CAPÍTULO

VI

FUNCIONES Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

Al analizar las relaciones cuantitativas de los fenómenos que ocurren en el mundo real hemos de tratar valores numéricos de diferentes magnitudes, por ejemplo, de tiempo, camino, valocidad, aceleración, volumen, etc. En dependencia de las condiciones que se analizan, algunas de las magnitudes tienen valores numéricos constantes y las otras, variables. Tales magnitudes se denominan *constantes* y *variables*, respectivamente. Por ejemplo, al realizarse un movimiento uniforme, la velocidad v es constante, mientras que el tiempo t y el camino S son variables, con la particularidad de que $S = vt$. Durante la caída libre de un cuerpo que se tira sin velocidad inicial, la aceleración de la gravedad g es una magnitud constante, mientras que el tiempo del movimiento t y el trayecto recorrido S son variables, con la particularidad de que $S = \frac{gt^2}{2}$.

El estudio de los fenómenos que nos rodean muestra que las magnitudes variables cambian no de manera independiente una de la otra, sino que la variación de los valores numéricos de algunas de ellas lleva tras de sí el cambio de los valores de otras magnitudes. Aquí se analizarán solamente los *pares de variables*, los valores de una de las variables (*dependiente*) de los cuales varían en función de los valores de la otra (*independiente*). En la dependencia entre dos variables que se analiza pueden figurar, además de las propias variables, ciertas magnitudes que no varían y se llaman, corrientemente, *constantes*. En los ejemplos citados más arriba es natural considerar que t es una variable independiente, S, una variable dependiente, mientras que $\frac{g}{2}$ y v son constantes. Expongamos otros ejemplos de pares de magnitudes variables: el área de un círculo $S = \pi R^2$, (R es el radio y π, una constante), donde S varía en función de R; la ley de Boyle—Mariotte: $p = \frac{c}{v}$ (V es el volumen de cierta cantidad de gas, p es la presión de este gas, c es una constante), donde p varía en función de V.

La variable independiente no siempre toma valores numéricos cualesquiera, sino aquellos que se predeterminan por las condiciones del problema en consideración. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo arrojado sin velocidad inicial desde la altura H el tiempo del movimiento t puede tomarse sólo dentro del intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

Subrayemos que en los ejemplos aducidos a cada valor de la variable independiente le corresponde *únicamente* un valor de la variable dependiente. En lo que sigue se considerará sólo tal dependencia de los pares de variables.

§ 1. Definiciones y ejemplos

Concepto de función. Sea dado un conjunto de números X y supongamos que se indica cierta regla (ley), designada mediante la letra f, de acuerdo con la cual *a cada valor de la magnitud* x (variable independiente) del conjunto X *se le pone en correspondencia un valor bien determinado de la magnitud* y (variable dependiente). Suele decirse en este caso que *viene dada la función* $y = f(x)$ *con el campo de definición* X, o bien que *viene dada la función* $y = f(x)$ *definida en el conjunto* X. El conjunto Y de todos los valores que toma en este caso la variable se denomina *campo de variación de la función* $y = f(x)$.

En el presente libro se analizarán, principalmente, las funciones, para las cuales la ley que establece correspondencias se define mediante las fórmulas. Tal método de definir las funciones se llama analítico.

Ejemplos de funciones.

1. Sea n un número natural fijo, entonces, a todo número real a se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) el número real a^n. Por consiguiente, podemos decir que aquí se ha indicado una ley, de acuerdo con la cual a todo valor de x, perteneciente al conjunto de todos los números reales, se le pone en correspondencia un valor numérico x^n. Con otras palabras, se ha fijado la función $y = x^n$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

2. Sea $(-n)$ un número negativo fijo entero, entonces a todo número real a, distinto de cero, se le puede poner en correspondencia v éase el cap. IV) un solo número real a^{-n}. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda dada la función $y = x^{-n}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales distintos de cero.

3. Sea (α) un número positivo fijo no entero, entonces a todo número no negativo a se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número a^{α}. Por consiguiente, mediante esta correspondencia queda definida la función $y — = x^{\alpha}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números no negativos.

4. Sea $(-\alpha)$ un número negativo fijo no entero, entonces a todo número positivo a se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $a^{-\alpha}$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = x^{-\alpha}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números positivos.

5. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces, a todo número real b se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número a^b. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = a^x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

6. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces a todo número positivo b se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $\log_a b$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = \log_a x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números positivos.

7. A todo número real α (como medida radial del ángulo α) se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número sen α. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{sen} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

8. A todo número real α (en calidad de medida radial del ángulo α) se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número $\cos\alpha$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \cos x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

9. A todo número real α (en calidad de medida radial del ángulo α) tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera, se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número tg α. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{tg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x = \frac{\pi}{2} = \pi k$, donde k es un número entero cualquiera.

10. A todo número real α (como medida radial del ángulo α), salvo $\alpha = \pi m$, donde m es un número entero cualquiera, se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número ctg α. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{ctg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x = \pi m$, donde m es un número entero cualquiera.

11. A todo número real a del intervalo $-1 \leqslant a \leqslant 1$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arcsen a. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{arcsen} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales que pertenecen al segmento $[-1; 1]$.

12. A todo número real a del intervalo $-1 \leqslant a \leqslant 1$ se le puede

poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arccos a. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \arccos x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales que pertenecen al segmento $[-1; 1]$.

13. A todo número real a se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arctg a. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{arctg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

14. A todo número real a se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arcctg a. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{arcctg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

Observación. Las funciones examinadas en los ejemplos 1 . . . 14 llevan el nombre de *funciones elementales fundamentales*.

15. Examinemos una función definida para cualquier x real de acuerdo con la regla: $y = 1$, si x es un número racional; $y = 0$, si x es un número irracional. Esta función recibe el nombre de función de Dirichlet. En forma breve esta función se escribe así:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

16. Veamos una función definida para cualquier número real x de acuerdo con la regla: $y = 1$, si x es un número positivo; $y = -1$, si x es un número negativo; $y = 0$, si $x = 0$. Esta función se llama signo de x, y se denota así: $y = \operatorname{sign} x$. La definición de esta función se escribe brevemente en la forma siguiente:

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ si } x < 0, \\ 0, \text{ si } x = 0, \\ 1, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

17. Examinemos una función, definida para cualquier x real de acuerdo con la regla: $y = g$, si x es un número positivo, con la particularidad de que $x = n + \alpha$, donde n es un número natural y $0 \leqslant \alpha < 1$; $y = -m$, si x es un número negativo, con la particularidad de que $x = -m + \beta$, donde m es un número natural y $0 \leqslant \beta < 1$; $y = 0$, si $0 \leqslant x < 1$. Esta función se llama parte entera de x y se denota así: $y = [x]$. En forma breve la función $y = [x]$ puede ser definida del modo siguiente: $[x]$ es el máximo número entero, que es inferior o igual a x.

18. Si a todos los números reales se les ha puesto en correspondencia un mismo número real c, se dice que queda definida la función $y = c$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

Campo de existencia y campo de variación de una función. La primera cuestión que requiere respuesta inmediata al analizar una función se refiere al campo de definición y al campo de variación de esta función.

De la definición de función se desprende que la función $y = f(x)$ ha de prefijarse junto con su campo de definición X. Subrayemos que el campo de definición de una función se puede prefijar o bien por las condiciones del problema que se resuelve, o bien por el sentido físico del fenómeno que se estudia, o bien por los convenios matemáticos.

No obstante, a menudo ocurre que al prefijar analíticamente una función $y = f(x)$, su campo de definición no se indica de manera explícita. En estos casos la función se examina en su campo de definición natural.

Se llama *campo de definición natural* o *campo de existencia* de la función $y = f(x)$, dada analíticamente, el conjunto de todos los valores reales de la variable independiente x, para cada uno de los cuales la función toma valores reales. Así pues, el campo de existencia de una función se determina por la propia ley (fórmula) que define la función, mientras que el campo de definición de la misma se prefija por las condiciones o por el sentido del problema a resolver, es decir, el campo de definición de una función lo puede constituir cualquier parte del campo de existencia de la función, o bien los campos mencionados pueden coincidir completamente. Por ejemplo, para la función $y = \frac{gx^2}{2}$ el campo de existencia es $(-\infty; +\infty)$, mientras que el campo de definición de la función, si un cuerpo se deja caer desde la altura H, será $\left[0; \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$

De este modo, siempre cuando se dice que está dada una función $y = f(x)$, se considera que ya está prefijado también su campo de definición X; este último o bien se indica explícitamente o bien existe el campo de existencia de dicha función (y en este caso se debe encontrar de antemano).

En lo que se refiere al campo de variación de la función $y = f(x)$, éste se calcula a base del campo de definición ya prefijado.

Ejemplos. 1. Sea dada la función $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - 3}$. El campo de existencia de esta función es un conjunto vacío, es decir, $X = \phi$, por consiguiente, el campo de variación es también un conjunto vacío, es decir, $Y = \phi$.

2. Sea dada la función $y = \sqrt{\log_2 \operatorname{sen} x}$. El campo de existencia de esta función es el conjunto de todos los números $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera, es decir, $X = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$. Es fácil ver que el campo de variación consta de un solo número, a saber, del punto cero, es decir, $Y = \{0\}$.

3. Sea dada la función $y = \sqrt{1 - x^2}$. El campo de existencia de esta función es el segmento $[-1; 1]$, es decir, $X = [-1; 1]$. Es fácil ver que el campo de variación es el segmento $[0; 1]$, es decir, $Y = [0; 1]$.

4. Sea dada la función $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. El campo de existencia de esta función es el intervalo $(-1; 1)$, es decir, $X = (-1, 1)$. Es fácil ver que el campo de variación es el intervalo $[1; +\infty)$, es decir, $Y = [1; +\infty)$.

5. Sea dada la función $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, cuyo campo de definición es $X=\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, entonces es fácil ver que el campo de variación es el segmento $[1; 2]$, es decir, $Y=[1; 2]$.

Acotación de las funciones. La función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se llama *acotada inferiormente*, si existe tal número A, que $A \leqslant f(x)$, cualquiera que esea $x \in X$.

Ejemplo. La función $y = a^x$ está acotada inferiormente en todo el campo de existencia, puesto que (véase el cap. IV) $0 < a^x$ para cualquier x real.

La función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se llama *acotada superiormente* si existe tal número B, que $f(x) \leqslant B$ para cualquier $x \in X$.

Ejemplo. La función $y=\sqrt{1-x^2}$ está acotada superiormente en todo el campo de existencia, puesto que $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, para cualquier x tal que $x \in [-1; 1]$.

La función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se denomina *acotada*, si existe un número $M > 0$ tal, que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in X$.

Ejemplo. La función $y = \operatorname{sen} x$ está acotada en todo el campo de existencia, puesto que $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ para cualquier x real.

Se puede demostrar que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, está acotada en dicho conjunto si, y sólo si, está simultáneamente acotada en este conjunto tanto superior como inferiormente.

Ejemplo. La función $y=\sqrt{1-x^2}$ está acotada en el campo de existencia $X = [-1; 1]$, pusesto que en este conunto está acotada inferiormente por el cero, y superiormente, por la unidad.

Paridad e imparidad de las funciones. Se dice que un conjunto X es *simétrico respecto del origen de coordenadas*, si el conjunto X es tal, que $(-x) \in X$ para cualquier $x \in X$.

La función $y = f(x)$ se denomina *par*, si el campo de su definición es un conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas y si $f(x) = f(-x)$ para cualquier $x \in X$.

Ejemplos de funciones pares:

$$y=x^2, \ y=\cos x, \ y=\sqrt{1-x^2},$$
$$y=\frac{1}{1+x^2}, \ y=8^{x^2}.$$

De cualquier función par $y = f(x)$, con campo de definición X, se dice que es *simétrica respecto del eje de ordenadas*, puesto que, cualquiera que sea $x \in X$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$ son simétricos con relación al eje Oy.

La función $y = f(x)$ se denomina *impar*, si el campo de su definición X es un conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas y si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in X$.

Ejemplos de funciones impares:

$$y = x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = x^3, \quad y = \operatorname{arctg} x.$$

De cualquier función impar $y = f(x)$, que dispone del campo de definición X, se dice que es *simétrica respecto del origen de coordenadas*, puesto que, cualquiera que sea $x \in X$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, -f(x))$ son simétricos con relación al origen de coordenadas.

A la par con las funciones pares e impares existen también funciones que no son ni unas ni otras, por ejmplo, las funciones $y = 2^x$, $y = \lg x$, $y = \arccos x$, $y = \sqrt{x}$.

Teorema 1. *Toda función definida en un conjunto X, simétrico respecto del origen de coordenadas, puede ser representada en forma de la suma de dos funciones, cada una de las cuales está definida en el mismo conjunto X, y una de las cuales es par y la otra, impar.*

Demostración. Supongamos que la función $y = f(x)$ dispone del campo de definición X, simétrico respecto del origen de coordenadas. Mostremos que existen las funciones $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$, cada una de las cuales queda definida en el mismo conjunto X y son tales, que $y = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$, donde $y = \varphi(x)$ es una función par, mientras que $y = \psi(x)$ es impar. Supongamos que

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Está claro que cada una de estas funciones queda definida en el conjunto X y que $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, como también $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. El teorema está demostrado.

Ejemplo. La función $y = 2^x$ puede ser representada como la suma de dos funciones $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $y = \psi(x)$, donde $\psi(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, con la particularidad de que la función $y = \varphi(x)$ es par, y la función $y = \psi(x)$, impar.

Observación. A la par con el concepto de función par, es decir, de función simétrica respecto del eje de ordenadas, se puede introducir una noción más general de una función, simétrica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$. Suele decirse que *el conjunto X es simétrico respecto del punto* $(a, 0)$, si dicho conjunto es tal, que el punto $(2a - x) \in X$ para cualquier $x \in X$.

Una función $y = f(x)$ se llama *simétrica respecto de la recta vertical que pasa opr el punto de coordenadas* $(a, 0)$, si el campo de su definición es un conjunto simétrico respecto del punto $(a, 0)$ y si para todo x perteneciente al campo de definición se verifica $f(2a - x) = f(x)$.

Ejemplo. La función $y = \operatorname{sen} x$ es simétrica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $(\pi/2, 0)$. En efecto, el campo de definición de esta función lo constitue toda la recta numérica, por consiguiente, dicho conjunto es simétrico respecto de culquier punto, incluido el punto $\pi/2$, mientras que la igualdad $\operatorname{sen} [2(\pi/2) - x] = \operatorname{sen} x$ se verifica para cualquier x real.

Crecimiento y decrecimiento de las funciones. Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se denomina *creciente en este conjunto*, si para cualquier par de números x_1 y x_2 de dicho conjunto de la desigualdad $x_1 < x_2$ proviene que $f(x_1) < f(x_2)$.

Ejemplos. 1. La función $y— = x$ es creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y = x^2$ es creciente en el intervalo $[0; \infty)$.

3. La función $y = \operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2)$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se denomina *decreciente en este conjunto*, si para cualquier par de números x_1 y x_2, pertenecientes a dicho conujnto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplos. 1. La función $y = (1/2)^x$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y = \operatorname{sen} x$ es decreciente en el intervalo $[\pi/2; 3\pi/2]$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, se denomina *no decreciente en este conjunto*, si para cualquier par de números x_1 y x_2, pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Ejemplo. La función $y = \sqrt{x + |x|}$ es no decreciente en el intervalo $(-\infty; +\infty)$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conujnto X, se denomina *no creciente en este conjunto*, si para cualquier par de números x_1 y x_2, pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Ejemplo. La función $y = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 0, \\ 0, & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$ es no creciente dentro del intervalo $(-\infty; +\infty)$.

Las funciones crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes llevan el nombre de *funciones monótonas*. Las funciones crecientes y decrecientes se llaman *estrictamente monótonas*.

Periodicidad de las funciones. Una función $y = f(x)$ se llama *periódica*, si existe tal número $T \neq 0$ que para cualquier x, perteneciente al campo de definición de la función $y = f(x)$, los números $(x + T)$ y $(x - T)$ también integran el campo de definición y para todo x del campo de definición se verifica $f(x + T) = f(x)$.

Observación. Para una función periódica tiene lugar la igualdad

$f(x - T) = f(x)$. En efecto, la función $y = f(x)$ en el punto $(x - T)$ está definida y $f(x) = f[(x - T) + T] = f(x - T)$.

Teorema 2. *Si un número T es el período de la función $y = f(x)$, entonces el número $Q = mT$, donde m es cualquier número entero y fijo distinto de cero, también será período de dicha función.*

Demostración. Mostremos que para todo x perteneciente al campo de definición de la función $y = f(x)$ y para cualquier n natural:

a) los puntos $(x + nT)$ y $(x - nT)$ pertenecen al campo de definición de la función $y = f(x)$;

b) $f(x) = f(x + nT)$ y $f(x) = f(n - nT)$.

Sea $n = 1$, entonces, de acuerdo con la definición y la observación:

a) los puntos $(x + T)$ y $(x - T)$ pertenecen al campo de definición de la función $y = f(x)$;

b) $f(x) = f(x + T)$ y $f(x) = f(x - T)$.

Supongamos que para $n = k$ la afirmación a) es válida. Demostremos que ella queda válida para $n = k + 1$. Efectivamente, por hipótesis, los puntos $(x + kT)$ y $(x - kT)$ pertenecen el campo de definición de la función $y = f(x)$, y T es el período de la última. Por consiguiente, los puntos $[(x + kT) + T]$ y $[(x - kT) - T]$, es decir, los puntos $[x + (k + 1)T]$ y $[x - (k + 1)T]$ pertenecen al campo de definición de la misma función.

Así pues, para cualquier x del campo de definición de la función $y = f(x)$ el punto $(x + mT)$, donde m es un número entero cualquiera distinto de cero, pertenece al campo de definición de la función citada.

Supongamos que la afirmación b) es válida para todo $n = k$, es decir, que $f(x) = f(x + kT)$ y $f(x) = f(x - kT)$. Mostremos que la afirmación es válida para $n = k + 1$. En efecto, como T es el período de la función $y = f(x)$, entonces para el punto $(x + kT)$ tenemos $f[(x + kT) + T] = f(x + kT)$, mas, por hipótesis, $f(x) = f(x + kT)$, por consiguiente, $f(x) = f[x + (k + 1)T]$. Análogamente, para el punto $(x - kT)$ se demuestra que $f(x) = f[x - (k + 1)T]$, es decir, la afirmación b) queda demostrada para todo m entero distinto de cero.

Así pues, queda demostrado el teorema 2.

Ejemplo. 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ tiene como su período el número $T = 2\pi$, puesto que para cualquier x los números $(x + 2\pi)$ y $(x - 2\pi)$ integran el dominio de definición de esta función y $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$.

2. La función $y = x - [x]$ tiene como período el número $T = 1$, puesto que está definida para cualquier x, y $(x + 1) - [x + 1] = x - [x]$.

3. Una función definida tal como viene abajo:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional cualquiera,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional cualquiera} \end{cases}$$

tiene como período cualquier número racional.

4. La función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ no es periódica, puesto que, por ejemplo, para el número $x = 0$ el número $x - T$ (si $T > 0$) o el número $x + T$ (si $T < 0$) no pertenecen al campo de definición de esta función.

El número T se denomina *período principal*, si es positivo y mínimo entre todos los períodos positivos.

Hemos de notar que la función aducida en el ejemplo 3 no tiene período principal.

Valores máximo y mínimo de las funciones. Supongamos que una función $y = f(x)$ está definida en el conjunto X. Si existe tal $x_0 \in X$, que para cualquier $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \geqslant f(x_0)$, se dice que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto X, toma para $x = x_0$, el *valor mínimo* $y_0 = f(x_0)$.

Si existe tal $x_0 \in X$, que para cualquier $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \leqslant f(x_0)$, se dice que la función $y = f(x)$ definida en el conjunto X toma, para $x = x_0$, el *valor máximo* $y_0 = f(x_0)$.

Ejemplos. 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ toma en el intervalo $[0, 2\pi]$ su valor máximo $y = 1$ cuando $x = \pi/2$, y el valor mínimo, $y = -1$ cuando $x = 3\pi/2$.

2. La función $y = x^2$ toma en el intervalo $(-\infty; +\infty)$ el valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 0$, pero no existe tal x del campo de existencia de la función, donde ella tome el valor máximo.

3. La función $y = 2^x$ en el intervalo $(-\infty; +\infty)$ no adquiere ni el valor máximo, ni tampoco el mínimo.

4. La función $y = 2^x$ toma en el intervalo $[0; 1]$ su valor mínimo $y = 1$, cuando $x = 0$, y el valor máximo $y = 2$, cuando $x = 1$.

Gráfica de una función. Introduzcamos en un plano el sistema rectangular de coordenadas xOy y examinemos una función $y = f(x)$. Asignando a x los valores sucesivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, obtendremos los valores correspondientes de $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ Marquemos en el plano los puntos cuyas coordenadas son (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), $\ldots$.

Se denomina *gráfica de la función* $y = f(x)$ un conjunto de puntos en el plano que satisface las siguientes condiciones:

a) todo punto con las coordenadas (x_0, y_0), donde $y_0 = f(x_0)$, pertenece a este conjunto;

b) todo punto perteneciente a dicho conjunto de puntos tiene tales coordenadas (x_1, y_1), que $y_1 = f(x_1)$.

Dicho de otra forma, la *gráfica de la función $y = f(x)$ es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y = f(x)$, y no contiene otros puntos.*

Por ejemplo, la gráfica de la función $y = \sqrt{\log_2 \operatorname{sen} x}$ será el conjunto de puntos del plano $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 0\right)$, donde k es un número entero cualquiera, y sólo de estos puntos.

Análisis de las funciones. Si para una función dada $y = (x)$ se han estudiado todas las propiedades mencionadas más arriba, suele decirse que se ha realizado *el anláisis de la función* $y = f(x)$.

Así pues, al analizar una función, se debe responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el campo de existencia de la función?

b) ¿Cuál es el campo de variación de la función?

c) ¿Está acotada o no la función?

d) ¿Toma la función los valores máximo y mínimo?

e) ¿Es periódica?

f) ¿Es la función par o impar o ni una ni otra?

g) ¿Tiene la función intervalos, donde es monótona?

h) ¿Hay puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas?

i) ¿Cuál es la gráfica de la función?

Observación. El carácter ilustrativo de la gráfica hace de ella un medio auxiliar insustituible del análisis de una función, pero la gráfica sólo ilustra las propiedades de la función y no las demuestra.

§ 2. Funciones elementales fundamentales

En este párrafo se analizarán todas las funciones elementales fundamentales.

Función lineal $y = x$. La dependencia $y = x$ se denomina *directamente proporcional*. Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el campo de existencia es $(-\infty; +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty; +\infty)$;

c) la función no está acotada ni inferior ni superiormente;

d) la función no toma ni el valor máximo, ni tampoco el mínimo;

e) la función es no periódica;

s) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$;

h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Teorema 1. *La gráfica de la función $y = x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas y ue sirve de bisectriz de los ángulos coordenados primero y tercero* (fig. 95).

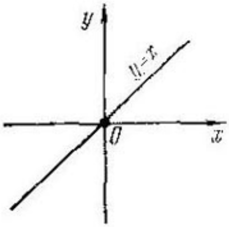

Fig. 95

Demostración. Supongamos que el punto $M_1(x_1, y_1)$ es tal, que sus coordenadas satisfacen la condición $y_1 = x_1$. Si $x_1 = y_1 = 0$, entonces el punto M_1 coincidirá con el origen de coordenadas. Si $x_1 = y_1 \neq 0$, entonces los números x_1 e y_1 o bien son ambos positivos, o bien ambos negativos, es decir, el punto M_1 se dispone o bien en el cuadrante primero o bien, en el tercero. Como de la condición $y_1 = x_1$ se deduce que $|y_1| = |x_1|$, entonces el punto M_1 es equidistante con relación a los ejes de coordenadas. Por consiguiente, se dispone o bien en la bisectriz del primer cuadrante (si sus coordenadas son positivas), o bien en la bisectriz del tercer cuadrante (si sus coordenadas son negativas). Así pues, cualquier punto M_1 (x_1, y_1), donde $y_1 = x_1$, o bien coincide con el origen de coordenadas, o bien se dispone en una de las bisectrices de los cuadrantes primero o tercero.

Es obvio que las coordenadas del origen de coordenadas satisfacen la condición $0 = 0$. Si el punto M_2 (x_1, y_2) se dispone en una de las bisectrices (o bien del primer cuadrante o bien del tercer cuadrante), entonces $|x_2| = |y_2|$ (las distancias hasta los ejes coordenados son iguales). Como los números x_2 e y_2 son o bien ambos positivos (si el punto M_2 se dispone en el primer cuadrante) o bien ambos negativos (si el punto M_2 se encuentra en el tercer cuadrante), entonces de las condiciones $|y_2| = |x_2|$ se deduce $y_2 = x_2$, es decir, el punto M_2 (x_2, y_2) es tal que $y_2 = x_2$. Así pues, el origen de coordenadas y cualquier punto dispuesto en una de las bisectrices (o bien del primer cuadrante o bien del tercer cuadrante) tiene tales coordenadas (x_3, y_3) que $y_3 = x_3$.

Por definición de la gráfica de una función, la recta que pasa por el origen de coordenadas y sirve de bisectriz para los cuadrantes primero y tercero es la gráfica de la función $y = x$ (véase la fig. 95). El teorema está demostrado.

Hipérbola $y = \frac{1}{x}$. La dependencia $y = \frac{1}{x}$ se denomina *inversamente proporcional*. Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el campo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

c) la función no está acotada en todo el campo de existencia, pero está acotada inferiormente ($y > 0$) en el intervalo $(0, +\infty)$ y superiormente ($y < 0$) en el intervalo $(-\infty, 0)$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función es no periódica;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y, además, en el intervalo $(-\infty, 0)$;

h) no hay puntos de intersección con los ejes.

La gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es una línea denominada *hipérbola* (fig. 96).

Teorema 2. *La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

Demostración. Sea dada una función impar $y = f(x)$ y supongamos que el punto (x_0, y_0) se dispone en la gráfica de esta función. Entonces, $y_0 = f(x_0)$ y, por ser la función impar, $y_0 = f(-x_0)$, es decir, el punto $(-x_0, -y_0)$ es simétrico al punto (x_0, y_0) con relación al origen de coordenadas y se dispone también en la gráfica. El teorema queda demostrado.

Observación. Para construir la gráfica de una función impar es suficiente construirla para $x \geqslant 0$. Para $x < 0$, la gráfica resulta una representación simétrica de la parte de la gráfica construida respecto al origen de coordenadas.

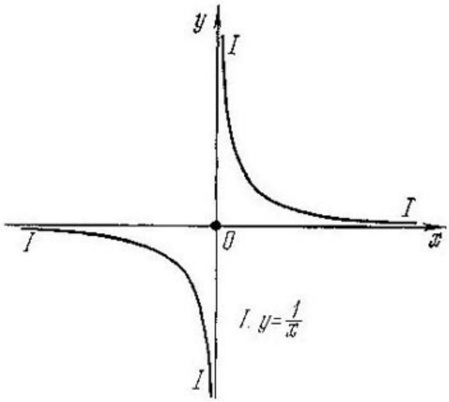

Fig. 96

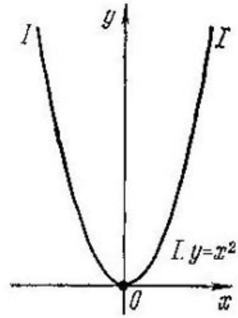

Fig. 97

Parábola $y = x^2$. La dependencia $y = x^2$ se denomina *cuadrática*. Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geqslant 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$ cuando $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, +\infty)$;

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = x^2$ es una curva que se denomina *parábola* (fig. 97).

Teorema 3. *La gráfica de una función par es simétrica respecto de eje Ox.*

Demostración. Supongamos que el punto (x_0, y_0) se dispone en la gráfica de una función par $y = f(x)$, es decir, sea $y_0 = f(x_0)$. Debido a la paridad de la función, $y_0 = f(-x_0)$, es decir, el punto $(-x_0, y_0)$ es simétrico al punto (x_0, y_0) con relación al eje Oy y se dispone también en la gráfica de la función $y = f(x)$. El teorema queda demostrado.

Observación. Para construir la gráfica de una función par es suficiente construirla sólo para $x \geqslant 0$. Para $x < 0$, la gráfica resulta una representación simétrica de la parte de la gráfica construida con relación al eje Oy.

Funciones potenciales $y = x^{\alpha}$. Las funciones examinadas más arriba, a saber, $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, representan caso sparticulares de la función potencial.

Veamos otros casos:

1. $y = x^{2m}$ (m es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geqslant 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero decrece en el intervalo $(-\infty, 0]$ v crece en el intervalo $[0, +\infty)$;

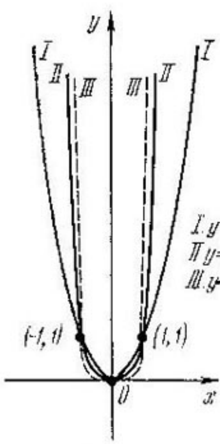

Fig. 98

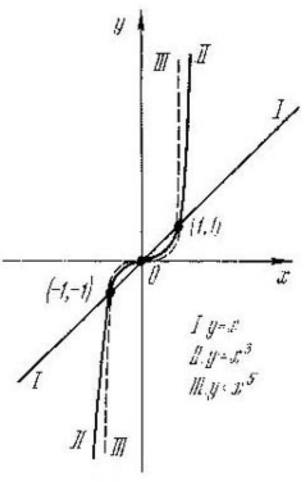

Fig. 99

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^1$, $y = x^6$ se exponen en la fig. 98.

2. $y = x^{2m-1}$ (m es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es ímpar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ se exponen en la fig. 99.

3. $y = x^{-2m}$ (m es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, +\infty)$;

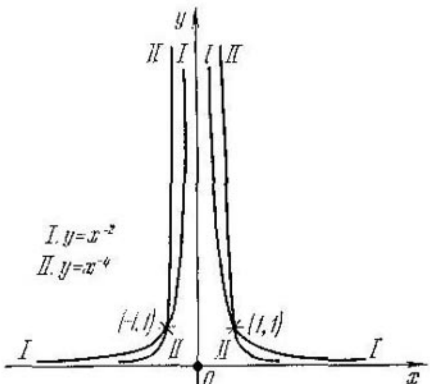

Fig. 100

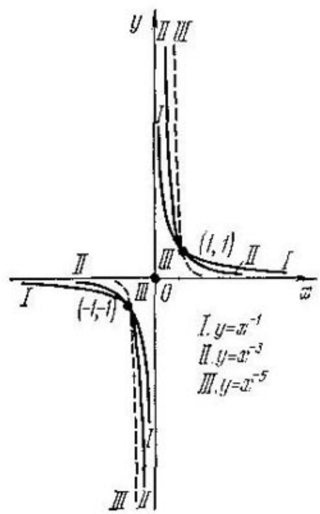

Fig. 101

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$ se exponen en la fig. 100.

4. $y = x^{-2m+1}$ (m es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, además, en el intervalo $(0, +\infty)$;

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados

Las gráficas de las funciones $y - x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ se exponen en la fig. 101.

5. $y = x^{\alpha}$ (α es un número positivo fijo no entero). Entonces,

a) el campo de existencia es $[0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geqslant 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$ para $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de ciertas funciones se exponen en la fig. 102.

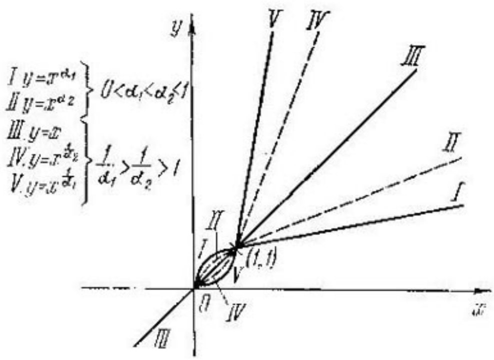

Fig. 102

6. $y = x^{-\alpha}$ (α es un número positivo fijo no entero). Entonces,

a) el campo de existencia es $(0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de ciertas funciones se exponen en la fig. 103.

Función exponencial $y = a^x$. Una función $y = a^x$, donde a es un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina *función exponencial*. La función exponencial posee las siguientes propiedades;

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) si $a > 1$, la función $y = a^x$ crece en todo el campo de existencia; si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ decrece en todo el campo de existencia;

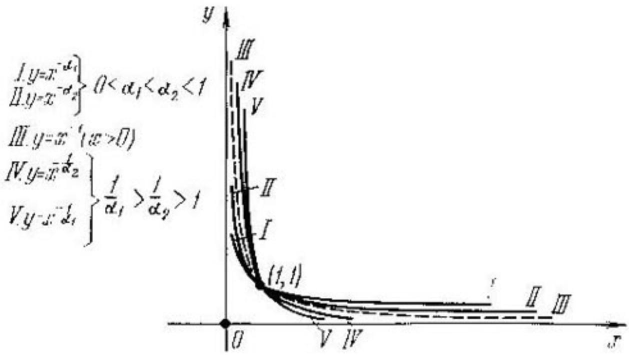

Fig. 103

h) el punto (0; 1) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de algunas funciones exponenciales se exponen en la fig. 104 (para $a > 1$) y en la fig. 105 (para $0 < a < 1$).

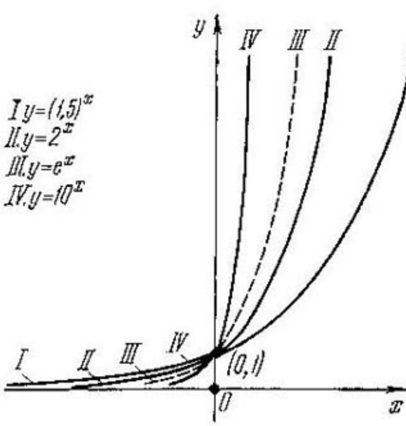

Fig. 104

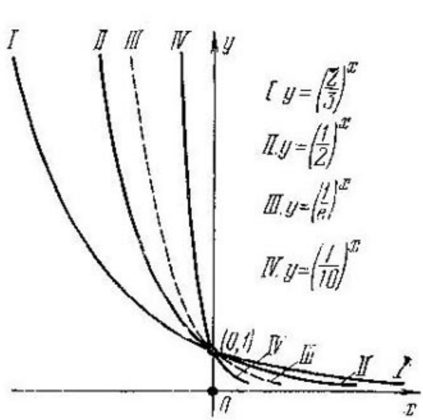

Fig. 105

Función logarítmica $y = \log x$. Una función $y = \log\ x$, donde a es un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina *función logarítmica*. La función logarítmica posee las siguientes propiedades:

a) el campo de existencia es $(0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) si $a > 1$, la función $y = \log_a x$ crece en todo el campo de existencia; si $0 < a < 1$, la función $y = \log_a x$ decrece en todo el campo de existencia;

h) el punto $(1; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de algunas funciones logarítmicas se exponen en la fig. 106 (para $a > 1$) y en la fig. 107 (para $0 < a < 1$).

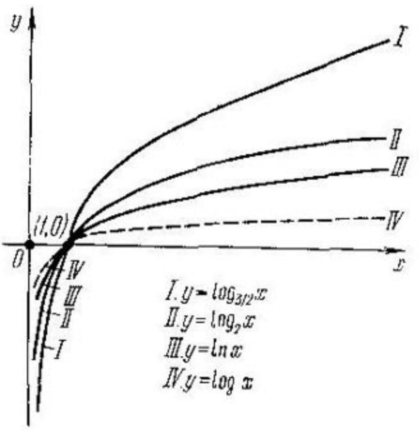

Fig. 106

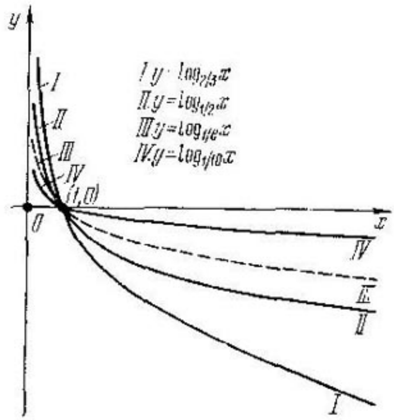

Fig. 107

Funciones trigonométricas principales. Antes de empezar el análisis de las funciones trigonométricas demostremos un teorema.

Teorema 4. *Para construir la gráfica de una función cuyo período principal es T, basta construirla en el segmento de longitud T y hacer prolongrarla luego periódicamente.*

La demostración se desprende de la definición de gráfica de la función y de la definición de periodicidad de la misma. Así por ejemplo, si $f(x + nT) = f(x)$, entonces junto con el punto (x_0, y_0) a la gráfica le pertenecen también los puntos $(x_0 + Tn, y_0)$ para todo n entero.

Sinusoide $y = \operatorname{sen} x$. Haciendo uso de las propiedades del seno de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{sen} x$:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[-1; 1]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma su valor mínimo $y = -1$ para cada $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera, como también su valor máximo $y = 1$ para cada $x_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, donde m es un número entero cualquiera:

e) la función es periódica, de período principal igual a 2π:

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia pero, crece en cada intervalo $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde k es un número entero cualquiera, y decrece en todo intervalo $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde k es un número entero cualquiera.

Mostremos, por ejemplo, que en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ es creciente, es decir, que para cualquier par de números x_1 y x_2 es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ se verifica la desigualdad $\operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$.

Para cualquier par de números x_1 y x_2 tenemos, según la fórmula para la diferencia de los senos:

$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1}$$

Demostremos que el segundo miembro de la igualdad (1) es negativo, si $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. La condición $x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ es equivalente a la condición $-\frac{\pi}{2} \leqslant -x_2$. Al sumar esta igualdad con la igualdad $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1$, obtendremos $-\pi \leqslant x_1 - x_2$. Tomando en consideración que la desigualdad $x_1 < x_2$ es equivalente a la desigualdad $x_1 - x_2 < 0$, tenemos $-\pi \leqslant x_1 - x_2 < 0$, o bien $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Por consiguiente, $\operatorname{sen} \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Al sumarlas desigualdades $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, obtenemos $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$, o bien $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$.

Así pues, el segundo miembro de la igualdad (1) es inferior a cero, por consiguiente, $\operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$.

Mostremos que en el segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ es decreciente, es decir, que para cualquier par de números x_1 y x_2

tal, que $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ se verifica la desigualdad sen $x_1 >$ sen x_2. Adicionando $(-\pi)$ a las desigualdades $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$, tenemos $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 - \pi < x_2 - \pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. En virtud de que en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y =$ sen x es monótona creciente, tenemos para $(x_1 - \pi)$ y $(x_2 - \pi)$ que sen $(x_1 - \pi) <$ sen $(x_2 - \pi)$. Ahora, es válida la cadena de desigualdades equivalentes: sen $(x_1 - \pi) <$

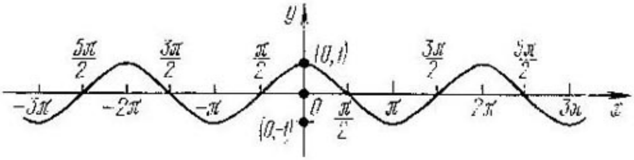

Fig. 108

$<$ sen $(x_2 - \pi) \Leftrightarrow$ sen $[-(\pi - x_1)] <$ sen $[-(\pi - x_2)] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -$ sen $(\pi - x_1) < -$ sen $(\pi - x_2) \Leftrightarrow$ sen $(\pi - x_1) >$ sen $(\pi - x_2) \Leftrightarrow$ sen $x_1 >$ sen x_2.

Quiere decir que es válida la desigualdad sen $x_1 >$ sen x_2, lo que se trataba de demostrar.

De modo análogo se demuestra que la función $y =$ sen x es creciente en cada intervalo $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde k es un número entero cualquiera, y decreciente en cada intervalo $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde k es un número entero cualquiera.

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen las coordenadas $(\pi k, 0)$, donde k es un número entero cualquiera.

Teniendo presente el carácter periódico de la función, se puede construir la gráfica de la misma $y =$ sen x, que se denomina *sinusoide* (fig. 108).

Cosinusoide $y = \cos x$. Haciendo uso de las propiedades del coseno de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \cos x$:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación se $[-1; 1]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma su valor mínimo $y = -1$ para todo $x_k = \pi + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera, y el máximo $y = 1$, para cada $x_m = 2\pi m$, donde m es un número entero cualquiera;

e) la función es periódica, el período principal es de 2π;

f) la sunción es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero la función es creciente en cada intervalo $[2\pi k - \pi,\ 2\pi k]$, donde k es un número entero cualquiera, y decreciente en cada intervalo $[2\pi k,\ 2\pi k + \pi]$, donde k es un número entero cualquiera.

h) el punto de intersección con el eje Oy tiene las coordenadas $(0;\ 1)$; hay una infinidad de puntos de intersección con el eje Ox; cada uno de los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, 0\right)$, donde k es un número entero cualquiera, es el punto de intersección con el eje Ox.

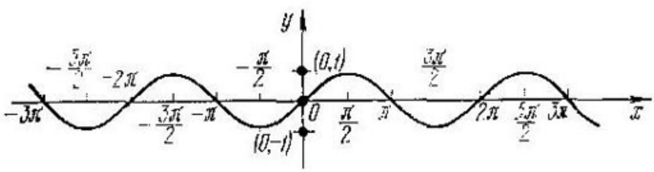

Fig. 109

Teniendo presente el carácter periódico de la función, se puede construir la gráfica ed la misma $y = \cos x$, que se llama *cosinusoide* (fig. 109).

Curva de tangente $y = \operatorname{tg} x$. Haciendo uso de las propiedades de la tangente de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{tg} x$.

a) el campo de existencia es cualquier x, salvo $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera;

b) el campo de variación es $(-\infty,\ +\infty)$;

c) la función no está acotada;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función es periódica, su período principal es π;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es creciente en cada uno de los siguientes intervalos $\left(\pi k - \frac{\pi}{2},\ \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$, donde k es un número entero cualquiera.

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen las coordenadas $(\pi m, 0)$, donde m es un número entero cualquiera.

Teniendo presente el carácter periódico, podemos construir la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$, que se llama *curva de tangente* (fig. 110).

Curva de cotangente $y = \operatorname{ctg} x$. Haciendo uso de las propiedades de la cotangente de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{ctg} x$:

a) el campo de existencia es cualquier x, salvo $x_m = \pi m$, donde m es un número entero cualquiera;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada;

d) la función no toma el valor máximo ni el mínimo;

e) la función es periódica, su período principal es π;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en cada uno de los siguientes intervalos $(\pi m, \pi + \pi m)$, donde m es un número entero cualquiera;

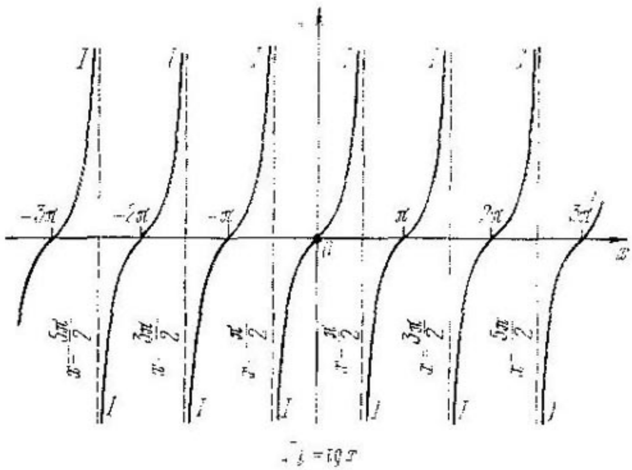

Fig. 110

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen por coordenadoas $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m, 0\right)$, donde m es un número entero cualquiera.

Tomando en consideración el carácter periódico, se puede construir la gráfica de la función $y = \operatorname{ctg} x$, que se llama *curva de cotangente* (fig. 111).

Funciones trigonométricas inversas principales. Las funciones $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ se denominan *funciones trigonométricas inversas principales.*

Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arcsen} x$. Haciendo uso de las propiedades del arco seno de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arcsen} x$.

a) el caapo de existencia es $[-1; 1]$;

b) el campo de variación es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma el valor mínimo $y=\frac{\pi}{2}$ cuando $x = -1$, y el valor máximo $y = \frac{\pi}{2}$, cuando $x = 1$;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

Demostremos esta prpiedad. Con este objeto mostremos que si $-1 \leqslant x_1 X x_2 \leqslant 1$, entonces arcsen $x_1 <$ arcsen x_2. Denotemos $\alpha_1 =$ arcsen x_1 y $\alpha_2 =$ arcsen x_2. Está claro que sen $\alpha_1 = x_1$ y sen $\alpha_2 = x_2$, es decir, es necesario demostrar que si sen $\alpha_1 <$ sen α_2,

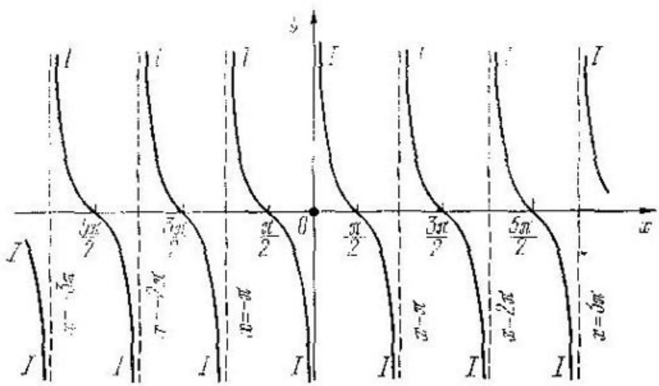

Fig. 111

entonces $\alpha_1 < \alpha_2$. Realicemos la demostración por reducción al absurdo: sea $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Por cuanto en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y =$ sen x es siempre creciente, de la condición $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ resulta que sen $\alpha_1 \geqslant$ sen α_2, lo que contradice la condición sen $\alpha_1 <$ sen α_2. Por lo tanto, la suposición no es cierta, es decir, la función $y =$ arcsen x es creciente.

h) el único punto de intersección con los ejes coordenados es el $(0; 0)$.

La gráfica de la función $y =$ arcsen x se expone en la fig. 112.

Función trigonométrica inversa $y =$ arccos x. Haciendo uso de las propiedades del arco coseno de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y =$ arccos x:

a) el campo de existencia es $[-1; 1]$;

b) el campo de variación es $[0, \pi]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma el valor máximo $y = \pi$ cuando $x = -1$, y el valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 1$;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par y no es impar;

g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;

h) los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(1; 0)$ son puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

La gráfica de la función $y = \arccos x$ es expone en la fig. 113.

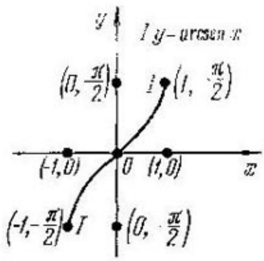

Fig. 112

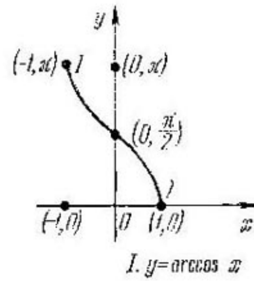

Fig. 113

Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arctg} x$. Haciendo uso de las propiedades del arco tangente de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arctg} x$:

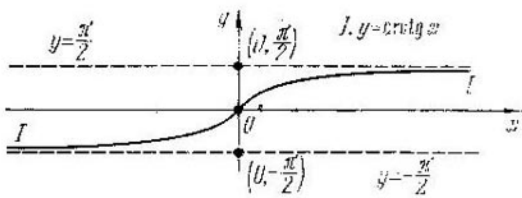

Fig. 114

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función no toma ni el valor máximo ni el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$ se expone en la fig. 114.

Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arcctg} x$. Haciendo uso de las propiedades del arco cotangente de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arcctg} x$;

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, \pi)$;

c) la función está acotada superior e inferiormente;

d) la función no toma ni el valor mínimo ni el máximo;

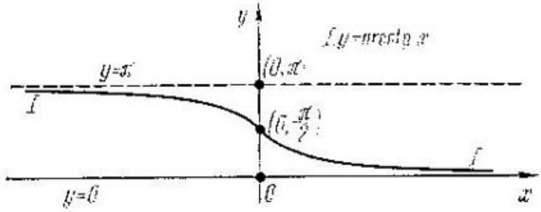

Fig. 115

e) la función no es periódica;

f) la función no es par y no es impar;

g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;

h) el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = \operatorname{arcctg} x$ se expone en la fig. 115.

§ 3. Funciones inversas

Aplicación biunívoca. Toda función $y = f(x)$ aplica el campo de existencia de la función sobre el campo de su variación de tal modo que a cada x del campo de existencia le corresponde el único valor y del campo de variación.

Examinemos unas cuantas funciones junto con sus campos de existencia y de variación (tabla 2).

Algunas de las funciones aducidas a *diferentes* x del campo de existencia les ponen en correspondencia *diferentes* y. Por ejemplo,

Tabla 2

Función	Campo de existencia	Campo de variación
$y = x^2$	$(-\infty; \infty)$	$[0; \infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1; 1]$	$[0; 1]$
$y = \frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty; \infty)$	$(0; 1]$
$y = 2^x$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \infty)$

para la función $y = 2^x$, cualquier valor de y del campo de variación se obtiene sólo para un valor de x del campo de existencia. En estos casos se dice que la función realiza una *aplicación biunívoca* de su campo de existencia sobre el campo de variación. Hemos de notar que todas las demás funciones citadas en la tabla no poseen dicha propiedad:

la función $y = x^2$ toma un mismo valor $y = 1$ tanto para $x = 1$, como para $x = -1$;

la función $y=\sqrt{1-x^2}$ toma un mismo valor $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ tanto para $x=\frac{1}{2}$ como para $x=-\frac{1}{2}$;

la función $y=\frac{1}{1+x^2}$ toma un mismo valor $y=\frac{1}{5}$ tanto para $x=2$, como para $x=-2$.

Así pues, las funciones pueden dividirse en dos clases:

1) funciones que realizan una aplicación biunívoca del campo de existencia sobre el de variación;

2) funciones que no poseen esta propiedad.

Si las funciones de la segunda clase se analizan no en todo el campo de existencia, se logra frecuentemente elegir tal campo de definición (una parte del campo de existencia) que la función aplicará dicho campo de definición sobre el campo correspondiente de variación ya de manera biunívoca. Cabe indicar que culquier función $y = f(x)$ en aquella parte del campo de definición X (perteneciente al campo de existencia de la función), donde ella es estrictamente monótona (es decir, creciente o decreciente) pertenece a la primera clase. Por ejemplo, para la función $y = x^2$ a título de tal campo interviene el intervalo $[0, +\infty)$ o el intervalo $(-\infty, 0]$.

Examinemos la función $y = x^2$ en el campo de definición $X_1 = (-\infty, 0]$ (el campo de variación que le corresponde es $Y_1 = [0, +\infty)$). Esta función realiza una aplicación biunívoca del campo Y_1 sobre el campo Y_1. En este caso a base de cada y del campo Y_1 se puede restablecer de modo unívoco el valor de x del campo X_1. Efectivamente, si $y_0 \in Y_1$, entonces el valor correspondiente de x_0, tal que $y_0 = x_0^2$, se busca de acuerdo con la regla $x_0 = -\sqrt{y_0}$. En este caso, si $y_0 \neq \bar{y}_0$, entonces $x_0 \neq \bar{x}_0$, donde $x_0 = -\sqrt{y_0}$, y $\bar{x}_0 = -\sqrt{\bar{y}_0}$. Con otras palabras, se puede establecer una aplicación biunívoca del campo Y_1 sobre el campo X_1 según la regla $x = -\sqrt{y}$.

Así pues, la función $y = x^2$ realiza una aplicación biunívoca del campo X_1 sobre el campo Y_1, mientras que la regla $x = -\sqrt{y}$ realiza una aplicación biunívoca del campo Y_1 sobre el campo X_1. La regla $x = -\sqrt{y}$ se llamará *regla inversa* para la función $y = x^2$ en el campo de definición X_1 y en el de variación Y_1.

Si $x \in X_1 = (-\infty, 0]$ e $y \in Y_1 = [0, +\infty)$, la función $y = x^2$ y la regla $x = -\sqrt{y}$ expresan una misma relación entre las variables x e y; solamente para cualquier par (x_0, y_0) de las variables en consideración la función $y = x^2$ presta la posibilidad de hallar y_0, si se conoce x_0, y la regla $x = -\sqrt{y}$, hallar x_0 conociendo y_0.

Función inversa. Si en la regla inversa sustituimos x por y e y por x, sustituyendo simultáneamente el campo de definición por el de variación, y el campo de variación por el de definición, entonces obtendremos una función nueva $y = -\sqrt{x}$, cuyo campo de definición será $X_2 = [0, +\infty) = Y_1$, y el campo de variación, $Y_2 = (-\infty, 0] = X_1$. Esta nueva función $y = -\sqrt{x}$ con el campo de definición X_2 y el campo de variación Y_2 se denomina *función inversa* con relación a la función $y = x^2$, cuyos campos de definición y de variación son X_1 e Y_1, respectivamente.

Para una función $y = x^2$ con el campo de definición $X_3 = [0; 10)$ y el campo de variación $Y_3 = [0; 100)$ la función inversa será $y = \sqrt{x}$, cuyo campo de definición se representa por $X_4 = [0; 100)$ y el de variación, por $Y_4 = [0; 10)$.

Demos a conocer la definición de función inversa en el caso general.

Supongamos que el campo de definición de la función $y = f(x)$ es tal que la función realiza una aplicación biunívoca del campo de su definición X sobre el campo de variación Y. Entonces, a partir de cualquier y, perteneciente al campo Y, se puede restablecer unívocamente el valor de x del campo X, procediendo de la manera siguiente: en la igualdad $f(x) - y = 0$ se considera fijo cualquier $y \in Y$ y se busca $x \in X$ que satisfaga la igualdad citada. Cada $x \in X$ encontrado se denota con $f^{-1}(y)$. La igualdad $x = f^{-1}(y)$ lleva el nombre de *regla inversa*. Se denomina *función inversa de la función* $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$ aquella que se obtiene a partir de la regla inversa $x = f^{-1}(y)$, sustituyendo x por y, e y por x con la sustitución simultánea del campo de definición por el campo de variación y del campo de variación por el de definición. Realizada la sustitución mencionada, el campo de variación de la función $y = f(x)$ se convierte en el campo de definición de la función inversa $y = f^{-1}(x)$, mientras que el campo de definición de la función $y = f(x)$ se hace el campo de variación de la función inversa $y = f^{-1}(x)$. Así pues, dos funciones, a saber $y = f(x)$ con el campo de definición X y el campo de valores y, y la función $y = f^{-1}(x)$ con Y e X que intervienen como sus campos de definición y de valores, respectivamente, donde $f[f^{-1}(x)] = x$ para todo $x \in Y$, y $f^{-1}[f(x)] = x$ para todo $x \in X$, son tales que una de ellas es inversa de la otra.

Mostremos en algunos ejemplos cómo se buscan la regla inversa y la función inversa. En todos los ejemplos que se dan a continuación los campos de definición están elegidos de modo tal, que las funciones correspondientes realizan una aplicación biunívoca del campo de definición sobre el campo de variación (tabla 3).

Observación. No siempre se logra encontrar para cada función tal campo de definición, que se aplique por ella de manera biunívoca

Función $y=f(x)$	Campo de difinición $y=f(x)$	Campo de variación $y=f(x)$	Regla inversa $x=f^{-1}(y)$
$y=x^2$	$0\leqslant x<\infty$	$0\leqslant y<\infty$	$x=\sqrt{y}$
$y=x^2$	$-\infty<x\leqslant 0$	$0\leqslant y<\infty$	$x=-\sqrt{y}$
$y=2^x$	$-\infty<x<\infty$	$0<y<\infty$	$x=\log_2 y$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$0\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant 1$	$x=\sqrt{1-y^2}$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$-1\leqslant x\leqslant 0$	$0\leqslant y\leqslant 1$	$x=-\sqrt{1-y^2}$
$y=\dfrac{1}{1+x^2}$	$0\leqslant x<\infty$	$0<y\leqslant 1$	$x=\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}$
$y=2x+1$	$-\infty<x<\infty$	$-\infty<y<\infty$	$x=\dfrac{y-1}{2}$
$y=(x+1)^2$	$-1\leqslant x<\infty$	$0\leqslant y<\infty$	$x=\sqrt{y}-1$

Función $y=f(x)$	Función inversa $y=f^{-1}(x)$	Campo de definición $y=f^{-1}(x)$	Campo de variación $y=f^{-1}(x)$
$y=x^2$	$y=\sqrt{x}$	$0\leqslant x<\infty$	$0\leqslant y<\infty$
$y=x^2$	$y=-\sqrt{x}$	$0\leqslant x<\infty$	$-\infty<y\leqslant 0$
$y=2^x$	$y=\log_2 x$	$0<x<\infty$	$-\infty<y<\infty$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$y=\sqrt{1-x^2}$	$0\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant 1$
$y=-\sqrt{1-x^2}$	$y=-\sqrt{1-x^2}$	$0\leqslant x\leqslant 1$	$-1\leqslant y\leqslant 0$
$y=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$	$0<x\leqslant 1$	$0\leqslant x<\infty$
$y=2x+1$	$y=\dfrac{x-1}{2}$	$-\infty<x<\infty$	$-\infty<y<\infty$
$y=(x+1)^2$	$y=\sqrt{x}-1$	$0\leqslant x<\infty$	$-1\leqslant y<\infty$

sobre el campo de variación correspondiente. Por ejemplo, la función $y=1$ no aplica biunívocamente ningún intervalo de la recta numérica sobre el correspondiente campo de variación. Como otro ejemplo puede aducirse la función de Dirichlet.

Gráfica de la función inversa. Aclaremos, ante todo, cómo se disponen los puntos, las coordenadas de uno de los cuales se obtienen a partir de las coordenadas del otro, sustituyendo x por y e y por x.

Teorema . *Cualesquiera puntos A (x_0, y_0) y B (y_0, x_0) son simétricos respecto de la recta $y=x$.*

Demostración. Si $x_0=y_0$, entonces los puntos A y B (fig. 116) coinciden y se disponen en la recta $y=x$, es decir, en este caso la afirmación del teorema es cierta. Admitamos que $x_0\neq y_0$ y supongamos que el punto A (x_0, y_0) se dispone en el primer cuadrante, siendo

$x_0 > y_0$. Tracemos, partiendo del punto A, una recta AA_1 paralela al eje Ox, es decir, una recta $y = y_0$; partiendo del punto B, tracemos una recta BB_1 paralela al eje Oy, es decir, la recta $x = y_0$. Las rectas AA_1 y BB_1 se cortan en el punto $C(y_0, y_0)$, es decir, en un punto dispuesto en la recta $y = x$. Examinemos el triángulo BCA; es rectángulo (el ángulo recto es el BCA) e isósceles ($|AC| = |BC| = |x_0 - y_0|$). La bisectriz (CD) del ángulo BCA coincide con la recta $y = x$. Por cuanto el triángulo BCA es isósceles, su bisectriz (CD) sirve de altura y de mediana, por consiguiente, $(CD) \perp (AB)$ y $|AD| = |BD|$. Esto significa que los puntos A y B son simétricos respecto de la recta $y = x$.

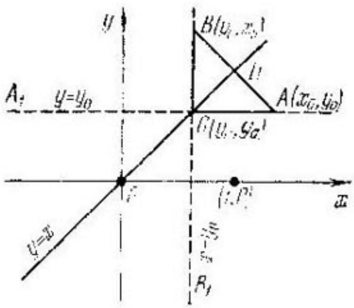

Fig. 116

Análogamente se demuestra el teorema para el caso en que el punto $A(x_0, y_0)$ se dispone en el primer cuadrante y $x_0 < y_0$, como también cuando el punto $A(x_0, y_0)$ se dispone no en el primer cuadrante. El teorema está demostrado.

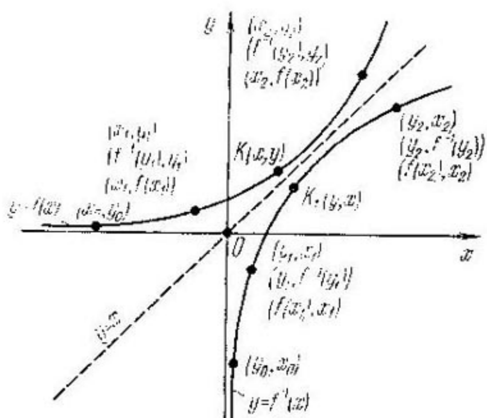

Fig. 117

Supongamos que la función $y = f(x)$ aplica biunívocamente el campo de definición X sobre el campo de variación Y. En este caso la gráfica de la función es tal, que según cualquier x_1 se halla unívocamente $y_1 = f(x_1)$, y, viceversa, según cualquier y_2 se halla unívocamente $x_2 = f^{-1}(y_2)$ (fig. 117).

Si un punto $M(x_1, y_0)$ se dispone en la grafica de la función $y = f(x)$, sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f(x_0)$, y, por lo tanto, también la condición $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Hablando de otro modo, todos los puntos (y sólo ellos) de la gráfica $y = f(x)$ satisfacen la condición $x = f^{-1}(y)$. Como para obtener una función inversa, es necesario en la regla inversa $x = f^{-1}(y)$ sustituir x por y, e y por x, todo punto de la gráfica $y = f^{-1}(x)$ se obtiene a partir de un punto correspondiente de la gráfica de la función $y = f(x)$ sustituyendo x por y, e y por x, es decir, si el punto $K(x, y)$ es un punto de la gráfica $y = f(x)$, entonces $K_1(y, x)$ será un punto de la gráfica $y = f^{-1}(x)$. De estos razonamientos y el teorema se concluye que la gráfica de la función inversa $y = f^{-1}(x)$ se obtiene de la gráfica de la función $y = f(x)$ por la representación simétrica de la última respecto de la recta $y = x$ (véase la fig. 117).

Observación. A menudo surge una situación en que la forma de la función inversa no es del todo simple. Por ejemplo, la función $y = x^{2m-1}$, donde m es un número natural fijo, aplica biunívocamente su campo de existencia (toda la recta numérica) sobre el campo de variación $Y = (-\infty, +\infty)$. Para determinar la regla inversa con ayuda de la cual se construye la función inversa, hace falta hallar x que satisfaga la igualdad $x^{2m-1} - y = 0$. Como se sabe (véase el cap. IV), para y no negativo tal x existe, a saber, $x = \sqrt[2m-1]{y}$; para y negativo tal x también existe, a saber, $x = -\sqrt[2m-1]{|y|}$. Por eso, la regla inversa se prefija del modo siguiente:

$$x = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{y}, & \text{si } y \in [0, +\infty); \\ -\sqrt[2m-1]{|y|}, & \text{si } y \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Por consiguiente, la función inversa tendrá por expresión

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{x}, & \text{si } x \in [0, +\infty); \\ -\sqrt[2m-1]{|x|}, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

A veces la función inversa de una función potencial $y = x^{2m-1}$ se escribe con ayuda de una sola fórmula $y = \sqrt[2m-1]{x}$, mas no lo haremos así, puesto que el símbolo $\sqrt[n]{a}$, se usa por nosotros solamente para los números no negativos a.

Funciones inversas de las funciones trigonométricas fundamentales. Para cualquiera de las funciones trigonométricas fundamentales, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, se pueden escoger muchos campos de definición, cada uno de los cuales se aplique biunívocamente por la función trigonométrica corr espondiente sobre el correspondiente campo de variación. Además, si una función trigonométrica fundamental se anaiza en su campo d e definición, especialmente elegido, como función inversa de ella intervendrá una función trigonométrica inversa correspondiente (véase la tabla 4).

Es evidente que cualquier función trigonométrica fundamental inversa aplica biunívocamente su campo de definición sobre su cam-

Función $y = f(x)$	Campo de definición de $f(x)$	Campo de variación de $y = f(x)$	Regla inversa $x = f^{-1}(y)$
$y = \operatorname{sen} x$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	$x = \operatorname{arcsen} y$
$y = \cos x$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	$x = \arccos y$
$y = \operatorname{tg} x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < y < \infty$	$x = \operatorname{arctg} y$
$y = \operatorname{ctg} x$	$0 < x < \pi$	$-\infty < y < \infty$	$x = \operatorname{arcctg} y$

Función $y = f(x)$	Función inversa $y = f^{-1}(x)$	Campo de definición de $y = f^{-1}(x)$	Campo de variación de $y = f^{-1}(x)$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{arcsen} x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

po de variación. Por eso, cada una de estas funciones cuenta con su función inversa, que es una función trigonométrica fundamental correspondiente, pero analizada solamente en el campo de definición correspondiente.

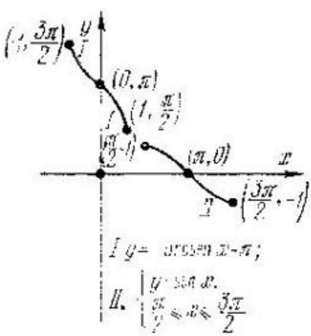

Fig 118

Por ejemplo, para la función $y = \arccos x$ como función inversa sirve $y = \cos x$, considerada sólo en el segmento $[0, \pi]$; para la función $y = \operatorname{arctg} x$ como función inversa interviene $y = \operatorname{tg} x$, analizada sólo en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hallemos en conclusión la función inversa para una función $y = \operatorname{sen} x$ con el campo de definición $X\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Es fácil ver que la función $y = \operatorname{sen} x$ aplica biunívocamente el segmento X sobre el segmento $Y = [-1; 1]$, razón por la cual esta función cuenta con su inversa. Para encontrarla tomemos arbitrariamente $y_0 \in Y$, e hallemos $x_0 \in X$, partiendo de la igualdad $\operatorname{sen} x_0 - y_0 = 0$. Es obvio que el número $x_0 = \pi - \operatorname{arcsen} y_0$ satisface dicha igualdad y pertenece al segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Por eso, la regla inversa será $x =$

$= \pi -$ arcsen y. Quiere decir, la función inversa es $y = \pi -$ arcsen sen x. Así pues, para la función $y =$ sen x con el campo de definición $X = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ interviene como su inversa la función $y = -$arcsen $x + \pi$, con el campo de definición $[-1; 1]$ y campo de variación $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (fig. 118).

§ 4. Superposiciones de funciones y sus gráficas

Función compuesta. Supongamos que la función $u = \varphi(x)$ está definida en un conjunto X y el conjunto de valores de esta función integra el campo de existencia de la función $y = F(u)$. En este caso a cualquier x del campo de definición X de la función $u = \varphi(x)$ le corresponde un valor determinado de la variable u, y a dicho valor u la función $y = F(u)$ le pone en correspondencia un valor determinado de la variable y, es decir, la variable y es una función de x en el conjunto X: $y = F[\varphi(x)]$. La función obtenida de otra función se llama *función compuesta de la variable* x. La función $u = \varphi(x)$ se denomina *función interior*, y la función $y = F(u)$, *exterior*. Una función compuesta $y = F[\varphi(x)]$ se denomina con frecuencia *superposición* de dos funciones: la interior $u = \varphi(x)$ y la exterior $y = F(u)$. Por ejemplo, si $u = \cos x$ e $y = 2^u$, entonces para cualquier x positivo queda definida la función compuesta $y = 2^{\cos x}$. Las funciones compuestas son, por ejemplo,

$$y = \text{sen}\,(2x + 4), \quad y = \log_2 \text{tg}\, x, \quad y = \text{tg}\, \log_2 x.$$

Las funciones, obtenidas de las funciones elementales fundamentales con ayuda de un número finito de operaciones algebraicas, empleando un número finito de superposiciones, se denominan, habitualmente, *funciones elementales*. Serán funciones elementales, por ejemplo,

$$y = \text{tg}\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \log_2 \text{sen}\, 3^{x-4},$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 4x + 1}} + 2\,\text{sen}^2 (x - 5).$$

Examinemos los ejemplos que muestran cómo se construye la gráfica de una función compuesta $y = F[\varphi(x)]$, si se conocen la gráfica de la función interior $u = \varphi(x)$ y las propiedades de la función exterior $y = F(u)$ (de los ejemplos examinados se hará claro cómo se construye la gráfica de cualquier función elemental, si se conocen las propiedades y las gráficas de las funciones elementales fundamentales).

Construcción de la gráfica de la función $y = -f(x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1(x_0, -y_0)$, simétrico al punto

$M_0 (x_0, y_0)$ respecto del eje Ox. Las coordenadas del punto $M_1 (x_0, -y_0)$ satisfacen la condición $-y_0 = -f(x_0)$, por lo cual el punto $M_1 (x_0, -y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = -f(x)$. Por

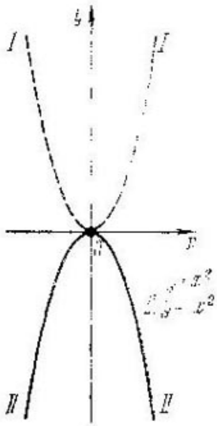

Fig. 119

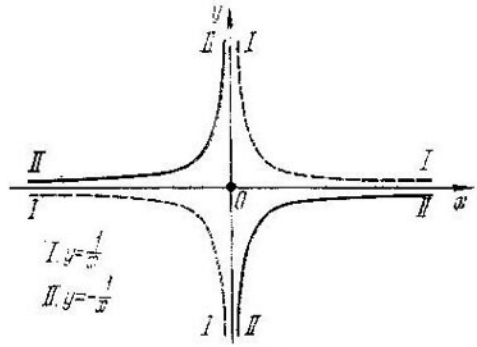

Fig. 120

cuanto el punto $M_0 (x_0, y_0)$, perteneciente a la gráfica de la función $y = f(x)$, se ha elegido arbitrariamente, y dado que las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ tienen un mismo campo de definición, entonces la gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ por representación simétrica de la última respecto del eje Ox. Construyamos, empleando el método descrito, las gráficas de las funciones $y = -x^2$ (fig. 119), $y = -\frac{1}{x}$ (fig. 120), $y = -\log_2(x)$ (fig. 121).

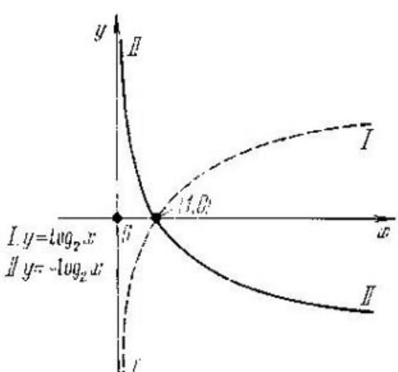

Fig. 121

Construcción de la gráfica de la función $y = f(-x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0 (x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1 (-x_0, y_0)$ que sea simétrico al punto $M_0 (x_0, y_0)$ respecto del eje Oy. Las coordenadas del punto $M_1(-x_0, y_0)$ satisfacen la condición $y_0 = f[-(-x_0)]$, razón por la cual el punto $M_1 (-x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(-x)$. Por cuanto el punto $M_0 (x_0, y_0)$, perteneciente a la gráfica de la función $y = f(x)$, se ha elegido arbitrariamente, y dado que las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ tienen campos de definición simétricos con relación al origen de coordenadas, entonces la gráfica de la función $y = f(-x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ por representación simétrica de la última respecto del eje Oy.

Construyamos, empleando el método descrito, las gráficas de las funciones $y = 2^{-x}$ (fig. 122), $y = \log_2(-x)$ (fig. 123).

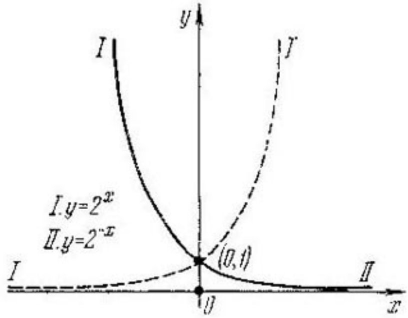

Fig. 122

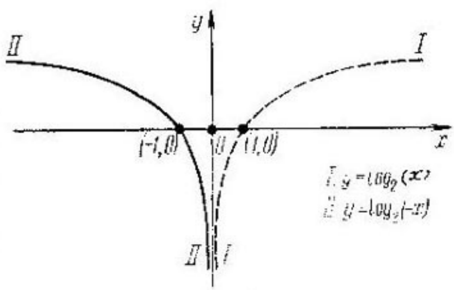

Fig. 123

Construcción de la gráfica de la función $y = B\,f(x)$, donde $B \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$. Las funciones $y = f(x)$ e $y = Bf(x)$ tienen un mismo campo de definición. Por consiguiente, al conocer el método, por medio del cual para cualquier x se halla la ordenada de la función $y = Bf(x)$ a base de la ordenada de la función $y = f(x)$, podemos construir la gráfica de la función $y = Bf(x)$, basándonos en la gráfica de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1(x_0, By_0)$. Las coordenadas de este punto satisfacen la condición $By_0 = Bf(x_0)$, por lo cual el punto $M_1(x_0, By_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = Bf(x)$. Veamos los casos posibles, en dependencia del número B:

1. $B > 1$. El punto $M_1(x_0, By_0)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ estirando la ordenada del punto M_0 en B veces; la gráfica de la función $y = Bf(x)$ se obtiene de la gráfica para la función $y = f(x)$ estirando la última en B veces a lo largo del eje Oy.

2. $B = 1$. Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$ quendan en su lugar.

3. $0 < B < 1$. Por cuanto $B = \frac{1}{\frac{1}{B}}$, entonces el punto $M_1(x_0, By_0)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ comprimiendo la ordenada del punto M_0 en $\frac{1}{B}$ veces; la gráfica de la función $y =$

$= Bf(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ comprimiendo en $\frac{1}{B}$ veces las ordenadas de todos los puntos, es decir, comprimiendo en $\frac{1}{B}$ veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje Oy.

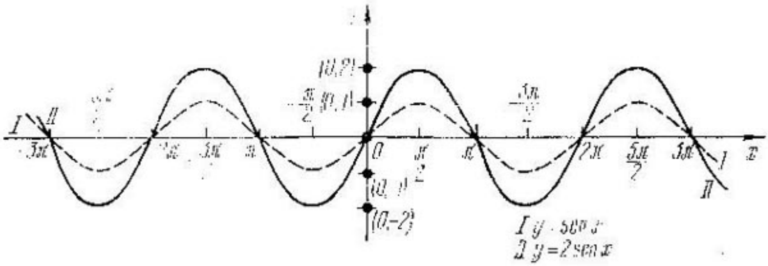

Fig. 124

4. $B < 0$. En este caso $B = -|B|$, y la construcción de la gráfica de la función $y = Bf(x)$ se divide en dos etapas:

a) construcción de la gráfica para la función $y = |B| f(x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.

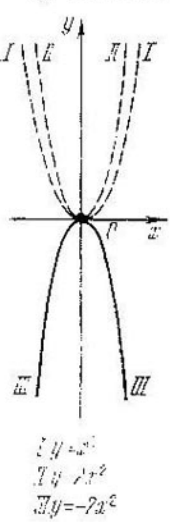

Fig. 125

b) construcción de la gráfica para la función $y = -|B| f(x)$ según la gráfica de la función $y = |B| f(x)$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = 2$ sen x (fig. 124) $y = -2x^2$ (fig. 125) e $y = \frac{1}{2}\cos x$ (fig. 126).,

Construcción de la gráfica de la función $y = f(kx)$, donde $k \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$. La función $y = f(kx)$ está definida para todos aquellos valores de x, para los cuales el número kx pertenece al campo de definición de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$, pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, $y_0 = f(x_0)$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(kx)$, puesto que sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f\left(k\frac{x_0}{k}\right)$. Examinemos diferentes casos que pueden tener lugar en función del número k.

1. $k > 1$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ comprimiendo en k veces la abscisa del punto M_0; la gráfica de la función $y = f(kx)$ se obtiene a partir de la gráfica para

la función $y = f(x)$ comprimiendo en k veces las abscisas de todos los puntos, es decir, comprimiendo en k veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje Ox.

2. $k = 1$. Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$ quedan en su lugar.

3. $0 < k < 1$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0,\ y_0\right)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ estirando la abscisa del punto M_0 en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces;

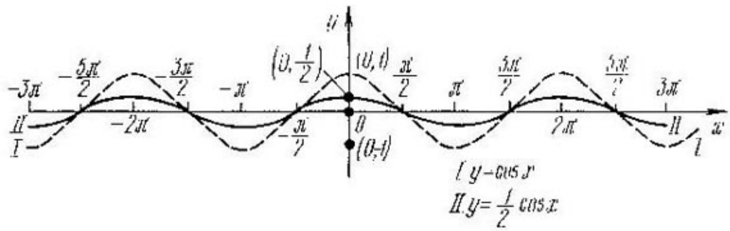

Fig. 126

la gráfica de la función $y = f(kx)$ se obtiene de la gráfica para la función $y = f(x)$ estirando en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces las abscisas de todos los

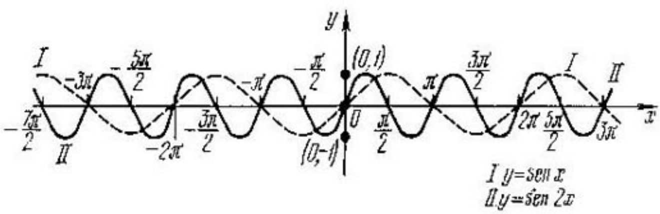

Fig. 127

puntos, es decir, estirando en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje Ox.

4. $k < 0$. En este caso $k = -|k|$ y la construcción de la gráfica de la función $y = f(kx)$ se divide en dos etapas:

a) construcción de la gráfica de la función $y = f(|k|x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$;

b) construcción de la gráfica de la función $y = f(-|k|x)$, según la gráfica $y = f(|k|x)$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,2x$, $y = 2^{-2x}$, $y = \log_2\left(-\frac{1}{3}x\right)$.

Construcción de la gráfica para la función $y = f(x - a)$, donde $a \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$. La función $y =$

$= f(x-a)$ está definida para todos aquellos x, para los cuales $(x - a)$ pertenece al campo de definición de la función $y = f(x)$. Supongamos que el punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Entonces el punto

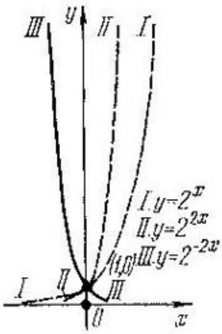

Fig. 128

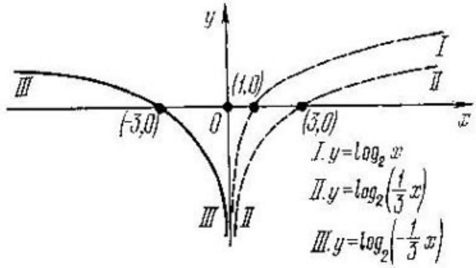

Fig. 129

$M_1(x_0 + a, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x - a)$, puesto que sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f[(x_0 + a) - a] = f(x_0)$. Por consiguiente, todo punto M_1 de la gráfica

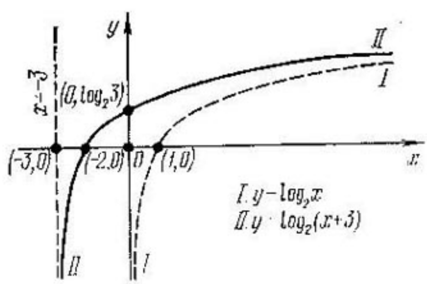

Fig. 130

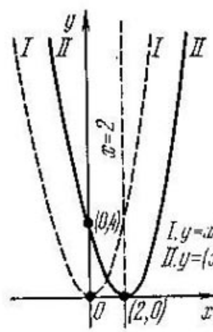

Fig. 131

de la función $y = f(x - a)$ se obtiene a partir del punto correspondiente M_0 de la gráfica de la función $y = f(x)$ desplazando este último a lo largo del eje Ox a la magnitud a. En este caso, si $a > 0$, el desplazamiento se realiza a la derecha a la magnitud a, y si $a < 0$, el desplazamiento se efectúa a la izquierda a la magnitud $|a|$. Así pues, la gráfica de la función $y = f(x - a)$ se obtiene a partir de la gráfica para la función $y = f(x)$, desplazando la última, como un cuerpo rígido, a lo largo del eje Ox a la magnitud a.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y=\log_2(x+3)$, $y=(x-2)^2$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (véanse las figs. 130, 131, 132).

Construcción de la gráfica $y = f(x) + b$, donde $b \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$. Las funciones $y = f(x) + b$ e $y = f(x)$ tienen un mismo campo de definición. Por consiguiente, conociendo cómo se halal para cualquier x la ordenada de la función $y = f(x) + b$, según la ordenada de la función $y = f(x)$, se puede construir la gráfica para la función $y = f(x) + b$, partiendo de la gráfica para la función $y = f(x)$. Supongfiamos que un punto

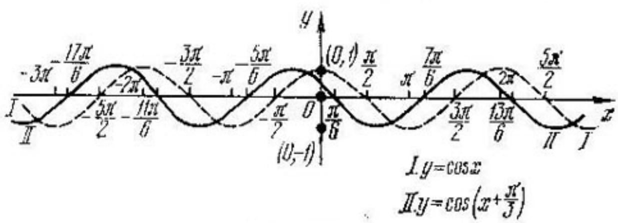

Fig. 132

$M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Tomemos el punto $M_1(x_0, y_0+b)$. Sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 + b = f(x_0) + b$. Por consiguiente, para obtener el punto M_1 se debe desplazar el punto M_0 a lo largo del eje Oy a la magnitud b. En este caso, si $b > 0$, el desplazamiento se realiza hacia arriba a la magnitud b; si $b < 0$, hacia abajo a la magnitud $|b|$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y = 2^x - 3$ (fig. 133), $y = x^2 - 1$ (fig. 134), $y = \operatorname{sen} x + 1$ (fig. 135).

Construcción de la gráfica de la función $y = Bf[k(x-a)] + b$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. La gráfica de la función $y = Bf[k(x-a)] + b$ se construye según la gráfica para la función $y = f(x)$, aplicando sucesivamente los métodos mencionados más arriba.

Por ejemplo, así:

$$y = f(x) \to y = f(kx) \to y = Bf(kx) \to y = Bf[k(x-a)] \to y = Bf[k(x-a)] + b.$$

Mostremos con varios ejemplos cómo se aplica este método.

Constrúyase la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$.

Transformemos el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, formando un cuadrado perfecto:

$$ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Se pide, pues, construir la gráfica de la función

$$y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Construyamos, al principio, la gráfica de la función $y = x^2$. Luego, estirando la gráfica obtenida a lo largo del eje Oy en $|a|$ veces, la

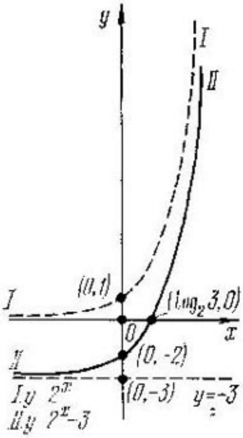

Fig. 133

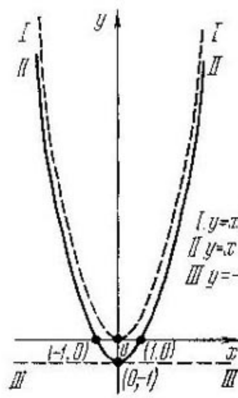

Fig. 134

gráfica de la función $y = |a|x^2$. Si $a > 0$, nos servirá la gráfica construida de la función $y = ax^2$. Si $a < 0$, entonces, apliquemos la gráfica de la función $y = |a|x^2$ respecto del eje Ox y obtengamos la gráfica de la función $y = ax^2$. Por fin, desplazando la gráfica

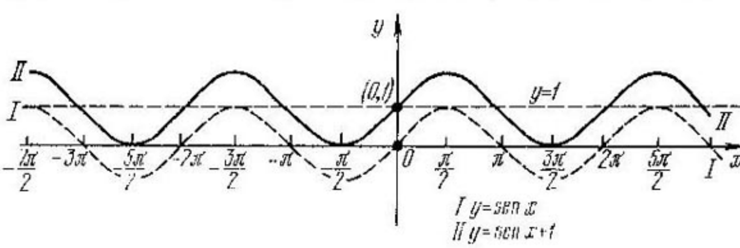

Fig. 135

de la función $y = ax^2$ a lo largo del eje Ox a la magnitud $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, y luego, desplazando la gráfica obtenida de la función $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ a lo largo del eje Oy a la magnitud $\frac{4ac - b^2}{4a}$, obtendremos la gráfica para la función $y = ax^2 + bx + c$.

Ilustremos todas estas etapas de construcción de la gráfica para un trinomio de segundo grado en el siguiente ejemplo: constrúyase la gráfica de la función $y = -2x^2 + 3x + 1$. Transformemos el trinomio de segundo grado $-2x^2+3x+1 = -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$, y construyamos, de acuerdo con el esquema expuesto, la gráfica de la función $= -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ (fig. 136).

Teorema 1. *La gráfica de la función $y = kx + b$ es una recta que corta el eje Oy en el punto M $(0, b)$ y que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a k.*

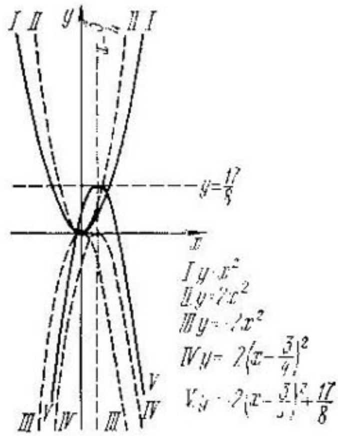

Fig. 136

Demostración. Demostremos que la gráfica de la función $y = kx$ representa una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a k.

Analicemos varios casos:

a) $k = 0$. Entonces la gráfica de la función $y = 0$ es el propio eje Ox (una línea recta) y $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

b) $k > 0$. Entonces todos los puntos de la gráfica de la función $y = kx$ se disponen en los cuadrantes primero o tercero. El origen de coordenadas pertenece a la gráfica de la función $y = kx$. Tomemos un punto M_0 (x_0, y_0) que es distinto del origen de coordenadas y que pertenece a la gráfica de la función $y = kx$, es decir, un punto tal, que $y_0 = kx_0$. Tracemos por los puntos M_0 (x_0, y_0) y O $(0, 0)$ una recta y mostremos que ésta será precisamente la gráfica de la función $y = kx$.

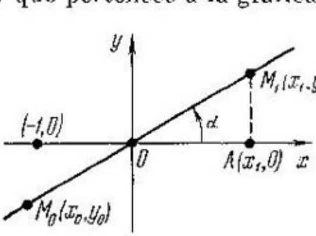

Fig. 137

Supongamos que la recta construida forma con la dirección positiv del eje Ox un ángulo α, entonces $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|y_0|}{|x_0|} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k$. Elijamos en esta recta un punto M_1 (x_1, y_1) que sea distinto de los puntos O y M_0 (supóngase, para concretar, que M_1 está en el primer cuadrante). Del triángulo rectángulo OAM_1 (fig. 137) encontramos que $|AM_1| = |OA| \operatorname{tg}\alpha$. Por cuanto $|AM_1| = y_1$, $|OA| = x_1$, y $\operatorname{tg}\alpha = k$, tenemos que $y_1 = kx_1$. Esto significa que las coordenadas de cualquier punto de la recta construida satisfacen la condición $y = kx$.

Supongamos ahora que x_2 e y_2 son tales, que $y_2 = kx_2$ (admitimos, para concretar, que $x_2 > 0$, y, por consiguiente, $y_2 > 0$). Construyamos un punto M_2 (x_2, y_2). El punto M_2 ha de encontrarse en la recta construida, pues, si el punto M_2 no cae en esta recta, entonces por el origen de coordenadas pasarán dos rectas diferentes que formarán con la dirección positiva del eje Ox un mismo ángulo α, lo que es imposible.

Así pues, los puntos de la recta construida, y sólo ellos, satisfacen la condición $y = kx$, es decir, la gráfica de la función $y = kx$ es precisamente la recta construida.

c) $k < 0$. En este caso la gráfica de la función $y = |k|\,x$ se representa por una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a $|k|$. La gráfica de la función $y = -|k|\,x$ se obtiene a partir de la gráfica mencionada por aplicación simétrica respecto del eje Ox, razón por la cual la gráfica de $y = -|k|\,x$ es una recta que forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a $-|k| = k$.

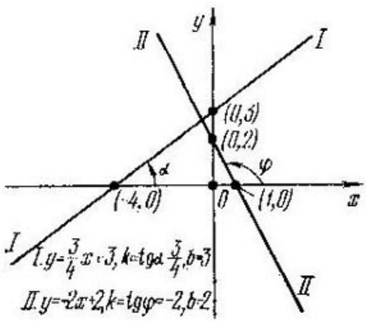

Fig. 138

Para acabar con la demostración resta decir que la gráfica de la función $y = kx + b$ se obtiene a partir de la recta $y = kx$, desplazándola como un cuerpo rígido a lo largo del eje Oy a la magnitud b. Como resultado de este procedimiento, el punto O $(0, 0)$ de la gráfica de la función $y = kx$ se trasladará al punto A $(0, b)$ de la gráfica para la función $y = kx + b$. El teorema queda demostrado.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = \frac{3}{4}x + 3$ (fig. 138, I), $y = -2x + 2$ (fig. 138, II).

Construcción de la gráfica de la función $y = |f(x)|$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. Recordemos, ante todo, la definición:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ para aquellos } x, \text{ donde } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \text{ para aquellos } x, \text{ donde } f(x) < 0. \end{cases}$$

Supongamos que el punto M_0 (x_0, y_0) pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, sea $y_0 = f(x_0)$. Analicemos dos casos:

a) $y_0 \geqslant 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = f(x_0) = y_0$, el punto M_0 (x_0, y_0) pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

b) $y_0 < 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = -f(x_0) = -y_0$, el punto M_1 $(x_1, -y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$. Por consiguiente, la gráfica de la función $y = |f(x)|$ se obtene a partir de la gráfica para la función $y = f(x)$) del modo siguiente:

todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos en el eje Ox y por arriba de éste, quedan en su lugar;

todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos por debajo del eje Ox, se aplican simétricamente respecto del eje Ox.

Observemos que la gráfica de la función $y = |f(x)|$ no tiene puntos por debajo del eje Ox.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y = |x^2 - 1|$ (fig. 139), $y = |2^x|$ (véase la fig. 104, II), $y = |\log_2 x|$ (fig. 140), $y = |\operatorname{sen} x|$ (fig. 141).

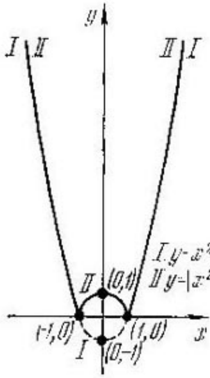

Fig. 139

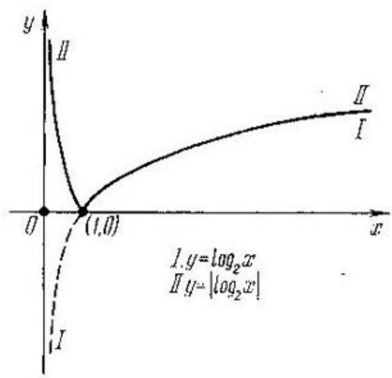

Fig. 140

Construcción de la gráfica de la función $y = f(|x|)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. Cabe notar que la función $y = f(|x|)$ es par, puesto que $f(|-x|) = f(|x|)$. La gráfica de una función

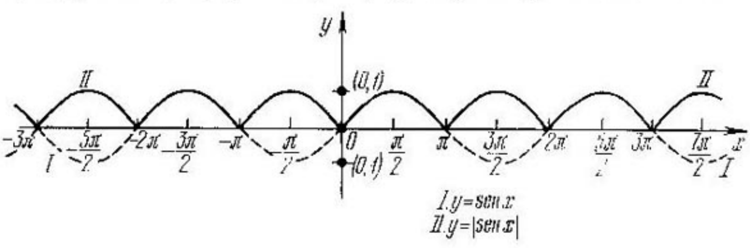

Fig. 141

par se construye del modo siguiente: se construye la gráfica de esta función para todos los $x \geqslant 0$; con el fin de construir la gráfica de dicha función para $x < 0$, la parte construida se aplica simétricamente respecto del eje Oy. Por cuanto $|x| = x$, cuando $x \geqslant 0$, entonces para $x \geqslant 0$, la gráfica de la función $y = f(|x|)$ coincide con la gráfica de la función $y = f(x)$. Con el objeto de construir la gráfica de la función $y = f(|x|)$ para $x < 0$ se debe aplicar simétricamente respecto del eje Oy la parte de la gráfica $y = f(|x|)$ ya construida para $x \geqslant 0$. En la construcción de la gráfica de la función $y = f(|x|)$ un papel esencial lo desempeñan los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$ dispuestos en el eje Oy o a la derecha de él; los puntos

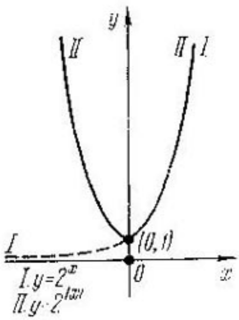

Fig. 142

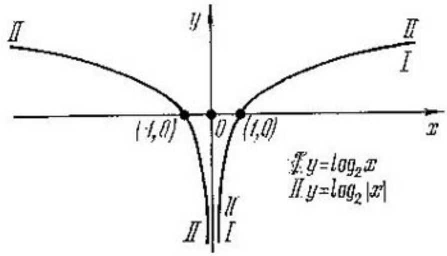

Fig. 143

de la gráfica, dispuestos a la izquierda del eje Oy, no tienen importancia alguna, por consiguiente, para construir la gráfica de la función $y = f(|x|)$ es necesario:

a) borrar todos los puntos de la gráfica para la función $y = f(x)$ dispuestos a la izquierda del eje Oy;

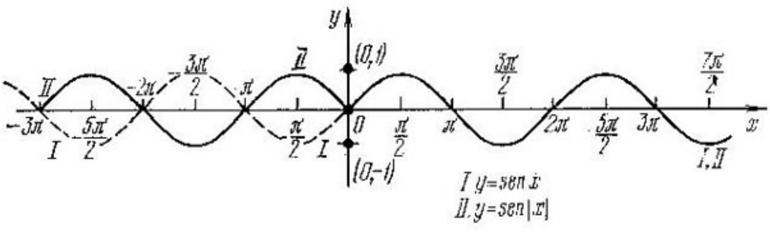

Fig. 144

b) dejar en su lugar todos los puntos de la gráfica de la función dispuestos en el eje Oy y a la derecha de éste;

c) aplicar simétricamente la parte derecha de la gráfica respecto del eje Oy.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = 2^{|x|}$ (fig. 142), $y = \log_2 |x|$ (fig. 143), $y = \operatorname{sen} |x|$ (fig. 144).

Construcción de la gráfica de la función $y = F(f(x))$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. En los casos más complicados que los analizados anteriormente la gráfica de la función $y = F(f(x))$ se construye haciendo uso de la gráfica de la función $y = f(x)$ y de las propiedades de la función $y = F(x)$. Sin ofrecer recomendaciones generales mostremos con algunos ejemplos cómo se hace esto.

Constrúyanse, haciendo uso de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 108), las gráficas de las funciones:

$y = 2^{\operatorname{sen} x}$

a) el campo de definición de la función $y = 2^{\operatorname{sen} x}$ lo representan todos los números reales;

b) por cuanto la función $y = \operatorname{sen} x$ es periódica con un período principal igual a 2π, entonces la función $y = 2^{\operatorname{sen} x}$ es también periódica y su período principal es 2π;

$y = \log_2 \operatorname{sen} x$

a) el campo de definición de la función $y = \log_2 \operatorname{sen} x$ lo representan todos aquellos x, para los cuales $\operatorname{sen} x > 0$, es decir, todos los x, donde la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ se dispone por encima del eje Ox;

b) por cuanto la función $y = \operatorname{sen} x$ es periódica de período principal igual a 2π, entonces la función $y = \log_2 \operatorname{sen} x$ es también periódica y su período principal es 2π.

Por eso, construiremos las gráficas de ambas funciones sólo en el segmento $[0, 2\pi]$ y, a continuación, las prolongaremos periódicamente.

c) por cuanto en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1, entonces la función $y = 2^{\operatorname{sen} x}$ en el mismo intervalo crece de 1 a 2; en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ decrece de 1 a (-1), mientras que la función $y = 2^{\operatorname{sen} x}$ decrece de 2 a $\frac{1}{2}$; en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ crece de (-1) a 0, y la función $y = 2^{\operatorname{sen} x}$ crece de $\frac{1}{2}$ a 1.

c) por cuanto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1, entonces la función $y = \log_2 \operatorname{sen} x$ en el mismo intervalo crece de $(-\infty)$ a 0; en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ la función $y = \operatorname{sen} x$ decrece de 1 a 0, mientras que la función $y = \log_2 \operatorname{sen} x$ decrece de 0 a $(-\infty)$; en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ la función $y = \operatorname{sen} x$ es no positiva, por lo cual en este intervalo la función $y = \log_2 \operatorname{sen} x$ no está definida (no hay aquí puntos de la gráfica de esta función).

Las propiedades citadas permiten construir las gráficas requeridas en el intervalo $[0, 2\pi]$ y hacer continuarlas periódicamente (figs. 145, 146).

Los razonamientos aducidos muestran cómo la gráfica de una función ayuda a elegir los intervalos necesarios para analizar las propiedades de las funciones compuestas y, de este modo, contribuye a construir la gráfica de una función compuesta.

Adición de las gráficas. Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En la parte común de sus campos de existencia queda definida la función $y = f(x) + g(x)$. Supongamos que el punto $M_1(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto

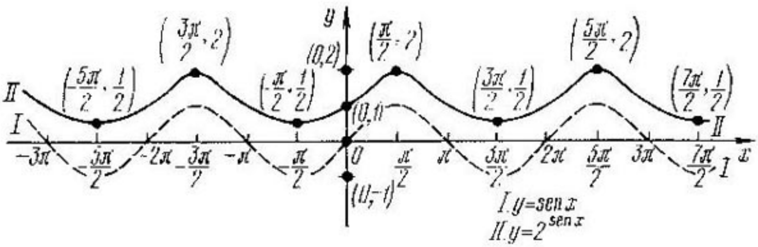

Fig. 145

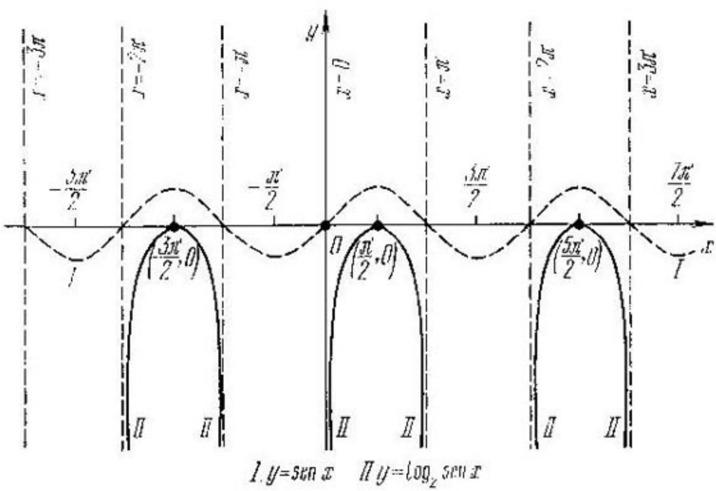

Fig. 146

$M_2(x_0, y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = g(x)$, con la particularidad de que el número x_0 pertenece a la parte común de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $M_3(x_0, y_1 + y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x) = g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ es necesario:

a) dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en los que x integra la parte común de los campos de existencia de estas funciones;

b) para cada tal x realizar la adición algebraica de las ordenadas (correspondientes al x dado) de estas dos gráficas.

Construyamos, empleando este método, la gráfica de la función $y = x + \text{sen}\, x$ (fig. 147).

Multiplicación de las gráficas. Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Entonces, en la parte común de sus campos de existencia queda definida la función $y = f(x)\, g(x)$. Supongamos que el punto

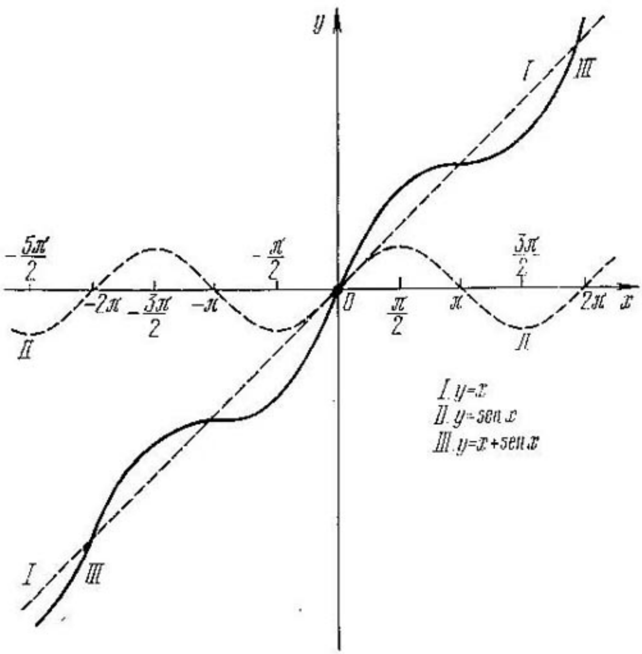

Fig. 147

$M_1(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto $M_2(x_0, y_2)$, a la gráfica de la función $y = g(x)$. Está claro que el número x_0 pertenece a la parte común de los campos de existencia de la función $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $M_3(x_0, y_1 y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)\, g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x)\, g(x)$ es necesario:

a) dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en los cuales x integra la parte común de los campos de existencia de estas funciones;

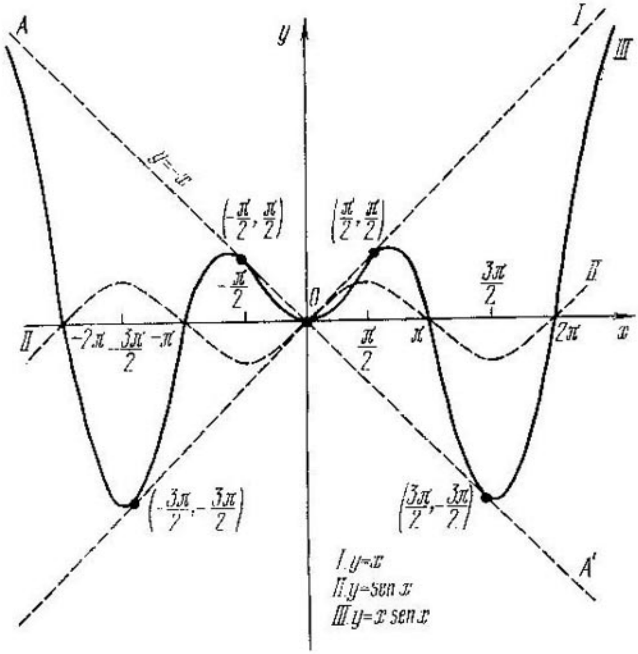

Fig. 148

b) para cada tal x realizar la multiplicación de las ordenadas (correspondientes al x dado) de estas dos gráficas.

Construyamos, empleando este método, la gráfica de la función $y = x \operatorname{sen} x$ (fig. 148).

Ejercicios

Hállense el campo de definición y el campo de variación de la función (1 . . . 6):

1. $y=\sqrt{x-1}$. **2.** $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$. **3.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$.

4. $y=\sqrt[3]{1+x}$. **5.** $y=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x+4}$. **6.** $y=\sqrt{x^2-1}$.

¿Coincidirán los campos de definición de las funciones (si no, entonces hállese la parte común de los campos de definición de las funciones en comparación) (7 . . . 14):

7. $y=x$ e $y=\dfrac{x^2}{x}$; **8.** $y=\operatorname{sen}\pi x$ e $y=\operatorname{tg}\pi x$;

9. $y=\cos\pi x$ e $y=\operatorname{ctg}\pi x$; **10.** $y=\operatorname{tg} x$ e $y=\operatorname{ctg} x$;

11. $y=\operatorname{arcsen} x$ e $y=\operatorname{arctg} x$; **12.** $y=\operatorname{arcsen} x$ e $y=\arccos x$;

13. $y=\operatorname{arcsen} x$ e $y=\operatorname{arcctg} x$; **14.** $y=\arccos x$ e $y=\operatorname{arcctg} x$?

15. ¿Qué significa: una función está acotada superiormente (inferiormente;
— una función no está acotada superiormente (inferiormente);
— una función está acotada;
— una función no está acotada?

16. Muéstrese que la función $y=\frac{1}{x}$ no está acotada superiormente ni tampoco inferiormente.

17. Muéstrese que la función $y = x^2$ no está acotada superiormente.

18. Muéstrese que la función $y = x^3$ no está acotada.

19. Dése un ejemplo de función que no sea par ni impar.

20. ¿Puede representarse cualquier función en forma de la suma de las funciones par e impar?

Analícense los ejemplos: 1) $y = \sqrt{x}$, 2) $y = \log_2 x$.

Demuéstrese la monotonía de las funciones (21 . . . 24):

21. $y = \log_{1/2} x$; 22. $y = 2^x$; 23. $y = \sqrt{x}$; 24. $y = x^3$.

¿Serán monótonas las funciones (si no, hállense los intervalos de monotonía) (25 . . . 43):

25. $y=\frac{1}{|x|}$; 26. $y=x-[x]$; 27. $y=\operatorname{sign} \lg x$;

28. $y=\sqrt[3]{x^2}$; 29. $y=\log_{1/2} \arccos x$;

30. $y=\operatorname{arctg} x^2$; 31. $y=\sqrt{5-4x}$;

32. $y=\operatorname{sen} \arccos x$; 33. $y=\operatorname{tg}^2 x$;

34. $y=\operatorname{sign} x$; 35. $y=\lg \cos x$; 36. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

37. $y=\operatorname{arctg} |x|$; 38. $y=\frac{x+1}{x-1}$;

39. $y=|x^2-3x+2|$; 40. $y=\sqrt{1-x^2}$;

41. $y=[\operatorname{sen} x]$; 42. $y=2^{\operatorname{tg} x}$; 43. $y=\frac{1}{\operatorname{arcsen} x}$?

44. ¿Puede ser una función no monótona la suma de dos funciones monótonas?

45. ¿Es siempre el producto de las funciones monótonas crecientes una función monótona creciente?

46. Sea dada en el intervalo [0, 2] una función

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{si } 0\leqslant x<1, \\ 5, & \text{si } x=1, \\ x+3, & \text{si } 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

Represéntese ésta en forma de la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

47. ¿Se puede representar en forma de la diferencia entre dos funciones monótonas una función no monótona?

48. Demuéstrese que la función $y = \{x\}$ (parte fraccionaria de x) es periódica. Hállese su período y constrúyase la gráfica de esta función.

49. Dése un ejemplo de función que no sea constante y el período de la cual es cualquier número real.

50. Hállese el período de las funciones $y = \cos(\operatorname{sen} x)$ e $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

51. Está dada una función periódica de período $T = 2\pi$ que se define en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$y=\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ x, & \text{si } 0<x\leqslant \pi. \end{cases}$$

Constrúyase la gráfica de esta función.

52. Una función periódica de período $T = 2$ se define en el segmento $[-1; 1]$ del modo siguiente:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Constrúyase la gráfica de esta función.

53. Una función periódica de período $T = 3$ está definida del modo siguiente: $y = 2 - x$, si $0 < x \leqslant 3$. Constrúyase la gráfica de esta función.

54. Muéstrese que cualquier número T tal, que $0 < T < 2\pi$ no es el período de la función $y = \text{sen } x$.

55. Muéstrese que un número $T = \pi$ es el período mínimo para la función $y = \text{tg } x$.

56. Muéstrese que cualquier número T tal, que $0 < T < \pi$ no es el período de la función $y = \text{ctg } x$.

57. Muéstrese que un número $T = 2\pi$ es el período mínimo para la función $y = \cos x$.

58. Demuéstrese que para cualquier x se verifica la desigualdad $|\text{sen } x| \leqslant |x|$.

59. Demuéstrese que para cualquier x del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se verifica la desigualdad $|\text{tg } x| \geqslant |x|$.

Constrúyanse, en un mismo sistema de coordenadas, las gráficas de los grupos de funciones indicados y aclárese su disposición mutua (60 . . . 65):

60. $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.

61. $y = x$, $y = \text{arcsen } x$.

62. $y = x$, $y = \text{arcctg } x$.

63. $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$.

64. $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \cos x$.

65. $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \text{ctg } x$.

Constrúyase la gráfica de las siguientes funciones (66 . . . 143):

66. $y = \sqrt{\cos x}$. **67.** $y = \sqrt{\text{tg } x}$. **68.** $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

69. $y = \sqrt{2^x}$. **70.** $y = \text{sen}^2 x$. **71.** $y = \text{ctg}^2 x$.

72. $y = \cos^3 x$. **73.** $y = \log_2^2 x$. **74.** $y = \text{arcsen } x^2$.

75. $y = \text{arctg } \frac{1}{x}$. 76. $y = [\text{sen } x]$. 77. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

78. $y = [2^x]$. 79. $y = [\log_2 x]$. **80.** $y = [\text{arcsen } x]$.

81. $y = [\text{arctg } x]$. 82. $y = [\arccos x]$. 83. $y = [\text{arcctg } x]$.

84. $y = \text{sign} \arccos x$. 85. $y = \text{sign arctg } x$. **86.** $y = \text{sign} \cos x$.

87. $y = \text{sign } x^2$. 88. $y = [x^2]$. **89.** $y = \text{sign } \frac{1}{x}$.

90. $y = \text{sign} \ln x$. **91.** $y = [\sqrt{x}]$. 92. $y = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$.

93. $y = \log_2 [\text{tg } x]$. 94. $y = \log_{1/2} [\text{sen } x]$. 95. $y = \text{arcsen} \cos x$.

96. $y = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{si } -1 < x < 0, \\ x^2, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$ 97. $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \leqslant -1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{si } -1 < x \leqslant 1, \\ \text{arctg } x, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

98. $y=\begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{si} \quad x \leqslant -\dfrac{3\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{si} \quad -\dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ \operatorname{arcctg} x, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & \text{si} \quad 1 \leqslant x. \end{cases}$

99. $y=\begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \leqslant -2, \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \log_2 x, & \text{si} \quad 4 < x. \end{cases}$

100. $y=\begin{cases} [\operatorname{sen} x], & \text{si} \quad x < -\pi, \\ \operatorname{tg} x, & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\dfrac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{si} \quad -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{5\pi}{6}, \\ \operatorname{sign} \cos x, & \text{si} \quad \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x. \end{cases}$

101. $y=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & \text{si} \quad x \leqslant -2, \\ \cos x, & \text{si} \quad -2 < x < -1, \\ x^2, & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 2, \\ \sqrt{x}, & \text{si} \quad 2 \leqslant x, \\ 2^x, & \text{si} \quad x \leqslant -1 \end{cases}$

102. $y=\begin{cases} \arccos x, & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$

103. $y=\begin{cases} \operatorname{arcctg} x, & \text{si} \quad x \leqslant -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ \arccos x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \log_{1/2} x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x. \end{cases}$

104. $y=\begin{cases} \operatorname{ctg} x, & \text{si} \quad x \leqslant -\dfrac{5\pi}{4}; \\ \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad -\dfrac{5\pi}{4} < x \leqslant -1, \\ 2^x, & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \log_{1/2} x, & \text{si} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ \sqrt{x}, & \text{si} \quad \dfrac{1}{4} < x. \end{cases}$

$$105.\quad y=\begin{cases} [\operatorname{arctg} x], & \text{si} \quad x\leqslant -\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x, & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{6}<x\leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{4}<x<\pi, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad \pi\leqslant x\leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{si} \quad \dfrac{3\pi}{2}<x. \end{cases}$$

106. $y=x^2+5\,|x-1|+1$. **107.** $y=|-3x+2|-|2x-3|$.

108. $y=|x^2-3x+2|-|2x-3|$. **109.** $y=(x+1)(|x|-2)$.

110. $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$. **111.** $y=1-\dfrac{1}{|x|}$. **112.** $y=\dfrac{2x-6}{|3-x|}$.

113. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+1}$. **114.** $y=2\cdot 3^{x+1}-1$. **115.** $y=10^{-|x|}$.

116. $y=|\log_{\frac{1}{\pi}} x^6|$. **117.** $y=\sqrt{\lg \operatorname{sen} x}$.

118. $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$. **119.** $y=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$.

120. $y=\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x+\cos 2x$. **121.** $y=\operatorname{arcsen} \operatorname{tg} x$.

122. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$. **123.** $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x$.

124. $y=\cos \lg x$. **125.** $y=2\operatorname{sen}|2x|$.

126. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)$. **127.** $y=\dfrac{1}{3}\arccos(x-1)+1$.

128. $y=-2\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$. **129.** $y=\operatorname{arcsen}(x+1)-1$.

130. $y=2\operatorname{tg}\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **131.** $y=-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

132. $y=\log_{1/2}\dfrac{1}{1-x^2}$. **133.** $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

134. $y=\operatorname{sen} 2\arccos x$. **135.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

136. $y=\arccos\cos x$. **137.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

138. $y=\cos 2x-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}$. **139.** $y=\dfrac{|x-2|+1}{|x+3|}$.

140. $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$. **141.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

142. $y=\dfrac{|x-1|}{1-x^2}$. **143.** $y=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$

Hállense las funciones inversas y constrúyanse sus gráficas para una función con el campo de definición prefijado (144—153):

Función	Campo de definición	Función	Campo de definición
144. $y=3x-2$	$(-\infty;\ \infty)$	**149.** $y=\log_{1/3}(x+1)$	$(-1;\ \infty)$
145. $y=-(x+1)^2-2$	$(-\infty;\ -1)$	**150.** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(-\infty;\ 0]$
146. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$	$(1;\ \infty)$	**151.** $y=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\left[-\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{6}\right]$
147. $y=\sqrt{x^2-4}$	$[2;\ \infty)$	**152.** $y=-2+\cos x$	$[0;\ \pi]$
148. $y=-\sqrt{4-x^2}$	$[-2;\ 0]$	**153.** $y=2\operatorname{tg} x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

22-0382

CAPÍTULO

VII

ECUACIONES CON UNA SOLA INCÓGNITA

Sean dadas dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ cuyos campos de existencia son P y L, respectivamente. Sea el campo M la intersección de los campos de existencia de dichas funciones, es decir, $M = P \cap L$ (en un caso particular, el campo M puede ser un conjunto vacío).

Supongamos que se requiere: hallar todos los números α del campo M, para cada uno de los cuales se verifique la igualdad $f(\alpha) = g(\alpha)$. En estos casos se dice que el problema consiste en *resolver la ecuación* $f(x) = g(x)$ *con una sola incógnita* x, *o bien está dada una ecuación* $f(x) = g(x)$ *con una incógnita* x.

En este capítulo se estudian algunos de los métodos de resolución de las ecuaciones de este tipo solamente, razón por la cual en lo que sigue en lugar de decir «ecuación $f(x) = g(x)$ con una sola incógnita x» diremos simplemente «ecuación $f(x) = g(x)$».

§ 1. Definiciones y afirmaciones principales referentes a la equivalencia de las ecuaciones

Se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de la ecuación* $f(x) = g(x)$ la parte común (intersección) de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, es decir, el conjunto de todos los valores numéricos de la incógnita x, para cada uno de los cuales tienen sentido (están defenidos tanto el primer miembro de la ecuación, como el segundo. Todo número x, perteneciente al CVA de una ecuación, se llama *valor admisible* para la ecuación dada.

Un número α del CVA de la ecuación lleva el nombre de *solución* (o raíz) de la ecuación $f(x) = g(x)$, siempre que, al sustituirlo en lugar de la incógnita x, la ecuación se convierte en una igualdad numérica lícita $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ significa hallar el conjunto de todas sus raíces. Observemos que este conjunto puede resultar ser vacío, lo que es posible solamente en dos casos: a) si el CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto vacío; b) si el CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto no vacío M, mas no existe ningún número $\alpha \in M$, para el cual se verifique la igualdad numérica $f(\alpha) = g(\alpha)$. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto vacío, suele decirse, de ordinario, que la ecuación $f(x) = g(x)$ *no tiene raíces* y, por eso a veces se dice así: resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ significa hallar todas sus raíces o demostrar que esta ecuación no tiene raíces. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ consta de k números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, se dice que la ecuación $f(x) = g(x)$ *tiene sólo k raíces*: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, es decir, el conjunto de todas sus raíces es el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ consta de un solo número x_1, se dice, además, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene la *raíz única* x_1.

Sean dadas dos ecuaciones: $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$. Si toda raíz de la primera ecuación es a la vez la raíz de la segunda ecuación, entonces la segunda ecuación recibe el nombre de *consecuencia* de la primera.

De aquí se deduce, en particular, que si la primera ecuación no tiene raíces, la segunda ecuación es consecuencia de la primera. Con otras palabras, si el conjunto de todas las raíces de la primera ecuación es una parte (subconjunto) del conjunto de todas las raíces de la segunda ecuación, entonces la segunda ecuación es una consecuencia de la primera.

Sean dadas dos ecuaciones: $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$. Si toda raíz de la primera ecuación es la raíz de la segunda, y cualquier raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera, entonces dichas dos ecuaciones se denominan *equivalentes*. Con otras palabras, dos ecuaciones son equivalentes, si cada una de ellas es consecuencia de la otra. En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las ecuaciones mencionadas no tiene raíces, tales ecuaciones son equivalentes. La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente* de una ecuación a la otra.

Sean dadas las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$, y sea dado un conjunto M de valores de la incógnita x. Si toda raíz de la primera ecuación, perteneciente al conjunto M, es la raíz de la segunda ecuación, y cualquier raíz de la segunda ecuación, perteneciente al conjunto M, es la raíz de la primera ecuación, estas dos ecuaciones se denominan *equivalentes en el conjunto M*. En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las ecuaciones mencionadas no tiene raíces en el conjunto M, ellas son equivalentes en el conjunto M.

La sustitución de una ecuación por la otra, equivalente a la primera en el conjunto M, se denomina *paso equivalente en el conjunto M* de una ecuación a la otra.

He aquí algunos ejemplos que ilustran los conceptos introducidos. Sea dada la ecuación

$$\sqrt{1-x}=\log_2(x-1).$$

El campo de valores admisibles de esta ecuación es un conjunto vacío. En efecto, el campo de existencia de la función $y = \sqrt{1-x}$ es un conjunto $X_1 = (-\infty; 1]$, mientras que el campo de existencia de la función $y = \log_2(x-1)$ es un conjunto $X_2 = (1; +\infty)$. La parte común (intersección) de estos campos es un conjunto vacío.

En el ejemplo dado, una vez determinado el CVA de la ecuación, la última queda resuelta, puesto que se ha aclarado que la ecuación no tiene raíces.

Sea dada la ecuación:

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4-x^2}.$$

El campo de valores admisibles de esta ecuación es un conjunto que se compone de dos números: -2 y 2. En efecto, el campo de existencia de la función $y = \sqrt{x^2-4}$ es el conjunto $X_1 = (-\infty; -2] \cup [2, +\infty)$, mientras que el campo de existencia de la función $y = \sqrt{4-x^2}$ es el conjunto $X_2 = [-2; 2]$. La parte común (intersección) de dichos campos es el conjunto $X = X_1 \cap X_2 = \{-2; 2\}$. Sustituyendo los números (-2) y 2 en la ecuación dada nos convencemos de que ambos números mencionados son raíces de la ecuación. Por consiguiente, la ecuación en consideración tiene tan sólo dos raíces $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. Quiere decir, en este ejemplo también la ecuación queda resuelta, una vez determinado su CVA.

Los ejemplos aducidos muestran que al resolver una ecuación resulta útil conocer el CVA de esta ecuación.

No obstante, podemos dar algunos ejemplos de las ecuaciones para cuya resolución no es obligatorio conocer sus CVA.

Por ejemplo, sea dada la ecuación

$$\sqrt{\log_2(x+\operatorname{sen} 2x)}=-1.$$

Esta ecuación no tiene raíces, puesto que para cualquier valor de x, perteneciente al CVA de la ecuación, tenemos una igualdad numérica que no se verifica. Al mismo tiempo, el cálculo del CVA de esta ecuación sería un problema no simple.

Dos ecuaciones, $x+4=0$ y $(x^2+1)(x+4)=0$ son equivalentes en el conjunto de todos los números reales, pues cada una de estas ecuaciones tiene una sola raíz, el número (-4).

Analicemos dos ecuaciones: $\sqrt{x}=1$ y $x^2=1$. La primera ecuación tiene solamente una raíz, el número 1, la cual es también la raíz de la segunda ecuación. Por eso, la ecuación $x^2=1$ es consecuencia de la ecuación $\sqrt{x}=1$. Pero, la ecuación $x^2=1$ tiene una raíz más, el número (-1), la cual no sólo no es la raíz de la ecuación $\sqrt{x}=1$, sino que ni siquiera entra en el CVA de ella. De este modo, las ecuaciones dadas no son equivalentes en el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, son equivalentes en el CVA de la primera ecuación (es decir, en el conjunto de números no negativos), puesto que en este conjunto cada una de las ecuaciones tiene una sola raíz, que es el número 1.

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de las ecuaciones:

1. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $f(x) - g(x) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$ *son equivalentes para cualquier número real* α.

3. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $\alpha f(x) = \alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier número real* α *distinto de cero.*

4. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *son equivalentes para cualquier número positivo y fijo* a, *distinto de la unidad.*

Las demostraciones de estas afirmaciones son parecidas una a otra, por lo cual **demostremos** aquí, por ejemplo, sólo la afirmación 4.

Sea el número x_1 una raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Por cuanto el número fijo a satisface las condiciones $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la validez de la igualdad numérica $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$ predetermina la validez de la igualdad numérica $f(x_1) = g(x_1)$. Por consiguiente, el número x_1 es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Semejantes razonamientos pueden realizarse para toda raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Mostremos ahora el caso contrario. Sea el número x_2 una solución de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_2) = g(x_2)$. Entonces, en virtud de la propiedad de las igualdades numéricas, para cualquier número fijo a tal que $a > 0$, y $a \neq 1$, se verifica la igualdad $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$. Por consiguiente el número x_2 es una raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Quiere decir, toda raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$ es la raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Así pues, si cada una de las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ tiene raíces, dichas ecuaciones son equivalentes.

Hemos de notar que de lo demostrado se deduce, en particular, que si una de las ecuaciones en consideración no tiene raíces, tampoco las tendrá la segunda, es decir, en este caso también las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ son equivalentes. Con esto queda demostrada completamente la afirmación 4.

He aquí algunas **afirmaciones** para el caso en que una de las ecuaciones es consecuencia de la otra.

5. *Sea* n *un número natural, entonces la ecuación* $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ *es una consecuencia de la ecuación* $f(x) = g(x)$.

Demostración. De acuerdo con la afirmación 1, la ecuación

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

es equivalente a la ecuación

$$[f(x)]^n - [g(x)]^n = 0,$$

la cual, a su vez, es equivalente, en virtud de las fórmulas de multiplicación reducida, a la siguiente ecuación (cap. II):

$$[f(x) - g(x)]\{[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^{n-2}g(x) + \ldots + [g(x)]^{n-1}\} = 0 \quad (1).$$

Supongamos que el número x_0 es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, que existen los números $f(x_0)$ y $g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad $f(x_0) = g(x_0)$. Mas en este caso se verifica la igualdad numérica

$$[f(x_0) - g(x_0)]\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{-n1}\} = 0.$$

Por consiguiente, el número x_0 es una raíz de la ecuación (1), la cual es equivalente a la ecuación $[f(x)^n = [g(x)]^n$, por lo cual el número x_0 es una raíz de ésta. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación inicial. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$ es la raíz de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, es decir, en este caso la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ es, de hecho, una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$. En cambio, si la ecuación $f(x) = g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ será su consecuencia. La afirmación 5 está completamente demostrada.

6. *La ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.*

Demostración. Sea x_0 una raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $\log_a f(x_0)$ y $\log_a g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. De la igualdad entre los logaritmos de dos números de una misma base se deduce la igualdad entre los propios números, es decir, $f(x_0) = g(x_0)$, por consiguiente, el número x_0 es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es también una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, en este caso la ecuación $f(x) = g(x)$ es realmente una consecuencia de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. En cambio, si la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $f(x) = g(x)$ es su consecuencia. La afirmación 6 queda con esto completamente demostrada.

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de las ecuaciones en un conjunto.

7. *Sea n un número natural y supongamos que en cierto conjunto M las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son no negativas. Entonces, en dicho*

conjunto las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $[f(x)]^n = [g(x)]$ son equivalentes.

Demostración. Se ha demostrado más arriba (véase la afirmación 5) que la ecuación $[f(x)^n = [g(x)]^n$ es una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Demostremos, ahora, lo contrario. Sea un número $x_0 \in M$ cierta raíz de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, es decir, supongamos que existen números no negativos $f(x_0)$ y $g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica

$$[f(x_0)]^n = [g(x_0)]^n. \tag{2}$$

Supongamos que el número x_0 es tal que uno de los números $f(x_0)$ ó $g(x_0)$ es nulo. Entonces, de la igualdad (2) se desprende que el otro de los números citados es también igual a cero, es decir, en este caso. $f(x_0) = g(x_0)$. Por consiguiente, en este caso el número x_0 es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Supongamos ahora que el número x_0 es tal que uno de los números, $f(x_0)$ ó $g(x_0)$, es distinto de cero. Entonces, de la igualdad numérica (2) se deduce que el otro de los números citados tampoco es igual a cero y, de acuerdo con la condición de la afirmación 7, ambos números $f(x_0)$ y $g(x_0)$ son positivos. La igualdad numérica (2) es equivalente a la siguiente

$$[f(x_0)-g(x_0)]\,[\{f(x_0)]^{n-1}+[f(x_0)]^{n-2}g(x_0)+\ldots+[g(x_0)]^{n-1}\}=0\cdot(3)$$

Por cuanto cualquier potencia natural de un número positivo es un número positivo, como lo es también el producto y la suma de los números positivos, entonces el número $\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{n-1}\}$ es positivo, por consiguiente la igualdad numérica (3) es equivalente a la igualdad numérica $f(x_0) - g(x_0) = 0$, o bien a la igualdad $f(x_0) = g(x_0)$. La última igualdad numérica significa que el número x_0 es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para toda raíz, perteneciente al conjunto M, de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$. Por lo tanto, toda raíz, perteneciente al conjunto M, de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, en el conjunto M la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$.

En cambio, si la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $f(x) = g(x)$ es, en virtud de la definición, una consecuencia de la primera.

Hemos mostrado, pues, que en las condiciones de la afirmación 7 la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, con lo que se acaba la demostración de la afirmación 7.

8. *Sea un número fijo a* tal que $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *y supongamos que en cierto conjunto M las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son positivas. Entonces en el conjunto M las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son equivalentes.*

Demostración. Hemos demostrado más arriba (véase la afirmación 6) que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Demostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número $x_0 \in \in M$ es cierta raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, sea $f(x_0) > 0$, $g(x_0) > 0$ y $f(x_0) = g(x_0)$. Mas, en este caso han de ser iguales los logaritmos de estos números de una misma base, es decir, se verifica la igualdad numérica $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. Por consiguiente, el número x_0 es la raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz (del conjunto M) de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Así pues, toda raíz (del conjunto M) de la ecuación $f(x) = g(x)$ es también una raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, es decir, en este caso la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es realmente una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$. En cambio, si la ecuación $f(x) = g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es una consecuencia de la primera por definición.

Hemos demostrado, pues, que en las condiciones de la afirmación 8 la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$, con lo cual se finaliza la demostración de la afirmación 8.

9. *Supongamos que en cierto conjunto M, perteneciente al CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$, está definida la función $y = \varphi(x)$ y que para cualquier $x \in M$ la función $\varphi(x) \neq 0$. Entonces, en dicho conjunto M las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ son equivalentes.*

Demostración. Sea un número $x_1 \in M$ cierta raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_1) - -g(x_1) = 0$. Por hipótesis, existe el número $\varphi(x_1)$ y, además, $\varphi(x_1) \neq 0$. Por eso, se verifica también la igualdad numérica $\varphi(x_1)\,[f(x_1 - -g(x_1)] = 0$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $\varphi(x_1) f(x_1) = = \varphi(x_1)\,g(x_1)$. La última igualdad numérica significa que el número x_1 es una raíz de la ecuación $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz, perteneciente al conjunto M, de la ecuación $f(x) = g(x)$. Quiere decir, cualquier raíz del conjunto M de la ecuación $f(x) = g(x)$ es una raíz de la ecuación $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$.

Demostremos lo contrario. Sea un número $x_2 \in M$ cierta raíz de la ecuación $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_2)$, $g(x_2)$ y $\varphi(x_2)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_2)\,\varphi(x_2) = g(x_2)\,\varphi(x_2)$ que es equivalente a la igualdad numérica $\varphi(x_2)\,[f(x_2) - g(x_2)] = 0$. Por hipótesis, $\varphi(x_2) \neq 0$, por lo cual la última igualdad numérica es equivalente a la igualdad numérica $f(x_2) - g(x_2) = 0$, la cual es equivalente, a su vez, a la igualdad $f(x_2) = g(x_2)$. La última igualdad numérica significa que el número x_2 es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Semejantes razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz, del conjunto M, de la ecuación $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$. Quiere decir, cualquier raíz, del conjunto M, de la ecuación $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ es la raíz de la ecuación $f(x)=g(x)$. Así pues, si cada una de las ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ tiene raíces en el conjunto M, estas ecuaciones son equivalentes en el conjunto M. Observemos que lo demostrado se desprende, en particular, que si una de las ecuaciones en consideración no tiene raíces en el conjunto M, tampoco las tiene en este conjunto la otra, es decir, en este caso también las ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ son equivalentes en el conjunto M. La afirmación 9 queda completamente demostrada.

Sean dadas n ecuaciones $f_1(x)=g_1(x)$, $f_2(x)=g_2(x)$, . . ., . . ., $f_n(x)=g_n(x)$. Denotemos con Q un campo que representa la intersección de los CVA de todas estas ecuaciones. Si se pide hallar todos los números α del campo Q, cada uno de los cuales sea la raíz de al menos una de las ecuaciones citadas, se dice que *está dado el conjunto de n ecuaciones*

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)=g_n(x) \tag{4}$$

y el campo Q recibe el nombre de *campo de valores admisibles de este conjunto.*

Notemos que las ecuaciones del conjunto se escriben, habitualmente, en una línea. Puede ocurrir que el conjunto de ecuaciones (4) contiene una infinidad de ecuaciones.

Un número α del CVA del conjunto (4) se denomina *solución* (o *raíz*) de este conjunto, si es la raíz de por lo menos una ecuación del conjunto.

Resolver el conjunto de ecuaciones (4) significa hallar el conjunto de todas sus raíces. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el conjunto de ecuaciones (4) *no tiene raíces.*

El conjunto de ecuaciones (4) se resuelve corrientemente del modo siguiente. Al principio se resuelve cada ecuación en el CVA del conjunto, es decir, se determinan los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, donde M_i es el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f_i(x)=g_i(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto. Luego se determina el conjunto M_0 que es una unión de todos los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, es decir, $M_0=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$. Este conjunto será precisamente el conjunto de todas las raíces del conjunto de ecuaciones (4). Si el conjunto M_0 consta de k números : $M_0=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, se dice que el conjunto de ecuaciones (4) tiene *tan sólo k raíces* x_1, $x_2, \ldots, x_k$.

Suele decirse que una ecuación

$$p(x)=\varphi(x) \tag{5}$$

es equivalente al conjunto de ecuaciones (4), si cualquier raíz de la ecuación (5) es también raíz de la totalidad (4), y cualquier raíz de la totalidad (4) es raíz de la ecuación (5).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la ecuación (5) no tiene raíces y tampoco las tiene el conjunto de ecuaciones (4), entonces la ecuación (5) es equivalente al conjunto de ecuaciones (4). La sustitución de la ecuación (5) por el conjunto (4), equivalente a la ecuación (5), se denomina *paso equivalente* de la ecuación (5) al conjunto (4).

A veces surge la necesidad de efectuar un paso equivalente de una ecuación a un conjunto de ecuaciones en cierto conjunto M.

Se dice que la ecuación (5) *es equivalente en el conjunto M* al conjunto de ecuaciones (4), si cualquier raíz de la ecuación (5), perteneciente al conjunto M, es también raíz del conjunto (4), y cualquier raíz del conjunto (4), perteneciente al conjunto M, es raíz de la ecuación (5).

La sustitución de una ecuación por otra ecuación o por un conjunto de ecuaciones se llamará en lo que sigue transformación de la ecuación.

§ 2. Ecuaciones elementales

Sea $y = f(x)$ una función elemental fundamental y sea b, un número real fijo. Entonces la ecuación

$$f(x) = b$$

se denomina, de ordinario, *ecuación elemental*.

Es evidente que el CVA de la ecuación elemental coincide con el campo de existencia de la función elemental fundamental $y = f(x)$. Estudiemos una ecuación elemental $f(x) = b$ en cierto conjunto X perteneciente al CVA, con la particularidad de que a título de conjunto X tomaremos el segmento $[x_1, x_2]$, o bien el intervalo (x_1, x_2), o bien los semiintervalos $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, o bien los rayos $[x_1, +\infty)$, $(x_1 + \infty)$, $(-\infty, x_1)$, $(-\infty, x_1]$, o bien toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$. Denotemos con Y el campo de valores de la función $y = f(x)$ definida en el conjunto X. Supongamos que la función elemental fundamental $y = f(x)$ es estrictamente monótona en el conjunto X; entonces, si $b \in Y$, la ecuación $f(x) = b$ tendrá la raíz única en el conjunto X, y si $b \notin Y$, entonces la ecuación $f(x) = b$ no tendrá raíces en el conjunto X, puesto que $f(x_0) \in Y$ para todo $x_0 \in X$, y, por consiguiente, $f(x_0) \neq b$, cualquiera que sea $x_0 \in X$. En adelante, al resolver las ecuaciones elementales, aplicaremos esta afirmación.

Ecuación algebraica. Sea n cierto número natural fijo, entonces la ecuación

$$x^n = b \tag{1}$$

se denomina, corrientemente, *ecuación algebraica elemental*.

La función $y = x^n$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de la ecuación (1) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto las propiedades de la función $y = f(x)$ que se emplean al resolver la ecuación (1) son diferentes para n par y n impar, examinemos dos casos:

1. Supongamos que $n = 2m - 1$, donde m es un número natural fijo, entonces la ecuación (1) adquiere la forma

$$x^{2m-1} = b. \tag{1a}$$

La función $y = x^{2m-1}$ es estrictamente creciente en toda la recta numérica y el campo de sus valores Y es también toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$. Por eso, para cada b la ecuación (1a) tiene la única raíz que se designará con x_1. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad $x_1^{2m-1} = b$. Esta igualdad numérica es equivalente a:

la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, si b es un número positivo;

la igualdad numérica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, si b es un número negativo.

Así pues, el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1a) consta, para cada b, del único número x_1, con otras palabras, la ecuación (1a) tiene una raíz única x_1, con la particularidad de que $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, si $b > 0$, $x_1 = 0$, si $b = 0$, $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, si $b < 0$.

2. Sea $n = 2m$, donde m es un número natural fijo, entonces, la ecuación (1) adquiere la forma

$$x^{2m} = b. \tag{1b}$$

Dividamos el CVA de la ecuación (1b) en dos conjuntos: $X_1 = [0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$, y resolvamos la ecuación (1b) en cada uno de ellos.

En el conjunto X_1 la función $y = x^{2m}$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = [0, +\infty)$. Por consiguiente, si b es un número negativo, la ecuación (1b) no tendrá raíces en el conjunto X_1, y si b es un número no negativo, en el conjunto X_1 la ecuación (1b) tendrá una raíz única que se denotará con x_1. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^{2m} = b$. Esta igualdad es equivalente a:

la igualdad numerica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m]{b}$, si b es un número positivo.

En el conjunto X_2 la función $y = x^{2m}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si b es un número negativo o nulo, la ecuación (1b) en el conjunto X_2 no tendrá soluciones; si b es un número positivo, la ecuación (1b) tendrá en el conjunto X_2 una raíz única que se designará con x_2. Por cuanto la función $y = x^{2m}$ es par en todo el CVA, entonces $x_2 = -x_1$, es decir, $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

Así pues, para cada b negativo la ecuación (1b) no tiene raíces; para $b = 0$ la ecuación (1b) tiene una raíz única $x_1 = 0$; para cada b positivo el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1b) consta de dos números: $x_1 = \sqrt[2m]{b}$ y $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

En la Tabla 5 se exponen los resultados de la resolución de la ecuación (1).

Ecuación fraccionaria. Sea n un número natural fijo, entonces, la ecuación

$$x^{-n} = b \tag{2}$$

suele llamarse *ecuación fraccionaria elemental.*

La función $y = x^{-n}$ está definida en el conjunto de todos los números reales distintos de cero, por lo cual el CVA de la ecuación

Tabla 5

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{2m-1} = b$	$x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$	$x_1 = 0$	$x_1 = -\sqrt[2m-1]{\lvert b\rvert}$
$x^{2m} = b$	$x_1 = \sqrt[2m]{b},\ x_2 = -\sqrt[2m]{b}$	$x_1 = 0$	no hay soluciones

(2) es el conjunto $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{-n}$, que se emplean al resolver la ecuación (2) son diferentes para n par y n impar, examinemos dos casos:

1. Sea $n = 2m - 1$, donde m es un número natural fijo, entonces la ecuación (2) adquiere la forma

$$x^{-(2m-1)} = b \tag{2a}$$

Partamos el CVA de la ecuación (2a) en dos conjuntos: $X_1 = (-\infty, 0)$ y $X_2 = (0, +\infty)$ y resolvamos la ecuación (2a) en cada uno de ellos. En el conjunto X_1 la función $y = x^{-2m+1}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y_1 = (-\infty, 0)$. Por consiguiente, si b es un número no negativo, en el conjunto X_1 la ecuación (2a) no tiene raíces, y si b es negativo, en el conjunto X_1 la ecuación (2a) tiene una raíz única, la cual se denotará con x_1. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^{-2m+1} = b$, la cual es equivalente, tomando en consideración que b es un número negativo, a la igualdad numérica $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

En el conjunto X_2 la función $y = x^{-2m+1}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y_2 = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si b es un número negativo o es cero, entonces en el conjunto X_2 la ecuación (2a) no tiene raíces, y si b es positivo, la ecuación (2a) tiene en el conjunto X_2 una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (2a), es válida la igualdad numérica $x_1^{-2m+1} = b$, la cual es equivalente, tomando en consideración que b es un número positivo, a la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

Así, pues, si $b = 0$, la ecuación (2a) no tiene raíces, y para cada b distinto de cero la ecuación (2a) tiene una raíz única x_1, con la particularidad de que $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$, si $b < 0$ y $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$ si $b > 0$.

2. Sea $n = 2m$, donde m es un número natural fijo, entonces la ecuación (2) adquiere la forma

$$x^{-2m} = b. \tag{2b}$$

Partamos el CVA de la ecuación (2b) en dos conjuntos: $X_1 = (-\infty, 0)$ y $X_2 = (0, +\infty)$, y resolvamos la ecuación (2b) en cada uno de ellos.

En el conjunto X_2 la función $y = x^{-2m}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si b es un número negativo o es cero, en el conjunto X_2 la ecuación (2b) no tiene raíces, y si b es un número positivo, la ecuación (2b) tiene en el conjunto X_2 una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (2b), es válida la siguiente igualdad numérica: $x_1^{-2m} = b$, la cual es equivalente, tomando en consideración que b es un número positivo, a la igualdad $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

En el conjunto X_1 la función $y = x^{-2m}$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si b es un número negativo o nulo, la ecuación (2b) no tiene raíces en el conjunto X_1, y si b es un número positivo, entonces la ecuación (2b) tendrá en el conjunto X_1 una raíz única que se denotará con x_2. Por cuanto la función $y = x^{-2m}$ es par en todo el CVA, entonces $x_2 = -x_1$, es decir, $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

Así pues, para cada b no positivo la ecuación (2b) no tiene raíces; para cada b positivo el conjunto de todas las raíces de la ecuación (2b) consta de dos números: $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ y $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

En la tabla 6 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (2).

Ecuaciones potenciales. Sea α cierto número positivo fijo y no entero, entonces

$$x^{\alpha} = b, \tag{3}$$

$$x^{-\alpha} = b, \tag{4}$$

suelen llamarse *ecuaciones potenciales elementales.*

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{-(2m-1)}=b$	$x_1=\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$	no hay soluciones	$x_1=-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}}$
$x^{-2m}=b$	$x_1=\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ $x_2=-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$	no hay soluciones	no hay soluciones

El campo natural de definición de la función $y = x^\alpha$ es el conjunto de todos los números no negativos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (3) es el conjunto $X= [0, +\infty)$. La función $y = x^\alpha$ es estrictamente creciente en el conjunto X y su campo de valores está representado por el rayo $Y = [0, +\infty)$. Por eso, la ecuación (3) no tiene raíces, cuando b es negativo, mientras que para cada b no negativo tiene una raíz única que se denotará con x_1. Conforme a la definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^\alpha = b$. Esta igualdad numérica es equivalente a:

la igualdad numérica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1=b^{\frac{1}{\alpha}}$, si b es un número positivo.

Así pues, para cada b negativo la ecuación (3) no tiene raíces, y para cada b no negativo la ecuación (3) tiene una raíz única x_1, con la particularidad de que $x_1 = 0$, si $b = 0$; $x_1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$, si $b > 0$.

El campo natural de definición para la función $y= x^{-\alpha}$ es el conjunto de todos los números positivos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (4) es el conjunto $X = (0, +\infty)$. La función $y = x^{-\alpha}$ es estrictamente decreciente en el conjunto X y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por eso, la ecuación (4) no tiene raíces para cualquier b no positivo y tiene una raíz única para cada b positivo: esta raíz la designamos con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (4), es válida la igualdad numérica $x_1^{-\alpha} = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Así pues, cuando b es no positivo, la ecuación (4) no tiene raíces, y si cada b es positivo la ecuación (4) tiene la única raíz $x_1=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

En la tabla 7 vienen expuestos los resultados de la resolución de las ecuaciones (3) y (4).

Tabla 7

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{\alpha}=b$	$x_1=b^{\frac{1}{\alpha}}$	$x_1=0$	no hay soluciones
$x^{-\alpha}=b$	$x_1=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	no hay soluciones	no hay soluciones

Ecuación exponencial. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces, la ecuación

$$a^x = b \tag{5}$$

suele llamarse *ecuación exponencial elemental.*

El campo natural de definición para la función $y = a^x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (5) es un conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. La función $y = a^x$ es estrictamente monótona en el conjunto X y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, la ecuación (5) no tiene raíces, cuando cada b es no positivo, mientras que para cada b positivo la ecuación (5) tiene una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (5), es válida la igualdad numérica $a^{x_1} = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = \log_a b$.

Así pues, para cada b no positivo la ecuación (5) no tiene raíces, y para cada b positivo tiene una raíz única $x_1 = \log_a b$.

Tabla 8

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$a^x=b$	$x_1=\log_a b$	no hay soluciones	no hay soluciones

En la tabla 8 están expuestos los resultados de la resolución de la ecuación (5)

Ecuación logarítmica. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces la ecuación

$$\log_a x = b \tag{6}$$

suele llamarse *ecuación logarítmica elemental.*

El campo natural de definición para la función $y = \log_a x$ es el conjunto de todos los números positivos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (6) es el conjunto $X = (0, +\infty)$.

La función $y = \log_a x$ es estrictamente monótona en el conjunto X y el campo de sus valores está representado por toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$.

Por eso, para todo b la ecuación (6) tiene una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (6), es válida la igualdad numérica $\log_a x_1 = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = a^b$. Por consiguiente para cada b la ecuación (6) tiene la raíz única $x_1 = a^b$.

Tabla 9

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$\log_a x = b$	$x_1 = a^b$	$x_1 = 1$	$x_1 = a^b$

El la tabla 9 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (6).

Ecuaciones trigonométricas. Las ecuaciones $\cos x = b$, $\operatorname{sen} x = b$, $\operatorname{tg} x = b$, $\operatorname{ctg} x = b$ suelen llamarse *ecuaciones trigonométricas elementales.*

Hagamos algunas observaciones generales. Supongamos que se pide resolver la ecuación elemental $f(x) = b$, donde $y = f(x)$ es una función trigonométrica elemental fundamental. Diremos que la ecuación elemental $f(x) = b$ tiene T por período principal, si T es el período principal de la función $y = f(x)$. Es evidente que si para cierta ecuación trigonométrica elemental de período principal T se ha hallado una solución x_0, entonces cualquier número $x_k = x_0 + kT$ será también solución de esta ecuación para cualquier k entero. En este caso el conjunto de todas las soluciones de la forma $x_k = x_0 + kT$, donde k recorre todos los números enteros, lleva el nombre de *serie de soluciones* de la ecuación citada y se escribirá en adelante en la forma

$$x_k = x_0 + kT, \quad k \in Z.$$

Con el objeto de determinar el conjunto de todas las soluciones de la ecuación trigonométrica elemental dada, cuyo período principal es T, se deben hallar todas las soluciones de esta ecuación en el intervalo de longitud T, y luego escribir la serie de soluciones correspondiente para cada una de las soluciones halladas. Si se obtienen n series de soluciones de la ecuación trigonométrica elemental $f(x) = b$, se dice que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $f(x) = b$ lo constituyen n series de soluciones y, a continuación, se escriben todas estas series.

Al resolver una ecuación trigonométrica elemental, el intervalo de longitud igual al período principal T debe elegirse de un modo tal, que contenga un trozo, sobre el cual para la función $y = f(x)$

quede definida la función trigonométrica inversa, y, además, que todas las soluciones de la ecuación en dicho trozo puedan ser fácilmente determinadas.

Observemos además que si la ecuación trigonométrica elemental $f(x) = b$ no tiene solución en el intervalo de longitud igual al período principal T, no las tendrá en toda la recta numérica.

Sea dada una ecuación trigonométrica elemental

$$\cos x = b. \tag{7}$$

El campo natural de definición de la función $y = \cos x$ es toda la recta numérica. Quiere decir, el CVA de la ecuación (7) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto la función $y = \cos x$ es en este conjunto X una función periódica de período principal igual a 2π, hallemos, al principio, todas las soluciones de la ecuación (7) en el semiintervalo $(-\pi, \pi]$ de longitud igual al período principal. Partamos este semiintervalo en dos conjuntos: $X_1 = (-\pi, 0)$ y $X_2 = [0, \pi]$ y resolvamos la ecuación (7) en cada uno de ellos.

En el conjunto X_2 la función $y = \cos x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y_2 = [-1; 1]$. Por consiguiente, si b es un número tal que $|b| > 1$, entonces en el conjunto X_2 la ecuación (7) no tiene raíces, y si el número b es tal, que $|b| \leqslant 1$, entonces la ecuación (7) tendrá en el conjunto X_2 una raíz única que se denotará con x_0. Puesto que $x_0 \in [0; \pi]$ y el número $b \in [-1; 1]$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\cos x_0 = b \iff \arccos(\cos x_0) = \arccos b \iff x_0 = \arccos b.$$

En el conjunto X_1 la función $y = \cos x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y_1 = (-1; 1)$. Por consiguiente, si b es un número tal, que $|b| \geqslant 1$, entonces la ecuación (7) no tiene raíces en el conjunto X_1, y si b es un número tal, que $|b| < 1$, la ecuación (7) tendrá en el conjunto X_1 una raíz única que se denotará con x_0'. Al tomar en consideración que la función $y = \cos x$ es par en toda la recta numérica, obtenemos: $x_0' = -x_0$, es decir, $x_0' = -\arccos b$.

Así pues, en el semiintervalo $(-\pi, \pi]$ la ecuación (7) no tiene soluciones, cualquiera que sea b tal, que $|b| > 1$; cuando $b = 1$, tiene una solución única $x_0 = \arccos 1$, es decir, $x_0 = 0$; cuando $b = -1$, tiene una solución única $x_0 = \arccos(-1)$, es decir, $x_0 = \pi$; cuando cada b es tal, que $|b| < 1$, tiene tan sólo dos soluciones $x_0 = \arccos b$ y $x_0' = -\arccos b$.

Cada una de estas soluciones da una serie de soluciones de la ecuación (7) en toda la recta numérica. Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7) lo constituye:

un conjunto vacío, para cada b tal, que $|b| > 1$ (dicho de otra forma, cuando $|b| > 1$, la ecuación (7) no tiene soluciones);

una serie de soluciones $x_k = 2\pi k$, $k \in Z$, para $b = 1$;

una serie de soluciones $x_n = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, para cada $b = -1$;

dos series de soluciones: $x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$, y $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$, para cada b tal, que $|b| < 1$.

Indiquemos que a veces dos series de soluciones de la encuación (7) se escriben con ayuda de una sola fórmula: $x_q = \pm \arccos b + 2\pi q$, $q \in Z$.

En la tabla 10 se dan los resultados obtenidos al resolver la ecuación (7).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\operatorname{sen} x = b. \tag{8}$$

El campo natural de definición de la función $y = \operatorname{sen} x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la

Tabla 10

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$\cos x = b$	no hay soluciones	$x_n = (2n+1)\pi$, $n \in Z$	$x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$ $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$	$x_k = 2\pi k$, $k \in Z$	no hay soluciones

ecuación (8) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto la función $y = \operatorname{sen} x$ en el conjunto X es una función periódica de período principal igual a 2π, entonces hallemos, primero, todas las soluciones de la ecuación (8) en el semiintervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, cuya longitud es igual a la del período principal. Partamos dicho semiintervalo en dos conjuntos: $X_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $X_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y resolvamos la ecuación (8) en cada uno de ellos.

En el conjunto X_1 la función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y_1 = [-1; 1]$. Por consiguiente, si el número b es tal, que $|b| > 1$, la ecuación (8) no tiene raíces en el conjunto X_1, y si b es un número tal, que $|b| \leqslant 1$, la ecuación (7) tiene en el conjunto X_1 una solución única que se denotará con x_0. Por cuanto $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y, el número $b \in [-1, 1]$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$\operatorname{sen} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x_0) = \operatorname{arcsen} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arcsen} b.$

En el conjunto X_2 la función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y_2 = (-1; 1)$. Por consiguiente, si el número b es tal, que $|b| \geqslant 1$, la ecuación (8) no tiene raíces en el conjunto X_2, y si b es un número tal que $b \in (\ \ 1, 1)$, la ecuación (8) tendrá en el conjunto X_2 una solución única, que se denotará con x_0'. Al tomar en consideración que la función y = sen x es simétrica en toda la recta numérica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, obtenemos que $x_0' = \pi - x_0$, es decir, $x_0' = \pi -$ arcsen b. Así pues, en el semiintervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la ecuación (8):

no tiene soluciones, cuando cada b es tal, que $|b| > 1$;

tiene una solución única x_0 = arcsen 1, es decir $x_0 = \frac{\pi}{2}$, cuando $b = 1$;

tiene una solución única x_0 = arcsen (-1), es decir, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, cuando $b = -1$.

tiene tan sólo dos soluciones: x_0 = arcsen b y $x_0' = \pi -$ arcsen b, cuando cada b es tal, que $|b| < 1$. Cada una de las soluciones aducidas da una serie de soluciones de la ecuación (8) en toda la recta numérica. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (8) lo constituye:

un conjunto vacío, cuando cada b es tal que $|b| > 1$ (en otras palabras, para $|b| > 1$ la ecuación (8) no tiene soluciones);

una serie de soluciones $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, cuando $b = 1$;

una serie de soluciones $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, cuando $b = -1$;

dos series de soluciones: x_p = arcsen $b + 2\pi p$, $p \in Z$, y $x_m = \pi -$ arcsen $b + 2\pi m$, $m \in Z$, cuando cada b es tal que $|b| < 1$.

Tabla 11

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
sen $x = b$	no hay soluciones	$x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$	x_p = arcsen $b + 2\pi p$, $p \in Z$; $x_m = \pi -$ arcsen $b + 2\pi m$, $m \in Z$	$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	no hay soluciones

Indiquemos que a veces dos series de soluciones de la ecuación (8) se esriben con ayuda de una sola fórmula $x_q = (-1)^q$ arcsen $b + \pi q$, $q \in Z$.

En la tabla 11 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (8).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\text{tg } x = b. \tag{9}$$

El campo natural de definición de la función y = tg x es el conjunto de todos los números reales, salvo los números $\frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k

es un número entero cualquiera. Quiere decir, el CVA de la ecuación (9) es un conjunto X que se compone de todos los números reales distintos de $\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde k es un número entero. Por cuanto la función $y = \operatorname{tg} x$ es, en este conjunto X, una función periódica de período principal igual a π, hallemos, al principio, todas las soluciones de la ecuación (9) en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya longitud es igual a la del período principal. En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $y = \operatorname{tg} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$. Por consiguiente, para cada b la ecuación (9) tiene en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ una solución única que se denotará con x_0. Por cuanto x_0 es la solución de la ecuación (9) y $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes: $\operatorname{tg} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) = \operatorname{arctg} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arctg} b$.

Así pues, para cada b la ecuación (9) tiene en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ una solución única $x_0 = \operatorname{arctg} b$. Esta solución da una serie de soluciones de la ecuación (9) en todo el CVA de esta ecuación.

Tabla 12

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{tg} x = b$	$x_n = \operatorname{arctg} b + \pi n, \ n \in Z$

Tabla 13

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{ctg} x = b$	$x_p = \operatorname{arctg} b + \pi p, \ p \in Z$

Quiere decir, para cada b el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (9) lo constituye la serie de soluciones $x_n = \operatorname{arctg} b + \pi n, \ n \in Z$.

En la tabla 12 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (9).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\operatorname{ctg} x = b. \tag{10}$$

La función $y = \operatorname{ctg} x$ está definida en todo el eje numérico, salvo en los puntos $x = \pi k$, donde k es un número entero cualquiera. Esto significa que el CVA de la ecuación (10) es un conjunto X que se compone de todos los números reales distintos de πk, donde k es un número entero cualquiera. Por cuanto la función $y = \operatorname{ctg} x$ es periódica en este conjunto X y el período principal de ella equivale a π, hallemos, primero, todas las soluciones de la ecuación (10) en el intervalo $(0, \pi)$ cuya longitud es igual a la del período principal. La función $y = \operatorname{ctg} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores lo constituye toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$. Por consiguiente, para cada b la ecuación (10) tiene en el intervalo $(0, \pi)$ una solución única, que se denotará con x_0. Puesto que x_0 es la solución de la ecuación (10) y $x_0 \in (0, \pi)$ es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\operatorname{ctg} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x_0) = \operatorname{arcctg} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arcctg} b.$$

Así pues, para cada b la ecuación (10) tiene en el intervalo $(0, \pi)$ una solución única $x_0 = \operatorname{arcctg} b$. Esta solución da una serie de soluciones de la ecuación (10) en todo el CVA.

Quiere decir, para cada b el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (10) lo constituye la serie de soluciones $x_p = \operatorname{arcctg} b + \pi p$, $p \in Z$.

En la tabla 13 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (10).

Veamos, además, las ecuaciones elementales que contienen *funciones trigonométricas fundamentales inversas*, es decir, $\arccos x = b$, $\operatorname{arcsen} x = b$, $\operatorname{arctg} x = b$, $\operatorname{arcctg} x = b$.

Sea dada una ecuación elemental

$$\arccos x = b. \tag{11}$$

El campo natural de definición de la función $y = \arccos x$ es el segmento $X = [-1; 1]$. Quiere decir, el CVA de la ecuación (11) es el conjunto $X = [-1; 1]$. La función $y = \arccos x$ en el conjunto X es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y = [0, \pi]$. Por consiguiente, para cada b tal que $b < 0$ ó $b > \pi$, la ecuación (11) no tiene raíces; si, en cambio, b es tal, que $0 \leqslant b \leqslant \pi$, entonces la ecuación (11) tiene una raíz única que se denotará con x_0. Por cuanto x_0 es la raíz de la ecuación (11), $x_0 \in [-1; 1]$ y $b \in [0, \pi]$, entonces es válida la cadena de las igualdades numéricas equivalentes:

$\arccos x_0 = b \Leftrightarrow \cos (\arccos x_0) = \cos b \Leftrightarrow x_0 = \cos b$. Así pues, para cada b tal, que $0 \leqslant b \leqslant \pi$ la ecuación (11) tiene una raíz

Tabla 14

	$b < 0$	$b = 0$	$0 < b < \pi$	$b = \pi$	$b > \pi$
$\arccos x = b$	no hay soluciones	$x_1 = 1$	$x_1 = \cos b$	$x_1 = -1$	no hay soluciones

única $x_0 = \cos b$, y para cada b tal, que $b < 0$ y $b > \pi$, la ecuación (11) no tiene raíces.

En la tabla 14 se exponen los resultados de la resolución de la ecuación (11)

Sea dada la ecuación elemental

$$\operatorname{arcsen} x = b. \tag{12}$$

El campo natural de definición de la función $y = \text{arcsen}\, x$ es el segmento $[-1; 1]$. Esto significa que el CVA de la ecuación (12) es el conjunto $X = [-1; 1]$. En el conjunto X la función $y = \text{arcsen}\, x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado creciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por consiguiente, la ecuación (12) no tiene soluciones, cuando cada b es tal, que $b < -\frac{\pi}{2}$ ó $b > \frac{\pi}{2}$; si en cambio, b es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces la ecuación (12) tendrá una raíz única que se denotará con x_1. Puesto que x_1 es la raíz de la ecuación (12), $x_1 \in [-1, 1]$ y $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\text{arcsen}\, x_1 = b \Leftrightarrow \text{sen}\,(\text{arcsen}\, x_1) = \text{sen}\, b \Leftrightarrow x_1 = \text{sen}\, b.$$

Así pues, la ecuación (12) tiene la raíz única $x_1 = \text{sen}\, b$, cuando cada b es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, y no tiene raíces, cuando cada b es tal, que $b < -\frac{\pi}{2}$ ó $b > \frac{\pi}{2}$.

En la tabla 15 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (12)

Tabla 15

	$b < -\frac{\pi}{2}$	$b = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b > \frac{\pi}{2}$
$\text{arcsen}\, x = b$	no hay soluciones	$x_1 = -1$	$x_1 = \text{sen}\, b$	$x_1 = 1$	no hay soluciones

Sea dada la ecuación elemental

$$\text{arctg}\, x = b. \tag{13}$$

El campo natural de definición de la función $y = \text{arctg}\, x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (13) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. En este conjunto X la función $y = \text{arctg}\, x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Por consiguiente, la ecuación (13) no tiene soluciones, cuando cada b es tal, que $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$ ó $b \geqslant \frac{\pi}{2}$; si, en cambio, b es tal, que $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, la ecuación (13) tendrá una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (13), $x_1 \in$

$\in(-\infty, +\infty)$ y $b\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\operatorname{arctg} x_1 = b \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x_1) = \operatorname{tg} b \Leftrightarrow x_1 = \operatorname{tg} b.$$

Así pues, la ecuación (13) tiene la única raíz $x_1 = \operatorname{tg} b$, cuando cada b es tal, que $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$; y para cada b tal, que $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$ ó $b \geqslant \frac{\pi}{2}$ la ecuación (13) no tiene raíces.

En la tabla 16 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (13)

Tabla 16

	$b \leqslant -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b \geqslant -\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x = b$	no hay soluciones	$x_1 = \operatorname{tg} b$	no hay soluciones

Sea dada la ecuación elemental

$$\operatorname{arcctg} x = b. \tag{14}$$

El campo natural de definición de la función $y = \operatorname{arcctg} x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (14) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. En este conjunto X la función $y = \operatorname{arcctg} x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y = (0, \pi)$. Por consiguiente, la ecuación (14) no tiene soluciones, cuando cada b es tal, que $b \leqslant 0$ ó $b \geqslant \pi$; en cambio, si b es tal, que $0 < b < \pi$, la ecuación (14) tendrá una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación (14), $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ y $b \in (0, \pi)$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\operatorname{arcctg} x_1 = b \Leftrightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x_1) = \operatorname{ctg} b \Leftrightarrow x_1 = \operatorname{ctg} b.$$

Así pues, la ecuación (14) tiene la raíz única $x_1 = \operatorname{ctg} b$, para cada b tal, que $0 < b < \pi$, y para cada b tal, que $b \leqslant 0$ ó $b \geqslant \pi$, la ecuación (14) no tiene raíces.

En la tabla 17 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (14).

Tabla 17

	$b \leqslant 0$	$0 < b < \pi$	$b \geqslant \pi$
$\operatorname{arcctg} x = b$	no hay soluciones	$x_1 = \operatorname{ctg} b$	no hay soluciones

§ 3. Transformaciones equivalentes de las ecuaciones

En este párrafo y en el siguiente se analizan algunas transformaciones de las ecuaciones, con ayuda de las cuales una ecuación dada, que no es elemental, puede ser reducida a una ecuación elemental o a un conjunto de tales ecuaciones.

Al resolver una ecuación, que no es elemental, nos vemos obligados, por regla general, a realizar varias transformaciones, a veces bastante numerosas. En este caso, la ecuación se sustituye cada vez por alguna otra nueva y esta nueva ecuación puede tener, naturalmente, otras raíces. Una ecuación dada se resolverá correctamente, si, al realizar la transformación de las ecuaciones, una ecuación se sustituye cada vez por otra ecuación nueva que tenga las raíces de la ecuación anterior, y sólo ellas, es decir, que no haya pérdida o adquisición de raíces. Si una ecuación se sustituye cada vez por la ecuación equivalente, las raíces de la última serán precisamente las raíces de la ecuación de partida.

En el presente párrafo se examinan sólo las transformaciones equivalentes de las ecuaciones. Las transformaciones no equivalentes de las ecuaciones se examinarán en el párrafo siguiente.

Según lo expuesto ya en el § 1, las afirmaciones 1 . . . 4 ofrecen los ejemplos de transformaciones equivalentes. Demos algunos ejemplos más de transformaciones equivalentes de las ecuaciones.

Transformaciones relacionadas con la aplicación de igualdades idénticas. Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

y *supongamos que para todo x real se verifica la igualdad idéntica $g(x) = \varphi(x)$, entonces la ecuación* (1) *es equivalente a la ecuación*

$$f(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Esta afirmación permite emplear diferentes igualdades idénticas, es decir, fórmulas que son lícitas para todos los valores reales con el fin de realizar transformaciones equivalentes de las ecuaciones. Como ejemplos de tales igualdades idénticas sirven las fórmulas de multiplicación reducida de los polinomios, la identidad trigonométrica fundamental y algunas otras fórmulas. Observemos que, realizando las transformaciones equivalentes de las ecuaciones con ayuda de las fórmulas de multiplicación reducida de los polinomios, se han resuelto en el capítulo III las ecuaciones cuadráticas y algunas otras ecuaciones algebraicas. Demos a conocer otros ejemplos en los que se realizan transformaciones equivalentes con ayuda de las igualdades idénticas.

Sea dada la ecuación

$$\cos^2 2x = 1 - 2\cos^2 x. \tag{3}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica fundamental y de la fórmula para el coseno de un ángulo de arco doble, podemos escribir la igualdad idéntica

$$1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x,$$

que será válida para cualquier x real. Quiere decir, la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$\cos^2 2x = -\cos 2x.$$

Aplicando la afirmación 1 del § 1 y agrupando los términos del primer miembro de la última ecuación, llegamos a que la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$\cos 2x\,(\cos^2 2x + 1) = 0.$$

La última ecuación es equivalente al conjunto de dos ecuaciones trigonométricas elementales:

$$\cos 2x = 0, \quad \cos^2 2x + 1 = 0$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación de este conjunto es la serie de soluciones $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, mientras que la segunda ecuación del mismo conjunto no tiene soluciones.

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (3) se compone de la serie $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Analicemos ahora la ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

En el caso en que $a = 0$, o bien $b = 0$, esta ecuación se reduce, con ayuda de las afirmaciones 2 y 3 del § 1, a:

la ecuación elemental $\cos x = \frac{c}{b}$, si $a = 0$, $b \neq 0$;

la ecuación elemental $\operatorname{sen} x = \frac{c}{a}$, si $a \neq 0$, $b = 0$.

Supongamos, ahora, que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Esto significa que $a^2 + b^2 \neq 0$. Aplicando la afirmación 3, llegamos a que la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (5)$$

1. Sea a un número positivo. Examinemos dos casos: $b > 0$ y $b < 0$.

Sea $b > 0$. Construyamos un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud a y b. El ángulo opuesto al cateto de longitud b se designará con φ_1. Entonces tenemos las igualdades numéricas

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de las cuales se deduce que $\varphi_1 = \operatorname{arcsen} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Ahora la ecuación (5) adquiere la forma

$$\cos\varphi_1 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\varphi_1 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Según la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos tenemos la igualdad idéntica

$$\cos\varphi_1 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\varphi_1 \cos x = \operatorname{sen}(x+\varphi_1).$$

Al aplicar ahora la afirmación enunciada más arriba, llegamos a que la ecuación 4 es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}(x+\varphi_1) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es una ecuación elemental.

Sea $b < 0$. Construyamos un triángulo rectángulo con los catetos a y $|b|$. El ángulo opuesto al cateto de longitud $|b|$ se designará con φ_2. En este caso tenemos las igualdades numéricas

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de las cuales se deduce que $\varphi_2 = \operatorname{arcsen}\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Ahora, por cuanto $b = -|b|$, la ecuación (5) toma la forma

$$\cos\varphi_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\varphi_2 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Según la fórmula para el seno de la diferencia entre dos ángulos tenemos la igualdad idéntica

$$\cos\varphi_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\varphi_2 \cos x = \operatorname{sen}(x-\varphi_2)$$

Aplicando ahora la afirmación enunciada más arriba, llegamos a que la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}(x-\varphi_2) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es una ecuación elemental.

Si designamos $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, veremos con facilidad que $\varphi = \varphi_1$, cuando $b > 0$, y $\varphi = -\varphi_2$, para $b < 0$. Por eso podemos escribir que para $a > 0$ la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es también una ecuación elemental.

2. El caso de $a < 0$ se reduce al analizado más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por (-1)

Ejemplo. Resuélvase la ecuación

$$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x + 1 = 0. \tag{6}$$

Por cuanto la ecuación (6) es tal, que $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, entonces ella será equivalente a la ecuación

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Hallemos el ángulo $\varphi : \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Quiere decir, la ecuación (6) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación elemental, obtenemos dos series de soluciones:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (6) lo constituyen dos series de soluciones:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Transformaciones relacionadas con las superposiciones de las funciones. Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función compuesta $y = P[g(x)]$ que representa la superposición de dos funciones: la interior $u = g(x)$ (la función elemental fundamental) y la exterior $y = P(u)$, donde $P(u)$ es un trinomio de segundo grado: $P(u) = au^2 + bu + c$. En estos casos la ecuación $f(x) = 0$ se escribe en la forma

$$a[g(x)]^2 + bg(x) + c = 0 \tag{7}$$

y se denomina *ecuación cuadrática respecto de* $g(x)$.

La ecuación (7) se resuelve del modo siguiente. Al principio se resuelve la ecuación cuadrática

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{8}$$

Se determina el discriminante D de la ecuación (8): $D = b^2 - 4ac$. Si $D < 0$, la ecuación (8) no tiene soluciones y, por tanto, la ecuación (7) tampoco las tiene. Si $D = 0$, la ecuación (8) tiene la única raíz: el número $\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Por consiguiente, en este caso la ecuación (7) es equivalente a la ecuación

$$g(x) = -\frac{b}{2a} \tag{9}$$

A continuación se resuelve la ecuación (9). En virtud de la equivalencia de las ecuaciones (7) y (9), el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (9) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7).

Si $D > 0$, la ecuación (8) tiene tan sólo dos raíces reales que se designarán con t_1 y t_2. Por consiguiente, en este caso la ecuación (7) será equivalente al conjunto de ecuaciones

$$g(x) = t_1, \quad g(x) = t_2. \tag{10}$$

Luego se resuelve el conjunto de ecuaciones (10). Por ser equivalentes la ecuación (7) y el conjunto de ecuaciones (10), el conjunto de todas las soluciones del conjunto de ecuaciones (10) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7).

Observemos que en el cap. III hemos resuelto, empleando este método, ecuaciones trinomias que pueden denominarse ecuaciones cuadráticas respecto de x^n, donde n es un número natural y $n \geqslant 2$.

Aduzcamos unos **ejemplos**.

Sea dada la ecuación

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0. \tag{11}$$

Dado que es válida la igualdad idéntica $4^x = (2^x)^2$, la ecuación (11) es equivalente a la ecuación

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática respecto de 2^x. Al resolver la ecuación cuadrática

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

llegamos a que ella tiene tan sólo dos raíces: $t_1 = 2$, $t_2 = 1$. Por consiguiente, la ecuación (11) es equivalente al conjunto de dos ecuaciones

$$2^x = 2, \quad 2^x = 1.$$

Al resolver cada una de las ecuaciones exponenciales elementales de este conjunto, resulta que dicho conjunto tiene sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$.

Por consiguiente, la ecuación (11) tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$.

No siempre se logra transformar la ecuación dada directamente en la forma (7). Con este fin resulta necesario frecuentemente realizar algunas transformaciones equivalentes complementarias. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 12 (\operatorname{sen} x - \cos x) + 12 = 0 \tag{12}$$

podemos tomar a título de $g(x)$ la expresión $(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Con el objeto de representar la ecuación (12) en forma de (7), hagamos uso de las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x, \quad 1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x,$$

y a continuación, de la igualdad idéntica

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2.$$

Resulta pues que la ecuación (12) es equivalente a la ecuación

$$-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - 12 (\operatorname{sen} x - \cos x) + 13 = 0. \qquad (13)$$

La ecuación (13) es cuadrática respecto de ($\operatorname{sen} x - \cos x$). Resolviendo la ecuación cuadrática

$$-t^2 - 12t + 13 = 0$$

vemos que ella tiene tan sólo dos raíces: $t_1 = 1$ y $t_2 = -13$

Por consiguiente, la ecuación (13) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 1, \quad \operatorname{sen} x - \cos x = -13 \qquad (14)$$

Valiéndose de la identidad $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, obtenemos que el conjunto de ecuaciones (14) es equivalente lo conjunto de ecuaciones elementales

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{13\sqrt{2}}{2} \qquad (15)$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación lo constituyen dos series de soluciones:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z$$

La segunda ecuación del conjunto (15) no tiene soluciones, puesto que $-\frac{13\sqrt{2}}{2} < -1$.

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (12) lo constituyen dos series de soluciones

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m. \quad m \in Z,$$

Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función compuesta, que representa la superposición de varias funciones elementales fundamentales. Por ejemplo, sea $y = f(x)$ la superposición de tres funciones elementales fundamentales $y = g\{\varphi[u(x)]\}$.

En estos casos la ecuación $f(x) = 0$ se escribe en la forma

$$g\{\varphi[u(x)]\} = 0 \qquad (16)$$

y se resuelve del modo siguiente.

Al principio se resuelve la ecuación elemental

$$g(t) = 0. \qquad (17)$$

La ecuación (17) puede no tener soluciones, entonces la ecuación (16), tampoco tiene soluciones.

La ecuación (17) puede tener un número finito o una infinidad de raíces. Supongamos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación (17) se compone de los números $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$. Entonces la ecuación (16) será equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\varphi[u(x)] = t_1, \quad \varphi[u(x)] = t_2, \quad \varphi[u(x)] = t_3, \ldots$$
$$\ldots, \varphi[u(x)] = t_n, \ldots. \tag{18}$$

Ahora se resuelve el conjunto de ecuaciones elementales

$$\varphi(v) = t_1, \quad \varphi(v) = t_2, \quad \varphi(v) = t_3, \ldots, \varphi(v) = t_n, \ldots. \tag{19}$$

El conjunto de ecuaciones (19) puede no tener soluciones y en este caso el conjunto de ecuaciones (18) no tiene soluciones, por lo cual la ecuación (16) tampoco las tiene.

El conjunto de ecuaciones (19) puede tener un número finito de raíces o una infinidad de ellas.

Supongamos que el conjunto de todas las raíces del conjunto (19) se compone de los números $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, \ldots$. Entonces el conjunto de ecuaciones (18) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$u(x) = v_1, \; u(x) = v_2, \; u(x) = v_3, \quad \ldots, \; u(x) = v_k, \ldots. \tag{20}$$

El conjunto de todas las raíces del conjunto de ecuaciones elementales (20) es el conjunto de todas las raíces de la ecuación (16).

Analicemos, por ejemplo, la ecuación

$$2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}} = 1. \tag{21}$$

Resolviendo la ecuación elemental $2^t = 1$, obtenemos su única solución $t_1 = 0$. Quiere decir, la ecuación (21) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\sqrt{x} = 0. \tag{22}$$

Al resolver la ecuación elemental

$$\operatorname{sen} v = 0,$$

llegamos a que el conjunto de todas las soluciones lo constituye una serie de soluciones $v_k = \pi k$, $k \in Z$.

Por consiguiente, la ecuación (21) es equivalente al conjunto infinito de ecuaciones

$$\sqrt{x} = k\pi, \tag{23}$$

donde k es un número entero cualquiera.

Toda ecuación del conjunto (23), en la que k es negativo, no tiene raíces, y cada ecuación, en la que k es no negativo, tiene una raíz única $x_k = (\pi k)^2$.

Por consiguiente, el conjunto de todas las raíces de la ecuación (21) es el conjunto $\{(\pi k)^2 \mid k \in Z_0\}$.

§ 4. Transformaciones no equivalentes de las ecuaciones

En el párrafo anterior se han estudiado solamente las transformaciones equivalentes de las ecuaciones. No obstante, existen ecuaciones que no se resuelven aplicando solamente transformaciones equivalentes; al resolver las ecuaciones mucho más a menudo tenemos que aplicar *transformaciones no equivalentes*. En este caso hay que recordar que por ser no equivalentes las transformaciones, en general, se pueden *perder* algunas raíces de la ecuación de partida o *adquirir* las llamadas raíces extrañas (toda raíz de una ecuación sucesiva que no es la raíz de la ecuación de partida se denominará raíz *extraña*).

A continuación se dan ejemplos de las transformaciones no equivalentes que conducen tanto a la pérdida de las raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas.

Transformaciones relacionadas con las fórmulas logarítmicas. Sea a un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$. Veamos las siguientes fórmulas logarítmicas:

$$f(x) = a^{\log_a f(x)} \tag{1}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a f(x), \tag{2}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a [-f(x)], \tag{3}$$

$$\log_a [f(x)\, g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x), \tag{4}$$

$$\log_a [f(x)\, g(x)] = \log_a [-f(x)] + \log_a [-g(x)], \tag{5}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x), \tag{6}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a [-f(x)] - \log_a [-g(x)]. \tag{7}$$

Si, al resolver la ecuación $\varphi(x) = h(x)$, aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o al derecho de esta ecuación cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el primer miembro de la fórmula citada sea sustituido por el segundo miembro, resultará posible la pérdida de las raíces* de la ecuación de partida, razón por la cual *las transformaciones de este tipo no son admisibles*.

Si aplicamos *formalmente* al primer o segundo miembro de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el segundo miembro de la fórmula sea sustituido por el primer miembro*, las raíces de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ no se perderán; toda raíz de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ será también la raíz de la ecuación sucesiva, pero, en general, *no cualquier raíz de la ecuación sucesiva será la raíz para la ecuación de partida* y, por esta razón, si tales transformaciones se aplican, al final de la resolución resulta indispensable la *comprobación*, es decir, resulta necesario que cada raíz determinada del último conjunto de ecuaciones elementales o de la última ecuación elemental se sustituya en la ecuación de partida para ver cuáles de las raíces convierten la ecuación de partida en una igualdad numérica lícita. Aquellas raíces que, siendo sustituidas en la ecuación de partida, la convierten en una igualdad numérica que no se verifica, han de ser despreciadas.

Más abajo se dan **ejemplos** que muestran que la aplicación formal de dichas fórmulas conduce tanto a la pérdida de las raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x+2)^2 = 6.$$

Aplicando formalmente la fórmula (2), obtenemos la ecuación

$$\log_2 (x+2) = 3,$$

cuya raíz única es $x_1 = 6$.

Por cuanto en el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación, que pudo tener por resultado la pérdida de raíces, no se puede considerar resuelta la ecuación de partida. En efecto, una raíz de la ecuación de partida, a saber, el número (-10), se ha perdido durante esta transformación.

Sea dada la ecuación

$$3^{\log_3 (x^2-4x+3)} = x-3.$$

Aplicando formalmente la fórmula (1), obtenemos la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Por cuanto en el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación que pudo tener por resultado la adquisición de raíces extrañas, resulta indispensable la comprobación. La comprobación muestra que ni el número 2 ni el 3 son raíces de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Estos ejemplos enseñan que al resolver ecuaciones, las fórmulas logarítmicas han de aplicarse con cuidado, teniendo en memoria que su aplicación formal puede conducir tanto a la pérdida como a la adquisición de raíces.

Esto no puede ocurrir, si aplicamos cada una de las fórmulas (1) . . . (7) en aquél conjunto M_1 del CVA de la ecuación a resolver, sobre el cual tiene sentido el segundo miembro de la fórmula correspondiente. En estas condiciones la transformación conducirá a una ecuación que en el conjunto M_1 será equivalente a la de partida.

Al encontrar las raíces de la ecuación obtenida y al elegir entre éstas aquellas que pertenecen al conjunto M_1, encontraremos todas las raíces de la ecuación de partida en este conjunto M_1.

Se debe tener en memoria que la ecuación de partida queda resuelta de esta manera no en todo el CVA, sino que solamente en el conjunto M_1. Por esta razón se deben hallar, además, sus soluciones en aquella parte del CVA que queda después de restar el conjunto M_1.

Por consiguiente, si en el proceso de resolución de una ecuación surge la necesidad de realizar transformaciones con ayuda de cierta fórmula logarítmica, entonces esta ecuación se puede resolver según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*

2. *Dividir el CVA en dos conjuntos*: M_1 y M_2 (M_1 representa la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se emplea, M_2 es la parte del CVA que queda después de restar el conjunto M_1).

3. *Resolver la ecuación en el conjunto* M_1 (teniendo en cuenta que la transformación de la ecuación con ayuda de esta fórmula es una transformación equivalente en el conjunto M_1).

4. *Resolver la ecuación en* M_2.

5. *Reunir los conjuntos de raíces encontradas en* M_1 y M_2.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, las ecuaciones analizadas más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x + 2)^2 = 6.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales, salvo el número $x = -2$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1 = (-2, +\infty)$ y $M_2 = (-\infty, -2)$.

En el conjunto M_1 se verifica la igualdad idéntica

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 (x + 2).$$

Quiere decir, en el conjunto M_1 la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\log_2 (x + 2) = 3,$$

la cual es equivalente en el conjunto M_1 a la ecuación $x + 2 = 8$. La última ecuación tiene la raíz única $x_1 = 6$. Por cuanto esta raíz entra en el conjunto M_1, la ecuación de partida también tendrá en el conjunto M_1 una raíz única $x_1 = 6$.

En el conjunto M_2 se verifica la igualdad idéntica

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 [-(x + 2)].$$

Quiere decir, en el conjunto M_2 la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\log_2 (-x - 2) = 3,$$

la cual es equivalente, a su vez, en el conjunto M_2 a la ecuación

$$-x - 2 = 8.$$

La última ecuación tiene la única raíz $x_2 = -10$. Por cuanto esta raíz pertenece al conjunto M_2, la ecuación de partida también tendrá en el conjunto M_2 la única raíz $x_2 = -10$. Al reunir el conjunto de raíces encontradas en M_1 y M_2, obtenemos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida se compone de dos números:

$x_1 = 6$ y $x_2 = -10$.

Sea dada la ecuación $3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x - 3$.

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los x, para cada uno de los cuales $x^2 - 4x + 3 > 0$, es decir, el CVA es el conjunto $M = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Por cuanto en este conjunto se verifica la igualdad idéntica

$$3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x^2 - 4x + 3,$$

la ecuación de partida será equivalente en el conjunto M a la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Como ninguna de estas raíces integra el CVA de la ecuación de partida, mientras que la última ecuación y la de partida son equivalentes en el CVA de la ecuación de partida, entonces resulta que la ecuación de partida no tiene raíces.

Así pues, la resolución de una ecuación con ayuda de cierta fórmula logarítmica es posible mediante dos procedimientos.

Primer procedimiento. Realizar el paso a una ecuación que sirve de consecuencia de la ecuación dada. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Realizar la comprobación y establecer cuáles raíces son extrañas. Todas las raíces halladas, menos las raíces extrañas, constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Segundo procedimiento. Realizar el paso equivalente en el conjunto M_1 (M_1 es toda la parte del CVA de la ecuación de partida, donde la fórmula logarítmica representa una igualdad idéntica). Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en M_1. Luego, hallar todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto M_2 (en toda la parte restante del CVA de la ecuación de partida después de restar el conjunto M_1). Por fin, reunir los conjuntos de todas las raíces de la ecuación dada encontradas en M_1 y M_2 y obtener de este modo el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Transformaciones relacionadas con fórmulas trigonométricas. Examinemos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \tag{8}$$

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{9}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}(x - \beta) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \beta}. \tag{11}$$

Si, al resolver la ecuación $\varphi(x) = h(x)$, aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o derecho de esta ecuación cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que el *primer miembro de esta fórmula sea sustituido por el segundo miembro, resultará posible la pérdida de raíces* de la ecuación de partida, por lo cual *las transformaciones de este tipo no son admisibles.*

Si aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o derecho de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el segundo miembro de esta fórmula sea sustituido por el primer miembro, pueden adquirirse raíces extrañas*, por lo cual al final de la resolución es necesaria la comprobación.

He aquí unos **ejemplos** que muestran que la aplicación formal de las fórmulas mencionadas, al resolver una ecuación, puede conducir tanto a la pérdida de raíces, como a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x = 3.$$

Al aplicar formalmente las fórmulas (9) y (10), obtendremos la ecuación

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

Reescribamos esta ecuación en la forma

$$\frac{2(\operatorname{tg} x - 3)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

De aquí es evidente que el conjunto de todas las raíces de esta ecuación lo constituye la serie de soluciones $x_p = \operatorname{arctg} 3 + \pi p$, $p \in Z$.

Sin embargo, no se puede afirmar que se han hallado todas las raíces de la ecuación de partida, puesto que las transformaciones han sido de tal género que las raíces podían perderse. En efecto, al realizar las transformaciones citadas se ha perdido toda una serie de soluciones $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Sea dada la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$$

Por cuanto $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, se puede reescribir la ecuación en la forma

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Al aplicar formalmente la fórmula (11), obtendremos la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

de donde se hace obvio que el conjunto de todas las raíces de esta ecuación lo constituye la serie de soluciones $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$.

Por cuanto durante la transformación podían aparecer raíces extrañas, es indispensable la comprobación. La comprobación muestra que ninguna de las raíces será raíz de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Estos ejemplos muestran que, al resolver las ecuaciones, se necesita mucho cuidado en aplicar las fórmulas trigonométricas, teniendo en memoria que su aplicación formal puede conducir tanto a la pérdida de raíces como a la adquisición de éstas.

Esto no puede ocurrir, si cada una de las fórmulas (8) . . . (11) se aplica en aquel conjunto M_1 del CVA de la ecuación a resolver, donde tiene sentido el segundo miembro de la fórmula correspondiente. En este caso tal transformación conduce a una ecuación equivalente a la de partida en el conjunto M_1.

Une vez determinadas las raíces de la ecuación obtenida y elegidas entre ellas las raíces, pertenecientes al conjunto M_1, hallemos todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto M_1. Hay que acordarse de que la ecuación de partida queda resuelta de este modo no en todo el CVA, sino sólo en el conjunto M_1. Por eso, se debe hallar, además, su solución en aquella parte del CVA, la cual queda después de separar el conjunto M_1.

Por esta razón, las ecuaciones en cuya resolución resultan aplicables dichas fórmulas trigonométricas se resuelven, frecuentemente, siguiendo el mismo esquema que se ha aducido al examinar las fórmulas logarítmicas:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*

2. *Dividir el CVA en dos partes* M_1 y M_2 (M_1 es la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se emplea, M_2 es aquella parte del CVA que queda después de separar el conjunto M_1).

3. *Resolver la ecuación en* M_1 (tomando en consideración que la transformación con ayuda de esta fórmula es una transformación equivalente en el conjunto M_1).

4. *Resolver la ecuación en el conjunto* M_2.

5. *Reunir los conjuntos de raíces determinados en* M_1 *y* M_2.

Resolvamos, siguiendo este esquema, las ecuaciones analizadas más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x = 3.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales. Dividamos el CVA de dicha ecuación en dos conjuntos: M_1, que es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera, y M_2, que es el conjunto de los números $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera.

En el conjunto M_1 las fórmulas (9) y (10) son igualdades idénticas, por lo cual en el conjunto M_1 la ecuación de partida será equivalente a la ecuación

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación lo constituye una serie de soluciones $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$. Toda raíz de dicha serie pertenece al conjunto M_1, por esta razón, el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto M_1 lo constituye la serie $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$.

Resolvamos la ecuación de partida en M_2. Sustituyendo cada número $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, en la ecuación de partida, nos convencemos de que ésta se convierte en una igualdad numérica lícita.

Por consiguiente, el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto M_2 lo constituye la serie $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Reuniendo los conjuntos de raíces encontradas en M_1 y M_2, obtenemos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida lo constituyen dos series $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$, y $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Sea dada la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales, salvo los números $x_m = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, donde m es un número entero cualquiera, y los números $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, donde l es un número entero cualquiera. Por cuanto la fórmula (11) es en el CVA una igualdad idéntica, entonces la ecuación de partida será equivalente en el CVA a la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación en el CVA lo constituye la serie $x_p = \pi/2 + \pi p$, donde p es un número entero cualquiera. Es evidente que esta serie no forma parte del CVA de la ecuación de partida. Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Así pues, la resolución de la ecuación con ayuda de cierta fórmula trigonométrica es posible mediante dos procedimientos.

Primer procedimiento. Realizar el paso a una ecuación que sirve de consecuencia de la ecuación dada. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida, comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Todas las raíces halladas, menos las extrañas, constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Segundo procedimiento. Realizar el paso equivalente en el conjunto M_1 (M_1 es toda la parte del CVA de la ecuación de partida, donde la fórmula trigonométrica representa una igualdad idéntica). Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en M_1. Luego, hallar todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto M_2 (en toda la parte restante del CVA de la ecuación dada después de separar el conjunto M_1). Reunir, por fin, los conjuntos de todas las raíces de la ecuación dada encontradas en M_1 y M_2 y obtener de este modo el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Transformaciones relacionadas con elevación a potencia natural. Supongamos que n es un número fijo natural y sea $n \geqslant 2$. Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

se llama *elevación de la ecuación a la potencia natural n.*

Según se deduce de la afirmación 5, § 1, al elevar una ecuación a una potencia natural, *no se pueden perder raíces* sino, al contrario, sólo pueden *adquirirse raíces extrañas*. Por eso, si se aplica tal transformación, al final de ésta resulta necesaria la *comprobación* de las raíces halladas.

He aquí un **ejemplo** que muestra que dicha transformación puede realmente conducir a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$2 \cos x = 3 \operatorname{sen} x - 2.$$

Elevando al cuadrado esta ecuación y empleando la identidad trigonométrica fundamental, obtenemos la ecuación

$$4(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 9 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x + 4,$$

la cual es equivalente al conjunto de dos ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x = 0, \quad \operatorname{sen} x = \frac{12}{13}.$$

El conjunto de todas las raíces de la primera ecuación de este conjunto lo constituyen dos series: $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, y $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$. El conjunto de todas las raíces de la segunda ecuación lo constituyen también dos series:

$$x_p = \operatorname{arcsen} \frac{12}{13} + 2\pi p, \ p \in Z, \ \text{ y } \ x_k = \pi - \operatorname{arcsen} \frac{12}{13} + 2\pi k, \ k \in Z.$$

Por cuanto, al resolver la ecuación de partida, se realizó la elevación de la ecuación al cuadrado, es posible que entre las raíces halladas haya extrañas, por consiguiente, se necesita la comprobación. La comprobación muestra que toda raíz de la serie $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, es una raíz extraña, y cada raíz de la serie $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, es la raíz de la ecuación de partida.

Además, la comprobación muestra que toda raíz de la serie $x_k = \pi - \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi k$, $k \in Z$, es extraña, mientras que toda raíz de la serie $x_p = \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$, es la raíz de la ecuación de partida.

Por eso el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida lo constituyen dos series: $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, y $x_p = \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$.

Señalemos, además, que al realizar la elevación de una ecuación a potencia natural, se emplea, a menudo, la siguiente fórmula

$$(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x).$$

Está claro que si, al resolver la ecuación, sustituimos $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$, se pueden adquirir raíces extrañas, por lo cual al final de la resolución es necesaria la comprobación.

Demos un ejemplo de tal transformación de una ecuación.

Sea dada la ecuación

$$\sqrt{x^2 + x - 5} = \sqrt{x - 1}.$$

Elevando esta ecuación al cuadrado y sustituyendo

$$(\sqrt{x^2 + x - 5})^2 \text{ por } (x^2 + x - 5), \text{ y } (\sqrt{x - 1})^2 \text{ por } (x - 1),$$

obtenemos la ecuación

$$x^2 + x - 5 = x - 1.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Por cuanto, al resolver la ecuación de partida, tuvo lugar la elevación de la ecuación al cuadrado y la sustitución de $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$, pudieron aparecer raíces extrañas, por lo cual es necesaria la comprobación. La comprobación señala que la raíz $x_2 = -2$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que $x_1 = 2$ es raíz de la ecuación citada.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene la raíz única $x_1 = 2$.

Hemos de notar que, corrientemente, al elevar una ecuación a la potencia natural n, la sustitución de $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$ no se especifica.

En lugar del procedimiento descrito puede ofrecerse también otro método que se basa en la aplicación de la afirmación 7, § 1.

Si se emplea el método aducido, la ecuación puede ser resuelta según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*

2. *Dividir el CVA en dos conjuntos*: M_1 *y* M_2 (M_1 es la parte del CVA en la cual ambos miembros de la ecuación son simultáneamente o bien no negativos o bien no positivos, M_2 es aquella parte del CVA, en la cual los miembros derecho e izquierdo de la ecuación son de signos opuestos).

En este caso se hace claro que en M_2 la ecuación no tiene raíces, por lo cual el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida está contenido dentro de M_1.

3. *Resolver la ecuación en el conjunto* M_1. El conjunto de todas las raíces encontrado en M_1 será el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida (aquí se toma en consideración que la elevación de la ecuación de partida a potencia natural conduce a una ecuación que es equivalente en el conjunto M_1 a la de partida).

Resolvamos, rigiéndonos por el esquema descrito, la ecuación

$$\sqrt{2x+29}=3-x.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $X=\left[-\frac{29}{2}, +\infty\right)$.

Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1=\left[-\frac{29}{2}, 3\right]$ y $M_2=$ $=(3, +\infty)$. En el conjunto M_2 la ecuación de partida no tiene raíces, puesto que para todo $x \in M_2$ el primer miembro de la ecuación es positivo y el segundo, negativo. Resolvamos la ecuación en el conjunto M_1. Dado que en este conjunto ambos miembros de la ecuación de partida son no negativos, después de elevar al cuadrado la ecuación de partida, se obtiene una ecuación que es equivalente a ella:

$$2x+29=(3-x)^2.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación lo representan dos números, $x_1=-2$ y $x_2=10$. Por cuanto el número $x_2=10$ no pertenece al conjunto M_1, no será raíz de la ecuación de partida.

Por cuanto el número $x_1=-2$ pertenece al conjunto M_1, será raíz de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene la única solución $x_1=-2$.

Así pues, la resolución de una ecuación elevándola a potencia natural resulta posible mediante dos procedimientos.

Primer procedimiento. Realizar el paso a una ecuación que es consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Efectuar la comprobación y establecer cuáles raíces son extrañas. Aquellas raíces, pertenecientes al conjunto de todas las raíces halladas, que no son extrañas constituyen precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

Segundo procedimiento. Realizar el paso equivalente en el conjunto M_1 (M_1 es la parte del CVA de la ecuación de partida, donde ambos miembros de la ecuación de partida son simultáneamente o bien no negativos o bien no positivos). Hallar en M_1 todas las raíces de la ecuación obtenida. Todas estas raíces constituyen precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Transformación relacionada con la supresión del denominador. Sea dada la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$f(x) = g(x)\,\varphi(x)$$

se denomina *supresi´n de la ecuación del denominador.*

Está claro que, al realizar tal transformación de una ecuación, es posible la aparición de raíces extrañas. Por eso, si en el proceso de resolución de una ecuación se suprime el denominador de la ecuación, resulta indispensable la comprobación de todas las raíces halladas.

Pongamos un ejemplo de aplicación de tal transformación. Sea dada la ecuación

$$\frac{2(x-7)}{x^2-6x-7} = 1.$$

Suprimiendo el denominador, obtenemos la ecuación

$$2x - 14 = x^2 - 6x - 7.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 1$ y $x_2 = 7$.

En el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación que pudo tener por resultado la aparición de raíces extrañas, por lo cual se necesita la comprobación. La comprobación muestra que el número $x_2 - 7$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que el número $x_1 = 1$ es la raíz de la ecuación mencionada. Así pues, la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 1$.

Observemos que, de acuerdo con la afirmación 9, § 1, la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$$

es equivalente en su CVA a la ecuación

$$f(x) = g(x)\,\varphi(x).$$

Por ello, la resolución de tales ecuaciones puede realizarse según el siguiente esquema:

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$.

2. *Resolver en el CVA de la ecuación dada la ecuación equivalente $f(x) = g(x)\varphi(x)$.*

Por cuanto las ecuaciones $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$ y $f(x) = g(x)\varphi(x)$ son equivalentes en el CVA de la primera ecuación, todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)\varphi(x)$ que integran el CVA de la primera ecuación constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto M de todos los números reales, salvo los números $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, donde m es un número entero cualquiera. En el conjunto M la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 x - 1 = \cos^4 x.$$

Por cuanto en el conjunto de todos los números reales se verifican las igualdades idénticas

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x),$$
$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x,$$

entonces en dicho conjunto será válida también la igualdad idéntica

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x.$$

Por eso la ecuación de partida será equivalente en el conjunto M a la ecuación

$$\cos 2x = -1.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última ecuación es la serie $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Como esta serie no pertenece al conjunto M_1, la ecuación no tiene raíces.

Así pues, la resolución de una ecuación suprimiendo el denominador es posible mediante dos procedimientos:

Primer procedimiento. Realizar el paso a una ecuación que representa una consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida, comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Las raíces del conjunto de todas las raíces halladas que no son extrañas constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

Segundo procedimiento. Realizar el paso equivalente en el CVA de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Todas estas raíces constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Transformaciones relacionadas con la potenciación de una ecuación. Sea a un número fijo positivo cualquiera, distinto de la unidad. Sea dada la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

se llama *potenciación de la ecuación.*

Según se deduce de la afirmación 6 del § 1, al realizar la potenciación de una ecuación, *no se pueden perder raíces, sino sólo adquirir extrañas.* Por eso, si, al resolver una ecuación, se realiza la potenciación, resulta necesaria la *comprobación* al final de la resolución.

Resolvamos mediante este procedimiento la ecuación

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7).$$

Al realizar la potenciación de la ecuación dada, obtenemos otra ecuación

$$x^2 - 4 = 4x - 7.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$.

En el transcurso de la resolución de la ecuación de partida se ha realizado la potenciación de la ecuación, por lo cual es posible la aparición de raíces extrañas y esto requiere la comprobación. La comprobación señala que el número $x_2 = 1$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que $x_1 = 3$ es la raíz de la ecuación de partida. Por eso la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 3$.

Observemos que según la afirmación 8 del § 1, la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

es equivalente en su CVA a la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

Por eso la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ puede resolverse según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

2. *Resolver en el CVA de esta ecuación la ecuación equivalente* $f(x) = g(x)$.

Todas las raíces de la última ecuación constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, el ejemplo examinado más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7).$$

Al CVA de esta ecuación es el conjunto $M = (2, +\infty)$. En el conjunto M la ecuación dada es equivalente a la ecuación $x^2 - 4 = 4x - 7$.

El conjunto de todas las soluciones de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$. Por cuanto el número $x_2 = 1$ no pertenece al conjunto M, mientras que el número $x_1 = 3$ pertenece a M, entonces la última ecuación tiene en M tan sólo una raíz que es $x_1 = 3$. Como la última ecuación y la de partida son equivalentes en el conjunto M, resulta, pues, que la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 3$.

Así pues, la resolución de una ecuación aplicando la potenciación es posible mediante dos procedimientos.

Primer procedimiento. Realizar el paso a una ecuación que representa una consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Las raíces del conjunto de todas las raíces halladas que no son extrañas constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

Segundo procedimiento. Realizar el paso equivalente en el CVA de la ecuación de partida, hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en el CVA de la ecuación de partida. Todas estas raíces constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Transformación relacionada con la logaritmación de una ecuación. Supongamos que a es un número positivo fijo distinto de la unidad. Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

se denomina *logaritmación de la ecuación.*

Según se desprende de la afirmación 6 § 1, al logaritmar una ecuación se pueden perder raíces. Por eso *la aplicación formal de esta transformación se prohíbe.*

Cabe señalar que la logaritmación de la ecuación $f(x) = g(x)$ puede realizarse sólo en el conjunto M, es decir, en toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la ecuación citada son positivos. En este caso, como se deduce de la afirmación 6 § 1, las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son en el conjunto M equivalentes.

Por esta razón, la resolución de la ecuación $f(x) = g(x)$ aplicando la logaritmación de la ecuación, resulta posible sólo según el siguiente esquema:

1. *Hallar el CVA de la ecuación dada.*

2. *Dividir el CVA en dos conjuntos*: M_1 *y* M_2 (M_1 es la parte del CVA, donde ambos miembros de la ecuación dada son positivos;

M_2 es la parte del CVA que queda después de restar de éste el conjunto M_1).

3. *Resolver la ecuación en* M_1 (tomando en consideración que en M_1 la ecuación $f(x) = g(x)$ es equivalente a la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

4. *Resolver la ecuación en* M_2.

5. *Reunir los conjuntos de todas las raíces determinadas en* M_1 *y* M_2.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la ecuación

$$3^{x^2-x} = 3^{1-(\sqrt{x})^2}.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $M = [0, +\infty)$. Por cuanto ambos miembros de la ecuación dada son positivos en el conjunto M, en este conjunto la ecuación citada es equivalente a la ecuación

$$x^2 - x = 1 - (\sqrt{x})^2.$$

La ecuación obtenida es, a su vez, equivalente en el conjunto M a la ecuación

$$x^2 = 1.$$

La última ecuación tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. La raíz $x_1 = 1$ pertenece al conjunto M, mientras que la raíz $x_2 = -1$ no pertenece al conjunto M. Por consiguiente, la última ecuación tiene en el conjunto M una sola raíz $x_1 = 1$. Como la ecuación de partida es equivalente a la última ecuación en el conjunto M (todo el CVA de la ecuación de partida), la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 1$.

Transformaciones relacionadas con la simplificación de la ecuación por el factor común. Sea dada la ecuación

$$\varphi(x) f(x) = \varphi(x) g(x).$$

Esta ecuación se sustituye a menudo por la ecuación

$$f(x) = g(x),$$

es decir la ecuación de partida se simplifica por el factor común $\varphi(x)$, lo que constituye un gran error que puede conducir tanto a la *pérdida de raíces* de la ecuación de partida, como a la *adquisición de raíces extrañas*.

Veamos un ejemplo. Sea dada la ecuación

$$\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

Simplificando esta ecuación por el factor común $\sqrt{x-2}$, llegamos a la ecuación

$$x^2 + 3 = 4x.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

Es fácil ver, sin embargo, que el número $x_1 = 1$ no es raíz de la ecuación de partida, es decir, este número es una raíz extraña para la ecuación de partida. Al mismo tiempo resulta evidente que el número $x_3 = 2$ es raíz de la ecuación de partida que se ha perdido al realizar la transformación.

Por lo tanto, efectivamente, al simplificar una ecuación por el factor común $\varphi(x)$, se pueden perder las raíces de la ecuación de partida y se pueden adquirir raízes extrañas.

Las ecuaciones de este tipo se deben resolver de la manera siguiente.

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\varphi(x) f(x) = \varphi(x) g(x)$.
2. *Escribir una ecuación equivalente a la mencionada:* $\varphi(x) \times \times [f(x) - g(x)] = 0$.
3. *Pasar de esta ecuación al conjunto de ecuaciones, equivalente en el CVA a la ecuación de partida*

$$\varphi(x) = 0, \quad f(x) - g(x) = 0.$$

4. *Resolver este conjunto de ecuaciones en el CVA de la ecuación de partida.* En este caso el conjunto de todas las raíces de este conjunto, cada una de las cuales pertenece al CVA de la ecuación de partida, constituirá precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Resolvamos, mediante este procedimiento la ecuación

$$\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $M = [2, +\infty)$. Escribamos la ecuación, equivalente a la de partida,

$$\sqrt{x-2}\,(x^2-4x+3) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente en el conjunto M al conjunto de ecuaciones

$$\sqrt{x-2} = 0, \quad x^2-4x+3 = 0.$$

La primera ecuación de este conjunto tiene la única raíz $x_1 = 2$. La segunda ecuación tiene tan sólo dos raíces: $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Quiere decir, el conjunto de todas las raíces de este conjunto consta de tres números: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Las raíces x_1 y x_2 integran el conjunto M, mientras que la raíz x_3 no figura en el conjunto M.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene solamente dos raíces: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Transformaciones relacionadas con la simplificación de la ecua-

ción por el factor común. Sea dada la ecuación

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_k(x)| = g(x), \qquad (12)$$

donde $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son polinomios enteros respecto de x. Para resolver semejantes ecuaciones *es menester*, como regla, *suprimir los signos de valores absolutos*. Observemos que *la supresión formal de los signos de valores absolutos puede conducir tanto a la pérdida de raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas.* Mostrémoslo.

Sea dada la ecuación

$$|x - 1| = 2x + 4.$$

Si suprimimos formalmente el signo de valor absoluto, obtendremos la ecuación

$$x - 1 = 2x + 4,$$

la cual tiene la única raíz $x_1 = -5$. Es fácil ver, sin embargo, que esta raíz no es raíz de la ecuación de partida, es decir, para la ecuación de partida es extraña. Al mismo tiempo podemos ver con facilidad que el número $x_2 = -1$ es la raíz de la ecuación de partida y esta raíz se ha perdido al realizar la transformación. Por lo tanto, efectivamente, al suprimir formalmente los signos de valor absoluto, se pueden perder raíces de la ecuación de partida y se pueden adquirir raíces extrañas.

Para resolver las ecuaciones de este tipo se emplea con mayor frecuencia el así llamado *método de intervalos*. La esencia de este método consiste en lo siguiente:

Sea dada la ecuación (12). Al principio se resuelve el conjunto de ecuaciones

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, f_m(x) = 0, \quad \ldots, f_k(x) = 0, \qquad (13)$$

a continuación se marcan en la recta numérica todas las raíces de este conjunto de ecuaciones.

De este modo, toda la recta numérica se divide en cierto número de intervalos y en cada uno de estos intervalos la ecuación se sustituye por otra ecuación que no contiene signos de valor absoluto y es equivalente en dicho intervalo a la ecuación de partida. En cada intervalo se hallan las raíces de la ecuación que se obtiene en el intervalo dado y, a continuación, de las raíces halladas se escogen aquellas que caen en el intervalo dado. Estas últimas serán precisamente raíces de la ecuación de partida en el intervalo que se considera. Por fin, para escribir todas las raíces de la ecuación de partida se reúnen todas las raíces de ella, determinadas en todos los intervalos.

Ilustremos este método con algunos ejemplos.

Sea dada la ecuación

$$|x-1| = 2x+4. \tag{14}$$

En este caso el conjunto de ecuaciones (13) consta de una ecuación

$$x-1=0,$$

que tiene la única raíz: el número 1. Quiere decir, la recta numérica se divide en dos intervalos: $(-\infty, 1)$ y $[1, +\infty)$.

Veamos cómo se resuelve la ecuación (14) en cada uno de estos intervalos.

1. En el intervalo $(-\infty, 1)$ tenemos, por definición de valor absoluto:

$$|x-1| = -(x-1)$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (14) es equivalente a la ecuación

$$-(x-1) = 2x+4,$$

que tiene la única raíz $x_1 = -1$. Esta raíz cae en el intervalo $(-\infty, 1)$. Esto significa que en dicho intervalo la ecuación (14) tiene la única raíz $x_1 = -1$.

2. Por definición de valor absoluto en el intervalo $[1, +\infty)$

$$|x-1| = x-1.$$

Por eso en este intervalo la ecuación (14) es equivalente a la ecuación

$$x-1 = 2x+4,$$

que tiene la única raíz $x_2 = -5$. Esta raíz no cae en el intervalo $[1, +\infty)$. Quiere decir, en el intervalo dado la ecuación (14) no tiene raíces.

Al resumir, llegamos a que la ecuación de partida (14) tiene la única raíz $x_1 = -1$.

Sea dada la ecuación

$$|x^2-1| - |x| + |2x+3| = 4x-6. \tag{15}$$

Veamos el conjunto de ecuaciones

$$x^2-1=0, \quad x=0, \quad 2x+3=0.$$

El conjunto de todas las raíces de este conjunto de ecuaciones se compone de cuatro números: $1; -1; 0; -\frac{3}{2}$. Quiere decir, la recta numérica se divide en cinco intervalos: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)$, $[-1; 0)$, $[0; 1)$, $[1; +\infty)$.

Señalemos la resolución de la ecuación (15) en cada uno de los intervalos citados.

1. En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, de acuerdo con la definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2 - 1| = (x^2 - 1), \quad |x| = -x, \quad |2x + 3| = -(2x + 3).$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$(x^2 - 1) - (-x) - (2x + 3) = 4x - 6,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, razón por la cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

2. En el intervalo $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$, por definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2 - 1| = (x^2 - 1), \quad |x| = -x, \quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Por eso, la ecuación (15) es equivalente en este intervalo a la ecuación

$$(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6.$$

Esta ecuación cuadrática no tiene raíces reales. Por consiguiente, la ecuación (15) no tiene raíces en este intervalo.

3. Por definición de valor absoluto en el intervalo $[-1; 0)$

$$(x^2 - 1) = -(x^2 - 1), \quad |x| = -x, \quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$-(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6,$$

la cual tiene solamente dos raíces:

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}, \quad x_4=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}.$$

Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces dentro del intervalo indicado.

4. Por definición de valor absoluto, en el intervalo $[0; 1)$

$$|x^2-1|=-(x^2-1), \quad |x|=x, \quad |2x+3|=2x+3.$$

Por eso, en este intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$-(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6,$$

que tiene solamente dos raíces: $x_5=-5$, $x=2$. Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

5. En el intervalo $[1; +\infty)$, por definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2-1|=(x^2-1), \quad |x|=x, \quad |2x+3|=(2x+3).$$

Por eso, en este intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6.$$

Esta ecuación cuadrática no tiene raíces reales, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

Al resumir, llegamos a que la ecuación (15) no tiene raíces en toda la recta numérica.

Indiquemos, como conclusión que en este párrafo se han considerado no todas las transformaciones posibles, sino sólo aquellas que se usan con mayor frecuencia. Se puede, por supuesto, dar también otros ejemplos de transformaciones no equivalentes, como, por ejemplo, supresión de los términos semejantes, paso a una base nueva de logaritmos que contenga una magnitud desconocida u otras. No nos detendremos en ello detalladamente, sino enunciemos solamente una regla general.

Al resolver las ecuaciones, se debe emplear uno de los siguientes dos procedimientos:

1. Sustitución de la ecuación dada por otra ecuación que sea equivalente a la dada en cierto conjunto; en este caso se muestra explícitamente tanto el propio conjunto, como el hecho de que las ecuaciones son equivalentes precisamente en dicho conjunto (se deben analizar todos los conjuntos en que se divide el CVA).

2. Sustitución de la ecuación dada por otra ecuación que sea una consecuencia de la dada; en este caso se indica por qué la ecuación nueva es una consecuencia de la anterior, y al fin de la resolución resulta ser obligatoria la comprobación.

¿Será el número 2 una raiz de las siguientes ecuaciones (1 . . . 15):

1. $3+\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{5}(27-x)+\frac{1}{2}(x-8)\right]-1-\frac{x}{2}\right\}\div\frac{x+1}{2}$;

2. $\frac{3x-4}{3}-\frac{(8x-11)(x+1)}{4}=\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$;

3. $4x^2+5x-2\sqrt{3x^2-5x+2}=x(15-2x)$;

4. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{9x+7}$;

5. $|x-1|+|2x-6|=3$; 6. $|2-|1-|x|||=1$;

7. $3^{2x+1}+9=28\cdot 3^x$; 8. $27^x+3^{1+x}+3^{1-x}+27^{-x}=\frac{551\,368}{729}$;

9. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$;

10. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=(2\sqrt{2})^x-\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$;

11. $2^{\log_6 3}\cdot x^{1-\log_6\left(\frac{15x}{2}\right)}=1$;

12. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3x}{8}}+3\log_{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)=\log_{\frac{1}{16}}\left|\left(1-\frac{9x^2}{64}\right)^2+2\right.$;

13. $\sqrt{\log_{\frac{x}{4}}\sqrt{\frac{x}{8}}\cdot\log_2\frac{x}{4}}=1$;

14. $\operatorname{sen}^2\frac{x}{\pi}+\cos\frac{2x}{\pi}-2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8}\cos\frac{x}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

15. $2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)=\arccos(3-x)$?

¿Serán equivalentes la ecuación $x=2$ y las siguientes ecuaciones (16 . . . . . . 30):

16. $3\{10-2[3x-2(x-5)]+7x\}=3x-4$;

17. $\sqrt{4x^2+8x-28}-x=2-\sqrt{3x^2+8x-24}$;

18. $(x^2-5x-7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

19. $x^2+\frac{4}{x^2}=15\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)-17\frac{1}{2}$;

20. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$; 21. $\sqrt{x^2-6x+9}=(x-3)^2$;

22. $2^{x+2}=15+2^{2-x}$; 23. $2^x+5^{x-1}=5^x-2^{x+2}$;

24. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$; 25. $3^x\sqrt[3]{8^x}=36$;

26. $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-2}}}=\frac{2}{3}$;

27. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}$;

28. $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1-\lg(2^{x-2}+1)$;

29. $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_4(3^{x-1}+1)^2$;

30. $\frac{\cos(\pi x)-1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}}=0$?

¿Serán equivalentes las siguientes dos ecuaciones (31 . . . 66):

31. $x+1=0$ y $(x+1)(x+4)=0$;

32. $(x-1)=0$ y $(\sqrt{x}+1)(x-1)=0$;

33. $x^2=2-x$ y $\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{2-x}{x^2-1}$;

34. $x+4=0$ y $\frac{x+4}{x^2-2x+9}=0$;

35. $x-4=8-x$ y $x-4+\frac{7}{x-6}=8-x+\frac{7}{x-6}$;

36. $2x-6=9+x$ y $2x-6+\sqrt{x^2+1}=9+x+\sqrt{x^2+1}$;

37. $x(x+4)=x+4$ y $\frac{x(x+4)}{\log_2(1-x^2)}=\frac{x+4}{\log_2(1-x^2)}$;

38. $(x-3)=2x+1$ y $(x-3)\sqrt{x+4}=(2x+1)\sqrt{x+4}$;

39. $x^2-2=0$ y $x^4-4=0$;

40. $x^2-4x+3=0$ y $\frac{x^2-4x+3}{x-1}=0$;

41. $x^2+3=4x$ y $(x^2+3)(x-1)=4x(x-1)$;

42. $\frac{x-3}{x+2}=\frac{x^2-9}{x^2+x-2}$ y $(x-3)(x^2+x-2)=(x^2-9)(x+2)$;

43. $\frac{x+3}{x^2+3}+\frac{1}{3}=\frac{x^2}{x^2+3}$ y $3(x+3)+x^2+3=3x^2$;

44. $x^2+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}=2x$ y $x^2=2x$;

45. $\frac{x^2-25}{x+5}=-14$ y $x-5=-14$;

46. $\frac{x^2-25}{x+5}=-10$ y $x-5=-10$;

47. $(x+3)(x-1)=2(x-1)$ y $x+3=2$;

48. $(x+2)(x-1)=3(x-1)$ y $x+2=3$;

49. $x^2-2x=8$ y $(x^2-2x)\,2^{\sqrt{x}}=8\cdot 2^{\sqrt{x}}$;

50. $(2x-3)=3x-2$ y $(2x-3)^2=(3x-2)^2$;

51. $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2+2x-4}$ y $x^2-2=x^2+2x-4$;

52. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}=0$ y $\sqrt{(1+x)(x+2)}=0$;

53. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}=\sqrt{6}$ y $\sqrt{(x+2)(x-3)}=\sqrt{6}$;

54. $x^2-7=3^{\log_3 6x}$ y $x^2-7=6x$;

55. $\sqrt{(x+2)^2}=1$ y $x+2=1$;

56. $\sqrt{(x^2-4x+4)^2}=4$ y $x^2-4x+4=4$;

57. $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ y $|x+1|=2$;

58. $\log_4(x-1)^2=0$ y $2\log_4(x-1)=0$;

59. $\log_5 x^4=0$ y $4\log_5|x|=0$;

60. $\log_7 x^5=0$ y $5\log_7 x=0$;

61. $\log_{(x+2)^2}(x+1)^2=0$ y $\log_{x+2}(x+1)=0$;

62. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+3)=0$ y $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=0$;

63. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ y $\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$;

64. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ y $\operatorname{sen} 3x=0$;

65. $\operatorname{sen} x \cos x = \cos^2 x$ y $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}^2 x$;

66. $\operatorname{sen} x \cos x = \cos^2 x$ y $\operatorname{tg} x = 1$?

Indíquese cuál de las dos ecuaciones siguientes es consecuencia de la otra (67 ... 92):

67. $(x+2)(x+1)^2 = 3(x+1)^2$ y $x+2=3$.

68. $x^2+4x+3=0$ y $(x^2+4x+3)\cdot 2^{\sqrt{x+2}}=0$.

69. $x^3-\dfrac{4x(x+2)}{x+2}=0$ y $x^3-\dfrac{4x^2}{x}=0$.

70. $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$ y $x^2=4$.

71. $x^2-7x=8$ y $\sqrt{4-x^2}\,(x^2-7x)=8\sqrt{4-x^2}$.

72. $x^2=16$ y $x^2\log_2(x-5)=16\cdot\log_2(x-5)$.

73. $x^2-6=5x$ y $\dfrac{x^2-6}{\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{5x}{\sqrt{5-x^2}}$.

74. $x-4=2x+3$ y $\dfrac{x-4}{\lg x}=\dfrac{2x+3}{\lg x}$.

75. $x^2-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{x+3}+3x=0$ y $x^2+3x=0$.

76. $x^3-2x=0$ y $x^3-\dfrac{2x^2}{x}=0$.

77. $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{30}$ y $\sqrt{(x+3)(x-4)}=\sqrt{30}$.

78. $\sqrt{x^2-5x-6}=4$ y $x^2-5x-6=16$.

79. $\log_2(x+1)^2=2$ y $\log_2 x+1=1$.

80. $\log_2(x+2)+\log_2(x-3)=1$ y $\log_2(x+2)(x-3)=1$.

81. $\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} x\cos x=\cos^2 x$ y $\sqrt{3}\operatorname{tg} x=1$.

82. $\dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x-1}}$ y $\operatorname{sen} x=1$.

83. $\cos 2x\cdot\sqrt{4-x^2}=\operatorname{sen} 4x\cdot\sqrt{4-x^2}$ y $\cos 2x=\operatorname{sen} 4x$.

84. $\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{\log_2 x}=\operatorname{tg}^2 x$ y $\operatorname{tg} x=1$.

85. $\cos x\cdot\log_5(x-1)=\operatorname{sen} x\cdot\log_5(x-1)$ y $\cos x=\operatorname{sen} x$.

86. $\operatorname{arcsen} x^2=\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\operatorname{arcsen} x^2}{\log_3(-x)}=\dfrac{\pi}{2\log_3(-x)}$.

87. $\arccos x=\pi$ y $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.

88. $|x^2-1|=x+1$ y $x^2-1=x+1$.

89. $|x^2-4|=x+2$ y $4-x^2=x+2$.

90. $|x+1|+|x-1|=6$ y $x=3$.

91. $|x+1|+|x-1|=-x^2+3$ y $2x=-x^2+3$.

92. $|x+1|+|x-1|=-x^2+2$ y $2x=-x^2+2$.

¿Serán equivalentes la ecuación y el conjunto de ecuaciones (93 ... 124):

Ecuación	Conjunto de ecuaciones
93. $(x^2-1)(x+2)=0$	$x=-1,\ x=1,\ x=-2;$
94. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$	$x=1,\ x=2;$
95. $\frac{5(6-x)}{x-2}=\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11(6-x)}{3(x-4)}$	$x=\frac{7}{2},\ x=7;$
96. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$	$x=81,\ x=64;$
97. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$	$x=1,\ x=5;$
98. $\sqrt{x+1}=x-1$	$x=0,\ x=3;$
99. $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$	$x=4,\ x=6;$
100. $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$	$x=-1,\ x=3;$
101. $x^2-\sqrt{x^2-9}=21$	$x=-5,\ x=5;$
102. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{7+9x}$	$x=1,\ x=2;$
103. $\sqrt{2x^2+3x-2}+\sqrt{8x^2-2x-1}=$ $=\sqrt{18x^2+5x-7}$	$x=2,\ x=-\frac{1}{2};$
104. $\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{x}\right)$	$x=-1,\ x=\frac{3-\sqrt{21}}{2},\ x=3,$ $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2};$
105. $\lvert x-3\rvert=\lvert x-3\rvert^2$	$x=0,\ x=2;$
106. $\lvert x-1\rvert+\lvert x+2\rvert=4+\lvert x-3\rvert$	$x=-8,\ x=2;$
107. $\lvert 2-\lvert 1-\lvert x\rvert\rvert\rvert=1$	$x=-4,\ x=-2,\ x=2,\ x=4;$
108. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=(2\sqrt{2})^x-$ $-\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$	$x=2,\ x=0;$
109. $8^{\frac{x}{x+1}}=4\cdot 3^{2-x}$	$x=-\frac{\lg 6}{\lg 3},\ \ x=2;$
110. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0$	$x=\frac{3}{2},\ \ x=-\frac{1}{2};$
111. $x^{x^2-5x+6}=1$	$x=2,\ x=3;$
112. $x^x+139x^{-x}-108x^{-2x}=32$	$x=1,\ x=2,\ x=3;$
113. $\log_2(9-2^x)=3-x$	$x=0,\ x=3;$

Ecuación	Conjunto de ecuaciones
114. $\log_{\frac{5x}{2}} \frac{x}{10} + \log_5^2 \frac{x}{2} = 1$	$x=2,\ x=10;$
115. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$	$x=4,\ x=8;$
116. $\log_2(9^{x-1}+7) = 2+\log_2(2^{x-1}+1)$	$x=1,\ x=2;$
117. $\sqrt{3\log_2(-x)} = \log_2\sqrt{x^2}$	$x=-8,\ x=-1;$
118. $\lg\left\lvert \frac{x^2-x-1}{x^2+x-2} \right\rvert = 0$	$x=-\frac{\sqrt{6}}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=\frac{\sqrt{6}}{2};$
119. $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0$	$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$
120. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$	$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$ $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{2},\ m\in Z;$
121. $\operatorname{ctg} x \operatorname{sen} 3x (\cos x - 2) = 0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z;\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$
122. $\arccos x = \pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{4x}{3}$	$x=-\frac{3}{5},\ x=-\frac{2}{3};$
123. $\cos(4\arccos x) = -\frac{1}{2}$	$x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2},$ $x=\frac{\sqrt{3}}{2};$
124. $\operatorname{arc\,sen} x - \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} - \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}\,x}{2} = 0$	$x=-1,\ x=0,\ x=1?$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones (125...326)

125. $\left(2x+1\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{5}{2}\right)=(x-1{,}125)(2x-1{,}25).$

126. $\frac{x+1}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1.$ **127.** $\frac{x-5}{2}+\frac{2x-1}{2+3x}=\frac{5x-1}{10}-1\frac{2}{5}.$

128. $\frac{6x-5}{4x-3}=\frac{3x+3}{2x+5}.$ **129.** $\frac{3-5x}{x+2}=2+\frac{x-11}{x+4}.$

130. $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{x}.$ **131.** $\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{6}{x^2+2x-8}=0.$

132. $\frac{x-3}{x^2-3x-4}=\frac{x-1}{x^2-x-2}.$ **133.** $\frac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}.$

134. $x^2+4x-\frac{7}{x^2+4x+5}=1.$ **135.** $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}.$

136. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0.$

137. $\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-13}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}.$

138. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{30}$. 139. $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{5(2-x^2)}{2x}$.

140. $x^3-x^2-100=0$. 141. $x^3-7x^2+14x-8=0$.

142. $2x^4-5x^3-5x^2+18=0$. 143. $6x^4-2x^3-17x^2+2x+11=0$.

144. $3x^5-5x^3+2=0$. 145. $x^7-6x^6+13x^5-12x^4+4x^3=0$.

146. $1-|x|=\frac{1}{2}$. 147. $|-x+2|=2x+1$.

148. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}$. 149. $|x-1|+|x-2|=1$.

150. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$. 151. $|4(1-x)|=|5x-4|+x$.

152. $|1-x^2|=1-x^2$. 153. $|x^2-1|=1-|x|$.

154. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$. 155. $\left|\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}x^2-3x+4\right|=\frac{3}{4}$.

156. $|x^2-3x+2|=4-x^2+|x|$. 157. $\frac{7}{|x-1|-3}=|x+2|$.

158. $\frac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|}=1$. 159. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}\right|=1$.

160. $|3-|x+2||=4$. 161. $\left|\frac{x^2-6|x|+7}{x^2+6x+7}\right|=1$.

162. $\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}-2$. 163. $\sqrt{10-x}-\sqrt{x}=\sqrt{x-5}$.

164. $\sqrt{x-10}-\sqrt{4-x}+x=4$. 165. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

166. $x^2-3=\sqrt{4x^2-4x+1}$. 167. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2$.

168. $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}$.

169. $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}$.

170. $\sqrt{9+4x^2-12x}+\sqrt{10x-x^2-21}=2x+3{,}5$.

171. $\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{5x-x^2-4}=-|1-x^3|$.

172. $\sqrt{4x^2+25-10x}-7=|x-2|-3x$.

173. $(x+1)\sqrt{10x-21-x^2}=x^2-11x+24$.

174. $\sqrt{x}=1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}$.

175. $\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{x}$.

176. $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=1-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$.

177. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

178. $\frac{x+2}{\sqrt{-1-x}+1}=1-\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$.

179. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}+\sqrt{x^2+1}+7=0$.

180. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}+2}=2$.

181. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$.

182. $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0$.

183. $\sqrt{\sqrt{x+4}+1}+\sqrt{\sqrt{3-x}+2}=x^2-x-42$.

184. $\sqrt[4]{512}=8^{3x}2^{1-x}$. **185.** $125^{2-3x}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}$.

186. $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{2x-7}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{9}\right)^{1-3x}}$. **187.** $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{x}\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0$.

188. $9^{x}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}=\sqrt{27^{x}}\,\sqrt[3]{81^{x+3}}$.

189. $3^{x(x-2)-\frac{8x+5}{2}}-9\sqrt{243}=0$.

190. $[(\sqrt{0,11})^{x+2}]^{3-x}=0,001331$.

191. $\left(32^{\frac{1}{x-7}}\right)^{x+5}=[\sqrt{0,0625}\,(2\cdot\sqrt{4096})^{x+17}]^{\frac{1}{x-3}}$.

192. $3^{2+\log_3 2}\cdot\sqrt{729}=2\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{81}\right)^{x+1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

193. $2\cdot5^{x+2}-5^{x+3}=375$. **194.** $3\cdot4^{x-2}=2\left(256-16^{\frac{x+1}{2}}\right)$.

195. $6^{x}-2^{x-1}\cdot3^{x-2}=2\sqrt{5^{\log_5 289}}$.

196. $3\sqrt{2^{x-31}}-5\sqrt{2^{x-35}}-32=0$.

197. $3^{\sqrt{x^2}+2}-3^{\sqrt{x^2}+1}-3^{\sqrt{x^2}-1}=68$. **198.** $2^{(3^x)}=3^{(2^x)}$.

199. $5^{x}(3x+5^{x})=4(3x+4)$. **200.** $14\cdot7^{x-1}=3\cdot5^{x+2}$.

201. $3\cdot13^{x}+13^{x+1}-2^{x+2}=5\cdot2^{x+1}$.

202. $2\cdot5^{x+1}-\dfrac{1}{5}\cdot4^{x+2}-\dfrac{1}{3}\cdot5^{x+2}=3\cdot4^{x-1}$.

203. $3(10^{x}-6^{x+2})+4\cdot10^{x+1}=5(10^{x-1}+6^{x-1})$.

204. $9^{x}-8\cdot3^{x}+7=0$. **205.** $4-2^{x+2}=3$.

206. $2^{x}(7-2^{x})=2\cdot7^{\log_7 3}$. **207.** $4^{2x-1}=13\cdot4^{x-2}-21$.

208. $2^{x}=26+3\cdot2^{\frac{x-3}{2}}$. **209.** $2(9^{x}+4^{x})-5\cdot6^{x}=0$.

210. $3\cdot16^{x}+36^{x}=2\cdot81^{x}$. **211.** $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$.

212. $4^{3x^2+x}-8=2\cdot8^{x^2+\frac{x}{3}}$. **213.** $2^{2x+6}+4(4^{2x}-8^{x+1})=0$.

214. $\sqrt[3]{25^{x}}-\sqrt[3]{9^{x}}-\sqrt[3]{15^{x}}=0$.

215. $7^{2x}+7^{-2x}-7^{x+1}-7^{1-x}+8=0$.

216. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\left[2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}+1\right]=2^{x}+1$.

217. $2^{x}(2^{3x}-2^{x}+2)=2\cdot8^{x}-1$. **218.** $5^{x}-32=\dfrac{108-139\cdot5^{x}}{25^{x}}$.

219. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

220. $\log_2(x+4)=\log_2 4\,(\log_2 7-\log_2 5)$.

221. $\log_7 x=2\log_7(2x-15)$.

222. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=1$.

223. $2\log_{\pi}(x-1)+\log_{\pi}(x-30)^2=4$.

224. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$.

225. $\log_3 \log_8 \log_2 (x+5) = \log_3 2 - 1$.

226. $\log_8 (2 \log_3 (1+\log_2 (1+3 \log_2 x))) = \frac{1}{3}$.

227. $1+\lg (1+x^2+2x) - \lg (x^2+6) = 2 \lg (x+1)$.

228. $\lg (2x-3)^2 - \lg (3x-1)^2 = 2$.

229. $\log_{\frac{1}{2}} (4-x) = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$.

230. $2-\log_2 (x^2+3x) = 0$.

231. $\log_4 (x^2-1) - \log_4 (x-1)^2 = \log_4 \sqrt{(2-x)^2}$.

232. $\log_9 (x^2+2x-3) = \log_9 \frac{x-1}{x+3}$.

233. $\log_6 (x+1) = \log_6 (1-x) + \log_6 (2x+3)$.

234. $\dfrac{\lg 2+\lg (4-5x-6x^2)}{\log (2x-1)} = 3$.

235. $\log_{\sqrt{2}} \left| \dfrac{x^2-x-1}{x^2+x-2} \right| = 0$.

236. $\log_{\frac{1}{2}} (x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (7-x) = 1$.

237. $\lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$.

238. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_2 \sqrt[4]{\frac{2}{x}} = 2$.

239. $\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4$.

240. $\sqrt{\log_9 (9x^3) \cdot \log_3 (9x)} = \log_3 x^2$.

241. $\sqrt{2 \left(\log_2 \frac{x^2}{64} - 1 \right) (2+\log_4 (8x))} = \log_2 (2x)$.

242. $\dfrac{1}{5-4 \lg (x+1)} = 3 - \dfrac{1}{1+\lg (x+1)}$.

243. $\log_2 (4^x+4) = x+\log_2 (2^{x+1}-3)$.

244. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

245. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

246. $\log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$.

247. $\lg (3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) = 2 - \sqrt{x+0,25} \lg 4 + \frac{\lg 16}{4}$.

248. $\lg \sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-5}}} = \frac{2}{3}$.

249. $2 \log_2 (\log_2 x) + \log_{1/2} (\log_2 (2 \sqrt{2} x)) = 1$.

250. $\log_{1-3x} (6x^2-5x+1) - \log_{1-3x} (4x^2-4x+1) = 2$.

251. $\log_{5x-1} (10x^2-7x+1)^4 = 2+\log_{2x-1} (25x^2-10x+1)$.

252. $\log_{(x-6)^2} (x^2-5x+9) = \frac{1}{2}$.

253. $\log_{(x-1)^2} (4-4x+x^2) = 2+\log_{(x-1)^2} (x+5)^2$.

254. $\log_{x+1} (x^2+x-6)^2 = 4$. 255. $\log_4 [(x-1)^{\log_4 (x-1)^2}] = 2$.

256. $\log_2 (3^x-1) \cdot \log_3 (3^{x+1}-3) = 6$.

257. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.
258. $\log_4 \log_2 x+\log_2 \log_4 x=2$. 259. $|\log_2|x||=2$;
260. $\operatorname{sen}\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$. 261. $\sqrt{100-x^2}\cdot\operatorname{sen} 2x=0$.
262. $\cos(4x+2)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 263. $\frac{\cos 3x}{\sqrt{81-x^2}}=0$.
264. $\operatorname{tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)=-10$. 265. $\operatorname{ctg}\frac{3x+2}{4}=11\sqrt{2}$.
266. $\sqrt{4x+77-x^2}\cdot\operatorname{tg} x=0$. 267. $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\log_2(14+5x-x^2)}=0$.
268. $4\cos x+5\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 269. $2\operatorname{sen} x-3\cos x=-\frac{1}{2}$.
270. $\operatorname{tg} x^2=-\sqrt{3}$. 271. $\operatorname{ctg}\sqrt{x}=1$.
272. $\sqrt{\operatorname{sen} x}=\cos x$. 273. $\sqrt{5-2\operatorname{sen} x}=6\operatorname{sen} x-1$.
274. $\sqrt{9-4\sqrt{3}-(16-8\sqrt{3})\operatorname{sen} x}=4\operatorname{sen} x-3$.
275. $\operatorname{sen}\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\operatorname{sen} x$.
276. $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x+4\cos^3 x=0$.
277. $\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{sen} x\cos x+1=4\operatorname{sen}^2 x$.
278. $4+\operatorname{sen}^2 x=(3+\sqrt{3})\operatorname{sen} 2x-2(2-\sqrt{3})\cos^2 x$.
279. $\operatorname{sen} 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.
280. $\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x=2$.
281. $4(\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x)^2-\operatorname{sen} 3x=5$.
282. $\cos^{40} 2x-\operatorname{sen}^{40} 2x=1$.
283. $\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}=1$.
284. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x=1$, 285. $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=\operatorname{sen} 2x$.
286. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.
287. $\operatorname{sen} 2x-12(\operatorname{sen} x-\cos x)+12=0$.
288. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\operatorname{sen}\alpha\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.
289. $\cos x+\operatorname{sen} x=\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$.
290. $\operatorname{tg} 2x\cos 4x(4-\operatorname{sen}^2 7x)=0$.
291. $8\cos^4 x=3+5\cos 4x$.
292. $2(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)=\operatorname{sen} 4x$.
293. $\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen} 6x=2(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 5x)$.
294. $1-\operatorname{tg} 2x=4\operatorname{sen}^2 2x$.
295. $\operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 4x=-\cos 6x\cos 3x$.
296. $\cos x=\cos 3x+2\operatorname{sen} 2x$.
297. $\operatorname{sen}^4 x+5\cos 2x+4=0$.
298. $\operatorname{tg}^2 x+8\cos 2x\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg}^2 x$.
299. $\cos 7x-\operatorname{sen} 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\operatorname{sen} 7x)$.
300. $(\cos x-\operatorname{sen} x)\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+\operatorname{sen} x=2\cos^2 x$.

301. $2\,\mathrm{sen}^2 2x + \mathrm{sen}^2 4x = \frac{5}{4}$.

302. $\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 3\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}$.

303. $\mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|$.

304. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) -$
$- 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$.

305. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \mathrm{ctg}\,(\pi\,\mathrm{sen}\,x) = 0$.

306. $2\,\mathrm{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\,\mathrm{sen}\,2x\cos^2 2x}$.

307. $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \mathrm{sen}\,2x = 4\cos^2 3x$.

308. $5^{\sqrt{(\log_5 x + \log_5 9)\log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1,8}}$.

309. $\mathrm{sen}^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$. **310.** $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$.

311. $|\cos x|^{\mathrm{sen}^2 x - \frac{3}{2}\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2}} = 1$. **312.** $81^{\mathrm{sen}^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

313. $4^{\mathrm{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$, **314.** $2^{1+2\cos 5x} + 16^{\mathrm{sen}^2\frac{5}{2}x} = 9$.

315. $81^{(\mathrm{sen}\,2x-1)\cos 3x} - 9^{(\mathrm{sen}\,x - \cos x)^2} = 0$.

316. $3^{\mathrm{sen}\,2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \mathrm{sen}\,2x + 2\,\mathrm{sen}^2 x} = 28$.

317. $x^2\log_3 x^2 - (2x^2+3)\log_9(2x+3) = 3\log_3\frac{x}{2x+3}$.

318. $x^2 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}$.

319. $\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$.

320. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} - x\log_{1/6}(5x^2-2x-3) = x^2 + 2x$.

321. $3^{-\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \mathrm{sen}\,x} = 3^{-\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

322. $4^{\mathrm{tg}^2 x} - 4^{\frac{1}{1+\cos 2x}}\log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = -\log_{\mathrm{sen}\,x}\frac{1-\cos 2x}{2}$.

323. $4\cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} - 16{,}5\cdot 4^{\cos x + \mathrm{sen}\,x} = -\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}} 16$.

324. $\mathrm{sen}\,\pi x + \mathrm{sen}\,(\log_x x^{3\pi x}) = \cos\pi x - \cos\,(\log_{\sqrt[3]{x}} x^{\pi x})$.

325. $\cos 2x + \log_4\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x\right) + 2\cos x\cdot\log_{1/2}\mathrm{sen}\,x =$
$= 2\cos x + \mathrm{sen}^2 x\cdot\log_2\mathrm{sen}^2 x$.

326. $2\log_{25}(5^{2\,\mathrm{sen}\,x} - 4) = 2\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}$.