20^{n+1} + 16^{n+1} - 3^{n+1} - 1$ se divide por 323.

258. El número $(2n)^3 + 20\,(2n)$ se divide por 48.