CAPÍTULO

III

ECUACIONES ALGEBRAICAS Y DESIGUALDADES

Sean dados dos polinomios A y B. Si se plantea el problema (cap. II) de resolver la ecuación $A = B$, se dice que está dada la *ecuación algebraica* $A = B$. Si, en cambio, se pide resolver la desigualdad $A > B$ ($A < B$, $A \geqslant B$, $A \leqslant B$), se dice que está dada la desigualdad algebraica $A > B$ ($A < B$, $A \geqslant B$, $A \leqslant B$).

En este capítulo se estudian solamente las ecuaciones y desigualdades algebraicas. Por eso, en lugar de las palabras «ecuación algebraica» escribiremos simplemente «ecuación», y en lugar de las palabras «desigualdad algebraica», simplemente «desigualdad».

§ 1. Ecuación con una sola incógnita

Conceptos principales y definiciones. Supongamos que se pide resolver la ecuación

$$R(x) = Q(x), \tag{1}$$

donde $R(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros (véase el cap. II) respecto de la letra x; entonces, x se denomina letra incógnita o, simplemente, *incógnita*, y la ecuación (1), *ecuación algebraica con una sola incógnita.*

Por cuanto el CVA de los polininmios $R(x)$ y $Q(x)$ se compone de todos los números reales, el problema sobre la resolución de la ecuación (1) puede enunciarse así: *hállense todos los valores numéricos de la incógnita x, cada uno de los cuales convierte la ecuación* (1) *en una igualdad numérica justa.* Todo número de este género se llama *raíz* o *solución* de la ecuación (1). Por eso, *resolver la ecuación* (1) significa determinar el conjunto de todas sus raíces.

Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1) consta de k números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces se dice que la ecuación (1) tiene sólo *k raíces* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, es decir, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) es el conjunto $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Si el conjunto de todas las raíces consta solamente de un número x_1, se dice, además, que la ecuación (1) tiene *la única raíz* o *la única solución* x_1.

En el caso en que el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1) es un conjunto vacío se dice, que la ecuación (1) *no tiene raíces.*

Por ejemplo, es evidente que la ecuación $x^2 + 1 = -(x^4 + 1)$ no tiene raíces, pues la ecuación no se convierte en una igualdad numérica que se verifica, cualquiera que sea el valor numérico de la incógnita x.

Examinemos ahora la ecuación algebraica más simple con una sola incógnita

$$x = \alpha, \tag{2}$$

donde α es un número fijo determinado. Es obvio que esta ecuación elemental tiene la única raíz, que es el número α, por lo cual el conjunto de todas las raíces de la ecuación (2) consta de un solo número α.

Sin embargo, no en toda ecuación algebraica con una incógnita la cuestión sobre el conjunto de todas las raíces de la misma es tan evidente como en los dos ejemplos examinados más arriba. Por regla general, para determinar el conjunto de todas las raíces de una ecuación, esta última se reduce mediante los pasos equivalentes (véase más abajo la definición de paso equivalente) a una ecuación o al conjunto (sistema) de varias ecuaciones (véase más abajo la definición de conjunto de ecuaciones), cada una de las cuales es o bien una ecuación elemental del tipo (2), o bien una ecuación de la cual podemos decir que a ciencia cierta no tiene raíces.

En este párrafo se estudian los ejemplos de pasos equivalentes.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con una sola incógnita $R(x) = Q(x)$ y $S(x) = T(x)$. Estas ecuaciones se denominan *equivalentes*, si cualquier—raíz de la primera ecuación es raíz de la segunda ecuación y, viceversa, si cualquier raíz de la segunda ecuación es raíz de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos ecuaciones que no tienen raíces.

La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente* de una ecuación a otra. El paso equivalente de una ecuación a otra se denota mediante una flecha doble $\Leftrightarrow$. La notación

$$R(x) = Q(x) \Leftrightarrow S(x) = T(x)$$

significa que las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $S(x) = T(x)$ son equivalentes.

Demos a conocer algunas **afirmaciones**, con ayuda de las cuales se realizarán los pasos equivalentes.

1. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ y $R(x) - Q(x) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ *y* $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ *son equivalentes para cualquier número real* α.

3. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ *y* $\alpha R(x) = \alpha Q(x)$ *son equivalentes para todo número real* α *distinto de cero.*

4. *Supongamos que se sabe que para cualquier número real x se verifica la igualdad $R(x) = T(x)$, entonces serán equivalentes las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $T(x) = Q(x)$.*

Las demostraciones de la validez de estas afirmaciones son semejantes, razón por la cual **demostraremos**, por ejemplo, sólo la afirmación 2. Sea el número x_1 una raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$. En este caso será válida la igualdad numérica $R(x_1) = Q(x_1)$. Por cuanto la validez de la igualdad numérica no se perturba al adicionar a ambos miembros de ella un número real cualquiera (véase el cap. II), entonces queda lícita la igualdad numérica $R(x_1) + \alpha = Q(x_1) + \alpha$. La validez de esta igualdad numérica significa que el número x_1 es la raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. Por cuanto tal razonamiento puede realizarse para toda raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$, entonces con ello queda demostrado que cualquier raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$ es también raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$.

Mostremos ahora lo contrario. Sea el número x_2 una raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. En este caso será válida la igualdad numérica $R(x_2) + \alpha = Q(x_2) + \alpha$. Sumemos a ambos miembros de esta igualdad numérica el número $(-\alpha)$ y obtendremos que se verifica la igualdad numérica $R(x_2) = Q(x_2)$, de donde se desprende que x_2 es la raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$. Como tal razonamiento puede realizarse para toda raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$, entonces queda demostrado que cualquier raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ es también raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$.

De lo demostrado se deduce que si la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, tampoco las tendrá la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. Efectivamente, supongamos que la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, mientras que la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ tiene por lo menos una raíz. De la condición de que la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ tiene una raíz proviene, de acuerdo con lo demostrado más arriba, que también tiene raíz la ecuación $R(x) = Q(x)$, lo que contradice la suposición. Quiere decir, si la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, tampoco las tiene la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$.

De modo análogo se muestra que si la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ no tiene raíces, la ecuación $R(x) = Q(x)$ tampoco tiene raíces.

Así pues, se ha mostrado que en este caso las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ son equivalentes, con lo cual queda demostrada completamente la afirmación 2.

Sea dado un polinomio $P(x)$ de grado n, entero respecto de la letra x:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0), \qquad (3)$$

donde con las letras $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se denotan ciertos números reales fijos que se denominan *coeficientes* del polinomio $P(x)$.

De las afirmaciones **1** y **4** se deduce que cada ecuación algebraica con una sola incógnita puede reducirse a la forma $P(x) = 0$, y por esta razón será suficiente examinar sólo la ecuación

$$P(x) = 0, \tag{4}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de tipo (3). Toda ecuación de este género se llama *ecuación algebraica de grado n*.

De la definición de raíz del polinomio $P(x)$ (véase el § 5, cap. II) y de raíz (solución) de una ecuación algebraica se desprende que cualquier raíz del polinomio $P(x)$ será raíz (solución) de la ecuación (4). Por consiguiente, la determinación de todas las raíces (soluciones) de la ecuación (4) se reduce a hallar todas las raíces del polinomio $P(x)$. Sólo se debe tener en cuenta que durante la determinación de las raíces de la ecuación (4) no se toma en consideración la multiplicidad de la raíz del polinomio $P(x)$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene la raíz $x_1 = 1$ de segundo orden de multiplicidad, mientras que la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene la única raíz (la única solución) $x_1 = 1$. Sabemos bien que la determinación de las raíces de un polinomio es un problema complejo. Es por eso que se analizarán aquí sólo aquellos casos en que se logra hallar todas las raíces del polinomio, es decir, resolver la ecuación (4).

Ecuación de primer grado. Analicemos el caso en que $P(x)$ es un polinomio de primer grado, es decir, examinemos la ecuación

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

En virtud de la afirmación 2, la ecuación (5) es equivalente a la ecuación

$$a_0x = -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Por cuanto $a_0 \neq 0$, de acuerdo con la afirmación 3, la ecuación (6) es equivalente a la ecuación

$$x = -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{7}$$

Todos los pasos equivalentes de la ecuación (5) a la (7) pueden ser escritos más brevemente en forma de la cadena siguiente de pasos equivalentes:

$$a_0x + a_1 = 0\ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow a_0x = -a_1\ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow x = -\frac{a_1}{a_0}\ (a_0 \neq 0).$$

La ecuación elemental $x = -\frac{a_1}{a_0}$ tiene una raíz única que es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Como la ecuación (5) es equivalente a la ecuación elemental (7), entonces la ecuación (5) también tiene una sola raíz, que es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$.

De este modo, la *ecuación de primer grado* (5) con una sola incógnita tiene *una sola raíz* $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}$.

Para resolver ecuaciones algebraicas de grados más elevados se necesitará el concepto de conjunto (sistema) de ecuaciones. Sean dados m polinomios $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$. Se dice que está dado el *sistema de m ecuaciones algebraicas* con una sola incógnita x:

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ldots, P_m(x)\ 0, \tag{8}$$

si se necesita encontrar todos los valores numéricos de la incógnita x, cada uno de los cuales es la raíz de por lo menos una ecuación de dicho sistema (8) (las ecuaciones del sistema se escriben, habitualmente, en una línea).

De este modo, resolver un sistema de ecuaciones (8) significa resolver cada ecuación $P_i(x) = 0$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$, es decir, encontrar los conjuntos $N_1, N_2, \ldots, N_m$ de todas las raíces de cada una de las ecuaciones y luego tomar la unión de estos conjuntos. Esta unión $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_m$ será el conjunto de todas las raíces del sistema de ecuaciones (8), y todo número, perteneciente al conjunto N, se denominará raíz o solución del sistema (8). Si el conjunto N se compone de k números: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, suele decirse que el sistema de ecuaciones (8) tiene *sólo k raíces* $x_1, x_2, \ldots, x_k$; si, en cambio, el conjunto N se compone de un solo número x_1, se dice que el conjunto de ecuaciones (8) tiene la *única raíz* x_1.

Surge frecuentemente la necesidad de realizar el paso equivalente de una ecuación al sistema de ecuaciones Diremos que la ecuación

$$P(x) = 0 \tag{4}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ldots, P_m(x) = 0, \tag{8}$$

siempre que cualquier solución (cualquier raíz) de la ecuación (4) sea solución (raíz) del sistema (8), y, viceversa, cualquier solución (cualquier raíz) del sistema (8) es solución (raíz) de la ecuación (4). La sustitución de la ecuación (4) por el sistema (8), equivalente a (4), se llama *paso equivalente de la ecuación* (4) al sistema (8).

Por ejemplo, la ecuación

$$(3x+4)(-7x+2)(2x-\sqrt{5})(-12x-16)=0 \tag{9}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$3x+4=0, \quad -7x+2=0, \quad 2x-\sqrt{5}=0, \quad -12x-16=0.$$

En efecto, cualquier raíz de la ecuación (9) reduce a cero por lo menos uno de los polinomios $(3x + 4)$, $(-7x + 2)$, $(2x - \sqrt{5})$, $(-12x - 16)$, es decir, es la raíz de al menos una de las ecuaciones del sistema y, viceversa, cualquier raíz del sistema reduce a cero por lo menos uno de estos polinomios, es decir, satisface la ecuación (9).

El sistema de ecuaciones tiene solamente tres raíces: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{7}$, $x_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente, debido a que el paso es equivalente, las raíces citadas, y sólo ellas, son raíces de la ecuación (9).

Estudiemos una *ecuación algebraica de segundo grado*, es decir, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{10}$$

Se ha acostumbrado llamar estas *ecuaciones cuadráticas*. El polinomio $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, se denomina, corrientemente, *trinomio de segundo grado*; el número a $(a \neq 0)$ que precede a x^2 se llama *primer coeficiente*; el número b, que precede a x, segundo coeficiente y el número c, término independiente. Además, el número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* del trinomio de segundo grado y, también, discriminante de la ecuación cuadrática (10).

Efectuémos una transformación idéntica del trinomio de segundo grado. Por cuanto $a \neq 0$, se verificará la siguiente igualdad idéntica

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Apliquemos ahora la transformación idéntica que lleva el nombre de «formación de cuadrado perfecto»:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}.$$

En definitiva llegamos a que resulta válida la siguiente igualdad idéntica:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] \quad (a \neq 0).$$

En virtud de la afirmación (4), la ecuación (10) es equivalente a la ecuación

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0), \tag{11}$$

y, en virtud de la afirmación 3 (tomando en consideración que $a \neq 0$), resulta que la ecuación (11) es equivalente a la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{12}$$

En una forma más breve esto puede escribirse así:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0),$$

$$\Updownarrow$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]=0 \quad (a\neq 0),$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0 \quad (a\neq 0).$$

Según sea el discriminante D, son posibles tres casos.

a) $D<0$. Por cuanto para cualquier valor numérico x_0 el número $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2$ es no negativo y el número $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, positivo, entonces el número $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$ será también positivo, por lo cual no puede ser igual a cero. Esto significa que la ecuación (12) no tiene raíces reales. Por cuanto la ecuación (10) es equivalente a la (12), ella tampoco tendrá raíces reales.

b) $D=0$. La ecuación (12) toma en este caso la forma

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad (a\neq 0).$$

Esta ecuación es equivalente a una ecuación de primer grado

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad (a\neq 0).$$

Por consiguiente, si $D=0$, la ecuación (12) tendrá la única raíz $x_1=-\frac{b}{2a}$.

c) $D>0$. Entonces, $D=(\sqrt{D})^2$ y, por esta razón, la expresión en el primer miembro de la ecuación (12) puede ser considerada como la diferencia entre dos cuadrados $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ y $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Haciendo uso de la fórmula para la multiplicación reducida, obtendremos la ecuación

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=0 \quad (a\neq 0),$$

que es equivalente a la ecuación (12). Esta ecuación es, a su vez, equivalente al sistema de dos ecuaciones

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \ (a\neq 0), \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \ (a\neq 0). \qquad (13)$$

Cada ecuación en este sistema es de primer grado y, por tanto, según lo demostrado más arriba, tiene una sola raíz. Resolviendo cada una de las ecuaciones del sistema (13), llegamos a que el sistema de ecuaciones (13) tiene tan sólo dos raíces

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a \neq 0), \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad (a \neq 0). \tag{14}$$

Por ser equivalentes los pasos, si $D > 0$, la ecuación (10) será equivalente al sistema (13), por lo cual tiene solamente dos raíces, x_1 y x_2, que se calculan por las fórmulas (14).

Así pues, *la ecuación cuadrática* (10) *no tiene raíces reales, si su discriminante es negativo, tiene tan sólo dos raíces reales, si el discriminante es positivo y tiene una sola raíz real, si el discriminante es igual a cero.*

Notemos que si el discriminante de la ecuación cuadrática (10) es positivo, las fórmulas (14) para hallar las raíces de esta ecuación se escriben, a menudo, en forma de una sola fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a \neq 0). \tag{15}$$

Observación. Si $D = 0$, se puede considerar que la fórmula (15) queda válida, mas debe retenerse en memoria que en este caso la ecuación cuadrática tiene una sola raíz.

Ecuación cuadrática reducida. Un trinomio de segundo grado, en el cual el primer coeficiente es igual a la unidad se denomina *reducido*. Se ha convenido generalmente denotar con p el segundo coeficiente del trinomio reducido, y con q, su término independiente, es decir, un trinomio reducido de segundo grado tiene por expresión $x^2 + px + q$

La ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 + px + q = 0 \tag{16}$$

lleva el nombre de ecuación cuadrática *reducida*.

Es obvio que la ecuación cuadrática (10) es equivalente a la ecuación reducida correspondiente, a saber,

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ (a \neq 0). \tag{17}$$

Si el discriminante de la ecuación reducida (16) es positivo, la fórmula (15) para hallar las raíces de esta ecuación toma la forma siguiente

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{18}$$

Teorema (de Viète). *Si una ecuación cuadrática reducida* $x^2 + px + q = 0$ *tiene discriminante positivo, entonces la suma de las raíces de dicha ecuación es igual a su segundo coeficiente tomado con signo opuesto, y el producto de las raíces es igual al término independiente, es decir, si* x_1 *y* x_2 *son las raíces de la ecuación* $x^2 + px + q = 0$, *entonces* $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.

Demostración. Por cuanto $D > 0$, entonces, aplicando la fórmula (18), obtendremos

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p,$$

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=$$

$$=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

El teorema está demostrado.

Observación. Como se deduce de la demostración, el teorema de Viète queda lícito para $D = 0$, siempre que la raíz $x_1 = -\frac{p}{2}$ se considere como dos raíces coincidentes $x_1 = -\frac{p}{2}$ y $x_2 = -\frac{p}{2}$. El teorema de Viète tiene lugar también para $D < 0$, mas, en este caso, a título de raíces de la ecuación cuadrática intervienen números conjugados complejos (véase el cap. XI).

El teorema de Viète es de amplio uso en la resolución de distintos problemas. Veamos uno de ellos. Se requiere hallar el término indepeniente desconocido q de la ecuación cuadrática $x^2 + x + q = 0$, si se sabe que esta ecuación tiene dos raíces reales, x_1 y x_2, y la suma de los cuadrados de dichas raíces es igual a la unidad, es decir, $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Para encontrar q, apliquemos el teorema de Viète. Resulta válida la cadena de igualdades idénticas

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

y, por consiguiente, $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2q$, es decir, $1 - 2q = 1$, de donde $q = 0$.

Ecuación simétrica de tercer grado. Una ecuación algebraica de tercer grado se denomina *simétrica*, si tiene por expresión

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \tag{19}$$

Transformemos el polinomio $ax^3 + bx^2 + bx + a$, empleando con este fin el método de descomposición de un polinomio en factores. Es evidente que se verifica la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = \\ &= (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = \\ &= (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a], \end{aligned}$$

por lo cual la ecuación (19) es equivalente a la ecuación

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{20}$$

La ecuación (20 es, a su vez, equivalente al sistema de ecuaciones:

$$x+1=0\ (a\neq 0),\quad ax^2+(b-a)x+a=0\ (a\neq 0). \qquad (21)$$

Por consiguiente, la ecuación (19) es también equivalente a este sistema. La solución del sistema (21) se halla con facilidad, puesto que ésta contiene solamente ecuaciones de primer y segundo grados.

Ejemplo. Hállense las raíces de la ecuación

$$x^3+4x^2+4x+1=0. \qquad (22)$$

Transformemos el primer miembro de la ecuación:

$$x^3+4x^2+4x+1=(x^3+1)+4x(x+1)=(x+1)(x^2+3x+1).$$

Es evidente que la ecuación (22) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x+1=0,\quad x^2+3x+1=0. \qquad (23)$$

La primera ecuación del conjunto (23) tiene una sola raíz $x_1=-1$; la segunda, sólo dos raíces, $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ y $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (23) y, por tanto, ecuación dada (22) tienen solamente tres raíces $x_1=-1$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Ecuación simétrica de cuarto grado. Una ecuación algebraica de cuarto grado se denomina *simétrica*, si tiene por expresión

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\quad (a\neq 0). \qquad (24)$$

Teniendo en cuenta que $a\neq 0$, escribamos esta ecuación en la forma equivalente:

$$(x^4+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+\frac{c}{a}x^2=0\quad (a\neq 0).$$

Es evidente la validez de la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(x^4+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+\frac{c}{a}x^2=(x^4+2x^2+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+$$

$$+\left(\frac{c}{a}-2\right)x^2=(x^2+1)^2+2(x^2+1)\frac{bx}{2a}+\left(\frac{bx}{2a}\right)^2+x^2\left(\frac{c}{a}-2-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2.$$

La validez de esta cadena predetermina que la ecuación (24) es equivalente a la ecuación

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2=0\quad (a\neq 0). \qquad (25)$$

Según sea el número $M=b^2-4a(c-2a)$, son posibles tres casos,

a) $M < 0$. La ecuación (25) y, por lo tanto, la ecuación (24): equivalente a ella, no tienen raíces reales.

b) $M = 0$. La ecuación (25) adquiere en este caso la forma

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + 1\right)^2 = 0. \tag{26}$$

Es evidente que la ecuación (26) es equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + 1 = 0. \tag{27}$$

Por consiguiente, el conjunto de raíces de la ecuación simétrica de cuarto grado coincide en este caso con el conjunto de raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + 1 = 0 \quad (a \neq 0). \tag{28}$$

c) $M > 0$. La ecuación (25) y, por lo tanto, la ecuación (24), equivalente a ella, son equivalentes al sistema de ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}x + 1 = 0 \quad (a \neq 0), \tag{29}$$

$$x^2 + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}x + 1 = 0 \quad (a \neq 0) \tag{30}$$

cada una de las cuales se resuelve con facilidad.

Ejemplo. Resuélvase la ecuación

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0. \tag{31}$$

Aduzcamos la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 + x(x^2 + 1) - 3x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3x^2 - \frac{x^2}{4} = \\ &= \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{13x^2}{4} = \\ &= \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}x + 1\right), \end{aligned}$$

de donde se desprende que la ecuación (31) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0, \quad x^2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene solamente dos raíces.

$$x_1 = \frac{-\sqrt{13} - 1 + \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}, \quad x_2 = \frac{-\sqrt{13} - 1 - \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}. \tag{32}$$

mientras que la segunda ecuación no tiene raíces reales, puesto que su discriminante es negativo. Por consiguiente, la ecuación (31) tiene solamente dos raíces (32).

Ecuación binomia. Una ecuación algebraica se llama *binomia*, si tiene por expresión

Ecuación binomia. Una ecuación algebraica se llama *binomia*, si tiene por expresión

$$x^n - a = 0. \tag{33}$$

Primeramente examinemos la ecuación binomia (33) en el caso particular cuando $a = 1$:

$$x^n - 1 = 0. \tag{34}$$

Para $n = 1$ la ecuación (34) es un caso particular de la ecuación de primer grado y por ello tiene la única raíz $x_1 = 1$. Cuando $n = 2$, la ecuación (34) representa un caso particular de la ecuación cuadrática con discriminante positivo, por lo cual tiene solamente dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Mostremos ahora que para $n \geqslant 3$, para cualquier n impar, la ecuación (34) tiene una sola raíz real $x_1 = 1$, y para todo n par la ecuación (34) tiene solamente dos raíces reales, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Sea n un número natural impar fijo, $n \geqslant 3$, es decir, sea $n = 2k + 1$, donde k es un número natural fijo. Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida, obtenemos la validez de la igualdad idéntica (véase el cap. II):

$$x^{2k+1} - 1 = (x - 1)(x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

De la validez de esta igualdad idéntica se desprende que, para $n = 2k + 1$, la ecuación (34) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(x - 1) = 0, \quad x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene la única raíz $x_1 = 1$, la segunda ecuación del sistema no tiene raíces reales. Con el fin de demostrarlo mostremos que para cualquier x real se verifica la desigualdad

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 > 0. \tag{35}$$

En efecto, para cualquier $x \in [0, +\infty)$ la validez de la desigualdad (35) es obvia. Para cualquier $x \in [-1; 0)$, al escribir el primer miembro de la desigualdad (35) en la forma

$$x^{2k} + x^{2k-2}(x + 1) + \ldots + x^2(x + 1) + (x + 1),$$

nos convencemos de que el primer sumando de esta suma es positivo y los demás, no negativos. Quiere decir, para cualquier $x \in [-1; 0)$ la desigualdad (35) es válida. Escribiendo el primer miembro de la desigualdad (35) en la forma

$$x^{2k-1}(x + 1) + x^{2k-3}(x + 1) + \ldots + x(x + 1) + 1,$$

nos convencemos de que para cualquier $x \in (-\infty, -1)$ todos los sumandos de esta suma son positivos. Quiere decir, para todo $x \in \in (-\infty; -1)$ la desigualdad (35) es válida.

Así pues, se ha mostrado la validez de la desigualdad (35) para cualquier x real y esto significa que la ecuación

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales. Por tanto, la ecuación (34) tiene, para $n = 2k + 1$, una sola raíz real $x_1 = 1$.

Sea ahora $n = 2k$ (k es un número natural fijo y $k \geqslant 2$). Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II), llegamos a que se verifica la igualdad idéntica

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)(x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1).$$

Por cuanto esta igualdad idéntica es válida, resulta que la ecuación (34) es equivalente, para $n = 2k$ ($k \geqslant 2$), al sistema de ecuaciones

$$x^2 - 1 = 0, \; x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene dos raíces, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, mientras que la segunda ecuación no tiene raíces reales, puesto que para cualquier x real se verifica, evidentemente, la desigualdad

$$x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 > 0.$$

Por consiguiente, para $n = 2k$, la ecuación (34) tiene dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Así pues, cualquiera que sea n impar, la ecuación (34) tiene una sola raíz real $x_1 = 1$, y para cualquier n par, solamente dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Razonando análogamente, podemos mostrar (véase el § 1 del cap. VII) que:

— para cualquier a positivo la ecuación (33) tiene: 1) una sola raíz real $x_1 = \sqrt[n]{a}$, para cualquier n impar, 2) solamente dos raíces reales, $x_1 = \sqrt[n]{a}$ y $x_2 = -\sqrt[n]{a}$, para cualquier n par;

— cuando $a = 0$, la ecuación (33) tiene una sola raíz $x_1 = 0$;

— para cualquier a negativo se puede mostrar (véase el § 1, cap. VII) que la ecuación (33) tiene: 1) una sola raíz real, $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$, para cualquier n impar, 2) no tiene raíces reales, cualquiera que sea n par.

Ejemplo. Resuélvase la ecuación

$$x^3 + 8 = 0.$$

Por cuanto n es impar en este caso ($n = 3$) y a es negativo ($a = -8$), la ecuación dada tiene la única solución $x_1 = -2$.

Ecuación trinomia. La ecuación algebraica de la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{36}$$

se denomina *trinomia* a condición de que $n \geqslant 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Cuando $n = 2$, la ecuación trinomia se llama, además, «*ecuación bicuadrada*». Al resolver la ecuación bicuadrada

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{37}$$

su primer miembro se transforma por el método de «formación de cuadrado perfecto»:

$$ax^4 + bx^2 + c = a\left[\left(x^4 + 2x^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

En virtud de esta igualdad idéntica la ecuación (37) es equivalente a la siguiente

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{38}$$

Es evidente que si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (38) y, por lo tanto, la (37), equivalente a la (38), no tienen raíces.

Cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (38) adquiere la forma

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad (a \neq 0). \tag{39}$$

La ecuación (39) es, obviamente, equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{2a} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{40}$$

De este modo, cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación bicuadrada (37) es equivalente a la ecuación cuadrática (40), es decir, para $\frac{b}{2a} < 0$ tiene tan sólo dos raíces reales, $x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; para $\frac{b}{2a} = 0$, la única raíz $x_1 = 0$; para $\frac{b}{2a} > 0$, no tiene raíces.

En cambio, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (38) y, por consiguiente, la (37), que es equivalente a (38), son equivalentes al sisteme de ecuaciones $x^2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$ $(a \neq 0)$, $x^2 + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$ $(a \neq 0)$. Escribamos esta sistema en la forma equivalente

$$x^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0), \qquad x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0). \tag{41}$$

Por cuanto los números que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (41) son raíces de la ecuación cuadrática

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{42}$$

que tiene discriminante positivo $D = b^2 - 4ac$, entonces el sistema de ecuaciones (41) puede ser escrito en la forma:

$$x^2 = t_1 \quad (a \neq 0), \quad x^2 = t_2 \quad (a \neq 0), \tag{43}$$

donde t_1 y t_2 son raíces de la ecuación (42).

Hemos mostrado, pues, que para resolver la ecuación bicuadrada (37) se debe resolver al principio la ecuación cuadrática (42), con la particularidad de que, si la ecuación cuadrática (42) no tiene raíces reales, es decir, si su discriminante es negativo, la ecuación (37) tampoco tendrá raíces; si el discriminante de la ecuación (42) es nulo, la ecuación (37) será equivalente a la ecuación cuadrática (40) que se resuelve con facilidad; por fin, si el discriminante de la ecuación (42) es positivo, la ecuación (37) será equivalente al sistema de ecuaciones (41). Cada una de las ecuaciones del sistema (41) es cuadrática, razón por la cual las raíces de dicho sistema y, por consiguiente, las raíces de la ecuación (37), equivalente al sistema citado, se hallan fácilmente.

Ejemplo. Resuélvase la ecuación bicuadrada

$$x^4 - x^2 - 6 = 0. \tag{44}$$

Con el fin de resolver la ecuación (44) resolvamos al principio la ecuación cuadrática $t^2 - t - 6 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Por eso, la ecuación (44) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x^2 = -2, \quad x^3 = 3.$$

La primera ecuación de este sistema no tiene raíces reales, mientras que la segunda tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$. Quiere decir, la ecuación (44) también tiene solamente dos raíces: $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$.

Cuando $n > 2$, para resolver la ecuación trinomia

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

el primer miembro de ésta también se transforma por el método de «formación de cuadrado perfecto»

$$ax^{2n} + bx^n + c = a\left[\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{45}$$

En virtud de esta igualdad idéntica, la ecuación (36) es equivalente a la ecuación

$$\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (a \neq 0). \tag{46}$$

Es evidente que si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (46), y, por tanto, la ecuación (36) no tienen raíces.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (46) es equivalente a la ecuación binomia

$$x^n + \frac{b}{2a} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{47}$$

Por consiguiente, cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación trinomia (36) es equivalente a la ecuación binomia (47), cuya resolución fue examinada en el punto antecedente.

En cambio, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (46) es equivalente al sistema de ecuaciones binomias

$$x^n + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \ (a \neq 0), \quad x^n + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \ (a \neq 0), \tag{48}$$

cuya solución, como se mostró más arriba, puede ser determinada.

Ejemplo. Resuélvase la ecuación trinomia

$$x^6 + 3x^3 + 2 = 0. \tag{49}$$

Puesto que la ecuación dada es equivalente al sistema de dos ecuaciones binomias

$$x^3 + 2 = 0, \quad x^3 + 1 = 0,$$

entonces, resolviéndolas, obtendremos que la ecuación (49) tiene solamente dos raíces reales, $x_1 = -\sqrt[3]{2}$ y $x_2 = -1$.

Observación. Hemos mostrado más arriba cómo se resuelven cualquier ecuación de primer grado y cualquier ecuación cuadrática y se obtienen las fórmulas correspondientes para determinar sus raíces. En lo que se refiere a las ecuaciones de grado superior a dos, se examinaron algunos ejemplos sueltos. Esto se debe a lo siguiente: aunque existen fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grados, ellas son demasiado engorrosas y por esta razón se emplean muy raras veces, mientras que para las ecuaciones de grados quinto y superiores tales fórmulas no existen en general. Al mismo tiempo cabe notar que si todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ en la ecuación (4) son números enteros (o racionales), entonces para la determinación de las raíces enteras (o racionales) de la ecuación (4), puede aplicarse el teorema sobre las raíces enteras (o racionales) de un polinomio (véase el cap. II).

§ 2. Desigualdades con una sola incógnita

Conceptos y definiciones principales. Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$R(x) > Q(x) \ [\text{o bien } R(x) < Q(x)], \tag{1}$$

donde $R(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios, enteros (véase el cap. II) respecto de una letra x. La letra x se llama desconocida o, simplemente, *incógnita*; la desigualdad (1) lleva el nombre de *desigualdad algebraica con una sola incógnita*.

Por cuanto el CVA de los polinomios $R(x)$ y $Q(x)$ se compone de todos los números reales, el problema sobre la resolución de la desigualdad (1) puede enunciarse así: hállense todos los valores numéricos de la letra x, cada uno de los cuales convierte la desigualdad (1) en una desigualdad numérica que se verifica. Cada valor numérico semejante recibe el nombre de *solución* de la desigualdad (1). Por eso, resolver la desigualdad (1) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si resulta que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (1) es un conjunto vacío, se dice que la desigualdad (1) no tiene soluciones.

Dos desigualdades algebraicas $R(x) > Q(x)$ y $T(x) < S(x)$ se denominan *equivalentes*, si cualquier solución de la primera desigualdad es también solución de la segunda y, viceversa, cualquier solución de la segunda desigualdad es solución de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos desigualdades que no tienen soluciones. La sustitución de una desigualdad por otra, equivalente a la primera, recibe el nombre de *paso equivalente* de una desigualdad a la otra. El paso equivalente suele designarse con una flecha doble $\Leftrightarrow$. La escritura

$$R(x) > Q(x) \Leftrightarrow T(x) < S(x)$$

significa que las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $T(x) < S(x)$ son equivalentes.

Demos a conocer algunas afirmaciones con cuya ayuda se realizarán los pasos equivalentes.

1. *Las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) - Q(x) > 0$ son equivalentes.*

2. *Las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) + \alpha > Q(x) + \alpha$ son equivalentes para cualquier número real α.*

3. a) *Las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $\alpha R(x) > \alpha Q(x)$ son equivalentes para cualquier número positivo α.*

b) *Las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $\alpha R(x) < \alpha Q(x)$ son equivalentes para cualquier número negativo α.*

4. *Supongamos que se conoce que para cualquier número real x se verifica la igualdad $R(x) = T(x)$, entonces son equivalentes las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $T(x) > Q(x)$.*

Por cuanto las demostraciones de dichas afirmaciones son similares, demostremos sólo la afirmación 1. Sea x_1 una solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$, es decir, supongamos que se verifica la desigualdad numérica $R(x_1) > Q(x_1)$. Entonces, de acuerdo con la propiedad de las desigualdades numéricas, se verifica también la desigualdad numérica $R(x_1) - Q(x_1) > 0$. La validez de esta desigualdad numérica significa que el número x_1 es solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$. Por cuanto semejante razonamiento puede efectuarse para cualquier solución de la desigualdad $R(x) >$ $> Q(x)$, entonces cualquier solución de la desigualdad $R(x) >$

$> Q(x)$ será también solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$.

Mostremos, ahora, lo contrario. Supongamos que el número x_2 es una solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$, es decir, que se verifica la desigualdad numérica $R(x_2) - Q(x_2) > 0$. De la validez de la última desigualdad proviene la validez de la desigualdad numérica $R(x_2) > Q(x_2)$ y esto significa que el número x_2 es la solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$. Por cuanto semejante razonamiento puede llevarse a cabo para toda solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$, cualquier solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$ es también solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$. Quiere decir, si cada una de las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) - Q(x) > 0$ tiene solución, ellas son equivalentes.

De lo demostrado se deduce que si una de las desigualdades $R(x) > Q(x)$ ó $R(x) - Q(x) > 0$ no tiene soluciones, la otra tampoco las tiene, es decir, en este caso las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) - Q(x) > 0$ son también equivalentes. La afirmación 1 está demostrada.

De las afirmaciones 1 y 4 se desprende que cada desigualdad algebraica puede ser reducida o bien a la forma $P(x) > 0$, o bien a la forma $P(x) < 0$, por lo cual resulta suficiente analizar sólo las desigualdades del tipo

$$P(x) > 0 \tag{2}$$

y

$$P(x) < 0 \tag{3}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, entero respecto de la letra x, es decir,

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \ (a \neq 0).$$

Las desigualdades de esta índole se denominan desigualdades algebraicas de grado n.

Desigualdades de primer grado. Método de intervalos. Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0), \tag{4}$$

la cual se denomina *desigualdad de primer grado*. En virtud de la afirmación 2, la desigualdad (4) es equivalente a la desigualdad

$$a_0x > -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

Examinemos los casos de $a_0 > 0$ y $a_0 < 0$. Sea $a_0 > 0$, entonces, teniendo presente la afirmación 3a), la desigualdad (5) es equivalente a la desigualdad

$$x > -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Es evidente que cualquier x del intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ satisface la desigualdad (6). Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) es el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (fig. 11). Por cuanto la desigualdad (4) es equivalente, para $a_0>0$, a la desigualdad (6), el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4) también será el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$. Todos los pasos equivalentes de la desigualdad (4) a la desigualdad (5) y,

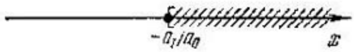

Fig. 11

luego, a la desigualdad evidente (6) se escriben más brevemente en forma de la siguiente cadena de pasos equivalentes:

$$a_0x+a_1>0\,(a_0>0)\Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0>0)\Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0).$$

Análogamente, se verifican las siguientes cadenas de pasos equivalentes:

$$a_0x+a_1>0\,(a_0<0)\Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0<0)\Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0>0)\Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0>0)\Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0<0)\Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0<0)\Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0).$$

A partir de la última desigualdad en cada una de estas cadenas se halla fácilmente el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de la cadena dada (con la restricción indicada sobre a_0). Así pues, la solución de la desigualdad $a_0x+a_1>0$, para $a_0<0$, se representa por el intervalo $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; la solución de la desigualdad $a_0x+a_1<0$, para $a_0>0$, es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; y la solución de la desigualdad $a_0x+a_1<0$, para $a_0<0$, es el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

Todo lo expuesto más arriba concerniente a la resolución de las desigualdades de primer grado se enuncia, a menudo, así: un polinomio de primer grado a_0x+a_1 ($a_0\neq 0$):

a) es positivo, cuando $a_0>0$, para cualquier $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ y negativo para cualquier $x\in\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$,

b) es positivo, cuando $a_0<0$, para cualquier $x\in\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$ y negativo, para cualquier $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

En particular, el binomio $(x - \alpha)$ es positivo para todos los x que se ubican en el eje numérico a la derecha respecto del punto que representa el número α, y negativo para todo x que se dispone a la izquierda del punto mencionado. En otras palabras, el punto α divide el eje numérico en dos partes: en la parte dispuesta a la derecha del punto α el binomio $(x - \alpha)$ es positivo, y en la otra parte, dispuesta a la izquierda del punto α, negativo.

En esta propiedad del polinomio $(x - \alpha)$ se basa el *método de intervalos* y se emplea con frecuencia para resolver las desigualdades algebraicas de grados superiores.

Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) > 0 \tag{7}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ son ciertos números fijos, entre los cuales no hay iguales, y, además, tales que $\alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_{n-1} < < \alpha_n$.

Examinemos el polinomio

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \tag{8}$$

En virtud de la observación hecha más arriba resulta obvio que para cualquier número x_0 tal que $x_0 > \alpha_n$, el valor numérico correspondiente de todo factor en el producto (8) es positivo y, por esta razón,

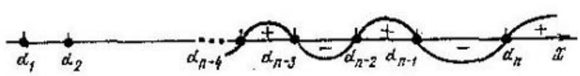

Fig. 12

el correspondiente valor numérico $P(x_0)$ del polinomio $P(x)$ es también positivo. Para cualquier número x_1, elegido del intervalo (α_{n-1}, α_n), el valor numérico correspondiente del último factor es negativo, y el valor numérico correspondiente de cualquiera de los factores restantes es positivo, por lo cual el número $P(x_1)$ es negativo; análogamente, para todo número x_2, perteneciente al intervalo $(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$, el número $P(x_2)$ es positivo, etc.

Precisamente en este razonamiento se basa el *método de intervalos* que consiste en lo siguiente: en la recta numérica se marcan los números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; en el intervalo, que se encuentra a la derecha del número mayor, se pone el signo más, en el intervalo siguiente, que va de derecha a izquierda, se pone el signo menos, luego, el signo más, luego, el signo menos, etc. (fig. 12). Entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) será la unión de todos los intervalos que llevan el signo más.

El método de intervalos permite resolver aquellas desigualdades algebraicas que pueden reducirse, mediante una cadena de pasos equivalente, a las desigualdades del tipo (7).

Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$(x - 3)(2 + x)(4 - x) > 0. \tag{9}$$

Al multiplicar la desigualdad (9) por (—1), obtendremos una desigualdad, equivalente a la (9):

$$[x - (-2)](x - 3)(x - 4) < 0. \tag{10}$$

Apliquemos el método de intervalos para resolver la desigualdad (10): en la recta numérica marcamos los números (—2), 3, 4. En los intervalos ponemos, de derecha a izquierda, los signos más y menos (fig. 13). El conjunto de todas las x, pertenecientes a los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(3, 4)$, representa el conjunto de todas las soluciones

Fig. 13

de la desigualdad (10). Ya que la desigualdad (9) es equivalente a la (10), el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el conjunto $(-\infty, -2) \cup (3, 4)$.

Desigualdad cuadrática. Apliquemos el método de intervalos a la resolución de las desigualdades algebraicas de segundo grado. Se llaman, corrientemente, desigualdades *cuadráticas*. Analicemos la desigualdad cuadrática

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0). \tag{11}$$

Realizando la transformación idéntica de «formación de cuadrado perfecto» (véase el § 1, cap. III), obtenemos

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right],$$

donde $D = b^2 - 4ac$. Por eso, la desigualdad (11) es equivalente a la desigualdad

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] > 0 \quad (a \neq 0). \tag{12}$$

Sea $a > 0$. Entonces, la desigualdad (12) es equivalente a la desigualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0 \quad (a > 0). \tag{13}$$

a) Si $D < 0$, entonces, cualquiera que sea el valor numérico de la incógnita $x = x_0$, en el primer miembro de la desigualdad (13) figura la suma del número no negativo $\left((x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2$ con el número positivo $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, es decir, la desigualdad (13) se convierte en una desigualdad numérica que se verifica. Por consiguiente, la desigualdad (13) es válida para cualquier x. En otras palabras, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) es en este caso el conjunto de todos los números reales.

b) Si $D = 0$, entonces, obviamente, la desigualdad (13) se convierte en una lícita desigualdad numérica para todo x, a excepción del número $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) será en este caso el conjunto $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

c) Si $D > 0$, entonces la desigualdad (13) es equivalente a la desigualdad

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad (a > 0), \tag{14}$$

donde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Es evidente que $x_1 < x_2$, razón por la cual, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será el conjunto $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Sea $a < 0$. Entonces, la desigualdad (12) es equivalente a la desigualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} < 0 \quad (a < 0). \tag{15}$$

a) Si $D < 0$, resulta evidente que para todo número x esta desigualdad se convierte en una desigualdad ilícita, por lo cual la desigualdad (15) no tiene soluciones.

b) Si $D = 0$, resulta también evidente que la desigualdad (15) no tiene soluciones.

c) Si $D > 0$, la desigualdad (15) será equivalente a la desigualdad

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad (a < 0), \tag{16}$$

donde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Es obvio que $x_1 > x_2$, y por ello, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es el intervalo $(x_2; x_1)$.

De modo análogo se efectúa la resolución de la desigualdad $ax^2 + bx + c < 0$ $(a \neq 0)$. Los razonamientos aducidos pueden reunirse juntos formando la Tabla 1.

Hemos de notar que esta tabla no debe retenerse en la memoria, pues para resolver una desigualdad cuadrática concreta resulta mejor repetir cada vez los razonamientos realizados más arriba.

Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Tabla 1

a	D	Desigualdad	Solución de la desigualdad
$a > 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a > 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a > 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a > 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	no hay soluciones
$a > 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$a > 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	no hay soluciones
$a < 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a < 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(-\infty, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a < 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	no hay soluciones
$a < 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a < 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	no hay soluciones
$a < 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$(-\infty, +\infty)$

Por cuanto las raíces del trinomio de segundo grado $P(x) = x^2 - x - 6$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$, entonces $P(x) = (x - 3) \times (x + 2)$.

Quiere decir, la desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(x - 3)(x + 2) < 0.$$

Al aplicar el método de intervalos a la última desigualdad (fig. 14), llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida es el intervalo $(-2; 3)$.

Fig. 14

Método de intervalos generalizado. Algunas desigualdades algebraicas de grados superiores a dos se reducen, mediante una cadena de pasos equivalentes, a la forma

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n} > 0, \qquad (17)$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n$ son números naturales fijos, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, números reales fijos, entre los cuales no hay iguales, y tales que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ (indiquemos que si al menos uno de los números $k_i \geqslant 2$, entonces el método de intervalos aducido anteriormente no puede ser aplicado para la resolución de la desigualdad (17)). Entonces, las desigualdades del tipo (17) se resuelven por el así llamado *método de intervalos generalizado*. Examinemos el polinomio

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n}. \qquad (18)$$

Es evidente que para cualquier número x_0 tal que $x_0 > \alpha_n$, el valor correspondiente de todo factor en el producto (18) es positivo, debido a lo cual el valor numérico $P(x_0)$ del polinomio $P(x)$ es también positivo.

Para cualquier número x_1, elegido dentro del intervalo (α_{n-1}, α_n), el valor numérico correspondiente de todo factor, a excepción del último, es positivo; el valor numérico correspondiente del último factor es positivo, si k_n es un número par, y negativo, si k_n es un número impar. Por eso, el número $P(x_1)$ es positivo, si k_n es un número par, y el número $P(x_1)$ es negativo, si k_n es impar. En estos casos suele decirse, habitualmente, que el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto α_n, si k_n es un número impar, y no cambia de signo, si k_n es un número par.

Análogamente se muestra que si se conoce el signo del polinomio $P(x)$ en el intervalo (α_i, α_{i+1}), entonces en el intervalo (α_{i-1}, α_i) el signo se determina según la siguiente regla: el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto α_i, si k_i es un número impar, y no cambia de signo, si k_i es un número par. Precisamente en estos razonamientos está basado el método de intervalos generalizado: en el eje numérico se marcan los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; en el intervalo dispuesto a la derecha del número mayor, es decir, a la derecha de α_n, se pone el signo más, en el intervalo que sigue tras el primero de derecha a izquierda se pone el signo más, si k_n es un número par, y el signo menos, si k_n es un número impar; en el siguiente intervalo de derecha a izquierda se pone el signo, rigiéndose por la siguiente regla: el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto α_{n-1}, si k_{n-1} es un número impar, y conserva el signo

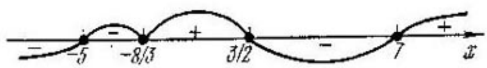

Fig. 15

invariable, si k_{n-1} es un número par; a continuación se examina el intervalo siguiente que va de derecha a izquierda y se pone en él el signo, rigiéndose por la misma regla; de esta manera se analizan todos los intervalos.

La solución de la desigualdad (17) será la unión de todos los intervalos en los cuales se ha puesto el signo más.

Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8)^2<0. \qquad (19)$$

Al multiplicar esta desigualdad por $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$, obtendremos, ante todo, una desiguldad equivalente a (19):

$$[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3>0. \qquad (20)$$

Con el fin de resolver la desigualdad (20) apliquemos el método de intervalos generalizado. En el eje numérico marquemos los números (-5), $\left(-\frac{8}{3}\right)$, $\frac{3}{2}$, 7 (fig. 15). A la derecha del número mayor, es decir, del número 7, ponemos el signo más. Al pasar por el punto (7), el polinomio

$$P(x)=[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3 \qquad (21)$$

cambia de signo, puesto que el binomio $(x-7)$ está contenido en el producto (21) elevado a una potencia impar, razón por la cual ponemos en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$ el signo menos. Al pasar por el punto $\left(\frac{3}{2}\right)$, el polinomio $P(x)$ cambia de signo, puesto que el binomio $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ está contenido en el producto (21) elevado a una potencia impar, y por esta razón ponemos en el intervalo $\left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right)$

el signo más. Al pasar por el punto $\left(-\frac{8}{3}\right)$ el polinomio $P(x)$ no cambia de signo, puesto que en el producto (21) el binomio $\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]$ está contenido elevado a una potencia par, por lo cual en el intervalo $\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ ponemos el signo más. Por fin, al pasar por el punto (-5), el polinomio $P(x)$ cambia de signo, puesto que el binomio $[x-(-5)]$ figura en el producto (21) a la primera potencia, por lo cual ponemos en el intervalo $(-\infty, -5)$ el signo menos. Así pues, la solución de la desigualdad (20) y de la (19), equivalente a la (20), representa el conjunto de todos los intervalos con el signo más, es decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) es el conjunto $\left(-5, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (7, +\infty)$.

Desigualdades no estrictas. Pasemos ahora a la resolución de las desigualdades no estrictas

$$P(x) \geqslant 0, \tag{22}$$

$$P(x) \leqslant 0. \tag{23}$$

Si cierto número x_0 es la solución de la desigualdad (22), se verificará la desigualdad numérica $P(x_0) \geqslant 0$. Entonces, debido a la definición del signo no estricto de una desigualdad, se verifica o bien la igualdad numérica $P(x_0) = 0$, o bien la desigualdad numérica $P(x_0) > 0$. En otras palabras, si el número x_0 es la solución de la desigualdad (22), entonces dicho número es o bien la solución de la ecuación $P(x) = 0$, o bién, de la desigualdad $P(x) > 0$. Esto puede decirse sobre cualquier solución de la desigualdad $P(x) \geqslant 0$. Del modo análogo se muestra que toda solución de la desigualdad $P(x) > 0$ y toda solución de la ecuación $P(x) = 0$ es también la solución de la desigualdad (22).

De este modo, el conjunto de soluciones de la desigualdad no estricta (22) representa la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $P(x) > 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Análogamente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta (23) es la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $P(x) < 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

En esto precisamente está basado el *principio de resolución de las desigualdades no estrictas*. Se resuelven primeramente la desigualdad estricta y la ecuación correspondiente después de lo cual se reúnen los conjuntos de soluciones de la desigualdad estricta y de la ecuación; la unión de dichos conjuntos es precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta.

Ejemplos. 1. Resuélvase la desigualdad no estricta de primer grado:

$$a_0x + a_1 \geqslant 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{24}$$

Resolvamos primeramente la ecuación

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{25}$$

Su única solución es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Luego resolvamos la disigualdad

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{26}$$

Cuando $a_0 > 0$, el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$; cuando $a_0 < 0$, el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$. Al reunir las soluciones de la ecuación (25) y de la desigualdad (26), obtenemos: para $a_0 > 0$ el

Fig. 16

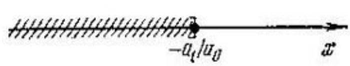

Fig. 17

conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) es el conjunto $\left[-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (fig. 16); para $a_0 < 0$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) es el conjunto $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right]$ (fig. 17).

2. Resuélvase la desigualdad

$$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \geqslant 0. \tag{27}$$

Por cuanto son válidas las igualdades idénticas siguientes

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1),$$
$$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3),$$
$$4 - x^2 = -(x - 2)(x + 2),$$

entonces, de acuerdo con las afirmaciones 4 y 3b) de este párrafo, la desigualdad (27) es equivalente a la desigualdad

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) \leqslant 0. \tag{28}$$

Resolvamos primeramente la ecuación

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) = 0. \tag{29}$$

Tiene solamente cinco raíces: $x = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_3 = 3$. Luego resolvamos la desigualdad estricta

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) < 0 \tag{30}$$

aplicando el método de intervalos generalizado (fig. 18). El conjunto de todas sus soluciones será el conjunto $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup \cup (2; 3)$. Reuniendo el conjunto de soluciones de la ecuación (29) y

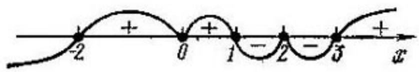

Fig. 18

de la desigualdad estricta (30), obtenemos el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (28) y, en virtud de que el paso es equivalente, de la desigualdad (27).

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es el conjunto $(-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [1; 3]$.

§ 3. Ecuaciones con dos incógnitas

Conceptos principales. Sea dada la ecuación

$$R(x, y) = Q(x, y), \tag{1}$$

donde $R(x, y)$, $Q(x, y)$ son polinomios, enteros (véase el § 3, cap. II) con respecto a dos letras x e y. En este caso se dice que está dada una *ecuación algebraica con dos incógnitas x e y*. El par ordenado (x, y) se denomina *colección de incógnitas* de la ecuación (1). El CVA de la ecuación (1) es el conjunto de todos los pares (x, y), donde las letras x e y pueden ser números reales cualesquiera.

La colección numérica (x_0, y_0), correspondiente a la colección de incógnitas (x, y) se llama *solución de la ecuación* (1), si son iguales los valores numéricos de los polinomios R y Q que corresponden a dicha colección numérica, es decir, si se verifica la igualdad numérica $R(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0)$. *Resolver la ecuación* (1) signiifca determinar el conjunto de todas sus soluciones, es decir, hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales convierte la ecuación (1) en una igualdad numérica lícita. Si el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) consta de k pares de números reales (x_1, y_1); (x_2, y_2); . . . ; (x_k, y_k), se dice que la ecuación (1) tiene tan sólo k *soluciones*, es decir, el conjunto de todas las soluciones es el conjunto $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)\}$. Si, en cambio, el conjunto de todas las soluciones consta de un solo par (x_1, y_1), se dice que la ecuación (1) tiene la *única solución*. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ tiene la única solución (x, y): $(0, 0)$. Cuando el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) es vacío, se dice que la ecuación (1) *no tiene soluciones*. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = -1$ no tiene soluciones.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$R(x, y) = Q(x, y) \text{ y } T(x, y) = S(x, y).$$

Estas ecuaciones se llaman *equivalentes*, si cualquier solución de la primera ecuación es a la vez solución de la segunda ecuación y toda solución de la segunda ecuación es solución de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos ecuaciones que no tienen soluciones.

La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se denomina *paso equivalente* de la primera ecuación a la segunda.

Son válidas las siguientes **afirmaciones:**

1. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $R(x, y) + S(x, y) = Q(x, y) + S(x, y)$, *donde* $S(x, y)$ *es un polinomio cualquiera entero respecto a las letras* x *e* y, *son equivalentes.*

3. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ *son equivalentes para cualquier número real* α *distinto de cero.*

4. *Supongamos que es válida la igualdad idéntica* $R(x, y) = T(x, y)$, *entonces las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $T(x, y) = Q(x, y)$ *son equivalentes.*

La validez de estas afirmaciones se demuestra igual que en el caso de las afirmaciones en el § 1, razón por la cual la demostración aquí se omite. De las afirmaciones 1 y 4 se deduce que cada ecuación algebraica con dos incógnitas x e y puede ser reducida a la forma $P(x, y) = 0$, por lo cual sólo podemos analizar la ecuación del tipo

$$P(x, y) = 0, \tag{2}$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio entero respecto a las letras x e y. Para ilustrar geométricamente el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2) resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas en el plano.

Sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas en un plano. Si se indica el método que permite establecer la posición de los puntos en el plano prefijando los pares de números, suele decirse que *en el plano viene dado un sistema de coordenadas.* El propio plano se llama en este caso *plano de coordenadas.* Veamos el sistema de coordenadas más simple que se usa con mayor frecuencia y que se denomina *rectangular* o *cartesiano.*

Sea dado un segmento cuya longitud se toma como unidad de medición de la longitud en el plano, es decir, supongamos que se ha introducido la escala. Supongamos, además, que están dadas dos rectas recíprocamente perpendiculares. Convengamos en considerar que el punto de intersección de las rectas es el origen de coordenadas. Definamos en cada recta la dirección positiva y marquemos en ambas, a partir del origen de coordenadas, el segmento unidad prefijado. De este modo, en cada recta queda introducido su propio sistema de coordenadas (véase el § 5, cap. I); las rectas mencionadas se denominan *rectas coordenadas* y, también, *ejes coordenados*, con la particularidad de que uno de ellos se denomina *eje de abscisas* y el otro, *eje de ordenadas.*

Si en un plano queda introducida la escala y vienen dados dos ejes coordenados recíprocamente perpendiculares y si se sabe cuál de dichos ejes es el de abscisas y cuál, el de ordenadas, suele decirse que en el plano está dado el *sistema rectangular de coordenadas.*

Designemos el origen de coordenadas con la letra Q, el eje de abscisas con las letras Qx y el eje de ordenadas, con Oy. En los dibujos los ejes coordenados se disponen, corrientemente, de tal modo que el eje de abscisas sea horizontal y su semieje positivo esté orientado a la derecha, mientras que el semieje positivo de ordenadas, hacia arriba (fig. 19).

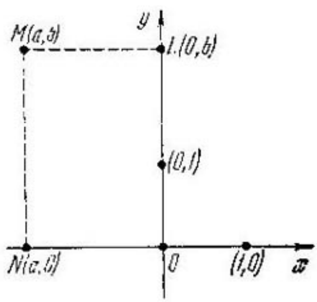

Fig. 19

Sea M un punto cualquiera del plano de coordenadas. Tracemos por el punto M rectas, paralelas a los ejes coordenados. Supongamos que la recta que pasa por el punto M y es paralela al eje Oy corta el eje de abscisas en el punto N, y la recta que pasa por el punto M paralelamente al eje Ox corta el eje de ordenadas en el punto L (véase la fig. 19). Por cuanto en los ejes están dados los sistemas de coordenadas, el punto N tiene en el eje de abscisas del sistema de coordenadas una coordenada a, y el punto L tiene en su sistema de coordenadas en el eje de ordenadas la coordenada b. Entonces, se denominan *coordenadas del punto M* en el sistema elegido de coordenadas con los ejes Ox y Oy un *par ordenado de números* (a, b). El número a se llama primera coordenada o *abscisa del punto M*, el número b, segunda coordenada u *ordenada del punto M*. El hecho de que el punto M tiene la abscisa a y la ordenada b se escribe del modo siguiente: $M\ (a, b)$ (primeramente se escribe la abscisa y luego, la ordenada del punto M).

Muy a menudo, cuando se estudian varios puntos fijos diferentes en el plano de coordenadas, éstos se designan con cierta letra mayúscula con diferentes números, por ejemplo, $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$. Las coordenadas de estos puntos se denotan con los números correspondientes: $M_1\ (x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$, $\ldots$, $M_n\ (x_n, y_n)$, $\ldots$

Dado que por cualquier punto del plano puede ser trazada solamente una recta, paralela al eje de coordenadas dado, y cada recta corta el eje correspondiente, perpendicular a ella, sólo en un punto, entonces a todo punto del plano de coordenadas le corresponde un solo par ordenado de números, es decir, las coordenadas de este punto.

Entre los puntos dispuestos en cualquier eje y el conjunto de números reales existe una correspondencia biunívoca (véase el cap. 1), por consiguiente, a los distintos puntos del plano xOy les corresponderán distintos pares ordenados de números reales. Así pues, si en un plano viene dado el sistema rectangular de coordenadas xOy, entonces entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números reales existe la siguiente **correspondencia:**

1. A todo punto del plano le corresponde sólo un par ordenado de números reales.

2. A dos puntos diferentes del plano les corresponden diferentes pares ordenados de números reales.

3. No existe un par ordenado de números reales que no corresponda a algún punto del plano.

La correspondencia de este género se llama *biunívoca*. De este modo, la introducción en el plano de un sistema rectangular de coordenadas permite establecer la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números reales. La correspondencia citada presta la posibilidad de reducir el estudio del conjunto de punto del plano al estudio del conjunto de pares de números reales, es decir, la posibilidad de aplicar al estudio de los problemas geométricos los métodos algebraicos.

Hagamos algunas **observaciones:**

1. *La abscisa* del punto M *es igual a cero*, cuando, y sólo cuando, el punto M se ubica en el eje Oy.

2. *La ordenada* del punto M *es igual a cero*, cuando, y sólo cuando, el punto M se ubica en el eje Ox.

3. El punto O, y sólo este punto, *que es el origen de coordenadas, tiene sus dos coordenadas nulas*.

4. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada positiva ($y > 0$) se llama *semiplano superior*.

5. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada negativa ($y < 0$) se llama *semiplano inferior*.

6. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa positiva ($x > 0$) se llama *semiplano derecho*.

7. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa negativa ($x < 0$) se llama *semiplano izquierdo*.

8. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa positiva ($x > 0$) y ordenada positiva ($y > 0$) se denomina *primer cuadrante de coordenadas*.

9. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada positiva ($y > 0$) y abscisa negativa ($x < 0$) se denomina *segundo cuadrante de coordenadas*.

10. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas

en el que todo punto tiene abscisa negativa ($x < 0$) y ordenada negativa ($y < 0$) se denomina *tercer cuadrante de coordenadas.*

11. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada negativa ($y < 0$) y abscisa positiva ($x > 0$) se denomina *cuarto cuadrante de coordenadas.*

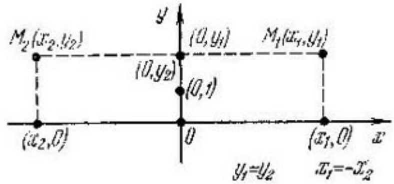

Fig. 20

12. Dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ se llaman *simétricos con relación al eje de ordenadas*, si sus coordenadas son tales que $x_1 = -x_2$ e $y_1 = y_2$ (fig. 20); *simétricos con relación al eje de abscisas*, si sus coordenadas son tales que $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$ (fig. 21); *simétricos con relación al origen de coordenadas*, si sus coordenadas son tales que $x_1 = -x_2$ e $y_1 = -y_2$ (fig. 22).

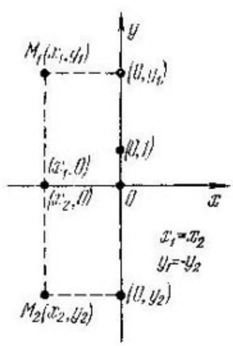

Fig. 21

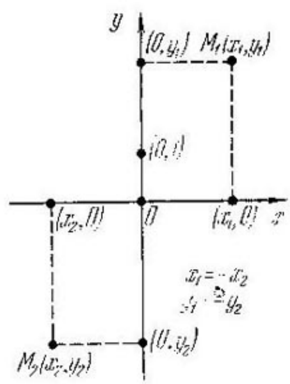

Fig. 22

Teorema 1. *Cualquiera que sea la disposición de dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ en el plano de coordenadas, el cuadrado de la distancia entre ellos (es decir, el cuadrado de la longitud del segmento M_1M_2) se determina por la fórmula $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, o sea, el cuadrado de la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano de coordenadas es igual a la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas homónimas.*

Demostración. Sean dados dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ que no coinciden. La recta M_1M_2 puede ser:

a) paralela al eje Oy (o coincidente con éste);

b) paralela al eje Ox (o coincidente con éste);

c) no paralela al eje Oy, ni tampoco al Ox. La demostración del teorema se realizará para cada uno de estos casos por separado.

a) Supongamos que la recta en que se disponen los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ es paralela al eje Oy (o coincide con éste). Entonces, cualquier punto dispuesto en esta recta tendrá una misma abscisa, es decir, los puntos M_1 y M_2 tendrán abscisas iguales: $x_1 = x_2 = m$ (fig. 23).

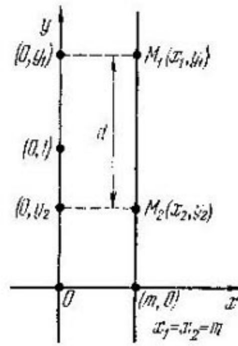

Fig. 23

Esta recta puede considerarse como un eje con dirección positiva hacia arriba y el mismo segmento unitario que para el sistema de coordenadas xOy y origen en el punto $(m, 0)$. La coordenada de cualquier punto de este eje coincidirá con la ordenada del mismo punto al considerarlo como un punto del plano. De acuerdo con el teorema 1 (§ 5, cap. I), la distancia entre los puntos M_1 y M_2, considerados como puntos de esta recta coordenada, es igual a $d = |y_2 - y_1|$, de donde

$$d^2 = |y_2 - y_1|^2 = 0 + (y_2 - y_1)^2 = (m - m)^2 + \\ + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

b) Supongamos que la recta en que se disponen los puntos M_1 y M_2 es paralela al eje Ox (o coincide con éste). Entonces, cualquier

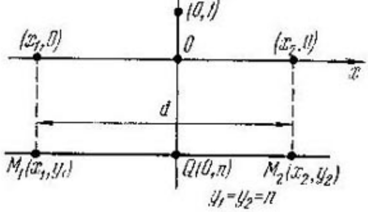

Fig. 24

punto dispuesto en esta recta tendrá una misma ordenada, es decir, los puntos M_1 y M_2 tendrán ordenadas iguales: $y_1 = y_2 = n$ (fig. 24).

La recta citada puede considerarse como un eje cuyo origen se encuentra en el punto $(0, n)$; la dirección positiva de este eje está orientada hacia la derecha y el segmento unidad es el mismo que en el sistema de coordenadas xOy. La coordenada de cualquier punto de este eje coincidirá con la abscisa del mismo punto al considerarlo como un punto del plano. De acuerdo con el teorema 1 (§ 5, cap. I), la distancia entre dos puntos M_1 y M_2, como puntos de esta recta coordenada, es igual a $d = |x_2 - x_1|$, de donde

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + 0 = (x_2 - x_1)^2 + \\ + (n - n)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

c) Supongamos ahora que los puntos M_1 y M_2 no se encuentran en la recta paralela al eje de ordenadas ni tampoco en la recta paralela al eje de abscisas. En este caso las coordenadas homónimas de estos puntos serán números diferentes, es decir, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ (fig. 25). Tracemos por el punto M_1 una recta paralela al eje de abscisas, y por el punto M_2, una recta que sea paralela al eje de ordenadas. Estas rectas se cortarán en el punto K (x_2, y_1). El punto M_1 y el punto K pertenecen a recta paralela al eje de abscisas, por consiguiente, como se estableció en el caso b), la distancia entre estos puntos (longitud del segmento M_1K) es igual a $d_{M_1K} = |x_2 - x_1|$.

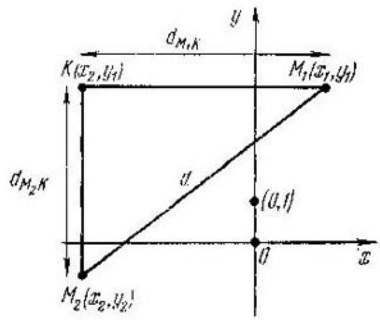

Fig. 25

Los puntos M_2 y K se disponen en la recta paralela al eje de ordenadas, por consiguiente, conforme a lo establecido en el caso a), la distancia entre estos puntos (longitud del segmento en M_2K) es igual a $d_{M_2K} = |y_2 - y_1|$. Por cuanto el triángulo M_1KM_2 es rectángulo, entonces, según el teorema de Pitágoras, $d^2 = d^2_{M_1K} + d^2_{M_2K} = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. En virtud de la propiedad de la magnitud absoluta obtenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

El teorema está completamente demostrado.

Corolario. *La distancia d entre cualesquiera dos puntos* M_1 (x_1, y_1) *y* M_2 (x_2, y_2) *en el plano de coordenadas se determina según la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo. Hállese la distancia d entre los puntos M_1 $(-3, -2)$ y M_2 $(-2, 1)$.

$$d = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}.$$

Ilustración geométrica de un conjunto de soluciones. Un conjunto no vacío de todos los puntos del plano de coordenadas, las coordenadas x e y de cada uno de los cuales representan una solución de la ecuación (2): $P(x, y) = 0$, representa cierta figura G. Se dice que la ecuación $P(x, y) = 0$ define cierta figura G o que es una ecuación de la figura G, siempre que se cumplan las siguientes dos condiciones:

1. Las coordenadas de cada punto $M_0(x_0, y_0)$ de la figura G son una solución de la ecuación $P(x, y) = 0$, es decir, satisfacen la igualdad numérica $P(x_0, y_0) = 0$.

2. A toda solución de la ecuación $P(x, y) = 0$, es decir, a todo par de números (x_1, y_1) que satisface la igualdad numérica $P(x_1, y_1) = 0$, le corresponde en el plano de coordenadas un punto $M_1(x_1, y_1)$, perteneciente a la figura G.

Aduzcamos algunos **ejemplos**.

1. Sea dada la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{3}$$

Mostremos que en el plano de coordenadas esta ecuación representa una circunferencia de radio R con centro en el punto $C(a, b)$.

En efecto tomemos un punto cualquiera M_0 con las coordenadas x_0 e y_0 que se dispone en la circunferencia dada. Por definición de la circunferencia la distancia del punto M_0 al centro de la circunferencia (el punto C) es igual a R. Haciendo uso del corolario del teorema **1**, llegamos a que $R = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$. De esta igualdad numérica se desprende la igualdad numérica

$$R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2.$$

Por consiguiente todo punto dispuesto en la circunferencia dada tiene coordenadas que representan la solución de la ecuación 3).

Tomemos ahora una solución cualquiera de la ecuación (3) es decir, tomemos cualquier par de números (x_1, y_1) tal, que se verifique la igualdad numérica

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

Esta igualdad numérica es equivalente a la igualdad numérica

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R|.$$

Al par ordenado de números (x_1, y_1) le corresponde en el plano de coordenadas el punto $M_1(x_1, y_1)$, con la particularidad de que de la validez de la igualdad numérica $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R| = R$ se desprende que el punto $M_1(x_1, y_1)$ se encuentra en la circunferencia de radio R con centro en el punto $C(a, b)$.

Quiere decir, efectivamente, la ecuación (3) es la ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el punto $C(a, b)$ (fig. 26). Supongamos que en el plano de coordenadas está dada una circunferencia de radio r con centro en el punto (α, β). Razonando de una manera análoga, se puede mostrar que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

es la ecuación de esta circunferencia.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación de la forma (3) es la ecuación de cierta circunferencia y cada circunferencia se define mediante cierta ecuación del tipo (3).

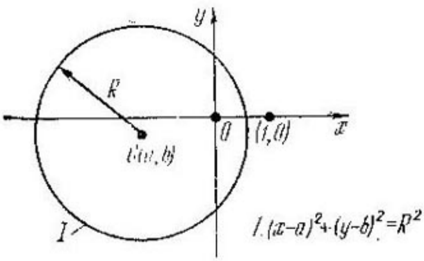

Fig. 26

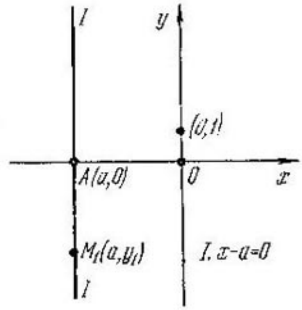

Fig. 27

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una circunferencia, se sobreentiende que está dada la ecuación de esta circunferencia, es decir, la ecuación del tipo (3).

2. Sea dada la ecuación

$$x - a = 0 \tag{4}$$

Mostremos que en el plano de coordenadas esta ecuación representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto A $(a, 0)$.

Efectivamente, tomemos un punto cualquiera M_0 dispuesto en esta recta. Entonces, la abscisa de este punto es el número $x_0 = a$, y la ordenada y_0, un número real fijo.

Es evidente que las coordenadas x_0 e y_0 representan la solución de la ecuación (4), es decir, las coordenadas de cualquier punto dispuesto en una recta que es paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto A $(a, 0)$ representan la solución de la ecuación (4).

Tomemos ahora cualquier solución de la ecuación (4), es decir, elijamos cualquier par de números (x_1, y_1) tal que satisfaga la igualdad numérica $x_1 - a = 0$. En otras palabras, tomemos cualquier par de números (a, y_1), donde y_1 es un número real fijo cualquiera.

Es fácil ver que el punto M_1 (a, y_1) se dispone en una recta paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto A $(a, 0)$ (fig. 27). Por lo tanto, la ecuación (4) es en realidad la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas.

Supongamos que en el plano de coordenadas viene dada una recta que es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto D $(d, 0)$. Razonando análogamente, podemos mostrar que la ecuación $x - d = 0$ representa la ecuación de esta recta.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación del tipo (4) es la ecuación de cierta recta paralela al eje de ordenadas, y la recta, paralela al eje de ordenadas, se define por cierta ecuación del tipo (4).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta paralela al eje de ordenadas, se sobreentiende que

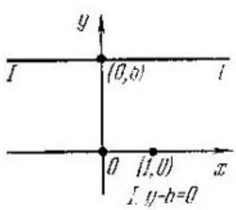

Fig. 28

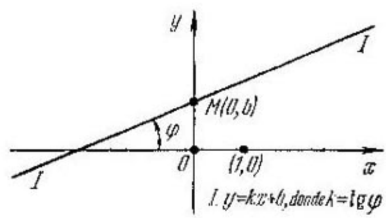

Fig. 29

está dada la ecuación de dicha recta, es decir, la ecuación del tipo (4).

3. Razonando análogamente, se puede mostrar que en el plano de coordenadas toda ecuación de la forma

$$y - b = 0 \tag{5}$$

es la ecuación de cierta recta paralela al eje de abscisas (fig. 28), y cada recta paralela al eje de abscisas se define por cierta ecuación del tipo (5).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas viene dada una recta paralela al eje de abscisas, se sobreentiende que está dada la ecuación de dicha recta, es decir, una ecuación del tipo (5).

4. Sea dada la ecuación

$$y = kx + b, \tag{6}$$

donde $k \neq 0$.

En el capítulo VI se mostrará que en el plano de coordenadas esta expresión es la ecuación de una recta que pasa por el punto M $(0, b)$ y que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a k (fig. 29).

Supongamos que en el plano de coordenadas está dada una recta que pasa por el punto M $(0, b_1)$ y que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo, cuya tangente es igual a k_1, donde $k_1 \neq 0$; podemos demostrar que la ecuación

$$y = k_1x + b_1$$

es la ecuación de esta recta.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$, es la ecuación de una recta que no es paralela a ninguno de los ejes de coordenadas, y cada recta no paralela a ninguno de los ejes coordenados se define por cierta ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$.

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta que no es paralela al eje de abscisas ni tampoco al eje de ordenadas, se sobreentiende que está dada la ecuación de esta recta, es decir, una ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$.

Ecuación de primer grado. Se denomina *ecuación de primer grado* con dos incógnitas una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde $A^2 + B^2 \neq 0$, o, con otras palabras, donde por lo menos uno de los coeficientes A y B es distinto de cero.

De lo expuesto más arriba se infiere que en el plano de coordenadas cada ecuación de primer grado con dos incógnitas es la ecuación de cierta recta, y cada recta del plano se define por cierta ecuación de primer grado con dos incógnitas.

En efecto, sea dada la ecuación

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{7}$$

Si $B = 0$, entonces, tomando en consideración que $A \neq 0$ concluimos que la ecuación (7) es equivalente a la siguiente

$$x - \left(-\frac{C}{A}\right) = 0,$$

y esta ecuación es, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, la ecuación de una recta. Si $B \neq 0$, entonces la ecuación (7) será equivalente a la ecuación

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right),$$

la cual es, conforme a lo mostrado más arriba, ecuación de una recta. Quiere decir, la ecuación (7) es en realidad la ecuación de cierta recta. Además, se puede mostrar que si en el plano de coordenadas viene dada una recta, se define ésta por cierta ecuación del tipo (7).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta, se sobreentiende que está dada la ecuación de dicha recta, es decir, cierta ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Por cuanto por dos puntos no coincidentes pasa una recta única, para definir una recta resulta suficiente prefijar dos puntos que no coinciden y que pertenecen a esta recta.

Quiere decir, si se conocen las coordenadas de dos puntos no coincidentes, dispuestos en esta recta, se puede escribir la ecuación de esta recta.

Ejemplo. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $M(p, q)$, donde $p^2 + q^2 \neq 0$. Si $p = 0$, entonces, evidentemente, la recta es el eje de ordenadas y su ecuación es $x = 0$.

Si $q = 0$, entonces, evidentemente, la recta es el eje de abscisas y su ecuación es $y = 0$.

Si $q \neq 0$, $p \neq 0$, entonces, de acuerdo con lo explicado anteriormente, la ecuación de esta recta es de la forma (7), donde A, B, C son ciertos números fijos, con la particularidad de que $A^2 + B^2 \neq 0$.

Determinemos estos números, haciendo uso de la condición de que dos puntos $O(0, 0)$ y $M(p, q)$ se disponen en la recta mencionada.

Por cuanto la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces el par $(0, 0)$ debe ser la solución de la ecuación (7), lo que es posible sólo cuando $C = 0$. Está claro que $B \neq 0$, puesto que si el coeficiente fuera igual a cero, la ecuación (7) tendría por expresión $Ax = 0$, es decir, representaría la ecuación del eje de ordenadas ($A \neq 0$, puesto que $A^2 + B^2 \neq 0$), lo cual contradice la condición $p \neq 0$. Como $B \neq 0$, la ecuación (7) es equivalente a la ecuación

$$y = kx,$$

donde $k = -\frac{A}{B}$. Dado que la recta pasa por el punto (p, q), entonces se verifica la igualdad numérica

$$q = kp.$$

Por consiguiente, $k = \frac{q}{p}$, y la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $M(p, q)$, el cual no se encuentra en los ejes de coordenadas, tiene por expresión

$$y = \frac{q}{p} x.$$

Conjunto de ecuaciones. Sean dados los polinomios $P_1(x, y)$ $P_2(x, y)$, . . ., $P_m(x, y)$, enteros respecto a las letras x e y.

Se dice que está definido *un conjunto de m ecuaciones algebraicas con dos incógnitas*

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad P_m(x, y) = 0, \tag{8}$$

si se requiere hallar todos los pares de números (x, y), cada uno de los cuales es la solución de al menos una ecuación del conjunto (8) y el cual lleva el nombre de solución del conjunto (8). De este modo, resolver el conjunto de ecuaciones (8) significa resolver cada una de las ecuaciones que integran el conjunto, es decir, determinar los conjuntos M_1, M_2, . . ., M_m, donde M_i es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $P_i(x, y) = 0$, y, a continuación, hallar el conjunto M_0 que es la unión de todos los conjuntos aducidos: $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$. El conjunto M_0 será precisamente el conjunto de todas las soluciones del conjunto de ecuaciones (8).

La ecuación (1) *es equivalente al conjunto de ecuaciones* (8), si cualquier solución de la ecuación (1) es también solución del conjunto de ecuaciones (8), y cualquier solución del conjunto de ecuaciones (8) es solución de la ecuación (1), en otras palabras, si coinciden los conjuntos de sus soluciones. La sustitución de la ecuación (1) por el conjunto equivalente de ecuaciones (8) se denomina *paso equivalente* de la ecuación (1) al conjunto de ecuaciones (8).

Con ayuda de tales pasos equivalentes al conjunto de ecuaciones se logra, frecuentemente, resolver la ecuación de partida. Por ejemplo, se pide hallar todas las raíces de la ecuación

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{9}$$

Hagamos uso de la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Entonces, según la afirmación 4, obtendremos la ecuación (10), equivalente a la ecuación (9):

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{10}$$

Es fácil ver que la ecuación (10) es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x - y = 0, \quad x + y = 0. \tag{11}$$

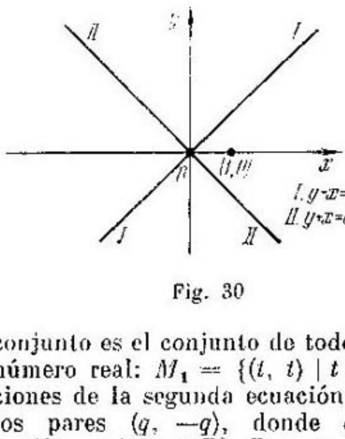

Fig. 30

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación del conjunto es el conjunto de todos los pares (t, t), donde t es cualquier número real: $M_1 = \{(t, t) \mid t \in R\}$. El conjunto de todas las soluciones de la segunda ecuación del conjunto es el conjunto de todos los pares $(q, -q)$, donde q es cualquier número real: $M_2 = \{(q, -q) \mid q \in R\}$. De este modo, el conjunto de todas las soluciones del conjunto (11) y, por lo tanto, de la ecuación (9) es la unión de estos conjuntos $M = M_1 \cup M_2$, es decir, $M = \{(t, t) \mid t \in R; (q, -q) \mid q \in R\}$.

Según lo demostrado anteriormente, cada una de las ecuaciones del conjunto (11) es la ecuación de una recta. Por eso, la figura, definida por la ecuación (9), representa dos rectas; es fácil ver, además, que estas rectas pasan por el origen de coordenadas y son las bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 30).

§ 4. Sistemas de ecuaciones

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sean dados los polinomios $P(x, y)$, $a(x, y)$, enteros respecto a las letras x e y. Se dice que está dado un *sistema* de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas x e y:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

si se pide hallar las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas (x, y), cada una de los cuales es la solución de cada ecuación del sistema (1), es decir, si se requiere hallar todas las colecciones numéricas de incógnitas (x, y) tales quo, siendo sustituida cada una de ellas en ambas ecuaciones del sistema (1), estas últimas se convierten en igualdades numéricas lícitas. Cada colección numérica de esta índole lleva el nombre de *solución* del sistema (1) (las ecuaciones de un sistema se escriben habitualmente en columna y se reúnen con una llave).

Resolver el sistema de ecuaciones (1) significa hallar el conjunto de todas las soluciones de este sistema. Cabe notar que dicho conjunto es la intersección de dos conjuntos: el conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación del sistema y el conjunto de todas las soluciones de la segunda ecuación del mismo. Examinemos un sistema más de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$\begin{cases} R(x, y) = 0, \\ S(x, y) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $R(x, y)$, $S(x, y)$ son polinomios enteros con respecto a las letras x e y. Dos sistemas de ecuaciones algebraicas (1) y (2) se denominan *equivalentes*, si cualquier solución del primer sistema es a la vez la solución del segundo sistema y cualquier solución del segundo sistema es la solución del primer sistema. Con otras palabras, los sistemas (1) y (2) son equivalentes, si coinciden los conjuntos de sus soluciones. De la definición se desprende que dos sistemas son equivalentes, si los conjuntos de sus soluciones son vacíos.

Suele decirse que está dado un *conjunto* de k sistemas de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q_1(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \ \ldots \\ Q_2(x, y) = 0, \ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} P_k(x, y = 0, \\ Q_k(x, y = 0, \end{cases} \tag{3}$$

donde $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_k(x, y)$; $Q_1(x, y)$, ..., $Q_k(x, y)$ son polinomios enteros respecto de las letras x e y, si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales es la solución de por lo menos uno de los sistemas de ecuaciones del conjunto (3). Cada una de dichas colecciones recibe el nombre de *solución* del conjunto de sistemas de ecuaciones (3).

El sistema de ecuaciones (1) es *equivalente* al conjunto de sistemas de ecuaciones (3), si cualquier solución del sistema de ecuaciones (1) es, a la vez, solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (3), y cualquier solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (3) es la solución del sistema de ecuaciones (1).

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de los sistemas de ecuaciones.

1. *Si se cambia el orden de seguimiento de las ecuaciones en el sistema* (1), *el sistema obtenido será equivalente al* (1).

2. *Si una de las ecuaciones del sistema* (1) *se sustituye por otra ecuación equivalente, el sistema obtenido será equivalente al sistema* (1).

3. *Supongamos que en un sistema de ecuaciones con incógnitas x e y una de las ecuaciones está escrita de tal modo que en el primer miembro figura una de las incógnitas, por ejemplo, x a la primera potencia, y en el segundo miembro figura un polinomio entero respecto de y. En este caso se dice que la incógnita x está expresada en términos de la otra incógnita y. Si la incógnita x viene expresada a partir de la primera ecuación del sistema* (1), *entonces, al sustituirla en otra ecuación del sistema* (1), *en lugar de x, el polinomio obtenido de y, tendremos un sistema equivalente de ecuaciones, es decir, resultan equivalentes los siguientes sistemas*:

$$\begin{cases} x = R(y), \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = R(y), \\ Q[R(y), y] = 0. \end{cases}$$

Observemos que la segunda ecuación $Q[R(y), y] = 0$ es una ecuación con una sola incógnita, por lo cual para encontrar sus soluciones podemos emplear los métodos examinados en el § 1.

4. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *se sustituye por una ecuación igual a la suma de la primera ecuación, multiplicada por cierto número real $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación, multiplicada por cierto número real α, entonces el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (1), es decir, cualesquiera que sean los números reales $\beta \neq 0$ y α, serán equivalentes los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \beta P(x, y) + \alpha Q(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

A título de corolario de la afirmación 4 tenemos la afirmación:

5. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *se sustituye por la suma (o la diferencia) de la primera y segunda ecuaciones del sistema, entonces el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (1).

6. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *es equivalente al conjunto de ecuaciones $P_1(x, y) = 0$, $P_2(x, y) = 0$, . . ., $P_k(x, y) = 0$, entonces el sistema* (1) *será equivalente al siguiente conjunto de k sistemas de ecuaciones*:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \ldots, \\ \ldots, \end{matrix} \quad \begin{cases} P_k(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Si la ecuación $Q(x, y) = 0$ es equivalente al conjunto de m ecuaciones $Q_1(x, y) = 0$, $Q_2(x, y) = 0$, . . ., $Q_m(x, y) = 0$, entonces a cada sistema del conjunto (4) se le puede aplicar la afirmación 6 y cada sistema del conjunto (4) puede sustituirse por su conjunto de m sistemas.

La demostración de todas estas afirmaciones se omite.

Veamos cómo se aplican las afirmaciones enunciadas al resolver sistemas de ecuaciones.

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Examinemos el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

donde $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ y $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, con otras palabras, donde por lo menos uno de los dos coeficientes a_1 y b_1, y también por lo menos uno de los dos coeficientes a_2 y b_2 son distintos de cero (en el caso contrario por lo menos uno de los polinomios $a_1x + b_1y + c_1$ ó $a_2x + b_2y + c_2$ no sería un polinomio de primer grado ni respecto de la incógnita x, ni respecto de la incógnita y).

Cada una de las dos ecuaciones del sistema (5) (como se ha mostrado en el § 3) es la ecuación de una recta en el plano de coordenadas. Como se sabe, dos rectas en el plano de coordenadas pueden o bien intersecarse en un punto, o bien coincidir, o bien ser paralelas sin que sean coincidentes. Por consiguiente, al buscar todas las soluciones del sistema de ecuaciones (5), también pueden surgir estas mismas situaciones.

Aclarémoslas con unos ejemplos.

1. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Es fácil ver que el sistema (6) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = y, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Haciendo uso de la afirmación 3, pasemos del sistema (7) al sistema

$$\begin{cases} x = y, \\ y + y + 1 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

que es equivalente a (7).

La segunda ecuación del sistema (8) es de primer grado con una incógnita y tiene la única solución $y_1 = -\frac{1}{2}$. Por consigiente, el sistema (8) y, por tanto, el sistema (6), equivalente a (8), tiene la única solución $(x_1, y_1) : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. El punto con estas coordenadas es el de intersección de las rectas definidas por las ecuaciones (6) (fig. 31).

2. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0. \end{cases} \tag{9}$$

Al dividir por 2 los miembros primero y segundo de la segunda ecuación, pasamos al sistema

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+y+1=0, \end{cases} \tag{10}$$

que es equivalente al sistema de partida (9).

El sistema (10) consta de dos ecuaciones iguales, lo que corresponde en el plano de coordenadas a dos rectas coincidentes (fig. 32).

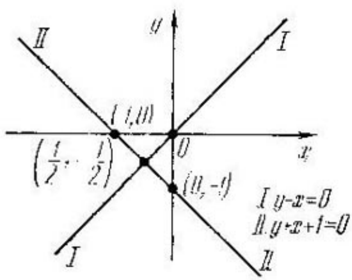

Fig. 31

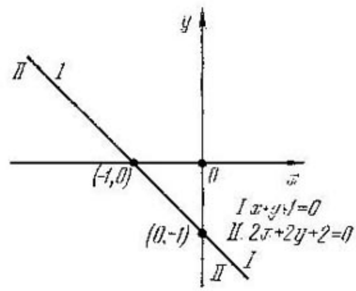

Fig. 32

Es obvio que el conjunto de todas las soluciones del sistema (10) y por tanto, del sistema equivalente (9), es el conjunto de todos los pares del tipo $(t, -1-t)$, donde t es un número real cualquiera.

3. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{11}$$

Pasemos al sistema equivalente al dado

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{12}$$

Al hacer uso de la afirmación 3, obtendremos el sistema

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2(-y)+2y+1=0. \end{cases} \tag{13}$$

que es equivalente al sistema (12).

La segunda ecuación del sistema (13) es equivalente a la igualdad numérica $1=0$ que no es cierta. Por consiguiente, el sistema (13) y, por tanto, el sistema (11), no tienen soluciones, lo que corresponde a dos rectas paralelas en el plano de coordenadas pero no coincidentes (fig. 33).

El método de resolución de los sistemas de ecuaciones (6), (9) y (11), que está basado en la afirmación 3, se denomina *método de sustitución* o *método de eliminación de la incógnita*.

Veamos cómo se emplea este método en un ejemplo más complejo, cuando una de las ecuaciones del sistema no es ecuación de primer grado.

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (14)$$

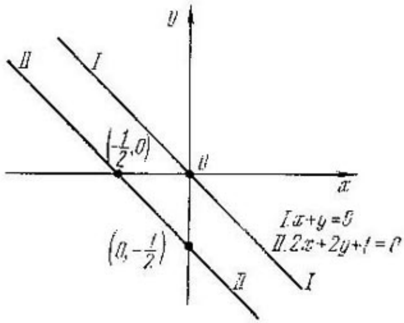

Fig. 33

Analicemos el caso en que $b=0$. Entonces la primera ecuación del sistema (14) es la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas. La segunda ecuación del sistema (14) es la ecuación de una circunferencia de radio unidad con centro en el origen de coordenadas. Al aplicar el método de sustitución ($a \neq 0$, puesto que $b=0$), obtendremos el sistema

$$\begin{cases} x=-\frac{c}{a}, \\ \left(-\frac{c}{a}\right)^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (15)$$

que es equivalente al sistema de partida (14). La segunda ecuación del sistema (15) es una ecuación cuadrática. Si $1-\frac{c^2}{a^2}<0$, entonces esta ecuación no tiene raíces y, por tanto, el sistema (15) y el (14), equivalente al (15), tampoco las tienen. Esto corresponde a la situación en que la recta $x=-\frac{c}{a}$ no corta la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$ (fig. 34), $\Big[$en la figura 34 la recta $x=-\frac{c}{a}$ viene expresada tanto para el caso de $\left(-\frac{c}{a}\right)>1$, como para el de $\left(-\frac{c}{a}\right)<-1\Big]$. Si $1-\frac{c^2}{a^2}=0$, la segunda ecuación del sistema (15) tiene la única solución $y=0$. El sistema (15) y, por tanto, el sistema (14), tienen en este caso la única solución (x_1, y_1): $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Geométricamente esto corresponde al caso en que la recta es tangente a la circunferencia unidad en el punto $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ (fig. 35) $\Big($en la fig. 35 la recta $x=-\frac{c}{a}$ viene expresada tanto para el caso de

$\left(-\frac{c}{a}\right)=1$, como para el de $\left(-\frac{c}{a}\right)=-1\Big)$. Si $1-\frac{c^2}{a^2}>0$, entonces la segunda ecuación del sistema (15) tiene tan solo dos raíces, $y_1=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$ e $y_2=-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$. Por consiguiente, los sistemas (15) y (14) tienen en este caso sólo dos soluciones (x_1, y_1), (x_2, y_2); $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$. En el sentido geomé-

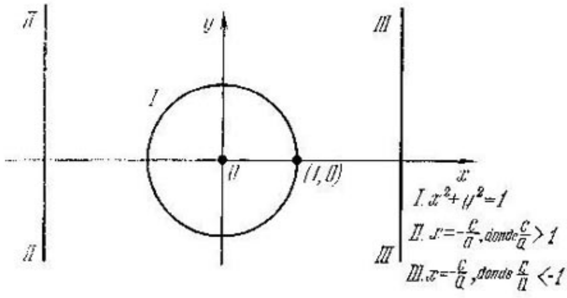

Fig. 34

trico esto corresponde a que la circunferencia unidad se corta por la recta $x=-\frac{c}{a}$ en dos puntos: $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ y $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ (fig. 36). (En la fig. 36 la recta $x=-\frac{c}{a}$ está representada en tres casos: 1) $0<-\frac{c}{a}<1$, 2) $\left(-\frac{c}{a}\right)=0$, 3) $0>\left(-\frac{c}{a}\right)>-1\Big)$.

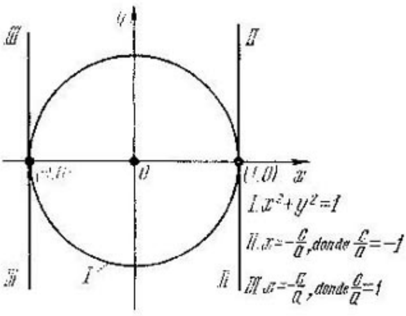

Fig. 35

Si $b\neq 0$, entonces en virtud de la primera ecuación del sistema (14) podemos expresar la incógnita y: $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, y, por analogía con lo expuesto más arriba, aplicar el método de sustitución. Resultan posibles en este caso sólo tres situaciones:

1. El sistema (14) no tiene soluciones, es decir, la recta y la circunferencia no tienen puntos comunes (véase la fig. 34).

2. El sistema tiene la única solución, es decir, la recta es tangente a la circunferencia dada (véase la fig. 35).

3. El sistema tiene tan sólo dos soluciones, es decir, la recta corta la circunferencia solamente en dos puntos (véase la fig. 36). Queda al cargo del lector realizar los cómputos correspondientes para este caso.

Método de transformación lineal (el método está basado en la afirmación 4 y consiste en la sustitución equivalente de la primera ecuación del sistema por otra ecuación, igual a la suma de la primera ecuación, multiplicada por un número $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación multiplicada por un número α).

Examinemos la aplicación de este método en el ejemplo de resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 3 = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtendremos, en virtud de la afirmación 5, el sistema

$$\begin{cases} 2y + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 3 = 0, \end{cases} \qquad (17)$$

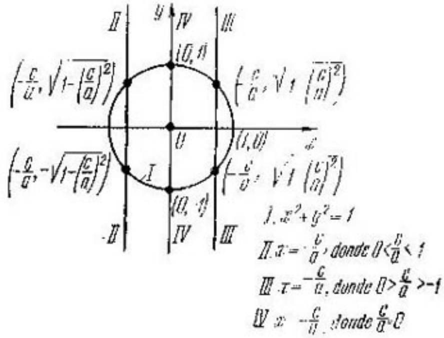

Fig. 36

que es equivalente al sistema (16). La primera ecuación del sistema (17) tiene la única solución $y_1 = -2$. Al sustituir este valor de y_1 en la segunda ecuación del sistema (17), obtendremos que este sistema y, por tanto, el sistema equivalente (16) tienen solamente dos soluciones: $(1, -2)$ y $(-1, -2)$. Observemos que dichas soluciones se escriben frecuentemente en forma del conjunto: $M = \{(1, -2); (-1, -2)\}$.

Método de sustitución de un sistema de ecuaciones por un conjunto de sistemas de ecuaciones (el método se basa en la afirmación 6 sobre la equivalencia entre un sistema de ecuaciones y un conjunto de sistemas de ecuaciones).

Veamos cómo se aplica este método en un ejemplo de resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x + y = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Por cuanto la primera ecuación de este sistema es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$x - y = 0, \ x + y - 1 = 0,$$

entonces el sistema (18) será equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y^2-2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases} \tag{19}$$

Cada uno de los sistemas del conjunto (19) se resuelve fácilmente por el método de sustitución. El primer sistema tiene solamente dos soluciones: (1, 1); (—2, —2); el segundo sistema también tiene tan sólo dos soluciones:

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Por consiguiente, el sistema (18) tiene cuatro soluciones:

$$(1, 1);\ (-2, -2);\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Examinemos, además, la aplicación de este método en el ejemplo de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, si una de las ecuaciones de dicho sistema es homogénea de segundo grado. La ecuación $ax^2+bxy+cy^2=0$ se denomina *ecuación homogénea de segundo grado*. Así pues, resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \tag{20}$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio entero respecto de x e y.

1. Sea $a=0$. Es evidente que el sistema (20) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} y=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} bx+cy=0, \\ P(x, y)=0. \end{cases}$$

Cada uno de estos sistemas puede resolverse por el método de sustitución.

2. Sea $a \neq 0$. Apliquemos al primer miembro de la primera ecuación del sistema (20) una transformación idéntica «formación de cuadrado perfecto»:

$$\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2 &= a\left(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right)= \\ &= a\left\{\left[x^2+2x\frac{by}{2a}+\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right]+\frac{cy^2}{a}-\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right\}= \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2-\frac{Dy^2}{4a^2}\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

donde $D=b^2-4ac$.

En el caso de $D>0$ el primer miembro de la primera ecuación del sistema (20) se representa en forma de un producto

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}y+\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right)\left(x+\frac{b}{2a}y-\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right),$$

por lo cual el sistema (20) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}\,y=0, \\ P(x,\,y)=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}\,y=0, \\ P(x,\,y)=0. \end{array}\right. \tag{22}$$

Cada uno de estos sistemas puede resolverse por el método de sustitución. En el caso cuando $D = 0$, el conjunto de sistemas (22) se compone de dos sistemas iguales de ecuaciones, es decir, de hecho, es un solo sistema de ecuaciones.

Cuando $D < 0$, de la igualdad (21) se deduce que la primera ecuación del sistema (20) tiene la única solución $(x_1,\ y_1)$: $(0,\ 0)$ y nos queda sólo comprobar si esta ecuación satisface la segunda ecuación del sistema (20).

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=19, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{array}\right. \tag{23}$$

Apliquemos primero el método de transformación lineal del sistema: al multiplicar la primera ecuación por 7, y la segunda, por 19, y al sustraer luego la primera ecuación de la segunda, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 12x^2-26xy+12y^2=0, \\ x^2-xy+y^2=7, \end{array}\right. \tag{24}$$

que es equivalente al sistema (23). Apliquemos al primer miembro de la primera ecuación la transformación idéntica de «formación de cuadrado perfecto»:

$$12x^2-26xy+12y^2=12\left[x^2-2x\frac{13y}{12}+\left(\frac{13y}{12}\right)^2+y^2-\frac{169y^2}{144}\right]=$$

$$=12\left[\left(x-\frac{13y}{12}\right)^2-\frac{25y^2}{144}\right]=12\left(x-\frac{13y}{12}+\frac{5y}{12}\right)\left(x-\frac{13y}{12}-\frac{5y}{12}\right)=$$

$$=12\left(x-\frac{2y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right).$$

En virtud de esta transformación idéntica y de la afirmación 6, podemos constatar que el sistema de ecuaciones (24) es equivalente al conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{2}{3}\,y=0, \\ x^2-xy+y^2=7, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{3y}{2}=0, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{array}\right.$$

Resolviendo cada uno de estos sistemas por el método de sustitución, obtenemos que el primer sistema tiene tan solo dos soluciones: (2; 3) y (—2; —3); el segundo sistema también tiene sólo dos soluciones: (3; 2) y (—3; —2). Por consiguiente, el sistema (23) tiene solamente cuatro soluciones: (2; 3); (—2; —3); (3; 2); (—3; —2).

En algunos casos para resolver un sistema de ecuaciones, se necesita que la afirmación 6 sea empleada no una sola vez, sino varias veces. Por ejemplo, esto se debe realizar al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y), \\ x^3 + y^3 = 7(x+y) \end{cases} \tag{25}$$

Escribamos este sistema en la siguiente forma equivalente:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0. \end{cases}$$

En virtud de la afirmación 6, este sistema es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x-y=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0. \end{cases}$$

Aplicando otra vez a cada sistema la afirmación 6, llegamos a que el sistema de ecuaciones inicial (25) es equivalente al conjunto de sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x+y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^2-xy+y^2-\ \ 7=0. \end{cases}$$

Los tres primeros sistemas se resuelven fácilmente por el método de sustitución; el cuarto sistema ya se ha resuelto más arriba. Al reunir juntas las soluciones de todos estos sistemas, resulta que el sistema de partida (25) tiene tan sólo nueve soluciones: (0, 0); $(\sqrt{7}, \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{19}, \sqrt{19})$; $(\sqrt{19}, -\sqrt{19})$; (2, 3); (—2, —3); (3, 2); (—3, —2).

Hemos de indicar que comúnmente para la resolución de tal o cual sistema nos vemos obligados a emplear varios métodos.

Sistemas de ecuaciones con varias incógnitas. En la práctica nos encontramos con la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones no sólo con dos incógnitas, sino con una cantidad mayor de incógnitas: con tres, cuatro, etc. Demos a conocer, por eso, las definiciones correspondientes y analicemos ciertas afirmaciones que son indispensables para la resolución de tales sistemas.

Supongamos que se pide resolver la ecuación

$$R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t), \tag{26}$$

donde $R(x, y, z, \ldots, t)$ y $Q(x, y, z, \ldots, t)$ son polinomios, enteros (véase el cap. II) respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. En este caso se dice que está definida una *ecuación algebraica con las incógnitas* $x, y, z, \ldots, t$. Observemos que las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$ representan el conjunto de todas las incógnitas contenidas tanto en el primer miembro, como en el segundo miembro de la ecuación (26). Por ejemplo, la expresión $4x^2 = yz + 5y^2$ es una ecuación respecto de las incógnitas x, y, z, puesto que los polinomios que figuran en los miembros primero y segundo de dicha ecuación pueden ser escritos en la forma $R(x, y, z) = 4x^2 = 4x^2 + 0\cdot y + 0\cdot z$, $Q(x, y, z) = yz + 5y^2 = 0\cdot x + yz + 5y^2$, de donde se ve que estos polinomios son realmente enteros respecto a las letras x, y, z.

Se llama colección ordenada $(x, y, z, \ldots, t)$ *la colección de incógnitas* de la ecuación (26). El CVA de la ecuación (26) es el conjunto de todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, en cada una de las cuales en lugar de cada incógnita puede figurar cualquier número real.

La colección numérica $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$, correspondiente a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, se llama *solución* de la ecuación (26) son iguales los valores numéricos de los polinomios R y Q, correspondientes a esta colección numérica, es decir, si se verifica la igualdad numérica $R(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0) = Q(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$.

Resolver la ecuación (26) significa hallar todas sus soluciones, es decir, determinar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales convierte la ecuación (26) en una igualdad numérica que se verifica.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con iguales incógnitas:

$$R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$$

y

$$T(x, y, z, \ldots, t) = S(x, y, z, \ldots, t).$$

Estas ecuaciones se denominan *equivalentes*, si cualquier solución de la primera ecuación es también solución de la segunda ecuación y, viceversa, cualquier solución de la segunda ecuación es también solución de la primera ecuación. La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, lleva el nombre de *paso equivalente* de la primera ecuación a la segunda.

Son lícitas las siguientes **afirmaciones**:

1. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $R(x, y, z, \ldots, t) - Q(x, y, z, \ldots, t) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $R(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t)$, *donde* $S(x, y, z, \ldots, t)$ *es un polinomio entero respecto de las letras* $x, y, z, \ldots, t$, *son equivalentes.*

3. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $\alpha R(x, y, z, \ldots, t) = \alpha Q(x, y, z, \ldots, t)$ *son equivalentes para cualquier número real* α, *distinto de cero.*

4. *Supongamos que se sabe que se verifica la igualdad idéntica* $R(x, y, z, \ldots, t) = T(x, y, z, \ldots, t)$; *entonces, las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $T(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *son equivalentes.*

La validez de estas afirmaciones se demuestra de manera análoga a la de las afirmaciones correspondientes en el § 1, por lo cual se omite aquí.

De las afirmaciones 1 y 4 se desprende que cada ecuación algebraica puede ser reducida a la forma $P(x, y, z, \ldots, t) = 0$, y por eso podemos examinar sólo las ecuaciones del tipo

$$P(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{27}$$

donde $P(x, y, z, \ldots, t)$ es un polinomio entero respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$.

Sean dados los polinomios $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, $\ldots$, $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, enteros respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. Se dice que está dado el *conjunto* de m ecuaciones algebraicas con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ \ldots,\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{28}$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, cada una de las cuales sea solución de por lo menos una de las ecuaciones pertenecientes al conjunto (28). Cada una de dichas colecciones se denomina *solución del conjunto* (28). De este modo, resolver el conjunto de ecuaciones (28) significa resolver cada una de las ecuaciones $P_i(x, y, z, \ldots, t) = 0$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$, y tomar, a continuación, la unión de estas soluciones.

La ecuación (27) es *equivalente* al conjunto de ecuaciones (28), si cualquier solución de la ecuación (27) es, a la vez, solución del conjunto (28) y cualquier solución del conjunto (28) es solución de la ecuación (27). La sustitución de la ecuación (27) por el conjunto equivalente (28) lleva el nombre de *paso equivalente* de la ecuación (27) al conjunto (28).

Sean dados los polinomios $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, $\ldots$, $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, enteros respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. Se dice que está dado un sistema de m ecuaciones algebraicas con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, cada una de las cuales es solución de cada ecuación del sistema (29), es decir, si se requiere determinar todas las colecciones numéricas de las incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$ tales que, siendo sustituida cada una de las colecciones en todas las ecuaciones del sistema (29), las últimas se reduzcan a igualdades numéricas que se verifican. Cada semejante colección numérica se denomina *solución del sistema* (29) (las ecuaciones del sistema se escriben habitualmente en una columna y se reúnen con una llave).

Dos sistemas de ecuaciones algebraicas con incógnitas iguales $x, y, z, \ldots, t$ se llaman *equivalentes*, si cualquier solución del primer sistema es a la vez solución del segundo sistema y, viceversa, cualquier solución del segundo sistema es solución del primer sistema.

Se dice que está dado el *conjunto* de k sistemas algebraicos de ecuaciones con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$\left\{\begin{array}{l} P_{11}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{21}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{m1}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} P_{12}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{22}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n2}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{array}\right. \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \left\{\begin{array}{l} P_{1k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{2k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{ik}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{array}\right. \tag{30}$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales es la solución de al menos uno de los sistemas de ecuaciones del conjunto (30). Cada tal colección se llama *solución* del conjunto de sistemas de ecuaciones (30). El sistema de ecuaciones (29) es *equivalente* al conjunto de sistemas de ecuaciones (30), si cualquier solución del sistema de ecuaciones (29) es a la vez la solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (30), y cualquier solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (30) es la solución del sistema de ecuaciones (29).

He aquí algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de los sistemas de ecuaciones.

1. *Si se cambia el orden de seguimiento de las ecuaciones del sistema* (29), *el sistema obtenido será equivalente al sistema* (29).

2. *Si una de las ecuaciones del sistema* (29) *se sustituye por una ecuación equivalente, el sistema obtenido será equivalente al sistema* (29).

3. *Supongamos que en el sistema de ecuaciones con las incógnitas* $x, y, z, \ldots, t$ *la primera ecuación está escrita en forma tal, que el primer miembro de ésta contiene una de las incógnitas, por ejemplo,* x *a la potencia una, y en el segundo miembro figura un polinomio entero*

respecto de las otras letras. En este caso se dice que la incógnita x viene expresada de la primera ecuación del sistema por medio de las otras incógnitas. Si la incógnita x viene expresada a partir de la primera ecuación del sistema en términos de otras incógnitas, entonces, al sustituir en otras ecuaciones del sistema, en lugar de x, el polinomio citado de otras incógnitas, obtendremos un sistema equivalente de ecuaciones, es decir, resultan equivalentes los dos siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x=Q(y, z, \ldots, t), \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x=Q(y, z, \ldots, t), \\ P_2[Q(y, z, \ldots, t), y, z, \ldots, t]=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m[Q(y, z, \ldots, t), y, z, \ldots, t]=0. \end{cases}$$

Observemos que si en el segundo sistema se examinan sólo las ecuaciones $P_2=0$, $P_3=0$, $\ldots$, $P_m=0$, entonces ellas forman un sistema de ecuaciones con un número de incógnitas menor que en el primer sistema.

4. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *se sustituye por una ecuación igual a la suma de la primera ecuación multiplicada por cierto número real $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación multiplicada por cierto número real α, entonces, el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (29), *es decir, cualesquiera que sean $\beta \neq 0$ y α reales, serán equivalentes los dos siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \beta P_1(x, y, z, \ldots, t)+\alpha P_2(x, y, z, \ldots, t)=0; \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0. \end{cases}$$

A título de corolario de la afirmación 4 tenemos las **afirmaciones:**

5. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *se sustituye por la suma (o la diferencia) de las ecuaciones primera y segunda del sistema, el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (29).

6. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *es equivalente al conjunto de ecuaciones* $Q_1(x, y, z, \ldots, t)=0$, $Q_2(x, y, z, \ldots, t)=0$, $\ldots$, $Q_k(x, y, z, \ldots, t)=0$, *entonces el sistema* (29) *será equiva-*

lente al siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} Q_1(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} Q_h(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{cases} \qquad (31)$$

Si otras ecuaciones del sistema (29) son equivalentes a sus respectivos conjuntos de ecuaciones, entonces a cada sistema de conjuntos (31) es aplicable la afirmación 6 y cada sistema de conjuntos (31) puede ser sustituido por su conjunto de sistemas de ecuaciones. El conjunto completo de sistemas de ecuaciones, equivalente al sistema (29), se obtiene examinando todos los casos lógicamente posibles.

Observación. Los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales se analizan detalladamente en el cap. X.

Ejemplo. Resolvamos un sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x^2+y+z=2, \\ x+y^2+z=2, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \qquad (32)$$

Sustituyamos la primera ecuación por la diferencia entre las ecuaciones primera y segunda, y sustituyamos la segunda ecuación por la diferencia entre las ecuaciones segunda y tercera. De resultas, según la afirmación 5, obtendremos un sistema que será equivalente al de partida:

$$\begin{cases} x^2+y-x-y^2=0, \\ y^2+z-y-z^2=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \qquad (33)$$

Los polinomios que figuran en el primer miembro de las ecuaciones primera y segunda del sistema (33) pueden ser descompuestos en factores:

$$x^2+y-x-y^2=(x-y)(x+y-1),$$

$$y^2+z-y-z^2=(y-z)(y+z-1).$$

Como resultado, de acuerdo con la afirmación 2, el sistema (33) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \qquad (34)$$

La primera ecuación del sistema (34) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$x - y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

Por consiguiente, según la afirmación 6, el sistema (34) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (y - z)(y + z - 1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ (y - z)(y + z - 1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases} \tag{35}$$

La segunda ecuación en los sistemas del conjunto (35) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$y - z = 0, \quad y + z - 1 = 0.$$

Por consiguiente, el primer sistema del conjunto (35) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

El segundo sistema del conjunto (35) es equivalente a la totalidad de sistemas

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

De este modo, el conjunto de sistemas (35) y, por tanto, el sistema (32), equivalente al conjunto (35), son equivalentes al siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

Todos los sistemas de este conjunto se resuelven con facilidad por el método de sustitución. El primer sistema tiene tan sólo dos soluciones (x, y, z): $(-1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$; $(-1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3})$; el segundo sistema, sólo dos soluciones (x, y, z): $(-1; -1; 2)$; $(1; 1; 0)$; el tercer sistema, sólo dos soluciones (x, y, z): $(0; 1; 1)$; $(2; -1; -1)$; el cuarto, solo dos soluciones

(x, y, z): $(1, 0; 1)$; $(-1; 2; -1)$. Por consiguiente, el sistema de partida (32) tiene solamente 8 soluciones (x, y, z): $(-1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$; $(0; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$; $(1; 1; 0)$; $(-1; -1; 2)$; $(-1; 2, -1)$; $(2; -1; -1)$.

Ejercicios

Aplicando el método de formación de cuadrado perfecto, escríbase en forma de la suma algebraica de los cuadrados de polinomios los siguientes polinomios (1 . . . 14):

1. $6x^2+7x-3$. **2.** $28+31x-5x^2$. **3.** $27x^2-15x-112$. **4.** $x^2-6(x+12)$.

5. $x(x+34)+289$. **6.** $-\frac{1}{2}x^2+2x+1$. **7.** $\frac{1}{3}x^2-4x+2$. **8.** $9-3x-\frac{x^2}{4}$.

9. $4x^2-4x+1$. **10.** $4x^4+3x^2+1$. **11.** $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

12. $x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}$. **13.** $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.

14. $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$.

Escríbanse los polinomios que siguen en forma de un trinomio de segundo grado respecto de x, y hállense sus discriminantes (15 . . . 33):

15. $3-\frac{4x}{15}+4x^2$. **16.** $23x-120-x^2$.

17. $13x-11-8x(1+x)$. **18.** $x(22+x)-2(x-3)$.

19. $4+x^2+2(4x+6)$. **20.** $(x-1)(3-2x)-3x^2+2$.

21. $(2x-3)(3x+1)-(x-11)$. **22.** $3(x+1)(2x+3)-(x-1)^2$.

23. $8x-(4x+3)(x-2)-x(2x-1)$. **24.** $x^2-(x+2)(3-x)-2x-8$.

25. $5(4x^2+4)-3(x-1)+4(x+1)$. **26.** $\frac{1}{3}(1-x)(2-x)-\frac{x}{2}$.

27. $\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-2x)$. **28.** $3+\frac{(3+1)(x-2)}{3}-\frac{x^2}{4}$.

29. $2mx-mn-nx+2x^2$. **30.** $x^2+2a(b-x)+3bc$.

31. $x^2-b(2x-b)-4b^2$. **32.** $5a(x-a)+8a(x+2a)-x(x-a)+2a(x-a)$.

33. $(x-3)(3x-a)-(x-2a)(2x-3)$.

¿Pertenecerá el conjunto $\{1; -2\}$ al conjunto de todas las soluciones de las siguientes ecuaciones (34 . . . 41):

34. $2x+1=3(x-2)-(x-7)$; **35.** $(x-1)(x+2)=0$;

36. $2x+x^2-3=0$; **37.** $x^6+7x^3=8$;

38. $4+x^4=5x^2$; **39.** $x^3+2x(1-x)=x^2$;

40. $x^2+3x(x-3)=7x-9$; **41.** $(x^2+3x-5)(x^2+3x+3)+7=0$?

¿Serán equivalentes las siguientes dos ecuaciones (42 . . . 54):

42. $2x+1=3$ y $2x=2$; **43.** $\frac{7x+5}{2}=9{,}5$ y $x(x-1)=2$;

44. $x^2=4$ y $x^4-16=0$; **45.** $x^2+1=0$ y $x^4+1=0$;

46. $9x(2x-3)=26$ y $(6x-13)(3x+2)=0$;

47. $(x-2)(3+4x)=2x^2$ y $\left(x+\frac{\sqrt{73}-5}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{73}}{4}\right)=0$;

48. $(x+4)=0$ y $(x+4)(x^3+4x+100)=0$;
49. $x-12=17-2x$ y $(x-12)^2=(17-2x)^2$;
50. $x^2=6-x$ y $x^2(x-2)=(6-x)(x-2)$;
51. $x^2+6=5x$ y $(x^2+6)(x+4)=5x(x+4)$;
52. $3=2x-x^2$ y $3+(x^2+5)=2x-x^2+(x^2+5)$;
53. $\frac{x}{7}(x-4)=0$ y $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$;
54. $(3x+2)(2x-7)=6(x+2)^2+7$ y $3[5-2(x^2-2x+10)]=5x$?

¿Serán equivalentes las siguientes ecuaciones y conjuntos de ecuaciones (55 ... 72):

	Ecuación	Conjunto de ecuaciones
55.	$3x-4-\frac{4(7x+9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$	$13x-92=0;\ x=7\frac{1}{13}$;
56.	$\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-1)=$ $=(x+5)(x+3)$	$7x=18-2x;\ 3x+6=0$;
57.	$\frac{(3x-2)(x-1)}{21}=1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}$	$2x-5[7-(x-6)(x+1)]=28;$ $x=4$;
58.	$2x^2-32=x+4$	$x=-4;\ 3x+12=0$;
59.	$(3x-5)(2x-5)=x^2+2x+3$	$x-4=0;\ x=\frac{7}{3}$;
60.	$2x(x+7)=x^2+3x$	$5x^2=6x;\ 5x+4=0$;
61.	$2x^2-15=x$	$2(x-1)=x+1;\ 2x+5=0$;
62.	$15-11x=8x(1+x)$	$8x-5=0;\ x+3=0$;
63.	$x^2+\frac{1}{8}=\frac{3x}{4}$	$2x=1;\ 2x+6=2(x+4)+1$;
64.	$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$	$0,3x-1,8=0,7-0,2x;\ 2x+5=0$;
65.	$(3x+5)^2+2x(3x+5)=0$	$3\{7-3[x-2(x-1)]\}=6x;\ 2x=5$;
66.	$\frac{7}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{11}(3x-1)^2=0$	$3x-1=0;\ 6-(3-x)=4x-4$;
67.	$(x+1)^2+(x-2)^2=2(x^2-2,5)$	$15-x(8-x)=(x-5)^2;\ x=5$;
68.	$\frac{x(2x+1)}{14}-\frac{(x+2)(x-4)}{7}=1\frac{1}{2}$	$0,5x+\frac{x}{3}=x-3;\ 2(x-5)^2=0$;
69.	$\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{2}{3}(x-8)^2$	$\frac{x}{3}-0,25x=1\frac{1}{2};\ 2x-\frac{1}{3}=0$;
70.	$3(x-9)^2-2(x-9)-16=0$	$\frac{x}{3}-\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{2};$ $x^2-14x+49=0$;
71.	$3x(x-2)-(x+1)(x-13)=0$	$x^2+7=0;\ 13x^2-14x+9=0$;
72.	$4(2x-3)^2-4(2x-3)+1=0$	$\sqrt{3}x^2-x+2=0;$ $\frac{3(2x-7)(x^2+1)}{4}=0.$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones (73 . . . 123):

73. $5-4(x-3)=x-2(x-1)$.

74. $4(3+x)-3(2x-5)=6-x-2(3-x)$.

75. $3\{15-2[x-2(x-4)]-x\}=5x-20$.

76. $6-\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{4}+\frac{x-2}{3}$. 77. $\frac{2x-5}{11}-\frac{x-2}{7}=5x-17\frac{1}{2}$.

78. $0{,}2(x-1)+0{,}5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$. 79. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{0{,}47+2x}{5}=\frac{4{,}4x}{1{,}5}$.

80. $(x+2)(x-1)=0$. 81. $2x(3x-4)=0$.

82. $(3x+4)(5-2x)=0$.

83. $x^2-7x+6=0$. 84. $2x^2-5x+12=0$.

85. $3x^2-7x-1=0$. 86. $2x(x+6)=x^2-3x$.

87. $3(x^2+20)=21x$. 88. $x+2x(x-1)=5$.

89. $(2x+5)^2+2x(3x+5)=0$. 90. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+2\right)-1=0$.

91. $7(x^2+5x+8)=3(x+1)(x-2)$.

92. $3(x^2-3x+1)-2x(x-2)=20-3(x+1)(2x-4)$.

93. $2(x-3)-3(x^2-2x-4)=4x^2-(3-5x)(x-1)-34$.

94. $3(x-2)^2-\frac{3(2-x^2)}{4}=x-1\frac{1}{2}$.

95. $(x+2)(x-3)+x(x+4)=(x-3)(x-7)+x^2$.

96. $(x+1)(x+2)+9+(x+2)(x+3)=(x+3)(x+4)$.

97. $(2+0{,}5x)\left(\frac{x}{3}-1\right)+3\frac{1}{2}=0{,}2\left(\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}\right)$.

98. $18+(x+4)(x-3)(x-1)=(x+1)(x+3)(x+2)$.

99. $(1-x)(x+2)(x+3)=9x^2-x^3+4(1-7x)$.

100. $x^2+4x-8\sqrt{8}\cdot x+20=0$. 101. $x(x-3)-2x(\sqrt{2}\cdot x-3)=0$.

102. $(x+1)(x-3)-2(x+\sqrt{7})=0$.

103. $3x^2-2x(x-\pi)+(x+2)(3x-1)=0$.

104. $(\sqrt{2}-x)x-(\sqrt{3}x+4)(x+2)=0$. 105. $(x+2)^2=2(x+2)+3$.

106. $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$. 107. $x^6-3x^3+2=0$.

108. $x^4+2x^2-8=0$. 109. $x^9-2x^5+x=0$.

110. $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2)=12$. 111. $(x^2+2x+1)(x^2-5x+7)=0$.

112. $(4x^3-19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$.

113. $(x^2-1)(x^2-5x-6)=0$. 114. $3x^3-3x(x-1)=7x^2$.

115. $x^3-x^2+x-1=0$. 116. $x^3+x-2=0$.

117. $x^3-2(x+1)=x$. 118. $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$.

119. $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20)=12$.

120. $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$.

121. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. 122. $x^4-x(x^2-x+1)=0$.

123. $x^5+x^3=x^4$.

¿Pertenece el conjunto $\{-2;1\}$ al conjunto de todas las soluciones de las siguientes desigualdades (124 . . . 134):

124. $7x-3(2x+3)>2(x-4)$; 125. $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3}$;

126. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$; 127. $\frac{7x}{4}<0,3(x+7)+2\frac{1}{5}$;

128. $x(x-1)-6>5x-x^2$; 129. $x^2-4x+3<0$;

130. $\frac{1}{4}x^2-3(x+5)<0$; 131. $9x^2-6x+1>0$;

132. $x(x-3)-2<3x-(x^2+2)$; 133. $4x^2+6\left(x-\frac{3}{2}\right)>2$;

134. $(x-2)(3x+4)(x^2+1)>0$?

¿Son equivalentes las siguientes dos desigualdades (135 . . . 153)?

135. $x^2+4x+12>0$ y $x-x^2-3>0$;

136. $(2x-5)(2x-1)<0$ y $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$;

137. $(x-1)^2>0$ y $1-x<0$;

138. $4x-3>1$ y $(4x-3)(x+2)>x+2$;

139. $2(5x-4)<4$ y $4(5x-4)^2\leqslant 16$;

140. $x+3>0$ y $x^3>-3x^2$;

141. $x-x^2\leqslant 2$ y $(x-x^2)(x+4x^2+5)\leqslant 2(x+4x^2+5)$;

142. $2x-4>3$ y $2x-4+2(x+3)>3+2(x+3)$;

143. $x^2-5x+6\leqslant 0$ y $1\leqslant 2x+7\leqslant 3$;

144. $x^2-x-6\geqslant 3x-1$ y $3\leqslant 5-2x\leqslant -5$;

145. $x+4<3x-2$ y $x(x+1)^2>3(x+1)^2$;

146. $\frac{x}{2}-3\left[2x-\frac{1-2(x-3)}{2}\right]>x+5\frac{1}{2}$ y $x>3$;

147. $6x^2-29x+30<0$ y $-3x^2+5x+2>0$;

148. $(x^2-4)(x+1)>0$ y $x^2-2x-3>0$;

149. $x^2-x+1>0$ y $4x^2+x+3>0$;

150. $x^3-1<0$ y $x<1$;

151. $x\geqslant -1$ y $x^3+1\leqslant 0$;

152. $x^8-x^5+x^2-x+1\geqslant 0$ y $x^2-3x+10\geqslant 0$;

153. $2x^2-1\leqslant x^4$ y $4x^4-4x^3+5x^2-4x+1\geqslant 0$?

Resuélvanse las siguientes desigualdades (154 . . . 205):

154. $21-7(2x-9)>3x$. 155. $5(3-x)-3(x-4)<16x$;

156. $2(x-1)-3(2x-3)>6-3(x+5)$.

157. $\frac{1}{3}(3-2x)-\frac{1}{6}(4-5x)>\frac{1}{5}(x+4)-16$.

158. $\frac{x}{3}-\frac{(4x-7)(3x-5)}{15}<\frac{2}{5}-\frac{(4x-9)(x-1)}{5}$.

159. $\frac{1}{6}(2x+24)-0,1(x+1)>\frac{2x}{5}-0,3(2-3x)$.

160. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)<\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{2}$.

161. $3x-4-\frac{4(5x-9)}{15}>\frac{4}{5}\left(6-\frac{x-2}{3}\right)$.

162. $(3x-2)(2x-3)-(2x-1)(x-2)+6x>(2x-3)^2$.

163. $\frac{(3x-4)(3x+1)}{3}-\frac{(8x-11)(x+2)}{4}<\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$.

164. $\frac{(3x-2)(x-1)}{24}<1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}-2(3x+1)$.

165. $(2x+3)(x-7)-(23x-11)\leqslant 2(x+8)(x-2)$.

166. $\frac{3}{5}(2x-7)-\frac{2}{3}(x-8)-4\geqslant\frac{4x+1}{15}+\frac{4}{15}(x-11)$.

167. $x^2-x-2<0$. 168. $3x^2-5x-8\leqslant 0$.

169. $15x^2-77x+10>0$. 170. $3x^2+13x-30\geqslant 0$.

171. $16x-15x(x+1)<0$. 172. $21-22x-24x^2\leqslant 0$.

173. $(x-4)^2(x+5)\leqslant 0$.

174. $\frac{(2-x)x}{2}>x+\frac{1+3x}{4}$.

175. $(x-3)\geqslant(x-3)^2$. 176. $8x(x+2)+3(x+1)>-1$.

177. $(2x+2)(x-1)<5x+6$.

178. $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}>x(x-1)+4$.

179. $\sqrt{6}\,x^2-2\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,x+2\leqslant 0$.

180. $(x^2-16x)^2-63\geqslant 2(x^2-16x)$.

181. $x^2+2x+7\geqslant(4+2x+x^2)(3+2x+x^2)$.

182. $(3x^2-4x+1)(4x^4-5x^3+x^2)\leqslant 0$.

183. $x^3+2x^2>6+3x$. 184. $(x+2)(x-1)(x-3)^3\leqslant 0$.

185. $(x+4)(x+2)^3(x-1)(2-x)^2(x^2-3x+5)>0$.

186. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-x-2)\leqslant 0$.

187. $(9-x^2)(x^2-2x-3)(x+8)\geqslant 0$.

188. $(x^3-2x^2-3x+4)(x^2-3x+7)>0$.

189. $(27-37x^2-16x^4)(x^2+x+1)<0$.

190. $(x^2-4x-12)(x^3-7x-6)\geqslant 0$. 191. $(x^2+10x+25)\times$
$\times(25-x^2)>0$.

192. $(2x^2-3x-14)(2x^2+11x+14)<0$.

193. $(3x^3-24)(2x^2+6x-20)\geqslant 0$.

194. $(x^2+4x-45)(3x^2-14x-5)(x+1)\leqslant 0$.

195. $(2x^2+2x)(x^2-2x+1)(3x^3+7x-10)>0$.

196. $(6x^3-x^2+16)(8x^3-14x^2+19x-4)<0$.

197. $x(x^2+3x-4)>7x^3-18x^2+6x+5$.

198. $4x^3+3x^2-5(4x+3)>2x^3-5x(2+5x-x^3)$.

199. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10\geqslant 0$.

200. $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)(1-x^2)\leqslant 0$.

201. $(5x^2-x-4)(x^3-1)(x+10)>0$.

202. $3(x^2+3x+2)\geqslant(x+1)(x+2)(x+3)$.

203. $(x^2-16)(3x-9)\leqslant(x^2-8x+16)(2x+8)$.

204. $(x^2+4x)(x^2+x-6)>(x^3-9x)(x^2+2x-8)$.

205. $(3x^2-7x+2)(x^2-9)<(2x^2-5x-3)(9x^2-6x+1)$.

En los problemas №№ **206 . . . 213** por colección numérica $(a;\ b)$ se entiende una colección numérica correspondiente a la colección de incógnitas $(x;\ y)$ para $x=a$ e $y=b$.

¿Pertenece el conjunto $\{(2;\ 1)\}$ al conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (**206 . . . 209**)?:

206. $\begin{cases} 7x+5y=1, \\ 5x+7y=11; \end{cases}$ 207. $\begin{cases} 95y-49=23x, \\ 76y=102-13x; \end{cases}$

208. $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 209. $\begin{cases} 14x+9y=9, \\ 9x+4y=4? \end{cases}$

¿Es el conjunto $\{(2; 3), (3; 2)\}$ el conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (210 . . . 213):

210. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ **211.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2+24=10xy; \end{cases}$

212. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$ **213.** $\begin{cases} x^2+4y^2+80=15x+30y, \\ xy=6? \end{cases}$

En los problemas №N° **214 . . . 221** por selección numérica (a, b, c) se entiende una colección numérica que corresponde a la colección de incógnitas (x, y, z) para $x=a$, $y=b$, $z=c$.

¿Pertenece el conjunto $\{(3; 2; 1)\}$ al conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (214 . . . 217)?

214. $\begin{cases} 2x+y+z=8, \\ 5x-3y+2z=3, \\ 7x+y+3z=20; \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} 5x-3z=4(1+y), \\ 2(z+2x)=8+3y, \\ 2y+3x=14-z; \end{cases}$

216. $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=6, \\ 2yx-zx+2xy=13, \\ x-y+z=2; \end{cases}$ **217.** $\begin{cases} (x-1)(y+5)=14, \\ (y+5)(z+8)=63, \\ (z+8)(x-1)=18? \end{cases}$

¿Es el conjunto $\{(3; 4; 1), (-3; -4; -1)\}$ el conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (218 . . . 221)?

218. $\begin{cases} x^2yz=36, \\ xy^2z=48, \\ xyz^2=12; \end{cases}$ **219.** $\begin{cases} x^2+xy+xz=25, \\ xy+y^2+yz=32, \\ xz+yz+z^2=8; \end{cases}$

220. $\begin{cases} xy^2z^2=36, \\ x^2yz^2=144, \\ x^2y^2z=48; \end{cases}$ **221.** $\begin{cases} xy+2x+y=24, \\ yz+3y+2z=15, \\ zx+x+3z=9? \end{cases}$

¿Son equivalentes los siguientes dos sistemas de ecuaciones (222 . . . 229)?

222. $\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ y $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{2y-x}{8}, \\ \dfrac{4x-2}{3}-\dfrac{4y-5x}{2}=\dfrac{x+y}{5}; \end{cases}$

223. $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=12 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=11, \\ x^2+xy+y^2=91; \end{cases}$

224. $\begin{cases} x+5y=26, \\ x^2-25y^2=156 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=1, \\ x^3+8y^3=127; \end{cases}$

225. $\begin{cases} 7x-4y=23, \\ 49x^2-16y^2=1081 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=5, \\ 4(x^2+y^2)=17xy; \end{cases}$

226. $\begin{cases} y-x=2, \\ 35x^2+35y^2=74xy \end{cases}$ y $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=741; \end{cases}$

227. $\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=10, \\ z+x=20 \end{cases}$ y $\begin{cases} 4x-5y+6z=3, \\ 8x-7y-3z=9, \\ 7x-8y+9z=6; \end{cases}$

228. $\begin{cases} yz+zx=16, \\ zx+yx=25, \\ xy+zy=-39 \end{cases}$ y $\begin{cases} x^2+xy+xz=48, \\ xy+y^2+yz=12, \\ xz+yz+z^2=84; \end{cases}$

229. $\begin{cases} y+x-z=14, \\ y^2+z^2-x^2=46, \\ yz=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=65, \\ x^2-(y+z)^2=13, \\ x+y-z=5? \end{cases}$

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones (230 . . . 273):

230. $\begin{cases} 4x+3y=21, \\ 4x-3y=3. \end{cases}$

231. $\begin{cases} 13+2y=9x, \\ 7x=3y. \end{cases}$

232. $\begin{cases} 9x+3y-2=0, \\ 10x+6y-4=0. \end{cases}$

233. $\begin{cases} 7x=8-7y, \\ 16y+16x-8=0. \end{cases}$

234. $\begin{cases} 5x-3=-2y, \\ 6y+15x=9. \end{cases}$

235. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2xy=9\,(x-y). \end{cases}$

236. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2-10xy+24=0. \end{cases}$

237. $\begin{cases} x+3y=10, \\ x^3+27y^3=280. \end{cases}$

238. $\begin{cases} x+y=11, \\ x^3+y^3=341. \end{cases}$

239. $\begin{cases} x-y=2, \\ x^4=272-y^4. \end{cases}$

240. $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=1023. \end{cases}$

241. $\begin{cases} x-y=2, \\ (x^2+y^2)\,(x^3-y^3)=260. \end{cases}$

242. $\begin{cases} x+3xy=35, \\ y=22-2xy. \end{cases}$

243. $\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

244. $\begin{cases} xy=35, \\ 2\,(x+y)^2+324=51\,(x+y). \end{cases}$

245. $\begin{cases} xy=72, \\ x^2+y^2=145. \end{cases}$

246. $\begin{cases} x^2+xy=210, \\ y^2=231-xy. \end{cases}$

247. $\begin{cases} (x-y)^2=3-2x-2y, \\ y\,(x-y+1)=x\,(y-x+1). \end{cases}$

248. $\begin{cases} 3x^2+xy=2x+6, \\ 2y=y^2+3xy+3. \end{cases}$

249. $\begin{cases} x^2-3y^2=3y-x-30, \\ x^2+y^2+x+y=18. \end{cases}$

250. $\begin{cases} x^2+2xy+10y^2=145, \\ xy+y^2=24. \end{cases}$

251. $\begin{cases} x^2+4y^2=5xy, \\ 2x^2=y^2+31. \end{cases}$

252. $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x^3-y^3=8\,(x-y). \end{cases}$

253. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^3-y^3=37. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39, \\ x^3+y^3=351. \end{cases}$

255. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ (x+y)\,(y^3+x^3)=19. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x^2y+xy^2=120, \\ x^3+y^3=152. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=5, \\ x^2-y^2-xy=1. \end{cases}$

258. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

259. $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 5x-4y+z=3, \\ 3x+y-2z=31, \\ 8x-3y-z=1. \end{cases}$

261. $\begin{cases} 2x-y=z+12, \\ 3z+3y=6x-36, \\ 2\,(y+z)=4\,(x-6). \end{cases}$

262. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ y+z-x=1, \\ x+z-y=1. \end{cases}$

263. $\begin{cases} 4x-2y=7x, \\ y+z=x, \\ y^2-4=8x-3z^2. \end{cases}$

264. $\begin{cases} x+y+z=19, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$

265. $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x^2+z^2=y^2+6, \\ 2\,(xy+yz)=13+zx. \end{cases}$

266. $\begin{cases} xy+2x+y=7, \\ yz+3y+2z=12, \\ zx+z+3x=15. \end{cases}$

267. $\begin{cases} xy+yz=10, \\ yz+zx=12, \\ zx+yz=10. \end{cases}$

268. $\begin{cases} (x+y)\,(x+z)=63, \\ (y+z)\,(y+x)=42, \\ (z+x)\,(z+y)=54. \end{cases}$

269. $\begin{cases} x\,(x+y+z)=42, \\ y\,(x+y+z)=70, \\ z\,(x+y+z)=84. \end{cases}$

270. $\begin{cases} y+z=xyz, \\ z+x=xyz, \\ x+y=xyz. \end{cases}$ 271. $\begin{cases} x^2yz=6, \\ xy^2z=18, \\ xyz^2=12. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x^2yz^2=144, \\ x^2y^2z=48, \\ xy^2z^3=36. \end{cases}$ 273. $\begin{cases} x^3y^2z=24, \\ xy^3z^2=18, \\ x^2yz^3=108. \end{cases}$

¿Qué figura en el plano de coordenadas se define por las siguientes ecuaciones (274 . . . 281)?

274. $y=1$; **275.** $x-2y=0$; **276.** $3x-2y=1$; **277.** $xy=0$; **278.** $(1-x)(x-y)=0$; **279.** $x^2+y^2=5$; **280.** $x^2+y^3=0$; **281.** $x^2-y^2=0$?

¿Tienen un punto común las siguientes dos rectas (282 . . . 284)?

282. $x+2y=4$ y $2x+3y=7$;

283. $4x-y=3$ y $8x=2y+6$;

284. $2x-y-3=0$ y $2y+9=4x$?

¿Tienen un punto común la circunferencia y la recta siguientes (285 . . . 289):

285. $x^2+y^2=16$ y $2x+5=0$;

286. $x^2+y^2=25$ e $y=x$;

287. $x^2+y^2=49$ e $y=2x-3$;

288. $x^2+y^2=4$ e $y=7-x$;

289. $x^2+y^2=18$ e $y=x+3\sqrt{2}$?

CAPÍTULO

IV

POTENCIAS Y LOGARITMOS

§ 1. Potencia con exponente entero

En el primer capítulo se ha definido la operación de elevación a potencia con exponente natural de cualquier número real. En el párrafo presente se repite esta definición y, además, se aducen las definiciones de elevación de un número a potencia nula y a potencia con exponente entero negativo.

Sea a un número real cualquiera y n, cualquier número natural. Entonces, se denomina *potencia del número a con exponente natural n* (*o bien n-ésima potencia del número a*) un número que se escribe en la forma a^n y que se determina según la regla

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ veces}}, & \text{si } n \geqslant 2; \\ a, & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Sea a un número cualquiera real distinto de cero. Entonces, se denomina *potencia nula de este número* la unidad, es decir, por definición, $a^0 = 1$ para cualquier número real a distinto de cero.

La potencia nula del número cero no se define y el símbolo 0^0 *se considera privado de sentido.*

Sea a un número real cualquiera distinto de cero y n, cualquier número natural, entonces se llama *potencia del número a con exponente entero negativo* $(-n)$ el número $\frac{1}{a^n}$, es decir, por definición, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para cualquier número real a, distinto de cero, y para todo número entero negativo $(-n)$.

La potencia entera negativa del número cero no se define y el símbolo 0^{-n} *se considera privado de sentido.*

Así pues, la potencia natural (n-ésima) se determina para cualquier número real, mientras que las potencias nula y entera negativa se definen sólo para cualquier número real, distinto de cero.

Si a es un número real cualquiera distinto de cero, entonces se puede enunciar la definición de potencia con exponente entero, la cual representa la reunión de las definiciones antecedentes.

Sea a un número real cualquiera distinto de cero y α, cualquier número entero; entonces, *por número* a^α se entiende aquel que se determina según la siguiente regla:

$$a^\alpha = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 1; \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ veces}}, & \text{si } \alpha = m, \ m \text{ es un número natural}, \ m \geqslant 2; \\ 1, & \text{si } \alpha = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}, & \text{si } \alpha = -n, \ (-n) \text{ es un número negativo entero;} \end{cases}$$

en este caso el número a^α se denomina *potencia con exponente entero*, el número a es la *base de la potencia*, el número α, el *exponente de la potencia*.

En el primer capítulo se han aducido las propiedades principales que posee la operación de elevación a potencia con exponente natural. Para la operación de elevación a potencia con exponente entero estas propiedades también tienen lugar.

A saber, sean a y b cualesquiera números reales distintos de cero, y sean α y β cualesquiera números enteros, entonces:

a) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

c) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ d) $a^\alpha : a^\beta = \dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Demostremos que estas propiedades son lícitas. La validez de la propiedad a) para α natural ($\alpha = n$, $n \in N$) se deduce de las leyes principales de adición y multiplicación de números reales:

$$(ab)^\alpha = (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \ldots (ab)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ veces}} \underbrace{b \ldots b}_{n \text{ veces}} = a^n b^n = a^\alpha b^\alpha.$$

Sea $\alpha = 0$, entonces $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^\alpha b^\alpha$, es decir, $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.

Supongamos que $\alpha = -m$, y m es un número natural. Por definición de potencia con exponente negativo, $(ab)^{\alpha} = (ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} =$

según la propiedad de una potencia con exponente natural $= \frac{1}{a^m b^m} =$

según la propiedad de las fracciones $= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} =$

por definición de potencia con exponente negativo $= a^{-m} b^{-m} = a^{\alpha} b^{\alpha}$.

Por consiguiente, la propiedad a) es válida.

La propiedad b) se demuestra del modo análogo.

Con el fin de demostrar la propiedad c) examinemos cada uno de los seis casos posibles: 1) $\alpha = n$, $\beta = m$; 2) $\alpha = n$, $\beta = -m$; 3) $\alpha = -n$, $\beta = m$; 4) $\alpha = -n$, $\beta = -m$ (donde n y m son números naturales cualesquiera); 5) α es un número entero cualquiera, $\beta = 0$; 6) $\alpha = 0$, β es un número entero cualquiera.

1. Cuando $\alpha = n$, $\beta = m$, la validez de la propiedad c) se desprende de las leyes principales de adición y multiplicación de los números reales:

$$a^{\alpha} a^{\beta} = a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\ \ldots\ a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a\ \ldots\ a)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{a\ \ldots\ a}_{(n+m) \text{ veces}} = a^{n+m} = a^{\alpha+\beta}.$$

2. Sea $\alpha = n$, $\beta = -m$, donde n y m son números naturales; entonces, por definición de potencia con exponente entero negativo, tenemos

$$a^{\alpha} a^{\beta} = a^n \cdot \frac{1}{a^m}.$$

Aplicando la regla de multiplicación de fracciones, tendremos

$$a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

Supongamos que $n > m$, entonces, aplicando la propiedad de la potencia con exponente natural, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Sea $n = m$, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 = a^0 = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Sea $n < m$, entonces, al aplicar la propiedad de la potencia con exponente natural y la definición de potencia con exponente negativo entero, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m}=\frac{1}{a^m\cdot\frac{1}{a^n}}=\frac{1}{a^m a^{-n}}=\frac{1}{a^{m-n}}=a^{-(m-n)}=a^{-m+n}=a^{n+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

3. Supongamos que $\alpha=-n$, $\beta=m$, donde n y m son números naturales. Este caso es análogo al caso en que $\alpha=n$, $\beta=-m$.

4. Sea $\alpha=-n$, $\beta=-m$, donde n y m son números naturales.

Entonces	$a^\alpha a^\beta=a^{-n}a^{-m}=$
según la definición de potencia con exponente entero negativo	$=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^m}=$
según la regla de multiplicación de fracciones	$=\frac{1}{a^n a^m}=$
según la propiedad de una potencia con exponente natural	$=\frac{1}{a^{n+m}}=$
por definición de potencia con exponente entero negativo	$=a^{-(n+m)}=a^{-n-m}=$ $=a^{(-n)+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$

5. Sea α un número entero cualquiera y sea $\beta=0$, entonces, aplicando la definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$a^\alpha a^\beta=a^\alpha\cdot 1=a^\alpha=a^{\alpha+0}=a^{\alpha+\beta}.$$

6. Supongamos que $\alpha=0$, y β es un número entero cualquiera, entonces, aplicando la definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$a^\alpha a^\beta=1\cdot a^\beta=a^\beta=a^{0+\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

Por consiguiente, la propiedad c) es lícita.

Para demostrar la propiedad d) con α y β naturales ($\alpha=n$, $\beta=m$, $n\in N$, $m\in N$), examinemos tres casos:

1. Si $n>m$, entonces $n=m+l$, donde $l\in N$. Aprovechemos las propiedades fundamentales de la multiplicación y la división de números reales:

$$a^\alpha:a^\beta=a^n:a^m=\frac{a^n}{a^m}=\frac{\overbrace{(a\ \dots\ a)}^{m\text{ veces}}\ \overbrace{(a\ \dots\ a)}^{l\text{ veces}}}{\underbrace{a\ \dots\ a}_{m\text{ veces}}}=a^l=a^{n-m}=a^{\alpha-\beta}.$$

2. Si $n=m$, entonces

$$a^n:a^m=\frac{a^n}{a^m}=\frac{\overbrace{a\ \dots\ a}^{n\text{ veces}}}{\underbrace{a\ \dots\ a}_{m\text{ veces}}}=1.$$

Por definición, $a^0 = 1$. Por lo tanto,

$$a^\alpha : a^\beta = a^n : a^m = a^0 = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

3. Si $m > n$, entonces $m = n + k$, donde $k \in N$. Aprovechemos las propiedades fundamentales de la multiplicación y la división de números reales y, además, la definición de elevación a una potencia negativa:

$$a^\alpha : a^\beta = a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a \ldots a)}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a \ldots a)}_{k \text{ veces}}} = \frac{1}{\underbrace{a \ldots a}_{k \text{ veces}}} = a^{-k} =$$
$$= a^{-(m-n)} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

Cabe señalar que en este caso $(n - m)$ no es un número natural.

En los demás cinco casos para los valores de α y β la demostración de la propiedad d) es análoga a la de la propiedad c).

Con el objeto de demostrar la propiedad e), examinemos al igual que en los casos c) y d), los seis casos posibles:

1. Supongamos que $\alpha = n$, $\beta = m$, donde n y m son números naturales. En este caso hagamos uso de las leyes fundamentales de adición y multiplicación de números reales:

$$(\alpha^\alpha)^\beta = (a^n)^m = \underbrace{(a^n)(a^n) \ldots (a^n)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{\underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}} \ldots \underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} =$$
$$= \underbrace{aa \ldots a}_{nm \text{ veces}} = a^{nm} = a^{\alpha\beta}.$$

2. Supongamos que $\alpha = n$, $\beta = -m$, donde n y m son números nalurales. Entonces $(a^\alpha)^\beta = (a^n)^{-m} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= \frac{1}{(a^n)^m} =$

según la propiedad de la potencia con exponente natural $= \frac{1}{a^{nm}} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= a^{-nm} =$
$= a^{n(-m)} = a^{\alpha\beta}.$

3. Supongamos que $\alpha = -n$, $\beta = m$, donde n y m son números naturales. La validez de esta propiedad se demuestra igual que en el caso de $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Supongamos que $\alpha = -n$, $\beta = -m$, donde n y m son números naturales.

Entonces $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{-n})^{-m} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= \frac{1}{(a^{-n})^m} =$

de acuerdo con el caso 3 que acabamos de examinar $= \frac{1}{a^{-nm}} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} =$

conforme a la propiedad de las fracciones $= 1 : \frac{1}{a^{nm}} =$

de acuerdo con la regla de división de las fracciones $= a^{nm} = a^{(-n)(-m)} = a^{\alpha\beta}$.

5. Supongamos que α es un número entero cualquiera y $\beta = 0$, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\alpha})^0 = 1 = a^0 = a^{\alpha 0} = a^{\alpha\beta}$.

6. Supongamos que $\alpha = 0$ y β es un número entero cualquiera, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^0)^{\beta} = (1)^{\beta} = 1 = a^0 = a^{0\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Por consiguiente, la propiedad e) es lícita.

Ejemplo. Hagamos uso de la propiedad de la potencia con exponente entero para calcular la siguiente expresión numérica:

$$A = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot 2^4}{\left(\frac{8}{3}\right)^0 + 4^{-1} - 5 \cdot 10^{-1}}.$$

Puesto que $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$, $\left(\frac{8}{3}\right)^0 = 1$, $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$, $5 \cdot 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, tenemos

$$A = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{64} \cdot 16}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1.$$

§ 2. Potencia con exponente racional

En el capítulo I se ha dado la siguiente definición de raíz aritmética de un número positivo.

Sea n un número natural y a, un número positivo. Entonces el número positivo b tal, que $b^n = a$ lleva el nombre de *raíz aritmética de n-ésimo grado del número a* y se designa $b = \sqrt[n]{a}$.

Hemos asumido sin demostración la afirmación de que para todo número positivo a existe una, y sólo una, raíz aritmética de n-ésimo grado.

Por definición de $\sqrt[n]{a}$, resulta válida la afirmación:

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ es un número positivo,} \\ n \text{ es un número natural,} \\ \sqrt[n]{a} \text{ es un número positivo,} \\ (\sqrt[n]{a})^n = a. \end{cases}$$

Demos a conocer ahora la definición de elevación de un número entero a una potencia con exponente racional aprovechando con este fin la definición de elevación a potencia entera y la definición de raíz aritmética de un número positivo.

Sea a un número positivo y $r = \frac{p}{q}$, un número racional, con la particularidad de que q es un número natural ($q > 0$). El número positivo b tal, que $b = \sqrt[q]{a^p}$ lleva el nombre de *r-ésima potencia del número a* y se denota $b = a^r$, es decir, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Observemos que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Supongamos que a y b son cualesquiera números positivos y r_1, r_2, cualesquauiera números racionales. Resultan válidas las siguientes propiedades, llamadas propiedades de las potencias con exponentes racionales:

a) $(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}$,

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$,

c) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$,

d) $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$,

e) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

Demostremos la validez de estas propiedades

a) Sea $r_1 = \frac{p}{q}$ donde q es un número natural.

Examinemos	$\left[(ab)^{\frac{p}{q}}\right]^q =$
por definición de potencia racional	$= [\sqrt[q]{(ab)^p}]^q =$
por definición de raíz aritmética	$= (ab)^p =$
por la propiedad de la potencia con exponente entero	$= a^p b^p =$

por definición de raíz aritmética $= (\sqrt[q]{a^p})^q (\sqrt[q]{b^p})^q =$

por definición de potencia racional $= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q =$
Según la propiedad de la potencia con

exponente natural $= \left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q$.

Así pues, $[(ab)^{r_1}]^q = [a^{r_1}b^{r_1}]^q$. Conforme al teorema 1 del § 2, cap. II, esta igualdad es equivalente a la igualdad $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r_1}$, y la propiedad a) queda demostrada.

La propiedad b) se demuestra análogamente.

c) Supongamos que $r_1 = \frac{p}{q}$, $r_2 = \frac{m}{n}$. Entonces, $a^{r_1}a^{r_2} = a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}$.

Examinemos $\left[a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}\right]^{qn} =$
según la propiedad de la potencia con exponente natural $= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn} =$
según la propiedad de la potencia con exponente natural $= \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n \left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^q =$
por definición de potencia racional $= [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n [(\sqrt[n]{a^m})^n]^q =$
por definición de raíz aritmética $= (a^p)^n (a^m)^q =$
según la propiedad de la potencia con exponente entero $= a^{pn}a^{mq} =$
según la propiedad de la potencia con exponente entero $= a^{pn+mq} =$
por definición de raíz aritmética $= (\sqrt[nq]{a^{pn+mq}})^{nq} =$
por definición de potencia racional $= (a^{\frac{pn+mq}{nq}})^{nq}$.

Así pues, tomando en consideración que $\frac{(pn+mq)}{nq} = r_1 + r_2$, tenemos $(a^{r_1}a^{r_2})^{qn} = (a^{r_1+r_2})^{qn}$. De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, esta igualdad es equivalente a la igualdad: $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$, y la propiedad c) queda demostrada.

La propiedad d) se demuestra análogamente.

e) Supongamos que $r_1 = \frac{p}{q}$, $r_2 = \frac{m}{n}$. Entonces $(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Examinemos $\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{nq} =$
según la propiedad de la potencia con exponente natural $= \left(\{[(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{m}{n}}]^n\}^q\right) =$
por definición de potencia con exponente racional $= \left\{\left[\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m}\right]^n\right\}^q =$

por definición de raíz aritmética $= \left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m\right\}^q =$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $\quad = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} =$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $\quad = \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{m} =$

por definición de potencia con exponente racional $\quad = [(\sqrt[q]{a^p})^q]^m =$

por definición de raíz aritmética $\quad = (a^p)^m =$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $\quad = a^{pm} =$

por definición de raíz aritmética $\quad = (\sqrt[qn]{a^{pm}})^{qn} =$

por definición de potencia con exponente racional $\quad = \left(a^{\frac{pm}{qn}}\right)^{qn}.$

Así pues, $[(a^{r_1})^{r_2}]^{nq} = (a^{r_1 r_2})^{nq}$. De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, la validez de esta igualdad predetermina la validez de la propiedad e).

Demostremos una propiedad más de la potencia con exponente racional.

f) Supongamos que a es un número positivo, $r_1 = \frac{p}{q}$, un número racional, mientras que q y n son números naturales.

En este caso $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}$.

Examinemos $\quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} =$

según la propiedad de una potencia con exponente natural $\quad = [(a^{\frac{p}{q}})^q]^n =$

por definición de una potencia con exponente racional $\quad = [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n =$

por definición de raíz aritmética $\quad = (a^p)^n =$

según la propiedad de una potencia con exponente entero $\quad = a^{pn} =$

por definición de raíz aritmética $\quad = (\sqrt[qn]{a^{pn}})^{qn} =$

por definición de potencia con exponente racional $\quad = \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}.$

Así pues, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} = \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$, de donde precisamente proviene la validez de la propiedad f).

Para las raíces aritméticas las propiedades demostradas tienen por expresión

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

c) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

d) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{k-n}}$;

e) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

f) $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

Ejemplo. Simplifíquese la expresión numérica

$$A=(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\,(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2}).$$

Apliquemos las propiedades estudiadas:

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2};\quad \sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3^2}=6\sqrt{2};$$
$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2 5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

Por consiguiente,

$$A=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\,(6\sqrt{2}+2\sqrt{5})-4\sqrt{2})=$$
$$=3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})=6\,(\sqrt{5}-\sqrt{2})\,(\sqrt{5}+\sqrt{2})=$$
$$=6\,(5-2)=18.$$

Estudiemos ahora las propiedades principales del tipo de desigualdades para la potencia con exponente racional.

g) Supongamos que $a>1$ y $r=\frac{p}{q}$ es número racional positivo ($p>0$, $q>0$). Entonces, $a^r>1$.

Examinemos	$(a^{\frac{p}{q}})^q=$
por definición de potencia con exponente racional	$=(\sqrt[q]{a^p})^q=$
por definición de raíz aritmética	$=a^p$.

De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, las condiciones $a>1$ y $a^p>1^p$ son equivalentes, quiere decir, de la condición $a>1$ se desprende que $a^p>1$, mas, en este caso, $(a^{\frac{p}{q}})^q>1^q$, es decir, $(a^r)^q>1^q$, de lo cual, según la misma propiedad, resulta que $a^r>1$. La propiedad g) queda demostrada.

h) Sea $0<a<1$, y $r=\frac{p}{q}$ *un número racional positivo* ($p>0$, $q>0$). Entonces $a^r<1$.

La demostración de esta propiedad es análoga a la del caso g).

i) Supongamos que $a>1$ y r_1, r_2 son números racionales tales, que $r_1>r_2$. Entonces $a^{r_1}>a^{r_2}$.

Demostración. Por cuanto (r_1-r_2) es un número racional positivo, entonces, conforme a la propiedad g), $a^{r_1-r_2}>1$. Al multiplicar esta desigualdad por el número positivo a^{r_2}, obtenemos (en virtud de la propiedad 21 de las desigualdades (véase el § 2 cap. II) $a^{r_2}(a^{r_1-r_2}) > a^{r_2}$. Aplicando al primer miembro la propiedad c) de una potencia con exponente racional, llegamos a que $a^{r_1} > a^{r_2}$, es decir, la propiedad i) queda demostrada.

j) Supongamos que $0 < a < 1$, y sean r_1 y r_2 números racionales tales, que $r_1 > r_2$. Entonces $a^{r_1} < a^{r_2}$.

La demostración de esta propiedad es análoga a la de la propiedad i).

Ejemplo. Demuéstrese que para cualesquiera números positivos a y b se verifica la desigualdad

$$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>(a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

Demostración. Denotemos $a+b$ con c y examinemos las fracciones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$. Por cuanto $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$, entonces $0<\frac{a}{c}<1$, $0<\frac{b}{c}<1$. Valiéndonos de la propiedad j), obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}<1$, o bien $\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}}<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}}<1$. Por consiguiente, $\left(\frac{a}{c}\right)<\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ y $\left(\frac{b}{c}\right)<\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$. De acuerdo con la propiedad de las desigualdades numéricas se verifica tambien la desigualdad

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

de donde, teniendo en cuenta que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$, llegamos a que se verifica la desigualdad

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>1.$$

Teniendo en cuenta que c es un número positivo y multiplicando esta desigualdad por $c^{\frac{2}{3}}$, concluimos que se verifica la desigualdad $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$, lo que se trataba de demostrar.

§ 3. Potencia con expontente irracional

Tomemos los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por defecto:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$

y los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por exceso:

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ \ldots$$

De acuerdo con la propiedad i) de la potencia con exponente racional, tenemos

$$3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < \ldots \tag{1}$$

y

$$3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > \ldots \tag{2}$$

En las desigualdades (1) y (2) hay una infinidad de términos y cualquier término de las desigualdades (1) es inferior a cualquiera de los términos de las desigualdades (2). Resulta natural entender por número $3^{\sqrt{2}}$ un número que es superior a todo término de las desigualdades (1) e inferior a todo término de las desigualdades (2). Quiere decir, por número $3^{\sqrt{2}}$ se entiende un número que es mayor que 3 a cualquier potencia racional que aproxime $\sqrt{2}$ por defecto, y que es menor que 3 a cualquier potencia racional que aproxime $\sqrt{2}$ por exceso. Admitimos (sin demostración) que tal número existe y es, además, único.

De igual modo se determina también a^α, donde $a > 1$, y α es un número irracional positivo. A saber, se hallan los números racionales r_i que aproximan el número α por defecto: $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ $\ldots < \alpha$, y luego, los números racionales l_k que aproximan el número α por exceso: $l_1 > l_2 > l_3 > \ldots > \alpha$, después de lo cual se forman las desigualdades $a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \ldots$ y $a^{l_1} > a^{l_2} >$ $> a^{l_3} \ldots$ Entonces, por a^α se entiende un número que es superior a cualquier número a^{r_i} e inferior a cualquier número a^{l_k}. Esta definición puede enunciarse también del modo siguiente.

Sean dados un número $a > 1$ y un *número irracional positivo* α^α. Designemos con r_i los números racionales que aproximan α por defecto, y con l_k, aquellos que aproximan α por exceso. *Por número a* se entiende un número γ tal, que para cualesquiera r_i y l_k se verifica la desigualdad $a^{r_i} < \gamma < a^{l_k}$. Se asume aquí sin demostración que *tal número existe y es, además, único.*

Sean dados un número a tal, que $0 < a < 1$, y un *número irracional positivo* α. Denotemos con r_i los números racionales que aproximan α por defecto, y con l_k, por exceso. *Por número a^α* se entiende un número γ tal, que para cualesquiera r_i y l_k se verifica la desigualdad $a^{r_i} > \gamma > a^{l_k}$. Se asume aquí sin demostración que *tal número existe y es, además, único.*

Sean dados un *número positivo* a tal, que $a \neq 1$ y un *número irracional negativo* α. *Por número a^α* se entiende un número igual a $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$, es decir, si $a \neq 1$ y α es un número irracional negativo, entonces $a^\alpha = \frac{1}{a^{|\alpha|}}$. Por cuanto el número $a^{|\alpha|}$ es distinto de cero y en el conjunto de números reales la operación de división es siempre realizable, entonces *existe un número* (*y este número es único*) igual al cociente $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$. Dicho número se denomina número a^α.

Observación. 1. Si $a = 1$, tenemos $a^{\alpha} = 1$ para cualquier número real α. Por eso, en las definiciones citadas más arriba el caso de $a = 1$ no se examina.

2. En virtud de las definiciones citadas anteriormente y de la definición de potencia con exponente racional, para $a > 0$ y para cualquier número real α el número a^{α} es siempre positivo.

Para las potencias con exponente irracional resultan lícitas las siguientes propiedades. Supongamos que $a > 0$, $b > 0$, α es un número irracional, β, un número racional o irracional, entonces:

a) $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$;

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

c) $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;

d) $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

La demostración de estas propiedades se realiza con ayuda de la teoría de los límites y por esta razón no se da en la obra presente.

§ 4. Potencia de un número positivo

Todo lo expuesto en los §§ 1 . . . 3 permite dar la definición de potencia real de un número positivo. Observemos que el número a^{α} existe y, además, es único para cualquier número real α.

Definición. *Sean dados un número positivo a y un número real α. Por número a^{α} se entiende un número positivo que se determina según la siguiente regla:*

I. *Si $\alpha > 0$ y:*

1. *$\alpha = m$, m es un número natural, entonces*

$$a^{\alpha} = \begin{cases} a, \text{ para } m = 1, \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ veces}}, \text{ para } m \geqslant 2. \end{cases}$$

2. *$\alpha = \frac{1}{q}$, q es un número natural, entonces $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a}$ (raíz aritmética de q-ésimo grado de un número positivo);*

3. *$\alpha = \frac{p}{q}$, donde p, q son números naturales, entonces $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a^p}$;*

4. *α es un número irracional, entonces:*

a) *si $a > 1$, el número p^{α} será mayor que a^{r_i} y menor que a^{l_k}, donde r_i es cualquier aproximación racional del número α por defecto y l_k, cualquier aproximación racional del número α por exceso;*

b) *si $0 < a < 1$, entonces a^{α} es un número menor que a^{r_i} y mayor que a^{l_k} (r_i y l_k son los mismos que más arriba);*

c) *si* $a = 1$, *entonces* $a^\alpha = 1$.

II. *Si* $\alpha = 0$, *entonces* $a^\alpha = 1$.

III. *Si* $\alpha < 0$, *entonces* $a^\alpha = \frac{1}{a^{|\alpha|}}$.

El número a^α *recibe el nombre de potencia, el número* a *es la base de la potencia y* α, *el exponente de la potencia.*

De los §§ 1 . . . 3 se deduce que la potencia de un número positivo posee las siguientes propiedades principales: si a y b son números positivos, y α y β, cualesquiera números reales, entonces:

a) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

c) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

d) $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Estudiemos ahora las propiedades principales de la potencia de un número positivo del tipo de desigualdad.

Teorema 1. *Si* $a > 1$ *y* $\alpha > 0$, *entonces* $a^\alpha > 1$.

Demostración. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ es un número racional (p y q son números naturales), entonces la propiedad de $a^\alpha > 1$ ya se ha demostrado en el § 2. Si α es un número irracional, elegimos cualquier número racional positivo r que aproxima α por defecto, en este caso $a^\alpha > a^r$, según la definición de potencia irracional. Al mismo tiempo, de acuerdo con la propiedad demostrada en el § 2, $a^r > 1$. Conforme a la propiedad de transitividad de las desigualdades, la validez de dos igualdades $a^\alpha > a^r$ y $a^r > 1$ predetermina la validez de la desigualdad $a^\alpha > 1$. El teorema 1 queda demostrado.

Teorema 2. *Si* $a > 1$ *y* $\alpha < 0$, *entonces* $a^\alpha < 1$.

Demostración. El número $\beta = -\alpha$ es positivo, por lo cual, al aplicar el teorema 1, tenemos $a^\beta > 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por el número positivo a^α. Según la propiedad de las desigualdades tenemos $a^\beta a^\alpha > a^\alpha$; según la propiedad c) y la definición de potencias concluimos que $a^\beta a^\alpha = a^{\alpha+\beta} = a^0 = 1$, por consiguiente $a^\alpha < 1$ y el teorema 2 queda demostrado.

Teorema 3. *Si* $a > 1$ *y* $a^\alpha > 1$, *entonces* $\alpha > 0$.

Demostración. Supongamos que $a^\alpha > 1$ y $a > 1$, pero $\alpha \leqslant 0$, es decir, o bien $\alpha = 0$ o bien $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, entonces $a^\alpha = 1$ por definición. Si $\alpha < 0$ y $a > 1$, entonces, aplicando el teorema 2, tenemos $a^\alpha < 1$. Así pues, si $\alpha \leqslant 0$, entonces $a^\alpha \leqslant 1$, lo que contradice la suposición de que $a^\alpha > 1$. El teorema está demostrado.

Teorema 4. *Si* $a > 1$ *y* $a^\alpha < 1$, *entonces* $\alpha < 0$.

La demostración del teorema es análoga a la del teorema 3.

Reunamos los teoremas 1 . . . 4.

Afirmación 1. *Si* $a > 1$, *entonces las condiciones* $a^\alpha > 1$ *y* $\alpha > 0$ *son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones* $a^\alpha < 1$ *y*

$\alpha < 0$, *es decir, si* $a > 1$, *entonces*

$$a^{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0,$$
$$a^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

Teorema 5. *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha > 0$, *entonces* $a^{\alpha} < 1$.

Demostración. Examinemos el número $b > \frac{1}{a}$. Por cuanto $b > 1$, entonces, aplicando el teorema 1, tendremos $b^{\alpha} = 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta desigualdad por el número positivo a^{α}. Según la propiedad de las desigualdades tenemos: $b^{\alpha}a^{\alpha} > a^{\alpha}$. Según las propiedades de las potencias tenemos $b^{\alpha}a^{\alpha} = (ab)^{\alpha} = (1)^{\alpha} = 1$, por lo cual $a^{\alpha} < 1$.

Teorema 6. *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha < 0$, *entonces* $a^{\alpha} > 1$.

Teorema 7. *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha} > 1$, *entonces* $\alpha < 0$.

Teorema 8. *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha} < 1$, *entonces* $\alpha > 0$.

La demostración de todos estos teoremas os análoga a la del teorema 5.

Reunamos los teoremas 5 . . . 8.

Afirmación 2. *Si* $0 < a < 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha} > 1$ *y* $\alpha < 0$ *son equivalentes, además, son equivalentes las condiciones* $a^{\alpha} < 1$ *y* $\alpha > 0$, *es decir, si* $0 < a < 1$, *entonces*

$$a^{\alpha} > \Leftrightarrow \alpha < 0,$$
$$a^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

De las afirmaciones 1 y 2 se obtiene con facilidad el siguiente **corolario**:

Afirmación 3. *Si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha} = 1$ *y* $\alpha = 0$ *son equivalentes, es decir, si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *se tiene*

$$a^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \quad = 0.$$

Teorema 9. *Si* $a > 1$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_1}$.

Demostración. Examinemos un número $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Por cuanto $\beta > 0$, tenemos que $a^{\beta} > 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta desigualdad por un número positivo a^{α_2}. De acuerdo con la propiedad de las desigualdades, $a^{\beta}a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2}$, y conforme a las propiedades de las potencias tenemos $a^{\beta}a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1}$, por lo cual $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ y el teorema 9 queda demostrado.

Teorema 10. *Si* $a > 1$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Teorema 11. *Si* $a > 1$ *y* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 > \alpha_2$

Teorema 12. *Si* $a > 1$ *y* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 < \alpha_2$.

La demostración de estos teoremas es análoga a la del teorema 9

Reunamos los teoremas 9 . . . 12.

Afirmación 4. *Si* $a > 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$ *son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *es decir, si* $a > 1$, *entonces*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2,$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$

Teorema 13. *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Teorema 14. *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Teorema 15. *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Teorema 16. *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 > \alpha_2$.

La demostración de estos teoremas es análoga a la del teorema 9.

Reunamos los teoremas 13 . . . 16

Afirmación 5. *Si* $0 < a < 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$ *son equivalentes; además, son también equivalentes las condiciones* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *es decir, si* $0 < a < 1$, *se tiene*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2,$$

$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$

De las afirmaciones 4 y 5 se obtiene con facilidad el **corolario** siguiente:

Afirmación 6. *Si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 = \alpha_2$ *son equivalentes, es decir, si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces*

$$a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Las afirmaciones 4 y 5 se enuncian verbalmente del modo siguiente:

Si la base de una potencia es mayor que la unidad, entonces al mayor exponente le corresponde mayor potencia, y viceversa, a la potencia mayor le corresponde el mayor exponente.

Si la base de una potencia es menor que 1 ($0 < a < 1$), al mayor exponente le corresponde menor potencia y, viceversa, a la menor potencia le corresponde el mayor exponente.

Observación. Si $\alpha > 0$, el concepto de operación de elevación a una potencia puede extenderse al conjunto de todos los números no negativos, puesto que, por definición, $0^\alpha = 0$, si $\alpha > 0$.

Veamos cómo se emplean las propiedades de las potencias de un número positivo. Supongamos que se requiere demostrar que $3^{\sqrt{3}} < 7$.

Por definición, $3^{\sqrt{3}} < 3^r$, donde r es la aproximación racional del número irracional $\sqrt{3}$ por exceso. Tomemos $r = \frac{7}{4}$. Por cuanto $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, entonces $3^{\sqrt{3}} < 3^{\frac{7}{4}}$. Demostremos que $3^{\frac{7}{4}} < 7$.

Aplicando dos veces el teorema 5, llegamos a la equivalencia de las siguientes desigualdades:

$$\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7} < 1 \text{ y } \left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right) < 1.$$

Empleando las propiedades de las potencias del tipo desigualdad, obtenemos que la desigualdad $\left(\frac{3^{7/4}}{7}\right)^4 < 1$ es equivalente a la desigualdad $\frac{3^7}{7^4} < 1$, la cual se verifica, puesto que $3^7 = 2187$, $7^4 = 2401$.

Por consiguiente, en virtud de la equivalencia de los pasos, se verifica también la desigualdad $3^{\sqrt{3}} < 7$.

§ 5. Logaritmos

Analicemos los problemas principales que surgen al estudiar las potencias.

1. Sean dados los números reales a y α. *Hállese un número real x tal, que $x = a^\alpha$.* Este es un problema de elevación de un número real a potencia. Es resoluble para cualquier número positivo a y cualquier número real α. Si $a = 0$ y $\alpha > 0$, entonces $x = 0$ (véase el § 4, cap. IV). El problema en el que $a < 0$ aquí no se analiza.

2. Sean dados los números reales b y α. *Hállese un número real x tal, que se verifique $x^\alpha = b$.*

Si b es número positivo cualquiera y α es cualquier número real distinto de cero, el problema se reduce al anterior, pues la respuesta la da el número $x = b^{\frac{1}{\alpha}}$. En efecto, $x^\alpha = \left(b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = b^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha} = b^1 = b$. Si $\alpha = 0$ y $b = 1$, entonces la solución de este problema es un número real x distinto de cero. Si $\alpha = 0$ y $b \neq 1$, este problema no tiene solución. El caso cuando $b < 0$ aquí no se analiza.

3. Sean dados los números reales a y b. *Hállese un número real x tal, que se verifique $a^x = b$.* Estudiaremos este problema sólo para a y b reales y positivos. Si $a = 1$ y $b = 1$, a título de solución de este problema interviene cualquier número real x. Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el problema no tiene solución. Analicemos el caso en que $a \neq 1$.

Teorema 1. *Para todo par de números reales a y b tales, que $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, existe un número real, y sólo uno, x tal, que $a^x = b$.*

La existencia de tal número x no se demuestra aquí. Demostremos la unicidad. Supongamos que existen unos números reales x_1 y x_2 tales, que $a^{x_1} = b$ y $a^{x_2} = b$. Según la propiedad de transitividad de las igualdades tenemos $a^{x_1} = a^{x_2}$. En virtud de la afirmación 6 (véase el § 4), $x_1 = x_2$, lo que se trataba de demostrar.

Definición. *Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, un número real α recibe el nombre de logaritmo del número b de base a y se denota $\alpha = \log_a b$, si $a^\alpha = b$.*

Hemos de notar que la definición de logaritmo se puede dar sólo después de demostrar el teorema 1, puesto que sin tenerlo demostrado no esté claro si existe tal número α que sea $a^\alpha = b$ si es él único. Subrayamos una vez más que el logaritmo se define solamente para un número positivo de base positiva y distinta de la unidad, es decir, para cualquier $a \leqslant 0$, $a = 1$ y para todo $b \leqslant 0$ el concepto de logaritmo está privado de sentido. Por ejemplo, la afirmación de que el número 3 es el logaritmo del número (-8) de base (-2) no tiene sentido.

Así pues, en la definición de logaritmo $\log_a b$ tenemos siempre $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. De definición de logaritmo se deduce *la identidad logarítmica fundamental*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Haciendo uso de la definición de logaritmo, obtenemos $\log_a a = 1$, y $\log_a 1 = 0$.

Teniendo en cuenta la unicidad del logaritmo podemos constatar que si $\mu > 0$ y $\mu \neq 1$, entonces siempre $\log_a \mu \neq 0$.

Procedamos a considerar las propiedades principales del logaritmo.

Supongamos que los números M, N, a, b, α y β son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, mientras que α y β son números reales cualesquiera ($\beta \neq 0$). En este caso:

a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$;

b) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

c) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;

d) $\log_{a^\beta} M^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$;

e) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ (regla que rige el paso de un logaritmo de una base a otro logaritmo de base diferente):

f) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$;

g) si $a > 1$, entonces $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$;

h) si $0 < a < 1$, entonces $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$;

d') $\log_{a^\beta} M^\beta = \log_a M$;

e') $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Demostremos estas propiedades.

a) Examinemos	$a^{\log_a MN} =$
según la identidad logarítmica fundamental	$= MN =$
según la identidad logarítmica fundamental	$= a^{\log_a M} a^{\log_a N} =$
según la propiedad de la potencia de un número positivo	$= a^{\log_a M + \log_a N}$.

Así pues, $a^{\log_a MN} = a^{\log_a M + \log_a N}$. Al aplicar a la última igualdad la afirmación 6 que caracteriza las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

La propiedad b) se demuestra análogamente.

c) Examinemos $a^{\log_a(M^\alpha)} =$

según la identidad logarítmica fundamental $= M^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$

según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\alpha \log_a M}$.

Así pues, $a^{\log_a(M^\alpha)} = a^{\alpha \log_a M}$. Aplicando la afirmación 6 de las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a(M^\alpha) = \alpha \log_a M$.

d) Examinemos $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} =$

según la identidad logarítmica fundamental $= (M)^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$

según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\alpha \log_a M} =$

por cuanto $\beta \neq 0$, se tiene $1 = \beta \cdot \frac{1}{\beta}$, y por eso $= [(a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha \log_a M} =$

según la propiedad de la potencia de un número positivo $= (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$.

Así pues, $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} = (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a M}$. Aplicando a la última ecuación la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_{a^\beta}(M)^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$.

e) Examinemos $a^{\log_a M} =$

según la identidad logarítmica fundamental $= M =$

según la identidad logarítmica fundamental $= b^{\log_b M} =$

según la identidad logarítmica fundamental $= (a^{\log_a b})^{\log_b M} =$

según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\log_a b \log_b M}$.

Así pues, $a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}$. Aplicando a la última igualdad la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a M = \log_a b \log_b M$. Conforme a la propiedad de las igualdades, ambos miembros de esta igualdad podemos multiplicarlos por $\frac{1}{\log_a b}$ (puesto que $b \neq 1$, tenemos $\log_a b \neq 0$) y convencernos de que es válida la igualdad

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

f) De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental tenemos $M = a^{\log_a M}$ y $N = a^{\log_a N}$, por consiguiente,

$$M = N \Leftrightarrow a^{\log_a M} = a^{\log_a N}. \tag{1}$$

Según la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, tenemos

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N. \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce que

$$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N.$$

g) De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental tenemos $M = a^{\log_a M}$ y $N = a^{\log_a N}$, por consiguiente

$$M < N \Leftrightarrow a^{\log_a M} < a^{\log_a N}. \tag{3}$$

Según la afirmación 4 sobre las propiedades de las potencias tenemos

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce que

$$M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N.$$

La propiedad h) se demuestra de modo semejante.

Las propiedades g) y h) se enuncian verbalmente así:

Si la base es mayor que la unidad, al menor de dos números positivos le corresponde el logaritmo menor y al menor logaritmo le corresponde el número menor.

Si la base es menor que la unidad, al menor de dos números positivos, le corresponde el logaritmo mayor y al logaritmo mayor le corresponde el número menor.

Los logaritmos de base 10 se denominan *decimales* y en lugar de la designación $\log_{10} M$ se escribe a menudo $\lg M$.

Los logaritmos de base e (e es un número irracional, cuyo valor aproximado es 2,718281828459045 . . .) se denominan *naturales*, y en lugar de la designación $\log_e N$ se escribe a menudo $\ln N$.

Las propiedades de los logaritmos se utilizan para transformar diferentes expresiones logarítmicas tanto con los números, como con las letras.

Ejemplos. 1. Calcúlese $A = \left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$. De acuerdo con la propiedad e') de los logaritmos, $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5$; conforme a la propiedad e) de los logaritmos, $\log_{9\sqrt{3}} 125 =$

$= \log_{3^{\frac{5}{2}}} 5^3 = \frac{6}{5} \log_3 5$. Valiéndonos de las propiedades de las potencias y de la identidad logarítmica fundamental, obtenemos

$$A = (3^{-\frac{3}{7}})^{\frac{1}{5}\log_3 5 + \frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-\frac{3}{5}} = 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

2. Demuéstrese que si a, b y c son números reales que satisfacen la condición $0 < b \leqslant c < a - 1$, entonces se verifica la desigualdad $\log_a (a + b) < \log_{a-c} a$.

Demostración. Por cuanto $a > 0$ y $c \geqslant b > 0$, resulta evidente la validez de la desigualdad

$$a^2 - (c - b)\, a - bc < a^2,$$

la cual puede ser escrita de la manera siguiente:

$$(a + b)(a - c) < a^2. \tag{5}$$

Como $a > 1$, podemos aprovechar la propiedad g) y obtener la desigualdad

$$\log_a (a + b)(a - c) < 2, \tag{6}$$

que es equivalente a la desigualdad (5).

Haciendo uso de la propiedad a), obtenemos la desigualdad

$$\log_a (a + b) + \log_a (a - c) < 2, \tag{7}$$

que es equivalente a la desigualdad (6).

Cada sumando en el primer miembro de la desigualdad (3) es positivo, puesto que $(a + b) > 1$ y $(a - c) > 1$. Por consiguiente, podemos valernos del teorema 1, § 2, cap. II: elevando al cuadrado los miembros primero y segundo de la desigualdad (7), obtendremos una desigualdad equivalente.

Por eso, la desigualdad (7) es equivalente a la desigualdad

$$[\log_a (a + b) + \log_a (a - c)]^2 < 4,$$

la cual es equivalente a la desigualdad siguiente

$$[\log_a (a + b) - \log_a (a - c)]^2 < 4 - 4 \log_a (a + b) \log_a (a - c). \tag{8}$$

La desigualdad (8) es equivalente a la desigualdad (5), la cual es lícita, por consiguiente, será lícita también la desigualdad (8).

Dado que, para $b > 0$, $c > 0$, se verifica la desigualdad

$$0 < [\log_a (a + b) - \log_a (a - c)]^2, \tag{9}$$

podemos valernos de la propiedad de transitividad de las desigualdades.

En este caso la validez de las desigualdades (8) y (9) predetermina la validez de la desigualdad

$$0 < 4 - 4 \log_a (a + b) \log_a (a - c),$$

que puede ser escrita en la forma

$$\log_a (a + b) \log_a (a - c) < 1$$

Al aplicar la propiedad e') y al tener presente que $a - c > 1$ y $a > 1$, concluimos que la desigualdad de partida es lícita

Ejercicios

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (1 . . . 19):

1. $(3^2)^2 - [(-2)^3]^2 - (-5^2)^2$. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - [(-0,5)^3]^2$.

3. $4^{-2} - 2^{-3} + [(-2)^3]^{-1}$. 4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$.

5. $(-0,75)^3 + (0,3)^{-3} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$. 6. $[(0,6)^2]^0 - [(-4,5)^{-2}]^0 + \left(3\frac{1}{2}\right)^0$.

7. $(4^{-1})^4 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot (8^{-2})^5 \cdot (64^2)^3$.

8. $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0,25)^2 \cdot [(-5)^{-3}]^2 \cdot [(0,1)^2]^{-2}$.

9. $(\sqrt{2})^4 \cdot \left[\left(2\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] : \left[(0,1)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]$.

10. $3^{-4} : \left(2^4 : 3^2 - 2^2 : 1\frac{1}{8}\right) + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-0,295)^0$.

11. $(0,25)^{-1} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^0 + \left[(1,2)^{-4} \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^2\right] : 6^{-3} - [(-33,41)^2]^0$.

13. $(-0,(3))^2 \cdot \left[\left(1\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-2} + ((0,5)^2)^3 : [(43)^0]^2 + (-8)^3 \cdot \left(\frac{2}{3^2}\right)^{-1}$.

14. $\left[27^{10} - 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-8} \cdot 3^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-8} \cdot 3^8\right] : [41 \cdot (3^{-2})^{-12}]$.

15. $[(10^{-6})^{-2} + 5^3 \cdot (25)^4 \cdot 2^3 \cdot (2^3)^2 - 5^{13} \cdot (4^2)^2] : \left[(5^{-5})^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 10^5\right]$.

16. $\left[9\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 18^5 - (2^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-5} - (3^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-6}\right] \times$
$\times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-1} \cdot (3^2)^4$.

17. $\left\{15 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1} \cdot (25)^3 - 2^3 \cdot (5^3)^2 + 4 \cdot \frac{(25)^3}{5}\right\} \cdot (4)^{-1} \cdot \frac{25}{5^6}$.

18. $\dfrac{8 \cdot (4^2)^4 \cdot 3^3 \cdot 27^2 + 90 \cdot 6^3 \cdot 4^7 \cdot (3^2)^2}{24 \cdot (6^2)^4 \cdot (2^4)^2 + 144 \cdot (2^3)^4 \cdot (9^2)^2 \cdot 4^2}$.

19. $\dfrac{180 \cdot \left[2^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} - 72 \cdot (6^2)^3 \cdot [(36)^3 \cdot 4^2]^2}{135 \cdot 216^3 \cdot [4^2 \cdot 9]^2 \cdot 6^3 + 36 \cdot [32 \cdot 4^2 \cdot 3^4]^2}$.

Sáquense del signo de la raíz aquellos factores del número subradical que pueden sacarse (20 . . . 25):

20. $\sqrt{120}$, $\sqrt{147}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{245}$, $\sqrt{363}$. **21.** $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{1080}$, $\sqrt[3]{375}$.

22. $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[4]{405}$, $\sqrt[4]{328}$. **23.** $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{800}$, $\sqrt[5]{12500}$.

24. $\sqrt{18(4-\sqrt{17})^2}$, $\sqrt{54(2-\sqrt{3})^2}$. **25.** $\sqrt[4]{48(2-\sqrt{7})^4}$, $\sqrt[4]{2(\sqrt{11}-3)^4}$.

Introdúzcanse bajo el signo de la raíz todos los factores que están delante del signo de la raíz (26 . . . 30):

26. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $7\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{15}$. **27.** $2\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{4}$, $12\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$, $6\sqrt[3]{1\frac{4}{27}}$.

28. $\frac{3}{2}\sqrt{8}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $1\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}$. **29.** $(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$, $(4-\sqrt{19})\cdot\sqrt{3}$.

30. $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt[4]{5}$, $(11-\sqrt{13})\cdot\sqrt[4]{7}$.

Sáquese del signo de la raíz el denominador de la fracción subradical (31 . . . 33):

31. $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{28}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\frac{21}{2}\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}2}$, $6\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

32. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, $\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{1{,}5}$, $\frac{4}{9}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}}$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$.

33. $\sqrt[4]{\frac{7}{4}}$, $16\sqrt[5]{1\frac{3}{8}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{27}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt[4]{7\frac{1}{9}}$.

Escríbase en forma del producto de dos números el siguiente número (34 . . . 37):

34. $7+\sqrt{7}$, $\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{18}$, $5+\sqrt{5}+\sqrt{15}$.

35. $5-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}$, $3-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{24}$.

36. $3\sqrt{12}-3\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{15}$. **37.** $\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{40}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (38 . . . . . 45):

38. $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

39. $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$.

40. $2(\sqrt{252}-\sqrt{175})-(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28})$.

41. $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$.

42. $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$. **43.** $2\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[4]{0{,}0016}$.

44. $\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt[5]{0{,}00032}$. 45. $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{20}$.

Escríbanse en forma de raíces de un mismo orden los siguientes cuatro números (46 . . . 50):

46. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{5}$ y $\sqrt[4]{7}$. **47.** $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[8]{50}$ y $\sqrt[16]{171}$.

48. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{11}$ y $\sqrt[12]{1671}$. **49.** $\sqrt[3]{2\cdot 3^4}$, $\sqrt[6]{5\cdot 64^2}$, $\sqrt[4]{3\cdot 5^3}$ y $\sqrt{2^3\cdot 7^5}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Escríbanse en forma de potencia con exponente racional los siguientes números (51 . . . 53):

51. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7^2}$, $\sqrt[4]{11^3}$, $\sqrt[5]{13^2}$, $\sqrt[7]{19^3}$.

52. $\sqrt{2^{-3}}$, $\sqrt[9]{10^{-2}}$, $\sqrt[4]{3^{-3}}$, $\sqrt[8]{7^{-4}}$, $\sqrt[7]{5^{-5}}$.

53. $2\sqrt{4^{21}}$, $3\sqrt[4]{3^3}$, $7\sqrt[5]{7^3}$, $3\sqrt[6]{27^5}$, $9\sqrt[7]{3^{25}}$.

Escríbase, empleando el signo de la raíz, la siguiente potencia con exponente racional (54 . . . 57):

54. $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{2}{5}}$, $7^{\frac{3}{7}}$, $4^{\frac{2}{3}}$. 55. $3^{0,5}$, $4^{0,25}$, $4^{0,75}$, $7^{1,25}$, $3^{2\frac{1}{2}}$.

56. $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$, $4\cdot 3^{\frac{1}{4}}$, $5\cdot 6^{0,25}$, $7\cdot 3^{2,25}$, $2\cdot 9^{2\frac{1}{2}}$.

57. $2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$, $3\cdot 2^{-3,75}$, $7\cdot 5^{-2\frac{3}{4}}$, $6\cdot 7^{-0,7}$, $8\cdot 10^{-\frac{7}{2}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (58 . . . . . . 64), al sustituir todos los signos de las raíces por los exponentes racionales de la potencia:

58. $\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2$.

59. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}:\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

60. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}:\left(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}:\sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

61. $\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

62. $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}}:\left(\sqrt[16]{3^{15}}\cdot\sqrt[8]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

63. $\left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}}:\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt[9]{9}}$.

64. $\dfrac{\left(\sqrt[6]{5\sqrt{5}}\right)^2\cdot\left(\sqrt[6]{25\sqrt[3]{25}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{5\sqrt[4]{125}}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (65 . . . . . . 78):

65. $\left(27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{2}{5}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

66. $\left(100^{-\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{4}{3}}\cdot 0,25^{0,5}\cdot 16^{-0,75}\right)^{\frac{4}{3}}$.

67. $\left(6,25^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot 100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0,01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

68. $[(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}):4^{\frac{1}{6}}]:\{[4^{-\frac{1}{2}}:(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}})]\cdot[(2^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}):3^{\frac{5}{6}}]\}$.

69. $\{3^{\frac{1}{3}}[5^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot(225^2)^{\frac{1}{3}}]^{-\frac{1}{2}}\}^6$

70. $\left\{[(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}):(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{5}{6}})]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}$.

71. $\{[(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}):2^{-\frac{5}{4}}]:[16:(5^2\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}})]\}^{\frac{1}{5}}$.

72. $\{3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{4}}\cdot[16:(27^{-1}\cdot 5^{-\frac{5}{3}})]\cdot(25\cdot 3^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{4}})\}^{\frac{1}{5}}$.

73. $10^3\cdot 1000^{-\frac{2}{3}}-(100^{-\frac{1}{2}}-0{,}027^{-\frac{1}{3}})-\left[625^{-0{,}75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{11}{9}\right)^2\right]$.

74. $[(27\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}+(8\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}]-\left[\frac{2}{7}\cdot(343\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}-10\,(0{,}001\cdot\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$.

75. $2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}}-3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)-3\cdot\left(5\sqrt[3]{144}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}\right)$.

76. $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}-0{,}5\sqrt{12}+\sqrt{0{,}02}-5\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(-0{,}75\sqrt{2})$.

77. $(2\sqrt{6}-\sqrt{5}+4\sqrt{2})(3\sqrt{5}+\sqrt{6}-2\sqrt{2})$.

78. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}-\sqrt[3]{9}\right)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})$.

Demuéstrese la validez de las siguientes igualdades numéricas (79 . . . 112)

79. $\sqrt{10-4\sqrt{6}}=\sqrt{6}-2$. 80. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

81. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$.

82. $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{2}$.

83. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-2$.

84. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$.

85. $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3}+1$.

86. $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$.

87. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\,(1+\sqrt{5})$.

88. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 89. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

90. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

91. $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}=0$.

92. $\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt[3]{18}}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}$.

93. $(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=2$.

94. $\sqrt[6]{8\sqrt{2}\,(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}}-2\sqrt{6\sqrt{2}}}=2\sqrt[6]{2}$.

95. $\sqrt[4]{28+4\sqrt{48}}=\sqrt{3}+1$. 96. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.

97. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

98. $\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}-(\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}=2\sqrt{2}$.

99. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

100. $\dfrac{(2+\sqrt{5})(2+5\sqrt{5})-(2+2\sqrt{5})(2-2\sqrt{5})}{4+3\sqrt{5}}=3\sqrt{5}.$

101. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4).$

102. $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

103. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}}=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{2}}\,(3-\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{7}.$

104. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}=(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8}).$

105. $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$

106. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}.$

107. $\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\dfrac{(20-2\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{2}.$

108. $\dfrac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}.$

109. $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=3-\sqrt[4]{27}.$

110. $\sqrt[4]{7}-\dfrac{\sqrt{7}-\frac{1}{7}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{7}}}}+\dfrac{6}{7\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{343}}=0.$

111. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}+12)\sqrt[4]{3}-6\sqrt{3}-8}}{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=1.$

112. $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2.$

113. La diferencia $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ es un número entero. Hállese este número.

¿Cuál de dos números siguientes es mayor (114 ... 123):

114. $\sqrt[8]{10}$ ó $\sqrt[4]{3}$; 115. $(\sqrt{0{,}2})^{-3,5}$ ó 1;

116. $\sqrt[8]{24}$ ó $\sqrt[3]{5}$; 117. $\sqrt[12]{623}$ ó $\sqrt[3]{5}$;

118. $(2\sqrt[3]{2})^{-6}$ ó 2^{-11}; 119. $\sqrt[21]{9}$ ó $\sqrt[42]{81}$;

120. $\sqrt[3]{123\cdot 343}$ ó $\sqrt[5]{\dfrac{52}{81}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{4}{39}}\cdot\sqrt[5]{972}$;

121. $\sqrt[3]{\dfrac{1000}{729}}$ ó $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt{\dfrac{4}{81}}$;

122. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ ó $\sqrt[7]{\sqrt{13}}$; 123. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^5}}}$ ó $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$?

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas 124 . . .
. . . 132):

124. $3^{34}>2^{51}$. 125. $202^{303}>303^{202}$.

126. $\sqrt{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

127. $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3}>\sqrt[10]{11}-\sqrt[5]{3}$.

128. $2(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7})-(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})<3$.

129. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{5}>\sqrt[4]{6}+7\sqrt[4]{10}+3\sqrt[4]{15}$.

130. $(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9})>9\sqrt[4]{315}$.

131. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})>2\sqrt[4]{6}(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})$.

132. $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt{15}>\frac{23}{3}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (133 . . .
. . . 170):

133. $\log_2\sqrt[3]{16}+\log_8\sqrt[4]{2}-\log_3(27\sqrt{3})-\log_5\sqrt{5\sqrt{5}}$.

134. $\log_2\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)+\log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right)+\log_4\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right)-\log_7\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

135. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9}+\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}9\quad\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{32}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

136. $\log_3 27-\log_{\sqrt{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{27}\right)$.

137. $\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt{2}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(9\sqrt[3]{3})$.

138. $\log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right)+\log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$.

139. $\log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}-\log_{\sqrt[5]{5}}(5\sqrt{5})+\log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

140. $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}+\log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

141. $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{3})^{1/2}}{\sqrt{3}}}+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}}}$.

142. $\left(\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(5\sqrt{5})+\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})}$.

143. $2\cdot\log_5\sqrt[4]{5}+\frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}25-\log_5^2\sqrt{5}-2$.

144. $\frac{1}{2}(9^{\log_{25}5+1}-3^{2(\log_{16}2+1/4)})-\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$.

145. $\log_3\log_8\log_2 16$. 146. $\log_8\log_4\log_2 64$.

147. $\log_4\log_2\log_3 81$.

148. $\log_3\left[\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right)+6\log_2\sqrt{2}+5\right]$.

149. $(\log_{\sqrt{5}} 125 : \log_5^2 25)\cdot(\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} : \log_{0,2} \sqrt[3]{25})$.

150. $\left[\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}} + 6\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right)\right] : \log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{8}$.

151. $3^{1+\log_3 4}+2^{\log_2 3-2}$. 152. $4^{3\log_4 2}-(1,5)^{\log_{\frac{3}{2}} 3-1}$.

153. $2^{3-\log_2 3}+7^{2\log_7 2+1}$. 154. $16^{1-\log_3 5}+4^{\frac{1}{2}\log_2 3+3\log_3 5}$.

155. $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$. $\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}}$.

156. $(0,1)^{2\lg 0,1-1,5\lg 0,1}\cdot(0,1)^{-\left(\lg\frac{8}{3}+2-\lg 20\right)}$.

157. $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

158. $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}\left(36^{1-\log_6 2}+49^{-\log_7 6}\right)$.

159. $\frac{\log_{\sqrt{2}} 16}{\log_4 \sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt[4]{2})+100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}\right]$.

160. $10^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 5+\lg 2}\cdot 7^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$.

161. $\log_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36+\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$.

162. $72\log_2\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}+10\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right)$.

163. $3^{\frac{2}{5}\log_3 32-\frac{1}{3}\log_3 64+\log_3 10}$.

164. $(0,2)^{\frac{1}{2}(9\log_{0,2} 2-3\log_{0,2} 4)}$.

165. $(\sqrt{2})^{3\log_{\sqrt{2}} 5-2\log_{\sqrt{2}} 25-\log_{\sqrt{2}} 10+2\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}}$.

166. $(\lg 2+\lg 5+\lg 300-\lg 3)\cdot 3^{\frac{1}{5\log_5 3}}$.

167. $\left(\log_6 27-\log_{0,5}\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}\right)$.

168. $\frac{\log_2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_2^2\sqrt{7}}-\frac{2\log_{\sqrt{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}}-\log_{\sqrt[6]{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\log_{\sqrt{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

169. $2^{\log_5 3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\log_5 2,5}\cdot\log_9 2\cdot\log_4 81$.

170. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

¿Tendrán sentido las siguientes expresiones (**171 . . . 173**):

171. $\sqrt{\log_2 1,4+\log_2 0,7}$; 172. $\sqrt{\lg 15+\lg 0,07}$;

173. $\lg\lg\lg 11$?

¿ Cuál de los números es mayor (**174 . . . 188**):

174. $\log 0{,}245$ ó 0; **175.** $\lg\left(\frac{\sqrt{71}}{4}\right)$ ó 0;

176. $\lg\sqrt[6]{10}$ ó $\log_2\sqrt{2}$; **177.** $\log_4 5$ ó $\log_6 5$;
178. $\log_9 10$ ó $\log_{10} 11$; **179.** $\log_3 2$ ó $\log_2 3$;
180. $\log_4 2$ ó $\log_{0{,}0625} 0{,}25$; **181.** $\log_{189} 1323$ ó $\log_{63} 147$;

182. $\log_5 11$ ó $\log_5\sqrt{74}$; **183.** $\frac{1}{2}+\lg 3$ ó $\lg 19-\lg 2$;

184. $\log_{0{,}2} 0{,}8+\log_{0{,}2} 5$ ó 0. **185.** $\frac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}$ ó $\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

186. $3(\lg 7-\lg 5)$ ó $2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\frac{1}{3}\lg 8\right)$; **187.** $\lg\lg\lg 5$ ó $\lg^3 5$;

188. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\sqrt{2}} 5$ ó $\log_{\sqrt{5}}\log_{\sqrt{5}} 7$?

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas (189 . . . . . 205):

189. $\log_5 32<\log_2 5$. **190.** $\log_5 14>\log_7 18$.

191. $\log_{16} 729<\log_3 16$. **192.** $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$.

193. $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}>0$. **194.** $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_{4{,}5}\pi}<2$.

195. $(1+\log_2 5)(\log^2_{2\sqrt{3}} 5+1)>2\log_2 5$.

196. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{35}\left(1+\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 7\cdot\log_{\sqrt{3}} 5}\right)>4$.

197. $\log^3_{30} 2\log_2 3\log_2 5<\frac{1}{27}$.

198. $3\log_5 7+\log_7 5+\log_{49} 5>4$.

199. $\log_7\sqrt[4]{45}\cdot\log_7(45\sqrt{3})>24\log_7\sqrt[4]{5}\log_7\sqrt{3}$.

200. $\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4}{4}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3}{3}$.

201. $\lg\frac{7}{2}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4+\lg 5+\lg 6}{6}$.

202. $\log_2\log_3\frac{7}{6}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{6}{7}$.

203. $\log_{\frac{6}{5}} 2\cdot\log_{\frac{12}{5}} 2\cdot\log_2\frac{24}{5}>1$. **204.** $\log_{\frac{1}{3}} 7>\log_7 3-\frac{5}{2}$.

205. $\log_{11}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)<\log_7(2\sqrt[3]{3})$.

206. Hállese $\log_{24} 72$, sabiendo que $\log_6 2=a$.

207. Hállese $\log_{36} 9$, sabiendo que $\log_{36} 8=b$.

208. Hállese $\log_{10} 64$, sabiendo que $\log_4 125=c$.

209. Hállese $\log_5 6$, si se sabe que $\log_{100} 3=\alpha$ y $\log_{100} 2=\beta$.

210. Hállese $\log_{25} 24$, si se sabe que $\log_6 15=m$ y $\log_{12} 18=n$.

CAPÍTULO

V

TRIGONOMETRÍA

§ 1. Angulos y medición de los mismos

Concepto de ángulo. Sean dados dos rayos coincidentes: el rayo OA y el OB (fig. 37).

Supongamos que el rayo OA realiza cierto giro, dando vueltas en un plano en torno al punto O. Entonces para cualquier giro semejante el rayo OB se considera como rayo *inmóvil* (inicial) de giro, mientras que el rayo OA, el rayo *móvil*, que realiza el giro dado.

Cualquier giro del rayo móvil OA con relación al rayo inmóvil OB puede realizarse en dos direcciones opuestas (en el sentido de las agujas del reloj y en el sentido contrario). Si en el rayo móvil OA

Fig. 37

montamos un dispositivo trazador que se aleje uniformemente del punto O, desplazándose a lo largo del rayo OA, entonces, a medida que gira el rayo OA, el dispositivo dejará en el plano cierta huella. Al realizar el rayo OA cierto giro, la huella representará una curva en desenrollamiento en torno del punto de giro O. Dicha curva tiene por origen el rayo inmóvil OB y termina junto al rayo móvil OA. Con ayuda de tal curva se muestran en los dibujos los giros, con la particularidad de que junto al rayo móvil la curva termina con una flecha que indica el sentido del giro realizado.

En la figura 38 se muestra uno de los giros en el sentido de las agujas del reloj.

En la figura 39 se muestra uno de los giros en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza semejante giro en el sentido de las agujas del reloj de modo tal, que el rayo OA ha coincidido por primera vez con el rayo inmóvil OB. Este giro suele llamarse *vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj* (fig. 40).

Supongamos que el rayo móvil OA realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj, que el rayo OA coincide por primera vez con el rayo inicial OB. Este giro suele llamarse *vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj* (fig. 41).

En la fig. 42 se muestra un giro igual a tres vueltas completas en el sentido contrario a las agujas del reloj.

En la fig. 43 se muestra un giro igual a dos vueltas completas en el sentido de las agujas del reloj.

Así pues, de los ejemplos examinados está claro como se debe mostrar en el dibujo cualquier giro.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza un giro en el plano en torno del punto O respecto del rayo inmóvil OB. En este caso

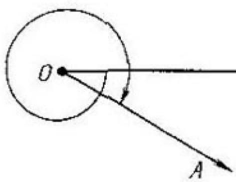

Fig. 38

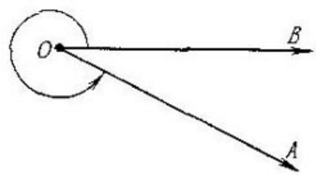

Fig. 39

suele considerarse que de esta manera se forma un ángulo α y se dice que el rayo móvil OA prefija el ángulo α, correspondiente al giro citado. El punto O se denomina vértice del ángulo α, el rayo inmóvil OB es el rayo de referencia del ángulo α, y OA, el rayo móvil

Fig. 40

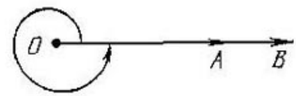

Fig. 41

que prefija el ángulo α. El rayo inmóvil OB (comienzo de referencia para cualquier ángulo) suele disponerse en los dibujos horizontalmente orientado a la derecha. Se ha convenido en considerar que si el rayo móvil realiza cierto giro en el sentido contrario a las agujas del reloj, se prefija de este modo el correspondiente *ángulo positivo*; si el rayo móvil realiza cierto giro en el sentido de las agujas del reloj, él prefija el correspondiente *ángulo negativo*; si el rayo móvil no realiza ningún giro, él prefija *el ángulo nulo*.

Por ejemplo, si el rayo móvil OA da una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, dicho rayo prefija el *ángulo positivo completo*; si el rayo OA da una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, él prefija el *ángulo negativo completo*.

Medición del ángulo en grados. Supongamos que el rayo móvil OA realiza un giro igual a $\frac{1}{360}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un ángulo cuya medida en grados es igual a *un grado*, o, en forma más breve, un ángulo *de un grado* (1°). Por consiguiente, el ángulo positivo completo y el de 360° es el mismo ángulo, prefijado por el rayo móvil OA que realiza una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj (véase la fig. 41).

Para las partes del ángulo de un grado se han aceptado denominaciones especiales que son *minuto* y *segundo*.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{60}$ parte de vuelta, correspon-

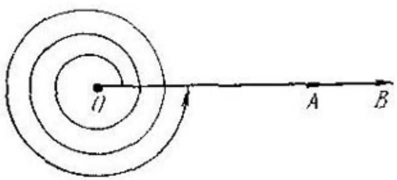

Fig. 42

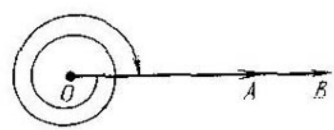

Fig. 43

diente al ángulo de un grado. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un ángulo de *un minuto* (1′). Por consiguiente, un ángulo de 60′ y un ángulo de 1° son un mismo ángulo.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{60}$ parte de vuelta, correspondiente al ángulo de un minuto. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un ángulo de *un segundo* (1″). Por consiguiente, un ángulo de 60″ y un ángulo de 1′ son un mismo ángulo.

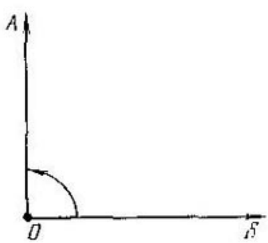

Fig. 44

Supongamos que el rayo móvil OA realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{4}$ parte de una vuelta completa. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo recto positivo* o bien un ángulo de 90° (fig. 44).

Supongamos que el rayo móvil OA realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{2}$ parte de una vuelta completa. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo llano positivo*, o bien un ángulo de 180° (fig. 45).

Supongamos que el rayo móvil OA no realiza ningún giro, en este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo nulo*, o bien un ángulo de 0° (véase la fig. 37).

En los casos como el citado suele decirse a veces que el rayo móvil OA ha realizado una *vuelta nula*.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza un giro igual a $\frac{1}{2}$ parte de una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo llano negativo*, o bien un ángulo de $(-180°)$ (véase la fig. 45).

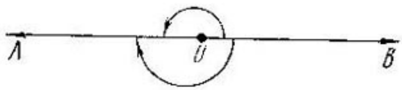

Fig. 45

Supongamos que el rayo móvil OA realiza un giro igual a $\frac{1}{4}$ parte de una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj. Entonces, el rayo móvil OA prefija un *ángulo recto negativo*, o bien un ángulo de $(-90°)$ (fig. 46).

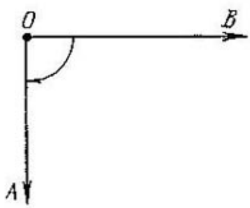

Fig. 46

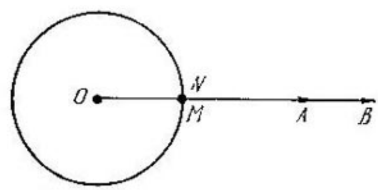

Fig. 47

Medida radial del ángulo. Supongamos que el rayo móvil OA coincide con el rayo inmóvil OB sin dar ninguna vuelta. Elijamos arbitrariamente un punto M en el rayo inmóvil OB y un punto N del rayo móvil OA que coincide con el punto M. Tracemos una circunferencia con centro en el punto O y de radio R, igual a la longitud del segmento ON (fig. 47).

Si el rayo móvil OA empieza a girar alrededor del punto O, el punto N se desplazará a lo largo de esta circunferencia.

Supongamos que el rayo móvil OA realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj que el punto N, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia igual al radio de ésta. En este caso se dice que el rayo móvil OA prefija un ángulo cuya medida radial es igual a un radián, o, más brevemente, un *ángulo de un radián* (fig. 48).

Sea dado un número positivo β. Supongamos que el rayo móvil OA realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj que el punto N, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia S, igual a βR; entonces se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo de β radianes*.

Sea dado un número negativo β, y supongamos que el rayo móvil OA realiza tal giro en el sentido de las agujas del reloj, que el punto N, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia S, igual a $|\beta|R$; entonces se dice que el rayo móvil OA prefija un *ángulo de* β *radianes*.

Así pues, la medida radial de cualquier ángulo se define del modo siguiente. Sea dado cierto ángulo α, prefijado por el rayo móvil OA. Se denomina *medida radial del ángulo* α tal número, cuyo valor absoluto es igual a la razón entre la distancia S, recorrida a lo largo de la circunferencia de radio R por el punto N del rayo móvil OA, y el radio R, y cuyo signo se define por el sentido del giro realizado, en otras palabras, se llama medida radial del ángulo α un número positivo $\frac{S}{R}$, si el giro se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj o bien un número negativo $\left(-\frac{S}{R}\right)$, si el giro se realiza en el sentido de las agujas del reloj.

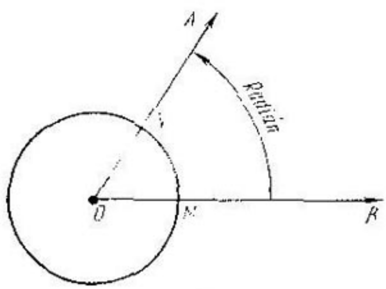

Fig. 48

Si el ángulo viene prefijado por el rayo móvil OA que no realiza ningún giro, entonces el ángulo α será nulo y la medida radial de este ángulo se considera igual a cero.

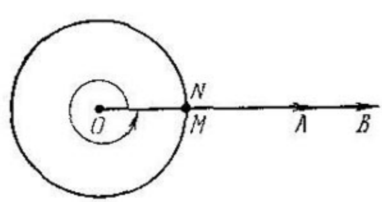

Fig. 49

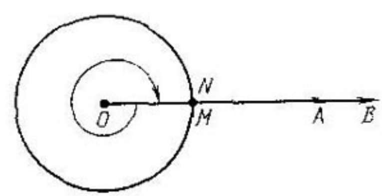

Fig. 50

Supongamos que el rayo móvil OA realiza una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, entonces, el punto N del rayo móvil OA, desplazándose por la circunferencia de radio R, recorre una distancia igual a $2\pi R$. Quiere decir, en este caso el rayo móvil OA prefija un ángulo, cuya medida radial es igual a 2π radianes, o, más brevemente, un ángulo de 2π radianes (fig. 49), es decir, el ángulo de $360°$ y el de 2π radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 41 y 49).

Si el rayo móvil OA da una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, se prefija un ángulo de (-2π) radianes (fig. 50), es decir, el ángulo de (—360°) y el ángulo de (-2π) radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 40 y 50).

Supongamos que el rayo móvil OA realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj. En este caso el punto N del rayo móvil, desplazándose por la circunferencia de radio R, recorre una destancia igual a $\frac{\pi R}{2}$. Por consiguiente, si el

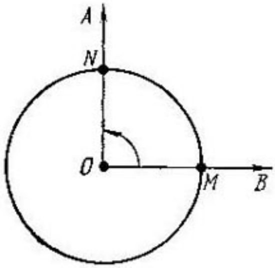

Fig. 51

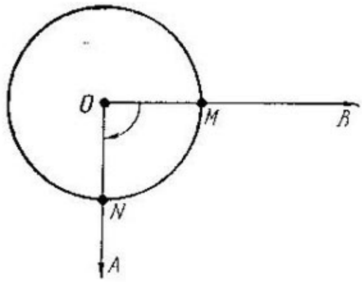

Fig. 52

rayo móvil OA realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, él prefija un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes (fig. 51), es decir, un ángulo de 90° y un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 44 y 51).

Si el rayo móvil OA realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, él prefija un ángulo de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ radianes (fig. 52), es decir, un ángulo de (—90°) y un ángulo de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 46 y 52).

Supongamos que el rayo móvil OA realiza $\frac{1}{2}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces, el punto N del rayo móvil OA, desplazándose a lo largo de la circunferencia de radio R, recorre una distancia igual a πR, por consiguiente, en este caso, el ángulo que se prefija por el rayo móvil OA medirá π radianes (fig. 53), es decir, el ángulo de 180° y el ángulo de π radianes representan un mismo ángulo (véanse las figs. 45 y 53).

Análogamente, el ángulo de (—180°) y el ángulo de ($-\pi$) radianes representan un mismo ángulo que se prefija por el rayo móvil OA que realiza $\frac{1}{2}$ parte de vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj (véanse las figs. 45 y 53).

Si la medida radial de cierto ángulo constituye β radianes, mientras que la medida por grados del mismo ángulo es igual a α grados, los números mencionados estarán ligados entre sí mediante la siguiente proporción:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \beta : 2\pi.$$

Haciendo uso de esta proporción, se puede convertir la medida radial en medida en grados, y viceversa, la medida en grados a la radial. Los ejemplos aducidos más arriba representan un caso particular de dicha proporción. He aquí unos ejemplos más.

El ángulo de 30° y el de $\frac{\pi}{6}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $30^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{6} : 2\pi$.

El ángulo de 45° y el de $\frac{\pi}{4}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $45^\circ : 360^\circ =$

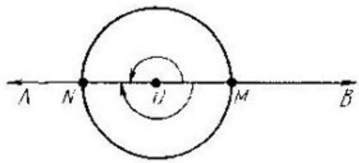

Fig. 53

$= \frac{\pi}{4} : 2\pi$. El ángulo de 60° y el de $\frac{\pi}{3}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $60^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{3} : 2\pi$.

Observación. En lo sucesivo siempre se empleará sólo la medida radial del ángulo. En las designaciones las medidas de un ángulo en radianes casi siempre se omite la palabra «radián». Por esta razón, en adelante

— por ángulo π se entiende un ángulo de π radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a π radianes;

— por ángulo $\frac{7}{9}$ se entiende un ángulo de $\frac{7}{9}$ radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a $\frac{7}{9}$ radianes;

— por ángulo α (donde α es cierto número fijo) se entiende un ángulo de α radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a α radianes;

— por ángulo $(\alpha + \beta)$ se entiene un ángulo, cuya medida radial es igual a $(\alpha + \beta)$ radianes;

— por ángulo $(\alpha - \beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es igual a $(\alpha - \beta)$ radianes.

Notemos, además, que por las palabras «un ángulo α tal que $\alpha \neq \beta + k\gamma$, $k \in Z$ se entiende que α es un ángulo tal que su medida radial no es igual al número $(\beta + k\gamma)$, cualquiera que sea el número entero k.

Circunferencia unidad. Supongamos que en un plano se ha introducido un sistema rectangular de coordenadas xOy con el semieje positivo de abscisas Ox orientado a la derecha y el semieje positivo de ordenadas Oy, hacia arriba. Sea dada una circunferencia cuyo

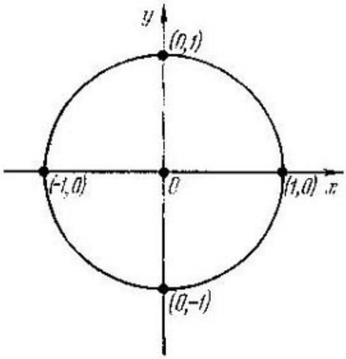

Fig. 54

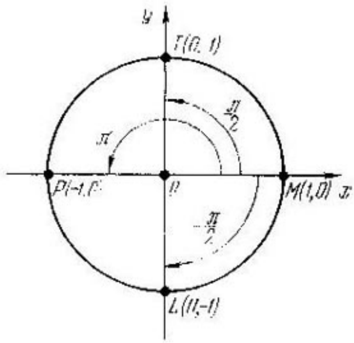

Fig. 55

radio es igual a la unidad de medición de longitudes con centro en el origen de coordenadas (fig. 54). Tal circunferencia suele llamarse *circunferencia unidad*.

Tomemos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto O (0, 0). Consideramos como rayo inmóvil el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo α.

Sea dado un ángulo cualquiera α: es obvio que el rayo móvil OA, que prefija este ángulo α, cortará sin falta la circunferencia unidad en cierto punto Q (a, b). No es menos evidente que para cualquier punto R (c, d) de la circunferencia unidad existe obligatoriamente un ángulo β tal, que el rayo móvil OA, que prefija dicho ángulo β, corte la circunferencia unidad precisamente en este punto R (c, d).

Determinemos las coordenadas de algunos puntos de la circunferencia unidad.

Queda claro, ante todo que (fig. 55): el rayo móvil OA, que prefija el ángulo nulo, corta la circunferencia unidad en el punto M (1; 0); el rayo móvil OA que prefija el ángulo π, corta la circunferencia unidad en el punto P (—1; 0); el rayo móvil OA que prefija el ángulo $\frac{\pi}{2}$ interseca la circunferencia unidad en el punto T (0; 1); el rayo móvil OA que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ interseca la circunferencia unidad en el punto L (0, —1).

Supongamos que el rayo móvil OA, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$, corta la circunferencia unidad en un punto K (fig. 56). Calculemos las coordenadas de este punto. Tracemos por el punto K una recta paralela al eje Oy, y supongamos que corta el eje Ox en el punto K_1. Por cuanto ambas coordenadas del punto K son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo isósceles OK_1K. Conforme al teorema de Pitágoras, $|OK|^2 = |OK_1|^2 + |KK_1|^2$; como $|OK_1| = |K_1K|$, obtenemos de aquí que $|OK_1| = |KK_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por eso, la abscisa del punto K es igual a

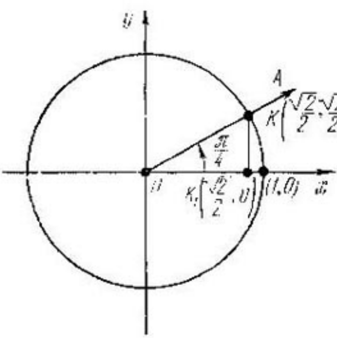

Fig. 56

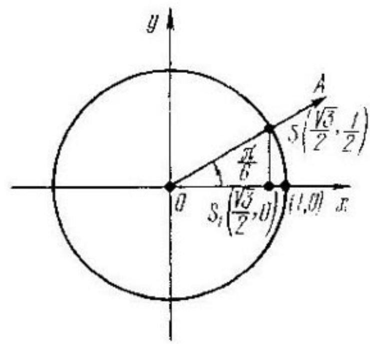

Fig. 57

la ordenada del punto K e igual al número $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quiere decir, el rayo móvil OA que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$ corta la circunferencia unidad en el punto $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Supongamos que el rayo móvil OA, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, corta la circunferencia unidad en el punto S (fig. 57). Calculemos las coordenadas de este punto. Tracemos por el punto S una recta paralela al eje Oy que corte el eje Ox en el punto S_1. Por cuanto ambas coordenadas del punto S son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo OS_1S. Del curso de geometría se sabe que en un triángulo rectángulo la longitud del cateto opuesto al ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa. Por consiguiente, $|SS_1| = \frac{1}{2}$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, $|OS_1|^2 = |OS|^2 - |SS_1|^2$. De aquí tenemos $|OS_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por eso la abscisa del punto S es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y su ordenada, a $\frac{1}{2}$.

Quiere decir el rayo móvil OA, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, corta la circunferencia unidad en el punto $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Supongamos que el rayo móvil OA, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{3}$, corta la circunferencia unidad en el punto F (fig. 58). Calculemos

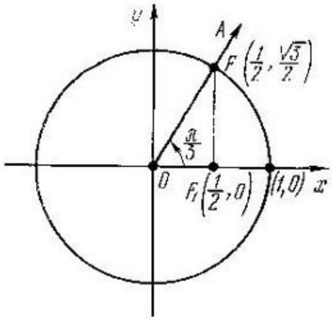

Fig. 58

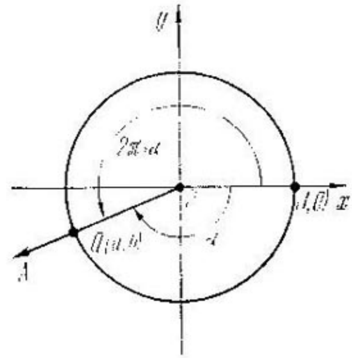

Fig. 59

las coordenadas de dicho punto. Tracemos por el punto F una recta paralela al eje Oy, que corta el eje Ox en el punto F_1. Por cuanto ambas coordenadas del punto F son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo.

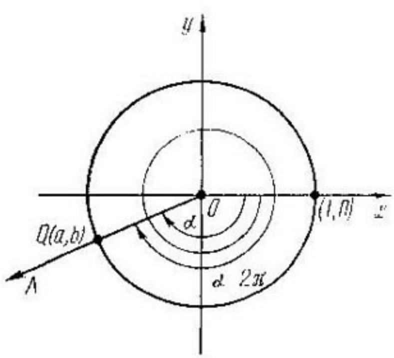

Fig. 60

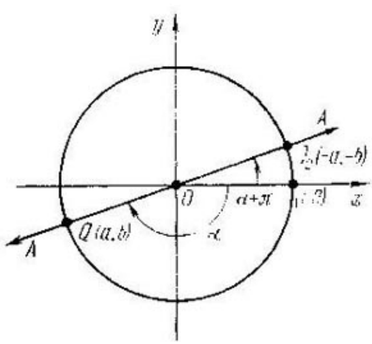

Fig. 61

Empleando la afirmación enunciada más arriba sobre la longitud del cateto opuesto al ángulo de $\frac{\pi}{6}$, llegamos a que $|OF_1| = \frac{1}{2}$, mas, en este caso, al aplicar el teorema de Pitágoras, encontramos que $|F_1F| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por eso, la abscisa del punto F es igual a $\frac{1}{2}$, y su ordenada, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quiere decir, el rayo móvil OA que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{3}$ corta la circunferencia unidad en el punto $F\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Supongamos que el rayo móvil OA, que prefija el ángulo α, corta la circunferencia unidad en cierto punto $Q\,(a, b)$. En este caso es fácil ver la validez de las siguientes **afirmaciones**:

1. *El rayo móvil OA, que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$, corta la circunferencia unidad en el mismo punto $Q\,(a, b)$* (fig. 59).

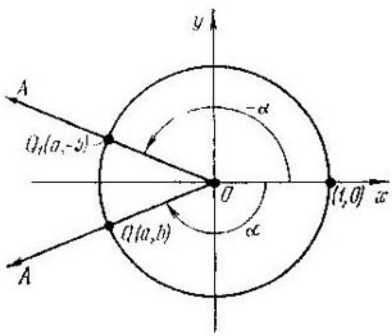

Fig. 62

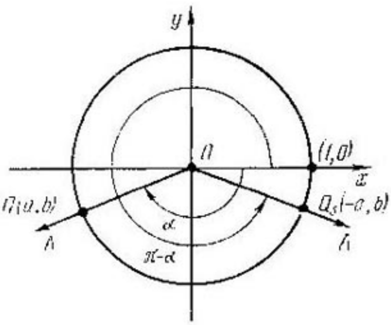

Fig. 63

2. *El rayo móvil OA que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$ corta la circunferencia unidad en el mismo punto $Q\,(a, b)$* (fig. 60).

3. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(\alpha + \pi)$ corta la circunferencia unidad en el punto $Q_2\,(-a, -b)$, simétrico al punto $Q\,(a, b)$ con relación al origen de coordenadas, es decir, al punto $O\,(0, 0)$* (**fig. 61**).

4. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(-\alpha)$ corta la circunferencia unidad en un punto $Q_1\,(a, -b)$, simétrico al punto $Q\,(a, b)$ respecto del eje Ox* (fig. 62).

5. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$ corta la circunferencia unidad en un punto $Q_3\,(-a, b)$, simétrico al punto $Q\,(a, b)$ respecto al eje Oy* (fig. 63).

§ 2. Seno y coseno de un ángulo

Sea introducido en un plano el sistema rectangular de coordenadas xOy con el semieje positivo de abscisas Ox orientado a la derecha y el semieje positivo de ordenadas Oy, orientado hacia arriba (fig. 64). Sea dada, además una circunferencia unidad.

Elijamos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto $O\,(0, 0)$. El semieje positivo de abscisas se considera como el rayo inmóvil OB, es decir, como el punto de referencia en la medición de cualquier ángulo α.

Supongamos que el punto M es un punto común del rayo inmóvil OB y de la circunferencia unidad. Entonces, una parte del rayo inmóvil OB, a saber, el segmento OM se denominará *radio unidad inmóvil*, o bien punto de referencia de los ángulos.

Supongamos que el rayo móvil OA coincide con el inmóvil OB sin realizar ninguna vuelta. Denotemos con N el punto del rayo móvil OA que conincide con el punto M del rayo inmóvil OB. Entonces, una parte del rayo móvil OA, es decir, el segmento ON se denominará *radio unidad móvil*, y el punto N, extremo del radio unidad móvil.

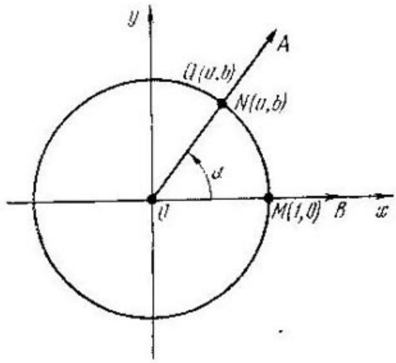

Fig. 64

Si el rayo móvil OA realiza cierto giro, entonces junto con él realizará también el mismo giro el radio unidad móvil ON. Por eso se puede considerar que el ángulo α lo prefija no sólo el rayo móvil OA, sino también el radio unidad móvil ON.

Convengamos en decir en lo sucesivo: el radio unidad móvil ON prefija un ángulo α, sobreentendiendo por ello que el rayo móvil correspondiente OA prefija el mismo ángulo α.

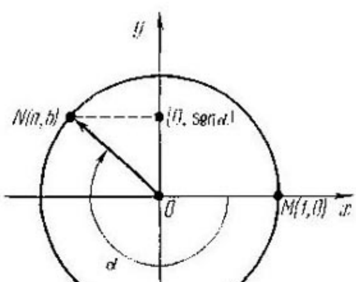

Fig. 65

Supongamos que el extremo del radio unidad móvil ON, que prefija el ángulo α, coincide con el punto Q (a, b) de la circunferencia unidad; entonces, las coordenadas del punto Q se llamarán coordenadas del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo α y se notará: N (a, b).

Seno de un ángulo. Sea dado un ángulo cualquiera α. El número igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija dicho ángulo α lleva el nombre de *seno* del ángulo α y se designa sen α (fig. 65).

De la definición proviene que para cualquier ángulo α existe el seno de este ángulo y, además, único.

Ejemplos.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo nulo, es igual a cero (fig. 66), por consiguiente, sen $0 = 0$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo π es igual a cero (véase la fig. 66). Por consiguiente, sen $\pi = 0$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{2}$, es igual a la unidad (fig. 67), por consiguiente sen $\frac{\pi}{2} = 1$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ es igual a (-1) (véase la fig. 67), por consiguiente,

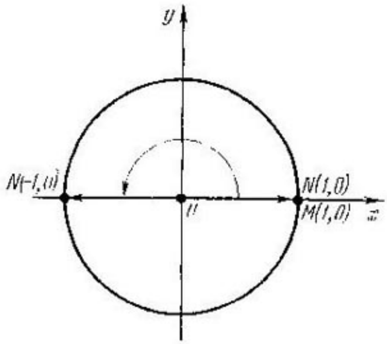

Fig. 66

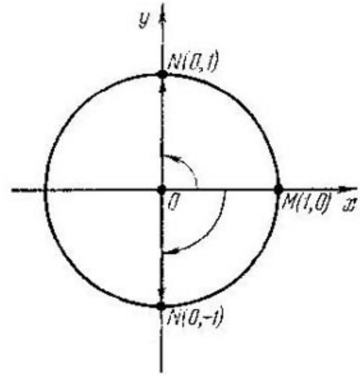

Fig. 67

sen $\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es igual a $\frac{1}{2}$ (fig. 68), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

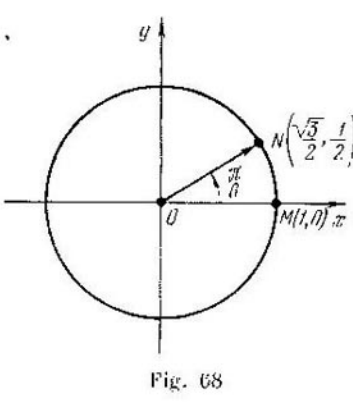

Fig. 68

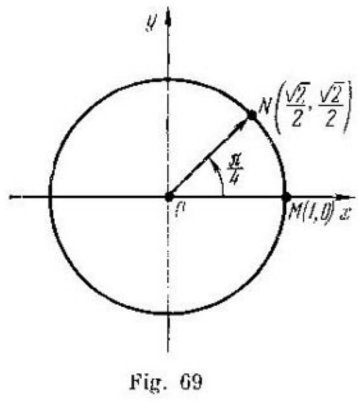

Fig. 69

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{4}$, es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (fig. 69), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{3}$, es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (fig. 70), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Demos a conocer algunas propiedades del seno de un ángulo. Por cuanto, para cualquier ángulo α, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo α, no puede ser menor de (-1) y mayor de 1, encontrándose encerrada entre los valores adu-

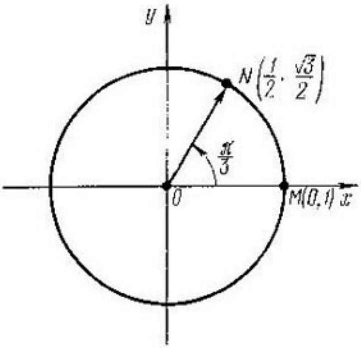

Fig. 70

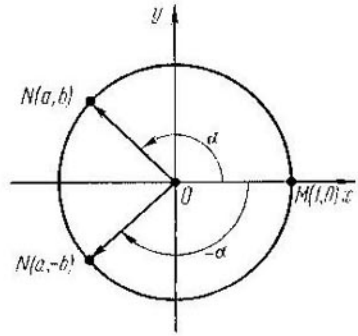

Fig. 71

cidos, incluidos (-1) y 1, entonces, cualquiera que sea el ángulo α, se verifica la desigualdad doble $-1 \leqslant \text{sen}\, \alpha \leqslant 1$.

Supongamos que la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α, es el número b, entonces, según lo expuesto más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(-\alpha)$, será el número $(-b)$ (fig. 71). Por eso, para cualquier ángulo α se verifica la igualdad

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha.$$

Esta propiedad del seno de un ángulo puede enunciarse así: el signo menos puede sacarse del signo del seno o introducirse bajo el signo del seno, es decir:

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(-\alpha).$$

Ejemplos.

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Según lo indicado anteriormente, la ordenada del extremo del radio unidad, que prefija el ángulo α, es igual a la ordenada del extremo del radio unidad que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$ (fig. 72).

Por eso, para cualquier ángulo α se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

Ejemplos. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Supongamos que la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α, es el número b, entonces, según lo expuesto

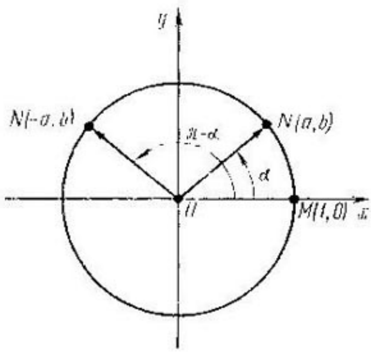

Fig. 72

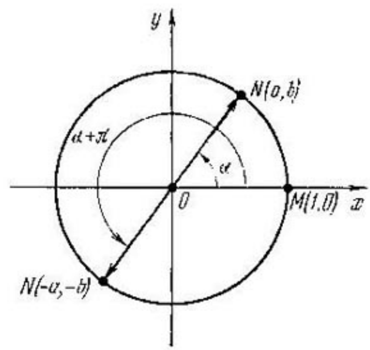

Fig. 73

más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi + \alpha)$, será el número $(-b)$ (fig. 73). Por eso, para cualquier ángulo α se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Ejemplos. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Según lo indicado más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α, es igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$ e igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$. Por eso, para cualquier ángulo α se verifican las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi),$$
$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha - 2\pi).$$

Haciendo uso de estas igualdades y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para cualquier número entero n y todo ángulo α se verifican las igualdades

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi n) = \operatorname{sen} (\alpha - 2\pi n).$$

Esta propiedad del seno de un ángulo puede enunciarse así: el seno de cualquier ángulo α se repite. al variar el ángulo en la magnitud de $2\pi n$, donde n es un número entero cualquiera.

Ejemplos. $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{sen} \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$$\operatorname{sen} \frac{9\pi}{4} = \operatorname{sen} \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{3} = \operatorname{sen} \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} - 24\pi\right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Sea dado un número $\beta \in (0, \pi)$. Examinemos un ángulo cuya medida radial es el número β. El extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo, coincide con cierto punto de la circunferencia unidad dispuesto en el primero o en el segundo cuadrantes, o bien en el semieje positivo de ordenadas. Por eso, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo mencionado, es positiva, con otras palabras, el seno de este ángulo es positivo.

Tomando en consideración que $\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (\beta + 2\pi n)$ para cualquier número entero n, se puede afirmar que $\operatorname{sen} \alpha$ es positivo para cualquier ángulo α tal, que su medida radial (el número α) pertenece, para cierto n entero, al intervalo correspondiente $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$. En la recta numérica (fig. 74) se muestran tales intervalos, que para cada número α, perteneciente a cualquiera de estos intervalos, $\operatorname{sen} \alpha$ es positivo.

De modo análogo se muestra que es también válida la siguiente afirmación: $\operatorname{sen} \alpha$ es negativo para cualquier ángulo α tal, que su medida radial (el número α) pertenece, con cierto n entero, al intervalo $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$. En la recta numérica (fig. 75) están mostrados tales intervalos, que para cada número α, perteneciente a cualquiera de ellos, sen α es negativo.

En fin, teniendo presente que sen α = sen $(\alpha + 2\pi n)$ para todo número n entero y que sen 0 = sen $\pi = 0$, resulta que sen α es igual

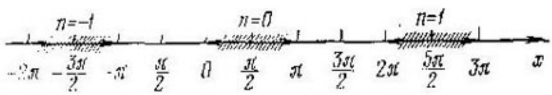

Fig. 74

a cero para cualquier ángulo α tal, que su medida radial (el número α) es igual al número πm, siendo m entero. En la recta numérica (fig. 76) se muestran aquellos números α, para cada uno de los cuales sen α es igual a cero.

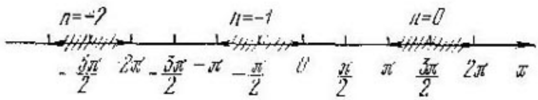

Fig. 75

Arco seno de un número. Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real a, tal ángulo α que el seno de éste sea igual al número a.

Fig. 76

Observemos que si $a > 1$ y si $a < -1$, entonces este problema no tiene solución, pues, por definición de seno de un ángulo, no existe tal ángulo cuyo seno sea mayor del 1, o menor que (-1).

En cambio, si $a \in [-1; 1]$, se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales, que el seno de cada uno de ellos es igual al número a. En efecto, la recta $y = a$ $(a \in [-1, 1])$ corta la circunferencia unidad o bien en dos puntos (fig. 77) o bien en un solo punto (fig. 78). Mas, según lo expuesto más arriba, para todo punto de este tipo en la circunferencia unidad existe un ángulo α tal, que el seno de dicho ángulo es igual a la ordenada del punto citado, es decir, igual a a. Ahora, de acuerdo con la propiedad del seno tenemos

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2\pi n)$$

para cualquier ángulo α y para todo número entero n. Por eso, el seno del ángulo $(\alpha + 2\pi n)$ es igual al número a, cualquiera que sea el número entero n.

Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuyo seno es igual al número a y que forma parte del segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arcsen a (se lee: arco seno del

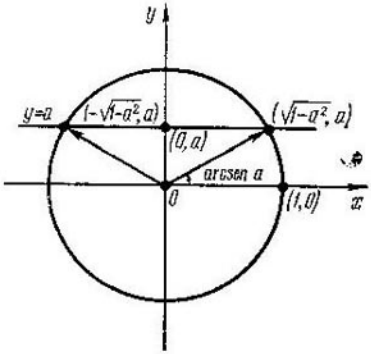

Fig. 77

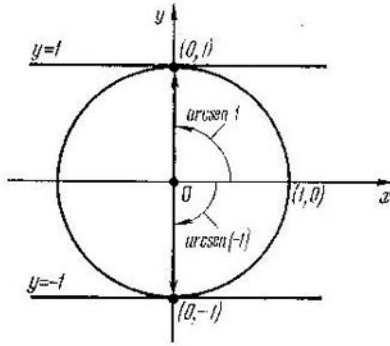

Fig. 78

número a). De este modo, por definición, arcsen a es el ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} a \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} a) = a.$$

Es fácil ver que para cualquier número $a \in [-1; 1]$ el arco seno de este número existe y es, además, único. Para todo número $a \in \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ el arco seno de él no existe.

Ejemplos. 1. $\operatorname{arcsen} 0$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} \alpha = 0$; está claro que éste es un ángulo cero, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen} 0 = 0.$$

2. $\operatorname{arsen} 1$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} \alpha = 1$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$ (véase la fig. 78), por consiguiente

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\operatorname{arcsen}(-1)$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} \alpha = -1$; está claro que éste es el ángule $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (véase la

fig. 78), por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

4. $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$, por consiguiente.

$$\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

5. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

6. $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Indiquemos algunas propiedades del arco seno de un número, que se desprenden de su definición. Para todo número a, mayor que 1, y también para todo número a menor que (-1), la notación $\operatorname{arcsen} a$ está privada de sentido. Por ejemplo, no tienen sentido las notaciones

$$\operatorname{arcsen} 2,\ \operatorname{arcsen}(-3),\ \operatorname{arcsen}(-\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{arcsen}\pi,\ \operatorname{arcsen}(-3\pi),\ \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Para cualquier número $a\in[-1;\ 1]$ se verifica la siguiente desigualdad doble

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{arcsen} a\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Para todo número $a\in[-1;\ 1]$ es válida la igualdad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} a)=a.$$

Para todo número $a\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ es válida la igualdad

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)=\alpha.$$

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{1}{3}\in[-1,\ 1]$, entonces $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

2. Calcúlese arcsen $\left(\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Por cuanto $\sqrt{\frac{\pi}{3}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces arcsen $\left(\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

3. Calcúlese arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)$. Por cuanto $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, no podemos escribir que arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{13\pi}{6}$. No obstante, es fácil ver que sen $\frac{13\pi}{6}=\operatorname{sen}\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. Por eso, arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=$arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$. Así pues, arcsen $\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

4. Calcúlese arcsen $[\operatorname{sen}(-5)]$. Es fácil ver que $\operatorname{sen}(-5)= =\operatorname{sen}(2\pi-5)$ y $(2\pi-5) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por eso arcsen $[\operatorname{sen}(-5)]= =$ arcsen $[\operatorname{sen}(2\pi-5)]=2\pi-5$. Así pues, arcsen $[\operatorname{sen}(-5)]= =2\pi-5$. Por fin, demos a conocer una propiedad más del arco seno del número a: para cualquier número $a \in [-1; 1]$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcsen}(-a)=-\operatorname{arcsen} a.$$

Efectivamente, por definición, arcsen $a=\alpha$, con la particularidad de que sen $\alpha=a$ y $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, arcsen $(-a)=\beta$, con la particularidad de que sen $\beta=-a$ y $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
De aquí se hace evidente que $\beta=-\alpha$, es decir,

$$\operatorname{arcsen}(-a)=-\operatorname{arcsen} a.$$

Ejemplos.

1. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

2. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

Coseno de un ángulo. Sea dado un ángulo α cualquiera. El número igual a la abscisa del radio unidad movil, que prefija dicho ángulo α, se denomina *coseno* del ángulo α y se designa $\cos\alpha$ (fig. 79).

De la definición se deduce que para cualquier ángulo α existe el coseno de este ángulo y es, además, único.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{2}$, es igual a cero (véase la fig. 67), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, es igual a cero (véase la fig. 67), por consiguiente, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo nulo, es igual a la unidad (véase la fig. 66), por consiguiente $\cos 0 = 1$.

La abscisa de los extremos del radio unidad móvil, que prefija el el ángulo π, es igual a (-1) (véase la fig. 66), por consiguiente, $\cos\pi = -1$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el angulo $\frac{\pi}{6}$, es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (véase la fig. 68), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$ es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (véase la fig. 69), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

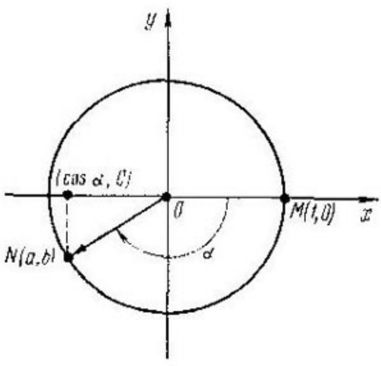

Fig. 79

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{3}$, es igual a $\frac{1}{2}$ (véase la fig. 70), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

He aquí algunas propiedades del coseno de un ángulo.

Por cuanto para cualquier ángulo α la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α, no puede ser menor que (-1) y mayor que 1, encontrándose encerrada entre dichos valores, incluidos (-1) y 1, entonces para todo ángulo α se verifica la siguiente desigualdad doble

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Según lo mostrado anteriormente, la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α, es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(-\alpha)$. Por eso, para todo ángulo α se verifica la igualdad

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Esta propiedad del coseno de un ángulo puede enunciarse así: el signo delante de un ángulo que está bajo el signo del coseno se puede cambiar sin variar el valor del coseno del ángulo, es decir,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \cos(-\alpha).$$

Ejemplos. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija un ángulo α, es el número a; entonces, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$, es el número $(-a)$ (véase la fig. 72). Por eso, para todo ángulo α se verifica la igualdad

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Ejemplos. $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Sea el número a la abscisa correspondiente al extremo del vector unidad móvil que prefija el ángulo α; entonces, según lo mostrado anteriormente, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi + \alpha)$, es el número $(-a)$ (véase la fig. 73). Por eso, para cualquier ángulo α se verifica la igualdad

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Ejemplos. $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Como se ha indicado más arriba, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija un ángulo α, es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$ y es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$. Por eso, para cualquier ángulo α se verifican las igualdades

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi),$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha - 2\pi).$$

Haciendo uso de estas igualdades y aplicando el método de inducción matemática, podemos mostrar que para todo número entero n y para cualquier ángulo α se verifican las igualdades

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha - 2\pi n).$$

Esta propiedad del coseno puede enunciarse así: el coseno de cualquier ángulo α se repite, al cambiar el ángulo en la magnitud de $2\pi n$, donde n es un número entero cualquiera.

Ejemplos. $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - 102\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 12\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Sea dado un número $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Examinemos un ángulo cuya medida radial es el número β. El extremo del radio unidad

Fig. 80

móvil que prefija este ángulo coincide con cierto punto de la circunferencia unidad dispuesto o bien en el cuadrante I o bien en el cuadrante IV, o bien en el semieje positivo de abscisas. Por eso, la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo dado, es positiva. Con otras palabras, el coseno de este ángulo es positivo. Teniendo presente que $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi n)$ para cualquier número n positivo, podemos afirmar que $\cos\alpha$ es positivo para todo ángulo α tal, que la medida radial de éste (el número α)

pertenece, para cierto n entero, al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. En la recta numérica (fig. 80) se muestran los intervalos de tal género, que para todo número α, perteneciente a cualquiera de ellos, $\cos\alpha$ es positivo.

Análogamente se muestra que $\cos\gamma$ es negativo para cualquier ángulo γ tal, que la medida radial de éste (el número γ) pertenece,

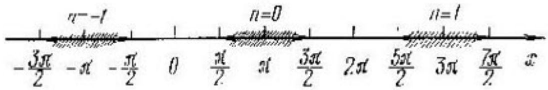

Fig. 81

con cierto n entero, al intervalo $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$. En la recta numérica (fig. 81) se muestran los intervalos de tal género, que para todo ángulo γ, perteneciente a cualquiera de ellos, $\cos\gamma$ es negativo.

Por fin, tomando en consideración que $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$ para todo n entero y que $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, resulta que $\cos\alpha$ es

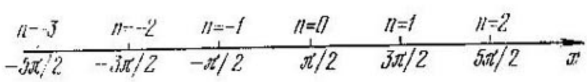

Fig. 82

igual a cero para cualquier ángulo α tal, que la medida radial de éste (el número α) es igual, con cierto n entero, al número $\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)$. En la recta numérica (fig. 82) se muestran tales números α, que para cada uno de ellos $\cos\alpha$ es igual a cero.

Arco coseno de un número. Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real a, tal ángulo α que el coseno de éste es igual al número a.

Notemos aquí mismo que si $a > 1$, y también si $a < -1$, este problema no tiene solución, puesto que, por definición de coseno de un ángulo, no existe un ángulo, cuyo coseno sea mayor que 1, o menor que (-1).

En cambio, si $a \in [-1; 1]$, podemos mostrar que existe una infinidad de tales ángulos que el coseno de cada uno de ellos es igual al número a.

En efecto, la recta $x = a$ interseca, para $a \in [-1; 1]$, la circunferencia unidad o bien en dos puntos (fig. 83), o bien en un punto (fig. 84). Mas, según lo expuesto anteriormente, para cada tal punto existe un ángulo α tal, que el coseno de él es igual a la abscisa del punto citado, es decir, igual a a. Ahora, de acuerdo con la propiedad del coseno,

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi n)$$

para cualquier ángulo α y cualquier número n entero. Por eso, para cualquier número entero n el coseno del ángulo $(\alpha + 2\pi n)$ es igual al número a.

Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuyo coseno es igual al número a y que forma parte del segmento $[0, \pi$ recibe el nombre de

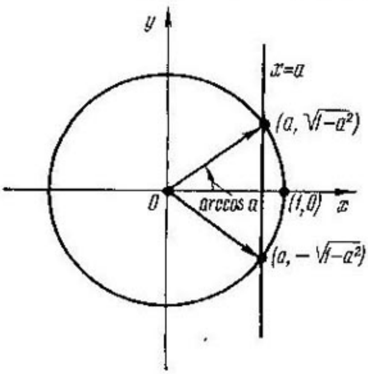

Fig. 83

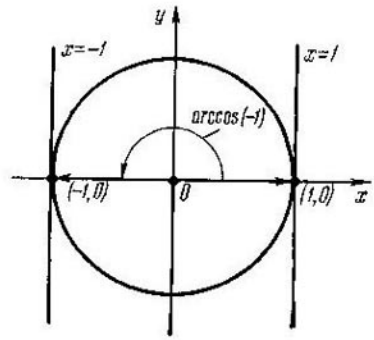

Fig. 84

ángulo principal y se designa arccos a (se lee: arco coseno del número a). De este modo, por definición, arccos a es un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \quad \cos (\arccos a) = a.$$

Es fácil ver que para cualquier número $a \in [-1, 1]$ el arco coseno de este número existe y es, además, único. Para todo número $a \in \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ el arco coseno de éste no existe.

Ejemplos. 1. arccos 1 es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = 1$. Es obvio que éste es un ángulo cero (véase la fig. 84), por consiguiente, $\arccos 1 = 0$.

2. arccos 0 es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = 0$. Es obvio que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$, y, por consiguiente, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

3. arccos (-1) es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = -1$. Es obvio que éste es el ángulo π (véase la fig. 84) y, por consiguiente $\arccos (-1) = \pi$.

4. $\arccos \frac{1}{2}$ es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$ y, por consiguiente, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

5. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$ y, por consiguiente, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

6. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un ángulo α tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$, y, por consiguiente, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Demos a conocer algunas propiedades del arco coseno de un número, que se deducen de su definición.

Para cualquier número a inferior a (-1) y también para cualquier número a superior a 1, la notación $\arccos a$ está privada de sentido. Por ejemplo, no tienen sentido las notaciones

$$\arccos \sqrt{3}, \quad \arccos\left(-\frac{5}{4}\right), \quad \arccos \pi$$

$$\arccos\left(-\frac{11}{10}\right), \quad \arccos \sqrt{\frac{10}{\pi}}, \quad \arccos\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Para cualquier número $a \in [-1; 1]$ es válida la desigualdad doble

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

Para cualquier número $a \in [-1; 1]$ es válida la igualdad

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Para cualquier ángulo $\alpha \in [0; \pi]$ es válida la igualdad

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha.$$

Ejemplos. 1. Calcúlese $\cos(\arccos 0)$. Por cuanto $0 \in [-1; 1]$, se tiene $\cos(\arccos 0) = 0$.

2. Calcúlese $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, se tiene $\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Calcúlese $\arccos(\cos\sqrt{\pi})$. Por cuanto $\sqrt{\pi} \in [0, \pi,]$ se tiene $\arccos(\cos\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.

4. Calcúlese $\arccos[\cos(-6)]$. Por cuanto $(-6) \in [0, \pi]$, entonces no se puede escribir que $\arccos[\cos(-6)] = -6$. No obstante, es fácil ver que $\cos(-6) = \cos(2\pi - 6)$ y $(2\pi - 6) \in [0, \pi]$. Por eso, $\arccos[\cos(-6)] = \arccos[\cos(2\pi - 6)] = 2\pi - 6$.

Por fin, indiquemos una propiedad más del arco coseno de un número: para todo número $a \in [-1; 1]$ se verifica la igualdad

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

En efecto, por definición,
arccos $a = \alpha$, con la particularidad de que $\cos\alpha = a$ y $\alpha \in [0, \pi]$,
arccos $(-a) = \beta$, con la particularidad de que $\cos\beta = -a$ y $\beta \in [0, \pi]$.
De aquí se ve que $\beta = \pi - \alpha$, es decir, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Ejemplos.

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

§ 3. Tangente y cotangente de un ángulo

Tangente de un ángulo. Sea dado un ángulo cualquiera α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Se denomina *tangente* de dicho ángulo α un número igual a la razón entre el seno del ángulo α y el coseno del mismo y se designa $\operatorname{tg}\alpha$, es decir,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

De la definición se deduce que para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, la tangente de este ángulo α existe y es, además, única.

Ejemplos. $\operatorname{tg} 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 0$, $\quad \operatorname{tg}\pi = \frac{\operatorname{sen}\pi}{\cos\pi} = 0$,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

Demos a conocer algunas propiedades de la tangente de un ángulo.

Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$, se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

En efecto, para cualquier ángulo α se verifican las igualdades $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, por lo cual para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, tendremos, de acuerdo con la definición de tangente:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Esta propiedad de la tangente puede enunciarse así: para todo ángulo α tal, que $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, el signo menos puede sacarse del signo de la tangente o introducirse bajo el signo de la tangente, es decir, si $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, entonces

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-\alpha).$$

Ejemplos. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1,$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

Haciendo uso de las propiedades del seno y del coseno de un ángulo, podemos mostrar que para todo ángulo α tal, que $\alpha\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi).$$

En efecto, para todo ángulo de esta índole resultan lícitas las cadenas de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

Ejemplos. $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

Aprovechando las igualdades

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$$

y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para todo número entero n y para cualquier ángulo α tal, que

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} (\alpha - \pi n).$$

Esta propiedad de la tangente de un ángulo puede enunciarse así: la tangente de cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, se repite al cambiar el ángulo en magnitud de πn, donde n es un número entero cualquiera.

Ejemplos. $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{9\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} - 2\pi \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{4\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} - \pi \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 13\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - 15\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + 10\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Para cualquier ángulo α cuyos seno y coseno son de un mismo signo, la tangente del ángulo α es positiva, es decir, $\operatorname{tg} \alpha$ es positiva

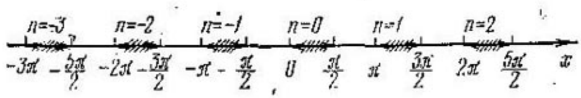

Fig. 85

para todo ángulo α que se prefija por el radio unidad móvil, cuyo extremo coincide con un punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes I ó III (es decir, para todo número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α, perteneciente, para cierto n entero, al intervalo $\left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$). En la recta numérica (fig. 85) los intervalos que se muestran son tales que para todo número α, perteneciente a cualquiera de ellos, $\operatorname{tg} \alpha$ es positiva.

Para cualquier ángulo α, cuyos seno y coseno son de signos opuestos, la tangente del ángulo α es negativa, es decir, $\operatorname{tg} \alpha$ es negativa para cualquier ángulo α que se prefija por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con un punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes II ó IV $\Big($es decir, para cualquier número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α, perteneciente, para cierto n entero, al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right)\Big)$.

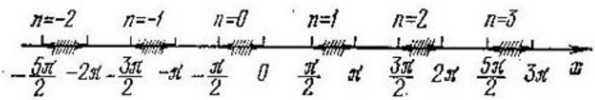

Fig. 86

En la recta numérica (fig. 86) están expuestos tales intervalos que para todo número α, perteneciente a cualquiera de ellos, $\operatorname{tg} \alpha$ es negativa.

Para cualquier ángulo α, cuyo seno es igual a cero, la tangente del ángulo α es también nula, es decir, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ para todo ángulo α prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide o bien con el punto M (1; 0) o bien con el punto P (−1; 0) (es decir, para cualquier número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α, igual, para cierto n entero, al número πn). En la recta numérica (fig. 76) se indican los números α, para cada uno de los cuales $\operatorname{tg} \alpha$ es igual a cero.

La definición de tangente de un ángulo, aducida más arriba, puede ser enunciada así:

sea dado (fig. 87) un ángulo cualquiera α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, y supongamos que el extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo α, es el punto N (a, b) (con la particularidad de que $a \neq 0$ a consecuencia de que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$); se denomina *tangente* del ángulo citado el número igual a la razón de la ordenada del punto N a la abscisa del mismo punto N, es decir,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Es fácil ver (fig. 87) que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto N (a, b) corta la recta $x = 1$ en el punto $K\left(1, \frac{b}{a}\right)$. Con otras palabras, la recta que pasa por el origen de coordenadas y el extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$, corta la recta $x = 1$ en el punto K $(1, \operatorname{tg} \alpha)$. Por eso la recta $x = 1$ se llama a menudo *línea de las tangentes*.

Arco tangente de un número. Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real k, un ángulo α tal, que su tangente sea igual al número citado k.

Se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales, que la tangente de cada uno de ellos es igual a k. Efectivamente, en

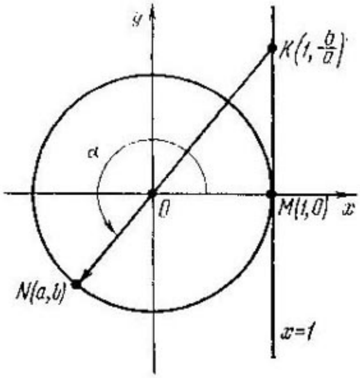

Fig. 87

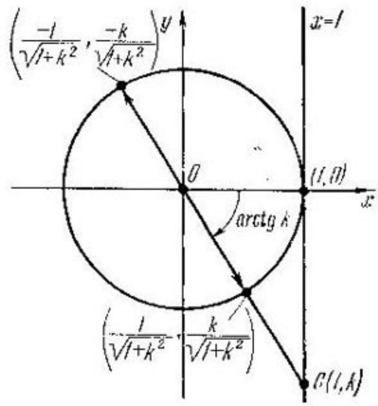

Fig. 88

la fig. 88 se ve que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto C (1; k), dispuesto en la línea de tangente, interseca la circunferencia unidad en dos puntos:
$\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Pero, según lo indicado más arriba, para cada uno de estos puntos de la circunferencia unidad existe un ángulo α tal, que la tangente de dicho ángulo es igual a la razón de la ordenada de este punto a la abscisa del mismo, es decir, a k. Ahora, de acuerdo con la propiedad de la tangente tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi l),$$

para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, y para todo número entero l. Por eso, para todo número entero l la tangente del ángulo $(\alpha + \pi l)$ es igual al número k. Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuya tangente es igual al número k y que pertenece al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arctg k (se lee arco tangente del número k).

De este modo, por definición, arctg k es un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} k) = k.$$

Es fácil ver que para cualquier número real k existe el arco tangente de este número y es, además, único.

Ejemplos. 1. arctg 0 es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha=0$. Está claro que éste es el ángulo nulo, por consiguiente, $\operatorname{arctg} 0=0$.

2. arctg 1 es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha=1$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$, por consiguiente $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$. Por consiguiente $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$.

5. $\operatorname{arctg}(-1)$ es un ángulo α tal, que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha=-1$. Está claro que éste es el ángulo $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Por consiguiente, $\operatorname{arctg}(-1)=\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Demos a concocer algunas propiedades del arco tangente de un número, que se deducen de su definición.

Para cualquier número real k se verifica la siguiente desigualdad doble:

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} k<\frac{\pi}{2}.$$

Para cualquier número real k se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} k)=k.$$

Para cualquier ángulo $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha.$$

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$. Obtenemos $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)=10$.

2. Calcúlese $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3. Calcúlese arctg (tg 3π). Por cuanto $3\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces no se puede escribir arctg (tg 3π) $= 3\pi$. No obstante, tg 3π = = tg 0. Por consiguiente, arctg (tg 3π) = arctg (tg 0) = 0.

4. Calcúlese arctg (tg 10). Por cuanto $10 \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces no se puede escribir arctg (tg 10) = 10. No obstante tg 10 = tg ($10 - 3\pi$). Por cuanto $(10 - 3\pi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, resulta arctg (tg 10) = arctg [tg ($10 - 3\pi$)] = $10 - 3\pi$.

Por fin, indiquemos una propiedad más del arco tangente de un número: para cualquier número real k se verifica la igualdad

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

En efecto, por definición,

arctg $k = \alpha$, con la particularidad de que tg $\alpha = k$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
arctg $(-k) = \beta$, con la particularidad de que tg $\beta = -k$ y $\beta \in$ $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
de aquí es evidente que $\beta = -\alpha$, es decir,

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

Ejemplos.

1. $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Cotangente de un ángulo. Sea dado un ángulo cualquiera α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$. Se denomina *cotangente* del ángulo α el número igual a la razón entre el coseno de este ángulo α y el seno del mismo y se designa ctg α, es decir,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

De la definición se desprende que para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, la cotangente de dicho ángulo α existe y, además, es única.

Ejemplos.

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Demos a conocer algunas de las propiedades de la cotangente de un ángulo.

Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, se verifica la igualdad

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Efectivamente, para todo ángulo de este género es válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Esta propiedad de la cotangente de un ángulo puede enunciarse así: para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, el signo menos puede sacarse del signo de la cotangente o introducirse bajo el mismo, es decir, si $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, entonces

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Ejemplos.

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-1; \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3},$$

Haciendo uso de las propiedades del seno y del coseno de un ángulo, se puede mostrar que para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, son válidas las igualdades

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha+\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha-\pi).$$

En efecto, para cualquier ángulo de éste género son válidas las cadenas de igualdades

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)=\frac{\cos(\alpha-\pi)}{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ejemplos. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Aprovechando las igualdades

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} (\alpha - \pi)$$

y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para todo número entero n y todo ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + n\pi) = \operatorname{ctg} (\alpha - n\pi).$$

Esta propiedad de la cotangente de un ángulo puede enunciarse así: la cotangente de cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m, m \in Z$, se repite cuando el ángulo varía en la magnitud πn, donde n es un número entero cualquiera.

Ejemplos.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 11\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3} - 13\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2} + 15\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Para cualquier ángulo α, cuyos coseno y seno son de un mismo signo, la cotangente del ángulo α es positiva, es decir, ctg α es positiva para cualquier ángulo α prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes I ó III (es decir, para cualquier número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α, perteneciente, para cierto l entero, al intervalo $\left(\pi l, \frac{\pi}{2} + \pi l\right)$.

En la recta numérica (véase la fig. 85) se muestran tales intervalos, que para cada número α, perteneciente a cualquiera de ellos, ctg α es positiva.

Para cualquier ángulo α, cuyos coseno y seno son de signos opuestos, la cotangente del ángulo α es negativa, es decir, ctg α es negativa para cualquier ángulo α prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes II o IV $\Big($es decir, para cualquier número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α, perteneciente, para cierto k entero, al intervalo $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)\Big)$.

En la recta numérica (fig. 86) se muestran tales intervalos, que para cada número α, perteneciente a cualquiera de ellos, ctg α es negativa.

Para cualquier ángulo α, cuyo coseno es igual a cero, la cotangente del ángulo α es también nula, es decir, $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ para todo ángulo α prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide o bien con el punto T (0; 1), o bien con el punto L (0; —1) $\Big($es decir, para todo número α que interviene como medida radial del ángulo correspondiente α igual, para cierto número n entero, al número $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\Big)$.

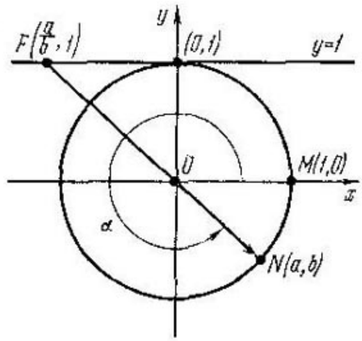

Fig. 89

En la recta numérica (fig. 82) se indican los números α, para cada uno de los cuales ctg α es igual a cero.

La definición de cotangente de un ángulo, aducida más arriba, puede enunciarse con otras palabras del modo siguiente:

sea dado un ángulo α cualquiera (fig. 89) tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, y supongamos que el extremo del radio unidad móvil, que prefija este ángulo, es el punto N (a, b) (con la particularidad de que $b \neq 0$, a consecuencia de que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$); se denomina cotangente del ángulo α un número igual a la razón de la abscisa del punto N a la ordenada del mismo punto N, es decir, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$.

Es fácil ver (fig. 89) que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto N (a, b) interseca la recta $y = 1$ en el punto $F\left(\frac{a}{b}, 1\right)$. Con otras palabras, la recta que pasa por el origen de coordenadas y el extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo α ($\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$), interseca la recta $y = 1$ en el punto F (ctg α, 1). Por eso, la recta $y = 1$ se denomina a menudo línea de cotangentes.

Arco cotangente de un número. Surge frecuentemente el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real d, un ángulo α tal, que la cotangente de él es igual al número d. Se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales que la cotangente de cada uno de ellos es igual al número d.

Efectivamente, es fácil ver (fig. 90) que una recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto D (d; 1) dispuesto en la línea de cotangentes interseca la circunferencia unidad en dos puntos: $\left(\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+d^3}}\right)$, $\left(\frac{-a}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$. Pero según lo indicado más arriba, para cada punto de esta índole existe un ángulo tal que la cotangente de él es igual a la razón de la abscisa de dicho punto a su ordenada, es decir, igual a d. Luego, de acuerdo con la propiedad de la cotangente,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi n)$$

para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, y para cada número entero n. Por eso, para cualquier número entero n la cotangente del ángulo $(\alpha + \pi n)$ es igual al número d.

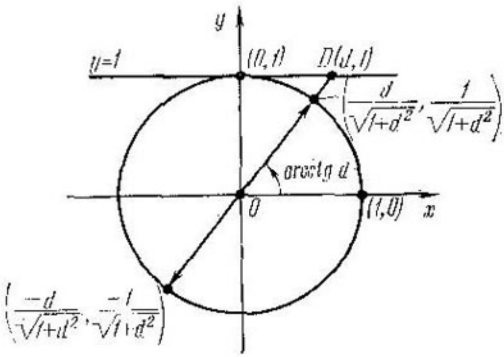

Fig. 90

Se ha convenido en lo siguiente: un ángulo cuya cotangente es igual al número d y que pertenece al intervalo $(0, \pi)$ recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arcctg d (se lee: arco cotangente del número d).

De este modo, arcctg d es, por definición, un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones

$$0 < \operatorname{arcctg} d < \pi, \quad \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} d) = d.$$

Es fácil ver que para todo número real d el arco cotangente de dicho número existe y es, además, único.

Ejemplos 1. $\operatorname{arcctg} 0$ es un ángulo α tal que $0 < \alpha < \pi$ y $\operatorname{ctg} \alpha = 0$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$, por consiguiente. $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$ es un ángulo α tal, que $0 < \alpha < \pi$ y $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$ Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. arcctg 1 es un ángulo α tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=1$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$. Por consiguiente, arcctg $1=$ $=\frac{\pi}{4}$.

4. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ es un ángulo α tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=$ $=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

5. $\operatorname{arctg}(-1)$ es un ángulo α tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=$ $=(-1)$. Está claro que éste es el ángulo $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

Demos a conocer algunas de las propiedades del arco cotangente de un número que se desprenden de su definición.

Para cualquier número real d se verifica la desigualdad doble

$$0<\operatorname{arcctg} d<\pi.$$

Para cualquier número real d se verifica la igualdad

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} d)=d.$$

Para todo ángulo $\alpha\in(0,\pi)$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha.$$

Ejemplos. 1. Calcúlese ctg (arcctg 10). Obtenemos

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10)=10.$$

2. Calcúlese $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{3}\in(0,\ \pi)$, se tiene $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3. Calcúlese $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Por cuanto $\left(-\frac{\pi}{3}\right)\notin(0,\ \pi)$, no se puede escribir $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{\pi}{3}$. No obstante, es fácil ver que $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}\in(0,\ \pi)$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Indiquemos, por fin, una propiedad más del arco cotangente de un número: para cualquier número real d se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcctg}(-d)=\pi-\operatorname{arcctg} d.$$

Efectivamente, por definición, tenemos

$\operatorname{arcctg} d = \alpha$, con la particularidad de que $\operatorname{ctg} \alpha = d$ y $\alpha \in (0, \pi)$,

$\operatorname{arcctg} (-d) = \beta$, con la particularidad de que $\operatorname{ctg} \beta = -d$ y $\beta \in (0, \pi)$.

De aquí se deduce que $\beta = \pi - \alpha$, es decir,

$$\operatorname{arcctg} (-d) = \pi - \operatorname{arcctg} d.$$

Ejemplos. 1. $\operatorname{arcctg} (-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

§ 4. Identidad trigonométrica fundamental

Teorema. *Para cualquier ángulo α se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \tag{1}$$

que se denomina identidad trigonométrica fundamental.

Este teorema puede enunciarse así: *el cuadrado del seno de cualquier ángulo más el cuadrado del coseno del mismo ángulo es igual a la unidad.*

Demostración. Sea dado cierto ángulo α. Entonces las coordenadas del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo α serán $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ (fig. 91). Por cuanto el cuadrado de la distancia entre dos puntos cualesquiera de un plano prefijados por sus coordenadas es igual a la suma de los cuadrados de la diferencia entre las coordenadas ohmónimas, entonces para los puntos $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ y $(0, 0)$ tenemos

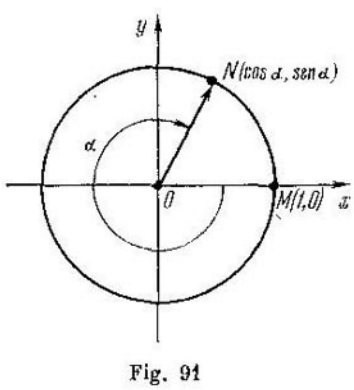

Fig. 91

$$(\cos \alpha - 0)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - 0)^2 = 1^2,$$

o bien

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

y el teorema queda demostrado.

La identidad trigonométrica fundamental muestra en qué dependencia se encuentran el seno y el coseno de un mismo ángulo. Conociendo una de las magnitudes que figuran en la identidad trigonométrica fundamental para cierto ángulo α, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo α. En efecto, la identidad trigonométrica fundamental es equivalente a la igualdad $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$, la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}. \qquad (2)$$

De la igualdad (2) tenemos

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (2a)$$

para cualquier ángulo α con el que $\cos\alpha$ es no negativo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $k\in Z$, al intervalo $\left[2\pi k-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$).

$$\operatorname{coc}\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (2b)$$

para cualquier ángulo α con el que $\cos\alpha$ es no positivo (es decir, para cualquier α, perteneciente, con cierto $k\in Z$, al intervalo $\left[2\pi k+\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$].

Luego, la identidad trigonométrica fundamental es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha,$$

la cual es equivalente a la siguiente:

$$|\operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

De la igualdad (3) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3a)$$

para cualquier ángulo α con el que $\operatorname{sen}\alpha$ es no negativo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $m\in Z$, al intervalo $[2\pi m;\ \pi+2\pi m]$).

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3b)$$

para cualquier ángulo α con el que $\operatorname{sen}\alpha$ es no positivo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $m\in Z$, al intervalo $[\pi+2\pi m;\ 2\pi+2\pi m]$).

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k\in Z$) las fórmulas (2a) y (2b) dan un mismo valor de $\cos\alpha = 0$; las fórmulas (3a) y (3b) dan en las mismas condiciones (cuando $\alpha = \pi m$, donde $m\in Z$) un mismo valor de $\operatorname{sen}\alpha = 0$.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{sen}\alpha$, si $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ y $\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo, y por esta razón $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{9}{11}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

2. Calcúlese $\cos\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\cos\alpha$ es negativo, y por esta razón $\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Corolario 1. *Para cualquier ángulo* α *tal que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{4}$$

Demostración. Por cuanto $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, entonces $\cos\alpha \neq 0$, y por esta razón la identidad trigonométrica fundamental (1) puede dividirse término a término por $\cos^2\alpha$. En este caso para cualquier α tenemos

$$\frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

La igualdad (4) está demostrada.

La igualdad (4) muestra en qué dependencia se encuentran la tangente y el coseno de un mismo ángulo α $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right)$. Si se conoce una de las magnitudes que figuran en la igualdad (4), se puede hallar, para cierto ángulo α de esta índole, la otra magnitud del mismo ángulo. Efectivamente, por cuanto $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, la igualdad (4) es equivalente a la igualdad $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, la cual es equivalente a su vez a la siguiente:

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{5}$$

De la igualdad (5) tenemos

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5a}$$

para cualquier ángulo α con el que $\cos\alpha$ es positivo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5b}$$

para cualquier ángulo α con el que $\cos\alpha$ es negativo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $\left(2\pi k + \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

Luego, la igualdad (4) es equivalente a la igualdad $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, la cual es equivalente a la siguiente

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}. \qquad (6)$$

De la igualdad (6) tenemos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad (6a)$$

para cualquier ángulo α con el que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\cos\alpha$ son de un mismo signo (es decir, para cualquier α, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi m, \frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi m; \pi+2\pi m\right]\Big).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad (6b)$$

para cualquier ángulo α con el que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\cos\alpha$ son de signos opuestos (es decir, para cualquier α, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi m-\pi; -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m, 2\pi m\right]\Big).$$

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha = \pi m$, donde $m \in Z$), las fórmulas (6a) y (6b) dan el mismo valor de $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\alpha$, si $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\operatorname{tg}\alpha$ es positivo, mientras que $\cos\alpha$ es negativo, razón por la cual $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 2$.

2. Calcúlese $\cos\alpha$, si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\cos\alpha$ es positivo y por eso $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Corolario 2. *Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (7)$$

Demostración. Por cuanto $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, y, por eso, la identidad trigonométrica fundamental (1) puede dividirse término a término por $\operatorname{sen}^2\alpha$. En este caso, para todo α de esta índole tenemos

$$\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

La igualdad (7) está demostrada.

La igualdad (7) muestra en qué dependencia se encuentran la cotangente y el seno de un mismo ángulo α ($\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$). Al conocer una de las magnitudes que figuran en la igualdad (7), para cierto ángulo α, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo α. En efecto, puesto que $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, entonces la igualdad (7) es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente:

$$|\operatorname{sen}\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}. \tag{8}$$

De la igualdad (8) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \tag{8a}$$

para cualquier ángulo α con el que sen α es positivo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$).

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \tag{8b}$$

para cualquier ángulo α con el que sen α es negativo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$).

Luego, por cuanto $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, entonces la igualdad (7) es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$

la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente

$$|\operatorname{ctg}\alpha|=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{|\operatorname{sen}\alpha|}. \tag{9}$$

De la igualdad (9) tenemos

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (9a)$$

para cualquier ángulo α con el que ctg α y sen α son de un mismo signo (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $k \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi k - \frac{\pi}{2};\ 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]\Big).$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (9b)$$

para cualquier ángulo α con el que ctg α y sen α son de signos diferentes (es decir, para cualquier α perteneciente, con cierto $k \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi k + \frac{\pi}{2};\ 2\pi k + \pi\right) \cup \left(\pi + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]\Big).$$

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$) las fórmulas (9a) y (9b) dan el mismo valor de $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

Ejemplos. 1. Calcúlese ctg α, si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{24}{25}$ y $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para todo ángulo α del intervalo citado ctg α es positivo, mientras que sen α es negativo, por lo cual

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{7}{24}.$$

2. Calcúlese sen α, si $\operatorname{ctg}\alpha = 4$ y $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para todo ángulo α del intervalo citado sen α es negativo, por lo cual

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Las definiciones de tangente y cotangente de un mismo ángulo predeterminan la validez de la siguiente afirmación:

para cualquier ángulo α tal que $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad (10)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (11)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (12)$$

Las igualdades (11) y (12) muestran en qué dependencia se encuentran la tangente y la cotangente de un mismo ángulo α $\left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right)$. Si se conoce una de las magnitudes que figuran en las igualdades (11) y (12), para cierto ángulo α, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo α.

Ejemplos. 1. Calcúlense $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{ctg}\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$ y $\alpha\in\left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\cos\alpha$ es negativo y por esta razón

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\frac{4}{5}.$$

Por cuanto $\cos\alpha\neq 0$, entonces

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}.$$

Análogamente, por cuanto $\operatorname{sen}\alpha\neq 0$, entonces

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{4}{3}.$$

2. Calcúlense $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$, si $\operatorname{ctg}\alpha=-7$ y $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Por cuanto $\operatorname{ctg}\alpha\neq 0$, entonces $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=-\frac{1}{7}$.

Para cualquier ángulo α del intervalo citado $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo, mientras que $\cos\alpha$ es negativo, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}}{10},\qquad \cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

§ 5. Fórmulas de adición

Sean dados un ángulo α y otro ángulo β, es decir, supongamos que están dados un número α, que representa la medida radial del ángulo α, y otro número β que representa la medida radial del ángulo β. Entonces, por ángulo $(\alpha-\beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es el número $(\alpha-\beta)$; el ángulo $(\alpha-\beta)$ recibe el nombre de *diferencia* de dos ángulos dados. Por ángulo $(\alpha+\beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es el número $(\alpha+\beta)$; el ángulo $(\alpha+\beta)$ se denomina *suma* de dos ángulos dados.

Coseno de la diferencia y coseno de la suma

Teorema. *Para cualesquiera ángulos* α y β *se verifica la igualdad*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \tag{1}$$

que lleva el nombre de fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos.

Este teorema puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de la diferencia entre dos ángulos cualesquiera es igual al producto del coseno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo más el producto del seno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

Demostración. Sean dados en un plano el sistema rectangular de coordenadas xOy y una circunferencia unidad. Convengamos en considerar que el radio unidad inmóvil OM de dicha circunferencia (donde M (1, 0)) es el punto de referencia.

Supongamos que el ángulo α se prefija mediante el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto N ($\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$) de la circunferencia unidad, y el ángulo β, mediante el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto P ($\cos\beta$, $\operatorname{sen}\beta$) de la circunferencia unidad.

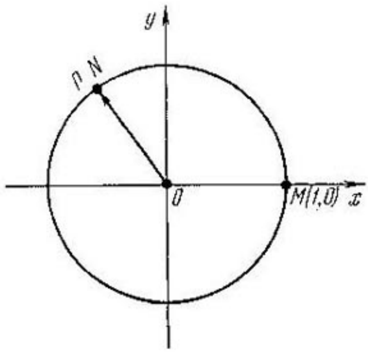

Fig. 92

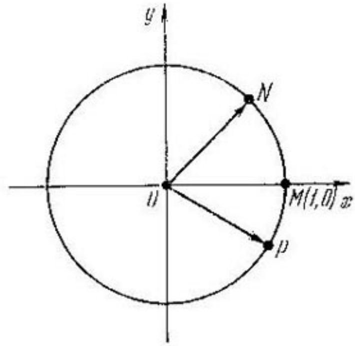

Fig. 93

Son posibles dos casos de disposición relativa de los puntos N y P: éstos o bien coinciden (fig. 92) o bien no coinciden (fig. 93).

Demostremos el teorema separadamente para cada uno de los casos aducidos.

1. Supongamos que los puntos N y P coinciden. En este caso los ángulos α y β son de tal índole que $\alpha = \beta + 2\pi k$, es decir, $(\alpha - \beta) = 2\pi k$ para cierto número entero fijo k, y la igualdad (1) puede ser escrita en la forma

$$\cos 2\pi k = \cos\beta \cos(\beta + 2\pi k) + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\beta + 2\pi k)$$

o, por cuanto

$$\cos 2\pi k = 1$$

$$\cos(\beta + 2\pi k) = \cos\beta,$$

$$\operatorname{sen}(\beta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\beta,$$

en la forma

$$1 = \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta,$$

es decir, en el caso que se considera la igualdad (1) es una forma equivalente de la notación para la identidad trigonométrica fundamental, por consiguiente, la igualdad (1) es válida.

2. Supongamos que α y β son tales que $\alpha \neq \beta + 2\pi k$, cualquiera que sea el número entero k. Cualculemos la longitud del segmento PN, empleando con este fin dos procedimientos.

En el sistema de coordenadas dado las coordenadas de los puntos N y P son conocidas, por lo cual, de acuerdo con el teorema sobre la longitud de un segmento cuyos extremos están bien definidos por las coordenadas prefijadas, tenemos

$$d_{NP}^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2. \qquad (2)$$

Introduzcamos ahora otro sistema rectangular de coordenadas $x'Oy'$ de tal modo que la unidad de escala coincida con la unidad de longitud elegida anteriormente; el semieje positivo de abscisas (Ox') sería en este caso la prolongación del radio OP, el semieje positivo de ordenadas (Oy') formaría con el semieje positivo de abscisas (Ox') el ángulo positivo $\frac{\pi}{2}$ (fig. 94).

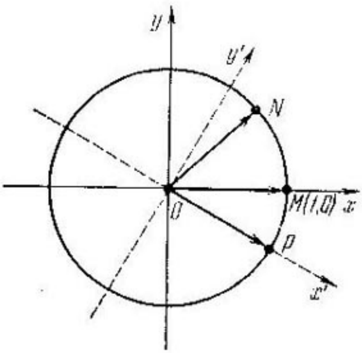

Fig. 94

En el nuevo sistema de coordenadas el punto P tendrá las coordenadas P (1, 0). El radio OP se toma ahora por el radio unidad inmóvil, es decir, por el nuevo punto de referencia para medir los ángulos. El sistema de coordenadas $x'Oy'$ se introduce de tal modo que el nuevo punto de referencia para medir los ángulos (el radio unidad inmóvil OP) sea desplazado a un ángulo β con relación al punto de referencia anterior (el radio unidad inmóvil OM). Entonces, el radio unidad móvil ON prefijará (con relación al nuevo punto de referencia para medir los ángulos, un ángulo $(\alpha - \beta)$ y en el sistema de coordenadas $x'Oy'$ las coordenadas del punto N serán $N(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. De acuerdo con el teorema sobre la longitud de un segmento cuyos extremos están bien definidos por las coordenadas prefijadas (§ 3, cap. III) tendremos

$$d_{NP}'^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]^2. \qquad (3)$$

Por cuanto el cuadrado de la distancia entre dos puntos fijos de un plano, determinado en dos diferentes sistemas rectangulares de coordenadas con una misma unidad de longitud, es un mismo número, entonces $d_{NP}'^2 = d_{NP}^2$.

Empleando la propiedad de transitividad de las igualdades, tendremos, a partir de las igualdades (2) y (3):

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + \\ + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta)]^2.$$

Suprimiendo los paréntesis y agrupando, obtenemos

$$(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) = \\ = 1 + [\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Aplicando tres veces consecutivas la identidad trigonométrica fundamental, escribamos esta igualdad en la forma

$$2 - 2 [\cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta] = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta).$$

De aquí proviene la validez del teorema en el segundo caso. El teorema está demostrado.

Ejemplo. Calcúlese $\cos\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, entonces

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Demos a conocer algunos corolarios del teorema demostrado.

Corolario 1. *Para cualesquiera ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

la cual se denomina fórmula del coseno de la suma de dos ángulos.

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto del coseno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo menos el producto del seno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

Demostración. Representemos $(\alpha + \beta)$ en la forma $[\alpha - (-\beta)]$ y apliquemos el teorema. A continuación, aprovechando el hecho de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ para cualquier ángulo α, tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) +$$
$$+ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, resulta

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Así pues, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

2. Calcúlese $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, resulta

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$$

Así pues, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$.

Fórmulas para los ángulos complementarios. Dos ángulos α y β, cuya suma es igual a $\frac{\pi}{2}$, es decir, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, se denominan *complementarios uno de otro*. Por ejemplo, el ángulo α es complementario del ángulo $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ y viceversa.

Corolario 2. *Para cualquier ángulo α se verifican las igualdades*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha,\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

que se llaman fórmulas para los ángulos complementarios.

En efecto, al aplicar la igualdad (1), tenemos $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ $=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\alpha$, es decir, queda demostrada la validez de la primera fórmula.

Al designar $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\beta$, obtenemos de la primera fórmula ya demostrada que $\operatorname{sen}\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Por cuanto $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\alpha$, entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

El corolario 2 puede enunciarse del modo siguiente:

— *el seno de cualquier ángulo es igual al coseno del ángulo complementario,*

— *el coseno de cualquier ángulo es igual al seno del ángulo complementario.*

Ejemplo. Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, entonces $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=$ $=\cos\frac{\pi}{12}$. El valor de $\cos\frac{\pi}{12}$ se ha hallado más arriba y es igual a $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. Por consiguiente, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Corolario 3. a) *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$$

b) *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $m \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

Las igualdades aducidas se donominan también *fórmulas para los ángulos complementarios.* La validez de estas fórmulas se predetermina por las definiciones de tangente y cotangente y por el corolario 2.

Ejemplo. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$, entonces $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}}$. Los valores de cos $\frac{5\pi}{12}$ y de sen $\frac{5\pi}{12}$ fueron hallados anteriormente y son iguales a $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ y a $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, respectivamente. Por consiguiente, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ó $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

Seno de la suma y seno de la diferencia

Corolario 4. *Para cualesquiera ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

la cual se llama fórmula del seno de la suma de dos ángulos.

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de la suma de dos ángulos cualesquiera es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo más el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.*

Demostración. Haciendo uso del corolario 2, luego de la igualdad (1) y, una vez más, del corolario 2, tenemos $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$ $+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, la que se trataba de demostrar

Ejemplos 1. Calcúlese sen $\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$.

2. Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$. Por cuanto $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Corolario 5. *Para cualesquiera ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

la cual se llama fórmula del seno de una diferencia de dos ángulos.

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de la diferencia entre dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo menos el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

Demostración. Representemos $(\alpha-\beta)$ en la forma $[\alpha+(-\beta)]$ y apliquemos el corolario 4. Luego, aprovechando el hecho de que $\cos(-\beta)=\cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$, cualquiera que sea β, tendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+$$
$$+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo. Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Tangente de una suma y tangente de una diferencia

Corolario 6. *Para cualesquiera ángulos α y β tales que*

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ y\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$m \in Z$, se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

la cual se llama fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos.

Demostración. Para cualesquiera dos ángulos del tipo mencionado resulta válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

la cual demuestra precisamente el corolario 6.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, entonces

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2 + \sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$. Tenemos

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -(2+\sqrt{3}).$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = -(2+\sqrt{3})$.

Corolario 7. *Para cualesquiera dos ángulos* α *y* β *tales que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ y\, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z,$ *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

la cual se llama fórmula de la tangente de una diferencia entre dos ángulos.

Demostración. Para cualesquiera dos ángulos del tipo mencionado resulta válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

la cual demuestra precisamente el corolario 7.

Ejemplo. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = 2 - \sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Cotangente de una suma y cotangente de una diferencia

Corolario 8. *Para cualesquiera ángulos* α *y* β *tales que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$, *y* $(\alpha + \beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha},$$

la cual se llama fórmula de la cotangente de una suma de dos ángulos.

Corolario 9. *Para cualesquiera dos ángulos* α *y* β *tales que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$, *y* $(\alpha - \beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha},$$

la cual se llama fórmula de la cotangente de una diferencia entre dos ángulos.

La demostración de estos corolarios es análoga a la que se emplea para los corolarios 6 y 7, razón por la cual aquí se omite.

Ejemplos. Calcúlese $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$, entonces

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

2. Calcúlese $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

Fórmulas para calcular productos

Corolario 10. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

la cual se llama fórmula para calcular el producto de cosenos.

El corolario 10 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del coseno de cualquier ángulo α por el coseno de cualquier ángulo β es igual a la semisuma del coseno de la diferencia entre estos ángulos con el coseno de la suma de los mismos.*

Corolario 11. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

la cual se llama fórmula para calcular el producto de los senos.

El corolario 11 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del seno de cualquier ángulo α por el seno de cualquier ángulo β es igual a la semidiferencia entre el coseno de la diferencia de estos ángulos y el coseno de la suma de los mismos.*

Demostración. Se ha mostrado más arriba que para cualesquiera ángulos α y β se verifican las siguientes igualdades:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Al sumar y restar estas igualdades, obtenemos las fórmulas para calcular los productos de cosenos y los de senos:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \tag{5}$$

Observación. En virtud de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ para cualquier ángulo α, al determinar el coseno de la diferencia entre dos ángulos, podemos tomar en las fórmulas (4) y (5) tanto el coseno del ángulo $(\alpha-\beta)$ como el del ángulo $(\beta-\alpha)$.

Ejemplos. 1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\cos\alpha+\frac{1}{2}}{2}=\frac{2\cos\alpha+1}{4}.$$

2. $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta\right)-$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos(-2\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\beta.$$

3. $\cos 4\cos 3=\frac{\cos(4-3)+\cos(4+3)}{2}=\frac{\cos 1+\cos 7}{2}.$

4. $\frac{4\operatorname{sen}7\operatorname{sen}8}{5}=\frac{4[\cos(7-8)-\cos(7+8)]}{5\cdot 2}=\frac{2[\cos 1-\cos 15]}{2}.$

Corolario 12. *Para cualesquiera ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2},$$

la cual se llama fórmula para calcular el producto del seno de un ángulo por el coseno de otro ángulo.

El corolario 12 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del seno de cualquier ángulo α por el coseno de cualquier ángulo β es igual a la semisuma del seno de la suma de los ángulos α y β con el seno de la diferencia entre los ángulos α y β, con la particularidad de que la diferencia se toma de tal modo que del ángulo que se encuentra bajo el signo del seno se resta el ángulo que se encuentra bajo el signo del coseno.*

Demostración. Hemos mostrado anteriormente que para cualesquiera ángulos α y β resultan válidas las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Al sumar estas igualdades, obtenemos la fórmula para calcular el producto del seno de un ángulo por el coseno de otro ángulo:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2} \qquad (6)$$

Ejemplos. Calcúlese $4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicando la fórmula (6), tenemos

$$4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}+1+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}-1-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\operatorname{sen}\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(-2)\right)-\frac{1}{2}\right]=2\cos(-2)-1=2\cos 2-1.$$

Así pues, $4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2-1.$

2. Calcúlese $2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Aplicando la fórmula (6), tenemos

$$2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\left[\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Así pues, $2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

3. $\frac{3\operatorname{sen}4\cos 5}{7}=\frac{3\left[\operatorname{sen}(4+5)+\operatorname{sen}(4-5)\right]}{7\cdot 2}=\frac{3(\operatorname{sen}9-\operatorname{sen}1)}{14}$

Fórmulas para la suma y la diferencia de los senos y cosenos

Corolario 13. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

que se llama fórmula de la suma de cosenos.

El corolario 13 puede enunciarse del modo siguiente: *la suma de los cosenos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del coseno de la semisuma de dichos ángulos por el coseno de la semidiferencia de los mismos.*

Corolario 14. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta-\alpha}{2},$$

la cual se llama fórmula de la diferencia de cosenos.

El corolario 14 puede enunciarse del modo siguiente: *la diferencia entre los cosenos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semisuma de dichos ángulos por el seno de la diferencia inversa de estos ángulos* (por diferencia inversa entre los ángulos se entiende la diferencia que se forma al sustraer el ángulo que se encuentra bajo el signo del coseno minuendo del ángulo que se encuentra bajo el signo de coseno sustrayendo).

Corolario 15. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

la cual se llama fórmula de la suma de los senos.

El corolario 15 puede enunciarse del modo siguiente: *la suma de los senos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semisuma de dichos ángulos por el coseno de la semidiferencia entre los mismos.*

Corolario 16. *Para cualesquiera dos ángulos α y β se verifica la igualdad*

$$\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

a cual se llama fórmula de la diferencia entre senos.

El corolario 16 puede enunciarse del modo siguiente: *la diferencia entre los senos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semidiferencia de dichos ángulos por el coseno de la semisuma de estos ángulos, con la particularidad de que el seno de la semidiferencia se toma de tal modo que el ángulo que se encuentra bajo el signo del seno sustrayendo se resta del ángulo que se encuentra bajo el signo de seno minuendo.*

Demostración. Al designar

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x, \\ \alpha-\beta = y, \end{cases} \tag{7}$$

y al sumar estas igualdades, obtendremos

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{2}, \\ \beta = \dfrac{x-y}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

De la igualdad (8) se deduce que para todo par x e y siempre existe un par α y β tal, que se verifican las igualdades (7).

Si en las fórmulas (4), (5) y (6) sustituimos α y β por x e y, entonces según las fórmulas (7) y (8) obtendremos, como resultado, la validez de las siguientes fórmulas:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \tag{11}$$

Haciendo uso de que sen $(-y) = -$sen y para cualquier ángulo y, de la fórmula (11) obtenemos

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (-y) = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

es decir, es válida la siguiente fórmula:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}. \tag{12}$$

La validez de las fórmulas (9), (10), (11) y (12) predetermina la validez de los corolarios 13, 14, 15 y 16.

Ejemplos. 1. $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 2 \cos \frac{4\alpha + 6\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 6\alpha}{2} =$

$$= 2 \cos 5\alpha \cos(-\alpha) = 2 \cos 5\alpha \cos \alpha.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) =$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} - \beta + \frac{\pi}{6} + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{6} + \beta - \frac{\pi}{3} + \beta}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right).$$

3. $\operatorname{sen} \gamma + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$.

4. $\operatorname{sen} \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 5\alpha =$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - 5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 5\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen}(-2\alpha) \cos 3\alpha = -2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 3\alpha.$$

§ 6. Fórmulas de arcos dobles y de los arcos mitad

Fórmulas de los arcos dobles. Sea dado un ángulo α, es decir, cierto número α que representa la medida radial del ángulo citado. Entonces, por ángulo 2α se entiende aquel cuya medida radial es el número 2α; el ángulo 2α se denomina con frecuencia *ángulo de arco doble*.

1. *Para cualquier ángulo α se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \tag{1}$$

que se llama fórmula para el seno del ángulo de arco doble.

Esta afirmación puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de un ángulo de arco doble 2α es igual al producto duplicado del seno del ángulo α por el coseno del* ángulo α.

Demostración. Suponiendo que $\alpha = \beta$ en la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = \\ = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

obtenemos la validez de la afirmación 1.

2. *Para cualquier ángulo 2α se verifica la igualdad*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha, \tag{2}$$

la cual se denomina fórmula del coseno de un ángulo de arco doble.

Esta afirmación puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de un ángulo de arco doble 2α es igual al cuadrado del coseno del ángulo α menos el cuadrado del seno del ángulo α.*

Demostración. Suponiendo que $\beta = \alpha$ en la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha = \\ = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

llegamos a que la afirmación 2 es lícita.

3. *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, y $\alpha \neq \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \tag{3}$$

a cual se llama fórmula de la tangente de un ángulo de arco doble.

Demostración. Representando 2α como $(\alpha + \alpha)$ y aplicando la fórmula de tangentes de la suma de dos ángulos, tenemos

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

lo que se trataba de demostrar.

4. *Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \tag{4}$$

la cual se llama fórmula de cotangente de un ángulo de arco doble.

Demostración. Representando 2α como $(\alpha + \alpha)$ y aplicando la fórmula de cotangente de la suma de dos ángulos, tenemos

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplos. 1. Calcúlense $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\alpha \in \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Para todo ángulo α, perteneciente al intervalo mencionado, $\cos\alpha$ es negativo, por lo cual

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{4}{5}$$

Al aplicar las fórmulas (1) y (2), obtenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, si $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$. Al aplicar las fórmulas para la tangente de la suma de dos ángulos y, a continuación, para la tangente de un ángulo de arco doble, obtenemos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha = 6.$$

Examinemos un ángulo $n\alpha$, donde n es un número natural cualquiera. Por ángulo $n\alpha$ se entiende aquel cuya medida radial es el número $n\alpha$. Se pueden deducir las fórmulas que expresan $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ $(n \in N)$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. A título de ejemplo aduzcamos las fórmulas para $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha = \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = \\ &= 3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha.\end{aligned}$$

Así pues, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$;

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha = \\ &= (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = \\ &= \cos^3\alpha - (1-\cos^2\alpha)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = \\ &= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

Así pues, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Ejemplos. 1. Calcúlese sen 3α, si sen $\alpha = \frac{3}{4}$. Haciendo uso de la fórmula para sen 3α, obtendremos

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \cdot \frac{3}{4} - 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{36-27}{16} = \frac{9}{16}.$$

2. Calcúlese (sen 3α + cos 3α), si sen α − cos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Empleando las fórmulas para sen 3α y cos 3α, tenemos

$$\operatorname{sen} 3\alpha + \cos 3\alpha = 3(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha) - 4(\operatorname{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha).$$

Apliquemos la fórmula de multiplicación reducida:

$$\operatorname{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha = (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha).$$

De este modo, para sen α − cos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos

$$\operatorname{sen} 3\alpha + \cos 3\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha).$$

Completemos la expresión obtenida hasta que se forme el cuadrado perfecto:

$$-1 - 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -3 + 2(1 - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = -3 + 2(\cos^2\alpha +$$
$$+ \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = -3 + 2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = -3 + 2\cdot\frac{1}{2} = -2.$$

Obtenemos en definitiva que sen 3α + cos $3\alpha = -\sqrt{2}$.

Fórmulas para los ángulos de arco mitad. Sea dado un ángulo α, es decir, cierto número α que representa la medida radial de dicho ángulo. Entonces, por ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se entiende aquel cuya medida radial es el número $\frac{\alpha}{2}$; el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se denomina a menudo, *ángulo de arco mitad.*

5. *Para cualquier ángulo α se verifica la igualdad*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \tag{5}$$

la cual se llama fórmula del cuadrado del coseno de un ángulo de arco mitad.

Demostración. Es evidente que el ángulo α puede considerarse como un ángulo de arco doble con relación al ángulo $\frac{\alpha}{2}$. Por eso, para cualquier ángulo α se verifica la siguiente igualdad:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2};$$

además, para todo ángulo α resulta válida la identidad trigonométrica fundamental:

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Sumando estas dos igualdades, obtenemos la igualdad (5).

La igualdad (5) es equivalente a la igualdad

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

De la última igualdad tenemos:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (5a)$$

para todo ángulo α, para el cual $\cos\frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo α, perteneciente, con cierto $k\in Z$, al intervalo $[-\pi+4\pi k;\ \pi+4\pi k]$).

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (5b)$$

para todo ángulo α, para el cual $\cos\frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo α, perteneciente, con cierto $k\in Z$, al intervalo $[\pi+4\pi k;\ 3\pi+4\pi k]$).

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha=\pi+2\pi m$, donde $m\in Z$) las fórmulas (5a) y (5b) dan un mismo valor, a saber: $\cos\frac{\alpha}{2}=0$.

Ejemplos. Calcúlese $\cos\frac{\pi}{8}$. Por cuanto $\cos^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4},\ \text{entonces}\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

2. Calcúlese $\cos\frac{\alpha}{2}$, si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ y $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\right)$.

Hallemos, ante todo, $\cos\alpha$. Por cuanto para todo ángulo α, perteneciente al intervalo indicado, $\cos\alpha$ es negativo, entonces

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

Como $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\right)$, resulta que $\frac{\alpha}{2}\in\left(-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2}\right)$. Para todo ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente al intervalo indicado, $\cos\frac{\alpha}{2}$ es también negativo y por eso

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Así pues, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. *Para cualquier ángulo α se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos \alpha}{2}, \tag{6}$$

la cual se llama fórmula para el cuadrado del seno de un ángulo de arco mitad.

Demostración. Se ha observado anteriormente que para todo ángulo α se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}+\cos^2 \frac{\alpha}{1}=1, \qquad -\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}+\cos^2 \frac{\alpha}{2}=\cos \alpha.$$

Al restar la segunda igualdad de la primera, obtenemos la igualdad (6).

La igualdad (6) es equivalente a la igualdad

$$\left|\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}.$$

De la última igualdad tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} \tag{6a}$$

para todo ángulo α para el cual $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo α, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[4\pi m;\ 2\pi+4\pi m]$).

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} \tag{6b}$$

para todo ángulo α para el cual $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo α perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[-2\pi+4\pi m;\ 4\pi m]$).

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha=2\pi k$, donde $k \in Z$) las fórmulas (6a) y (6b) dan un mismo valor, a saber, $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}=0$.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$. Por cuanto $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, entonces $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. Calcúlese $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, si $\operatorname{sen} \alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, y $\alpha \in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Como para cualquier ángulo α, perteneciente al intervalo indicado, $\cos \alpha$ es negativo, resulta pues que

$$\cos \alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}=-\frac{7}{9}.$$

Por cuanto $\alpha \in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, entonces $\frac{\alpha}{2} \in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Para todo ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente a este intervalo, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ es positivo y por eso

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{7}$$

la cual se llama fórmula para el cuadrado de la tangente de un ángulo de arco mitad.

Demostración. Haciendo uso de la definición de tangente de un ángulo y las igualdades (5) y (6), obtenemos la igualdad (7). La igualdad (7) es equivalente a la siguiente

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

De la última igualdad tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{7a}$$

para todo ángulo α para el cual $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo α que pertenece, con cierto $n\in Z$ al intervalo $[2\pi n;\ \pi+2\pi n)$).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{7b}$$

para todo ángulo α para el cual $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo α que pertenece, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$).

Observación. Para los valores de frontera del ángulo α (es decir, cuando $\alpha=2\pi n$, donde $n\in Z$) las fórmulas (7a) y (7b) dan un mismo valor, a saber $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0$.

Ejemplos. 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Por cuanto

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=3-2\sqrt{2},$$

entonces

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, si $\cos 2\alpha=\frac{7}{32}$ y $\alpha\in\left(-\pi,\ -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Por cuanto, para cualquier ángulo α, perteneciente al intervalo indicado, $\cos\alpha$ es negativo, entonces

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Dado que $\alpha \in \left(-\pi;\ -\frac{3\pi}{4}\right)$, resulta que $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{8}\right)$. Para cualquier ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente al intervalo citado, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es negativa y por eso

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}$.

Para la tangente de un ángulo de arco mitad pueden deducirse también otras fórmulas.

8. *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{8}$$

Demostración. Por cuanto $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \neq 0$ y $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Quiere decir, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Aplicando ahora las fórmulas (6) y (1), obtenemos la validez de la igualdad (8).

9. *Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{9}$$

La demostración de esta fórmula es análoga a la de la fórmula (8) y por esta razón no se da aquí.

Ejemplos. 1. Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, y $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, simplifíquese la expresión

$$A = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos\alpha}\ \frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Por cuanto para el ángulo en consideración α

$$\cos\alpha \neq 0, \quad \cos\alpha \neq -1, \quad \cos 2\alpha \neq -1,$$

entonces

$$A=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha},$$

En el caso dado es aplicable la fórmula (9), por eso

$$A=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, si $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ y $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$.

Para cualquier ángulo α del intervalo mencionado sen α es negativo, por lo cual

$$\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

Ahora, al aplicar la fórmula (9), tenemos

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}=-\frac{1}{3}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$.

Demos a conocer algunas fórmulas más que expresan el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un ángulo en términos de la tangente del ángulo de arco mitad.

10. *Para cualquier ángulo α tal que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\tag{10}$$

Demostración. Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se deduce que la igualdad (10) es válida.

11. *Para cualquier ángulo* α *tal, que* $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{11}$$

Demostración. Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se deduce que la igualdad (11) es válida.

12. *Para cualquier ángulo* α *tal*, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, y $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{12}$$

Esta igualdad representa un corolario de la fórmula para la tangente de un ángulo de arco doble.

13. *Para cualquier ángulo* α *tal, que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

Demostración. Para cualquier ángulo α tal, que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se desprende que la igualdad (13) es válida.

Ejemplo. Calcúlese $\dfrac{1}{2+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$, si $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2$.

Según la fórmula (10) tenemos $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{-3}{5}$.

Según la fórmula (11), $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{4}{5}$.

Quiere decir, $\dfrac{1}{2+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{5}{11}$.

Ejercicios

Determínese el signo de los siguientes números (1 . . . 21)

1. $\operatorname{sen}2\cdot\operatorname{sen}4\cdot\operatorname{sen}6$. 2. $\cos 5\cdot\cos 7\cdot\cos 8$.

3. $\operatorname{tg}(-1)\cdot\operatorname{tg}3\cdot\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{tg}(-3)$. 4. $\operatorname{ctg}1\cdot\operatorname{ctg}(-2)\cdot\operatorname{ctg}9\cdot\operatorname{ctg}(-12)$.

5. $\dfrac{\operatorname{sen}(-3)\cdot\cos 4\cdot\operatorname{tg}(-5)}{\operatorname{ctg}6}$. 6. $\dfrac{\operatorname{sen}7\cdot\cos(-8)}{\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{ctg}(-5)}$.

7. $\dfrac{\operatorname{sen}6+\cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)+\operatorname{ctg}(-10)}$. 8. $\dfrac{\operatorname{sen}(-8)+\cos 9}{\cos 11\cdot\operatorname{tg}(-9)}$.

9. $\dfrac{\cos 10\cdot\operatorname{sen}7-\operatorname{tg}10}{\cos(-\sqrt{2})\cdot\operatorname{ctg}(-4)}$. 10. $\dfrac{\operatorname{tg}7\cdot\operatorname{sen}\frac{10}{11}-\cos\frac{17}{2}\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{26}}{\cos(-2)\cdot\operatorname{sen}\sqrt{17}-\operatorname{tg}\sqrt{70}}$.

11. $\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{9}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{tg}1+\operatorname{ctg}(-2{,}5)}$.

12. $\dfrac{\cos 5}{\operatorname{sen} 6}+\operatorname{tg} 11-\operatorname{ctg}\sqrt{49,5}$.

13. $\operatorname{arcsen}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(-10)+\arccos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

14. $\arccos\dfrac{1}{10}\cdot\operatorname{arcctg}(-11,5)-\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

15. $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{112}{5}\right)}$.

16. $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{tg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]+\operatorname{arctg}[\cos(-4)]$.

17. $\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{sen} 10)-\operatorname{arctg}(\cos 10)}{\operatorname{arcsen}[\cos(-8)]\cdot\arccos(\operatorname{sen} 5)}$.

18. $\dfrac{\operatorname{arcsen}(\cos 12)+\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} 7)}{\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\dfrac{14}{5}\right)}+\operatorname{ctg}(-7)$.

19. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right)-\dfrac{\operatorname{arctg}(\cos 4)}{\operatorname{arcctg} 115}+\dfrac{\operatorname{sen}(-10)}{\operatorname{tg} 12}$.

20. $\dfrac{\operatorname{arcsen}[\operatorname{ctg}(-0,3)]\cdot\operatorname{sen}(-9)}{\operatorname{arcsen}[\operatorname{tg}(-0,4)]\cdot\cos(5,8)}+\dfrac{\operatorname{ctg}(-1)}{\operatorname{sen}\sqrt{3}}-\cos\dfrac{13}{2}$.

21. $\dfrac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} 10)+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right]}{\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]}-\dfrac{\operatorname{tg}(-11)\cdot\operatorname{sen}\dfrac{31}{4}}{\cos(-3,5)}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (22 ... ... 101):

22. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\dfrac{3\pi}{4}\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 23. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}+\dfrac{2}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}}$

24. $\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}-\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}}$.

25. $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)}+\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$.

26. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}(-\pi)+\cos\pi}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$.

27. $\cos\left(-100\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(20\pi-\dfrac{5\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(11\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

28. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(112\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}$.

29. $\left[\operatorname{tg}\left(13\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(15\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

30. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\left(-120\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right]}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

31. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\operatorname{tg}(-\pi)-\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}-10\pi\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+10\pi\right)}$.

32. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{113\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos\frac{3\pi}{4}}$.

33. $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{2}\cos(113\pi)+\operatorname{tg}\frac{18\pi}{4}\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$.

34. $\operatorname{sen}\left(-\frac{49\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{51\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{113\pi}{4}\right)$.

35. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{44\pi}{3}\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{4}}$.

36. $\operatorname{sen}\frac{63\pi}{4}\cos\left(-\frac{85\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{49\pi}{6}$.

37. $\cos\frac{181\pi}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{31\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

38. $\cos\frac{37\pi}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{89\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

39. $\dfrac{\cos\frac{57\pi}{6}\operatorname{sen}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)}{2\operatorname{tg}\left(-\frac{115\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{117\pi}{2}\right)}$.

40. $\dfrac{\operatorname{tg}^3(-112\pi)-\cos^2(115\pi)}{\operatorname{sen}^2\frac{119\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{53\pi}{2}}$.

41. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{44\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{51\pi}{6}}{\cos^2\frac{33\pi}{4}+\operatorname{sen}(-10\pi)}$.

42. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

43. $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)-\pi$.

44. $3\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$.

45. $4\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}1-\frac{5\pi}{2}$.

46. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)+\cos[\pi-\operatorname{arctg}(-1)]$.

47. $\operatorname{sen}\left[-\frac{137\pi}{2}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

48. $\operatorname{sen}\left[-\frac{149\pi}{2}+2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right]$.

49. $\operatorname{sen}\left[3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{11\pi}{2}\right]$.

50. $\operatorname{sen}\left[4\arccos(-1)-\frac{117\pi}{6}\right]$.

51. $\operatorname{tg}\left[6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{23\pi}{3}\right]$ 52. $\operatorname{tg}\left(8\arccos 0-\frac{9\pi}{4}\right)$.

53. $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{2}-2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

54. $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos 0\right]$.

55. $\operatorname{ctg}\left[2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}\right]$.

56. $\operatorname{ctg}\left[3\operatorname{arcsen}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

57. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\operatorname{arcsen}0}{3}-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

58. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\operatorname{arcsen}1}{2}+\operatorname{arctg}1\right]$.

59. $\cos\left[4\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}-3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right]$.

60. $\cos\left[5\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}-2\operatorname{arctg}(-1)\right]$.

61. $\cos\left[-3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\cos(-2\operatorname{arctg}0)$.

62. $\dfrac{\cos(\pi-\operatorname{arcsen}0)-\cos[6\operatorname{arcctg}(-1)]}{\operatorname{sen}(2\pi-\operatorname{arcctg}1)}$.

63. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2}-\operatorname{arcctg}3\right)+\cos\left(2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{tg}(-115\pi-\operatorname{arcctg}1)}$.

64. $\dfrac{\operatorname{sen}\left[-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]+\cos(-5\operatorname{arcctg}0)}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-10\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

65. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{11}{12}\right)-\cos\left(\arccos\frac{1}{6}\right)$.

66. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}31)+\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)$.

67. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{21}{29}\right)$. 68. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$. 69. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}7)$.

70. $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)-\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

71. $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 12)+\cos[\operatorname{arcctg}(-2)]$.

72. $\cos[\operatorname{arctg}(-5)]-\operatorname{sen}(\operatorname{arcctg} 3)$.

73. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)$. 74. $\cos(\pi-\operatorname{arctg} 17)$.

75. $\cos\left[\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-4)\right]$.

76. $\cos\left[2\pi-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$. 77. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{10}\right)$.

78. $\operatorname{sen}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$. 79. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg} 81\right)$.

80. $\operatorname{sen}\left(2\pi-3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 81. $\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

82. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 83. $\operatorname{tg}\left[\pi+\operatorname{arcsen}\left(-\frac{2}{17}\right)\right]$.

84. $\operatorname{tg}[2\pi-\operatorname{arcctg}(-5)]$. 85. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$.

86. $\operatorname{ctg}\left[\pi+\arccos\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$. 87. $\operatorname{ctg}\left[\frac{3\pi}{2}-5\operatorname{arcctg}(-1)\right]$.

88. $\operatorname{ctg}[2\pi+\operatorname{arctg}(-11)]$. 89. $\arccos(\cos 2)+\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-1)]$.

90. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 3)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1)$. 91. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$.

92. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)+2\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

93. $$\frac{\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\pi}{\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)}.$$

94. $$\frac{\arccos(\cos\pi)-\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}.$$

95. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2)+\arccos(\cos 10)$.

96. $\arccos[\cos(-9)]-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 7)$.

97. $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 8)$.

98. $\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{4}\right)+\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-7)]$.

99. $$\frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\sqrt{26})+2\pi}{\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)]-3\pi}.$$

100. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10}{3}\right)-2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{24}{5}\right)$.

101. $\arccos[\cos(-5)]+\arccos[\cos(-8)]$.

Demuéstrese la validez de las siguientes igualdades numéricas (**102 . . . 197**):

102. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. 103. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

104. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 105. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

106. $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. 107. $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

108. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

109. $8\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$.

110. $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\operatorname{sen}\frac{\pi}{15}=\frac{1}{16}$.

111. $\cos\frac{\pi}{36}\cos\frac{11\pi}{36}\cos\frac{13\pi}{36}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$.

112. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$.

113. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$. 114. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

115. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{8}$. 116. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{3}$.

117. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$. 118. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$.

119. $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{18}+4\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$.

120. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

121. $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2}$.

122. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}-\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{24}=6+2\sqrt{3}$.

123. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}-8\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}=\sqrt{3}$.

124. $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$.

125. $\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{5\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$.

126. $\frac{\operatorname{sen}^8 10}{8}-\frac{\cos^8 10}{8}-\frac{\operatorname{sen}^6 10}{3}+\frac{\cos^6 10}{6}+\frac{\operatorname{sen}^4 10}{4}=\frac{1}{24}$.

127. $\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}$. 128. $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

129. $\operatorname{arcsen}(\cos 1)=\frac{\pi-2}{2}$. 130. $\operatorname{arcsen}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{6}$.

131. $\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{5}$. 132. $\arccos\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{5\pi}{8}$.

133. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)=\frac{3\pi}{7}$. 134. $\operatorname{sen}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

135. $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

136. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{4}{5}$.

137. $\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)=\frac{56}{65}$.

138. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=-1$.

139. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)=6-2\pi$. 140. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-5))=-5+2\pi$.

141. $\arccos(\cos 9)=9-2\pi$. 142. $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$.

143. $\operatorname{arctg}(-2)+\operatorname{arctg}(-3)=-\frac{3\pi}{4}$.

144. $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}+\operatorname{arcsen}\frac{56}{65}=\pi$.

145. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

146. $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{5}{13}+\operatorname{arcsen}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

147. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi$.

148. $2\operatorname{arcsen}\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}$. 149. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

150. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}3$.

151. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$.

152. $\frac{\cos 10}{1-\operatorname{sen}10}=\frac{1+\operatorname{tg}5}{1-\operatorname{tg}5}$. 153. $2\operatorname{sen}^2 14+\cos(4\cdot 7)=1$.

154. $\frac{2\operatorname{sen}6+\operatorname{sen}12}{2\operatorname{sen}6-\operatorname{sen}12}=\operatorname{ctg}^2 3$. 155. $\frac{\cos 6-\cos 9+\cos 12}{\operatorname{sen}6-\operatorname{sen}9+\operatorname{sen}12}=\operatorname{ctg}9$.

156. $\frac{\operatorname{sen}8-\operatorname{sen}10-\operatorname{sen}12+\operatorname{sen}14}{\cos 4-\cos 6-\cos 8+\cos 10}=\frac{\operatorname{sen}11}{\cos 7}$.

157. $\operatorname{sen}^6\sqrt{7}+\cos^6\sqrt{7}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2\sqrt{7}=1$.

158. $\operatorname{sen}\sqrt{2}\operatorname{sen}(2-\sqrt{2})+\cos^2 1+\operatorname{sen}^2(1-\sqrt{2})=1$.

159. $\frac{1+\operatorname{sen}4\sqrt{3}}{1-2\operatorname{sen}^2 2\sqrt{3}}+1=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2\sqrt{3}}$.

160. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{6}\right)+\operatorname{sen}^2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}^2 2\sqrt{6}-\operatorname{sen}\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=1.$$

161. $\operatorname{sen}8-\cos 8\operatorname{tg}4=\operatorname{tg}2$.

162. $4\operatorname{sen}(\sqrt{5}+\pi)\operatorname{sen}\left(\sqrt{5}+\frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\sqrt{5}\right)=\operatorname{sen}3\sqrt{5}$.

163. $\frac{1-\operatorname{sen}^6 1-\cos^6 1}{1-2\operatorname{sen}^2 2-\sqrt{3}\operatorname{sen}4}=\frac{3}{2}$.

164. $\dfrac{\cos 2\sqrt{11}-\cos 6\sqrt{11}+\cos 10\sqrt{11}-\cos 14\sqrt{11}}{\operatorname{sen} 2\sqrt{11}+\operatorname{sen} 6\sqrt{11}+\operatorname{sen} 10\sqrt{11}+\operatorname{sen} 14\sqrt{11}}=\operatorname{tg} 2\sqrt{11}$.

165. $\dfrac{\operatorname{sen} 23+\cos 23-\operatorname{sen} 69-\cos 69}{2\operatorname{sen} 46+4\operatorname{sen}^2 23-2}=\operatorname{sen} 23$.

166. $\dfrac{1+\cos 17+\cos 34+\cos 51}{2\cos 17+4\cos^2 17-2}=\cos 17$.

167. $\operatorname{sen} 2+\operatorname{sen} 4+\operatorname{sen} 6=4\operatorname{sen} 3\cos 2\cos 1$.

168. $\operatorname{sen} 2\sqrt{13}+\operatorname{sen} 4\sqrt{13}-\operatorname{sen} 6\sqrt{13}=4\operatorname{sen}\sqrt{13}\operatorname{sen} 2\sqrt{13}\operatorname{sen}\sqrt{13}$.

169. $\dfrac{\operatorname{tg} 1+\operatorname{ctg} 1}{1+\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1}=2\operatorname{ctg} 2$. 170. $\dfrac{3-4\cos 2+\cos 4}{3+4\cos 2+\cos 4}=\operatorname{tg}^4 1$.

171. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\cos 6+\cos^2\operatorname{sen} 6}{\operatorname{sen}^3 1\cos 3+\cos^3 1\operatorname{sen} 3}=2\cos 4$.

172. $\dfrac{\cos\left(1+\dfrac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(1-\dfrac{11\pi}{6}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-1\right)}=\sqrt{3}\operatorname{ctg} 1$.

173. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 1)(\operatorname{ctg}^2 1-1)}=-2\operatorname{ctg} 2$.

174. $(\cos 2\operatorname{tg} 1-\operatorname{sen} 4)(\cos 4\operatorname{ctg} 2+\operatorname{sen} 4)=-1$.

175. $\dfrac{\operatorname{sen} 13+\operatorname{sen} 14+\operatorname{sen} 15+\operatorname{sen} 16}{\cos 13+\cos 14+\cos 15+\cos 16}=\operatorname{tg}\dfrac{29}{2}$.

176. $1-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-3\right)-2\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}-3\right)$.

177. $\dfrac{\operatorname{sen}(2\sqrt{2}+1)+\operatorname{sen}(2\sqrt{2}-1)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\sqrt{2}\right)}{\cos(2\sqrt{2}+1)+\cos(2\sqrt{2}-1)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\sqrt{2}\right)}=\operatorname{tg} 2\sqrt{2}$.

178. $\dfrac{1+\cos(4-2\pi)+\cos\left(4-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(\pi+4)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+4\right)}=\operatorname{ctg} 2$.

179. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\,(1+\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)(1-\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)}{\cos 2\,(1+\sec 2+\operatorname{tg} 2)(1-\sec 2+\operatorname{tg} 2)}=\cos 2$.

180. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)}{\sec^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)-1}+\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\sqrt{3}\right)}{\operatorname{cosec}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)-1}=1$.

181. $8\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}-2\right)\operatorname{sen} 3\cos 9=\operatorname{sen} 18$.

182. $\operatorname{tg} 3-\operatorname{tg} 2-\operatorname{tg} 1=\operatorname{tg} 3\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1$.

183. $\dfrac{1-2\cos^2 7}{2\operatorname{tg}\left(7-\dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+7\right)}=1$.

184. $1+\operatorname{sen} 2-2\cos^2 1=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

185. $1-\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\right)-\cos\left(2-\dfrac{3\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\operatorname{sen} 1\cos\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

186. $6\,\mathrm{sen}^2 1-\cos 2-1=-8\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(1-\frac{\pi}{3}\right)$.

187. $2\cos^2 3+2\cos 6-3=8\cos\left(3+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3-\frac{\pi}{3}\right)$.

188. $\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-6\right)+\mathrm{sen}\,(\pi-6)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)-\cos\,(2\pi-6)\right]^2=2$.

189. $\left[\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]^2+\left[\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{4}+\mathrm{ctg}\,(\pi-1)\right]^2=\frac{2}{\mathrm{sen}^2 1}$.

190. $2\,(\mathrm{sen}^6 5+\cos^6 5)-3\,(\mathrm{sen}^4 5+\cos^4 5)+1=0$.

191. $\mathrm{ctg}\,\frac{1}{8}-\mathrm{tg}\,\frac{1}{8}-2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}-4\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}=8\,\mathrm{ctg}\,1$.

192. $\mathrm{tg}\,2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)+\mathrm{tg}\,2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=1$.

193. $\mathrm{sen}\,(\mathrm{ctg}\,5)+\mathrm{sen}\,(\mathrm{tg}\,5)=2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,10}\right)\cos\,(\mathrm{ctg}\,10)$.

194. $1+\cos 2+\cos 4+\cos 6=4\cos 1\cos 2\cos 3$.

195. $\mathrm{sen}\,2+\mathrm{sen}\,4-\mathrm{sen}\,6=4\,\mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,2\,\mathrm{sen}\,3$.

196. $\mathrm{sen}^2 5+\mathrm{sen}^2\sqrt{2}+2\,\mathrm{sen}\,5\,\mathrm{sen}\sqrt{2}\cos\,(5+\sqrt{2})=\mathrm{sen}^2\,(5+\sqrt{2})$.

197. $\frac{\cos 1+\mathrm{sen}\,1}{\mathrm{sen}\,1-\cos 1}-\frac{1+2\cos^2 1}{\cos^2 1\,(\mathrm{tg}^2 1-1)}=\frac{2}{1+\mathrm{tg}\,1}$.

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas (198 . . . 244):

198. $\mathrm{sen}\,1+\cos 1>1$. **199.** $\mathrm{sen}\,1+\mathrm{tg}\,1>2$.

200. $\mathrm{sen}\,\frac{2+\sqrt{3}}{2}>\frac{\mathrm{sen}\,2+\mathrm{sen}\sqrt{3}}{2}$.

201. $\cos\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}>\frac{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$.

202. $\mathrm{sen}\left(\cos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<\cos\left(\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

203. $\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}\sqrt{2})<\cos\,(\cos\sqrt{2})$.

204. $\frac{1}{\mathrm{sen}\left(1+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)}>\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

205. $\left(1+\frac{1}{\mathrm{sen}\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\sqrt{2}}\right)>3+2\sqrt{2}$.

206. $\frac{\mathrm{sen}\,(1+\sqrt{2})}{\mathrm{sen}\,1\cdot\mathrm{sen}\sqrt{2}}>\frac{2}{\mathrm{sen}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

207. $\cos 1+\cos\sqrt{2}+\cos\,(\pi-1-\sqrt{2})<\frac{3}{2}$.

208. $\mathrm{sen}^2\,(\pi-\sqrt{2}-\sqrt{3})>\mathrm{sen}\,2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,2\sqrt{3}$.

209. $\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi-1-\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{8}$.

210. $4\,\mathrm{sen}\,3\,(3+\sqrt{5})+5>4\cos 2\,(3+\sqrt{5})+5\,\mathrm{sen}\,(3+\sqrt{5})$.

211. $-4<\cos 2\sqrt{7}+3\operatorname{sen}\sqrt{7}<\frac{17}{8}$. 212. $\frac{1}{4}<\operatorname{sen}^2 12+\cos^6 12<1$.

213. $\frac{1}{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{2\pi-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}>6$.

214. $\arcsin\frac{2}{5}<\arcsin\frac{3}{7}$. 215. $\arccos\frac{3}{7}<\arccos\frac{1}{3}$.

216. $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\leqslant\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 217. $\operatorname{arcctg}(3\sqrt{2})<\operatorname{arcctg}4$.

218. $2\operatorname{arcctg}4+\operatorname{arcctg}3>\frac{\pi}{4}$. 219. $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}>\frac{\pi}{4}$.

220. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)<\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$. 221. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}>\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{3}{5}$.

222. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)>\frac{3}{2}+\arcsin\frac{2}{3}$. 223. $\operatorname{arcctg}(-3)<\frac{8}{3}-\operatorname{arctg}3$.

224. $3\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-2\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)>\frac{2\pi}{3}$.

225. $\operatorname{arcctg}\frac{4}{5}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}<\frac{3\pi}{4}$. 226. $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}>\arccos\frac{4}{5}-\arcsin\frac{1}{3}$.

227. $\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{12}{13}+\operatorname{crasen}\frac{1}{4}>\frac{\pi}{2}$.

228. $12\cos^2\frac{1}{10}+7\operatorname{sen}\frac{1}{10}<13$. 229. $\operatorname{sen}4+\cos 4>-\sqrt{2}$.

230. $\operatorname{ctg}^3 3+\operatorname{ctg}^2 3-\operatorname{ctg}3-1<0$.

231. $\cos\sqrt{2}+\cos 2\sqrt{2}+\cos 3\sqrt{2}<0$.

232. $2\cos 1+\operatorname{sen}1>\operatorname{tg}\frac{1}{2}$. 233. $\operatorname{tg}^2 7+\operatorname{ctg}^2 7>2$.

234. $2\cos\frac{15}{2}\left(\cos\frac{15}{2}-\sqrt{8}\operatorname{tg}\frac{15}{2}\right)<5$. 235. $\frac{\cos^2\frac{1}{3}}{\cos^2\frac{1}{6}}>3\operatorname{tg}\frac{1}{6}$.

236. $\frac{2+\sqrt{2}-4\cos^2\frac{19\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}-\cos\frac{19\pi}{6}}>2$. 237. $4\operatorname{sen}\frac{3}{8}\operatorname{sen}\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{9}{8}<\operatorname{sen}\frac{3}{2}$.

238. $2\cos^2\sqrt{4}-\operatorname{sen}\sqrt{3}+\operatorname{sen}3\sqrt{3}<1$.

239. $6\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{2}<2\operatorname{sen}^2\sqrt{2}+3\operatorname{tg}^2\sqrt{2}$.

240. $\sqrt{5-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}}>6\operatorname{sen}\frac{1}{2}-1$. 241. $\sqrt{2+4\cos 2}>\frac{1}{2}+3\cos 2$.

242. $\sqrt{\operatorname{sen}7}+\sqrt{\cos 7}>1$.

243. $\sqrt{3+2\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{4}-\operatorname{tg}^2\frac{\sqrt{3}}{4}}>\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

244. $\cos 1+\cos 3>\cos 2+\cos 4$.

Simplifíquese (245 . . . 262):

245. $\operatorname{sen}^2(\pi-9)+\operatorname{tg}^2(\pi-9)\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+9\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+9\right)\cos(9-2\pi)$.

246. $1-\operatorname{sen}(1-2\pi)\cos\left(1-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}(\pi-1)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)-2\cos^2(\pi+1)$.

247. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{18}+\operatorname{sen}^2\frac{11\pi}{18}\cos^2\frac{25\pi}{18}+\operatorname{sen}^2\frac{29\pi}{18}\cos^2\frac{34\pi}{18}$.

248. $\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{9}-\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right)+\left(\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{19\pi}{18}\right)\times$
$\times\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$.

249. $\dfrac{\operatorname{sen}(4-\pi)\cos(4-2\pi)\operatorname{sen}(2\pi-4)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-4\right)\operatorname{ctg}(\pi-4)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\right)}$.

250. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{1}{4}\right)}$.

251. $\cos(2\sqrt{2}-2\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}(\pi+\sqrt{2})$.

252. $\dfrac{\operatorname{sen}(-5)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+5\right)}+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+5\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-5\right)$. 253. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 7}{1+\operatorname{tg}^2 7}\cdot\operatorname{tg}14$.

254. $2\operatorname{sen}\sqrt{19}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{19}+2\cos4\sqrt{19}\cdot\cos10\sqrt{19}$.

255. $\operatorname{sen}3\sqrt{21}+2\cdot\operatorname{sen}5\sqrt{21}\cdot\cos2\sqrt{21}$.

256. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\operatorname{sen}1\cdot\cos2$. 257. $\dfrac{1+\operatorname{tg}2\sqrt{29}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{29}}{\operatorname{ctg}\sqrt{29}+\operatorname{tg}\sqrt{29}}$.

258. $\dfrac{\operatorname{sen}2\sqrt{7}+\operatorname{tg}2\sqrt{7}}{\cos2\sqrt{7}+\operatorname{ctg}2\sqrt{7}}$. 259. $\dfrac{\operatorname{sen}^4 1+\cos^4 1-1}{\operatorname{sen}^6 1+\cos^6 1-1}$.

260. $\dfrac{\cos2\sqrt{5}-\operatorname{sen}2\sqrt{5}\cdot\operatorname{ctg}2\sqrt{5}}{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}$.

261. $\operatorname{ctg}^2 10-\operatorname{tg}^2 10-8\cos20\operatorname{ctg}20$.

262. $\dfrac{\cos3+\sqrt{3}\operatorname{sen}3}{\cos3-\sqrt{3}\operatorname{sen}3}$.

Hállense tales A máximo y B mínimo que para cualquier β se verifiquen las siguientes desigualdades dobles (263 . . . 265):

263. $A\leqslant\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos2\beta\cos4\beta\leqslant B$.

264. $A\leqslant\operatorname{sen}\beta+2\cos\beta\leqslant B$.

265. $A\leqslant4\operatorname{sen}2\beta-3\cos2\beta\leqslant B$.

266. Demuéstrese que la igualdad $(\operatorname{sen}x)^\alpha+(\cos x)^\alpha=1$ se verifica para cualquier x sólo en el único caso, en que $\alpha=2$.