CAPÍTULO

VIII

DESIGUALDADES CON UNA SOLA INCÓGNITA

Sean dadas dos funciones: $y = f(x)$ e $y = g(x)$, cuyos campos de existencia son P y L, respectivamente. Supongamos que el campo M es una intersección de los campos de existencia de las funciones citadas, es decir, $M = P \cap L$ (en particular, el campo M puede ser un conjunto vacío).

Planteemos un problema: hállense todos los números α del campo M, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$. En estos casos se dice que el problema consiste en *resolver la desigualdad $f(x) > g(x)$ con una sola incógnita x, o bien que está dada la desigualdad $f(x) > g(x)$ con una sola incógnita x.*

En este capítulo se analizan algunos métodos destinados para resolver solamente desigualdades con una sola incógnita. Por eso en lo que sigue diremos simplemente «desigualdad $f(x) > g(x)$» en lugar de «desigualdad $f(x) > g(x)$ con una sola incógnita». De modo análogo se enuncian y se entienden los problemas: resuélvase la desigualdad $f(x) < g(x)$; resuélvase la desigualdad $f(x) \geqslant g(x)$; resuélvase la desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$.

§ 1. Conceptos fundamentales y afirmaciones sobre la equivalencia de las desigualdades

Se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de una desigualdad $f(x) > g(x)$ la parte común (intersección)* de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, es decir, el conjunto de todos los valores de la incógnita x, para cada uno de los cuales tienen sentido (están definidos) los miembros primero y segundo de la desigualdad.

El número α del CVA de la desigualdad recibe el nombre *de solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$*, siempre que al sustituirlo en lugar de la incógnita x la desigualdad se convierte en la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$ que se verifica.

Resolver la desigualdad $f(x) > g(x)$ significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Observemos que este conjunto puede resultar ser vacío, lo que es posible solamente en dos casos:

a) si el CVA de la desigualdad dada es un conjunto vacío;

b) si el CVA de la desigualdad dada es un conjunto no vacío Q, mas no existe ningún número $\alpha \in Q$ para el cual se verifique la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$.

Si el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad dada es vacío, suele decirse que la *desigualdad dada no tiene soluciones*. Por eso, a veces se dice así: resolver la desigualdad $f(x) > g(x)$ significa hallar todas sus soluciones o demostrar que dicha desigualdad no tiene soluciones.

Sean dadas dos desigualdades: $f(x) > g(x)$ y $p(x) > \varphi(x)$. Si cualquier solución de la primera desigualdad es, a la vez, solución para la segunda desigualdad, y cualquier solución de la segunda desigualdad es, a la vez, la solución de la primera, estas dos desigualdades se denominan *equivalentes*.

En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las desigualdades mencionadas no tiene soluciones, las desigualdades son *equivalentes*. La sustitución de una desigualdad por otra desigualdad, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente de una desigualdad a la otra*.

Sean dadas dos desigualdades: $f(x) > g(x)$ y $p(x) > \varphi(x)$ y sea dado cierto conjunto M de valores de la incógnita x. Si cualquier solución de la primera desigualdad, perteneciente al conjunto M, es a la vez la solución de la segunda desigualdad y cualquier solución de la segunda desigualdad, perteneciente al conjunto M, es a la vez la solución de la primera, entonces dichas dos desigualdades se llaman *equivalentes en el conjunto* M.

En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de estas desigualdades no tiene soluciones en el conjunto M, estas dos ecuaciones *son equivalentes en el conjunto* M.

La sustitución de una desigualdad por la otra, equivalente a la primera en el conjunto M, se llama *paso equivalente en el conjunto* M de una desigualdad a la otra.

Señalemos que de modo análogo se enuncian los problemas en los que se pide resolver las desigualdades $f(x) < g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$ y $f(x) \leqslant g(x)$, y asimismo las principales definiciones para ellos.

Observaciones: 1. Al tratar las desigualdades, *no* usamos, a diferencia de las ecuaciones, *el término «raíz»*.

2. Puesto que a título de conjunto de soluciones de una desigualdad interviene, de ordinario, cierto intervalo y como la comprobación de todos los números pertenecientes al intervalo citado es prácticamente imposible, el concepto de *consecuencia no se usa en la resolución de las desigualdades*.

Demos a conocer unos cuantos ejemplos que ilustran los conceptos introducidos.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\sqrt{3-x}.$$

El CVA de esta desigualdad es un conjunto M que representa la intersección de los campos de existencia de las funciones $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{x-5}$ e $y=\sqrt{3-x}$, es decir, M es la intersección de los conjuntos $[-2, +\infty)$, $[5, +\infty)$ y $(-\infty, 3]$. Esta intersección es vacía. Por consiguiente, la desigualdad queda resuelta, puesto que no existe ningún valor de la incógnita, para el cual todas las funciones, que figuran en la desigualdad dada, tengan sentido. De este modo, la igualdad dada no tiene soluciones.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x}<-5.$$

Puesto que al sustituir en la desigualdad dada cualquier valor numérico del CVA de esta desigualdad, ella se convierte en una desigualdad numérica ilícita y, por lo tanto, la desigualdad dada no tiene soluciones.

Las desigualdades $x+5>0$ y $(x^4+1)(x+5)>0$ son equivalentes en el conjunto de todos los números reales; las desigualdades $\sqrt{x}>1$ y $x^2>1$ no son equivalentes en el conjunto de todos los números reales, pero lo son, por ejemplo, en el conjunto de números positivos.

He aquí algunas **afirmaciones** sobre la equivalencia de las desigualdades:

1. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ *y* $f(x)-g(x)>0$ *son equivalentes.*

2. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ y $f(x)+\alpha>g(x)+\alpha$ *son equivalentes para cualquier* α *real.*

3a. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ *y* $\alpha f(x)>\alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier* α *positivo.*

3b. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ y $\alpha f(x)<\alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier número negativo* α.

4a. *Las desigualdades* $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ y $f(x)>g(x)$ *son equivalentes para cualquier número fijo a tal, que* $a>1$.

4b. *Las desigualdades* $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ y $f(x)<g(x)$ *son equivalentes para cualquier número fijo a tal, que* $0<a<1$.

La validez de estas afirmaciones se demuestra de modo semejante, razón por la cual aduzcamos aquí sólo la **demostración** de la afirmación 3a.

Supongamos que el número x_1 es cierta solución de la desigualdad $f(x)>g(x)$, es decir, que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $f(x_1)>g(x_1)$. Al multiplicar esta desigualdad numérica por un número positivo α, vemos que se verifica la desigualdad numérica $\alpha f(x_1)>\alpha g(x_1)$, lo que significa que el número x_1 es una solución de la desigualdad $\alpha f(x)>\alpha g(x)$. Este razonamiento puede realizarse para toda solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$ es una solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$.

Demostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número x_2 es cierta solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$, es decir, que existen los números $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $\alpha f(x_2) > \alpha g(x_2)$. La validez de esta desigualdad predetermina, en virtud de las propiedades de las desigualdades numéricas, la validez de la desigualdad numérica $f(x_2) > g(x_2)$, lo que significa que el número x_2 es la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$. Este razonamiento puede realizarse para toda solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ es una solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

Así pues, si cada una de las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\alpha f(x) > > \alpha g(x)$ tiene soluciones, las desigualdades son equivalentes. Observemos que de lo demostrado se desprende, en particular, que si una de estas desigualdades no tiene soluciones, tampoco las tiene la segunda, es decir, en este caso las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ son también equivalentes.

Con esto queda demostrada completamente la afirmación 3a.

Ahora aduzcamos algunas **afirmaciones** sobre la equivalencia de las desigualdades en los conjuntos.

5. *Sea n un número natural y supongamos que en cierto conjunto M dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, son simultáneamente no negativas. Entonces, en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.*

6a. *Sea a un número fijo tal, que $a > 1$, y supongamos que en cierto conjunto M las dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, son simultáneamente positivas. Entonces, en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.*

6b. *Sea a un número fijo cualquiera tal, que $0 < a < 1$, y supongamos que en cierto conjunto M las dos funciones, $y = f(x)$ e $y = = g(x)$, son simultáneamente positivas. Entonces en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\log_a f(x) < < \log_a g(x)$.*

7a. *Supongamos que en cierto conjunto M la función $y = \varphi(x)$ es positiva, entonces en dicho conjunto son equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$.*

7b. *Supongamos que en cierto conjunto M la función $y = \varphi(x)$ es negativa, entonces en dicho conjunto son equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$.*

Demostremos la **afirmación** 5.

Si $n = 1$, la afirmación 5 es justa.

Por eso, en adelante consideraremos que $n \geqslant 2$. Supongamos que el número x_1 pertenece al conjunto M y representa cierta solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$, es decir, que existen los números no negativos $f(x_1)$ y $g(x_1)$ tales, que para ellos se verifica la desigualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$. De la validez de esta igualdad se deduce, en particular, que el número $f(x_1)$ es positivo. Mas, en este caso, para cualquier número natural k el número $[f(x_1)]^k$ es positivo, y el número $[g(x_1)]$, no negativo. Quiere decir, la suma

$$[f(x_1)]^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2} g(x_1) + \ldots + f(x_1)[g(x_1)]^{n-2} + \\ + [g(x_1)]^{n-1}$$

es positiva, puesto que su primer sumando es positivo y los demás, no negativos. De la desigualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$ se desprende, además, que el número $f(x_1) - g(x_1)$ es positivo. Como el producto de números positivos es positivo, lo es también el número

$$[f(x_1) - g(x_1)]\{[f(x_1)]^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2} g(x_1) + \ldots \\ \ldots + f(x_1)[g(x_1)]^{n-2} + [g(x_1)]^{n-1}\}.$$

Aplicando ahora la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II), llegamos a que es válida la desigualdad numérica

$$[f(x_1)]^n - [g(x_1)]^n > 0,$$

de donde se deduce la validez de la igualdad numérica

$$[f(x_1)]^n > [g(x_1)]^n.$$

Así pues, se ha mostrado que para cualquier número x_1 del conjunto M la validez de la desigualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$ predetermina la validez de otra desigualdad numérica $[f(x_1)]^n > > [g(x_1)]^n$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $f(x) > > g(x)$, perteneciente al conjunto M, será la solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.

Mostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número x_2 pertenece al conjunto M y que existe una solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, es decir, supongamos que existen los números no negativos $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$. Mostremos que el número $f(x_2)$ es positivo. Admitamos que $f(x_2)$ es igual a cero, entonces de la desigualdad $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ se desprende que el número $[g(x_2)]^n$ es negativo. Mas, por cuanto el número $g(x_2)$ es no negativo, lo será también el número $[g(x_2)]^n$. La contradicción obtenida significa que el número $f(x_2)$ es positivo. Por consiguiente será positiva la suma

$$[f(x_2)]^{n-1} + [f(x_2)]^{n-2} g(x_2) + \ldots \\ \ldots + f(x_2)[g(x_2)]^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}.$$

Además, de la validez de la desigualdad $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ se deduce que el número $[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n$ es positivo. Examinemos ahora la igualdad numérica

$$[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n = [f(x_2) - g(x_2)]\{[f(x_2)]^{n-1} + \\ + [f(x_2)]^{-2} g(x_2) + \ldots + f(x_2)[g(x_2)^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}\}.$$

En el primer miembro de esta igualdad figura un número positivo, en el segundo, el producto de dos números, uno de los cuales es positivo, y, por tanto, el segundo número es también positivo, es decir, se verifica la desigualdad numérica $f(x_2) - g(x_2) > 0$. La validez de esta desigualdad numérica predetermina la validez de la desigualdad $f(x_2) > g(x_2)$. Así pues, se ha mostrado que para cualquier número x_2 del conjunto M la validez de la desigualdad numérica $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ predetermina la validez de la desigualdad numérica $f(x_2) > g(x_2)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, perteneciente al conjunto M, es la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

Así pues, si cada una de las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$ tiene soluciones en el conjunto M, dichas desigualdades serán equivalentes.

Observemos que de lo demostrado se deduce, en particular, que si una de las desigualdades no tiene soluciones en el conjunto M, la otra tampoco las tiene en dicho conjunto, es decir, en este caso las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$ son también equivalentes, con lo que se acaba la demostración de la afirmación 5. La justeza de las afirmaciones 6a, 6b, 7a, 7b se demuestran análogamente.

Sean dadas m desigualdades $f_1(x) > g_1(x)$, $f_2(x) > g_2(x)$, ..., $f_m(x) > g_m(x)$. Denotemos con M un campo que sirve de intersección para los campos de valores admisibles de todas estas desigualdades. Si se pide hallar todos los números α del campo M, cada uno de los cuales sea la solución de cualquiera de las desigualdades mencionadas, suele decirse que está dado *un sistema de m desigualdades*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x) > g_m(x) \end{cases} \qquad (1)$$

y el campo M se llama *campo de valores admisibles* (CVA) *de este sistema*. Indiquemos que las desigualdades del sistema se escriben, de ordinario, en una columna y se reúnen mediante una llave.

El número α del CVA del sistema de desigualdades (1) se denomina *solución* de este sistema, si es la solución para cada una de las desigualdades.

Resolver el sistema de desigualdades (1) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el sistema de desigualdades (1) no tiene soluciones. El sistema de desigualdades (1) se resuelve habitualmente del modo siguiente. Al principio se resuelve cada desigualdad en el CVA de este sistema, es decir, se hallan los conjuntos N_1, N_2, . . ., N_m, donde N_i es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $f_i(x) > g_i(x)$, pertenecientes al CVA de este sistema. Luego se determina el conjunto N_0 que es la intersección de todos los conjuntos citados, $N_1, N_2, \ldots, N_m$, es decir, $N_0 = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_m$. El conjunto N_0 será precisamente el conjunto de todas las soluciones del sistema de desigualdades (1).

Supongamos que los números a y b son tales que $a < b$ y sea dado el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < b. \end{cases} \tag{2}$$

En este caso suele decirse que esta dada una *desigualdad doble*

$$a < f(x) < b. \tag{3}$$

Observemos que si $y = f(x)$ es una función elemental fundamental, resulta, a menudo, más simple resolver la desigualdad doble (3) que el sistema de desigualdades (2).

Sean dados ahora k sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} f_{11}(x) > g_{11}(x), \\ f_{21}(x) > g_{21}(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_{n1}(x) > g_{n1}(x) \end{cases} \begin{cases} f_{12}(x) > g_{12}(x), \\ f_{22}(x) > g_{22}(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_{m2}(x) > g_{m2}(x) \end{cases} \ldots \begin{cases} f_{1k}(x) > g_{1k}(x) \\ f_{2k}(x) > g_{2k}(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_{lk}(x) > g_{lk}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Denotemos con Q el campo que sirve de intersección para los campos de valores admisibles de todos estos sistemas de desigualdades.

Si se pide hallar en el campo Q todos los números α, cada uno de los cuales sea solución de, al menos, uno de los sistemas citados, se dice que está dado el *conjunto de k sistemas de desigualdades* y el campo Q se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de este conjunto.* Indiquemos que los sistemas de desigualdades de un conjunto de sistemas se escriben, de ordinario, en una línea (véase (4)).

El número α del CVA del conjunto de sistema de desigualdades (4) se llama *solución* de dicho conjunto, si es solución de, por lo menos, un sistema de desigualdades del conjunto (4).

Resolver el conjunto de sistemas de desigualdades (4) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si dicho conjunto resulta ser vacío, se dice que el conjunto de sistemas de desigualdades (4) no tiene soluciones.

El conjunto de sistemas de desigualdades (4) se resuelve, corrientemente, del modo siguiente. Al principio se resuelve cada sistema de desigualdades en el CVA del conjunto (4), es decir, se determinan los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, donde M_i es el conjunto de todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_{1i}(x) > g_{1i}(x), \\ f_{2i}(x) > g_{2i}(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_{pi}(x) > g_{pi}(x) \end{cases}$$

en el CVA de este conjunto. Luego se determina el conjunto M_0 que representa la unión de todos los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, es decir, $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. El conjunto M_0 será precisamente el conjunto de todas las soluciones del conjunto de sistemas de desigualdades (4).

Observemos que si cada uno de los k sistemas del conjunto (4) contiene una sola desigualdad, se dice que está dado un *conjunto de k desigualdades*.

Si $k = 1$, el conjunto (4) representa, de hecho, *un sistema de desigualdades*.

Se dice que *la desigualdad*

$$f(x) > g(x) \tag{5}$$

es equivalente al conjunto de sistemas de desigualdades (4), si cualquiera de las soluciones de la desigualdad (5) es solución del conjunto (4), y toda solución del conjunto (4) es solución de la desigualdad (5).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la desigualdad (5) no tiene soluciones y si el conjunto de sistemas de desigualdades (4) no tiene soluciones, *la desigualdad* (5) *es equivalente al conjunto* (4).

Si en el conjunto de sistemas de desigualdades (4) $n = m = \ldots$ $\ldots = p = \ldots = l = 1$, se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente al conjunto de desigualdades* (4).

Si en el conjunto de sistemas de desigualdades (4) $k = 1$, se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente al sistema de desigualdades* (4).

La sustitución de la desigualdad (5) por el conjunto (4), equivalente a la desigualdad (5), se llama *paso equivalente* de la desigualdad (5) al conjunto (4).

A veces surge la necesidad de realizar un paso equivalente de una desigualdad a un conjunto de sistemas de desigualdades en el conjunto M.

Se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente en el conjunto M al conjunto de desigualdades* (4), si cualquier solución de la desigualdad (5), perteneciente al conjunto M, es solución del conjunto (4), y cualquier solución, perteneciente al conjunto M, del conjunto (4) es solución de la desigualdad (5).

Señalemos que en el conjunto de sistemas (4) puede haber una infinidad de sistemas de desigualdades.

La sustitución de una desigualdad por otra desigualdad o por un conjunto de sistemas de desigualdades se denominará en adelante *transformación de la desigualdad*.

Por fin, aduzcamos la noción de *conjunto mixto*, es decir, de conjunto de ecuaciones y desigualdades.

Sean dadas k ecuaciones $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, $\ldots$ $\ldots$, $f_k(x) = g_k(x)$ y m desigualdades $f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x)$, $f_{k+2}(x) >$ $> g_{k+2}(x)$, $\ldots$, $f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x)$. Denotemos con Q el campo que sirve de intersección de los campos de valores admisibles de estas ecuaciones y de todas estas desigualdades.

Si se pide hallar en el campo Q todos los números α, cada uno de los cuales sea la solución de al menos una de las k ecuaciones citadas o de al menos una de dichas m desigualdades, se dice que está dado un *conjunto mixto*

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_k(x) = g_k(x)$$
$$f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x), \quad f_{k+2}(x) > g_{k+2}(x), \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x), \tag{6}$$

y el campo Q se llama *campo de valores admisibles* (CVA) *de este conjunto.*

Indiquemos que las ecuaciones y desigualdades de un conjunto mixto se escriben, de ordinario, en una línea.

El número α del CVA del conjunto mixto (6) se denomina *solución de este conjunto*, si es solución de al menos una de las k ecuaciones o de al menos una de las m desigualdades del conjunto citado.

Resolver el conjunto mixto (6) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el *conjunto mixto* (6) *no tiene soluciones.*

El conjunto mixto (6) se resuelve, corrientemente, del modo siguiente. Al principio se resuelve cada ecuación y cada desigualdad en el CVA de dicho conjunto, es decir, se hallan los conjuntos M_1, M_2, ..., M_{k-1}, M_k, donde M_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $f_i(x) = g_i(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto (6), y los conjuntos M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_{k+m}, donde M_{k+j} ($j = 1, 2, \ldots, m$) es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $f_{k+j}(x) > g_{k+j}(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto (6). A continuación se determina el conjunto M_0 que es la unión de los conjuntos M_1, M_2, ..., M_k, M_{k+1}, ..., M_{k+m}, es decir, $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1} \cup \ldots \cup M_{k+m}$. El conjunto M_0 será precisamente el *conjunto de todas las soluciones del conjunto mixto* (6).

Diremos que la *desigualdad*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{7}$$

es equivalente al conjunto mixto (6), si toda solución de la desigualdad (7) es solución del conjunto mixto (6) y toda solución del conjunto mixto (6) es la solución de la desigualdad (7).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la desigualdad (7) no tiene soluciones y no las tiene el conjunto mixto (6), la desigualdad (7) será equivalente al conjunto mixto (6).

De lo dicho más arriba se desprende que una *desigualdad no estricta*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{8}$$

es equivalente al conjunto mixto

$$f(x) = g(x), \quad f(x) > g(x). \tag{9}$$

Con este motivo se analizan, de ordinario, solamente desigualdades estrictas, pues la solución de una desigualdad no estricta es la unión de soluciones de la ecuación y de la desigualdad estricta correspondientes.

§ 2. Desigualdades elementales

Sea $y = f(x)$ una función elemental fundamental y b, un número real fijo. Entonces las desigualdades

$$f(x) > b, \tag{1}$$

$$f(x) < b \tag{2}$$

suelen llamarse *desigualdades elementales*.

Es evidente que el CVA de una desigualdad elemental coincide con el campo de existencia de la función elemental fundamental $y = f(x)$.

Como se señaló más arriba, la desigualdad no estricta $f(x) \geqslant b$ es equivalente al conjunto de la desigualdad estricta $f(x) > b$ y de la ecuación $f(x) = b$, mientras que la desigualdad no estricta $f(x) \leqslant b$ esequivalente al conjunto de la desigualdad estricta $f(x) < b$ y de la ecuación $f(x) = b$. Por esta razón en el párrafo presente se analizará solamente la resolución de las desigualdades elementales (1) y (2).

Cabe notar ante todo que al resolver una desigualdad, no se puede es cribir formalmente la solución de la ecuación correspondiente y sustituir, a continuación, el signo de igualdad por el de desigualdad. En lo que sigue más abajo se mostrará que para resolver las desigualdades elementales (1) y (2) es preciso conocer bien las propiedades de la función elemental fundamental $y = f(x)$, y, además, saber emplearlas.

La resolución de una desigualdad elemental va acompañada, a menudo, de la construcción de las gráficas para las funciones $y = f(x)$ e $y = b$. En este caso se hace uso de la siguiente afirmación obvia: si se debe resolver una desigualdad $f(x) > b$, o $f(x) < b$, donde la función $y = f(x)$ no es obligatoriamente elemental fundamental, se construyen en un mismo dibujo las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = b$. Entonces, la solución de la desigualdad $f(x) > b$ serán aquellos valores de x, para cada uno de los cuales el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se dispone por arriba de la recta $y = b$ (fig. 149), y la solución de la desigualdad $f(x) < b$ serán los valores de x, para cada uno de los cuales el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se dispone por debajo de la recta $y = b$ (fig. 150).

Por eso tal dibujo ilustra de inmediato cuál conjunto es la solución de la desigualdad $f(x) > b$, y cuál, la solución de la desigualdad

$f(x) < b$. Sin embargo, hemos de subrayar que las gráficas sirven sólo de medio ilustrativo auxiliar al resolver las desigualdades. Estas gráficas sólo sugieren una respuesta, mientras que el hecho de

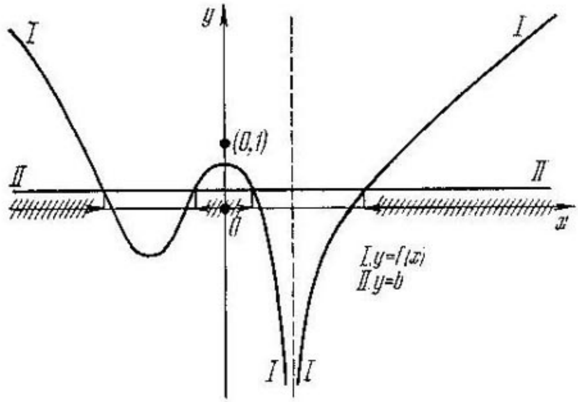


Fig. 149

que un conjunto, evidente en el dibujo, es una solución de tal o cual desigualdad ha de ser obligatoriamente demostrado.

Notemos además que frecuentemente el dibujo da la idea en qué conjuntos se debe dividir el campo de existencia de la función $y =$

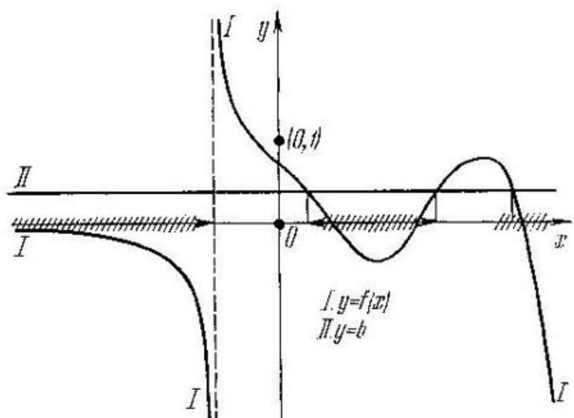


Fig. 150

$= f(x)$ y qué propiedades de esta función han de emplearse para realizar la demostración mencionada. Por eso, en lo sucesivo, previamente a la resolución de ciertas desigualdades elementales se analizarán las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = b$.

Desigualdades algebraicas. Sea n un número natural fijo, entonces las desigualdades

$$x^n > b, \tag{3}$$
$$x^n < b \tag{4}$$

suelen llamarse *desigualdades algebraicas elementales.*

La función $y = x^n$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de las desigualdades (3) y (4) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$.

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^n$ que se emplean al resolver las desigualdades (3) y (4) son diferentes para n par y n impar, analicemos dos casos:

I. Sea $n = 2m - 1$, donde m es un número natural fijo, entonces las desigualdades (3) y (4) adquieren la forma

$$x^{2m-1} > b, \tag{3a}$$
$$x^{2m-1} < b. \tag{4a}$$

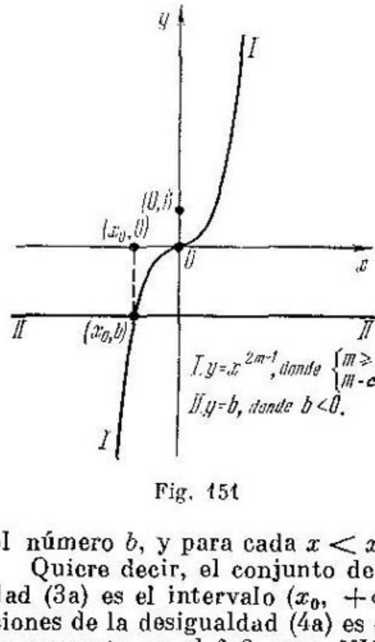


Fig. 151

El campo de valores de la función $y = x^{2m-1}$ en el conjunto X lo constituirá el conjunto $Y = (-\infty, +\infty)$. En vista de que la función $y = x^{2m-1}$ es creciente en el conjunto X, ella adquiere cada valor númerico de Y sólo una vez. Por eso, si dicha función toma el valor b para $x = x_0$, para cada $x > x_0$ ella toma un valor mayor que el número b, y para cada $x < x_0$, un valor inferior al número b.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3a) es el intervalo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4a) es el intervalo $(-\infty, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII,

$$x_0 = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{b}, & \text{para } b \text{ positivo;} \\ 0, & \text{para } b = 0; \\ -\sqrt[2m-1]{b}, & \text{para } b \text{ negativo.} \end{cases}$$

En la fig. 151 se ilustran de la manera adecuada los razonamientos aducidos más arriba.

II. Sea $n = 2m$, donde m es un número natural fijo, entonces las desigualdades (3) y (4) toman la forma

$$x^{2m} > b, \tag{3b}$$
$$x^{2m} < b. \tag{4b}$$

La función $y = x^{2m}$ es no negativa en toda la recta numérica. Por eso, si b es un número negativo, la desigualdad (3b) será válida para cualquier valor de x, y la desigualdad (4b) no es válida, cualquiera que sea el valor de x. Quiere decir, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa

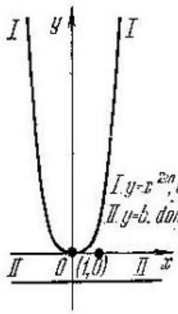


Fig. 152

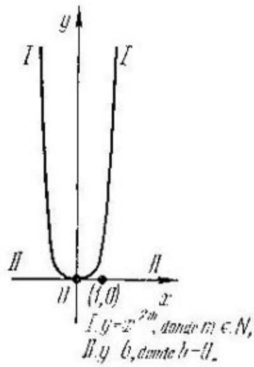


Fig. 153

por toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$, mientras que la desigualdad (4b) no tiene soluciones. En la fig. 152 se ilustran los razonamientos realizados.

Si, en cambio, $b = 0$, entonces para $x = 0$ la función $y = x^{2m}$ toma el valor nulo, y para todos los x restantes esta función es positiva, por lo cual la desigualdad (3b) será válida en este caso para cualquier valor de x, salvo el valor de $x = 0$; la desigualdad (4b) no es válida, cualquiera que sea el valor de x. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa en este caso por la unión de dos rayos $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (fig. 153), mientras que la desigualdad (4b) no tiene soluciones.

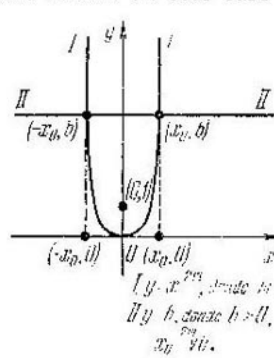


Fig. 154

Por fin, sea b un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{2m}$ o $y = b$ (fig. 154). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{2m}$ en dos puntos (x_0, b) y $(-x_0, b)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{b}$. La gráfica de la función $y = x^{2m}$ se dispone por debajo de la recta $y = b$ en el conjunto $(-x_0, x_0)$ y por encima, en el conjunto $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, estos conjuntos deben representar precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (4b) y (3b). No obstante, esta afirmación ha de ser demostrada. La figura (fig. 154) muestra que para demostrarla es preciso emplear el hecho de que en el intervalo $X_1 = [0, +\infty)$ la función $y = x^{2m}$ es creciente, y después, el hecho de que esta función es par.

Dividamos el campo de existencia de la función $y = x^{2m}$ en dos conjuntos, $X_1 = [0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$ y veamos la resolución de las desigualdades (3b) y (4b) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto X_1 el campo de valores de la función $y = x^{2m}$ es $Y = [0, +\infty)$ y la función es creciente, por eso todo valor numérico de Y ella lo adquiere sólo una vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X_1$ la función toma el valor b, para todo $x > x_0$ tal que $x \in X_1$ ella toma un valor superior a b, y para cada $x < x_0$ tal que $x \in X_1$, un valor inferior a b. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) en X_1 es el intervalo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) en X_1 es el intervalo $[0, x_0)$. Por cuanto la función $y = x^{2m}$ es par, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) en X_2 es el intervalo $(-\infty, -x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) en X_2 es el intervalo $(-x_0, 0)$. Al reunir las soluciones halladas en X_1 y en X_2, resulta que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) es la unión de dos rayos $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b), el intervalo $(-x_0, x_0)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{b}$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa por:

1) la recta numérica $(-\infty, +\infty)$, para cada b negativo;

2) el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, para $b = 0$;

3) el conjunto $(-\infty, -\sqrt[2m]{b}) \cup (\sqrt[2m]{b}, +\infty)$, para cada b positivo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) se representa por:

1) un conjunto vacío, para cada b no positivo;

2) el intervalo $(-\sqrt[2m]{b}, \sqrt[2m]{b})$, para cada b positivo.

En la Tabla 18 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (3) y (4).

Desigualdades fraccionarias. Sea n un número natural fijo, entonces las desigualdades

$$x^{-n} > b, \tag{5}$$

$$x^{-n} < b$$

suele llamarse *desigualdades fraccionarias elementales.*

La función $y = x^{-n}$ está definida en toda la recta numérica, a excepción del punto cero, por lo cual el CVA de las desigualdades (5) y (6) es un conjunto $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = (0, +\infty)$, y $X_2 = (-\infty, 0)$.

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{-n}$ que se emplean

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{2m-1}>b$	$(\sqrt[2m-1]{b};\ \infty)$	$(0;\ \infty)$	$(-\sqrt[2m-1]{\mid b\mid};\ \infty)$
$x^{2m-1}<b$	$(-\infty;\ \sqrt[2m-1]{b})$	$(-\infty;\ 0)$	$(-\infty;\ -\sqrt[2m-1]{\mid b\mid})$
$x^{2m}>b$	$(-\infty;\ -\sqrt[2m]{b})\cup$ $\cup(\sqrt[2m]{b};\ \infty)$	$(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(0,\ \infty)$	$(-\infty;\ \infty)$
$x^{2m}<b$	$(-\sqrt[2m]{b};\ \sqrt[2m]{b})$	no hay soluciones	no hay soluciones

al resolver las desigualdades (5) y (6) son diferentes para n par y n impar, analicemos dos casos:

1. Sea $n = 2m - 1$, donde m es un número natural fijo, entonces las desigualdades (5) y (6) toman la forma

$$x^{-m2+1} > b, \tag{5a}$$

$$x^{-m2+1} < b. \tag{6a}$$

A título de campo de valores de la función $y = x^{-2m+1}$ en el conjunto X_1 interviene el rayo $Y_1 = (0, +\infty)$, y en el conjunto X_2, el rayo $Y_2 = (-\infty, 0)$.

Si $b = 0$, entonces, tomando en consideración que la función $y = x^{-2m+1}$ es positiva en el conjunto X_1 y negativa en el conjunto X_2, llegamos a que que X_1 es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) y X_2, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) (fig. 155).

Sea b un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{-2m+1}$ e $y = b$ (fig. 156). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{-2m+1}$ en el punto (x_0, b), donde $x_0 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$. La gráfica de la función $y = x^{-2m+1}$ se dispone por arriba de la recta en el conjunto $(0, x_0)$ y por debajo de la recta, en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, los conjuntos citados tienen que ser precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (5a) y (6a). No obstante, esta afirmación ha de ser demostrada. El dibujo sugiere que para demostrarla es necesario analizar la solución de la desigualdad en cada conjunto X_1 y X_2 por separado y aprovechar el hecho de que la función $y = x^{-2m+1}$ es negativa en el conjunto X_2, y decreciente en el conjunto X_1.

Analicemos la solución de las desigualdades (5a) y (6a) en el conjunto X_2. En dicho conjunto la función $y = x^{-2m+1}$ es negativa, por

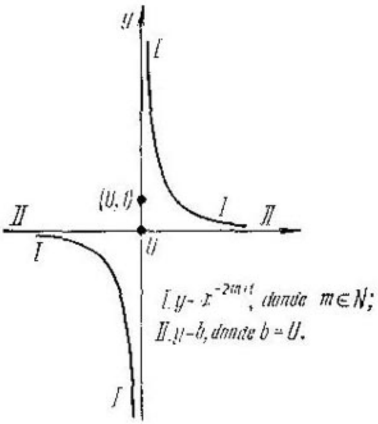


Fig. 155

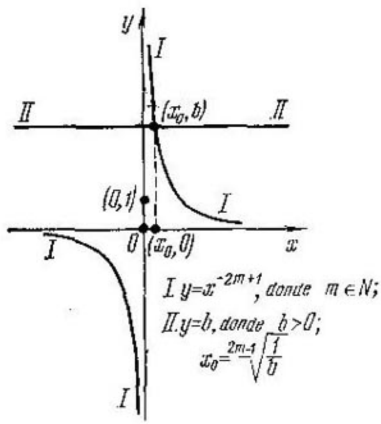


Fig. 156

eso en el conjunto X_2 no hay soluciones de la desigualdad (5a), pero todo el conjunto X_2 está contenido dentro del conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a).

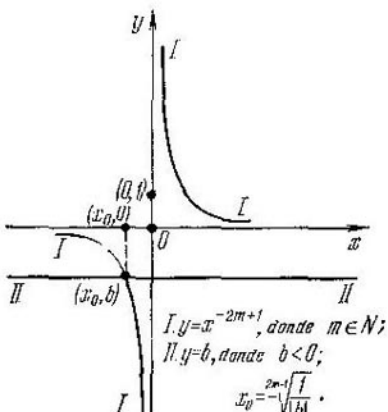


Fig. 157

En el conjunto X_1 la función $y = x^{-2m+1}$ decrece, por lo cual cada valor numérico de Y_1 ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0$ la función toma el valor b, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X_1$, ella toma un valor superior a b, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X_1$, un valor inferior a b. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) en el conjunto X_1 es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a), el rayo $(x_0, +\infty)$.

Al reunir las soluciones, obtenidas en X_1 y en X_2, llegamos a que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) es la unión de dos rayos $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$.

Si b es un número negativo, entonces, razonando análogamente, (fig. 157) llegamos a la deducción de que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es la unión de dos rayos $(-\infty, x_0) \cup (0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a), el intervalo $(x_0, 0)$, donde $x_0 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es

1) el conjunto $\left(0, \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$, para cada b positivo;
2) el conjunto $(0, +\infty)$, para $b = 0$;
3) el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}\right) \cup (0, +\infty)$, para cada b negativo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) es

1) el conjunto $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$, para cada b positivo;
2) el conjunto $(-\infty, 0)$, para cada $b = 0$;
3) el conjunto $\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}, 0\right)$, para cada b negativo

II. Sea $n = 2m$, donde m es un número natural fijo, entonces las desigualdades (5) y (6) toman la forma

$$x^{-2m} > b, \tag{5b}$$

$$x^{-2m} < b. \tag{6b}$$

El campo de valores de la función $y = x^{-2m}$ en el conjunto $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = (0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$, es el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si b es un número no positivo, entonces, tomando en consideración que la función $y = x^{-2m}$ es en el conjunto X positiva, obtenemos que X es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b), y la desigualdad (6b) no tiene soluciones (fig. 158).

Sea b un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{-2m}$ e $y = b$ (fig. 159). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{-2m}$ en dos puntos (x_0, b) y $(-x_0, b)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$. La gráfica de la función $y = x^{-2m}$ se dispone por encima de la recta $y = b$ en el conjunto $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$ y por debajo de ella, en el conjunto $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, dichos conjuntos tienen que ser precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (5b) y (6b). No obstante, esta afirmación ha de ser demostrada. El dibujo sugiere que para demostrarla es preciso aprovechar el hecho de que en el conjunto X_1 la función $y = x^{-2m}$ decrece, y, luego, la paridad de esta función.

Veamos la resolución de las desigualdades (5b) y (6b) en el conjunto X_1. En este conjunto la función $y = x^{-2m}$ decrece y su campo de valores se representa por $Y = (0, +\infty)$, por lo cual cada valor numérico de Y la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X_1$ la función toma el valor b, entonces para cada $x < x_0$ tal que $x \in X_1$, ella toma un valor superior a b, y para cada $x > x_0$

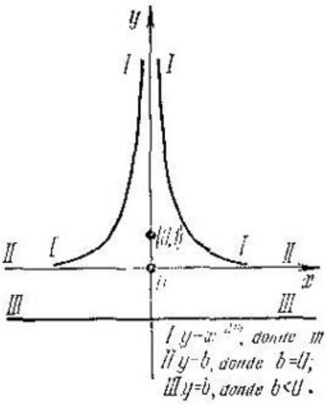


Fig. 158

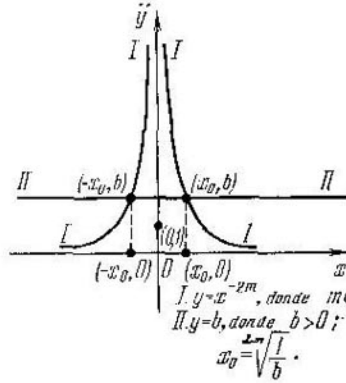


Fig. 159

tal, que $x \in X_1$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en X_1 el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es el rayo $(x_0, +\infty)$.

Por cuanto la función $y = x^{-2m}$ es par, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) en X_2 es el intervalo $(-x_0, 0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b), es el rayo $(-\infty, -x_0)$.

Al reunir las soluciones halladas en X_1 y en X_2, obtenemos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es la unión de dos intervalos $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es la unión de dos rayos $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es

1. el conjunto $\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$, para cada b positivo;

2. el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, para cada b no positivo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es

1. el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \cup \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$, para cada b positivo;

2. un conjunto vacío, para cada b no positivo.

En la tabla 19 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (5) y (6).

Desigualdades potenciales. Sea α un número real no entero y fijo, entonces las desigualdades

$$x^{\alpha} > b, \tag{7}$$

$$x^{\alpha} < b \tag{8}$$

suelen llamarse *desigualdades potenciales elementales.*

Tabla 19

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{-2m+1} > b$	$\left(0; \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$	$(0;\ \infty)$	$\left(-\infty; -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\mid b \mid}}\right) \cup (0;\ \infty)$
$x^{-2m+1} < b$	$(-\infty;\ 0) \cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}};\ \infty\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\mid b \mid}};\ 0\right)$
$x^{-2m} > b$	$\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}};\ 0\right) \cup \left(0; \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$
$x^{-2m} < b$	$\left(-\infty; -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \times \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}};\ \infty\right)$	no hay soluciones	no hay soluciones

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{\alpha}$, que se emplean al resolver las desigualdades (7) y (8), son diferentes para α no entero positivo y para α no entero negativo, analicemos dos casos:

I. Sea α un número positivo no entero. El campo de existencia de la función $y = x^{\alpha}$ se representa por el conjunto de todos los números no negativos, por lo cual el CVA de las desigualdades (7) y (8) es el conjunto $X = [0,\ +\infty)$. El campo de valores de la función $y = x^{\alpha}$ en todo el conjunto X está representado por el rayo $Y = [0,\ +\infty)$.

Si b es un número negativo, entonces, tomando en consideración que en el conjunto X la función $y = x^{\alpha}$ es no negativa, llegamos a la conclusión de que X es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7), y la desigualdad (8) no tiene soluciones (fig. 160).

Si $b = 0$, entonces para $x = 0$ la función $y = x^{\alpha}$ toma el valor cero, mientras que para todos los demás $x \in X$ dicha función es positiva, razón por la cual la desigualdad (7) es válida en este caso con cualquier valor de $x \in X$, salvo el valor $x = 0$, y la desigualdad (8) no es válida, cualquiera que sea el valor de $x \in X$.

Quiere decir, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) se representa por el rayo $(0, +\infty)$, mientras que la desigualdad (8) no tiene soluciones (fig. 161).

Sea, por fin, b un número positivo. En el conjunto X la función $y = x^\alpha$ es creciente y por eso cada valor numérico de Y ella lo toma

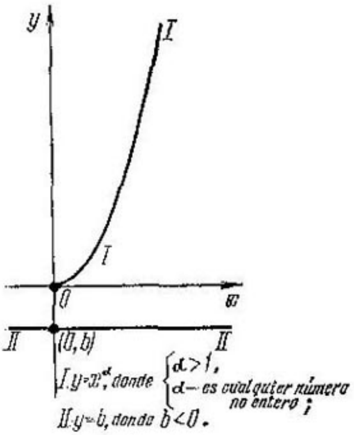


Fig. 160

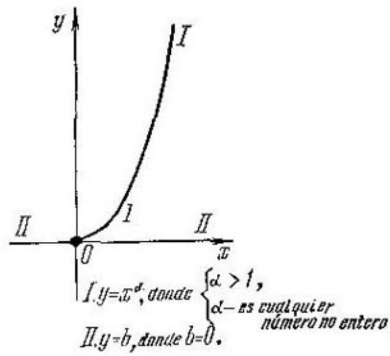


Fig. 161

una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$ ella toma un valor superior a b, y para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) está representado por el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8), por el intervalo $[0, x_0)$, donde $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (fig. 162).

Así pues, si $\alpha > 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) es

1. el conjunto $(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty)$, para cada b positivo;
2. el conjunto $(0, +\infty)$, para $b = 0$;
3. el conjunto $[0, +\infty)$, para cada b negativo;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8) es

1. el conjunto $[0, b^{\frac{1}{\alpha}})$, para cada b positivo;
2. un conjunto vacío, para cada b no positivo.

II. Sea α un número no entero negativo.

El campo de existencia de la función $y = x^\alpha$ es el conjunto de todos los números positivos y, por eso, el CVA de las desigualdades (7) y (8) está representado por el conjunto $X = (0, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = x^\alpha$ en todo el conjunto X lo representa el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si b es un número no positivo, entonces, al tomar en consideración que en el conjunto X la función $y = x^\alpha$ es positiva, llegamos

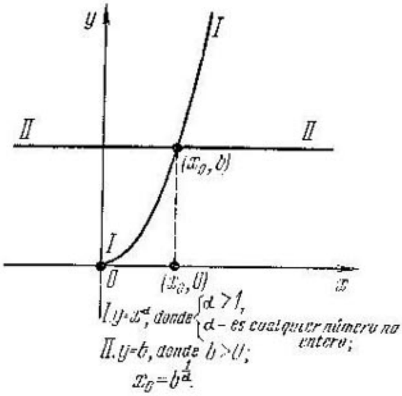


Fig. 162

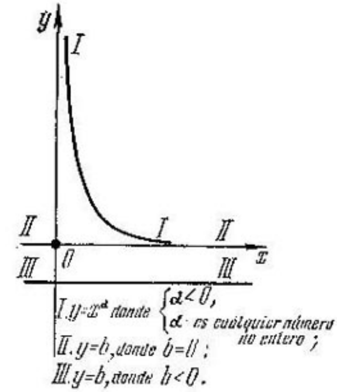


Fig. 163

a que X es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7), mientras que la (8) no tiene soluciones (fig. 163).

Sea b un número positivo. En el conjunto X la función $y = x^\alpha$ es decreciente, por lo cual cada valor numérico de Y la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$ toma un valor mayor que b, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$, toma un valor menor que b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) será el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8), el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (fig. 164).

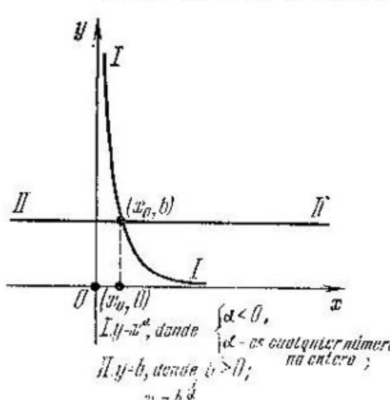


Fig. 164

Así pues, si $\alpha < 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) es

1. el conjunto $(0, b^{\frac{1}{\alpha}})$, para cada b positivo;

2. el conjunto $(0, +\infty)$, para cada b no positivo; y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8) es

1. el conjunto $(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty)$, para cada b positivo;
2. un conjunto vacío, para cada b no positivo.

En la tabla 20 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (7) y (8).

Desigualdades exponenciales. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$a^x > b, \tag{9}$$

$$a^x < b \tag{10}$$

suelen llamarse *desigualdades potenciales elementales*. El campo de existencia de la función $y = a^x$ es el conjunto de todos los números

Tabla 20

	$b > 0$	$b=0$	$b < 0$
$x^\alpha > b\ (\alpha > 0)$	$(b^{\frac{1}{\alpha}};\ \infty)$	$(0;\ \infty)$	$[0;\ \infty)$
$x^\alpha < b\ (\alpha > 0)$	$[0;\ b^{\frac{1}{\alpha}})$	no hay soluciones	no hay soluciones
$x^\alpha > b\ (\alpha < 0)$	$(0;\ b^{\frac{1}{\alpha}})$	$(0;\ \infty)$	$(0;\ \infty)$
$x^\alpha < b\ (\alpha < 0)$	$(b^{\frac{1}{\alpha}};\ \infty)$	no hay soluciones	no hay soluciones

reales, por lo cual el CVA de las desigualdades (9) y (10) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = a^x$ en todo el conjunto X es el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si b es un número no positivo, entonces, tomando en consideración que en el conjunto X la función $y = a^x$ es positiva, concluimos que X es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9), mientras que la desigualdad (10) no tiene soluciones.

Si b es un número positivo, analicemos dos casos:

1. Sea $a > 1$. En toda la recta numérica, es decir, en el conjunto X la función $y = a^x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico de Y ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x > x_0$ toma un valor superior a b, y para cada $x < x_0$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) será el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10), el rayo $(-\infty, x_0)$, donde $x_0 = \log_a b$ (fig. 165).

2. Sea $0 < a < 1$. En el conjunto X, es decir, en toda la recta numérica la función $y = a^x$ decrece. Por eso, razonando semejantemente, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el rayo $(-\infty, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = \log_a b$ (fig. 166).

Así pues, si $a > 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es

1. el conjunto $(\log_a b, +\infty)$, para cada b positivo;
2. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada b no positivo; el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es
1. el conjunto $(-\infty, \log_a b)$, para cada b positivo;
2. un conjunto vacío, para cada b no positivo.

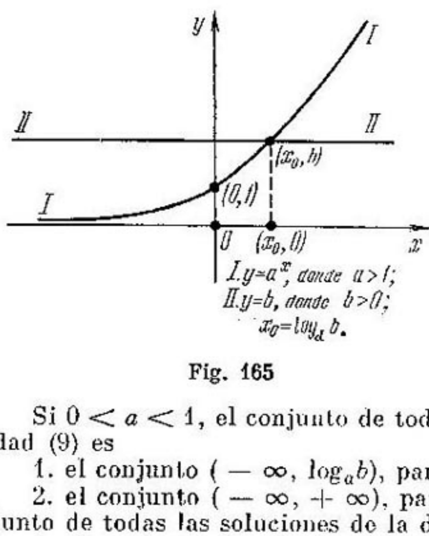


Fig. 165

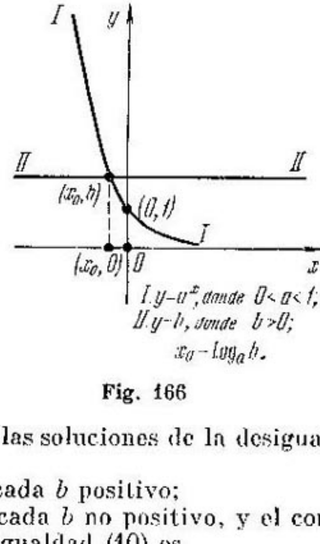


Fig. 166

Si $0 < a < 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es

1. el conjunto $(-\infty, \log_a b)$, para cada b positivo;
2. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada b no positivo, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es
1. el conjunto $(\log_a b, +\infty)$, para cada b positivo;
2. un conjunto vacío, para cada b no positivo.

En la tabla 21 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (9) y (10).

Tabla 21

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x > b\ (a > 1)$	$(\log_a b;\ \infty)$	$(-\infty;\ \infty)$	$(-\infty;\ \infty)$
$a^x < b\ (a > 1)$	$(-\infty;\ \log_a b)$	no hay soluciones	no hay soluciones
$a^x > b\ (0 < a < 1)$	$(-\infty;\ \log_a b)$	$(-\infty;\ \infty)$	$(-\infty;\ \infty)$
$a^x < b\ (0 < a < 1)$	$(\log_a b;\ \infty)$	no hay soluciones	no hay soluciones

Desigualdades logarítmicas. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$\log_a x > b, \tag{11}$$

$$\log_a x < b \tag{12}$$

suelen llamarse *desigualades logarítmicas elementales.*

El campo de existencia de la función $y = \log_a x$ se representa por el conjunto de todos los números positivos, por lo cual el CVA de las desigualdades (11) y (12) será un conjunto $X = (0, +\infty)$.

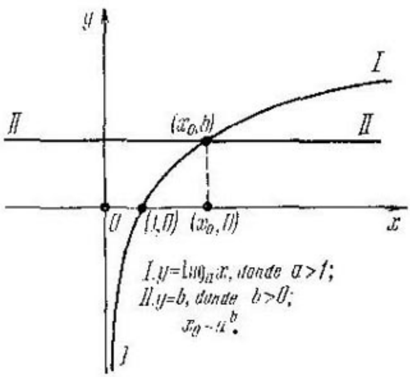


Fig. 167

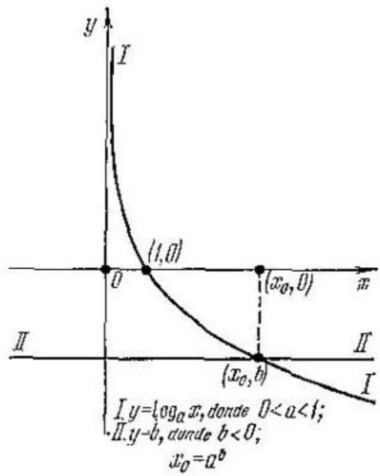


Fig. 168

El campo de valores de la función $y = \log_a x$ en todo el conjunto X será todo el eje numérico $Y = (-\infty, +\infty)$.

Como las propiedades de la función $y = \log_a x$, que se emplean al resolver las desigualdades (11) y (12), son diferentes para $a > 1$ y para $0 < a < 1$, entonces examinemos dos casos:

1. Sea $a > 1$. En el conjunto X la función $y = \log_a x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$ la función toma un valor mayor que b, y para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$, ella toma un valor menor que b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) es el rayo $(x_0, +\infty)$, y el de todas las soluciones de la desigualdad (12), el intervalo $(0, x_0)$, donde $x_0 = a^b$ (fig. 167).

2. Sea $0 < a < 1$. En el conjunto X la función $y = \log_a x$ decrece. Por eso, razonando de manera semejante, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) es el intervalo $(0, x_0)$ y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = a^b$ (fig. 168).

Así pues, si $a > 1$, entonces para cada b el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) se representa por el conjunto $(a^b, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), es el conjunto $(0, a^b)$; si $0 < a < 1$, entonces para cada b el conjunto de todas las soluciones de la desigualad (11) será el conjunto $(0, a^b)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), es el conjunto $(a^b, +\infty)$.

Tabla 22

	$-\infty < b < \infty$
$\log_a x > b\ (a > 1)$	$(a^b; \infty)$
$\log_a x < b\ (a > 1)$	$(0; a^b)$
$\log_a x > b\ (0 < a < 1)$	$(0; a^b)$
$\log_a x < b\ (0 < a < 1)$	$(a^b; \infty)$

En la tabla 22 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (11) y (12).

Desigualdades trigonométricas. Las desigualdades

$$\cos x > b,\ \operatorname{sen} x > b,\ \operatorname{tg} x > b,\ \operatorname{ctg} x > b,$$

$$\cos x < b,\ \operatorname{sen} x < b,\ \operatorname{tg} x < b,\ \operatorname{ctg} x < b$$

suelen llamarse *desigualdades trigonométricas elementales.*

He aquí algunas observaciones de carácter general.

Sea $y = f(x)$ una función trigonométrica elemental fundamental de período principal igual a T, y sea dada la desigualdad

$$f(x) > b \quad (\text{o bien } f(x) < b). \tag{13}$$

Elijamos un intervalo de longitud igual a T y hallemos en dicho intervalo la solución de la desigualdad (13). Supongamos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) en el intervalo citado está representado por el intervalo $X_0 = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha < \beta$ y $\beta - \alpha \leqslant T$. Entonces, haciendo uso de la periodicidad de la función $y = f(x)$, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) es la unión de una infinidad de todos los intervalos $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, donde k es un número entero cualquiera. Llamaremos esta unión infinita serie de intervalos y la escribiremos posteriormente en la forma: $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, $k \in Z$. De este modo, en adelante diremos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) se representa por la serie de intervalos $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, $k \in Z$.

Notemos, además, que el intervalo de longitud igual al período principal T puede ser cualquiera, mas se elige, corrientemente, de modo tal, que satisfaga dos condiciones: ha de contener un trozo en el que para la función dada $y = f(x)$ está definida una función trigonométrica inversa y, además, que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad dada en dicho trozo represente en sí un intervalo.

Sea dada la desigualdad trigonométrica elemental

$$\cos x > b. \tag{14}$$

La función $y = \cos x$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de la desigualdad (14) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la funcion $y = \cos x$ en el conjunto X es el segmento $Y = [-1; 1]$.

Por eso, cuando $b < -1$, la desigualdad (14) se verifica para cualquier valor de x, y cuando $b \geqslant 1$, no se verifica, cualquiera que

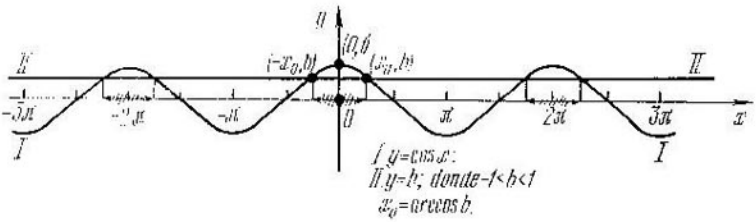


Fig. 169

sea el valor de x. Quiere decir, para $b < -1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será toda la recta numérica, es decir, el conjunto $(-\infty, +\infty)$, y para $b \geqslant 1$ la desigualdad (14) no tiene soluciones.

Si $b = -1$, entonces, evidentemente, la desigualdad (14) se verifica para todo valor de x, a excepción de aquellos, donde $\cos x = -1$. Quiere decir, cuando $b = -1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es toda la recta numérica, a excepción de los puntos $x_k = \pi + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera. Este conjunto puede ser escrito en forma de una serie de intervalos: $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Sea $b \in (-1; 1)$; con el fin de resolver la desigualdad (14) es preciso elegir en este caso un trozo de longitud igual al período principal de la función $y = \cos x$, es decir, de longitud 2π. A título de trozo de longitud 2π podemos tomar el trozo $[0, 2\pi)$, o bien el trozo $(-\pi, \pi]$. Estos trozos de longitud igual al período principal de la función $y = \cos x$ contienen enteramente el segmento $[0, \pi]$, en el cual está definida la función inversa $y = \arccos x$.

Construyamos las gráficas de las funciones $y = \cos x$ e $y = b$ (fig. 169). El dibujo muestra que resulta más conveniente elegir el trozo $(-\pi, \pi)$ que el $[0, 2\pi)$, puesto que en el primer caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) representa un intervalo, y en el segundo caso, la unión de dos intervalos. El dibujo sugiere, además, que el trozo $(-\pi, \pi]$ ha de ser dividido en dos trozos: $M_1 = [0, \pi]$ y $M_2 = (-\pi, 0)$, después de lo cual se hace uso de la paridad de esta función.

En el segmento $M_1 = [0, \pi]$ el campo de valores de la función $y = \cos x$ es $Y = [-1; 1]$ y la función decrece, por lo cual cada valor numérico de Y ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in M_1$ la función toma el valor b, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in M_1$, ella toma un valor superior a b, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in M_1$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en M_1 el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es el trozo $[0, x_0)$. Como la función $y = \cos x$ es par en el trozo $(-\pi, \pi)$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) en $M_2 = (-\pi, 0)$ será el intervalo $(-x_0, 0)$.

Al reunir las soluciones halladas en M_1 y M_2, concluimos que en el trozo $(-\pi, \pi)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será el intervalo $(-x_0, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2 cap. VII, $x_0 = \arccos b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y = \cos x$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es la serie de intervalos $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (-\infty, -1)$;
2. la serie de intervalos $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, para $b = -1$;
3. la serie de intervalos $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$, para dada $b \in (-1; 1)$;
4. un conjunto vacío, para cada $b \in [1, +\infty)$.

Sea dada la desigualdad

$$\cos x < b. \tag{15}$$

El CVA de la desigualdad (15) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = \cos x$ en el conjunto X es el segmento $Y = [-1; 1]$.

Por eso, cuando $b > 1$, la desigualdad (15) se verifica para cualquier valor de x, y, cuando $b \leqslant -1$, no se verifica, cualquiera que sea el valor de x. Quiere decir, cuando $b > 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será $(-\infty, +\infty)$ y, cuando $b \leqslant -1$, la desigualdad (15) no tiene soluciones.

Si $b = 1$, entonces, evidentemente, la desigualdad (15) se verifica para cualquier valor de x, a excepción de aquellos, para los cuales $\cos x = 1$. Quiere decir, para $b = 1$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es toda la recta numérica, salvo los puntos $x_k = 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera. Este conjunto puede escribirse en forma de una serie de intervalos: $X_k = (2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Sea $b \in (-1; 1)$. Construyamos las gráficas de las funciones $y = \cos x$ e $y = b$ (fig. 170). El dibujo muestra que en calidad de trozo de longitud 2π aquí conviene más elegir el trozo $[0, 2\pi)$, puesto que en tal caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad

(15) representa en sí un intervalo. El dibujo sugiere, además, que el trozo $[0, 2\pi)$ ha de dividirse en dos: $M_1 = [0, \pi]$ y $M_2 = (\pi, 2\pi)$, después de lo cual es preciso aprovechar el decrecimiento de la función $y = \cos x$ en el trozo $[0, \pi]$, y luego, la simetría de la función $y = \cos x$ respecto de la recta vertical que pasa por el punto $(\pi, 0)$.

Razonando igual que en el caso anterior, conluimos que en M_1 el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será el trozo $(x_0, \pi]$. Tomando en consideración que la función $y = \cos x$

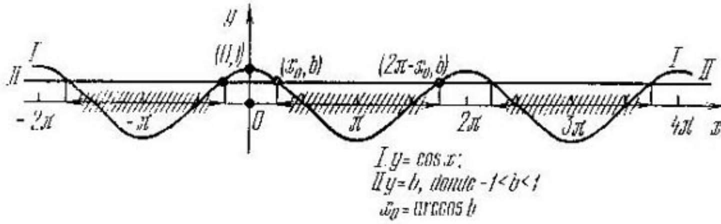


Fig. 170

es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el punto $(\pi, 0)$, concluimos que en M_2 el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es el intervalo $(\pi, 2\pi - x_0)$.

Al reunir las soluciones halladas en M_1 y M_2, obtenemos que en el intervalo $[0, 2\pi)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es el intervalo $(x_0, 2\pi - x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \arccos b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y = \cos x$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es una serie de intervalos: $X_k = (\arccos b + 2\pi k, 2\pi - \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) se representa por:

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, -1]$;
2. una serie de intervalos $X_k = (\arccos b + 2\pi k, 2\pi - \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$, para cada $b \in (-1; 1)$;
3. una serie de intervalos $X_k = (2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, para $b = 1$;
4. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (1, +\infty)$.

En la tabla 23 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (14) y (15).

Sean dadas las desigualdades trigonométricas elementales

$$\operatorname{sen} x > b, \tag{16}$$

$$\operatorname{sen} x < b. \tag{17}$$

Razonando análogamente, concluimos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es:

	$b<-1$	$b=-1$	$-1<b<1$	$b=1$	$b>1$
$\cos x>b$	$(-\infty;\ \infty)$	$(-\pi+2\pi k;$ $\pi+2\pi k)$ $k\in Z$	$(-\arccos$ $b+2\pi k;$ $\arccos\ b+2\pi k)$ $k\in Z$	no hay solu- ciones	no hay soluciones
$\cos x<b$	no hay soluciones	no hay solu- ciones	$(\arccos\ b+$ $+2\pi k;\ 2\pi-$ $-\arccos\ b+$ $+2\pi k),$ $k\in Z$	$(2\pi k;$ $2\pi+2\pi k)$ $k\in Z$	$(-\infty;\ \infty)$

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b\in(-\infty, -1)$;
2. la serie de intervalos

$$X_k=\left(-\frac{\pi}{2}-+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in Z,$$

para $b=-1$;

3. la serie de intervalos $X_k=(\operatorname{arcsen} b+2\pi k,\ \pi-\operatorname{arcsen} b+ 2\pi k)$, $k\in Z$, para cada $b\in(-1;\ 1)$ (fig. 171);

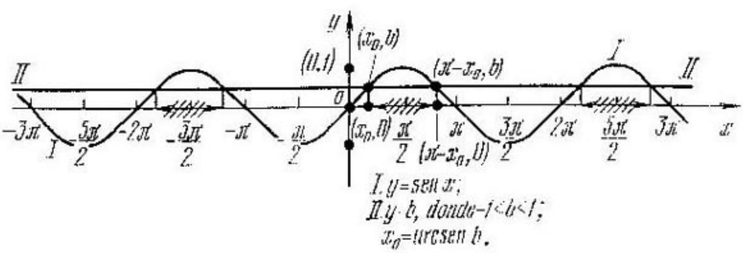


Fig. 171

4. un conjunto vacío, para $b\in[1, +\infty)$; y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (17) está representado por:

1. un conjunto vacío, para $b\in(-\infty, -1]$;
2. la serie de desigualdades $X_k=(-\pi-\operatorname{arcsen} b+2\pi k,$ $\operatorname{arcsen} b+2\pi k)$, $k\in Z$, para cada $b\in(-1;\ 1)$ (fig. 172);
3. la serie de intervalos $X_k=\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$, para $b=1$:
4. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b\in(1, +\infty)$.

En la tabla 24 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (16) y (17).

Sean dadas las desigudades trigonométricas elementales

$$\operatorname{tg} x>b, \tag{18}$$

$$\operatorname{tg} x<b. \tag{19}$$

	$b<-1$	$b=-1$	$-1<b<1$	$b=1$	$b<1$
$\operatorname{sen} x>b$	$(-\infty;\ \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ $k\in Z$	$(\arcsen b+2\pi k;\ \pi-\arcsen b+2\pi k)$ $k\in Z$	no hay soluciones	no hay soluciones
$\operatorname{sen} x<b$	no hay soluciones	no hay soluciones	$(-\pi-\arcsen b+2\pi k;\ \arcsen b+2\pi k)$ $k\in Z$	$\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ $k\in Z$	$(-\infty;\infty)$

El campo de existencia de la función $y = \operatorname{tg} x$ es toda la recta númerica, salvo los puntos $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera. Por eso el CVA de las desigualdades (18) y (19) es

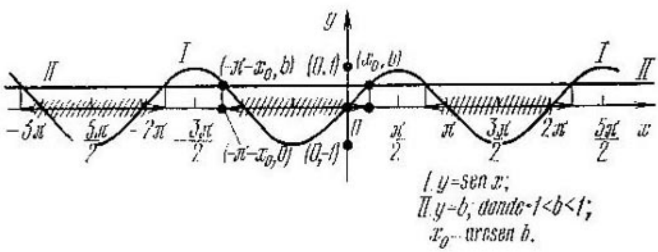


Fig. 172

un conjunto X que se compone de todos los números reales, a excepción de los números $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde k es un número entero cualquiera. El campo de valores de la función $y = \operatorname{tg} x$ en el conjunto X es el conjunto $Y = (-\infty, \infty)$.

Construyamos las gráficas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = b$ (fig. 173). El dibujo muestra que al principio se debe analizar la resolución de las desigualdades (18) y (19) en el trozo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de longitud igual al período principal de la función $y = \operatorname{tg} x$. El dibujo sugiere, además, que en dicho trozo es menester aprovechar el crecimiento de la función $y = \operatorname{tg} x$.

En el trozo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $y = \operatorname{tg} x$ tiene el campo de valores $Y = (-\infty, +\infty)$ y es creciente, por lo cual cada valor numérico de Y la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x=x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ ella toma el valor b, entonces para cada $x>x_0$ tal, que $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ la función toma un valor superior a b, y para cada $x<x_0$ tal, que $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, ella toma un

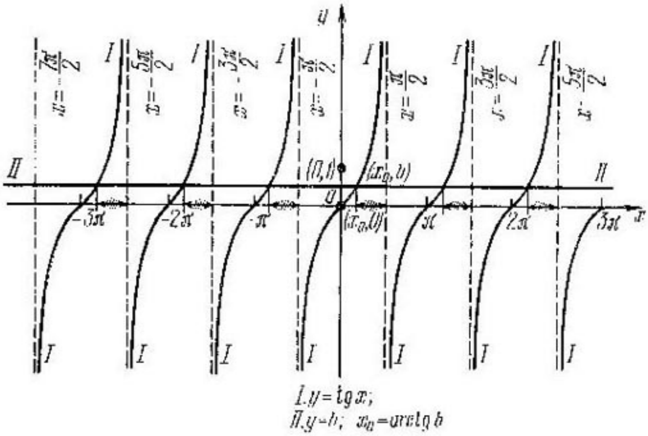


Fig. 173

valor inferior a b. Por consiguiente, en $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) (véase la fig. 173) es el intervalo $\left(x_0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) (fig. 174), es el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$, donde, de acuerdo con lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0=\operatorname{arctg} b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y=\operatorname{tg} x$, obtenemos que para cualquier b el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) es una serie de intervalos: $X_k=\left(\operatorname{arctg} b+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) es la serie de intervalos $X_k=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} b+\pi k\right)$, $k\in Z$.

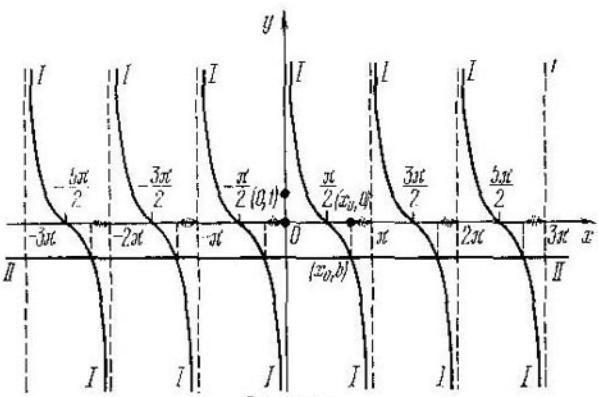
En la tabla 25 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (18) y (19).

Sean dadas las desigualdades trigonométricas elementales

$$\operatorname{ctg} x>b, \tag{20}$$
$$\operatorname{ctg} x<b. \tag{21}$$

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{tg} x > b$	$\left(\operatorname{arctg} b + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$
$\operatorname{tg} x < b$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} b + \pi k\right)$, $k \in Z$

Razonando análogamente, llegamos a que para cualquier b, el conjunto de todas las soluciones de las desigualdades (20) (fig.



I. $y = \operatorname{ctg} x$;
II. $y = b$; $x_0 = \operatorname{arcctg} b$.

Fig. 174

175) es la serie de intervalos $X_k = (\pi k, \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$ y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (21) (fig. 176) es la serie de intervalos $X_k = (\operatorname{arcctg} x + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

En la tabla 26 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (20) y (21).

Tabla 26

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{ctg} x > b$	$(\pi k; \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$
$\operatorname{ctg} x < b$	$(\operatorname{arcctg} b + \pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$

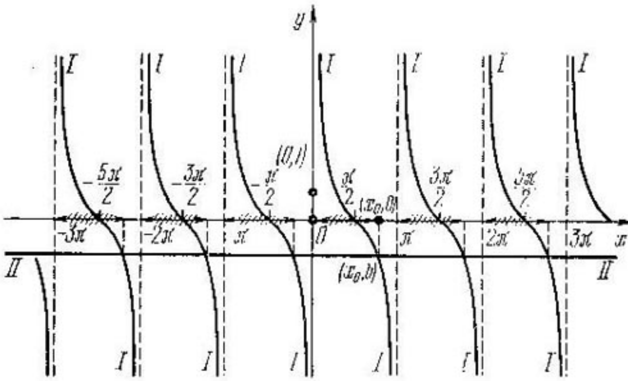
Analicemos además algunas desigualdades elementales que contienen funciones trigonométricas fundamentales inversas.

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\arccos x > b \tag{22}$$

$$\arccos x < b. \tag{23}$$

El campo de existencia de la función $y = \arccos x$ es el segmento $[-1, 1]$. Quiere decir, el CVA de las desigualdades (22) y (23) es



$I.\ y=\operatorname{ctg} x;$
$II.\ y=b;\quad x_0=\operatorname{arcctg} b.$

Fig. 175

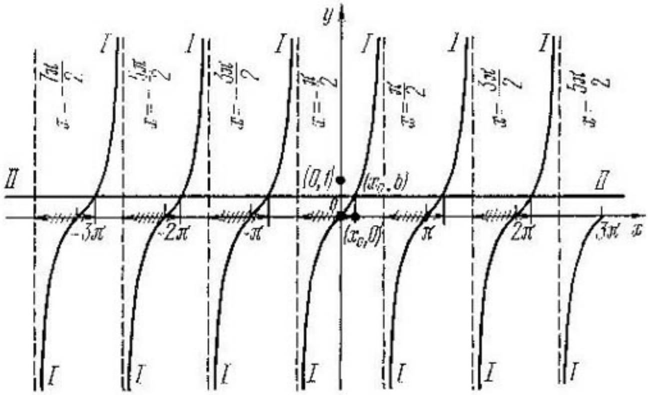
el conjunto $X = [-1; 1]$. El campo de valores de la función $y = \arccos x$ en todo el conjunto X es el segmento $Y = [0, \pi]$.

Por eso, cuando b es negativo, la desigualdad (22) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, mientras que la desigualdad (23) no se verifica, cualquiera que sea el valor de $x \in X$; si, en cambio, $b > \pi$, entonces la desigualdad (22) no se verifica, para ningún valor de $x \in X$, y la desigualdad (23) se verifica para cualquier valor de $x \in X$.

Por lo tanto, cuando b es negativo, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $[-1; 1]$, mientras que la desigualdad (23) no tiene soluciones; cuando $b > \pi$, la desigualdad (22) no tiene soluciones, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23) es el conjunto $[-1; 1]$.

Cuando $b = 0$, la desigualdad (22) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, salvo para $x = 1$, y la desigualdad (23) no se verifica para ningún valor de $x \in X$. Quiere decir, cuando $b = 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $[-1; 1)$, mientras que la desigualdad (23) no tiene soluciones.

Si $b = \pi$, la desigualdad (22) no se verifica cualquiera que sea el valor de $x \in X$, y la desigualdad (23) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, salvo el valor de $x = -1$. Quiere decir, para $b = \pi$



I. $y = \operatorname{tg} x$;
II. $y = b$; $x = \operatorname{arctg} b$.
Fig. 176

la desigualdad (22) no tiene soluciones, mientras que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23) es el conjunto $(-1; 1]$.

Sea $b \in (0, \pi)$. La función $y = \arccos x$ en el conjunto X es decreciente, por lo cual cada valor de Y ella lo toma una sola vez. Quiere

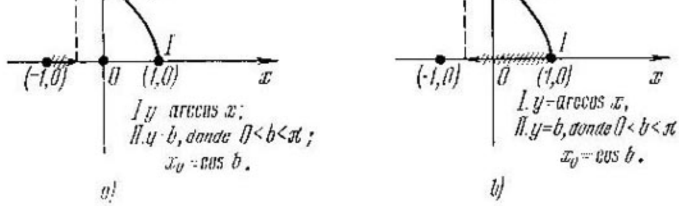


Fig. 177

decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$ ella toma un valor superior a b, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$, ella toma un valor inferior a b. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) (fig. 177, a) es en este caso el intervalo $[-1, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23) (fig. 177, b), el intervalo $(x_0, 1]$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \cos b$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es:

1. el conjunto $[-1; 1]$, para cada $b \in (-\infty, 0)$;
2. el conjunto $[-1; 1)$, para $b = 0$;
3. el conjunto $[-1, \cos b)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
4. un conjunto vacío, para cada $b \in [\pi, +\infty)$;

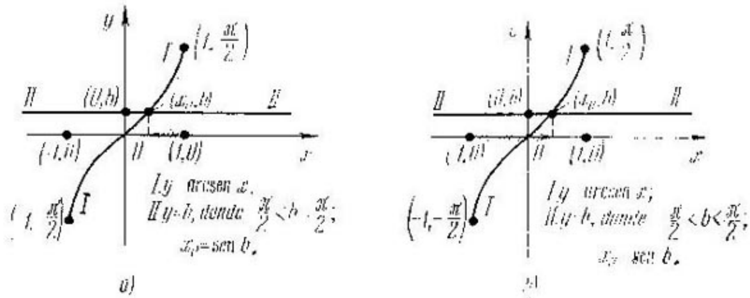


Fig. 178

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23), es:

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(\cos b, 1]$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. el conjunto $(-1; 1]$, para $b = \pi$;
4. el conjunto $(-1; 1]$, para cada $b \in (\pi, +\infty)$.

En la tabla 27 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (22) y (23).

Tabla 27

	$b < 0$	$b = 0$	$0 < b < \pi$	$b = \pi$	$b > \pi$
$\arccos x > b$	$[-1; 1]$	$[-1; 1)$	$[-1; \cos b)$	no hay soluciones	no hay soluciones
$\arccos x < b$	no hay soluciones	no hay soluciones	$(\cos b; 1)$	$(-1; 1]$	$[-1; 1]$

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arcsen} x > b, \tag{24}$$

$$\operatorname{arcsen} x < b. \tag{25}$$

Razonando análogamente, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) (fig. 178, a), es:

1. el conjunto $[-1: 1]$, para cada $b \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$;

2. el conjunto $(-1, 1]$, para $b = -\frac{\pi}{2}$;

3. el conjunto $(\operatorname{sen} b, 1]$, para cada $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

4. un conjunto vacío, para cada $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (25) (fig. 178, b), es:

1. un conjunto vacío, para cada $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$;

2. el conjunto $[-1, \operatorname{sen} b)$, para $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3. el conjunto $[-1; 1)$, para $b = \frac{\pi}{2}$;

4. el conjunto $[-1; 1]$, para $b \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

En la tabla 28 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (24) y (25).

Tabla 28

	$b < -\frac{\pi}{2}$	$b = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b > \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arcsen} x > b$	$[-1; 1]$	$(-1; 1]$	$(\operatorname{sen} b; 1]$	no hay soluciones	no hay soluciones
$\operatorname{arcsen} x < b$	no hay soluciones	no hay soluciones	$[-1; \operatorname{sen} b)$	$[-1; 1)$	$[-1; 1]$

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arctg} x > b, \tag{26}$$

$$\operatorname{arctg} x < b. \tag{27}$$

El campo de existencia de la función $y = \operatorname{arctg} x$ es toda la recta numérica. Quiere decir, el CVA de las desigualdades (26) y (27) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = \operatorname{arctg} x$ en el conjunto X es el intervalo $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por eso, cuando $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$, la desigualdad (26) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, y la desigualdad (27) no es válida para ningún valor de $x \in X$; si, en cambio, $b \geqslant \frac{\pi}{2}$, entonces la desigualdad (26) no se verifica para ningún valor de $x \in X$, mientras que la desigualdad (27) se verifica para cualquier valor de $x \in X$.

Esto significa que cuando $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) es toda la recta numérica, y la desigualdad (27) no tiene soluciones; cuando $b \geqslant \frac{\pi}{2}$, la desigualdad (26) no tiene soluciones, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es toda la recta numérica.

Sea $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. La función $y = \operatorname{arcctg} x$ es creciente en toda la recta numérica, por lo cual cada valor de Y ella lo toma una

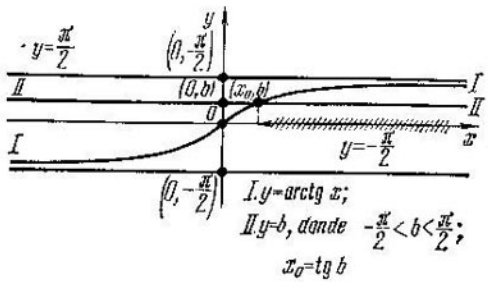


Fig. 179

sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor b, entonces para cada $x > x_0$ ella toma un valor superior a b, y para cada $x < x_0$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en este caso el

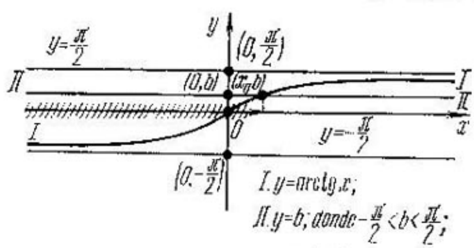


Fig. 180

conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) (fig. 179) es el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) (fig. 180) es el rayo $(-\infty, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \operatorname{tg} b$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$ para cada $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right)$;
2. el conjunto $(\operatorname{tg} b, +\infty)$, para cada $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
3. un conjunto vacío, para cada $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27), por

1. un conjunto vacío, para cada $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$;
2. el conjunto $(-\infty, \operatorname{tg} b)$, para cada $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
3. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

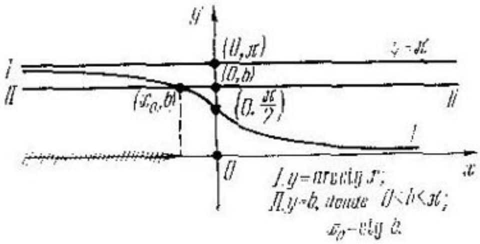


Fig. 181

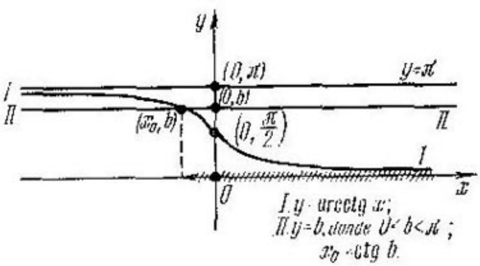


Fig. 182

En la tabla 29 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (26) y (27).

Tabla 29

	$b \leqslant -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b \geqslant \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x > b$	$(-\infty; \infty)$	$(\operatorname{tg} b; \infty)$	no hay soluciones
$\operatorname{arctg} x < b$	no hay soluciones	$(-\infty; \operatorname{tg} b)$	$(-\infty, +\infty)$

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arcctg} x > b, \tag{28}$$

$$\operatorname{arcctg} x < b. \tag{29}$$

Razonando análogamente, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (28) (fig. 181) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(-\infty, \operatorname{ctg} b)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. un conjunto vacío, para cada $b \in [\pi, +\infty)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (29), es (fig. 182)

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(\operatorname{ctg} b, +\infty)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in [\pi, +\infty)$.

En la tabla 30 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (28) y (29).

Tabla 30

	$b \leqslant 0$	$0 < b < \pi$	$b \geqslant \pi$
arcctg $x > b$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \operatorname{ctg} b)$	no hay soluciones
arcctg $x < b$	no hay soluciones	$(\operatorname{ctg} b; \infty)$	$(-\infty; \infty)$

§ 3. Transformaciones de las desigualdades

En los párrafos tercero y cuarto del capítulo VII se han examinado las transformaciones de las ecuaciones equivalentes y no equivalentes, respectivamente. Para las transformaciones no equivalentes se indicaron dos procedimientos de resolución de las ecuaciones. El primer procedimiento consistía en realizar pasos equivalentes en un conjunto que pertenece al campo de valores admisibles sin coincidir obligatoriamente con el último. El segundo procedimiento presupone los pasos a una ecuación, que es una consecuencia de la anterior, y la comprobación obligatoria de las soluciones obtenidas.

Al resolver las desigualdades, el segundo procedimiento es, en realidad, imposible, puesto que el conjunto de todas las soluciones de una desigualdad es, las más de las veces, infinito y por esta razón la comprobación de las soluciones resulta prácticamente irrealizable. Por esta razón, al resolver las desigualdades, se deben efectuar solamente pasos equivalentes y, generalmente, pasos equivalentes en el conjunto. Además, es preciso fijar cada vez el conjunto en el que se realiza el paso equivalente.

Aduzcamos más abajo algunos ejemplos de transformaciones equivalentes y no equivalentes de las desigualdades.

Transformaciones relacionadas con la aplicación de identidades. *Sea dada la desigualdad*

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

y supongamos que para todo x real se verifica la igualdad idéntica $\varphi(x) = g(x)$, entonces la desigualdad (1) es equivalente a la igualdad

$$f(x) > \varphi(x). \qquad (2)$$

Esta afirmación permite emplear para resolver desigualdades diferentes fórmulas que son válidas para todos los x reales. Como ejemplo de dichas igualdades idénticas sirven las fórmulas de multiplicación reducida de polinomios, la identidad trigonométrica fundamental y toda una serie de otras fórmulas. En el cap. III ya hemos resuelto algunas desigualdades algebraicas con ayuda de las fórmulas de multiplicación reducida.

Demos un ejemplo más de transformación equivalente de las desigualdades aplicando igualdades idénticas.

Sea dada la desigualdad

$$\operatorname{sen}^4 x > \cos^4 x. \tag{3}$$

Aplicando la afirmación 1 del § 1, obtenemos la desigualdad

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x < 0, \tag{4}$$

que es equivalente a la desigualdad (3). Haciendo uso de la fórmula para la diferencia de cuadrados, la identidad trigonométrica fundamental y la fórmula para el coseno de un ángulo de arco doble, se puede escribir la siguiente cadena de igualdades idénticas, que son válidas para cualquier x real:

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos 2x.$$

Quiere decir, la desigualdad (4) es equivalente a la desigualdad

$$\cos 2x < 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Como la última desigualdad es equivalente a la de partida, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3) e la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Transformaciones relacionadas con las superposiciones de las funciones. Supongamos que la función $y = f(x)$ represesnta una función compuesta $y = P[g(x)]$ que es la superposición de dos funciones: $y = P[u]$, donde $P[u]$ es un trinomio de segundo grado (es decir, $P[u] = au^2 + bu + c$), y $u = g(x)$, que es una función elemental fundamental. En tal caso la desigualdad $f(x) > 0$ se escribe en la forma

$$a[g(x)]^2 + b[g(x)] + c > 0 \tag{5}$$

y se denomina *desigualdad cuadrática con relación a* $g(x)$.

La desigualdad (5) se resuelve del modo siguiente.

Al principio se analiza la desigualdad cuadrática

$$at^2 + bt + c > 0, \tag{6}$$

y se determina su discriminante $D = b^2 - 4ac$. Según sean el discriminante D y el coeficiente a, resultan posibles los siguientes cuatro casos.

1. Si $a < 0$ y $D \leqslant 0$, la desigualdad (6) no tiene soluciones. Por consiguiente, la desigualdad (5) tampoco las tiene.

2. Si $a < 0$ y $D > 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) es el intervalo (t_1, t_2), donde t_1 y t_2 son raíces del trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, siendo $t_1 < t_2$.

En este caso la desigualdad (5) es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} g(x) < t_2, \\ g(x) > t_1. \end{cases}$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones del sistema en este caso será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5).

3. Si $a > 0$ y $D \geqslant 0$, entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) está representado por la unión de los rayos $(-\infty, t_1)$ y $(t_2, +\infty)$, donde t_1 y t_2 son raíces del trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, siendo $t_1 \leqslant t_2$ (si $D = 0$, se tiene $t_1 = t_2$).

En este caso la desigualdad (5) es equivalente al conjunto de desigualdades

$$g\,(x < t_1, \quad g\,(x) > t_2.$$

Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de dicho conjunto será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5).

4. Si $a > 0$ y $D < 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) es toda la recta numérica.

En este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5) es el CVA de la desigualdad (5), es decir, es el campo de existencia de la función $y = g\,(x)$.

He aquí algunos **ejemplos**.

Sea dada la desigualdad

$$4\cos^2 2x + 8\cos 2x - 5 < 0. \tag{7}$$

Esta desigualdad es una desigualdad cuadrática con relación a $\cos 2x$. Resolviendo la desigualdad

$$4t^2 + 8t - 5 < 0,$$

obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Por consiguiente, la desigualdad (7) es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \cos 2x > -\dfrac{5}{2}, \\ \cos 2x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad este sistema es toda la recta numérica.

El conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (7) es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Sea dada la desigualdad

$$4^x - 3\cdot 2^x + 2 > 0. \tag{8}$$

Esta es una desigualdad cuadrática respecto de 2^x. Al resolver la desigualdad

$$t^2 - 3t + 2 > 0,$$

se obtiene que el conjunto de todas sus soluciones es la unión de dos rayos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$. Por consiguiente, la desigualdad (8) es equivalente al conjunto de desigualdades

$$2^x < 1, \quad 2^x > 2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de dicho conjunto es el intervalo $(-\infty, 0)$.

El conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad, es el intervalo $(1, +\infty)$.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (8) será el conjunto $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Observemos que la afirmación, aducida anteriormente, sobre la resolución de una desigualdad cuadrática con relación a $g(x)$ sigue siendo justa también en el caso en que la función $u = g(x)$ no es elemental fundamental.

Transformaciones relacionadas con las fórmulas logarítmicas y trigonométricas. Por cuanto las fórmulas, aducidas en el § 4, cap. VII, pueden aplicarse al resolver las desigualdades solamente en el conjunto de variación de la incógnita, donde tienen sentido simultáneamente los miembros primero y segundo de la fórmula que se aplica, las desigualdades, para cuya resolución se emplea tal o cual fórmula, se resuelven, corrientemente, siguiendo el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*
2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* M_1 y M_2 (M_1 representa toda la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se aplica, M_2 es toda aquella parte del CVA que queda después de separar el conjunto M_1).
3. *Se resuelve la desigualdad en* M_1 (teniendo presente que la transformación de la desigualdad con ayuda de esta fórmula es equivalente a la transformación en el conjunto M_1).
4. *Se resuelve la desigualdad en* M_2.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, halladas en M_1 y M_2, y se obtiene, de este modo, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\log_2 (x^2) + \log_2 (x^4) > 3. \qquad (9)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1 = (0, +\infty)$ y $M_2 = (-\infty, 0)$ y resolvamos la desigualdad (9) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto M_1 se verifican las igualdades idénticas

$$\log_2 (x^2) = 2 \log_2 x, \quad \log_2 (x^4) = 4 \log_2 x.$$

Quiere decir, en M_1 la desigualdad (9) es equivalente a la desigualdad

$$\log_2 x > 1/2.$$

Resolviendo esta desigualdad elemental, obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto M_1, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) en M_1 será el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$.

En el conjunto M_2 se verifican las igualdades idénticas

$$\log_2 (x^2) = 2\log_2 (-x), \quad \log_2 (x^4) = 4\log_2 (-x).$$

Quiere decir, en M_2 la desigualdad (9) es equivalente a la desigualdad

$$\log_2 (-x) > 1/2.$$

Resolviendo esta desigualdad elemental, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto M_2, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) en M_2 será el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en M_1 y en M_2, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Transformaciones relacionadas con la elevación a potencia natural. Sea dada la desigualdad

$$f(x) > g(x). \qquad (10)$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$[f(x)]^n > [g(x)]^n \qquad (11)$$

(donde n es un número natural fijo y $n \geqslant 2$) se denomina *elevación de la desigualdad a la potencia natural n.*

En virtud de la afirmación 5 § 1, las desigualdades (10) y (11) son equivalentes solamente en el conjunto, donde las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son ambas simultáneamente no negativas.

Por eso, la elevación a potencia natural de las desigualdades se realiza, de ordinario, por el siguiente **esquema:**

1. *Se determina el CVA de la desigualdad a resolver.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* M_1 y M_2 (M_1 es toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la desigualdad son simultáneamente no negativos. M_2 es toda la parte del CVA que queda después de separar el conjunto M_1).

3. *Se resuelve la desigualdad en* M_1 (tomando en consideración que la elevación a la potencia n es una transformación equivalente en este conjunto).

4. *Se resuelve la desigualdad en el conjunto* M_2.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, determinadas en* M_1 *y* M_2, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$|x-4|>6+x. \tag{12}$$

El CVA de esta desigualdad es toda la recta numérica. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1=[-6,+\infty)$ y $M_2=(-\infty,-6)$ y resolvamos la desigualdad (12) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto M_1 ambos miembros de la desigualdad (12) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5, § 1, en dicho conjunto la desigualdad (12) será equivalente a la desigualdad

$$(x-4)^2>(6+x)^2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-\infty,-1)$. Como parte del intervalo citado en el conjunto M_1 está contenido solamente el intervalo $[-6, -1)$. Por eso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) en M_1 se representa por el intervalo $[-6; -1)$.

Es evidente que en el conjunto M_2 el primer miembro de la desigualdad (12) es positivo, y el segundo, negativo. Por eso, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) en M_2 es todo el conjunto M_2.

Al reunir los conjuntos de todas las soluciones determinados en M_1 y M_2, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) es el intervalo $(-\infty, -1)$.

La elevación a potencia natural se aplica con mayor frecuencia al resolver las siguientes desigualdades.

Sea m un número natural fijo y sean dadas las desigualdades

$$\sqrt[2m]{f(x)}>\varphi(x), \tag{13}$$

$$\sqrt[2m]{f(x)}<\varphi(x). \tag{14}$$

Las desigualdades del tipo (13) se resuelven, de ordinario, según el siguiente **esquema:**

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* M_1 *y* M_2 (M_1 es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es no negativa; M_2 es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es negativa).

3. *Se resuelve en* M_1 *la desigualdad* $f(x) > [\varphi(x)]^{2m}$, *la cual es equivalente en dicho conjunto, a la desigualdad* (13).

4. *Se fija que en* M_2 *el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (13) *coincide con el conjunto* M_2.

5. *Se reúnen el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* $f(x) > ([\varphi(x)]^{2m}$ *en* M_1 *y el conjunto* M_2, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (13).

Las desigualdades del tipo (14) se resuelven, de ordinario, según el siguiente **esquema**:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* M_1 y M_2 (M_1 es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es positiva. M_2 es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es no positiva).

3. *Se resuelve en el conjunto* M_1 *la desigualdad* $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$ *que es equivalente en este conjunto a la desigualdad* (14).

4. *Se fija que en el conjunto* M_1 *no hay soluciones de la desigualdad* (14).

5. *Se escribe el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$ *en* M_1; *este conjunto será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (14).

Mostremos ahora con unos ejemplos concretos cómo se resuelven las desigualdades según los esquemas citados.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x+2} > x. \tag{15}$$

El CVA de esta desigualdad es el intervalo $[-2, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos M_1 y M_2: $M_1 = [0, +\infty)$ y $M_2 = [-2; 0)$, y resolvamos la desigualdad (15) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto M_1 ambos miembros de la desigualdad (15) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5 § 1, en el conjunto que se considera la desigualdad (15) será equivalente a la desigualdad

$$x + 2 > x^2.$$

Al aplicar ahora la afirmación 1 § 1, vemos que en el conjunto M_1 la desigualdad (15) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-1; 2)$. En el conjunto M_1 está contenido, como parte del intervalo indicado, solamente el intervalo $[0; 2)$. Por eso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) en M_1 será el intervalo $[0; 2)$. Es evidente que en el conjunto M_2 el primer miembro de la desigualdad (15) es no negativo, y el segundo, negativo, por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) en M_2 es todo el conjunto M_2.

Reuniendo los conjuntos de todas las soluciones determinados en M_1 y M_2, concluimos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será el intervalo $[-2; 2)$.

Sea dada la desigualdad

$$x+1 > \sqrt{x+3}. \qquad (16)$$

El CVA de esta desigualdad es el intervalo $[-3, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1 = (-1, +\infty)$ y $M_2 = [-3; -1]$, y resolvamos la desigualdad (16) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto M_1 ambos miembros de la desigualdad (16) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5 § 1, la desigualdad (16) es equivalente en este conjunto a la desigualdad

$$(x+1)^2 > x+3.$$

Aplicando ahora la afirmación 1 § 1, concluimos que en el conjunto M_1 la desigualdad (16) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 + x - 2 > 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el conjunto $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Por eso, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) en M_1 es el intervalo $(1, +\infty)$.

Es evidente que en el conjunto M_2 el primer miembro de la desigualdad (16) es no positivo, y el segundo, no negativo, por consiguiente, en M_2 la desigualdad (16) no tiene soluciones.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es el intervalo $(1, +\infty)$.

Transformaciones relacionadas con la supresión de los denominadores. Sea dada la desigualdad

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x). \qquad (17)$$

Las desigualdades de este tipo se resuelven según el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos M_1 y M_2* (*M_1* es *toda la parte del CVA*, donde la función $y = \varphi(x)$ es positiva, M_2 es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es negativa).

3. *Se resuelve en el conjunto M_1 la desigualdad $f(x) > g(x)\varphi(x)$, que es equivalente en dicho conjunto a la desigualdad* (17) (véase § 1, afirmación 7a).

4. *Se resuelve en el conjunto M_2 la desigualdad $f(x) < g(x)\varphi(x)$ que es equivalente en dicho conjunto a la desigualdad* (17) (véase § 1, afirmación 7b).

5. *Se reúnen los conjuntos de todas las soluciones determinados en M_1 y en M_2, y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (17).

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\frac{2-(\log_3 x)^2}{\log_3 x} < 1 - \log_3 x. \tag{18}$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $(0; 1) \cup (1, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_2 = (0; 1)$ y $M_1 = (1; +\infty)$. En el conjunto M_1 la función $y = \log_3 x$ es positiva y por eso (véase § 1, afirmación 7a) en dicho conjunto la desigualdad (18) es equivalente a la desigualdad

$$2 - (\log_3 x)^2 < \log_3 x\,(1 - \log_3 x),$$

la cual puede escribirse en la forma $\log_3 x > 2$. El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental es el intervalo $(9, +\infty)$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto M_1, entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) en M_1 será el intervalo $(9, +\infty)$. En el conjunto M_2 la función $y = \log_3 x$ es negativa y por eso (véase § 1, afirmación 7b) en dicho conjunto la desigualdad (18) es equivalente a la desigualdad

$$2 - (\log_3 x)^2 > \log_3 x\,(1 - \log_3 x),$$

la cual puede escribirse en la forma $\log_3 x < 2$. El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental es el intervalo $(0; 9)$. En el conjunto M_2 está contenido, como parte de dicho intervalo, solamente el intervalo $(0, 1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) en M_2 será el intervalo $(0; 1)$.

Reuniendo los conjuntos de todas las soluciones, determinados en M_1 y en M_2, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) es el conjunto $(0; 1) \cup (9; +\infty)$.

Método de intervalos. La resolución de la desigualdad

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x) \tag{17}$$

en el caso que $f(x)$, $g(x)$ y $\varphi(x)$ son polinomios, puede efectuarse de distinto modo, a saber, la desigualdad (17) se debe escribir primeramente en la forma equivalente

$$\frac{f(x) - \varphi(x)\,g(x)}{\varphi(x)} > 0. \tag{19}$$

A continuación es preciso hacer uso de la afirmación 7 § 1, multiplicar la desigualdad (19) por $\varphi^2(x)$ y escribir la desigualdad

$$\varphi(x)\,[f(x) - \varphi(x)\,g(x)] > 0, \tag{20}$$

equivalente a la desigualdad (19) en su CVA. Por fin, la desigualdad (20) se resuelve por el método de intervalos (§ 2, cap. III). El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (20) será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (17).

Sea dada la desigualdad

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)} < x. \qquad (21)$$

Trasladando x al primer miembro de la desigualdad, escribamos esta desigualdad en la forma equivalente

$$\frac{-3x-1}{x+1} < 0.$$

Haciendo uso de la afirmación 7 § 1, obtenemos la desigualdad

$$-3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0,$$

que es equivalente a la (21) en el CVA de ésta. Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, obtenemos la respuesta: el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (21) es el conjunto $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Transformaciones relacionadas con la simplificación de una desigualdad por el factor común. Sea dada la desigualdad

$$\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x).$$

Muy a menudo esta desigualdad se sustituye por la desigualdad

$$f(x) > g(x),$$

es decir, la desigualdad de partida se simplifica por el factor común $\varphi(x)$. Es un gran error. Las desigualdades semejantes se deben resolver del modo siguiente:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad* $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$.
2. *Se reescribe la desigualdad en la forma equivalente*

$$\varphi(x)[f(x) - g(x)] > 0.$$

3. *Se pasa al conjunto de dos sistemas de desigualdades*

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) - g(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) - g(x) < 0, \end{cases}$$

que es equivalente a la desigualdad $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$ *en el CVA de ésta.*

4. *Se resuelve este conjunto en el CVA de la desigualdad de partida.*

El conjunto de todas las soluciones será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este método, la desigualdad

$$4x \log_5 x > (x^2 + 3) \log_5 x. \qquad (22)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = (0, +\infty)$. Escribamos la desigualdad (22) en la forma equivalente

$$(4x - x^2 - 3) \log_5 x > 0$$

y resolvamos en el conjunto M el conjunto de dos sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 > 0, \\ \log_5 x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - x^2 - 3 < 0, \\ \log_5 x < 0. \end{cases}$$

El conjunto de todas las soluciones del primer sistema es el intervalo (1; 3), y el conjunto de todas las soluciones del segundo sistema, el intervalo (0; 1). Por cuanto ambos intervalos, (1; 3) y (0; 1), están contenidos dentro del CVA de la desigualdad de partida, resulta que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $(0;\ 1) \cup (1;\ 3)$.

Transformaciones relacionadas con la logaritmación de una desigualdad. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad. Supongamos dada la desigualdad

$$f(x) < g(x). \tag{23}$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$\log_a f(x) < \log_a g(x). \tag{24}$$

o por la desigualdad

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{25}$$

se denomina *logaritmación de la desigualdad.*

Basándonos en la afirmación 6 § 1, podemos decir que para $a > 1$ las desigualdades (23) y (24) y, cuando $0 < a < 1$, también las desigualdades (23) y (25) son equivalentes sólo en el conjunto, donde ambas funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son simultáneamente positivas. Por eso, al aplicar la logaritmación, las desigualdades se resuelven, de ordinario, según el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* M_1 *y* M_2 (M_1 es toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la desigualdad dada son positivos), M_2 es toda la parte del CVA que queda después de separar el conjunto M_1).

3. *Se resuelve la desigualdad en* M_1 (teniendo presente que la logaritmación es una transformación equivalente en este conjunto).

4. *Se resuelve la desigualdad en* M_2.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, encontrados en* M_1 *y* M_2, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema unas cuantas desigualdades.

Sea dada la desigualdad

$$3^{x^2-x} < 2^{1-(\sqrt{x})^2}. \qquad (26)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = [0, +\infty)$. Por cuanto ambos miembros de la desigualdad (26) son positivos en el conjunto M, entonces, en virtud de la afirmación 6a, § 1, la desigualdad (26) es equivalente en M, a la desigualdad

$$\log_3 (3^{x^2-x}) < \log_3 (2^{1-x}),$$

la cual es, a su vez, equivalente en M a la desigualdad

$$x^2 - x < (1 - x) \log_3 2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-\log_3 2; 1)$. En el conjunto M está contenido, como parte del intervalo indicado, sólo un trozo $[0; 1)$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) será el intervalo $[0; 1)$.

Sea dada la desigualdad

$$(x^2 + x + 1)^x < 1. \qquad (27)$$

El CVA de la desigualdad (27) es toda la recta numérica, puesto que el trinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$ es positivo para cualquier x real.

Logaritmando la desigualdad (27) según una base cualquiera, por ejemplo, según la base 10, tenemos, en virtud de la afirmación 6a, § 1, que la desigualdad (27) es equivalente a la desigualdad

$$\lg (x^2 + x + 1)^x < \lg 1.$$

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos, escribamos esta desigualdad en la forma

$$x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Esta desigualdad es equivalente al conjunto de dos sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) > 0, \end{cases}$$

la cual es equivalente, a su vez, al siguiente conjunto de dos sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1. \end{cases}$$

Resolviendo al principio el primer sistema, llegamos a la conclusión de que el sistema no tiene soluciones, puesto que el conjunto de todas sus soluciones es la intersección de dos conjuntos: $(0, +\infty)$, que es el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad, y

$(-1; 0)$, que es el conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad, y la intersección mencionada es vacía.

El conjunto de todas las soluciones del segundo sistema es el intervalo $(-\infty, -1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es el intervalo $(-\infty, -1)$.

Señalemos que de modo análogo se resuelven las desigualdades de forma más general

$$[f(x)]^{\varphi(x)} < b, \tag{28}$$

donde b es un número positivo dado. A saber, se busca al principio el CVA de la desigualdad y luego se elige cualquier número $a > 1$. Entonces, la desigualdad (28) será equivalente en el CVA a la desigualdad

$$\varphi(x) \log_a f(x) < \log_a b.$$

Luego queda resolver la última desigualdad en el CVA de la desigualdad de partida (28).

Indiquemos, además, que la desigualdad exponencial elemental $a^x > b$ puede ser sustituida, logaritmando las desigualdades, por una desigualdad algebraica equivalente de primera potencia:

1) por la desigualdad $x > \log_a b$, cuando $a > 1$,

2) por la desigualdad $x < \log_a b$, cuando $0 < a < 1$, para las cuales se escriben con facilidad los conjuntos de todas sus soluciones. Análogamente puede procederse también con la desigualdad $a^x < b$.

Transformaciones relacionadas con la potenciación de las desigualdades. Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad.

Supongamos que está dada la desigualdad

$$\log_a f(x) < \log_a g(x). \tag{29}$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$f(x) < g(x)$$

o por la desigualdad

$$f(x) > g(x)$$

se denomina *potenciación de la desigualdad.*

Tomando en consideración las afirmaciones 6a y 6b del § 1, las desigualdades del tipo (29) se resuelven, por regla general, según el siguiente **esquema:**

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se resuelve la desigualdad en el CVA* (teniendo presente que la potenciación es una transformación equivalente en este conjunto).

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2-4) > \log_{\frac{1}{2}} (4x-7). \tag{30}$$

El CVA de esta desigualdad se determina por las condiciones:

$$\begin{cases} 4x-7 > 0, \\ x^2-4 > 0, \end{cases}$$

es decir, para determinar el CVA se debe resolver este sistema de desigualdades. Al resolverlo llegamos a que el CVA es el intervalo $(2, +\infty)$. Teniendo en cuenta la afirmación 6b, resulta que en el CVA la desigualdad (30) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 4 < 4x - 7.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, encontramos el conjunto de todas sus soluciones, es decir, el intervalo $(1; 3)$. En el CVA de la desigualdad (30) está contenido, como parte del intervalo mencionado, sólo el intervalo $(2; 3)$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (30) será el intervalo $(2; 3)$.

Veamos algunos casos particulares de potenciación de las desigualdades.

Es fácil ver la validez de las siguientes **afirmaciones**:

1. *Sea a un número fijo tal, que $a > 1$, entonces la desigualdad $\log_a f(x) > b$ será equivalente a la desigualdad $f(x) > a^b$, y la desigualdad $\log_a f(x) < b$, equivalente al sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble $0 < f(x) < a^b$.

2. *Sea a un número fijo tal, que $0 < a < 1$, entonces la desigualdad $\log_a f(x) < b$ será equivalente a la desigualdad $f(x) > a^b$, y la desigualdad $\log_a f(x) > b$, equivalente al sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble $0 < f(x) < a^b$.

Examinemos algunos **ejemplos**.

Sea dada la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3x + 5) < -1.$$

En virtud de la afirmación que acabamos de aducir, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 3x + 5 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1},$$

la cual es, a su vez, equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad y, por lo tanto, también de la desigualdad de partida es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Sea dada la desigualdad

$$\log_2 \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}.$$

En virtud de la afirmación que acabamos de aducir, esta desigualdad es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > 0, \\ \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble

$$0 < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad doble (fig.

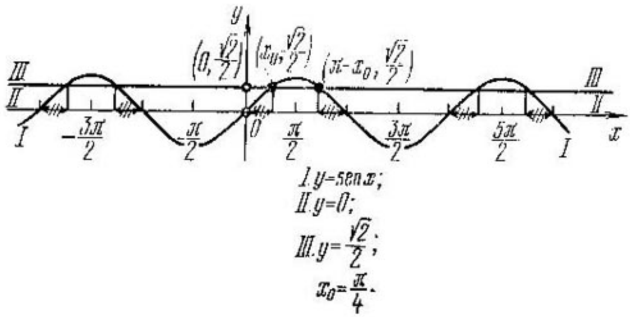


Fig. 183

183) y, por lo tanto, también de la desigualdad de partida, serán dos series de intervalos

$$X_k = \left(2\pi k,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in Z;$$

$$X_m = \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ \pi + 2\pi m\right) \quad m \in Z.$$

Observemos que la potenciación de las desigualdades se aplica frecuentemente en situaciones mucho más complejas en comparación con las analizadas anteriormente.

Sea dada la desigualdad

$$\log_{x^2}(2 + x) < 1. \tag{31}$$

El CVA de esta desigualdad se define por las condiciones

$$\begin{cases} 2 + x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$

es decir, para determinar el CVA se debe resolver este sistema de desigualdades. Al resolverlo, encontramos que el CVA es el conjunto $M = (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Dividamos el

CVA en dos conjuntos: $M_1 = (-2;\ -1) \cup (1, +\infty)$ y $M_2 = (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

En el conjunto M_1 tenemos $x^2 > 1$, por lo cual la desigualdad (31) en dicho conjunto es equivalente, según la afirmación 6a del § 1, a la desigualdad

$$2 + x < x^2.$$

Al resolver esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. En M_1 está contenido, como parte del conjunto mencionado, solamente el conjunto $(-2;\ -1) \cup (2, +\infty)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (31) en M_1 es $(-2;\ -1) \cup (2; +\infty)$.

En el conjunto M_2 tenemos $0 < x^2 < 1$, por lo cual la desigualdad (31) en M_2 es equivalente, según la afirmación 6b del § 1, a la desigualdad

$$2 + x > x^2.$$

Al resolver esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-1; 2)$. En M_2 está contenido, como parte del intervalo citado, solamente el conjunto $(-1; 0) \cup (0; 1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (31) en M_2 es el conjunto $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en M_1 y en M_2, vemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (31) es el conjunto $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2; +\infty)$.

De modo análogo se resuelve también la desigualdad del tipo

$$\log_{\varphi(x)} g(x) < b, \tag{32}$$

donde b es un número dado. A saber, primeramente se busca el CVA de la desigualdad. Luego el CVA se divide en dos conjuntos: M_1 (toda la parte del CVA, donde $\varphi(x) > 1$) y M_2 (toda la parte del CVA, donde $0 < \varphi(x) < 1$. Entonces, la desigualdad (32) en el conjunto M_1 será equivalente a la desigualdad

$$g(x) < [\varphi(x)]^b, \tag{33}$$

y en el conjunto M_2 la desigualdad (23) es equivalente a la desigualdad

$$g(x) > [\varphi(x)]^b. \tag{34}$$

Resta resolver las desigualdades (33) y (34) en los conjuntos correspondientes y reunir las soluciones obtenidas. Observemos que, recurriendo a la potenciación de desigualdades, la desigualdad logarítmica elemental $\log_a x > b$ puede sustituirse, cuando $a > 1$, por la desigualdad algebraica equivalente de primera potencia $x > a^b$, y, cuando $0 < a < 1$, por una igualdad equivalente doble $0 < x < a^b$, para las cuales se escriben con facilidad los conjuntos de todas sus soluciones.

De modo semejante podemos proceder también con desigualdad $\log_a x < b$.

Transformaciones relacionadas con la supresión del signo del valor absoluto. Sea dada la desigualdad

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_n(x)| > g(x), \qquad (35)$$

donde $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), g(x)$ son polinomios enteros con relación a x.

Para resolver desigualdades de este tipo se emplea, de ordinario, el *método de intervalos*. La descripción de este método para las desigualdades es prácticamente la misma que para las ecuaciones (véase el § 4, cap. VII), a saber, sea dada la desigualdad (35). Al principio *se resuelve el conjunto de ecuaciones*

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, f_m(x) = 0, \quad \ldots, f_n(x) = 0. \quad (36)$$

Luego *se fijan en la recta numétrica todas las raíces* de este conjunto de ecuaciones.

De este modo, *toda la recta numérica se divide en* cierto *número de intervalos*, a continuación, *en cada uno de los ivtervalos obtenidos la desigualdad se sustituye por alguna otra* que no contenga signos del valor absoluto y *que sea equivalente en el intervalo dado a la desigualdad de partida*. En cada intervalo se buscan todas las soluciones de la desigualdad que se obtiene en el intervalo que se considera, después de lo cual entre las soluciones halladas se eligen aquellas que caen dentro del intervalo mencionado. Estas soluciones constituirán precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida en el intervalo considerado. Por fín, para poder escribir el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida, se reúnen juntas todas sus soluciones encontradas en todos los intervalos.

Ilustremos la aplicación del método de intervalos con el ejemplo de resolución de la desigualdad

$$x^2 + |x + 1| - 3 > 0. \qquad (37)$$

En este caso el conjunto de ecuaciones (36) consta de una sola ecuación

$$x + 1 = 0$$

cuya única raíz es $x_1 = -1$. Quiere decir, la recta numérica se divide en dos intervalos: $(-\infty; \ -1)$ y $[-1; \ +\infty)$. Veamos cómo se resuelve la desigualdad (37) en cada uno de los intervalos obtenidos.

1. En el intervalo $(-\infty; \ -1)$ tenemos, por definición de valor absoluto, que

$$|x + 1| = -(x + 1).$$

Por eso en este intervalo la desigualdad (37) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - (x + 1) - 3 > 0.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, llegamos a que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$. En el intervalo que se analiza está contenido, como parte del conjunto citado, solamente el intervalo $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) en el intervalo $(-\infty; -1)$ es el intervalo $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

2. En el intervalo $[-1; +\infty)$ tenemos, por definición de valor absoluto,

$$|x + 1| = (x + 1).$$

Por eso en el intervalo dado la desigualdad (37) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 + (x + 1) - 3 > 0.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es un conjunto $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. En el intervalo considerado está contenido, como parte del conjunto mencionado, solamente el trozo $(1; +\infty)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) en el intervalo $[-1; +\infty)$ será representado por el trozo $(1; +\infty)$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en los intervalos analizados, vemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) es el conjunto $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1 + \infty)$.

Indiquemos, como conclusión, que se han considerado más arriba no todas las transformaciones de las desigualdades, sino sólo aquellas que se emplean con mayor frecuencia. Además, *al resolver una desigualdad, nos vemos obligados a aplicar frecuentemente varias transformaciones y no una sola.*

Ilustremos esto con dos ejemplos.

Sea dada la desigualdad

$$4^{\sqrt{9-x^2}} - 6 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}} + 8 < 0. \qquad (38)$$

Esta desigualdad es cuadrática con relación a $2^{\sqrt{9-x^2}}$. Al resolver la desigualdad

$$t^2 - 6t + 8 < 0,$$

obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(2; 4)$. Por consiguiente, la desigualdad (38) es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{9-x^2}} < 4, \\ 2^{\sqrt{9-x^2}} > 2. \end{cases} \qquad (39)$$

Resolvamos al principio la primera desigualdad de este sistema

$$2^{\sqrt{9-x^2}} < 4. \qquad (40)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = [-3; 3]$. En este conjunto ambos miembros de la desigualdad (40) son positivos, por lo cual, logaritmando la desigualdad (40) según la base 2, obtendremos la desigualdad

$$\sqrt{9-x^2} < 2, \qquad (41)$$

que es equivalente a la desigualdad (40) en el conjunto M. En el conjunto M ambos miembros de la desigualdad (41) son no negativos, por lo cual, elevando al cuadrado dicha desigualdad, obtendremos la desigualdad

$$9 - x^2 < 4,$$

que es equivalente a la desigualdad (41) en el conjunto M. Resolviendo esta desigualdad elemental, obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. En M está contenido, como parte del conjunto citado, solamente el conjunto $[-3; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3]$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad(40) es el conjunto $[-3; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3]$.

Resolviendo análogamente la segunda desigualdad del sistema (39), recibimos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones del sistema (39) y, por tanto, de la desigualdad (38), equivalente al sistema, es el conjunto $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{22})$.

Sea dada la desigualdad

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > 1. \qquad (42)$$

La función $y = \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2}$ es la superposición de dos funciones: la función elemental más simple $y = \operatorname{tg} v$ y la función $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Resolvamos primero la desigualdad elemental

$$\operatorname{tg} v > 1.$$

El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad (fig. 184) es una serie de intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Quiere decir, la desigualdad de partida (42) es equivalente al conjunto infinito de sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \tag{43}$$

donde k es un número entero cualquiera. (La transformación realizada de la desigualdad es un ejemplo de transformación que no se ha analizado antes).

Examinemos todos los sistemas en el conjunto infinito (43).

Cualquiera que sea k positivo, ninguno de estos sistemas tiene solución, puesto que $\frac{\pi}{4} + \pi k > 1$ para cualquier k natural, y

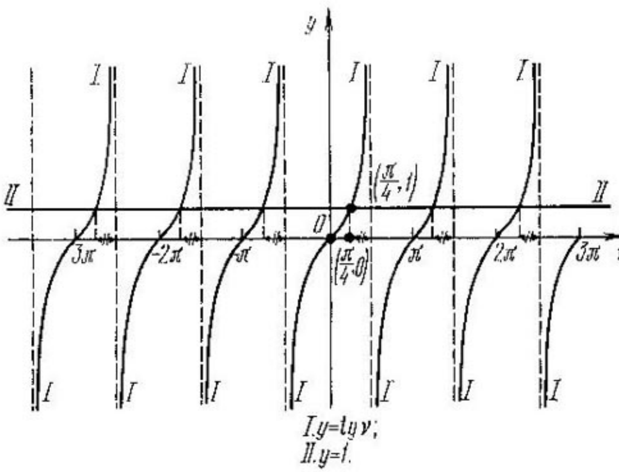


Fig. 184

$\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ para cualquier x real, a consecuencia de lo cual la segunda desigualdad en el sistema (43) no tiene soluciones.

Siendo k negativo, ninguno de los sistemas tiene solución, puesto que $\frac{1}{1+x^2} > 0$ para todo x real, y $\frac{\pi}{2} + \pi k < 0$ para cualquier k entero y negativo, a consecuencia de lo cual la primera desigualdad del sistema (43) no tiene soluciones.

Cuando $k = 0$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{44}$$

Por cuanto $\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$ para cualquier x real, el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de este sistema es toda la recta numérica. Para todos los x reales la función $y = 1 + x^2$ es positiva, por lo cual, suprimiendo el denominador, obtenemos la desigualdad

$$1+x^2<\frac{4}{\pi},$$

que es equivalente a la segunda desigualdad del sistema (44). El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental está representado por el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1},\ \sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\right)$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones del sistema (44) es precisamente este intervalo.

Al resumir, concluimos que el conjunto de todos las soluciones de la desigualdad de partida (42) es el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi},\ \frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi}\right)$.

Ejercicios

¿Será el número (—4) la solución de las siguientes desigualdades (1 . . . 48):

1. $\frac{x(2x+1)(x-5)}{(x+3)(3x-4)}<0$; 2. $\frac{(x-1)^2(-x-5)(3+x)^3}{(x+2)(-x^2+x-3)}>0$;

3. $\frac{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}{x^3+6x^2+5x-12}\leqslant 0$; 4. $\frac{(5x^2-8x-13)^3(x-2)^2(1-x)}{(-3x^2+5x-2x)(x+3)^3(x-2)^4}\geqslant 0$;

5. $\frac{x-2}{3x-1}\leqslant\frac{x+2}{2x+1}$; 6. $\frac{(x-2)(x-7)}{(x-6)(x-5)}\geqslant 1$;

7. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}>\frac{8}{x^2-1}$; 8. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}<\frac{3}{x+1}$;

9. $|9-2x|\geqslant|4-3x|+|x-5|$; 10. $|x+1|+|2-x|-|x+3|\geqslant 4$.

11. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|<1$; 12. $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}>1$;

13. $\sqrt{x+5}>x+1$; 14. $x-6<\sqrt{x^2-7x+8}$;

15. $\sqrt{6-5x-x^2}\geqslant x+2$; 16. $\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}\leqslant\sqrt{2-x}$;

17. $\sqrt{25-x^2}>3-\sqrt{x^2+7x}$; 18. $\sqrt{-1-x}-\sqrt{\frac{-1}{x+1}}<\sqrt{2-x}$;

19. $\frac{(6+x)\sqrt{x+6}+(7-x)\sqrt{7-x}}{(6+x)\sqrt{7-x}+(7-x)\sqrt{x+6}}\leqslant\frac{7}{6}$;

20. $\sqrt[3]{5(x+8)+7\sqrt{2(8+x)}}+\sqrt[3]{5(x+8)-7\sqrt{2(x+8)}}\geqslant 4$;

21. $4^{x-1}\geqslant 17\cdot 2^{x-3}-1$; 22. $\left(\frac{1}{2}\right)(x^6-2x^3+1)^{1/2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

23. $|x+1|^{x^2-5x/2+3/2}\geqslant 1$; 24. $\frac{1}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^x}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}\leqslant 1$;

25. $3\cdot 4^{-x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{2-x}>6\cdot 4^{1-x}-\frac{1}{2}\,9^{1-x}$;

26. $(4^x-1)^2+2^{x+1}(4^x-1)<8\cdot 4^x$.

27. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3/x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1/2}$;

28. $x^2\cdot 2^{\sqrt{-x}}-x+2>2^{1+\sqrt{-x}}+x^2-x\cdot 2^{\sqrt{-x}}$;

29. $\lg 2+\lg(4^{-x-1}+9)\geqslant 1+\lg(2^{-x-1}+1)$;

30. $\lg(x^2-1)\leqslant\lg(x-1)^2+\lg|x-2|$;

31. $(-x)^{\lg^2(-x)+3\lg(-x)+3}>-\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+1}}$;

32. $\log_{1/3}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

33. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x+1}{x-1}$;

34. $\dfrac{\log_4^2(-x)-4\log_4(-x)+3}{\log_4^2(-x)+\log_4(-x)}\geqslant 0$;

35. $\dfrac{2\log_{-x}3}{1+\log_{-x}3}\leqslant 1-\dfrac{1}{2-\log_3(-x)}$;

36. $\lg\sqrt{(x+1)^2}<\sqrt{2\lg(-x-1)}$;

37. $3\,\mathrm{sen}\,2x-1>\mathrm{sen}\,x+\cos x$; 38. $|\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x|<4\sqrt{3}$;

39. $4(x^3-2x+1)(\mathrm{sen}\,x+2\cos x)\geqslant 9\,|x^3-2x+1|$;

40. $\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\mathrm{sen}\,x}\geqslant 1$; 41. $\dfrac{2+\sqrt{2}-4\cos 2x}{\mathrm{sen}\,x-\cos 2x}\geqslant 2$;

42. $4\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{sen}\,3x<\mathrm{sen}\,4x$;

43. $\sqrt{3+2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}^{-2}x}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,x$;

44. $\cos x\cdot\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}\,x)+\mathrm{sen}\,x\cdot\cos(\mathrm{sen}\,x)>0$;

45. $\arccos\frac{4}{1-x}<\frac{\pi}{2}$; 46. $\mathrm{arcsen}\,\frac{3}{x^2+3x}>\frac{\pi}{4}$;

47. $\mathrm{arctg}^2\,x-4\,\mathrm{arctg}\,x+3\geqslant 0$; 48. $5\,\mathrm{arcctg}\,x-\mathrm{arcctg}^2\,x-4\leqslant 0$?

¿Será el número $\frac{3}{2}$ la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones (49 ... 50):

49. $\begin{cases} 6x^2-29x+30\leqslant 0,\\ 5x+2>3x^2;\end{cases}$ 50. $\begin{cases} \frac{x}{3}-3\left(5x-\frac{3(x-5)}{4}\right)<x+3\frac{19}{24},\\ ||x|-2|\leqslant 1;\end{cases}$

51. $\begin{cases} 5x\leqslant 4+x^2,\\ \dfrac{3x+1}{1-2x}<-2;\end{cases}$ 52. $\begin{cases} x+1>\sqrt{4x-3},\\ \sqrt{4+x}-4<\sqrt{x+6};\end{cases}$

53. $\begin{cases} 3\sqrt{x+6-x^2}>2-4x,\\ \sqrt{16-x^2}>2-\sqrt{7x-x^2};\end{cases}$

54. $\begin{cases} \sqrt{3x+1}+\sqrt{16x-3x^2}\geqslant 0,\\ \sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}\leqslant\sqrt{6};\end{cases}$

55. $\begin{cases} |x^3-1| \leqslant |1-x|, \\ \dfrac{1}{3^{x+1}-1} \geqslant \dfrac{1}{1-3^x}, \\ \log_2(9-2^x) > 3-x; \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+3}+1}, \\ |x+1|-x \geqslant 2|x-1|, \\ \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2; \end{cases}$ 57. $\begin{cases} |x^2-3x+2|-4 \leqslant |x|-x^2, \\ 9^x \leqslant 3^x+2; \\ \log_{25x} x^3 + \log_{x/\sqrt{5}} \sqrt{5} < 2; \end{cases}$

58. $\begin{cases} x+4 \geqslant \sqrt{x+16}, \\ x^2+|x-5| \leqslant |x^2-4x+3|, \\ \log_{3x} \dfrac{3}{x} + \log_3^2 x < 1; \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 3} + 4 > \dfrac{16}{\log_3 x - 2}, \\ \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} \geqslant \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}, \\ 1 < \log_x \dfrac{4x-2}{3}, \\ \dfrac{9}{|x-5|-3} \geqslant |x-2|? \end{cases}$

¿Serán equivalentes las siguientes dos desigualdades (60 ... 104):

60. $\dfrac{x(x+2)}{x+2} < 0$ y $x < 0$; 61. $\dfrac{x(x+3)}{(x+3)} > 0$ y $x > 0$;

62. $\dfrac{x^3}{x} < 0$ y $x < 0$; 63. $\dfrac{x^2}{x} \leqslant 0$ y $x \leqslant 0$;

64. $x+2 > 4$ y $x+2+\dfrac{1}{x+4} > 4+\dfrac{1}{x+4}$;

65. $x+2 > 4$ y $x+2+\dfrac{1}{x-10} > 4+\dfrac{1}{x-10}$;

66. $3x-1 < 2x+3$ y $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$;

67. $3x-1 < 2x+3$ y $(3x-1)(x+1) > (2x+3)(x+1)$;

68. $x^2+1 > x$ y $(x^2+1)(|x|+2) > x(|x|+2)$;

69. $x^2+1 > x$ y $(x^2+1)(\sqrt{x}+1) > x(\sqrt{x}+2)$;

70. $\dfrac{x-4}{x-3} > 2$ y $\dfrac{x-4-2(x-3)}{x-3} > 0$;

71. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $x+4 > 3(x+3)$;

72. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $x+4 < 3(x+3)$;

73. $\dfrac{x+4}{x-1} > 0$ y $(x+4)(x-1) > 0$;

74. $\dfrac{x+4}{x-1} \geqslant 0$ y $(x+4)(x-1) \geqslant 0$;

75. $\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{x+5} < 0$ y $\dfrac{x-2}{x+5} < 0$;

76. $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x+5} < 0$ y $\dfrac{x-2}{x+5} < 0$;

77. $\dfrac{\sqrt{x^2+5}\,(x+1)}{x+2} > 0$ y $\dfrac{x+1}{x+2} > 0$;

78. $\dfrac{\sqrt{9-x^2}\,(x+1)}{x+2} > 0$ y $\dfrac{x+1}{x+2} > 0$;

79. $\dfrac{(x+5)\,(3x^2+x+2)}{(x+3)} > 0$ y $\dfrac{x+5}{x+3} > 0$;

80. $\dfrac{(x+5)\,(2x+4-x^2)}{x+3} > 0$ y $\dfrac{x+5}{x+3} > 0$;

81. $\sqrt{x^2-14}\,(x^2+x-2) \geqslant 0$ y $x^2+x-2 \geqslant 0$;

82. $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 (2-x)}{x+3} < 0$ y $\dfrac{2-x}{x+3} < 0$;

83. $\dfrac{(x+8)^2\,(2-x)}{x+3} < 0$ y $\dfrac{2-x}{x+3} < 0$;

84. $\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 (2-x)}{x+3} \leqslant 0$ y $\dfrac{2-x}{x+3} \leqslant 0$;

85. $\dfrac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1} > 0$ y $\dfrac{\sqrt{(x-1)\,(x+4)}}{x+1} > 0$;

86. $\dfrac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1} \geqslant 0$ y $\dfrac{\sqrt{(x-1)\,(x+4)}}{x+1} \geqslant 0$;

87. $\sqrt{x-12}\,\sqrt{4-x} > 0$ y $\sqrt{(x-12)\,(4-x)} > 0$;

88. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3} > 0$ y $\sqrt{(x+2)\,(x-3)} > 0$;

89. $\sqrt{100-x^2}\,\sqrt{\operatorname{sen} x} \geqslant 0$ y $\sqrt{(100-x^2)\operatorname{sen} x} \geqslant 0$;

90. $\dfrac{1}{3x^2} > \dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $(x+2)^2 > 3x^2$;

91. $\sqrt{x} < 3$ y $x < 9$;

92. $\sqrt{x^2+1} < 3$ y $x^2+1 < 9$;

93. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-1}{x+6}} < 1$ y $\dfrac{x-1}{x+6} < 0$;

94. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-1}{x+6}} \leqslant 1$ y $\dfrac{x-1}{x+6} \leqslant 0$;

95. $(2+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{x-1}{x+6}} < 1$ y $\dfrac{x-1}{x+6} \leqslant 0$;

96. $\left(\dfrac{4}{4+x^2}\right)^{x^2-9} \geqslant 1$ y $x^2-9 \leqslant 0$;

97. $\left(\dfrac{4}{4+|x-4|}\right)^{x^2-9} \geqslant 1$ y $x^2-9 \leqslant 0$;

98. $(1+x^2)^{\frac{x+4}{x-1}} < 1$ y $\dfrac{x+4}{x-1} < 0$;

99. $(1+x^2)^{\frac{x+4}{x+2}} < 1$ y $\dfrac{x+4}{x+2} < 0$;

100. $\log_2 x^2 > 0$ y $2\log_2 x > 0$;

101. $\log_2 x^2 > 0$ y $2\log_2(-x) > 0$;

102. $\log_2 x^2 > 0$ y $2\log_2 |x| > 0$;

103. $\dfrac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$ y $\dfrac{\log_2(x+7)(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$;

104. $\dfrac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{x+1} > 0$ y $\dfrac{\log_2(x+7)(x-8)}{x+1} > 0$?

¿Serán equivalentes la desigualdad y el sistema de desigualdades (105 ... ... 149):

105. $\dfrac{x(x+2)}{x+2} < 0$ y $\begin{cases} x \neq -2, \\ x < 0; \end{cases}$

106. $2x+\dfrac{1}{x-6} > x+4+\dfrac{1}{x-6}$ y $\begin{cases} x \neq 6, \\ 2x > x+4; \end{cases}$

107. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ y $\begin{cases} x+1 > 0, \\ (3x-1) < 2x+3; \end{cases}$

108. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ y $\begin{cases} x+1 < 0, \\ (3x-1) > (2x+3); \end{cases}$

109. $(x^2+1)(\sqrt{x}+3) > x(\sqrt{x}+3)$ y $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+1 > x; \end{cases}$

110. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $\begin{cases} x+3 > 0, \\ (x+4) > 3(x+3); \end{cases}$

111. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $\begin{cases} x+3 < 0, \\ x+4 < 3(x+3); \end{cases}$

112. $\dfrac{x+2}{x-2} \leqslant 0$ y $\begin{cases} x \neq 2, \\ (x+2)(x-2) \leqslant 0; \end{cases}$

113. $\dfrac{(x-2)(x+2)^2}{x+5} < 0$ y $\begin{cases} x \neq -2, \\ \dfrac{x-2}{x+5} < 0; \end{cases}$

114. $\dfrac{\sqrt{9-x^2}\,(x+1)}{x+2} > 0$ y $\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ \dfrac{x+1}{x+2} > 0; \end{cases}$

115. $\dfrac{|x+14|\,(x-6)}{x+5} > 0$ y $\begin{cases} x+14 \neq 0, \\ \dfrac{x-6}{x+5} > 0; \end{cases}$

116. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3} > 0$ y $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{(x+2)(x-3)} > 0; \end{cases}$

117. $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{2x^2}$ y $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x^2 > x-2; \end{cases}$

118. $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{2x^2}$ y $\begin{cases} x \neq 0, \\ x-2 < 0, \\ 2x^2 < x-2; \end{cases}$

119. $\dfrac{1}{3x^2} > \dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -2, \\ (x+2)^2 > 3x^2; \end{cases}$

120. $\sqrt{x} < 3$ y $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 9; \end{cases}$

121. $\dfrac{|x+5|\,(x-7)}{x+1} > 0$ y $\begin{cases} x+5 \neq 0, \\ \dfrac{x-7}{x+1} > 0; \end{cases}$

122. $\dfrac{\sqrt{x+1}\,\sqrt{6-x}}{x-1}>0$ y $\begin{cases}x+1>0,\\ 6-x>0,\\ x-1>0;\end{cases}$

123. $\dfrac{\sqrt{x+2}\,\sqrt{5-x}}{(x-2)^2}>0$ y $\begin{cases}x+2>0,\\ 5-x<0,\\ x-2\neq 0;\end{cases}$

124. $\dfrac{\sqrt{25-x^3}\,(x+4)^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x-2)^2}>0$ y $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ x^2-1>0\\ x-2\neq 0;\end{cases}$

125. $(x^2+1)^{\frac{x+5}{x-4}}<1$ y $\begin{cases}\dfrac{x+5}{x-4}<0,\\ x\neq 0;\end{cases}$

126. $(1+\cos^2 x)^{\frac{x-2}{x+3}}>1$ y $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+3}>0\\ \cos x\neq 0;\end{cases}$

127. $(1+\cos^2 x)^{\frac{x-2}{x+3}}\geqslant 1$ y $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \dfrac{x-2}{x+3}\geqslant 0;\end{cases}$

128. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-7}{x+10}}\leqslant 1$ y $\begin{cases}\operatorname{sen} x\neq -1,\\ \dfrac{x-7}{x+10}\leqslant 0;\end{cases}$

129. $\left(\dfrac{3}{3+x^2}\right)^{x^2-9}\geqslant 1$ y $\begin{cases}x\neq 0\\ x^2-9\leqslant 0;\end{cases}$

130. $\left(\dfrac{3}{3+|x+2|}\right)^{x^2-1}\leqslant 1$ y $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ x+2\neq 0;\end{cases}$

131. $\left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)^{\frac{x+4}{x-1}}>1$ y $\begin{cases}x\neq 0,\\ \dfrac{x+4}{x-1}<0;\end{cases}$

132. $\left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right)^{\frac{x+4}{x+3}}<1$ y $\begin{cases}\operatorname{sen} x\neq 0,\\ \dfrac{x+4}{x+3}>0;\end{cases}$

133. $x^{x^2-4x-45}>1$ y $\begin{cases}x>1,\\ x^2-4x-45<0;\end{cases}$

134. $x^{x^2-4x-45}>1$ y $\begin{cases}0<x<1,\\ x^2-4x-45<0;\end{cases}$

135. $x^{x^2-4x-45}\geqslant 1$ y $\begin{cases}0<x<1,\\ x^2-4x-45\leqslant 0;\end{cases}$

136. $x^{x^2-4x-45}\leqslant 1$ $\begin{cases}x>1,\\ x^2-4x-45\geqslant 0;\end{cases}$

137. $\log_2 x^2>0$ y $\begin{cases}x>0,\\ 2\log_2 x>0;\end{cases}$

138. $\log_2 x^2>0$ y $\begin{cases}x<0,\\ 2\log_2(-x)>0;\end{cases}$

139. $\log_{4+\sqrt{x}}(x+7)(x+8)>0$ y $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ (x+7)(x+8)>1;\end{cases}$

140. $\log_{\frac{1}{2+\sqrt{x}}}(x+1)(x-7)<0$ y $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ (x+1)(x-7)>1; \end{cases}$

141. $\log_{x^2-4}(x^2+6x+8)>0$ y $\begin{cases} x^2-4>1, \\ x^2+6x+8>1; \end{cases}$

142. $\log_{x^2-4}(x^2+6x+8)>0$ y $\begin{cases} 0<x^2-4<1, \\ 0<x^2+6x+8<1; \end{cases}$

143. $\log_2(x+7)+\log_2(x-8)>0$ y $\begin{cases} x-8>0, \\ x+7>0, \\ \log_2(x+7)(x-8)>0; \end{cases}$

144. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ \log_x(x+1)>1; \end{cases}$

145. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} -1<x<0, \\ \log_{-x}(x+1)>1; \end{cases}$

146. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x<-1; \\ \log_{-x}(-x-1)>1; \end{cases}$

147. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} 0<x^2<1, \\ (x+1)^2<x^2; \end{cases}$

148. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x^2>1, \\ (x+1)^2>x^2; \end{cases}$

149. $\log_{\sqrt{7}}|x+1|>\log_{\sqrt{7}}(x+1)^2$ y $\begin{cases} (x+1)\neq 0, \\ |x+1|>(x+1)^2? \end{cases}$

Resuélvase las siguientes desigualdades (150 ... 298):

150. $x^2+2x+\cos 5<0$. 151. $x^2+2x+\operatorname{sen}\frac{7}{2}\leqslant 0$.

152. $\operatorname{tg}\frac{5}{2}+6x-x^2>0$. 153. $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0$.

154. $\frac{\sqrt{x+7}\,(x+5)(x-1)^2}{(3-x^2)(x-6)(x-5)}\geqslant 0$. 155. $\frac{(x+2)(x+1)^3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2\sqrt{6-x}}\leqslant 0$.

156. $\frac{\sqrt{100-x^2}\,(x+4)(x+3)^2}{x^2(x-2)}<0$. 157. $\frac{(x+5)(x^2-1)}{x(x+3)^2\sqrt{49-x^2}}>0$.

158. $\frac{x-2}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x-1}$. 159. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$.

160. $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}\leqslant\frac{6}{x-1}$. 161. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}<3$.

162. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}>\frac{8}{x^2-1}$. 163. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+6}\geqslant 0$.

164. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}<4+\frac{x-7}{x-1}$

165. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}\leqslant\frac{1}{30}$.

166. $4|x+2|<2x+10$. 167. $3|x-1|\leqslant x+3$.

168. $2|x+1|>x+4$. 169. $3|x+1|\geqslant x+5$.

170. $|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9$. 171. $3x^2-|x-3|>9x-2$.

172. $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x$. 173. $x^2-|5x-3|-x<2$.

174. $|x+1|-|3x+7|>0$. 175. $|13-2x|\geqslant|4x-9|$.
176. $|x|+|x-1|\leqslant 1$. 177. $|x+2|-3<|x-1|$.
178. $|x^2+2x-3|\geqslant 3-2x-x^2$.
179. $|4+3x-x^2|\leqslant x^2-3x-4$.
180. $\left|\dfrac{x^2-5x-4}{x^2-4}\right|<1$. 181. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>1$.
182. $\dfrac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$. 183. $\dfrac{7}{|x-1|-3}>|x+2|$.
184. $\dfrac{9}{|x-1|-3}<|x-2|$. 185. $\dfrac{3}{|x+3|-1}<|x+2|$.
186. $|x+2|+|x+1|+|x-1|>10$.
187. $|5-x|<|x-2|+|7-2x|$.
188. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geqslant 1$. 189. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\leqslant 1$.
190. $2\sqrt{x+5}>x+2$. 191. $x+1<4\sqrt{x+6}$.
192. $\sqrt{1+4x-x^2}\geqslant x-1$. 193. $\sqrt{5-x^2}>x-1$.
194. $x+4\leqslant\sqrt{6-4x-x^2}$. 195. $x-2<\sqrt{4+2x-x^2}$.
196. $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$. 197. $\sqrt{4x^2+16x+16}<2x+10$.
198. $\sqrt{3x^2-6x+3}\leqslant x+3$. 199. $\sqrt{2x^2+4x+2}\geqslant x+4$.
200. $\sqrt{9x^2+6x+1}<2-x$. 201. $\sqrt{x^2+2x-3}>x$.
202. $\sqrt{x^2-x-2}>x-1$. 203. $\sqrt{2x+3}<1-\sqrt{x+2}$.
204. $\sqrt{-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{4}$. 205. $\sqrt{x+4}<\sqrt{x+11}-\sqrt{2x-12}$.
206. $\sqrt{3-x}>\sqrt{8-x}-\sqrt{-1-2x}$. 207. $\sqrt{2x+1}<\dfrac{2(x+1)}{2-x}$.
208. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$. 209. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{2}$.
210. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<\dfrac{3}{5}$. 211. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>$

$$>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

212. $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)^{2x-6}\geqslant\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6}\right)^{2x-6}$ 213. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^{x+1/3}<\sqrt{2}$.
214. $5^{x^2+3x}\leqslant 125\cdot 5^x$. 215. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{5/x}}\leqslant\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-4}$.
216. $3^{\sqrt{x+1}}\geqslant 81\sqrt{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$ 217. $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x\geqslant 5\cdot 6^{x/2}$.
218. $(0{,}4)^{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}<(0{,}4)^2$. 219. $5^{\sqrt{7x}-\frac{\sqrt{7x}+1}{\sqrt{7x}-1}}\geqslant 125\sqrt{5}$.
220. $9^x-2\cdot 3^x<3$. 221. $4^x-2^{x+1}\geqslant 3$.
222. $9^x\leqslant 4+3^{x+1}$. 223. $2^{2x+1}-21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3}+2>0$.
224. $35\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}<6+3^{4-3x}$. 225. $\dfrac{1}{3^x+2}\geqslant\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

226. $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$ 227. $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

228. $3\cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}} > 4^{3x/2} + 2^{x-\sqrt{x}}$.

229. $4^x < 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

230. $18\cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}} > 3^{3x-2\sqrt{x+1}} - 7\cdot 3^{2x}$.

231. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5$. 232. $\dfrac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-5} < 3$.

233. $\dfrac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4} \leqslant \dfrac{2}{3}$ 234. $\dfrac{15-2\cdot 13^{x+1}}{6\cdot 13^{2x}-13^{x+1}+6} > 2$.

235. $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \geqslant 1$. 236. $9^{\sqrt[3]{x}} - 2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}} \leqslant 3$.

237. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$. 238. $5^{|4x-6|} \geqslant 25^{3x-4}$.

239. $3^{|3x-4|} \leqslant 9^{2x-2}$. 240. $25^{|1-2x|} < 5^{4-6x}$.

241. $9^{|3x-1|} > 3^{8x-2}$. 242. $11^{3x-2} + 13^{3x-2} \geqslant 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$.

243. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x\cdot 30^x$.

244. $|x|^{x^2-x-2} < 1$. 245. $(x^2+x+1)^x \leqslant 1$.

246. $\log_{1/2}(2x+3) > 0$.

247. $\log_{0,3}(x^2+1) < \log_{0,3}(2x-5)$.

248. $\log_3(x^2-5x+4) > 0$. 249. $\log_2(x^2+3x) < 2$.

250. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.

251. $\log_2 x + \log_2(2x-1) < \log_2(2x+2)$.

252. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$.

253. $\log_3(x+2)(x-3) \leqslant 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{7}} 7$.

254. $\log_4(2x^2+3x+1) \geqslant \log_2(2x+2)$.

255. $\log^2\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right) + \log_{1/3}\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right) < 2$.

256. $\log_8(x^2-4x+3) > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$.

257. $\log_{1/2}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$. 258. $\log_4\dfrac{2x-1}{x+1} < \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

259. $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4x+3}{4} < 2\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$.

260. $\dfrac{|3-5x|-4}{\sqrt{\log_{1/3} 3|x|}} \leqslant 0$. 261. $\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

262. $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} < \dfrac{\log_2\sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$.

263. $\sqrt{\log_4\dfrac{2x^2-3x+3}{2}+1} > \log_2\dfrac{2x^2-3x+3}{2}$.

264. $\log_x\dfrac{x+3}{x-1} > 1$. 265. $\log_{(2x+3)} x^2 < 1$.

266. $\log_{(4+2x-x^2)}\left(\dfrac{1-x}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$. 267. $\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2 \geqslant 4$.

268. $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leqslant \dfrac{1}{2}$. 269. $\log_{(x-3)}(x^2-4x)^2 < 4$.

270. $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)>\frac{1}{2}$.

271. $\log_{(1-2x)}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)\geqslant 2$.

272. $\log_{(2x+1)}(5+8x-4x^2)+\log_{(5-2x)}(1+4x+4x^2)\leqslant 4$.

273. $\log_{(5x-1)}(10x^2-7x+1)^4-\log_{2x-1}(25x-10x+1)>2$.

274. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)<4$.

275. $\dfrac{\log_2(x^2-2x-7)^5-\log_3(x^2-3x-7)^8}{3x^2-13x+4}\leqslant 0$.

276. $\dfrac{\log_5(x^2-2x-14)^9-\log_2(x^2-2x-14)^4}{2x^2-9x-5}<0$.

277. $\dfrac{\log_7(x^2-4x-4)^8-\log_2(x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2}>0$.

278. $\dfrac{\log_5(x^2-4x+11)^2+\log_{11}(x^2-4x+11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0$.

279. $\dfrac{6\log_{32}^2 x-11\log_{32}x-2}{\log_{32}x-2}\geqslant 2+\log_{22}x$.

280. $\dfrac{2\lg x}{\lg x-1}\geqslant\dfrac{2}{\lg x+1}-\lg x$.

281. $\dfrac{\log_{\sqrt{7}}(x-4/7)+2}{\log_8|x-3/5|+4/3}\geqslant 0$. 282. $\dfrac{\log_3(x+4/5)}{\log_7(x^2-2x+7/16)}<0$.

283. $\log_{1/3}-3\log_{(x-1)}1/3>2\,|\log_{1/3}(x-1)|$.

284. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/9}(x^2-3x+1}<1$. 285. $\lg_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

286. $3\cdot 9^{\log_4 x}-10\cdot 3^{\log_4 x}+\log_2 8\geqslant 0$.

287. $25^{\log_5 x}-6\cdot 5^{\log_5 x}+5^{\frac{1}{2}\log_5 4}\leqslant 0$.

288. $4x+8\sqrt{2-x^2}>4+(x^2-x)\cdot 2^x+2^{x+1}\cdot x\sqrt{x-x^2}$.

289. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

290. $\dfrac{6}{2x+1}\geqslant\dfrac{1+\log_2(x+2)}{x}$. 291. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x}>\dfrac{10}{2x-1}$.

292. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}\leqslant\dfrac{6}{2x-1}$. 293. $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1}<\dfrac{10}{3-2x}$.

294. $(x-2)^2|\cos x|\leqslant\cos x$. 295. $\operatorname{sen}x+(x-4)^2|\operatorname{sen}x|\geqslant 0$.

296. $\cos x<|\cos x|\,(x+3/2)^2$. 297. $(x+1/2)^2|\operatorname{sen}x|+\operatorname{sen}x>0$.

298. $\sqrt{49-x^2}\sqrt{\log_2\operatorname{sen}^2 x}\geqslant 0$.

CAPÍTULO

IX

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN Y LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

§ 1. Sucesiones numéricas

Si a todo número natural n se le ha puesto en correspondencia un número x_n, se dice que está dada la sucesión numérica $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o, en forma más breve, la sucesión $\{x_n\}$. Para prefijar una sucesión numérica se debe elegir una ley (regla), de acuerdo con la cual a todo número natural se le pone en correspondencia cierto número, es decir, cada sucesión numérica puede considerarse como una función cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números naturales.

Si la función $y = f(x)$ es tal, que el conjunto de todos los números naturales está contenido dentro del campo de su existencia, entonces por medio de la función $y = f(x)$ con su campo de definición (el conjunto de todos los números naturales) se puede prefijar la sucesión numérica $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$, o bien $\{f(n)\}$. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales está contenido dentro del campo de existencia de cada una de las siguientes funciones:

1. $y=x$; 2. $y=2^{1-x}$; 3. $y=-2-3(x-1)$;

4. $y=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{2}\right)$; 5. $y=\cos(2\pi x)$; 6. $y=\frac{x+1}{x}$;

7. $y=\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)}{x}$; 8. $y=\frac{1}{x}$; 9. $y=2^{x-1}$.

10. $y=x^2$.

En el campo de definición, es decir, en el conjunto de todos los números naturales, estas funciones prefijan las siguientes sucesiones numéricas, respectivamente:

1. $1, 2, \ldots, n, \ldots$;

2. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}, \ldots$;

3. $-2, -5, \ldots, -2-3(n-1), \ldots$;

4. $1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$;

5. $1, 1, \ldots, 1^n, \ldots$;

6. $2, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots;$

7. $0, 1, \dots, \frac{[1+(-1)^n]}{n}, \dots;$

8. $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

9. $1, 2, \dots, 2^{n-1}, \dots;$

10. $1, 4, \dots, n^2, \dots .$

La sucesión numérica $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se prefija con mayor comodidad mediante la fórmula para su término general. Escribamos, por ejemplo, las fórmulas para los términos generales de las sucesiones 1 . . 10:

1. $a_n = n;$ 2. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$

3. $a_n = -2-3(n-1);$ 4. $a_n = (-1)^{n-1};$

5. $a_n = 1^n;$ 6. $a_n = \frac{n+1}{n};$

7. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n};$ 8. $a_n = \frac{1}{n};$

9. $a_n = 2^{n-1};$ 10. $a_n = n^2.$

A veces la sucesión se da mediante una correlación recurrente, es decir, mediante una fórmula que expresa a_n a través de ciertos términos de la sucesión que preceden a a_n, por ejemplo:

11. La sucesión de números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, \dots, a_n$, se prefija mediante la fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$, y la condición $a_1 = a_2 = 1$.

Las sucesiones pueden prefijarse también mediante otros métodos, por ejemplo:

12. Una sucesión de aproximaciones decimales del número π por defecto: 3; 3,1; 3,14; 3,141; . . . .

13. Una sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = \frac{1}{[\sqrt{n}]}$ ($[a]$ es la parte entera del número a, es decir, el número entero máximo que no sobrepasa de a).

Por cuanto toda sucesión numérica puede considerarse como función de un argumento natural, a las sucesiones numéricas se extienden los conceptos de monotonía y acotación de las funciones.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *creciente*, si para cualesquiera números naturales n_1 y n_2 de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} < a_{n_2}$. Son crecientes, por ejemplo, las sucesiones 1, 9, 10, 12.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *no decreciente*, si para cualesquiera números naturales n_1 y n_2 de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} \leqslant a_{n_2}$. Son no decrecientes, por ejemplo, las sucesiones 5 y 11.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *decreciente*, si para cualesquiera números naturales n_1 y n_2 de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} > a_{n_2}$. Son decrecientes, por ejemplo, las sucesiones 2, 3, 6, 8.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *no creciente*, si para cualesquiera números naturales n_1 y n_2 de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} \geqslant a_{n_2}$. Por ejemplo, la sucesión 13 es no creciente, puesto que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{2}$, etc.

La sucesión numérica se denomina *monótona*, si es decreciente o creciente, o bien, si no decrece o no crece. Todas las sucesiones aducidas anteriormente son monótonas, a excepción de las sucesiones 4 y 7.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada* superiormente, si existe un número B tal que para cualquier número natural n se verifica la desigualdad $a_n \leqslant B$. Por ejemplo, las sucesiones 2,3,4,5,6,7,8,12 y 13 son acotadas superiormente.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada inferiormente*, si existe un número A tal, que para cualquier número natural n se verifica la desigualdad $a_n \geqslant A$. Son acotadas inferiormente, por ejemplo, las sucesiones 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11,12 y 13.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada*, si está acotada inferior y superiormente. Son acotadas, por ejemplo, las sucesiones 2, 4, 5, 6, 7, 8.

Entre toda clase de sucesiones numéricas a continuación se examinarán detalladamente sólo las sucesiones que se llaman progresiones aritmética y geométrica.

Se denomina *progresión aritmética* una sucesión de números en la que cada término, a partir del segundo, es igual al precedente sumado con un mismo número que es constante para la sucesión dada, es decir, una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal, que para cualquier n natural se verifica $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es un número constante para la sucesión dada, llamado *razón* de la progresión.

Por ejemplo, las sucesiones

$$1, 2, 3, 4 \ldots, \tag{1}$$

$$3, 1, -1, -3, \ldots$$

son progresiones aritméticas. La razón de la progresión aritmética (1) es $d = 1$, y la de la progresión (2) es $d = -2$. En cualquier progresión aritmética el término que ocupa el n-ésimo lugar puede expresarse siempre a través del primer término y la razón de la progresión dada:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d. \tag{3}$$

Esta es la *fórmula para el término general de una progresión aritmética*.

La demostración de esta fórmula se realiza por el método de inducción matemática.

Para $n = 1$ la fórmula (3) se escribirá en la forma $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$, es decir, resultará ser válida. Supongamos que la fórmula

(3) es válida para $n = k$, es decir, supongamos que el k-ésimo término de la progresión aritmética se calcula por la fórmula

$$a_k = a_1 + (k - 1)\,d. \tag{4}$$

Demostremos que la fórmula (3) es válida para $n = k + 1$, o sea, demostremos la validez de la fórmula

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]\,d. \tag{5}$$

En efecto, por definición de progresión aritmética tenemos $a_{k+1} = a_k + d$. Por consiguiente, haciendo uso de la fórmula (4), se puede escribir que $a_{k+1} = a_1 + (k - 1)\,d + d = a_1 + [(k + 1) - 1]\,d$, es decir, obtener la validez de la fórmula (5). De este modo queda demostrada la validez de la fórmula (3) para todo número natural n.

Valiéndose de la fórmula (3) y de las propiedades de las operaciones con números, resulta fácil comprobar la validez de la siguiente afirmación: para cualquier progresión aritmética $\{a_n\}$, siendo $m + n = k + l$ se verifica la igualdad

$$a_m + a_n = a_k + a_l. \tag{6}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a_m + a_n &= a_1 + d\,(m - 1) + a_1 + d\,(n - 1) = \\ &= 2a_1 + d\,(m + n - 2) = 2a_1 + d\,(k + l - 2) = \\ & a_1 + (k - 1)\,d + a_1 + (l - 1)\,d = a_k + a_l. \end{aligned}$$

El número, igual a la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, se designa con S_n, es decir,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n;$$

los términos a_1 y a_n reciben el nombre de *términos extremos para la suma* S_n. Haciendo uso de la propiedad (6) y de las propiedades que poseen las operaciones sobre números, obtenemos la siguiente fórmula para S_n:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}. \tag{7}$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} 2S_n = S_n + S_n &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_1 + a_2 + \ldots \\ &\ldots + a_n) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots \\ &\ldots + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)\,n, \end{aligned}$$

es decir, *la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es igual al producto de la semisuma de los términos extremos por el número de términos que se suman.*

La suma S_n de una progresión aritmética $\{a_n\}$ se puede expresar mediante el primer término y la razón de la progresión dada:

$$S_n = \frac{[2a_1 + d\,(n - 1)]\,n}{2}.$$

Ejemplo. Hállese la suma de los números naturales de dos cifras que no se dividen ni por 2 ni por 3.

Es evidente que todos los números naturales de dos cifras forman una progresión aritmética con el primer término $a_1 = 10$ y la razón $d = 1$, es decir, forman la siguiente sucesión de números: 10, 11, 12, 13, . . ., 97, 98, 99. Haciendo uso de la fórmula (7), es fácil hallar la suma $S^{(1)}$ de todos estos números: $S^{(1)} = \frac{(10+98)\cdot 90}{2}$. Los números de dos cifras, que se dividen por 2, forman la progresión aritmética 10, 12, 14, . . ., 96, 98 cuya suma es $S^{(2)} = \frac{(10+98)\cdot 45}{2}$.

Análogamente, los números que se dividen por 3 forman la progresión aritmética 12, 15, 18, . . ., 96, 99 cuya suma es $S^{(3)} = \frac{(12+99)\cdot 30}{2}$.

Es fácil ver que las últimas dos progresiones aritméticas tienen los términos comunes 12, 18, 24, . . ., 96 que representan los números divisibles a la vez por 2 y por 3, es decir, divisibles por 6. La suma S de todos los números naturales de dos cifras que no se dividen ni por 2 ni por 3 se halla del modo siguiente: $S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}$ donde $S^{(6)}$ es la suma de todos los números de dos cifras divisibles tanto por 2 como por 3, es decir, divisibles por 6. La suma $S^{(6)}$ debe sumarse porque al sustraer las sumas $S^{(2)}$ y $S^{(3)}$, la suma de los números divisibles por 6 se resta dos veces. Haciendo uso de (3), hallemos el número de términos de la progresión aritmética formada de tales números (es evidente que la razón de esta progresión es igual a 6) : $96 = 12 + (n-1)\,6$, de donde $n = 15$. Por consiguiente, $S^{(6)} = \frac{(12+96)\cdot 15}{2}$ y $S = \frac{15}{2}\,(109\cdot 6 - 108\cdot 3 - 111 \times \times 2 + 108) = 1620$, es decir, $S = 1620$.

Se llama *progresión geométrica* una sucesión de números en la cual todo término, a partir del segundo, es igual al precedente multiplicado por un número distinto de cero y constante para la sucesión dada, es decir, una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que para cualquier n natural se verifica $a_{n+1} = a_n q$, donde q es un número distinto de cero y constante para la sucesión dada, denominado *razón* de la progresión.

Por ejemplo, las sucesiones

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots;$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots;$$

$$\frac{1}{7},\ -\frac{1}{21},\ \frac{1}{63},\ -\frac{1}{189},\ \ldots$$

son progresiones geométricas con las razones 2, (-1), $\left(-\frac{1}{3}\right)$, respectivamente.

El término general de una progresión geométrica se calcula por la fórmula

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{8}$$

La **demostración** de la validez de esta fórmula para cada número natural n se realiza por el método de inducción matemática. Cuando $n = 1$, la fórmula (8) se escribirá en la forma $a_1 = a_1 q^0$, es decir, resulta ser válida. Supongamos que la fórmula (8) se verifica para $n = k$, es decir, supongamos que es válida la fórmula

$$a_k = a_1 q^{k-1}. \tag{9}$$

Demostremos que la fórmula (8) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la validez de la fórmula

$$a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}. \tag{10}$$

En efecto, por definición de progresión geométrica tenemos $a_{k+1} = a_k q$. Por consiguiente, haciendo uso de la fórmula (9), podemos escribir que

$$a_{k+1} = (a_1 q^{k-1})\, q = a_1 q^{(k+1)-1},$$

es decir, obtener la validez de la fórmula (10). De este modo queda demostrada la validez de la fórmula (8) para cualquier número natural n.

Hallemos, con ayuda de la fórmula para el término general, la fórmula para la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Si $q = 1$, entonces $S_n = na_1$.

Si $q \neq 1$, estudiemos la expresión

$$S_n - S_n q = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} - a_1 q - a_1 q^2 - \ldots$$

$\ldots - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n = a_1 - a_1 q^n = a_1 (1 - q^n)$. Por consiguiente, $S_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$. Como $q \neq 1$, se tiene

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

§ 2. Límite de una sucesión numérica

Sea dada la sucesión numérica $\{a_n\}$.

El número a se denomina límite de la sucesión numérica $\{a_n\}$, si para cualquier número positivo ε existe tal número N, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Por ejemplo, es obvio que el límite de la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = c$, será el número c.

El hecho de que el número a es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ se escribe del modo siguiente: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, o bien $a_n \to a$ para $n \to \infty$.

Ejemplos. 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, si $a_n = q^n$ y $0 < |q| < 1$.

Tomemos un número arbitrario $\varepsilon > 0$.

a) si $\varepsilon < 1$, hagamos $N = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$. Está claro que $N > \log_{|q|} \varepsilon$, y para todo $n > N$ tenemos $|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N < |q|^{\log_{|q|}\varepsilon} = \varepsilon$.

b) Si $\varepsilon \geqslant 1$, hagamos $N = 1$. Es fácil ver que para todo $n > 1$ tenemos $|q^n - 0| = |q|^n < 1 \leqslant \varepsilon$.

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$, es decir, queda demostrado que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, si $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Elijamos arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$. Hagamos $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Entonces, $N > \frac{1}{\varepsilon}$ y para cualquier $n > N$ tenemos $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, si $a_n = \frac{1}{n}$. Tomemos arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$. Hagamos $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Entonces, para cualquier $n > N$ tenemos $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

Diremos que *una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite* $(+\infty)$ y escribiremos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, o bien $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, siempre que para cualquier número positivo A, tan grande como se quiera, exista un número N tal, que para todo $n > N$ se verifique la desigualdad $a_n > A$.

Ejemplos. 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = n^2$.

Para cualquier número positivo A hagamos $N = ([\sqrt{A+1}] + 1)$. Entonces, para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = n^2 > N^2 = ([\sqrt{A+1}] + 1)^2 (\sqrt{A+1})^2 = A + 1 > A,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = n$.

Para cualquier número positivo A hagamos $N = ([A + 1] + 1)$. Entonces, para todo $n > N$ tenemos $a_n = n > N = [A + 1] + 1 > A + 1 > A$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = 2^{n-1}$.

Para cualquier número positivo A hagamos $N = [\log_2 (A+1)] + 2$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = 2^{n-1} > 2^{N-1} = 2^{[\log_2 (A+1)]+1} > 2^{\log_2 (A+1)} = A+1 > A,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Diremos que *una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene por límite* $(-\infty)$ y escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, o bien $a_n \to -\infty$ cuando $n\to\infty$, si para cualquier número negativo B tal, que $|B|$ sea un número tan grande como se quiera, existe tal número N que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $a_n < B$.

Ejemplos. 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = -2-3(n-1)$.

Para cualquier B negativo hagamos $N = \left[\frac{|B-1|}{3}\right] + 1$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = -2-3(n-1) < -2-3(N-1) = -2-3\left[\frac{|B-1|}{3}\right] <$$
$$< -2-3\left(\frac{|B-1|}{3}-1\right) = -2-3\left(\frac{1-B}{3}-1\right) =$$
$$= -2-(1-B-3) = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = -2^n$.

Para cualquier número negativo B hagamos $N = [\log_2 |B| + 1]$. Entonces para cualquier $n > N$ tenemos

$$a_n = -2^n < -2^N = -2^{[\log_2 |B|+1]} < -2^{\log_2 |B|} = -|B| = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = \log_{\frac{1}{2}} n$.

Para cualquier número negativo B hagamos $N = [2^{|B|} + 1]$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = \log_{\frac{1}{2}} n < \log_{\frac{1}{2}} N = \log_{\frac{1}{2}} [2^{|B|}+1] < \log_{\frac{1}{2}} 2^{|B|} = -|B| = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observemos que *existen sucesiones que no tienen límite*. A título de tal sucesión puede servir, por ejemplo, la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = (-1)^n$.

Teoremas sobre las sucesiones numéricas. Se analizarán aquí solamente las sucesiones que tienen límite finito.

Teorema 1. *Si una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene límite* A *y el número* $p < A$, *entonces existe un número* N *tal, que para todo* $n > N$ *se verifica la desigualdad* $p < a_n$.

Demostración. Por cuanto A es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Escribamos esta desigualdad en la forma

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon. \tag{1}$$

Supongamos que $\varepsilon = A - p > 0$. Para $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad doble (1). Sustituyendo en el primer miembro de la desigualdad (1) $\varepsilon = A - p$, obtenemos que $p < a_n$, lo que se trataba de demostrar.

Teorema 2. *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite A y el número $q > A$, entonces existe un número N tal, que para cualquier $n > N$ se verifica la desigualdad $q > a_n$.*

La demostración del teorema 2 es análoga a la del teorema 1 y por esta razón se omite.

Observaciones. 1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, y $A > 0$, se encontrará un número N tal, que $a_n < 0$ para todo $n > N$.

2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ y $A < 0$, se encontrará un número N tal, que $a_n < 0$ para todo $n > N$.

Teorema 3. *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite A, existe un número positivo M tal, que $|a_n| \leqslant M$, es decir, la sucesión que tiene límite está acotada.*

Demostración. Elijamos un número M_1 de modo tal, que sea éste superior a $|A|$, es decir, que se verifique la desigualdad $-M_1 < A < M_1$. Al introducir las designaciones $p = -M_1$, $q = M_1$, tendremos que $A > p$ y $A < q$. Según el teorema 1, existe un número N_1 tal, que para cualquier $n > N_1$ se verifica la desigualdad $p < a_n$. Según el teorema 2, existe un número N_2 tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $q > a_n$. Elijamos el número $N = \text{máx}\,(N_1, N_2)$. En este caso para cualquier $n > N$ es válida la desigualdad doble $p < a_n < q$, o bien $-M_1 < a_n < M_1$, es decir, $|a_n| < M_1$. La desigualdad $|a_n| < M_1$ se verifica para cualquier $n > N$, es decir, para $n = N + 1$, $n = N + 2$, $n = N + 3$, $n = N + 4$, etc. Quiere decir, la desigualdad $|a_n| < M_1$ puede ser ilícita sólo para los primeros N términos de la sucesión.

Elijamos entre los números $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ..., $|a_{N-1}|$, $|a_N|$, M_1 el número mayor y designémoslo con M. Se hace claro que para cualquier n será válida la desigualdad $|a_n| \leqslant M$, lo que se trataba de demostrar.

Teorema 4. *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, este límite es único.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que simultáneamente $a_n \to A$ y $a_n \to B$ y sea $A < B$. Elijamos cualquier número C entre A y B, es decir, $A < C < B$. Por cuanto $a_n \to A$ y $A < C$, entonces, de acuerdo con el teorema 2, existe un número

N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a_n < C$. Por cuanto $a_n \to B$ y $C < B$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, existe un número N_2 tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad $a_n > C$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces el término de la sucesión a_N satisface, a la vez, dos desigualdades $a_N > C$ y $a_N < C$, lo que es imposible. Por consiguiente, la suposición no es cierta y es lícita la afirmación del teorema 4.

Teorema 5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$.

Demostración. Sea $A = 0$. En este caso la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$. Por cuanto esta desigualdad puede reescribirse en la forma $||a_n| - 0| < \varepsilon$, resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

Sea $A \neq 0$. En este caso la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $|a_n - A| < \varepsilon$.

Si $A > 0$, entonces, conforme a la observación 1 al teorema 2, existe un número N_2 tal, que para $n > N_2$ tendremos $a_n > 0$. Al elegir el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$, obtenemos que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $||a_n| - |A|| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$. En cambio, si $A < 0$, entonces, de acuerdo con la observación 2 al teorema 2, existe un número N_2 tal, que $a_n < 0$. Tomando el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$ y teniendo presente que $a_n = -|a_n|$ y $|A| = -|A|$, llegamos a que para todo $n >$ N se verifica la desigualdad $|-(|a_n| - |A|)| < \varepsilon$, la cual puede escribirse en la forma $||a_n| - |A|| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$.

Las operaciones aritméticas sobre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, como también la comparación de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se realizan igual que sobre las funciones, es decir, con valores iguales del argumento, o, en otras palabras, término a término.

Teorema 6. *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ *son y* $\{b_n\}$ *tales, que* $a_n = b_n$ *para cualquier* n, *y* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $A = B$, *es decir, si* $a_n = b_n$ *para cualquier* n, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Demostración. La condición $a_n = b_n$ para cualquier n significa que se tiene en realidad solamente una sucesión y, de acuerdo con el teorema 4, ésta no puede tener dos límites; quiere decir, $A = B$ y el teorema queda demostrado.

Teorema 7. *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ *son tales, que* $a_n \geqslant b_n$ *para cualquier* n, *y* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $A \geqslant B$, *es decir, si* $a_n \geqslant b_n$ *para cualquier* n, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea $A < B$. Elijamos un número C tal, que sea $A < C < B$. Por cuanto $a_n \to A$ y $A < C$, entonces, conforme al teorema 2, existe un número N_1 tal, que para cualquier $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a_n < C$. Por cuanto $b_n \to B$ y $B > C$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, existe un número N_2 tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $b_n > C$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. En este caso para cualquier $n > N$ se verificarán simultáneamente las desigualdades $a_n < C$ y $C < b_n$. De éstas de deduce que $a_n < b_n$, lo que contradice las condiciones del teorema. Quiere decir que nuestra suposición no es cierta y el teorema 7 es válido.

Observación. El teorema 7 no puede ser hecho más riguroso, es decir, de la desigualdad estricta $a_n > b_n$ para los términos de la sucesión, no se desprende obligatoriamente una desigualdad estricta para los límites, por ejemplo, si $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = -\frac{1}{3^n}$, entonces $a_n > b_n$ para cualquier n, pero $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Teorema 8. *Si las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son tales, que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para todo n y que $a_n \to a$, $c_n \to a$, entonces $b_n \to a$.*

Demostración. Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Por cuanto $a_n \to a$, existe un número N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Por cuanto $c_n \to a$, existe un número N_2 tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces para cualquier $n > N$ se verificarán simultáneamente las desigualdades $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Agreguemos a estas desigualdades la desigualdad $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ que se verifica para cualquier n. De acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, para cualquier $n > N$ será válida la desigualdad $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, la cual puede escribirse en la forma $| b_n - a | < \varepsilon$. Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $| b_n - a | < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = a$. El teorema está demostrado.

Observación. Si $a \leqslant b_n \leqslant c_n$ para cualquier n y si $c_n \to a$, entonces $b_n \to a$.

Teorema 9. *Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son tales, que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, y $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ es tal, que $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = A + B$, es decir, si $a_n \to A$, $b_n \to B$, entonces $(a_n + b_n) \to (A + B)$.*

Demostración. Por cuanto $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$ entonces para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$, y existe un número N_2 tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $B - \varepsilon_1 < b_n < B + \varepsilon_1$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces, para $\varepsilon_1 > 0$, elegido arbitrariamente, existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifican simultáneamente las desigualdades $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$ y $B - \varepsilon_1 < b_n < B + \varepsilon_1$. En virtud de las propiedades de las desigualdades, será lícita la desigualdad

$$(A + B) - 2\varepsilon_1 + < (a_n + b_n) < (A + B) + 2\varepsilon_1.$$

Elijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y denotemos $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Entonces, según se deduce de lo anterior, existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $(A + B) - \varepsilon < (a_n + b_n) < (A + B) + \varepsilon$, es decir, por definición de límite, tenemos $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = (A + B)$.

El teorema está demostrado.

Teorema 10. *Si* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $(a_n - b_n) \to (A - B)$.

La demostración de este teorema es igual a la del teorema 9 y por esta razón aquí se omite.

Teorema 11. *Si* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $(a_nb_n) \to AB$.

Demostración. Por cuanto $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, entonces para cualquier número prefijado $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad

$$| a_n - A | < \varepsilon_1. \tag{2}$$

Por cuando $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, para cualquier número prefijado $\varepsilon_2 > 0$ existe un número N_2 tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad

$$| b_n - B | < \varepsilon_2. \tag{3}$$

Veamos una desigualdad

$$| a_nb_n - AB | = | a_nb_n - a_nB + a_nB - AB | \leqslant$$
$$\leqslant | a_n | \, | b_n - B | + | B | \, | a_n - A | . \tag{4}$$

Ella es válida para todo n. Por cuanto existe, de acuerdo con el teorema, 3, un número positivo M tal, que $| a_n | \leqslant M$ para cualquier n, entonces, al denotar $d = | B | + 1$ $(d > 0)$, a partir de la desigualdad (4) obtenemos la desigualdad

$$| a_nb_n - AB | \leqslant M \, | b_n - B | + d \, | a_n - A | , \tag{5}$$

que es válida para cualquier n. Tomemos ahora al azar $\varepsilon > 0$ y designemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2d}$ y $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\mu}$. En este caso para el ε_1 elegido existe un número N_1 tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad (2), y para el ε_2 elegido existe un número N_2 tal, que se verifica la desigualdad (3), cualquiera que sea $n > N_2$. Elijamos el número $N = \text{máx}\,(N_1, N_2)$. Entonces para todo $n > N$ se verifican simultáneamente las desigualdades (2), (3) y (5). Sustituyendo en (5) las estimaciones (2) y (3), llegamos a que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$| a_nb_n - AB | < \varepsilon. \tag{6}$$

Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, se ha determinado un número N tal, que para todo $n > N$ es válida la desigualdad (6), es decir, por definición de límite, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)=AB=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\times$ $\times\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$. El teorema está demostrado.

Teorema 12. *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite $A\neq 0$, existe un número N tal, que para todo $n>N$ se verifica la desigualdad* $|a_n|>\frac{|A|}{2}$.

Demostración. Elijamos $\varepsilon=\frac{|A|}{2}$. Por cuanto la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, entonces, por definición de límite, para dicho $\varepsilon>0$ existe un número N tal, que para todo $n>N$ se verifica la desigualdad $|a_n-A|<\frac{|A|}{2}$.

Por cuanto $|a_n-A|\geqslant|A|-|a_n|$, resulta que para todo $n>N$ es válida la desigualdad $|A|-|a_n|<\frac{|A|}{2}$, de donde $\frac{|A|}{2}<|a_n|$. El teorema está demostrado.

Teorema 13. *Si $a_n\to A$, $b_n\to B$, donde $b_n\neq 0$ para todo n,* y $B\neq 0$, *entonces* $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{A}{B}$.

Demostración. Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, existe para cualquier $\varepsilon_1>0$ número N_1 tal, que para todo $n>N_1$ se verifica la desigualdad

$$|a_n-A|<\varepsilon_1. \tag{7}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=B$, existe para cualquier $\varepsilon_2>0$ un número N_2 tal, que para todo $n>N_2$ se verifica la desigualdad

$$|b_n-B|<\varepsilon_2. \tag{8}$$

Según el teorema 3, existe un número positivo M tal, que para todo n tenemos

$$|a_n|\leqslant M. \tag{9}$$

Según el teorema 12, existe un número N_3 tal, que para todo $n>N_3$ se verifica la desigualdad

$$|b_n|>\frac{|B|}{2}. \tag{10}$$

Para cualquier n se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|=\frac{|a_nB-b_nN|}{|b_nB|}=\frac{|a_nB-a_nb_n+a_nb_n-Ab_n|}{|b_n|\,|B|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|a_n(B-b_n)|+|b_n(a_n-A)|}{|b_n|\,|B|}\leqslant\frac{|a_n|\,|b_n-B|}{|b_n|\,|B|}+\frac{|a_n-A|}{|B|}. \tag{11}$$

Ahora, tomemos al azar $\varepsilon>0$ y denotemos $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon|B|}{2}$ y $\varepsilon_2=$ $=\frac{|B|^2}{4M}$. Entonces para el ε_1 elegido existe un número N_1 tal, que para todo $n>N_1$ se verifica la desigualdad (7), y para el ε_2

elegido existe un número N_2 tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad (8). Elijamos un número $N = \text{máx}\,(N_1, N_2, N_3)$. Entonces para todo $n > N$ se verifican simultáneamente las desigualdades (7), (8), (9), (10) y (11). Sustituyendo las estimaciones (7), (8), (9) y (10) en el segundo miembro de la desigualdad (11), obtenemos que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad (12), y esto significa que el teorema 13 es válido.

Teorema 14. *Si $a_n \to A$, y b es un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces $b^{a_n} \to b^A$.*

Demostración. Por cuanto $a_n \to A$, entonces para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1. \tag{13}$$

Sea $b > 1$. Como la función $y = b^x$ es creciente, de la desigualdad (13) se deduce que $b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}$, es decir, para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}$. Tomemos un número positivo arbitrario ε y designemos $\varepsilon_1 = \log_b\left(1 + \frac{1}{b^A}\right)$. En este caso para el ε_1 elegido existe un número N tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}.$$

Está claro que

$$b^{A-\varepsilon_1} = \frac{b^A}{b^{\varepsilon_1}} = \frac{b^A}{\left(1+\frac{\varepsilon}{b^A}\right)} = \frac{b^{2A}}{b^A+\varepsilon} > \frac{b^{2A}-\varepsilon^2}{(b^A+\varepsilon)} = b^A - \varepsilon;$$

$$b^{A+\varepsilon_1} = b^A b^{\varepsilon_1} = b^A\left(1 + \frac{\varepsilon}{b^A}\right) = b^A + \varepsilon.$$

Hemos mostrado, pues, que para cualquier ε positivo existe un número N tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $b^A - \varepsilon < b^{a_n} < b^A + \varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^A$.

Para el caso en que $0 < b < 1$ la demostración del teorema se realiza de modo análogo.

Teorema 15. *Una sucesión creciente y acotada superiormente $\{a_n\}$ tiene límite.*

Teorema 16. *Una sucesión decreciente y acotada inferiormente $\{a_n\}$ tiene límite.*

Omitiremos aquí la demostración de estos teoremas.

Ejemplos de la aplicación de los teoremas sobre los límites de las sucesiones numéricas.

Hállese el límite de una sucesión $\{a_n\}$, si $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$.

Escribamos la fórmula para el término general en la forma $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}$. Aplicando sucesivamente los teoremas sobre los límites de un cociente, producto y de una suma, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\right]} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\right)} = \frac{(1+0)(1+0)}{(1+0)(1+0)} = 1.$$

2. Hállese el límite de la sucesión d_n, si $d_n = \frac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}$ ($a_2 \neq 0$ y $a_2n^2+b_2n+c_2 \neq 0$, cualquiera que sea n).

Al dividir por n^2 el numerador y denominador en la expresión para d_n y al aplicar los mismos teoremas que se han usado en el ejemplo antecedente, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+b_1\frac{1}{n}+c_1\frac{1}{n^2}}{a_2+b_2\frac{1}{n}+c_2\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_1+b_1\frac{1}{n}+c_1\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_2+b_2\frac{1}{n}+c_2\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_2 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_2}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_2}{n^2}} = \frac{a_1+0+0}{a_2+0+0} = \frac{a_1}{a_2}.$$

3. Aclárese si tiene límite la sucesión $\{a_n\}$, siendo $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Al estudiar el binomio de Newton hemos mostrado la validez de la desigualdad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, es decir, hemos mostrado que la sucesión $\{a_n\}$ es tal, que $a_n < a_{n+1}$, cualquiera que sea n. De la condición $a_n < a_{n+1}$ es fácil obtener que $a_{n_1} < a_{n_2}$ para cualesquiera $n_1 < n_2$, es decir, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente. Mostremos ahora que para todo n se verifica la desigualdad $a_n < 3$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente.

En efecto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$
$$=1+\frac{n}{n}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ \ldots\ \frac{[n-(n-1)]}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=$$
$$=1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\ldots$$
$$\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{n}<$$
$$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \ldots\ \frac{1}{2}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=3.$$

Según el teorema 15, una sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite. Este límite se denota acostumbradamente con la letra e. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

La definición del número e permite calcularlo con cualquier grado de exactitud. En el curso de análisis matemático se muestra que el número e es irracional.

4. Aclárese si tiene límite la sucesión $\{a_n\}$ que viene dada mediante la relación recurrente $a_1=\sqrt{2}$ y $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, cualquiera que sea $n\geqslant 2$.

Aclaremos ante todo si está acotada o no la sucesión citada. Mostremos que $a_n<2$. La demostración se realizará por el método de inducción matemática.

a) Cuando $n=1$, la desigualdad $a_1<2$ se verifica, puesto que $a_1=\sqrt{2}$.

b) Supongamos que la desigualdad se verifica para $n=k$, es decir, $a_k<2$.

c) Mostremos que de este hecho proviene la validez de la desigualdad para $n=k+1$. Efectivamente, $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=$ $=2$. Por consiguiente, la desigualdad $a_n<2$ se verifica para cualquier n.

Mostremos que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente. Para ello será suficiente mostrar que $a_n<a_{n+1}$, es decir, demostrar la desigualdad $a_n<\sqrt{2+a_n}$.

Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $a_n^2<2+a_n$, la cual puede escribirse así: $(a_n+1)(a_n-2)<0$. Por cuanto

$0<a_n<2$, la última desigualdad es obvia y, por tanto, se verifica la desigualdad $a_n<a_{n+1}$ que es equivalente a ella. Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente; quiere decir tiene un límite que se denotará con c. Mostremos que $c=2$. En efecto, haciendo uso de la relación recurrente $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, tenemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+a_{n-1}}$.

Apliquemos el teorema (cuya demostración no se da aquí): *si una sucesión $\{b_n\}$ es tal, que $b_n\geqslant 0$, y tiene límite, entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{b_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$. Resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+a_{n-1}}=$ $=\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}}$. Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}$, resulta que es preciso buscar c partiendo de la condición $c=\sqrt{2+c}$. Elevando esta igualdad al cuadrado, obtenemos que $c=2$.

5. Supongamos que $a>1$ y α es un número positivo irracional. Recordemos la definición de a^α. Por cuanto cualquier número irracional es una fracción decimal infinita, entonces, al romper dicha fracción en cierto paso, obtenemos el valor aproximado del número citado por defecto, y al añadir a la última cifra la unidad, obtenemos el valor aproximado del mismo número por exceso. Quiere decir, para aproximar el número α, que es igual a $p, q_1q_2q_3 \ldots q_n, \ldots$, $\ldots$, obtenemos dos sucesiones

$$p,\ p+\frac{q_1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\ldots+\frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

$$p+1,\ p+\frac{q_1+1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\ldots+\frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

Designemos con b_n el término general de la primera sucesión y con c_n, el término general de la segunda sucesión. En este caso se hace claro que la sucesión $\{b_n\}$ es creciente y acotada superiormente (aunque sea por el número $(p+1)$), y la sucesión c_n es decreciente y acotada inferiormente (aunque sea por el número p). Veamos la sucesión a^{b_n}. Por cuanto $a>1$, entonces, de la condición $b_n<b_{n+1}$ se desprende que $a^{b_n}<a^{b_{n+1}}$. Como la sucesión $\{b_n\}$ es creciente, la última desigualdad significa que la sucesión $\{a^{b_n}\}$ es creciente. Además, $a^{b_n}<a^{p+1}$, es decir, la sucesión a^{b_n} está acotada superiormente. De acuerdo con el teorema 15, la sucesión a^{b_n} tiene un límite que se denotará con A. De modo análogo se muestra que la sucesión a^{c_n} tiene un límite que se denotará con B. Demostremos que $A=B$.

Analicemos la sucesión $\{a^{c_n}-a^{b_n}\}$ y mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{c_n}-a^{b_n})=0$. En efecto, al aplicar los teoremas sobre los límites, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}(a^{c_n}-a^{b_n})=\lim_{n\to+\infty}[a^{b_n}(a^{c_n-b_n}-1]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} a^{b_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}(a^{c_n-b_n}-1)=\lim_{n\to+\infty} a^{b_n}\left(a^{\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)}-\lim_{n\to+\infty} 1\right)=$$

$$=A(a^0-1)=0,$$

puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{10^{n-1}}=0$. Ahora, de la condición de que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{c_n}-a^{b_n})=0$ obtenemos $\lim\limits_{n\to+\infty}a^{c_n}-\lim\limits_{n\to+\infty}a^{b_n}=0$, es decir, $A=B$.

Así pues, ambas sucesiones tienen un mi mo límite, el cual tiene por expresión el número a^α.

Cuando $a>1$ y $\alpha<0$, o bien $0<a<1$ y α es un número cualquiera irracional, los razonamientos son iguales.

6. Sea dada una sucesión $\{a_n\}$. Podemos construir otra sucesión $\{S_n\}$, regiéndonos por la regla

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \ldots,\ S_n=a_1+a_2+\ldots$$
$$\ldots+a_n,\ \ldots.$$

Se puede escribir formalmente la suma infinita

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

que se denomina *serie*. La sucesión $\{S_n\}$ lleva el nombre de *sucesión de sumas parciales de la serie citada*. En ciertos casos la sucesión $\{S_n\}$ puede tener un límite finito S. Entonces se dice que la serie *converge* y el número S recibe el nombre de *suma* de la serie. Demos a conocer algunos ejemplos.

6.1. Sea dada una progresión geométrica $\{a_n\}$ con el primer término a_1 y con la razón q tal, que $0<|q|<1$. Examinemos la serie $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots$ y formemos la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales de dicha serie. La fórmula para calcular S_n con cualquier n es

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Aplicando los teoremas sobre los límites y tomando en consideración que $0<|q|<1$, tenemos: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n\right]=$ $=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$. Por cuanto $\lim\limits_{n\to-\infty}q^n=0$ para $0<|q|<1$, resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$, es decir, por definición, la suma de la serie escrita se presentará por el número $\frac{a_1}{1-q}$. Por consiguiente, la suma de una progresión geométrica para $0<|q|<1$ es igual al primer término dividido por la diferencia entre la unidad y la razón de la progresión, es decir, $S=\frac{a_1}{1-q}$.

6.2. Recurriendo a la definición de suma de una serie, se puede ofrecer otra definición del número irracional α.

Supongamos que un número irracional positivo α es igual a p,

$q_1q_2 \ldots q_n \ldots$ Entonces

$$p,\ p+\frac{q_1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

es una sucesión de aproximaciones decimales del número α por defecto, y

$$p+1,\ p+\frac{q_1+1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100},\ \ldots,$$

$$p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

es una sucesión de aproximaciones decimales del número α por exceso. Estas sucesiones tienen un mismo límite que se denomina número α. Por eso, el número α puede ser definido como la suma de la serie

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n}+\ldots.$$

Observemos que si α es una fracción periódica infinita

$$\alpha=p,\ q_1q_2\ldots q_k(p_1p_2\ldots p_m),$$

entonces α también puede definirse como suma de la serie

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_k}{10^k}+$$
$$+\frac{p_1}{10^{k+1}}+\frac{p_2}{10^{k+2}}+\ldots+\frac{p_m}{10^{k+m}}+\frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}}+\ldots$$

6.3. Demostremos la regla por medio de la cual una fracción decimal periódica se transforma en una fracción ordinaria. Sea dada una fracción decimal periódica positiva, cuya parte entera es igual, para brevedad, a cero. En este caso dicha fracción decimal es igual a la ordinaria en la que el numerador es un número igual a la diferencia entre los números formados por las cifras que preceden al segundo período y las que preceden al primer período; el denominador es un número en cuya representación la cifra 9 se repite tantas veces cuntas cifras tiene el período, y luego, tras los nueve, el cero se repite tantas veces cuantas cifras se tienen entre la coma y el primer período.

Ejemplos.

$$0{,}3\,(14)=\frac{314-3}{990}=\frac{311}{990};\ 0{,}127\,(31)=\frac{12731-127}{99000}=\frac{12604}{99000}=\frac{3151}{24750}.$$

Demostración. Supongamos que la fracción α tiene por expresión

$$\alpha=0,\ q_1q_2\ldots q_k(p_1p_2\ldots p_m)$$

Escribamos esta fracción en forma de la suma de la serie

$$\alpha=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_k}{10^k}+\frac{p_1}{10^{k+1}}+\ldots+\frac{p_m}{10^{k+m}}+$$
$$+\frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}}+\ldots+\frac{p_{2m}}{10^{k+2m}}+\ldots$$

Realicemos las transformaciones evidentes de esta serie

$$\alpha=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\ldots+q_k)+$$
$$+\frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m)+$$
$$+\frac{1}{10^{k+2m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m)+\ldots$$
$$+\frac{1}{10^{k+nm}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m)+\ldots$$

En esta serie los términos, a partir del segundo, forman una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{10^m}$. Aplicando la fórmula para la suma de una progresión geométrica con la razón q tal, que $0<|q|<1$, obtenemos

$$\alpha=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\ldots+q_k)+$$
$$+\frac{\frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m)}{1-\frac{1}{10^m}}=$$
$$=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\ldots+q_k)+\frac{10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m}{10^k(10^m-1)}=$$
$$=\frac{(10^m-1)(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\ldots+q_k)+(10^{m-1}p^1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m)}{10^k(10^m-1)}=$$
$$=\frac{10^{m+k-1}q_1+10^{m+k-2}q_2+\ldots+10^m q_k+10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\ldots+p_m}{10^k(1^m-1)}-$$
$$-\frac{10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\ldots+q_k}{10^k(10^m-1)}=\frac{\overline{q_1q_2\ldots q_kp_1p_2\ldots p_m}-\overline{q_1q_2\ldots q_k}}{\underbrace{999\ldots9}_{m\text{ veces}}\ \underbrace{000\ldots0}_{k\text{ veces}}}$$

y la regla de transformación queda demostrada.

§ 3. Límite de una función

Sea dada una función $y=f(x)$. Un punto a (a es un número finito) se llama *punto de espesamiento* del campo de existencia de la función $y=f(x)$, siempre que en cualquier intervalo, tan pequeño como se quiera, del eje Ox en el que está contenido el punto a exista por lo menos un punto del campo de existencia de dicha función que sea distinto de a. Observemos que el propio punto a puede no pertenecer al campo de definición de la función.

Ejemplos. 1. Para la función $y=2^x$ cualquier punto del eje Ox es el punto de espesamiento de esta función, y todos los puntos de espesamiento pertenecen al campo de existencia de la función.

2. Para la función $y = \frac{1}{x}$ cualquier punto del eje Ox es el punto de espesamiento de esta función. El punto $x = 0$ es también un punto de espesamiento, mas este punto no pertenece al campo de existencia de la función.

3. Sea dada la función $y = \sqrt{\log_2 \operatorname{sen} x}$; el campo de existencia de esta función es $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera. La función citada no tiene puntos de espesamiento.

La definición de punto de espesamiento se da, a menudo, en otros términos. Para cualquier $\delta > 0$ el intervalo $a - \delta < x < a + \delta$ del eje Ox se denomina *entorno* δ *del punto* a.

Un punto a (a es un número finito) se denomina *punto de espesamiento* del campo de existencia de la función $y = f(x)$, si en todo entorno δ del punto a está contenido por lo menos un valor de x, distinto de a, perteneciente al campo de existencia de la función.

Si el punto a es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, existe una infinidad de sucesiones $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, pertenecientes al campo de existencia de la función $y = f(x)$, que tienen por límite el punto a.

Ejemplos. 1. Sea dada la función $y = 2^x$ y supongamos que $a = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función dada. Las sucesiones de puntos $\{x_n\}$, tales, por ejemplo, como:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}; \quad x_n = 1 + \frac{2}{7n}; \quad x_n = 1 + \frac{1}{n^2};$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad x_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)}, \text{ etc.}$$

son sucesiones de puntos pertenecientes al campo de existencia de dicha función, con la particularidad de que en cada caso $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

2. Sea dada la función $y = \frac{1}{x}$ y supongamos que el punto $a = 0$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función dada. Las sucesiones de puntos $\{x_n\}$ tales, por ejemplo, como

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{1}{2^n}; \quad x_n = \frac{1}{4^n + n};$$

$$x_n = -\frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{1}{5^{n(n+1)}}; \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ etc.}$$

son sucesiones de puntos pertenecientes al campo de existencia de esta función, con la particularidad de que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Mostremos que para cualquier función $y = f(x)$ y para todo punto de espesamiento a del campo de existencia de dicha función se puede construir al menos una sucesión de punto $\{x_n\}$ del campo de existencia tal, que se verifique $x_n \neq a$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Elijamos un número positivo δ_1 y tomemos el entorno del punto a que corresponde al número δ_1. Escojamos dentro del entorno cualquier punto $x_1 \neq a$ del campo de existencia de la función mencionada. Tomemos ahora un número positivo δ_2 tal, que sea $\delta_2 < \delta_1$ y $\delta_2 < |a - x_1|$. En el entorno del punto a, correspondiente al número δ_2, tomemos un punto cualquiera $x_2 \neq a$ del campo de existencia de la función, etc. De resultas, obtendremos una sucesión de puntos:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

La sucesión de puntos positivos $\{\delta_n\}$ se elige de modo tal, que ella satisfaga, además de las condiciones ya citadas, una condición más: $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. En efecto para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número N tal, que $\delta_N < \varepsilon$. Empleándose el método indicado de elegir δ_n y x_n, tenemos para cualquier $n > N$ que $\delta_n < \delta_N$, y $|x_n - a| < \delta_n$. Así pues, para $\varepsilon > 0$, elegido al azar, podemos encontrar un N tal, que para todo $n > N$ se verifique $|x_n - a| < \varepsilon$, lo que precisamente significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

De la construcción se ve que para cualquier función $y = f(x)$ y para todo punto de espesamiento a del campo de existencia de dicha función se pueden construir una infinidad de puntos del campo de existencia tales, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Cabe notar que a toda sucesión de este tipo $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ … le corresponde una sucesión $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

Supongamos que el punto a es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número A recibe el nombre de *límite de esta función, cuando x tiende a a*, siempre que para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, que tiene por límite el número a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tenga por límite el número A. En este caso se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Como límite de una función puede intervenir tanto un número finito A, como también $(+\infty)$ ó $(-\infty)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$), si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal, que $x_n \to a$, tenemos $f(x_n) \to +\infty$ ($f(x_n) \to -\infty$).

Ejemplos. 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$.

Con este fin mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{x_n} = 2$ para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$ tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, es decir, que para cualquier sucesión de esta índole y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tal, que con cualquier $n > N$ se verifican las desigualdades $2 - \varepsilon < 2^{x_n} < 2 + \varepsilon$. Observemos que la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ significa que para todo número $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N_1 tal, que con cualquier $n > N_1$ se verifican las desigualdades $1 - \varepsilon_1 < x_n < 1 + \varepsilon_1$.

Supongamos ahora que está dado un número positivo ε. Elijamos un número $\varepsilon_1 = \log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Está claro que $\varepsilon_1 > 0$. Tomemos ahora cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Entonces para esta sucesión $\{x_n\}$ existe un número N_1 tal, que con todo $n > N_1$, se verifican las desigualdades $1-\varepsilon_1 < x_n < 1+\varepsilon_1$, y, por tanto, las desigualdades

$$2^{x_n} < 2^{1+\varepsilon_1} = 2\cdot 2^{\varepsilon_1} = 2\cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = = 2+\varepsilon;$$

$$2^{x_n} > 2^{1-\varepsilon_1} = \frac{2}{2^{\varepsilon_1}} = \frac{2}{2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2-\varepsilon.$$

Así pues, para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función dada $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ se ha encontrado un número $N = N_1$ tal, que se verifica la desigualdad $|2^{x_n} - 2| < \varepsilon$, cualquier que sea $n > N$, es decir, se ha mostrado que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{x_n} = 2$ para cualquier sucesión del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal, que $\lim\limits_{\to+\infty} x_n = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x_n\to 1} 2^{x_n} = 2$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Supongamos que $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, es una sucesión cualquiera de puntos del campo de existencia de la función tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Esto significa que para todo número $\varepsilon_1 > 0$ existe un número N tal, que con cualquier $n > N$ se verifican las desigualdades $0 < |x_n| < \varepsilon_1$. Elijamos arbitrariamente un número positivo B y designemos $\varepsilon_1 = \frac{1}{B}$. Entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ existe tal número N que se verifican las desigualdades $0 < |x_n| < \frac{1}{B}$, cualquiera que sea $n > N$, es decir, que se verifica la desigualdad $\frac{1}{|x_n|} > B$.

Así pues, para cualquier $B > 0$ tenemos un número N tal, que se verifica la desiguadad $\frac{1}{|x_n|} > B$, cualquiera que sea $n > N$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|x_n|}$ para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Diremos que $(+\infty)$ es un *punto de espesamiento* para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, si para cualquier número grande positivo B existe por lo menos un valor de x, perteneciente al campo de existencia de la función $y = f(x)$, tal, que sea $x > B$.

Diremos que $(-\infty)$ es un *punto de espesamiento* para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, si para cualquier número negativo B tal. que $|B|$ es un número tan grande como se quiera, existe por lo menos un valor de x, perteneciente al campo de existencia de la función $y = f(x)$, tal, que sea $x < B$.

En los casos en que $(+\infty)$ o $(-\infty)$ son puntos de espesamiento para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, resulta también fácil mostrar que se puede construir una sucesión de puntos $\{x_n\}$ del campo de existencia de la función $y = f(x)$, la cual tendrá por límite $(+\infty)$ ó $(-\infty)$, respectivamente, y la definición de límite de la función $y = f(x)$ puede extenderse a los casos de tales puntos de espesamiento.

Ejemplo. Para la función $y = 1 + \frac{1}{x}$, tanto $(+\infty)$ como $(-\infty)$ son puntos de espesamiento y $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Para la búsqueda del límite resulta difícil emplear la definición aducida de límite de una función. Por eso, con mayor frecuencia se emplea otra definición de límite, que es equivalente a la dada, y que está basada en el llamado lenguaje «ε, δ».

Supongamos que el punto a es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, y a es un número entero. El número A se denomina *límite de la función $y = f(x)$, cuando x tiende hacia a*, siempre que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal, que para todo x del campo de existencia de esta función y tal que satisfaga la condición $0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Sea $(+\infty)$ un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número A se llama *límite de la función $y = f(x)$ al tender x a $(+\infty)$*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $M > 0$ tal, que con todo x del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y tal que satisface la condición $M < x$ se verifica la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Sea $(-\infty)$ un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número A se llama *límite de la función $y = f(x)$ al tender x a $(-\infty)$*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $M < 0$ tal, que con todo x del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y tal que satisface la condición $x < M$ se verifica la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Análogamente, se pueden dar las definiciones: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, etc. A título de ejemplo aduzcamos una de tales definiciones.

Sea a un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y supongamos que a es un número finito. Diremos que la función $y = f(x)$ *tiene por límite* $(+\infty)$ *cuando* x *tiende hacia* a, si para cualquier número $B > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que con todo x del campo de existencia de la función y tal que satisface la condición $0 < |x - a| < \delta$ se verifica la desigualdad $f(x) > B$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Hallemos los límites de ciertas funciones, valiéndonos de la definición de límite en el lenguaje «ε, δ».

Ejemplos: 1. Sea dada una función $y = 2^x$ y supongamos que $a = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de esta función. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$.

Tomemos un número positivo ε arbirtario y elijamos un número $\delta > 0$. Elijamos, por ejemplo, $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$; está claro que $\delta > 0$. Tomemos ahora cualquier x tal, que $0 < |x - 1| < \delta$, es decir, cualquier $x \neq 1$ del intervalo $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Es evidente que

$$2^x < 1^{1+\delta} = 2\cdot 2^\delta = 2\cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = 2+\varepsilon,$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2\cdot 2^{-\delta} = 2\cdot 2^{-\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2-\varepsilon.$$

Estas desigualdades significan que $|2^x - 2| < \varepsilon$. Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ se ha encontrado tal $\delta > 0$, que $|2^x - 2| < \varepsilon$ para cualquier x del campo de existencia de la función, con la particularidad de que $0 < |x - 1| < \delta$. Por definición, esto significa precisamente que $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$.

2. Está dada la función $y = \frac{1}{|x|}$ y el punto $a = 0$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de esta función. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

$x\to 1$

Tomemos arbitrariamente un número $B > 0$ y elijamos un número $\delta > 0$, por ejemplo, $\delta = \frac{1}{B}$. Está claro que si se verifica $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, tendremos $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{B}} B$. Así pues, para cualquier $B>0$ se ha encontrado un número $\delta>0$ tal, que $\frac{1}{|x|}>B$ con todo x del campo de existencia de la función en consideración y tal, que $0<|x-0|<\delta$. Por definición, esto significa precisamente que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$.

Se han dado anteriormente dos diferentes definiciones de límite de una función: una en el lenguaje de sucesiones y la otra, en el lenguaje de "ε, δ". Estas definciones son equivalentes, es decir, si una función tiene límite en el sentido de la definición en el lenguaje de sucesiones, ella tiene el mismo límite en el sentido de la definición en el lenguaje "ε, δ", y viceversa.

Mostemos la equivalencia de dos definiciones de límite de una función en el caso cuando $x=a$ es un punto finito de espesamiento y cuando la función tiene límite finito A.

1. Sea A el límite de la función $y=f(x)$ para x que tiende al punto a en el sentido de la definición en el lenguaje "ε, δ".

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon>0$. Entonces, se encontrará tal número $\delta>0$, que para cualquier x, que pertenece al campo de existencia de la función y que satisface las desigualdades $0<|x-a|<$ $<\delta$, se verifique la desigualdad $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Examinemos una sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia a y es tal, que $x_n\neq a$, y x_n pertenece al campo de existencia de la función $y=f(x)$ para cualquier n. Entonces, para el número indicado $\delta>0$, dependiente de ε, existe un número N tal, que con todo $n>N$ se verifican las desigualdades $0<|x_n-a|<\delta$. Por consiguiente, cualquiera que sea $n>N$, se verificará la desigualdad $|f(x_n-$ $-A)|<\varepsilon$. Mas, por cuanto $\varepsilon>0$ se eligió arbitrariamente, esto significa precisamente que $f(x_n)\to A$, es decir, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ (del campo de existencia de la función $y=f(x)$), convergente hacia a, la sucesión $f(x_n)$ converge hacia A; en el lenguaje de sucesiones esto es la definición de límite de una función.

2. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ en el sentido de la definición en el lenguaje de sucesiones. Mostremos que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ en el sentido de la definición en el lenguaje "ε, δ".

La demostración se realiza por reducción al absurdo. Supongamos que $f(x_n)\to A$ para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos del campo de existencia de una función tal, que $x_n\to a$, con la particularidad de que $x_n\neq a$. Supongamos que para $f(x)$ el número A no es el límite, cuando $x\to a$, en el sentido de la definición en el lenguaje "ε, δ", es decir, existe tal número positivo ε, que para cualquier δ positivo se encontrará por lo menos un número $\bar{x}$ tal, que $0<|\bar{x}-$ $-a|<\delta$, pero $|f(\bar{x})-A|\geqslant\varepsilon$.

Elijamos ahora una sucesión $\{\delta_n\}$ tal, que $\delta_n\to 0$. Por hipótesis, para cualquier δ_n existe un número $\bar{x}_n$ tal, que $0<|\bar{x}_n-$ $-a|<\delta_n$, pero $|f(\bar{x}_n-A)|\geqslant\varepsilon$. Veamos una sucesión $\bar{x}_1$,

$\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$ Es obvio que $\bar{x}_n \to a$, pero $f(\bar{x}_n)$ no tiende a A, puesto que $|f(\bar{x}_n) - A| \geqslant \varepsilon$ para todos los n.

Por consiguiente, se ha encontrado una sucesión $\{\bar{x}_n\}$, $\bar{x}_n \neq a$, del campo de existencia de la función $y = f(x)$ tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \bar{x}_n = a$, pero la sucesión $\{f(\bar{x}_n)\}$ no tiende a A. Esto contradice la condición de que para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ se verifica obligatoriamente $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, es decir, nuestra suposición no es cierta, y es lícita la afirmación de que la convergencia en el lenguaje "ε, δ" se predetermina por la convergencia en el lenguaje de sucesiones.

La equivalencia de dos definiciones de límite de una función está demostrada para el caso en que el punto de espesamiento a y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ son números finitos. En los demás casos la equivalencia se demuestra de modo análogo.

Para los límites de las funciones son válidas las propiedades que son análogas a las de los límites de las sucesiones. Cabe notar que prácticamente no hay necesidad de demostrarlas, pues de la definición de límite de una función con ayuda de las sucesiones se desprende que todos los teoremas demostrados para las sucesiones quedan válidos también para las funciones. Enunciemos algunos de estos teoremas.

Teorema 1. *Supongamos que el punto a es un punto de espesamiento de la parte común de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y que existen ambos límites finitos* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Entonces las funciones $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ también tienen límites finitos que son iguales a $A + B$, $A - B$, AB, $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ en el caso de un cociente), respectivamente.*

Teorema 2. *Supongamos que el punto a (a es un número finito) es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, donde $A > 0$, entonces existe un δ del punto a tal, que para todo $x \neq a$, perteneciente al campo de existencia y a dicho entorno, la función $y = f(x)$ es positiva.*

La propiedad análoga es válida también, si $A < 0$.

Teorema 3. *Si el punto a (a es un número finito) es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, donde A es un número finito, entonces existe tal entorno δ del punto a que para todo $x \neq a$, perteneciente al campo de existencia y a dicho entorno, la función $f(x)$ está acotada, es decir, existe tal número $M > 0$ y tal $\delta > 0$ que para todo x del campo de existencia de la fun-*

ción, tal, que $0 < |x - a| < \delta$, *se verifica la desigualdad* $|f(x)| \leqslant \leqslant M$.

Teorema 4. *Supongamos que a es un punto de espesamiento de la parte común de los campos de existencia de las funciones* $y = f(x)$, $y = p(x)$, $y = g(x)$, *y que para todo* $x \neq a$, *perteneciente a cierto entorno* δ *del punto a y a la parte común de los campos de existencia de las funciones mencionadas se verifican las desigualdades* $f(x) \leqslant p(x) \leqslant \leqslant g(x)$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, *entonces también* $\lim\limits_{x\to a} p(x) = A$.

Ejemplo. Demostremos, haciendo uso del teorema 4, que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. La función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par y por esta razón analicémosla en el intervalo $(0, \pi/2)$. Demostremos que en dicho intervalo tiene lugar la desigualdad doble

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

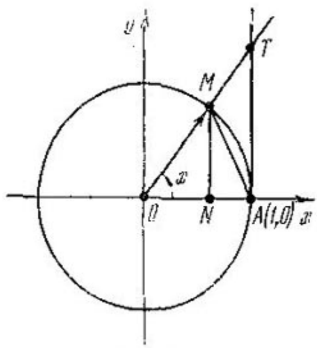


Fig. 185

Tomemos el arco AM de la circunferencia unidad que corresponde al ángulo, cuya medida radial es igual a x (fig. 185). En este caso $|OA| = 1$, $|MN| = \operatorname{sen} x$, $|ON| = \cos x$. La semejanza de los triángulos OAT y ONM nos sugiere que $|AT| = \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|MN|}{|ON|} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Por cuanto el área del triángulo ONM es inferior al área del sector OAM, y el área de dicho sector es inferior al área del triángulo OAT, tenemos la desigualdad doble

$$\frac{1}{2}|OA|\,|MN| < \frac{1}{2}|OA|\,|\breve{AM}| < \frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$$

o bien

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dividamos por sen x esta desigualdad doble. Por cuanto $\operatorname{sen} x > 0$, los signos de la desigualdad no varían y llegamos a que la desigualdad doble

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

es válida.

Por cuanto dentro del intervalo en consideración $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos $x > 0$, $\cos x > 0$, $\operatorname{sen} x > 0$, tenemos las desigualdades equivalentes

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}<1; \quad \frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}>\cos x,$$

y esto sirve de demostración de la desigualdad (1).

Por ser pares las funciones $y=\cos x$ e $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la desigualdad doble (1) se verificará también en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. En efecto, si $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, entonces $0<(-x)<\frac{\pi}{2}$ y la igualdad (1) tiene la forma

$$\cos(-x)<\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)}<1.$$

Pero $\cos(-x)=\cos x$, $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Por consiguiente, la desigualdad (1) se verifica también para $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Así pues, para cualquier $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos $\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$. Para poder emplear ahora el teorema 4, hace falta demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x=1$. Hagamos uso de la definición de límite de una función en el lenguaje "ε, δ", es decir, demostremos que para todo $\varepsilon>0$ existe tal $\delta>0$ que cuando $0<|x|<\delta$, tendremos $|1-\cos x|<\varepsilon$. A título de δ tomemos la magnitud $\sqrt{2\varepsilon}$, entonces $|1-\cos x|=1-\cos x=2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}=2\left(\operatorname{sen} \frac{|x|}{2}\right)^2<2\left(\frac{|x|}{2}\right)^2<\varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

Así pues, la función $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está encerrada, cuando $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entre 1 y $\cos x$, y, por cuanto $\lim\limits_{x \to 0} \cos x=1$, entonces, de acuerdo con el teorema 4, obtenemos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

La definición de límite de una función $y=f(x)$ estipula que en el punto a (punto de espesamiento del campo de existencia de la función) x puede aproximarse hacia a según una ley cualquiera.

A veces es necesario analizar el límite de la función $y=f(x)$ en las condiciones en que x (del campo de existencia de la función), al tender hacia a, queda siempre a la derecha del punto a. En este caso suele decirse que la función $y=f(x)$ tiene *límite por la derecha* y se escribe $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)=A$, donde $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ es o bien un número finito, o bien $(+\infty)$, o bien $(-\infty)$. Análogamente se define el *límite por la izquierda*: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)=A$.

Ejemplos. 1. $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$ (fig. 186).

2. $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ (fig. 187).

3. La función $y = x^2$ tiene límite en cualquier punto a tanto por la derecha como por la izquierda, con la particularidad de que $\lim\limits_{x\to a+0} x^2 = \lim\limits_{x\to a-0} x^2 = a^2$.

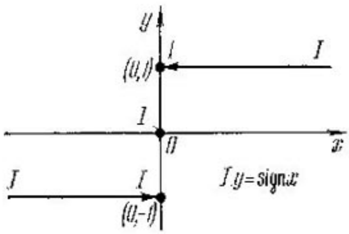


Fig. 186

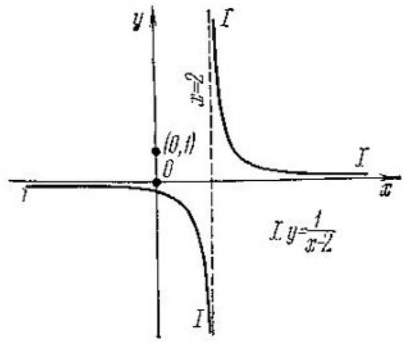


Fig. 187

Sean dadas la función $y = f(x)$ y su gráfica. Si existen un punto $M(x_0, f(x_0))$ y una recta tal, que aunque sea en una de las condiciones: $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ la distancia entre los puntos de la gráfica y la recta, a partir del punto M, disminuye ilimitadamente, dicha recta lleva el nombre de asíntota de la función $y = f(x)$.

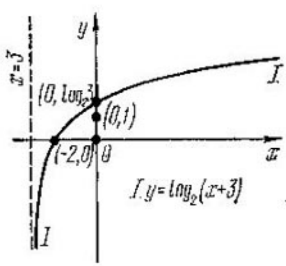


Fig. 188

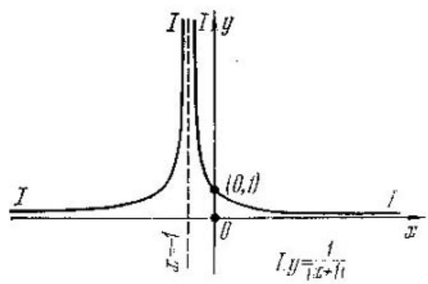


Fig. 189

Si se cumple al menos una de las condiciones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty,$$

la asíntota $x = a$ se denomina *vertical*.

Ejemplos. 1. La función $y = \log_2 (x + 3)$ tiene la asíntota vertical $x = -3$, puesto que $\lim\limits_{x\to-3+0} \log_2 (x + 3) = -\infty$ (fig. 188).

2. La función $y = \frac{1}{|x+1|}$ tiene la asíntota vertical $x = -1$, puesto que $\lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{|x+1|} = +\infty$ (fig. 189).

$x\to-3+0$

Si se cumple al menos una de las condiciones $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, la asíntota $y = b$ se denomina *horizontal*.

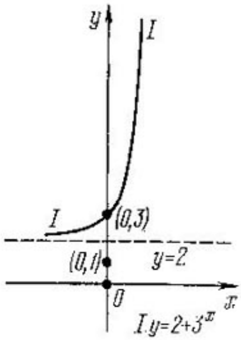


Fig. 190

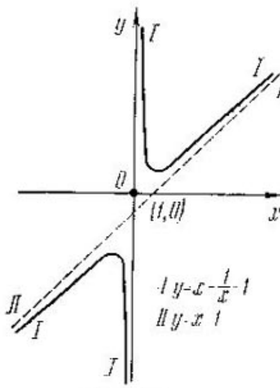


Fig. 191

Ejemplos. 1. La función $y = 2 + 3^x$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$, puesto que $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + 3^x) = 2$ (fig. 190).

2. La función $y = \frac{1}{x}$ tiene la asíntota horizontal $y = 0$, puesto que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Si se cumple al menos una de las condiciones: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, la asíntota $y = kx + b$ se denomina *oblicua*.

Ejemplo. La función $y = x + \frac{1}{x} - 1$ tiene la asíntota oblicua $y = x - 1$ (fig. 191).

§ 4. Continuidad de una función

Una función $y = f(x)$ *es continua en el punto* x_0, si:

1) x_0 es el punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$;

2) x_0 pertenece al campo de existencia de la función $y = f(x)$;

3) existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (es decir, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, donde $y_0 = f(x_0)$).

Ejemplos. 1. La función $y = 2^x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 1$.

En efecto, $x_0 = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función; el punto $x_0 = 1$ pertenece al campo de existencia de la función, quiere decir, $y_0 = 2^1 = 2$; existe $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$; y, por fin, $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2 = y_0$.

2. La función $y = \log_3 x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 3$.

En efecto, $x_0 = 3$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función; $x_0 = 3$ pertenece al campo de existencia de la función, quiere decir, $y_0 = \log_3 3 = 1$; existe $\lim\limits_{x\to 3} \log_3 x = 1$; por fin, $\lim\limits_{x\to 3} \log_3 x = 1 = y_0$.

3. La función $y = \frac{1}{x-2}$ no es continua en el punto $x_0 = 2$, puesto que se ha infringido, por ejemplo, la condición 2, es decir, el punto $x_0 = 2$ no pertenece al campo de existencia de la función.

4. La función $y = \operatorname{sign} x$ no es continua en el punto $x_0 = 0$, puesto que se ha infringido, por ejemplo, la condición 3, es decir, no existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$.

5. Es fácil comprobar que toda función elemental fundamental es continua en cualquier punto de su campo de existencia.

Teniendo en cuenta las definiciones, equivalentes entre sí, de límite de una función en un punto (que se han aducido anteriormente) demos a conocer dos definiciones más de continuidad de una función en un punto.

Una función $y = f(x)$ se llama *continua en el punto* x_0, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que para todo x del campo de existencia, que satisface la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, se verifica la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Una función $y = f(x)$ se llama *continua en el punto* x_0, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento del campo de existencia, que converge hacia el punto x_0, la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\}$ converge hacia el valor $f(x_0)$.

Haciendo uso de la segunda definición de continuidad de una función en un punto, mostremos, por ejemplo, que la función $y = 2^x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 1$ (es decir, mostremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que para todo x que sastisface la desigualdad $|x - 1| < \delta$, se verifica la desigualdad $|2^x - 2^1| < \varepsilon$). En efecto, para cualquier número $\varepsilon > 0$ tomemos, por ejemplo, el número $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Entonces, para cualquier número x, que satisface la condición $|x - 1| < \delta$, es decir, para cualquier x del intervalo $(1 - \delta)$; $1 + \delta)$; se verificarán las desigualdades

$$2^x < 2^{1+\delta} = 2^1 \cdot 2^\delta = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon;$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot [2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}]^{-1} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Estas desigualdades significan que $|2^x - 2^1| < \varepsilon$ para todo x tal, que $|x - 1| < \delta$, es decir, de acuerdo con la segunda definición de continuidad de una función en un punto, la función $y = 2^x$ es continua en el punto $x_0 = 1$.

Haciendo uso de la tercera definición de continuidad de una función en un punto, mostremos, por ejemplo, que la función $y = [x]$ no es continua en el punto $x = 2$, es decir, indiquemos por lo menos una sucesión de valores del argumento $\{x_n\}$ tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$, mientras que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{[x_n]\}$ es tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} [x_n] \neq [2]$. Así es, por ejemplo, la sucesión de valores del argumento, cuyo término general $x_n = 2 - \frac{1}{n}$. En efecto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$, pero, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1$, y, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1 \neq 2 = [2]$, lo que se trataba de demostrar.

Teorema 1. *Supongamos que las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son continuas en el punto x_0. Entonces, serán continuas también en el mismo punto las funciones $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (la última será continua a condición de que $g(x_0) \neq 0$).*

Este teorema representa un corolario de los teoremas sobre el límite de las funciones en un punto.

Por ejemplo, de acuerdo con el teorema 1, la función $y = \operatorname{sen} x + x^2$ es continua, digamos, en el punto $x_0 = 1$. En efecto, el punto $x_0 = 1$ pertenece al campo de existencia tanto de la función $y = \operatorname{sen} x$ como de la función $y = x^2$. Por cuanto cualquier función elemental fundamental es continua en cada punto de su campo de existencia, entonces las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^2$ son continuas en el punto $x_0 = 1$. Entonces, de acuerdo con el teorema 1, la función $y = \operatorname{sen} x + x^2$ será también continua en el punto $x_0 = 1$.

A la par con la continuidad (ya analizada) de una función en un punto se estudia también la así llamada continuidad unilateral de una función en un punto. Demos a conocer las definiciones correspondientes.

Una función $y = f(x)$ *es continua por la derecha en el punto* x_0, siempre que:

1) x_0 sea un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$;

2) x_0 pertenezca al campo de existencia de la función $y = f(x)$;

3) exista el $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, denotado $f(x_0 + 0)$;

4) $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

De modo análogo se define la continuidad de una función en el punto x_0 por la izquierda. Está claro que si la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0, será simultáneamente continua en dicho punto por la derecha y por la izquierda, y $f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$

Ejemplos. 1. Una función $y = [x]$ es continua en el punto $x_0 = 1$ por la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to 1+0} [x] = 1 = [1]$.

2. Una función $y = \operatorname{sign} x$ no es continua en el punto $x_0 = 0$ ni por la derecha ni por la izquierda. Efectivamente, aunque la función $y = \operatorname{sign} x$ tiene en el punto $x_0 = 0$ tanto el límite por la derecha ($\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$) como el por la izquierda ($\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$), ninguno de ellos coincide con el valor de la función $y = \operatorname{sign} x$ en el punto $x_0 = 0$ ($\operatorname{sign} 0 = 0$).

3. Una función $y = 2^x$ es continua en cualquier punto x tanto por la derecha, como por la izquierda.

Una función $y = f(x)$ tiene en un punto x_0 una *discontinuidad*, si no se cumple aunque sea una de las condiciones 1 . . . 4 de la definición de continuidad de una función en un punto x_0.

Ejemplo. La función $y = \operatorname{sign} x$ tiene en el punto $x_0 = 0$ una discontinuidad. En efecto, la igualdad $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x_0 = 0$ no se verifica, puesto que no existe límite de la función $y = \operatorname{sign} x$ en el punto $x_0 = 0$ (aunque existen límites unilaterales, éstos no son iguales entre sí y ninguno de ellos es igual al valor de la función en el punto $x_0 = 0$).

Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene en un punto x_0 una discontinuidad. Por definición, el punto x_0 se denomina *punto de discontinuidad de primera especie*, si en dicho punto la función $y = f(x)$ tiene límite finito tanto por la derecha, como por la izquierda. En todos los demás casos de discontinuidad el punto x_0 se denominará *punto de discontinuidad de segunda especie*.

Ejemplos. 1. Para la función $y = [x]$ el punto $x_0 = 1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. En efecto, la función $y = [x]$ tiene en el punto $x_0 = 1$ una discontinuidad, puesto que la función $y = [x]$ no tiene límite en el punto $x_0 = 1$, pero tiene límite finito por la derecha ($\lim\limits_{x \to 1+0} [x] = 1$) y por la izquierda ($\lim\limits_{x \to 1-0} [x] = 0$)

2. Para la función $y=\frac{1}{x}$ el punto $x_0=0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. En efecto, la función $y=\frac{1}{x}$ tiene en el punto $x_0=0$ una discontinuidad, puesto que el punto $x_0=0$ no pertenece al campo de existencia de la función. Además, la función $y=\frac{1}{x}$ no tiene en el punto $x_0=0$ límite finito por la derecha $\left(\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty\right)$.

3. Para la función $y_0=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ el punto $x_0=0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. Efectivamente, la función $y=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene en el punto $x_0=0$ una discontinuidad, puesto que el punto $x_0=0$ no pertenece al campo de existencia de la función. Además, la función $y=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no tiene en el punto $x_0=$ $=0$ límite por la derecha, ya que pueden indicarse dos sucesiones de valores del argumento a la derecha, $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ tales, que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}x'_n=0$, pero las sucesiones correspondientes de valores de la función $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{x_n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x'_n}\right)\right\}$ son tales que $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x'_n}\right)$. Tales, por ejemplo, serán una sucesión con término general $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ y una sucesión con término general $x'_n=\frac{1}{\pi n}$.

Una función $y=f(x)$ se llama *continua en cierto intervalo* (a, b), si es continua en cada punto de dicho intervalo. Con otras palabras, una función $y=f(x)$ es continua en el intervalo (a, b), siempre que:

1) todo el intervalo pertenezca al campo de existencia de la función $y=f(x)$;

2) cualquier punto x_0 de dicho intervalo sea un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y=f(x)$;

3) en todo punto x_0 del intervalo citado exista $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,

4) en todo punto x_0 del intervalo citado se verifique la igualdad $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$, donde $y_0=f(x_0)$.

Ejemplos. 1. La función $y=\cos x$ es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y=\log_3 x$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$.

3. La función $y=\frac{1}{x-1}$ es continua en el intervalo $(1; +\infty)$; además es continua en el intervalo $(-\infty, 1)$, pero no lo es, por ejemplo, ni en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ni tampoco en el intervalo $[1, +\infty)$, ni en el $(0, +\infty)$.

§ 5. Derivada de una función

Analicemos una función $y = f(x)$. Supongamos que x es un punto de espesamiento de la función, perteneciente a su campo de existencia, y $f(x)$, el valor de la función en este punto. Pasemos del valor x a otro valor del argumento, $x_1 \neq x$, el cual también pertenece al campo de existencia. La diferencia $x_1 - x$ (designémosla por Δx) se llama *incremento del argumento en el punto* x. El valor de la función, correspondiente al valor del argumento $x_1 = x + \Delta x$, se designará por $f(x + \Delta x)$.

La diferencia $f(x + \Delta x) - f(x)$ se denomina *incremento de la función en el punto* x, correspondiente al incremento del argumento Δx en este punto y se designa por Δy o bien por $\Delta f(x)$:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Según sea el tipo de función, su incremento Δy puede ser nulo, un número positivo o negativo. El incremento del argumento Δx también puede ser positivo o negativo, pero $\Delta x \neq 0$.

Ejemplos. 1. Hállense los incrementos de la función $y = |x|$ en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, considerando que $|\Delta x| < 1$.

a) Si $x = 0$, tenemos

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{si } \Delta x > 0, \\ -\Delta x, & \text{si } \Delta x < 0. \end{cases}$$

b) Si $x = 1$, tenemos

$$\Delta y = |1 + \Delta x| - |1| = 1 + \Delta x - 1 = \Delta x, \text{ si } |\Delta x| < 1.$$

c) Si $x = -1$, tenemos

$$\Delta y = |-1 + \Delta x| - |-1| = 1 - \Delta x - 1 = -\Delta x, \text{ si } |\Delta x| < 1.$$

2. Hállense los incrementos de la función $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y en un punto arbitrario x.

a) Si $x = 0$, tenemos $\Delta y = \operatorname{sen}(0 + \Delta x) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \Delta x$.

b) Si $x = \frac{\pi}{3}$, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

c) Si $x = -\frac{\pi}{3}$, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

d) Si x es un punto cualquiera, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. Hállense los incrementos de la función $y = \sqrt{x}$ en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y en un punto cualquiera $x \in (0, +\infty)$.

a) Si $x = 0$, entonces el incremento $\Delta x > 0$ (en virtud del campo de existencia de la función $y = \sqrt{x}$), por lo cual

$$\Delta y = \sqrt{0+\Delta x} - \sqrt{0} = \sqrt{\Delta x}.$$

b) Si $x = 1$, entonces

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{1} = \frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1+\Delta x}+1},$$

donde $|\Delta x| < 1$.

c) Si x es un punto cualquiera ($x > 0$), entonces

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

dondo $|\Delta x| < x$.

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x. Demos al argumento x un incremento Δx (en este caso se presupone que el punto $x + \Delta x$ pertenece al campo de existencia de la función). Entonces la función recibirá un incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Se denomina *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto x el límite de la razón del incremento de esta función al incremento del argumento en el mismo punto, cuando el incremento del argumento tiende a cero, si el límite mencionado existe y es finito.

La derivada de la función $y = f(x)$ en un punto x se denota con y' (se lee "y prima") o bien $\frac{dy}{dx}$. (se lee "derivada de y respecto a x), o bien $\frac{df(x)}{dx}$. El proceso de búsqueda de la derivada de una función recibe el nombre de diferenciación.

Así pues, por definición:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

es decir,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

De la definición se deduce que la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto x es un número que depende del valor considerado de x, y no depende de Δx. Además, la derivada de la función $y = f(x)$ puede existir no en todos los puntos del campo de existencia de esta función. Veamos el conjunto M de todos los puntos del campo de existencia de la función $y = f(x)$ en los cuales dicha función tiene derivada. Al calcular la derivada de la función $y = f(x)$ en cualquier punto $x \in M$, llegamos a que a todo número $x \in M$ se le pone en correspondencia un número $f'(x)$. Con otras palabras, mediante la correspondencia citada se define la función, denotada por $y' = f'(x)$, cuyo campo de definición es el conjunto M.

Hallemos las derivadas de ciertas funciones elementales.

1. Supongamos que en el intervalo $(a; b)$ la función $y = f(x)$ tiene valor constante c, es decir, $y = c$ en $(a; b)$. Entonces $y' = (c') = 0$ para cualquier x de $(a; b)$.

En efecto, para todo x de $(a; b)$ tenemos: $\Delta y = c - c = 0$, por consiguiente, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, de donde $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

2. Sea $y = x$, entonces $y' = 1$ para cualquier x.

En efecto, para todo x tenemos $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

3. Sea $y = x^n$ (n es un número natural fijo), entonces $y' = nx^{n-1}$ para cualquier x.

En efecto, para todo x tenemos, de acuerdo con la fórmula para el binomio de Newton (véase el cap. II):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n,$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \Delta x \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \ldots + \Delta x^{n-2} \right]$$

y, por tanto, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$, es decir $(x^n)' = nx^{n-2}$.

4. Sea $y = \operatorname{sen} x$, entonces $y' = \cos x$ para cualquier x. En efecto, para todo x tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

y, por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right).$$

Hemos demostrado anteriormente que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Demostremos ahora que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, es decir, demostremos que para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal, que $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-\right.$ $\left.-\cos x\right|<\varepsilon$, si $\left|\frac{\Delta x}{2}\right|<\delta$. Para demostrar la afirmación tomemos $\delta=\varepsilon$ y obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-\cos x\right|=\left|2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{4}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{4}\right|<2\left|\frac{\Delta x}{4}\right|<\varepsilon;$$

por consiguente, $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$.

5. Sea $y=\cos x$, entonces $y'=-\operatorname{sen} x$ para cualquier x. En efecto, para todo x tenemos

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

En este caso

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot(-1)\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right),$$

y, por cuanto $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$ y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\operatorname{sen} x$

(la demostración es la misma que en el ejemplo anterior), entonces $y'=-\operatorname{sen} x$, es decir, $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$.

Si es preciso hallar la derivada de una función $y=f(x)$ en cierto punto fijo $x=x_0$, entonces, por regla general, se halla primeramente la derivada de dicha función en cualquier punto x, donde la derivada existe, es decir, se halla $y'=f'(x)$, y luego, se sustituye, en lugar de x arbitrario, $x=x_0$. La derivada en el punto fijo x_0 se designa por

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \text{o bien}\ f'|_{x=x_0},\ y'|_{x=x_0},\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Ejemplo. Hállese la derivada de la función $y=\operatorname{sen} x$ en los puntos $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\pi$, $x_3=-\frac{\pi}{2}$.

Por cuanto $y'=\cos x$, tenemos

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(\pi)=\cos\pi=-1,\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

La resolución de los ejemplos en que se hallan las derivadas se simplifica considerablemente, si se emplean las reglas de diferenciación, las cuales se desprenden de los teoremas de límites. Veamos algunos de ellos.

En lo que sigue se supone que el argumento x varía en la parte común de los campos de existencia de las funciones que participan en las siguientes **afirmaciones.**

1. *Si en un punto x existen derivadas finitas de la función $y = v(x)$ y de la función $y' = u(x)$, entonces en el punto x la derivada de la suma de estas funciones existe y es igual a la suma de las derivadas de las funciones citadas*, es decir, $(v(x) + u(x))' = v'(x) + u'(x)$.

Efectivamente, demos a x un incremento Δx. En este caso las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ recibirán incrementos iguales a $\Delta v(x)$ y $\Delta u(x)$ respectivamente, mientras que la función $y = v(x) + u(x)$ adquirirá un incremento $\Delta y = [(v(x) + \Delta v(x)) + (u(x) + \Delta u(x))] - (v(x) + u(x)) = \Delta v(x) + \Delta u(x)$. Por cuanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}.$$

entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \right) = v'(x) + u'(x),$$

puesto que el límite de cada sumando existe y es finito.

Ejemplo. $(x^2 + \operatorname{sen} x)' = (x^2)' + (\operatorname{sen} x)' = 2x + \cos x$.

2. *Si en un punto x existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, entonces en el punto x la derivada de la diferencia entre dichas funciones existe y es igual a la diferencia entre las derivadas de las funciones citadas, es decir,* $(v(x) - u(x))' = v'(x) - u'(x)$.

La demostración de la afirmación 2 es análoga a la de la afirmación antecedente, razón por la cual se omite en esta obra.

Ejemplo. $(x^4 - \cos x)' = (x^4)' - (\cos x)' = 4x^3 + \operatorname{sen} x$.

Haciendo uso de las fórmulas para la derivada en un punto de la suma y de la diferencia de dos sumandos, es fácil obtener la fórmula para hallar la derivada en un punto de la suma algebraica de cualquier número de sumandos. Escribamos, por ejemplo, esta fórmula para la suma algebraica de cinco sumandos:

$$(u + v - p + g - t)' = u' + v' - p' + g' - t'.$$

Ejemplo. $(x + x^5 - x^8 + \operatorname{sen} x - \cos x)' = 1 + 5x^4 - 8x^7 + \cos x + \operatorname{sen} x$.

3. *Si en un punto x existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, entonces en dicho punto existe también la derivada de la función $y = v(x)\, u(x)$, con la particularidad de que*

$$y' = (v(x)\, u(x))' = v'(x)\, u(x) + v(x)\, u'(x)$$

Efectivamente, demos a x un incremento Δx. Entonces las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ reciben sus incrementos respectivos y en este caso

$$\Delta y = (v(x) + \Delta v(x))\,(u(x) + \Delta u(x)) - v(x)\,u(x) =$$
$$= v(x)\,\Delta u(x) + u(x)\,\Delta v(x) + \Delta v(x)\,\Delta u(x).$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\,u(x) + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\,v(x) + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\,\Delta u(x).$$

Aplicando los teoremas sobre el límite de una suma y del producto, tenemos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\,u(x) \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\,v(x) \right) +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\,\Delta u(x) \right) = u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u(x) \right).$$

Teniendo presente que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u(x) = 0$, obtenemos $y' = (v(x)\,u(x))' = v'(x)\,u(x) + v(x)\,u'(x)$, lo que se trataba de demostrar.

En particular, si $y = v(x) = c$ (c es una constante), entonces $(cu(x))' = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$, es decir, el factor constante puede sacarse del signo de la derivada: $y' = (cu(x))' = cu'(x)$.

Ejemplo. $y = 5x^3 + 7x^2 - 4$.

$$y' = (5x^3 + 7x^2 - 4)' = 5\,(x^3)' + 7\,(x^2)' - (4)' = 15x^2 + 14x.$$

Empleando la fórmula de la derivada en un punto para dos factores, resulta fácil obtener la fórmula para el caso del producto de varios factores.

4. *Si en un punto x existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, y si la función $y = u(x)$ es distinta de cero en este punto, entonces en el mismo punto existe también la derivada de la función $y = \frac{v(x)}{u(x)}$, con la particularidad de que* $y' = \left(\frac{v(x)}{u(x)} \right)' = \frac{v'(x)\,u(x) - u'(x)\,v(x)}{u^2(x)}$.

En efecto, comuniquemos a x un incremento Δx. Entonces las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ recibirán incrementos y en este caso

$$\Delta y = \frac{v(x) + \Delta v(x)}{u(x) + \Delta u(x)} - \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{u(x)\,\Delta v(x) - v(x)\,\Delta u(x)}{u(x)\,(u(x) + \Delta u(x))},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\,\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} - v(x)\,\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}{u(x)\,(u(x) + \Delta u(x))}.$$

Aplicando los teoremas sobre los límites de un cociente y de un producto y teniendo presente la continuidad de la función $y = u(x)$ en el punto x, tenemos que $y' = \frac{v'(x)\,u(x) - u'(x)\,v(x)}{u^2(x)}$.

Ejemplos. 1. $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ es decir, } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x') \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \text{ es decir, } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Empleando las fórmulas para las derivadas de las funciones elementales fundamentales y las reglas de diferenciación, se puede hallar la derivada de cualquier función que representa la superposición de las funciones elementales fundamentales. He aquí la tabla 31 de las derivadas para las funciones elementales fundamentales:

Tabla 31

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = c$ (c es una constante)	$y' = 0$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = x^n$ (n es un número natural)	$y' = nx^{n-1}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = x^n$ (n es un número natural)	$y' = -nx^{-n-1}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = x^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$)	$y' = -\alpha x^{-\alpha-1}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$y' = a^x \ln a$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$y' = \frac{1}{x \ln a}$		

Ejercicios

Escríbanse los primeros diez términos de una sucesión si su término general se da mediante la fórmula (1 . . . 6):

1. $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{x^n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.

2. $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.

3. $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}$.

4. $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$. 5. $a_n = \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$. 6. $a_n = \left(\frac{1-2n}{2n}\right)^n$.

Escríbase la fórmula del término general de una sucesión, para la cual vienen dadas sus primeros ocho términos (7 . . . 12):

7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}, \frac{1}{40320}, \ldots$

8. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots$

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

10. $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, 8, \ldots$

11. $1, -1, 1, 5, 1, -5, 1, 9, \ldots$

12. $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \ldots$

13. Una sucesión $\{c_n\}$ está dada mediante la fórmula del término general $c_n = 10n^2 + 4$. Hállese c_{k+4}.

14. ¿Será el número (-21) un término de la sucesión $\{b_n\}$ dada mediante la fórmula del término general $b_n = n^2 - 10n$? Hállese su número, si la respuesta es afirmativa.

Aclárese si es monótona una sucesión dada mediante la siguente fórmula del término general (15 . . . 23):

15. $a_n = n^2 + 2n$. 16. $a_n = \frac{1}{n^2+n}$.

17. $a_n = \cos n$. 18. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

19. $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$. 20. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $a_n - 2n^2 = 2n$. $a_n = |10 - 2n^2|$.

23. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Aclárese sie stá acotada una sucesión dada por la siguiente fórmula del término general 24 . . . 29):

24. $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$. 25. $a_n = \frac{n^4}{2^n}$.

26. $a_n = \frac{n^2+3n-1}{n!}$. 27. $a_n = \frac{n+2n^2}{n}$.

28. $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$. 29. $a_n = \frac{n+\cos n}{2n+3}$.

Dése un ejemplo de sucesión (30 . . . 35):

30. Acotada superiormente, pero no acotada inferiormente.

31. Acotada inferiormente, pero no acotada superiormente.

32. No acotada superiormente ni inferiormente.

33. Acotada, pero sin límite.

34. Que no sea creciente.

35. Que no sea decreciente.

36. ¿Existe un intervalo numérico del tipo $[a, b]$, al cual pertenezcan todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ dada por la fórmula del término general $a_n = \frac{5+4n}{1+n}$?. Indíquese tal intervalo, si la respuesta es afirmativa.

37. Hállese el quinto término de una progresión aritmética $\{c_n\}$, si $c_1 = -50$ y $d = 1,2$.

38. Hállese la suma de los primeros 30 términos de la progresión aritmética $\{a_n\}$, si $a_1 = -2,5$ y $d = 3$.

39. Se conocen dos términos de la progresión aritmética $\{b_n\}$: $b_7 = 4,9$ y $b_{17} = 10,9$. ¿Cuál es el número de términos de la progresión, cada uno de los cuales es inferior a 20?

40. ¿Es el número 35 un término de la progresión aritmética $-47, -44, -41, \ldots$? Hállese su número en el caso de la respuesta afirmativa.

41. Demuéstrese que si a, b y c son tres términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

42. Hállese el decimoquinto término de una progresión geométrica $\{a_n\}$, si $a_1 = -0,001$ y $q = 10$.

43. Se conocen el octavo término y la razón de una progresión geométrica $\{b_n\}$: $b_8 = 2,56$ y $q = 2$. Hállese la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión.

44. Se conocen dos términos de una progresión geométrica $\{b_n\}$: $b_1 = 0,1$ y $b_3 = 2,5$. ¿Será esta progresión una suceción monótona?

45. Se conocen el primer término y la razón de una progresión geométrica $\{a_n\} : a_1 = -81$ y $d = -\frac{1}{3}$. ¿Es esta progresión una sucesión monótona?

46. Demuéstrese que el producto de los primeros n términos de una progresión geométrica es igual a $a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, donde a_1 es el primer término de la progresión y q, su razón.

47. Demuéstrese que si ab, b^2, c^2 son términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces b, c y $(2b - a)$ son términos sucesivos de una progresión geométrica.

48. Las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son tales, que

$$a_1=1,\ a_{n+1}=0,1a_n+14;$$
$$b_1=5,\ b_{n+1}=b_n+4;$$
$$c_1=5,\ c_{n+1}=-3c_n.$$

¿Cuál de estas sucesiones es: 1) una progresión aritmética; 2) una progresión geométrica?

49. Hállese la suma de una progresión geométrica infinita, si su primer término es $a_1 = \sqrt{2}$ y la razón $q = \frac{1}{2}$.

Demuéstrese, valiéndose de la definición de límite, las siguientes igualdades (50 . . . 55):

50. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+n^2}=0.$ **51.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n+5}=\frac{3}{4}.$

52. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-3n^2}{(2n+1)(n+1)}=-\frac{3}{2}.$ **53.** $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}=0.$

54. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)}{(n^2-4)}=1.$ 55. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n+1}{n}=0.$

Calcúlese (56 . . . 76):

56. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{2+6{,}5n}.$ 57. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n-4}{1-7n}\cdot\frac{n-3}{5+2n}.$

58. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{5-0{,}9n}.$ 59. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3n}{2n-1}-\frac{n^2}{4n^2-1}\right).$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{1-n^2+n^4}}{2n-1+3n^2}$ 61. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2-2n}-n).$

62. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$ 63. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n.$

64. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ 65. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-1}{(n-1)(n+5)}\right)^n.$

66. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n+n}{3^n-2n}.$ 67. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x}.$

68. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} 9x}.$ 69. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

70. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x.$ 71. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 5x\cos x-\operatorname{sen} x\cos 5x).$

72. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x}.$ 73. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1}.$

74. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+6)}.$ 75. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$

76. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} 3x \operatorname{ctg} 4x).$

Hállese la derivada de la siguiente función (77 . . . 90):

77. $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}(1-x).$ 78. $y=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos(2x+1).$

79. $y=\cos 2x\operatorname{sen}(3x+5).$ 80. $y=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}(x-1)}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x-1)}.$

81. $y=\log_{1/2}\sqrt{2x-1}.$ 82. $y=\log_3(2x^2-3x+1).$

83. $y=\log_{10}\cos x.$ 84. $y=x^{-\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}}.$

85. $y=(2-x)^{4,9}.$ 86. $y=\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

87. $y=e^{2x}\operatorname{tg} x.$ 88. $y=\frac{e^x}{\cos x}.$

89. $y=e^{\cos x^2}$ 90. $y=(\sqrt{2}x^4-3x^{\sqrt{3}})e^{3x}.$

CAPÍTULO

X

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el capítulo III ya se han examinado los sistemas de ecuaciones algebraicas con varias variables. En el presente capítulo se analiza la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales con varias variables.

Hemos de notar que una ecuación algebraica $P(x, y, \ldots, t) = 0$ (véase el cap. III) se llama lineal si $P(x, y, \ldots, t)$ es un polinomio de grado no superior al primero y entero respecto de las variables $x, y, \ldots, t$.

§ 1. Matrices

Se denomina *matriz de dimensiones* $m \times n$ el conjunto de mn números dispuestos en forma de una tabla rectangular compuesta por m filas y n columnas.

Por ejemplo, la tabla rectangular de números

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de dimensiones 2×3; la tabla rectangular de números

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3/4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

es la matriz de dimensiones 3×2.

La matriz de dimensiones $1 \times n$, es decir, compuesta de una fila, recibe el nombre de *matriz fila*. Por ejemplo, la matriz $(1\ 3\ 4\ 5)$ es una matriz fila.

La matriz de dimensiones $m \times 1$, es decir, compuesta de una columna, recibe el nombre de *matriz columna*. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ es una matriz columna

La matriz de dimensiones $n \times n$ se llama *matriz cuadrada* y el número n se denomina *orden de la matriz*. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de tercer orden.

La matriz cuadrada de orden 1 es simplemente un número.

Los números que componen una matriz llevan el nombre de *elementos de la matriz.*

Para la notación de una matriz en la forma general los elementos de la matriz se designan con letras que vienen acompañadas de dos índices, por ejemplo, a_{ij}; en este caso el primer índice indica el número de la fila, y el segundo, el número de la columna, en las cuales se encuentra dicho elemento.

Por ejemplo, la matriz de dimensiones 3×4 se escribe en la forma general del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

La matriz, cuyos elementos están representados, por ejemplo, mediante los números b_{ij} se designa, a menudo, con una letra mayúscula B, y para inscribir este hecho se utiliza el signo de igualdad. Por ejemplo, la matriz con elementos a_{ij} se designa por la letra A y se escribe este hecho así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Sea dada una matriz C de dimensiones $m \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Los índices i y j se denominan *admisibles* para la matriz de dimensiones $m \times n$, si el índice de las filas i es cualquiera de los números $1, 2, \dots, m$, y el índice de la columna j es cualquiera de los números $1, 2, \dots, n$.

Muy a menudo los elementos de la matriz columna y de la matriz fila se denotan con un solo índice. Por ejemplo,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad F = (f_1\, f_2\, f_3\, f_4).$$

Las matrices A y B, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, se llaman *iguales*, si son iguales sus elementos correspondientes, es decir, si $a_{ij} = b_{ij}$ para cualesquiera índices admisibles i y j. En estos casos se escribe $A = B$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 4 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{10}{5} \end{pmatrix}.$$

Para cualesquiera matrices los signos de comparación $>$, $\geqslant$, $<$ ó $\leqslant$ están privados de sentido; para las matrices de dimensiones diferentes no tiene sentido, además, el signo de igualdad.

Se llama *suma* de las matrices A y B, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, la matriz C de las mismas dimensiones $m \times n$, en la cual cada elemento es igual a la suma de los elementos correspondientes de las matrices A y B, es decir, $C = A + B$, si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para cualesquiera índices *admisibles* i y j. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para las matrices A y B con diferentes dimensiones la operación de adición está privada de sentido.

Es fácil ver que para cualesquiera matrices A, B, C, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, son válidas las siguientes afirmaciones:

a) *la adición de las matrices es conmutativa*: $A + B = B + A$;

b) *la adición de las matrices es asociativa*: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

De estas afirmaciones se deduce que en cualquier suma de un número finito de matrices, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, los sumandos pueden escribirse en cualquier orden y los paréntesis, que indican el orden en que ha de realizarse la adición pueden ponerse arbitrariamente. Por ejemplo,

$$[A + (C + B)] + D = [(A + C) + B] + D = A + B + C + D.$$

Una matriz de dimensiones $m \times n$, cada elemento de la cual es igual a cero:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

recibe el nombre de *matriz nula* de dimensiones $(m + n)$. Esta matriz posee la propiedad de que para cada matriz A de dimensiones $m \times n$ se verifican las igualdades $A + 0 = 0 + A = A$.

Por ejemplo, la matrziz $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de dimensiones 2×3; la matriz $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula cuadrada de segundo orden.

Entre todas las matrices, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, existe la única matriz nula. Las matrices nulas de diferentes dimensiones suelen designarse con un mismo símbolo 0, lo que no conduce a ambigüedades, pues del contenido está claro qué dimensiones tiene la matriz nula en el caso que se analiza.

Sea dada una matriz A de dimensiones $m \times n$. La matriz $(-A)$ de las mismas dimensiones, cada elemento de la cual es elemento de la matriz A tomado con signo opuesto, posee la propiedad de que $A + (-A) = (-A) + A = 0$. La matriz $(-A)$ se llama *matriz opuesta* de la matriz A. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es opuesta de la matriz $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; la matriz $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es opuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Se puede mostrar que para cualquier matriz A existe la única matriz opuesta, es decir, para la matriz A existe una sola matriz $(-A)$ tal, que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

La adición de las matrices cuenta con una operación inversa, que es la sustracción. Esto quiere decir que para cualesquiera dos matrices A y B, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, existe la única matriz C de las mismas dimensiones y tal, que $A + C = B$. La matriz C se llama *diferencia* de las matrices A y B y se designa por $A - B$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se denomina *producto* de la matriz A de dimensiones $m \times n$ *por cierto número* α la matriz C de las mismas dimensiones $m \times n$, cuyos elementos se obtienen de los elementos correspondientes de la matriz A multiplicándolos por dicho número α, es decir, $C = \alpha A$, si $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para cualesquiera índices admisibles i y j. Por ejemplo,

$$2\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix};\ -3\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}.$$

De la definición de multiplicación de una matriz por un número se desprende que para cualesquiera matrices A y B, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, y cualesquiera números α y β se verifican las igualdades:

a) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;

b) $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$;

c) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Observemos que la matriz $(-A)$, opuesta de A es igual a $(-1) A$, es decir, $(-A) = (-1) A$.

Sea dada la matriz fila F de dimensiones $1 \times r$, es decir,

$$F = (f_1 f_2 f_3 \ldots f_r),$$

y la matriz columna X de dimensiones $r \times 1$, es decir,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}.$$

Se denomina *producto de la matriz fila F de dimensiones* $1 \times r$ *por la matriz columna X de dimensiones* $r \times 1$ a una matriz, denotada por FX, de dimensiones 1×1, es decir a un número, el cual es igual a la suma de productos de los elementos correspondientes de dichas matrices, es decir, por definición,

$$FX = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_{r-1}x_{r-1} + f_rx_r$$

o bien

$$(f_1\ f_2\ \ldots\ f_r)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_r\end{pmatrix}=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_rx_r.$$

Ejemplos. 1. $(1\ 2)\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=1\cdot(-4)+2\cdot2=0;$

2. $\left(\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ 0\ 1\ 3\right)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -7\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{5}\cdot2+\frac{1}{5}\cdot3+0\cdot(-7)+1\cdot1+3\cdot(-1)=-1$. Con ayuda del producto de una matriz fila de dimensiones $1 \times r$ por una matriz columna de dimensiones $r \times 1$ se determina el producto de la matriz A de dimensiones $m \times r$ y de la matriz B de dimensiones $r \times n$, es decir, el producto de tales matrices que el primer factor, o sea la matriz A, tiene tantas columnas cuantas filas tiene el segundo factor, o sea, la matriz B.

Por definición, se denomina *producto de la matriz A de dimensiones $m \times r$ por la matriz B de dimensiones $r \times n$* una matriz C de dimensión $m + n$, denotada con AB, en la que el elemento c_{ij} es igual al producto de la i-ésima fila del primer factor, o sea de la matriz A, por la j-ésima columna del segundo factor, o sea de la matriz B, es decir, $C = AB$, siempre que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{i,r-1,j} + a_{ir}b_{rj}$ para cualesquiera índices i y j de la matriz C.

Ejemplos.

1. $$(3\ 2\ -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1\ \ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 - 1\cdot 1) = (1\ 2).$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot(-3) \\ 1\cdot 3 + 1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 1\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 0 + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 & 3\cdot 0 + \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 5\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 5\cdot 1 & 2\cdot 0 + \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ + 0\cdot 0 + 5\cdot 1 \end{matrix}\Bigg) = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la operación de multiplicación de dos matrices rectangulares es realizable solamente en el caso en que el número de columnas en el primer factor es igual al número de filas en el segundo factor; en los demás casos el producto de las matrices no se determina. En particular, si las matrices A y B son matrices cuadradas de un mismo orden, la multiplicación de las matrices es siempre realizable, cualquiera que sea el orden en que siguen los factores.

Señalemos, no obstante, que incluso en este caso particular no siempre $AB = BA$. Por ejemplo, sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot0&1\cdot1+0\cdot1\\1\cdot0+0\cdot0&1\cdot1+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0\\0\cdot1+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

es decir, $AB\neq BA$.

Así pues, la multiplicación de las matrices no es conmutativa, es decir, en el caso general, $AB\neq BA$. Por eso, al multiplicar matrices, hay que atenerse estrictamente, para evitar errores, al orden prefijado en que siguen los factores.

Si $AB = BA$, entonces las matrices A y B reciben el nombre de *conmutables*.

Por ejemplo, las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&-4\end{pmatrix}$ son conmutables, puesto que $AB=\begin{pmatrix}-7&-6\\6&-4\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-7&-6\\6&-4\end{pmatrix}$, es decir, $AB=BA$.

La operación de multiplicación de matrices es *asociativa* y también *distributiva respecto de la adición*, es decir, para cualesquiera matrices rectangulares A, B, C, para las cuales tienen sentido los productos correspondientes, se verifican las igualdades:

a) $(AB)\,C = A\,(BC)$;

b) $(A + B)\,C = AC + BC$, $C\,(A + B) = CA + CB$.

La demostración de estas igualdades se omite.

La operación de multiplicación de las matrices se extiende de un modo correspondiente al caso de varios factores. Por definición de producto de matrices, una matriz A puede multiplicarse por sí misma sólo en el caso cuando ella es cuadrada.

Sean dados una matriz cuadrada A de orden n y un número natural $p>1$. La matriz $\underbrace{AA\ \dots\ A}_{p \text{ veces}}$ se llama *p-ésima potencia de la matriz A* y se designa A^p, es decir, para $p>1$ tenemos, por definición, $A^p = \underbrace{AA\ \dots\ A}_{p \text{ veces}}$.

Además, por definición, $A^1 = A$.

Ejemplo. Hállese el cubo de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}.$$

De la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices se desprende que $A^pA^q = A^{p+q}$, donde p y q son números naturales arbitrariamente elegidos.

Señalemos que para cualquier matriz A de dimensiones $m \times r$ el producto de la matriz A por la matriz nula 0 de dimensiones $r \times n$ es una matriz nula de dimensiones $m \times n$, y el producto de la matriz nula 0 de dimensiones $l \times m$ por la matriz A de dimensiones $m \times r$ es una matriz nula 0 de dimensiones $l \times r$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, en aquellos casos cuando el producto de las matrices tien sentido, para cualquier matriz A se verifican las igualdades $A0 = 0$ y $0A = 0$. En particular, para toda matriz cuadrada A de orden n y para una matriz nula cuadrada 0 de orden n tenemos $A0 = 0A = 0$.

Se sabe que el producto de dos números es igual a cero, si, y sólo si, por lo menos uno de los factores es igual a cero. A diferencia de los números, el producto de dos matrices puede ser igual a cero incluso cuando cada uno de los factores no sea una matriz nula, es decir, existen las matrices $A \neq 0$ y $B \neq 0$ tales, que $AB = 0$.

Por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq$ $\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son tales, que el producto AB es una matriz nula. En efecto, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Observemos que la operación de división de matrices no se analiza, es decir, el símbolo $\frac{B}{A}$ no existe para las matrices.

La matriz cuadrada de orden n

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

cuyos elementos $a_{ii} = 1$ para todos los $i = 1, 2, \dots, n$, y los demás elementos son nulos, posee la siguiente propiedad: $EA = A$ para cualquier matriz A de dimensiones $n \times m$, y $AE = A$ para toda matriz A de dimensiones $m \times n$. En particular, $AE = EA = A$ para cada matriz cuadrada A de orden n; $FE = F$ para cada matriz fila F de dimensiones $1 \times n$; $EX = X$ para cada matriz columna X de dimensiones $n \times 1$. La matriz E en un producto de matrices desempeña el mismo papel que el número 1 en un producto de números, razón por la cual la matriz E suele llamarse *matriz unidad* de orden n.

Se denomina *transposición* de una matriz A el proceso en que las filas y las columnas se cambian de papel conservando sus números. De este modo, las filas de la matriz dada A serán en la misma sucesión columnas de la matriz transpuesta que se denota con A^T, y las columnas de la matriz A serán en la misma sucesión las filas de la matriz transpuesta A^T.

Ejemplo. Si $= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Está claro que en el proceso de transposición la matriz A de dimensiones $m \times n$ se convierte en la matriz A^T de dimensiones $n \times m$. Si A es una matriz cuadrada de dimensiones n, la matriz transpuesta A^T también es una matriz cuadrada de orden n. Observemos que la matriz unidad no varía en el proceso de transposición. Se comprueba fácilmente que la transposición de las matrices posee las siguientes propiedades:

a) $(A^T)^T = A$;
b) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(A - B)^T = A^T - B^T$;
c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ (λ es un número);
d) $(AB)^T = B^T A^T$.

§ 2. Determinantes

Sea dada una matriz cuadrada de segundo orden

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Se llama *determinante de segundo orden*, correspondiente a la matriz (1), un número $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Dicho determinante se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{2}$$

o con una letra Δ, o bien con el símbolo $|\ A\ |$. De este modo, por definición

$$|\ A\ | = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{3}$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - (-1)\cdot 4 = -6.$$

Los elementos de la matriz (1) suelen denominarse *elementos del determinante* (2), las filas y columnas de la matriz (1). *filas y columnas del determinante* (2).

Examinemos las propiedades más simples de los determinantes de segundo orden.

1. El determinante de la matriz cuadrada (1) es igual al determinante de su matriz transpuesta. Efectivamente, sea

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Por cuanto $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, y $\Delta^T = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, entonces $\Delta = \Delta^T$.

La sustitución del determinante de la matriz (1) por el determinante de la matriz transpuesta se denomina *transposición* del determinante (2). Por eso la propiedad 1 puede enunciarse así: el determinante (2) no varía en el proceso de su transposición.

Observación. Puesto que de acuerdo con la propiedad 1, todas las filas del determinante se pueden sustituir, sin cambiar su valor, por las columnas correspondientes; entonces, si está demostrada la validez de una afirmación para las columnas del determinante, queda demostrada de este modo la validez de la misma afirmación también para las filas. Teniendo presente estos razonamientos, las propiedades de los determinantes que se analizan más abajo se establecerán sólo para las columnas del determinante.

2. Al permutar las columnas (filas), el determinante cambia de signo.

En efecto, sea $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y sea $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$. En este caso $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,

$$\Delta_1 = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}), \text{ es decir. } \Delta_1 = -\Delta.$$

3. Si todos los elementos de al menos una columna (fila) de un determinante son nulas, el determinante es igual a cero.

En efecto, si $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta=0\cdot a_{22}-0\cdot a_{12}=0$.

Si $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$, entonces, según la propiedad 2, $\Delta_1=-\Delta$, y, consecuentemente, $\Delta_1=0$.

4. El determinante que tiene dos columnas (filas) iguales es nulo.

En efecto, si $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta=a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11}=0$. Si $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta_1=a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12}=0$.

5. Si todos los elementos de cierta columna (fila) de un determinante los multiplicamos por un mismo número α, entonces el determinante resultará multiplicado por este número.

En efecto, sea, por ejemplo, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Entonces, $\Delta_1 = a_{11}(\alpha a_{22}) - a_{21}(\alpha a_{12}) = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \alpha\Delta$.

La propiedad 5 se enuncia a veces del modo siguiente: *si todos los elementos de cierta columna (fila) de un determinante contienen un factor común α, éste puede ser sacado del signo del determinante.*

Así por ejemplo, según lo demostrado, $\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

La propiedad 5 expresa la regla de multiplicación de un determinante por cierto número.

6. El determinante en el que los elementos de dos columnas (filas) son respectivamente proporcionales es igual a cero.

Efectivamente, sea $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y sea, por ejemplo, $a_{11} = \beta a_{12}$, $a_{21} = \beta a_{22}$. Entonces, en virtud de las propiedades 5 y 4 del determinante, tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta a_{12} & a_{12} \\ \beta a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Si cada elemento de alguna columna (fila) de un determinante es la suma de dos sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes, en uno de los cuales los elementos de la columna (fila) correspondiente serán los primeros sumandos, y en el otro, los segundos sumandos, mientras que los demás elementos de estos dos determinantes serán los mismos que tiene el determinante dado.

En efecto, supongamos, por ejemplo, que $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Entonces $\Delta = (a_{11} + b_{11})a_{22} - $
$- (a_{21} + b_{21})a_{12} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}) =$
$= \Delta_1 + \Delta_2$. La propiedad 7 expresa la regla de adición de determinantes.

8. Un determinante no varía, si a los elementos de alguna columna (fila) se les adicionan los elementos correspondientes de otra columna (fila) multiplicados por un mismo número.

En efecto, supongamos, por ejemplo, que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Mostremos que $\Delta = \Delta_1$. En virtud de las propiedades 7 y 6 de los determinantes tenemos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} \\ \alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

Sea dada una matriz de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Se denomina *determinante de tercer orden*, correspondiete a la matriz(4) un número

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Este determinante se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

o con una letra Δ, o bien con el símbolo $|A|$. De este modo, por definición,

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1+0) - 0(4-3) + 2(0+1) = 4.$$

Los elementos de la matriz (4) llevan el nombre de *elementos* del determinante (6), las filas y columnas de la matriz (4) se llaman *filas y columnas* del determinante (6).

Para estudiar las propiedades del determinante de tercer orden introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Se denomina *menor* de cualquier elemento del determinante de tercer orden (6) un determinante de segundo orden, correspondiente a una matriz obtenida de la matriz dada (4) suprimiendo una columna o una fila, en las cuales está contenido el elemento tomado. El menor de un elemento a_{ij} suele designarse con M_{ij}. Por ejemplo, el menor de un elemento a_{11} se designa con M_{11}, el elemento a_{31}, con M_{31}, etc. De este modo, por definición,

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Se denomina *complemento algebraico* de cualquier elemento a_{ij} del determinante de tercer orden (4) el menor de dicho elemento M_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$. El complemento algebraico del elemento a_{ij} se denota con la letra mayúscula de la misma denominación provista de los mismos dos índices que tiene el elemento dado.

Por ejemplo, el complemento algebraico del elemento a_{21} se denota con A_{21}, el del elemento a_{23}, A_{23}, etc. De este modo, por definición,

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Teorema 1. *El determinante* (6) *es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) suya por los complementos algebraicos que les corresponden, es decir.*

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}, & \Delta &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \\ \Delta &= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}, & \Delta &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \\ \Delta &= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}, & \Delta &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{8}$$

Demostremos, por ejemplo, la cuarta ecuación de (8). Con este fin transformemos el segundo miembro de esta igualdad:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{31}a_{22}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+$$

$$+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Al comparar la expresión obtenida con la expresión (5) del determinante Δ, concluimos que $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\Delta$. De modo análogo se establece la validez de las demás igualdades (8).

La notación del determinante (6) de conformidad con cualquiera de las fórmulas aducidas (8) lleva el nombre de *desarrollo* de dicho determinante por los elementos de la columna o fila correspondientes. Estos desarrollos resultan ser cómodos al calcular los determinantes de tercer orden.

Por ejemplo, al desarrollar el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

por los elementos de la segunda fila, obtenemos

$$\Delta=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-(6-1)+2(2-12)=-25.$$

Para los determinantes de tercer orden quedan válidas las propiedades 1 . . . 8, examinadas para los determinantes de segundo orden. La demostración de dichas propiedades se deduce inmediatamente del teorema 1 sobre el desarrollo del determinante de tercer orden por los elementos de la fila (columna) y de las propiedades correspondientes de los determinantes de segundo orden. Así por ejemplo, la propiedad 1, consistente en que el determinante no varía, si sus filas se sustituyen por las columnas, puede demostrarse del modo siguiente. Sea

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante Δ^T por los elementos de la primera fila, tenemos

$$\Delta^T=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Teniendo presente que el determinante de segundo orden no varía, al sustituir las filas por las columnas, obtendremos

$$\Delta^T=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Comparando la expresión obtenida con la (5) para el determinante Δ, concluimos que $\Delta^T=\Delta$.

De modo análogo se establece la validez de las propiedades 2 . . . 8.

Las propiedades 1 . . . 8 de los determinantes en combinación con el teorema 1 sobre el desarrollo del determinante por los elementos de las filas y de las columnas permiten, a menudo, facilitar el cálculo del determinante de tercer orden.

Ejemplo. Calcúlese el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

De acuerdo con la propiedad 5 de los determinantes de tercer orden, al sacar del signo del determinante el factor común 5 de la primera fila y el factor común 4 de la segunda columna, obtenemos

$$\Delta=5\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ahora, sumemos a los elementos de la segunda columna los elementos de la primera, multiplicados por (—1), y a los elementos de la tercera columna, los elementos de la primera columna, multiplicados por (—3). En virtud de la propiedad 7, el determinante no varía y será igual a

$$\Delta=20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar el determinante obtenido por los elementos de la primera fila, tenemos

$$\Delta = 20\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20(-4-0) = -80.$$

Valiéndonos de los determinantes de tercer orden, podemos a una matriz cuadrada de cuarto orden ponerle en correspondencia un número que será determinante de cuarto orden. Luego, introducir los determinantes de quinto orden, con ayuda de los determinantes de cuarto orden, etc. De este modo, para introducir los determinantes de n-ésimo orden se debe disponer de los determinantes de orden $(n-1)$. Tal manera de introducir los determinantes se denomina introducción de los determinantes por inducción. Veamos cómo se introducen los determinantes de n-ésimo orden por inducción según n.

Supongamos que $n = 1$; como determinante de la matriz cuadrada de orden 1 (es decir, del número a_{11}) se considera el propio número a_{11}. Convengamos en considerar que los determinantes de las matrices cuadradas de orden $(n-1)$ ya están introducidos y que está demostrada la validez de sus propiedades principales (las propiedades de tipo 1 . . . 8, demostradas anteriormente para los determinantes de orden 2). Examinemos una matriz cuadrada de n-ésimo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Al suprimir en esta matriz la i-ésima fila y la j-ésima columna, dejando intacto el orden de los elementos, obtendremos una matriz cuadrada de orden $(n-1)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,j-1} & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \dots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j+1} & \dots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & a_{i+1,\,2} & \dots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \dots & a_{i+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz se designa con M_{ij} y lleva el nombre de *menor del elemento* a_{ij} de la matriz (9).

Se denomina *determinante* de la matriz (9) un número

$$a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{10}$$

El determinante de la matriz (9) se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

o con una letra Δ, o bien con el símbolo $|A|$. De este modo, por definición,

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}. \tag{12}$$

Los elementos de la matriz (9) se llaman *elementos del determinante* (11); las filas y columnas de la matriz (9) se llaman *filas y columnas del determinante* (11). Los menores del elemento a_{ij} de la matriz (9) llevan el nombre de *menores del elemento* a_{ij} *del determinante* (11). Señalemos que los determinantes de segundo orden, introducidos según la fórmula (3) y según la fórmula (10), serán iguales. El determinante que se obtiene a partir del determinante (11) sustituyendo en éste las filas por las columnas y las columnas por las filas recibe el nombre de *determinante transpuesto con el determinante* Δ y se designa por Δ^T, mientras que la sustitución del determinante Δ por el determinante Δ^T se denomina *transposición del determinante* Δ.

Se llama *complemento algebraico* de cualquier elemento a_{ij} del determinante de n-ésimo orden (11) al menor M_{ij} de dicho elemento multiplicado por $(-1)^{i+j}$. El complemento algebraico de un elemento a_{ij} se denota con la letra mayúscula de la misma denominación y con los mismos dos subíndices que tiene el elemento dado, es decir, por definición, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Teorema 2. *El determinante de n-ésimo orden* (11) *es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquiera de sus columnas (filas) por el complemento algebraico que les corresponde, es decir,*

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\tag{13}$$

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

La demostración del teorema 2 se omite.

Con ayuda del teorema 2 sobre el desarrollo del determinante de n-ésimo orden por los elementos de una columna (fila) y de las propiedades 1 ... 8 para los determinantes de $(n-1)$-ésimo orden se demuestran las propiedades 1 ... 8 de los determinantes de n-ésimo orden.

Sin detenernos en la demostración, demos a conocer estas propiedades:

1. Al transponer un determinante, el valor de éste no varía, es decir, $\Delta = \Delta^T$.

2. Cuando se permutan dos columnas (dos filas), el determinante cambia de signo.

3. Si todos los elementos de al menos una columna (fila) de un determinante son nulos, el último es igual a cero.

4. Un determinante que tiene dos columnas (filas) iguales es igual a cero.

5. Si todos los elementos de una columna (fila) cualquiera de un determinante se multiplican por un mismo número α, el determinante quedará multiplicado por este número (es decir, el factor común de los elementos de una columna (fila) puede sacarse del signo del determinante).

6. Un determinante en el que los elementos de dos columnas (filas) son respectivamente proporcionales, es igual a cero.

7. Si cada elemento de una columna (fila) cualquiera de un determinante es la suma de dos sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de dos determinantes, en uno de los cuales los elementos de la columna (fila) correspondiente son los primeros sumandos, y en el otro, los segundos, mientras que los elementos restantes de dos determinantes citados son los mismos que tiene el determinante dado.

8. El determinante no varía, si a los elementos de una columna (fila) cualquiera se les adicionan los elementos correspondientes de otra columna (fila) multiplicados por un mismo número.

Enunciemos y demostremos una propiedad más de los determinantes.

9. La suma de elementos de cierta columna (fila) de un determinante de n-ésimo orden ($n \geqslant 2$), multiplicados por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra columna (fila) es igual

a cero, es decir, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0$ $\left(\text{o bien } \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\right)\right.$, cualesquiera que sean $n \geqslant 2$ y $i \neq j$.

Demostración. Supongamos, para concretar, que $j > i$, entonces, al desarrollar el determinante por los elementos de la j-ésima columna, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1i} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2,\,j-1} & a_{2i} & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3,\,j-1} & a_{3i} & a_{3,\,j+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{ni} & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

El determinante en el segundo miembro de la igualdad (14) tiene iguales los elementos en la i-ésima y en la j-ésima columnas, respectivamente. De conformidad con la propiedad 4, el determinante (14) es nulo, por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0.$$

Para el caso en que $i > j$ la demostración es análoga. La propiedad 9 está demostrada. Calculemos el determinante de la matriz unidad, valiéndonos de las propiedades 1 . . . 8. Designemos con E_k la matriz unidad de orden k. Sea dada una matriz E_n. Desarrollando el determinante de esta matriz por la primera columna, obtenemos

$$|E_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{21} + \ldots + 0 \cdot E_{n1} = |E_{n-1}|.$$

Repitiendo estos razonamientos para el determinante $|E_{n-1}|$, luego para $|E_{n-2}|$, etc., llegamos a la conclusión de que $|E_n| = 1$. Así pues, *el determinante de la matriz unidad de cualquier orden n es igual a* 1.

§ 3. Matriz inversa. Rango de una matriz

Si dos matrices cuadradas A y B de un mismo orden n son tales, que $AB = BA = E$ (donde E es la matriz unidad de orden n), suele decirse que las matrices A y B son *inversas una de la otra* y se usan las designaciones $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

son inversas una de la otra, por cuanto $AB = BA = E$, donde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir } A = B^{-1},\ B = A^{-1}.$$

Por definición, la matriz inversa de la matriz cuadrada dada A de orden n se llama matriz cuadrada A^{-1} de orden n que posee la propiedad de que $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, donde E es la matriz unidad de orden n.

Para cada matriz A de orden n que tiene una matriz inversa A^{-1}, la matriz inversa A^{-1} es única.

En efecto, supongamos que una matriz A de orden n tiene la matriz inversa A^{-1}. Supongamos también que existe una matriz C de orden n tal, que $CA = AC = E$. Entonces

$$C = EC = (A^{-1}A)\,C = A^{-1}\,(AC) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

Las matrices inversas poseen las siguientes propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$, b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, c) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

Omitimos aquí la demostración de estas propiedades.

Aclaremos cuáles matrices tienen matrices inversas y si la matriz A tiene la inversa A^{-1}, cómo se encuentra la última.

Sea dada una matriz cuadrada A de orden n ($n \geqslant 2$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formemos una matriz cuadrada A de orden n por medio del siguiente procedimiento: en lugar de cada elemento de la matriz A pongamos el complemento algebraico de este elemento, es decir,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Transpongamos la matriz $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matriz $\widetilde{A}^{T}$ lleva el nombre de *matriz adjunta*. Por ejemplo, hallemos la matriz adjunta $\widetilde{A}^{T}$, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por cuanto

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 0\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-18,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=14,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=(-1)_{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 2\end{vmatrix}=2,$$

tenemos que

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}6 & -18 & 14\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ \text{y}\ \widetilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -18 & 3 & 0\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A se llama *degenerada* (*singular*), si su determinante es igual a cero ($|A|=0$), y se llama *regular*, si $|A|\neq 0$.

Teorema 3. *Para cualquier matriz regular A ($|A|\neq 0$) existe la matriz inversa A^{-1}.*

Demostración. Examinemos una matriz regular de primer orden es decir, el número a_{11}, distinto de cero; la matriz inversa de esta matriz será el número $\frac{1}{a_{11}}$.

Sea dada una matriz regular A de segundo orden. Hallemos el producto de las matrices $A\widetilde{A}^{T}$ y $\widetilde{A}^{T}A$, donde $\widetilde{A}^{T}$ es una matriz adjunta. Por cuanto la suma de los productos de los elementos de cierta columna (fila) de la matriz A por los complementos algebraicos de dichos elementos es igual al determinante $|A|$ (véase el teorema 2), y la suma de los productos de los elementos de cierta columna (fila) de la matriz A por los complementos algebraicos de elementos de la otra columna (fila) (de conformidad con la propiedad 9 de los determinantes) es nula, entonces

$$A\widetilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}\\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}^{T}A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21} & A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}\\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21} & A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{pmatrix}.$$

Cada elemento de las matrices obtenidas tiene por factor común el número $|A|$, por consiguiente

$$A\widetilde{A}^T = |A|\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = |A|E; \quad \widetilde{A}^T A = |A|\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = |A|E.$$

De aquí, por ser la matriz A ($|A| \neq 0$) regular, tenemos

$$A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T\right) = E = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T\right)A.$$

Por consiguiente, para la matriz regular de segundo orden A la matriz inversa A^{-1} será una matriz, cuyos elementos son los elementos correspondientes de la matriz adjunta $\widetilde{A}^T$ divididos por el determinante $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|}\\[2mm] \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|}\end{pmatrix}.$$

De este modo, no sólo demostramos la existencia de la matriz inversa A^{-1} para la matriz regular de segundo orden A, sino también indicamos el método de construcción de la primera.

De modo análogo se demuestra que para cualquier matriz regular A de n-ésimo orden, donde $n \geqslant 3$, la matriz inversa A^{-1} será una matriz, cuyos elementos son los elementos correspondientes de la matriz adjunta $\widetilde{A}^T$, divididos por el determinante $|A|$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{12}}{|A|} & & \dfrac{A_{1n}}{|A|}\\[2mm] \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & & \dfrac{A_{2n}}{|A|}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \dfrac{A_{n1}}{|A|} & \dfrac{A_{n2}}{|A|} & & \dfrac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{n1}}{|A|}\\[2mm] \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{n2}}{|A|}\\[2mm] \dfrac{A_{1n}}{|A|} & \dfrac{A_{2n}}{|A|} & \dfrac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}$$

El teorema está demostrado.

Ejemplo. La matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\6 & 2 & 0\\5 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

es regular, puesto que $|A| = 6 \neq 0$. Su matriz adjunta es

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\-18 & 3 & 0\\14 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1/2 & 0\\7/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

Teorema 4. *El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B de n-ésimo orden es igual al producto de sus determinantes, es decir,* $|AB| = |A|\,|B|$ (la propiedad análoga es válida también para cualquier número finito de factores).

Omitimos aquí la demostración del teorema 4.

Por cuanto el determinante de la matriz unidad E de orden n es igual a 1, entonces, los determinantes de dos matrices recíprocamente inversas serán números recíprocamente inversos, es decir, $|A|\,|A^{-1}| = 1$.

Toda matriz degenerada A de orden n no tiene inversa, puesto que, de acuerdo con el teorema 4, el producto de la matriz degenerada A por cualquier matriz de orden n será nuevamente una matriz degenerada.

Las matrices inversas se emplean frecuentemente para la resolución de las ecuaciones matriciales.

Sean dadas las matrices A, B y C. Si se pide hallar una matriz X tal, que se verifique la igualdad matricial $AX = B$, se dice que está dada una *ecuación matricial*

$$AX = B \tag{1}$$

con la matriz incógnita X. La matriz X, que satisface la ecuación (1), se denomina *solución de la ecuación* (1).

Si se pide hallar una matriz Y tal, que se verifique la igualdad matricial $YA = C$, se dice que está dada la *ecuación matricial*

$$YA = C \tag{2}$$

con la matriz desconocida Y. La matriz Y, que satisface la ecuación (2), se denomina *solución de la ecuación* (2).

Veamos un caso particular de resolución de las ecuaciones matriciales (1) y (2). Sea A una matriz regular cuadrada de n-ésimo orden; B, una matriz de dimensiones $n \times m$, y C, una matriz de dimensiones $k \times n$, donde n, m, k son números naturales cualesquiera. En este caso las ecuaciones (1) y (2) tienen soluciones.

En efecto, multipliquemos ambos miembros de la primera ecuación por la matriz A^{-1} a la izquierda, lo que puede realizarse en vista de las dimensiones elegidas de la matriz B. Al efectuar las operaciones correspondientes:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B,$$

llegamos a que existe una matriz $X = A^{-1}B$ de dimensión $n \times m$ que satisface la ecuación (1).

Multipliquemos ambos miembros de la segunda ecuación por la matriz A^{-1} a la derecha, lo que puede realizarse en vista de las dimensiones elegidas de la matriz C. Al efectuar las operaciones correspondientes:

$$YAA^{-1} = CA^{-1}, \quad YE = CA^{-1}, \quad Y = CA^{-1},$$

obtenemos que existe una matriz $Y = CA^{-1}$ de dimensiones $k \times n$ que satisface la ecuación (2).

Señalemos que si incluso $B = C$, mas las matrices A^{-1} y B no son conmutables, entonces $X \neq Y$, es decir, para las mismas matrices A y $B = C$ las ecuaciones (1) y (2) tienen, en el caso general, soluciones diferentes.

Ejemplo. Sea

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \quad B=C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Resolvamos las ecuaciones (1) y (2). Hallemos ante todo

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}.$$

En este caso

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & -11\end{pmatrix},$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 11\\ 2 & -7\end{pmatrix},$$

es decir, $X \neq Y$.

En el § 2 se ha definido el concepto de menor del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de n-ésimo orden. En el caso general de una matriz de dimensiones $m \times n$ el concepto de menor de los elementos de la matriz no se introduce; en lugar de ello se da el concepto de menor de orden k de la matriz dada, donde el número k puede tomar valores a partir de la unidad hasta el mínimo de los números m y n, es decir, $1 \leqslant k \leqslant \text{mín}\,(m, n)$

Sea dada una matriz A de dimensiones $m \times n$ y supongamos que k es un número natural tal, que $1 \leqslant k \leqslant \text{mín}\,(m, n)$. Elijamos arbitrariamente k filas y k columnas de la matriz A. Formemos una matriz cuadrada M de orden k, utilizando con este fin los elementos dispuestos en las intersecciones de las filas y columnas mencionadas (sin variar el orden de los elementos). El determinante de la matriz M se llama *menor de k-ésimo orden de la matriz A*.

Ejemplo. Sea dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

de dimensiones 3×2. En este caso los menores de primer orden de la matriz son elementos de dicha matriz, es decir, los números 1, 3, 3, 4, -3, 0. Los menores de segundo orden son determinantes

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}3 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix}.$$

La matriz mencionada no tiene menores de órdenes más altos.

Si se trata de una matriz cuadrada A de orden n, su menor de n-ésimo orden es el determinante $|A|$, los menores de $(n-1)$-ésimo orden son los menores de los elementos correspondientes de esta matriz; los menores de orden 1 son los elementos de esta matriz. Además, la matriz citada tiene menores de orden k, donde $1 < k < n - 1$.

El orden más alto de los menores, distintos de cero, de la matriz A lleva el nombre de *rango de la matriz A* de dimensiones $m \times n$.

Si todos los elementos de la matriz A son ceros, se dice que el rango de la matriz es igual a cero.

El rango de una matriz cuadrada regular A de n-ésimo orden es igual a n.

Poz ejemplo, el rando de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ es igual a la unidad, puesto que los menores de segundo orden de esta matriz son nulos (debido a la proporcionalidad de las filas de la matriz), mas hay menores de primer orden (elementos de la matriz A) que son distintos de cero.

Sea dada una matriz A de dimensiones $m \times n$ y supongamos que existe un número natural $l < \text{mín}\ (m, n)$. Si todos los menores de l-ésimo orden de la matriz A son nulos, entonces serán también nulos todos los menores de dicha matriz de orden $(l + 1)$.

En efecto, elijamos cualquier menor de la matriz citada de orden $(l + 1)$ y desarrollémoslo por los elementos de cierta fila. Cada sumando del desarrollo contendrá, a título de factor, cierto determinante de orden l, que es el menor de l-ésimo orden del elemento correspondiente de la fila elegida del determinante de orden $(l + 1)$. Por cuanto todo menor de orden l es igual a cero, entonces la suma del desarrollo es también igual a cero, a consecuencia de lo cual el menor elegido de orden $(l + 1)$ es nulo. Por consiguiente, si todos los menores de l-ésimo orden son nulos, todos los menores de orden superior a l son también nulos.

De este modo, con el fin de determinar el rango de una matriz de dimensiones $m \times n$, se debe hallar, al principio, por lo menos un menor de primer orden que sea distinto de cero, es decir, hace falta esclarecer si hay entre los elementos de la matriz por lo menos uno que sea distinto de cero. Si tal elemento no existe, el rango de la matriz será igual a cero. Si la matriz tiene un elemento distinto de cero, es necesario hallar por lo menos un menor de segundo orden distinto de cero. Si tal menor no existe, el rango de la matriz será igual a 1. Si hay un menor de segundo orden distinto de cero, se debe buscar el menor de tercer orden que sea distinto de cero, etc. hasta que se encuentre un menor de r-ésimo orden distinto de cero; pero o bien todos los menores de orden $r + 1$ son nulos, o bien $r = \text{mín}\ (m, n)$. Entonces el rango de la matriz es igual a r.

Para determinar el rango de una matriz de dimensiones $m \times n$ se procede frecuentemente del modo siguiente. Se elige un elemento cualquiera de la matriz, distinto de cero. A continuación, añadiendo una fila y una columna, distintas de aquellas en las que se dispone el elemento, se forman toda clase de menores de segundo orden hasta que se encuentre el menor de segundo orden que sea distinto de cero. Luego, añadiendo cierta fila y cierta columna, distinta de aquellas en las que se dispone el menor hallado de segundo orden, se forman toda clase de menores de tercer orden hasta que se encuentre el menor de tercer orden que sea distinto de cero. Este proceso se continúa hasta que se encuentre el menor de orden r que sea distinto de cero, para el cual todos los menores de orden $(r + 1)$, construidos por el método indicado, sean iguales a cero, o bien no haya tales menores en general (si la matriz contiene r filas o r columnas). Entonces el rango de la matriz es igual a r.

No se aduce aquí la demostración de la validez de este método para determinar el rango de una matriz.

Ejemplo. Hállese el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

El menor de primer orden (el número 1) dispuesto en la intersección de la primera columna con la primera fila es disitnto de cero. El menor de segundo orden, dispuesto en la intersección de las primeras dos columnas y las primeras dos filas, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$, es también distinto de cero. Todos los menores de tercer orden de esta matriz son nulos. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a dos.

§ 4. Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas, a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j =$ $= 1, 2, \ldots, n$), los coeficientes y $b_1, b_2, \ldots, b_m$, los términos independientes del sistema de ecuaciones (1). Recordemos que una colección numérica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, correspondiente a la colección de incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lleva el nombre de solución del sistema (1), si, al sustituir en cada ecuación del sistema (1) los números correspondientes, en lugar de las incógnitas, se obtienen m igualdades numéricas lícitas. Resolver el sistema (1) significa hallar todas sus soluciones o demostrar que el sistema no tiene soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina *compatible*, si tiene por lo menos una solución, e *incompatible* (contradictorio), si no tiene soluciones. Un sistema compatible se llama *determinado*, si tiene una solución única, e *indeterminado*, si tiene más de una solución. Se puede mostrar que el sistema indeterminado de ecuaciones lineales siempre tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplos. La ecuación lineal con una sola incógnita $a_{11}x_1 = b_1$ tiene para $a_{11} \neq 0$, la única solución $x = \frac{b_1}{a_{11}}$.

La ecuación lineal con dos incógnitas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

tiene una infinidad de soluciones para $a_{11} \neq 0$ y para $a_{12} \neq 0$.

En efecto, sea, por ejemplo $a_{12} \neq 0$, entonces la ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ es equivalente a la ecuación

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{11}x_1}{a_{12}},$$

que tiene por solución la expresión $\left(\alpha, \ -\frac{a_{11}\alpha}{a_{12}} + \frac{b_1}{a_{12}}\right)$, donde α es un número real cualquiera.

El sistema de dos ecuaciones lineales con una sola incógnita

$$\begin{cases} a_{11}x = b_1, \ (a_{11} \neq 0), \\ a_{21}x = b_2 \ (a_{21} \neq 0) \end{cases}$$

donde $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, es incompatible.

Efectivamente, supongamos que el número α es la solución de la ecuación $a_{11}x = b_1$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad numérica $a_{11}\alpha = b_1$. En este caso $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$. Si $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$ fuera una solución de la ecuación $a_{21}x = b_2$, sería válida la igualdad numérica $\frac{a_{21}b_1}{a_{11}} = b_2$, o bien, en virtud de que $a_{21} \neq 0$, la igualdad numérica $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{b_2}{a_{21}}$, lo que contradice la hipótesis. Así pues, la solución α de la ecuación $a_{11}x = b_1$ no es una solución de la ecuación $a_{21}x = b_2$, y esto significa que el sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, donde $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, es incompatible.

Se denomina *matriz básica del sistema* (1) una matriz A de dimensiones $m \times n$, cuyos elementos están representados por los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones (1), es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se denomina *matriz de incógnitas del sistema* (1) una matriz columna X, cuyos elementos están representados por las incógnitas del sistema, es decir,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Se denomina *matriz de términos independientes del sistema* (1) una matriz columna B, cuyos elementos están representados por los términos independientes del sistema, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o bien

$$AX = B \tag{2}$$

lleva el nombre de *ecuación matricial del sistema* (1), si las matrices A, X y B son las matrices correspondientes del sistema (1).

Por cuanto cualquier colección numérica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, que representa la solución del sistema (1) y está escrita en forma de una matriz columna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

es una solución de la ecuación matricial (2), y como cualquier matriz columna numérica

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

que representa la solución de la ecuación matricial (2) del sistema (1) y está escrita en forma de una colección numérica $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ es una solución del sistema (1), suele decirse que *el sistema de ecuaciones lineales* (1) *es equivalente a la ecuación matricial* (2) *del sistema* (1).

Veamos un caso particular del sistema (1). Sean dados un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right. \tag{3}$$

y la ecuación matricial correspondiente de este sistema

$$\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right.$$

o bien

$$AX = B. \tag{4}$$

El determinante de la matriz A del sistema (3) se denominará *determinante básica* y se designará con Δ, es decir, $\Delta = |A|$. Supongamos que la matriz básica A (que es una matriz cuadrada de n-ésimo orden) del sistema (3) es regular, es decir, admitamos que $\Delta = |A| \neq 0$. En este caso, según lo expuesto en el § 3, existe la única matriz inversa A^{-1}. Multiplicando a la izquierda por la matriz inversa A^{-1} los miembros primero y segundo de la ecuación matricial (4) del sistema (3), obtenemos que $X = A^{-1}B$, con la particularidad de que la matriz X es de dimensiones $n \times 1$, es decir, es una matriz columna. Así pues, debido a la unicidad de la matriz inversa A^{-1}, la ecuación matricial (4) del sistema (3) tiene una solución única, que es la matriz columna $X = A^{-1}B$.

Por cuanto la ecuación matricial (4) es equivalente al sistema (3), entonces, si el determinante de la matriz básica A del sistema lineal (3) es distinto de cero (es decir, $|A| \neq 0$), el sistema (3) será compatible y está determinado, es decir, tiene solución única.

Esta única solución del sistema (3) puede hallarse según la regla de Cramer, cuya enunciación se aducirá más abajo.

Si en la matriz básica A del sistema (3) de n ecuaciones lineales con n incógnitas sustituimos la j-ésima columna de coeficientes del sistema 3 por la columna de términos independientes de dicho sistema, la matriz obtenida se denomina *matriz complementaria del sistema* (3) y se designa por $\overset{j}{A}$, es decir,

$$\overset{j}{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1,j-1}b_1\,a_{1,j+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2,j-1}b_2\,a_{2,j+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{n,j-1}b_na_{n,j+1}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

El determinante de la matriz $\overset{j}{A}$ se denota, por regla general, con Δ_j, es decir, $\Delta_j = |\overset{j}{A}|$.

Pasemos ahora a la resolución del sistema de ecuaciones (3).

Sea $n = 1$, es decir, supongamos que el sistema (3) consta de una sola ecuación con una incógnita: $a_{11}x = b_1$, y sea $a_{11} \neq 0$. Está claro que esta ecuación tiene una solución única que es el número $\frac{b_1}{a_{11}}$.

Sea ahora $n = 2$. Examinemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{6}$$

La matriz básica A y las matrices complementarias $\overset{1}{A}$ y $\overset{2}{A}$ de este sistema son respectivamente las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \overset{1}{A} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \overset{2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

Supongamos que el determinante de la matriz básica A es distinto de cero ($\Delta = |A| \neq 0$). Entonces existe la única matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

y se verifica la cadena de igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22}}{|A|} \end{pmatrix},$$

de donde

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11} + b_2(-1)^{2+1}M_{21}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{1}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+2}M_{12} + b_2(-1)^{2+2}M_{22}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{|\overset{2}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

es desir, los componentes de la solución (x_1, x_2) del sistema (6) se hallan valiéndose de las fórmulas

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{7}$$

donde Δ, Δ_1, Δ_2 son los determinantes de las matrices A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ del sistema (6).

Estudiemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

La matriz básica A y las matrices complementarias $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ del sistema (8) son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\overset{1}{A} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el determinante de la matriz básica A es distinto de cero ($\Delta = |A| \neq 0$). En este caso existe la única matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

y se verifica la cadena de igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{12} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{|A|} \end{pmatrix},$$

de donde

$$x_1 = \frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11}+b_2(-1)^{2+1}M_{21}+b_3(-1)^{3+1}M_{31}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{1}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+2}M_{12}+b_2(-1)^{2+2}M_{22}+b_3(-1)^{3+2}M_{32}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{2}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+3}M_{13}+b_2(-1)^{2+3}M_{23}+b_3(-1)^{3+3}M_{33}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{3}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

es decir, los componentes de la solución (x_1, x_2, x_3) del sistema (8) se hallan por las fórmulas

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

donde Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 son los determinantes de las matrices A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ del sistema (8).

Demostremos que si el determinante de la matriz básica A del sistema (3) es distinto de cero, entonces el j-ésimo componente x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ de la única solución $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del sistema (4) se determina por la fórmula

$$x_j = \frac{|\overset{j}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $|\overset{j}{A}| = \Delta_j$ es el determinante de la matriz complementaria $\overset{j}{A}$ del sistema (3), y $|A| = \Delta$, el determinante de la matriz básica A del sistema (3).

Examinemos el j-ésimo componente de la matriz columna $A^{-1}B$, la cual es la única solución de la ecuación matricial (4) del sistema (3). Tenemos

$$x_j = \frac{b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}}{|A|} =$$

$$= \frac{b_1(-1)^{1+j}M_{1j}+b_2(-1)^{2+j}M_{2j}+\ldots+b_n(-1)^{n+j}M_{nj}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{j}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

lo que se trataba de demostrar.

La regla, de acuerdo con la cual se determina la solución del sistema (3), lleva el nombre de Cramer. Enunciémosla.

Regla de Cramer. *Si el sistema (3) de n ecuaciones con n incógnitas es tal, que el determinante de su matriz básica no es nulo ($\Delta \neq 0$), entonces el sistema tiene una solución única ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), cada uno de cuyos componentes se determina por las fórmulas de Cramer, es decir, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), donde Δ_j es el determinante de la matriz complementaria $\overset{j}{A}$ que se obtiene de la matriz básica A del sistema (3) sustituyendo en éste la j-ésima columna por la columna de términos independientes del sistema.*

Ejemplo. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

El determinante de la matriz básica es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -72 \neq 0.$$

Por consiguiente, el sistema tiene una solución única. Hallémosla, rigiéndonos por la regla de Cramer:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 36,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -90.$$

Por consiguiente, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{4}$, es decir, el sistema tiene una solución única: $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Cuando el determinante $|A|$ de la matriz básica A del sistema (3) es igual a cero, la regla de Cramer resulta inaplicable.

Pasemos ahora al estudio de los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

Se denomina *matriz ampliada* del sistema de ecuaciones (1) una matriz que se obtiene por adición a la matriz básica A del sistema (1) de una columna de términos independientes que forma la última columna y se separa por una raya vertical, es decir, una matriz

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} & & b_n \end{array}\right).$$

Cabe señalar que el rango de la matriz ampliada B no es inferior al rango de la matriz básica A del sistema (1). Para ser más exacto, si el rango de la matriz básica es igual a r, y el rango de la ampliada es R, entonces $r \leqslant R$. Al mismo tiempo es obvio que $R \leqslant r + 1$.

La cuestión sobre la compatibilidad del sistema (1) se resuelve por el **criterio de Kronecker—Capelli**: *el sistema* (1) *de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz ampliada B es igual al rango de la matriz básica A del sistema* (1).

La demostración de este teorema no se aduce en esta obra.

Supongamos que el rango de la matriz básica del sistema (1) es igual a r, con la particularidad de que $1 \leqslant r \leqslant \text{mín}\,(m, n)$.

En este caso cualquier menor distinto de cero de orden de la matriz básica del sistema (1) se llama *menor principal*.

La resolución del sistema de ecuaciones lineales consiste en lo siguiente. Calculamos el rango de la matriz básica A del sistema (1) y de la matriz ampliada B.

Si el rango de la matriz básica A del sistema (1) no es igual al rango de la matriz ampliada B, entonces, de acuerdo con el criterio de Kronecker—Capelli, el sistema es incompatible, es decir, el sistema (1) no tiene ninguna solución. Con esto se da por terminada la resolución del sistema (1).

Si los rangos de las matrices básica y ampliada son iguales y equivalen a r, es decir, si el sistema (1) es compatible, se toma cualquier menor distinto de cero de la matriz básica de orden r y se consideran r ecuaciones cuyos coeficientes integran dicho menor principal, mientras que las ecuaciones restantes de sistema se desprecian. Las incógnitas, cuyos coeficientes integran dicho menor principal se declaran *principales*, y las demás incógnitas, *independientes*. El nuevo sistema se reescribe de tal manera que en los primeros miembros de todas las ecuaciones quedan sólo los términos que contienen r incógnitas principales; todos los demás términos de las ecuaciones, que contienen $(n - r)$ incógnitas, se trasladan a los segundos miembros de las ecuaciones. Luego, se hallan las incógnitas principales de acuerdo con la regla de Cramer. Es fácil ver en este caso que las incógnitas principales se expresan en términos de las incógnitas independientes, cada una de las cuales puede adquirir cualquier valor numérico. Las soluciones obtenidas del nuevo sistema con r incógnitas principales se llama *solución general del sistema* (1).

Atribuyendo a todas las incógnitas independientes ciertos valores numéricos, se hallan, a base de la solución general, los valores numéricos correspondientes de las incógnitas principales y, de este modo, se determina la solución del sistema original de ecuaciones (1), la cual lleva el nombre de solución *particular* para los valores numéricos dados de las incógnitas independientes. Empleando el procedimiento mencionado se puede obtener cualquier solución del sistema (1).

Ejemplos. 1. Veamos el sistema

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz básica de este sistema es igual a dos, puesto que existe un menor de segundo orden, distinto de cero, de la matriz citada, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

mientras que todos los menores de tercer orden son nulos.

El rango de la matriz ampliada de dicho sistema es igual a tres, puesto que existe un menor de tercer orden, distinto de cero, de la matriz citada, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35.$$

De acuerdo con el criterio de Kronecker—Capelli, el sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones.

2. Examinemos el sistema

$$\left| \begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 &= 2. \end{aligned} \right.$$

El rango de la matriz básica de este sistema es igual a dos y el rango de la matriz ampliada es también igual a dos, puesto que, por ejemplo, el menor de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17$$

de la matriz básica es distinto de cero, mientras que todos los menores de tercer orden de las matrices básica y ampliada son nulos.

Quiere decir, el sistema es compatible. Tomemos por el menor principal, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$. Dado que la tercera ecuación del sistema no contiene elementos de este menor principal, desechamos la tercera ecuación. Las incógnitas x_1 y x_2 las declaramos principales, pues sus coeficientes integran el menor principal; la incógnita x_3 la declaramos independiente.

Obtenemos un sistema que es equivalente al de partida:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2x_3 + 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3x_3. \end{cases}$$

Resolvámoslo según la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2x_3+2 & 3 \\ -3x_3 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-4x_3-4+9x_3}{-17} = \frac{5x_3-4}{-17} = -\frac{5}{17}x_3 + \frac{4}{17},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2x_3+2 \\ 1 & -3x_3 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-21x_3-2x_3-2}{-17} = \frac{-23x_3-2}{-17} = \frac{23}{17}x_3 + \frac{2}{17}.$$

Así pues, la solución general del sistema de partida representa una infinidad de colecciones $(x_1 x_2 x_3)$ de la forma $\left(-\frac{5}{17}t + \frac{4}{17}, \frac{23}{17}t + \frac{2}{17}, t\right)$, donde t es un número real cualquiera. La solución particular de la ecuación de partida será, por ejemplo, una colección numérica $\left(\frac{4}{17}, \frac{2}{17}, 0\right)$ que se obtiene cuando $t = 0$.

3. ¿Para cuáles k será compatible el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ky = 3, \\ kx + 4y = 6? \end{cases}$$

Por cuanto $r \neq 0$, este sistema es compatible en dos casos: cuando $\Delta \neq 0$, y cuando $R = r = 1$. Analicemos por eso dos casos.

a) Si $\Delta \neq 0$, es decir, si $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, es decir, si $k^2 \neq 4$, entonces, de acuerdo con la regla de Cramer, el sistema tiene una solución única.

Quiere decir, para cualquier k, a excepción de $k = 2$ y $k = -2$, el sistema cuenta con la única solución.

b) Si $R = r = 1$, es decir, si

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, si $k = 2$, el sistema es compatible.

Resumiendo, llegamos a que el esquema de partida es compatible para cualesquiera k, salvo para $k = -2$.

Analicemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{9}$$

valiéndonos del criterio de Kronecker—Capelli.

La matriz básica de este sistema

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

tiene el rango r, con la particularidad de que $0 \leqslant r \leqslant 2$.

La matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

tiene el rango R, siendo $0 \leqslant r \leqslant R$. Es obvio que $r \leqslant R \leqslant r+1$.

Tiene lugar la siguiente afirmación.

Sea dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (9). *Entonces:*

1. *si $r = R = 0$, es decir, si todos los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, ,c_2 son iguales a cero, cualquier par de números reales será la solución del sistema* (9):

2. *si $r = 0$, $R = 1$, es decir, si $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, y $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, entonces el sistema* (9) *no tiene soluciones;*

3. *si $r = 1$, $R = 1$, el sistema* (9) *tiene una infinidad de soluciones, pero no todo par de números reales será su solución;*

4. *si $r = 1$, $R = 2$, el sistema* (9) *no tiene soluciones;*

5. *si $r = 2$, $R = 2$, el sistema* (9) *tendrá una solución única la cual puede hallarse por la regla de Cramer.*

Es válida también la **afirmación inversa**

1. *Si el sistema* (9) *tiene la única solución, entonces $r = R = 2$;*

2. *si el sistema* (9) *no tiene soluciones, entonces $r \neq R$, es decir, o bien $r = 0$ y $R = 1$, o bien $r = 1$ y $R = 2$;*

3. *si todo par de números reales es una solución del sistema* (9), *entonces $r = R = 0$;*

4. *si el sistema* (9) *tiene una infinidad de soluciones, pero no todo par de números reales constituye su solución, entonces $r = R = 1$.*

Demostremos estas afirmaciones sólo para el caso en que ambas ecuaciones del sistema (9) son de primer grado, es decir, cuando se verifican las condiciones $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. En este caso cada una de las ecuaciones de dicho sistema define por separado una recta en el plano, donde viene dado el sistema de coordenadas xOy (véase el cap. III). Esto nos ofrece la posibilidad de atribuir carácter geométrico a los razonamientos ulteriores en el análisis del sistema (9).

Teorema. *Sean dadas dos rectas mediante las ecuaciones*

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0, \tag{10}$$

donde $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, y $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

1. *Para que dos rectas se corten, es necesario y suficiente que sea* $R = r = 2$.

2. *Para que dos rectas sean paralelas, pero no coincidentes, es necesario y suficiente que sea* $r = 1$, $R = 2$.

3. *Para que dos rectas coincidan, es necesario y suficiente que sea* $r = R = 1$.

Demostración. Demostremos al principio la **suficiencia** de las condiciones.

1. Si $r = R = 2$, el sistema (10) tendrá la única solución, la cual se encuentra con facilidad por la regla de Cramer, y esto significa que las rectas tienen un punto común, es decir, se intersecan.

2. Si $r = 1$, $R = 2$, el sistema (10), es incompatible, por lo cual las rectas no tienen puntos comunes, es decir, son paralelas y no coinciden.

3. Si $r = R = 1$, todos los menores de segundo orden de las matrices básica y ampliada son nulos, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Estas condiciones pueden escribirse así:

$$a_1b_2 = b_1a_2, \tag{11}$$
$$c_1b_2 = b_1c_2, \tag{12}$$
$$a_1c_2 = a_2c_1. \tag{13}$$

Analicemos ahora todos los casos que pueden tener lugar.

a) Si $a_1 = 0$, entonces $b_1 \neq 0$, puesto que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. En este caso de (11) se deduce que $a_2 = 0$, y por cuanto $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, tenemos $b_2 \neq 0$. De (12) encontramos que $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b^2} = \alpha$, y las ecuaciones de las rectas toman la forma

$$b_1 (y - \alpha) = 0, \quad b_2 (y - \alpha) = 0.$$

Ya que $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden con la recta $y - \alpha = 0$.

b) Si $b_1 = 0$, entonces $a_1 \neq 0$, y de (11) se deduce que $b_2 = 0$ (con la particularidad de que $a_2 \neq 0$). Entonces, de (13) tenemos $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \beta$, y por esta razón las ecuaciones de las rectas tomarán la forma $a_1 (x - \beta) = 0$, $a_2 (x - \beta) = 0$. Por cuanto $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden con la recta $x - \beta = 0$.

c) Si $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$, de (11) se deduce que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \gamma$, y de (12) y (13) se desprende que $c_2 = \frac{b_2}{b_1} c_1 = \frac{a_2}{a_1} c_1$. De este modo, obtenemos que $a_2 = \gamma a_1$, $b_2 = \gamma b_1$, $c_2 = \gamma c_1$, por lo cual las ecuaciones de las rectas tomarán la forma

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = 0, \quad \gamma (a_1 x + b_1 y - c_1) = 0.$$

Por cuanto $\gamma \neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden.

Demostremos ahora la **necesidad** de las condiciones. La demostración se realizará por reducción al absurdo.

1. Supongamos que las rectas se cortan. Demostremos que $r = R = 2$. Si resultara que $r = 1$, $R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían paralelas y no coincidentes. Si resultara que $r = R = 1$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían coincidentes.

Por consiguiente, $r = R = 2$.

2. Supongamos que las rectas son paralelas. Demostremos que $r = 1$, $R = 2$. Si resultara que $r = R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas se cortarían. Si resultara que $r = R = 1$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían coincidentes. Por consiguiente, $r = 1$, $R = 2$.

3. Supongamos que las rectas coinciden. Demostremos que $r = R = 1$. Si resultara que $r = R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían paralelas. Por consiguiente, $r = R = 1$. El teorema queda completamente demostrado.

Ejercicios

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hállense $A+B$, $A-B$, $2A+3B$, $3A-2B$.

2. Hállese una matriz C, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $A + 2C = 3B$.

3. Hállense los productos AB y BA, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sea dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hállense todas las matrices X conmutables con A, es decir, aquellas, para las cuales $AX = XA$.

5. Una matriz $S = \alpha E$, donde E es la matriz unidad de n-ésimo orden y α, un número, recibe el nombre de matriz escalar. Demostrar que la matriz escalar S es conmutable con cada matriz de orden n, es decir, si A es una matriz de orden n, entonces $SA = AS$.

6. Muéstrese que las matrices $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ son conmutables. Hállese su producto.

7. Hállense todas las matrices cuadradas B, para las cuales $AB=0$, si $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

8. Hállese la forma general de la matriz A de tercer orden, para la cual $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}A=0$.

9. Sea $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Muéstrese que $J^2=-E$, $E^3=E$.

10. Sean dados un polinomio $P(x)=x^2-5x+6$ y una matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. Hállese $P(A)=A^2-5A+6E$.

Escríbanse las matrices transpuestas para las matrices (11 ... 14):

11. $A=(2\ 1\ 3)$; 12. $B=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$; 13. $C=\begin{pmatrix}0&1\\3&4\end{pmatrix}$; 14. $D=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

15. Compruébese el cumplimiento de la propiedad de transposición en el ejemplo de las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$.

16. Muéstrese que al multiplicar por la izquierda la matriz $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria A de tercer orden se cambian de lugar las primeras dos filas de la matriz A. Establézcase qué sucede al multiplicar por la derecha.

17. Muéstrese que al multiplicar por la izquierda la matriz $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria A de tercer orden, la 2^{da} fila de la matriz A queda multiplicada por α. Establézcase qué ocurre al multiplicar por la derecha.

18. Muéstrese que al multiplicar la matriz $C=\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria A de tercer orden a la derecha se agrega a la primera columna de la matriz A la tercera columna multiplicada por α. Establézcase qué ocurre al multiplicar por la izquierda.

Calcúlense los determinantes (19 . . . 25):

19. $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix}1&2&5\\3&-4&7\\-3&12&-15\end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix}a&1&a\\-1&a&1\\a&-1&a\end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix}1&b&1\\0&b&0\\b&0&b\end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix}a&1&a\\0&-a&-1\\a&1&-a\end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix}a&-a&a\\a&a&-a\\a&-a&-a\end{vmatrix}$. 25. $\begin{vmatrix}2&-1&3&-1\\1&1&-2&4\\3&2&-1&3\\5&-2&1&-2\end{vmatrix}$.

Hállese el rango de la matriz (26 ... 28):

26. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

27. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 5 & -1 & -17 \\ 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

28. $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

29. Cerciórese de que para $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $|A|=ad-cb\neq 0$, entonces

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

30. Hállese la matriz inversa A^{-1}, si $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

31. Demuéstrese que si las matrices A y B son conmutables, lo serán también las matrices inversas A^{-1} y B^{-1}.

32. Cerciórese de que $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$, si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuélvase el sistema de ecuaciones (33 ... 40):

33. $\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3+7=0, \\ 5x_1+2x_2+3x_3=4. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 5x_1-3x_2=7, \\ -2x_1+9x_2=4, \\ 2x_1+4x_2=-2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} -x_1+2x+3x_3=0, \\ x_1-4x_2-13x_3=0, \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10. \end{cases}$

38. $\begin{cases} 4x_1+5x_3=6, \\ x_2-6x_3=-2. \\ 3x_1+4x_3=3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$

CAPÍTULO

XI

NÚMEROS COMPLEJOS

Al estudiar los números reales hemos señalado que en el conjunto de números reales no se puede encontrar, por ejemplo, un número cuyo cuadrado sea igual a (-1). Para que los problemas semejantes sean resolubles, el concepto de número se hace más amplio introduciendo en el análisis los números complejos.

§ 1. Concepto de número complejo

Sean dadas las expresiones del tipo $a + bi$, donde a y b son números reales e i, cierto símbolo cuyo sentido y relación con el número real b, al igual que el sentido del signo «+» que une a y b, serán aclarados más abajo. Introduzcamos las definiciones de igualdad, suma y producto de tales expresiones.

Las expresiones $a + bi$ y $c + di$ se consideran *iguales*, si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$ simultáneamente. La igualdad entre las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele escribirse en la forma $a + bi = c + di$.

De la definición de igualdad se deduce que dos expresiones $a + bi$ y $c + di$ *son diferentes*, es decir, $a + bi \neq c + di$, si se cumple por lo menos una de las desigualdades $a \neq c$ o $b \neq d$.

Observación. De todos los signos de desigualdades, a saber, $\neq$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, $>$ para las expresiones del tipo $a + bi$ se emplea solamente el signo $\neq$.

Se llama *suma* de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ la expresión $(a + c) + (b + d)\, i$. La suma de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele designarse por $(a + bi) + (c + di)$, es decir, por definición, $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$.

Se llama *producto* de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ la expresión $(ac - bd) + (ad + bc)\, i$. El producto de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele designarse por $(a + bi)(c + di)$, es decir, por definición, $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$.

El conjunto de todas las expresiones del tipo $a + bi$, que se distinguen, se suman y se multiplican de acuerdo con las definiciones recién enunciadas, recibe el nombre de *conjunto de números complejos*, y cada elemento de dicho conjunto, es decir, la expresión $a + bi$, se denomina *número complejo*.

El número complejo $a + bi$ se denota frecuentemente con una letra, por ejemplo, con la letra z. En tal caso se escribe $z = a + bi$.

Sean dados los números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$, . . ., $z_n = a_n + b_n i$. Para determinar la suma de los números complejos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, es necesario hallar la suma de los primeros dos números, luego a la suma obtenida añadir el tercer número, a esta última suma adicionar el cuarto número, etc, hasta que se agoten todos los sumandos. De modo análogo se determina también el producto de varios números complejos.

Si un número complejo z figura como factor n veces ($n \geqslant 2$), el producto $\underbrace{zz \ldots z}_{n \text{ veces}}$ recibe el nombre de *n-ésima potencia* ($n \geqslant 2$) *del número* z y se designa con z^n, es decir, por definición,

$$\underbrace{zz \ldots z}_{n \text{ veces}} = z^n.$$

Además, por definición, $z^1 = z$.

Demos a conocer las **leyes principales** de adición y multiplicación de los números complejos:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (conmutatividad de la adición);

b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociatividad de la adición);

c) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (distributividad de la multiplicación respecto de la adición).

La validez de estas leyes se desprende de la definición de suma y de producto de los números complejos y de la validez de las leyes análogas para la adición y multiplicación de los números reales (omitimos la comprobación de su validez).

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos se introducen las operaciones inversas respecto de ellas.

Se denomina *diferencia* de los números complejos z_1 y z_2 un número complejo z_3 tal, que, siendo adicionado a z_2, da z_1.

Mostremos que para cualesquiera números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ la diferencia entre ellos $z_3 = z_1 - z_2$ existe, es única y se calcula según la regla $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$, es decir, existe el único número complejo $z_3 = x + yi$, el cual, siendo adicionado a z_2, da z_1. Por definición de suma de los números complejos tenemos $z_2 + z_3 = (a_2 + x) + (b_2 + y)\, i$. Por definición de igualdad entre los números complejos; los números z_1 y $z_2 + z_3$ son iguales si, y sólo si, se verifican simultáneamente las igualdades

$$a_2 + x = a_1, \quad b_2 + y = b_1.$$

Los números x o y se determinan siempre a partir de estas igualdades y, además, de un modo único: $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, es decir, existe el único número complejo $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$ el cual será precisamente la diferencia entre z_1 y z_2.

Se denomina *cociente* de la división de un número complejo z_1 por otro número complejo z_2 tal, que $z_2 \neq 0 + 0i$, un número complejo z_3 que, siendo multiplicado por z_2, da z_1.

Se puede mostrar que para cualesquiera números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(z_2 \neq 0 + 0i)$ el cociente $\sqrt{z_3} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ existe, es único y se calcula según la regla

$$z_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Esta igualdad aquí no se demuestra.

Veamos los números complejos de la forma $a + 0i$. Cada número de esta índole se acostumbra considerar como un número real a, es decir, todo número de la forma $a + 0i$ se identifica con el número real a. Los números a y $a + 0i$ no se distinguen corrientemente e incluso suele escribirse la igualdad $a + 0i = a$. En particular, no se distinguen los números 0 y $0 + 0i$, el número $0 + 0i$ también se denomina cero y se escribe $0 + 0i = 0$.

Veamos ahora los números complejos de la forma $0 + bi$. Es costumbre denotar tales números simplemente con bi y escribir la igualdad $0 + bi = bi$. En particular, un número complejo $0 + 1i$ se acostumbra denotar simplemente con i y escribir la igualdad $0 + 1i = i$. El número complejo i se llama *unidad imaginaria*. Mostremos que la unidad imaginaria posee la propiedad de que $i^2 = -1$. En efecto, en virtud de los convenios asumidos se verifican las siguientes igualdades: $i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1i)\cdot(0 + 1i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 + 1\cdot 0)\, i = -1 + 0i = -1$.

Los números complejos del tipo $0 + bi$ se denominan *números imaginarios puros*.

De acuerdo con los convenios asumidos, cualquier número imaginario puro bi representa el producto de dos números complejos: del número b y de la unidad imaginaria i. Efectivamente,

$$(b + 0i)(0 + 1i) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1) + (b\cdot 1 + 0\cdot 0)\, i = \\ = 0 + bi = bi.$$

Cualquier número complejo $a + bi$ representa la suma de dos números complejos: del número a y del número imaginario puro bi. En efecto, $(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)\, i = a + bi$.

De la definición de operaciones de adición, sustracción y multiplicación de los números complejos se deduce que dichas operaciones pueden realizarse según las reglas que rigen las operaciones sobre los polimonios (véase el cap. II), sustituyendo i^2 por -1, y reuniendo después los términos que contienen i y los que no la contienen.

Ejemplos: $(2 + 3i) - 4 + (7 - 13i) + 4i = (2 - 4 + 7) + (3 - 13 + 4)\, i = 5 - 6i$;

$(4 + 5i) + (x + yi) - (a^2 - bi) = (4 + x - a^2) + (5 + y + b)\, i$;

$(a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi^2 = (ax - by) + (ay + bx)\, i$;

$(2 + 4i)(7 - i) = 14 - 2i + 28i - 4i^2 = 18 + 26i$.

Sean z_1 y z_2 unos números complejos cualesquiera y n, un número natural cualquiera. Valiéndonos de las reglas para las operaciones con los números complejos, podemos demostrar con facilidad la validez de las fórmulas de multiplicación reducida:

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1} z_2 + C_n^2 z_1^{n-2} z_2^2 + \ldots + C_n^{n-1} z_1 z_2^{n-1} + z_2^n;$$

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + z_1^{n-3} z_2^2 + \ldots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}),$$

y, en particular, de las fórmulas

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2; \qquad z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2).$$

Interpretación geométrica de los números complejos. Supongamos que en un plano está dado un sistema rectangular de coordenadas.

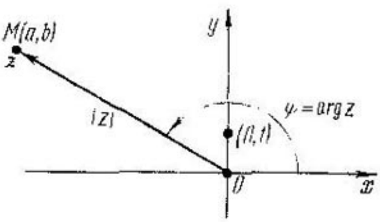


Fig. 192

A todo número complejo $z = a + bi$ le pondremos en correspondencia un punto en el plano, cuyas coordenadas son a y b, es decir, el punto $M(a, b)$ (fig. 192). Es fácil ver que entre el conjunto de números complejos y el conjunto de puntos en el plano se ha establecido, de este modo, una correspondencia tal, que a todo número le corresponde solamente un punto y que a números distintos les corresponden distintos puntos. En el plano, además, no hay punto que no corresponda a cierto número complejo. Quiere decir, entre el conjunto de números complejos y el conjunto de puntos en el plano se ha establecido una correspondencia biunívoca y por eso podemos considerar que el número complejo $z = a + bi$ es un punto en el plano con coordenadas (a, b).

Se llama *módulo* del número complejo $z = a + bi$ un número real $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Por cuanto al número complejo $z = a + bi$ se le puede poner en correspondencia un punto M del plano con coordenadas a y b, entonces, al módulo del número complejo se le puede atribuir el siguiente significado geométrico: $|z|$ es la distancia entre el punto correspondiente $M(a, b)$ y el origen de coordenadas. Veamos los siguientes problemas.

1. Hállese el conjunto de puntos de un plano que correspoden a los números complejos z tales, que $|z| = 1$.

De conformidad con el significado geométrico del módulo de un número complejo, se trata de los puntos cuya distancia hasta el origen de coordenadas es igual a la unidad, es decir, de los puntos dispuestos en la circunferencia de radio igual a la unidad con centro en el origen de coordenadas (fig. 193).

2. Hállese el conjunto de puntos de un plano que corresponden a los números complejos z tales, que $2 \leqslant |z| < 3$.

De acuerdo con el significado geométrico del módulo de un número complejo, se trata de los puntos dispuestos en el interior de un

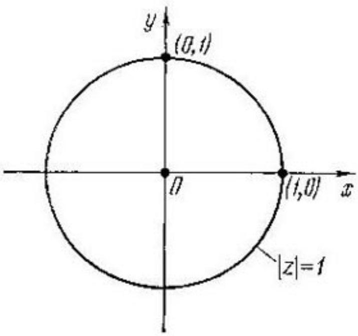


Fig. 193

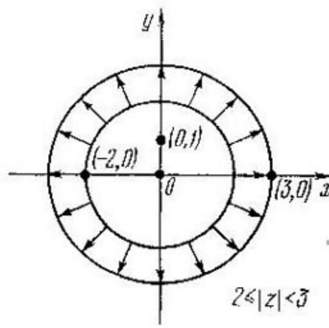


Fig. 194

anillo formado por las circunferencias de radios 2 y 3 con centro en el origen de coordenadas, incluida la circunferencia de radio 2 (fig. 194).

El número complejo $z = a + bi$ puede considerarse como un vector z, cuyo origen se ubica en el origen de coordenadas y el extremo, en el punto $M(a, b)$ que expresa dicho número (véase la fig. 192). En adelante, al hablar de los vectores que expresan los números complejos, supondremos que el origen de dichos vectores se dispone en el origen de coordenadas.

Veamos cómo se ilustran geométricamente la adición y la sustracción de dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ en el caso cuando tres puntos $O(0, 0)$, $M_1(a, b)$ y $M_2(c, d)$ no se disponen en una misma recta.

Sean dados los números $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = (a+c) + (b+d)i$. Examinemos el vector z_1, cuyo extremo se ubica en el punto $M_1(a, b)$, el vector z_2 con su extremo en el punto $M_2(c, d)$ y el vector z_3 con extremo dispuesto en el punto $M_3(a + c, b + d)$. El vector z_3 es la diagonal del paralelogramo $OM_1M_3M_2$ (fig. 195). Por cuanto el número z_3 es la suma de los números z_1 y z_2, de aquí se desprende que la adición de dos números complejos puede interpretarse geométricamente como adición según la regla del paralelogramo de los vectores z_1 y z_2, cuyos orígenes se encuentran en el origen de coordenadas, y los extremos, en los puntos M_1 (a, b) y M_2 (c, d) que expresan dichos números.

Los vectores que expresan los números complejos $z = a + bi$ y $(-z) = -a - bi$ se disponen simétricamente con relación al origen

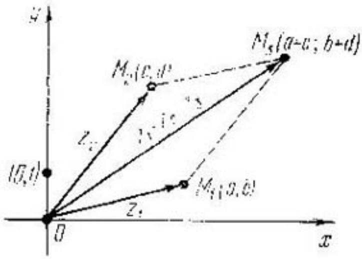


Fig. 195

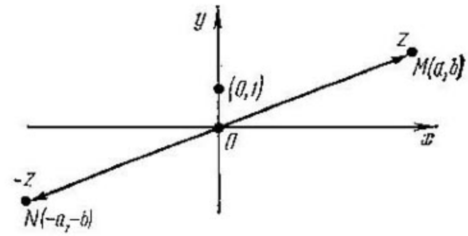


Fig. 196

de coordenadas, puesto que los extremos de estos vectores es decir, los puntos M (a, b) y N $(-a, -b)$ son simétricos con relación al origen de coordenadas (fig. 196).

Sean dados los números $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Estudiemos el vector z_1, cuyo extremo se dispone en el punto M_1 (a, b), y el vector

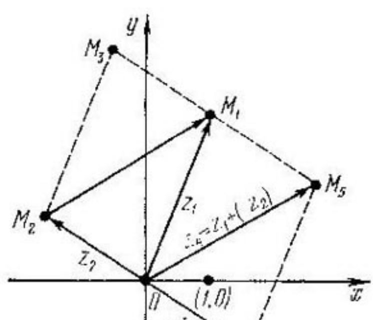


Fig. 197

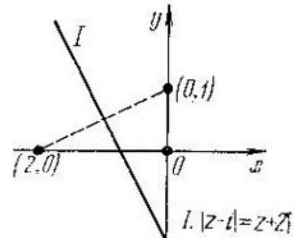


Fig. 198

z_2 con su extremo dispuesto en el punto M_2 (c, d) (fig. 197). Construyamos sobre dichos vectores el paralelogramo $OM_1M_3M_2$. Veamos el vector $(-z_2)$, cuyo extremo se dispone en el punto M_4 $(-c, -d)$. Al sumar los vectores z_1 y $(-z_2)$ según la regla del paralelogramo, obtenemos su suma, el vector z_4, cuyo extremo se dispone en el punto M_5 $(a - c, b - d)$. Es evidente que la longitud del vector z_4 es igual a la del segmento M_1M_2. Por cuanto la longitud del vector z_4 es igual a $|z_4| = |z_1 - z_2|$, de aquí se desprende que la longitud de la diagonal M_1M_2 es igual a $|z_1 - z_2|$ y el módulo de la diferencia entre dos números complejos z_1 y z_2 representa la distancia entre los puntos M_1 y M_2 que representan dichos números.

Tal interpretación geométrica de la suma y del módulo de la diferencia entre dos números complejos se emplea con frecuencia en la resolución de los problemas.

Ejemplos. 1. Hállese el conjunto de puntos del plano que correspondan a los números complejos z tales, que se verifique $|z - i| = |z + 2|$.

La distancia de los puntos buscados a los puntos, correspondientes a los números complejos i y (-2) son iguales. Quiere decir, el conjunto buscado consta de los puntos de una recta que es perpendicular al segmento que une los puntos $(0; 1)$ y $(-2; 0)$ y que pasa por el centro de este segmento (fig. 198).

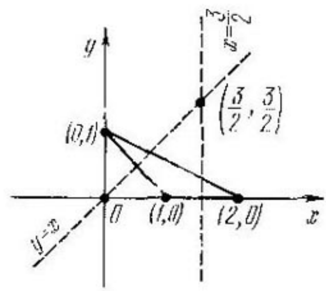


Fig. 199

2. Hállense los puntos z, que satisfacen la condición $|z - 1| = |z - 2| = |z - i|$.

Los puntos, correspondientes a los números 1, 2 y i, forman un triángulo. Solamente un punto satisface la condición del problema, a saber, el centro de la circunferencia circunscrita de dicho triángulo. Por cuanto el punto mencionado es equidistante con respecto de los puntos $(1; 0)$ y $(2; 0)$, entonces su coordenada es $x = \frac{3}{2}$, y por ser equidistante de los puntos $(1; 0)$ y $(0; 1)$, entonces $y = x = \frac{3}{2}$, es decir, la condición del problema la satisface el único número $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ (fig. 199).

Se denomina *argumento* de un número complejo $z = a + bi$, distinto de cero, cualquiera de los números φ que representan la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Para el número $z = 0$ el argumento no se determina. El sistema dado tiene una infinidad de soluciones (puesto que en el plano de coordenadas el par de números $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ define un punto de la circunferencia unidad), con la particularidad de que si φ_0 es una de las soluciones, todas las demás soluciones se obtienen a partir de ésta última por la fórmula $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera. De este modo, todo número complejo $z \neq 0$ cuenta con una infinidad de argumentos que se diferencian uno del otro en un número múltiplo de 2π.

Se llama *argumento principal* de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ el argumento de éste elegido en el intervalo $[0,2\pi)$ y se denota por $\arg z$.

El argumento de un número complejo z tiene el siguiente significado geométrico. Si un número complejo $z = a + bi \neq 0$ se considera como un vector z cuyo extremo se dispone en el punto $M(a, b)$, entonces la magnitud del ángulo φ, al cual se debe girar en el sentido contrario a las agujas del reloj el eje positivo Ox hasta que coincida éste por primera vez con el vector z, es precisamente el argumento principal del número complejo z (véase la fig. 192). La magnitud de cualquier ángulo que difiere del argumento principal $\arg z$ en un número entero de ángulos completos será también argumento del número en consideración z.

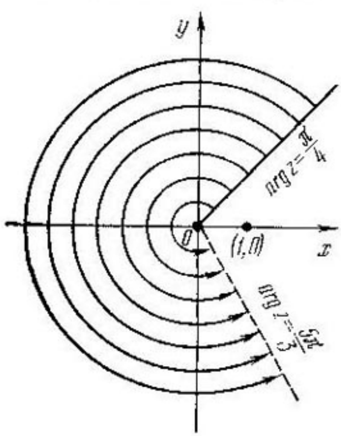


Fig. 200

Ejemplo. Hállense en un plano los puntos z que satisfacen la condición $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{5\pi}{3}$.

Todos los puntos dispuestos en un rayo cualquiera que parte del origen de coordenadas tienen un mismo argumento principal, razón por la cual la condición del problema la satisfacen todos los puntos de aquella parte del plano que se dispone entre los rayos que parten del origen de coordenadas bajo los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{3}$, como también por los puntos dispuestos en el primer rayo (fig. 200).

Números complejos conjugados. Un número complejo $\bar{z} = a - bi$ se denomina *conjugado del número complejo* $z = a + bi$.

De acuerdo con las fórmulas de multiplicación reducida, $z\bar{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Esta propiedad de los números complejos conjugados permite reducir la operación de división de un número complejo z_1 por otro número complejo z_2 $(z_2 \neq 0)$ a la multiplicación de los números complejos z_1 y $\bar{z}_2$. En efecto, sean $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ y $z_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i,$$

Ejemplo. $\dfrac{2+i}{4-i}=\dfrac{(2+i)(4+i)}{(4+i)(4-i)}=\dfrac{8+2i+4i+i^2}{16+1}=\dfrac{7}{17}+\dfrac{6}{17}i.$

Por definición, si $z\neq 0$, tenemos $z^0=1$; si $z\neq 0$ y n es un número natural, entonces $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

Ejemplos. 1. $(2+i)^0=1$;

2. $i^{-1}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{-i}{i(-i)}=\dfrac{-i}{-i^2}=-i$;

3. $(2+i)^{-2}=\dfrac{1}{(2+i)^2}=\dfrac{1}{4+4i+i^2}=\dfrac{1}{3+4i}=\dfrac{1(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$
$=\dfrac{3-4i}{9+16}=\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}i.$

Es fácil ver que un número conjugado del número $\bar{z}$ es el número z, es decir, $z=\bar{\bar{z}}$, y, por eso, los números $\bar{z}$ y z se llaman *recíprocamente conjugados*. En la interpretación geométrica de los números complejos los recíprocamente conjugados representan puntos simétricos con relación al eje real Ox (fig. 201). Aportemos una serie de propiedades de los números recíprocamente conjugados.

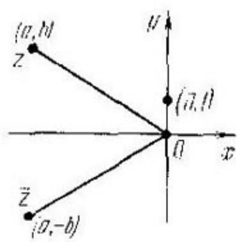


Fig. 201

a) $|\bar{z}|=|z|$.

Efectivamente, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\bar{z}|=$
$=\sqrt{a_2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, es decir, $|\bar{z}|=$
$=|z|$.

b) Si $z=a$, donde a es un número entero, entonces $\bar{z}=z$, $\arg\bar{z}=\arg z$.

c) Si $\bar{z}\neq z$, entonces $\arg\bar{z}=2\pi-\arg z$.

En efecto, si φ es una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \operatorname{sen}\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

entonces el número $\varphi_1=2\pi-\varphi$ es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \operatorname{sen}\varphi=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

d) $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$

En efecto, por cuanto $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, y como $z\bar{z}=$
$=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, entonces $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.

e) La suma y el producto de los números recíprocamente conjugados es un número real.

En efecto, si $z = a + bi$, entonces $z + \bar{z} = 2a$ (un número real) y $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (un número real).

f) Un número conjugado de la suma de dos números complejos cualesquiera es igual a la suma de los números conjugados de los sumandos, es decir, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

En efecto, si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)\, i = \overline{[(a + c) + (b + d)\, i]} = \overline{z_1 + z_2}$.

g) Un número conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los números conjugados de los factores, es decir, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

En efecto, si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$ e $\overline{(z_1 z_2)} = (ac - bd) - (ad + bc)\, i$, y $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)\, i = (ac - bd) - (ad + bc)\, i$, es decir, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

h) Un número conjugado de la diferencia entre dos números complejos es igual a la diferencia entre los números conjugados, es decir, $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

La propiedad h) se demuestra igual que la f).

i) Si $z_2 \neq 0$, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

La propiedad i) se demuestra igual que la g).

j) Un número conjugado de la n-ésima potencia de un número complejo z es igual a la n-ésima potencia del número conjugado de z, es decir, $\overline{(z^n)} = (\bar{z}^n)$, donde n es un número natural.

Demostremos esta propiedad por el método de inducción matemática. Cuando $n = 1$, el teorema es obvio. Supongamos que es también obvio para $n = k$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad $\overline{(z^k)} = (\bar{z})^k$, y demostremos que $\overline{(z^{k+1})} = (\bar{z})^{k+1}$. En efecto, $\overline{(z^{k+1})} = \overline{(z^k \cdot z)}$. De acuerdo con la propiedad g) de los números conjugados tenemos $\overline{(z^k z)} = \overline{(z^k)}\,\bar{z}$. Valiéndonos ahora de la suposición de que $n = k$, obtenemos $\overline{(z^k)}\,\bar{z} = (\bar{z})^k\bar{z} = (\bar{z})^{k+1}$, y la propiedad j) queda demostrada.

Como corolario de las propiedades demostradas más arriba (f, h, j) obtenemos la validez de la siguiente **afirmación**.

Si un número z viene expresado en términos del número complejo α con ayuda de la suma y la diferencia de las potencias naturales del último, entonces, sustituyendo en esta expresión el número α por el número conjugado de él, $\bar{\alpha}$, obtenemos el número $\bar{z}$, que es conjugado del número z.

§ 2. Forma trigonométrica de los números complejos

Sea $z = a + bi$ un número complejo distinto de cero. Designemos con r el módulo de este número y con φ, uno de sus argumentos. Entonces, el número z puede ser escrito en la forma

$$z = r(\cos\varphi + i\ \operatorname{sen}\varphi). \tag{1}$$

El segundo miembro de la igualdad (1) recibe el nombre de *forma trigonométrica* del número complejo z.

La forma trigonométrica de un número complejo distinto de cero está definida de modo unívoco: es la notación del número complejo z en la forma (1), donde r es un número positivo igual al módulo del número z; el coseno y el seno se toman de un mismo ángulo φ, que es igual al argumento del número z, y, además, entre el coseno y el seno se pone el signo más.

Está claro que los números complejos dados a continuación están scritos no en forma trigonométrica:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\ \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right); \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right);$$

$$z_3 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}; \quad z_4 = \cos\frac{\pi}{4} - i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$$

La forma trigonométrica de estos números complejos es la siguiente:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}; \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}; \quad z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\ \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}.$$

Las operaciones de multiplicación, división y elevación a potencia entera con los números complejos se realizan con mayor comodidad, si dichos números están escritos en la forma trigonométrica.

Teorema 1. *El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de sus módulos, y el argumento es igual a la suma de los argumentos.*

Demostración. Sean dados los números complejos $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)$. Analicemos el número $z_3 = z_1 z_2$. Aplicando las reglas que rigen las operaciones sobre los números complejos y, además, las fórmulas para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos, tenemos:

$$\begin{aligned} z_3 = z_1 z_2 &= [r_1(\cos\varphi_1 + i\ \operatorname{sen}\varphi_1)]\ [r_2(\cos\varphi_2 + i\ \operatorname{sen}\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 + i\ \operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\ \operatorname{sen}\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) + (\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &\qquad + \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) i] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \\ &\qquad + \varphi_2) + i\ \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Así pues, $z_3 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$, es decir, el número z_3 está escrito en la forma trigonométrica y su módulo es igual a $r_1 r_2$, mientras que su argumento es $(\varphi_1 + \varphi_2)$, lo que demuestra el teorema.

Teorema 2. *El módulo del cociente de dos números complejos* z_1 *y* z_2 $(z_2 \neq 0)$ *es igual al cociente de sus módulos, y el argumento es igual a la diferencia entre los argumentos.*

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema 1, se debe solamente multiplicar con anticipación el numerador y el denominador del cociente $\frac{z_1}{z_2}$ por $(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)$.

Teorema 3 (fórmula de Moivre). *Sea z un número complejo cualquiera distinto de cero y sea n cualquier número entero*, en este caso tenemos

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \tag{2}$$

Demostración. 1. Para cualquier n natural demostremos esta fórmula por el método de inducción matemática.

Cuando $n = 1$, la fórmula es justa. Supongamos que la fórmula (2) es también justa para $n = k$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad

$$z^k = [r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^k = r^k (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi). \tag{3}$$

Demostremos que la validez de la igualdad (3) predetermina el hecho de que la fórmula (2) se verifica también para $n = k + 1$. Aplicando la fórmula (3), las reglas que rigen las operaciones sobre los números complejos y las fórmulas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos, tenemos

$$z^{k+1} = z^k z = [r^k (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi)] [r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)] =$$
$$= r^{k+1} [(\cos k\varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} k\varphi \operatorname{sen} \varphi) + i (\operatorname{sen} k\varphi \cos \varphi +$$
$$+ \cos k\varphi \operatorname{sen} \varphi)] = r^{k+1} [\cos (k+1)\varphi + i \operatorname{sen} (k+1)\varphi],$$

es decir, la fórmula (2) queda demostrada para $n = k + 1$. Por consiguiente, según el método de inducción matemática la fórmula (2) es válida para cualquier n natural.

2. Si $n = 0$ y $z \neq 0$, entonces, por definición, $z^0 = 1$, por lo cual $z^0 = 1 \cdot (\cos 0\varphi + i \operatorname{sen} 0\varphi)$, es decir, la fórmula (2) es justa para $n = 0$.

3. Sea $n = -1$. Aplicando la definición de potencia con exponente entero negativo y el teorema 2, llegamos a que

$$z^{-1} = \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(+\varphi)],$$

es decir, para $n = -1$ la fórmula (2) es válida.

4. Sea n un número entero negativo cualquiera, entonces $n = -m$, donde $m = |n|$ es un número natural. Aplicando primeramente la definición de potencia con exponente entero, y luego, la

validez de la fórmula (2) para $n = -1$, al principio, y después para cualquier m natural, tenemos

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left\{\frac{1}{r\,[\cos(+\varphi) + i \operatorname{sen}(+\varphi)]}\right\}^m =$$

$$= \left\{\frac{1}{r}\,[\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]\right\}^m =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^m [\cos(-m\varphi) + i \operatorname{sen}(-m\varphi)] = r^n\ (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Así pues, la fórmula (2) es válida para cualquier n entero. El teorema está demostrado.

He aquí un ejemplo de aplicación de la fórmula de Moivre. Calculemos sen $3x$ y cos $3x$ a través de sen x y cos x. Según la fórmula de Moivre,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x.$$

Al mismo tiempo, de acuerdo con la fórmula del binomio de Newton,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos^3 x + i\, 3\cos^2 x \operatorname{sen} x + 3 \cos x\,(i \operatorname{sen} x)^2 +$$
$$+ (i \operatorname{sen} x)^3 = (\cos^2 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x) + i\,(3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x).$$

Así, según la regla de igualdad de los números complejos, tenemos

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x, \quad \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x.$$

Aplicando la identidad trigonométrica fundamental, podemos escribir estas fórmulas en la forma:

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x, \ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Observación. Estas mismas fórmulas se han obtenido en el cap. V con ayuda de otro método. Haciendo uso de las fórmulas de Moivre y del binomio de Newton, podemos calcular cos nx y sen nx para cualquier número natural n.

La forma trigonométrica de los números complejos permite demostrar las propiedades de los módulos de los números complejos:

a) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$;

b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, si $z_2 \neq 0$;

c) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

d) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

e) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$;

f) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Demostremos estas propiedades. La propiedad a) se ha demostrado en el teorema 1, y la propiedad b), en el teorema 2.

Demostremos la propiedad c) Sea $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$, y $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$. Por cuanto

$$(z_1 + z_2) = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i\,(r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + r_2 \operatorname{sen} \varphi_2),$$

entonces

$$|z_1+z_2| = (r_1^2\cos^2\varphi_1 + 2r_1r_2\cos\varphi_2 +$$
$$+ r_2^2\cos^2\varphi_2 + r_1^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_1 + 2r_1r_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 + r_2^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_2)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Por cuanto $\cos(\varphi_1-\varphi_2) \leqslant 1$, entonces $|z_1+z_2| \leqslant \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2} = r_1+r_2 = |z_1|+|z_2|$. La propiedad c) está demostrada.

La propiedad d) se demuestra análogamente.

La propiedad e) se desprende de la propiedad d). En efecto, $|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2| \leqslant |z_1+z_2| + |z_2|$, de donde

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1+z_2|. \tag{4}$$

Análogamente, $|z_2| = |(z_2+z_1)-z_1| \leqslant |z_2+z_1| + |z_1|$, de donde

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1+z_2|. \tag{5}$$

La validez de las desigualdades (4) y (5) predetermina la validez de la propiedad e).

La propiedad f) se demuestra de igual manera.

Raíces de los números complejos y sus propiedades. En el capítulo IV se resolvía un problema: hallar, para cualquier número dado a y cualquier número natural dado n, un número b tal, que se verifique $b^n = a$. Los números b suelen llamarse raíces de n-ésimo grado del número a. Allí se mostró que si el número a es real y positivo, y n, un número natural par, entonces existen dos números reales, b_1 y b_2, tales, que $b_1^n = a$ y $b_2^n = a$; si a es un número entero, y n, un número natural impar, existe el único número real b tal, que $b^n = a$.

No obstante, en el dominio de números reales ya no se puede hallar un número cuya potencia par sea igual a un número negativo. En el dominio de números complejos esto resulta posible. Es válida una afirmación más general: en el conjunto de números complejos puede hallarse la raíz de cualquier grado natural de cualquier número complejo. Esta afirmación es un corolario del siguiente teorema.

Teorema 4. *Sea z un número complejo, $z \neq 0$, y sea n un número natural. Existen n diferentes números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$* tales, que $\alpha_i^n = z$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Estos números se denominan *raíces de grado n del número complejo z*. Para designar dichas raíces no hay símbolos especiales semejantes al símbolo que se emplea para denotar una raíz aritmética.

Demostración. Cuando $n = 1$, el teorema es obvio. Supongamos que $n \geqslant 2$ y sea $z = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ $(z \neq 0)$. Buscaremos un número complejo $\alpha = \rho(\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\,\psi)$ tal, que sea $\alpha^n = z$. Mostremos que tal número α existe. Más aún, mostremos que hay una infinidad de tales números, pero solamente n de ellos se diferencian entre sí.

De acuerdo con la fórmula de Moivre tenemos

$$z = \alpha^n = \rho^n (\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi).$$

Por definición de módulo de un número complejo, $| z | = \rho^n$, es decir, $r = \rho^n$, de donde $\rho = \sqrt[n]{r}$ (por definición de módulo de un número complejo $z \neq 0$, los números ρ y r son positivos, por lo cual el símbolo de la raíz aritmética en este caso está justificado).

Recurriendo a la definición de igualdad entre dos números complejos, llegamos a que se verifican a la vez las igualdades

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos \varphi, \\ \operatorname{sen} n\psi = \operatorname{sen} \varphi. \end{cases}$$

Estas igualdades se verifican simultáneamente si, y sólo si, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, donde k es cualquier número entero, es decir, para $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, donde k es cualquier número entero. Quiere decir, los números α son tales, que cada uno de ellos satisface la igualdad $\alpha^n = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, además ellos existen y pueden ser escritos en la forma

$$\alpha = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right\}, \tag{6}$$

donde k es un número entero cualquiera. Designando con α_p la raíz, que se calcula según la fórmula (6) para $k = p$, obtenemos:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{u}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n}\right)\right\},$$

. . . .

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi (n-1)}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi (n-1)}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_n = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right)\right\} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt[n]{r} \left\{\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi (n+1)}{n}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2\pi (n+1)}{n}\right)\right\} = \alpha_1,$$

. . . .

$$\alpha_{2n} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_{n-1},$$

$$\alpha_{-2} = \alpha_{n-2},$$

. . . .

$$\alpha_{-n} = \alpha_0$$

. . . .

De aquí se ve con facilidad que para cualquier p entero se verifican las igualdades $\alpha_0 = \alpha_{pn}$, $\alpha_1 = \alpha_{pn+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{pn+2}$, . . ., . . ., $\alpha_{n-1} = \alpha_{pn+n-1}$.

Así pues, hay exactamente n raíces diferentes: α_0, α_1, α_2, ..., α_{n-1}. Ellas pueden calcularse según la fórmula

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right\}, \qquad (7)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Cabe señalar que de la fórmula (7) pueden obtenerse todas las n raíces, si en lugar de k sustituimos en dicha fórmula cualesquiera n números enteros seguidos.

Ejemplo. Hállense las raíces de tercer grado del número $z = \sqrt{3}+i$.

Por cuanto $r=2$, y $\varphi = \frac{\pi}{6}$, entonces $\alpha_k = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)\right\}$, donde $k = 1, 2, 3$, es decir,

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right\},$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)\right\}.$$

Analicemos un caso particular: la búsqueda de la raíz de n-ésimo grado de la unidad, es decir, hallemos los números α_k tales, que se verifique $\alpha_k^n = 1$. Por cuanto $r = 1$ y $\varphi = 0$, tenemos

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad (8)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Si $n = 2m$ (un número par), entonces entre las raíces citadas existen dos reales, $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_m = -1$. Si $n = 2m + 1$ (un número impar), entonces existe la única raíz real que es $\alpha_0 = 1$.

Demos a conocer también otras propiedades de las raíces de n-ésimo grado de la unidad:

a) $|\alpha_k| = 1$;

b) $\alpha_k \alpha_m = \alpha_{k+m}$;

c) $\frac{\alpha_k}{\alpha_m} = \alpha_{k-m}$;

d) $\alpha_k^m = \alpha_{km}$, donde m es un número entero cualquiera (la raíz α_n se halla por la fórmula (8), donde en lugar de k se debe tomar n).

Demostremos estas propiedades. La propiedad a) se deduce de la definición de módulo de un número complejo.

Para demostrar la propiedad b), hagamos uso del teorema sobre el producto de números complejos en la forma trigonométrica:

$$\alpha_k\alpha_m = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \left(\frac{2\pi m}{n}\right) = \alpha_{k+m}.$$

La propiedad c) se demuestra análogamente.

Demostremos la propiedad d). De acuerdo con la fórmula de Moivre tenemos:

$$\alpha_k^m = \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right) m\right] + i \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right) m\right] = \alpha_{km}.$$

Veamos ahora la interpretación geométrica de la n-ésima potencia de la unidad:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1,\\
\alpha_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right),\\
\alpha_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right),\\
\alpha_3 &= \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ \ldots,\\
\alpha_{n-2} &= \cos\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right],\\
\alpha_{n-1} &= \cos\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right].
\end{aligned}$$

Es evidente que los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ serán los vértices de un n-ángulo regular inscrito en la circunferencia unidad y uno de los vértices del n-ángulo citado será el punto A_0 (1; 0).

Ejemplos. 1. Sea $n=3$, entonces $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\alpha_2=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Los puntos $A_0(1; 0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ son los vértices del triángulo regular $A_0A_2A_2$ inscrito en la circunferencia unidad (fig. 202).

2. Sea $n = 4$, entonces $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -i$. Los puntos A_0 (1; 0), A_1 (0; 1), A_2 = (—1; 0) y A_3 (0; —1) son los vértices del cuadrado $A_0A_1A_2A_3$, inscrito en la circunferencia unidad (fig. 203).

Aduzcamos la fórmula para una raíz de n-ésimo grado del número (—1). Por cuanto $r=1$ y $\varphi=\pi$, entonces $\alpha_k=\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2\pi k}{n}\right)$, donde $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

De aquí se ve que si $n = 2m$ (un número par), entonces entre α_k no hay ningún número que sea real. Si $n = 2m + 1$ (número impar), existe el único número real $\alpha_m = -1$.

En general, para cualquier número positivo a y todo número natural par n existen sólo dos números reales, b_1 y b_2, tales, que $b_1^n = b_2^n = a$.

En efecto, como para cualquier número positivo $a = |a| \times (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, entonces todas las raíces de n-ésimo grado de dicho número se calculan según la fórmula $b_k = \sqrt[n]{|a|} \left\{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right\}$.

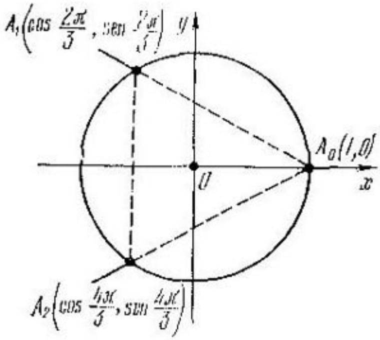


Fig. 202

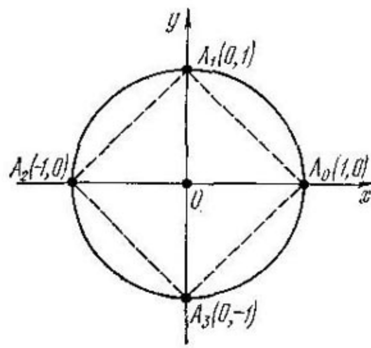


Fig. 203

Si $n = 2m$, entre los números mencionados habrá solamente dos números reales, $b_0 = \sqrt[n]{|a|}$ y $b_m = -\sqrt[n]{|a|}$, lo que se afirmó más arriba.

De modo análogo podemos demostrar la validez de las siguientes **afirmaciones:**

Para cualquier número positivo a *y todo número natural impar* n *existe el único número real* $b = \sqrt[n]{a}$ *tal, que* $b^n = a$.

Para cualquier número negativo a *y todo número natural impar* n *existe el único número real* $b = -\sqrt[n]{|a|}$ *tal, que* $b^n = a$.

Para cualquier número negativo a *y todo número natural par* n *no existe ningún número real* b *tal, que se verifique* $b^n = a$.

§ 3. Campos de números y anillos de números

En este párrafo se analizan los *conjuntos de números*, con la particularidad de que por conjuntos de números se entienden o bien todos los números complejos o bien alguna parte de ellos.

En adelante por *operación* se entiende una de las cuatro operaciones aritméticas: adición, multiplicación, sustracción y división.

Un conjunto se denomina *cerrado* respecto de cierta operación dada, si la aplicación de dicha operación a todo par de números perteneciente al conjunto proporciona un número del mismo conjunto.

Ejemplos. 1. El conjunto de números naturales es cerrado respecto de la operación de adición, puesto que la suma de cualesquiera números naturales es un número natural.

Ejemplos. 1. El conjunto de todos los números complejos forma un campo llamado campo de números complejos.

2. El conjunto de números naturales no es cerrado respecto de la operación de sustracción, puesto que la diferencia entre dos números naturales no siempre es un número natural, por ejemplo $2 - 3 = -1$ (-1 no es un número natural).

3. Un conjunto compuesto por 0, 1 y -1 es cerrado respecto de la operación de multiplicación.

4. El conjunto de números enteros es cerrado respecto de la operación de sustracción, pero no es cerrado respecto de la operación de división.

Un conjunto de números, cerrado respecto de las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (a excepción de la división por cero) recibe el nombre de *campo de números.*

Ejemplos. 1. El conjunto de todos los números complejos forma un campo de números complejos.

2. El conjunto de todos los números reales forma un campo, llamado campo de números reales.

3. El conjunto de todos los números racionales forma un campo llamado campo de números racionales.

4. El conjunto de todos los números enteros no forma un campo de números, pues no es cerrado respecto de la operación de división.

5. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde p y q son números racionales cualesquiera, forma un campo de números.

Demostración. a) Por cuanto

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

y $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$ son números racionales, entonces el carácter cerrado de dicho conjunto respecto de la operación de adición queda demostrado.

De modo análogo se demuestra el carácter cerrado respecto de la operación de sustracción.

b) Por cuanto

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})\,(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2},$$

y $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$, $(p_1q_2 + p_2q_1)$ son números racionales, entonces queda demostrado el carácter cerrado de este conjunto respecto de la operación de multiplicación.

c) Por cuanto

$$\frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})} = \frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})\,(p_2 - q_2\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})\,(p_2 - q_2\sqrt{2})} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

y $p_2^2 - 2q_2^2 \neq 0$, entonces el carácter cerrado respecto de la operación de división queda demostrado.

Así pues, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde p, q son números racionales cualesquiera, es un campo.

6. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde p, q son números naturales cualesquiera, no es un campo, puesto que el conjunto de números naturales no es cerrado respecto de la operación de sustracción.

El conjunto de números, cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, recibe el nombre de *anillo de números.*

Ejemplos. 1. Cualquier campo de números es un anillo de números.

2. El conjunto de números enteros es un anillo de números, puesto que este conjunto es cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

3. El conjunto de números pares es un anillo de números, puesto que al adicionar, sustraer y multiplicar números pares se obtiene de nuevo un número par.

4. El conjunto de números impares no será un anillo, puesto que al adicionar números impares ya resulta un número par, es decir, tal conjunto de números no es cerrado respecto de la operación de adición.

5. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde p y q son números enteros cualesquiera, es un anillo de números, pero no es un campo de números. Efectivamente, por cuanto el conjunto de números enteros es cerrado respecto de la operación de adición, sustracción y multiplicación, entonces

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) - (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)\sqrt{2},$$

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2},$$

donde $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$, $(p_1 - p_2)$, $(q_1 - q_2)$, $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$, $(p_1q_2 + p_2q_1)$ son números enteros. Por consiguiente, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$ es cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, es decir, es un anillo de números.

Veamos la operación de división. Por cuanto

$$\frac{p_1 + q_1\sqrt{2}}{p_2 + q_2\sqrt{2}} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

y el conjunto de números enteros no es cerrado respecto de la operación de división, entonces para p_1, p_2, q_1, q_2 enteros las expresiones numéricas $\frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$, $\frac{q_1p_1 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$

pueden adquirir también valores no enteros. Por consiguiente, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$ no es cerrado respecto de la operación de división, es decir, no es un campo de números.

§ 4. Polinomios sobre el campo de números complejos

Se llama *polinomio de grado n* (n es un número entero no negativo dado) *de la variable x sobre el campo de números K* la expresión de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números dados del campo K, con la particularidad de que $a_0 \neq 0$.

De esta definición se deduce, en particular, que los polinomios de grado nulo son números del campo K distintos de cero. El número cero se considera un polinomio, con la particularidad de que es el único polinomio cuyo grado no está definido.

Para la notación abreviada de los polinomios se emplean, de ordinario, los siguientes símbolos: $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ u otros; si se quiere recalcar que un polinomio $P(x)$ es de grado n, se escribe $P_n(x)$. En el § 5 del capítulo II los polinomios se estudiaban sobre el campo de números reales.

En este párrafo los polinomios se estudian, principalmente, sobre el campo de números complejos y por eso en lo que sigue por polinomio se entenderá un *polinomio sobre el campo de números complejos*. En los casos cuando los polinomios se consideran sobre otros campos de números, esto se especificará especialmente.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se consideran *idénticamente iguales* (a veces se dice, brevemente, iguales), si, y sólo si, son iguales sus grados y los coeficientes de x en potencias iguales. Para la notación de una igualdad idéntica de los polinomios se usa el signo de igualdad, si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son idénticamente iguales, se escribe $P(x) = Q(x)$. Quiere decir, si

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

entonces $P_n(x) = Q_m(x)$ si, y sólo si, $n = m$ y $a_{n-i} = b_{m-i}$ para todos los $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Se denomina *suma* de los polinomios

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

donde $n \geqslant m$, un polinomio $T(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + c_{n-1}x + c_n$ tal, que $c_{n-1} = a_{n-i} + b_{m-i}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, con la particularidad de que $b_{m-i} = 0$ para todo $i = m + 1, m + 2, \ldots, n$, es decir, recibe el nombre de suma de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ el polinomio $T(x)$, cuyos coeficientes de toda potencia de la variable x es igual a la suma de los coeficientes de la misma potencia de x en los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$, con la particularidad de que si $n > m$, entonces los coeficientes b_{m+1}, b_{m+2}, . . ., b_n se deben considerar iguales a cero. Para hallar la suma de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se deben escribir todos los términos sucesivos de estos dos polinomios y, a continuación, reducir los términos semejantes.

Se llama producto de dos polinomios

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

un polinomio

$$R(x) = d_0x^{m+n} + d_1x^{m+n-1} + d_2x^{m+n-2} + \ldots + d_{n+m-1}x + d_{n+m}$$

tal, que $d_i = \sum\limits_{p+q=i} a_{n-p}b_{m-q}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n+m$,

es decir, recibe el nombre de producto de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ un polinomio $R(x)$, cuyo coeficiente d_i es el resultado de la adición de todos los productos, en cada uno de los cuales se multiplican tales coeficientes a_k y b_l de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$, la suma de los índices $k + l$ de los cuales sea igual a $n + m - i$. Para hallar el producto de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se debe multiplicar cada término del polinomio $P_n(x)$ por cada término del polinomio $Q_m(x)$, sumar los polinomios obtenidos y reducir los términos semejantes.

No es difícil de comprobar que son válidas las siguientes **leyes principales** de adición y multiplicación de los polinomios:

1. $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$ (conmutatividad de la adición);

2. $[P(x) + Q(x)] + T(x) = P(x) + [(Q(x) + T(x)]$ (asociatividad de la adición);

3. $P(x)\,Q(x) = Q(x)\,P(x)$ (conmutatividad de la multiplicación);

4. $[P(x)\,Q(x)]\,T(x) = P(x)\,[Q(x)\,T(x)]$ (asociatividad de la multiplicación);

5. $[P(x) + Q(x)]\,T(x) = P(x)\,T(x) + Q(x)\,T(x)$ (distributividad de la adición respecto de la multiplicación).

Restar de un polinomio $P(x)$ otro polinomio $T(x)$ significa hallar tal polinomio $Q(x)$, que se verifique $P(x) = T(x) + Q(x)$. No es difícil comprobar que para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$ tal polinomio $Q(x)$ existe y es único, él se denomina *diferencia* entre los polinomios $P(x)$ y $T(x)$ y se denota con $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Si $T(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ y

$T^*(x) = -T(x) =$

$= (-a_0)\,x^n + (-a_1)\,x^{n-1} + (-a_2)\,x^{n-2} + \ldots + (-a_{n-1})\,x +$

$+ (-a_n)$, entonces $Q(x) = P(x) + T^*(x)$. Quiere decir, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la operación de sustracción, inversa de la de adición.

Dividir exactamente un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal, que se verifique $P(x) = T(x)\,Q(x)$. Si tal polinomio $Q(x)$ existe, se dice que el polinomio $T(x)$ es divisor del polinomio $P(x)$, y el polinomio $Q(x)$ se llama *cociente* de la división del polinomio $P(x)$ por el $T(x)$.

No todo polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el polinomio $T(x)$. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + i$ no se divide exactamente por el polinomio $x + 1$. Quiere decir, en el conjunto de polinomios no siempre se realiza la operación de división exacta, inversa de la operación de multiplicación. En cambio, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la operación de división inexacta.

Dividir inexactamente un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que se verifique

$$P(x) = T(x)\,q(x) + r(x), \tag{1}$$

con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es cero.

En el caso de cumplirse la igualdad (1), se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con el resto $r(x)$ y el cociente $q(x)$. En particular, si $r(x) = 0$, suele decirse que el polinomio $P(x)$ se divide por el $T(x)$ con el resto cero, o bien que el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el polinomio $T(x)$.

Por analogía con el teorema 5 del § 5 cap. II se demuestra el teorema de divisibilidad de los polinomios dados sobre un campo de números complejos.

Teorema 1. *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par único de polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x)\,q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es nulo.*

Existen varios procedimientos para determinar los coeficientes de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$. El más usado entre ellos es el método de coeficientes indeterminados, examinado en el 5 del capítulo II. En el mismo párrafo hemos estudiado detalladamente la cuestión sobre la división de un polinomio por el binomio $(x - \alpha)$, donde α es un número real. Todos los resultados obtenidos en el § 5, cap. II son válidos también para el caso en que los coeficientes del polinomio y el número α son unos números complejos cualesquiera.

En particular, resultan lícitos los siguientes teoremas.

Teorema 2 (teorema de Bezout). *El resto que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x - \alpha)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$* para $x = \alpha$, es decir, $r = P(\alpha)$.

Teorema 3. *Un polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el binomio $(x-\alpha)$ si, y sólo si, el valor del polinomio para $x=\alpha$ es igual a cero, es decir, si $P(\alpha)=0$.*

El número α lleva el nombre de *raíz del polinomio* $P(x)$, si $P(\alpha)=0$. Enunciemos el teorema 3, valiéndonos de la definición de raíz de un polinomio.

Teorema 4. *Un número α es raíz del polinomio $P(x)$ si, y sólo si, el polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el binomio $(x-\alpha)$.*

Surge el interrogativo de si todo polinomio tiene raíz. La respuesta a esta pregunta la da el teorema fundamental del Algebra.

Teorema (Teorema fundamental del algebra). *Todo polinomio de grado n $(n \geqslant 1)$ sobre un campo de números complejos tiene por lo menos una raíz.*

Este teorema se acepta aquí sin demostración. A título de corolario de este teorema se demostrará el teorema siguiente.

Teorema 5. *Todo polinomio $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ de grado n $(n \geqslant 1)$ sobre un campo de números complejos se desarrolla en un producto de n factores lineales, es decir,*

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n). \qquad (2)$$

Demostración. Sea P_n un polinomio de grado n. En virtud del teorema fundamental del algebra, él tiene una raíz. Designémosla con α_1. Entonces, de acuerdo con el teorema 4, $P_n(x)=(x-\alpha_1)\times$ $\times q_1(x)$, donde $q_1(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$. Para el polinomio $q_1(x)$ es aplicable también el teorema fundamental del algebra, por lo cual $q_1(x)$ tiene una raíz α_2. Entonces, de acuerdo con el teorema 4, $q_1(x)=(x-\alpha_2)\,q_2(x)$, donde $q_2(x)$ es un polinomio de grado $(n-2)$. Continuando este proceso, llegamos a que $q_{n-1}(x)=(x-\alpha_{n-1})\,q_n(x)$, donde $q_n(x)$ es un polinomio de primer grado, es decir, $q_n(x)=b_0(x-\alpha_n)$ $(b_0\neq 0)$. De estos razonamientos se desprende que

$$P_n(x)=b_0(x-\alpha_1)(x-\beta_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n). \qquad (3)$$

Al abrir los paréntesis en el producto que figura en el segundo miembro de la igualdad (3), concluímos que en el polinomio $P_n(x)$ el coeficiente de x^n será b_0, mas, al mismo tiempo, este coeficiente es igual a a_0, por lo cual $b_0=a_0$.

Se ha mostrado, pues, que $P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ $(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$. El teorema está demostrado.

Cabe señalar que en la igualdad (3) algunos de los números α_1, α_2, $\ldots$, α_n pueden ser iguales. Reuniendo juntos los factores lineales iguales, podemos escribir la igualded (2) en la forma

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}(x-\alpha_3)^{k_3}\ldots(x-\alpha_m)^{k_m}, \quad (4)$$

donde $k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m=n$, en este caso se supone que entre los números α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_m ya no hay iguales. Se puede mostrar que en la igualdad (4) el número α_i es la raíz de multiplicidad k_i del polinomio $P_n(x)$.

Del teorema 2 se desprenden los siguientes teoremas.

Teorema 6. *Cualquier polinomio de grado n sobre un campo de números complejos tiene n raíces, si cada una de las raíces se cuenta tantas veces, cual es su multiplicidad.*

Teorema 7 (fórmula de Viete). *Si* $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, es decir, si el coeficiente superior del polinomio es igual a la unidad ($a_0 = 1$), y los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio, se verifican las igualdades

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_n + \ldots \alpha_{n-1}\xi_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n),$$

$$a_n = (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n).$$

Demostración. De acuerdo con el teorema 5 tenemos

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \ldots (x - \alpha_n).$$

Abriendo los paréntesis y haciendo uso de la regla de igualdad de los polinomios, obtenemos la validez de dichas igualdades, que se llaman fórmulas de Viete.

Teorema 8. *Si un polinomio*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

de coeficientes reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tiene una raíz compleja* $a + bi$, *tiene sin falta también la raíz* $a - bi$, *es decir, un número conjugado de la raíz del polinomio de coeficientes reales es también la raíz de dicho polinomio.*

Demostración. Sea el número $a + bi$ una raíz del polinomio.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0).$$

Entonces $P_n(a + bi) = 0$, es decir, se verifica la igualdad

$$a_0(a + bi)^n + a_1(a + bi)^{n-1} + a_2(a + bi)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(a + bi) + a_n = 0.$$

Recurriendo a la fórmula del binomio de Newton, podemos escribir el primer miembro de esta igualdad en la forma $A + Bi$, de donde obtenemos, teniendo presente la regla, de acuerdo con la cual un número complejo se considera igual a cero, $A = 0$ y $B = 0$.

Veamos ahora

$$P_n(a - bi) = a_0(a - bi)^n + a_1(a - bi)^{n-1} +$$
$$+ a_2(a - bi)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(a - bi) + a_n.$$

Anteriormente hemos demostrado que el producto, la potencia y la suma algebraica de los números, conjugados de los números complejos dados, es un número complejo conjugado del producto, de la potencia y de la suma algebraica de los números dados, respectivamente, razón por la cual $P_n(a - bi) = A - Bi$ (se ha tomado en consideración, además, que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales), pero, por cuanto $A = B = 0$, tenemos, pues, que $P_n(a - bi) = 0$, lo que significa que el número $(a - bi)$ es la raíz del polinomio $P_n(x)$. El teorema está demostrado.

Teorema 9. *Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja $a + bi$, entonces es divisible exactamente por el trinomio de segundo grado $x^2 + px + q$, donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.*

Demostración. Si el número $x = a + bi$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces, de acuerdo con el teorema 8, el número $x_2 = a - bi$ es también la raíz de este polinomio. En este caso $P(x)$ es divisible exactamente tanto por el binomio $(x - x_1)$, como por el $(x - x_2)$, quiere decir, se divide por el producto de ellos

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - a - bi)(x - a + bi) =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

lo que se trataba de demostrar.

Teorema 10. *Todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en el producto de los binomios $(x - \alpha_k)$, o bien de los trinomios $x^2 + p_m x + q_m$, o bien de los binomios $(x - \alpha_k)$ y los trinomios $x^2 + p_m x + q_m$ donde α_k, p_m, q_m son números reales y los trinomios $x^2 + p_m x + q_m$ no tienen raíces reales.*

El teorema 10 es un corolario de los teoremas 5 y 9.

Ejemplo. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 4$ cuenta con una raíz $x_1 = 1 + i$. Desarróllese este polinomio en un producto de binomios y trinomios con coeficientes reales.

Por cuanto el polinomio $P(x)$ cuenta con la raíz $x = 1 + i$, entonces, de acuerdo con el teorema 9, es divisible por el trinomio $x^2 - 2x + 2$. Al dividir el polinomio $P(x)$ por este trinomio, obtendremos $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)$.

Desarrollando ahora el polinomio $x^2 - 2$ en factores lineales, obtenemos la respuesta:

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Sea dado un polinomio

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

Hemos mostrado más arriba que:

1. El polinomio (5) sobre un campo de números complejos puede ser escrito en la forma

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n),$$

donde los números $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ pertenecen al mismo campo.

2. El polinomio (5) sobre un campo de números reales puede ser escrito en la forma

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)(x^2 + p_1 x + q_1) \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_m x + q_m), \tag{6}$$

donde $k+2m=n$, y los números $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, p_1, q_1, \ldots$ $\ldots, p_m, q_m$ son reales. En este caso los trinomios de segundo grado en el desarrollo (6) no se pueden representar como el producto de dos factores $(x-\alpha_i)(x-\alpha_j)$ con α_i y α_j reales.

Pasemos ahora al cálculo de las raíces de los polinomios.

Empecemos por un polinomio de primer grado

$$P_1(x)=a_0x+a_1 \ (a_0\neq 0).$$

Cualquiera que sea el campo de números, este polinomio tiene una sola raíz $x_1=-\frac{a_1}{a_0}$. Veamos un polinomio de segundo grado

$$P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2 \ (a_0\neq 0).$$

Según se deduce del teorema 6, el polinomio $P_2(x)$ sobre un campo de números complejos tiene dos raíces. Para encontrarlas transformemos el polinomio $P_2(x)$, formando un cuadrado perfecto:

$$P_2(x)=a_0\left[x^2+2x\frac{a_1}{2a_0}+\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2+\frac{a_2}{a_0}\right]=$$
$$=a_0\left[\left(x+\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\frac{D}{4a_0^2}\right],$$

donde $D=a_1^2-4a_0a_2$. Hallemos un número complejo β tal que sea $\beta^2=\frac{D}{4a_0^2}$. Entonces

$$P_2(x)=a_0\left(x+\frac{a_1}{2a_0}-\beta\right)\left(x+\frac{a_1}{2a_0}+\beta\right),$$

de donde resulta obvio que el polinomio $P_2(x)$ tiene dos raíces:

$$x_1=-\frac{a_1}{2a_0}+\beta, \quad x_2=-\frac{a_1}{2a_0}-\beta.$$

Observemos que si $D\neq 0$, existen dos números complejos β_1 y β_2 tales, que $\beta_1^2=\beta_2^2=\frac{D}{4a_0^2}$. Por cuanto $\beta_1=-\beta_2$, entonces para encontrar las raíces del polinomio $P_2(x)$ no importa cuál de ellas se tomará por β. Si $D=0$, entonces $x_1=x_2=-\frac{a_1}{2a_0}$, y el polinomio $P_2(x)$ tiene una raíz de multiplicidad dos.

Cuando los coeficientes a_0, a_1, a_2 son números reales, D también será un número real y por eso:

a) si $D>0$, el polinomio $P_2(x)$ tendrá dos raíces distintas y reales: $x_1\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_0}$, $x_2=\frac{-a_1-\sqrt{D}}{2a_0}$;

b) si $D=0$, el polinomio $P_2(x)$ tiene una sola raíz real de multiplicidad dos; $x_1=x_1=-\frac{a_1}{2a_0}$;

c) si $D<0$, el polinomio $p_2(x)$ tiene dos raíces complejas:

$$x_1=-\frac{a_1}{2a_0}+\frac{\sqrt{|D|}}{2a_0}i, \ x_2=-\frac{a_1}{2a_0}-\frac{\sqrt{|D|}}{2a_0}i.$$

Para cualquier polinomio de tercer o cuarto grado sobre un campo de números complejos existen los métodos de determinación de sus raíces, sin embargo, estos métodos no se exponen aquí por ser demasiado engorrosos.

En lo que se refiere a los polinomios de grado cinco y superiores, para éstos no existen métodos generales de determinación de las raíces.

En algunos casos particulares, valiéndose de los teoremas sobre raíces enteras y racionales de un polinomio (véase el § 5, cap. II), se logra representar un polinomio dado en forma del producto de polinomios de primero y segundo órdenes y, de este modo, hallar todas sus raíces.

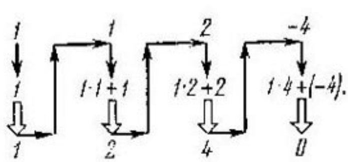
Ejemplo. Hállense las raíces del polinomio $P_3\ (x)=x^3+$ $+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Veamos el polinomio $Q_3(x) = 8P_3(x) = (2x)^3 + (2x)^2 +$ $+ 2(2x) - 4$, o bien $T_3(t) = t^3 + t^2 + 2t - 4$, donde $t = 2x$. Los divisores del término independiente del polinomio $T_3(t)$ son: $+1, -1, +2, -2, +4, -4$.

Hallemos los valores del polinomio $T_3(t)$ en estos puntos:

$$T_3(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0;$$
$$T_3(-1) = -1 + 1 - 2 - 4 = -6 \neq 0,$$
$$T_3(2) = 8 + 4 + 4 - 4 = 12 \neq 0,$$
$$T_3(-2) = -8 + 4 - 4 - 4 = -12 \neq 0,$$
$$T_3(4) = 64 + 16 + 8 - 4 = 84 \neq 0,$$
$$T_3(-4) = -64 + 16 - 8 - 4 = -60 \neq 0.$$

De acuerdo con el teorema de raíz entera (§ 5, cap. II), el polinomio $T_3(t)$ tiene una sola raíz entera 1. Por eso, se la puede representar en forma del producto del binomio $(t - 1)$ y de un trinomio de segundo grado. Con el fin de hallar los coeficientes del trinomio de segundo grado apliquemos el esquema de Horner:



Así pues, $T_3(t) = (t - 1)(t^2 + 2t + 4)$.

El trinomio de segundo grado $t^2 + 2t + 4$ tiene las raíces complejas $t_2 = -1 + \sqrt{3i}$ $t_3 = -1 - \sqrt{3i}$. Por consiguiente, el polinomio de partida $P_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ cuenta con una raíz racional $x_1=\frac{1}{2}$ y dos raíces complejas $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Estudiemos en conclusión un problema en el que se buscan las raíces de un polinomio, dado sobre otros campos numéricos. Si el polinomio está dado sobre un campo de números reales, entonces, de acuerdo con el teorema 6, resulta que el número de raíces reales es inferior o igual al grado del polinomio dado. Sobre la determinación de las raíces reales puede decirse lo mismo que se dijo sobre la determinación de las raíces complejas. Si un polinomio está dado sobre un campo de números racionales, entonces, valiéndonos del teorema 9 (§ 5 cap. II), podemos encontrar todas las raíces racionales del polinomio dado. Por analogía, si el polinomio viene dado sobre un anillo de números enteros, entonces todas las raíces enteras del polinomio en consideración pueden ser halladas haciendo uso del teorema 8 del § 5 cap. II.

§ 5. Anillos, campos, grupos

En los párrafos y capítulos anteriores se han considerado, a la par con los números, unos objetos más complejos, a saber, polinomios, matrices, funciones, etc.

Sobre dichos objetos se realizaban ciertas operaciones análogas a las operaciones aritméticas con los números. Por ejemplo, se analizaban la adición de matrices, la división de un polinomio por otro polinomio, etc. Por eso resulta natural extender el concepto de campo y anillos de números a los conjuntos, compuestos por objetos o elementos más complejos. Mas, para poder hacerlo es necesario definir las operaciones sobre los elementos del conjunto dado.

Sea dado un conjunto no vacío de elementos. Diremos que en este conjunto está definida una *operación algebraica*, si se indica la ley, conforme a la cual a todo par de elementos a y b del conjunto citado se le asigna unívocamente cierto elemento c que también pertenece a este conjunto.

Si esta operación se llama *adición*, entonces el elemento c se denominará *suma* de a y b y se designará $c = a + b$.

Si la operación se llama *multiplicación*, el elemento c se denominará *producto* de los elementos a y b y se designará $c = ab$.

Anillos. Un conjunto no vacío de elementos se llama *anillo*, si en dicho conjunto están definidas dos operaciones, adición y multiplicación, que poseen las siguientes propiedades:

1. La adición es conmutativa: $a + b = b + a$;
2. La adición es asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. La adición y la multiplicación están ligadas por la ley izquierda y derecha de distributividad: $c(a + b) = ca + cb$, $(a + b)c = ac + bc$;

4. Existe tal elemento de este conjunto que, siendo adicionado a cualquier otro elemento del conjunto, no hace variar el último. El elemento citado se denomina *cero* del anillo y se designa por el símbolo 0; en otras palabras, existe tal elemento 0 que $a + 0 = 0 + a = a$.

5. Para todo elemento a del conjunto existe el así llamado elemento *opuesto*, perteneciente al mismo conjunto, y tal, que la suma de a y de dicho elemento es igual a cero del anillo; designando este elemento con $(-a)$, escribamos esta propiedad en la forma $a + (-a) = 0$.

Notemos que de la definición aducida se desprenden las siguientes propiedades del anillo:

1. Cualquier anillo tiene un cero único.

2. En cualquier anillo existe, para cada elemento a, el único elemento opuesto.

3. Para todo elemento a del anillo se verifican las igualdades $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Si en un anillo dado la operación de multiplicación posee, además, la propiedad de conmutatividad, es decir, si para cualesquiera dos elementos a y b del anillo se verifica la igualdad $ab = ba$, el anillo se denomina *conmutativo*.

Si en un anillo dado la operación de multiplicación posee, además, la propiedad de asociatividad, es decir, para cualesquiera tres elementos a, b y c del anillo se verifica la igualdad $(ab)\,c = a\,(bc)$, el anillo se denomina *asociativo*.

Los anillos de números examinados en el § 3 representan los ejemplos más simples de anillos conmutativos y asociativos.

He aquí otros *ejemplos* de anillos.

1. Un conjunto de polinomios, enteros respecto de una letra x, con coeficientes del campo de números dado forma el anillo conmutativo y asociativo, el cual se llama anillo de polinomios sobre el campo dado.

En efecto, según se ha indicado en el § 4, la suma y el producto de polinomios es un polinomio, es decir, en el conjunto de polinomios están definidas dos operaciones: la adición y la multiplicación. Además, en el § 4 fue indicado que ambas operaciones son conmutativas, asociativas y están ligadas por la ley de distributividad. El cero de este anillo es un polinomio, cuyos coeficientes son todos iguales a cero. El elemento opuesto para cada polinomio es un polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio citado por el número (-1).

2. El conjunto de todas las funciones, continuas en el segmento dado $[a; b]$, también forma un anillo conmutativo y asociativo.

En efecto, en el capítulo IX hemos dado la definición de función continua en el segmento dado y hemos indicado que la suma y el producto de dos funciones continuas es una función continua. Es fácil comprobar que las operaciones de adición y multiplicación de funciones continuas son conmutativas, asociativas y están ligadas por la ley de distributividad. El cero de este anillo es una función igual idénticamente a cero, el elemento opuesto para la función $f(x)$ es la función $[-f(x)]$.

3. El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado n forma un anillo. En efecto, en el capítulo X hemos mostrado que la suma y el producto de las matrices cuadradas de un orden dado es una matriz cuadrada del mismo orden. El cero de este anillo es una matriz cuadrada de orden n, cuyos elementos son todos iguales a cero. El elemento opuesto para la matriz dada es una matriz en la que todos sus elementos han sido obtenidos de los elementos de la matriz dada, multiplicándolos por el número (-1).

En el cap. X se ha indicado que la operación de multiplicación de las matrices es asociativa, pero no es conmutativa. Por eso el anillo de matrices cuadradas de un orden dado n será asociativo, pero no conmutativo.

Campos. El conjunto de elementos recibe el nombre de *campo*, si dicho conjunto consta por lo menos de dos elementos y constituye un anillo conmutativo y asociativo, y si en el mismo existe un elemento (llamado unidad del campo) tal, que el producto de cualquier elemento a del campo por la unidad citada es igual a este elemento a, y si, además, en el conjunto existe, para todo elemento a distinto de cero, un elemento (llamado elemento *inverso*) tal, que el producto de cualquier elemento a por su elemento inverso es igual a la unidad del campo.

A título de ejemplo de los campos pueden servir todos los campos de números analizados en el § 3.

He aquí otros *ejemplos* de campos y anillos.

1. El conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde a y b son números cualesquiera de cierto anillo de números, forma un anillo conmutativo y asociativo respecto de las operaciones habituales de adición y multiplicación de matrices. En efecto, veamos la suma y el producto de las matrices del tipo (1). Está claro que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}.$$

Por cuanto los números que constituyen los elementos de las matrices que figuran en los segundos miembros de estas igualdades son números del anillo dado, esto quiere decir precisamente que la suma y el producto de las matrices del tipo (1) son matrices del tipo (1). Con otras palabras, se ha mostrado, que sobre el conjunto de matrices del tipo (1) están definidas las operaciones de adición y multiplicación.

Se demuestra con la misma facilidad que son válidas también las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de la adición y de la multiplicación de las matrices del tipo (1).

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\cdot 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el cero de este anillo, y la matriz $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix}$ es el elemento opuesto para la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

Hemos mostrado, pues, que el conjunto de matrices del tipo (1), donde a y b son números cualesquiera del anillo de números dado, forman un anillo conmutativo y asociativo.

2. El conjunto de matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \tag{2}$$

donde a y b son números racionales, forman un campo.

Por cuanto el conjunto de números racionales es un anillo de números, entonces, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, el conjunto de matrices del tipo (2) con a y b racionales forma un anillo conmutativo y asociativo. La unidad de este anillo es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Supongamos ahora que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ no es el cero del anillo, es decir, admitamos que por lo menos uno de los números a y b es distinto de cero. Mostremos que para cualquier matriz existe una matriz del tipo (2), es decir, la matriz $\begin{pmatrix} x & x \\ 2y & y \end{pmatrix}$ tal, que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

es decir, mostremos que todo elemento de este anillo, distinto de cero, cuenta con un elemento inverso. Aplicando la regla de multiplicación de matrices, llegamos a que la validez de la igualdad (3) es equivalente a la validez de la igualdad

$$\begin{pmatrix} ax+2by & bx+ay \\ 2(ay+bx) & ax+2by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La igualdad (4) se verifica, si, y sólo si, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+2by=1, \\ bx+ay=0 \end{cases} \tag{5}$$

tiene soluciones. Calculemos el determinante del sistema (5)

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2. \tag{6}$$

Por cuanto a y b son números racionales, la expresión $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Quiere decir, para los números racionales dados a y b existe el único par de números x e y que satisface el sistema (5).

Se ha mostrado, pues, que existe una, y sólo una, matriz del tipo (2) que satisface las condiciones (3). Con otras palabras, hemos mostrado que un elemento distinto de cero cuenta con el único elemento inverso.

Esto significa que, efectivamente, el conjunto de matrices del tipo (2) con a y b racionales forma un campo.

Observación. El conjunto de matrices del tipo (2) con a y b reales no forma un campo, puesto que para los números reales el determinante (6) puede reducirse a cero, por ejemplo, cuando $a = b\sqrt{2}$, y, entonces, el elemento distinto de cero no tendrá elemento inverso.

3. Veamos un conjunto de elementos, donde cada elemento representa un par ordenado de números enteros (n, m). Introduzcamos las siguientes definiciones.

Dos elementos (n, m) y (p, q) son iguales, si, y sólo si, $n = p$ y $m = q$.

Se llama suma de dos elementos (n, m) y (k, l) un elemento $(n + k, m + l)$, es decir, $(n, m) + (k, l) = (n + k, m + l)$.

Se llama producto de dos elementos (n, m) y (k, l) un elemento (nk, ml), es decir, $(n, m)(k, l) = (nk, ml)$.

Mostremos que el conjunto introducido de este modo es un anillo conmutativo y asociativo. Designaremos todo elemento de este conjunto con la letra A, es decir, convendremos en que $A = (n, m)$. Comprobemos que las operaciones de adición y multiplicación poseen las propiedades siguientes:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $AB + BA$;
4. $(AB)\,C = A\,(BC)$;
5. $(A + B)\,C = AC + BC$.

En efecto, sea $A = (n, m)$, $B = (k, l)$, $C = (p, q)$. Entonces, haciendo uso de las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de la adición y multiplicación de números enteros, llegamos a que

$$A + B = (n, m) + (k, l) = (n + k, m + l),$$
$$B + A = (k, l) + (n, m) = (k + n, l + m) = (n + k, m + l),$$

de donde se desprende precisamente que $A + B = B + A$, es decir, la propiedad 1 queda demostrada.

Demostremos la propiedad 5. Por definición,

$$(A+B)\,C = (n+k,\ m+l)\,(p,\ q) = (np+kp,\ mq+lq),$$
$$AC = (n,\ m)\,(p,\ q) = (np,\ mq),$$
$$BC = (k,\ l)\,(p,\ q) = (kp,\ lq),$$
$$AC+BC = (np,\ mq)+(kp,\ lq) = (np+kp,\ mq+lq),$$

es decir, $(A+B)\,C = AC+BC$. Las demás propiedades se demuestran análogamente.

El cero de este anillo lo constituye el elemento (0; 0). Para el elemento (n, m) el opuesto será el elemento $(-n, -m)$. Demostremos que este anillo no es un campo. Es fácil ver que la unidad es el elemento (1; 1). Veamos, por ejemplo, el elemento (3; 2) y mostremos que para dicho elemento no existe el opuesto.

Supongamos lo contrario: tal elemento existe. Sea éste el elemento (x, y). En este caso debe verificarse la igualdad $(3; 2)\,(x, y) = (1; 1)$, de donde proviene que deben ser válidas las igualdades $3x = 1$ y $2y = 1$. Mas en el conjunto de números enteros estas igualdades no se cumplen. Quiere decir, nuestra suposición no fue cierta, y esto significa que el anillo en consideración no es un campo.

4. Analicemos un conjunto que se compone de tres elementos A_0, A_1, A_2. Por elemento A_0 se entiende la clase de todos los números enteros divisibles exactamente por el número 3; por elemento A_1 se entiende la clase de todos los números enteros que, siendo divididos por 3, dan un resto igual a 1; por elemento A_2 se entiende la clase de todos los números enteros que, siendo divididos por 3, dan en el resto 2.

Definamos en el conjunto $\{A_0, A_1, A_2\}$ las operaciones de adición y multiplicación mediante las reglas siguientes:

$$A_k + A_l = \begin{cases} A_{k+l}, & \text{si } k+l<3, \\ A_{k+l-3}, & \text{si } k+l \geqslant 3; \end{cases}$$

$$A_kA_l = \begin{cases} A_{kl}, & \text{si } kl<3, \\ A_{kl-3}, & \text{si } kl \geqslant 3. \end{cases}$$

Se puede mostrar que la operación de adición de los elementos A_k y A_l significa la adición de cualesquiera números de las clases A_k y A_l, perteneciendo su suma a la clase correspondiente A_m $(k, l, m = 0, 1, 2)$; la operación de multiplicación de los elementos A_k y A_l significa la multiplicación de cualesquiera números de las clases A_k y A_l, perteneciendo su producto a la clase correspondiente A_m $(k, l, m = 0, 1, 2)$.

Es fácil comprobar también que las operaciones de adición y multiplicación de los elementos A_k y A_l poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

El cero en este conjunto es la clase A_0. El elemento A_{3-k} es opuesto del elemento A_k.

La unidad en dicho conjunto está representada por la clase A_1. Para el elemento A_1 el inverso será él mismo, es decir, A_1; para el elemento A_2 el inverso será él mismo, es decir, A_2. Quiere decir, todo elemento, distinto de cero, del conjunto en consideración, cuenta con un elemento inverso. Todas estas propiedades se comprueban con facilidad a base de las reglas que rigen la adición y multiplicación de las clases mencionadas. Quiere decir, el conjunto de que se trata es un campo.

Observación. Si estudiamos un conjunto compuesto por k elementos ($k \geqslant 2$): $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, donde por elemento A_l se entiende la clase de todos los números enteros que siendo divididos por k dan un resto igual a l (donde $l = 0, 1, 2, \ldots, k-1$), entonces en cada uno de los conjuntos de tal género se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación por analogía con el ejemplo analizado. Cualquiera que sea k natural ($k \geqslant 2$), el conjunto de elementos $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ con operaciones de adición y multiplicación de elementos, definidas por el método mencionado, será un anillo, y si k es un número primo, tal conjunto será un campo.

5. Veamos el conjunto de pares ordenados de números naturales (n, m). Dividamos dicho conjunto en clases, reuniendo en una clase A solamente los pares (n, m) y (k, l) que poseen la propiedad $n + l = m + k$. Por definición, los pares, pertenecientes a una misma clase A, se denominan iguales y se considera que cada par determina la clase A. En el conjunto, cuyos elementos se representan por las clases de pares iguales, definamos las operaciones de adición y multiplicación, rigiéndonos por las siguientes reglas.

Adicionar dos elementos A y B significa adicionar cualquier par (n, m) de la clase A y cualquier par (p, q) de la clase B conforme a la regla $(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$. Cada par de este género $(n + p, m + q)$ pertenecerá a cierta clase C, la cual se llama suma de los elementos A y B y se denota $A + B$, es decir, $C = A + B$.

Multiplicar dos elementos A y B significa multiplicar cualquier par (n, m) de la clase A y cualquier par (p, q) de la clase B conforme a la regla $(n, m)(p, q) = (np + mq, nq + mp)$. Cada par de este género $(np + mq, nq + mp)$ pertenecerá a cierta clase D, la cual se llama producto de los elementos A y B y se designa AB, es decir, $D = AB$.

El conjunto introducido de las clases de pares es un anillo conmutativo y asociativo. En efecto, es fácil comprobar que las operaciones de adición y multiplicación poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y destributividad.

Demostremos, por ejemplo, la propiedad de distributividad: $(A + B) M = AM + BM$. Supongamos que el par $(n, m) \in A$, el par $(k, l) \in B$ y el par $(p, q) \in M$. Si $A + B = C$, entonces la clase C se define por el par $(n + k, m + l)$. Si $CM = D$, entonces la clase D se define por el par $(np + kp + mq + lq,\ nq + kq + mp + lp)$. Si $AM = N_1$, entonces la clase N_1 se define por el par $(np + mq, nq + mp)$. Si $BM = N_2$, entonces la clase N_2 se define por el par

$(kp + lq, kq + lp)$. Si $N_1 + N_2 = N$, entonces la clase N se define por el par $(np + mq + kp + lq, nq + mp + kq + lp)$.

Ahora es evidente, que las clases D y N se definen por un mismo par, es decir, D y N son una misma clase; de este modo se ha mostrado que $(A + B) M = AM + BM$. De modo análogo se demuestran también otras propiedades de adición y multiplicación.

El cero en dicho conjunto lo representa la clase de pares del tipo (k, k).

Mostremos que toda clase A, definida por el par (n, m), cuenta con una clase opuesta. Elijamos un número natural p tal, que sea $p > n$ y $p > m$. Entonces los números $x = p - n$ e $y = p - m$ son naturales. Mostremos que la clase B, definida por el par (x, y), es precisamente la clase opuesta de A. Efectivamente, $A + B = C$, donde la clase C se define por el par (p, p). Pero el par (p, p) define la clase que representa el cero de este conjunto. Así pues, todo elemento de este conjunto cuenta con un elemento opuesto. Quiere decir, el conjunto en consideración es un anillo conmutativo y asociativo.

Observación. Al construir este anillo se han utilizado solamente las propiedades de los números naturales. Dicho anillo puede emplearse para la construcción de anillos de números enteros en la base de los números naturales. Esto se hace así: la clase A, definida por el par (n, m), se identifica con:

a) un número natural, k, si $n > m$ y $n - m = k$;

b) el número cero, si $n = m$;

c) un número negativo $(-k)$, si $n < m$ y $m - n = k$.

El conjunto obtenido será precisamente el anillo de números enteros.

6. Veamos un conjunto de pares ordenados de números enteros $[a, b]$ tales, que $b \neq 0$. Dividamos este conjunto en clases, incluyendo en una misma clase α solamente aquellos pares $[a, b]$ y $[c, d]$ que poseen la propiedad $ad = bc$. Por definición, los pares, pertenecientes a una misma clase, se llaman iguales y se considera que cada uno de estos pares define la clase α. En un conjunto, cuyos elementos están representados por las clases de pares distintos, definamos las operaciones de adición y multiplicación, rigiéndonos por las siguientes reglas.

Adicionar dos elementos α y β significa adicionar cualquier par $[a, b]$ de la clase α y cualquier par $[c, d]$ de la clase β de acuerdo con la regla $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$. Todo par del tipo $[ad + bc, bd]$ pertenecerá a cierta clase γ, la cual se llama suma de los elementos α y β y se denota $\alpha + \beta$, es decir, $\gamma = \alpha + \beta$.

Multiplicar dos elementos α y β significa multiplicar cualquier par $[a, b]$ de los números pertenecientes a la clase α y cualquier par $[c, d]$ de la clase β según la regla $[a, b] [c, d] = [ac, bd]$. El par $[ac, bd]$ pertenecerá a cierta clase δ, la cual se llama producto de los elementos α y β y se denota $\alpha\beta$, es decir, $\delta = \alpha\beta$.

El conjunto introducido de clases de pares es un campo. Efectivamente, es fácil comprobar que las operaciones de adición y multiplicación poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

Demostremos, por ejemplo, la propiedad de distributividad: $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, el par $[c, d] \in \beta$, el par $[l, f] \in \mu$. Si $\alpha + \beta = \gamma$, entonces la clase γ se define por el par $[ad + bc, bd]$, si $\gamma\mu = \nu$, entonces la clase ν se define por el par $[adl + bcl, bdf]$. Si $\alpha\mu = \delta_1$, entonces la clase δ_1 se define por el par $[al, bf]$, si $\beta\mu = \delta_2$, entonces la clase δ_2 se define par el par $[cl, df]$. Si $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, entonces la clase δ se define por el par $[aldf + bfcl, bfdf]$. Dado que los pares $[aldf + bfcl, bfdf]$ y $(adl + bcl, bdf]$ satisfacen la condición de igualdad entre los pares, razón por la cual ambos pertenecen a una misma clase, es decir, la clase ν y la δ representan una misma clase. Hemos mostrado pues, que $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. De modo análogo se demuestran las otras propiedades de la adición y multiplicación. El cero de este conjunto es la clase γ_0, que se define por el par $[0, 1]$.

Mostremos que para cualquier clase α, existe una clase opuesta β tal, que $\alpha + \beta = \gamma_0$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, entonces el par $[-a, b]$ define la clase β, la cual es precisamente la opuesta de la clase α. En efecto, si $\alpha + \beta = \sigma$, entonces la clase σ se define por el par $[0, b^2]$, donde $b^2 \neq 0$. Por cuanto los pares $[0, b^2]$ y $[0, 1]$ satisfacen la condición de igualdad entre pares, pertenecerán ambos a una misma clase, es decir, la clase σ y la clase γ representan una misma clase, lo que significa que $\alpha + \beta = \gamma_0$.

Así pues, cada elemento del conjunto en consideración cuenta con elemento opuesto. Quiere decir, el conjunto de que se trata es un anillo conmutativo y asociativo. La unidad en este anillo será la clase E definida por el par $[1; 1]$.

Mostremos que cualquier clase α, distinta de cero, cuenta con una clase inversa β, es decir, con una clase tal, que $\alpha\beta = E$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, y α no es el cero del anillo, es decir, admitamos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Analicemos la clase β, que se define por el par $[b, a]$. Si $\alpha\beta = \mu$, entonces la clase μ se define por el par $[ab, ab]$. Puesto que los pares $[ab, ab]$ y $[1; 1]$ satisfacen la condición de igualdad entre pares, entonces ellos pertenecerán a una misma clase. Quiere decir, la clase μ coincide con la clase E, es decir, $\alpha\beta = E$.

Así pues, cualquier elemento, distinto de cero, del conjunto en consideración cuenta con un elemento opuesto. Esto significa que este conjunto es un campo.

Observación. Al construir el campo citado hemos empleado solamente las propiedades de los números enteros. Este campo puede utilizarse para construir un campo de números racionales en la base de los números enteros. Esto se hace así: una clase τ definida por el par $[a, b]$ se identifica con el número racional $\frac{a}{b}$; en este caso, si $a = bn$, donde n es un número entero, la clase definida por el par $[nb, b]$ se identifica con el número entero n. El conjunto obtenido será precisamente el campo de números racionales.

7. Veamos un conjunto de pares ordenados de los números reales $\{a, b\}$. Consideraremos que dos elementos de este conjunto $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ son iguales cuando, y sólo cuando, $a = c$ y $b = d$. Introduzcamos en este conjunto de pares de números reales las operaciones de adición y multiplicación: $\{a, b\} + \{c, d\} = \{a + c, b + d\}$, $\{a, b\}\{c, d\} = \{ac - bd, ad + bc\}$.

Se puede mostrar que este conjunto es un campo. Si identificamos el par $\{a, b\}$ con un número complejo $a + bi$, se obtendrá el campo de números complejos, estudiado en el capítulo precedente.

Grupos. Examinemos ahora los conjuntos en los que está definida una sola operación. Si dicha operación posee ciertas propiedades determinadas, entonces este conjunto suele denominarse *grupo*. A saber, tiene lugar la siguiente definición.

Un conjunto no vacío de elementos recibe el nombre de *grupo*, si está definida en él una operación que se denota con * y que posee las propiedades:

a) de asociatividad $(a*b)*c = a*(b*c)$;

b) en este conjunto existe el así llamado elemento neutro, designado con el símbolo e, tal, que $a*e = e*a = a$, cualquiera que sea el elemento a de este conjunto;

c) para cualquier elemento a de dicho conjunto existe un elemento b del mismo conjunto tal, que $a*b = b*a = e$.

Por cuanto las más aplicadas son dos operaciones, las de adición y multiplicación, entonces, a la par con esta definición general aduzcamos, además, dos casos particulares: definición de grupo respecto a la adición y de grupo respecto a la multiplicación.

Un conjunto de elementos se denomina *grupo respecto de la adición*, si está definida en él la operación llamada adición, que posee las siguientes propiedades:

a) asociatividad de la adición: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

b) en este conjunto existe un elemento, llamado cero y designado con el símbolo 0, tal, que para cualquier elemento a de este conunto $0 + a = a + 0 = a$;

c) para cualquier elemento a de dicho conjunto existe un elemento b del mismo conjunto tal, que $b + a = a + b = 0$.

El elemento b se denomina opuesto del elemento a y se denota con $(-a)$.

El conjunto de elementos recibe el nombre de *grupo respecto de la multiplicación*, si está definida en él la operación llamada multiplicación, que posee las siguientes propiedades:

a) asociatividad de la multiplicación: $(ab)\,c = a\,(bc)$;

b) en este conjunto existe un elemento, llamado unidad del grupo y designado con el símbolo e, tal, que para cualquier elemento a de este conjunto $ae = ea = a$;

c) para cualquier elemento a de dicho conjunto existe un elemento c del mismo conjunto tal, que $ac = ca = e$.

El elemento c se denomina inverso del elemento a y se denota con a^{-1}.

Si la operación, definida en un grupo, es conmutativa, el grupo se llama *conmutativo*.

Demos a conocer los ejempjos de grupos.

1. Observemos que cada anillo es un grupo conmutativo respecto de la adición, cada campo es un grupo conmutativo respecto de la adición.

Todo anillo o todo campo no es un grupo respecto de la multiplicación, no obstante, si se considera cualquier campo, excluyendo de éste el elemento nulo, el conjunto nuevo ya será un grupo conmutativo respecto de la multiplicación.

2. Veamos un conjunto compuesto por el número cero y todos los polinomios, enteros con relación a la letra x de potencia no superior a n, con coeficientes pertenecientes al campo de números dado.

En este conjunto está definida sólo una operación, la de adición de polinomios (la operación de multiplicación de polinomios lleva el producto fuera de los límites de este conjunto). Es fácil ver que en este conjunto la operación de adición de polinomios es conmutativa y asociativa, el elemento nulo del conjunto es un polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero, y cualquier polinomio cuenta con elemento opuesto.

Quiere decir, el conjunto en consideración forma un grupo conmutativo respecto de la adición.

3. Veamos un conjunto de matrices que tienen n filas y m columnas, con la particularidad de que $n \neq m$. Es fácil ver que en dicho conjunto está definida una sola operación, la de adición de matrices (la operación de multiplicación no está definida para las matrices de esta índole). Vemos con facilidad que en este conjunto: a) la operación de adición es conmutativa y asociativa; b) existe el elemento nulo: una matriz cuyos elementos son todos iguales a cero; c) cualquier matriz cuenta con un elemento opuesto, que es la matriz, todos los elementos de la cual se han obtenido a partir de los elementos de la matriz dada, multiplicándolos por el número (-1).

Quiere decir, el conjunto de tales matrices forma un grupo conmutativo respecto a la adición.

4. Veamos un conjunto compuesto por todos los números del tipo 2^k, donde k es un número entero cualquiera. Es obvio que la operación de multiplicación de estos números no lleva el producto fuera de los márgenes de dicho conjunto, con otras palabras, en el conjunto citado está definida la operación de multiplicación de los elementos (operación habitual de multiplicación de los números). Está claro también que esta operación es conmutativa y asociativa. El elemento unidad es el número 1, perteneciente a este conjunto, puesto que $1 = 2^0$; todo elemento 2^k cuenta con elemento inverso 2^{-k}. Por lo tanto, este conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la multiplicación.

5. Veamos el conjunto de todos los números racionales positivos. En este conjunto está definida la operación de multiplicación.

Además, dicha operación es conmutativa y asociativa. El número unidad es el elemento neutro de este conjunto; todo elemento $\frac{p}{q}$ de este conjunto cuenta con elemento inverso $\frac{q}{p}$. Quiere decir, el conjunto de todos los números racionales positivos forma un grupo conmutativo respecto a la multiplicación.

6. Veamos el conjunto de todos los números racionales positivos y aclaremos si dicho conjunto forma un grupo respecto de la operación*, donde* es la división de los números racionales. Aunque la operación* no sale de los márgenes de este conjunto y en él hay un elemento neutro (el número 1, pues todo elemento $\frac{p}{q}$ cuenta con el elemento $\frac{p}{q}$ tal, que $\frac{p}{q} * \frac{p}{q} = 1$), dicho conjunto no forma un grupo respecto de la operación introducida*, puesto que se comprueba fácilmente que la operación* no será asociativa.

7. Veamos el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, o, dicho de otra forma, estudiemos el conjunto de todas las raíces complejas de grado n del número unidad. Según lo expuesto anteriormente en este mismo capítulo, el producto de cualesquiera dos raíces de grado n del número unidad será también una raíz de grado n del número unidad y, además, esta operación es conmutativa y asociativa. El elemento unidad es $\alpha_0 = 1$; el elemento inverso del elemento α_k es el elemento α_{-k}. Quiere decir, este conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la operación de multiplicación.

8. Veamos el conjunto de rotaciones de un triángulo equilátero alrededor de su centro, que hacen coincidir el triángulo con sí mismo. Si por multiplicación de dos rotaciones se toma su realización consecutiva, dicho conjunto formará un grupo conmutativo respecto de la operación mencionada. Se puede comprobar que en este caso se han cumplido todas las propiedades que definen un grupo conmutativo.

9. Veamos el conjunto de rotaciones de una esfera alrededor de su centro. A título de producto de rotaciones será natural tomar la realización consecutiva de dos rotaciones. Se puede mostrar que dicho conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la operación introducida.

Ejercicios

Realícense las operaciones indicadas (1 . . . 4):

1. $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$.

2. $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$. 3. $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$.

4. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

5. Constrúyanse en un plano los puntos que representan los siguientes números complejos: $3+2i$; 3; $2+4i$; $3i$; $-1+2i$; -4; $-2-3i$; $-4i$.

6. Los extremos de un segmento vienen dados por ciertos números complejos z_1 y z_2. Hállense los números complejos; correspondientes: a) al centro del segmento; b) al punto que divide el segmento en la razón 1 : 3, a contar del punto z_1.

7. Los vértices de un triángulo se representan por ciertos números complejos z_1, z_2, z_3. Hállense todos los números complejos z que completan dicho triángulo hasta que se obtenga un paralelogramo.

8. Calcúlense los módulos de los números complejos i; $1 + i$; $-i$; -1; $\sqrt{3} - i$; $1 + 2i$.

9. Determínense los argumentos de los números complejos $1 + i$; $\sqrt{3} - i$; i; 1; $-i$; -1.

10. Está dado un punto $z = a + bi$. ¿Dónde se dispone el punto $z - 2 + i$?

11. Sea $|z| = 1$. ¿Dónde se disponen los puntos que representan los números complejos $1 + 2z$?

12. Sea $|z| = 5$. ¿Dónde se disponen los puntos que representan los números complejos $1 - 2i + 3z$?

Indíquese dónde se sitúa el punto que representa un número complejo z, para el cual se verifica la siguiente condición (13 . . . 18):

13. $|i - z| = 1$. 14. $|z + 1 - 2i| = \sqrt{7}$

15. $\arg z = -\dfrac{5\pi}{6}$. 16. $|z - i| = |z + 2|$.

17. $-\pi < \arg z < \pi$. 18. $1 < |z + 2 - 3i| < 2$.

Escríbase en la fórma trigonométrica el siguiente número (19 . . . 21):

19. $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

20. $z = \operatorname{ctg} \alpha + i$, donde $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

21. $z = 1 + \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°$.

Hállense todos los z que satisfacen la igualdad siguiente (22 . . . 24):

22. $(z + i)^5 + (z - i)^5 = 1$. 23. $z^5 = \bar{z}^5$.

24. $\left(\dfrac{z + i}{z - i}\right)^4 = 1$.

25. Hállese, entre los números complejos que satisfacen la condición $|z + 3i| \leqslant 1$, un número que tenga el argumento principal mínimo.

26. Hállese la condición necesaria y suficiente para que la suma de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ sea un número real.

Demuéstrese que cada uno de los conjuntos que siguen abajo es un anillo (27 . . . 31):

27. Todos los números enteros multiplos del número natural dado n.

28. Todos los números del tipo $a + bi$, donde a y b son números enteros.

29. Todos los números enteros del tipo $a + b\sqrt{3}$, donde a y b son números enteros.

30. Las matrices de orden n con elementos enteros (respecto de la adición y multiplicación de matrices).

31. Los polinomios de una incógnita con coeficientes enteros.

Demuéstrese que cada uno de los conjuntos que se dan a continuación forma un campo (32 . . . 34):

32. Los números del tipo $a + b\sqrt{3}$, donde a y b son números racionales.

33. Los números del tipo $a + bi$, donde a y b son números racionales.

34. El conjunto de dos elementos α y β con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, definidas mediante las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} \alpha \oplus \alpha = \alpha & \alpha \odot \alpha = \alpha, \\ \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \beta, & \alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha = \alpha, \\ \beta \oplus \beta = \beta, & \beta \odot \beta = \beta. \end{array}$$

35. ¿Formará un anillo o un campo el conjunto de pares (a, b) de números enteros a y b con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, definidas mediante las reglas siguientes:

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$;

$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$?

Aclárese si forma un grupo cada uno de los siguientes conjuntos con la operación indicada sobre los elementos (36 . . . 44):

36. Los números pares respecto de la adición.

37. Los números enteros, múltiplos del número natural dado n, respecto a la adición.

38. Los números enteros impares respecto de la adición.

39. Los números enteros respecto de la sustracción.

40. Los números racionales, distintos de cero, respecto de la multiplicación.

41. Las matrices regulares de orden n con elementos reales respecto de la multiplicación.

42. Las matrices de orden n con elementos enteros y un determinante igual a la unidad, respecto de la multiplicación.

43. Los números reales positivos, si la operación se define del modo siguiente: $a \oplus b = a^b$.

44. Los polinomios reales de grado n de la incógnita x, respecto de la adición.

45. ¿Formarán un grupo las rotaciones de un cuadrado en torno de su centro a 0°, 90°, 180°, 270°?