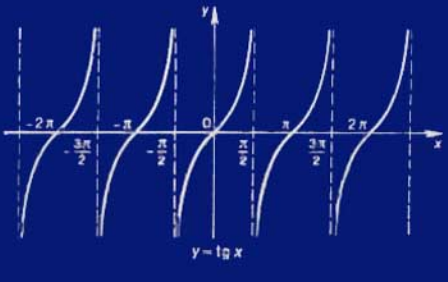
ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

R.A.KALNIN



EDITORIAL LATINOAMERICANA

ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

Р. А. Калнин

АЛГЕБРА
И
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО « НАУКА »

R. A. Kalnin

ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

Traducido del ruso
por el ingeniero Akop Grdian

EDITORIAL • MIR • MOSCU

Primera edición 1973
Segunda edición 1978
Tercera edición 1988

На испанском языке

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-000606-0 © traducción al español, editorial Mir, 1978

INDICE

CAPITULO I

ELEMENTOS DE CALCULOS APROXIMADOS

§ 1. Fuentes de números aproximados

En la actividad práctica de las personas, así como en la ciencia y en la técnica se tropieza constantemente tanto con números exactos como con números aproximados, lo que se aprecia de los siguientes ejemplos:

1) Si en cada paquete hay 20 libros, en 100 paquetes iguales habrá 2000 libros. Está claro que el número 2000 es exacto.

2) De acuerdo al último censo de la población de Moscú, al comienzo del año 1970 vivían cerca de 7,1 millones de personas. El número 7,1 millones es aproximado (generalmente todos los datos estadísticos se redondean).
En este caso, se ha redondeado con una exactitud de hasta 0,1 millón = 100 000, y por eso, sólo podemos afirmar que el número real de personas que ha vivido en Moscú al comienzo del año 1970 ha oscilado entre 7,05 y 7,15 millones.

3) En todas las informaciones de la Dirección Central de Estadística de la URSS sobre la producción industrial (automóviles, motocicletas, televisores, etc.) los datos se dan en miles redondeados, lo que indica su carácter aproximado.
Lo mismo ocurre exactamente en cualquier experimento científico; en cualquier medición en condiciones locales o de laboratorio se obtienen números aproximados, puesto que las indicaciones de los distintos aparatos de medida las podemos determinar solamente con cierto error. Surgen las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo estimar la exactitud de los números aproximados?

2) ¿Cómo realizar las operaciones aritméticas con los números aproximados?

Las respuestas a estas preguntas se dan en los siguientes párrafos.

§ 2. Error absoluto y su límite

Supongamos que el número a es un valor aproximado de cierta magnitud, el número A, un valor real, o exacto, de la misma magnitud. Como se sabe, la magnitud absoluta de un número no negativo a es el mismo número a; la magnitud absoluta del número negativo a es un número opuesto (inverso) a él $(-a)$. El signo de la magnitud absoluta es $|\ \ |$, es decir, dos trazos verticales, entre los cuales se escribe el número o la expresión literal.

● DEFINICION. La magnitud absoluta de la diferencia entre los valores exacto y aproximado de la magnitud se denomina *error absoluto del número aproximado a*:

$$\alpha = |A - a|,$$

donde por la letra α («alfa») se ha designado el error absoluto.

E j e m p l o s. 1) En una escuela de peritaje han ingresado 514 personas; si el número exacto 514 se redondea hasta las centenas, obtenemos un número aproximado $a = 500$; su error absoluto $\alpha = |514 - 500| = 14$ (personas).

2) Al comprar un reloj el cliente recibe un certificado de garantía, en el que la fábrica de relojes responde por la exactitud de la marcha diaria del mismo en los límites de $\pm$ 45 segundos, lo que significa que: el reloj no debe adelantar o atrasar más de 45 segundos. Supongamos que al verificar el reloj con las señales de la hora exacta (hora oficial), transmitidas por radio, se ha descubierto que éste adelanta 20 segundos por día; en tal caso, $\alpha = 20$ segundos es el error absoluto de la marcha diaria de los relojes. El número 45 (s) es lo que se admite llamar *límite* del error absoluto de un número aproximado; en este caso, el número aproximado es el tiempo que indica el reloj. En la mayoría de los casos los valores exactos de las magnitudes nos son desconocidos, y, por eso, no se puede determinar tampoco el error absoluto, es decir el número α; sin embargo, en cada caso concreto se puede establecer el *límite* del error absoluto, sobreentendiendo bajo ello un número positivo tal que el error absoluto α siempre sea menor que este número. El límite del error absoluto de un número aproximado a lo vamos a designar por Δa («delta a»).

3) Un ajustador no puede elaborar exactamente una pieza, digamos, de 80 mm de longitud. Pero con ayuda de un calibre puede establecer que se ha desviado de la medida dada

en no más de 0,02 mm en uno u otro lado. En este caso $\Delta a = 0{,}02$ mm, si por a se supone el largo aproximado de 80 mm.
De lo dicho antes se deduce que es más práctico utilizar el concepto de límite del error absoluto, que el error absoluto, cuando se quiera estimar la exactitud del número aproximado. En adelante, al límite del error absoluto lo denominaremos simplemente error absoluto, conservando la notación Δa.

§ 3. Error relativo

Para comparar la exactitud de dos o varios números aproximados no es suficiente conocer sus errores absolutos, lo que se puede apreciar del siguiente ejemplo.
Se han realizado dos mediciones:
1) el largo de la pizarra de clase es $d_1 = 2{,}4$ m con un error absoluto $\Delta d_1 = 0{,}05$ m;
2) la distancia d_2 entre dos estaciones ferroviarias es $d_2 = 3{,}48$ km con un error absoluto $\Delta d_2 = 10$ m. Hay que saber cual de estas dos mediciones se ha efectuado más exactamente. A primera vista puede parecer que la primera medición es más exacta, es que aquí el error absoluto sólo es igual a 5 cm, mientras que al medir la distancia entre estaciones se admitió un error de 10 m. Tal parecer es erroneo: hay que tener en cuenta que en el primer caso el error absoluto de 5 cm decae en un largo relativamente pequeño y constituye $\frac{5\text{ cm}}{240\text{ cm}} = \frac{1}{48} \approx 0{,}02$ de la longitud medida; en el segundo caso esta relación es

$$\frac{10\text{ m}}{3480\text{ m}} = \frac{1}{348} \approx 0{,}0029.$$

De este modo, resulta que la segunda medición es aproximadamente 7 veces más exacta que la primera.

● DEFINICION. La relación del error absoluto del número aproximado al número mismo se denomina su *error relativo*

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a},$$

donde δ_a («delta minúscula» con índice a) denota el error relativo del número a.
Frecuentemente el error absoluto se expresa en tanto por ciento. En el ejemplo examinado en este párrafo el error relativo es igual al 2% y 0,29% respectivamente.

E j e m p l o. Hallar el error relativo del valor aproximado del número π, si se considera $\pi \approx 3,14$. Puesto que $3,141592\ldots$ es un valor más exacto de π, entonces $\alpha \approx 3,141592 - 3,14 = 0,001592 < 0,002$,

$$\Delta\, 3,14 = 0,002,$$

y

$$\delta_{3,14} = \frac{0,002}{3,14} = \frac{1}{1\,570} \approx 0,000637 \approx 0,064\%.$$

§ 4. Cifras significativas exactas

● DEFINICION. 1. Si el error absoluto del número aproximado no es mayor que la mitad de la unidad del orden de la última cifra, todas las cifras significativas del número dado se denominan *exactas*. Por ejemplo,

1) el número $A = 58,3$ tiene tres cifras significativas exactas si ΔA no es mayor que la mitad de una décima, es decir, $\Delta A \leqslant 0,05$.

2) El número $B = 0,032$ tiene dos cifras significativas exactas, si $\Delta B \leqslant 0,0005$ (la mitad de una milésima es igual a cinco diezmilésimas). Los ceros, que se encuentran delante la primera cifra significativa (3), nunca van en la cuenta de las cifras significativas exactas.

3) El número $C = 2,007$ tiene 4 cifras significativas exactas, si $\Delta C \leqslant 0,0005$. Aquí los ceros, que se encuentran entre las cifras significativas 2 y 7, también entran en la cuenta de las cifras significativas exactas.

Lo que respecta a la cifra 0, que se encuentra al final de la escritura del número aproximado, en ciertos casos los ceros van en la cuenta de las cifras exactas, y en otros, no.

4) El número 4123, redondeado hasta las centenas, será 4100 (escritura: $41 \cdot 10^2$); aquí los ceros no entran en la cuenta de las cifras significativas exactas, puesto que reemplazan las cifras exactas 2 y 3.

5) El número exacto 15,003, redondeado hasta la fracción centesimal, será 15,00 aquí ambos ceros van en la cuenta de las cifras exactas, puesto que en el número exacto no se tiene ni décimas ni centésimas.

● DEFINICION. 2. Si el error absoluto del número aproximado es mayor que la mitad de la unidad del orden de la última cifra de este número, la última cifra del número aproximado se denomina *dudosa* o *ambigua* (*incierta*).

Ejemplos. 1. $a = 42,3$; $\Delta a = 0,2$. La última cifra (3) es ambigua.
2. $b = 18,32$; si $\Delta b = 0,03$, la última cifra es ambigua; si $\Delta b = 0,005$, ella es cierta.
Como regla, en el número aproximado se conserva solamente una cifra ambigua, las demás se desprecian.
Observación. Hay que distinguir los términos «cifras significativas» y «signos decimales» lo que no es lo mismo:
1) el número aproximado 45,7 tiene tres cifras significativas y un signo decimal;
2) el número aproximado 0,0075 tiene dos cifras significativas y cuatro signos decimales.

§ 5. Operaciones con números aproximados

En los párrafos anteriores se mostraron distintos métodos de estimación de la exactitud de los números aproximados.
Ahora surge la siguiente pregunta: cómo realizar las operaciones aritméticas con los números aproximados de manera que los resultados de estas operaciones no contengan cifras ambiguas sobrantes.
Al operar con los números aproximados lo más sencillo es guiarse *por las reglas de cálculo de las cifras significativas.* En parte estas reglas se dan al estudiar Aritmética en la escuela primaria. Más adelante se formulan estas reglas y se dan ejemplos de su empleo.

§ 6. Reglas de cálculo de las cifras significativas

1. Al sumar y restar números aproximados en el resultado hay que conservar tantas cifras decimales, cuantas haya en el número aproximado con el menor número de cifras decimales.
2. Al multiplicar y dividir se conservan tantas cifras significativas, como tenga el menos exacto de los números dados. Entre varios números aproximados se considera el *menos exacto* aquel que tiene la menor cantidad de cifras significativas exactas.
3. Al elevar al cuadrado y al cubo, en el resultado se conservan tantas cifras significativas, como tiene la base de la potencia.
4. Al extraer la raíz cuadrada y cúbica, en el resultado hay que conservar tantas cifras significativas, como tiene el número subradical.

5. Al calcular los resultados intermedios se conserva una cifra excedente de reserva, la que en el resultado final se desprecia.

§ 7. Empleo de las reglas de cálculo de cifras

1. Suma y resta. 1) Hallar la suma de los números aproximados:

$1{,}7 + 4{,}35 + 5{,}124.$

El primer sumando (1,7) es el que tiene el menor número de cifras decimales; en los otros dos sumandos conservamos sólo una cifra decimal, la que en el resultado final se suprimirá: $1{,}7 + 4{,}35 + 5{,}12 = 11{,}17 \approx 11{,}2.$

2) Restar de 69,3 el número 4,856. Aquí el sustraendo tiene dos cifras decimales de más en comparación con el minuendo; hay que conservar sólo una cifra de más:

$$\begin{array}{r} 69{,}30 \\ -\ \ 4{,}86 \\ \hline 64{,}44 \end{array} \approx 64{,}4.$$

2. Multiplicación y división. 3) Calcular el área de una parcela de tierra de forma rectangular con lados $a = 31{,}5$ m, $b = 28{,}4$ m. Puesto que los factores tienen tres cifras significativas cada uno, en el producto se conservan también tres cifras significativas:

$S = 31{,}5 \cdot 28{,}4 = 894{,}60 \approx 895.$

4) $52{,}8 \cdot 0{,}32 = 16{,}896 \approx 17.$

El factor menos exacto (0,32) tiene dos cifras significativas; la misma cantidad de cifras se conserva en el producto.

5) De una parcela de 2,5 hectáreas se ha recogido 30,5 t de patatas. Determinar la cosecha media de una hectárea: $30{,}5 : 2{,}45 \approx 12{,}4$ (t).

3. Potenciación y radicación.

6) $(3{,}18)^2 \approx 10{,}1.$

La base tiene tres cifras significativas; igual cantidad de cifras hay que retener en el resultado de la elevación al cuadrado

7) $(0{,}132)^3 \approx 0{,}00230.$

8) $\sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54.$

9) $\sqrt[3]{3{,}75} \approx 1{,}55.$

10) Calcular la velocidad de liberación (segunda velocidad cósmica) $v = \sqrt{2gR}$, es decir, la velocidad con la cual el proyectil, lanzado verticalmente, no vuelve a la Tierra.
$g = 981$ cm/s^2 es la aceleración de la gravedad,
$R = 63 \cdot 10^7$ cm es el radio de la Tierra,

$$v = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{10}} =$$
$$= 10^5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3} = 11{,}2 \cdot 10^5 \text{ (cm/s)},$$

o bien

$$v = 11{,}2 \text{ km/s}.$$

Observación. Al resolver los ejemplos 6, 7, 8, 9 y 10 se utilizaron las «Tablas matemáticas de cuatro cifras» de Bradis.

§ 8. Ejemplos de cálculos más complejos según la regla de cálculo de cifras significativas

Ejemplo 1. La capacidad térmica de un cuerpo sólido x se determina por la fórmula

$$x = \frac{(m_2 - m_1 + m_1 n)(t_2 - t_1)}{P(T - t_2)},$$

donde m_1 es el peso del recipiente interior sin agua; m_2, el peso del recipiente interior con agua; t_1, la temperatura inicial del agua; t_2, la temperatura del agua después de sumergir el cuerpo; T, la temperatura de ebullición del agua; n, la capacidad térmica del calorímetro y del agitador; P, el peso del cuerpo, cuya capacidad térmica se debe hallar.
Del experimento se han obtenido los siguentes datos:
$P = 403{,}7$; $m_1 = 119$; $m_2 = 673$; $n = 0{,}094$; $t_1 = 9{,}5$; $t_2 = 12{,}8$; $T = 100{,}11$.
En este ejemplo, las magnitudes n y t_1 tienen en total dos cifras significativas exactas, por eso redondeamos previamente los datos más exactos, conservando en ellos tres cifras significativas: $P = 404$; $T \approx 100$; los cálculos intermedios los realizamos con tres cifras significativas, en el resultado final conservamos dos cifras significativas.
Sustituimos los valores numéricos en la fórmula:

$$x = \frac{(673 - 119 + 119 \cdot 0{,}094)(12{,}8 - 9{,}5)}{404(100 - 12{,}8)} = \frac{(554 + 119 \cdot 0{,}094) \cdot 3{,}3}{404 \cdot 87{,}2}.$$

Calculamos:

$$119 \cdot 0{,}094 = 11{,}186 \approx 11{,}2,$$

$$554+11{,}2=565{,}2\approx 565,$$
$$565\cdot 3{,}3=1864{,}5\approx 186\cdot 10,$$
$$404\cdot 87{,}2=35228{,}8\approx 35\,200=352\cdot 10^2,$$
$$\frac{186\cdot 10}{352\cdot 10^2}=\frac{186}{352\cdot 10}=\frac{18{,}6}{352}\approx 0.0528\approx 0{,}053.$$

Respuesta: $x=0{,}053$.

Ejemplo 2. En un circuito de corriente alterna hay conectados un condensador y una bobina. La impedancia de este circuito se determina por la fórmula

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

donde R es la resistencia del circuito exterior; $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$, la reactancia.

Calcular Z, si $R=41{,}4$; $\omega=0{,}75$; $L=18$; $C==0{,}52$.

Los datos menos exactos tienen dos cifras significativas, por eso, en el resultado final conservamos sólo dos cifras; los cálculos intermedios los realizamos con tres cifras significativas:

1) $\omega L-\frac{1}{\omega C}=0{,}75\cdot 18-\frac{1}{0{,}75\cdot 0{,}52}\approx 13{,}5-2{,}56\approx 10{,}9,$

2) $(10{,}9)^2=118{,}81\approx 119,$

3) $41{,}4^2\approx 1714\approx 171\cdot 10,$

4) $119+1710=1829\approx 183\cdot 10,$

5) $\sqrt{1830}\approx 42{,}8\approx 43$ (ohmios).

§ 9. Cálculos con la exactitud dada a priori

En los cálculos prácticos frecuentemente se debe resolver el siguiente problema: ¿con qué exactitud hay que tomar los datos iniciales para que el error del resultado final no supere el límite dado a priori?

Veamos dos ejemplos:

1. El período de una oscilación completa T de un péndulo se determina por la fórmula $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde l es la longitud del péndulo (cm); g, la aceleración de la gravedad (cm/s^2).

¿Con qué exactitud hay que medir la longitud l y con cuantas cifras significativas hay que tomar los números π y g,

para que el error relativo no supere el medio por ciento (0,5%) al calcular el período T?
La longitud del péndulo es $l \approx 80$ cm. Determinamos el orden de la magnitud T, es decir, el orden decimal de la primera cifra de la izquierda (decenas o unidades), para lo cual tomamos en cuenta solamente la primera cifra de cada uno de los números redondeados π y g ($\pi \approx 3$; $g \approx 1000$):

$$T \approx 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{80}{1000}} \approx 6 \cdot 0{,}28 \approx 1{,}7;$$

en tal caso el 0,5% de $1{,}7 = 0{,}005 \cdot 1{,}7 = 0{,}0085$.
Según el error relativo hemos hallado el límite del error absoluto: $\Delta T = 0{,}0085$. Según la magnitud del error absoluto admisible se puede juzgar respecto a que el período debe tener tres cifras significativas, y, por eso, la longitud l debe expresarse por un número aproximado con tres cifras significativas, es decir, debe ser medida con una exactitud de hasta décimas de centímetro. El número π conviene tomarlo con cuatro cifras significativas, es decir, con una cifra de reserva (con exceso), el número g, con tres cifras significativas (981), los cálculos intermedios se realizan con cuatro cifras, en el resultado final se conservan tres cifras significativas.
1. ¿Con qué exactitud hay que medir los catetos a y b del triángulo rectángulo para que se pueda calcular la hipotenusa $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ con un error relativo δ_c no superior al 2%?
Supongamos que $a \approx 50$ cm, $b \approx 80$ cm. Cada uno de los números aproximados 50 y 80 tiene una cifra significativa exacta. Hallamos el valor aproximado de la hipotenusa:

$$c = \sqrt{50^2 + 80^2} = \sqrt{100\,(25 + 64)} = 10\sqrt{89} \approx$$
$$\approx 10 \cdot 9{,}4 = 94;$$

el 2% de $94 = 94 \cdot 0{,}02 = 1{,}88 \approx 2$.

De este modo, el error absoluto es $\Delta c = 2$ (cm). Esto significa que la cifra, que indica el número de unidades en el resultado final, es ambigua, por eso, los catetos a y b hay que tomarlos con dos cifras significativas exactas, es decir, medir con la precisión de hasta 0,5 cm. Los cálculos intermedios hay que realizarlos con tres cifras significativas, mientras que el valos obtenido de la hipotenusa c debe ser redondeado hasta dos cifras significativas.

▲ **Ejercicios**

1. Redondear el número 2,7182818 hasta 5, 4, 3 cifras significativas.
2. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el polo es igual a 6356,909 km. Redondear este número hasta 2, 3, 4 cifras significativas.
3. ¿Qué diferencia hay entre el registro de la temperatura 18° y 18,0°?
4. Trazar exactamente un rectángulo y medir sus lados con una precisión de hasta 1 mm. Escribir, utilizando las cifras de la desigualdad, entre qué números está comprendido el largo de sus lados.
5.. El valor aproximado de la magnitud x está comprendido entre 6,85 m y 6,89 m. ¿Con qué exactitud se ha medido?
6. Convertir la fracción $5\frac{2}{7}$ en una decimal con la exactitud de hasta 0,001.
7. Al pesar un cuerpo se obtiene el peso de 18,7 kg con la exactitud de hasta 0,1 kg. Indicar el límite del valor exacto del peso.
8. Hallar en tantos por cientos el error relativo del número 3.14.
9. ¿Cuál de las dos mediciones es más exacta:

1) 895 m ($\pm 0,5$ m); 2) 24,08 m ($\pm 0,01$ m)?

10. ¿Cuál de los dos valores aproximados del número π es más exacto:

3,14 ó $3\frac{1}{7}$?

11. Escribir el número 18,754 sin cifras excedentes, sabiendo que su error relativo es igual a $\frac{1}{2}$ %.
12. Hallar la suma $2\frac{3}{7}+\frac{1}{15}+4\frac{1}{3}$ con tres cifras decimales exactas.
13. La distancia entre dos ciudades, según el mapa, es igual a 24,6 cm ($\pm 0,2$ cm). Hallar la distancia verdadera entre las ciudades si la escala del mapa es 1 : 2 500 000; determinar el error.
14. La cubatura de una habitación es de 127,4 m³. ¿Cuánto pesa el aire contenido en esa habitación si el peso de 1 m³ es igual a 1,29 kg ($\pm 0,01$ kg)?
15. ¿Cuántas cifras significativas exactas se puede determinar en el producto de los números aproximados $2,18 \cdot 0,65 \times 0,175$? Calcular estas cifras.
16. Hallar el volumen de una habitación si sus medidas son $15,4 \cdot 12,6 \cdot 4,5$. ¿Cuál es el error relativo del producto?
17. Para determinar el peso específico de un cuerpo se estableció que su peso es de 117,8 g; al sumergirlo en el agua el cuerpo desalojó 54,7 cm³. ¿Con qué exactitud se puede determinar el peso específico del cuerpo?
18. ¿Con qué error relativo se puede calcular el volumen de un cilindro si el radio de la base es $r = 15,4$ cm, la altura $H = 28,2$ cm?
19. De una superficie de 32,4 hectáreas se ha recogido 4580 quintales métricos de centeno. ¿Qué promedio de quintales métricos se ha recogido por hectárea?
20. El valor aproximado del radio de un cilindro es de 20 cm, la altura, de 30 cm. ¿Con qué exactitud se debe medir para que el error relativo al calcular el volumen no supere el 1%?

CAPITULO II

ECUACIONES DEL PRIMER GRADO

§ 10. Conceptos generales y definiciones

● DEFINICION 1. Se denomina *ecuación* la igualdad que contiene una o varias letras, bajo las cuales se sobreentienden los números incógnitos.
Las letras, que designan los números incógnitos, se denominan simplemente *incógnitas*.

Ejemplos. 1) La igualdad $3a + 7 = 5a - 9$ es una ecuación con una incógnita a; ella se satisface solo cuando $a = 8$.
2) La igualdad $x + 2y^2 = 13$ es una ecuación con dos incógnitas x e y; ella se satisface, por ejemplo, si $x = 5$ e $y = 2$.
Generalmente las incógnitas se designan con las últimas letras del abecedario latino $x, y, z, u, v, \ldots$
En lugar de la frase «la ecuación se satisface para $x = 1$; $y = 2$», con más frecuencia se admite decir que la ecuación se satisface para los valores de las incógnitas $x = 1$, $y = 2$.

● DEFINICION 2. Los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación dada, se denominan sus *soluciones*.
Si la ecuación contiene sólo una incógnita, generalmente su solución se denomina *raíz de la ecuación*.

Ejemplos. 1) La ecuación $3x^2 = 2x + 1$ tiene las raíces $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = 1$, lo que se puede verificar fácilmente.
2) Una de las soluciones de la ecuación $3x + y = 5$ es el par de números $x = 1$, $y = 2$.
3) La solución de la ecuación con tres incógnitas $x + y + 2z = 10$ es, por ejemplo, el trío de números: $x = 1$, $y = 3$, $z = 3$.

● DEFINICION 3. *Resolver* una ecuación o un sistema de acuaciones significa hallar todas las soluciones, es decir, todos los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación o al sistema dado (o sea, a cada ecuación del sistema), o asegurarse de que no existen tales valores de las incógnitas.

E j e m p l o. La ecuación $x - 3 = x + 1$ no tiene raíz, puesto que para cualquier valor de la incógnita siempre el primer miembro de la ecuación no es igual al segundo. En función del número de incógnitas de la ecuación, existen ecuaciones con una, dos y más incógnitas.

● DEFINICION 4. La ecuación con una incógnita se denomina *algebraica* si ella se puede reducir de manera que su primer miembro es un polinomio con respecto a la incógnita, y el segundo miebro sea igual a cero. Tal tipo de ecuación se denomina *normal*. El mayor exponente de la incógnita del primer miembro de la ecuación normal se denomina *grado* de la ecuación algebraica.
Así, por ejemplo, las ecuaciones: $3x + 5 = 0$, $5x^2 - 8x - 20 = 0$, $x^4 - 8x^3 - 29 = 0$ son ecuaciones algebraicas, respectivamente de primer, segundo y cuarto grado.
En adelante para abreviar vamos a omitir la palabra «algebraica»; esto no dará lugar a equivocación, ya que nos referiremos solamente a las ecuaciones algebraicas.
Se denominan *coeficientes* de una ecuación los factores numéricos o literales de las incógnitas, así como el término independiente, es decir, el término que no contiene incógnitas. Corrientemente se habla de coeficientes de una ecuación reducida a la forma normal.

E j e m p l o s. 1. La ecuación $2x^2 - 5x - 10 = 0$ es una ecuación de segundo grado con coeficientes numéricos (los coeficientes son: 2, -5 y -10); aquí el número -10 es el termino independiente.

2. La ecuación $\frac{a}{x} = bx^3 + 1$ es una ecuación de tercer grado con coeficientes b, 0, 1 y $-a$ (compruébelo Ud. mismo).

● DEFINICION 5. Dos ecuaciones con iguales incógnitas se denominan *equivalentes* si todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda e, inversamente, todas las soluciones de la segunda ecuación sirven también de soluciones de la primera o si ambas ecuaciones no tienen solución.

E j e m p l o s. 1. Las ecuaciones $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=14$ y $5x-36=2x$ son equivalentes, puesto que ambas ecuaciones se satisfacen solamente para $x=12$.

2. Las ecuaciones $2x-3=7$ y $(2x-3)(x+1)=7(x+1)$ no son equivalentes; la primera de ellas tiene una sola raíz $x=5$, y la segunda, además de la raíz $x=5$ tiene también la raíz $x=-1$, que no resuelve la primera ecuación.

3. Las ecuaciones $x+5=x-1$ y $x(x-3)=x^2+8-3x$ son equivalentes, ya que ambos no tienen solución.

Al resolver una ecuación debemos realizar una serie de transformaciones, hasta tanto no se haya obtenido la ecuación simple de tipo $x=a$ ó un conjunto de tales ecuaciones. Surge la pregunta: ¿no puede ocurrir que como resultado de las transformaciones realizadas se obtenga una nueva ecuación no equivalente a la ecuación inicial?

Enunciamos dos teoremas sobre equivalencia de las ecuaciones sin demostración *).

T e o r e m a 1. *Si a ambos miembros de una ecuación agregamos un mismo número o un mismo polinomio con respecto a la incógnita la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

T e o r e m a 2. *Si ambos miembros de una ecuación se multiplica (o se divide) por un mismo número, distinto de cero, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

Del teorema 1 se deduce una importante consecuencia: cualquier término de una ecuación puede pasarse de un miembro a otro, cambiando su signo por el contrario.

En efecto, supongamos que el segundo miembro de una ecuación contiene el término A (A puede ser un número o un polinomio con respecto a la incógnita). Si agregamos a ambos miembros de la ecuación la magnitud $-A$, en el segundo miembro los términos A y $-A$ se eliminan, y en el primer miembro aparece el término $-A$. Por lo tanto, puede pasarse cualquier término de la ecuación del segundo al primer miembro, cambiando su signo por el contrario.

De igual modo se puede razonar con respecto a cualquier término que se encuentra en el primer miembro de una ecuación. Veamos algunos ejemplos de resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

E j e m p l o 1. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3.$

*) Las demostraciones de estos teoremas se dan en el § 79.

Sin saber a qué es igual la raíz de la ecuación se puede afirmar que la raíz buscada, a ciencia cierta, no es ni el número -2, ni el número -3; en caso contrario el primer miembro de la ecuación no tendría sentido (no se puede dividir por cero). Pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos las fracciones a un común denominador:

$$\frac{5(x-2)(x+3)-2(x-3)(x+2)-3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Después de simplificar el numerador del primer miembro obtenemos

$$\frac{-4(2x+9)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Puesto que la fracción es igual a cero sólo cuando su numerador es igual a cero (el denominador no es igual a cero), $4(2x+9)=0$, de donde $x=-\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2. $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a+b}+\frac{a+b-1}{2(a-b)}=\frac{x}{a-b}+1.$

En esta ecuación x es la incógnita, a y b son magnitudes conocidas.

La igualdad escrita tiene sentido si ninguno de los denominadores de las fracciones es igual a cero; por lo tanto, $a \neq \pm b$. Vamos a simplificar sucesivamente la ecuación dada:

$$\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)x=1-\frac{a+b-1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+2(a-b)-a-b}{a^2-b^2}x=\frac{2(a-b)-a-b+1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+a-3b}{a^2-b^2}x=\frac{a-3b+1}{2(a-b)}.$$

Si $1+a-3b\neq 0$, dividiendo ambos miembros por $1+a-3b$, obtenemos:

$$\frac{1}{a^2-b^2}x=\frac{1}{2(a-b)}, \quad x=\frac{a+b}{2}.$$

Si $1+a-3b=0$, la ecuación se satisface para cualquier valor de x.

§ 11. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y su solución gráfica

Toda ecuación de primer grado con una incógnita puede reducirse a la forma $ax+b=0$. El primer miembro de esta ecuación es un polinomio de primer grado respecto a x, denominado también *función lineal*, y el segundo miembro es igual a cero.

Está claro que:

1) si $a \neq 0$, la raíz de la ecuación es igual a $-\frac{b}{a}$;

2) si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación no tiene raíz;

3) si $a = b = 0$, la solución de la ecuación es un número cualquiera; en este caso la ecuación se denomina *indeterminada*.

Supongamos dada la ecuación $2x - 3 = \frac{3}{2}x + 1$. El primero y segundo miembros de esta ecuación son funciones lineales. Para resolver esta ecuación hay que hallar un valor tal de x, con el cual ambas funciones son numéricamente iguales. Partiendo de este razonamiento de la ecuación (a propósito, es muy fructífero, lo que se demostrará más edelante) se impone de por sí el siguiente método de resolución:

1) Trazamos las gráficas de las funciones lineales $y = 2x - 3$ e $y = \frac{3}{2}x + 1$, que son, como se sabe, líneas rectas *).

2) La abscisa del punto M; es decir, el punto de intersección de las rectas (fig. 1), es la raíz de la ecuación dada, va que a esta abscisa le corresponden iguales ordenadas de los puntos de ambas rectas, o sea, para estos valores de la abscisa x ambos miembros de la ecuación son iguales. De la fig. 1 se aprecia que la abscisa del punto de intersección de las rectas, es decir, la raíz de la ecuación, es $x = 8$.

También se podía haber procedido de otro modo: al principio se podía reducir la ecuación dada a la forma $x - 8 = 0$. En tal caso, la raíz buscada es un valor tal del argumento x, para la cual la función $y = x - 8$ es igual a cero. Este valor del argumento es la abscisa del punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas (fig. 2).

Cabe hacer notar que el último método no es tan interesante como el método de resolución independiente (en efecto, reduciendo la ecuación inicial a la forma $x - 8 = 0$, de hecho lo hemos resuelto), sin embargo, es útil para analizar las ecuaciones de primer grado, dadas en forma general (normal):

$$ax + b = 0.$$

*) Los conceptos de función y de gráfica serán examinados con mayor detalle en el cap. VI.

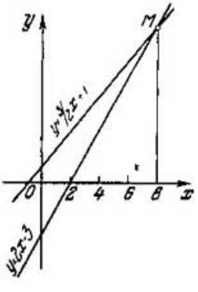


Fig. 1.

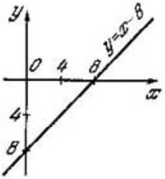


Fig. 2.

Precisamente, los tres casos posibles de disposición de la recta

$y = ax + b$

respecto al eje de abscisas (la recta interseca al eje, es paralela a ella, coincide con ella) dan la interpretación geométrica de los tres casos posibles de solución de la ecuación $ax + b = 0$ (la ecuación tiene una sola solución, no tiene ninguna solución, tiene infinitas soluciones).

§ 12. Sistema de ecuaciones lineales

Se denomina *ecuación lineal* (ecuación de primer grado) *con dos incógnitas* la ecuación de tipo

$ax + by = c.$

Se aprecia fácilmente que esta ecuación tiene infinitas soluciones, puesto que a una de las incógnitas, por ejemplo a x, se le puede dar valores arbitrarios, y el valor de la incógnita y correspondiente a éste se halla de la ecuación.
Por ejemplo, si la incógnita x de la ecuación $2x - y = 3$ se hace igual a -1, 0, 2, 5, los valores correspondientes de y serán -5, -3, 1, 7. Cada par de números $(-1; -5)$, $(0; -3)$, $(2; 1)$, $(5; 7)$ es la solución de la ecuación dada. Tales pares de números son infinitos. Por eso, se dice que una ecuación de primer grado con dos incógnitas es indeterminada.
Esta indeterminación se interpreta fácilmente de manera gráfica. A la ecuación $2x - y = 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares corresponde una

recta. Esta recta es la gráfica de la función lineal $y = 2x - 3$, representada en la fig. 1.
Las coordenadas de cualquier punto de una recta son las soluciones de la ecuación; pero, teniendo en cuenta que los puntos de una recta son infinitos, también las soluciones son infinitas.
El conjunto de dos ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

forma un *sistema de ecuaciones lineales* con dos incógnitas. El par de números x_0, y_0, que satisfacen a cada ecuación del sistema se denomina su *solución*.
Antes de resolver tal sistema en forma general, recordemos los métodos de resolución de los sistemas lineales con coeficientes numéricos.

§ 13. Método de adición algebraica

Ejemplo. 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y = 14, \\ 3x - 4y = 24. \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por 2, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 10x + 4y = 28, \\ \ \ 3x - 4y = 24, \end{cases}$$

equivalente al dado. Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos $13x = 52$, de donde $x = 4$. Sustituimos el valor hallado de x en la primera ecuación y hallamos $y = -3$.
Así, pues, el sistema tiene una sola solución $x = 4$; $y = -3$.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 7a + 3b = 8, \\ 5a + 2b = 5{,}5. \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por 2, y la segunda por -3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \ \ 14a + 6b = 16, \\ -15a - 6b = -16{,}5, \end{cases}$$

equivalente al dado. Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos $-a = -0{,}5$, de donde $a = 0{,}5$. A continuación, sustituyendo el valor hallado de a en una de las ecuaciones del sistema, hallamos $b = 1{,}5$.
De los ejemplos expuestos se deduce que las ecuaciones del sistema dado siempre se pueden convertir de manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean de signo distinto, en tal caso, sumando miembro a miembro las ecuaciones dadas obtenemos una ecuación con una incógnita.

§ 14. Método de sustitución

Frecuentemente se utiliza el siguiènte método de resolución del sistema: expresamos una incógnita de una de las ecuaciones por otra y la sustituimos en la segunda ecuación del sistema, lo que da lugar a una ecuación con una incógnita. Este método de resolución del sistema se ha denominado *método de sustitución*.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} 5x+2y=14, \\ 3x-4y=24. \end{cases}$$

De la primera ecuación expresamos y por x:

$$y=7-\frac{5}{2}x. \tag{1}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y por la expresión $7-\frac{5}{2}x$:

$$3x-4\left(7-\frac{5}{2}x\right)=24.$$

De donde $x = 4$, por lo cual de la igualdad (1) obtenemos $y = -3$.
Con el método de sustitución se prefiere resolver los sistemas con coeficientes literales.

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} ax+y=c, \\ x+by=m \end{cases}$$

(todos los coeficientes son distintos de cero y $ab \neq 1$). De la primera ecuación hallamos $y = c - ax$. La sustitución de la incógnita y, en la segunda ecuación, por $c - ax$ conduce a una ecuación con una incógnita

$$x + b(c - ax) = m,$$

de donde $x = \frac{m-bc}{1-ab}$.

Conociendo el valor de x, de la igualdad $y = c - ax$ se halla fácilmente y.

§ 15. Resolución de un sistema lineal mediante determinantes

Supongamos dado un sistema lineal con coeficientes literales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (b_1 \neq 0), \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Se requiere hallar su solución.

De la primera ecuación expresamos y por x:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}. \tag{1}$$

Este valor de y lo sustituimos en la segunda ecuación:

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2.$$

Obtenemos una ecuación con una incógnita (x), la que se reduce a la forma

$$a_2b_1x - a_1b_2x = b_1c_2 - b_2c_1$$

o bien

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1. \tag{2}$$

Si el coeficiente de x, es decir, la expresión $a_2b_1 - a_1b_2$, es distinto de cero, ambos miembros de la igualdad (2) se pueden dividir por él; así, obtenemos:

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{3}$$

Después de sustituir en la igualdad (1) x por su valor de la igualdad (3), hallamos:

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{4}$$

El sistema dado tiene una sola solución si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, además, los valores de las incógnitas se calculan por las fórmulas (3) y (4).

Observemos que los denominadores de las fracciones, que representan los valores de las incógnitas, son iguales. Este común denominador es igual a $a_1b_2 - a_2b_1$; está compuesto sólo de los coeficientes de las incógnitas x e y. Escribimos estos coeficientes en el orden con que fueron dadas las ecuaciones del sistema, omitiendo las incógnitas, y los disponemos en forma de tabla cuadrada; obtenemos:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 \\ a_2\ b_2 \end{matrix} \qquad (5)$$

Si se multiplican los coeficientes, ubicados en las diagonales del cuadrado, y del producto de los números, dispuestos en la diagonal, que va del ángulo superior izquierdo hacia el inferior derecho, se resta el producto de los números de la otra diagonal, obtenemos la expresión $a_1b_2 - a_2b_1$; ésta se denomina *determinante* del sistema de ecuaciones lineal dado y se designa del siguiente modo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (6)$$

En general, para la matriz de tipo (5), compuesta de cuatro números arbitrarios (que no son indefectiblemente coeficientes del sistema), la expresión análoga a (6) se denomina *determinante de segundo orden.*

Conviene hacer notar, que para aprender regla de cálculo del determinante es cómoda su siguiente representación esquemática:

$$\begin{array}{c} + \qquad\quad - \\ \begin{vmatrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

E j e m p l o

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4\,(-5) = 44.$$

Los numeradores de las fracciones, que determinan los valores de las incógnitas en las igualdades (3) y (4), también son determinantes de segundo orden:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

El determinante Δ_x se ha obtenido del determinante del sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sustituyendo los números de la primera columna por los términos independientes; y el determinante Δ_y se ha obtenido sustituyendo los números de la segunda columna por los términos independientes.

Ahora se puede escribir de modo abreviado la solución del sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

en la forma $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$.

E j e m p l o 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 7x-3y=24. \end{cases}$$

Formamos el determinante del sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=3(-3)-5\cdot 7=-9-35=-44.$$

Este no es igual a cero, y, por eso, el sistema tiene una solución única. Calculamos los dos determinantes restantes:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 24 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-5\cdot 24=-132,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 24 \end{vmatrix}=3\cdot 24-4\cdot 7=44.$$

A continuación hallamos los valores de las incógnitas

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-132}{-44}=3,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{44}{-44}=-1.$$

E j e m p l o 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b, \\ \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a. \end{cases}$$

Formemos el determinante del sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)\,b}-\frac{1}{(a-b)\,a}=\frac{a^2-b^2-2ab}{ab\,(a+b)\,(a-b)}.$$

Para la existencia de Δ es necesario que el denominador de esta fracción no sea igual a cero, es decir, que $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $a\neq\pm b$; en este caso $\Delta\neq 0$, si

$$a^2-b^2-2ab\neq 0.$$

Calculemos los determinantes Δ_x y Δ_y:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}a+b & \frac{1}{a-b}\\ 2a & \frac{1}{b}\end{vmatrix}=\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a-b}=\frac{a^2-b^2-2ab}{b\,(a-b)},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & a+b\\ \frac{1}{a} & 2a\end{vmatrix}=\frac{2a}{a+b}-\frac{a+b}{a}=\frac{a^2-b^2-2ab}{a\,(a+b)}.$$

Hallamos los valores de las incógnitas:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=a\,(a+b),\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=b\,(a-b).$$

Sustituyendo los valores hallados de las incógnitas en cada ecuación del sistema dado nos convencemos de la corrección de la solución; esta verificación se puede realizar mentalmente.

§ 16. Sistema lineal cuyo determinante es igual a cero

Supongamos que el determinante del sistema

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

es igual a cero:

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0;$$

en tal caso, $a_1b_2=a_2b_1$, de donde $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$, es decir, si el determinante del sistema es igual a cero, los coeficientes de las incógnitas son proporcionales.

Inversamente: si los coeficientes de las incógnitas son proporcionales, el determinante del sistema es igual a cero. En efecto, de $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ se deduce que $a_1b_2 = a_2b_1$ ó

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Supongamos, ahora, que siquiera uno de los determinantes Δ_x o Δ_y también es igual a cero.
Digamos que $\Delta_x = 0$: $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, lo que da lugar a la proporción: $\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.
Observación. Nosotros suponemos que los coeficientes a_2, b_2 y c_2 no son iguales a cero. En caso contrario los razonamientos anteriores perderían su sentido, puesto que no es posible dividir por cero. En el caso de que cualesquiera de los coeficientes sean iguales a cero el sistema se simplifica. Por ejemplo, de $a_2 = 0$ se deduce que $a_1b_2 = a_2b_1 = 0$. En ese caso, o bien $b_2 = 0$ (desaparece la segunda ecuación), o bien $a_1 = 0$ (desaparecen todos los términos que contienen x). De este modo, de que $\Delta = 0$ y $\Delta_x = 0$, se deduce la proporcionalidad de los coeficientes para iguales incógnitas y términos independientes:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \tag{1}$$

(es decir, Δ_y también es igual a cero).
Designemos la magnitud de cada una de las tres relaciones iguales por k $(k \neq 0)$:
por lo tanto,

$$\frac{a_1}{a_2}=k,\ \ \frac{b_1}{b_2}=k,\ \ \frac{c_1}{c_2}=k;$$

por lo tanto,

$$a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2,\ c_1 = kc_2. \tag{2}$$

Después de sustituir los coeficientes de la primera ecuación por sus expresiones de las igualdades (2) el sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Si simplificamos todos los términos de la primera ecuación con respecto al factor k, resulta que el sistema dado está compuesto de dos ecuaciones idénticas, es decir, una ecuación es consecuencia de la otra. En otras palabras, tenemos una ecuación con dos incógnitas. Como se indicó antes, una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. En este caso se dice que el sistema es *indeterminado*.

Ejemplo.

$$\begin{cases} 4x+6y=3, \\ 6x+9y=4{,}5. \end{cases}$$

Tendremos:

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{3}{4{,}5}\quad\left(k=\frac{2}{3}\right).$$

Aquí los coeficientes de las incógnitas idénticas y los términos independientes son proporcionales; si se multiplican ambos miembros de la primera ecuación por $\frac{3}{2}$ $\left(\text{o los de la segunda ecuación por } \frac{2}{3}\right)$, ésta coincide con la segunda (o con la primera).

El sistema tiene la misma solución que una de las ecuaciones del sistema dado.

Veamos ahora el caso en que $\Delta=0$, pero $\Delta_x \neq 0$ (entonces también $\Delta_y \neq 0$). Convirtiéndose en cero el determinante del sistema, se deduce que $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Si $\Delta_x \neq 0$, entonces $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Como antes designamos cada una de las dos relaciones $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ por k ($k \neq 0$), en tal caso, $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. La relación $\frac{c_1}{c_2}$ la designamos por m, donde $m \neq k$. Siendo así, $c_1 = mc_2$.

En la primera ecuación del sistema sustituimos los coeficientes a_1 por ka_2, b_1 por kb_2 y el término independiente c_1 por mc_2. El sistema toma la forma

$$\begin{cases} (a_2x+b_2y)\,k=c_2m \quad (k \neq m), \\ \quad a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por k, tendremos $(a_2x + b_2y)\,k = c_2k$.

Luego tendremos que $c_2m = c_2k$, es decir, $m = k$ (se puede dividir por c_2 puesto que supusimos que $c_2 \neq 0$). Pero, en realidad $m \neq k$. De la contradicción obtenida se deduce que el sistema no tiene solución.

En este caso se dice que el sistema de ecuaciones es *incompatible o contradictorio*.

Ejemplo.

$$\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 4x-6y=5. \end{cases}$$

Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\left(=\frac{1}{2}\right).$$

Los términos independientes no son proporcionales a los coeficientes:

$$\frac{2}{4}\neq\frac{4}{5}.$$

El primer miembro de la segunda ecuación se ha obtenido del primer miembro de la primera multiplicándola por 2, mientras que el segundo miembro se ha obtenido del segundo miembro de la primera ecuación multiplicándola por $\frac{5}{4}$. El sistema es incompatible y no tiene soluciones.

Observación. Si, sin reflexionar sobre la estructura del sistema dado, se resuelve éste, por ejemplo, por el método de suma algebraica, llegamos a una solución absurda: $0=3$, puesto que ambas incógnitas se eliminan inmediatamente.

Resumamos lo que se dijo sobre la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

a) Si el determinante del sistema $\Delta\neq0$, el sistema es determinado, es decir, tiene solución única.

b) Si $\Delta=0$ y $\Delta_x=0$, el sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

c) Si $\Delta=0$ y $\Delta_x\neq0$, el sistema es incompatible y no tiene soluciones.

A cada uno de los tres casos examinados se le puede dar una interpretación geométrica, partiendo de que en el sistema de coordenadas rectangulares a cada ecuación lineal (de primer grado), con dos incógnitas (es mejor decir con dos variables) corresponde una recta.

a) Si $\Delta\neq0$, dos rectas, representadas por las ecuaciones del sistema, se cortan en un punto; las coordenadas del punto de intersección representan precisamente la solución del sistema.

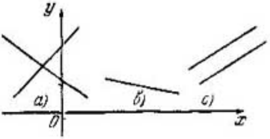


Fig. 3.

b) Si $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, las dos rectas correspondientes a las ecuaciones se confunden en una recta común; dado que éstas tienen infinitos puntos comunes, en consecuencia, el sistema también tiene infinitas soluciones.
c) Si $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema, son paralelas, es decir, no tienen ningún punto común, por lo cual el sistema no tiene soluciones.
En la fig. 3 se muestran estos tres casos posibles.

§ 17. Casos particulares de sistemas lineales

Hasta ahora examinamos sistemas de ecuaciones lineales, en los que el número de inógnitas ha sido igual al número de ecuaciones, que componen el sistema. Sin embargo, en las aplicaciones de la matemática a otras ciencias ocurren casos en que las ecuaciones, que entran en el sistema, son más que las incógnitas (tales sistemas se denominan *sobredeterminados*), o, por el contrario, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones del sistema. Los métodos de resolución de estos sistemas se examinan en una serie de ejemplos.

E j e m p l o 1.

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5, \\ 5x-3y=9. \end{cases}$$

Al principio resolvemos el sistema compuesto de las dos primeras ecuaciones,

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$$

hallamos $x = 3$; $y = 2$. Sustituimos estos valores de las incógnitas en la tercera ecuación y verificamos que se obtiene la identidad $9 = 9$. Por lo tanto, el sistema dado tiene solución única.

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \\ 2x+y=12. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene soluciones, puesto que resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \end{cases}$$

hallamos $x = 5$, $y = 1$, pero estos valores de las incógnitas no satisfacen a la tercera ecuación $2x + y = 12$.

Ejemplo 3. ¿Cómo debe ser la dependencia entre a y b para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7, \\ ax+by=5b \end{cases}$$

tenga una solución única?

Al principio resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7 \end{cases}$$

y hallamos que $x = 2$, $y = 1$.

Sustituyendo estos valores de las incógnitas en la tercera ecuación, tendremos:

$2a + b = 5b$ ó $a = 2b$.

A continuación examinemos el sistema *homogéneo*, es decir, el sistema en el que el término independiente de cada una de las ecuaciones es igual a cero.

Ejemplo 4.

$$\begin{cases} 2x-y-5z=0, \\ 3x+2y-11z=0. \end{cases}$$

Es evidente que todo sistema homogéneo (no indefectiblemente lineal) tiene solución nula: $x = y = z = 0$. Ahora, buscaremos soluciones diferentes de la solución nula.

Supongamos que $z \neq 0$. En tal caso todos los términos de las ecuaciones se pueden dividir por z; así, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2\frac{x}{z}-\frac{y}{z}=5, \\ 3\frac{x}{z}+2\frac{y}{z}=11. \end{cases}$$

Suponiendo que

$$\frac{x}{z}=u, \quad \frac{y}{z}=t,$$

tendremos:

$$\begin{cases} 2u-\ t=\ 5, \\ 3u+2t=11, \end{cases}$$

de donde $u = 3$, $t = 1$.
A continuación,

$$\frac{x}{z}=3, \quad \frac{y}{z}=1,$$

o bien

$$x = 3z, \quad y = z,$$

donde z puede adquirir cualquier valor. Por ejemplo, para $z = 2$ tendremos que

$$x = 6; \ y = z = 2.$$

De este modo, el sistema lineal dado tiene infinitas soluciones obtenidas de las igualdades

$$x = 3z, \quad y = z,$$

si a la incógnita z se le da cualquier valor. En el caso particular, cuando $z = 0$ tendremos una solución nula.

E j e m p l o 5.

$$\begin{cases} x-\ y+3z=0, \\ 2x-2y-5z=0. \end{cases}$$

Al buscar soluciones distintas de cero, aquí no se puede suponer que $z \neq 0$, puesto que después de dividir por z e introducir las incógnitas auxiliares obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u-\ t=-3, \\ 2u-2t=\ \ 5, \end{cases}$$

que es contradictorio y no tiene soluciones. En tal caso, dividiremos por x (o por y), considerando $x \neq 0$, lo que en las nuevas incógnitas $\left(\frac{y}{x} = u,\ \frac{z}{x} = t\right)$ nos da el sistema

$$\begin{cases} -u + 3t = -1, \\ -2u - 5t = -2. \end{cases}$$

Resolviéndola, hallamos que
$u = 1,\ t = 0$

o bien

$$\frac{y}{x} = 1,\ \frac{z}{x} = 0.$$

Por suposición $x \neq 0$, y por eso, $z = 0$ e $y = x$.
El sistema homogéneo dado tiene infinitas soluciones, distintas de cero. Cada solución es un trio de números, en el que los dos primeros números son idénticos, y el tercero es 0; por ejemplo, (3; 3; 0) ó (−5; −5; 0); etc.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Se aprecia inmediatamente que la segunda ecuación es corolario de la primera, puesto que después de dividir por 2 todos los términos de la segunda ecuación se obtiene un sistema de dos ecuaciones idénticas

$$x + 2y - z = 0, \tag{1}$$

ó

$$x = z - 2y.$$

Las dos incógnitas y y z pueden tomar cualquier valor; los valores de x se determinan por los valores prefijados de y y z de las fórmulas (1).

§ 18. Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes literales

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{a}{b-c}, \\ \dfrac{x+c}{y+b} = \dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$$

De la primera ecuación, según la propiedad de las proporciones derivadas*) $\left(\text{si } \frac{m}{n}=\frac{p}{q}, \text{ entonces } \frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}\right)$ hallamos que $\frac{2x}{2y}=\frac{a+b-c}{a+c-b}$, de donde

$$x=\frac{a+b-c}{a+c-b}y. \tag{1}$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación del sistema obtendremos:

$$\frac{\frac{(a+b-c)\,y}{a+c-b}+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c},$$

de donde

$$(a+b)(y+b)=\frac{(a+c)(a+b-c)\,y}{a+c-b}+c\,(a+c),$$

$$(a+b)\,y-\frac{(a+c)(a+b-c)\,y}{a+c-b}=c\,(a+c)-b\,(a+b),$$

$$y\,\frac{(a+b)(a+c-b)-(a+c)(a+b-c)}{a+c-b}=c\,(a+c)-b\,(a+b),$$

$$y\,\frac{(a+b)(a+c)-b\,(a+b)-(a+c)(a+b)+c\,(a+c)}{a+c-b}=$$

$$=c\,(a+c)-b\,(a+b).$$

Simplificando ambos miembros de la ecuación por $c\,(a+c)-$ $-b\,(a+b)$, obtenemos:

$$\frac{y}{a+c-b}=1,\quad y=a+c-b.$$

Sustituyendo el valor hallado de y en la igualdad (1), tendremos que $x=a+b-c$.

---

*) Si se tiene la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \text{ y } \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ y } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

E j e m p l o 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ ax+by+cz=0, \\ bcx+acy+abz=1. \end{cases} \tag{2}$$

De la primera ecuación tendremos:

$$z=-(x+y);$$

sustituimos este valor de z en la segunda y tercera ecuaciones del sistema (2), lo que nos conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+by-c(x+y)=0, \\ bcx+acy-ab(x+y)=1. \end{cases} \tag{3}$$

De la primera ecuación del sistema (3) se deduce:

$$(a-c)x=(c-b)y;$$

para $a-c\neq 0$, tendremos

$$x=\frac{c-b}{a-c}y. \tag{4}$$

Después de sustituir la expresión hallada de x en la segunda ecuación del sistema (3) obtenemos la ecuación con una incógnita:

$$\frac{(bc-ab)(c-b)}{a-c}y+(ac-ab)y=1,$$

o bien

$$-b(c-b)y+a(c-b)y=1,$$

$$(c-b)(a-b)y=1;$$

$$y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}.$$

De la igualdad (4) hallamos:

$$x=\frac{c-b}{a-c}\frac{1}{(a-b)(c-b)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)},$$

$$z=-(x+y)=\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Resolver las ecuaciones:

1) $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}$.

2) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}$.

3) $\frac{2x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$.

2. Resolver los sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} 7x-3y-8=0, \\ 4x+9y+24=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=0, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x:y=3:4, \\ (x-1):(y+2)=1:2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+\frac{9}{y}=21, \\ \frac{18}{y}=17-3x. \end{cases}$

Advertencia. $\frac{1}{y}=z$.

5) $\begin{cases} \frac{5x}{0,7}+\frac{0,3}{y}=6, \\ \frac{10x}{7}+\frac{9}{y}=31. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5}{2x+y}+\frac{4}{2x-3y}=5, \\ \frac{15}{2x+y}+\frac{2}{2x-3y}=5. \end{cases}$

Advertencia.

$\frac{1}{2x+y}=z, \quad \frac{1}{2x-3y}=t.$

7) $\begin{cases} mx-2y=3, \\ 3x+my=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+my-9=0, \\ 2mx+18y+27=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a, \\ x-y=4ab. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{x}{x-a}+\frac{y}{y-b}=2, \\ ax+by=2ab. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0, \\ \frac{x}{b}-\frac{y}{a}-1=0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2, \\ (a+b)x+(a-b)y=a. \end{cases}$

Advertencia.

$$\frac{1}{2x+y}=z, \quad \frac{1}{2x-3y}=t.$$

14) $\begin{cases} \dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Advertencia. $\dfrac{x}{m}=t$; $x=mt$, $y=nt$; $z=pt$.

15) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Advertencia. Introducir la incógnita auxiliar t, suponiendo

$$\frac{x-a}{m}=t.$$

16) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|-4y=-4. \end{cases}$

3. ¿Para qué valores del parámetro k el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+ky=5+k, \\ 2x+5y=8. \end{cases}$$

tiene solución única?

4. ¿Para qué valor del parámetro k el sistema

$$\begin{cases} (1+2k)\,x+5y=7, \\ (2+k)\,x+4y=8 \end{cases}$$

no tiene solución?

5. ¿Para qué valor del parámetro k el sistema

$$\begin{cases} (2k-1)\,x+ky=6, \\ 7{,}5x+4y=3 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones? Hallar aunque sea una de esas soluciones.

CAPITULO III

DESIGUALDADES

§ 19. Conceptos fundamentales y definiciones

● DEFINICION 1. Dos números o dos expresiones algebraicas, relacionadas entre sí por el signo $<$ («menor»), o por el signo $>$ («mayor»), o por el signo $\neq$ (no es igual), forman una *desigualdad*.

Ejemplos. 1) $3 > -5$; 2) $a < 1 + a^2$; 3) $3 \neq 2$.

● DEFINICION 2. Dos desigualdades de tipo $a < b$, $c < d$ o $a > b$, $c > d$ se denominan desigualdades del *mismo sentido*; por ejemplo, $3 > 2$ y $7 > -20$.
Dos desigualdades de tipo a $a > b$ y $c < d$ se denominan desigualdades de *sentido contrario*; por ejemplo, $4 < 5$ y $0 > -3$. A veces a los signos $>$ o $<$ se une también el signo de igualdad, por ejemplo, $a \geqslant 0$ (se lee: «el número a no es negativo») o $b \leqslant 0$ («el número b no es positivo») *). Tales desigualdades se denominan *no rigurosas* (*indeterminadas*), a diferencia de las *rigurosas* (*determinadas*) $a > b$ ó $c < d$.

§ 20. Propiedades de las desigualdades

1) *Si* $a > b$, *entonces* $b < a$.
2) *Si* $a > b$ *y* $b > c$, entonces $a > c$.
3) *Dos desigualdades de la forma*: (1) $a < b$ y $b < c$ ó (2) $a > b$ y $b > c$ *pueden ser unidas en una doble desigualdad*:

(1) $a < b < c$ *y* (2) $a > b > c$.

Ejemplo. Si a es un valor aproximado de la magnitud x, Δa, el límite del error absoluto del número aproximado a, el valor real de la magnitud $x < a + \Delta a$, pero $x > a - \Delta a$, y puede escribirse la doble desigualdad: $a - \Delta a < x < a + \Delta a$.

---

*) Se acostumbra también leer: «el número a es mayor o igual a cero» y «el número b es menor o igual a cero», respectivamente. (*Nota del T.*)

4) *Si* $a > b$ y m *es un número cualquiera,*

$a + m > b + m.$

A ambos miembros de la desigualdad se les puede sumar (o restar de ambos miembros) un mismo número, y, como resultado, se obtendrá una desigualdad del mismo sentido.

E j e m p l o. $5 > 3$; sumemos a ambos miembros el número 4, obtendremos $9 > 7$.
5) *Si* $a > b$ *y* m *es un número positivo,*

$am > bm.$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por un mismo número positivo, el sentido de la desigualdad no varía.
Al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número negativo m ($m < 0$) el sentido de la desigualdad cambiará por el contrario, es decir, *si* $a > b$ y $m < 0$, *tendremos que*

$am < bm.$

E j e m p l o. $3 > -1$ lo multiplicamos por -4; obtendremos $-12 < 4$. Lo mismo se puede decir respecto a la división de ambos miembros de la desigualdad por el número m ($m \neq 0$), puesto que la división se reduce a la multiplicación por $\frac{1}{m}$.

§ 21. Operaciones con desigualdades

1. Suma. *Dos o varias desigualdades del mismo sentido se pueden sumar miembro a miembro; como resultado se obtendrá una desigualdad del mismo sentido:*

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > d, \\ m > n, \\ \hline a + c + m > b + d + n \end{array}$$

2. Resta. *Las desigualdades de sentido contrario se pueden restar miembro a miembro; como resultado obtendremos una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.*

Si $a > b$ y $c < d$, y de la primera desigualdad restamos la segunda,

$$a - c > b - d.$$

E j e m p l o.

$$\begin{array}{r} -3 > -7 \\ 4 < 5 \\ \hline -3-4 > -7-5, \end{array}$$

ó $-7 > -12$.

3. Multiplicación. *Dos o varias desigualdades de igual sentido se pueden multiplicar entre sí miembro a miembro si todos sus miembros son positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido.*

Si

$$\begin{array}{l} a < b \\ c < d \ (a > 0,\ c > 0), \\ \hline \end{array}$$

entonces $ac < bd$.

E j e m p l o.

$$\begin{array}{r} 3 < 5 \\ 4 < 6 \\ \hline 12 < 30. \end{array}$$

4. División. *Dos desigualdades de sentido contrario se pueden dividir miembro a miembro si todos los miembros de la desigualdad son números positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo, es decir, la desigualdad que dividimos por la otra:*

$$\begin{array}{l} a > b \\ c < d \ \ (b > 0,\ \ c > 0) \\ \hline \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

E j e m p l o

$$\begin{array}{l} 4 > 3 \\ 1 < 2 \\ \hline \frac{4}{1} > \frac{3}{2}. \end{array}$$

§ 22. Resolución de desigualdades de primer grado con una incógnita

● DEFINICION 1. La desigualdad de la forma

$$ax + b > a_1x + b_1 \text{ ó } ax + b < a_1x + b_1$$

se denomina *desigualdad de primer grado con una incógnita.* Así serán, por ejemplo, las desigualdades

1) $\frac{3x}{2} - 5 > \frac{2x}{5} + 2$,

2) $4 - 5x < x + 22$.

Se denomina *solución* de la desigualdad todo valor de x que satisface a la desigualdad dada.

Por ejemplo, el número 2 es la solución de la desigualdad $4 - 5x < x + 22$, puesto que $4 - 5 \cdot 2 < 2 + 22$, $-6 < < 24$.

● DEFINICION 2. *Resolver una desigualdad* significa hallar todos los valores de la incógnita que verifican a la desigualdad dada. La búsqueda de la solución de cualquier desigualdad de primer grado con una incógnita da lugar a desigualdades elementales de la forma

1) $x > a$

2) $x < b$.

En el primer caso se dice que el número a es el *límite inferior* de los valores de la incógnita. Quiere decir que cualquier número mayor que el número a es solución de la desigualdad dada. Si sobre el eje numérico se lleva el punto correspondiente al número a, los valores de la incógnita x que verifican la desigualdad $x > a$, se representan por los puntos que se encuentran a la derecha del punto $x = a$ (en la fig. 4 está rayado).

En la desigualdad elemental $x < b$ el número (letra) b se denomina *límite superior* de la incógnita, lo que significa que: cualquier número menor que b es una solución de esta desigualdad. La desigualdad $x < b$ se ilustra gráficamente del siguiente modo: sobre el eje numérico se marca el punto correspondiente al número b; en tal caso, cualquier punto ubicado a la izquierda de b representa al número que verifica la desigualdad dada (fig. 5).

Las desigualdades de primer grado con una incógnita se

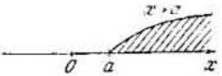


Fig. 4

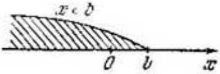


Fig. 5.

resuelven por el mismo esquema que las ecuaciones de primer grado. Veamos algunos ejemplos.

E j e m p l o.

$\frac{2x-5}{3}-1>3-x.$

Multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $3>0$, para librarnos de la fracción:

$2x-5-3>9-3x.$

Pasamos el término con la incógnita del segundo miembro al primero, y el término independiente del primer miembro al segundo, cambiando los signos de los términos que se pasan de un miembro a otro por los contrarios:

$2x+3x>9+8;\ 5x>17.$

Dividiendo ambos miembros por $5>0$, obtenemos $x>3{,}4$. El número 3,4 es el límite inferior de los valores de la incógnita x.

§ 23. Segmento. Intervalo

Supongamos que a y b son dos números, además $a<b$. A los números a y b les añadimos todos los números intermedios comprendidos entre ellos. En tal caso se forma un conjunto *cerrado* de los números x: $a \leqslant x \leqslant b$. La cualidad de cerrado radica en que en este conjunto existe un número menor a y un número mayor b.

● DEFINICION 1. El conjunto de todos los números x, que verifican las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, se denomina *segmento*. Se admite en designar el segmento por $[a,\ b]$; por ejemplo, se escribe $[0,\ 2]$ en lugar de $0 \leqslant x \leqslant 2$. La propia denominación de segmento indica que a este conjunto numérico corresponde un conjunto de puntos del eje numérico, que llenan

totalmente el segmento con extremos en los puntos $x = a$ y $x = b$.
Eliminamos los puntos extremos del segmento $[a, b]$, en tal caso obtenemos un conjunto abierto de los números x: $a < x < b$; en este conjunto no hay un número menor ni un número mayor, debido a lo cual se denomina *abierto*.

● DEFINICION 2. El conjunto de todos los números x que verifican la doble desigualdad $a < x < b$, se denomina *intervalo*.
El intervalo se designa con el símbolo (a, b); por ejemplo, $(1, 5)$ denota que $1 < x < 5$.
Si ocurre que $a \leqslant x < b$, se dice que x pertenece al semiintervalo $[a, b)$; si $a < x \leqslant b$, se dice que x pertenece al semiintervalo $(a, b]$.

§ 24. Resolución de sistemas de desigualdades de primer grado

● DEFINICION. Las dos desigualdades de tipo

$$\begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1<0, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1>0, \end{cases}$$

con respecto a las cuales se buscan sus soluciones generales, forman un *sistema de desigualdades de primer grado con una incógnita*.
El método general de resolución del sistema de dos desigualdades tiene como objeto lo siguiente: hallamos las soluciones de cada desigualdad por separado y comparándolas establecemos cuáles de las soluciones son comunes para ambas desigualdades; si no existen soluciones generales, el sistema es incompatible, o contradictorio. La elección de las soluciones generales se facilita si las soluciones de cada desigualdad se representan sobre el eje numérico.

E j e m p l o 1. Resolver el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ 5x+4>0. \end{cases}$$

1) $2x-3>0,\ x>\frac{3}{2}$;

2) $5x+4>0,\ x>-\frac{4}{5}$.

Para la primera desigualdad el número $\frac{3}{2}$ es el límite inferior de los valores de la incógnita. Marcamos este punto

Fig. 6.

y rayamos la parte superior del eje numérico que se encuentra a la derecha del punto correspondiente al número $\frac{3}{2}$ (fig .6). Análogamente rayamos por debajo el eje numérico, comenzando del punto $-\frac{4}{5}$ hacia la derecha, puesto que el número $-\frac{4}{5}$ es el límite inferior de los valores de la incógnita para la segunda desigualdad. Allí donde el eje resulta rayado tanto por encima como por debajo se hallan las soluciones generales. En este caso todos los números mayores que $\frac{3}{2}$ son soluciones generales:

$$x > \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4, \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) > 2(4-x). \end{cases}$$

Reducimos cada una de las desigualdades a una forma más simple, para lo cual nos libramos de las fracciones, abrimos los paréntesis, pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos los términos semejantes; así, obtenemos

$$\begin{cases} -13x + 39 < 0, \\ -\ 4x + 36 > 0 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} -x + 3 < 0, \\ -x + 9 > 0. \end{cases}$$

Resolviendo la primera desigualdad, hallamos que $x > 3$; de la segunda, que $x < 9$.

Ambas desigualdades se satisfacen simultáneamente por los valores de x tomados en el intervalo $3 < x < 9$ (fig. 7).

Fig. 7.

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad $\frac{x+2}{3-x}>2$.

Tenemos que $\frac{x+2}{3-x}-2>0$, reduciendo a un común denominador, se obtiene

$$\frac{x+2-2(3-x)}{3-x}>0,$$

$$\frac{3x-4}{3-x}>0.$$

La fracción es positiva si los signos del numerador y del denominador son iguales, por eso, o bien

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ 3-x>0, \end{cases} \qquad (1)$$

o bien

$$\begin{cases} 3x-4<0, \\ 3-x<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema (1), hallamos que a la primera desigualdad satisfacen los valores de $x>\frac{4}{3}$, a la segunda, los valores de $x<3$. Ambas desigualdades se satisfacen simultáneamente si $\frac{4}{3}<x<3$.

El sistema (2) es incompatible, es decir, no tiene soluciones, ya que de la primera desigualdad de este sistema se deduce que $x<\frac{4}{3}$, y de la segunda, $x>3$. Todo número mayor que 3 no puede ser al mismo tiempo menor que $\frac{4}{3}$.

§ 25. Desigualdades que contienen la incógnita bajo el signo de módulo

La magnitud absoluta del número real x, es decir $|x|$, se puede interpretar geométricamente como la distancia del punto, que representa el número x, al origen 0 del eje numérico. Por ejemplo, si $|x|=3$, sobre el eje numérico se

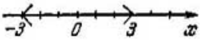


Fig. 8.

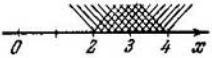


Fig. 9.

tienen solamente dos puntos: $x_1 = -3$ y $x_2 = +3$, los que distan del origen 0 tres unidades de la escala.

La desigualdad elemental $|x| < 3$ significa que se buscan tales valores de la incógnita x, a los que corresponden puntos que distan del origen 0 menos de tres unidades de longitud (según la escala elegida). Está claro que todos estos puntos pertenecen al intervalo $(-3, 3)$ (fig. 8). Todo número de este intervalo es la solución de la desigualdad $|x| < 3$. Todas las soluciones se escriben en forma de una doble desigualdad

$$-3 < x < 3.$$

La desigualdad $|x| \leqslant 3$ se diferencia de la anterior $|x| < 3$ solamente en que se agrega dos nuevas soluciones de $x = \pm 3$; todas las soluciones forman el segmento $[-3, 3]$ ó $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

E j e m p l o 1. Resolver la desigualdad

$$|x - 3| < 1.$$

Método de resolución *geométrica*. Desde el punto $x = 3$ marcamos una unidad de la escala a la izquierda, después a la derecha; obtenemos dos puntos: 2 y 4. Todo punto intermedio entre ellos verifica la desigualdad (fig. 9), es decir,

$$2 < x < 4.$$

Método de resolución *algebraica*. Suprimimos el signo de valor absoluto y escribimos la doble desigualdad

$$-1 < x - 3 < 1;$$

sumamos el número 3 a los tres miembros de la desigualdad:

$$-1 + 3 < x - 3 + 3 < 1 + 3,$$

o bien

$$2 < x < 4.$$

E j e m p l o 2. $|2x + 3| < 5$. Esta desigualdad es equivalente a la doble desigualdad $-5 < 2x + 3 < 5$. Sumamos a todos los miembros de la desigualdad el número -3,

obtenemos $-8 < 2x < 2$, dividimos todos los miembros por 2: $-4 < x < 1$.
Resolvamos este ejemplo de otro modo. Tenemos:

$$2\left|x+\frac{3}{2}\right|<5;$$

dividimos àmbos miembros por 2:

$$\left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2},$$

o bien

$$\left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|<\frac{5}{2};$$

del punto $x=-\frac{3}{2}$ del eje numérico marcamos a la izquierda y a la derecha $\frac{5}{2}$ de la unidad de escala; obtenemos los puntos -4 y 1. Ahora está claro que

$$-4 < x < 1.$$

E j e m p l o 3. $|2x-3|>7$.
Al buscar la solución de esta desigualdad hay que considerar dos casos:
a) $2x-3>0$, en tal caso $|2x-3|=2x-3$, $2x-3>7$, $x>5$;

b) $2x-3<0$, entonces $|2x-3|=-(2x-3)$ (la magnitud absoluta de un número negativo es igual a ese número con signo contrario); resolvemos la desigualdad $-(2x-3)>7$; $2x-3<-7$, $x<-2$.
De este modo, cualquier número mayor que 5, así como todo número menor que -2 son soluciones de la desigualdad $|2x-3|>7$ (fig. 10).
Resolvamos este ejemplo de otro modo. Representemos su primer miembro en la forma

$$2\left|x-\frac{3}{2}\right|>7,$$

ó

$$\left|x-\frac{3}{2}\right|>\frac{7}{2}.$$

Del punto del eje numérico correspondiente al número $\frac{3}{2}$ marcamos a la izquierda y a la derecha $\frac{7}{2}$ de unidades, obtenemos los puntos -2 y 5. Con esta construcción se distingue

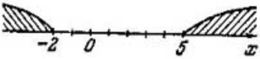


Fig. 10.

el segmento $[-2; 5]$; todos los números que no pertenecen a a este segmento son soluciones de la desigualdad dada; éstos serán los números menores que -2 y mayores que 5; $x < -2$ ó $x > 5$.

§ 26. Noción sobre la demostración de las desigualdades

La desigualdad que se cumple para todos los valores de las letras, que la componen (puede ser con ciertas limitaciones), se denomina desigualdad *idéntica*. Con respecto a esta desigualdad no se plantea su resolución sino la demostración. Mediante ejemplos aclararemos en qué consiste la demostración y cómo se realiza ella.

E j e m p l o 1. Demostrar que la media aritmética de dos números positivos no es menor que su media geométrica, es decir, que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Supongamos que dicha desigualdad se verifica; en tal caso, después de elevar ambos miembros al cuadrado obtenemos una desigualdad del mismo sentido (al número positivo mayor corresponde el cuadrado mayor)

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab \text{ ó } a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Es evidente que la última desigualdad és idéntica, puesto que el cuadrado de cualquier número real no es negativo ($\geqslant 0$). Por ahora esto es sólo la tesis y no la propia demostración, puesto que cuando comenzamos a transformar la desigualdad dada, es decir, elevamos al cuadrado ambos miembros, sumamos a ambos miembros un mismo término, etc., conservando entre los miembros de la desigualdad el signo $\geqslant$ (se lee «no menor que»), en realidad, aceptamos que el primer miembro de la desigualdad no es menor que el segundo, por lo que no hay nada que demostrar. Si demostramos que las operaciones realizadas son reversibles, con ello se demostrará que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Tenemos:

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \text{ ó } a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Sumamos a ambos miembros $2ab$:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab; \quad \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

Extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros y tomamos sólo los valores aritméticos de las raíces, en tal caso $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Es evidente que el signo de igualdad se tendrá solamente cuando $a = b$.

Ejemplo 2. Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

■ DEMOSTRACION Vamos a partir de las desigualdades evidentes:

$$\left.\begin{array}{ll} (a-b)^2 \geqslant 0, & a^2+b^2 \geqslant 2ab, \\ (a-c)^2 \geqslant 0, \text{ ó} & a^2+c^2 \geqslant 2ac, \\ (b-c)^2 \geqslant 0 & b^2+c^2 \geqslant 2bc. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Sumando las desigualdades (1), obtenemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + ac + bc);$$

después de dividir por 2, tendremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Ejemplo 3., Demostrar que si $x + y + z = 1$, donde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, entonces
$(1 - x)(1 - y)\ (1 - z) \geqslant 8xyz.$

■ DEMOSTRACION Como base tomamos las desigualdades conocidas (ejemplo 1)

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz},$$

de donde

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy},$$
$$x + z \geqslant 2\sqrt{xz},$$
$$y + z \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

Puesto que de la condición se deduce que $x + y = 1 - z$, $x + z = 1 - y$, $y + z = 1 - x$, las desigualdades anotadas adquieren la forma

$$1 - z \geqslant 2\sqrt{xy},$$
$$1 - y \geqslant 2\sqrt{xz},$$
$$1 - x \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

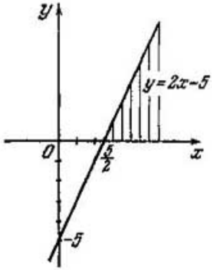


Fig. 11.

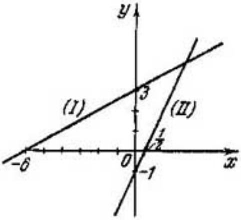


Fig. 12.

Después de multiplicar miembro a miembro estas tres desigualdades obtenemos:

$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geqslant 8xyz.$

§ 27. Resolución gráfica de desigualdades

E j e m p l o 1. Resolver gráficamente la desigualdad $2x - 5 > 0$.

El primer miembro de la desigualdad, es decir, $2x - 5$, es una función lineal de argumento x; lo designamos por y:

$y = 2x - 5,$

y construimos su gráfica (fig. 11). La desigualdad $2x - 5 > 0$ significa que se buscan tales valores del argumento x, para los cuales la función lineal es positiva, es decir, las ordenadas de la recta son positivas, o los puntos de la gráfica se encuentran por encima del eje de abscisas. Este requisito lo satisfacen todos los puntos, cuyas abscisas son mayores que $\frac{5}{2}$; dicho de otro modo, estos puntos se encuentran a la derecha del punto de intersección de la recta con el eje Ox.

E j e m p l o 2. Resolver gráficamente el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 > 0, \\ 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Construimos las gráficas de las dos funciones lineales (fig. 12)

(I) $y = \frac{1}{2}x + 3$

(II) $y = 2x - 1$.

A continuación debemos indicar todos los valores del argumento x, para los cuales simultáneamente las ordenadas de la primera recta son positivas, y las de la segunda recta, negativas. Los valores de x comprendidos entre -6 y $\frac{1}{2}$, satisfacen este requisito:

$$-6 < x < \frac{1}{2}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Resolver las desigualdades:

1) $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$;

2) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$;

3) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$;

4) $m(x-1) > x+2$;

5) $\frac{x}{k} + \frac{1-3x}{2} < \frac{x+2}{4k}$ $(k < 0)$;

6) $\frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$ $(m \neq 2)$;

7) $|3x-5| < 3$;

8) $|4-3x| < 0{,}1$;

9) $|3-2x| > 5$;

10) $|5x+3| > 8$.

2. Resolver las desigualdades y los sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 3x+2 > 0; \end{cases}$

2) $\frac{10-x}{x-6} < 1$;

3) $\begin{cases} 0{,}4x + \frac{7}{3} < \frac{2}{3}x - 1{,}2, \\ 5x+17 > 9x-63; \end{cases}$

4) $\frac{2x+1}{3-x} > 1$.

3. ¿Para qué valores de a se verifica la desigualdad

$$1 < \frac{3a+10}{a+7} < 2?$$

4. ¿Para qué valores de m el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+7y=m, \\ 3x+5y=13 \end{cases}$$

tiene soluciones positivas?

5. ¿Para qué valores del número a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-6y=1, \\ 5x-ay=2 \end{cases}$$

tiene soluciones negativas?

6. Determinar el número m de manera que la raíz de la ecuación $\frac{3}{x}=\frac{2m-1}{x+m}$ sea mayor que 1.

7. ¿Para qué valores enteros de n la solución del sistema

$$\begin{cases} nx-\quad y=5, \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$$

satisface la condición $x>0$ e $y<0$?

8. Demostrar la desigualdad $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$ cuando $a>0$, $b>0$.

9. Demostrar que para todo valor real de x se cumple la desigualdad $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

10. Demostrar que la suma le dos números positivos no es menor que 2, si su producto es igual a 1.

CAPITULO IV

NUMEROS REALES

§ 28. Nota de introducción

En el texto del presente capítulo se usa frecuentemente la palabra «conjunto». Aclaremos el significado de este concepto en ejemplos concretos.

1) Todos los estudiantes de la ciudad de Moscú forman el *conjunto* de estudiantes de Moscú. Este conjunto se compone de un número finito de elementos; cada estudiante por separado de la ciudad de Moscú es un elemento del conjunto; cualquier estudiante de otra ciudad o región no pertenece a este conjunto.

2) Todos los rectángulos de área igual a un metro cuadrado forman un conjunto de rectángulos de dicha área de 1 m^2: este conjunto es infinito. Los elementos del conjunto son los rectángulos individuales, por ejemplo, el rectángulo de 2 m y $\frac{1}{2}$ m de lados.

3) Todos los números enteros positivos forman el conjunto de números naturales: 1, 2, 3, 4, . . . Este conjunto es infinito. En adelante nos referiremos solamente a los conjuntos numéricos.

§ 29. Números racionales

Los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, y el numero 0 forman el conjunto de números *racionales*. Todo número racional se puede considerar como la relación de dos números enteros: $r = \frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$.

Ejemplo.

$$3=\frac{3}{1}; \quad -4,5=-\frac{9}{2}.$$

Conviene hacer notar que los números racionales se pueden representar en forma de fracciones decimales periódicas infinitas

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

$$\frac{2}{5} = 0,4000\ldots = 0,3999\ldots$$

$$-1\frac{2}{7} = -1,(285714).$$

Inverso: toda fracción periódica infinita es un número racional, puesto que éste puede convertirse en una fracción ordinaria, por ejemplo:

$$0,3666\ldots = \frac{36-3}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

(más detalladamente en el cap. XVI, § 243).

Al realizar las cuatro operaciones aritméticas con números racionales (excepto la división por 0), como resultado obtenemos también números racionales, es decir, estas operaciones no nos sacan del conjunto de números racionales y no requieren la introducción de números nuevos.

Exactamente del mismo modo se pueden resolver las ecuaciones de primer grado (lineales) con una incógnita y los sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas; los valores de las incógnitas serán siempre números racionales, si los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son racionales. Sin embargo, al resolver las ecuaciones cuadráticas elementales tropezamos con la necesidad de ampliar el concepto de número. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 3 = 0$, ó $x^2 = 3$, no tiene una raíz entera, puesto que no existe un número entero tal, cuyo cuadrado es igual a 3. Demostremos que la raíz de esta ecuación no puede ser tampoco un número fraccionario.

Supongamos lo contrario: $x = \frac{m}{n}$, donde $\frac{m}{n}$ es una fracción irreducible. En tal caso, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$, lo que es un absurdo, ya que el cuadrado de una fracción irreducible es también una fracción irreducible, y ella no puede igualarse a un número entero (3). Por lo tanto, la raíz de la ecuación no es un número racional.

Para poder hablar de raíces de semejantes ecuaciones es necesario introducir números nuevos, denominados números *irracionales.*

Los números irracionales no se pueden prescindir incluso en geometría, cuando se plantea la medición de segmentos.

Fig. 13.

Fig. 14.

§ 30. Medición de segmentos

En este párrafo nos apoyaremos en la siguiente afirmación, conocida bajo la denominación de *axioma de Arquímedes*: *si AB y CD son dos segmentos arbitrarios y $AB > CD$, existe un número entero positivo n tal que $CD \cdot n > AB$.* En otras palabras, siempre se puede llevar el segmento menor CD sobre el segmento mayor AB tantas veces para que se obtenga el segmento AM, que supera en longitud al segmento AB. En la fig. 13 se muestra que después de llevar cuatro veces el segmento CD sobre el segmento AB se obtiene el segmento PB, menor que CD; llevando cinco veces el segmento CD, obtenemos el segmento AM, (mayor que AB, lo que puede escribirse del siguiente modo:

$$CD \cdot 4 < AB < CD \cdot 5$$

En este caso el número $n = 5$.

● DEFINICION 1. Se denomina *medida común* de dos segmentos AB y CD un tercer segmento E tal, que cabe un número entero de veces en cada uno de los segmentos dados. En la fig. 14 se aprecia que el segmento E entra en el segmento AB cinco veces, y en el segmento CD, tres veces.

● DEFINICIÓN 2. Dos segmentos que tienen una medida común se denominan *conmensurables.*

● DEFINICIÓN 3. Se denomina *relación* de dos segmentos conmensurables la relación de los números que expresan sus longitudes según la unidad de longitud admitida E.
De este modo, para los segmentos de la fig. 14

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}.$$

Si la medida común E cabe en cierto segmento m veces, y en otro segmento n veces, su relación es igual al número racional $r = \frac{m}{n}$.

Es cierta también la tesis inversa: si la relación de dos segmentos es un número racional, estos dos segmentos son conmensurables, es decir, tienen una medida común.

En efecto, supongamos que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$; en tal caso se puede tomar como medida común un segmento igual a $\frac{1}{n}$-ésima parte del segmento CD:

$$E = \frac{1}{n} CD.$$

De donde

$$CD = nE, \quad AB = mE,$$

y

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mE}{nE} = \frac{m}{n}.$$

● DEFINICION 4. Dos segmentos que no tienen medida común se denominan *inconmensurables*.

Teorema. *La diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado.*

■ DEMOSTRAREMOS por el método del absurdo. Supongamos que la diagonal del cuadrado es conmensurable con su lado; en tal caso, la relación de los mismos es un número racional: $\frac{d}{a} = r$, además $1 < r < 2$, puesto que la diagonal d es mayor que el lado del cuadrado a, pero menor que el doble del lado $2a$ (la hipotenusa es menor que la suma de los catetos); por lo tanto, el número r es una fracción impropia $\frac{m}{n}$, que se puede considerar irreducible:

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{n}; \quad d = \frac{m}{n} a.$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$d^2 = 2a^2, \quad \left(\frac{m}{n} a\right)^2 = 2a^2,$$

o bien

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

lo que es un absurdo, puesto que el cuadrado de una fracción irreducible no puede ser un número entero. Hemos llegado a un absurdo suponiendo que la diagonal del cuadrado es conmensurable con su lado. Con esto el teorema queda demostrado.

§ 31. Medición decimal de segmentos

Demostrado que existen segmentos inconmensurables, aclaremos que se debe entender por relación de dos segmentos inconmensurables o, en otras palabras, que se acepta por longitud del segmento inconmensurable con un segmento considerado como unidad de medición.

Supongamos que sean AB y CD dos segmentos arbitrarios (fig. 15). Llevamos el segmento menor CD sobre el mayor tantas veces como sea necesario hasta obtener el resto PB, menor que el segmento CD. En la figura se muestra el caso en que tal situación se alcanza después de llevar CD tres veces. Dividamos CD en diez partes iguales y una décima de su parte la llevamos sobre el resto PB tantas veces hasta obtener un nuevo resto P_1B, menor que $\frac{1}{10}$ parte del segmento CD. Conforme a nuestra figura esto ocurre después de llevar cuatro veces $\frac{1}{10}$ de fracción de CD. El nuevo resto P_1B lo medimos por $\frac{1}{100}$ de parte del segmento CD, hasta obtener el resto P_2B, menor que $\frac{1}{100}$ de CD, etc.

De la medición descripta antes son posibles los siguientes tres resultados.

Caso 1. La medición termina en cierto paso; por ejemplo, si la $\frac{1}{100}$ parte del segmento CD está contenida en el resto P_1B exactamente seis veces, con ello se termina la medición del segmento AB y como resultado obtenemos el número racional 3,46.

Caso 2. La medición se continúa ilimitadamente y como resultado se obtiene una fracción decimal periódica infinita.

Caso 3. La medición se continúa ilimitadamente y en su proceso se obtiene una fracción decimal aperiódica infinita, por ejemplo: 2,451451145111....

Los primeros dos casos pueden surgir sólo cuando los segmentos AB y CD son conmensurables, puesto que entonces su relación es un número racional.

Fig. 15.

El tercer caso ocurre sólo cuando el segmento AB es inconmensurable con el segmento CD. La fracción decimal aperiódica infinita en la medición ilimitada es un nuevo número, que se diferencia del número racional y se denomina número *irracional*.

● DEFINICIÓN 1. Toda fracción decimal aperiódica infinita se denomina número *irracional*.
Como ejemplos elementales de números irracionales pueden servir: 1) el número $\sqrt{2}$, que expresa la longitud de la diagonal del cuadrado, si el largo del lado del cuadrado se ha tomado igual a 1; 2) el número $\sqrt{3}$, es decir, es una de las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 0$, y en general, la raíz de cualquier número positivo que no es una potencia exacta de la raíz, por ejemplo, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{2}$, etc.
Sin embargo, el conjunto de números irracionales no se concluye con estas raíces. He aquí otros ejemplos de números irracionales:
1) el número π, que expresa la relación entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro; éste también es un número irracional, pero él no puede ser expresado por radicales;
2) también es irracional el número x, que satisface la correlación $3^x = 5$, y el número sen $7°$.

● DEFINICIÓN 2. Todos los números racionales e irracionales forman el *conjunto de números reales*.
De este modo, la frase «x es un número real» hay que entenderla así: x es un número racional o irracional.

§ 32. Aproximaciones racionales de números reales

Supongamos que se ha dado un número irracional cualquiera α

$\alpha = 0{,}345345534555\ldots$

Conservamos la primera cifra decimal de esta fracción aperiódica infinita, y omitimos las restantes. Obtenemos la fracción 0,3 que denominaremos *aproximación racional del número α con exactitud de hasta* 0,1 *por defecto*; de modo semejante denominaremos la fracción 0,34 aproximación racional

del número α con exactitud de hasta 0,01 por defecto; la fracción 0,345 es una aproximación racional del número α con exactitud de hasta 0,001 por defecto, etc.
Se pueden obtener aproximaciones racionales del mismo número α *por exceso* con exactitud de hasta 0,1, hasta 0,01, hasta 0,001, etc.; éstas serán las fracciones: 0,4: 0,35; 0,346, etc. El número real α es mayor que cualquiera de su aproximación racional por defecto, pero menor que cualquiera de su aproximación racional por exceso.
Cuando se realizan operaciones aritméticas con números reales, de ordinario estos números se sustituyen por sus aproximaciones racionales, tomadas con un grado de exactitud determinado, y se realizan las operaciones indicadas con los números racionales obtenidos.

● DEFINICIÓN 1. Se denomina *suma de dos números reales* un número real tal, que es mayor que la suma de las aproximaciones racionales de los sumandos, tomados, por defecto con cualquier grado de exactitud, pero menor que la suma de las aproximaciones racionales de los sumandos, tomados por exceso con cualquier grado de exactitud.

Ejemplo 1. Hallar la suma $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ con exactitud de hasta 0,001.
Partiendo de la definición de la suma, se pueden escribir las siguientes desigualdades:

$$0{,}3+1{,}4<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}4+1{,}5,$$

$$0{,}33+1{,}41<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}34+1{,}42,$$

$$0{,}333+1{,}414<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}334+1{,}415,$$

$$0{,}3333+1{,}4142<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}3334+1{,}4143.$$

. . . .

Puesto que necesitamos calcular la suma con la exactitud de hasta 0,001, los valores aproximados de los sumandos los tomamos con cuatro cifras decimales y después de la suma suprimimos la última cifra decimal:

$$1{,}7475<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}7477,$$

$$1{,}747<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}748.$$

De este modo, cualquiera de los dos números 1,747 ó 1,748, se puede tomar como valor aproximado de la suma $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ con exactitud de hasta 0,001: el primer número, por defecto; el segundo, por exceso.

● DEFINICION 2. *Por producto de dos números reales* se considera un número real tal que sea mayor que el producto de aproximaciones racionales de los factores, tomados por defecto con cualquier grado de exactitud, pero menor que el producto de sus aproximaciones racionales, tomados por exceso con cualquier grado de exactitud.

E j e m p l o 2. Calcular el producto de los números α y π con exactitud de hasta 0,01, si

$\alpha = 5,414414441 \ldots, \pi = 3,14159\ldots$

Basándonos en la definición dada tendremos las siguientes desigualdades:

$$5,4 \cdot 3,1 < \alpha \cdot \pi < 5,5 \cdot 3,2,$$
$$5,41 \cdot 3,14 < \alpha \cdot \pi < 5,42 \cdot 3,15,$$
$$5,414 \cdot 3,141 < \alpha \cdot \pi < 5,415 \cdot 3,142,$$
$$5,4144 \cdot 3,1415 < \alpha \cdot \pi < 5,4145 \cdot 3,1416,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Puesto que se necesita multiplicar con la exactitud de hasta 0,01 es decir, en el producto hay que obtener cuatro cifras significativas, los valores aproximados de los factores los tomamos con cinco cifras significativas y después de multiplicar conservamos en el resultado solamente cuatro cifras significativas. Obtenemos:

$$17,009 < \alpha\pi < 17,0102$$
o bien

$$17,00 < \alpha\pi < 17,01.$$
De manera semejante se definen las demás operaciones aritméticas con números reales.

E j e m p l o 3. Hallar la longitud del segmento AB con la exactitud de hasta 0,01, si el largo del segmento CD se toma por unidad.
En este caso es indiferente que el segmento AB sea conmensurable o no con el segmento CD. Siempre se puede hallar un número racional tal que da un valor aproximado de la longitud de AB con el grado de exactitud dado.

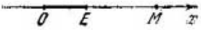


Fig. 16.

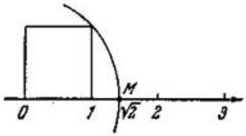


Fig. 17.

Dividamos el segmento CD en cien partes iguales y vamos a llevar su $\frac{1}{100}$ parte sobre el segmento AB tantas veces hasta obtener un resto menor que la centésima parte del segmento CD. Supongamos que para ello esta operación se debe realizar n veces. Llevando una vez más la $\frac{1}{100}$ parte del segmento CD, obtenemos un segmento mayor que el segmento AB. En tal caso obtenemos dos fracciones decimales:

$$\frac{n}{100} \text{ y } \frac{n+1}{100}.$$

La primera de ellas nos da una longitud de AB por defecto, la segunda por exceso con la exactitud de hasta 0,01:

$$\frac{n}{100} < \text{longitud de } AB < \frac{n+1}{100}.$$

§ 33. Representación geométrica de los números reales

Trazamos una recta y sobre ella elegimos: 1) el sentido positivo, por ejemplo el sentido de la izquierda a la derecha (indicado con una flecha), 2) el origen de la lectura, es decir, el punto arbitrario O, 3) la unidad de escala (OE) (fig. 16). La recta construida de este modo se denomina *eje*.

A cada punto tomado sobre el eje, por ejemplo, al punto M, se le puede dar respectivamente un número real único x, que exprese la longitud del segmento OM, además, $x > 0$, si el punto M se encuentra a la derecha del origen O; si M se encuentra a la izquierda de O, $x < 0$. Al punto O corresponde 0. Se satisface también la afirmación inversa: a cada número real x le corresponde un punto único M sobre el eje Ox; el punto M está a la derecha del origen O si $x > 0$; si $x < 0$, el punto M se encuentra a la izquierda del origen O. De este modo, la correspondencia entre los números reales y los puntos del eje es *biunívoca*. Los puntos que representan números racionales se denominan *puntos racionales*, y los puntos a los que corresponden números irracionales, *puntos irracionales*. El eje Ox se llama eje de números reales, de otro modo, *recta numérica* (*abscisa*).

E j e m p l o. Marcar el punto M, que represente el número $\sqrt{2}$. Construimos un cuadrado de lado igual a la unidad (fig. 17). Desde el centro O con una apertura del compás igual al largo de la diagonal intersecamos el eje Ox; el punto M obtenido representa el numero $\sqrt{2}$.

C A P I T U L O V

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

§ 34. Potencia de exponente natural

1. DEFINICIÓN. El producto de varios factores iguales entre sí se denomina *potencia:*

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ . \ . \ . \ a}_{\text{en total } n \text{ veces}} = a^n.$$

El factor a que se repite se denomina *base de la potencia*; el número n que indica las veces que se repite la base como factor, se denomina *exponente*.
La segunda potencia del número a se denomina *cuadrado*; la tercera, *cubo*.

2. Regla de los signos. *La potencia par de un número positivo o negativo es un número positivo; la potencia impar de un número positivo es un número positivo, la potencia impar de un número negativo es un número negativo:*

$$(\pm a)^{2n} = a^{2n} \quad (a > 0),$$

$$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} \quad (a > 0),$$

donde $2n$ es la escritura general de un número par, y $2n + 1$, la escritura general del número impar.

Observación. No hay que confundir las dos expresiones: $(-a)^n$ y $-a^n$; en la primera el signo menos corresponde a la base de la potencia, en la segunda, a la misma potencia.

3. Operaciones con potencias de bases iguales. a) *Al multiplicar potencias de bases iguales se suman los exponentes, y al dividir, se restan:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \ a^m : a^n = a^{m-n}.$$

E j e m p l o s. 1) $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$; 2) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$; 3) $(x + y)^8 : (x + y)^5 = (x + y)^3$.

b) *Al elevar a potencia un producto se puede elevar a esa poten-*

cia cada uno de los factores y multiplicar los resultados obtenidos:

$(abc)^n = a^n b^n c^n$.

A veces es conveniente utilizar la última igualdad en sentido contrario. Por ejemplo, si hay que calcular la magnitud

$A = 8^3 \cdot 25^3 \cdot 2^3$,

obtenemos el resultado más rápidamente, si escribimos $A = (8 \cdot 25 \cdot 2)^3 = 400^3 = (4 \cdot 100)^3 = 64\,000\,000$, que elevando al cubo cada uno de los números 8, 25 y 2 y multiplicando después los resultados obtenidos.

c) *Si se eleva a potencia una fracción, se pueden elevar a esta potencia el numerador y el denominador de la fracción por separado y dividir el primer resultado por el segundo:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ejemplos. 1) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$; 2) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3}$.

d) *Si se eleva a potencia una potencia, los exponentes se multiplican:*

$(a^n)^m = a^{nm}$.

Ejemplos. 1) $(x^2)^3 = x^6$;
2) $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{10}b^{15}$.

Basándonos en las reglas de operaciones con potencias antes formuladas se puede elevar a potencia monomios más complejos. Por ejemplo,

1) $\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^3 = -\frac{1}{8}a^{12}b^6$;

2) $\left(-\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^4 = \frac{(-3xy^2)^4}{(2z^3)^4} = \frac{81x^4y^8}{16z^{12}}$.

Para elevar a potencia un monomio hay que elevar a esta potencia el coeficiente, y multiplicar los exponentes de cada una de las letras por la potencia a la que se eleva el monomio dado.

Observación. En el ejemplo 2) se utilizó esta regla por separado para el numerador y el denominador de la fracción.

4. Cuadrado de un polinomio. *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos más* *el doble de los productos de cada término por los siguientes; por ejemplo:*

$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+$
$+2ad+2bc+2bd+2cd.$

De la justeza de la fórmula descripta puede persuadirse con la multiplicación simple del polinomio $a+b+c+d$ por sí mismo.

Ejemplos.

1) $(3x^2+2y^2+xy)^2 = (3x^2)^2+(2y^2)^2+(xy)^2+2\cdot 3x^2 \times$
$\times 2y^2 + 2\cdot 3x^2\cdot xy + 2\cdot 2y^2\cdot xy =$
$= 9x^4+4y^4+x^2y^2+12x^2y^2+6x^3y+4xy^3 =$
$= 9x^4+4y^4+13x^2y^2+6x^3y+4xy^3;$

2) $(a-2b+3c-4d)^2 = a^2+4b^2+9c^2+16d^2+$
$+2a(-2b)+2a\cdot 3c+2a(-4d)+$
$+2(-2b)3c+2(-2b)(-4d)+2\cdot 3c(-4d) =$
$= a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac-8ad-12bc+$
$+16bd-24cd.$

§ 35. Potencia de exponente cero y entero negativo

● DEFINICION 1. Todo número real a, distinto de cero, a la potencia cero (exponente nulo) es igual a la unidad

$a^0 = 1 \ (a \neq 0).$

Ejemplos. 1) $2^0=1$; 2) $(a-b)^0=1 \ (a\neq b)$; 3) $-5^0=-1$; 4) $(-5)^0=1$.

● DEFINICION 2. Por potencia de un número real a con exponente entero negativo se sobrentiende la fracción cuyo numerador es igual a 1, y el denominador es una potencia de la misma base, pero de exponente opuesto:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0).$

Observación. Dos números n y $-n$ se denominan *opuestos.*

Ejemplos. 1) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; 2) $a^{-2}\cdot b^{-4} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{b^4} = \frac{1}{a^2b^4}$.

Inversamente: Toda fracción propia con numerador igual a 1, puede escribirse en forma de potencia de exponente negativo:

$\frac{1}{3} = 3^{-1}$; $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

Las operaciones con las potencias de exponente nulo y negativo se pueden realizar según las mismas reglas por las que efectuamos estas operaciones con las potencias de exponentes naturales. No vamos a demostrar rigurosamente esta afirmación, sino que comprobaremos en una serie de ejemplos que esto es realmente así. La prueba consiste en realizar cada operación dos veces: la primera vez cambiando los símbolos a^0 y a^{-n} por 1 y $\frac{1}{a^n}$, la segunda vez sin esa sustitución, pero utilizando la regla correspondiente para las potencias de exponentes naturales. Si se encuentra que ambos resultados son idénticos, con ello se demuestra la posibilidad de extender la regla respectiva sobre los nuevos elementos a^0 y a^{-n}.

Producto de potencias $(a \neq 0)$

$$a^0a^{-n} = 1 \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

1) $a^0a^{-n} = a^{0+(-n)} = a^{-n}$;

2) $a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n}\,\frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)}$,

$$a^{-n}a^{-m} = a^{-n+(-m)} = a^{-n-m} = a^{-(n+m)};$$

3) $x^m x^{-n} = x^m \frac{1}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$,

$$x^m x^{-n} = x^{m+(-n)} = x^{m-n}.$$

Como se aprecia de los ejemplos expuestos, en todos los casos se corrobora que al multiplicar las potencias de bases iguales los exponentes se suman.

División de potencias

1) $a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$,

$$a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n};$$

2) $a^0 : a^{-n} = 1 : \frac{1}{a^n} = a^n$,

$$a^0 : a^{-n} = a^{0-(-n)} = a^{0+n} = a^n;$$

3) $a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

$$a^{-n} : a^{-m} = a^{-n-(-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}.$$

Con esto se prueba que al dividir las potencias de bases iguales los exponentes se restan también cuando estos exponentes son iguales a cero o a un número entero negativo.

Elévación a potencia de una potencia

1) $(a^0)^n = 1^n = 1,$

$(a^0)^n = a^{0n} = a^0 = 1;$

2) $(a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm},$

$(a^{-n})^m = a^{-nm};$

3) $(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm},$

$(a^{-n})^{-m} = a^{(-n)(-m)} = a^{nm}.$

Observación. Las potencias de exponentes negativos son convenientes puesto que permiten escribir con parsimonia magnitudes muy pequeñas.

Por ejemplo, la masa del electrón $m = 9{,}1085 \cdot 10^{-28}$ g. La constante de gravitación $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ $m^3/g \cdot s^2$. Con tal escritura se aprecia inmediatamente que la masa del electrón está determinada con cinco cifras significativas exactas, y la constante de gravitación, con cuatro cifras significativas exactas.

Para escribir números grandes se utilizan las potencias positivas del número 10.

Por ejemplo: el número de moléculas en 1 cm^3 en condiciones normales es igual a $2{,}68713 \cdot 10^{19}$.

Si no se utilizan las potencias con exponentes negativos, el primer ejemplo se escribiría así

$$m = \frac{9{,}1085}{10^{28}} = \frac{91\,085}{10^{32}} = \frac{91\,085}{\underbrace{100\ldots0}_{32 \text{ ceros}}}.$$

La escritura del número en forma de producto de sus cifras significativas por la potencia 10 se denomina «escritura con coma flotante». Esta clase de inscripción se utiliza profusamente al trabajar en las computadoras electrónicas.

§ 36. Noción de raíz

Del curso de aritmética se sabe que la adición y la sustracción se denominan *operaciones mutuamente inversas* basándose en que si a un número arbitrario a sumamos al principio el número b y después restamos el mismo número b, el número a no varía:

$(a + b) - b = a,$

o, cambiando el orden de las operaciones,

$(a - b) + b = a.$

De manera semejante, la multiplicación y la división son también operaciones mutuamente inversas, puesto que

$(ab): b = a \ (b \neq 0),$

$(a: b) \cdot b = a.$

La operación inversa a la potenciación se denomina *radicación*; mediante esta operación, si están dados la potencia y su exponente, se busca la base de la potencia; por ejemplo, si

1) $a^3 = 27$ tendremos que $a = \sqrt[3]{27} = 3;$

2) $y^5 = -32$ tendremos que $y = \sqrt[5]{-32} = -2.$

La operación de radicación (extracción de raíz) se fija con el signo $\sqrt{\ }$ (radical); además, sobre este signo se escribe el índice de la raíz y sólo en el caso de la raíz cuadrada el índice de raíz 2 no se escribe.

● DEFINICION. *Extraer la raíz n-ésima del número a significa hallar un número x tal, que después de elevar a la potencia n obtenemos el mismo número a:*

$\sqrt[n]{a} = x$, si $x^n = a$.

De esta definición se deduce que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

1. Regla de los signos. a) *La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales inversos*:

$\sqrt{49} = \pm 7$, puesto que $(\pm 7)^2 = 49;$

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$, puesto que $(\pm 3)^4 = 81.$

b) *La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el número subradical*:

$\sqrt[3]{64} = 4$, puesto que $4^3 = 64;$

$\sqrt[5]{-32} = -2$, puesto que $(-2)^5 = -32.$

c) *La raíz de índice par de un número negativo no es un número real*; por ejemplo, $\sqrt{-9}$ no puede ser ni $+3$, ni -3, puesto que $(\pm 3)^2 = 9$. Tales raíces se denominan *números imaginarios*, sobre los cuales se verá detalladamente más adelante (véase el cap. XV).

● **2. Raíz aritmética.** DEFINICION. **El valor no negativo de la raíz de índice par de un número no negativo se denomina *valor aritmético de la raíz o raíz aritmética*.**

Teniendo en cuenta las raíces aritméticas, hay que escribir:

1) $\sqrt{16}=4$,

2) $\sqrt[4]{81}=3$,

3) $\sqrt{(-\alpha)^2}=\begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha\geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{si } \alpha<0. \end{cases}$

A continuación en este capítulo se estudian solamente las *raíces aritméticas*.

§ 37. Identidades fundamentales en las que se basan las transformaciones de las raíces y las operaciones con ellas

(I) $(\sqrt[n]{a})^n=a$ (por definición de raíz).

(II) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$ (propiedad fundamental de la raíz), es decir, *la magnitud de la raíz no varía si su índice y el exponente del radicando se multiplica por un mismo número*.

Empero, toda identidad se puede leer tanto de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda. Al leer la identidad (II) de derecha a izquierda ella toma otro carácter: *el índice de la raíz y el exponente del radicando se pueden dividir por su factor común*.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{5}=\sqrt[4]{5^2}$; 2) $\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}$; 3) $\sqrt[12]{x^8}=$ $=\sqrt[3]{x^2}$.

(III) $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

Al extraer la raíz de un producto se puede extraer la raíz de igual exponente de cada factor y multiplicar los resultados obtenidos.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{900}=\sqrt{9\cdot 100}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{100}=3\times$ $\times 10=30$;

2) $\sqrt[3]{64\cdot 343}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{343}=4\cdot 7=28$.

Si la identidad (III) se lee en sentido inverso (de derecha a izquierda), la formulación será distinta: *al multiplicar raíces (radicales) de índices iguales hay que multiplicar sus expresiones subradicales (radicandos) y extraer la raíz de igual exponente de su producto*.

De este modo, la identidad (III) da la regla de multiplicación de radicales de índices iguales.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{100}=10$; 2) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}=$ $=\sqrt[3]{a^3}=a$.

Combinando la propiedad fundamental de la raíz (II) con la identidad (III) se puede multiplicar raíces de diferentes índices:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^3},$$

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}.$$

La extracción del factor fuera del signo radical está basada en la identidad (III):

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2},\ \sqrt{18a^3b}=\sqrt{9a^2\cdot 2ab}=3a\sqrt{2ab},$$

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}.$$

(IV) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, es decir, *para extraer la raíz de una fracción (cociente), se puede extraer la raíz, de igual exponente, del numerador y denominador por separado y dividir el primer resultado por el segundo.*

La lectura de la identidad (IV) de derecha a izquierda nos da la regla de la división de raíces de índices iguales: *al dividir las raíces de índices iguales se pueden dividir sus expresiones subradicales (radicandos) y extraer la raíz, del mismo exponente, del cociente obtenido.*

Ejemplos. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{3}{10}$;

3) $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2$;

4) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}=\sqrt[6]{4^2}:\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{\frac{16}{8}}=\sqrt[6]{2}$.

(V) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Esta identidad es una consecuencia de la identidad (III). *Al elevar a potencia una raíz se puede elevar a esa potencia el número subradical sin variar el índice de la raíz.*

Ejemplos. 1) $(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$;

2) $(\sqrt[3]{9})^2=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$.

(VI) $\sqrt[n]{a^m}=a^{m:n}$.

Al extraer la raíz de una potencia se puede dividir el exponente *del radicando por el índice de la raíz, si esa división se cumple enteramente.*

Ejemplos. 1) $\sqrt{x^4}=x^2$; 2) $\sqrt[3]{27y^6}=\sqrt[3]{3^3y^6}=3y^2$;
3) $\sqrt[4]{81a^{12}b^8}=\sqrt[4]{3^4a^{12}b^8}=3a^3b^2$.

Observación. Al resolver los ejemplos 2) y 3) se utilizaron las identidades (III) y (VI).

(VII) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$, es decir, *al extraer la raíz de una raíz se puede extraer la raíz de grado igual al producto de los índices de las dos raíces, permaneciendo el radicando sin variación.*

Frecuentemente se hace necesario utilizar la identidad (VII) leyéndola de derecha a izquierda; por ejemplo, si se dispone solamente de una tabla de raíces cuadradas o de una regla de cálculo, es conveniente reemplazar la extracción de raíz de cuarto grado por dos extracciones sucesivas de raíz cuadrada:

$\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}\approx\sqrt{1{,}414}\approx 1{,}19.$

De modo semejante

$\sqrt[8]{12}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}}}\approx\sqrt{\sqrt{3{,}46}}\approx\sqrt{1{,}86}\approx 1{,}36.$

Observación. La exactitud de las fórmulas (II) — (VII) se verifica con un mismo ejemplo: ambos miembros de cada igualdad se elevan a una misma potencia, debido a lo cual se obtienen expresiones idénticas.

§ 38. Extracción de la raíz cuadrada con un grado de exactitud prefijado

En la mayoría de los casos la raíz cuadrada de un número se puede extraer sólo aproximadamente. Vamos a demostrar como se realiza esta operación.

Supongamos que se quiere calcular $\sqrt{3}$ con la exactitud de hasta 0,001. Esto significa que se necesita hallar dos fracciones decimales, que se diferencian entre sí en 0,001, entre los cuadrados de las cuales está comprendido el número 3, es decir, el cuadrado de la fracción menor debe ser menor que 3, y el cuadrado de la fracción mayor debe ser mayor que 3. Se sabe que al elevar una fracción decimal al cuadrado el número de cifras decimales se duplica, por ejemplo

$(1{,}5)^2 = 2{,}25$; $(0{,}012)^2 = 0{,}000144$.

Por eso, se puede obtener tres cifras decimales en la raíz cuadrada sólo a condición de que el número subradical tenga seis cifras decimales, es decir, esté expresado en millonésimas. En el lugar de las cifras decimales que faltan escribimos ceros y utilizamos el método ordinario de extracción de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{3{,}00'00'00} \approx 1{,}732.$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\;\;1} \\
\hline
27 & 200 \\
7 & 189 \\
\hline
343 & 1100 \\
3 & 1029 \\
\hline
3462 & 7100 \\
2 & 6924 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{176 \text{ (resto)}}
\end{array}$$

La fracción 1,732 es el valor aproximado de $\sqrt{3}$ por defecto con la exactitud de hasta 0,001, puesto que $(1{,}732)^2 = 2{,}999824\ldots$ La fracción 1,733 es un valor aproximado de $\sqrt{3}$ por exceso con la exactitud de hasta 0,001, puesto que $(1{,}733)^2 = 3{,}003289\ldots$

E j e m p l o. Calcular $\sqrt{0{,}043818}$ con una exactitud de hasta 0,01. En este caso, en el número subradical conservamos sólo cuatro cifras decimales, las restantes cifras se eliminan:

$$\sqrt{0{,}04'38} \approx 0{,}209 \approx 0{,}21.$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\;\;4} \\
\hline
409 & 3800 \\
9 & 3681 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{119}
\end{array}$$

§ 39. Racionalización cuadrada de denominadores

Cuando hay que calcular aproximadamente la magnitud numérica de una fracción, que contiene en el denominador un radical, frecuentemente se hace necesario dividir por un número de muchas cifras, lo que es incómodo. Sin embargo, la fracción dada se puede transformar de manera que el denominador se convierta en un número racional. Esta transformación se denomina «racionalización de denominadores».

E j e m p l o 1. Calcular el valor de la fracción $1/\sqrt{3}$ con tres cifras significativas exactas.

Previamente multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

De la tabla de raíces cuadradas tomamos el valor aproximado de $\sqrt{3}$ con cuatro cifras significativas:

$$\sqrt{3}\approx 1{,}732.$$

En tal caso,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1{,}732}{3}\approx 0{,}577.$$

Aquí se divide mentalmente con facilidad, y, lógicamente, esto es más sencillo que dividir 1 por 1,732.

E j e m p l o 2. Calcular el valor numérico de la fracción $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ con la exactitud de hasta 0,001.

Multiplicamos el numerador y el denominador por $3+\sqrt{2}$;

$$\frac{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}\approx\frac{3\cdot 1{,}414+2}{7}=\frac{6{,}242}{7}\approx 0{,}892.$$

El cálculo sin la racionalización previa del denominador exige un gran esfuerzo debido a la inevitabilidad de la división por números de muchas cifras:

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\approx\frac{1{,}414}{3-1{,}414}=\frac{1{,}414}{1{,}586}\approx 0{,}892.$$

§ 40. Tipo elemental de radical. Semejanza de radicales

Se admite considerar a un radical de *tipo elemental* cuando: a) la expresión subradical no contiene fracciones; b) los factores se sacan fuera del signo radical; c) el índice le la raíz y el exponente del radicando se reducen a un factor común. Los siguientes ejemplos ilustran la reducción de los radicales a la forma elemental:

1) $\sqrt{32a^3b^4}=\sqrt{16a^2b^4 2a}=4ab^2\sqrt{2a};$

2) $\sqrt{\frac{8ab}{3c}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2ac\cdot 3c}{(3c)^2}}=\frac{2}{3c}\sqrt{6abc}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{ab}}=\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)\,a^2b^2}{a^3b^3}}=$

$=\frac{1}{ab}\sqrt[3]{(a^2+b^2)\,a^2b^2}$;

4) $xy\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\sqrt{x^2y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=\sqrt{xy^2-x^2y}=$

$=\sqrt{xy\,(y-x)}\quad (y>x>0)$.

DEFINICION. Dos o varios radicales se denominan *semejantes*, si se diferencian sólo por los coeficientes, pero tienen idénticas expresiones subradicales e iguales índices del radical o no difieren en nada. Serán semejantes, por ejemplo, $3\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; $a\sqrt{x+y}$ y $\frac{b}{c}\sqrt{x+y}$.

Frecuentemente los radicales aparentan ser no semejantes; sin embargo, después de reducirlos a la forma elemental se puede descubrir su semejanza.

Ejemplos. 1) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{\frac{1}{8}}$ son semejantes, puesto que $3\sqrt{\frac{1}{2}}=3\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$;

2) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$ son semejantes, puesto que

$\sqrt[3]{4a^4b^2}=a\sqrt[3]{4ab^2}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{4ab^2}{8a^3b^3}}=\frac{1}{2ab}\sqrt[3]{4ab^2}$.

Los radicales semejantes se reducen del mismo modo que los monomios racionales semejantes, lo que se aprecia de la siguiente comparación:

$3xy+5xy-6xy=2xy,\quad 3\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-6\sqrt{ab}=2\sqrt{ab}$.

$mx-nx+px=(m-n+p)\,x$,

$m\sqrt[3]{a\,(b+c)}-n\sqrt[3]{a\,(b+c)}+p\sqrt[3]{a\,(b+c)}=$

$=(m-n+p)\sqrt[3]{a\,(b+c)}$.

§ 41. Adición y sustracción de radicales

Al sumar o restar radicales se relacionan entre sí con el signo más o menos y se reducen a radicales semejantes, si éstos existen. Por ejemplo,

$$(2\sqrt{20}+5\sqrt{8})-\left(3\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{98}\right)=$$

$$=2\sqrt{20}+5\sqrt{8}-3\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{98}=$$

$$=4\sqrt{5}+10\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{5}+7\sqrt{2}=3{,}4\sqrt{5}+17\sqrt{2}.$$

§ 42. Multiplicación y división de expresiones irracionales más complejas

En el § 37 al estudiar las identidades fundamentales se demostró cómo se multiplican y se dividen los radicales en los casos elementales.

Al multiplicar y dividir polinomios irracionales se utilizan las mismas reglas que al multiplicar y dividir polinomios racionales.

Ejemplos.

1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})=$

$$=3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=$$

$$=21\cdot 2-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-10\cdot 3=12+\sqrt{6};$$

2) $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}=2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}}-x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}}=$

$$=\frac{2ab}{b}\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}=2a\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}.$$

§ 43. Transformación de un radical complejo

La expresión irracional de la forma

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

donde A y B son números racionales positivos, B no es cuadrado perfecto, se denomina *radical complejo*. Este radical puede ser transformado en la forma

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

La justeza de la fórmula (1) se puede verificar elevando al cuadrado ambos miembros, teniendo en cuenta que todas las radicales son aritméticas. Efectuemos esto para el caso en que se toman en todas partes los signos superiores. El cuadrado del primer miembro

$$\left(\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}.$$

El cuadrado del segundo miembro

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=A+\sqrt{A^2-(A^2-B)}=A+\sqrt{B}.$$

Puede creerse que esta transformación no es conveniente, puesto que el segundo miembro de la identidad contiene dos radicales complejas, y el primer miembro, sólo uno. No obstante, cuando la expresión A^2-B es un cuadrado perfecto, en el segundo miembro de la identidad obtenemos la suma o la diferencia de dos radicales simples, entonces tiene sentido utilizar la transformación del radical complejo.

Ejemplos.

1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}-\sqrt{\frac{-2\sqrt{4-3}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2});$

2) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$

§ 44. Potencia de exponente fraccionario

Definición 1. La potencia de *exponente fraccionario positivo*, es decir, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ (m y n son números enteros positivos), denota una raíz cuyo índice es igual a n, y la expresión subradical (radicando), igual a a^m

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\qquad(a>0).$$

Ejemplos. 1) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; 2) $(a+b)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(a+b)^2}$; 3) $(xy)^{\frac{1}{3}}=$ $=\sqrt[3]{xy}$.

Por el contrario, toda radical se puede representar en forma de potencia de exponente fraccionario (racional):

1) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{(x-y)}=(x-y)^{\frac{1}{2}}$, donde $x\geqslant y$;

3) $\sqrt[5]{b^3}=b^{\frac{3}{5}}$.

Definición 2. La potencia de *exponente fraccionario negativo*, es decir, la expresión $a^{-\frac{m}{n}}$ (m y n son números enteros positivos), denota la magnitud inversa de la expresión $a^{m/n}$:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{m/n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Las potencias de exponentes fraccionarios se prestan a las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación según las mismas reglas que las potencias de exponentes enteros, si las bases de las potencias son iguales entre sí.

Producto:

$$a^{m/n}a^{p/q}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[np]{a^{mq+pn}}=$$

$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

es decir, los exponentes también se suman al multiplicar las potencias de exponentes fraccionarios.

Ejemplo. $8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}\sqrt{8^3}=$

$$=\frac{1}{4}\cdot 8\sqrt{8}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}.$$

Ahora multipliquemos sin sustituir los factores por los radicales:

$$8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=8^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=8^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{8^5}=\sqrt[6]{2^{15}}=4\sqrt{2}.$$

División:

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=$$

$$=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

es decir, al dividir las potencias de exponentes fraccionarios se restan los exponentes.

Se deja a los estudiantes verificar que tanto en la potenciación de una potencia, como en la radicación de una potencia se convervan las reglas de operaciones anteriores con potencias.

Ejemplos.

1) $3^{\frac{1}{2}}:3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3^1=3;$

2) $(2^{-4})^{-\frac{1}{2}}=2^2=4;$

3) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}+256^{0,75}-3^{-1}+(4{,}5)^0=$

$=\left[\left(\frac{3}{10}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[4]{256^3}-\frac{1}{3}+1=\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}+(\sqrt[4]{256})^3+$

$+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}+4^3+\frac{2}{3}=68.$

§ 45. Ejemplos de todas las operaciones con radicales

Ejemplo 1. Simplificar la expresión

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),$$

$0<x<1.$

Realizamos las operaciones sucesivamente, comenzando con las expresiones encerradas entre paréntesis:

$$1)\ \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

A continuación simplificamos la expresión encerrada en el segundo paréntesis:

$$2)\ \sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(\sqrt{1-x^2}-1).$$

3) Multiplicamos los resultados de las operaciones anteriores:

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,\frac{1}{x}\,(\sqrt{1-x^2}-1)=\frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2}=$$

$$=\frac{1-x^2-1}{x^2}=-1.$$

Ejemplo 2. Simplificar y calcular la expresión

$$\frac{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{para} \quad z=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(a>0;\ \ n>m>0)$.

Calculamos al principio las dos expresiones

$$A=(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad B=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tenemos que

$$A=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}+1\right]\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[a^2\frac{(m+n)^2}{2mn}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}.$$

Análogamente hallamos B:

$$B=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2-a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2-2mn}{2mn}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{a^{-1}(n-m)^{-1}}{(2mn)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}.$$

Aquí al calcular la expresión $[m^2+n^2-2mn]^{-\frac{1}{2}}$ hay que tener en cuenta que $m^2+n^2-2mn=(m-n)^2=(n-m)^2$. Pero, $\sqrt{m^2+n^2-2mn}=\sqrt{(m-n)^2}=\pm(m-n)$, y puesto que $n>m$, el valor aritmético del radical

$$\sqrt{(m-n)^2}=n-m.$$

Después de calcular las magnitudes auxiliares A y B, tendremos:

$$\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}+\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}-\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}=\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n-m}\right)}{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n-m}\right)}=$$

$$=\frac{n-m+n+m}{n-m-n-m}=\frac{2n}{-2m}=-\frac{n}{m}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Calcular

1) 2^4, $(-3)^4$, 4^3, $(-5)^3$;

2) $13\cdot 2^3 - 9\cdot 2^3 + 15\cdot 2^3 + 6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$;

3) $a^2 + (-a)^2$, $(-2a)^2$, $(-2a)^3$, $(-a)^{2n}$; $(-a)^{2n+1}$;

4) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$.

2. Simplificar la expresión

$x^3 + 2x^2 - 3x - (-x)^3 + 3(-x)^2 - 5x + 2$.

3. Realizar las operaciones indicadas: $(3\cdot 4)^2(2\cdot 3\cdot 4)^3$; $(2xy)(-4xyz)^3$; $(-a)^4(2b)^4$, $(-2x)^3(-3y)^3$;

$24\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

4. Calcular: 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; 2) $(1{,}5)^4$; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2xy}{z}\right)^4$; 5) $\left(\frac{4ab}{3c}\right)^3$; 6) $\left(\frac{7}{2}\right)^3 : \left(\frac{7}{3}\right)^3$; 7) $\left(\frac{a}{2b}\right)^n\left(\frac{b}{3c}\right)^n\left(\frac{2c}{a}\right)^n$, 8) $\frac{(x^2-y^2)^n}{c^2-d^2}\times$ $\times\frac{(c+d)^n}{x-y}\frac{(c-d)^n}{x+y}$.

5. Calcular: 1) $(2^3)^3$; 2) $[(-3)^2]^3$; 3) $(x^{n-1})^2$; 4) $(x^2y^3)^{2n-1}$; 5) $(-b^2)^3$, 6) $(a^2)^3\cdot(a^3)^4$; 7) $\left(\frac{2x^2y^3}{-3z^5}\right)^4$; 8) $\left(\frac{a^7}{b^x}\right)^m(b^x)^m a^m$; 9) $\left(-\frac{3x^{n-1}}{4y^{n+1}}\right)^m$.

6. Simplificar la expresión $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3\left(\frac{1}{a+b}\right)^2\left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

7. Llevar el factor racional bajo el signo radical:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{0{,}6}$; 3) $4\sqrt{0{,}5}$; 4) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; 5) $x\sqrt{\frac{ab}{x}}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$;

7) $ab^2\sqrt{c}$; 8) $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; 9) $3\sqrt{3\frac{1}{3}}$; 10) $\frac{a}{2c}\sqrt{\frac{c}{a}}$; 11) $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}$;

12) $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a-b}}$; 13) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$; 14) $2a\sqrt[3]{b}$; 15) $xy\sqrt[3]{\frac{a}{xy}}$.

8. Sin extraer la raíz determinar ¿cuál de los números es mayor: 1) $2\sqrt{3}$ ó $3\sqrt{2}$? 2) $5\sqrt{3}$ ó $3\sqrt{10}$?

9. Transformar las siguientes raíces en la forma elemental:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{17}{81}}$; 3) $\sqrt{\frac{72}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 6) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$;

7) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 8) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; 9) $c\sqrt{\frac{x}{c^3}}$; 10) $2ax\sqrt{\frac{3}{2ax}}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$;

12) $\sqrt{2x^2-4x+2}$; 13) $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{2ab}{3m^2n}}$; 14) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$; 15) $b\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^2}}$; 16) $\sqrt[5]{\frac{mn}{8a^4b^3}}$.

10. Utilizando el valor aproximado de $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, calcular:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

11. Reducir a la forma elemental y revelar la semejanza:

1) $\sqrt{8}$ y $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{40}$ y $\sqrt{90}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ y $3\sqrt{18}$; 4) $\frac{2}{x}\sqrt{x^3y}$, $\frac{3}{y}\sqrt{xy^3}$ y $xy\sqrt{\frac{1}{xy}}$; 5) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ y $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{0{,}001xy^2}$ e $y\sqrt[3]{\frac{0{,}027x}{y}}$; 8) $\sqrt{\frac{c}{ac-bc}}$ y $\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

12. Sumar y restar las siguientes raíces:

1) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}$;

3) $(\sqrt{ab}-2a\sqrt{b})+(4a\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$;

4) $a\sqrt[3]{ab^4}+b\sqrt[3]{a^4b}+\sqrt[3]{a^4b^4}-3ab\sqrt[3]{ab}$;

5) $3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0{,}1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

6) $\sqrt{1-x^2}+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

7) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}}-\frac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b}+\frac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3}-b\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

13. Reducir a común índice las siguientes raíces:

1) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[6]{32}$; 3) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{3ab}$ y $\sqrt{2c}$.

14. Multiplicar y dividir los siguientes ejemplos:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{4a^3}$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$;

5) $\sqrt{2a}:\sqrt[4]{a}$; 6) $\sqrt[3]{16}:\sqrt{2}$; 7) $\sqrt[3]{2xy}:3\sqrt{xy}$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$.

15. Realizar las operaciones indicadas con las raíces:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4\cdot 5}$; 4) $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt[6]{2}$;

5) $\sqrt[5]{x^2}\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt{12}:\sqrt{13}$; 7) $2\sqrt{10}:\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2{,}5}$; 8) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$;

9) $4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$; 10) $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;

11) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$; 12) $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}):\sqrt[3]{2}$;

13) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 14) $(a-b\sqrt{c}+m\sqrt{b}):a\sqrt{bc}$;

15) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$; 16) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;
17) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{ab}$; 18) $(5-2\sqrt{3})\cdot(6+5\sqrt{3})$;
19) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})(8\sqrt{3}-3\sqrt{2})$; 20) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$;
21) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 22) $\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}$;
23) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$.

16. Elevar a potencia las siguientes expresiones:

1) $(2\sqrt{a})^2$; 2) $(\sqrt[3]{a})^4$; 3) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^4$; 4) $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$; 5) $(\sqrt[3]{3a^2})^9$;
6) $(ab\sqrt{c})^4$; 7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; 8) $(a-b\cdot\sqrt{x})^2$; 9) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;
10) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$; 11) $(a+\sqrt{4+a^2})^2$; 12) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;
13) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$; 14) $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$;
15) $(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})^2$; 16) $(\sqrt{2}p+\sqrt{3}q)^3$; 17) $(\sqrt{2p}+\sqrt{3q})^3$;
18) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^2(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})^2$; 19) $\left(\sqrt[n]{p^2-q^3}\right)^{2n}$;
20) $(\sqrt[n]{2^3})^{nm}$.

17. Simplificar los radicales: $\sqrt{\sqrt{18}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

18. Racionalizar los denominadores:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$;
7) $\frac{m}{\sqrt{\frac{p}{q}}}$; 8) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 10) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;
12) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; 13) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; 14) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$; 15) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
16) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$; 17) $\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 18) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;
19) $\frac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 20) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

19. Simplificar la expresión $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

20. En la expresión $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ sustituir x por $\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ y simplificar.

21. ¿Qué forma simple adquiere la expresión $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, si se sustituye

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right] \quad (0<b<a)?$$

22. Calcular el valor de y para $x=\frac{2ab}{b^2+1}$; si

$$y=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$

23. Simplificar la expresión

$$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}.$$

24. Calcular el valor de y para $x=\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}$, si

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

25. Simplificar las expresiones:

1) $\frac{a}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$;

2) $\frac{a^2}{2}\,\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)$;

3) $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

4) $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$;

5) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+\frac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

26. Escribir los siguientes radicales en forma de potencias de exponentes fraccionarios:

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{a^2}$; 3) $\sqrt[5]{x^3}$; 4) $\sqrt{a+b}$; 5) $\sqrt{a^2+b^2}$; 6) $\sqrt[3]{x-y}$;
7) $\sqrt[5]{ab^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{m+n}}$; 11) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-y}}$;
12) $\frac{3ab}{\sqrt[5]{(a+b)^2}}$; 13) $\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$.

27. Calcular, sustituyendo las potencias fraccionarias por los correspondientes radicales:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $16^{\frac{3}{4}}$; 4) $64^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 7) $(-2)^{-\frac{2}{3}}$;

8) $(x+y)^{\frac{2}{3}}$; 9) $(a-b)^{-\frac{3}{2}}$; 10) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 11) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-\frac{1}{5}}$;

12) $(125)^{\frac{2}{3}}+(0{,}01)^{-0{,}5}$; 13) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$.

28. Realizar las operaciones indicadas:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\cdot ab^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$; 4) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$;

5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 6) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 7) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

8) $\left(125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 9) $\left[\frac{1}{4}\left(0{,}027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0{,}0016^{\frac{3}{4}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$;

10) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$; 11) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\,a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$;

12) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\,\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$.

29. Simplificar las expresiones:

1) $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}-\dfrac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2(xy^{-1}+1)^2}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$;

2) $\left\{\left[\left(\dfrac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\dfrac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}}$;

3) $\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}$;

4) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$;

5) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$.

30. Calcular

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$$

para $x=\dfrac{1}{a-1}$ $(a\neq 1)$.

31. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}-2\sqrt[3]{xy}\right)^{6}$; 2) $\dfrac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^{4}\sqrt[5]{a^{-2}}}}$;

3) $\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)ab\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-1}+\sqrt[3]{ab^{2}}$ $(a\neq b)$;

4) $\left[\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}+3\sqrt{xy}\right]^{\frac{1}{2}}$ $(x>0;\ y>0)$.

CAPITULO VI

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES SOBRE FUNCIONES. TRINOMIO CUADRADO Y SU REPRESENTACION GRAFICA

§ 46. Introducción

Los conocimientos elementales sobre las funciones y sus gráficas ya fueron adquiridos en la escuela media. Por eso, en los primeros párrafos de este capítulo examinaremos solamente, en forma concisa, las nociones fundamentales y las definiciones. El nuevo material se expone detalladamente y se ilustra con una gran cantidad de ejemplos.

§ 47. Nociones fundamentales y definiciones

● DEFINICION 1. Una magnitud se denomina *constante* si en las condiciones de estudio dado (observación, experimento, etc.) conserva el mismo valor.

Ejemplos de magnitudes constantes: 1) la relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro; 2) la acelaración de la gravedad g en un punto dado de la superficie terrestre; 3) la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

● DEFINICION 2. Una magnitud se denomina *variable* si en estudio o proceso dado ella adquiere distintos valores.

Ejemplos de magnitudes variables: 1) la distancia que separa a un paracaidista de la superficie de la Tierra después de haberse lanzado del avión; 2) el ángulo visual bajo el cual se ve un objeto que se aleja del observador (avión, figura humana, tanque, etc.); 3) la velocidad de salida de un líquido del recipiente a través del orificio a presión variable (altura de caída); 4) la temperatura del aire en el transcurso de un día.

En ciertas condiciones una misma magnitud puede resultar constante y en otras, variable. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad g será una magnitud variable si se mide en distintas latitudes de la superficie terrestre: en el polo g es mayor que en el ecuador (para Moscú $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$).

Las magnitudes constantes se admiten en indicar con las

primeras letras de alfabeto latino: $a, b, c, \ldots$, las magnitudes variables, por x, y, z, u, v.
En matemáticas se apartan del sentido físico de las magnitudes variables que intervienen en uno u otro proceso, y se interesan sólo de la correlación entre los valores numéricos de las magnitudes variables. Esto conduce a una de las más importantes nociones de matemáticas, a la noción de *función*.

● DEFINICION 3. La magnitud y se denomina *función* de la variable x, si a cada valor de x del conjunto numérico dado corresponde, según cierta ley, un valor completamente determinado de y. La variable x se denomina *argumento* o *variable independiente*, la magnitud y, *variable dependiente* o *función*. Se dice que las variables x e y están relacionadas entre sí por una dependencia funcional, y se escribe $y = f(x)$ («y es igual a una función f de x»). Por la notación $y = f(x)$ se sobrentiende la regla por la cual a cada valor considerado de x corresponde un valor determinado de y; por ejemplo, si $y = \frac{x}{1+x^2}$, para hallar y hay que:

1) elevar al cuadrado el argumento x,
2) sumar la unidad al cuadrado del argumento,
3) dividir x por la suma $1 + x^2$.

Volviendo a los ejemplos considerados se puede decir que 1) la distancia que separa al paracaidista de la superficie de la Tierra es una función del tiempo;
2) el ángulo bajo el cual se ve el objetivo desde un punto dado, es función de la distancia hasta el objetivo;
3) la velocidad de salida del líquido del recipiente es función de la altura del nivel del líquido sobre el orificio, a través del cual se vuelca el líquido.

Observación. Existen funciones dependientes de dos, tres y más magnitudes variables.

E j e m p l o s. 1. La intensidad de la corriente I depende de la tensión E y de la resistencia R: $I = \frac{E}{R}$.
2. El volumen de un paralelepípedo rectangular es función de tres de sus medidas a, b y c: $v = abc$.
En adelante estudiaremos las funciones de un solo argumento.

§ 48. Métodos de planteo de las funciones

La correspondencia entre los valores de las variables x e y puede ser dada por distintos métodos.

1. Método tabular. La función puede ser dada mediante una tabla. Este método de dar las funciones consiste en que los valores numéricos se disponen en línea (o en columna) y ante cada valor del argumento se colocan los correspondientes valores de la función:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n	...
y	y_1	y_2	y_3	y_4	..	y_n	...

Por este principio se han construido las tablas ya conocidas de los cuadrados, cubos, raíz cuadrada, raíz cúbica, etc. De ordinario se forman las tablas para varias funciones; por ejemplo, en todas las guías técnicas se puede encontrar la siguiente tabla en la que el argumento está designado con la letra n en lugar de la notación ordinaria x.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi n^2}{4}$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1	0,785
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,500	3,142
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,333	7,069

Hemos mostrado sólo el comienzo de la tabla. Aquí se han tabulado 9 funciones distintas. En la primera columna están dispuestos los valores del argumento con iguales intervalos, es decir, a una unidad, para las nueve funciones. Consideramos que el empleo de esta tabla no presenta ninguna dificultad. Aunque la tabla está compuesta sólo para valores enteros del argumento n en los límites de 1 a 100 no obstante, presenta una gran ventaja: inmediatamente, sin cálculo alguno, hallamos el valor de cualesquiera de las nueve funciones. Por ejemplo, para $n = 3$ obtendremos $\sqrt[3]{10n} = \sqrt[3]{30} = 3{,}107$. Cabe decir que debido al estudio experimental de un fenómeno o proceso cualquiera (prueba de aviones, motores, rendimiento de semillas, etc.) siempre se establece la dependencia funcional entre variables en forma de tabla.

2. Método analítico. Se dice que una función está dada analíticamente, si se da la fórmula que indica qué operaciones y en qué orden hay que realizar con los valores del argumento x y ciertos datos numéricos, para obtener los correspondientes valores de la función.

Ejemplos. 1. Si $y=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$, para el valor dado de $x=5$ la función y es igual al valor aritmético de la raíz cuadrada del cociente: $\sqrt{\frac{5}{5^2+1}}=\sqrt{\frac{5}{26}}\approx 0{,}437$.
2. Si $y = x^3 + 5x^2 - x + 4$, para $x = 2$ hallamos el correspondiente valor de la función, que designamos del siguiente modo:

$y|_{x=2} = y(2) = 2^3 + 5\cdot 2^2 - 2 + 4 = 30.$

En general la notación simbólica $f(a)$ o $y(a)$ denota el valor de la función $f(x)$ que ella adquiera para un argumento igual al número a. De otro modo, se puede decir que $f(a)$ es un valor particular de la función correspondiente al valor del argumento $x = a$.
En ciertos casos la función no se da con una fórmula, sino con varias, para los distintos intervalos de variación del argumento.

Ejemplo. $y=\begin{cases} 2x-1, \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -x+8, \text{ si } 3< x\leqslant 5. \end{cases}$

El planteo de la función mediante una fórmula tiene la ventaja de que por la fórmula los valores de la función pueden ser calculados, rápidamente, para cada valor admisible de x con la exactitud necesaria, si se utilizan los medios de la técnica de cálculo moderna.
El inconveniente del método analítico es que por la fórmula no se puede juzgar sobre carácter de variación de la función. A pesar de esta desventaja el método analítico predomina en las matemáticas, a él está adaptado el aparato matemático de estudio de la función.
3. Método gráfico. La dependencia entre el argumento x y la función y se puede representar en forma de cierta línea (generalizando, por una curva); la abscisa de cualquier punto de esta curva representa cierto valor del argumento x; la ordenada, el correspondiente valor de la función y.

● DEFINICIÓN. Se denomina *gráfica de la función* $y = f(x)$ el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la igualdad $y = f(x)$.

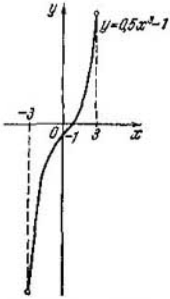


Fig. 18.

Para trazar la gráfica o curva de la función, dada por la fórmula, corrientemente se procede del siguiente modo:
1) Se forma la tabla de los valores del argumento x y los correspondientes valores de la función y.
2) Se elige el sistema de coordenadas xOy y la unidad de escala de cada uno de los ejes (no es indefectible que sea la misma para ambos ejes).
3) Cada par de valores de x e y, puestas en la tabla, se toma como coordenadas del punto y se trazan estos puntos.
4) Los puntos trazados se unen a mano o mediante una plantilla de dibujo.

Es evidente que cuanto más puntos se hayan trazado, tanto más exacta es la gráfica (curva) de la función.

El método gráfico de dar la función es cómodo pues muestra claramente el modo de variación de la función: en qué intervalos de variación del argumento la función crece y en cuáles decrece, cuando la función tiende a cero.

La representación gráfica de la dependencia funcional se utiliza profusamente en la ciencia y la técnica moderna, donde los gráficos son producidos por los autorregistradores. Veamos algunos ejemplos:
1) En medicina el trabajo del corazón se juzga por el cardiograma, producido por el *cardiógrafo*.
2) El *sismógrafo* reproduce las oscilaciones de la corteza terrestre; gracias a él se puede determinar el lugar del terremoto y su intensidad.
3) El *vibrómetro* registra las oscilaciones de diferentes construcciones, por ejemplo, puentes, buques, etc.

Ejemplos semejantes se pueden citar de los más variados campos de la ciencia.

El método gráfico de representación de la función presenta inconvenientes como:
1) la precisión relativamente pequeña con la que se puede leer los valores del argumento y de la función según la gráfica;
2) la limitación del intervalo en el que puede ser construida la curva.

E j e m p l o. Trazar la curva de la función $y = 0{,}5x^3 - 1$ en el segmento $[-3, 3]$.
Formemos la tabla de valores

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1
$y=0{,}5\,x^3-1$	$-14{,}5$	$-8{,}8$	-5	$-2{,}7$	$-1{,}5$

x	0	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y=0{,}5\,x^3-1$	-1	$-\frac{1}{2}$	$0{,}7$	3	$6{,}8$	$12{,}5$

Por los 11 puntos obtenidos trazamos una curva suave denominada *parábola cúbica* (fig. 18).

§ 49. Región de definición de la función

Se denomina *región de definición* de una función el conjunto de puntos del eje numérico, en los que la función tiene valores reales completamente definidos. Aclaremos lo dicho con una serie de ejemplos.

E j e m p l o 1. Hallar la región de definición de la función $y = 1 - x^2$. Para cualquier valor real de x la función y adquiere también valores reales; por eso, su región de definición es todo el eje numérico (de abscisas), o el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

E j e m p l o 2. $y=\frac{1}{1-x^2}$.
La función dada está definida para valores del argumento $x \neq \pm 1$; su región de definición se compone de tres intervalos:

$(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Ejemplo 3. $y=\sqrt{9-2x}+\sqrt{x-3}$.
La región de definición de la función dada puede ser hallada con la resolución del sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 9-2x\geqslant 0, \\ x-3\geqslant 0. \end{cases}$$

La región buscada se expresa del siguiente modo: $3\leqslant x\leqslant$ $\leqslant 4{,}5$.

Ejemplo 4. $f(x)=\sqrt[4]{-x}+\sqrt{x}$.
Los radicandos no deben ser negativos, es decir,

$$\begin{cases} -x\geqslant 0, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

Este sistema de desigualdades se satisface con el único valor de $x=0$. De este modo, la función dada está definida sólo en un punto $x=0$, además $f(0)=0$.
Cuando la función expresa una dependencia entre variables en condiciones concretas de cierta investigación, se puede considerar que la región de definición de la función y *la región de los valores admisibles del argumento* no es lo mismo.
Así, por ejemplo, para la caída libre de un cuerpo (sin considerar la resistencia del aire), el camino recorrido S en función del tiempo t se expresa por la función $S=\frac{gt^2}{2}$, la que está definida (según el sentido de la variable t) para $t\geqslant 0$. Si nos abstraemos de la naturaleza física de las variables t y S, en tal caso la función de tipo $S=\frac{gt^2}{2}$ está definida en todo el eje numérico (t).

§ 50. Algunas propiedades de las funciones utilizadas al construir las gráficas

La construcción gráfica de la función se simplifica si por la ecuación $y=f(x)$ se pueden descubrir algunas propiedades de la función dada.

● DEFINICION 1. La función $f(x)$ se denomina *par* si el cambio de signo del argumento no modifica el valor de la función, es decir, $f(-x)=f(x)$.
La gráfica de la función par es una curva simétrica con respecto al eje de ordenadas (fig. 19).

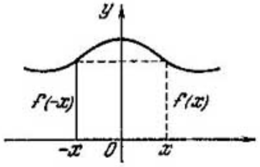


Fig. 19.

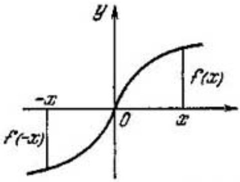


Fig. 20.

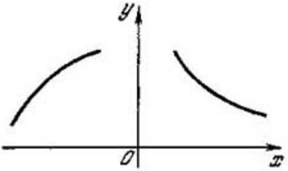


Fig. 21

E j e m p l o s de funciones pares. 1) $y = 3 - x^2$; 2) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 3) $y = \sqrt{9 - x^2}$.

● DEFINICION 2. La función $f(x)$ se denomina *impar*, si el cambio de signo del argumento modifica solamente el signo de la misma función sin variar su magnitud absoluta, es decir,

$$f(-x) = -f(x).$$

La gráfica de la función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas (fig. 20).

E j e m p l o s de funciones impares. 1) $y = 3x$; 2) $y = \frac{1}{x}$;

3) $y(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x$.

De acuerdo a la definición, la función impar (ejemplo 3) se verifica del siguiente modo:

$$y(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 5(-x) = -\left(\frac{1}{2}x^3 - 5x\right) = -y(x).$$

Sin embargo, existen funciones, como, por ejemplo, $y = 2x + 1$ ó $y = x^2 - x + 3$, que no son ni pares, ni impares.

● DEFINICION 3. Una función se llama *creciente* en un intervalo dado si al valor mayor del argumento de este intervalo le corresponde el valor mayor de la función, La gráfica de una función creciente es una curva ascendiente, si se desplaza por el eje Ox en sentido positivo (fig. 21, izquierda).

● DEFINICIÓN 4. Una función se denomina *decreciente* en un intervalo si al valor mayor del argumento de este intervalo le corresponde el valor menor de la función.
La gráfica de la función decreciente es una curva descendiente, si se mira de izquierda a derecha (fig. 21, derecha).

Ejemplo 1. Demostrar que la función $y = kx + b$, para $k > 0$ crece, y para $k < 0$ decrece.
Supongamos que x_1 y x_2 son dos valores del argumento, además $x_2 > x_1$. Hay que cerciorarse de que $y_2 > y_1$ para $k > 0$ e $y_2 < y_1$ para $k < 0$.
Al valor del argumento x_1 le corresponde el valor de la función

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Al valor del argumento x_2 le corresponde

$$y_2 = kx_2 + b.$$

Restando la primera igualdad de la segunda, hallamos:

$$y_2 - y_1 = k (x_2 - x_1).$$

Cuando $k > 0$ el segundo miembro de la igualdad es positivo, como producto de dos números positivos, por lo que también el primer miembro es positivo, es decir, $y_2 - y_1 > 0$, o $y_2 > y_1$, y esto precisamente denota que la función y crece.
Si $k < 0$ tendremos que: $k (x_2 - x_1) < 0$, es decir, $y_2 - y_1 < 0$, ó $y_2 < y_1$; por lo tanto, la función $y = kx + b$ decrece.

§ 51. Función lineal y su representación gráfica

● DEFINICIÓN. La función de tipo $y = kx + b$ se denomina *lineal*. En una serie de ejemplos de física, mecánica y otras ciencias se puede indicar donde las dependencias entre variables se expresan por funciones lineales. Veamos algunos ejemplos. 1) Por acción de la carga variable x la longitud de una barra que trabaja a la tracción varía en los límites de la deformación elástica conforme a la ley

$$l = l_0 + kx,$$

donde l_0 es la longitud inicial (sin carga); k, el alargamiento por unidad de carga.

2) Si calentamos una masa de gas dada v_0, tomada a la temperatura de 0° C, a la presión constante p el volumen de gas v aumentará al elevarse la temperatura t por la ley

$$v = v_0 + v_0\alpha t = v_0 (1 + \alpha t),$$

donde α es el coeficiente de dilatación cúbica de dicho gas.

3) El camino recorrido por un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme, varía según la ley

$$S = v_0 t + S_0,$$

donde v_0 es una constante de la velocidad de movimiento, S_0 es el camino inicial.

Formemos la tabla de valores de la función lineal para los valores dados de x_1, x_2, x_3, . . . del argumento por la fórmula $y = kx + b$:

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

Representemos cada par de números $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$, ... en forma de punto en el plano. Obtendremos una serie de puntos: M_1, M_2, M_3, . . .

Si trazamos una recta por cualesquiera de los dos puntos obtenidos, resulta que esta recta pasa también por los restantes puntos construidos. Sin embargo, no tenemos la certidumbre de que todo nuevo punto, que aún no se ha construido, pero que puede ser trazado si se continúa la tabla, se encuentre sobre esta recta. Esto aún lo tendremos que demostrar.

T e o r e m a. *Todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = kx + b$, se encuentran sobre una recta.*

Tomemos dos puntos M_0 y M_1, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = kx + b$. Demostremos que un tercer punto cualquiera M_2 también se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos M_0 y M_1, si las coordenadas del punto M_2 satisfacen la ecuación $y = kx + b$.

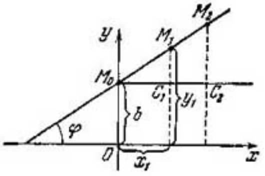


Fig. 22.

■ DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las coordenadas de los puntos M_0 $(0;\ b)$ y M_1 $(x_1;\ y_1)$ satisfacen la ecuación dada $y = kx + b$. En tal caso tendremos dos identidades:

$$b = k\cdot 0 + b, \tag{1}$$

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2}$$

Restamos miembro a miembro de la igualdad (2) la igualdad (1). Para $x_1 \neq 0$ obtendremos $y_1 - b = kx_1$, de donde

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = k. \tag{3}$$

Trazamos la recta por los puntos M_0 y M_1 (fig. 22). Demostremos que el punto M_2 está en la recta M_0M_1.
Según la condición tenemos $y_2 = kx_2 + b$ y además $b = k\cdot 0 + b$, de donde $y_2 - b = kx_2$, es decir,

$$\frac{y_2 - b}{x_2} = k. \tag{4}$$

Comparando las igualdades (3) y (4), obtendremos

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2}. \tag{5}$$

La igualdad (5) denota que las relaciones de los catetos semejantes de los triángulos rectángulos $M_0C_1M_1$ y $M_0C_2M_2$ son iguales (fig. 22), por lo cual los triángulos son semejantes. De la semejanza se deduce que el ángulo $M_1M_0C_1$ es igual al ángulo $M_2M_0C_2$, y por eso los lados M_0M_2 y M_0M_1 se confunden, o, dicho de otro modo, los tres puntos M_0, M_1 y M_2 se encuentran sobre una recta.
Ahora queda por demostrar que cualquier punto M_3, cuyas coordenadas no satisfacen la ecuación $y = kx + b$ no se encuentran sobre la recta M_0M_2. Proponemos la demostración de esto último al lector.
Cabe señalar que la constante k se denomina *coeficiente angular* de la recta (pendiente) y caracteriza la velocidad de un

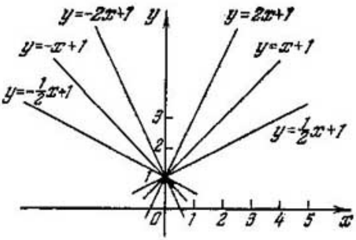


Fig. 23.

proceso uniforme que está representado por una función lineal; la magnitud b, obtenida como valor de la función para $x = 0$, denota el segmento que se corta en el eje de ordenadas *).

Conforme a lo expresado en el § 50, cuando $k > 0$ la función lineal crece monótonamente, cuando $k < 0$, decrece monótonamente. Para construir la gráfica es suficiente calcular las coordenadas de dos puntos. Determínese por la fig. 23 como influye la magnitud del coeficiente angular k sobre la posición de la recta con respecto al eje de abscisas.

§ 52. Trinomio cuadrado. Introducción

En los distintos campos de la ciencia y la técnica se trata con magnitudes variables relacionadas entre sí por una dependencia funcional de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Ejemplos 1. El camino recorrido por un cuerpo con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o uniformemente retardado se expresa por la fórmula

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t + S_0,$$

donde t es el tiempo; S, es el camino recorrido; S_0, el camino inicial; v_0 la velocidad inicial; a, la aceleración.

2. La dependencia entre el diámetro del círculo d y su superficie F se expresa por la fórmula

$$F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

3. La resistencia ejercida por el medio, por ejemplo, por el

*) Corrientemente b se llama ordenada en el origen. (*Nota del T.*)

aire, al movimiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado de la velocidad: $f = kv^2$. Esta correlación se produce, por ejemplo, durante el movimiento de un avión en el aire. En los ejemplos 2) y 3) tenemos un caso particular de la dependencia funcional $y = ax^2 + bx + c$, cuando $b = c = 0$

● DEFINICION. La función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se llama *función de segundo grado o trinomio cuadrado*. Los tres ejemplos antes expuestos de dependencias funcionales han sido ejemplos de funciones de segundo grado *). El estudio de las propiedades del trinomio cuadrado lo comenzamos con casos particulares y la construcción de las correspondientes curvas.

§ 53. Representación gráfica de la función $y = ax^2$

Por la ecuación se encuentran fácilmente las siguientes propiedades:

1) La función está definida para cualquier valor real de x.

2) La función ax^2 es par, puesto que $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2$. Por lo tanto, la curva es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

3) La función se anula si $x = 0$, es decir, la curva pasa por el origen de coordenadas.

4) Para $a > 0$ la función crece en el semieje positivo y decrece en el semieje negativo.

En efecto, supongamos que x_1 y x_2 son dos valores positivos del argumento ($x_2 > x_1$), en tal caso $y_2 > y_1$, ya que la diferencia $a(x_2^2 - x_1^2) > 0$, como producto de dos números positivos.

En el semieje negativo a un número negativo mayor corresponde un cuadrado menor de este número. (Por ejemplo, $-2 > -3$, pero $(-2)^2 < (-3)^2$.) Por lo tanto, $a(x_2^2 - x_1^2) < 0$ para $a > 0$.

Basándonos en los resultados del análisis, se puede construir la gráfica de la función.

● DEFINICION. La gráfica de la función $y = ax^2$ se llama *parábola*. En la fig. 24 se muestran tres parábolas distintas:

$$1)\ y = x^2,\quad 2)\ y = 2x^2,\quad 3)\ y = \frac{1}{2}x^2.$$

Aclaremos qué función cumple la magnitud numérica del coeficiente a para x^2. Para ello igualemos las ordenadas de

*) Se conocen también como trinomios de segundo grado (*Nota del T.*)

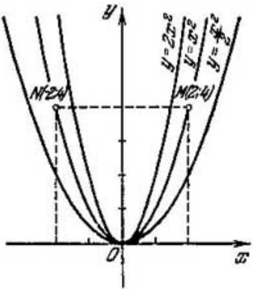


Fig. 24.

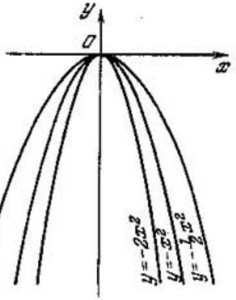


Fig. 25.

dos parábolas $y = x^2$ y $y = 2x^2$, correspondientes a una misma abscisa, igual a x_0, es decir, las magnitudes $y_1 = x_0^2$, $y_2 = 2x_0^2$. Obtenemos que $\frac{y_2}{y_1} = 2$ ó $y_2 = 2y_1$.

De este modo, *todas las ordenadas de la parábola* $y = 2x^2$ *son dos veces mayores que las ordenadas de la parábola* $y = x^2$, *tomadas para iguales abscisas*; esto permite construir fácilmente la gráfica de $y = 2x^2$ conforme a la gráfica obtenida de $y = x^2$. Para ello, todas las ordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2$ hay que extenderlas en el sentido positivo del eje Oy, aumentándolas al doble. Análogamente, la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ se puede obtener de la gráfica de $y = x^2$ reduciendo todas las ordenadas dos veces, lo que está representado en la fig. 24. Para obtener la gráfica de la función $y = -ax^2$, teniendo la gráfica de la función $y = ax^2$, se representa esta última simétricamente con respecto al eje Ox, puesto que para iguales valores de x las ordenadas de $y_1 = ax^2$ e $y_2 = -ax^2$ se diferencian sólo por los signos.

En la fig. 25 se muestran las parábolas $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ como imágenes especulares, con respecto al eje Ox, de las parábolas: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

E j e m p l o. Hallar $\sqrt{10}$ utilizando la gráfica de $y = x^2$. Trazamos por el eje Oy hacia arriba del origen de ordenadas el segmento OB, igual a 10 unidades de la escala, y por el punto B trazamos una recta paralela al eje Ox. Supongamos

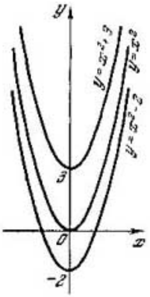


Fig. 26.

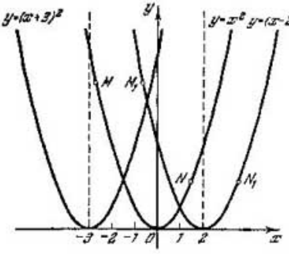


Fig. 27.

que M es un punto de intersección de esta recta con la parábola en el primer cuadrante. La abscisa de este punto nos da precisamente el valor aproximado de $\sqrt{10}$.

§ 54. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + n$

Si transportamos la parábola $y = ax^2$ paralelamente a sí misma en n unidades hacia arriba en dirección positiva del eje Oy (para $n > 0$), la nueva ecuación de la curva será $y = ax^2 + n$, ya que por esta traslación todas las ordenadas aumentaron en una misma magnitud, y las abscisas quedaron como antes. Cuando $n < 0$ se traslada paralelamente en dirección negativa del eje Oy, en otras palabras, la curva se hace descender n unidades. En la fig. 26 se muestran las transformaciones correspondientes para $n = 3$ y $n = -2$.

§ 55. Representación gráfica de la función $y = (x - m)^2$

Desplazamos la parábola $y = x^2$ a lo largo del eje Ox, en dirección positiva, a una magnitud igual a dos unidades de escala (fig. 27). En tal caso el punto M se traslada al punto M_1: el punto N, al punto N_1 y lo mismo ocurrirá con cualquier otro punto de la gráfica. Con esta transformación las abscisas de los puntos M_1 y N_1 aumentan dos unidades en comparación con las abscisas de los puntos M y N, y las ordenadas permanecen invariables. De aquí se deduce que la ecuación de la parábola en la nueva posición con respecto al sistema de coordenadas debe ser $y = (x - 2)^2$. De manera semejante, al desplazarse la parábola a tres unidades de

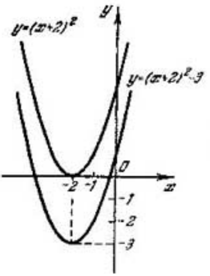


Fig. 28.

escala en dirección negativa del eje Ox, la nueva ecuación de la parábola será $y = (x + 3)^2$, puesto que con tal movimiento la abscisa de cada punto disminuyó tres unidades, en tanto que las ordenadas no variaron. Está claro que tenemos la siguiente condición general. La gráfica de la función $y = (x - m)^2$ puede ser obtenida con un desplazamiento de la parábola $y = x^2$ a $|m|$ unidades de escala a derecha a lo largo del eje Ox, si $m > 0$, y a izquierda, si $m < 0$.

Observación. La gráfica de la función $y = a(x - m)^2$ puede ser obtenida de un modo análogo de la gráfica de la función $y = ax^2$.

§ 56. Representación gráfica de la función $y = (x - m)^2 + n$

El paso de la parábola $y = x^2$ a la gráfica de la función $y = (x - m)^2 + n$ se puede realizar en dos etapas:
1) desplazando la parábola $y = x^2$ a la magnitud m a lo largo del eje Ox, por lo que obtenemos la gráfica de la función

$y = (x - m)^2$;

2) trasladando la curva $y = (x - m)^2$, paralelamente a sí misma, a la magnitud n (es decir, en $|n|$ hacia arriba, si $n > 0$, y hacia abajo, si $n < 0$).
En la fig. 28 se muestra el trazado de la curva $y = (x + 2)^2 - 3$.
1) Desplazamos la parábola $y = x^2$ a dos unidades a lo largo del eje Ox en dirección negativa; obtenemos la gráfica de la función

$y = (x + 2)^2$.

2) Trasladamos paralelamente a tres unidades hacia abajo la parábola $y = (x + 2)^2$, lo que nos conduce a la gráfica de la función inicial

$$y = (x + 2)^2 - 3.$$

En general, la gráfica de la función $y = (x - m)^2 + n$ es una parábola, cuyo eje de simetría (denominado también *eje de la parábola*) es paralelo al eje de ordenadas, y el *vértice* se encuentra en el punto $C\ (m;\ n)$.

§ 57. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$

Demostremos que el trinomio cuadrado siempre puede transformarse en la forma $y = a\,(x - m)^2 + n$.
Tenemos que:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[x^2 + 2x\,\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Si designamos $-\frac{b}{2a}$ por m; $\frac{4ac - b^2}{4a}$ por n, el trinomio toma finalmente la forma $y = a\,(x - m)^2 + n$.
Esta transformación permite construir inmediatamente la gráfica de la función según la gráfica de $y = ax^2$ obtenida.

E j e m p l o. $y = x^2 + 4x - 1$.
Transformemos el segundo miembro:

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3,$$

$y = (x + 2)^2 - 3$ (véase la fig. 28).

§ 58. Resumen general sobre el trinomio cuadrado

Hemos estudiado el trinomio cuadrado (función de segundo grado) $y = ax^2 + bx + c$, comenzando de los casos particulares:

1) $y = ax^2$ $(b = c = 0,\ a \neq 0)$;
2) $y = ax^2 + c$ $(b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$;
3) $y = ax^2 + bx$ $(c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$;

y, por último, su forma entera

4) $y = ax^2 + bx + c$, cuando a, b, y c son distintos de cero.

En los cuatro casos considerados las gráficas de las

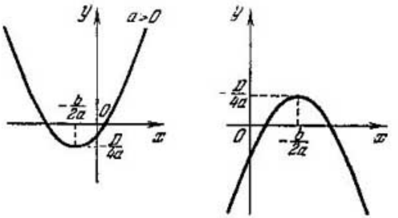


Fig. 29.

funciones representan una misma curva, la parábola, pero dispuesta de distinta manera con respecto a los ejes coordenados. Por la gráfica podemos seguir fácilmente la marcha de la variación de la función y establecer las propiedades de la misma. Las propiedades de la función $y = ax^2$ las establecimos analíticamente, es decir, por la ecuación, antes de construir la curva.

No nos vamos a detener a establecer las propiedades analíticas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Sin embargo, podemos establecer algunas de estas propiedades por la gráfica (fig. 29). Con esto se justificará la conveniencia de reducir el trinomio cuadrado $y = ax^2 + bx + c$ a la forma

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

1) La función $y = ax^2 + bx + c$ está definida en todo el eje de abscisas, es decir, para cualquier valor real del argumento.

2) Para $a > 0$ en el intervalo $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)$ el trinomio decrece monótonamente, en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$, crece monótonamente.

3) En el punto $x = -\frac{b}{2a}$ el trinomio tiene el menor valor $(a > 0)$, igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

4) Para $a < 0$ el trinomio crece en el intervalo $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)$ y decrece en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$, alcanzando en

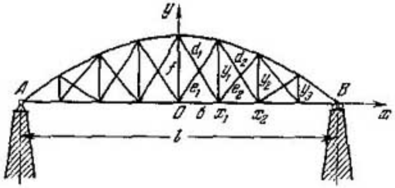


Fig. 30.

el punto $x = -\frac{b}{2a}$ su valor máximo, que es igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

§ 59. Problemas de trinomio cuadrado

▶ Problema 1. De todos los rectángulos de perímetro dado $p = 24$ (m) hallar aquel cuya superficie sea la mayor. Supongamos que x es la base del rectángulo, en tal caso la altura es igual a $(12 - x)$ y la superficie

$$y = x(12 - x) = 12x - x^2 = 36 - (x - 6)^2.$$

Está claro que, para $x = 6$ tendremos el mayor valor de la superficie $y = 36$, y el rectángulo es un cuadrado.

▶ Problema 2. En la fig. 30 se ha representado una viga parabólica de luz $l = 40$ m y flecha $f = 5$ m. La viga está dividida en ocho partes (paneles) iguales en anchura. Calcular las longitudes de los montantes y_1, y_2 e y_3.
Formemos la ecuación de la parábola AB: ésta debe tener la forma $y = ax^2 + c$, donde $a < 0$. El término independiente $c = f = 5$. Las coordenadas del punto B son: $x_B = \frac{l}{2} = 20$, $y_B = 0$. Conociendo las coordenadas del punto B se puede determinar el coeficiente a: en efecto, de $0 = a \cdot 20^2 + 5$ obtenemos $a = -\frac{1}{80}$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola AB toma la forma.

$$y = -\frac{1}{80}x^2 + 5.$$

La longitud del montante y_1 es igual a la ordenada de la parábola, cuando la abscisa $x_1 = \frac{20}{4} = 5$, es decir,

$$y_1 = -\frac{1}{80} \cdot 5^2 + 5, \quad y_1 \approx 4{,}7.$$

Análogamente obtenemos

$y_2 = y(10) = -\frac{1}{80}\cdot 10^2 + 5, \quad y_2 = 3{,}75;$

$y_3 = y(15) = -\frac{1}{80}\cdot 15^2 + 5, \quad y_3 \approx 2{,}2.$

Problema 3. Hallar el valor mínimo de la función $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. El trinomio cuadrado, que se encuentra bajo el signo radical, alcanza el valor mínimo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$; en este caso $a = 1$, $b = 1$, $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, y el menor valor del trinomio $x^2 + x + 1$ es igual a

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}.$

Al menor valor de la expresión subradical corresponde el menor valor de la raíz aritmética.

Por lo tanto, $y_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$

§ 60. Representación gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$. Construcción de gráficas de funciones más complejas

Construyamos la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, que frecuentemente encontramos en la práctica.

Establezcamos al principio algunas propiedades de esta función.

1) La función está definida para todos los valores reales de $x \neq 0$. Si $x = 0$ la función es indeterminada (¡no se puede dividir por cero!). De este modo, la región de definición se compone de dos intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

2) La función es impar, puesto que $f(-x) = -f(x)$. Por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas. Por eso, es suficiente considerar esta función sólo para $x > 0$.

3) Si $x > 0$ la función *decrece* con el crecimiento de x. En efecto, supongamos que $x_2 > x_1 > 0$, en tal caso $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$, es decir, $y_2 < y_1$.

Formemos la tabla de valores de la función

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...
y	...	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

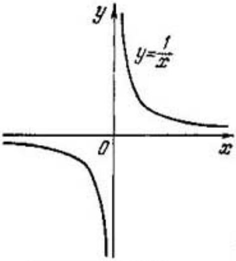


Fig. 31

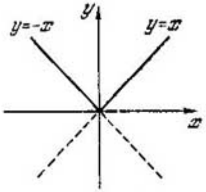


Fig. 32.

En la fig. 31 se muestra la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$. Esta curva se denomina *hipérbola equilátera*. Está compuesta de dos ramas situadas en los cuadrantes primero y tercero. La misma forma tiene también la gráfica de la función $y = \frac{a}{x}$ para $a > 0$; si $a < 0$, obtenemos una hipérbola cuyas ramas se encuentran en los cuadrantes segundo y cuarto. En los párrafos anteriores se construyeron las gráficas de las funciones elementales, es decir, de la función lineal y del trinomio cuadrado (función de segundo grado). Veamos ahora con algunos ejemplos, como se pueden construir las gráficas de otras funciones, más complejas por su modo de planteo.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de la función: $y = |x|$.
1) Si $x \geqslant 0$, tendremos que $|x| = x$ y nuestra función $y = x$, es decir, la curva buscada coincide con la bisectriz del primer ángulo coordenado.
2) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ e $y = -x$. Para valores negativos del argumento x, la gráfica de dicha función es una recta $y = -x$, es decir, la bisectriz del segundo ángulo coordenado.
De este modo, la gráfica buscada es una línea quebrada, compuesta de dos semirrectas (fig. 32).
Comparando las dos gráficas: $y = x$ e $y = |x|$ deducimos que la segunda se obtiene de la primera, como imagen especular con respecto al eje Ox, de aquella parte de la primera gráfica que se encuentra bajo el eje de abscisas. Esta situación deriva de la definición de magnitud absoluta.

Ejemplo 2. $y = |x - 2|$.
Al principio construimos la gráfica de la función $y = x - 2$ (fig. 33), que corta el eje de abscisas en el punto $x = 2$. La

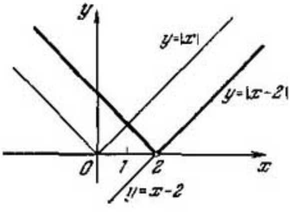


Fig. 33.

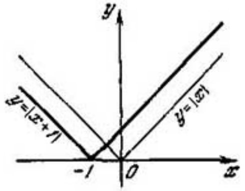


Fig. 34.

parte de la gráfica que se encuentra bajo el eje de abscisas lo representamos especularmente con respecto al eje Ox; esto será precisamente la gráfica $y = |x - 2|$.

Se nota fácilmente que si se desplaza la gráfica $y = |x|$ a dos unidades en dirección positiva a lo largo del eje Ox, obtendremos una nueva gráfica $y = |x - 2|$. De un modo semejante la gráfica $y = |x + 1|$ se obtiene de la gráfica $y = |x|$ trasladándola paralelamente en dirección negativa del eje Ox a una unidad de escala (fig. 34).

Ejemplo 3. $y = \frac{x}{|x|}$.

1) Para todos los valores de $x < 0$ tendremos $|x| = -x$ y por eso $y = \frac{x}{-x} = -1$.

2) Para todos los valores de $x > 0$ se tendrá $y = \frac{x}{x} = 1$.

De este modo

$$y = \begin{cases} 1 \text{ para } x > 0, \\ -1 \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ la función dada es indeterminada, puesto que la expresión $\frac{0}{0}$ se considera indeterminada. En la fig. 35 se representa la gráfica de la función.

Ejemplo 4. $y = x \cdot |x|$.

Es evidente que

$$y = \begin{cases} -x^2 \text{ para } x \leqslant 0, \\ x^2 \text{ para } x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es una combinación de la mitad izquierda de la parábola $y = -x^2$ con la mitad derecha de

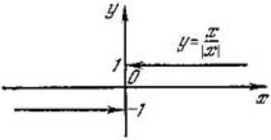


Fig. 35.

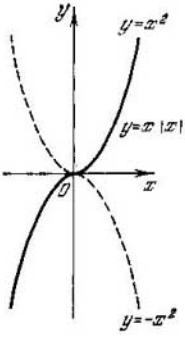


Fig. 36.

la parábola $y = x^2$ (fig. 36). Por la mitad izquierda de la parábola $y = -x^2$ sobreentendemos su parte, que corresponde a las abscisas negativas. Análogamente, la mitad derecha de la parábola $y = x^2$ es la parte que corresponde a las abscisas positivas.

▲ **Ejercicios**

1. Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Hallar $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Hallar la magnitud de la fracción $\frac{f(2)}{\varphi(2)}$ y del producto $f(1)\,\varphi(3)$, si $f(x)=2x+1$, $\varphi(x)=x^2+4$.

3. Hallar la región de definición de cada una de las siguientes funciones:

1) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\sqrt{2x+1}$; 3) $y=\sqrt{-x}$; 4) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$;

5) $y=\sqrt{x^2-4}$; 6) $y=\frac{1}{2x-3}$; 7) $y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}$.

4. Indicar cuáles de las funciones dadas a continuación son pares; cuáles, impares, y cuáles, ni unas, ni otras:

1) $y=x^4+1$; 2) $y=x^2+x$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=\frac{x}{x^2-4}$;

5) $y=\frac{x-3}{x+1}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 7) $y=\frac{x-x^3}{1+x^2}$.

5. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}$; 3) $y=\frac{2x+1}{x+2}$; 4) $y^2=x^3$.

6. Transportar la parábola $y=x^2$ paralelamente a sí misma a: 1) una unidad hacia arriba; 2) dos unidades hacia abajo; 3) cinco unidades hacia arriba. Para cada caso escribir la nueva ecuación de la parábola.

7. ¿Cómo se dispone el vértice de la parábola $y=x^2+q$ sobre el eje de ordenadas, si: 1) $q>0$; 2) $q<0$, 3) $q=0$?

8. Desplazar la parábola $y=x^2$ a lo largo del eje de abscisas a: 1) 4 unidades hacia la derecha; 2) 3 unidades hacia la izquierda. Para cada caso escribir la nueva ecuación de la parábola.

9. Indicar con qué desplazamiento de la parábola $y=x^2$ se obtiene cada una de las curvas:
1) $y=(x-2)^2+1$; 2) $y=(x+1)^2-4$; 3) $y=(x-3)^2-4$;
4) $y=(x+4)^2+1$.

10. Trasladar la parábola $y=x^2$ paralelamente a sí misma a:
1) 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba;
2) 1 unidad a la izquierda y 3 unidades hacia arriba;
3) 5 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo;
4) 1.5 unidad a la izquierda y 2,5 unidades hacia abajo.
Escribir para cada uno de los cuatro casos mencionados la nueva ecuación de la parábola.

11. ¿Cómo hay que trasladar la parábola $y=x^2$ con respecto a los ejes coordenados para que la nueva ecuación de la parábola sea:

1) $y=x^2-8x+7$; 2) $y=x^2+4x+3$; 3) $y=x^2-x+2\frac{1}{4}$?

¿Cuáles serán las nuevas coordenadas de los vértices de la parábola en cada caso individual?

12. ¿Cuál es la disposición mutua de cada uno de los siguientes pares de parábolas:
1) $y=3x^2$ e $y=-3x^2$;
2) $y=(x-1)^2$ e $y=-(x-1)^2$;
3) $y=(x+2)^2+3$ e $y=-(x+2)^2+3$?

13. ¿A qué debe ser igual el coeficiente a, si se sabe que el valor de la función $y=ax^2$, para $x=1$, es igual a 2?

14. ¿A qué debe ser igual el coeficiente a, si la parábola $y=ax^2$ debe pasar por el punto $(2; -4)$?

15. ¿Qué valores deben adquirir los coeficientes a y c en la fórmula $y=ax^2+c$, que expresa una función de segundo grado, para que la gráfica de la función pase por los puntos
$M(-1; -3)$ y $P(3; 0)$?

16. ¿Para qué valor del argumento x la función $y=x^2-7x-10$ tiene el menor valor?

17. ¿En qué punto, es decir, para que valor del argumento x la función $y=-x^2+8x+7$ alcanza su mayor valor?

CAPITULO VII

ECUACIONES CUADRATICAS

§ 61. Relación (dependencia) entre el trinomio cuadrado y la ecuación cuadrática

En el análisis gráfico del trinomio cuadrado dejamos de tratar a sabiendas un problema importante, es decir: ¿ para qué valores del argumento x el trinomio se anula, y si existen, en general, tales valores del argumento?
Conforme a la gráfica de la función, en cada caso concreto podemos responder a la pregunta planteada. Por ejemplo, la función $y = 2x^2 - 5x - 3$ se anula dos veces: para $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$, lo que se aprecia de la gráfica (fig. 37). Sin embargo, en una serie de casos esta clase de solución gráfica del problema hay que darla por insuficiente, puesto que, en primer lugar, la construcción de la gráfica requiere bastante trabajo y tiempo; en segundo término, las raíces del trinomio se pueden hallar por la gráfica sólo aproximadamente, por eso, hay que hallar los métodos analíticos de resolución del problema planteado lo que naturalmente nos conduce a resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

§ 62. Nociones fundamentales y definiciones

● DEFINICION. La ecuación cuyo primer miembro es un polinomio de segundo grado, con respecto a la incógnita x, y el segundo miembro es igual a cero, se denomina *cuadrática*. La forma general de la ecuación cuadrática (o ecuación de segundo grado) es

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Los números a, b y c se denominan *coeficientes* de la ecuación cuadrática; de ellos, a es el primer coeficiente, o coeficiente del término principal; b, el segundo coeficiente, o coeficiente de la incógnita de primer grado; c, el término independiente. El número x_0, que hace igual a cero el trinomio cuadrado

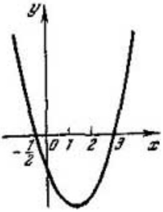


Fig. 37.

$ax^2 + bx + c$, se denomina *raíz* del trinomio, así como raíz de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.
Por ejemplo, las raíces del trinomio $y = 2x^2 - 5x - 3$ son iguales a $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$, puesto que

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$$

e

$$y(3) = 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 - 3 = 0.$$

De otro modo decimos que la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x - 3 = 0$ tiene dos raíces: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

§ 63. Ecuaciones cuadráticas incompletas

1. Tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas. Si en la ecuación cuadrática de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ uno de los dos coeficientes, b ó c, es igual a cero, o ambos a la vez son iguales a cero, la ecuación cuadrática se denomina *incompleta*. Son posibles tres formas de ecuaciones cuadráticas incompletas:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$;
2) $ax^2 + c = 0$, $(b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$;
3) $ax^2 = 0$ $(a \neq 0,\ b = c = 0)$.

2. Resolución de las ecuaciones cuadráticas incompletas. 1) La ecuación $ax^2 + bx = 0$ se resuelve descomponiendo el primer miembro en factores: $x(ax + b) = 0$. El producto se anula cuando siquiera uno de los factores es igual a cero; por eso o bien $x = 0$, o bien $ax + b = 0$, de donde $x = -\frac{b}{a}$. De este modo, la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

E j e m p l o. $4x^2 - 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

2) La ecuación $ax^2 + c = 0$, después de dividir los términos por a y pasar el término independiente al segundo miembro, la reducimos a la forma $x^2 = -\frac{c}{a}$, $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Si los coeficientes a y c tienen signos contrarios, tendremos que $\frac{c}{a} < 0$, y por eso la incógnita x tiene dos valores reales de signos contrarios:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

E j e m p l o s. 1) $4x^2 - 9 = 0$, $x_1 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. 2) $3x^2 + 5 = 0$, $x^2 = -\frac{5}{3}$. La ecuación dada no tiene raíces, puesto que no existe tal número real de x, cuyo cuadrado es igual al número negativo $-\frac{5}{3}$. En tales casos se dice que las raíces son imaginarias (sobre los números imaginarios véase el cap. XV).

3) $ax^2 = 0$. Puesto que $a \neq 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$. Se dice que el número 0 es raíz doble de la ecuación $ax^2 = 0$, es decir, $x_1 = x_2 = 0$.

§ 64. Reducción de la ecuación cuadrática completa a la forma $(x + m)^2 = n$ $(n \geqslant 0)$

La ecuación $(x + m)^2 = n$ se puede resolver de manera semejante a la resolución de la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + c = 0$. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, obtenemos $x + m = \pm\sqrt{n}$, de donde

$$x_1 = -m - \sqrt{n}, \quad x_2 = -m + \sqrt{n}.$$

E j e m p l o 1. $(x + 3)^2 = 25$, $x + 3 = \pm 5$, $x_1 = -8$, $x_2 = 2$.

C o m p r o b a c i ó n. $(-8 + 3)^2 = 25$, $(2 + 3)^2 = 25$. Ambas raíces satisfacen la ecuación. Si en dicho ejemplo se abren los paréntesis y se pasan todos los términos al primer miembro, obtendremos la ecuación cuadrática completa $x^2 - 6x - 16 = 0$. Por ahora no conocemos los métodos de resolución de tal ecuación. Pero, si logramos reducirla a la forma $(x + m)^2 = n$, con ello habremos hallado el modo de resolución.

E j e m p l o 2. $x^2 - 8x - 65 = 0$.
Extraemos del primer miembro el cuadrado perfecto de la diferencia:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 - 65 = 0.$$

$$(x - 4)^2 = 81;\ x - 4 = \pm 9;\ x_1 = -5;\ x_2 = 13.$$

§ 65. Deducción de la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática reducida

La ecuación cuadrática, cuyo primer coeficiente es igual a 1, es decir, la ecuación de la forma $x^2 + px + q = 0$, se llama *reducida*
Transformemos el primer miembro de la ecuación cuadrática reducida

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

En el primer miembro de esta ecuación se introdujeron como sumandos dos números contrarios $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ y $-\left(\frac{p}{2}\right)^2$, lo que, desde luego, no varía la magnitud del primer miembro. Después de pasar los últimos dos sumandos al segundo miembro, tendremos

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

o bien

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Extraemos la raíz cudrada de ambos miembros, considerando que

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0;\quad \text{en tal caso}\quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

de donde

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Esta es precisamente la fórmula por la cual se calculan las raíces de la ecuación cuadrática reducida. Verbalmente se puede expresar así:
Las raíces de la ecuación cuadrática reducida son iguales a la mitad del segundo coeficiente, con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad menos el término independiente.

Ahora podemos hallar inmediatamente las raíces de cualquier ecuación cuadrática reducida.

E j e m p l o. Resolver la ecuación $x^2 - 3x - 28 = 0$. Aquí $p = -3$, $q = -28$. Por eso

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(-28)},$$

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2},\quad x_1=-4,\quad x_2=7.$$

§ 66. Fórmula general de las raíces de la ecuación cuadrática

Si se necesita hallar las raíces de la ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado) de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, después de dividir todos los términos por a ($a \neq 0$) ella se convierte en reducida:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

En tal caso

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

o bien

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Las raíces de la ecuación cuadrática de la forma general son iguales a una fracción cuyo denominador es el doble del primer coeficiente y el numerador es igual al segundo coeficiente, con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada del cuadrado de este coeficiente menos el cuádruplo del producto del primer coeficiente por el término independiente.

E j e m p l o 1. $4x^2 - 5x - 6 = 0$ ($a = 4$, $b = -5$, $c = -6$);

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(-6)4}}{8},$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 11}{8},\quad x_1=-\frac{3}{4},\quad x_2=2,$$

Si el segundo coeficiente $b = 2m$, la fórmula de las raíces puede ser simplificada; en este caso, tendremos:

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4ac}}{2a}=\frac{-2m\pm 2\sqrt{m^2-ac}}{2a}$$

o bien

$$x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}.$$

Ejemplo 2. $5x^2-8x-4=0$.

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 5}}{5},$$

$$x_1=-\frac{2}{5},\quad x_2=2.$$

§ 67. Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

Entre las raíces de la ecuación cuadrática y sus coeficientes existe una dependencia expresada por el siguiente teorema.

Teorema. *La suma de las raíces de la ecuación cuadrática reducida es igual al segundo coeficiente con signo contrario, y el producto de las raíces es igual al término independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática reducida tenemos

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$x_1+x_2=-p.$$

Multiplicando miembro a miembro las mismas igualdades, obtenemos

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2$$

(el producto de la diferencia de dos números por su suma),

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q,$$

$$x_1\cdot x_2=q,$$

lo que precisamente se quería demostrar.

El teorema recíproco también es válido *Si la suma de dos números desconocidos es igual a p y su producto es igual a q, los números buscados son las raíces de la ecuación cuadrática*

$$x^2 - px + q = 0 \tag{1}$$

■ DEMOSTRACIÓN Si m y n son números desconocidos, por la condición del teorema tendremos:

$$\left.\begin{aligned} m+n&=p, \\ m\cdot n&=q. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Basándonos en las igualdades (2) la ecuación (1) toma la forma

$$x^2 - (m+n)\,x + mn = 0. \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (3) x por m, tendremos

$$m^2 - (m+n)\,m + mn = 0$$

o bien

$$0 = 0.$$

De un modo semejante comprobamos que el número n también es una raíz de la ecuación (3), con lo que se demuestra la validez del teorema recíproco.

Corolario. Para la ecuación cuadrática de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, después de reducirla a la forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, tendremos

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Si están dadas las raíces de la ecuación cuadrática, podemos formar la misma ecuación basándonos en la demostración del teorema recíproco.

Ejemplo 1. Formar la ecuación cuadrática, cuyas raíces son: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Sumamos y multiplicamos las raíces: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -15$.
La ecuacion buscada es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

Ejemplo 2. $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.
Hallamos que: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 \cdot x_2 = 7$.
La ecuación buscada es: $x^2 - 6x + 7 = 0$.

§ 68. Descomposición del trinomio cuadrado en factores

Utilizando las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, todo trinomio de raíces reales se puede descomponer en factores:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=a\left[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\right]=$$

$$=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ejemplo. $2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Las raíces del trinomio son: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

§ 69. Estudio de las raíces de la ecuación cuadrática

Al resolver las ecuaciones cuadráticas de coeficientes numéricos en ciertos casos se obtienen dos raíces reales, diferentes entre sí; en otros casos, dos raíces reales iguales, y en los demás, dos raíces imaginarias.

Naturalmente surgen las siguientes preguntas: 1) ¿de qué depende el carácter de las raíces de la ecuación cuadrática? 2) ¿no se podrá decir previamente, sin haber resuelto la ecuación, si ésta tendrá raíces reales, y si las tiene, serán positivas o negativas?

Las respuestas a estas preguntas constituyen precisamente lo que se admite en llamar *estudio* de las raíces de la ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado).

En este análisis tiene especial importancia la expresión $D=b^2-4ac$, llamado *discriminante de la ecuación de segundo grado.*

Son posibles los siguientes tres casos.

Caso 1. $a>0$, $D>0$.

Si el discriminante es un número positivo, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y distintas, puesto que la expresión $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ representa en sí dos números contrarios, más aún, ninguno de ellos es igual a cero; por lo tanto, las fracciones

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

tienen diferentes numeradores para denominadores iguales.

Con respecto a los signos de los coeficientes b y c se pueden efectuar las cuatro suposiciones siguientes:

1) $b < 0$, $c > 0$.

Si el término independiente es positivo, ambas raíces son de signo igual, puesto que $x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$. La suma de las raíces $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, y, por eso, ambas raíces son positivas.

2) $b > 0$, $c > 0$.

Ambas raíces son negativas y de igual signo, puesto que el signo de la suma de las raíces es contrario al signo del coeficiente $\frac{b}{a} > 0$.

3) $b < 0$, $c < 0$.

Las raíces son de signo contrario, dado que el producto es negativo: $x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$. La raíz mayor en valor absoluto es positiva, ya que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

4) $b > 0$, $c < 0$.

Las raíces son de signo contrario. La raíz mayor en valor absoluto es negativa.

Caso 2. $a > 0$, $D = 0$.

Ambas raíces son reales e iguales: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, como se desprende de la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática. Si $b > 0$, ambas raíces son negativas; para $b < 0$, ambas raíces son positivas.

Caso 3. $a > 0$, $D < 0$.

La ecuación cuadrática no tiene raíces reales, puesto que la raíz cuadrada del número negativo $\sqrt{D}$ es un número imaginario. Por ahora no examinaremos este caso (véase el cap. XV).

Observación. Si $a < 0$, multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1, obtenemos una ecuación de coeficiente positivo para x^2.

Los resultados del análisis están expuestos geométricamente en las gráficas del trinomio cuadrado (fig. 38): en el caso 1 la parábola corta el eje de abscisas en dos puntos x_1 y x_2 (x_1 y x_2 son raíces del trinomio y al mismo tiempo raíces de la

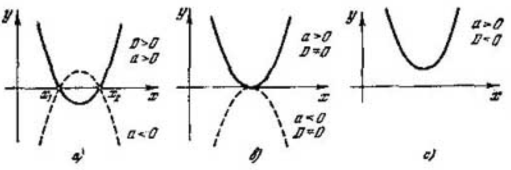


Fig. 38.

ecuación cuadrática); en el caso 2, la parábola es tangente al eje de abscisas (las dos raíces se confunden en una) y en el caso 3, la parábola no corta al eje Ox (las raíces son imaginarias).

§ 70. Resolución de problemas basados en las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

▶ P r o b l e m a 1. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, formar una nueva ecuación cuadrática cuyas raíces sean inversas a las raíces de dicha ecuación.

Designemos las raíces de la nueva ecuación por α y β, en tal caso $\alpha = \frac{1}{x_1}$, $\beta = \frac{1}{x_2}$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación dada.

Hallemos la suma y el producto de las nuevas raíces:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Pero dado que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, tendremos que

$$\alpha + \beta = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Conociendo la suma y el producto de las raíces, formamos la propia ecuación $x^2 + \frac{b}{c} x + \frac{a}{c} = 0$, ó $cx^2 + bx + a = 0$.

De este modo, si se cambian de lugares los coeficientes extremos de la ecuación cuadrática, las raíces de la nueva ecuación serán raíces inversas a las primitivas.

▶ P r o b l e m a 2. Dada la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$. ¿Para qué valores de m la relación de las raíces es $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}$?

Según la propiedad de las raíces de la ecuación cuadrática y por los datos del problema tenemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = 15, \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Eliminando de este sistema las incógnitas x_1 y x_2 hallaremos m, es decir, obteniendo de la tercera ecuación $x_1 = \frac{3}{5} x_2$ y sustituyendo en las dos primeras, tendremos:

$$\begin{cases} \frac{8}{5} x_2 = -\frac{m}{2}, \\ \frac{3}{5} x_2^2 = 15, \end{cases}$$

de donde $x_2 = \pm 5$, $\frac{8}{5}(\pm 5) = -\frac{m}{2}$, $m = \pm 16$.

▶ Problema 3. Hallar la suma de los cuadrados y la suma de los cubos de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, sin haber hallado las mismas raíces x_1 y x_2.

1) La suma de los cuadrados es $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

2) La suma de los cubos de las raíces se puede representar del siguiente modo:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{3bc}{a^2} - \frac{b^3}{a^3}.$$

§ 71. Problemas de ecuaciones cuadráticas

▶ Problema 1. Por los lados de un ángulo recto se mueven uniformemente dos cuerpos A y B en dirección al vértice del ángulo recto.

La velocidad del cuerpo A es dos veces mayor que la velocidad del cuerpo B. Después de 10 segundos la distancia entre A y B es igual a 130 m. Hallar la velocidad de cada cuerpo, si en el instante de comenzar el movimiento el cuerpo A se encontraba a la distancia de 270 m del vértice del ángulo recto, y el cuerpo B, a la distancia de 125 m (fig. 39).

Supongamos que la velocidad del cuerpo A es de $2x$ m/s, la velocidad del cuerpo B es de x m/s. En tal caso, después de

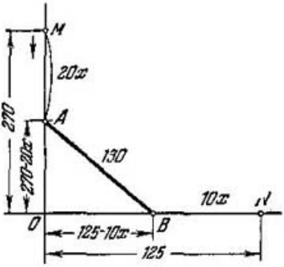


Fig. 39.

10 s la distancia del cuerpo A del vértice es igual a $(270 - 20x)$ m, y la distancia del cuerpo B del vértice es igual a $(125 - 10x)$ m.
Por los datos del problema debe ser $(270 - 20x)^2 + (125 -$

$- 10x)^2 = 130^2$.

Abriendo paréntesis, pasando todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación cuadrática

$20x^2 - 532x + 2865 = 0.$

Sus raíces son $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 19{,}1$.
De este modo, la velocidad del cuerpo B es igual a 7,5 m/s ó a 19,1 m/s; la velocidad del cuerpo A respectivamente igual a 15 m/s ó 38,2 m/s.
En el primer caso ambos cuerpos no han llegado hasta el vértice: A se encuentra a la distancia de $270 - 150 = 120$ m, B se encuentra a la distancia de $125 - 75 = 50$ m.
Puesto que $120^2 + 50^2 = 130^2$, la respuesta obtenida satisface los datos del problema.
La segunda respuesta no satisface los datos del problema, en el sentido estricto de la palabra, puesto que el camino recorrido por cada cuerpo después de 10 s será mayor que la distancia al vértice y los cuerpos no se encontrarán sobre los lados del ángulo recto, sino sobre sus prolongaciones tras el vértice. Para admitir la segunda respuesta hay que cambiar las condiciones del problema: en lugar de la frase «por los lados de un ángulo recto se mueven dos curpos» hay que decir «por rectas mutuamente perpendiculares se mueven dos cuerpos» y, en ese caso, ambas respuestas satisfacerán los datos del problema.

▶ P r o b l e m a 2 (es histórico y pertenece a Euler). Dos campesinas llevaron al mercado 100 huevos en total; una de ellas tenía una cantidad mayor de huevos que la otra, no obstante ambas obtuvieron de la venta iguales sumas de dinero. Una de ellas dijo a la otra: «Si yo tuviese tus huevos ganaría 15 kreuzeres». La segunda contestó: «Y si yo tuviese los tuyos, obtendría por ellos $6\frac{2}{3}$ kreuzeres». ¿ Cuántos huevos tenía cada campesina?

Supongamos que la primera campesina tenía x huevos, en tal caso, la segunda tenía $100 - x$. Si la primera hubiese tenido la misma cantidad de huevos que la segunda, es decir, $100-x$, habría ganado 15 kreuzeres; por lo tanto, la primera vendió cada huevo a $\frac{15}{100-x}$ kreuzeres, y la segunda campesina vendió cada huevo al precio de $\frac{6\frac{2}{3}}{x}=\frac{20}{3x}$.

De este modo, la primera campesina ganó por sus x huevos $x\frac{15}{100-x}$, y la segunda $(100-x)\frac{20}{3x}$.

Según el planteo del problema las ganancias fueron iguales. De aquí tendremos la ecuación $\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}$. Después de simplificar y racionalizar los términos obtenemos:

$\frac{3x}{100-x}=4\frac{(100-x)}{3x}$; $9x^2=4(100-x)^2$; $3x=\pm 2(100-x)$;

$x_1=40$; $x_2=-200$ (no sirve).

Así, pues, la primera campesina tenía 40 huevos y la segunda 60.

▶ P r o b l e m a 3. Dos obreros A y B aceptaron realizar cierto trabajo en 16 días. Después de cuatro días de trabajo conjunto A pasó a otro trabajo, debido a lo cual B terminó solo la parte de trabajo restante en un plazo de 12 días mayor que el plazo,durante el cual A solo puede realizar todo el trabajo.

¿En cuántos días cada obrero, por separado, puede realizar todo el trabajo?

Supongamos que A puede realizar todo el trabajo en x días, en tal caso, en un día laboral éste debe ejecutar $\frac{1}{x}$ parte de todo el trabajo.

Durante el trabajo conjunto A y B realizan en un día $\frac{1}{16}$

parte de todo el trabajo; por lo tanto, B cumple por día $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{x}\right)$ parte de todo el trabajo. Por otro lado, B debe realizar por día $\frac{3}{4}:(x+12)=\frac{3}{4(x+12)}$ parte del trabajo total, puesto que en 4 días de trabajo conjunto realizaron $\frac{1}{4}$ de todo el trabajo; por lo tanto, quedó a cumplir por B $\frac{3}{4}$ del trabajo total en $(x+12)$ días.

De aquí, tendremos la ecuación $\frac{1}{16}-\frac{1}{x}=\frac{3}{4(x+12)}$. Los dos miembros de la ecuación expresan una misma magnitud, es decir, la norma diaria del obrero B.

Resolviendo esta ecuación hallamos $x=24$ (la segunda raíz $x=-8$ no satisface las condiciones del problema).

El obrero B realiza por día $\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$ parte de todo el trabajo; por lo tanto, todo el trabajo lo cumple en 48 días.

§ 72. Ecuación bicuadrada

● DEFINICION. La ecuación de cuarto grado que contiene sólo potencias pares de la incógnita se llama *bicuadrada*. La forma general de tal ecuación es

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0).$$

La resolución de esta ecuación se reduce a la resolución de dos ecuaciones cuadráticas, lo que está explícito en la misma denominación.

Cabe señalar que si la ecuación bicuadrada tiene una raíz x_0, tiene también la raíz $-x_0$, es decir, las raíces de la ecuación bicuadrada son de dos en dos contrarias.

En realidad, si x_0 es una raíz, sustituyendo en la ecuación x por x_0 nos da una igualdad exacta

$$ax_0^4+bx_0^2+c=0, \tag{1}$$

pero, en tal caso, también es correcta otra igualdad:

$$a(-x_0)^4+b(-x_0)^2+c=0, \tag{2}$$

puesto que los primeros miembros de las igualdades (1) y (2) son idénticos.

Para resolver la ecuación bicuadrada introduzcamos una incógnita auxiliar z, suponiendo que $z=x^2$, $z^2=x^4$. En tal caso, la ecuación toma la forma

$$az^2+bz+c=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática con respecto a la incógnita auxiliar z, y sus raíces son

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Pero $z_1=x^2$ y $z_2=x^2$, de donde

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

De este modo, la ecuación bicuadrada tiene cuatro raíces, además, las raíces x_1 y x_2, x_3 y x_4 son de dos en dos contrarias, es decir, la suma de cada par de raíces es igual a cero, y por eso, también la suma de las cuatro raíces es igual a cero. Estas fórmulas se pueden unir en una

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Ejemplo. $2x^4-19x^2+9=0$;

$z=x^2$, $2z^2-19z+9=0$,

$z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=9$;

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 3$.

§ 73. Estudio de las raíces de la ecuación bicuadrada

El carácter de las raíces de la ecuación bicuadrada

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{1}$$

depende de las raíces de la ecuación cuadrática auxiliar

$$az^2+bz+c=0. \tag{2}$$

1. Supongamos que $a>0$ y el discriminante de la ecuación (2) es positivo: $D=b^2-4ac>0$. En tal caso, si $c>0$ y $b<0$, las dos raíces son positivas: $z_1>0$ y $z_2>0$, y la ecuación bicuadrada (1) tiene cuatro raíces reales, puesto que

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}.$$

2. Si $a>0$, $D>0$, $c>0$ y $b>0$, entonces $z_1<0$, $z_2<0$. Las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada son imaginarias.

3. Si $a > 0$, $D > 0$, $c < 0$ la ecuación cuadrática (2) tiene una raíz positiva y otra negativa, $z_1 < 0$ y $z_2 > 0$, por eso el par de raíces x_3 y x_4 es real, el otro par x_1 y x_2 es imaginario.

§ 74. Ecuaciones que se reducen a cuadráticas

Al resolver la ecuación bicuadrada hemos sustituido $z = x^2$, gracias a lo cual disminuimos la potencia de la ecuación dada reduciéndola a una ecuación cuadrática.

También se recurre a la sustitución cuando las ecuaciones o sistemas de tipos desconocidos se deben reducir a ecuaciones o sistemas de tipos conocidos.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. $2\sqrt[3]{x^4}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$

Si el factor x lo llevamos bajo el signo radical, tendremos que

$$2\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}-20=0.$$

Supongamos que $t=\sqrt[3]{x^2}$, $t^2=\sqrt[3]{x^4}$. En tal caso la ecuación se escribe en la forma

$$2t^2-3t-20=0.$$

Hallamos sus raíces

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{4},$$

$$t_1=4, \quad t_2=-\frac{5}{2}.$$

De donde $4=\sqrt[3]{x^2}$, $64=x^2$, $x=\pm 8$.

El segundo valor de $t=-\frac{5}{2}$ lo despreciamos, puesto que t es un número positivo, lo que se desprende de la igualdad $t=\sqrt[3]{x^2}$.

Ejemplo 2. $\frac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2.$

El segundo miembro de la ecuación puede escribirse en la forma

$$7-(1+x+x^2).$$

Supongamos que $t=1+x+x^2$, en tal caso $\frac{10}{t}=7-t$.

Resolviendo esta ecuación cuadrática con respecto a t, obtenemos: $t_1 = 2$; $t_2 = 5$. Volviendo a la incógnita x, obtenemos dos ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + x + 1 = 2$; 2) $x^2 + x + 1 = 5$.

Resolviéndolas hallamos: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

De este modo, las cuatro raíces de la ecuación resultaron irracionales.

Ejemplo 3. Hallar las raíces reales de la ecuación

$\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 3x = x^2 + 4$.

La ecuación se puede escribir en la forma

$\sqrt{x^2 + 3x + 6} = x^2 + 3x + 6 - 2$.

Supongamos que

$t = \sqrt{x^2 + 3x + 6}$; $t^2 = x^2 + 3x + 6$.

La ecuación inicial toma la forma

$t^2 - t - 2 = 0$.

La raíz positiva de esta ecuación es $t = 2$.
La otra raíz $t = -1$ la despreciamos, puesto que t es el valor aritmético del radical. En consecuencia

$2 = \sqrt{x^2 + 3x + 6}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 2 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

La verificación nos muestra que ambas raíces satisfacen la ecuación.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$|9 - x^2| - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$.

Esta ecuación es equivalente a dos ecuaciones cuadráticas

$9 - x^2 - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$ y $x^2 - 9 - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$,

con la resolución de las cuales se pueden hallar todas las raíces de la ecuación dada.

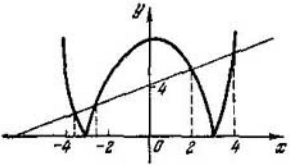


Fig.40.

Empero, la vamos a resolver por el método gráfico. Para ello escribimos la ecuación en la forma

$$|9-x^2|=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}.$$

A continuación nuestra tarea se reduce a hallar valores tales del argumento x para los cuales las dos funciones $y = |9 - x^2|$ e $y = \frac{7x}{22} + \frac{48}{11}$ se hacen numéricamente iguales. Es evidente que tales valores del argumento x son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas de estas dos funciones.

La gráfica de la función $y_1 = |9 - x^2|$ se puede obtener de la gráfica de $y = 9 - x^2$, representando de manera especular, con respecto al eje Ox, aquella parte que se encuentra bajo el eje de abscisas. (La parte de la gráfica de $y = 9 - x^2$ que se encuentra encima del eje Ox permanece invariable.)

La recta $y = \frac{7x}{22} + \frac{48}{11}$ interseca la primera curva en cuatro puntos, cuyas abscicas las leemos por la fig. 40.

De este modo, dicha ecuación tiene cuatro raíces:

$$x_1 \approx -3{,}5;\ x_2 \approx -2{,}3;\ x_3 = 2;\ x_4 \approx 3{,}8.$$

El ejemplo concreto que analizamos es ilustrativo en el sentido de que muestra ciertas ventajas de la resolución gráfica con respecto a la analítica. Antes que nada vemos que la ecuación tiene cuatro raíces, lo que hubiera sido difícil suponer sin la gráfica. En segundo lugar, hay que realizar un cálculo bastante grande para hallar directamente estas raíces (compruébelo Ud. mismo). En verdad, con el método de resolución gráfica de la ecuación, en la mayoría de los casos hallamos solamente valores aproximados de las raíces; en ejemplos raros, especialmente elegidos, se pueden hallar también valores exactos de las raíces.

§ 75. Resolución de ecuaciones de grado superior al segundo por descomposición del primer miembro en factores

Si después de pasar todos los términos de la ecuación al primer miembro se obtiene un polinomio con respecto a la incógnita x, descomponible en factores, cada uno de los cuales no es superior al de segundo grado, la resolución de tal ecuación no presenta dificultad.

E j e m p l o 1. Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Esta es una ecuación de tercer grado, cuyo primer miembro se descompone en factores mediante el agrupamiento:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2 (x - 3) - (x - 3) =$$
$$= (x - 3) (x^2 - 1).$$

La ecuación toma la forma

$$(x - 3) (x^2 - 1) = 0.$$

El producto se convierte en nulo cuando siquiera uno de los factores es igual a cero; por lo tanto, bien

$$x - 3 = 0, \ x = 3,$$

o bien

$$x^2 - 1 = 0, \ x = \pm 1.$$

En total tenemos tres raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

E j e m p l o 2. Hallar todas las raíces de la ecuación

$$x^4 + 4x + 4 = x^3 + 5x^2.$$

Dicha ecuación es una de cuarto grado. Después de pasar todos los términos al primer miembro, obtenemos:

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Descomponemos el término $-5x^2$ en dos sumandos: $-5x^2 = -x^2 - 4x^2$; en tal caso tendremos:

$$x^4 - x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Formemos dos grupos de términos, con tres términos en cada uno:

$$x^4 - x^3 - x^2 - (4x^2 - 4x - 4) = 0,$$
$$x^2 (x^2 - x - 1) - 4 (x^2 - x - 1) = 0,$$
$$(x^2 - 4) (x^2 - x - 1) = 0.$$

Igualando cada uno de los dos factores a cero y disponiendo las raíces en orden creciente, obtendremos:

$$1)\ x^2-4=0,\ x=\pm 2;\quad 2)\ x^2-x-1=0,\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$x_1=-2,\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=2.$$

Observación. Está claro que no todo primer miembro de una ecuación de cuarto grado se logra descomponer en factores con tanta facilidad; sin embargo, esta descomposición es conveniente cuando se realiza sin gran dificultad.

§ 76. Desigualdades de segundo grado

Después de haber estudiado los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas vamos a conocer cómo se resuelven las desigualdades de segundo grado. Ambas cuestiones están estrechamente relacionadas entre sí, lo que se aclarará más adelante. Veamos previamente el problema que nos conduce a una desigualdad elemental de segundo grado.

P r o b l e m a. Un paracaidista efectúa un salto de retardo al encontrarse a la altura de 9000 m. Cuántos segundos puede durar la caída libre si el paracaídas debe arbrirse a una altura no menor de 500 m, en caso contraio se pone en peligro su vida. (Se desprecia la resistencia del aire.)
Conforme al problema el camino S recorrido por el paracaidista durante la caída libre debe ser menor o en el caso extremo igual a 8500 m, $S\leqslant 8500$ m, ó $\frac{gx^2}{2}\leqslant 8500$ Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por el número positivo $\frac{2}{g}$, obtenemos:

$$x^2\leqslant\frac{17\,000}{g}=\frac{17\,000}{9{,}8},$$

$$x\leqslant\sqrt{\frac{17\,000}{9{,}8}};\quad x\leqslant 42\ (s).$$

DEFINICIÓN Las desigualdades de tipo $ax^2+bx+c>0$ y $ax^2+bx+c<0$ se denominan *desigualdades de segundo grado*, o *cuadráticas* (en el sentido estricto de la palabra). Si a los signos $>$ ó $<$ unimos también el signo de igualdad, obtenemos una desigualdad de segundo grado no rigurosa.

La resolución del problema nos condujo a un caso particular de desigualdad no rigurosa del tipo $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, donde $a = \frac{g}{2}$; $b = 0$; $c = -8500$.

Para una acertada resolución de la desigualdad de segundo grado hay que establecer de un modo preciso y seguro cómo varía el signo del trinomio cuadrado $ax^2 + bx + c$, que es el primer miembro de la desigualdad (el segundo miembro es igual a cero).

§ 77. Estudio del signo del trinomio cuadrado

Veamos cómo varía el signo del trinomio $ax^2 + bx + c$, cuando el argumento x adquiere cualquier valor real. Para claridad y simpleza del análisis utilizaremos la fig. 38 del § 69.

Caso 1. Supongamos que $a > 0$ y $D = b^2 - 4ac > 0$. En tal caso el trinomio tiene dos raíces reales y distintas x_1 y x_2, y la gráfica del trinomio, es decir, la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje de abscisas en los puntos x_1 y x_2 (fig. 38, a). Por la gráfica establecemos que si $x < x_1$ ó $x > x_2$, entonces $y = ax^2 + bx + c > 0$. Si x adquiere valores del intervalo (x_1, x_2), entonces $y = ax^2 + bx + c < 0$.

Observación. Si $a < 0$ y $D = b^2 - 4ac > 0$, por el contrario, $ax^2 + bx + c < 0$ para $x < x_1$ y para $x > x_2$, y $ax^2 + bx + c > 0$ para valores de x del intervalo (x_1, x_2) (véase la fig. 38, a, punteado).

De este modo, *si el trinomio cuadrado tiene dos raíces reales y diferentes x_1 y x_2 ($x_2 > x_1$), para todos los valores de x fuera del intervalo (x_1, x_2) el signo del trinomio coincide con el signo del primer coeficiente a; para todo x del intervalo (x_1, x_2) el signo del trinomio es contrario al signo del coeficiente a.*

Caso 2. Supongamos que $a > 0$, $D = b^2 - 4ac = 0$. Las raíces del trinomio son iguales: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. La parábola $y = ax^2 + bx + c$ es tangente, con su vértice, al eje de abscisas en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ (fig. 38, b), para todo $x \neq -\frac{b}{2a}$ sus ordenadas son positivas, es decir, $ax^2 + bx + c > 0$.

Observación. Para $a < 0$ y $D = 0$ la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es tangente al eje de abscisas por debajo y para todo $x \neq -\frac{b}{2a}$ las ordenadas de la parábola son negativas, es decir, $ax^2 + bx + c < 0$.

De este modo, *si las raíces del trinomio son reales e iguales entre sí* $\left(x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}\right)$, *para cualquier* $x \neq \frac{b}{2a}$ *el signo del trinomio coincide con el signo del primer coeficiente* a.

Caso 3. Supongamos que $a > 0$ y $D = b^2 - 4ac < 0$. En tal caso el trinomio no tiene raíces reales y la parábola $y = ax^2 + bx + c$ no corta el eje de abscisas, ella se encuentra totalmente encima del eje Ox (fig. 38, c). Todas las ordenadas de la parábola son positivas, o $ax^2 + bx + c > 0$ para todo valor de x. Si $a < 0$ y $D < 0$ la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra completamente debajo del eje de abscisas, es decir, todas sus ordenadas son negativas.

De este modo, *si el trinomio cuadrado no tiene raíces reales, para cualquier valor real del argumento x el signo del trinomio conicide con el signo del coeficiente* a, es decir, si $a > 0$ el trinomio es positivo para cualquier valor de x, si $a < 0$ el trinomio es negativo para todo x.

§ 78. Resolución de desigualdades de segundo grado

Ejemplo 1. Resolver la desigualdad $2x^2 - 5x - 3 > 0$. Hallamos las raíces del trinomio: $2x^2 - 5x - 3 = 0$;

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 3.$$

Tenemos dos raíces reales y diferentes; además, el primer coeficiente $a = 2 > 0$. De acuerdo a los resultados del párrafo anterior la resolución de la desigualdad dada será todo valor de x tal que $x < -\frac{1}{2}$ ó $x > 3$. En la fig. 41 se muestra la gráfica de la función $y = 2x^2 - 5x = 3$.

Ejemplo 2. Resolver la desigualdad

$$5x^2 - 8x + 3 < 2x^2 + 4x + 5.$$

Pasamos los términos del segundo miembro al primero: $3x^2 -$

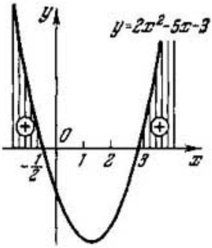


Fig. 41.

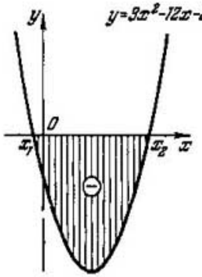


Fig. 42.

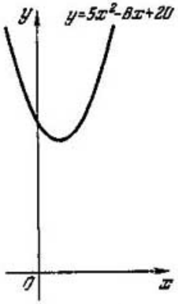


Fig. 43.

$-\ 12x - 2 < 0$. Hallamos las raíces del trinomio:

$3x^2 - 12x - 2 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+6}}{3},$$

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{42}}{3};\ \ x_2 = \frac{6+\sqrt{42}}{3}.$$

El trinomio con el primer coeficiente positivo y raíces reales diferentes es negativo para todo x comprendido entre las raíces, es decir, $\frac{6-\sqrt{42}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{42}}{3}$. En la fig. 42 se muestra la gráfica de la función $y = 3x^2 - 12x - 2$.

E j e m p l o 3. Resolver la desigualdad

$5x^2 - 8x + 20 < 0.$

Puesto que el discriminante del trinomio $D = b^2 - 4ac = 64 - 400 < 0$, para todo x el trinomio conserva el signo del primer coeficiente a, es decir, en nuestro caso, es positivo, por lo cual dicha desigualdad no tiene soluciones. En la fig. 43 se muestra la gráfica de la función $y = 5x^2 - 8x + 20$.

§ 79. Teoremas de equivalencia de ecuaciones

Teorema 1. *Si a ambos miembros de una ecuación les sumamos un mismo número o un mismo polinomio, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

■ DEMOSTRACION Supongamos que tenemos la ecuación

$$f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Hay que demostrar que la nueva ecuación

$$f(x) + p(x) = \varphi(x) + p(x), \tag{2}$$

obtenida de la (1), sumando a ambos miembros el polinomio $p(x)$, es equivalente a la ecuación inicial (1).
Supongamos que el número x_0 es una raíz de la ecuación (1), en tal caso tendremos la igualdad numérica

$$f(x_0) = \varphi(x_0). \tag{3}$$

Si a ambos miembros de la igualdad (3) les sumamos el número $p(x_0)$, obtenemos una igualdad equitativa:

$$f(x_0) + p(x_0) = \varphi(x_0) + p(x_0). \tag{4}$$

La igualdad (4) denota que el número x_0 es también una raíz de la ecuación (2). Con estos razonamientos hemos demostrado que toda raíz de la ecuación (1) es también una raíz de la ecuación (2).
Demostremos el teorema recíproco: toda raíz de la ecuación (2) también es una raíz de la ecuación (1).
Supongamos que el número x_0 es una raíz de la ecuación (2).
En tal caso, la sustitución en la ecuación (2) de x por el número x_0 da lugar a la igualdad numérica:

$$f(x_0) + p(x_0) = \varphi(x_0) + p(x_0).$$

Pero de números iguales se puede restar un número igual (en este caso $p(x_0)$), obtenemos la igualdad $f(x_0) = \varphi(x_0)$, que denota que el número x_0 es una raíz de la ecuación (1), y con ello se ha demostrado la equivalencia de las ecuaciones (1) y (2).

Teorema 2. *Si ambos miembros de la ecuación*

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

los multiplicamos por un mismo número A ($A \neq 0$), la nueva ecuación

$$Af(x) = A\varphi(x) \tag{2}$$

es equivalente a la ecuación inicial (1).

■ DEMOSTRACION Supongamos que el número x_1 es una raíz de la ecuación (1). En tal caso, tendremos la igualdad numérica $f(x_1) = \varphi(x_1)$. Como se sabe, los números iguales se pueden multiplicar por un mismo número distinto de cero, como resultado también obtenemos números iguales, es decir, $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, y, de este modo, el número x_1 es también una raíz de la ecuación (2).

Inversamente, supongamos que el número x_1 es una raíz de la ecuación (2). En tal caso, su sustitución en la ecuación (2) da la identidad numérica $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, donde $A \neq 0$. Pero números iguales se pueden dividir por un mismo número A; dividiendo la igualdad anterior por A obtenemos $f(x_1) = \varphi(x_1)$; esta igualdad denota que el número x_1 es también una raíz de la ecuacion (1). La justeza del teorema 2 con esto queda demostrada.

Observación. En el teorema 1 se habló de sumar a ambos miembros de la ecuación un mismo polinomio, pero no una función arbitraria. El problema está en que el polinomio está definido en todo el eje numérico, y por eso, $p(a)$ es un número real para todo valor real de a. Por ejemplo, si $p(x) = 2x^3 - 4x + 3$. tendremos que $p(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 1$, $p(a) = 2a^3 - 4a + 3$, etc.

Si no se hace esta limitación, el teorema 1 puede resultar incorrecto, como se puede apreciar del siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos la ecuación inicial $2x + 3 = x^2 - 12$. Esta ecuación tiene la raíz $x = 5$, lo que se verifica fácilmente. Sumando a ambos miembros la función fraccionaria $\frac{2}{x-5}$, obtenemos la nueva ecuación $2x + 3 + \frac{2}{x-5} = x^2 - 12 + \frac{2}{x-5}$, para la cual el número 5 ya no es una raíz, puesto que al sustituirlo en el primer y segundo miembro de la ecuación, éstos pierden el sentido definido. En efecto, en la igualdad

$$2 \cdot 5 + 3 + \frac{2}{5-5} = 5^2 - 12 + \frac{2}{5-5}$$

la fracción $\frac{2}{0}$ no tiene sentido, y, por eso, todo el primer miembro, así como el segundo no tienen sentido, lo que demuestra la no equivalencia de estas dos ecuaciones.

§ 80. Raíces perdidas e impropias

En los dos teoremas del § 79 se vio cuáles son las operaciones con ecuaciones que no alteran sus equivalencias. Estudiemos ahora las operaciones con ecuaciones tales que pueden conducir a una nueva ecuación no equivalente a la ecuación inicial. En vez de razonamientos generales nos limitaremos a examinar ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Tengamos la ecuación $3x(x-1)=5(x-1)$. Después de abrir paréntesis y pasar todos los términos al primer miembro, ésta puede ser resuelta por la fórmula de la ecuación cuadrática completa o con la descomposición del primer miembro en factores; las raíces serán: $x_1=1$; $x_2=\frac{3}{5}$. Si simplificamos ambos miembros por el factor $(x-1)$, se obtiene la ecuación $3x=5$, que no es equivalente a la inicial, puesto que tiene solamente una raíz $x=\frac{5}{3}$.
Por lo tanto, la reducción de ambos miembros de la ecuación por el factor, que contiene la incógnita, puede dar lugar a la pérdida de raíces.

Ejemplo 2. La ecuación $2x-3=5$ tiene una sola raíz $x=4$. Elevemos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, obtendremos $(2x-3)^2=25$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos dos raíces: $x_1=-1$; $x_2=4$. Anotemos que la nueva ecuación $(2x-3)^2=25$ no es equivalente a la ecuación inicial $2x-3=5$. La raíz superflua $x_1=-1$ corresponde a la ecuación $2x-3=-5$, la que después de elevar ambos miembros al cuadrado nos da la misma ecuación $(2x-3)^2=25$.
Las raíces impropias o extrañas pueden aparecer también al multiplicar ambos miembros de la ecuación por un factor que contiene la incógnita si este factor se anula para los valores reales de x.

Ejemplo 3. Si ambos miembros de la ecuación $2x-1=5$ los multiplicamos por $x+2$, obtendremos una nueva ecuación $(2x - 1) \times (x + 2) = 5(x + 2)$, la que después de pasar el término $5(x + 2)$ del segundo miembro al primero y descomponer en factores, nos da $(x + 2)(2x - 6) = 0$, de donde $x = -2$ ó bien $x = 3$. La raíz $x = -2$ no satisface la ecuación inicial $2x - 1 = 5$, que tiene una sola raíz $x = 3$. La raíz impropia $x = -2$ corresponde a la ecuación $x + 2 = 0$.

De aquí deducimos que: al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación (en general a una potencia par), así como al multiplicar por un factor, que contiene la incógnita y se anula para los valores reales de la incógnita, pueden aparecer raíces impropias.

§ 81. Raíces impropias de la ecuación irracional

La ecuación que contiene la incógnita bajo el signo radical se denomina *irracional*; por ejemplo,

$$\sqrt{2x+7}=3; \quad \sqrt[3]{3x-1}=4.$$

Vamos a demostrar con un ejemplo sencillo la posibilidad de aparición de raíces impropias al resolver una ecuación irracional. Supongamos tener la ecuación irracional $\sqrt{2x - 1} = x - 2$. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos:

$$2x - 1 = (x - 2)^2.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos las raíces:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 5.$$

Verifiquemos las raíces: $\sqrt{2 \cdot 1 - 1} \neq 1 - 2$; la raíz $x_1 = 1$ no satisface la ecuación, por lo tanto, es impropia. La segunda raíz $x_2 = 5$ satisface la ecuación. Nos preguntamos: ¿de qué modo apareció la raíz superflua $x = 1$? Esta raíz impropia corresponde a otra ecuación irracional $-\sqrt{2x - 1} = x - 2$, la que después de elevar al cuadrado nos da la misma ecuación cuadrática $2x - 1 = (x - 2)^2$. La raíz $x = 5$ es impropia con respecto a la ecuación $-\sqrt{2x - 1} = x - 2$. Por eso hay que verificar las raíces obtenidas al resolver una ecuación irracional, con la sustitución en dicha ecuación.

§ 82. Resolución de ecuaciones irracionales

Veamos en ejemplos los métodos de resolución de las ecuaciones irracionales.

E j e m p l o 1. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.
La ecuación contiene solamente un radical; dejamos éste en el primer miembro, o, como se dice, *aislamos el radical*, pasando la unidad al segundo miembro: $\sqrt{x^2+5x+1}=$ $=2x-1$; elevamos ambos miembros al cuadrado y obtenemos:

$$x^2+5x+1=(2x-1)^2,$$

o bien

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1;$$

después de pasar todos los términos al primer miembro y reducir los términos semejantes, tendremos:

$$3x^2-9x=0;\ x^2-3x=0;\ x(x-3)=0;$$
$$x_1=0;\ x_2=3.$$

V e r i f i c a c i ó n. $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1\neq 2\cdot 0$. Por lo tanto, la primera raíz $x=0$ no satisface la ecuación; la despreciamos (esta raíz corresponde a la ecuación irracional

$$-\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x,$$

lo que es fácil verificar). De la misma manera comprobamos que la segunda raíz $x_2=3$ satisface la ecuación dada.

E j e m p l o 2. $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$.
La ecuación tiene dos radicales en un miembro; pasamos uno de ellos al segundo miembro: $\sqrt{x-9}=1+\sqrt{x-18}$; después de elevar al cuadrado tendremos $x-9=1+$ $+2\sqrt{x-18}+x-18$; dejamos el radical en el segundo miembro y pasamos los términos restantes al primer miembro:

$$8=2\sqrt{x-18};\ 4=\sqrt{x-18};\ 16=x-18;\ x=34.$$

Verificando manifestamos la utilidad de la raíz obtenida.

E j e m p l o 3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=$ $=\sqrt{3x}$.
La ecuación tiene cuatro radicales; distribuimos los mismos en dos por ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x};$$

después de elevar al cuadrado tendremos:

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}+3x+2=$$
$$=2x+5+2\sqrt{(2x+5)3x}+3x;$$
$$2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}=2\sqrt{(2x+5)3x};$$

simplificamos por 2 y elevamos nuevamente al cuadrado:

$$(2x+3)(3x+2)=(2x+5)3x,$$
$$6x^2+13x+6=6x^2+15x;\ 2x=6;\ x=3.$$

Verificación. $\sqrt{9}+\sqrt{11}=\sqrt{11}+\sqrt{9}$; la raíz obtenida satisface la ecuación dada.

Ejemplo 4. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{b}{a}$.

La ecuación tiene la forma de una proporción. Formemos una proporción derivada: la suma de los términos de la primera relación es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda relación es a su diferencia: $\dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+a}{b-a}$ $(b\neq a)$; elevemos al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2};$$

nuevamente formemos la proporción derivada

$$\frac{2a}{2x}=\frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2};$$
$$\frac{a}{x}=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab};\quad x=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}.$$

Verificando vemos que la raíz obtenida satisface la ecuación dada. Si $b=a$, la ecuación inicial adquiere la forma

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1;$$
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x};$$
$$2\sqrt{a-x}=0;\ \sqrt{a-x}=0;\ a-x=0;\ x=a.$$

§ 83. Sistemas de ecuaciones de segundo grado y su resolución

Si una ecuación de varias incógnitas se ha reducido a la forma que no contiene términos fraccionarios, y en ella se han realizado todas las simplificaciones posibles (apertura

de paréntisis, eliminación de radicales, paso de todos los términos al primer miembro, reducción de términos semejantes), tendremos que *potencia de esta ecuación se denomina la suma de los exponentes de las incógnitas del término de la ecuación en el que esta suma es la mayor*; por ejemplo:
a) la ecuación $2xy^2 + 5x^2 + 6y - 20 = 0$ es de tercer grado, puesto que en el primer miembro la suma de los exponentes de x e y es la mayor e igual a $1 + 2 = 3$;
b) la ecuación $\frac{x^2}{x^2+y^2} + 2y^2 = 3$, después de eliminar los términos fraccionarios, adquiere la forma

$$x^2 + 2y^2(x^2 + y^2) = 3(x^2 + y^2),$$

o bien

$$2x^2y^2 + 2y^4 - 2x^2 - 3y^2 = 0.$$

Esta es una ecuación de cuarto grado con respecto a las incógnitas x e y.
El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se llama *sistema de sugundo grado*, si siquiera una de las ecuaciones es de segundo grado, y la otra, no superior al segundo grado.

Ejemplos.

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^2+3y^2+xy=5. \\ 2x^2+y^2=9. \end{cases}$$

Resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas significa hallar todos los pares de valores de x e y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. Estos pares de valores de x e y se llaman *soluciones del sistema*. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$$

tiene dos soluciones:

$$1)\ x_1 = -1,\ y_1 = -2 \text{ y } 2)\ x_2 = 2,\ y_2 = 1,$$

puesto que cada par de valores de las incógnitas x e y, después de sustituirlos en las ecuaciones dadas conducen a identidades numéricas:

$$1)\ (-1)^2 + (-2)^2 = 5;\ 5 = 5;\quad 2)\ 2^2 + 1^2 = 5;\ 5 = 5;$$
$$-1 - (-2) = 1;\ 1 = 1.\qquad 2 - 1 = 1;\ 1 = 1.$$

Examinemos la resolución de sistemas elementales.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación expresamos y por x; $y = 3x - 1$. Sustituimos este valor de y en la primera ecuación; obtendremos:

$$x^2 + (3x-1)^2 + 2(3x-1) - 9 = 0.$$

Después de abrir los paréntesis y reducir los términos semejantes, tendremos

$$x^2 - 1 = 0;$$

$$x_1 = -1; \ x_2 = 1;$$

$$y_1 = -4; \ y_2 = 2.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2+3xy=18; \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

Descompongamos los primeros miembros de dichas ecuaciones en factores

$$\begin{cases} x(x+3y)=18; \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$$

Después de dividir la primera ecuación por la segunda, obtendremos:

$$\frac{x}{y} = 3, \text{ ó } x = 3y.$$

En tal caso la segunda ecuación nos da

$$3y^2 + 3y^2 = 6; \ y^2 = 1;$$

$$y_1 = -1; \ y_2 = 1;$$

$$x_1 = -3, \ x_2 = 3.$$

§ 84. Métodos artificiosos de resolución de sistemas de ecuaciones

En ciertos casos los sistemas de ecuación se resuelven más elegantemente que por el método de sustitución, si se recurre a procedimientos especiales.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6. \end{cases}$$

Las incógnitas x e y se pueden admitir como raíces de la ecuación cuadrática auxiliar $z^2 - 5z + 6 = 0$, de donde $z_1 = 2$; $z_2 = 3$; puesto que es indiferente qué incógnita se ha tomado por z_1 y qué incógnita por z_2, en total tendrems dos soluciones

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3;$$
$$y_1 = 3,\ y_2 = 2.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x-y=7; \\ \quad xy=-10. \end{cases}$$

Representemos dicho sistema en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x+(-y)=7, \\ \quad x(-y)=10. \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, las incógnitas x y $-y$ son raíces de la ecuación $z^2 - 7z + 10 = 0$, es decir, $z_1 = = 2$, $z_2 = 5$, de donde obtendremos dos soluciones:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5;$$
$$y_1 = -5,\ y_2 = -2.$$

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ \quad xy=8. \end{cases}$$

Primer método. Multipliquemos la segunda ecuación por 2 y sumémosla con la primera; obtendremos $(x+y)^2 = 36$, de donde $x + y = \pm 6$.
De este modo, dicho sistema es equivalente al conjunto de dos sistemas:

$$1) \begin{cases} x+y=6, \\ \quad xy=8; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x+y=-6, \\ \quad xy=8, \end{cases}$$

cada uno de los cuales se resuelve como el sistema del ejemplo 1.
En total obtendremos cuatro soluciones:

$$x_1 = -4;\ x_2 = -2;\ x_3 = 4;\ x_4 = 2;$$
$$y_1 = -2;\ y_2 = -4;\ y_3 = 2;\ y_4 = 4.$$

S e g u n d o   m é t o d o. Elevemos la segunda ecuación del sistema al cuadrado; obtendremos:

$$x^2 + y^2 = 20,$$
$$x^2y^2 = 64.$$

Si ponemos $x^2 = u$; $y^2 = v$, tendremos:

$$\begin{cases} u+v=20; \\ uv=64. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema igual que el ejemplo 1, hallamos:

$u_1 = 16$, de donde $x = \pm 4$;
$v_1 = 4$, de donde $y = \pm 2$

o bien

$u_2 = 4$, de donde $x = \pm 2$,
$v_2 = 16$, de donde $y = \pm 4$.

Puesto que los signos de las incógnitas x e y deben ser iguales, en total obtendremos cuatro soluciones.

E j e m p l o 4. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0; \\ xy+y^2-12=0. \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema es una ecuación homogénea de segundo grado, puesto que su primer miembro es un polinomio homogéneo con respecto a las incógnitas x e y *), y el segundo miembro, nulo.
Tal ecuación siempre tiene solución nula: $x = 0$; $y = 0$. Sin embargo, el sistema no tiene solución nula, más aún, $y \neq 0$, puesto que para $y = 0$ la segunda ecuación se reduce a una igualdad falsa $-12 = 0$. Por lo tanto, ambos miembros de la primera ecuación se pueden dividir por y^2:

$$2\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 18 = 0;$$

*) Significa que todos sus términos son de igual potencia. Se denomina potencia del monomio la suma de los exponentes de las incógnitas; por ejemplo, cada uno de los monomios $5x^2$; $3xy$; $-0,5y^2$ son de segundo grado, por eso el polinomio $5x^2 + 3xy - 0,5y^2$ también es homogéneo.
El polinomio $x^3 - 2,5x^2y + 4y^3$ también es homogéneo, ya que todos sus términos son de tercer grado.
El polinomio $x^2 - 5xy + 3y$ no es homogéneo, puesto que los primeros dos términos son de segundo grado, mientras que el tercer término es de primer grado.

si ponemos $\frac{x}{y} = t$, tendremos la ecuación cuadrática

$$2t^2 + 5t - 18 = 0.$$

cuyas raíces son

$$t_1 = -\frac{9}{2}, \quad t_2 = 2.$$

De este modo, el sistema dado es equivalente al conjunto de dos sistemas:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{9}{2}; \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ xy + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

El primero de ellos no tiene soluciones reales, el segundo tiene dos soluciones:

$$x_1 = 4,\ y_1 = 2 \text{ y } x_2 = -4,\ y_2 = -2.$$

E j e m p l o 5. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

El primer miembro de cada ecuación del sistema dado es un polinomio homogéneo de segundo grado con respecto a las incógnitas x e y (todos los términos de segunda dimensión), por eso es conveniente introducir una incógnita auxiliar t, suponiendo $y = tx$; en tal caso cada una de las ecuaciones del sistema dado después de la sustitución toma la forma

$$x^2 (1 - t + t^2) = 3; \quad x^2 (2 - t - t^2) = 5.$$

Puesto que $x \neq 0$, dividamos la primera ecuación por la segunda y obtendremos

$$\frac{1 - t + t^2}{2 - t - t^2} = \frac{3}{5},$$

$$5 - 5t + 5t^2 = 6 - 3t - 3t^2,$$

o bien

$$8t^2 - 2t - 1 = 0,$$

es una ecuación cuadrática con respecto a la incógnita auxiliar t; resolviéndola, hallamos:

$$t_1 = -\frac{1}{4}; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $y = -\frac{1}{4}x$ ó $y = \frac{1}{2}x$.

A continuación vamos a resolver por el método de sustitución dos sistemas más sencillos:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ y=-\frac{1}{4}x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ y=\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

En total obtendremos cuatro soluciones:

$$x_1=\frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_2=-\frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_3=-2; \quad x_4=2;$$

$$y_1=-\frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_2=\frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_3=-1; \quad y_4=1.$$

§ 85. Método de resolución gráfica de un sistema de ecuaciones

Además del método de resolución analítica de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se puede utilizar también el método gráfico.

Construimos para cada ecuación del sistema dado la respectiva gráfica, es decir, la curva. Si las curvas se intersecan en el punto M_1 $(x_1; y_1)$, en tal caso las coordenadas del punto de intersección son las soluciones del sistema. En efecto, puesto que el punto de intersección pertenece a ambas curvas, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones del sistema, siendo este par de números la solución del sistema.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$$

A la primera ecuación del sistema le corresponde la circunferencia de radio $r=\sqrt{13}$ con centro en el origen de coordenadas (fig. 44), a la segunda ecuación le corresponde la hipérbola equilátera cuyas ramas se encuentran en el primer y tercer cuadrantes. Las curvas se intersecan en cuatro puntos: M_1 (3; 2), M_2 (2; 3), M_3 (−3; −2), M_4 (−2; −3). De este modo el sistema tiene cuátro soluciones.

El método de resolución gráfica posee la ventaja de que se aprecia inmediatamente la cantidad de soluciones reales que tiene el sistema dado.

Sin embargo, el método gráfico nos da sólo valores aproximados de estas soluciones, de ordinario con la exactitud de hasta 0,1. Para obtener una alta precisión, hay que con-

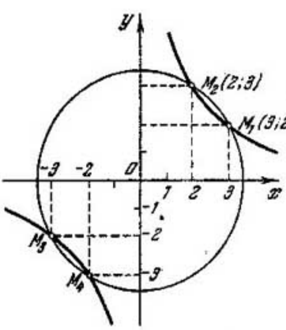


Fig. 44.

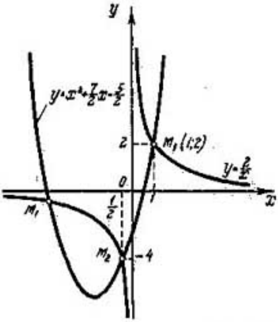


Fig. 45.

struir las curvas en escala mayor, sobre papel milimetrado, lo que da lugar a una gran pérdida de tiempo. Precisamente ésta es la desventaja principal del método de resolución gráfica de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Se entiende que las curvas deben trazarse en una misma escala, si con ello nos proponemos hallar las soluciones del sistema.

E j e m p l o 2. Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{cases} xy=2, \\ y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}. \end{cases}$$

En la fig. 45 se ha representado la hipérbola equilátera $y=\frac{2}{x}$ y la parábola $y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}$, las que se intersecan en los tres puntos: $M_1\left(-4;\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2};\ -4\right)$, $M_3\ (1;\ 2)$.

Por lo tanto, dicho sistema tiene tres soluciones:

$$\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-\frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}, \\ y_2=-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=2. \end{cases}$$

La resolución del sistema dado por el método de sustitución nos conduciría a una ecuación de la forma $x\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\right)=2$ ó $2x^3+7x^2-5x-4=0$. Esta es una ecuación cúbica completa; los métodos de resolución de estas ecuaciones no se estudian en el curso de álgebra elemental. Hay que adivinar que el primer miembro de la ecuación se puede descomponer en factores:

$$2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = (x - 1)(2x^2 + 9x + 4) = 0.$$

Igualando a cero cada factor hallamos tres valores de x $\left(1;\ -4;\ -\frac{1}{2}\right)$, en tal caso los respectivos valores de y los hallamos de la relación $xy = 2$.

En este ejemplo el método de resolución gráfica tiene un aspecto más natural que el método algebraico, puesto que la descomposición del primer miembro en factores requiere la aplicación de procedimientos artificiosos.

▲ Ejercicios

1. Resolver las ecuaciones:

1) $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^2-2x+13}=2;$

2) $\dfrac{5}{y+2}+\dfrac{9}{2y+3}=2;$

3) $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{6}{1-x^2};$

4) $2y^2-(b-2c)\,y=bc;$

5) $x^2+2(a-b)\,x-4ab=0;$

6) $6x^2+5mx+m^2=0;$

7) $56y^2+ay-a^2=0;$

8) $\dfrac{3m}{2m-1}-\dfrac{39}{2m+1}=5-\dfrac{45}{4m^2-1};$

9) $x+\dfrac{a}{x}=b;$

10) $abx^2-(a^2+b^2)\,x+ab=0;$

11) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b};$

12) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0;$

13) $\dfrac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\dfrac{x+6}{x-1}+\dfrac{x+36}{x^3-1};$

14) $(m-n)\,x^2-nx-m=0;$

15) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}=\dfrac{1}{4};$

16) $(7-4\sqrt{3})\,x^2+(2-\sqrt{3})\,x=2;$

17) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}\,x+$
$+(a-b)^2=0;$

18) $\dfrac{x+5}{x+1}+\dfrac{3x+1}{x^2+3x+2}=2{,}5;$

19) $\dfrac{a-b+1}{ax+bx}=\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{a-b}{x^2};$

20) $\dfrac{8}{x^2-9}+\dfrac{8}{3x+9}-\dfrac{5}{6}=0;$

21) $\dfrac{5t}{2t^2-t-1}-\dfrac{4t-5}{t^2-1}=\dfrac{5}{2t+1};$

22) $\dfrac{x-6}{x-12}-\dfrac{x-12}{x-6}=\dfrac{5}{6}.$

2. En un plano se han dado varios puntos dispuestos de manera que tres cualesquiera de ellos no se encuentran sobre una recta. Hay que determinar el número de puntos sabiendo que por ellos se pueden trazar en total 28 rectas distintas.

3. Resolver el problema anterior en forma general, si en total se pueden trazar m rectas diferentes.

4. Una parcela de tierra de 375 m² tiene forma rectangular, uno de sus lados constituye el 60% del otro. Hallar estos lados.

5. El perímetro de un rectángulo es de 85 cm, y su diagonal, 32,5 cm. Hallar los lados del rectángulo.

6. ¿Es posible un polígono convexo tal, en el que el número total de diagonales sea igual a 12?

7. ¿En qué polígono el número de lados es igual al número total de diagonales?

8. ¿Es posible un triángulo rectángulo tal, cuyos lados se expresen por tres números enteros sucesivos? ¿Por tres números sucesivos pares o impares?

9. Dos turistas se dirigen simultáneamente a una ciudad que se encuentra a la distancia de 30 km de ellos. El primero de ellos hace por hora 1 km más, debido a lo cual llega a la ciudad una hora antes. ¿Cuántos kilómetros por hora hace cada turista?

10. Una piscina se llena por intermedio de dos tubos en $1\frac{7}{8}$ hora; el primer tubo por separado puede llenar la piscina dos horas antes que el segundo tubo solo. ¿En cuántas horas cada uno de los tubos por separado puede llenar la piscina?

11. La distancia entre dos ciudades por río es de 80 km. Un barco pasa esta distancia dos veces (hacia arriba y hacia abajo) en 8 h 20 min. Determinar la velocidad del barco en agua muerta o estancada, si la velocidad de la corriente es de 4 km/hora.

12. La distancia entre dos estaciones ferroviarias es de 96 km. El tren rápido recorre este camino $\frac{2}{3}$ de hora más rápidamente que el tren de pasajeros ordinario. Hallar la velocidad de cada tren, si se sabe que la diferencia entre sus velocidades es de 12 km/hora.

13. Dos obreros trabajando juntos pueden cumplir una tarea dada en 12 horas. El primero de ellos por separado puede realizar el mismo trabajo 10 horas más rápidamente que el segundo. ¿En cuántas horas cada obrero por separado puede realizar la tarea?

14. Si una cooperativa de producción vende mercaderías por 2688 rublos, recibirá tanto por ciento de ganancia cuantas centenas de rublos contiene la mitad del precio de costo de la mercadería. ¿Cuál es el precio de costo de la mercadería?

15. Dos turistas A y B salieron simultáneamente de distintos lugares al encuentro mutuo. Al encontrarse resultó que A recorrió 210 km más que B. Si cada uno de ellos continúa su camino a la velocidad anterior, A llegará al lugar de salida de B después de 4 días, y B llegará al lugar de salida de A después de 9 días. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno de ellos hasta el encuentro?

16. Un turista salió de A a B y hace un promedio de 8 km/hora. Cuando éste recorrió 27 km, desde B a su encuentro salió otro turista, quien recorría en una hora la vigésima parte de todo el camino de B a A y se encontró con el primero después de tantas horas, como kilómetros por hora el mismo hace. Determinar la distancia de A a B.

17. Un agrónomo estableció que con la existencia de una reserva de semillas de 22,5 toneladas se puede plantar toda la parcela destinada a la patata. Durante la plantación se supo que las semillas eran selectas y por eso se puede disminuir la norma de plantación propuesta, aproximadamente, 200 kg por hectárea. Esto condujo al aumento de la superficie de siembra en 1 ha.
¿Cuál ha sido la norma de siembra de patata proyectada por hectárea y cuál es la superficie de la parcela inicial?

18. Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones con la exactitud de hasta 0,01:

1) $0{,}05x^2 - 4x + 7 = 0$;
2) $0{,}015y^2 + 2y - 3{,}75 = 0$;
3) $2{,}17x^2 - 1{,}8x - 1{,}06 = 0$;
4) $7x^2 - 8{,}06x + 2{,}16 = 0$.

19. Formar la ecuación cuadrática si sus raíces son:

1) 3 y 5;
2) -3 y 9;
3) 4 y $-\frac{1}{2}$;
4) 3 y -3;
5) 0 y 6;
6) 0 y $\frac{b}{a}$;
7) 4 y 4;
8) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$;
9) $a+b$ y $a-b$;
10) $\frac{m+n}{2}$ y $\frac{m-n}{2}$;
11) $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$;
12) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;
13) $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$.

20. Sin resolver las siguientes ecuaciones indicar cuáles tienen raíces reales y cuáles no tienen; cuáles de las ecuaciones con raíces reales tienen raíces iguales; cuáles tienen ambas raíces positivas o ambas negativas:

1) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
2) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
3) $x^2 - 16x + 48 = 0$;
4) $4x^2 + x + 1 = 0$;
5) $7x^2 - x - 1 = 0$;
6) $14y^2 + 11y - 3 = 0$;
7) $z^2 - 6z + 9 = 0$;
8) $y^2 + y - 6 = 0$.

21. ¿Para qué valores del coeficiente m cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos raíces iguales:

1) $4x^2 + mx + 9 = 0$;
2) $mx^2 + 4x + 1 = 0$;
3) $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$?

22. ¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes a, b y c para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga:
1) raíces reales positivas;
2) raíces reales negativas;
3) una raíz real positiva y otra negativa?

23. ¿Qué valor tiene m si la ecuación
1) $x^2 - 2ax + m = 0$ tiene una raíz igual a $a - b$;
2) $z^2 + mz - 18 = 0$ tiene una raíz igual a -3;
3) $mx^2 - 15x - 7 = 0$ tiene una raíz igual a -7;
4) $y^2 + my + a^2 + 5a + 6 = 0$ tiene una raíz igual a $a + 3$?

24. Si las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro k para que

1) $x_1 - x_2 = 6$;
2) $3x_1 - x_2 = 4$;
3) $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$;
4) $x_1^2 + x_2^2 = 34$?

25. ¿Para qué valores del término independiente $-a$ las raíces de la ecuación $3x^2 + 2x - a = 0$ son entre sí como $2 : 3$?

26. Formar la ecuación cuadrática, cuyas raíces son iguales a $(x_1 + x_2)^2$ y $(x_1 - x_2)^2$, donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

27. Resolver las siguientes ecuaciones descomponiendo el primer miembro en factores:

1) $x^3-2x^2-15x=0$;
2) $y^3+3y^2-4y=0$;
3) $v^3+11v^2+28v=0$;
4) $x^3-3x^2-x+3=0$;
5) $2z^3-5z^2+2z-5=0$;
6) $x^3-8=0$;
7) $x^3+1=0$;
8) $y^4-2y^2=0$.

28. Formar la ecuación algebraica de grado inferior que tenga las siguientes raíces:

1) 1; 2 y -3;
2) 0 y ± 1;
3) ± 2 y ± 3;
4) -1; 2; 3 y 4;
5) a, b, $-c$ y d.

29. Resolver las ecuaciones:

1) $x^4-17x^2+16=0$;
2) $x^4-50x^2+49=0$;
3) $u^4-11u^2+30=0$;
4) $3y^4-28y^2+9=0$;
5) $z^4-3z^2-4=0$.

30. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales y verificar las raíces obtenidas:

1) $3+5\sqrt{x}=13$;
2) $11-3\sqrt{x}=5$;
3) $16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12$;
4) $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$;
5) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$;
6) $\frac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$;
7) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$;
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$;
9) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$;
10) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=$
$=\sqrt{4x-23}$;
11) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x+6a}=\sqrt{x-3a}$
12) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=$
$=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;
13) $\sqrt{x+4}=7$;
14) $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$;
15) $x+\sqrt{25-x^2}=7$;
16) $x-\sqrt{25-x^2}=1$;
17) $4x+\sqrt{5x+10}=17$;
18) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
19) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;
20) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$;
21) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
22) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=$
$=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$;
23) $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+$
$+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$;
24) $y\sqrt{\frac{a}{y}-1}=\sqrt{y^2-b^2}$;
25) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=$
$=x-a$;
26) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$;
27) $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}$;
28) $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

31. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=74; \\ x-y=2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=2; \\ xy=12. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y; \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2y^2=34; \\ x+y=7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1; \\ x+y=2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0; \\ x-y+1=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1; \\ x+y=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} y-x=2; \\ \dfrac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}; \\ x-y=2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+xy=12; \\ xy-y^2=2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} u^2+v^2=8; \\ \dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}=0{,}5. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2=65; \\ xy=28. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18; \\ x+y=12. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+xy+y=27; \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=45; \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x:12=3:y; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}; \\ x+y=20. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5; \\ x+y=10. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7; \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=a\sqrt{xy}; \\ x-y=b\sqrt{\dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1; \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+y=72; \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1; \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=a \ (a>0); \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}; \\ xy-x-y=9. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+ \\ +\sqrt{x+6y}=19; \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}= \\ =1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

32. El producto de dos números es igual a 135, y su diferencia, igual a 6. Hallar estos números.

33. La diferencia de dos números es a su producto como 1 : 24, y la suma de estos números es a su diferencia, como 5 : 1. Hallar estos números.

34. La suma de dos fracciones mutuamente inversas es igual a $2\frac{1}{6}$, y su diferencia, igual a $\frac{5}{6}$. Hallar estas fracciones.

35. Resolver las desigualdades:

1) $x^2-5x+4<0$,
2) $x^2>3x-2$;
3) $8x-3>x^2+4$;
4) $3x^2+4\geqslant 2x^2+5x$;
5) $\frac{2x+1}{x-1}<1$;
6) $|x^2-4|<5$;
7) $|x^2-5x|<4$;
8) $|9-x^2|\geqslant 3$.

36. Resolver los sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} x^2+x<12, \\ x^2-x-2>0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-3|<2, \\ x^2+x>6. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3>0. \\ |x^2-5x+6|\leqslant 2. \end{cases}$

CAPITULO VIII

VECTORES

§ 86. Segmentos positivos y negativos en el eje

Supongamos dado el eje OP, es decir, una recta en la que se ha elegido el sentido positivo, el origen O y la unidad de escala (fig. 46). Tomemos una serie de puntos de este eje, por ejemplo, los puntos A, B, C, D, N.

Los segmentos AB, CD, BC, AN, etc., que se encuentran sobre el eje OP, los vamos a diferenciar no sólo por su longitud, sino también por el sentido: la primera letra A en la notación del segmento AB siempre se toma como origen del segmento, la segunda letra B designa el extremo del segmento. Al segmento AB se le atribuye el sentido hacia el cual nos desplazamos por el eje OP, recorriendo el segmento AB desde su origen A hasta el extremo B; si esta dirección coincide con el sentido positivo del eje OP, como se muestra en la fig. 46, el segmento se considera positivo, en el caso contrario, negativo. De lo expuesto se deduce que los segmentos AB, DC, NB son positivos; los segmentos BA, CD, BN son negativos.

● DEFINICION. El número real, cuya magnitud absoluta es igual a la longitud del segmento AB, tomado con signo positivo o negativo, según sea el segmento AB positivo o negativo, se llama *magnitud algebraica* del segmento.

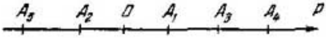
Las magnitudes algebraicas de los segmentos AB y BA son dos números opuestos.

La longitud del segmento AB, tomado sobre el eje OP, la designaremos por $|AB|$.

Para la magnitud algebraica no vamos a introducir una notación especial, recordando que este concepto tiene sentido solamente para los segmentos positivos o negativos (es decir, que se encuentran en el eje). Por ejemplo, por AB designamos al mismo segmento y a su magnitud algebraica.

Fig. 46.

Fig. 47.



Se llama (por definición) suma de dos segmentos AB y BC, tomados en el eje, el segmento AC del mismo eje (fig. 46). Es evidente, que la magnitud algebraica de la suma de los segmentos es igual a la suma de las magnitudes algebraicas de los segmentos sumandos. Si sobre un eje se ha tomado n puntos arbitrarios $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, se llama suma de los segmentos $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n$ el segmento A_1A_n que une el primer punto A_1 con el último A_n (para $n = 5$, véase la fig. 47).

§ 87. Noción de vector

En matemática, física, mecánica y otras ciencias se encuentran magnitudes de dos géneros: unas de ellas, por ejemplo, la longitud, la superficie, el volumen, la masa, la temperatura, la capacidad términa, etc., se determinan por números, que expresan estas magnitudes en las respectivas unidades de medición. Estas magnitudes se admite en llamar *magnitudes escalares* o simplemente *escalares.*

Otras magnitudes, por ejemplo tales como la velocidad, la aceleración, la fuerza, la intensidad del campo electromagnético, etc., además de sus valores numéricos tienen una dirección determinada. Estas magnitudes se llaman *magnitudes vectoriales.* Toda magnitud vectorial se representa en forma de *vector*, es decir, de segmento dirigido con una flecha en el extremo. Generalmente los vectores se designan por letras latinas minúsculas negritas: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, . . .; sin embargo, cuando es necesario precisar que el origen del vector es el punto A, y el extremo, el punto B, lo designa-

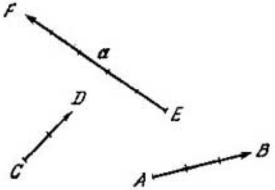


Fig. 48.

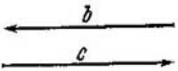


Fig. 49.

mos por $\overrightarrow{AB}$. En la fig. 48 se muestran tres vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.

La longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ (medida con la unidad de escala adoptada) se llama su *módulo* y se designa por $|\overrightarrow{AB}|$. Frecuentemente el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ se designa por la misma letra a, pero con letra cursiva. Por ejemplo, en la fig. 48

$$|\overrightarrow{AB}| = 3; \ |\overrightarrow{CD}| = 2; \ |\overrightarrow{EF}| = |\boldsymbol{a}| = a = 5.$$

Así, pues, el módulo de un vector es un número (escalar) siempre positivo.

Dos vectores son *iguales* cuando tienen módulos iguales y la misma dirección. De esta definición se deduce que un vector se puede trasladar paralelamente a sí mismo, sin que varíe.

Dos vectores con iguales módulos, pero dirigidos en sentidos opuestos se llaman *opuestos*. En la fig. 49 los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son opuestos.

El vector, opuesto al vector $\boldsymbol{a}$, se designa por $-\boldsymbol{a}$.

§ 88. Operaciones con vectores

Por las reglas establecidas con los vectores se pueden realizar las operaciones aritméticas, como con los números, es decir, las magnitudes escalares.

1. Suma de vectores. Tengamos tres vectores: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Se denomina suma de estos vectores un vector construido según la siguiente regla (fig. 50,*a*).

En un punto arbitrario A trazamos el vector $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$: para ello trasladamos el vector $\boldsymbol{a}$ paralelamente a sí mismo de manera que su origen coincida con el punto A; análogamen-

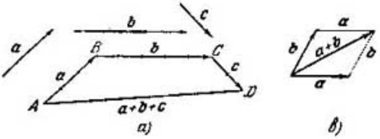


Fig. 50.

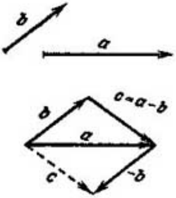


Fig. 51.

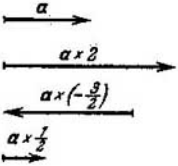


Fig. 52.

te, en el punto B trazamos el vector $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$; en el punto C construimos el vector $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$; se obtiene una línea quebrada vectorial (línea poligonal) $ABCD$. El vector $\overrightarrow{AD}$, que va desde el origen del primer vector hasta el extremo del último, se llama *suma**) de los tres vectores dados (por definición). La suma de dos vectores a veces se construye del siguiente modo: se llevan los vectores a un origen común y se construye sobre ellos, como sobre dos lados adyacentes, un paralelogramo; entonces, el vector que va en diagonal, desde el origen común es, precisamente, su suma (fig. 50,*b*).

2. Diferencia de vectores. Se denomina *diferencia* entre el vector $\boldsymbol{a}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ un tercer vector $\boldsymbol{c}$ tal que sumado al vector $\boldsymbol{b}$ nos da el vector $\boldsymbol{a}$. Tal vector se puede construir del siguiente modo: llevamos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ a un origen común (fig. 51). El vector que va desde el extremo del vector $\boldsymbol{b}$ al extremo del vector $\boldsymbol{a}$ es precisamente la diferencia entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Observación. La diferencia del vector $\boldsymbol{b}$ se puede cambiar por la suma del vector opuesto $-\boldsymbol{b}$. El resultado será el mismo. Cabe hacer notar que si dirigimos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ por dos lados adyacentes de un paralelogramo, el vector

*) Se conoce bajo el nombre de resultante. (*Nota del T.*)

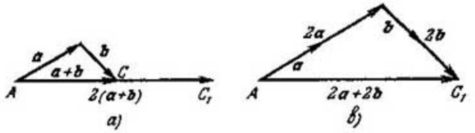


Fig. 53.

que va por una de las diagonales es la suma, y por la otra diagonal, la diferencia de los vectores dados.

3. Producto de un vector por un escalar. Multiplicar un vector $\boldsymbol{a}$ por un escalar m significa aumentar su longitud (módulo) m veces, conservando el sentido primario del vector si $m > 0$, ó variando este sentido por el opuesto si $m < 0$. En la fig. 52 se muestran los casos: 1) $\boldsymbol{a}\cdot 2$; 2) $\boldsymbol{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$; 3) $\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{2}$. Para todo vector $\boldsymbol{a}$ se puede construir su vector unitario $\boldsymbol{a}^0$, que tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{a}$, y longitud igual a la unidad. Siendo así, por la regla de multiplicación de un vector por un escalar, tendremos

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0 \cdot a.$$

Todo vector $\boldsymbol{a}$ es igual a su vector unitario $\boldsymbol{a}^0$ multiplicado por el módulo del vector $\boldsymbol{a}$, es decir, por el número positivo a. La notación $\boldsymbol{a}\cdot 2$ y $2\boldsymbol{a}$ significa lo mismo. Si la suma de vectores se multiplica por un escalar, cada vector sumando se puede multiplicar por este escalar y luego sumar los resultados obtenidos. En la fig. 53 se muestra el producto de la suma de vectores $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ por el escalar 2; este producto se ha realizado de dos maneras: a) el vector $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ se multiplica por 2 (la longitud aumenta dos veces); se obtiene el vector $\overrightarrow{AC_1}$ igual a $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ (fig. 53, *a*); b) el vector $\overrightarrow{AC_1}$ se ha obtenido como suma de los vectores $2\boldsymbol{a}$ y $2\boldsymbol{b}$ (fig. 53, *b*).

§ 89. Proyección de un vector sobre un eje

Como sabemos, se llama *proyección de un punto M* sobre un eje el pie de la perpendicular MM_1 bajada desde el punto M a ese eje, es decir, el punto M_1.

Supongamos dados el eje l y un vector arbitrario $\overrightarrow{AB}$ (fig. 54). Bajemos las perpendiculares desde el origen y el extremo del vector al eje. Sobre el eje obtendremos el segmento A_1B_1,

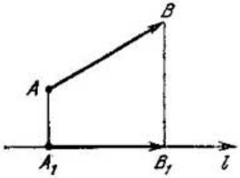


Fig. 54.

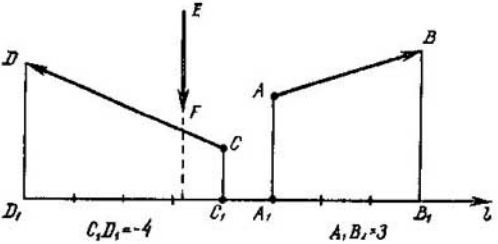


Fig. 55.

---

cuya magnitud algebraica se llama, precisamente, *proyección del vector* $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje l, y se escribe del siguiente modo: proy $_l\overrightarrow{AB} = A_1B_1$.

DEFINICIÓN. Se llama *proyección de un vector* sobre un eje el número (escalar) que expresa la magnitud algebraica del segmento en el eje, limitado por las proyecciones del origen y del extremo de dicho vector.

En la fig. 55 se muestra que

proy $_l\overrightarrow{AB} = A_1B_1 = 3;$

proy $_l\overrightarrow{CD} = C_1D_1 = -4;$

proy $_l\overrightarrow{EF} = 0,$

puesto que el vector $\overrightarrow{EF}$ es perpendicular al eje l. Es evidente que, si el vector es paralelo al eje de proyección y tiene igual sentido que el eje, su proyección es igual a la longitud del vector; si el sentido del vector es contrario al eje l, entonces

proy $_l a = -a$.

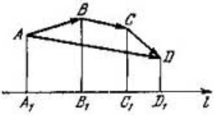


Fig. 56.

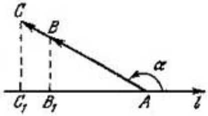


Fig. 57.

Teorema 1. *La proyección de la suma de vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de cada uno de los vectores sumandos sobre el mismo eje.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el vector $\overrightarrow{AD}$ es la suma de tres vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (fig. 56). En tal caso,

$$\text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AD} = A_1D_1. \tag{1}$$

Proyectemos cada uno de los vectores sumandos sobre el mismo eje:

$$\text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AB} = A_1B_1;\ \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{BC} = B_1C_1;\ \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{CD} = C_1D_1. \tag{2}$$

Sumando estas igualdades, obtenemos:

$$\text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AB} + \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{BC} + \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{CD} = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1. \tag{3}$$

Los segundos miembros de las igualdades (1) y (3) son iguales entre sí, por lo tanto, también lo serán los primeros miembros:

$$\text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AD} = \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AB} + \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{BC} + \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{CD}.$$

Observación. Frecuentemente el teorema que hemos demostrado se formula también del siguiente modo: la proyección de una quebrada vectorial (línea poligonal) sobre un eje es igual a suma de las proyecciones de cada uno de los componentes de la quebrada e igual a la proyección del vector de cierre o vector resultante sobre ese mismo eje. $\overrightarrow{AD}$ es el *vector de cierre* de la quebrada vectorial $ABCD$.

Teorema 2. *Para el ángulo dado α, formado por vector con el eje l, la relación de la proyección del vector a su módulo es un número determinado, independiente del módulo del vector.* En la fig. 57 dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un mismo ángulo α con el eje l, además

$$\text{proy}\ {}_lAB = AB_1,\ \text{proy}\ {}_l\overrightarrow{AC} = AC_1.$$

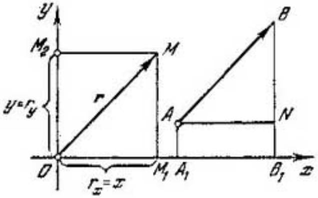


Fig. 58.

De la semejanza de los triángulos rectángulos ABB_1 y ACC_1 tenemos

$$\frac{|AB_1|}{AB}=\frac{|AC_1|}{AC}; \tag{4}$$

las proyecciones de los vectores se han tomado por el valor absoluto, puesto que en geometría los lados de los triángulos siempre se expresan por números positivos. Empero las proyecciones AB_1 y AC_1 tienen el mismo signo (en la fig. 57 ambas son negativas), por lo cual podemos omitir los signos de valor absoluto en la igualdad (4), y obtendremos

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC},$$

lo que se quería demostrar.

Observación. Si $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$;

proy $_l\boldsymbol{a}=a_l$, proy $_l\boldsymbol{b}=b_l$,

la confirmación del teorema se escribe así:

$$\frac{a_l}{a}=\frac{b_l}{b}.$$

§ 90. Coordenadas de un vector

Supongamos que en el sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares) xOy se ha dado el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 58).

● DEFINICIÓN. El vector dirigido desde el origen de coordenadas hacia el punto arbitrario M del plano xOy, se llama *radio vector del punto M* y se designa por $\boldsymbol{r}$;

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r},$$

Proyectemos el vector $\boldsymbol{r}$ sobre el eje Ox y el eje Oy, obtendremos

$$\text{proy}\ _x\boldsymbol{r} = OM_1 = \boldsymbol{r}_x,\quad \text{proy}\ _y\boldsymbol{r} = OM_2 = \boldsymbol{r}_y.$$

Se demuestra fácilmente que si el vector r deja de ser radio vector y se desplaza paralelamente a sí mismo en la nueva posición $\overrightarrow{AB}$, sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas no varían. Esto se deduce de la igualdad de los triángulos rectángulos ΔOM_1M y ΔABN:

$$|\boldsymbol{r}| = |\overrightarrow{AB}|,$$
$$|OM_1| = |A_1B_1|,$$

pero, dado que el sentido de los segmentos OM_1 y A_1B_1 es el mismo, se puede prescindir del signo de valor absoluto:

$$OM_1 = A_1B_1 = \text{proy}\ _x\boldsymbol{r}.$$

De tal modo, cada vector dado en el plano xOy tiene proyecciones completamente determinadas sobre los ejes de coordenadas; también se verifica lo recíproco; dos proyecciones dadas sobre los ejes de coordenadas determinan completamente el vector.

● DEFINICION. Las proyecciones de un vector sobre los ejes de coordenadas se denominan *coordenadas del vector*.
Las coordenadas del vector se admite en expresar por la notación:

$$\boldsymbol{a} = \{x, y\},$$

donde $x = \text{proy}\ _x\boldsymbol{a}$, $y = \text{proy}\ _y\boldsymbol{a}$. La primera coordenada x puede llamarse abscisa del vector $\boldsymbol{a}$, y la segunda coordenada y, ordenada del vector $\boldsymbol{a}$. Las coordenadas del radio vector $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ son al mismo tiempo coordenadas del punto M, es decir, extremo del radio vector.
Si el origen del vector no coincide con el origen de coordenadas, las coordenadas del vector y las coordenadas del extremo del vector no son las mismas, pero, en tal caso, se cumple la correlación

$$\overrightarrow{AB} = \{x, y\} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\},$$

puesto que $x = \text{proy}\ _x\overrightarrow{AB} = x_B - x_A$, $y = \text{proy}\ _y\overrightarrow{AB} = y_B - y_A$, lo que se ve claramente en la fig. 58.

T e o r e m a. *Las coordenadas de la suma de dos vectores son iguales a la suma de las coordenadas respectivas de los vectores sumandos.*

■ DEMOSTRACIÓN. Dado $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1\}$; $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2\}$; hay que demostrar que $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$, donde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Por el teorema de proyección de la suma de vectores sobre un eje, tendremos

$$\text{proy}\ _x\boldsymbol{c} = \text{proy}\ _x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}\ _x\boldsymbol{a} + \text{proy}\ _x\boldsymbol{b} = x_1 + x_2,$$
$$\text{proy}\ _y\boldsymbol{c} = \text{proy}\ _y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}\ _y\boldsymbol{a} + \text{proy}\ _y\boldsymbol{b} = y_1 + y_2.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\}$.

§ 91. Descomposición de un vector según los ejes de coordenadas

Un vector arbitrario $\overrightarrow{AB}$ del plano de coordenadas xOy se puede considerar como suma de dos vectores dirigidos según los ejes de coordenadas. Para ello es suficiente proyectar el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre los ejes de coordenadas (fig. 59). En tal caso obtenemos dos vectores proyecciones del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje Ox y el eje Oy, o sea, el vector $\overrightarrow{A_1B_1}$ y el vector $\overrightarrow{A_2B_2}$, la suma de los cuales es igual al vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{AB}.$$

Esto se deduce de la igualdad

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}, \text{ puesto que } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{A_1B_1}.$$

● DEFINICIÓN. Los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{A_2B_2}$ se llaman *componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ según los ejes de coordenadas.*
Tomemos sobre cada uno de los ejes de coordenadas un vector que tenga la dirección del correspondiente eje:
$\boldsymbol{i}$ es el vector unitario del eje Ox,
$\boldsymbol{j}$ es el vector unitario del eje Oy.
Supongamos que

$$\overrightarrow{AB} = \{x, y\}.$$

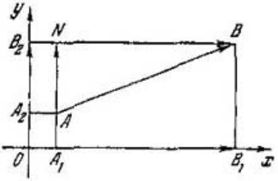


Fig. 59.

En tal caso según la regla de multiplicación de un vector por un escalar, tendremos:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{A_2B_2} = y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

Hemos obtenido una de las fórmulas fundamentales del álgebra vectorial:

Todo vector del plano de coordenadas xOy es igual a la suma del producto de sus coordenadas por los correspondientes vectores unitarios de los ejes.

§ 92. Producto escalar de dos vectores

▶ P r o b l e m a. Por acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$ un cuerpo realiza un movimiento de avance, de manera que su centro de gravedad O se desplaza al punto M; además OM forma un ángulo de 60° con el sentido de acción de la fuerza (fig. 60). Calcular el trabajo realizado por la fuerza si $|\boldsymbol{F}| = F = 12$ kgf y $OM = 5$ m.

Si la dirección de la fuerza coincide con el sentido de desplazamiento, el trabajo A es igual al producto del módulo de la fuerza por el camino recorrido. En este caso la regla no es aplicable puesto que la fuerza actúa bajo un ángulo.

Descompongamos la fuerza $\boldsymbol{F}$ en dos componentes: $\boldsymbol{F}_1$, dirigida según la recta OM, y $\boldsymbol{F}_2$, perpendicular a $\boldsymbol{F}_1$. El trabajo lo realiza solamente la componente horizontal $\boldsymbol{F}_1$, su módulo (véase el triángulo rectángulo en la fig. 60) $F_1 = F \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (kgf), por lo cual el trabajo realizado $A =$

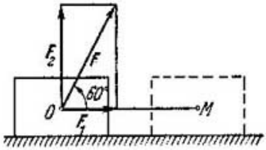


Fig. 60.

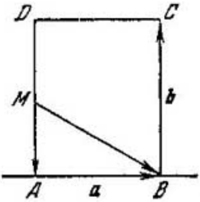


Fig. 61.

$= 6 \cdot 5 = 30$ (kgm). En este problema hemos tenido dos vectores: el vector fuerza $\boldsymbol{F}$ y el vector desplazamiento $\overrightarrow{OM}$. Fue necesario poner en correspondencia con ellos una cierta magnitud escalar, en este caso, el trabajo.

● DEFINICIÓN. Se llama *producto escalar* o interno del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman
$\boldsymbol{ab} = ab \cos \varphi$,
donde φ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
De este modo, el trabajo es el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 12 \cdot 5 \cos 60° = 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ (kgm)}.$$

§ 93. Distintos problemas con vectores

▶ Problema 1. Sobre los lados del rectángulo $ABCD$ se han construido los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$. Expresar mediante estos dos vectores dados el vector $\overrightarrow{MB}$, si M es el punto medio del lado AD (fig. 61).

Tenemos que: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, pero $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $AB = \boldsymbol{a}$, por eso $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

▶ Problema 2. Construir un vector $\boldsymbol{c}$ igual a $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Construyamos un vector igual al doble del vector $\boldsymbol{a}$ (el origen del vector es el punto arbitrario A). Lo sumamos con el vector contrario al vector $\boldsymbol{b}$, es decir, con el vector $(-\boldsymbol{b}) =$

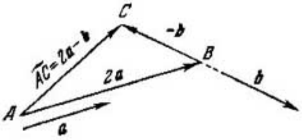


Fig 62

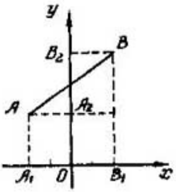


Fig 63.

$= \overrightarrow{BC}$. En tal caso el vector $\overrightarrow{AC}$ es igual a la suma $2\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ (fig. 62)

▶ P r o b l e m a 3. Dado el vector $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, siendo $A\,(-2; 3)$, $B\,(2; 6)$; hallar las proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas; el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ y el vector unitario $\boldsymbol{a}^0$ del vector $\boldsymbol{a}$ (fig. 63).

La proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje Ox es igual a la magnitud algebraica del segmento A_1B_1, que se encuentra sobre el eje Ox. El segmento A_1B_1 es positivo y de longitud igual a $2 - (-2) = 4$ unidades. La proyección del vector sobre el eje de ordenadas es igual a $6 - 3 = 3$.
El módulo (la longitud del vector) es igual a

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

El vector unitario $\boldsymbol{a}^0$ del vector dado $\boldsymbol{a}$ lo hallamos de la igualdad $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0 \cdot a$, de donde $\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{5}$.

▶ P r o b l e m a 4. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = \{-1, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{3, 3\}$, entonces $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{2, 5\}$ (fig. 64).
Por el teorema de proyección de la suma de vectores tenemos:
$\text{proy}_x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_x\boldsymbol{a} + \text{proy}_x\boldsymbol{b} = -1 + 3 = 2.$
Tomemos la proyección sobre el eje Oy:
$\text{proy}_y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_y\boldsymbol{a} + \text{proy}_y\boldsymbol{b} = 2 + 3 = 5.$
Así, pues, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{2, 5\}$.

▶ P r o b l e m a 5. Hallar la descomposición de $\overrightarrow{AB}$ según los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ de los ejes de coordenadas, si $A\,(-2; 3)$, $B\,(4; 5)$ (fig. 65).

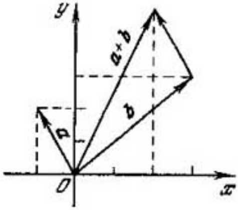


Fig. 64.

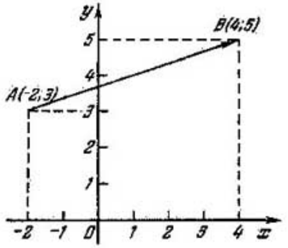


Fig. 65.

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{proy}\ _x\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 4 - (-2) = 6,$$

$$\text{proy}\ _y\overrightarrow{AB} = y_B - y_A = 5 - 3 = 2,$$

$$\overrightarrow{AB} = 6i + 2j$$

▲ **Ejercicios**

1. Representar tres vectores cualesquiera y construir su suma.
2. Trazar dos vectores arbitrarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y construir un vector igual a la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
3. Sobre los lados del rectángulo ABC se han construído los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{c}$. ¿A qué es igual la suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$?
4. Comentar las siguientes igualdades vectoriales: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})$ (propiedad conmutativa), $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ (propiedad asociativa), $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\, m = \boldsymbol{a}m + \boldsymbol{b}m$ (propiedad distributiva).
5. Representar un vector arbitrario $\boldsymbol{a}$ y junto a él construir los vectores: $\boldsymbol{a}\,\frac{3}{2}$; $\boldsymbol{a}\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-2\boldsymbol{a}$.
6. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje que forma con el vector un ángulo de 120°, si $|\boldsymbol{a}| = 8$.
7. Sobre los lados AB y AD del rectángulo $ABCD$ se han trazado (desde el punto A) los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$. Expresar por $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, si la longitud de los lados de rectángulo es $AB = 4$, $AD = 6$.
8. M y N son los puntos medios de los lados CD y BC del rectángulo $ABCD$ (véase el problema anterior). Determinar los vectores: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{MN}$, expresándolos por los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.
9. En el origen de coordenadas se han aplicado tres fuerzas: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, además A (0; −2), B (4; 2), C (4; −2).

Construír la resultante de estas tres fuerzas, hallar sus coordenadas y calcular la magnitud de la misma.

10. Demostrar que los puntos $A(3, -1)$, $B(1; 2)$, $C(-1; 1)$ $D(1; -2)$ son vértices de un paralelogramo.

Observación. Las coordenadas semejantes de los vectores paralelos son proporcionales.

11. Dados tres vértices sucesivos del paralelogramo: $A(1; 1)$, $B(4; 5)$, $C(-2; 2)$; hallar las coordenadas del cuarto vértice D, opuesto al vértice B, utilizando el método vectorial.

12. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, hallar el producto escalar $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

13. Utilizando el producto escalar hallar el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

14. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 8\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, hallar las proyecciones $\text{proy}_{\,b}\boldsymbol{a}$ y $\text{proy}_{\,a}\boldsymbol{b}$.

15. Sobre los dos vectores $\boldsymbol{a} = \{2, 1\}$ y $\boldsymbol{b} = \{-1, 5\}$ se ha construido un paralelogramo; hallar el ángulo entre sus diagonales.

16. Dado $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, además $\boldsymbol{a} = \{3, 4\}$; $\boldsymbol{b} = \{8, y\}$, hallar el número y.

17. Verificar por el método vectorial que las diagonales del rombo se dividen en el punto de intersección por la mitad.

18. Dados tres vectores: $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2\}$, $\boldsymbol{c} = \{x_3, y_3\}$, demostrar que $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

19. Calcular $\left|\boldsymbol{i} - \dfrac{2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})}{5}\right|$, si $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ son dos vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

20. Calcular $\left|\boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}\right|$, si $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$ y el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 60°.

CAPITULO IX

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA

§ 94. Generalización del concepto de ángulo

En la Geometría el ángulo se define como una figura formada por dos rayos que parten de un punto común; en este caso no se hace distinción entre los lados del ángulo: el ángulo AOB o el ángulo BOA se consideran iguales. Además, nunca en geometría se tropieza con ángulos negativos.

Establezcamos un concepto más general sobre el ángulo como sobre una magnitud algebraica, que puede adquirir valores cualesquiera: positivos, negativos o nulo.

Tracemos el eje OP desde el origen O y con un radio cualquiera r describimos una circunferencia. Supongamos que esta circunferencia interseca al eje OP en el punto A (fig. 66). Si M es un punto arbitrario de la circunferencia, le corresponde el vector $\overrightarrow{OM}$, el que en adelante denominaremos *radio vector* del punto M. En tal caso, el ángulo $AOM = \alpha$ lo consideraremos formado por rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, desde la posición inicial OA hasta la posición OM:

OA es el lado inicial del ángulo (lado fijo),
OM es el lado extremo o final del ángulo.

● DEFINICIÓN. El ángulo α se considera *positivo* si está formado por la rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y *negativo*, si el vector $\overrightarrow{OM}$ gira en el sentido de las agujas del reloj. Sin embargo, a la posición dada OM del lado extremo le corresponde no sólo el único ángulo α: el vector $\overrightarrow{OM}$ que gira al principio en el sentido positivo el ángulo α, después de esto puede cumplir cualquier número entero de revoluciones en sentido positivo o negativo, luego de lo cual su extremo resulta

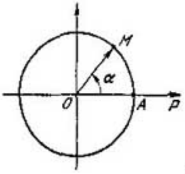


Fig. 66.

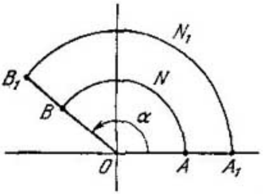


Fig. 67

invariablemente en el mismo punto fijado M. Por lo tanto, a la posición dada del lado extremo del ángulo le corresponde un conjunto infinito de ángulos tanto positivos como negativos. Todos estos ángulos se obtienen por la fórmula

$$\beta = \alpha + 360°k,$$

donde k es un número entero cualquiera, incluso 0:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

E j e m p l o. Si el radio vector $\overrightarrow{OM}$ se gira en sentido positivo un ángulo de 120° con respecto al lado inicial OA, a tal posición del vector $\overrightarrow{OM}$ corresponden: a) los ángulos positivos de 120°, 480° 840°, 1200°, . . .; b) los ángulos negativos de (−240)°, (−600°), (−960°), . . . Todos los ángulos enumerados están contenidos en la fórmula

$$\beta = 120° + 360°k$$

cuando $k = 0, 1, 2, 3$ para los ángulos positivos a) y cuando $k = -1, -2, -3$ para los ángulos negativos b).

§ 95. Medida en radianes de los ángulos

Al medir los ángulos en grados se toma como unidad del ángulo aquel que es igual a 1/90 del ángulo recto y se llama *grado angular* (1°).

En las Matemáticas, así como en otras ciencias (física, mecánica, astronomía, etc.), se utiliza ampliamente una medida de ángulos distinta, denominada *radian*.

Supongamos que α es un ángulo central, al que corresponden dos acros ANB y $A_1N_1B_1$ (fig. 67) de radios $OA = r$ y $OA_1 = r_1$. Si la longitud del arco ANB lo designamos por l, la longitud del arco $A_1N_1B_1$, por l_1, se demuestra fácilmente que

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1},$$

es decir, para el ángulo central α dado la relación de la longitud del arco, sobre el cual se apoya, a la longitud del radio es una magnitud constante, independiente de la medida del radio. En efecto, la longitud del arco, correspondiente al ángulo central, en α grados, será:

$$l = \frac{2\pi r\alpha}{360} + \frac{\pi r\alpha}{180},$$

$$l_1 = \frac{2\pi r_1\alpha}{360} = \frac{\pi r_1\alpha}{180},$$

de donde

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi\alpha}{180}, \quad \frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

De la igualdad de los segundos miembros se deduce la igualdad de los primeros:

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1}.$$

lo que se quería demostrar. Designamos $\frac{l}{r} = a$.

● DEFINICIÓN 1. El número a, igual a la relación de la longitud del arco l, correspondiente a un cierto ángulo central, a la longitud del radio r, se llama *medida en radian* del ángulo dado.

En el sistema de medición en radianes se admite como unidad el ángulo, para el cual $l = r$, en tal caso $a = 1$. Este ángulo se denomina *radian*.

● DEFINICIÓN 2. Se denomina *radian* un ángulo central tal cuya longitud del arco es igual al radio.

De este modo, 1) si la longitud del arco es igual a dos radios, el ángulo es de 2 radianes, 2) si $l = \frac{1}{3} r$, el ángulo es igual a un tercio de radian.

Observación. Frecuentemente en la literatura matemática no se escribe «radian» sino sólo se sobreentiende; por ejemplo, se escribe $\angle AOB = 1{,}5$ en lugar de la notación completa $\angle AOB = 1{,}5$ radian.

§ 96. Dependencia entre las medidas de ángulos en radianes y en grados

Todo ángulo medido en grados se puede convertir en radianes y, viceversa, el ángulo medido en radianes se puede convertir en grados.

Hallemos en primer término cuántos grados contiene 1 radian. Se sabe que la longitud de una circunferencia contiene 2π radios, por lo tanto,

$360° = 2\pi$ (rad),

$180° = \pi$ (rad),

de donde en 1 radian se tendrá

$$\frac{180°}{\pi}=\frac{180°}{3{,}14159\ldots}\approx 57°17'44{,}8''.$$

Con menor precisión se tomará el radian igual a $57°18'$. Supongamos que α es la medida en grados de cierto ángulo; a, la medida en radianes del mismo ángulo; en tal caso se cumple la siguiente proporción:

$\alpha : 180 = \quad : \pi$,

de donde

$$a=\frac{\pi\alpha}{180}. \tag{1}$$

Mediante la fórmula (1) formemos la tabla de las medidas en radianes y en grados de algunos ángulos

$\alpha°$	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

En esta tabla se dan las medidas en radianes de los ángulos más usuales; además, esta medida está expresada mediante el número π, cuyo valor aproximado se puede tomar con la exactitud deseada. Por ejemplo, $30° = \frac{\pi}{6}$ (rad), de donde $30° \approx \frac{3{,}14}{6}$ (rad) $\approx 0{,}52$ (rad), $30° \approx \frac{3{,}1416}{6}$ (rad) $\approx$ $\approx 0{,}5236$ (rad), etc. De la fórmula (1) se puede hallar el ángulo en $\alpha°$; obtendremos:

$$\alpha°=\frac{180°a}{\pi}. \tag{2}$$

La fórmula (2) nos da la medida en grados del ángulo según radianes.

E j e m p l o. $a = 0{,}3$; hallar $\alpha°$:

$$\alpha°=\frac{180°\cdot 0{,}3}{\pi}\approx\frac{54}{3{,}14}\approx 17°.$$

Para una rápida conversión de cualquier ángulo medido en grados a radianes y viceversa existen las correspondientes tablas en todas las guías.
Resolvamos dos ejemplos utilizando las tablas de cuatro cifras de V. M. Bradis.*)

E j e m p l o 1. Convertir en radianes el ángulo de 64°38'. Por las tablas de Bradis hallamos:

$$\begin{aligned} 64°36' &= 1{,}1275 \\ 2' &= 0{,}0006 \\ \hline 64°38' &= 1{,}1281 \text{ (rad)} \end{aligned}$$

E j e m p l o 2 Expresar en grados y minutos el ángulo de 2,154 rad. Puesto que en las tablas de Bradis no existe tal ángulo, su medida en grados se hallará en dos etapas

$$\begin{aligned} 1{,}1537 \text{ rad} &= 66°6' \\ 1{,}0003 \text{ rad} &= 57°19' \\ \hline 2{,}154 \text{ rad} &= 123°25' \end{aligned}$$

§ 97. Longitud del arco de circunferencia

De la fórmula $a = l/r$ (véase § 77) se deduce que $l = ra$; en otras palabras, *la longitud del arco de circunferencia es igual al radio multiplicado por la medida en radianes del ángulo central correspondiente a este arco.*

E j e m p l o. Calcular la longitud del arco de circunferencia de radio $r = 20$ cm, si el arco contiene 34°18' (de arco). El ángulo central correspondiente a este arco también contiene 34°18' (angulares), pero

$34°18' = 0{,}5986$ (rad),

y por eso

$l = 20 \cdot 0{,}5986 = 11{,}972$ (cm).

§ 98. Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

El los cursos superiores de la escuela media se dan las definiciones de seno, coseno, tangente y cotangente de un ángu-

*) Son las tablas logarítmicas para la escuela media. (*Nota del T.*)

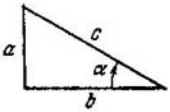


Fig. 68.

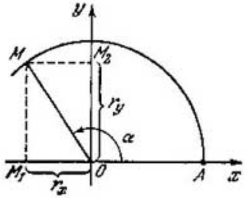


Fig. 69.

lo agudo α como relación de los lados de un triángulo rectángulo (fig. 68):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.$$

Puesto que estas definiciones corresponden solamente a un ángulo agudo α $(0 < \alpha < 90°)$, no se puede hablar de seno, coseno, tangente y cotangente de ángulos tales, como, por ejemplo, de 0°, 90°, 120°, puesto que el ángulo agudo de un triángulo rectángulo no puede tomar tales valores.

Empero se puede dar una nueva definición de estas magnitudes de manera que ellas correspondan a cualquier ángulo α.

Tracemos dos ejes mutuamente perpendiculares Ox y Oy. Desde el punto de su intersección O con un radio arbitrario r describimos una circunferencia que corte al eje Ox en el punto A (fig. 69).

Supongamos que M es un punto cualquiera de la circunferencia, al que corresponde el radio vector $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = \{x, y\}$. El lado inicial del ángulo $AOM = \alpha$ se considerará siempre el lado OA, que se encuentra sobre el eje Ox, el lado extremo será OM. Notemos una vez más, que α es un ángulo formado por el vector $\boldsymbol{r}$ con el sentido positivo del eje Ox.

● DEFINICIÓN 1. Se llama *seno de un ángulo* α la relación de la ordenada del vector $\boldsymbol{r}$ al módulo del mismo vector:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}. \quad (1)$$

● DEFINICIÓN 2. Se llama *coseno de un ángulo* α la relación de la abscisa del vector $\boldsymbol{r}$ al módulo del mismo vector:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}. \tag{2}$$

● DEFINICIÓN 3. Se llama *tangente de un ángulo* α la relación de la ordenada del vector $\boldsymbol{r}$ a su abscisa:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

● DEFINICIÓN 4. Se llama *cotangente de un ángulo* α la relación de la abscisa del vector $\boldsymbol{r}$ a su ordenada:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \tag{4}$$

Está claro que el seno, el coseno, la tangente y la cotangente son números abstractos, Variando el ángulo α las coordenadas x e y del vector varían, el módulo del vector permanece constante, y, por eso, sen α, cos α, tg α y ctg α serán magnitudes variables dependientes del ángulo α; debido a lo cual se llaman funciones trigonométricas del ángulo α.

Observación 1. Además de las cuatro funciones trigonométricas citadas, a veces se consideran dos funciones más.

● DEFINICIÓN 5. Se llama *secante de un ángulo* α la magnitud inversa al coseno:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

● DEFINICIÓN 6. Se llama *cosecante de un ángulo* α la magnitud inversa al seno:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{6}$$

Observación 2. Si el ángulo α es agudo, las nuevas definiciones de las funciones trigonométricas coinciden con las anteriores, puesto que ambas coordenadas x e y son positivas y catetos del triángulo rectángulo con el ángulo agudo α.

Observación 3. Basándonos en el teorema demostrado respecto a que la relación de la proyección del vector sobre un eje al módulo del vector no depende del módulo del vector (véase el teorema 2 del § 89), se pueden dar definiciones más sencillas del seno y del coseno de un ángulo α. Tomando como $\boldsymbol{r}$ el vector unitario, es decir, $r = |\boldsymbol{r}| = 1$, obtendremos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x.$$

Se llama seno de un ángulo α el número que expresa la ordenada y del radio vector unitario, y coseno de un ángulo α, el número que expresa la abscisa x del radio vector unitario. Tal interpretación del seno y del coseno es conveniente para estudiar sus variaciones al girar el radio vector unitario $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Corolario. De las fórmulas (1) y (2) se deduce que $x = r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$, donde α es un ángulo arbitrario. En adelante utilizaremos estas igualdades.

§ 99. Signos de las funciones trigonométricas

Los ejes de coordenadas Ox y Oy dividen la circunferencia de radio unitario en cuatro partes cada una de las cuales se llama *cuadrante*. En la fig. 70 se muestra la numeración de los cuadrantes. Supongamos que el vector variable $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ gira desde la posición inicial, coincidente con el vector $\overrightarrow{OA}$, en sentido positivo y cumple un giro. Por lo tanto, el ángulo α en este caso varía de 0° a 360° (en radianes de 0 a 2π). Veamos a continuación cómo varían durante la rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ los signos de sus coordenadas x e y, puesto que de los signos de las coordenadas dependen los signos de las mismas funciones trigonométricas.

a) La ordenada y se conserva positiva hasta que el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$, es decir, el punto M, se mantiene en la mitad superior de la circunferencia. Cuando el extremo del vector describe la mitad inferior de la circunferencia, la ordenada y es negativa. Por lo tanto, el seno es positivo para los ángulos que terminan en los I y II cuadrantes, y negativo para los ángulos que terminan en los III y IV cuadrantes.

b) La coordenada x del vector $\overrightarrow{OM}$ es positiva si el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$ se encuentra en la mitad derecha de la cir-

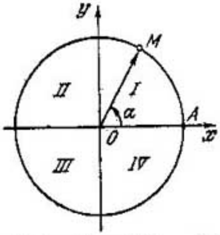


Fig. 70.

cunferencia, lo que corresponde a los ángulos que terminan en los I y IV cuadrantes. Si el extremo del vector rotatorio $\overrightarrow{OM}$ describe la mitad izquierda de la circunferencia, lo que corresponde a los ángulos que terminan en los II y III cuadrantes, la coordenada x es negativa. De este modo, los cosenos de los ángulos que terminan en los I y IV cuadrantes son positivos, y en los II y III cuadrantes son negativos.

c) Conociendo los signos de las coordenadas x e y del vector $\boldsymbol{r}$, se establecen fácilmente los signos de la tangente y la cotangente de cada cuadrante, puesto que por definición $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. De aquí se deduce que la tangente y la cotangente son positivas en los cuadrantes en que ambas coordenadas del vector son de signos iguales, lo que ocurre para los ángulos que terminan en los I y III cuadrantes. En los II y IV cuadrantes la tangente y la cotangente son negativas, puesto que x e y son de signos contrarios.

Como resultado del estudio del signo de las funciones trigonométricas tendremos la siguiente tabla:

Cuadrante / Función	I	II	III	IV
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−
ctg α	+	−	+	−

Observación. El signo de secante coincide con el signo de coseno, y el signo de la cosecante, con el signo de seno, lo que se deduce de las definiciones 5 y 6 del § 98.

§ 100. Variación de las funciones trigonométricas al variar el ángulo α en los límites de la primera circunferencia

Analicemos la variación de cada una de las cuatro funciones trigonométricas por separado al variar el ángulo de 0° a 360° (de 0 a 2π). Para ello lo más sencillo es partir de la circunferencia unitaria, para la cual (véase el § 98)
$\operatorname{sen} \alpha = y$; $\cos \alpha = x$.

1. Variación del seno. Si el ángulo α crece de 0° a 90°, el $\operatorname{sen} \alpha$ crece de 0 a 1 (fig. 71). Con el crecimiento ulterior del ángulo de 90° a 180° el seno decrece de 1 a 0. En el III cuadrante con la variación del ángulo de 180° a 270° el seno continúa decreciendo de 0 a -1. En el IV cuadrante, al variar el ángulo de 270° a 360° el seno crece de -1 a 0.

2. Variación del coseno. En la fig. 72 se muestra la variación del coseno: en el I cuadrante al crecer el ángulo α de 0° a 90° el coseno decrece de 1 a 0; en el II cuadrante con el crecimiento del ángulo α de 90° a 180° el $\cos \alpha$ continúa decreciendo de 0 a -1; al variar el ángulo α de 180° a 270° el $\cos \alpha$ crece de -1 a 0; por último, en el IV cuadrante al variar el ángulo α de 270° a 360° el coseno crece de 0 a 1.

3. Variación de la tangente. Por definición $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.
Para representarnos claramente la variación de la tangente tratemos de tomar para cada ángulo α, sobre un cierto eje, un segmento, cuya magnitud algebraica es igual a $\frac{y}{x}$, es decir, igual a $\operatorname{tg} \alpha$.
Construyamos una circunferencia de radio unitario. En el extremo del radio OA, que se encuentra sobre el eje Ox, trazamos la tangente AT, cuyo punto A tomamos como origen de lectura de los segmentos. Como sentido positivo del

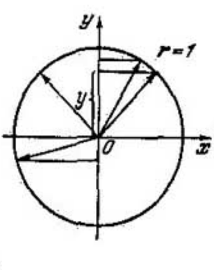


Fig. 71.

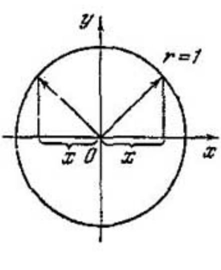


Fig. 72.

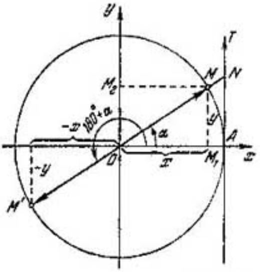


Fig. 73.

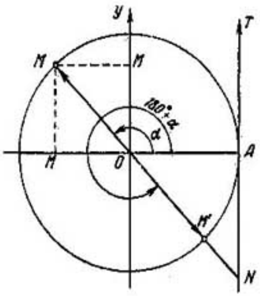


Fig. 74.

eje AT tomamos el sentido desde el punto A hacia arriba (fig. 73).

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma un ángulo α con el eje Ox. Continuamos la recta, en la que se encuentra el vector $\overrightarrow{OM}$ hasta cortar el eje AT en el punto N, obtenemos el segmento AN sobre el eje AT. Demostremos que su magnitud algebraica AN es igual a tg α. Si el ángulo α termina en el I cuadrante, el segmento ON es positivo. De la semejanza de los triángulos OM_1M y OAN se deduce la proporción $\frac{M_1M}{OM_1} = \frac{AN}{OA}$, ó $\frac{y}{x} = AN$, es decir, tg $\alpha = AN$.

Si el ángulo α termina en el II cuadrante (fig. 74), el segmento AN es negativo. En este caso, las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM}$ tienen signos distintos, y por eso, su relación es un número negativo. Por lo tanto, los números $\frac{y}{x}$ y AN tienen signos iguales; queda solamente demostrar la coincidencia de sus valores absolutos. De la semejanza de los triángulos rectángulos OMM_1 y OAN (ambos tienen el mismo ángulo agudo), tendremos:

$$\frac{|M_1M|}{|OM_1|} = \frac{|AN|}{1}, \text{ ó } \left|\frac{M_1M}{OM_1}\right| = |AN|$$

(la razón de las magnitudes absolutas de dos números es igual a la magnitud absoluta de su relación). Suprimiendo el signo de magnitud absoluta, obtendremos $\frac{y}{x} = AN$, es decir, tg $\alpha = AN$.

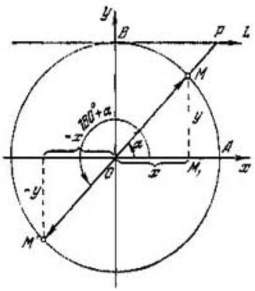


Fig. 75.

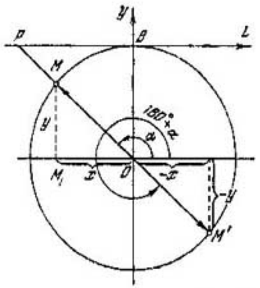


Fig. 76.

Proponemos a los lectores verificar el cumplimiento de la igualdad $\operatorname{tg} \alpha = AN$ (véase las figs. 73 y 74) cuando el ángulo termina en los III y IV cuadrantes.

A continuación se establece fácilmente lo siguiente.

1) Si el ángulo α crece desde 0° hasta 90°, la $\operatorname{tg} \alpha = AN$, permaneciendo positiva, crece ilimitadamente a medida que el ángulo α tiende al ángulo de 90° y deja de existir para $\alpha = 90°$, puesto que el vector $\overrightarrow{OM}$ deviene paralelo al eje AT. Convencionalmente se escribe que

$\operatorname{tg} \alpha \to +\infty$ para $\alpha \to 90°$.

2) Al crecer el ángulo α desde 90° hasta 180° la tangente se hace de signo negativo, y su valor absoluto decrece hasta 0 (fig. 74).

3) Puesto que (véase la fig. 73) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180° + \alpha)$, al variar el ángulo α desde 180° hasta 270° la tangente varía de igual modo que en el I cuadrante.

4) Análogamente la variación de la $\operatorname{tg} \alpha$ en el IV cuadrante es la misma que en el II, lo que se puede apreciar de la fig. 74.

4. Variación de la cotangente. Por analogía con el punto anterior, como eje tomamos la tangente BL trazada a la circunferencia unitaria en el extremo del radio OB, que se encuentra sobre el eje Oy. El punto B es el origen de lectura de los segmentos, por sentido positivo se toma el del punto B hacia la derecha (fig. 75). En tal caso, $BP = \operatorname{ctg} \alpha$, donde P es el punto de intersección de la recta, en el que se encuentra el vector $\overrightarrow{OM}$, con el eje BL. La demostración de esto la reducimos a la suposición de que el ángulo α termina en el cuadrante I; el análisis de los tres casos que quedan los dejamos a los lectores (véase las figs. 75 y 76).

En realidad, de la semejanza de los triángulos rectángulos OMM_1 y OBP se deduce la siguiente proporción

$$\frac{OM_1}{M_1M}=\frac{BP}{OB} \text{ ó } \frac{x}{y}=\frac{BP}{1}. \tag{1}$$

De este modo, $\frac{x}{y} = BP$, es decir, $\operatorname{ctg}\alpha = BP$.

Ahora se estudia fácilmente la variación de la cotangente al variar el ángulo.

1) Para $\alpha = 0$ el segmento BP es paralelo al eje Ox, por lo tanto, el ángulo de $0°$ no tiene cotangente.

Supongamos que α varía desde $0°$ hasta $90°$, en tal caso el segmento BP, manteniéndose positivo, disminuye desde los valores infinitamente grandes hasta 0 (véase la fig. 75).

2) Al variar el ángulo desde $90°$ hasta $180°$ el segmento BP crece ilimitadamente en valor absoluto, conservando su signo negativo (fig. 76). Por lo tanto, la cotangente sigue decreciendo, desapareciendo para $\alpha = 180°$, lo que convencionalmente escribimos así: $\operatorname{ctg}\alpha \to -\infty$ cuando $\alpha \to \to 180°$.

3) Si el ángulo α varía desde $180°$ hasta $270°$, la $\operatorname{ctg}\alpha$ varía de igual modo que al variar el ángulo α desde $0°$ hasta $90°$, es decir, decrece desde ∞ hasta 0. Esto se debe a que $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(180° + \alpha)$, lo que se comprueba con facilidad geométricamente (véase la fig. 75).

4) Análogamente al variar el ángulo desde $270°$ hasta $360°$ la cotangente varía de igual modo que al variar el ángulo desde $90°$ hasta $180°$ (véase la fig. 76).

§ 101. Construcción de un ángulo por el valor dado de una función trigonométrica

Veamos en los ejemplos la construcción del ángulo α.

E j e m p l o 1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$.

Dividamos el radio de la circunferencia $OB = 1$ en tres partes iguales (fig. 77). A la distancia de 2/3 del punto O trazamos una perpendicular a OB hasta cortar la circunferencia en los puntos M y M_1. Obtendremos los dos ángulos buscados:

$$\angle AOM = \alpha_1 \text{ y } \angle AOM_1 = \alpha_2.$$

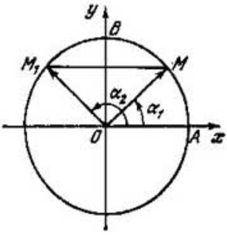


Fig. 77.

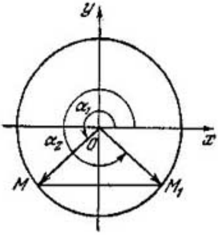


Fig. 78.

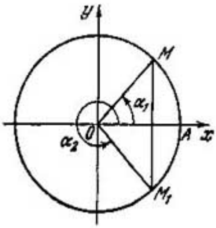


Fig. 79.

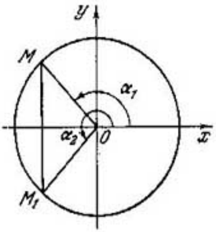


Fig. 80.

E j e m p l o 2. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4}$.

En la fig. 78 se muestra una construcción análoga a la descripta antes. Obtenemos dos ángulos: el primero, α_1, termina en el III cuadrante; el segundo, α_2, termina en el IV cuadrante.

E j e m p l o 3. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Dividamos el radio horizontal $OA = 1$ (fig. 79) en cinco partes iguales. A la distancia de 4/5 del punto O trazamos una perpendicular a OA hasta cortar la circunferencia en los puntos M y M_1; obtendremos dos ángulos α_1 y α_2 que terminan en los cuadrantes I y IV.

E j e m p l o 4. $\cos \alpha = -0{,}7 = -\frac{7}{10}$.

La construcción está dada en la fig. 80. Obtenemos dos ángulos: el primero, α_1, termina en el II cuadrante; el segundo, α_2, en el III cuadrante.

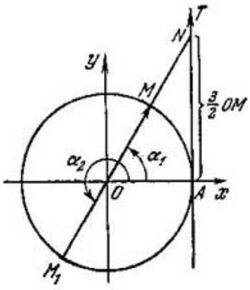


Fig. 81.

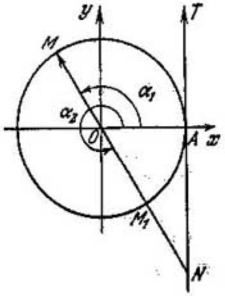


Fig. 82.

E j e m p l o 5. $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

Construyamos una circunferencia arbitraria y tracemos el eje de tangentes AT (fig. 81). Sobre el eje de tangentes, desde el punto de tangencia A, trazamos en sentido positivo el segmento AN, igual a un radio y medio; unimos el punto N con el centro de la circunferencia y OM lo continuamos hasta obtener el segundo punto de intersección M_1. En tal caso, $\alpha_1 = \angle AOM$ y $\alpha_2 = \angle AOM_1$ son los ángulos buscados.

E j e m p l o 6. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$.

La construcción es análoga a la anterior y está dada en la fig. 82.

Observación 1. La dualidad de las respuestas deja de ser rigurosa, si sobre el ángulo α se impone una limitación; por ejemplo,

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3} \quad (90^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Ahora el ángulo α debe tomarse solamente del segundo cuadrante (ángulo α_1 en la fig. 82).

Observación 2. La construcción de un ángulo por la secante y la cosecante puede ser sustituida por la construcción según el coseno y el seno. Por ejemplo, si la $\sec \alpha = 2$, ó $\frac{1}{\cos \alpha} = 2$, entonces $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Exactamente de igual modo no es necesario construir un ángulo por la cotangente. De la igualdad $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{5}$ se deduce que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$.

§ 102. Valores de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos

En adelante tropezaremos frecuentemente con ángulos tales como 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°, o en radianes, $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$. Se recomienda memorizar los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Aclaremos como se han hallado los números puestos en la tabla:

Angulo α / Denominación de la función	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$r_y = \operatorname{sen} \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$r_x = \cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\frac{r_y}{r_x} = \operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0
$\frac{r_x}{r_y} = \operatorname{ctg} \alpha$	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	No existe	0	No existe

Supongamos que $\alpha = 30°$, es decir, el radio vector $\overrightarrow{OM}$ de la circunferencia unitaria forma un ángulo de 30° con el eje Ox; ambas coordenadas son positivas y son los catetos de un triángulo de hipotenusa $r = 1$.

Por lo tanto, $x^2 + y^2 = 1$. Empero $y = \frac{1}{2}$ (el cateto opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la hipotenusa), y por eso,

$$x=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen} 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30°=\frac{y}{x}=$ $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} 30°=\frac{x}{y}=\sqrt{3}$.

De igual manera se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de los demás ángulos, que recomendamos que lo hagan los lectores.

§ 103. Dependencias entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

Supongamos que α es un ángulo arbitrario formado por el vector $\overrightarrow{OM}$ con el eje Ox, en tal caso

$$\operatorname{sen} \alpha=\frac{y}{r}; \quad \cos \alpha=\frac{x}{r}. \tag{1}$$

Elevemos al cuadrado las igualdades (1) y sumemos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2 \alpha=\dfrac{y^2}{r^2} \\ +\\ \cos^2 \alpha=\dfrac{x^2}{r^2} \\ \hline \operatorname{sen}^2 \alpha+\cos^2 \alpha=\dfrac{y^2+x^2}{r^2} \end{array} \tag{2}$$

Pero las coordenadas de los vectores x e y, tomadas en valor absoluto, son las longitudes de los catetos; la suma de sus cuadrados es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$x^2+y^2=r^2,$$

debido a lo cual, la igualdad (2) toma la forma

$$\operatorname{sen}^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1. \tag{3}$$

La suma de los cuadrados del seno y del coseno de un mismo ángulo es igual a 1.

Por definición $\operatorname{tg} \alpha=\frac{y}{x}$; la magnitud de la fracción $\frac{y}{x}$ no varía si dividimos el numerador y el denominador por el número r:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (4)$$

La tangente de un ángulo es la razón del seno de este ángulo al coseno del mismo ángulo (se supone que $\cos\alpha\neq 0$).

Por definición $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$. Empero,

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \qquad (5)$$

La cotangente de un ángulo es la razón del coseno de este ángulo al seno del mismo ángulo ($\operatorname{sen}\alpha\neq 0$).

Si a las identidades (3), (4), y (5) agregamos dos más,

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}, \qquad (6)$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad (7)$$

entonces obtenemos cinco relaciones mutuamente independientes entre seis funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Deduzcamos algunos corolarios de las igualdades (3) — (7).

1) Multiplicando las igualdades (4) y (5), obtendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

o bien

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

La cotangente de un ángulo es la magnitud inversa de la tangente y viceversa.

2) Dividiendo ambos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ por $\cos^2\alpha$; obtendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Basándonos en las igualdades (4) y (6) tendremos:

$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha.$

De un modo semejante dividiendo ambos miembros de la igualdad (3) por $\operatorname{sen}^2 \alpha$, obtendremos:

$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$

§ 104. Cálculo de los valores de todas las funciones triginométricas por el valor dado de una de ellas

Ejemplo 1. Dado: $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}6$, hallar los valores de todas las demás funciones.

1) Inmediatamente se puede hallar el valor inverso del seno, es decir, del $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$.

2) De la correlación $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, hallamos:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = \pm \frac{4}{5}$$

El doble signo $\pm$ lo escribimos puesto que no se sabe en qué cuadrante termina el ángulo α.

3) Hallamos la magnitud inversa del coseno:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \pm \frac{5}{4}$$

4) De la identidad $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ hallamos la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\pm \frac{4}{5}} = \pm \frac{3}{4}.$$

5) Por la tangente hallamos la magnitud inversa a ella:

$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{4}{3}$.

Observación. Si se sabe en qué cuadrante termina el ángulo α, se elimina la dualidad en los signos.

Ejemplo 2. $\operatorname{tg} \alpha = -2{,}4$ $(90° < \alpha < 180°)$. Calcular los valores de las demás funciones trigonométricas.

1) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{-2{,}4} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}.$

2) De la relación $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ hallamos:

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+(-2,4)^2}=-\frac{13}{5}$$

3) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$

4) De la identidad $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ se deduce que $\operatorname{sen}\alpha=$ $=\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; de donde

$$\operatorname{sen}\alpha=\left(-\frac{5}{13}\right)(-2,4)=\frac{12}{13}.$$

5) $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{13}{12}$.

Más adelante se da la tabla en la que cualquiera de las cuatro funciones, $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{ctg}\alpha$, está expresada por cualquiera de las tres restantes, suponiendo que no se señala en qué cuadrante termina el ángulo α.
Se recomienda a los estudiantes componer individualmente esta tabla.

Mediante las funciones / Funciones	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

§ 105. Distintos ejemplos y problemas

E j e m p l o 1. Calcular el valor de la fracción $\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}$ para $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$.

Dividamos el numerador y el denominador de dicha fracción por $\cos\alpha$ ($\cos\alpha\neq 0$), por lo que la magnitud de la fracción no varía; obtendremos:

$$\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}\right|_{\text{para } \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}-1}{\frac{2}{5}+1}=-\frac{3}{7}.$$

E j e m p l o 2. Dado:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=p, \qquad (1)$$

hallar la suma $\operatorname{tg}^2\alpha\pm\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Elevemos ambos miembros de la igualdad (1) al cuadrado:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\underbrace{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}_{2}=p^2,$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=p^2-2.$$

E j e m p l o 3. Demostrar que la fracción

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

no puede tomar valores negativos.

Transformemos dicha fracción:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}\geqslant 0;$$

puesto que ambos factores $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ y $\frac{1+\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$ no pueden ser negativos, su producto tampoco es negativo.

E j e m p l o 4. Hallar el ángulo $x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, si $3\operatorname{sen}x=2\cos^2 x$. Tenemos

$$3\operatorname{sen}x=2(1-\operatorname{sen}^2x),$$

o bien

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado con respecto a sen x:

$$(\operatorname{sen} x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4};$$

$$\operatorname{sen} x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ (no es posible)},$$

$$\operatorname{sen} x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

El ángulo agudo buscado $x = \frac{\pi}{6}$ (rad), ó $x = 30°$.

§ 106. Demostración de identidades

En la Trigonometría se tropieza frecuentemente con dos expresiones de diferentes aspectos, pero, que para todos los valores admisibles de los ángulos adquieren iguales valores numéricos. Estas dos expresiones se llaman *idénticas*. Para cerciorarnos de que la igualdad dada es una identidad, o como suele decirse, *demostrar la identidad*, de ordinario se transforma un miembro de la igualdad y se reduce éste al otro miembro. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Demostrar la identidad

$$\frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Reducimos el primer miembro al segundo:

$$\frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\right)} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

El primer miembro de la igualdad inicial se convirtió exactamente en una misma expresión que la del segundo miembro, con lo que se demuestra la identidad.

Ejemplo 2. Demostrar que

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} - \operatorname{cosec}^2\alpha + 1 = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Reducimos nuevamente el primer miembro. como el más complejo, al segundo; además, expresamos todas las funciones trigonométricas por la cotangente:

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=$$

$$=\frac{1-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-1}-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-\operatorname{ctg}\alpha)}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

E j e m p l o 3. Demostrar la identidad

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Reducimos el segundo miembro al primero;

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha.$$

En ciertos casos al demostrar las identidades conviene transformar ambos miembros a una misma expresión.

E j e m p l o 4. Demostrar la identidad

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}. \qquad (1)$$

Representemos dicha identidad en la siguiente forma:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Transformemos el primer miembro:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\,(\operatorname{sen}\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\cos\alpha}.$$

Transformemos el segundo miembro:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}=\frac{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

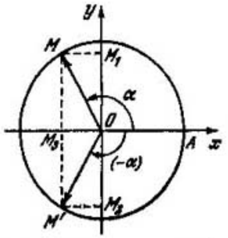


Fig. 83.

Con esto la identidad queda demostrada.

§ 107. Reducción de funciones trigonométricas de argumento negativo a funciones de argumento positivo

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma con el eje Ox un ángulo α; el vector $\overrightarrow{OM'}$, el ángulo $(-\alpha)$ (fig. 83; $OM = 1$); en tal caso

$$\operatorname{sen} \alpha = OM_1; \ \operatorname{sen}(-\alpha) = OM_2.$$

Las proyecciones OM_1 y OM_2 son iguales entre sí en valor absoluto, pero de signos contrarios; por lo tanto,

$$OM_2 = -OM_1,$$

o bien

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha.$$

Los puntos M y M' son simétricos con respecto al eje Ox, es decir, se encuentran sóbre una perpendicular al eje y a igual distancia a ambos lados de él, por eso, los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OM'}$ tienen la misma proyección sobre el eje Ox; por lo tanto,

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Ahora deducimos fácilmente que:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

De este modo, el signo menos en el argumento del coseno y de la secante se puede simplemente omitir, en tanto que el signo menos del seno, de la tangente, la cotangente y la cosecante se pone ante la notación de la misma función. En otras palabras, $y = \cos x$ es una función par (§ 50), en tanto que $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$ son funciones impares.

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen}(-120^\circ) = -\operatorname{sen} 120^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) =$

$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$;

4) $\operatorname{cosec}(-300^\circ) = -\operatorname{cosec} 300^\circ = -\operatorname{cosec}(360^\circ - 60^\circ) =$
$= \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 108. Fórmulas de reducción

En este párrafo se darán las fórmulas, por las cuales los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo α, que no exceda los límites $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ$, se pueden expresar por los correspondientes valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Estas fórmulas se llaman *fórmulas de reducción*.

1. Fórmulas de reducción para los ángulos que terminan en el II cuadrante. Todo ángulo, que termina en el II cuadrante, se puede representar o bien como una suma de $90^\circ + \alpha$, o bien como una diferencia de $180^\circ - \alpha$. Por ejemplo,

$115^\circ = 90^\circ + 25^\circ$, $115^\circ = 180^\circ - 65^\circ$.

De acuerdo a estas dos formas diferentes de representación de un mismo ángulo obtenemos dos series de fórmulas de reducción. En la fig. 84 se han representado dos circunferencias de radio unitario; en la primera de ellas se ha trazado un ángulo de $90^\circ + \alpha$, en la segunda, un ángulo α.

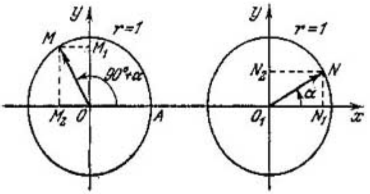


Fig. 84.

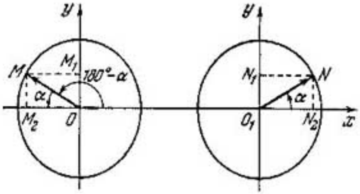


Fig. 85.

Supongamos que $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$, $\overrightarrow{O_1N} = \{x_1, y_1\}$;

$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = OM_1 = y$,

$\cos\alpha = O_1N_1 = x_1$.

De la igualdad de los triángulos rectángulos OM_1M y O_1N_1N se deduce que $|OM_1| = |O_1N_1|$, ó $|y| = |x_1|$.
Eliminando el signo de magnitud absoluta, ya que y y x_1 son positivos, obtenemos $y = x_1$, o $\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha$.
De la misma figura 84 se deduce que

$\cos(90° + \alpha) = OM_2$, $\operatorname{sen}\alpha = O_1N_2$.

Las proyecciones OM_2 y O_1N_2 son de igual valor absoluto pero de signos contrarios, por lo cual

$$\cos(90°+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90°+\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90°+\alpha)}{\cos(90°+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90°+\alpha) = \frac{\cos(90°+\alpha)}{\operatorname{sen}(90°+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

En la fig. 85 tenemos otro par de circunferencias unitarias, en las que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma con el eje Ox el ángulo de $180° - \alpha$; el vector O_1N, el ángulo α: $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = OM_1$, $\operatorname{sen}\alpha = O_1N_1$. Las coordenadas OM_1 y O_1N_1 son iguales en magnitud y signo:

$$OM_1 = O_1N_1,$$

o bien

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

Luego,

$$\cos(180° - \alpha) = OM_2, \quad \cos\alpha = O_1N_2.$$

Las coordenadas OM_2 y O_1N_2 son de igual valor absoluto y de signos contrarios:

$$OM_2 = -O_1N_2,$$

o bien

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

A continuación se puede hallar los valores de la tangente y la cotangente:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

E j e m p l o s. 1) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos 110° = \cos(90° + 20°) = -\operatorname{sen} 20° \approx -0{,}342$.

2. Fórmulas de reducción para ángulos que terminan en el III cuadrante. El ángulo que termina en el III cuadrante se puede representar o bien como suma de $180° + \alpha$, o bien como diferencia de $270° - \alpha$.

En la fig. 86 se han representado en dos circunferencias unitarias los ángulos $180° + \alpha$ y α:

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = OM_1, \quad \operatorname{sen}\alpha = O_1N_1;$$

las coordenadas OM_1 y O_1N_1 son de igual valor absoluto y de signos contrarios; por to tanto, $OM_1 = -O_1N_1$, ó

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

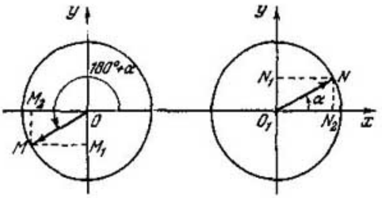


Fig. 86.

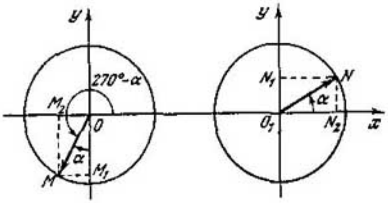


Fig. 87.

De manera semejante establecemos que

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha,$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$
$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$

En la fig. 87 se muestran los ángulos $270^\circ - \alpha$ y α en dos circunferencias unitarias. De acuerdo a lo representado en la figura, tendremos

$\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) = OM_1$, $\cos\alpha = O_1N_2$; $OM_1 = -O_1N_2$,

de donde

$\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$

De un modo análogo hallamos que

$\cos(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha,$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$
$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$

E j e m p l o s. 1) $\operatorname{sen} 250^\circ = \operatorname{sen}(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ \approx -0,9397$;

2) $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Recomendamos a los lectores deducir individualmente las fórmulas de reducción para los ángulos, que terminan en el IV cuadrante, es decir, los ángulos del tipo de $270° + \alpha$, ó $360° - \alpha$.

§ 109. Generalidad de las fórmulas de reducción

Al deducir las fórmulas de reducción hemos supuesto que el ángulo α, que compone el argumento, es agudo. Sin embargo, las fórmulas se satisfacen para cualquier α.
Demostremos, por ejemplo, que tiene lugar la fórmula

$$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha. \tag{1}$$

En primer lugar, de su justeza para los ángulos, que varían en los límites de la primera circunferencia, se deduce la justeza para todos los ángulos. En efecto, si el ángulo $\alpha > 360°$ ó $\alpha < 0°$, éste se puede representar en la forma $\alpha = \beta + 360°\cdot n$, donde $\beta < 360°$, n es un número entero (positivo o negativo). Pero, de acuerdo a la definición de las funciones trigonométricas (§ 98) $\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \operatorname{sen}[360°\cdot n + (\beta + 90°)] = \operatorname{sen}(\beta + 90°)$, $\cos\alpha = \cos(\beta + 360°\cdot n) = \cos\beta$; por lo tanto, $\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha$, puesto que para β esta fórmula se cumple por suposición.*)
Demostremos a continuación la fórmula (1) para los ángulos α, que varían en los límites de la primera circunferencia. Supongamos que α es un ángulo del II cuadrante, es decir, $\alpha = 90° + \beta$, $0 < \beta < 90°$. En tal caso, dado que

$$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \operatorname{sen}(180° + \beta) = -\operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(90° + \beta) = -\operatorname{sen}\beta,$$

ambos miembros de la igualdad (1) coinciden, por lo tanto, en este caso la fórmula es justa.
Supongamos ahora que α es un ángulo del III cuadrante, es decir, $\alpha = 180° + \beta$, $0 < \beta < 90°$, En tal caso

$$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \operatorname{sen}(270° + \beta) = -\cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(180° + \beta) = -\cos\beta,$$

de donde se desprende nuevamente la justeza de la relación (1). Por último, supongamos que α es un ángulo del IV

---

*) La propiedad de las funciones trigonométricas que aquí utilizamos se denomina *periodicidad* y será examinada separadamente en el § 112.

cuadrante, es decir, $\alpha = 270° + \beta$, $0 < \beta < 90°$. En tal caso

$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \operatorname{sen}(360° + \beta) = \operatorname{sen}\beta$,

$\cos\alpha = \cos(270° + \beta) = \operatorname{sen}\beta$.

Por lo tanto, también en este caso la fórmula (1) es justa.

De este modo, se ha demostrado la justeza de la fórmula (1) para todos los ángulos.

De un modo análogo se puede verificar la justeza de cualesquiera de las fórmulas de reducción.

§ 110. Dos reglas para memorizar las fórmulas de reducción

1. *Si el argumento (ángulo) de una función trigonométrica reducida tiene la forma* $(180° - \alpha)$, $(180° + \alpha)$, $(360° - \alpha)$, *o, en radianes,* $(\pi - a)$, $(\pi + a)$, $(2\pi - a)$, *la denominación de la función reducida no varía. El signo del segundo miembro de la fórmula de reducción se escribe en función del signo que posee la función reducida en el cuadrante dado.*

Ejemplos. 1) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se ha tomado el signo menos puesto que el ángulo de 150° termina en el segundo cuadrante, donde el coseno es negativo.

2) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(180° + 60°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. El ángulo de 240° termina en el III cuadrante, donde la tangente es positiva.

3) $\operatorname{sen} 315° = \operatorname{sen}(360° - 45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

El ángulo de 315° termina en el IV cuadrante, donde el seno es negativo.

4) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Si el argumento de la función trigonométrica reducida tiene la forma* $(90° - \alpha)$, $(90° + \alpha)$, $(270° - \alpha)$, $(270° + \alpha)$, *ó, en radianes,*

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right), \quad \left(\frac{\pi}{2} + a\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi - a\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi + a\right),$$

la denominación de la función reducida cambia por la semejante: el seno pasa al coseno y viceversa; la tangente pasa a la cotangente y viceversa; la secante, a la cosecante y viceversa; el signo del segundo miembro de las fórmulas se escribe de acuerdo al signo de la función reducida en el cuadrante dado.

E j e m p l o s. 1) sen 100° = sen $(90^\circ + 10^\circ)$ = cos 10°. El ángulo de 100° se encuentra en el segundo cuadrante, donde el seno tiene un valor positivo.

2) $\cos 300^\circ = \cos(270^\circ + 30) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

4) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 111. Funciones trigonométricas de argumento numérico

Al estudiar la función del tipo $y = ax^2$ (véase el § 52) se indicó que esta función refleja diferentes fenómenos concretos de nuestra vida, por ejemplo:
1) la ley de caída libre de un cuerpo en el vacío, en tal caso, x es el tiempo, y es el camino recorrido, $a = \frac{g}{2}$;
2) la dependencia entre el área del círculo y el radio; aquí, x es el radio, y es el área, el coeficiente $a = \pi$;
3) la resistencia del medio al movimiento de un cuerpo, $y = kx^2$, donde x es la velocidad, y es la fuerza de resistencia.
En todos estos casos una de las magnitudes variables varió proporcionalmente al cuadrado de la otra. Al estudiar matemáticamente la función $y = ax^2$ nos abstraemos del sentido físico y geométrico de las variables y por las letras x e y sobreentendemos números. Análogamente procedemos al estudiar las funciones trigonométricas. El argumento x se toma como un cierto número, en tal caso,
1) sen 0,5 significa el seno de un ángulo igual a 0,5 rad.
2) cos 1, 2 significa el coseno de un ángulo igual a 1,2 rad.
3) tg $(\cos \pi)$ = tg (-1) = $-$tg 1, donde tg 1 significa la tangente de un ángulo igual a un radian.

DEFINICION. Se denomina *función trigonométrica* de argumento numérico x la función (homónima) de un ángulo que contiene x rad.

Observación. Para hallar los valores del seno y del coseno de argumento numérico al final del libro se da una tabla. Por ella hallamos:

sen 0,75 = 0,6816,
cos 1,3 = 0,2675.

§ 112. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma en la circunferencia unitaria un ángulo α con el eje Ox (fig. 66). Si al argumento, es decir, al ángulo α sumamos un número entero cualquiera de vueltas, el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$ resultará en el punto anterior de la circunferencia, y por tal aumento del argumento en un número entero de vueltas, el valor de las funciones trigonométricas no varía, cualquiera que sea el ángulo inicial α.

● DEFINICION 1. Una función se llama *periódica* si existe un número, distinto de cero, cuya suma a cualquier valor del argumento no varía el valor de la función.

● DEFINICION 2. Se llama *período* de una función*) el menor número positivo, cuya suma a un valor cualquiera del argumento no varía el valor de la función.

Todas las funciones trigonométricas son periódicas, además el período del seno, del coseno, de la secante y la cosecante es igual a 2π, en tanto que para la tangente y la cotangente el período es igual a π (180°), lo que se aprecia de las fórmulas de reducción.

La propiedad de periodicidad de la función $f(x)$ se admite en escribir del siguiente modo:

$$f(x) = f(x + T),$$

donde T es el período de la función (fig. 88).

Con respecto a las funciones trigonométricas, cuyos argumentos designamos por x, la propiedad de periodicidad se escribe así:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Observasión 1. Mediante el siguiente razonamiento se puede comprobar que el período de la función $\operatorname{sen} x$ es igual a 2π y no es menor. Supongamos que existe un número l tal que

$$\operatorname{sen}(x + l) = \operatorname{sen} x \qquad (1)$$

*) A veces por «período» se entiende un número positivo *cualquiera*, distinto de cero, cuya suma a un valor cualquiera del argumento no varía el valor de la función. El menor número con tal propiedad se llama período *fundamental*.

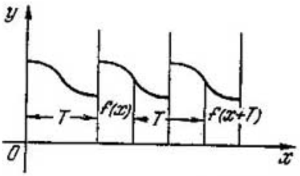


Fig. 88.

para cualquier valor de x. En tal caso, para $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ de la identidad (1) se deduce:

$$\operatorname{sen} l = 0, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = 1,$$

o bien

$$\operatorname{sen} l = 0, \quad \cos l = 1.$$

El menor ángulo positivo l, cuyo seno es igual a cero y el coseno igual a 1, es el ángulo 2π (rad).

Observación 2. El período no sólo se puede sumar al argumento, sino también se le puede restar; además, se puede sumar y restar del argumento cualquier número entero de períodos:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi k) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,$$

donde k es un número entero cualquiera, indistintamente, positivo o negativo.

Ejemplos. 1) $\operatorname{sen}(-330^\circ) = \operatorname{sen}(-330^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$. Aquí se sumó al argumento un período.

2) $\operatorname{sen} 765^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En este ejemplo se restó del argumento dos períodos.

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3} + 6\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

Al argumento negativo $\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ se le sumaron seis períodos (6π), lo que dio lugar al argumento positivo $\frac{\pi}{3}$.

4) $\operatorname{sen} 1200^\circ = \operatorname{sen}(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5) $\operatorname{sen}(-5{,}6\pi) = \operatorname{sen}(-5{,}6\pi + 6\pi) = \operatorname{sen} 0{,}4\pi = \cos 0{,}1\pi \approx 0{,}305.$

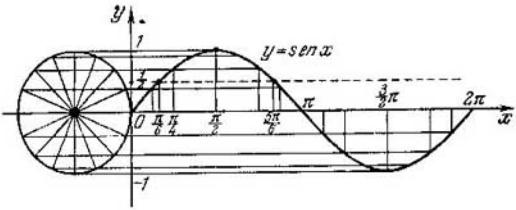


Fig. 89.

§ 113. Curvas de las funciones trigonométricas

1. Curvas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Representemos gráficamente la variación de la función $y = \operatorname{sen} x$ al variar el argumento x desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$, o en radianes, desde 0° hasta 360°. Esto se puede realizar sencillamente del modo siguiente:

Trazamos una circunferencia de radio unitario y la dividimos en 16 partes iguales (fig. 89). A cada división de arco corresponde un ángulo central de 22°30′, o en radianes, $\frac{\pi}{8}$ (rad). Por el eje Ox vamos a llevar los ángulos

$$0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{8},\ \ldots,$$

representándolos en forma de segmentos en la escala elegida. En los puntos de división trazamos perpendiculares al eje Ox y en ellas llevamos los valores del seno de los correspondientes ángulos. Los valores del seno los hallamos por construcción, proyectando los puntos de división de la circunferencia sobre el eje Oy y transportando las proyecciones sobre las correspondientes perpendiculares. Por los extremos de las perpendiculares trazamos una línea suave. La curva obtenida se llama *sinusoide* o *senoide*. Hemos construido sólo una «onda» de la sinusoide, correspondiente a la variación del argumento de 0 a 2π. Debido a la periodicidad de la función $\operatorname{sen} x$, la ulterior variación del argumento x en el intervalo de 2π a 4π da lugar a la formación de la segunda onda de la sinusoide, igual a la primera. Lo mismo ocurrirá si quisiésemos construir la parte de la curva que corresponde a la variación del argumento x desde O hasta -2π. La gráfica refleja la marcha de variación de la función. De la gráfica se establecen fácilmente las propiedades de la función $y = \operatorname{sen} x$.

1) La función sen x está definida para cualquier valor real del argumento x, es decir, su campo de definición son todos los números reales, admitidos como medida en radianes del ángulo.
2) Todos los valores de la función sen x colman el segmento $[-1, 1]$, es decir, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$.
3) La función es impar, puesto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. La curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas.
4) En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función sen x crece, variando desde -1 hasta $+1$; en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la función sen x decrece desde 1 hasta -1.
5) La función alcanza su valor máximo para $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\ldots$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera, positivo, negativo y 0; en estos puntos el seno es igual a 1.
6) El seno adquiere su valor mínimo, igual a -1, para $x = -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\ldots$, y, en general, para $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
7) La función se anula para $x = \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$, y, en general, para $x = \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
Conociendo la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ se obtiene fácilmente la gráfica de la función $y = \cos x$. Utilicemos la fórmula

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

que se satisface para cualquier x real. De esta fórmula se deduce que en lugar del valor del coseno en el punto x se puede tomar el valor del seno en el punto $x + \frac{\pi}{2}$, es decir, que la gráfica de la función $y = \cos x$ será una sinusoide, desplazada a lo largo del eje Ox en $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda (véase la fig. 90)*).
De la gráfica establecemos las siguientes propiedades del coseno.
1) La función $\cos x$ está definida en todo el eje numérico, puesto que a cada valor real de x, tomado como medida en

*) Sobre la transformación de la sinusoide véase más detalladamente en el § 138.

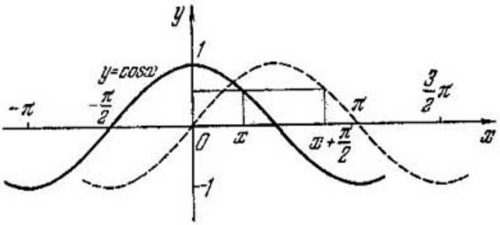


Fig. 90.

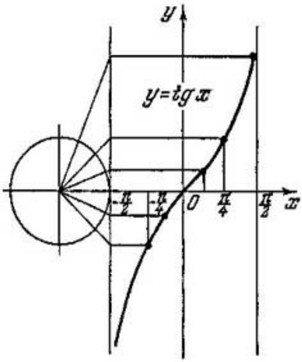


Fig. 91.

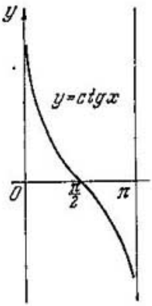


Fig. 9

radianes del ángulo, corresponde un valor completamente determinado del coseno.

2) El conjunto de valores de la función colma el segmento $[-1, 1]$.

3) $\cos x$ es una función par, puesto que $\cos(-x) = \cos x$; la curva es simétrica con respecto al eje Oy.

4) La función $\cos x$ decrece en el intervalo $(0, \pi)$, variándose desde 1 hasta -1; en el intervalo $(-\pi, 0)$ la función crece desde -1 hasta $+1$.

5) El $\cos x$ alcanza el valor máximo, igual a 1, para $x = 0$, 2π, 4π, $\ldots$, $2\pi k$; la función adquiere el valor mínimo, igual a -1, en los puntos π, 3π, 5π, $\ldots$, $(2k + 1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) La función se anula si el argumento $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Curvas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$. En la fig. 91 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$, construida por el mismo método que la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$. Propiedades de la función $\operatorname{tg} x$:
1) La tangente es una función periódica de período π.
2) La función está definida en todo el eje numérico, con excepción de los puntos $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3) $\operatorname{tg} x$ es una función ilimitada, puesto que puede tomar cualquier valor tan grande como se quiera en magnitud absoluta.
4) La función es impar, puesto que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; en la gráfica se aprecia la simetría con respecto al origen de coordenadas.
5) $\operatorname{tg} x$ crece en los intervalos $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.
6) La tangente no tiene valores máximo y mínimo.
7) La función se anula para $x = \pi k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$).
En la fig. 92 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{ctg} x$, que puede ser construida desplazando la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$ hacia la izquierda a lo largo del eje Ox en $\frac{\pi}{2}$ con la aplicación ulterior respecto al eje Ox, de acuerdo a la fórmula

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Constrúyase individualmente esta gráfica y formúlese a base de ella las propiedades de la cotangente.

▲ Ejercicios

1. Expresar en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando ellas indican las 2h, 6h, 8h.
2. Hallar la medida en radianes de los ángulos:
1) 2°; 2) 5°; 3) 7°,5; 4) 12°,5; 5) 22°,5; 6) 200°; 7) 320°.
3. Hallar la medida en radianes de los ángulos:
1) 2700°; 2) 7200°; 3) 10 000°.
4. Expresar en grados y minutos las magnitudes de los arcos cuyas medidas en radianes se expresan por números:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) $\frac{\pi}{8}$; 6) $\frac{\pi}{15}$; 7) $\frac{\pi}{10}$.

5. Dos ángulos de un triángulo tienen 59° y 69°. Calcular en radianes la magnitud del tercer ángulo del triángulo.
6. Dos ángulos de un triángulo son de $\frac{3\pi}{10}$ rad y $\frac{2\pi}{15}$ rad.

Calcular de cuántos grados es el tercer ángulo.
7. ¿Cuál es la medida en radianes de los arcos que componen las siguientes partes de una circunferencia: $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{11}{15}$; 1; 1,75; 0,03; 0,005; 0,375?
8. El arco de una circunferencia de radio $R = 6$ cm tiene una longitud de 4,5 cm. ¿Cuál es la medida en radianes de este arco?
9. Utilizando la tabla convertir en radianes los ángulos:
1) 126°; 2) 279°; 3) 118°,40′; 4) 250°20′; 5) 352°10′; 6) 168°15′; 7) 56°18′; 8) 472°50′.
10. Utilizando la tabla convertir en grados los ángulos:
1) 0,4800; 2) 0,6510; 3) 1,2700; 4) 0,6270; 5) 1,3983; 6) 0,0099; 7) 0,5000; 8) 2,6400.
11. Hallar la longitud del arco de circunferencia si su radio es de 22,5 cm y su ángulo central, de 40°30′.
12. El arco de circunferencia es de 200°. Determinar el radio de la circunferencia si la longitud del arco es de 50 cm.
13. Hallar el perímetro y el área del sector de círculo, cuyo radio es de 15 cm, si el arco tiene 54°.
14. Calcular el área del segmento circular limitado por un arco de 45°44′, sabiendo que el radio de la circunferencia es de 47,34 m.
15. Una rueda dentada tiene 90 dientes. Expresar en radianes el ángulo de rotación de la rueda cuando ella gira: 1) 30 dientes; 2) 25 dientes; 3) 40 dientes; 4) 200 dientes.
16. ¿Cuál es la velocidad angular de un disco que gira a 300 r.p.m.?
17. La velocidad angular de un árbol es de $42{,}3\ \frac{1}{\mathrm{s}}$. Determinar su número de revoluciones por minuto.
18. Por construcción y medición directa en el círculo unitario ($R = 1$) hallar las siguientes magnitudes:
1) sen 120°; 2) ctg 60°; 3) cos 75°; 4) tg 250°; 5) sen 225°; 6) cos 160°.
19. (Verbalmente). ¿Puede tener la función $\cos x$ en magnitud absoluta un valor mayor que la unidad?
20. (Verbalmente). ¿En qué cuadrantes $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen signos iguales?
21. Demostrar la desigualdad

$$\operatorname{sen} x + \cos x > 1; \ 0 < x < 90°.$$

22. Determinar los signos de las siguientes expresiones:
1) sen 285°; 2) ctg 252°30′; 3) cos 135°; 4) tg 327°20′.

23. Construir el menor ángulo positivo según el valor dado de la función trigonométrica y expresar el ángulo en radianes:

1) $\operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$; 2) $\cos x = -0{,}6$; 3) $\operatorname{tg} x = 1{,}2$; 4) $\operatorname{sen} x = -0{,}7$;

5) $\operatorname{tg} x = -0{,}6$.

24. ¿En qué límites puede variar el argumento x para que se cumplan las siguientes desigualdades ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$):

1) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \geqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} x \leqslant 0$; 3) $\cos x - \frac{1}{2} \leqslant 0$;

4) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geqslant 0$; 5) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 \leqslant 0$; 6) $\operatorname{ctg} x + 1 \geqslant 0$?

25. Por el valor dado de una de las funciones trigonométricas calcular valores de las tres funciones restantes:

1) $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}6\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\,(90^\circ<\alpha<180^\circ)$.

26. Simplificar las expresiones

1) $5\operatorname{sen}270^\circ-2\cos 0^\circ+3\operatorname{tg}0^\circ$, 2) $a\operatorname{sen}\pi+b\cos\pi+\operatorname{tg}\pi$.

3) $m\cos\frac{\pi}{2}-n\cos\frac{3}{2}\pi+p\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$. 4) $2\operatorname{tg}0^\circ+8\cos 270^\circ-$ $-6\operatorname{sen}270^\circ$.

27. Reducir las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos a las correspondientes funciones de ángulos agudos:

1) $\operatorname{sen}165^\circ$; 2) $\cos 210^\circ$; 3) $\operatorname{tg}135^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}240^\circ$; 5) $\cos 315^\circ$

6) $\operatorname{tg}200^\circ$; 7) $\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$; 8) $\cos\frac{5}{3}\pi$; 9) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi$; 10) $\operatorname{ctg}\frac{8}{5}\pi$.

28. Reducir las funciones trigonométricas de argumento negativo a funciones de argumento positivo:

1) $\operatorname{sen}(-300^\circ)$; 2) $\cos(-400^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-960^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg}(-3{,}2\pi)$.
5) $\operatorname{sen}(-5{,}4\pi)$; 6) $\operatorname{tg}(-2{,}3\pi)$; 7) $\cos(-1250^\circ)$; 8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3\pi)$.

29. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\operatorname{ctg}675^\circ\operatorname{cosec}280^\circ-\operatorname{tg}1845^\circ\operatorname{sen}460^\circ$;
2) $\cos x\operatorname{tg}(180^\circ+x)\operatorname{tg}(270^\circ-x)\operatorname{cosec}(90^\circ-x)$;

3) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{ctg}(\pi-x)}$; 4) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}$.

5) $\operatorname{sen}0{,}6\pi+\cos^2(-1{,}1\pi)\operatorname{sen}1{,}6\pi$;
6) $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\operatorname{sen}5{,}6\pi\operatorname{ctg}4{,}4\pi$;

7) $\operatorname{sen}(A-\pi)\cos(A-2\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-A\right)\operatorname{cosec}(5{,}5\pi+A)$;

8) $\left[\operatorname{sen}^2(5\pi+0{,}5)+\operatorname{sen}^2\left(0{,}5-\frac{3}{2}\pi\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}-\pi\right)$;

9) $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{5}{14}\pi-\cos\frac{\pi}{7}\right)$;

10) $\operatorname{sen}170^\circ\cos 280^\circ-\operatorname{sen}260^\circ\cos 10^\circ-\dfrac{1+\operatorname{sen}100^\circ\cos 170^\circ}{1+\operatorname{sen}350^\circ\operatorname{sen}180^\circ}$;

11) $\operatorname{tg}(90^\circ+B)+\operatorname{ctg}(270^\circ-B)-\operatorname{tg}(180^\circ-B)+\operatorname{ctg}B$;
12) $\operatorname{ctg}(x-90^\circ)[\operatorname{sen}(x-270^\circ)-\operatorname{sen}(180^\circ-x)]$.

30. Demostrar la justeza de las siguientes igualdades:

1) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$;

4) $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha=1$;
5) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

7) $\operatorname{sen}(A-30^\circ)+\operatorname{sen}(A+150^\circ)=0$;

8) $\cos(B-100^\circ)=-\operatorname{sen}(170^\circ+B)$;

9) $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}}=2\sec\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

10) $\operatorname{sen}\alpha\,(2\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha$;

11) $1+\dfrac{\cos x\operatorname{tg}^2 x}{1+\cos x}=\sec x$;

12) $2(\operatorname{sen}^6 A+\cos^6 A)-3(\operatorname{sen}^4 A+\cos^4 A)+1=0$;

13) $(\operatorname{sen} y+\operatorname{cosec} y)^2+(\cos y+\sec y)^2-(\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 y)=7$;

14) $\operatorname{sen}^6 A+\cos^6 A+3\operatorname{sen}^2 A\cos^2 A=1$.

31. Partiendo de la representación intuitiva sobre las variaciones de las funciones trigonométricas en los límites de la primera circunferencia $(0\leqslant x<2\pi)$, resolver las siguientes desigualdades utilizando el círculo trigonométrico $(r=1)$:

1) $\operatorname{sen} x>0$; 2) $\cos x\leqslant 0$; 3) $\operatorname{sen} 2x<0$; 4) $\cos 3x>0$;

5) $\operatorname{tg} x>\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{sen} x\geqslant\dfrac{1}{2}$; 7) $\cos 2x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $0<\operatorname{sen} x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1$; 10) $0<\operatorname{tg} x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 11) $0<\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{1}{2}$;

12) $|\operatorname{sen} x|<\dfrac{1}{2}$; 13) $\dfrac{1}{2}<\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)<1$; 14) $|\cos 2x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CAPITULO X

TRANSFORMACIONES DE EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS

§ 114. Seno y coseno de la suma (resta) de dos ángulos

En el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas xOy trazamos el rayo ON formando un ángulo α con el eje Ox, y el rayo OP, formando un ángulo β con el rayo ON (fig. 93).

Sobre el rayo OP construimos el vector unitario $\overrightarrow{OM}$; desde el punto M bajamos la perpendicular MM_1 sobre el rayo ON. En tal caso,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}. \tag{1}$$

Si

$$\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, \ y_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x_2, \ y_2\},$$

entonces

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1 + x_2, \ y_1 + y_2\},$$

lo que se deduce de la igualdad (1) por el teorema del § 90. Por eso

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x_1+x_2}{|\overrightarrow{OM}|} = x_1 + x_2. \tag{2}$$

Pero,

$$x_1 = |\overrightarrow{OM_1}| \cos\alpha, \tag{3}$$

$$x_2 = |\overrightarrow{M_1M}| \cos(90^\circ + \alpha) = -|\overrightarrow{M_1M}| \operatorname{sen}\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha + \beta) = |\overrightarrow{OM_1}| \cos\alpha - |\overrightarrow{M_1M}| \operatorname{sen}\alpha. \tag{4}$$

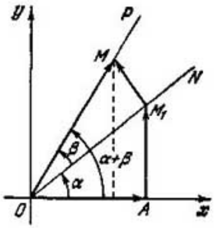


Fig. 93.

Sin embargo, puesto que $|\overrightarrow{OM_1}| = 1 \cdot \cos\beta$, $|\overrightarrow{M_1M}| = 1 \cdot \text{sen}\,\beta$, finalmente tendremos:

(I) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta.$

El coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de estos ángulos menos el producto de los senos de los mismos ángulos.

Ejemplo. $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen}\,30° \cdot \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx \approx 0{,}2588.$

Hallamos la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \frac{y_1+y_2}{|\overrightarrow{OM}|} = y_1 + y_2, \tag{5}$$

pero, $y_1 = |\overrightarrow{OM_1}|\,\text{sen}\,\alpha$, $y_2 = |\overrightarrow{M_1M}|\,\text{sen}\,(90° + \alpha) = |\overrightarrow{M_1M}|\cos\alpha$, y por eso

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = |\overrightarrow{OM_1}|\,\text{sen}\,\alpha + |\overrightarrow{M_1M}|\cos\alpha. \tag{6}$$

Sustituyendo en la igualdad (6) $|\overrightarrow{OM_1}|$ por $\cos\beta$ y $|\overrightarrow{M_1M}|$ por $\text{sen}\,\beta$, finalmente tendremos:

(II) $\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta.$

El seno de la suma de dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo más el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.

Ejemplo. Dados: $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, donde α es del segundo cuadrante, β es un ángulo agudo; hallar $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$. Tenemos que

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4};$$

$$\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Por eso,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{3-2\sqrt{14}}{12}.$$

Observación. Las fórmulas (I) y (II) se satisfacen para todos los valores de los ángulos α y β, puesto que se basan en los dos teoremas de proyecciones de un vector y de la suma vectorial sobre un eje; estos teoremas se cumplen para cualquier disposición de los vectores con respecto al eje. La diferencia de dos ángulos se puede representar en forma de suma:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta),$$

y por eso,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\times$$
$$\times\operatorname{sen}(-\beta);$$

(III) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$

El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de ambos ángulos más el producto de sus senos.

Ejemplo.

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\operatorname{sen}45^\circ\times$$
$$\times\operatorname{sen}30^\circ,$$

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}966.$$

De un modo análogo se puede obtener la fórmula para el seno de la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+$$
$$+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta),$$

(IV) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$

El seno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo menos el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.

E j e m p l o.

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588.$$

§ 115. Producto escalar de dos vectores expresados por sus coordenadas

Corrientemente los vectores se dan mediante sus coordenadas (o por las proyecciones sobre un eje, lo que es lo mismo). Por eso, es práctico expresar el producto escalar de dos vectores por sus coordenadas.

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ forma con el eje Ox el ángulo φ_1, el vector $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2\}$ forma con el eje Ox el ángulo φ_2 (fig. 94). En tal caso el ángulo φ entre los vectores es igual a la diferencia $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Por definición de producto escalar tenemos:

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = r_1 r_2 \cos \varphi = r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Escribamos la igualdad (1) en la forma

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) =$$
$$= r_1 \cos \varphi_1 \cdot r_2 \cos \varphi_2 + r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cdot r_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \qquad (2)$$

De la definción de las funciones trigonométricas se deduce que $r_1 \cos \varphi_1 = x_1$; $r_2 \cos \varphi_2 = x_2$; $r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = y_1$; $r_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = y_2$, de donde $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

El producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus coordenadas homónimas.

E j e m p l o 1. Calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, si A (2; 5), B (4; 3), C (–5; –1) y D (–1; 2).

Hallemos las coordenadas de cada vector:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\}; \overrightarrow{AB} = \{2; -2\}; \overrightarrow{CD} = \{4, 3\};$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 = 2.$$

E j e m p l o 2. Determinar la coordenada y del vector $\boldsymbol{a} = \{3, y\}$ de manera que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} = \{4, -2\}$, sean perpendiculares.

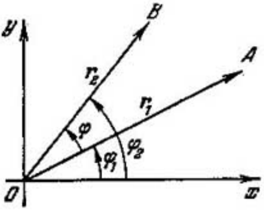


Fig. 94.

Puesto que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, entonces $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, y por eso el producto escalar se hace igual a cero,

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \cdot 4 + y\,(-2) = 0.$

Por lo tanto,

$y = 6.$

Observación. En este ejemplo se utilizó la siguiente importante propiedad del producto escalar: de la perpendicularidad de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se deduce que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. También es cierto lo recíproco: cuando el producto escalar se hace nulo se deduce, que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, si ninguno de los vectores $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ es un vector nulo.

§ 116. La tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos

Examinemos la tangente de un ángulo cualquiera como cociente del seno de ese ángulo por su coseno:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

La tangente de la suma de dos ángulos es igual a una fracción, cuyo numerador es la suma de las tangentes, y el denominador, la diferencia entre la unidad y el producto de las tangentes de estos ángulos.

Ejemplo. Dados $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, α y β son ángulos agudos, hallar $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Tenemos que:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Por lo tanto, $\alpha+\beta=45°$.

Sustituyendo en la fórmula (V) en ángulo β por $-\beta$, obtenemos

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\text{(II)}\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

La tangente de la diferencia de dos ángulos es igual a una fracción, cuyo numerador es la diferencia de las tangentes, y el denominador, la suma de la unidad y el producto de las tangentes de estos dos ángulos.

Ejemplo,

$$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}(45°-30°)=\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°}=$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=$$

$$=2-\sqrt{3}\approx 0{,}2679.$$

Observación. No hay necesidad de deducir y memorizar la fórmula de la cotangente de la suma y la diferencia de dos ángulos; para ello es suficiente servirse de que

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)}.$$

§ 117. Funciones trigonométricas de argumento doble

Veamos el caso particular de la fórmula de adición:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

para $\beta=\alpha$; en tal caso tendremos

$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,$

o bien

(I) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$.

El seno de un ángulo doble es igual al producto doblado del seno del ángulo dado por su coseno.

Ejemplo. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Hallar $\operatorname{sen} 2\alpha$.

$$\operatorname{sen} 2\alpha \,|_{\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}} = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \,|_{\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{4}{9}},$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9} \sqrt{5}.$$

A continuación, de la fórmula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

para $\alpha = \beta$ se deduce que

(II) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$.

El coseno de un ángulo doble es igual al cuadrado del coseno del ángulo dado menos el cuadrado de su seno.

Ejemplo. 1. $\cos 120° = \cos^2 60° - \operatorname{sen}^2 60° = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$

$= -\frac{1}{2}$. De esto nos persuadimos también así:

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2 Dado $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < 90°$;

hallar $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha \,|_{\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4}} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \,|_{\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4}} = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Si en la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

ponemos $\beta = \alpha$, obtendremos

(III) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $(\operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1)$.

La tangente de un ángulo doble es igual a la tangente doblada del ángulo dado dividido por la diferencia entre la unidad y el cuadrado de la tangente de dicho ángulo.

Ejemplo. Dado $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, hallar $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha \Big|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\Big|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}}=\frac{3}{1-\frac{9}{4}}=-\frac{12}{5}.$$

Observación. Todo ángulo es el doble con respecto a la mitad de dicho ángulo, como, por ejemplo, α lo es con respecto a $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ lo es con respecto a $\frac{\alpha}{4}$, 5α lo es con respecto a $\frac{5\alpha}{2}$, $(\alpha+\beta)$ lo es con respecto a $\frac{\alpha+\beta}{2}$ etc.

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen} 3x=2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$,

2) $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$,

3) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{16}}$.

§ 118. Funciones trigonométricas de argumento medio

Vamos a partir de las siguientes dos identidades

$$\left.\begin{aligned} 1&=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},\\ \cos\alpha&=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Sumando miembro a miembro estas dos identidades, y, luego restando de la primera la segunda, obtenemos:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\qquad(2)$$

$$1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.\qquad(3)$$

De la fórmula (2) hallamos que $\cos\frac{\alpha}{2}$, y de la fórmula (3), $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$:

(I) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$,

(II) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Dividimos miembro a miembro la igualdad (II) por la (I):

(III) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Las fórmulas (I), (II) y (III) expresan el coseno, el seno y la tangente del ángulo medio por el coseno de un ángulo entero.

Si se sabe en que cuadrante termina el ángulo $\frac{\alpha}{2}$, ante el radical se toma el correspondiente signo, en caso contrario se conserva el signo doble.

Ejemplo. 1. Calcular sin las tablas $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$. El ángulo $\frac{\pi}{8}$ es la mitad del ángulo $\frac{\pi}{4}$, además $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por eso

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$\frac{\pi}{8}$ es un ángulo agudo, por eso ante el radical se ha tomado el signo más.

Ejemplo. 2. Dado $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, calcular el $\cos\frac{\alpha}{2}$. Al principio hallamos $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{9}},$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}$$

(se ha tomado el signo menos porque el ángulo α termina en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo);

el semiángulo $\frac{\alpha}{2}$ termina en el segundo cuadrante, por eso

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\Bigg|_{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{6}}\approx-0{,}1691.$$

Ejemplo 3. Calcular $\operatorname{tg} 15°$.

Utilizamos la fórmula (III), considerando el ángulo de 15° como la mitad del ángulo de 30°:

$$\operatorname{tg} 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=2-\sqrt{3}.$$

Para la tangente del ángulo medio en lugar de la fórmula (III) se pueden deducir otras dos, más convenientes para calcular y que no contienen radicales:

$$\text{(III')}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

o bien

$$\text{(III'')}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Conviene hacer notar que $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ tienen el mismo signo.

Ejemplo.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}414.$$

§ 119. Expresión del seno y del coseno por la tangente del semiángulo

Al demostrar las identidades trigonométricas y al resolver las ecuaciones trigonométricas, al igual que en otros casos, son bastante convenientes las fórmulas que expresan el sen α y $\cos\alpha$ por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(I)}\quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

El seno de un ángulo es igual a la tangente doblada de la mitad de este ángulo dividida por la suma de la unidad y el cuadrado de la tangente del semiángulo.

Ejemplo. Calcular sen α, si $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$:

$$\operatorname{sen}\alpha=\left.\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right|_{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2}=\frac{2\cdot 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}.$$

Análogamente expresamos el $\cos\alpha$ por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(II)}\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dividiendo miembro a miembro la igualdad (I) por la (II) hallamos:

$$\text{(III)}\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Las fórmulas (I), (II), (III) son interesantes, pues sus segundos miembros no tienen radicales, por eso se dice que el seno, el coseno y la tangente se expresan racionalmente por la tangente del semiángulo; los valores de las otras tres funciones trigonométricas, la cotangente, la secante y la cosecante, son de magnitud inversa a los valores de la tangente, el coseno y el seno respectivamente, y, por eso, también se expresan racionalmente por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ejemplo. Dada la $\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, hallar el $\operatorname{sen}4x$.
En primer lugar hallamos $\operatorname{sen}2x$ y $\cos 2x$:

$$\operatorname{sen}2x=\left.\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right|_{\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}}=\frac{3}{1+\frac{9}{4}}=\frac{12}{13};$$

$$\cos 2x=\left.\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right|_{\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}}=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}=-\frac{5}{13}.$$

El ángulo $4x$ es doble con respecto al ángulo $2x$, y por eso, $\operatorname{sen}4x=2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x$.
Sustituyendo en esta igualdad $\operatorname{sen}2x$ y $\cos 2x$ por sus valores, obtendremos

$$\operatorname{sen}4x=2\cdot\frac{12}{13}\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}.$$

§ 120. Ejemplos de demostración de identidades

Ejemplo 1. Demostrar que

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Reducimos el segundo miembro al primero

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Ejemplo 2. Demostrar la identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Reducimos el primer miembro al segundo

$$\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

§ 121. Transformaciones de la suma y de la diferencia de las funciones trigonométricas en producto y transformaciones inversas

1. Transformación de la suma y de la diferencia de dos senos:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1), y luego restando de la primera la segunda, obtendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta,\tag{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha.\tag{3}$$

Ponemos:

$$\alpha+\beta=x,\ \alpha-\beta=y.\tag{4}$$

Sumando miembro a miembro y después restando las igualdades (4), tendremos que

$$\alpha=\frac{x+y}{2}, \quad \beta=\frac{x-y}{2}. \tag{5}$$

En las nuevas designaciones las igualdades (2) y (3) finalmente toman la forma

(I) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(II) $\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

La igualdad (I) corrientemente se formula así: *la suma de los senos de dos ángulos es igual al producto doblado del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia de estos ángulos.*

E j e m p l o s.

1) $\operatorname{sen} 40^\circ+\operatorname{sen} 50^\circ=2 \operatorname{sen} \frac{40^\circ+50^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ-50^\circ}{2}=$

$=2 \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 5^\circ=\sqrt{2} \cos 5^\circ$;

2) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}+\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{8}+2x-\frac{\pi}{4}}{2} \cos \times$

$\times \frac{\frac{\pi}{8}-2x+\frac{\pi}{4}}{2}=2 \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{16}\right) \cos \left(x-\frac{3\pi}{16}\right)$.

Análogamente se lee la fórmula (II): *la diferencia de los senos de dos ángulos es igual al producto doblado del seno de la semidiferencia por el coseno de la semisuma de estos ángulos.*

E j e m p l o s.

1) $\operatorname{sen} 75^\circ-\operatorname{sen} 15^\circ=2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ-15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ+15^\circ}{2}=$

$=2 \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=2 \operatorname{sen} \frac{x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{2\pi}{3}}{2} \cos \frac{x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{2\pi}{3}}{2}=$

$=2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2 \cos \left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Transformación de la suma y de la diferencia de dos cosenos. Tenemos

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Sumando y restando las igualdades (6), obtendremos:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta,\qquad(7)$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\qquad(8)$$

o en las notaciones (5)

(III) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

(IV) $\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$.

La suma de los cosenos de dos ángulos es igual al producto doblado del coseno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia de estos ángulos.
De manera semejante se puede leer también la fórmula (IV).

E j e m p l o s.
1) $\cos 35^\circ+\cos 25^\circ=2\cos\frac{25^\circ+35^\circ}{2}\cdot\cos\frac{35^\circ-25^\circ}{2}=$

$=2\cos 30^\circ\cdot\cos 5^\circ=\sqrt{3}\cdot\cos 5^\circ$;

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

3. Transformación de la suma y de la diferencia de dos tangentes. Si $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, tendremos:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\operatorname{sen}y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

De un modo semejante se puede transformar la diferencia:

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

E j e m p l o.

$$\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\operatorname{sen}(75^\circ-15^\circ)}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\operatorname{sen}60^\circ}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\operatorname{sen}15^\circ\cos 15^\circ}=2\sqrt{3}.$$

4. Transformación del producto en una suma algebraica. Cada una de las igualdades (2), (3), (7) y (8) se puede leer tanto de izquierda a derecha como en sentido contrario. Cada miembro de estas igualdades lo dividimos previamente por 2, y luego los escribimos en el orden inverso, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

§ 122. Introducción de un ángulo auxiliar

Frecuentemente al transformar expresiones trigonométricas se utiliza lo que se denomina método de introducción de un ángulo auxiliar.

Ejemplo 1. Transformar en producto $1+2\cos\alpha$. Sacamos el factor 2 fuera de paréntesis:

$$1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=$$
$$=4\cdot\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}=4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ejemplo 2. Transformar en producto $1-3\operatorname{tg}^2 x$:

$$1-3\operatorname{tg}^2 x=3\left(\frac{1}{3}-\operatorname{tg}^2 x\right)=3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^2 x\right)=$$
$$=3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}x\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}x\right)=4\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}.$$

Ejemplo 3. Transformar $\sqrt{a^2+b^2}$ en producto mediante un ángulo auxiliar. Sacamos el factor a fuera de la radical:

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}=|a|\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=$$
$$=|a|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=|a\sec\varphi|,$$

donde $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

Ejemplo 4. Hallar el valor máximo de la suma $\operatorname{sen} x + \cos x$:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x + 45^\circ).$$

Puesto que el valor máximo, que puede adquirir $\operatorname{sen}(x+45^\circ)$, es igual a la unidad, tendremos que el valor máximo de la suma de $\operatorname{sen} x + \cos x$ es igual a $\sqrt{2}$.

§ 123. Ejemplos de transformación de expresiones trigonométricas

En este párrafo se dan ejemplos de transformaciones trigonométricas más complejas.

Ejemplo 1. Transformar en producto

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x.$$

Utilizamos la identidad

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)];$$

en tal caso

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 9x),$$

$$\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x),$$

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x).$$

La suma inicial toma la forma

$$\frac{1}{2}(\cos x - \cos 9x + \cos x - \cos 7x - \cos x + \cos 3x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) - \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 9x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \cos 8x \cos x = \cos x\,(\cos 2x - \cos 8x) =$$

$$= \cos x \, 2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x \cos x.$$

Ejemplo 2. Demostrar la identidad

$$4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(60^\circ - \alpha)\operatorname{sen}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha.$$

Reducimos el primer miembro al segundo mediante la transformación del producto de dos senos en una diferencia de cosenos:

$$4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)=$$
$$=2\operatorname{sen}\alpha\cdot 2\operatorname{sen}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)=$$
$$=2\operatorname{sen}\alpha\,(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)=2\operatorname{sen}\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=2\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha+\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha=$$
$$=\operatorname{sen}3\alpha.$$

E j e m p l o 3. Demostrar que

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2,\quad \text{si}\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

Expresemos el ángulo β por α: $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$; en tal caso $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$. El primer miembro de la igualdad toma la forma

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}=2.$$

E j e m p l o 4. Demostrar que

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{sen}\beta\,(\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta),\quad \text{si}\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\ \text{y}\ \alpha=2\beta.$$

Transformemos el segundo miembro y reduzcámoslo al primero, teniendo en cuenta que $\beta=\frac{\alpha}{2}$. En tal caso

$$\operatorname{sen}\beta\,(\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\pi-\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right]=$$
$$=\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\underbrace{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha.$$

§ 124. Ecuaciones trigonométricas elementales

● DEFINICIÓN 1. Una ecuación se llama *trigonométrica* si ella contiene la incógnita sólo bajo los signos de las funciones trigonométricas.

E j e m p l o s. 1) $\operatorname{sen}^2 x+\cos x-1=0$;
2) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}2x=0$;
3) $\cos 3x+\operatorname{sen}x=0$.
La ecuación $\operatorname{tg}x-2x+1=0$ no se puede llamar trigonométrica. En ésta la incógnita x se encuentra no sólo bajo el signo de tangente, sino también sin el signo de función tri-

gonométrica. Estas ecuaciones por ahora no las estudiaremos.

DEFINICION 2. *Resolver* una ecuación trigonométrica significa hallar todos los ángulos que satisfacen dicha ecuación, es decir, que reducen la ecuación a una igualdad después de la sustitución de la incógnita.

Así, por ejemplo, la ecuación

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$$

tiene la raíz $x = \frac{\pi}{4}$, pero tiene también un conjunto inumerable de otras raíces; todas ellas están contenidas en la fórmula

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

donde k es un número entero cualquiera, positivo, negativo y 0, es decir, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Resolvamos en primer lugar 8 ecuaciones elementales que se encuentran con frecuencia

1) $\operatorname{sen} x = 0$.

Puesto que $\operatorname{sen} 0° = 0$, $\operatorname{sen} 180° = 0$, $\operatorname{sen} 360° = 0$, $\operatorname{sen} 540° = 0$, etc., así como $\operatorname{sen}(-180°) = 0$, $\operatorname{sen}(-360°) = 0$, $\operatorname{sen}(-540°) = 0$, etc., tendremos que los ángulos $\ldots -540°, -360°, -180°, 0°, 180°, 360°, 540°, \ldots$ son soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$. Todos estos ángulos se pueden escribir en la forma

$x = 180° k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

o en radianes $x = \pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

Si se ha dado la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cos x = 0,$$

ésta se puede resolver así: multiplicando ambos miembros por 2, obtendremos

$2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$, ó $\operatorname{sen} 2x = 0$,

de donde $2x = \pi k$, y $x = \frac{\pi k}{2}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\operatorname{tg} x = 0$.

Puesto que $\operatorname{tg} x = 0$ y $\operatorname{sen} x = 0$ para iguales valores de x, tendremos que $\operatorname{tg} x = 0$ para $x = 180° k$ ($x = \pi k$), donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) $\cos x = 0$.

Puesto que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$,

$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{2}=0$, $\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$, etc.,

así como $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=$ $=0$, tendremos que los ángulos

$$\ldots -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ \ldots$$

son soluciones de dicha ecuación. Todos estos ángulos están contenidos en la fórmula

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$

Si se ha dado la ecuación $\operatorname{tg}^2 x=1$, la resolvemos del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}^2 x-1=0;\quad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-1=0;\quad \frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}=0;$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=0;\quad \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=0.$$

La fracción se hace cero cuando su numerador es nulo, a condición de que el denominador sea distinto de cero. En este ejemplo $\cos x\neq 0$ (en caso contrario no existiría la $\operatorname{tg} x$). De este modo,
$\cos 2x=0$.

De aquí $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, y $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, donde $k=0,\ \pm 1,$ $\pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$

4) $\operatorname{ctg} x=0$.
Puesto que $\operatorname{ctg} x=0$ y $\cos x=0$ para iguales valores de x, tendremos que $\operatorname{ctg} x=0$ si $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k=0,$ $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$

5) $\operatorname{sen} x=1$.

Puesto que $\operatorname{sen} 90°=1$, $\operatorname{sen}(90°\pm 360°)=1$, $\operatorname{sen}(90°\pm 2\cdot 360°)=1$, $\operatorname{sen}(90°\pm 3\cdot 360°)=1, \ldots,$ $\operatorname{sen}(90°+k\cdot 360°)=1$, donde $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,$ tendremos que los ángulos $x=90°+360°\,k$ $\left(x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, donde $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$ son las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x=1$. Si se ha dado la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x\cos 3x=\frac{1}{2},$$

la podemos resolver del siguiente modo:

$2\operatorname{sen} 3x \cos 3x = 1$, ó $\operatorname{sen} 6x = 1$,

de donde $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, y $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

6) $\operatorname{sen} x = -1$.

Puesto que $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = -1$,

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = -1$, ..., $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) = -1$,

tendremos que $\operatorname{sen} x = -1$ para $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7) $\cos x = 1$.

Puesto que $\cos 0^\circ = 1$, $\cos(\pm 360^\circ) = 1$, $\cos(\pm 2\cdot 360^\circ) = 1$, $\cos(\pm 3\cdot 360^\circ) = 1$, ..., $\cos(\pm n\cdot 360^\circ) = 1$, tendremos que $\cos x = 1$, cuando $x = 360^\circ k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

8) $\cos x = -1$.

Puesto que $\cos(\pm\pi) = -1$, $\cos(\pm\pi + 2\pi) = -1$, ..., ..., $\cos(\pm\pi + 2k\pi) = -1$, tendremos que las soluciones de la ecuación $\cos x = -1$ tiene la forma $x = \pi + 2\pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Examinemos algunos ejemplos más de ecuaciones trigonométricas elementales, en los cuales los argumentos de las funciones trigonométricas tienen una forma más compleja que la de los ejemplos 1) — 8).

a) $\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Utilizando la resolución del ejemplo 8) se puede escribir:

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} = \pi(2k+1),$$

de donde

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(2k+1)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

b) $\operatorname{sen}\left(75^\circ - \frac{x}{2}\right) = -1$.

Debido a la imparidad de la función $\operatorname{sen} x$ se puede cambiar el signo del argumento y de la función, es decir, en lugar de la ecuación dada, resolver la ecuación equivalente a ella

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - 75^\circ\right) = 1.$$

Siguiendo la resolución del ejemplo 5), obtendremos:

$\frac{x}{2}-75^\circ=90^\circ+360^\circ\cdot k,$

de donde

$x=330^\circ+360^\circ\cdot 2k,$ donde $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$

c) $\operatorname{sen}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=0.$

Utilizando la resolución del ejemplo 1), se puede escribir:

$3x-\frac{\pi}{8}=\pi k,$

de donde

$x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}k,$ donde $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$

En general el hallazgo de las soluciones de casi toda ecuación trigonométrica, al fin de cuentas, se reduce a hallar las soluciones de las ecuaciones elementales de tipo:

1) $\operatorname{sen} x=m$ ó $\operatorname{sen} kx=m$, $|m|\leqslant 1$;
2) $\cos x=m$ ó $\cos kx=m$, $|m|\leqslant 1$;
3) $\operatorname{tg} x=m$ ó $\operatorname{tg} kx=m$, m es un número cualquiera.

§ 125. Tipo general de ángulos correspondientes al valor dado de la función trigonométrica

E j e m p l o 1. $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}.$

Un ángulo elemental cuyo seno es igual a $\frac{1}{2}$ es el ángulo $\frac{\pi}{6}$ (ó de 30°); además, en el segundo cuadrante hay otro ángulo cuyo seno tiene el mismo valor: $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Todos los demás ángulos se hallan sumando a éstos un número entero cualquiera de períodos; obtendremos dos tipos de ángulos:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi, \tag{1}$$

$$x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi k=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1),$$

$$x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1). \tag{2}$$

Señalemos que para todo entero k el número $2k$ es par, y el número $(2k+1)$ es impar. Los ángulos, determinados por la fórmula (1), son iguales al ángulo elemental $\frac{\pi}{6}$ más el ángulo π, tomado un número par de veces. Los ángulos, que entran en la fórmula (2), están formados por ángulo π tomado un número impar de veces menos el ángulo elemental. La fórmula

$$x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n \tag{3}$$

contiene en sí ambos tipos de ángulos, es decir, une las dos fórmulas anteriores en una, puesto que cuando $n=2k$, obtendremos

$$x=(-1)^{2k}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 2k=\frac{\pi}{6}+2\pi k,$$

que son los ángulos dados por la fórmula (1); para $n=$ $=2k+1$ tendremos

$$x=(-1)^{2k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)$$

que son los ángulos contenidos en la fórmula (2).

Ejemplo 2. $\operatorname{sen} 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

El menor ángulo positivo que satisface la ecuación es $\frac{\pi}{3}$, por eso

$$2x=\frac{\pi}{3}\cdot(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; de donde

$$x=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+\frac{\pi}{2}k.$$

Ejemplo 3. $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Para el valor negativo dado del seno tomamos el ángulo elemental $-\frac{\pi}{4}$; todos los ángulos están contenidos en la fórmula

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de donde

$$x=-\frac{\pi}{2}(-1)^k+2\pi k=\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}+2\pi k.$$

Ejemplo 4. $\operatorname{sen} px=0$ $(p\neq 0)$.
El ángulo elemental es 0. Por eso,

$$px=\pi k, \text{ ó } x=\frac{\pi k}{p} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplo 5. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
El menor ángulo positivo que satisface la ecuación dada es $\frac{\pi}{4}$. Puesto que el coseno es una función par, tendremos que el ángulo $-\frac{\pi}{4}$ también es una solución de dicha acuación; todos los ángulos rectantes se obtienen sumando a estos dos ángulos fundamentales un número entero cualquiera de períodos. Obtendremos la fórmula general

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplo 6. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.

El menor ángulo positivo es igual a $\frac{2\pi}{3}$, y por eso,

$$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Ejemplo 7. $\cos 3x=0$.
El coseno se hace nulo si el argumento $3x$ es igual a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc. La forma general de tales ángulos es

$$\frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Por lo tanto,

$$3x=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad x=\frac{\pi}{6}(2k+1).$$

Ejemplo 8. $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

En los límites de la primera semicircunferencia se tiene sólo un ángulo, correspondiente al valor de la tangente, igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Este ángulo es $\frac{\pi}{6}$. Todos los ángulos restantes se obtienen sumándole un número entero de períodos de manera que

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots).$$

Ejemplo 9. $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}$. Resolución:

$$\frac{2x}{3}=-\frac{\pi}{3}+\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots),$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

Ejemplo 10. $\operatorname{sen}(2x-1{,}5)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$2x-1{,}5=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

$$2x=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+\pi k+1{,}5,$$

$$x=\frac{\pi}{8}\cdot(-1)^k+\frac{\pi}{2}k+0{,}75.$$

§ 126. Ejemplos de ecuaciones trigonométricas más complejas

Ejemplo 1. $\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x+\cos x=0$.
En dicha ecuación hay dos funciones de igual argumento, por eso expresamos $\operatorname{sen}^2 x$ por el coseno de manera que la ecuación contenga sólo una función ($\cos x$):
$\sqrt{2}\,(1-\cos^2 x)+\cos x=0$.
Se ha obtenido una ecuación cuadrática respecto a $\cos x$:
$\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0$.
de donde

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}},\quad \cos x_1=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x_1=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$$

$$\cos x_2=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1,$$

lo que no da solución.

Ejemplo 2. $\operatorname{sen}2x+\cos x=0$.
Reducimos la función a un argumento:

$$2\operatorname{sen}x\cos x+\cos x=0.$$

Descompongamos el primer miembro en factores

$\cos x\,(2\,\mathrm{sen}\,x+1)=0.$

Igualamos cada factor a cero:

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$

2) $2\,\mathrm{sen}\,x+1=0,\ \mathrm{sen}\,x=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1}+\pi k$

$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

Ejemplo 3. $2\,\mathrm{sen}^2 2x-1=0.$

A pesar de que esta ecuación se resuelve fácilmente con respecto a sen $2x\left[\mathrm{sen}\,2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; sin embargo, es más conveniente sustituir $2\,\mathrm{sen}^2 2x$ por $1-\cos 4x$.

Tendremos

$1-\cos 4x-1=0,$

$\cos 4x=0;\ 4x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$

$x=\frac{\pi}{8}(2k+1)\quad (k=0,\pm 1,\ \ldots).$

Ejemplo 4. $1-\cos(\pi-x)+\mathrm{sen}\,\frac{\pi+x}{2}=0.$

Puesto que $\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$, la ecuación toma la forma

$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0,$

$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$

$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0;$

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\ \frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1),$

$x_1=\pi(2k+1)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots);$

2) $2\cos\frac{x}{2}+1=0,\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{x_2}{2}=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,$

$x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$

▲ Ejercicios

1. Dados sen $\alpha=\frac{3}{5}$; sen $\beta=\frac{-7}{25}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

hallar: 1) sen $(\alpha+\beta)$; 2) sen $(\alpha-\beta)$; 3) cos $(\alpha+\beta)$; 4) cos $(\alpha-\beta)$; 5) tg $(\alpha+\beta)$; 6) tg $(\alpha-\beta)$.

2. $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{15}{8}$; $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.

Calcular $\cos(\alpha-\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

3. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\cos(a-b)-2\cos a\cos b-2\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$;

2) $\operatorname{sen}(45^\circ+\alpha)\operatorname{sen}(45^\circ-\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$;

3) $\cos x+\cos(120^\circ+x)+\cos(240^\circ+x)+\operatorname{sen}x$;

4) $\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}(\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)$;

5) $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$;

6) $1+\cos2\alpha-2\operatorname{sen}^3\alpha$;

7) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$;

8) $\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$.

4. Dados $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$; α y β son ángulos agudos. Hallar:

1) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$;

2) $\operatorname{sen}2\alpha$; 3) $\cos4\alpha$; 4) $\operatorname{sen}(2\alpha-\beta)$; 5) $\cos\frac{\beta}{2}$; 6) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

5. Dado $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; hallar: 1) $\operatorname{sen}\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$.

6. Demostrar las identidades:

1) $\frac{2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x}{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x}=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$;

2) $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\operatorname{tg}2x$;

4) $1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos^2(45^\circ-\alpha)}$;

5) $\frac{\cos2\alpha}{1+\operatorname{sen}2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

6) $\frac{\cos^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$;

7) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\frac{1-\operatorname{sen}4x}{1+\operatorname{sen}4x}$;

8) $\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

9) $\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1+\cos x$;

10) $2\cos^2y+\cos y-1=2\cos\frac{3y}{2}\cos\frac{y}{2}$;

11) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$, si $x+y+z=\pi$;

12) $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

7. Dados $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{4}$, α y β son ángulos agudos; hallar:

1) $\operatorname{sen}(2\alpha+2\beta)$; 2) $\cos 2(\alpha-\beta)$.

8. Calcular $\cos 2x$, si el ángulo x satisface la correlación

$\operatorname{tg}^2 x-a\operatorname{tg}x+1=0$; $0<x<\frac{\pi}{4}$.

9. Resolver las ecuaciones:

1) $3\operatorname{sen}x=2\cos^2 x$;

2) $\operatorname{sen}x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$;

3) $\operatorname{sen}2x=\cos 2x$;

4) $\operatorname{sen}2x=(\cos x-\operatorname{sen}x)^2$;

5) $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{sen}(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$;

7) $\operatorname{sen}2x\cos x+\cos 2x\operatorname{sen}x=0$;

8) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$;

9) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2 x$;

10) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=0$;

11) $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=$
$=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

12) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+$
$+2\cos x+2=0$;

13) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right):\operatorname{ctg}x=$
$=\frac{1}{3}$;

14) $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos 2x$;

15) $3\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

10. Calcular sin tablas:

1) $\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{5\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{7\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}7^\circ30'$.

11. Transformar en producto:

1) $1-\operatorname{sen}x+\cos x$;

2) $\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}3a$;

3) $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$;

4) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}(x+y)$;

5) $\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x}$;

6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$.